

**Modelos de un dominio para el flujo de un fluido en la
inter-región medio libre/medio poroso**

Tesis que presenta

M. en C. Roel Hernández Rodríguez

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias (Ingeniería Química)

Iztapalapa, Ciudad de México, 16 de junio de 2023



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA**

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E
INGENIERÍAS**

**POSGRADO EN CIENCIAS (INGENIERÍA
QUÍMICA)**

**Modelos de un dominio para el flujo de un fluido en la inter-región
medio libre/medio poroso**

TESIS

**Que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS (INGENIERÍA QUÍMICA)**

PRESENTA:

**M. en C. Roel Hernández Rodríguez
Matrícula: 2153805257**

ASESOR:

Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

JURADO:

**Presidente: Dr. José de Jesús Álvarez Ramirez
Secretario: Dr. Carlos Omar Castillo Araiza
Vocal: Dr. José Javier Valencia López
Vocal: Dr. Hugo Jiménez Islas
Vocal: Eliseo Hernández Martínez**

Iztapalapa, Ciudad de México, 16 de junio de 2023

Agradecimientos

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONAHCyT) por la beca de doctorado otorgada (CVU: 711177). Esta tesis fue desarrollada gracias al apoyo recibido del proyecto Fondo Sectorial para la Educación apoyada por CONAHCyT (Nombre del proyecto: TRANSPORTE CONVECTIVO DE CALOR Y MASA ENTRE UN FLUIDO Y UN MEDIO POROSO; Número del proyecto: 256231).

Agradecimientos personales

No solo no hubiera sido nada sin ustedes, sino a toda la gente que estuvo al rededor desde el comienzo; algunos siguen hasta hoy. GRACIAS TOTALES.

A mi familia

- Daniela Elvira Torres Herver
- Octavia Rodríguez Martínez
- Jaime Hernández Arroyo
- Brisceida Hernández Rodríguez
- Jaime Hernández Rodríguez

A mis amigos

- Fanny Ingrid Marín Trijullo
- Alberto Hernández Aguirre
- Gabriela Itzel Hernández Salgado
- Alejandro Romero Limones
- Eliseo Hernández Martínez
- Carlos Omar Castillo Araiza

Finalmente, quiero agradecer al Dr. J. Alberto Ochoa Tapia, asesor y amigo, por la oportunidad de participar en este proyecto, por sus enseñanzas, consejos, críticas, regaños y sobre todo, su apoyo.

El jurado designado por la
Comisión Académica del Posgrado de Ingeniería Química
de la Unidad Iztapalapa, aprobó la tesis que presentó
ROEL HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ
El día **16 de junio** del año **2023**

Miembros del Jurado

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez
Presidente

Dr. Carlos Omar Castillo Araiza
Secretario

Dr. José Javier Valencia López
Vocal

Dr. Hugo Jiménez Islas
Vocal

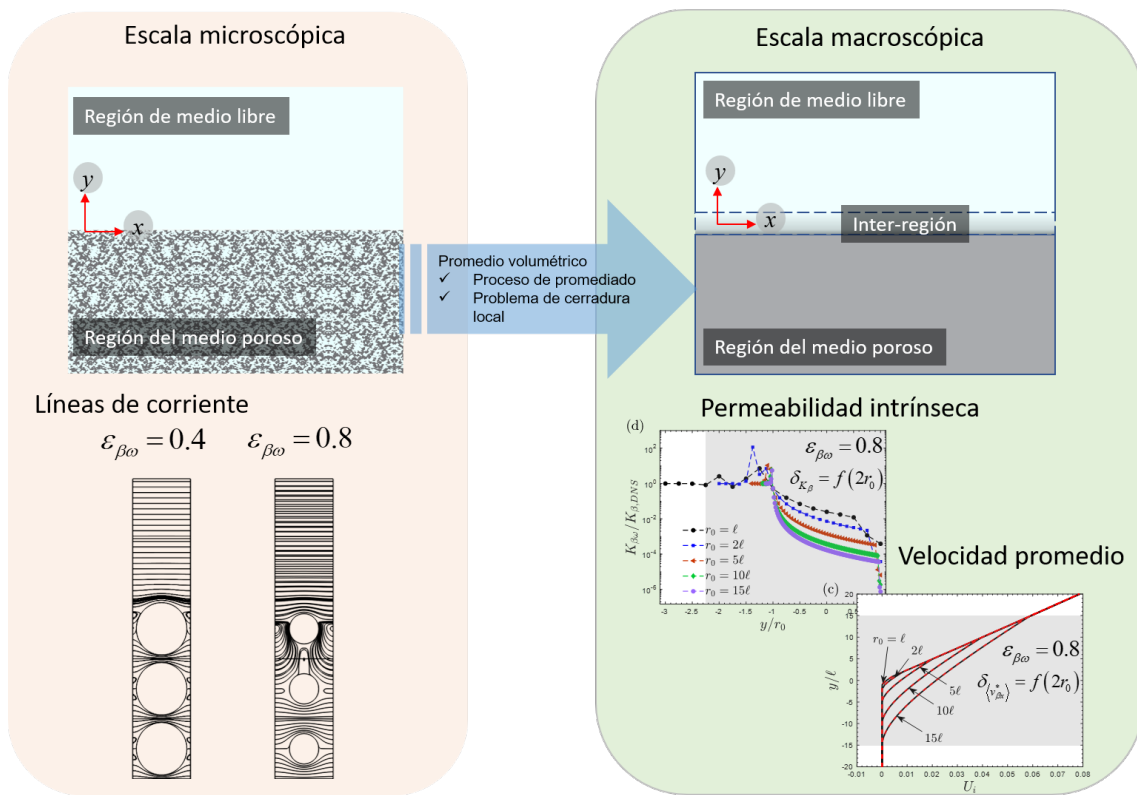
Dr. Eliseo Hernández Martínez
Vocal

Resumen

En numerosas aplicaciones de ingeniería y sistemas naturales el flujo de un fluido sucede entre un medio libre y un medio poroso. En tales sistemas, el flujo del fluido en la región de la frontera (inter-región) entre el medio libre y el medio poroso puede determinar el flujo en las regiones homogéneas, es decir, las porciones de ambas regiones localizadas fuera de la región de la frontera. Esto a su vez, puede influenciar y determinar a la transferencia de calor y masa entre ambas regiones, cantidades que frecuentemente se presentan a la par, y pueden determinar el desempeño de las aplicaciones de ingeniería y el curso de los sistemas naturales. El modelado mediante modelos macroscópicos puede ayudar a entender la influencia del flujo en la región de frontera sobre el flujo en todo el sistema compuesto, y describir y entender mejor a la transferencia de masa y calor en el mismo. Sin embargo, hasta hoy en día, existe ambigüedad en cómo modelar macroscópicamente el flujo del fluido en la inter-región. En específico, numerosos trabajos han sugerido incluir términos adicionales en las ecuaciones gobernantes, tal como una corrección de Brinkman a la ley de Darcy e incluso dos correcciones de Brinkman. A pesar de que numerosos esfuerzos se han reportado en la literatura para desarrollar ecuaciones macroscópicas para ello, no existe una ecuación acordada que aplique en esta región. En este trabajo, usando del método del promedio volumétrico se derivan las ecuaciones de transporte generalizadas de masa total y de cantidad de movimiento para describir el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso. En específico, la ecuación de la transferencia de cantidad de movimiento incluye coeficientes efectivos dependientes de la posición, dos términos viscosos en lugar de uno, referidos como la primera y la segunda corrección de Brinkman, y un término de Darcy que involucra una permeabilidad dependiente de la posición. Las predicciones de los coeficientes efectivos, que cierran a las ecuaciones, se realizan mediante el desarrollo y solución, en dominios representativos de la región de frontera, de problemas de valor a la frontera auxiliares asociados. Además, estas predicciones se hacen mediante una metodología híbrida basada en definiciones obtenidas en el desarrollo de los problemas auxiliares y de información proveniente de la escala de poro. Ambos tipos de predicciones se obtienen considerando varias estructuras de medios porosos. Finalmente, la precisión de las ecuaciones se evalúa al comparar los perfiles promedio resultantes de su solución con los obtenidos de promediar los campos locales que surgen de desarrollar simulaciones a la escala poro. Los resultados muestran por primera vez que, para describir de manera precisa a la transferencia de cantidad de movimiento de un fluido, en cualquier parte de un sistema compuesto por un medio libre y un medio poroso, las ecuaciones de transporte generalizadas de cantidad de movimiento deben incluir dos correcciones de Brinkman en lugar de una. Además, elucidan que las ecuaciones deben incluir un término con la forma de la ley de Darcy, pero considerando variaciones espaciales de la permeabilidad intrínseca y la permeabilidad aparente para el flujo reptante e inercial de un fluido, respectivamente. Esta investigación corrobora y da soporte a la ecuación de Darcy-Brinkman, propuesta ya hace más de setenta años, cuya validez ha sido un tema de gran debate en la literatura. Más aún, expone que la corrección de Brinkman no solo es aplicable para medios porosos con porosidades del seno del medio poroso cerca de la unidad, tal como se propuso originalmente. Cabe enfatizar que, incluir o no tales términos adicionales en la región de frontera, conduce a predicciones erróneas del flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso, y por consiguiente, podría introducir errores en la predicción

de la transferencia de masa y calor en los mismos sistemas.

Resumen gráfico



Índice general

1	Introducción	1
2	Antecedentes	5
2.1	Flujo de un fluido en el seno de un medio poroso	5
2.1.1	Ecuación de Darcy	5
2.1.2	Ecuación de Darcy-Brinkman	6
2.1.3	Ecuación de Darcy-Forchheimer	8
2.1.4	Ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer	9
2.2	Flujo de un fluido en dominios compuestos por un medio libre y un medio poroso	9
2.2.1	Modelos de dos dominios	13
2.2.2	Modelo de un dominio	22
2.3	Flujo a través de un canal parcialmente lleno con un medio poroso	26
2.4	Tamaño de la capa de Brinkman entre un medio libre y un medio poroso	27
2.5	Variaciones espaciales de los coeficientes efectivos	29
2.6	Condiciones de salto de transferencia de masa	30
2.7	Métodos de escalamiento	31
2.7.1	Método de homogenización espacial	31
2.7.2	Método del promedio volumétrico	32
2.7.3	Teoría del promediado termodinámicamente restringida	33
2.8	Identificación del problema de investigación	34

3	Pregunta de investigación, hipótesis y objetivos	35
3.1	Pregunta de investigación	35
3.2	Hipótesis	35
3.3	Objetivos	35
3.3.1	General	35
3.3.2	Particulares	35
4	Flujo de Stokes entre regiones homogéneas	37
4.1	Planteamiento del problema	38
4.1.1	Definición del sistema y de las ecuaciones gobernantes en la microescala	38
4.2	Perfiles de velocidad promedio	41
4.2.1	Simulaciones a la escala de poro	41
4.2.2	Promediado de la velocidad local	46
4.2.3	Comparación con geometrías simples del medio poroso	48
4.2.4	Promedios de volumen y de línea	51
4.3	Influencia del flujo de un fluido en una región sobre el otra	53
4.3.1	El perfil de velocidad en la región de medio libre no perturbada	54
4.4	Relación entre el tamaño de la capa de Brinkman y la raíz cuadrada de la permeabilidad del seno del medio poroso	56
4.5	Discusión de resultados	57
4.6	Conclusiones del capítulo	62
5	Modelo de un dominio de flujo de Stokes	65
5.1	Definición del sistema y de las ecuaciones en la microescala	66
5.1.1	Planteamiento del problema	66
5.2	Desarrollo de las ecuaciones promedio	67
5.2.1	Operadores de promediado	67
5.2.2	Ecuación continuidad promedio	68
5.2.3	Ecuación promedio de cantidad de movimiento	69
5.3	Predicción de coeficientes efectivos exactos	70
5.3.1	Simulaciones a la escala de poro	71
5.3.2	Variaciones espaciales del término no homogéneo $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$	73
5.3.3	Variaciones espaciales de la porosidad $\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$	75
5.4	Solución del modelo de un dominio I	75
5.4.1	Velocidad promedio obtenida de las simulaciones a la escala de poro	76
5.4.2	Velocidad promedio predicha a partir del modelo de un dominio	76
5.5	Contribuciones de la primera y la segunda correcciones de Brinkman	80
5.6	Resumen del capítulo	83

6	Problema de cerradura de flujo de Stokes	85
6.1	Planteamiento del problema	86
6.2	El problema de cerradura local	86
6.3	Ecuaciones de transferencia generalizadas cerradas	88
6.4	Solución del modelo de un dominio II	89
6.4.1	Variaciones espaciales de K_β de la solución del problema de cerradura local	89
6.4.2	Solución del modelo de un dominio	91
6.5	Solución del modelo de un dominio III	96
6.5.1	Predicciones de K_β a partir de simulaciones a la escala de poro	96
6.5.2	Solución del modelo de un dominio	97
6.6	Otras alternativas para predecir a las variaciones espaciales de K_β	101
6.7	Efecto del tamaño de partícula variable en las variaciones espaciales de K_β	103
6.8	Discusión de resultados	106
6.9	Resumen del capítulo	109
7	Modelo de un dominio de flujo inercial	111
7.1	Definición del sistema y las ecuaciones en la microescala	111
7.2	Desarrollo de las ecuaciones promedio	113
7.2.1	Operadores de promediado	113
7.2.2	Ecuación promedio de continuidad	113
7.2.3	Ecuación promedio de cantidad de movimiento	113
7.3	Problema de cerradura local	114
7.4	Ecuaciones macroscópicas cerradas	115
7.5	Predicción de los coeficientes efectivos	116
7.5.1	Simulaciones a la escala de poro	117
7.5.2	Coefficiente de permeabilidad aparente H_β y de inercial total C_β	121
7.6	Solución del modelo de un dominio	124
7.7	Comparación con otros modelos	126
7.8	Resumen del capítulo	130
8	Conclusiones	133
	Apéndice A. Problema de cerradura de flujo de Stokes	139
	Apéndice B. Problema de cerradura de flujo inercial	145
	Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto	149
C.1	Predicción de los términos promedio	149

C.2	Solución del modelo de un dominio de flujo inercial abierto	151
C.3	Contribución de los términos de la ecuación de transporte generalizada	152
	Bibliografía	157

Nomenclatura

$\mathcal{A}_{\beta\sigma,M}$	área interfacial fluido-sólido en todo el medio poroso
$\mathcal{A}_{\beta\sigma}$	área interfacial fluido-sólido contenida en la región de promediado, \mathcal{V}
\mathbf{b}_{β}	variable de cerradura que mapéa a $\mu_{\beta}\langle\mathbf{v}_{\beta}\rangle^{\beta}$ en \tilde{p}_{β} , m^{-1}
\mathbf{B}_{β}	variable de cerradura que mapéa a $\langle\mathbf{v}_{\beta}\rangle^{\beta}$ en $\tilde{\mathbf{v}}_{\beta}$
$\mathbf{C}_{\beta}(\mathbf{x})$	tensor de inercia total dependiente de la posición
C_{β}	componente $C_{\beta yxx}$ del tensor de inercia total dependiente de la posición
C	magnitud de la caída de presión macroscópica, Pa m^{-1}
C^*	magnitud de la caída de presión macroscópica adimensional
d_{λ}	distancia de efecto de la región- λ sobre la otra ($\lambda = \eta, \omega$), m
$\mathbf{f}_{\beta}(\mathbf{x})$	término no homogéneo de la GTE, N m^{-3}
$f_{\beta x}(y)$	componente x del término no homogéneo de la GTE, N m^{-3}
\mathbf{g}	vector de gravedad, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\mathbf{H}_{\beta}(\mathbf{x})$	tensor de permeabilidad aparente dependiente de la posición, m^2
$H_{\beta}(y)$	componente $H_{\beta xx}$ del tensor de permeabilidad aparente dependiente de la posición, m^2
$\mathbf{H}_{\beta\omega}$	tensor de permeabilidad aparente del seno de la región- ω , m^2
$H_{\beta\omega}$	componente $H_{\beta xx}$ del tensor de permeabilidad aparente del seno de la región- ω , m^2
h_{λ}	longitud característica de la región- λ ($\lambda = \eta, \omega$) que forma parte del dominio de solución del problema de cerradura local, m
\mathbf{I}	tensor identidad
$\mathbf{K}_{\beta}(\mathbf{x})$	tensor de permeabilidad intrínseco dependiente de la posición, m^2
$K_{\beta}(y)$	componente $K_{\beta xx}$ del tensor de permeabilidad intrínseco dependiente de la posición, m^2

$\mathbf{K}_{\beta\omega}$	tensor de permeabilidad del seno de la región $-\omega$, m^2
$K_{\beta\omega}$	componente $K_{\beta,xx}$ del tensor de permeabilidad intrínseco del seno de la región $-\omega$, m^2
L_λ	longitud característica de la región $-\lambda$ ($\lambda = \eta, \omega$), m
ℓ	longitud característica del lado una celda unitaria, m
ℓ_j	longitud característica de la fase $-j$ ($j = \sigma, \beta$) en la celda unitaria que compone a la región $-\omega$, m
$m_\beta(\mathbf{r})$	función indicadora de fase
n_0	número de celdas unitarias contenidas en la región de promediado
$\mathbf{n}_{\beta\sigma}$	vector normal unitario dirigido de la fase $-\beta$ a la fase $-\sigma$
O	del orden de
p	presión local adimensional de la fase $-\beta$
p_β	presión local de la fase $-\beta$, N m^{-2}
p_β^*	presión local adimensional de la fase $-\beta$, N m^{-2}
\tilde{p}_β	desviaciones espaciales de la presión local de la fase $-\beta$, N m^{-2}
p_{ref}	presión de referencia, N m^{-2}
\mathbf{r}	vector de posición de la fase $-\beta$, m
r_0	longitud característica de la región de promediado \mathcal{V} , m
\mathbf{u}	vector de velocidad local adimensional de la fase $-\beta$
U_i	relación de las componentes tangenciales de la velocidad promedio adimensional y la velocidad promedio adimensional máxima
\mathbf{v}_β	vector de velocidad local de la fase $-\beta$, m s^{-1}
\mathbf{v}_β^*	vector de velocidad local adimensional de la fase $-\beta$
$\tilde{\mathbf{v}}_\beta$	desviaciones del vector de velocidad local de la fase $-\beta$ m s^{-1}
v_{ref}	velocidad de referencia, m s^{-1}
v_{\max}^λ	velocidad local máxima de la región $-\lambda$ ($\lambda = \eta, \omega$), m s^{-1}
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\omega, \infty}$	velocidad de Darcy, m s^{-1}
V	volumen de la región de promediado, m^3
V_j	volumen de la fase $-j$ ($j = \beta, \sigma$) contenida en la región de promediado \mathcal{V} , m^3
\mathcal{V}	región de promediado
\mathcal{V}_j	región de la fase $-j$ ($j = \beta, \sigma$) contenida en la región de promediado \mathcal{V}
\mathbf{x}	vector de posición que localiza el centroide de la región de promediado \mathcal{V} , m
x	coordenada horizontal, m
X	coordenada horizontal adimensional
\mathbf{y}_β	vector de posición que localiza a la fase $-\beta$ relativo al centroide de la región de promediado \mathcal{V} , m
y	coordenada vertical, m
Y	coordenada vertical adimensional
<i>Símbolos especiales</i>	
$\langle \Psi_\beta \rangle$	promedio superficial de alguna cantidad arbitraria Ψ_β
$\langle \Psi_\beta \rangle_\lambda$	promedio superficial de alguna cantidad arbitraria Ψ_β de la región $-\lambda$ ($\lambda = \eta, \omega$)

$\langle \psi_\beta \rangle^\beta$ promedio intrínseco de alguna cantidad arbitraria ψ_β
 $\langle \psi_\beta \rangle_\lambda^\beta$ promedio intrínseco de alguna cantidad arbitraria ψ_β de la región- λ ($\lambda = \eta, \omega$)

Símbolos griegos

β fase fluida
 σ fase sólida
 δ_B espesor de la capa límite de Brinkman, m
 δ_{K_β} espesor de la zona de cambios de K_β , m
 δ_{H_β} espesor de la zona de cambios de H_β , m
 $\delta_{\varepsilon_\beta}$ espesor de la zona de cambios de ε_β , m
 μ_β viscosidad dinámica de la fase- β , N s m⁻²
 μ_{eff} viscosidad efectiva, N s m⁻²
 ρ_β densidad de la fase- β , kg m⁻³
 ε_β fracción volumétrica de la fase- β en cualquier punto del sistema
 $\varepsilon_{\beta\omega}$ fracción volumétrica de la fase- β en la región- ω
 ψ_β función arbitraria asociada a la fase- β
 λ región- λ ($\lambda = \omega, \eta$)

Acrónimos

GTE Generalized Transport Equation
ODA One-Domain Approach
TDA Two-Domain Approach
PCL Problema de Cerradura Local
PSS Pore-Scale Simulation

1. Introducción

El flujo de un fluido sobre y a través de un medio poroso está presente en muchas aplicaciones de la ingeniería y en ejemplos medioambientales. Por ejemplo, el flujo en reactores de lecho empacado, procesos de secado, intercambiadores de calor no convencionales, sistemas de aislamiento térmico, subsuperficie terrestre, zona béntica en cuerpos de agua, dosel arbóreo, por decir algunos. El modelado del flujo en este tipo de sistemas compuestos ha sido el objeto de estudio de numerosas investigaciones durante los últimos sesenta años. La causa de ello consiste en que el flujo del fluido puede determinar a la transferencia calor y masa entre la región del medio libre y del medio poroso, lo cual a su vez puede influenciar o determinar el desempeño de tales aplicaciones. Esto ha motivado a desarrollar modelos que puedan proporcionar descripciones cada vez más precisas y más generales del flujo de un fluido, y por consiguiente de la transferencia de calor y masa.

Debido a la estructura compleja de un medio poroso y a la disparidad de longitudes características asociadas, el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso se estudia usualmente mediante modelos macroscópicos en términos de ecuaciones de medio efectivo. Estas ecuaciones contienen coeficientes efectivos que incorporan el efecto de la microestructura del medio poroso en la descripción macroscópica. En general, en las porciones homogéneas de ambas regiones (*i. e.*, el bulk o seno de ambas regiones), los coeficientes efectivos son constantes. En contraste, en la zona de transición entre ambas regiones (*i. e.*, la inter-región medio libre/medio poroso), los coeficientes efectivos varían rápidamente con la posición (Khalili *et al.*, 2014, 2018). Por consiguiente, una descripción completa del flujo de un fluido en este tipo de sistemas, requiere no solo considerar el efecto de la microestructura de las porciones homogéneas, sino también de la inter-región entre ellas. Para llevar a cabo esto, existen dos modelos alternativos, los cuales se conocen como los modelos de uno y dos dominios (Goyeau *et al.*, 2003; Luminari *et al.*, 2019).

Por un lado, un modelo de dos dominios (TDA por sus siglas en inglés) considera que un sistema medio libre/medio poroso se compone por dos regiones homogéneas, en las cuales el transporte

se describe mediante una ecuación promedio escalada con coeficientes constantes, mientras que la inter-región se reemplaza por una superficie divisoria. Además, requiere de condiciones de frontera de salto para acoplar a las ecuaciones en la superficie divisoria, las cuales contienen coeficientes de salto que dependen de la microestructura del medio poroso en la inter-región y de la posición de la superficie divisoria (Beavers and Joseph, 1967; Ochoa-Tapia and Whitaker, 1995a,b; Valdés-Parada *et al.*, 2013). El desarrollo de un TDA para describir el flujo de un fluido en un sistema medio libre/medio poroso ha recibido mucha más atención que el de un modelo de dominio (ODA por sus siglas en inglés). De hecho, es más común encontrar el modelado del flujo en un sistema medio libre/medio poroso mediante un TDA que un ODA. Esto se debe a que este modelo involucra dos ecuaciones de medio efectivo con coeficientes efectivos constantes, haciéndolo más atractivo Aguilar-Madera *et al.* (2011a,b). Sin embargo, este tipo de modelo presenta dos problemas importantes hasta hoy en día: (i) aún es necesario definir y establecer las ecuaciones que se deben utilizar en todo el medio poroso y (ii) se desconocen la o las condiciones de frontera de salto que se deben aplicar en la superficie divisoria. El primer problema se relaciona con el hecho de que el medio poroso completo se considera que es homogéneo hasta la superficie divisoria, incluyendo la porción del medio poroso contenida en la inter-región medio libre/medio poroso. Esto ha dado lugar a una gran controversia, ya que diversos trabajos implícitamente indican que la ecuación gobernante en todo el medio poroso debe ser la ley Darcy, mientras que varios otros indican que debe ser la ecuación de Darcy-Brinkman. El segundo problema se relaciona directamente con el primero. Esto se debe a que, si en todo el medio poroso se utiliza a la ley Darcy, es necesario desarrollar una sola condición de salto para acoplarla con la ecuación válida en el medio libre, mientras que si se utiliza a la ecuación de Darcy-Brinkman, es necesario desarrollar dos condiciones de frontera de salto para el mismo fin.

Por otro lado, un modelo de un dominio (ODA por sus siglas en inglés) visualiza a un sistema medio libre/medio poroso como una fase pseudo-continua, donde el transporte se describe mediante una ecuación de transporte generalizada (*i. e.*, GTE por sus siglas en inglés), ya que considera explícitamente a las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos. A diferencia del desarrollo de un TDA, el de un ODA ha recibido menor atención, incluso cuando un ODA posee ventajas con respecto a un TDA. En particular, en un ODA no se requiere el desarrollo de condiciones de frontera en la superficie divisoria, lo cual evita, a su vez, predecir tanto a los coeficientes de salto y a la posición de la superficie divisoria. Además, puede proporcionar una descripción más precisa del flujo que un TDA, ya que no precisa de reemplazar a la inter-región por una superficie divisoria. Más aún, la implementación de un ODA es mucho más sencilla que la de un TDA, razón por la cual ha sido utilizado frecuentemente en softwares comerciales (Inc, 2003; Ansys, 2009; Cd-Adapco, 2017; Cimolin and Discacciati, 2013). Sin embargo, aun con esto, el desarrollo de un ODA padece de tres problemas hasta hoy en día, los cuales podrían explicar porque su desarrollo ha recibido menor atención. En primer lugar, aun es necesario desarrollar y establecer las GTEs que deben utilizarse en un ODA, con el fin obtener predicciones del flujo lo más cercanas posible a la realidad, ya que existen una gran variedad de GTEs, incluso para un mismo sistema. Segundo, aún se desconocen cómo deben ser y como predecir las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, principalmente en la inter-región entre un medio libre y un medio poroso, lo cual hasta ahora ha conducido a utilizar expresiones empíricas para ello. Por último, se desconoce la extensión (δ_{IR}) y localización de la inter-región. Generalmente, se han utilizado modelos de un dominio semiempíricos (Vafai and Tien,

1981, 1982), donde las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos se obtienen a partir de interpolaciones heurísticas entre las propiedades de cada región homogénea, conduciendo así a la forma cerrada de las ecuaciones. Sin embargo, estos modelos no garantizan una descripción precisa del flujo del fluido en todos lados de un sistema medio libre/medio poroso.

Con base en lo anterior, este trabajo de investigación tiene los siguientes objetivos:

- Analizar la extensión y forma de la capa de Brinkman entre un medio libre y un medio poroso para así mostrar la pertinencia de las correcciones de Brinkman a la ley de Darcy.
- Desarrollar y validar las GTEs para la transferencia de cantidad de movimiento del flujo reptante e inercial de un fluido entre un medio libre y medio poroso.
- Analizar el alcance y limitaciones de un problema de cerradura local (PCL) utilizado para predecir las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos en la inter-región entre un medio libre y un medio poroso.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presenta la revisión bibliográfica de los trabajos más sobresalientes para esta investigación. Esta revisión se divide en dos partes, en los trabajos enfocados a describir la transferencia de cantidad de movimiento de un fluido en el seno de un medio poroso y en dominios compuestos por un medio libre y un medio poroso. La segunda parte, a su vez se divide en aquellos trabajos que utilizan un TDA y un ODA. Además, se revisan los trabajos experimentales y aquellos que utilizan simulaciones numéricas a la escala de poro (PSS por sus siglas en inglés) para estudiar el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso. Asimismo, se describen algunos métodos de escalamiento para el desarrollo de ecuaciones de medio efectivo. Por otro lado, en el capítulo 3 se presenta la pregunta de investigación, la hipótesis y los objetivos, tanto el general como los particulares.

Posteriormente, el capítulo 4 está dirigido a determinar y analizar la extensión y forma de la capa de Brinkman en la inter-región entre un medio libre y un medio poroso. Esto se lleva a cabo calculando los perfiles de velocidad promedio en un sistema compuesto por un medio libre y un medio poroso, los cuales se obtienen de promediar perfiles de velocidad local resultantes de realizar PSS. Por su parte, en el capítulo 5 se desarrolla y valida una primera forma de las GTEs para la transferencia de cantidad de movimiento del flujo reptante entre un medio libre y un medio poroso. El proceso de cerradura se realiza utilizando información proveniente de PSSs. Subsecuentemente, el capítulo 6 se enfoca en el desarrollo de GTEs cerradas para la transferencia de cantidad de movimiento del flujo reptante entre un medio libre y un medio poroso. El proceso de cerradura se lleva a cabo mediante el desarrollo de un PCL, el cual permite definir y predecir coeficientes efectivos. Además, se propone una metodología para predecir a dichos coeficientes a partir de perfiles locales proveniente de PSSs. Por otro lado, el capítulo 7 aborda el desarrollo de las GTEs para la transferencia de cantidad de movimiento del flujo inercial entre un medio libre y un medio poroso. Análogamente al capítulo 6, en este se lleva a cabo el proceso de cerradura mediante el desarrollo de PCL asociado y así como de información local obtenida de PSSs. Por último, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones generales y perspectivas de este trabajo. Además, se exhibe la lista de referencias utilizadas a lo largo del trabajo, la nomenclatura y los apéndices con material complementario.

Productos derivados durante el doctorado

Artículos publicados

Los resultados encontrados en el desarrollo de esta investigación fueron publicados como artículos en revistas indizadas. Los artículos derivados de esta investigación son

- **Hernandez-Rodriguez R.**, Goyeau, B., Angot, P., & Ochoa-Tapia, J. A. (2021). Average velocity profile between a fluid layer and a porous medium: Brinkman boundary layer Perfil de velocidad promedio entre una capa de fluido y un medio poroso: La capa limite de Brinkman. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 20(1), 51-76. DOI: 10.24275/rmiq/Fen843
- **Hernandez-Rodriguez R.**, Angot, P., Goyeau, B., & Ochoa-Tapia, J. A. (2022). Momentum transport in the free fluid-porous medium transition layer: one-domain approach. *Chemical Engineering Science*, 248, 117111. DOI: 10.1016/j.ces.2021.117111

Por otro lado, el conocimiento adquirido durante en esta investigación se extendió para desarrollar los siguientes artículos que serán sometidos en revistas indizadas para su publicación correspondiente

- **Hernandez-Rodriguez R.**, Luévano-Rivas, O. A., & Ochoa-Tapia, J. A. (2022). One domain approach for immiscible two-phase dispersed flow near porous media boundaries. En última versión.
- Hernandez-Aguirre, A., Castillo-Araiza, C. O., Ochoa-Tapia, J. A., & **Hernandez -Rodriguez, R.** (2022). A Generalized Pseudo-Continuous Model for Modeling Single-Phase Flow in a Packed Bed Reactor with a low d_t/d_p . En preparación.

Participaciones en foros académicos

Los resultados encontrados durante el desarrollo de esta investigación se presentaron en los siguientes congresos nacionales e internacionales:

- **Hernandez-Rodriguez R.**, Callejas-Quiroz, F., Cárdenas, J. P., y Ochoa-Tapia J. A. (2018). Flujo en la inter-región fluido/medio poroso con distribución variable de tamaño de poro. XXXIX Encuentro Nacional de la AMIDIQ, San José del Cabo, BCS.
- **Hernandez-Rodriguez R.**, Ochoa-Tapia J. Alberto, Goyeau, B. y Angot, P. (2018). Modelo de un dominio para la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de fluido y un medio poroso. XXXIX Encuentro Nacional de la AMIDIQ, San José del Cabo, BCS.
- **Hernandez-Rodriguez R.**, Angot, P. , Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2018). Average velocity profile in a channel partially filled with a porous medium. InterPore2018, New Orleans, USA.
- **Hernandez-Rodriguez R.**, Angot, P. , Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2018). Average velocity profile in a channel partially filled with a porous medium. 1st CBI Students' Meeting, CDMX, México.

2. Antecedentes

En este capítulo se presenta una revisión de los trabajos más relevantes relacionados con la presente investigación. En la primera parte se exponen los trabajos enfocados a modelar el flujo de un fluido en el seno de un medio poroso y en la segunda a aquellos enfocados a modelarlo en sistemas compuestos por un medio poroso y un medio libre. En esta última se revisan los trabajos dirigidos a desarrollar, empírica o sistemáticamente, los modelos conocidos como TDA y ODA. Posteriormente, se revisa la importancia de estudiar el flujo de un fluido a través de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso, ampliamente utilizado en la literatura para caracterizar el flujo de un fluido alrededor de la frontera entre un medio poroso y un medio libre. Por último, se revisan algunos métodos de escalamientos enfocados a desarrollar ecuaciones de medio efectivo para el estudio de fenómenos de transporte en sistemas multifásicos y de naturaleza jerárquica, en el sentido de Whitaker (2009).

2.1 Flujo de un fluido en el seno de un medio poroso

2.1.1 Ecuación de Darcy

El flujo de un fluido en medios porosos es de gran interés en muchas aplicaciones de la ingeniería química, y su estudio se lleva a cabo usualmente mediante ecuaciones de conservación macroscópicas, promedio o de medio efectivo. En particular, el flujo de reptante, incompresible y estacionario de un fluido Newtoniano a través de un medio poroso rígido y homogéneo, se describe frecuentemente utilizando a la ley de Darcy, la cual en forma vectorial se expresa como

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega = -\frac{\mathbf{K}_{\beta\omega}}{\mu_\beta} \cdot \left(\nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta - \rho_\beta \mathbf{g} \right) \quad (2.1)$$

donde μ_β es la viscosidad dinámica del fluido, ρ_β es la densidad del fluido, $\mathbf{K}_{\beta\omega}$ es el coeficiente permeabilidad intrínseca del seno del medio poroso, el cual es un tensor de segundo orden, $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega$ es el promedio superficial de la velocidad del seno del medio poroso (también conocida como la

velocidad de filtración o velocidad de Darcy), $\langle p_\beta \rangle_\omega^\beta$ es el promedio intrínseco de la presión y \mathbf{g} es el vector de gravedad. Las cantidades promedio se definen como el promedio de su contraparte en la escala microscópica (escala poroso) con respecto de una región de promediado (*i. e.*, un elemento de volumen representativo), tal como se muestra en las siguientes definiciones

$$\langle \varphi \rangle |_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_\beta(\mathbf{x})} \varphi |_{\mathbf{r}} dV, \quad \varphi = p_\beta, \mathbf{v}_\beta \quad (2.2a)$$

$$\langle \varphi \rangle^\beta |_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{V}_\beta(\mathbf{x})} \varphi |_{\mathbf{r}} dV \quad (2.2b)$$

las cuales se relacionan mediante la ecuación de Dupuit-Forchheimer como $\langle \varphi \rangle |_{\mathbf{x}} = \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \varphi \rangle^\beta |_{\mathbf{x}}$, donde $\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = V_\beta/V$ es la porosidad o la fracción de fluido contenido en la región de promediado.

Una de las principales suposiciones en la ley de Darcy es que el número de Reynolds, basado en el diámetro de partícula ℓ_σ , o de poro ℓ_β , es suficientemente pequeño (*i. e.*, $Re_p < 1$). Esta es una situación que se encuentra usualmente en medios porosos con relativamente baja porosidad. Cabe mencionar que la forma unidimensional de la Ec. (2.1) se desarrolló primero empíricamente a través de experimentos por Darcy (1856) y ha sido verificada por numerosos trabajos experimentales (Bear and Cheng, 2010). Además, numerosos trabajos han tratado de desarrollarla teóricamente. Algunos de los primeros intentos fueron proporcionados por (Hubbert, 1940; Irmay, 1958; Matheron, 1965; Whitaker, 1966; Marle, 1967; Slattery, 1967; Whitaker, 1969). Sin embargo, en todos ellos no se proporcionó alguna relación explícita entre la microestructura del medio poroso con el tensor de permeabilidad intrínseca, por lo que se optó por alternativas semi-empíricas disponibles hasta ese momento (Kozeny, 1927; Carman, 1938, 1956).

No fue hasta que Whitaker (1986) presentó una derivación de la ley de Darcy a partir del escalamiento de su contraparte en la escala microscópica usando el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999). Además, desarrolló un problema de valor en la frontera auxiliar, conocido como un *problema de cerradura local (PCL)*, para predecir al tensor de permeabilidad intrínseca, y así incorporar los efectos de la microestructura del medio poroso en la descripción del flujo en la escala macroscópica. Cabe señalar que su desarrollo está limitado a medios porosos homogéneos, pero no necesariamente a medios porosos espacialmente periódicos. Otros trabajos han derivado también a la ley de Darcy a partir de las ecuaciones válidas en la escala de poro usando otras técnicas de escalamiento, tales como el método de homogenización (Auriault, 1987; Mei and Vernescu, 2010; Ene and Polisevski, 2012). En tales casos, la permeabilidad se puede determinar a partir de la solución del problema de la escala microscópica en una celda unitaria del medio poroso con condiciones de periodicidad en todas sus fronteras.

2.1.2 Ecuación de Darcy-Brinkman

Otra opción para describir el flujo reptante de un fluido Newtoniano a través de medio poroso rígido y homogéneo, en la escala macroscópica, es la ecuación de Brinkman (también conocida como la ecuación de Darcy-Brinkman o la ley de Darcy con la corrección de Brinkman). Esta ecuación la propuso empíricamente Brinkman (1949a,b), argumentando que la ley de Darcy sólo considera las

resistencias al flujo de un fluido debido a la presencia del medio poroso y no las relacionadas con los esfuerzos viscosos dentro del mismo fluido, las cuales llegan a ser importantes para valores de la porosidad relativamente grandes. Además, destacó las dificultades que existen a la hora de especificar las condiciones de frontera para acoplar el flujo de un fluido en un medio poroso con el flujo en un medio libre adyacente a este. De esta manera, Brinkman sugirió incluir un término viscoso en la ley de Darcy para obtener

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_{eff} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega - \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \quad (2.3)$$

donde μ_{eff} es la viscosidad efectiva, la cual depende de la viscosidad del fluido y de la microestructura del medio poroso. Diversos esfuerzos se han dedicado a determinar a este coeficiente (Lundgren, 1972; Adler, 1978; Freed and Muthukumar, 1978; Adler and Mills, 1979; Koplik *et al.*, 1983; Kim and Russel, 1985; Larson and Higdon, 1986, 1987; Kolodziej, 1988; Martys *et al.*, 1994; Givler and Altobelli, 1994), aunque hasta ahora no ha sido posible determinarlo de manera exacta. De hecho, inicialmente Brinkman sugirió utilizar a $\mu_{eff} = \mu_\beta$ hasta que mejores alternativas estén disponibles. Una característica sobresaliente de la Ec. (2.3) es que esta se reduce a la ecuación de Stokes para $\mathbf{K}_{\beta\omega} \rightarrow \infty$ o a la ley de Darcy para $\mathbf{K}_{\beta\omega} \rightarrow 0$. Cabe señalar que, Brinkman sugirió que para que su ecuación fuese válida la porosidad del seno del medio poroso debe ser $\varepsilon_{\beta\omega} > 0.6$.

La validez de la ecuación de Darcy-Brinkman ha sido un tema de gran debate en la literatura, tal como se discute en Vafai and Kim (1990, 1995). Por ello, diversos trabajos han tratado de darle una justificación teórica. Por ejemplo, Tam (1969) usó un promedio de ensamble para derivar a la ecuación de Darcy-Brinkman, aunque no proporcionó alguna expresión de μ_{eff} . Similarmente, usando un promedio de ensamble, Lundgren (1972) derivó la ecuación de Darcy-Brinkman para una suspensión de esferas y proporcionó una expresión de la viscosidad efectiva dada por $\mu_{eff} = \mu_\beta / (1 - 2.5(1 - \varepsilon_{\beta\omega}))$. Posteriormente, usando el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999), Whitaker (1986) derivó la ecuación de Darcy-Brinkman, donde $\mu_{eff} = \mu_\beta / \varepsilon_{\beta\omega}$. Además, mostró que se reduce a la ley de Darcy cuando se satisface la disparidad de escalas dada por $\ell^2 \ll L^2$. Años más tarde, Auriault (2009) llevó a cabo un análisis del dominio de validez de la ecuación de Darcy-Brinkman, donde concluyó que esta ecuación puede ser utilizada para describir el flujo en medios porosos formados por partículas no conectadas y medios porosos fibrosos, aunque bajo condiciones muy específicas. Además, llegó a la conclusión de que la ecuación de Darcy-Brinkman no es adecuada para describir el flujo en medios porosos consolidados. Recientemente, usando el método del promedio volumétrico, Minale (2016) derivó una ecuación de Darcy-Brinkman más general para el caso del flujo de un fluido viscoelástico a través de un medio poroso.

Desde otro punto de vista, Nield and Bejan (2006) sugirieron que para muchos propósitos prácticos no es necesario incluir el término viscoso en la ley Darcy, a menos que sea indispensable satisfacer la condición de no deslizamiento en una pared impermeable que limita al medio poroso. En ese caso, Sahraoui and Kaviany (1992) mostraron que la ecuación de Darcy-Brinkman puede describir una zona de transición dentro del medio poroso debido a la presencia de la pared impermeable. Mostraron que el tamaño de la zona de transición es sólo unas cuantas veces el tamaño de partícula ℓ_σ . Por otra parte, y como lo indicó Brinkman en su trabajo, la ecuación de Darcy-Brinkman ha sido ampliamente utilizada para describir el flujo de un fluido en un medio poroso que está en contacto con el flujo del

mismo fluido en un medio libre adyacente, tal como se discute más adelante.

2.1.3 Ecuación de Darcy-Forchheimer

Cuando el Re_p es del orden de la unidad o mayor, la ley de Darcy ya no es válida para describir el flujo de un fluido en un medio poroso, debido a que los efectos inerciales son más importantes que los viscosos. Una mejor ecuación macroscópica para esto es la ecuación de Forchheimer (1901), también conocida como la ecuación de Darcy-Forchheimer o la ecuación de Darcy con la corrección de Forchheimer, la cual para flujo unidireccional está dada por

$$-\frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} = \frac{\mu_\beta}{K} \langle v_\beta \rangle + \beta \rho_\beta \|\langle v_\beta \rangle\| \langle v_\beta \rangle \quad (2.4)$$

donde β es el coeficiente de Forchheimer, también conocido como el coeficiente de resistencia inercial o el factor de resistencia inercial. En la Ec. (2.4), además del término de Darcy, ahora aparece una corrección cuadrática en términos del promedio superficial de la velocidad. Esta ecuación se propuso empíricamente y ha sido heurísticamente extendida en forma vectorial como (Ward, 1964)

$$\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta = -\frac{\mu_\beta}{K} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - C_f \frac{\rho_\beta}{\sqrt{K}} \|\langle \mathbf{v}_\beta \rangle\| \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.5)$$

donde C_f es el factor de fricción o constante de arrastre. Con el fin de dar una justificación a la ecuación de Darcy-Forchheimer, diversos trabajos han llevado a cabo comparaciones experimentales, encontrando un buen ajuste para diferentes tipos de medios porosos (Macdonald *et al.*, 1979; Bear, 2013). Por otro lado, diversos trabajos también han tratado de darle una justificación teórica (Irmay, 1958). No fue hasta que Whitaker (1996) presentó la derivación formal de la ecuación de Darcy-Forchheimer a partir de su contraparte en la escala microscópica mediante el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999), la cual se puede escribir como

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = -\frac{\mathbf{H}_\beta}{\mu_\beta} \left(\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \rho_\beta \mathbf{g} \right) \quad (2.6)$$

o bien como

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = -\frac{\mathbf{K}_\beta}{\mu_\beta} \cdot \left(\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \rho_\beta \mathbf{g} \right) - \mathbf{F}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.7)$$

donde \mathbf{H}_β es un tensor de permeabilidad aparente y \mathbf{F}_β es un tensor de corrección inercial. De acuerdo a esta ecuación, la ecuación macroscópica para el flujo inercial en medios porosos es lineal con respecto a la velocidad en lugar de ser cuadrática. Además, los efectos inerciales son capturados por el tensor de corrección. Análogamente a su trabajo de la ley de Darcy, Whitaker (1999) proporcionó un PCL para predecir a dichos tensores. Cabe mencionar que este desarrollo también está limitado a medios porosos homogéneos, pero no necesariamente espacialmente periódicos. Un análisis del efecto del desorden de la microestructura del medio poroso sobre los efectos inerciales ha sido presentado por Lasseux *et al.* (2011); Agnaou *et al.* (2016, 2017); Wang *et al.* (2019).

2.1.4 Ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer

Siguiendo las ideas de Brinkman, con el fin de incorporar los esfuerzos viscosos en la ecuación macroscópica del flujo de un fluido en medios porosos para cuando el Re_p es del orden de la unidad o mayor, diversos trabajos han sugerido empíricamente añadir el término de Brinkman en la ecuación de Darcy-Forchheimer (ver Ec. (2.4)). Además, varios otros han sugerido incluir un término de acumulación de cantidad de movimiento a esta misma. La ecuación resultante, después de incorporar las contribuciones anteriores, se conoce como la ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer (DBF), la cual se puede expresar como

$$\rho_\beta \frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}{\partial t} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_{eff} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \left(\frac{\mu_\beta}{K} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + C_f \frac{\rho_\beta}{\sqrt{K}} \|\langle \mathbf{v}_\beta \rangle\| \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right) \quad (2.8)$$

Vafai and Tien (1981, 1982) derivaron esta ecuación usando el método del promedio volumétrico, aunque esto sólo fue posible después de cerrar empíricamente a la ecuación promedio resultante con el término de Darcy-Forchheimer, lo que les permitió obtener a

$$\begin{aligned} \varepsilon_\beta^{-1} \rho_\beta \left[\frac{\partial \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right) \right] = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \\ - \left(\frac{\mu_\beta}{K} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + C_f \frac{\rho_\beta}{\sqrt{K}} \|\langle \mathbf{v}_\beta \rangle\| \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Esta ecuación ha sido ampliamente utilizada en la literatura para estudiar el flujo de un fluido en lechos empacados (Vafai and Tien, 1982; Poulikakos and Renken, 1987; Alazmi and Vafai, 2000, 2004), el flujo de un fluido por convección natural en cavidades que contienen medios porosos (Beckermann *et al.*, 1987, 1988; Guo and Zhao, 2005), por mencionar algunos ejemplos. Cabe mencionar que, debido a su naturaleza empírica o semi-empírica, se debe tener cuidado a la hora de utilizarlas, puesto que no garantizan una descripción precisa del flujo en la escala macroscópica. Además, generalmente se desconoce como predecir los coeficientes efectivos que aparecen en dicha ecuación, lo cual ha conducido al uso de expresiones empíricas.

De lo anterior, cabe señalar que aunque se tienen diversas aproximaciones para describir el flujo de un fluido en medios porosos bajo diferentes regímenes de flujo, todos ellos solo son válidos en su seno, es decir, suficientemente lejos de sus fronteras. Sin embargo, en numerosas aplicaciones de ingeniería y sistemas medioambientales, el flujo de un fluido sucede entre un medio poroso y un medio libre adyacente, lo cual requiere acoplar las ecuaciones válidas en el medio poroso con las ecuaciones válidas en el medio libre. Esto precisa encontrar las ecuaciones válidas en la inter-región entre el medio poroso y el medio libre adyacente, tal como se describe en la siguiente sección.

2.2 Flujo de un fluido en dominios compuestos por un medio libre y un medio poroso

El flujo de un fluido en un dominio compuesto por un medio libre (región $-\eta$) y un medio poroso (región $-\omega$), tal como el que se ilustra en la figura 2.1, es un sistema que se encuentra en numerosas aplicaciones de ingeniería y en ejemplos medioambientales. En el primer grupo se sitúan el flujo en, por ejemplo, sistemas de aislamiento térmico, solidificación de metales, cojinetes porosos, reactores

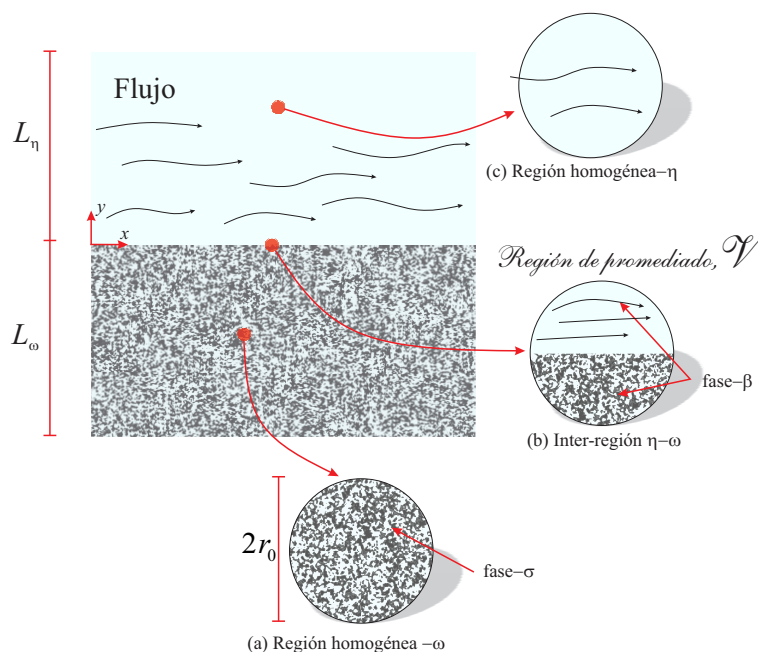


Figura 2.1: Sistema en el que un fluido Newtoniano fluye sobre y a través de un medio poroso. Ejemplos de la muestra (región de promediado, \mathcal{V}) en tres porciones en el sistema: (a) el seno del medio poroso, (b) la inter-región medio libre/medio poroso y (c) el seno del medio libre.

de lecho empacado, reactores de tanque agitado con partículas porosas, intercambiadores de calor no convencionales, silos para el almacenamiento de granos, procesos de secado, por mencionar algunos. En el segundo grupo se encuentra el flujo en, tal como, dosel arbóreo, incendios forestales, arrecifes de coral, mantos acuíferos, y varios otros. Motivados por esto, y debido a su impacto en la transferencia de calor y masa, cuya descripción satisfactoria y eficiente requiere conocer de antemano a la velocidad del fluido, lo cual puede conducir a entender y mejorar a las aplicaciones y procesos antes mencionados, numerosos trabajos académicos se han enfocado en desarrollar modelos para describir el flujo de un fluido en un dominio compuesto por un medio libre y un medio poroso. Sin embargo, hasta hoy en día, no ha sido posible proporcionar un modelo definitivo, que sea práctico y ampliamente aceptado en la literatura, para dicho fin (Sudhakar *et al.*, 2021). Además, hasta donde se conoce, no existe un modelo que pueda describir, sin el uso de coeficientes de transporte empíricos, que sólo funcionan para el sistema en el que fueron determinados, el flujo de un fluido en dichos dominios.

El modelado del flujo de un fluido en un dominio compuesto por un medio libre y un medio poroso se puede llevar a cabo en diferentes niveles de escala de descripción. En la escala microscópica, la escala en donde se distinguen las fases individuales involucradas en el sistema (*i. e.*, fase sólida y fluida), las ecuaciones que gobiernan el flujo del fluido tanto en el medio libre como en los poros dentro del medio poroso son las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes (o Stokes), junto con las condiciones de frontera de no deslizamiento en las superficies sólidas, de entradas y/o salidas del sistema. Sin embargo, debido a que generalmente se desconoce la microestructura de un medio poroso, usualmente no es posible resolver el problema de la escala microscópica para situaciones prácticas. Más aún, incluso si se conociera, a partir de softwares especializados o de técnicas experimentales sofisticadas, debido a la disparidad de longitudes características que existe entre el tamaño de los

poros (ℓ) y el de un medio poroso completo (L), la solución del modelo microscópico es una tarea muy complicada de completar, sino es que imposible, debido al alto costo computacional que involucra. Esto ha motivado a describir el flujo de un fluido en un dominio compuesto por un medio libre y un medio poroso en términos de cantidades promedio, pero que aún proporcionen descripciones lo suficientemente precisas, y a desarrollar modelos para predecir satisfactoriamente a estas cantidades.

En la escala macroscópica, el flujo de un fluido en un dominio compuesto por un medio libre y un medio poroso, al igual que en el seno del medio poroso, se puede describir a través de ecuaciones macroscópicas o de medio efectivo, las cuales, cabe recordar, están expresadas en términos de cantidades promedio y de coeficientes efectivos. Cabe señalar que, estos últimos deben capturar los efectos de la microestructura del medio poroso en la descripción macroscópica del flujo del fluido (Wood and Valdés-Parada, 2013). Para desarrollar estas ecuaciones, de tal manera que proporcionen una descripción del flujo lo más cercana posible a la realidad, se debe tomar en cuenta que un dominio medio libre/medio poroso se compone de tres porciones con propiedades estructurales distintivas (Goyeau *et al.*, 2003; Chandris and Jamet, 2006; Valdés-Parada *et al.*, 2007a; Ochoa-Tapia *et al.*, 2017). Estas porciones son el seno del medio poroso, el seno del fluido y la inter-región medio libre/medio poroso, cuyas características se describen a continuación:

- Por un lado, el seno del medio poroso se refiere a la porción homogénea del medio poroso (porción homogénea de la región $-\omega$), la cual se localiza suficientemente lejos por debajo de la frontera medio libre/medio poroso, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\omega$. Si el medio poroso completo se compone de una fase sólida (fase $-\sigma$) rígida y es homogéneo al nivel de una celda unitaria, esta porción se caracteriza por que los coeficientes efectivos como la porosidad $\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta\omega}$, la permeabilidad $K_\beta = K_{\beta\omega}$ y la velocidad de filtración $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle$ son constantes. Además, la ecuación gobernante del flujo es la ecuación Darcy (o Darcy-Forchheimer), la cual se puede obtener a partir del escalamiento de las ecuaciones en la microescala, tal como se muestra en Whitaker (1999) Auriault (1987), o en Ene and Polisevski (2012).
- Por otro lado, el seno del medio libre se refiere a la porción homogénea del medio libre (porción homogénea de la región $-\eta$), la cual se localiza suficientemente lejos por arriba de la frontera medio libre/medio poroso, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\eta$. En esta porción, la porosidad es igual a la unidad y la permeabilidad adquiere un valor infinito, por lo que también son independientes de la posición o constantes. Además, la ecuación gobernante del flujo es la ecuación de Stokes (o Navier-Stokes).
- Por último, la inter-región entre el medio libre y el medio poroso se refiere a la porción localizada alrededor de la frontera medio libre/medio poroso $\mathbf{x}_\omega \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_\eta$. En esta porción, los coeficientes efectivos y la velocidad promedio experimentan cambios abruptos con la posición, por lo que se puede considerar como la porción heterogénea del sistema de acuerdo a Quintard and Whitaker (1987). Cabe señalar que, incluso cuando el medio poroso es espacialmente periódico al nivel de una celda unitaria, y por consiguiente es homogéneo hasta su frontera a este mismo nivel, los coeficientes y la velocidad promedio aún experimentan cambios abruptos, de su valor en el seno del medio poroso $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\omega$ a aquel en el medio libre $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\eta$. A diferencia de las porciones homogéneas antes mencionadas, describir el flujo en esta porción representa uno de los principales retos en el estudio de este tipo de dominios compuestos hasta hoy en día Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Sudhakar *et al.* (2021). Esto se debe a tres problemas: (i) se desconoce la extensión (por debajo y por arriba de la frontera medio libre/medio poroso) y

localización de esta zona, (ii) se desconocen las ecuaciones macroscópicas que gobiernan el flujo en esta zona y que permitan acoplar a las ecuaciones válidas de las porciones homogéneas, y (iii) se desconocen cómo deben ser las variaciones espaciales de la porosidad y de la permeabilidad intrínseca o aparente en este mismo lugar. Describir el flujo en esta porción es indispensable para obtener una descripción precisa del flujo en todo el dominio compuesto, ya que lo que sucede en esta zona puede influenciar o determinar el flujo en las porciones homogéneas (Neale and Nader, 1974; Ochoa-Tapia *et al.*, 2017). Más aún, debido a su dependencia en los perfiles de velocidad, la descripción precisa del flujo en esta zona es necesaria para describir de la misma forma a la transferencia de calor o masa entre el medio libre y el medio poroso, las cuales, como se mencionó al inicio, son procesos que se pueden presentar a la par en este tipo de dominios compuestos (Ochoa-Tapia *et al.*, 2017).

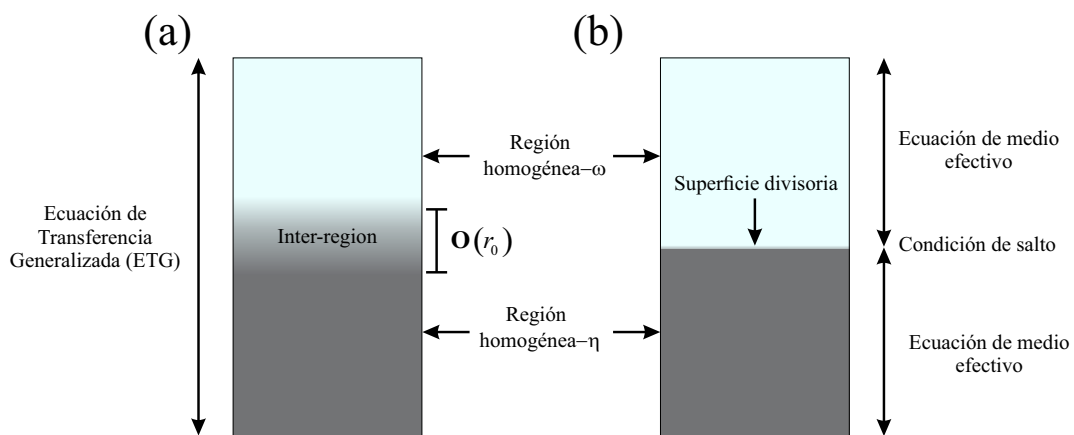


Figura 2.2: Representación de los modelos (a) de uno y de (b) dos dominios para describir el transporte entre un medio libre y un medio poroso.

De esta manera, la descripción en la escala macroscópica del flujo de un fluido en un dominio compuesto por un medio libre y un medio poroso requiere caracterizar el flujo tanto en las porciones homogéneas como en la inter-región. Sin embargo, como se mencionó líneas arriba, esta tarea presenta dificultades en la inter-región hasta hoy en día. Con el fin de resolver estos problemas, entre los estudios reportados en la literatura se pueden encontrar diferentes intentos para desarrollar modelos macroscópicos cada vez más precisos y más generales, los cuales tienen ventajas y desventajas, y se pueden clasificar en dos tipos de modelos: un modelo de un dominio y un modelo de dos dominios (Goyeau *et al.*, 2003; Chandesris and Jamet, 2006, 2007, 2009). Estos modelos se ilustran en la figura 2.2 y sus características se describen a continuación.

- En un modelo de un dominio (ODA, por sus siglas en inglés), un sistema medio libre/medio poroso se considera como una fase pseudo-continua compuesta por dos porciones homogéneas y una zona de transición entre ellas (*i. e.*, la inter-región), tal como se muestra en la figura 2.2(a). En este caso el transporte se describe mediante una sola ecuación macroscópica conocida como *ecuación de transporte generalizada* (GTE por sus siglas en inglés), la cual es válida en todo el sistema, debido a que considera explícitamente las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos. Esto es consecuencia de que en la derivación de dicha ecuación no se involucran, o se involucra un número mínimo de, suposiciones o simplificaciones, las cuales pueden estar fundadas en restricciones de longitudes de escala. De esta manera, en un ODA se requiere

- conocer a la(s) forma de la(s) GTE(s) y la dependencia espacial de los coeficientes efectivos.
- En un modelo de dos dominios (TDA por sus siglas en inglés), un sistema medio libre/medio poroso se considera como una fase pseudo-discontinua compuesta por dos porciones homogéneas separadas únicamente por una superficie divisoria, la cual se localiza en algún lugar de la frontera medio libre/medio poroso, x_0 , tal como se muestra en la figura 2.2(b). El transporte se describe acoplando en la superficie divisoria la(s) ecuación(es) válida(s) en la porción homogénea del medio poroso con la(s) ecuación(es) válida(s) en la porción homogénea del medio libre. Nótese que al hacer esto, una suposición implícita es que el medio poroso y el medio libre son homogéneos hasta la superficie divisoria, por lo que las ecuaciones válidas en las porciones homogéneas se deben utilizar dentro la inter-región. Además, en este modelo se requiere de condiciones de frontera conocidas como *condiciones de salto* para acoplar a las ecuaciones en la superficie divisoria Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b); Goyeau *et al.* (2003); Sudhakar *et al.* (2021). Estas condiciones de salto contienen *coeficientes de salto* que tienen el objetivo de incorporar la influencia de la microestructura del medio poroso de la inter-región en la descripción macroscópica del flujo. De esta manera, en el TDA se requiere desarrollar las condiciones de frontera de salto y predecir los coeficientes de salto asociados.

De lo anterior, se deduce que un ODA puede proporcionar una descripción más precisa del flujo de un fluido en un sistema medio libre/medio poroso que un TDA, ya que en el primero se incluye explícitamente a la inter-región a través de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, mientras que en el segundo la información de la inter-región se incorpora a través de las condiciones de frontera de salto y sus coeficientes en la superficie divisoria. De hecho, siguiendo las ideas de Goyeau *et al.* (2003), la superficie divisoria en el TDA es una representación idealizada de una zona donde las propiedades cambian abruptamente de una zona a otra. Sin embargo, el uso de uno de estos modelos con respecto al otro puede depender de diferentes factores. Por ejemplo, el nivel de descripción requerido del sistema medio libre/medio poroso, la información disponible sobre la microestructura del sistema, e incluso las capacidades computacionales disponibles, por mencionar algunas. Numerosos trabajos se han enfocado en proporcionar empírica o teóricamente un ODA y un TDA. Sin embargo, hasta hoy en día, un ODA y un TDA, que sean prácticos y ampliamente aceptados en la literatura, no han sido proporcionados (Sudhakar *et al.*, 2021). Además, como se mencionó anteriormente, hasta donde se conoce, no existe un modelo que pueda describir, sin el uso de coeficientes de transporte aparentes o empíricos que solo funcionan para el sistema en el que fueron determinados, el flujo de un fluido en un sistema compuesto medio libre/medio poroso. A continuación, se describen algunos de los trabajos más relevantes que proporcionan y hacen uso de un ODA o un TDA para describir el flujo en este tipo de sistemas.

2.2.1 Modelos de dos dominios

El desarrollo de un TDA para describir el flujo de un fluido en sistemas medio libre/medio poroso ha recibido mucha más atención que el de un ODA. De hecho, es más común encontrar el modelado del flujo en un sistema medio libre/medio poroso mediante un TDA que un ODA. Esto se debe a que este modelo involucra dos ecuaciones de medio efectivo con coeficientes efectivos constantes, haciendo que su solución sea más simple de alcanzar, y por consiguiente que sea más atractivo Aguilar-Madera *et al.* (2011b,a). Sin embargo, este tipo de modelo presenta dos problemas

importantes hasta hoy en día: (i) es necesario definir y establecer las ecuaciones que se deben utilizar en todo el medio poroso y (ii) se desconocen la o las condiciones de frontera de salto que se deben aplicar en la superficie divisoria. El primer problema se relaciona con el supuesto de que el medio poroso completo es homogéneo hasta la superficie divisoria, incluyendo la porción del medio poroso ($\mathbf{x}_\omega < \mathbf{x} < \mathbf{x}_0$) contenida en la inter-región medio libre/medio poroso. Esto ha dado lugar a una gran controversia, ya que diversos trabajos implícitamente indican que la ecuación gobernante en todo el medio poroso debe ser la ley Darcy, mientras que varios otros indican que debe ser la ecuación de Darcy-Brinkman. El segundo problema se relaciona directamente con el primero. Esto se debe a que, si en todo el medio poroso se utiliza la ley Darcy, es necesario desarrollar solo una condición de salto para acoplarla con la ecuación válida en el medio libre, mientras que si se utiliza a la ecuación de Darcy-Brinkman, es necesario desarrollar dos condiciones de frontera de salto para el mismo fin.

Uno de los trabajos pioneros sobre el flujo en dominios compuesto por un medio libre y un medio poroso es el de Beavers and Joseph (1967). Estos autores estudiaron, teórica y experimentalmente, los efectos que tiene la microestructura de la frontera de un medio poroso en el flujo de un fluido que pasa sobre y a través de él. Para ello, consideraron un sistema que consiste en el flujo unidireccional y completamente desarrollado de un fluido a través de un canal parcialmente ocupado con un medio poroso, causado por efecto de una caída de presión constante. En el planteamiento teórico, estudiaron el flujo en la escala macroscópica utilizando a la **ecuación Stokes** en la región del medio libre y a **la ley Darcy** en la región del medio poroso. Además, para acoplar a ambas ecuaciones y tratar de incorporar el efecto de la microestructura de la inter-región, propusieron empíricamente una condición de frontera de salto de la velocidad de deslizamiento, la cual tiene la forma de la ley de enfriamiento de Newton. Esta condición de frontera contiene un coeficiente de deslizamiento α , el cual indicaron que es una cantidad adimensional que sólo depende de la microestructura del medio poroso en la inter-región medio libre/medio poroso, aunque esto no se demostró en ese momento. Ajustando el valor de α , dependiendo del material utilizado, encontraron un ajuste satisfactorio de su modelo con las observaciones macroscópicas experimentales, basadas en incrementos de flujos sobre el medio poroso. Los valores encontrados de α fueron 0.78, 1.45 y 4 para espuma de metal (Foametal) y 0.1 para Aloxita (Aloxite). Cabe señalar que, el hecho de obtener diferentes valores de α resalta la importancia que tiene la microestructura del medio poroso en la inter-región sobre el flujo del fluido. Más evidencia experimental de la validez de la condición de frontera de Beavers y Joseph (BJ de aquí en adelante) fue proporcionada posteriormente por Beavers *et al.* (1970, 1974).

El trabajo de BJ fue el punto de partida de numerosas investigaciones acerca del flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso. Por un lado, debido a la utilidad que esta mostró para reproducir datos experimentales y a su origen empírico, varios trabajos se enfocaron en darle una justificación teórica y a determinar el coeficiente de deslizamiento α . Por ejemplo, Taylor (1971), y un trabajo complementario por Richardson (1971), determinaron teórica y experimentalmente el coeficiente de deslizamiento α . Estos autores consideraron el flujo de Couette entre un medio libre y un medio poroso. Para ello consideraron que el medio poroso consiste en una placa ranurada, permitiendo obtener expresiones analíticas de α , a partir de las cuales mostraron que este coeficiente no sólo depende de la microestructura del medio poroso en la inter-región, sino también de la altura del medio libre sobre él. Concluyeron que un incremento de la altura del medio libre genera un decremento del valor de α , hasta alcanzar un valor constante. Al comparar las predicciones teóricas con los datos

experimentales, para porosidades cercanas a uno, estos autores encontraron valores α entre 1.308 y 7. Ese mismo año, utilizando promedio de ensamble y un análisis de tipo de capa límite, Saffman (1971) desarrolló teóricamente la condición de frontera de BJ. En su desarrollo consideró que la velocidad de Darcy es $O(K_{\beta\omega})$, por lo que no aparece en su desarrollo. Además, obtuvo una expresión del coeficiente α en términos de una constante de integración, pero su dependencia con la microestructura de la inter-región no se definió explícitamente. Más aún, mencionó que su valor depende de la posición de la superficie divisoria, \mathbf{x}_0 aún incierta hasta ese momento. Posteriormente, Jones (1973) extendió empíricamente la aplicación de la condición de frontera BJ para flujos bidimensionales entre un medio libre y un medio poroso. Esto se llevó a cabo suponiendo que la condición de BJ es esencialmente una relación que involucra el esfuerzo cortante y no solo la velocidad cortante a la superficie del medio poroso, aunque su extensión de la condición de frontera no fue demostrada.

Aunque los trabajos anteriores mostraron la utilidad del modelo de BJ para predecir observaciones experimentales, este no proporciona alguna información del flujo de un fluido en la inter-región medio libre/medio poroso, ya que no es posible predecir variaciones espaciales de la velocidad promedio a partir la ley de Darcy. De hecho, como se mencionó anteriormente, y como se evidencia en diversos trabajos experimentales (Gupte and Advani, 1997; Goharzadeh *et al.*, 2005; Morad and Khalili, 2009), en la inter-región medio libre/medio poroso la velocidad promedio varía abruptamente del valor en el seno del medio poroso a un valor en la región del medio libre. Cabe señalar que, la porción del perfil de velocidad localizada debajo de la frontera del medio poroso dentro de esta zona de cambios se conoce como *la capa de Brinkman*, y la determinación de su extensión δ_B ha sido un tema de gran debate en la literatura, lo cual puede ayudar a definir la ecuación macroscópica que debe aplicarse en el medio poroso. Una discusión sobre ello se presenta en la §2.4. Esto motivó a Neale and Nader (1974) a utilizar a la **ecuación de Darcy-Brinkman**, en lugar de la ley de Darcy, para describir a el flujo del fluido en el medio poroso y a la **ecuación de Stokes** en el medio libre. Además, estos autores propusieron como condiciones de frontera, con un sentido físico más realista, a la continuidad de la velocidad y del esfuerzo en la superficie divisoria. Interesantemente, al resolver analíticamente su modelo, encontraron expresiones idénticas a las obtenidas por BJ, siempre y cuando que α sea igual a $\sqrt{\mu_{eff}/\mu_{\beta}}$. Aquí, μ_{eff} es la viscosidad efectiva y μ_{β} es la viscosidad cinemática del fluido. De esta manera, concluyeron que la condición de frontera de BJ es una buena aproximación, aunque físicamente incorrecta, para estudiar el flujo de un fluido sobre y a través de un medio poroso cuando el tamaño de la capa de Brinkman puede considerarse despreciable. De lo contrario, indicaron que es necesario utilizar a la **ecuación de Darcy-Brinkman**. Cabe notar que, la principal limitación en el trabajo de Neale and Nader (1974) consiste en el hecho de que todavía no es posible predecir de manera precisa a la μ_{eff} del medio poroso. De hecho, la validez de la **ecuación de Darcy-Brinkman** ha sido un tema de gran debate en la literatura (Vafai and Kim, 1990; Nield, 1991; Vafai and Kim, 1995).

Motivado por extender el trabajo de Whitaker (1969), Ross (1983) desarrolló una ecuación de medio efectivo para describir el flujo entre un medio libre y un medio poroso anisótropo, a partir de suponer que la velocidad local puede expresarse como una combinación lineal de un coeficiente dado por un tensor de segundo orden y la velocidad de promedio superficial. Este tensor tiene el objetivo de mapear a la velocidad promedio en la velocidad local. La ecuación resultante es válida tanto en las porciones homogéneas de cada región como en la inter-región. Además, considerando a un medio

poroso isotrópico, como el del trabajo de BJ, estos autores desarrollaron una expresión del coeficiente de deslizamiento α en términos del tensor de segundo orden, mostrando que este es solo una función de la microestructura del medio poroso.

Desde otra perspectiva, Sahraoui and Kaviani (1992) predijeron y analizaron el coeficiente de deslizamiento α a partir de la condición de deslizamiento BJ y de información obtenida de simulaciones a la escala de poro. Para esta última, resolvieron la ecuación de Navier-Stokes en diferentes inter-regiones compuestas por un medio libre y medio poroso espacialmente periódicos hechos de un arreglo ordenados de cilindros. Se encontró que α , además de ser dependiente de la microestructura del medio poroso en la inter-región, depende de la dirección de flujo (paralelo y perpendicular a la frontera del medio poroso), la porosidad, el número de Reynolds (Re), la altura del fluido sobre el medio poroso y la posición de la superficie divisoria. Cabe señalar que estos resultados, al igual que los de Taylor (1971); Richardson (1971), contrastan con lo sugerido por BJ, acerca de que α depende únicamente de la microestructura del medio poroso en la inter-región. Sin embargo, es posible que los resultados estén influenciados por el tipo de promedios utilizados, ya que se utilizaron promedios de área y de volumen de la velocidad, mientras que la condición de frontera de deslizamiento de BJ contiene únicamente promedios de volumen.

A pesar de que los trabajos mencionados hasta este punto mostraron la utilidad de la condición de frontera de BJ o del par de condiciones de frontera de Neale y Nader para acoplar a las ecuaciones que aplican en cada región homogénea de un dominio medio libre/medio poroso, se debe señalar que estas condiciones de frontera son empíricas y contienen coeficientes indeterminados (*i. e.*, α y μ_{eff}), por lo que no hay garantía de que puedan proporcionar una descripción precisa del flujo en todas partes del dominio y en todo el rango de condiciones de flujo que pueden existir. Con esto en mente, usando el método del promedio volumétrico Whitaker (1999) y extrapolando ideas de la metodología de condiciones de salto entre fases homogéneas, Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b) presentaron una metodología para desarrollar la condición de frontera de salto del esfuerzo que completa un TDA compuesto por la **ecuación de Stokes** para el medio libre y la **ecuación de Darcy-Brinkman** para el medio poroso. La condición de salto contiene un coeficiente β_{OW} , el cual es un coeficiente adimensional cuyo valor se estimó que es $O(1)$ y se debe determinar al ajustar datos experimentales. Además, para completar el TDA, impusieron la continuidad de la velocidad promedio en la superficie divisoria. Usando dicho TDA, estudiaron el sistema de BJ e hicieron una comparación con sus datos experimentales. Al ajustar el valor β_{OW} , dependiendo de la naturaleza del material poroso utilizado, fueron capaces de predecir dichos datos experimentales. Encontraron que β_{OW} es igual a 0.6, 0.7 y -1 para espuma de metal (Foametal) y 1.47 para Aloxita (Aloxite). Esto respaldó su metodología para desarrollar la condición de salto del esfuerzo para el flujo entre un medio libre y un medio poroso

Motivados por los trabajos de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b), Kuznetsov (1996) estudió el flujo unidireccional y completamente desarrollado a través de tres canales parcialmente ocupados por un medio poroso, dos rectangulares y uno cilíndrico. Para ello resolvió analíticamente el TDA propuesto por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b), el cual, cabe recordar que, consiste en la **ecuación de Darcy-Brinkman** en el medio poroso y la **ecuación Stokes** en el medio libre. Además, utilizaron la condición de salto del esfuerzo y la continuidad de la velocidad para acoplar dichas ecuaciones. En particular, se analizó el efecto del número de Darcy (Da) y del coeficiente de salto β_{OW} sobre los perfiles de velocidad promedio. Se encontró que un incremento en el número de Darcy genera un

incremento en la velocidad dentro de los canales, y que un incremento en el coeficiente β_{OW} genera un decremento de la velocidad dentro de los mismos, lo cual es especialmente notable para valores negativos de β_{OW} .

Años más tarde, Ochoa-Tapia and Whitaker (1998b) volvieron a estudiar el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso, pero ahora considerando la existencia de esfuerzos inerciales en ambas regiones. Esta vez utilizaron un TDA que consiste en la **ecuación de Navier-Stokes** para el medio libre y la **ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer** para el medio poroso. Además, para acoplarlas, impusieron la continuidad de la velocidad y, usando su metodología de condiciones de salto del esfuerzo, desarrollaron la condición de salto del esfuerzo para el caso donde los efectos inerciales son importantes. La condición de salto obtenida contiene dos coeficientes de salto, $\beta_{1,OW}$ y $\beta_{2,OW}$, que desde un punto de vista físico describen a esfuerzos viscosos en exceso y a esfuerzos inerciales en exceso, respectivamente. Se estimó que ambos coeficientes son $O(1)$ y se deben determinar al ajustar datos experimentales. Cabe señalar la predicción teórica de estos coeficientes no han sido reportadas en la literatura hasta ahora. En los años siguientes, diversos trabajos usaron la metodología de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a) para desarrollar las condiciones de salto del flux para la transferencia de masa y calor entre un medio libre y un medio poroso (Ochoa-Tapia and Whitaker, 1997, 1998a).

Más adelante, un análisis de cinco tipos de condiciones de frontera reportadas en la literatura para el flujo entre un medio libre y un medio poroso fue presentado por Alazmi and Vafai (2001). Estas condiciones de frontera son: (i) continuidad de la derivada y de la velocidad, (ii) continuidad del esfuerzo considerando a μ_{eff} del lado del medio poroso y continuidad de la velocidad, (iii) salto del esfuerzo despreciando los efectos inerciales y continuidad de la velocidad, (iv) salto del esfuerzo considerando efectos inerciales y continuidad de la velocidad y (v) velocidad de deslizamiento. Para ello estudiaron el flujo unidireccional y completamente desarrollado en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso en la parte superior, donde consideraron que la ecuación gobernante en el medio poroso es la **ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer** y en el medio libre es la **ecuación de Stokes**. Encontraron que los perfiles de velocidad son sensibles al tipo de condiciones de frontera utilizadas. En particular, mostraron predicciones de la velocidad promedio prácticamente iguales cuando se utilizan las condiciones (i) y (ii), cercanas cuando se utilizan las condiciones (iii) y (iv) y entre las dos últimas cuando se utiliza la condición (ii).

Los trabajos de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b, 1998b) proporcionaron una metodología para desarrollar sistemáticamente la condición frontera de salto del flux para la transferencia de cantidad de movimiento, así como también para la transferencia de calor y masa, entre un medio libre y un medio poroso. Sin embargo, las condiciones de frontera de salto resultantes contienen coeficientes de salto cuyas interpretaciones físicas y dependencias de la microestructura del medio poroso en la inter-región no fueron explícitamente definidas, por lo que sus determinaciones dependen de comparaciones con observaciones experimentales. Por lo tanto, las condiciones de frontera de salto obtenidas usando su metodología son *condiciones de frontera abiertas*, en el sentido matemático. Con el fin de cerrar teóricamente la condición del salto del esfuerzo desarrollada por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b), Goyeau *et al.* (2003) propusieron una metodología para obtener una expresión semi-analítica del coeficiente β_{OW} . Para llevar a cabo esto, acoplaron un ODA, que considera a la inter-región medio libre/medio poroso como una zona heterogénea de tamaño δ_{IR} en la que los coeficientes efectivos varían con la posición, y un TDA, que consiste en la **ecuación de Stokes** para

el medio libre y la **ecuación de Darcy-Brinkman** para el medio poroso. Encontraron que β_{OW} es una función de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos y de la velocidad promedio predicha por el ODA en la inter-región. Con esto en mente, y debido a la falta de información acerca de la microestructura del medio poroso en la inter-región, para evaluar la expresión β_{OW} representaron las variaciones espaciales de la fracción volumétrica mediante expresiones empíricas, tales como, una función Heaviside, lineal, senoidal y error. Además, usando estas variaciones espaciales de la porosidad, extendieron la aplicación de la ecuación empírica de Carman-Kozeny para describir a las variaciones de la permeabilidad intrínseca. Los valores obtenidos de β_{OW} se compararon con los estimados por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b), para reproducir los datos experimentales de BJ, encontrando predicciones idénticas. En específico, para Aloxita (Aloxite), Goyeau et al. mostraron que $\beta_{OW} = 1.28$ con $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.52$, mientras que Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b) estimaron que $\beta_{OW} = 1.47$ con $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$. Además, concluyeron que su análisis constituye un paso intermedio hasta la determinación exacta de β_{OW} , el cual puede requerir el desarrollo de un PCL, cuyo dominio de solución debe incluir a la inter-región. Cabe señalar que, aunque su metodología permitió predecir a este coeficiente, esta presenta dos limitaciones. Por un lado, debido a que la expresión de β_{OW} depende de las predicciones de la velocidad obtenida de la solución del ODA, el cual puede proporcionar predicciones más precisas de la velocidad que el TDA, las predicciones a partir del TDA pueden ser poco atractivas. Además, se desconoce cómo deben ser las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos entre un medio libre y un medio poroso, lo cual ha motivado a utilizar expresiones empíricas para predecirlos. Otros intentos para proporcionar información sobre el coeficiente de salto β_{OW} fueron presentados en la literatura (Deng and Martinez, 2005; Min and Kim, 2005), aunque alguna expresión que relacione únicamente su dependencia con la microestructura del medio poroso en la inter-región no fue proporcionada.

En los años siguientes, la formulación de un TDA para describir el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso mejoró significativamente. Por ejemplo, motivados por el trabajo de la condición de salto para la transferencia de masa, libre de coeficientes ajustables (*i. e.*, una *condición de salto local cerrada*), que aplica en superficies no uniformes de Wood *et al.* (2000) y que aplica en superficie divisoria entre un medio libre y un medio poroso de Valdés-Parada *et al.* (2007a), Valdés-Parada *et al.* (2007b) reformularon la metodología de condiciones de salto de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b) y desarrollaron una condición de salto del esfuerzo libre de coeficientes ajustables, para acoplar la **ecuación de Darcy-Brinkman** válida en el medio poroso y la **ecuación de Stokes** válida en el medio libre. En ese caso, el coeficiente de salto es un tensor de segundo orden de esfuerzos mixto que combina los llamados esfuerzos de Brinkman (*i. e.*, el producto escalar del gradiente de la porosidad) y esfuerzos globales (*i. e.*, el inverso del tensor de permeabilidad intrínseca). Para predecir las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad intrínseca, se derivó un problema de cerradura local, aunque en ese momento sólo se predijo usando una forma aproximada, debido a la complejidad de su solución. Esto se hizo extendiendo la ecuación de Carman-Kozeny considerando a las variaciones espaciales de la porosidad. Además, al igual que en el trabajo de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a), para completar el TDA, impusieron la continuidad de la velocidad en la superficie divisoria. No fue hasta que Valdés-Parada *et al.* (2009a) resolvieron el PCL para predecir a las variaciones espaciales de la permeabilidad intrínseca que cierran el ODA propuesto en Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b). Más aún, propusieron una metodología para determinar al

coeficiente β_{OW} de la condición de salto del esfuerzo de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a). Para ello, se utilizó una definición del coeficiente de salto β_{OW} proporcionada en Valdés-Parada *et al.* (2007b), donde se introdujeron las variaciones espaciales de la permeabilidad, la fracción volumétrica, la solución del ODA y del TDA. Esto condujo a una expresión semi-analítica de dicho coeficiente, encontrando valores idénticos a los obtenidos mediante la metodología propuesta en Goyeau *et al.* (2003). Finalmente, estos autores también mostraron que la rugosidad de la frontera del medio poroso en la inter-región tiene efectos sobre las variaciones espaciales de la permeabilidad intrínseca, y, por consiguiente, sobre el coeficiente de salto β_{OW} , aunque solo para valores particulares del número de Darcy (Da).

Aun cuando los trabajos de Valdés-Parada *et al.* (2007b, 2009b) proporcionaron una nueva metodología para desarrollar la condición de salto del esfuerzo cerrada que completa el TDA, compuesto de la **ecuación de Stokes** para el medio libre y la **ecuación de Darcy-Brinkman** para el medio poroso, dicha metodología presenta varios problemas. Primero, debido a que para predecir el coeficiente de salto β_{OW} es necesario resolver un ODA, esta metodología puede ser poco práctica. Esto se debe a que, si se cuenta con la solución del ODA, la solución del TDA es obsoleta, ya que el perfil de velocidad promedio obtenido de un ODA es más preciso que el de un TDA. Segundo, la metodología de condiciones de salto se relaciona únicamente con el salto del esfuerzo, lo cual requiere imponer la continuidad de la velocidad. Esto genera una controversia, sobre si el campo de la velocidad debe ser continuo o si debe también considerar un salto Valdés-Parada *et al.* (2009b). Por último, se desconoce la posición de la superficie divisoria, la cual es indispensable para predecir a los coeficientes de salto Chandesris and Jamet (2006, 2007, 2009). Estos y otros problemas fueron atendidos recientemente por Valdés-Parada *et al.* (2013), quienes presentaron una metodología para desarrollar las condiciones de salto de la velocidad y del esfuerzo cerradas para el flujo totalmente desarrollado y unidireccional a través de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso. Aquí consideraron que el TDA consiste en la **ecuación de Darcy-Brinkman** para el medio poroso y la **ecuación de Stokes** para el medio libre. Su metodología tiene dos pasos principales, derivar un problema de cerradura macroscópico y utilizar dos restricciones integrales sobre las desviaciones macroscópicas de la velocidad predicha por el ODA y el TDA. Esto les permitió predecir la posición de la superficie divisoria y a los coeficientes de salto a partir de la solución de dos problemas de valor a la frontera auxiliares, los cuales requieren conocer únicamente a las variaciones espaciales de la fracción volumétrica y de la permeabilidad intrínseca en la inter-región presentes en el ODA.

Desde otra perspectiva, Chandesris and Jamet (2006) propusieron otra metodología para desarrollar las condiciones de frontera para el flujo entre un medio libre y un medio poroso exentas de coeficientes ajustables. Consideraron un TDA compuesto por la **ecuación de Darcy-Brinkman** en el medio poroso y la **ecuación de Stokes** en el medio libre. Su metodología consiste en resolver, utilizando el método de expansiones asintóticas emparejadas (o *matched asymptotic expansions* en inglés), a una forma simplificada de la ecuación de transporte generalizada desarrollada en Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a). En dicha ecuación, postularon que el término integral $\Phi(\mathbf{x})$, que resulta de un proceso de promediado, se puede escribir como un término de Darcy con la permeabilidad dependiente de la posición y que la contribución de la segunda corrección de Brinkman se puede despreciar puesto que está incluida implícitamente en el término de Darcy anterior. Para el flujo estacionario, completamente desarrollado y unidireccional entre un medio libre y un medio poroso, como el estudiado por BJ,

encontraron que, para la solución de orden cero, las condiciones de frontera son la continuidad de la velocidad y la continuidad de su derivada, lo cual es parecido a lo propuesto por Neale y Nader. En contraste, para la solución de primer orden, encontraron que las condiciones de frontera son la continuidad de la velocidad y un salto en el esfuerzo. En esta última solución, mostraron que los coeficientes de salto son cantidades en exceso de las variaciones espaciales de la porosidad y de la permeabilidad intrínseca, y concluyeron que no dependen de la posición de la superficie divisoria. Además, exhibieron que el salto en el esfuerzo depende también de la caída de presión promedio en la superficie divisoria. Cabe señalar que, este segundo par de condiciones de frontera son idénticas a las encontradas por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b), por lo que al comparar la condición de salto del esfuerzo proporcionaron una definición del coeficiente β_{OW} . Encontraron que este coeficiente solo depende de propiedades efectivas como la porosidad y la permeabilidad, y no de la velocidad promedio obtenida de la solución del ODA, tal como lo mostraron Goyeau *et al.* (2003); Valdés-Parada *et al.* (2007a, 2009b). Sin embargo, debido a que no se tenían las expresiones de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, utilizaron expresiones empíricas de ellos para predecir a los coeficientes de salto, tales como, una función lineal y una función hiperbólica para ambos coeficientes. Esto les llevó a obtener valores de β_{OW} distintos a los obtenidos por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b).

Posteriormente, Chandesris and Jamet (2007, 2009) evaluaron y analizaron las condiciones de frontera desarrolladas a partir de su metodología reportada previamente para completar el TDA que consiste en la **ecuación de Darcy-Brinkman** y la **ecuación de Stokes**. Para hacer esto, estudiaron el flujo totalmente desarrollado y unidireccional a través de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso, tal como el estudiado por BJ. Las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos se predijeron a partir de información local obtenidas de realizar simulaciones a la escala de poro en un dominio representativo del sistema. Se consideró que el medio poroso se compone de un arreglo periódico de una celda unitaria tridimensional con una partícula sólida cubica centrada. Con estos coeficientes efectivos, fueron capaces de predecir de manera exacta a las cantidades en exceso, las cuales, cabe recordar, representan a los coeficientes de salto. Además, mostraron la dependencia de los coeficientes con la posición de la superficie divisoria, aunque la mejor posición para ella no fue definida. Más aún, encontraron que la solución del TDA no predice correctamente a los perfiles de velocidad en el sistema, a menos que se incluyan términos que describan a las fuerzas de fricción de exceso en la condición de frontera de salto del esfuerzo.

Zampogna and Bottaro (2016) evaluaron tres modelos de dos dominios para describir el flujo bidimensional entre un medio libre y un medio poroso. Mientras que para los tres modelos aplicaron la ecuación de Navier-Stokes en el medio libre, aplicaron diferentes ecuaciones en el medio poroso y diferentes condiciones en la frontera en la superficie divisoria localizada en algún lugar $y = -\delta$ por debajo de la frontera del medio poroso. En particular, en el primero, se utilizó a la **ecuación de Darcy-Fochheimer** junto con condiciones de continuidad de la velocidad y de la presión en $\delta \approx c\sqrt{K/\varepsilon_{\beta\omega}}$. En el segundo, se utilizó a la **ecuación de Darcy-Brinkman** junto con condiciones de frontera de continuidad de la velocidad y del esfuerzo total en $\delta = 0$. Por último, en el tercero, se aplicó el primer modelo, pero considerando a $\delta = 0$ y a extensión de la ecuación de Darcy que considera a una permeabilidad dependiente de la posición, K_{β} . Encontraron que el primer modelo permite obtener mejores predicciones de la velocidad que los otros dos. Además, las predicciones del segundo modelo presentan las mayores desviaciones que la del primero, las cuales las atribuyeron al

pobre desempeño de la ecuación de Darcy-Brinkman, aunado al hecho de que no es posible predecir correctamente a la viscosidad efectiva. Por último, encontraron que las predicciones del tercer modelo siguen siendo insatisfactorias, lo cual se atribuyó a que la ecuación de Darcy no es válida cerca de la frontera del medio poroso y que es probable que sea necesario considerar a una ecuación que incorpore apropiadamente a la inercia.

Aplicando también el método de homogeneización espacial multiescala, Lācis and Bagheri (2017) presentaron una metodología para desarrollar las condiciones de frontera generales que permitan acoplar a la ecuación de Stokes y la ecuación de Darcy para describir el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso. Su metodología les condujo a obtener las condiciones de frontera de continuidad de la presión promedio y una versión vectorial y generalizada de la condición de frontera de BJ. Una característica sobresaliente de esta última, es que los coeficientes de deslizamiento se pueden calcular a partir de la solución de un conjunto de problemas auxiliares, con la forma de problemas de Stokes, en un dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso. Por lo tanto, sus condiciones de frontera son condiciones de frontera cerradas, o exentas de coeficientes ajustables. Además, encontraron que la precisión de su condición de frontera es independiente de la localización de la superficie divisoria, hasta cierto punto. No obstante, aunque su trabajo proporciona una metodología teórica, cabe mencionar que la condición de frontera de la presión aun debe ser investigada, ya que en la escala macroscópica la presión no necesariamente es continua en la superficie divisoria.

Ese mismo año, Angot *et al.* (2017) hicieron un modelado asintótico del flujo viscoso entre un medio libre y un medio poroso. Este les permitió desarrollar dos condiciones de frontera de salto generales y multidimensionales para acoplar a la **ecuación de Darcy-Brinkman** válida en el medio poroso y a la **ecuación de Stokes** en el medio libre. Una característica sobresaliente de las condiciones de frontera es que, para el flujo totalmente desarrollado y unidireccional sobre un medio poroso, se reducen a las condiciones de frontera de Beavers and Joseph (1967), de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a), e incluso las desarrolladas por Valdés-Parada *et al.* (2013). Sin embargo, su metodología no permite predecir a los coeficientes de salto asociados, por lo que son condiciones de frontera abiertas, y por consiguiente los coeficientes se deben de determinar a partir del ajuste de datos experimentales, tal como se ha hecho hasta ahora con las condiciones de frontera de Beavers and Joseph (1967) o de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b).

Además de elegir apropiadamente a las ecuaciones para describir el flujo en el medio poroso, elegir correctamente las condiciones de frontera que aplican en la superficie divisoria es crucial para obtener predicciones precisas de dicho flujo en un sistema medio libre/medio poroso. Por ejemplo, la condición de frontera de BJ fue propuesta únicamente para describir la componente tangencial de la velocidad del flujo paralelo a la superficie de un medio poroso. Sin embargo, esta condición ha sido utilizada para describir la componente tangencial de la velocidad en flujos con direcciones arbitrarias. Con esto en mente, Eggenweiler and Rybak (2020) evaluaron la condición de frontera de BJ para estudiar flujos bidimensionales en diferentes dominios compuestos por un medio libre y un medio poroso, tales como un canal parcialmente ocupado por un medio poroso y una cavidad rectangular con un medio poroso en la parte inferior. El TDA utilizado consiste en la **ecuación de Stokes** para el medio libre y la **ecuación de Darcy** en el medio poroso. Para resolver este modelo se utilizaron diferentes valores del coeficiente α y se fijó que la superficie divisoria se localiza justo

por arriba de la primer fila de partículas sólidas. Para evaluar la precisión del modelo, los perfiles de velocidad obtenidos de su solución se compararon con los obtenidos de simulaciones a la escala de poro. Encontraron que los perfiles de velocidad obtenidos del TDA no pueden predecir correctamente los obtenidos de las simulaciones a la escala de poro, incluso cuando se ajusta el valor α y la posición de la superficie divisoria. Por lo tanto, concluyeron que la condición de frontera de BJ es inapropiada para estudiar flujos que no sean unidireccional y completamente desarrollado sobre un medio poroso. Cabe mencionar que, este resultado era de esperarse, ya que la condición de BJ se propuso únicamente para el flujo paralelo sobre un medio poroso. Además, estos autores indicaron que la posición de la superficie divisoria depende de diversos factores como, la microestructura del medio poroso, la rugosidad de la frontera, el régimen de flujo y del tipo de condición de frontera utilizada. Un estudio similar fue presentado casi a la par por Rybak *et al.* (2021), el cual confirmó los hallazgos obtenidos por Eggenweiler and Rybak (2020).

Más recientemente, dada la necesidad de condiciones de frontera exentas de coeficientes ajustables, Sudhakar *et al.* (2021) presentaron una metodología para desarrollar condiciones de frontera generales, multidimensionales y cerradas para la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso utilizando el método de homogenización multi-escala. Basados en dicha metodología, fueron capaces de desarrollar la condición de salto tanto del esfuerzo como de la velocidad en su forma vectorial. Además, desarrollaron dos problemas de valor a la frontera auxiliares para predecir a los coeficientes de salto asociados, los cuales se deben resolver en dominios representativos de la frontera entre un medio libre y un medio poroso. Cabe señalar que estos problemas son similares a los problemas de cerradura local que se obtienen utilizando el método del promedio volumétrico. Por último, para evaluar sus condiciones de frontera, estudiaron el flujo bidimensional en diferentes dominios compuestos por un medio libre y un medio poroso. Para ello utilizaron un TDA que consiste en la **ecuación de Stokes** en el medio libre y a la **ley de Darcy** en el medio poroso. Encontraron que sus condiciones de frontera pueden proporcionar predicciones lo suficientemente precisas del flujo en dichos dominios compuestos, las cuales cabe mencionar son mas precisas que las obtenidas con la condición de frontera BJ. Cabe señalar que, hasta hoy en día, la metodología Sudhakar *et al.* (2021) es la más completa para desarrollar condiciones de frontera de salto entre un medio libre y un medio poroso.

2.2.2 Modelo de un dominio

A diferencia del desarrollo de un TDA, el de un ODA, para describir el flujo de un fluido en dominios compuestos por un medio libre y un medio poroso, ha recibido menor atención, incluso cuando un ODA tiene ventajas con respecto a un TDA. En particular, un ODA no requiere de desarrollar e imponer condiciones de frontera en la superficie divisoria, lo cual evita, a su vez, predecir tanto a los coeficientes de salto y a la posición de la superficie divisoria, \mathbf{x}_0 . Además, este puede proporcionar una descripción más precisa del flujo que un TDA, tal como se mencionó anteriormente. Más aún, la implementación de un ODA es mucho más sencilla que la de un TDA, razón por la cual ha sido utilizado frecuentemente en softwares comerciales (Cimolin and Discacciati, 2013). De hecho, la mayoría de los softwares comerciales, capaces de simular flujos en dominios parcialmente ocupados por un medio poroso, se basan en esta aproximación (Inc, 2003; Ansys, 2009; Cd-Adapco, 2017). En estos softwares, el medio poroso se caracteriza por dos constantes, P_v y P_f , llamados, respectivamente,

resistencias viscosas e inerciales, las cuales son diferentes de cero solo en el medio poroso. Sin embargo, aun con esto, el desarrollo de un ODA padece de tres problemas hasta hoy en día, los cuales podrían explicar porque su desarrollo ha recibido menor atención. En primer lugar, es necesario desarrollar y establecer las GTEs que deben utilizarse en un ODA con el fin obtener predicciones del flujo lo más cercanas posible a la realidad, ya que existen una gran variedad de GTEs, incluso para un mismo sistema. Segundo, se desconocen cómo deben ser y como predecir las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, principalmente en la inter-región entre un medio libre y un medio poroso, lo cual hasta ahora ha conducido a utilizar expresiones empíricas para ello. Por último, se desconoce la extensión y localización de la inter-región.

Con respecto al primer problema, entre los estudios reportados en la literatura, se pueden encontrar tres alternativas para desarrollar a las GTEs de cantidad de movimiento. La primera consiste en acoplar un término de Darcy (o Darcy-Forchheimer) a la ecuación de Stokes (o Navier-Stokes). Esta alternativa es completamente empírica y se le conoce el método de penalización (Bruneau and Mortazavi, 2004, 2008; Bruneau *et al.*, 2010, 2020). La segunda es promediar a las ecuaciones válidas en la escala microscópica, donde debido a la falta de un PCL que permita cerrar a las ecuaciones promedio de cantidad de movimiento, también requiere introducir empíricamente un término de Darcy (o Darcy-Forchheimer) en esta última (Vafai and Tien, 1981, 1982; Cheng *et al.*, 1991). La tercera consiste en promediar a las ecuaciones microscópicas y desarrollar el PCL asociado, el cual permite cerrar a la ecuación promedio de cantidad de movimiento y definir, así como predecir, a los coeficientes efectivos. Sin embargo, una validación de esta última no han sido presentadas hasta ahora. A continuación, se describen algunos de los trabajos que desarrollan y hacen uso de un ODA para describir el flujo entre un medio libre y un medio poroso, los cuales utilizan alguna de estas tres alternativas para desarrollar a las GTE asociadas.

Debido que un ODA evita la especificación de condiciones de frontera en la superficie divisoria, esta alternativa ha sido utilizada extensamente para estudiar el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso en problemas de convección natural (Beckermann *et al.*, 1988; Turki and Lauriat, 1990; Le Breton *et al.*, 1991; Etefagh *et al.*, 1991; Kuznetsov and Xiong, 1999; Mercier *et al.*, 2002) o en problemas de convección difusiva doble (Gobin *et al.*, 1998; Gobin and Goyeau, 2008). Estos son problemas que se encuentran en, por ejemplo, sistemas de solidificación de metales, aislamiento término, transporte de solutos en sedimentos ambientes costeros, por mencionar algunos. Motivados por esto, Beckermann *et al.* (1987) estudiaron numérica y experimentalmente a la convección natural entre una región de fluido y un medio poroso isotrópico, ambas en posición vertical, dentro de una cavidad rectangular. Para ello, construyeron un ODA al combinar las ecuaciones de un TDA con la ayuda de una función escalón unitario, la cual adquiere el valor de uno o cero para recuperar a la ecuación asociada a cada región, evitando de esta forma la especificación de condiciones de frontera en la superficie divisoria. El TDA consiste en la ecuación de Navier-Stokes para la región de fluido y la ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer para el medio poroso. En este último, la permeabilidad y el coeficiente inercial se obtuvieron utilizando aproximaciones empíricas, tales como la ecuación de Carman-Kozeny y la ecuación de Blake Plummer, respectivamente. Las predicciones de la velocidad presentaron un buen ajuste con los datos experimentales, donde se mostró que la cantidad de fluido que se transporta de la región de fluido al medio poroso depende en gran medida de los números de Darcy (Da) y Rayleigh (Ra). No obstante, a pesar del buen ajuste de su modelo, este no considera los

efectos de la inter-región, por lo que no puede proporcionar una descripción detallada del flujo cerca de las fronteras del medio poroso, lo cual podría influenciar la descripción de la transferencia de calor entre la región de medio libre y el medio poroso.

Para problemas de almacenamiento de granos en silos, Jiménez-Islas *et al.* (2009) estudiaron numéricamente a la convección natural en una cavidad cuadrada que contiene una región de fluido y un medio poroso isotrópico. Ambas regiones se colocaron de manera horizontal y se consideró una generación de calor en el medio poroso. Para modelar el flujo del fluido se propuso un ODA siguiendo las ideas de Beckermann *et al.* (1987), por lo que no se considera a la inter-región y no requiere de condiciones de frontera de salto. En ese trabajo, el TDA utilizado para construir el ODA consiste en la **ecuación de Navier-Stokes** para el medio libre y la **ecuación de Darcy-Brinkman** para el medio poroso. Los autores concluyeron que su ODA es una buena alternativa para describir a la convección natural, aunque no presentan una comparación con otras predicciones. Algunas de las principales limitaciones de ese trabajo consisten en que no se considera el efecto de la microestructura de la inter-región sobre el transporte, que ciertamente los trabajos anteriores han mostrado que sus efectos pueden ser significativos. Otro trabajo que utiliza un ODA para estudiar la convección natural entre un medio libre y un medio poroso es el presentado por Gobin and Goyeau (2008).

Posteriormente, además de analizar el coeficiente de deslizamiento α de la condición de BJ, Sahraoui and Kaviany (1992) analizaron el flujo de un fluido en diferentes inter-regiones medio libre/medio poroso utilizando tres GTEs, obtenidas a partir de modificar a la **ecuación de Darcy-Brinkman**. En la primera se consideró que los coeficientes efectivos dados por la porosidad, la permeabilidad y la viscosidad efectiva varían como una función en escalón, en la segunda consideraron únicamente la dependencia espacial de la viscosidad efectiva, obtenida a partir de simulaciones a la escala de poro, y en la última consideraron la dependencia espacial de la permeabilidad, también obtenida a partir de simulaciones a la escala de poro. En el primer caso se encontró que las predicciones presentan desviaciones considerables, mientras que estas desviaciones son menores para el segundo y tercer caso, aunque son aún $O(22\%)$. Sin embargo, concluyeron que una GTE podría proporcionar predicciones confiables siempre y cuando se cuente con las variaciones espaciales apropiadas de la permeabilidad, la viscosidad efectiva y de la porosidad.

Una alternativa más rigurosa para derivar a las GTEs de cantidad movimiento fue presentada por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b), quienes desarrollaron la GTE para el flujo de Stokes entre un medio libre y un medio poroso a partir de promediar superficialmente, con respecto a una región de promediado, a las ecuaciones válidas en la escala microscópica. La ecuación de cantidad de movimiento resultante posee cuatro características sobresalientes: (i) la permeabilidad en el término de Darcy depende de la posición, (ii) la viscosidad efectiva es igual a $\mu_{eff} = \mu_\beta / \varepsilon_\beta$, (iii) contiene dos términos conocidos como la primera y segunda corrección de Brinkman y (iv) se reduce a la **ecuación de Stokes** en la región homogénea del medio libre y a la **ecuación de Darcy-Brinkman** en la región homogénea del medio poroso. A partir de dicha GTE estos autores propusieron un ODA y exploraron su utilidad para reproducir los datos experimentales de BJ (Ochoa-Tapia and Whitaker, 1995b). En ese caso las variaciones espaciales de la porosidad y de la permeabilidad se obtuvieron a partir de un polinomio de tercer orden y de la ecuación de Blake-Kozeny con la porosidad variable, respectivamente. Desafortunadamente, el ODA no proporcionó una representación satisfactoria de los datos experimentales, pero mostró la importancia de la microestructura del medio poroso en

la inter-región. Años más tarde, Ochoa-Tapia and Whitaker (1998b) desarrollaron las GTEs de la transferencia de cantidad de movimiento del flujo de un fluido para cuando tanto efectos viscosos como los inerciales son importantes entre un medio poroso y un medio libre. En su trabajo la GTE de cantidad de movimiento resulta de promediar superficialmente a la ecuación de Navier-Stokes. Esta GTE comparte las tres primeras características de la GTE para el flujo de Stokes. Además, tiene la característica de que se reduce a la ecuación de Navier-Stokes en la región homogénea del medio libre y a la ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer en la región homogénea del medio poroso. A pesar de las características sobresalientes de esta ecuación, una validación de dicha ecuación no ha sido presentada hasta el momento.

Mas adelante, Basu and Khalili (1999) propusieron un ODA empírico para estudiar el flujo entre un medio libre y un medio poroso. El modelo se formuló a partir de la ecuación de Darcy-Brinkman, donde se consideró que la porosidad y la permeabilidad intrínseca varían como una función Heaviside en la frontera medio libre/medio poroso y se incluye un término de esfuerzos inerciales. Para mostrar el desempeño de su modelo consideraron el flujo en un contenedor cilíndrico, parcialmente ocupado por un medio poroso en la parte inferior, donde el flujo es generado debido a una tapa giratoria en la frontera superior. Las predicciones del modelo, obtenidas considerando que la viscosidad efectiva es igual a la viscosidad del fluido, se compararon con datos experimentales reportados en la literatura, lo cual mostró un buen ajuste entre ambos, y por lo tanto elucidó la viabilidad del modelo propuesto. Además, mostraron que la contribución del término de Brinkman es importante en una zona pequeña por debajo de la frontera del medio poroso, mientras que para cualquier otra zona dentro del medio poroso su contribución se desvanece. Esto evidencia la existencia de la capa de Brinkman en la frontera del medio poroso incluso para flujos bidimensionales, aunque una comparación más detallada de las predicciones podría ser necesaria para confirmar esta última observación. No obstante, a pesar de los resultados positivos, se debe notar que el modelo propuesto está limitado a que aún no es posible predecir a la permeabilidad efectiva de manera precisa, por lo que no hay garantía de puede proporcionar predicciones precisas de los perfiles de velocidad en todo el rango de condiciones de flujo que pueden suceder entre un medio libre y un medio poroso.

Además de desarrollar una metodología para predecir el coeficiente de salto β_{OW} de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b), Goyeau *et al.* (2003) evaluaron las predicciones de dos diferentes ODA para el flujo unidireccional y completamente desarrollado en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso. El primero de ellos considera que los coeficientes efectivos varían en forma de una función Heaviside alrededor de la frontera del medio poroso (en $y = 0$), lo que hace que la inter-región medio libre/medio poroso no sea incluida. El segundo de ellos considera a la inter-región medio libre/medio poroso como una zona heterogénea de tamaño δ_{IR} dentro del medio poroso donde los coeficientes efectivos cambian con la posición. Debido a que se desconocen cómo deben ser las variaciones de los coeficientes efectivos, propusieron utilizar expresiones empíricas de la porosidad $\varepsilon_{\beta}(y)$ (una función Heaviside, lineal y senoidal) y de la permeabilidad $K_{\beta}(y)$ (una extensión de la ecuación de Carman-Kozeny). Aplicando ambos ODA para estudiar el flujo completamente desarrollado y unidireccional en el sistema de BJ, encontraron que las predicciones de la velocidad a partir del primer ODA son idénticas a las encontradas con un TDA que considera la continuidad de la velocidad y del esfuerzo para acoplar a la **ecuación de Stokes** y la **ecuación de Darcy-Brinkman**, mientras que las predicciones a partir del segundo ODA son idénticas a las obtenidas con el TDA propuesto por Ochoa-

Tapia and Whitaker (1995b). A partir de ello, los autores indicaron que para tener una descripción detallada de los fenómenos en todo el sistema es necesario que el ODA considere correctamente a los coeficientes efectivos, y por consiguiente a la inter-región.

Recientemente, Luminari *et al.* (2019) evaluaron las GTEs desarrolladas por Ochoa-Tapia and Whitaker (1998b). Para hacer esto, estudiaron el flujo bidimensional en una cavidad rectangular parcialmente ocupada por un medio poroso en su sección inferior, el cual está compuesto de cilindros de sección transversal circular colocados verticalmente. Para resolver el ODA asociado a dichas GTEs, postularon que en la inter-región la porosidad ε_β y el inverso de la permeabilidad K_β^{-1} presentan un comportamiento lineal entre sus valores del seno del medio poroso y del seno del fluido. Además, para evaluar las predicciones del ODA, se llevaron a cabo simulaciones a la escala de poro. Desventuradamente, encontraron que las predicciones de velocidad promedio y presión promedio obtenidos de la solución del ODA no reproducen aquellas obtenidas de las simulaciones a la escala de poro, tal como los hallazgos de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b). Esto sugiere que las GTEs desarrolladas por Ochoa-Tapia and Whitaker (1998b) no pueden proporcionar predicciones del flujo entre un medio libre y un medio poroso. Sin embargo, las desviaciones del ODA pueden ser debido a que las predicciones de los coeficientes efectivos no son las apropiadas para la geometría utilizada. Por lo tanto, el desarrollo de una metodología que permita predecir de manera precisa a las variaciones espaciales de los coeficientes, lo cual podría mejorar las predicciones del ODA de este trabajo, aún es un problema abierto.

Una comparación entre simulaciones a la escala de poro y tres modelos de un dominio para describir el flujo bidimensional entre un medio libre y un medio poroso fue presentada por Bruneau *et al.* (2020). Los modelos de un dominio se conformaron de tres GTEs obtenidas a partir del método de penalización. Cabe recordar que, para la transferencia de cantidad de movimiento, en este método a la ecuación de Navier-Stokes se le acopla empíricamente un término de resistencias debido a la presencia del medio poroso. En el primero el término de resistencias es un término de Darcy con el coeficiente de permeabilidad intrínseca K_β , en el segundo es un término de Darcy-Forchheimer, y en el tercero a un término de Darcy con un coeficiente de permeabilidad aparente H_β . Estos autores analizaron diferentes regímenes de flujo, desde flujo laminar hasta flujo turbulento. Sin embargo, los resultados mostraron que ningún ODA es capaz de predecir a los perfiles de velocidad promedio obtenidos de las simulaciones a la escala de poro. Basados en esto, concluyeron que para mejorar las predicciones de los ODA, es necesario considerar predicciones precisas de las variaciones espaciales los coeficientes efectivos en la inter-región entre el medio libre y un medio poroso. Cabe señalar que, las GTEs analizadas en ese trabajo son ampliamente utilizadas para el modelado del flujo en reactores de lecho empacado con una baja d_t/d_p , los cuales se caracterizan por coeficientes efectivos que sufren cambios abruptos con la posición. Por lo tanto, se debe tener cuidado a la hora de utilizar estos modelos, ya que pueden introducir errores en las predicciones de la velocidad del fluido, y por consiguiente en las predicciones de otras cantidades de transporte.

2.3 Flujo a través de un canal parcialmente lleno con un medio poroso

La mayoría de los estudios sobre el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso, para caracterizar el flujo del fluido en la región de la frontera en diferentes niveles de escala de

descripción, utilizan el sistema que consiste en un canal parcialmente ocupado con medio poroso, similar al sistema experimental de Beavers and Joseph (1967). La motivación de esto se debe a que este sistema se puede presentar en una gran variedad de aplicaciones de ingeniería química y en sistemas medioambientales (Valdés-Parada *et al.*, 2013; Angot *et al.*, 2017). Por ejemplo, en aplicaciones de ingeniería química se puede encontrar el flujo de un fluido en intercambiadores de calor con insertos porosos (Alkam *et al.*, 2001; Targui and Kahalerras, 2013, 2014; Saberinejad *et al.*, 2018), transporte de nutrientes desde el bulk de un fluido hacia estructuras celulares (Yu, 2012), biopelículas (González-Brambila and López-Isunza, 2007; Oliveros-Muñoz *et al.*, 2017), secadores por charolas, fermentadores en medio sólido por charolas, procesos de separación por membranas, disipadores de calor en dispositivos electrónicos, entre muchos otros. Por otro lado, en las situaciones medioambientales tales como, el flujo de aire en el dosel arbóreo (Wilson and Flesch, 1999; Flesch and Wilson, 1999), incendios forestales (Séro-Guillaume and Margerit, 2002), transporte de contaminantes en suelos (Bear and Cheng, 2010), extracción mejorada de petróleo en estratos porosos, arrecifes de coral (Lowe *et al.*, 2008), flujo en zona béntica de cuerpos de agua (Goharzadeh *et al.*, 2005; Khalili *et al.*, 2014, 2018), por decir algunos. Además, la geometría del canal permite tener un mayor control del proceso, principalmente a la hora de hacer las comparaciones de los perfiles obtenidos de los modelos macroscópicos y las observaciones experimentales o de simulaciones a la escala poro.

En este trabajo de investigación se utiliza también el sistema del canal parcialmente ocupado por un medio poroso para evaluar las predicciones del flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso.

2.4 Tamaño de la capa de Brinkman entre un medio libre y un medio poroso

Cabe recordar que, desde un punto de vista macroscópico, la inter-región medio libre/medio poroso se refiere a la porción alrededor de la frontera entre un medio libre y un medio poroso, donde los coeficientes efectivos y así como la velocidad cambian abruptamente con la posición, de su valor en el seno del poroso localizado en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\omega$ a su valor en el seno del medio libre localizado en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\eta$. Además, cabe mencionar que la parte de dicho perfil de velocidad comprendido desde la velocidad del seno del medio poroso a la velocidad en la frontera del medio poroso se conoce como la capa de Brinkman. Por lo tanto, se puede deducir que la capa de Brinkman se encuentra dentro de la inter-región medio libre/medio poroso. La determinación de la extensión tanto de la inter-región, y así como la de la capa de Brinkman, han sido los objetos de estudio de numerosos trabajos analíticos, numéricos y experimentales reportados en la literatura (Gupte and Advani, 1997; Goharzadeh *et al.*, 2005; Morad and Khalili, 2009). La motivación de esto recae en que al determinar la extensión de ambas zonas se puede establecer los límites hasta donde el medio poroso y el medio libre pueden considerarse como homogéneos. Por consiguiente, se pueden establecer los límites hasta donde son válidas las ecuaciones asociadas a cada región homogénea, la ley de Darcy en el seno medio poroso y la ecuación de Stokes en el seno del medio libre. Más aún, puede ilustrar si es que es necesario utilizar una ecuación diferente a la ecuación de Darcy, tal como la ecuación de Darcy-Brinkman, para describir a dicha capa de Brinkman. Sin embargo, hasta ahora, se han obtenido resultados controversiales, los cuales sugieren que el tamaño de la inter-región es $O(\sqrt{K_{\beta\omega}})$ (Tam, 1969; Saffman, 1971; Neale and Nader, 1974) o bien, $O(30\sqrt{K_{\beta\omega}})$ (Ochoa-Tapia and Whitaker, 1995a,b) o bien, de la longitud

característica del medio poroso Gupte and Advani (1997) o bien, del tamaño de partícula (Goyeau *et al.*, 2003; Goharzadeh *et al.*, 2005; Morad and Khalili, 2009).

Por un lado, Gupte and Advani (1997) condujeron mediciones experimentales de la velocidad de un fluido en la frontera entre un medio libre y medio poroso fibroso dentro de una celda de Hele-Shaw usando velocimetría láser Doppler (o Laser Doppler Velocity en inglés). En su trabajo, concluyeron que el tamaño de la capa de Brinkman δ_B es $O(L_\omega)$. Por otro lado, combinando los métodos de coincidencia del índice de refracción (o refractive index matching en inglés) y velocimetría de imágenes de partículas (o particle image velocimetry), Goharzadeh *et al.* (2005) visualizaron y midieron experimentalmente el perfil de velocidad promedio en la frontera entre un medio libre y un medio poroso hecho de perlas de vidrio de un tamaño fijo. Para ello consideraron el flujo unidireccional y completamente desarrollado a través de un canal parcialmente ocupado por dicho medio poroso en la parte inferior. A diferencia de los trabajos previos, ellos mostraron que el tamaño de la capa de Brinkman es $O(d_p)$, lo cual es, en general, mucho más grande que $O(\sqrt{K_{\beta\omega}})$.

El siguiente año, una investigación experimental fue desarrollada por Agelinchab *et al.* (2006), quienes utilizaron también los métodos de coincidencia del índice de refracción y velocimetría de imágenes de partículas para medir experimentalmente la velocidad de un fluido en la frontera entre un medio libre y un medio poroso. El medio poroso consistió en cilindros de sección transversal circular colocados verticalmente en la forma de un reglo regular en el fondo de un canal. Encontraron que la relación entre $\delta_B/\sqrt{K_{\beta\omega}}$ se encuentra entre 3.75 – 12.61.

Posteriormente, Morad y Khalili (2009) extendieron el estudio del sistema de Goharzadeh *et al.* (2005), considerando ahora que el medio poroso se compone de partículas esféricas de múltiples tamaños, el cual es el caso de muchos sistemas naturales y aplicaciones prácticas. Los perfiles de velocidad promedio sugirieron que el tamaño de la capa de Brinkman δ_B es aproximadamente el diámetro de partícula característico, lo cual a su vez es $O(29.3\sqrt{K_{\beta\omega}})$. Este resultado es comparable al valor de $O(30\sqrt{K_{\beta\omega}})$ indicado por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b)

Más recientemente, Chavarria-Onelas (2016) obtuvo expresiones analíticas del perfil de velocidad promedio de un sistema compuesto por dos medios porosos adyacentes con diferentes propiedades estructurales. Para ello, consideró que ambos medios porosos se componen de placas paralelas con espesores fijos y por consiguiente de diferente porosidad y permeabilidad. Esto les permitió obtener soluciones analíticas de los perfiles de velocidad promedio de simplemente promediar, dentro de una región de promediado de tamaño característico r_0 , a los perfiles de velocidad local entre cada placa. Usando una idea similar, Ochoa-Tapia *et al.* (2017) predijeron el perfil de velocidad promedio en un sistema medio libre/medio poroso, como el utilizado por Beavers and Joseph (1967), aunque aquí consideraron un medio poroso consolidado donde los porosos consisten en un arreglo periódico de tubos capilares de diámetro fijo. A pesar de que las geometrías son simples, en ambos estudios se encontró que los perfiles de velocidad promedio presentan una zona de transición suavizada cerca de las fronteras de los medios poros, *i. e.*, la capa de Brinkman. La forma y el tamaño de esta zona depende de la porosidad del seno del medio poroso y del tamaño característico de la región de promedio, *i. e.*, $\delta \approx 2r_0$. Además, mostraron que el tamaño de la capa de Brinkman es $O(r_0)$. De esta forma, ambos estudios concluyeron que para describir de manera exacta el perfil de velocidad promedio entre dos regiones adyacentes, es necesario incluir términos adicionales a la ley de Darcy, aunque esto no ha sido confirmado. Es oportuno señalar que, los perfiles de velocidad promedio en

ambos trabajos no están sujetos a suposiciones o restricciones de longitudes de escala más allá a las de los sistemas originales. Por lo tanto, las ideas utilizadas en ambos trabajos, ofrecen la oportunidad de determinar de manera exacta a los perfiles de velocidad promedio y a las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos para cerrar el ODA, lo cual fue presentado por Hernandez-Rodriguez (2017).

2.5 Variaciones espaciales de los coeficientes efectivos

Como se describió anteriormente, en una inter-región medio libre/medio poroso los coeficientes efectivos como la permeabilidad intrínseca $K_\beta(\mathbf{x})$, la permeabilidad aparente $H_\beta(\mathbf{x})$ y la fracción volumétrica $\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$ varían abruptamente de su valor en el seno del medio poroso a su valor en el seno del medio libre. Por un lado, las variaciones espaciales de $\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$ se pueden obtener al integrar, con respecto a una región de promediado, el dominio del fluido localizado cerca de las fronteras del medio poroso, el cual, por supuesto, debe conocerse de antemano, ya sea a partir de técnicas experimentales, de softwares especializados, o bien, de geometrías aproximadas. En contraste, hasta hoy en día, se desconoce cómo son las variaciones espaciales de la permeabilidad intrínseca y aparente cerca de las fronteras de un medio poroso, incluso para para medios porosos hechos de geometrías aproximadas. Para resolver este problema, se han propuesto diferentes alternativas entre los estudios reportados en la literatura. Una de las ecuaciones más utilizadas para predecir a K_β en la inter-región medio libre/medio poroso se puede obtener a partir de la ecuación de Carman-Kozeny (CK) como sigue

$$K_{\beta\eta\omega}^{-1}(y) = \frac{180}{\ell_\sigma^2} \frac{(1 - \varepsilon_\beta)^2}{\varepsilon_\beta^3} \quad \text{para} \quad -r_0 < y < +r_0 \quad (2.10)$$

donde se utilizó a ε_β en lugar de $\varepsilon_{\beta\omega}$, y se considera a ℓ_σ como una constante. Nótese que una suposición implícita en la Ec. (2.10) es que la zona de cambios tanto de la porosidad como de la permeabilidad es la misma, lo cual no es necesariamente cierto, tal como se muestra en los siguientes capítulos. La ecuación anterior ha sido utilizada por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b); Goyeau *et al.* (2003); Valdés-Parada *et al.* (2007a).

Otra alternativa para predecir a $K_{\beta\eta\omega}$ en una inter-región medio libre/medio poroso se puede obtener suponiendo que este coeficiente varía linealmente con la posición, de su valor en el seno del medio poroso (en $y = -r_0$) a aquel en el seno del medio libre (en $y = +r_0$). Esto permite obtener la siguiente expresión

$$K_{\beta\eta\omega}^{-1} = \frac{K_{\beta\omega}^{-1}}{2} \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) \quad \text{para} \quad -r_0 < y < +r_0 \quad (2.11)$$

Cabe señalar que esta expresión también considera que la zona de cambios de K_β es igual a la de ε_β . Esta ecuación ha sido utilizada para describir a K_β por Chandesris and Jamet (2006); Luminari *et al.* (2019).

Una tercera alternativa para predecir a K_β en una inter-región medio libre/medio poroso consiste en utilizar una función Heaviside, la cual se puede escribir como

$$K_{\beta\eta\omega}^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y \leq r_0 \\ K_{\beta\omega}^{-1} & \text{si } -r_0 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Nótese que esta ecuación considera un cambio abrupto de K_β en $y = 0$. Es decir, considera una superficie divisoria localizada en $y = 0$, en lugar de una inter-región. Esta alternativa ha sido utilizada por Beckermann *et al.* (1987, 1988); Goyeau *et al.* (2003); Bruneau and Mortazavi (2004, 2008); Bruneau *et al.* (2010); Jiménez-Islas *et al.* (2009); Bruneau *et al.* (2020).

Desde otra perspectiva, las variaciones espaciales de $K_{\beta\eta\omega}$ se pueden representar mediante una función hiperbólica, tal como

$$K_{\beta\eta\omega}^{-1}(y) = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{y}{\delta_{IR}}\right) + \frac{1}{2} \quad (2.13)$$

Esta expresión fue utilizada por Chandesaris and Jamet (2006) para predecir los coeficientes en exceso o coeficientes de salto que se encuentran en su condición de salto del esfuerzo. Otras expresiones empíricas, en términos de funciones hiperbólicas, de las variaciones espaciales de la permeabilidad intrínseca en la inter-región medio libre/medio poroso han sido presentadas por Chandesaris and Jamet (2007).

2.6 Condiciones de salto de transferencia de masa

Así como numerosos trabajos se han enfocado a desarrollar las condiciones de salto que completan un TDA para la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso, varios otros han enfocado su esfuerzo a desarrollar las condiciones de salto para la transferencia de masa entre un medio libre y un medio poroso. A continuación se describen algunos de ellos.

Para el proceso de difusión y reacción en partículas catalíticas con superficies no uniformes, Wood *et al.* (2000) presentaron una metodología para el desarrollo de una condición de salto local espacialmente suavizada y libre de coeficientes ajustables (*i. e.*, una *condición de salto local cerrada*). A partir de ella obtuvieron una condición de salto local en términos de un coeficiente de reacción efectiva, el cual se puede calcular a partir de la solución de un PCL asociado en una región representativa periódica de la superficie catalítica. Este coeficiente tiene la tarea de incorporar los efectos de las no uniformidades de la superficie catalítica y así como de los parámetros intrínsecos de la reacción local en la descripción del transporte en la escala local. Motivados por el trabajo de Wood *et al.* (2000), Valdés-Parada *et al.* (2006) extendieron y reformularon la metodología de condiciones de salto de Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a) para estudiar el proceso de difusión y reacción heterogénea entre un medio libre y un medio poroso. Ellos obtuvieron una condición de salto del flux de masa, libre de coeficientes ajustables (*i. e.*, una *condición de salto macroscópica cerrada*). La condición de salto contiene un coeficiente de reacción efectiva, el cual incorpora el efecto de la microestructura de la inter-región $\eta\omega$ sobre la descripción del transporte en la escala macroscópica. Este coeficiente se puede determinar a partir de la solución de un PCL asociado, similar al trabajo Wood *et al.* (2000), aunque en este caso el dominio de solución es una región representativa periódica de la frontera medio libre/medio poroso que incluye a la inter-región $\eta\omega$. Además, para completar el modelo del TDA, impusieron la continuidad de la concentración en la superficie divisoria \mathbf{x}_0 .

En un trabajo posterior, Valdés-Parada *et al.* (2007a) desarrollaron una GTE cerrada para estudiar el proceso difusión pasiva entre un medio libre y un medio poroso, la cual está en términos de un tensor de difusividad efectiva dependiente de la posición en la inter-región $\eta\omega$. Las variaciones espaciales de

este coeficiente se determinan a partir de la solución de un PCL asociado en una región representativa periódica de la frontera medio libre/medio poroso que incluye a la inter-región $\eta\omega$. En el mismo trabajo, estos autores aplicaron su metodología de condiciones de salto previamente reportada y desarrollaron la condición de salto del flux de masa libre de coeficientes ajustables. En este caso enfocaron su atención en el efecto de despreciar o no a los términos de superficie en exceso presentes en dicha condición de salto. Los resultados mostraron que un modelo TDA, donde la condición de salto considera el transporte y a la acumulación de superficie, es capaz de describir los perfiles de concentración.

Por último, usando su metodología de condiciones de salto, Valdés-Parada *et al.* (2009b) desarrollaron la condición del salto del flux para el proceso de transporte de masa por difusión y convección con reacción heterogénea y adsorción entre un medio libre y un medio poroso. La condición de salto está en términos de tres coeficientes efectivos (*i. e.*, el tensor de dispersión, el coeficiente de reacción y el coeficiente adsorción efectiva), los cuales se pueden obtener de la solución de un PCL asociado en un dominio representativo de la región de la frontera medio libre/medio poroso que incluye a la inter-región $\eta\omega$. De esta manera, se muestra la dependencia de los dos últimos coeficientes con el número de Peclet de partícula ($Pe = \langle v_\beta \rangle^\beta \ell_\sigma / \mathcal{D}_\beta$), la porosidad del seno del medio poroso y así como del módulo de Thiele de la escala de poro (ϕ). Para completar el TDA, los autores impusieron la continuidad de la concentración en la superficie divisoria. Cabe señalar que, la determinación de las variaciones espaciales del tensor de dispersión total en la inter-región $\eta\omega$, el cual cierra a la GTE de la transferencia de masa por difusión y convección entre un medio libre y un medio poroso, aún es un problema abierto.

2.7 Métodos de escalamiento

El flujo de un fluido en medios porosos es un proceso que se lleva a cabo en la escala microscópica y su efecto se refleja en la escala macroscópica. Debido a esto, enfoque conveniente conveniente para describir a este problema consiste en desarrollar modelos en términos de ecuaciones de medio efectivo, las cuales contienen coeficientes efectivos que capturan la información de la microescala o de la escala anterior. Entre los estudios reportados en la literatura existen diversas metodologías de escalamiento para desarrollar ecuaciones de medio efectivo, tales como el método de homogenización espacial (Sánchez-Palencia, 1980, 1986), el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999) y más recientemente el método de la teoría del promediado termodinámicamente restringida (Gray and Miller, 2014). A continuación se describe brevemente cada uno de estos métodos.

2.7.1 Método de homogenización espacial

El método de homogenización es una técnica matemática utilizada para estudiar problemas de valor a la frontera en dominios con estructura periódica. Este método fue iniciado por Sánchez-Palencia (1980, 1986), quien estudió el flujo de Stokes a través de medios porosos, proporcionando así una justificación teórica de la ley Darcy. Posteriormente, Ene and Polisevski (2012) expandieron y aplicaron los principios de este método para estudiar la convección natural en medios porosos. Algunas de las principales características de este método son las siguientes:

- Para iniciar la aplicación del método se requiere del planteamiento de las ecuaciones que

gobiernan el transporte en la escala local.

- La herramienta básica en el método de homogenización es la expansión asintótica, que permite separar las ecuaciones gobernantes en un número de escalas, donde cada una gobierna el proceso en una escala específica. La expansión se lleva a cabo en términos de un parámetro $\varepsilon = \ell/L$, el cual relaciona la longitud la celda periódica y la longitud característica del sistema macroscópico.
- La deducción de los modelos requiere suponer una estructura periódica en la escala más pequeña. Esta suposición proporcionan las condiciones de frontera necesarias para un análisis matemático riguroso.
- La periodicidad se introduce con el objetivo de facilitar la homogenización y se considera como un modelo conceptual de la escala pequeña en la deducción de los modelos a la escala superior.

2.7.2 Método del promedio volumétrico

Las ecuaciones de medio efectivo, ya sea de los modelos de uno o dos dominios, se pueden obtener mediante el uso de diversas metodologías de escalamiento. En este trabajo, esto se llevará a cabo usando el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999). Este método ha sido utilizado ampliamente en la literatura para derivar ecuaciones de transporte macroscópicas de sistemas multifásicos y de índole jerárquica. Entre las bondades de este método se encuentran que, permite definir las cantidades promedio a partir de las cantidades locales, definir a los coeficientes efectivos, determinar a dichos coeficientes efectivos a partir de la solución de problemas auxiliares e identificar el dominio de validez de las ecuaciones de medio efectivo resultantes. A continuación, enumeran brevemente los principales pasos de dicho método de escalamiento

1. Definir el modelo local, el cual consiste en establecer el modelo válido en la escala del continuo, tanto las ecuaciones gobernantes como las condiciones de frontera.
2. Definir una región de promediado en cada punto del sistema fluido-medio poroso e introducir operadores de promediado.
3. Aplicar el operador de promedio superficial al modelo local.
4. Intercambiar diferenciación temporal e integración espacial usando el teorema general del transporte para un medio poroso rígido (Whitaker, 1981).
5. Intercambiar diferenciación espacial e integración espacial usando el teorema del promediado espacial (Howes and Whitaker, 1985).
6. Usar la condición de frontera interfacial definida en el modelo local en la ecuación promediada superficialmente.
7. Eliminar las cantidades locales restantes dentro de las ecuaciones promediadas descomponiéndolas en su promedio y desviaciones de acuerdo a Gray (1975) como

$$\varphi_\beta|_{\mathbf{r}} = \langle \varphi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{r}} + \tilde{\varphi}_\beta|_{\mathbf{r}} \quad (2.14)$$

Cabe señalar que, después de completar estos pasos, la ecuación promedio resultante es una ecuación abierta, debido a que contiene a dos incógnitas y sólo se tiene una ecuación. De esta manera, los pasos a seguir son

8. Derivar las ecuaciones gobernantes de las desviaciones de ψ_β , proceso llamado como proceso

de cerradura.

9. Resolver formalmente el problema de valor a la frontera de las desviaciones.
10. Introducir la solución formal de las desviaciones en las ecuaciones promedio abiertas y definir los coeficientes efectivos en términos de las variables de cerradura. De esta forma, las ecuaciones obtenidas son ecuaciones promedio cerradas, las cuales corresponden a las GTE del ODA.
11. Por último, se pueden imponer algunos postulados de escalamiento para obtener las ecuaciones promedio escaladas correspondientes al seno de cada región homogénea, las cuales corresponden a las ecuaciones del TDA.

2.7.3 Teoría del promediado termodinámicamente restringida

Una metodología de escalamiento relativamente nueva, es la teoría del promediado termodinámicamente restringido (TCAT por sus siglas en inglés) (Gray and Miller, 2014). Este método tiene el objetivo de formular modelos macroscópicos para medios porosos basados en promedios rigurosos a partir de su contraparte en la microescala junto con una formulación termodinámica apropiada de la misma. El desarrollo de las ecuaciones macroscópicas mediante esta metodología se puede resumir en los siguientes pasos

- Generar una expresión para la desigualdad de la entropía para el sistema completo de interés.
- Plantear el conjunto de ecuaciones de conservación de masa, calor o movimiento en la escala deseada para todas las entidades (volúmenes, áreas, curvas en común y puntos en común) basado en promedios claramente definidos de las cantidades de la microescala.
- La apropiada teoría termodinámica es promediada hasta la escala deseada y se generan las formas diferenciales de la dependencia espacial y temporal de la energía interna.
- La desigualdad de la entropía de la microescala es aumentada usando los productos de los multiplicadores de Lagrange con las ecuaciones de conservación y las ecuaciones diferenciales escaladas consistentemente.
- El conjunto de multiplicadores de Lagrange se determina para seleccionar la combinación de las ecuaciones de conservación que describen la física del problema y eliminar las derivadas temporales de la desigualdad de la entropía, conduciendo así a desigualdad de la entropía restringida.
- Aplicar identidades geométricas y aproximaciones en desigualdad de la entropía para eliminar las derivadas temporales restantes tanto como se sea necesario.
- La expresión de desigualdad de entropía resultante se utiliza para guiar el desarrollo de la forma general de las relaciones de cerradura consistentes con la segunda ley de la termodinámica.
- Por último, el modelado y la experimentación en la microescala y en la macroescala son utilizados para un avance apropiado de las relaciones de cerradura.

Cabe señalar que, los modelos obtenidos mediante esta metodología resultan en sistemas complejos donde las cerraduras se encuentran relacionadas con la termodinámica de las interfaces. En consecuencia, la solución numérica o analítica resulta ser impráctico para muchos sistemas.

Para finalizar esta sección, cabe señalar que, además del método de homogenización y el TCAT, otros métodos de escalamiento también han sido propuestos en la literatura, tales como, el método de promediado de ensamble de fases. Para conservar la brevedad en de este trabajo, estos métodos no se describen en esta revisión.

2.8 Identificación del problema de investigación

La revisión presentada arriba muestra que el modelado del flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso es una tarea muy complicada de completar, la cual ha sido y sigue siendo hasta hoy en día objeto de estudio de numerosas investigaciones. Muchas de ellas se han enfocado en desarrollar modelos macroscópicos que conduzcan a una descripción efectiva o promedio, pero que sigan siendo lo más cercanas a la realidad y cada vez más generales. Entre los dos tipos principales de modelos encontrados en la literatura, un TDA o un ODA, se deduce que un ODA puede conducir a cumplir mejor este objetivo que un TDA. Sin embargo, hasta hoy en día, no ha sido posible proporcionar una GTE definitiva, que sea práctica para describir el flujo de un fluido en cualquier dominio compuesto por un medio libre y un medio poroso y que al mismo tiempo sea ampliamente aceptada en la literatura. Esto ha sido un tema de gran debate en la literatura, ya que se ha sugerido que una GTE apropiada debe incluir términos no convencionales en la inter-región medio libre/medio poroso. Además, hasta donde se conoce, no existe una GTE que no haga uso de coeficientes de transporte empíricos, que solo funcionan para el sistema en el que fueron determinados, para describir el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso. En otras palabras, se desconoce hasta hoy en día como deben ser las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, principalmente en la inter-región medio libre/medio poroso. Por lo tanto, este trabajo de investigación se enfoca en proporcionar GTEs que permitan satisfacer los objetivos antes mencionados tanto para el flujo de un fluido bajo condiciones de flujo de Stokes como de flujo inercial entre un medio libre y un medio poroso. Más aún, busca proporcionar una metodología que permita predecir las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos en un dominio compuesto por un medio libre y un medio poroso.

3. Pregunta de investigación, hipótesis y objetivos

3.1 Pregunta de investigación

¿Pueden las ecuaciones de transporte generalizadas desarrolladas a partir del método del promedio volumétrico describir la transferencia de cantidad de movimiento de un fluido en dominios compuestos por un medio libre y un medio poroso?

3.2 Hipótesis

La transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso puede ser descrita mediante ecuaciones de transporte generalizadas desarrolladas a partir del método de promedio volumétrico.

3.3 Objetivos

3.3.1 General

Desarrollar y validar las ecuaciones de transporte generalizadas de la transferencia de cantidad de movimiento de un fluido entre un medio libre y un medio poroso.

3.3.2 Particulares

1. Demostrar la existencia y determinar la extensión de la capa de Brinkman en la inter-región entre un medio libre y un medio poroso para así justificar la pertinencia de las correcciones de Brinkman a ley de Darcy.
2. Cerrar y validar las ecuaciones de transporte generalizadas del flujo de Stokes de un fluido entre un medio poroso y un medio libre antes adoptar un conjunto de suposiciones basadas en restricciones de longitudes de escala utilizado simulaciones a la escala de poro.

Capítulo 3. Pregunta de investigación, hipótesis y objetivos

3. Cerrar las ecuaciones de transporte generalizadas del flujo de Stokes de un fluido entre un medio poroso y un medio libre después de adoptar un conjunto de suposiciones basadas en restricciones de longitudes de escala.
4. Extender el objetivo anterior para el flujo inercial de un fluido entre un medio libre y un medio poroso.

4. Flujo de Stokes entre regiones homogéneas

Cuando un fluido viscoso fluye sobre una superficie permeable, en la frontera medio libre/medio poroso se forma una zona de transición en el perfil de velocidad promedio, a través de la cual la velocidad cambia rápidamente de la velocidad en el seno del medio poroso ($u_D = \langle v_\beta \rangle_\omega$) a la velocidad de deslizamiento en la superficie del mismo ($u_{int} = \langle v_\beta \rangle_{int}$). A esta zona transición se le conoce como la capa de Brinkman, y el flujo dentro de ella puede determinar otras cantidades como la transferencia de calor y masa entre la región del medio libre y el medio poroso (Chandesris and Jamet, 2006, 2007, 2009). No obstante, se han reportado resultados controversiales acerca del espesor de la capa de Brinkman (δ_B), y por ende, acerca de la ecuación gobernante del flujo válida en la región del medio poroso. Por un lado, diversos trabajos han sugerido que el tamaño de la zona de transición es $\delta_B \approx O(\sqrt{K_\beta \omega})$ (Tam, 1969; Saffman, 1971; Goyeau *et al.*, 2003), por lo que para describir el flujo del fluido en la región del medio poroso, es suficiente utilizar a la ley de Darcy. Por otro lado, diversos trabajos han mostrado que el tamaño de la zona de transición es varios órdenes de magnitud más grande que la raíz cuadrada de la permeabilidad (Gupte and Advani, 1997; Goharzadeh *et al.*, 2005; Morad and Khalili, 2009), por lo que para describir el flujo del fluido en la región del medio poroso, es necesario incluir términos adicionales en la ecuación de cantidad movimiento, tal como la corrección de Brinkman a la ley Darcy. Sin embargo, estas discrepancias en las ecuaciones gobernantes del flujo en el medio poroso pueden conducir a diferentes predicciones del flujo en la zona de transición y así como en las regiones homogéneas, las cuales a su vez pueden conducir a diferentes descripciones de otras cantidades.

El objetivo de este capítulo es mostrar la existencia de la capa de Brinkman en una frontera medio libre/medio poroso, y mostrar que su tamaño está directamente relacionado con el tamaño de la región de promediado (utilizada para medir cantidades promedio) y la porosidad del seno del medio poroso. Además, se desea mostrar que esta capa es un resultado de utilizar cantidades promedio, y no de resolver ecuaciones de medio efectivo de transporte. Esta idea se reporta en los trabajos de

Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019), en donde como sistema de estudio se utiliza un canal parcialmente lleno con un medio poroso homogéneo. En el trabajo de Ochoa-Tapia *et al.* (2017) se utiliza un medio poroso consolidado compuesto de un arreglo periódico de capilares paralelos orientados en la dirección del flujo. Mientras que, en el trabajo de Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019) el medio poroso se compone de un arreglo de placas paralelas orientadas en la dirección del flujo. Aunque en ambos trabajos se muestra que el tamaño de la capa de Brinkman es del orden de la región de promediado utilizada, y que es un resultado de utilizar cantidades promedio, el sistema de estudio contiene las siguientes limitaciones: (1) Dadas las geometrías del medio poroso utilizadas, el flujo en la región del medio libre se encuentra desconectado de aquel en el medio poroso, lo cual puede sugerir que las conclusiones obtenidas solo son válidas para cuando el flujo en ambas regiones no es considerado. Además, (2) los resultados están limitados a medios porosos hechos de capilares o placas paralelas, dejando de lado a los medios porosos particulados y/o fibrosos.

De lo anterior, en este capítulo se estudia la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso particulado utilizando simulaciones a la escala de poroso, el cual permite el intercambio de cantidad de movimiento entre el medio libre y el medio poroso. Para ello se utilizan tres modelos de medios porosos compuestos de arreglos periódicos de una celda unitaria cuadrada con partículas sólidas.

4.1 Planteamiento del problema

4.1.1 Definición del sistema y de las ecuaciones gobernantes en la microescala

Como se mencionó arriba, el objetivo de este capítulo es analizar la existencia y el tamaño de la capa Brinkman en la frontera entre una región de medio libre y un medio poroso. Para llevar a cabo esto es necesario conocer el perfil de velocidad promedio en algún sistema medio libre/medio poroso. Una opción para ello consiste resolver las ecuaciones promedio que gobiernan a la transferencia de masa total y cantidad de movimiento en la escala macroscópica. Sin embargo, como se mencionó al inicio, ya que existen diferentes ecuaciones para modelar el transporte en el medio poroso, los perfiles de velocidad promedio dependerán del modelo elegido (Neale and Nader, 1974; Valdés-Parada *et al.*, 2013; Zampogna and Bottaro, 2016; Ochoa-Tapia *et al.*, 2017; Hernandez-Rodriguez *et al.*, 2019). Este problema se puede evitar si el perfil de velocidad promedio se obtiene únicamente de promediar, usando una región de promediado, el perfil de velocidad local. Por lo tanto, para obtener los perfiles de velocidad promedio, primero es necesario resolver el problema válido en la escala microscópica en un sistema medio libre/medio poroso.

Para cumplir con los objetivos de este capítulo, se considera el sistema medio libre/medio poroso que muestra en la figura 4.1. El sistema consiste en el flujo a través de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso rígido y homogéneo, similar al utilizado por Beavers and Joseph (1967). La fase fluida se representa por la fase $-\beta$ mientras que la fase sólida por la fase $-\sigma$. La región de medio libre, de altura L_η y localizada en la porción superior del canal, se denominará a lo largo de este capítulo como la región $-\eta$. Además, la región ocupada por el medio poroso, de altura L_ω y localizada en la parte inferior del canal, se denominará como la región $-\omega$. Con esto en mente, se considera que el sistema está sujeto a las siguientes suposiciones iniciales

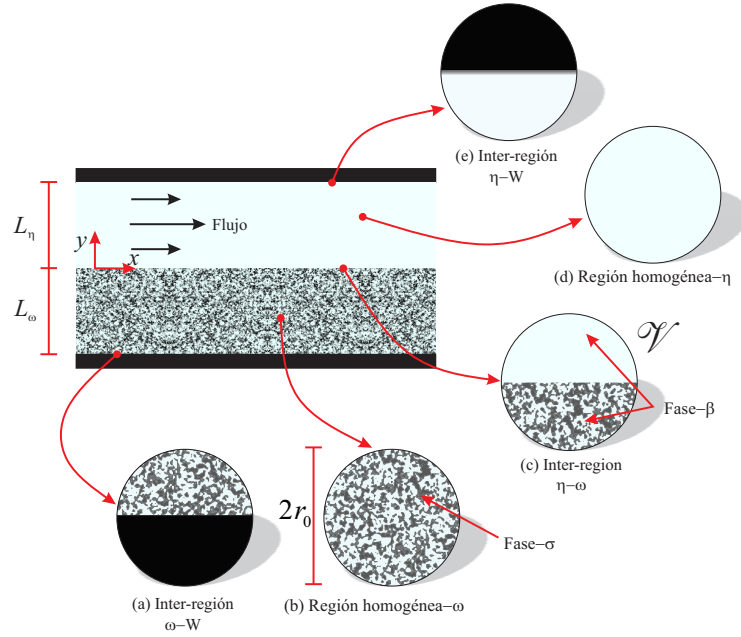


Figura 4.1: Esquema de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso similar al analizado por Beavers and Joseph (1967). Además se muestra la región de promediado \mathcal{V} en cinco posiciones, dos en las regiones homogéneas ((b) el seno del medio poroso y (d) el seno del medio libre) y tres en las inter-regiones ((a) pared inferior/medio poroso, (c) medio libre/medio poroso y (e) medio libre/pared superior). Las longitudes características de la región del medio poroso, del medio libre y de la región de promediado son L_ω , L_η y r_0 , respectivamente.

Suposiciones 4.1.1 — Condiciones de flujo.

1. Flujo incompresible, *i. e.*, la densidad del fluido (ρ_β) se mantiene constante con respecto al tiempo y a la posición.
2. Fluido newtoniano, *i. e.*, que la relación entre el esfuerzo cortante aplicado sobre el fluido y la velocidad de deformación es lineal, donde la pendiente está dada por la viscosidad dinámica (μ_β).
3. Medio poroso rígido y homogéneo compuesto de una fase sólida (fase- σ) impermeable.
4. Efectos inerciales despreciables con respecto a los esfuerzos viscosos, *i. e.*, $Re_p \ll 1$
5. Proceso de flujo en estado estacionario.

Por lo tanto, las ecuaciones que gobiernan el transporte de masa total y de cantidad de movimiento en la escala microscópica de la fase- β están dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \tag{4.1a}$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad \text{en la fase } -\beta \tag{4.1b}$$

Dirigiendo la atención a las condiciones de frontera, debido a que el medio poroso es rígido, se considera que la condición de frontera de no deslizamiento es válida en todas las interfases sólido-fluido contenidas en el sistema entero ($\mathcal{A}_{\beta\sigma,M}$)

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma,M} \tag{4.1c}$$

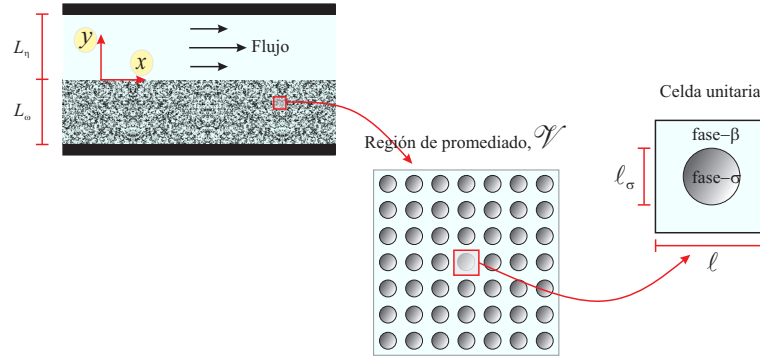


Figura 4.2: Esquema de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso rígido y homogéneo compuesto de un arreglo periódico de una celda unitaria con una partícula circular centrada

Esta condición de frontera también se debe satisfacer en las paredes impermeables que limitan al canal, tanto en la dirección vertical (coordenada $-y$) como en la horizontal (coordenada $-z$). Además, para completar el planteamiento del problema, es necesario especificar las condiciones de frontera en las entradas y salidas del sistema. En este caso, con base en el sistema de Beavers and Joseph (1967), se supone que el flujo en las regiones $-\eta$ y $-\omega$ es causado por una caída de presión promedio constante en la dirección x (coordenada $-x$), la cual se puede expresar como

$$-\frac{\partial \langle p_\beta \rangle^\beta}{\partial x} = \frac{\langle p_\beta \rangle^\beta|_{x=0} - \langle p_\beta \rangle^\beta|_{x=L}}{L} = C \quad \forall y \in (-L_\omega, L_\eta) \quad (4.1d)$$

De esta forma, las Ecs. (4.1) constituyen el modelo completo en la microescala (o escala de poro), cuya solución conduce a obtener a los perfiles de velocidad y presión locales. Sin embargo, se debe notar que, en general, la solución del problema local en todo el sistema medio libre/medio poroso es casi imposible de obtener, ya que en la mayoría de los casos se desconoce la microestructura de un medio poroso real. Además, incluso si se conociera, la disparidad de longitudes características entre el tamaño de poro (ℓ) y el tamaño del medio poroso (L_ω) hace que la solución del problema de la escala microscópica sea altamente costosa computacionalmente (Whitaker, 1999). Este hecho ha motivado a numerosos trabajos a desarrollar modelos macroscópicos para describir adecuadamente un sistema medio libre/medio poroso en la escala macroscópica. Esta idea se utiliza en el capítulo 5 donde a partir del método del promedio volumétrico se desarrollan las ecuaciones promedio que permiten estudiar la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso.

Con el fin de reducir el alto costo computacional de la solución del problema de la escala microscópica, y cumplir con los objetivos antes mencionados, en este capítulo se utilizan modelos de medios porosos de geometrías simplificadas. Además, en los capítulos subsecuentes la solución del problema local se utilizará únicamente para propósitos de comparación y validación de las ecuaciones de medio efectivo desarrolladas. Cabe señalar que la solución numérica del problema de la escala microscópica se denominará a lo largo de este trabajo como simulación a la escala de poro (o PSS por sus siglas en inglés).

4.2 Perfiles de velocidad promedio

4.2.1 Simulaciones a la escala de poro

Para resolver el problema de la escala microscópica dado por las Ecs. (4.1), el análisis se restringe a una sección del canal donde el flujo es completamente desarrollado. Además, se considera que el medio poroso se compone por un arreglo periódico de una celda unitaria cuadrada de longitud de lado ℓ , la cual contiene partículas sólidas de longitud ℓ_σ , tal como la que se muestra en la figura 4.2. Bajo estas condiciones, el campo de la velocidad local será un campo periódico en la dirección horizontal (coordenada x) en una distancia igual a la longitud característica de una celda unitaria. Por lo tanto, basta con resolver el problema de la microescala en un dominio periódico representativo como el que se muestra en la figura 4.3. Este dominio de solución tiene una altura $L_T = L_\omega + L_\eta$ y un ancho ℓ . Esto requiere imponer la condición de frontera de periodicidad de la velocidad local en la dirección del flujo, la cual está dada por

$$\mathbf{v}_\beta(\mathbf{r} + \ell \mathbf{i}) = \mathbf{v}_\beta(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

Siguiendo el trabajo de Eidsath *et al.* (1983), para generar el campo de velocidad local mediante una caída de presión promedio, se descompone la presión local en términos de su promedio intrínseco $\langle p_\beta \rangle^\beta$ y desviaciones locales \tilde{p}_β como

$$p_\beta = \langle p_\beta \rangle^\beta + \tilde{p}_\beta \quad (4.3)$$

lo cual permite escribir a la caída de presión promedio como sigue

$$-\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta = C \mathbf{i} \quad (4.4)$$

donde C es una constante que permite definir la magnitud de la caída de presión promedio, la cual debe ser lo suficientemente pequeña con el fin de satisfacer la suposición de flujo reptante. El valor de C se determina como se muestra en la §4.2.1. Además, para completar el problema de la microescala, se impone que las desviaciones locales de la presión son un campo periódico

$$\tilde{p}_\beta(\mathbf{r}) = \tilde{p}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{i}\ell) \quad (4.5)$$

y deben satisfacer la restricción promedio dada por

$$\langle \tilde{p}_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (4.6)$$

De esta forma, el problema de la microescala está completamente definido y se puede reescribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \tilde{p}_\beta + \nabla^2 \mathbf{v}_\beta + C \mathbf{i} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (4.7b)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma}, \quad y = L_\eta, \quad L_\omega \quad (4.7c)$$

$$\mathbf{v}_\beta(\mathbf{r}/\ell) = \mathbf{v}_\beta(\mathbf{r}/\ell + \mathbf{i}) \quad (4.7d)$$

$$\tilde{p}_\beta(\mathbf{r}) = \tilde{p}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{i}\ell) \quad (4.7e)$$

$$\langle \tilde{p} \rangle^\beta = 0 \quad (4.7f)$$

Ahora, con el fin de obtener resultados genéricos, se recurre a escribir el problema de la microescala en forma adimensional. Para ello, se introduce el conjunto de variables adimensionales dadas por

$$X = \frac{x}{\ell}; \quad Y = \frac{y}{\ell}; \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}_\beta}{v_{ref}}; \quad p = \frac{(p_\beta + \rho_\beta y g)}{p_{ref}}; \quad C^* = \frac{\ell C}{p_{ref}} \quad (4.8)$$

donde $v_{ref} = \mu_\beta / (\rho_\beta \ell)$ y $p_{ref} = \mu_\beta^2 / (\ell^2 \rho)$ son la velocidad y la presión de referencias. Por consiguiente, las Ecs. (4.7) toman la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \tilde{p} + \nabla^2 \mathbf{u} + C^* \mathbf{i} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma}, \quad Y = L_\eta/\ell, \quad L_\omega \ell \quad (4.9c)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}/\ell + \mathbf{i}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}/\ell) \quad (4.9d)$$

$$\tilde{p}(\mathbf{r}/\ell + \mathbf{i}) = \tilde{p}(\mathbf{r}/\ell) \quad (4.9e)$$

$$\langle \tilde{p} \rangle^\beta = 0 \quad (4.9f)$$

La solución de este problema se llevó a cabo usando el resolvidor de elementos finitos COMSOL Multiphysics 5.2. Se utilizó una malla triangular no estructurada y se escogió el resolvidor PARDISO. Para garantizar que los resultados fuesen independientes de los parámetros numéricos se realizaron pruebas estándar de convergencia. Estas pruebas consistieron incrementar gradualmente el número de elementos y comparar los perfiles de velocidad local obtenidos en los cortes verticales localizados en $X = 0$ y $X = 0.5$. La malla seleccionada fue aquella para cuando el error relativo porcentual entre los perfiles de dos sucesiones fuese menor que la tolerancia de $10^{-4} \%$.

Se considera que el sistema medio libre/medio poroso consiste en un medio poroso con $L_\omega = 10^2 \ell$ y una región de medio libre con $L_\eta = 10^3 \ell$. Esto permitió tener un canal con una altura total igual a $L_T = L_\omega + L_\eta = 1.1 \times 10^3 \ell$, el cual conserva una disparidad de escala de dos ordenes de magnitud entre el tamaño de poro y el tamaño del medio poroso ($\ell \ll L_\omega$), y tres órdenes de magnitud entre el tamaño de poro y el tamaño del medio libre ($\ell \ll L_\eta$).

Todos los resultados se obtuvieron considerando tres modelos del medio poroso, las cuales se muestran la figura 4.4. La primera estructura consiste en un arreglo periódico de una celda unitaria bidimensional con una partícula circular centrada. La segunda de una celda unitaria con partículas circulares en un arreglo escalonado. Y la tercera de una celda unitaria con una partícula cuadrada centrada. Cabe señalar el tamaño de las partículas ℓ_σ depende de la geometría de estas en cada celda unitaria, el cual se determina al especificar el valor de la porosidad del seno del medio poroso $\varepsilon_{\beta\omega}$.

Determinación de la caída de presión adimensional para flujo reptante

Para resolver el problema de valor a la frontera dado por las Ecs. (4.9), es necesario especificar el valor de la caída de presión adimensional C^* . Cabe señalar que, bajo condiciones de flujo reptante, el

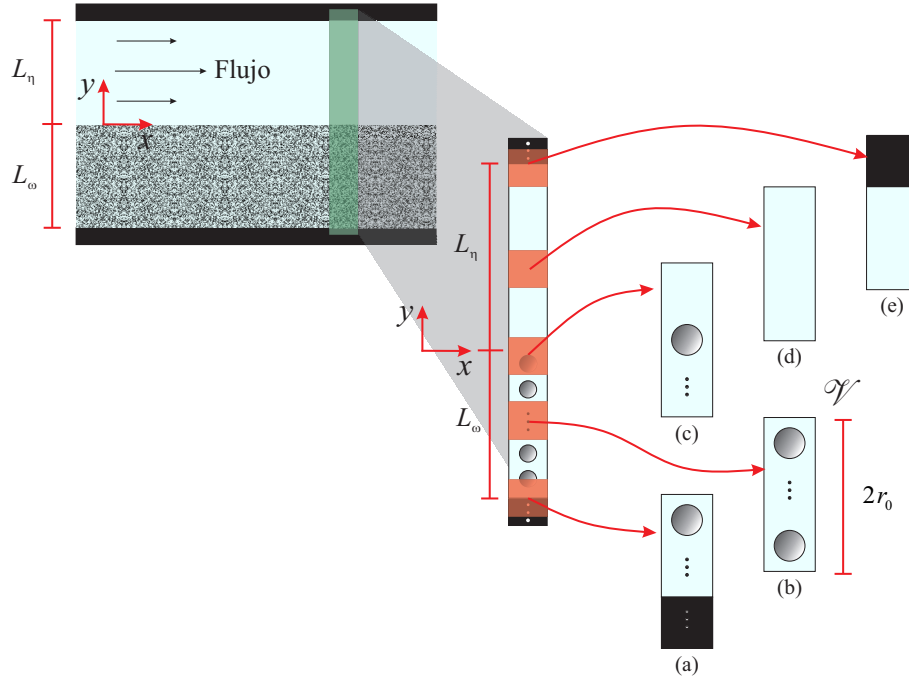


Figura 4.3: Dominio representativo de canal parcialmente ocupado por un medio poroso para la solución del problema de la escala de poro. Aquí se muestran diferentes porciones del sistema: (a) inter-región medio poroso/pared impermeable, (b) medio poroso homogéneo, (c) inter-región medio libre/medio poroso, (d) región de medio libre y (e) inter-región medio libre/pared impermeable.

valor de C^* se puede agrupar en cada variable dependiente de las Ecs. (4.9) y resolver el problema local con el término no homogéneo dado por \mathbf{i} . Así, el campo de velocidad local para otros valores de C^* se pueden obtener simplemente de multiplicar el campo de las variables locales resultantes por el valor de C^* deseado. No obstante, puede haber situaciones en donde el flujo en la parte homogénea de cada región de un sistema medio libre/medio poroso puede ser no inercial y en la frontera medio libre/medio poroso ser inercial (Ochoa-Tapia and Whitaker, 1997). Por lo tanto, en lugar de proponer algún valor arbitrario de C^* , vale la pena determinar el valor máximo de C^* para el cual las Ecs. (4.9) son válidas en condiciones de flujo reptante en cualquier lugar del sistema medio libre/medio poroso.

Para este fin, se resolvió el problema microscópico dado por las Ecs. (4.9) usando diferentes valores de C^* en el dominio representativo del canal. Posteriormente, se compararon los perfiles de velocidad local resultantes con los obtenidos de resolver el problema de flujo inercial en el mismo dominio, donde la ecuación de Stokes se reemplaza por la ecuación de Navier-Stokes. Esta última ecuación en forma adimensional se puede escribir como

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \tilde{p} + \nabla^2 \mathbf{u} + C^* \mathbf{i} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (4.10)$$

Cuando los perfiles locales del primer conjunto de ecuaciones fueron idénticos a los obtenidos con el segundo conjunto, los efectos inerciales se consideraron despreciables con respecto a los efectos viscosos, lo cual determinó el valor máximo de C^* para condiciones de flujo reptante.

En la tabla 4.1 se reporta el valor máximo del porcentaje de error relativo de la magnitud de la velocidad local obtenida a partir de la solución de las ecuaciones de flujo inercial con respecto a la obtenida de resolver a las Ecs. (4.9). Los cálculos se realizaron usando seis valores de C^* para dos

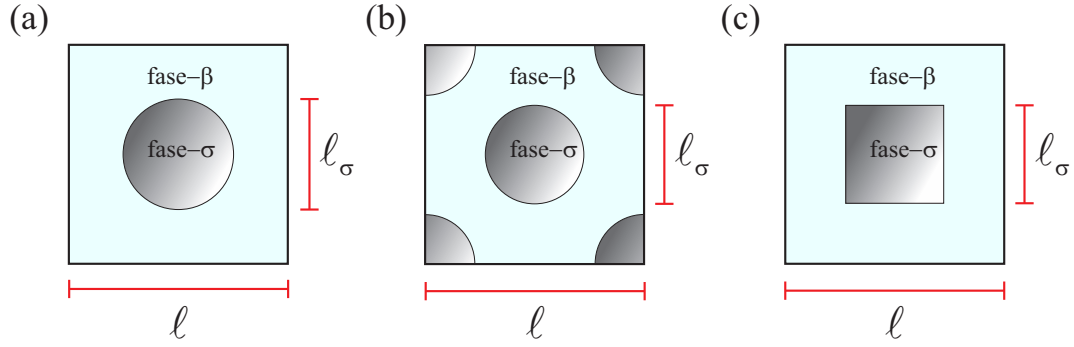


Figura 4.4: Sección transversal de las celdas unitarias utilizadas para construir cada medio poroso: (a) cilindro circular centrado, (b) cilindro circular escalonado y (c) prisma cuadrangular centrado.

Tabla 4.1: Porcentaje de error relativo máximo del modelo de Navier-Stokes para predecir la velocidad local con respecto al modelo de Stokes para diferentes valores de C^* . Estos cálculos son para el medio poroso compuesto de círculos en línea, $L_\eta = 10^3 \ell$ and $L_\omega = 10^2 \ell$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$.

C^*	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$
10^{-5}	0.00120	1.61×10^{-4}
10^{-4}	0.01204	1.61×10^{-3}
10^{-3}	0.12090	1.63×10^{-2}
10^{-2}	1.22278	1.67×10^{-1}
0.1	8.25514	4.91
1	18.6852	19.29

valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Como se puede ver, el error incrementa conforme el valor de C^* crece, lo cual muestra que las contribuciones inerciales se vuelven más importantes que las contribuciones viscosas. Los menores errores para cada valor de C^* se localizaron en las regiones homogéneas del sistema medio libre/medio poroso, mientras que los mayores errores se encontraron en la frontera medio libre/medio poroso. Note que estos últimos errores son los reportados en la tabla 4.1. Esto confirma que, mientras en las regiones homogéneas los efectos inerciales se pueden considerar despreciables, incluso para valores C^* cercanos a la unidad, en la frontera medio libre/medio poroso estos efectos pueden existir y deben considerarse a la hora de describir la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso.

Por otro lado, en la tabla 4.1 se puede notar que, para $C^* = 10^{-3}$ el error es $\mathbf{O}(10^{-1})$ cuando $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y el error es $\mathbf{O}(10^{-2})$ cuando $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$. Esto puede sugerir que $C^* = 10^{-3}$ es el máximo valor de C^* para el cual las Ecs. (4.9) son válidas. Sin embargo, para aclarar esto, en las figuras 4.5 y 4.6 se muestra el campo de la magnitud de la velocidad local y las líneas de corriente, respectivamente, para diferentes valores de C^* , en la frontera medio libre/medio poroso. Estos perfiles se obtuvieron usando las ecuaciones de flujo inercial. En primer lugar, en la figura 4.5 se puede observar que los perfiles de la velocidad local llegan a ser cualitativamente similares para $C^* < 10^{-4}$. De hecho, se podría decir que, el campo de velocidad local para $C^* = 1 \times 10^{-4}$ se puede obtener de multiplicar por 10 al obtenido para $C^* = 1 \times 10^{-5}$. En la figura 4.6 se pueden corroborar estos resultados, donde se muestra que las líneas de corriente para $C^* = 10^{-5}$ y $C^* = 10^{-4}$ son similares. En contraste, las líneas de corriente para $C^* = 0.1$ y $C^* = 1$ son claramente diferentes. Por lo tanto, esto puede sugerir que el valor C^* debe ser menor que 10^{-4} , en lugar de 10^{-3} .

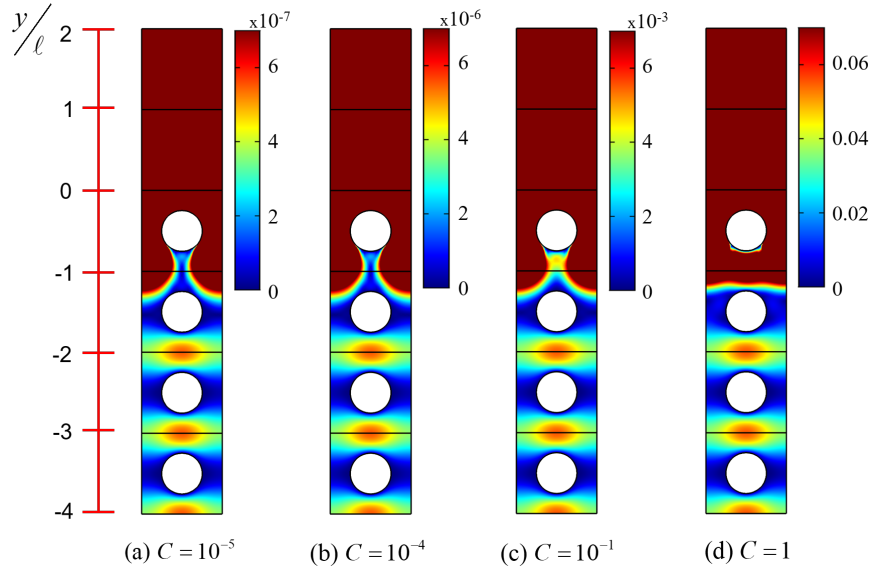


Figura 4.5: Perfil de la magnitud de la velocidad local en la frontera medio libre/medio poroso para diferentes valores de la presión adimensional C^* . Estos cálculos se obtuvieron usando el modelo de flujo inercial, el medio poroso compuesto de círculos en línea, $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$ y $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$.

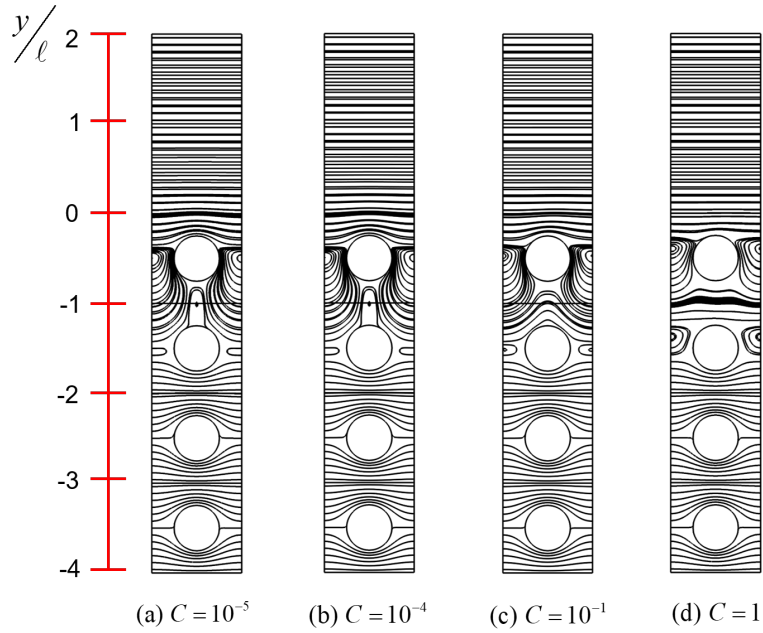


Figura 4.6: Líneas de corriente en la frontera medio libre/medio poroso para diferentes valores de la presión adimensional C^* . Estos cálculos se obtuvieron usando el modelo de flujo de inercial, el medio poroso compuesto de círculos en línea, $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$ y $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$.

Con el fin de tener una perspectiva cuantitativa acerca del máximo valor de C^* , usando los perfiles locales obtenidos de la solución de las ecuaciones de flujo inercial, se calculó el número de Reynolds característico del seno de cada región, los cuales se definen como

$$\text{Re}_\eta = \frac{\rho_\beta v_{\beta,max} L_\eta}{\mu_\beta}, \quad \text{Re}_{p\omega} = \frac{\rho_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega d}{\mu_\beta} \quad (4.11)$$

Capítulo 4. Flujo de Stokes entre regiones homogéneas

donde $v_{\beta, \text{máx}}$ y $\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}$ son la velocidad máxima en el medio libre y la velocidad de Darcy (o velocidad en el seno del medio poroso), respectivamente. Al utilizar las variables adimensionales dadas por la Ec. (4.8), dichos números de Reynolds se pueden escribir como

$$\text{Re}_{\eta} = \frac{L_{\eta} u_{\text{max}}}{\ell}, \quad \text{Re}_{p\omega} = \frac{\ell_{\sigma} K_{\beta\omega}}{\ell^2} C^* \quad (4.12)$$

Nótese que en la definición de $\text{Re}_{p\omega}$ se ha utilizado a la ley de Darcy para calcular a $\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}$, por lo que ahora es necesario conocer el valor de la permeabilidad del seno del medio poroso ($K_{\beta\omega}$), el cual se calcula más adelante.

Tabla 4.2: Números de Reynolds en las regiones homogéneas del sistema medio libre/medio poroso. Estos resultados son usando el medio poroso compuesto de círculos en línea, $L_{\eta} = 10^3 \ell$, $L_{\omega} = 10^2 \ell$, $C = 10^{-5}$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$.

$\varepsilon_{\beta\omega}$	$\text{Re}_{p\omega}$	Re_{η}
0.4	4.96×10^{-9}	1250
0.8	9.79×10^{-8}	1251

Ambos números de Reynolds se calcularon usando diferentes valores de C^* para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Se encontró que solo aquellos para $C^* = 10^{-5}$, satisfacen que el flujo en ambas regiones corresponden a un flujo reptante. En la tabla 4.2 se reportan los valores de los números de Reynolds para este valor de C^* . Por otro lado, en la tabla 4.3 se reportan los valores del $\text{Re}_{p\omega}$ en diferentes celdas unitarias localizadas en la frontera medio libre/medio poroso. De estos valores se observa que el flujo en la frontera puede considerarse como flujo reptante solamente para $C^* \ll 10^{-4}$. Por lo tanto, si uno está dispuesto a aceptar el error reportado en la tabla 4.1, el máximo valor de C^* para el cual las contribuciones inerciales se pueden considerar despreciables con respecto a las viscosas tanto en las regiones homogéneas como en la frontera medio libre/medio poroso es 10^{-5} . En otras palabras, este es el máximo valor de C^* para el cual las Ecs. (4.9) son válidas en condiciones de flujo de reptante. Este valor de C^* se utiliza en el resto de este capítulo para realizar las simulaciones a la escala de poro. Cabe señalar que los resultados mostrados hasta este punto son únicamente para la geometría mostrada en la figura 4.2. Observaciones similares se encontraron usando los medios porosos compuestos de una celda unitaria con círculos escalonados y un cuadrado centrado (ver figura 4.4(b) y (c)).

4.2.2 Promediado de la velocidad local

Una vez obtenido el perfil de velocidad local, este se promedió, usando una región de promediado \mathcal{V} , para obtener el perfil de velocidad promedio. Para ello, tomando en cuenta que la geometría del dominio utilizado para la PSS tiene una sección transversal rectangular, se consideró un paralelepípedo con una sección transversal rectangular como la región de promediado, tal como los que muestran en la figura 4.3. El área de su sección transversal rectangular es igual a $2r_0\ell$, donde r_0 denota a la mitad de su altura y ℓ su ancho. En todos cálculos se usó un número entero n de celdas unitarias dentro de la región promediado, por lo que $2r_0 = n\ell$. De esta manera, en términos de dicha región de promedio, se

Tabla 4.3: Números de Reynolds en la frontera medio libre/medio poroso usando el medio poroso hecho de círculos en línea, diferentes valores de la presión adimensional, C^* , para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. En todos los cálculos se utilizó un sistema con $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$.

$\varepsilon_{\beta\omega}$	y/ℓ	$Re_p(y/\ell)$			
		$C^* = 10^{-5}$	$C^* = 10^{-4}$	$C^* = 0.1$	$C^* = 1$
0.4	1.5	7.01×10^{-3}	7.01×10^{-2}	70.0	697
	0.5	2.65×10^{-3}	2.65×10^{-2}	26.4	261
	-0.5	7.41×10^{-5}	7.41×10^{-4}	0.70	5.51
	-1.5	1.24×10^{-8}	1.24×10^{-7}	1.24×10^{-4}	1.24×10^{-3}
	-2.5	1.24×10^{-8}	1.24×10^{-7}	1.24×10^{-4}	1.24×10^{-3}
0.8	1.5	4.54×10^{-3}	4.54×10^{-2}	45.3	451
	0.5	2.02×10^{-3}	2.02×10^{-2}	20.1	200
	-0.5	1.48×10^{-4}	1.48×10^{-3}	1.44	13.1
	-1.5	5.31×10^{-8}	5.31×10^{-7}	5.58×10^{-4}	6.31×10^{-3}
	-2.5	1.23×10^{-7}	1.23×10^{-6}	1.23×10^{-3}	1.23×10^{-2}

definió el operador de promedio intrínseco de la velocidad dado por

$$\langle u_x \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V_\beta} \int_{\gamma_\beta(\mathbf{x})} u_x dV \quad (4.13)$$

Nótese que se busca calcular únicamente la componente del vector de la velocidad local adimensional en la dirección de la caída de presión ($u_x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}$). Esto se debe a que la componente vertical se puede despreciar con respecto a la componente horizontal debido a la suposición de flujo totalmente desarrollado (ver figura 4.6). Cabe señalar que, debido a esto y a la periodicidad de la geometría del sistema en la dirección horizontal, los cambios más importantes de la velocidad de promedio intrínseco son en la dirección vertical (en la coordenada $-y$). De esta manera, al aplicar el operador de promedio intrínseco, se obtuvo el perfil de velocidad promedio, el cual se presenta como sigue

$$u^* = \frac{\langle u_x \rangle}{u_{\text{máx}}} \quad (4.14)$$

donde $u_{\text{máx}} = \langle u_x \rangle^\beta$ es el valor máximo del promedio intrínseco de la velocidad, el cual se localiza aproximadamente a la mitad en la región del medio libre.

En la figura 4.7 se muestran los perfiles de velocidad promedio obtenidos de promediar los perfiles de velocidad local usando diferentes tamaños de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estos perfiles se obtuvieron usando tres medios porosos hechos a partir de un arreglo periódico de cada una de las celdas unitarias mostradas en la figura 4.4. En particular, en las figuras 4.7(a) y (d) se muestran los perfiles de velocidad promedio en todo el sistema medio libre/medio poroso. Sin embargo, a este nivel de visualización, no es posible categóricamente concluir si el tamaño de la región de promediado o la geometría del medio poroso tiene algún efecto sobre los perfiles de velocidad promedio. Por esta razón, en las figuras 4.7(b) y (e) se muestra un acercamiento de los perfiles alrededor de la velocidad máxima. En esta zona, es claro que para el mismo valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$, la geometría del medio poroso y el tamaño de r_0 tienen efectos despreciables sobre los perfiles de velocidad promedio. Esto se atribuye

a que en el medio libre se satisface la disparidad de longitudes de escala dada por $r_0^2/L_\eta^2 \ll 1$. De acuerdo a Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a) en esta situación es posible suponer que

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (4.15)$$

Además, en las figuras 4.7(c) y (f) se muestra un acercamiento de los perfiles de velocidad promedio en la inter-región medio libre/medio poroso. Por un lado, para un valor fijo de r_0 , se observa que los perfiles para las tres geometrías del medio poroso se encuentran superpuestas, sugiriendo que los efectos de la microestructura de cada medio poroso sobre los perfiles de velocidad promedio son despreciables. Por otro lado, es posible apreciar que los perfiles de velocidad promedio cambian rápidamente de la velocidad en el seno del medio poroso (velocidad de Darcy o velocidad de filtración) en $Y = -r_0/\ell$ a otra en el seno del medio libre en $Y = r_0/\ell$. Nótese que el tamaño de esta zona de transición crece al incrementar tanto el tamaño de r_0 y el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Por lo tanto, la zona de transición está limitada por las posiciones del centroide de la región de promediado dadas por $-r_0 \leq y \leq +r_0$, y en consecuencia su tamaño es aproximadamente del orden de $O(2r_0)$. Cabe señalar que para estas posiciones las muestras que corresponden a $y \leq -r_0$ están localizadas completamente en el medio poroso y aquellas a $y \geq r_0$ están localizadas completamente en el medio libre.

En este punto, cabe recordar que la porción de la zona transición de la velocidad cuyos límites son la velocidad de deslizamiento localizada en la superficie del medio poroso ($\langle u_x \rangle_{int}$) y la velocidad en el seno del medio poroso ($\langle u_x \rangle_\omega$) se conoce como la capa de Brinkman. Con esto en mente, de los resultados mostrados en la figura 4.7, se puede apreciar que la velocidad de Darcy se alcanza en $y \lesssim -r_0$. Por lo tanto, para las geometrías del medio poroso aquí utilizadas, el tamaño de la capa de Brinkman es del orden de $O(r_0)$, y depende del tamaño de la región de promediado. Estas observaciones son idénticas a las obtenidas por Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019), aunque en sus trabajos el flujo del fluido en la región del medio libre está desconectado del flujo del fluido en la región del medio poroso.

Por último, en las figura 4.7(c) y (f) es posible apreciar que la velocidad promedio en la inter-región es una función continua, y no presenta discontinuidades (o saltos). Esto contrasta con los trabajos que hacen uso de un TDA, donde se utilizan condiciones de salto en la superficie divisoria que separa a ambas regiones. Lo cual no debe sorprender puesto que, un TDA es sólo una aproximación del perfil de velocidad promedio.

4.2.3 Comparación con geometrías simples del medio poroso

Los resultados anteriores sugieren que los efectos de la microestructura del medio poroso sobre los perfiles de velocidad promedio son despreciables cuando $r_0 > \ell$. Por lo tanto, es posible que las metodologías aproximadas propuestas por Ochoa-Tapia *et al.* (2017) y Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019) sean una alternativa viable para describir el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso. Cabe recordar que Ochoa-Tapia *et al.* (2017) consideraron que el medio poroso consiste en un arreglo periódico de capilares alineados, mientras que Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019) supusieron que el medio poroso consiste en un arreglo de placas paralelas. Para explorar esta idea, se compararán los resultados mostrados en la figura 4.7 con los obtenidos por Ochoa-Tapia *et al.* (2017) y Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019).

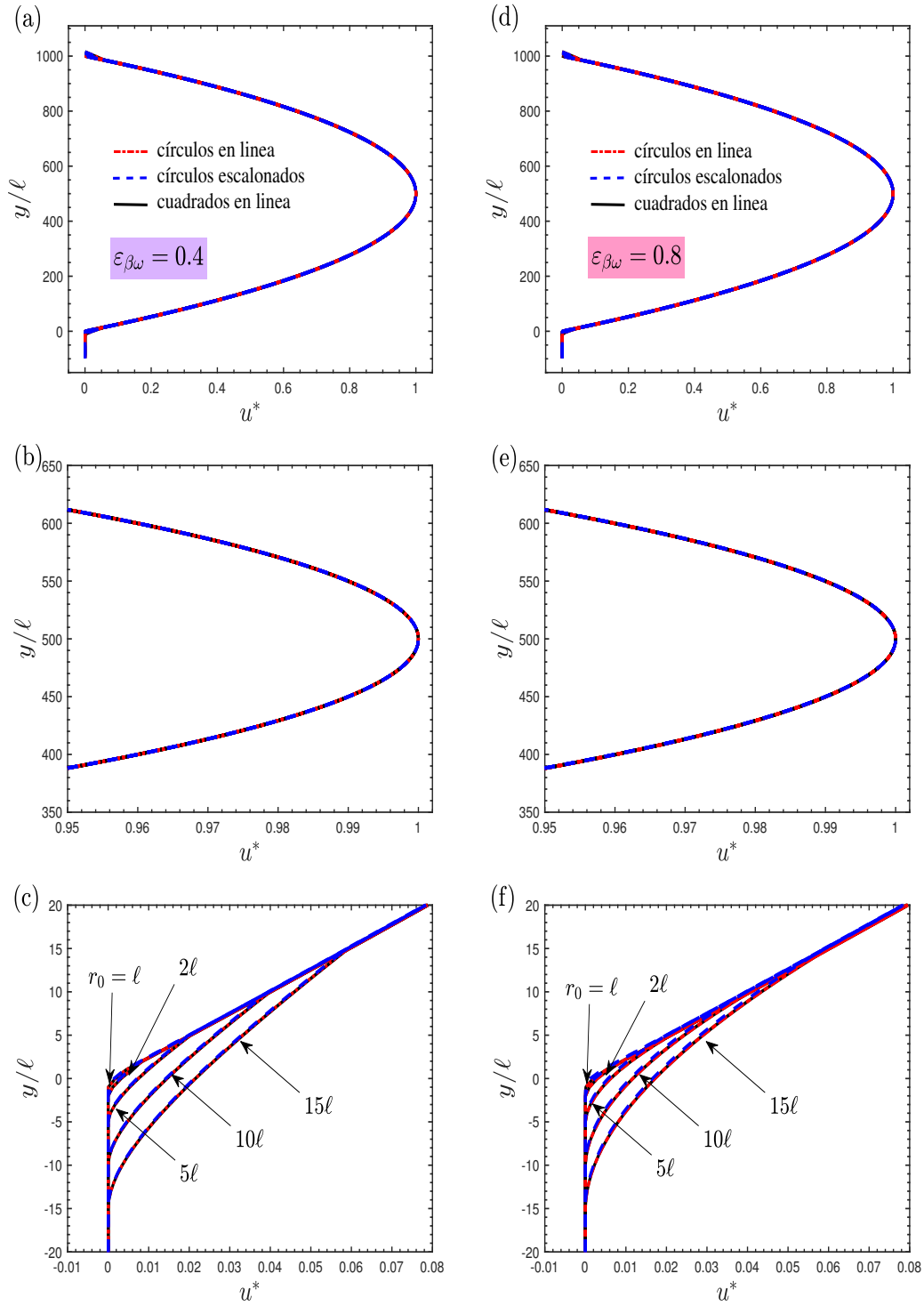


Figura 4.7: Perfiles de velocidad promedio, obtenidos de promediar los perfiles de velocidad local, en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso. Los perfiles son (a) y (d) en el canal completo, (b) y (e) alrededor de la velocidad máxima en la región del medio libre, y (c) y (f) la inter-región medio libre/medio poroso. En todas las simulaciones se fijaron los valores de $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$ y $C^* = 10^{-5}$.

En la figura 4.8 se muestran los perfiles de velocidad promedio obtenidos usando las tres geometrías antes mencionadas. Los cálculos se hicieron considerando diferentes valores de r_0 para dos valores $\varepsilon_{\beta\omega}$. En este caso solo se presentan los perfiles de velocidad obtenidos de la PSS para el medio

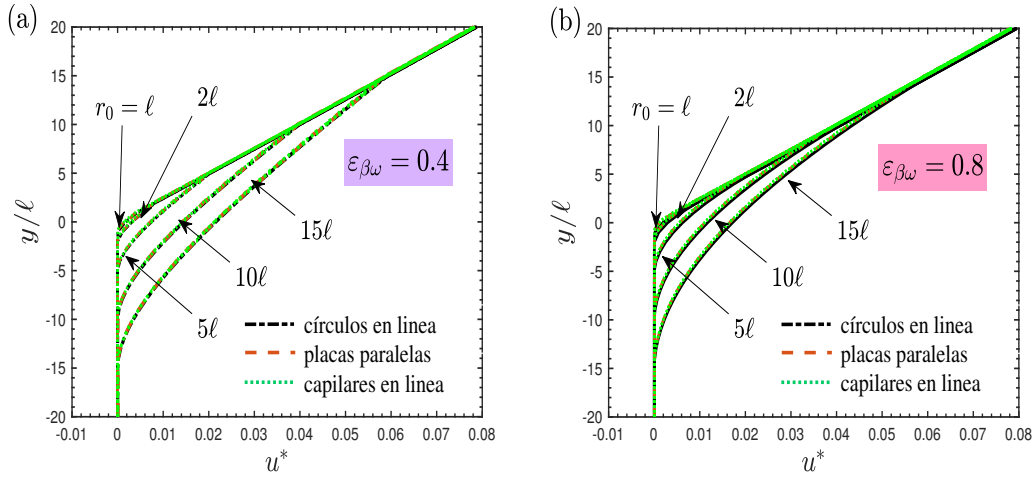


Figura 4.8: Perfiles de velocidad promedio en la inter-región medio libre/medio poroso como función del tamaño de la muestra r_0 para dos valores $\varepsilon_{\beta\omega}$. Los cálculos son para los medios porosos compuestos de círculos en línea, capilares en línea y placas paralelas. En todos los casos se fijó a $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$, $C^* = 10^{-5}$.

poroso compuesto de un arreglo periódico de círculos en línea. Como se puede ver, en cualquier punto del sistema medio libre/medio poroso, los perfiles de todos los casos se encuentran superpuestos, corroborando que los efectos de la microestructura y geometría del medio poroso sobre los perfiles de velocidad promedio pueden considerarse despreciables cuando $r_0 > \ell$. Además, esto muestra que las metodologías aproximadas presentadas por Ochoa-Tapia *et al.* (2017) y Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019) pueden ser una alternativa viable para predecir los perfiles de velocidad promedio en un sistema medio libre/medio poroso, los cuales a su vez se pueden utilizar para estudiar el transporte de calor y masa por convección en este tipo de sistemas. Más aún, los perfiles locales y promedio obtenidos usando estas metodologías pueden utilizarse para predecir las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos en las inter-región medio libre/medio poroso, tal como lo mostraron Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019).

Por su parte, en la figura 4.9 se muestra una comparación de los perfiles de velocidad promedio obtenidos de realizar PSSs usando diferentes tamaños de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. De esta comparación se observa que los perfiles de velocidad promedio para ambos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ y cualquier valor de r_0 son similares en la región homogénea del medio libre (para $y \geq r_0$). Esto ilustra que los efectos de la microestructura del medio poroso sobre los perfiles de velocidad promedio en la región del medio libre tienen un alcance hasta la posición $y = r_0$. Cabe notar que esta posición es igual al límite superior de la inter-región $\eta\omega$, la cual depende del tamaño de r_0 , tal como se mostró anteriormente. Por otro lado, los perfiles de velocidad son diferentes tanto en la inter-región $\eta\omega$ (para $-r_0 \leq y \leq r_0$) como en el seno del medio poroso (para $y \leq -r_0$) en cualquier caso. Cabe notar que aunque los valores de la velocidad promedio en el seno del medio poroso $\langle u_x \rangle_\omega^\beta$ parecen ser iguales en todos los casos, en realidad ellos son diferentes. Esto se presenta en detalle en la tabla 4.4, donde se muestran los valores de la velocidad de deslizamiento $\langle u_x \rangle_{int}^\beta = \langle u_x \rangle^\beta \Big|_{y=0}$ y la velocidad en el seno del medio poroso $\langle u_x \rangle_\omega^\beta$, ambos obtenidos usando diferentes geometrías del medio poroso y diferentes valores de r_0 . Nótese que en todos los casos $\langle u_x \rangle_\omega^\beta$ es mucho menor que $\langle u_x \rangle_{int}^\beta$, confirmando que existe una zona de transición en el perfil de velocidad. Además, se observa que la velocidad de deslizamiento y la velocidad del

seno del medio poroso incrementan al aumentar el valor de ε , mientras que solo la primera incrementa al aumentar el tamaño de r_0 . Más aún, se debe notar que el valor de la velocidad de deslizamiento no posee un valor asintótico conforme incrementa el tamaño de r_0 . Esto se corroboró calculando la velocidad de deslizamiento usando valores de $r_0 > 15\ell$. Resultados similares se obtuvieron para $0.1 \leq \varepsilon_{\beta\omega} \leq 0.9$.

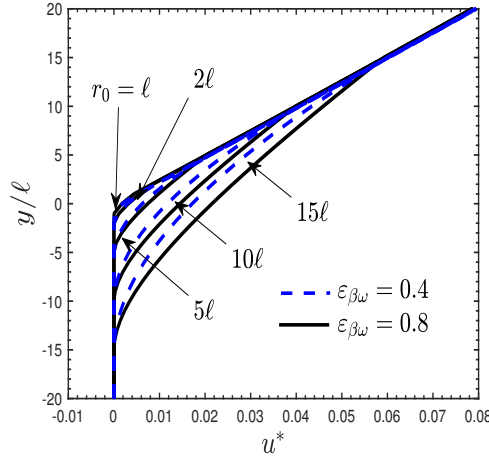


Figura 4.9: Perfiles de la velocidad promedio en la inter-región medio libre medio poroso obtenidos a partir de la PSS como función del tamaño de la muestra r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Todos los resultados son para el medio poroso compuesto de círculos en línea, $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$ y $C^* = 10^{-5}$.

Tabla 4.4: Velocidad de promedio intrínseco adimensional en el seno del medio poroso y en la superficie del medio poroso localizada en $y = 0$ para diferentes medios porosos y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Los cálculos son para $C^* = 10^{-5}$, $L_\eta = 10^3\ell$ y $L_\omega = 10^2$.

r_0/ℓ	círculos alineados	círculos escalonados	cuadrados alineados	placas paralelas	capilares alineados
$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$					
1	2.19×10^{-3}	1.82×10^{-3}	2.22×10^{-3}	1.78×10^{-3}	1.78×10^{-3}
2	3.96×10^{-3}	3.60×10^{-3}	3.99×10^{-3}	3.57×10^{-3}	3.57×10^{-3}
5	9.28×10^{-3}	8.93×10^{-3}	9.32×10^{-3}	8.90×10^{-3}	8.90×10^{-3}
10	1.81×10^{-2}	1.78×10^{-2}	1.82×10^{-2}	1.77×10^{-2}	1.77×10^{-2}
15	2.69×10^{-2}	2.66×10^{-2}	2.69×10^{-2}	2.65×10^{-2}	2.65×10^{-2}
$\langle u_x \rangle_\omega^\beta$	1.42×10^{-8}	7.09×10^{-9}	2.62×10^{-8}	1.07×10^{-7}	1.59×10^{-7}
$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$					
1	2.36×10^{-3}	1.49×10^{-3}	2.34×10^{-3}	1.39×10^{-3}	1.39×10^{-3}
2	3.68×10^{-3}	2.87×10^{-3}	3.66×10^{-3}	2.77×10^{-3}	2.77×10^{-3}
5	7.78×10^{-3}	7.02×10^{-3}	7.77×10^{-3}	6.92×10^{-3}	6.92×10^{-3}
10	1.46×10^{-2}	1.39×10^{-2}	1.46×10^{-2}	1.38×10^{-2}	1.38×10^{-2}
15	2.15×10^{-2}	2.07×10^{-2}	2.15×10^{-2}	2.06×10^{-2}	2.06×10^{-2}
$\langle u_x \rangle_\omega^\beta$	2.43×10^{-7}	1.21×10^{-8}	2.26×10^{-7}	4.27×10^{-7}	3.18×10^{-7}

4.2.4 Promedios de volumen y de línea

En la sección anterior, se mostró que cerca de la frontera entre un medio libre y un medio poroso existe una zona de transición conocida como la capa de Brinkman, y que su tamaño es aproximadamente del orden de la región de promediado $O(2r_0)$. Estos resultados se obtuvieron

usando una velocidad promedio de volumen. Desde otro punto de vista, Goharzadeh *et al.* (2005); Morad and Khalili (2009) mostraron experimentalmente la existencia de la capa de Brinkman, y que su tamaño es del orden del diámetro promedio de partícula $O(d_{pm})$. En sus trabajo las observaciones de la velocidad promedio son velocidades promedio de línea en la dirección del flujo (coordenada $-x$). Por lo tanto, esto conduce a la pregunta sobre, ¿cuál es el el tipo de velocidad promedio que se debe utilizar para analizar la existencia y determinar el tamaño de la capa de Brinkman?

Para responder lo anterior se debe analizar a las ecuaciones macroscópicas utilizadas para describir los perfiles de velocidad entre una región de medio libre y un medio poroso. Estas ecuaciones son ecuaciones de promedio de volumen, por lo que para comparar la solución de las ecuaciones promedio con datos o observaciones experimentales, se requiere que las observaciones sean velocidades de promedio de volumen. De esta manera, de acuerdo a este razonamiento, la velocidad promedio necesaria para determinar el tamaño de la capa de Brinkman debe de ser la velocidad promedio de volumen. A continuación se muestra la diferencia de utilizar cantidades promedio de volumen y de línea.

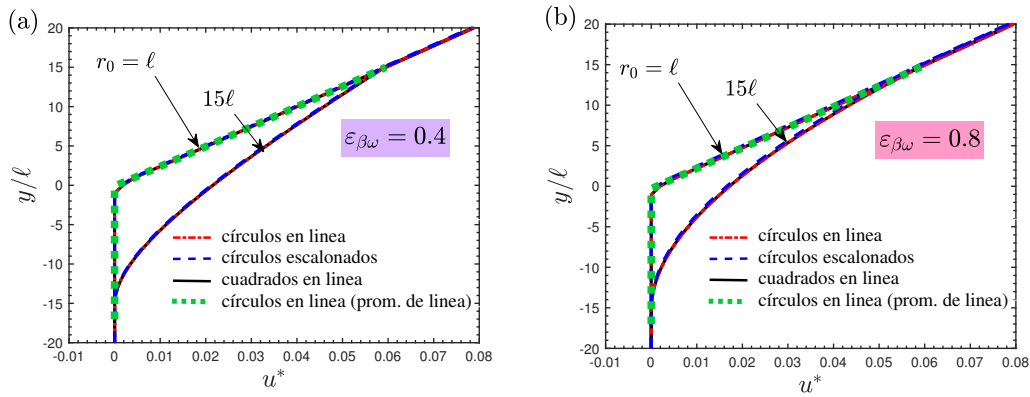


Figura 4.10: Comparación de la velocidad de promedio de volumen y de línea en la inter-región medio libre/medio poroso para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Todos los cálculos son fijando $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$ y $C^* = 10^{-5}$.

En la figura 4.10 se muestra una comparación de dos de los perfiles de velocidad promedio para cada valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$ mostrados en la figura 4.9 con aquellos obtenidos de aplicar un promedio de línea en la coordenada $-x$. Los promedios de línea se obtuvieron usando la siguiente definición

$$\hat{u}_x^\beta|_{y_0} = \frac{1}{\hat{\varepsilon}_\beta|_{y_0}\ell} \int_{x=x_0-\frac{1}{2}\ell}^{x=x_0+\frac{1}{2}\ell} m_\beta(\mathbf{r})u_x(x,y_0) dx \quad (4.16)$$

donde $\hat{\varepsilon}_\beta$ es la fracción de ℓ ocupada por el fluido en la coordenada $-x$ que está dado por

$$\hat{\varepsilon}_\beta|_{y_0} = \frac{1}{\ell} \int_{x=x_0-\frac{1}{2}\ell}^{x=x_0+\frac{1}{2}\ell} m_\beta(\mathbf{r}) dx \quad (4.17)$$

De estos resultados se observa que la velocidad promedio de línea es similar a la velocidad promedio volumen unicamente para $r_0 = \ell$, mientras que para $r_0 = 15\ell$ se presentan importantes

desviaciones entre los perfiles. Esto indica que al incrementar el valor r_0 los perfiles de velocidad promedio de volumen se alejarán cada vez más de los perfiles de velocidad promedio de línea. Cabe mencionar que al hacer un acercamiento de los perfiles de velocidad se observó que los promedios de línea presentan oscilaciones en todo el medio poroso, las cuales se vuelven periódicas para las posiciones del centroide de la región de promediado dadas por $y \lesssim -\ell$. De esta manera, de acuerdo con la velocidad de promedio de línea, el tamaño de la capa de Brinkman es $O(\ell)$, el cual a su vez es $O(\ell_\sigma)$. Cabe notar que estos allazgos coinciden con aquellos obtenidos por Goharzadeh *et al.* (2005); Morad and Khalili (2009). Sin embargo, como se dijo anteriormente, el espesor de la capa de Brinkman se debe determinar usando velocidad promedio de volumen, ya que son estas cantidades las que se encuentran en las ecuaciones de medio efectivo utilizadas para describir el flujo. Por lo tanto, tal como se mencionó anteriormente, el tamaño de capa de Brinkman es $O(2r_0)$, tal como se mencionó líneas arriba.

Hasta este punto, todas las observaciones del efecto del flujo en el medio libre sobre aquel en el medio poroso están en términos de la velocidad promedio. Esto genera algunas preguntas sobre el efecto análogo en términos de la velocidad local. En la siguiente sección, usando la velocidad local obtenida a partir de realizar PSS, se determina la extensión de la influencia del flujo en el medio libre sobre el flujo dentro del medio poroso y así como la extensión de la influencia del flujo en el medio poroso sobre el flujo en el medio libre.

4.3 Influencia del flujo de un fluido en una región sobre el otra

En esta sección se determina la distancia en la cual el flujo en la región del medio libre afecta el flujo en el medio poroso (d_ω) y así como la distancia en la cual las partículas sólidas que componen al medio poroso afectan el flujo en la región del medio libre (d_η).

Por un lado, para determinar a d_η se considera que suficientemente lejos sobre las partículas sólidas que componen al medio poroso (*i. e.*, $y/\ell > 0$) el flujo del fluido es esencialmente paralelo a la superficie del medio poroso, es decir, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = u_x(y/\ell) \neq 0$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = u_y(y/\ell) = 0$. Por lo tanto, para las posiciones dadas por $y \geq d_\eta$, la componen $u_x(y/\ell)$ dependerá únicamente de la coordenada $-y$. Con esto en mente, se compararon los perfiles de u_x obtenidos en tres cortes transversales en la coordenada $-x$ ($x/\ell = 0, 0.5, 1$) de los perfiles de velocidad local obtenidos de la PSS en todo el sistema. El valor de d_η se determinó desde la superficie del medio poroso hasta la posición donde los tres perfiles de velocidad local se superpusieron uno sobre otro, ya que en ese punto el flujo se puede considerar como completamente desarrollado. Cabe señalar que para las posiciones dadas por $y > d_\eta$, el perfil de velocidad local se puede representar mediante la expresión para el flujo de Poiseuille, tal como se muestra líneas abajo.

Por otro lado, para determinar a d_ω se toma en cuenta que suficientemente lejos por debajo de la superficie del medio poroso (*i. e.*, $y/\ell < 0$), el efecto del flujo en la región de medio libre es prácticamente nulo. Por lo tanto, suficientemente lejos de la superficie del medio poroso, la velocidad local será un campo periódico en el plano xy . Cabe señalar que este campo periódico es igual al obtenido de realizar una PSS, imponiendo condiciones de periodicidad tanto en la coordenada x como en y , en una celda unitaria del seno del medio poroso. Teniendo en cuenta lo anterior, se compararon los perfiles de u_x en varios cortes trasversales en la coordenada $-y$ de los perfiles de velocidad local

obtenidos de la PSS en el sistema completo con aquellos obtenidos en una celda unitaria del seno del medio poroso. En el sistema completo cada corte transversal en la coordenada $-y$ están separados por una distancia igual a 0.5. Los cortes transversales localizados a la mitad de cada celda (*i. e.*, $y/\ell = -0.5, -1.5, -2.5, \dots$) se comparación con los cortes transversales localizados a la mitad de la celda del seno del medio poroso, mientras que los cortes localizados cada celda unitaria entera (*i. e.*, $y/\ell = -1, -2, -3, \dots$) se compararon con los cortes localizados en la frontera superior de la celda unitaria del seno del medio poroso (*i. e.*, $y/\ell = 1$). El valor de d_ω se determinó por la primer posición por debajo de la superficie del medio poroso donde la diferencia entre ambos perfiles de velocidad local fue menor que $10^{-3} \%$.

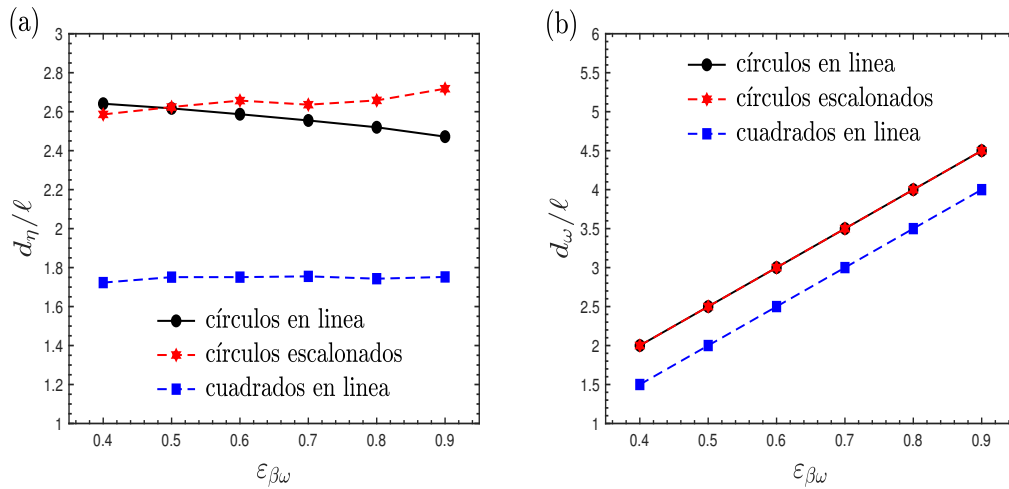


Figura 4.11: (a) Distancia donde el flujo en la región de medio libre llega a ser unidimensional (*i. e.*, d_η) y (c) distancia por debajo de la superficie del medio poroso en la cual el flujo en la región de medio libre perturba el flujo en el medio poroso (*i. e.*, d_ω). Ambas distancias se miden desde $y = 0$. En todos los resultados se fijó a $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$ y $C^* = 10^{-5}$.

En la figura 4.11 se muestran las distancias d_ω y d_η como función de $\epsilon_{\beta\omega}$ para las tres geometrías del medio poroso. Por un lado, en la figura 4.11(b) se puede apreciar que, d_ω crece linealmente conforme el valor de $\epsilon_{\beta\omega}$ incrementa para cualquiera de las tres geometrías del medio poroso, lo cual indica que el efecto del flujo en la región del medio libre incrementa al incrementar el valor de $\epsilon_{\beta\omega}$. Las distancias con las geometrías de círculos en línea y círculos escalonados son similares, los cuales se encuentran entre 2ℓ y 4.5ℓ , mientras que para los cuadrados en línea se encuentran entre 1.5ℓ y 4ℓ , los cuales son ligeramente menores a las otras dos geometrías. Por otro lado, en la figura 4.11(a) se puede ver que, d_η se mantiene constante para cualquier valor de $\epsilon_{\beta\omega}$ con las tres geometrías del medio poroso. Análogamente, las distancias con las geometrías de círculos en línea y círculos escalonados son similares y se encuentran alrededor de 2.6ℓ , mientras que para los cuadrados en línea se encuentran alrededor de 1.7ℓ , las cuales son ligeramente menores a las otras dos geometrías.

4.3.1 El perfil de velocidad en la región de medio libre no perturbada

En la sección anterior se determinaron las distancias en la cual el flujo en una región afecta el flujo dentro de la otra región del sistema mostrado en la figura 4.1. En particular, se encontró que la distancia máxima en la cual las partículas sólidas del medio poroso afectan el flujo en la región de medio libre es aproximadamente tres veces el tamaño de una celda unitaria ($d_\eta \approx 3\ell$). Esto significa que el flujo

Capítulo 4. Flujo de Stokes entre regiones homogéneas

se puede considerar como totalmente desarrollado para las posiciones dadas por $d_\eta/\ell < y/\ell < L_\eta/\ell$. Por lo tanto, se puede suponer que la velocidad $u_x(y/\ell)$ en cualquier posición de y dentro de esta zona estará dada por expresión bien conocida de flujo de Poiseuille. Esa suposición será cierta siempre y cuando se satisfaga la disparidad de longitudes de escala dada por $L \gg \ell$, lo cual es se satisface para el sistema aquí estudiado. Lo anterior podría evitar el costo de cómputo de los perfiles de velocidad local en gran parte del medio libre, y así enfocar los recursos para describir los perfiles de velocidad local tanto en el seno del medio poroso como en la inter-región medio libre/medio poroso.

Para demostrar lo anterior, bajo condiciones de flujo totalmente desarrollado, se tiene que el problema local dado por las Ecs. (4.9), se reduce a

$$0 = C^* + \frac{d^2 u_x}{dY^2} \quad (4.18)$$

el cual está sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$u_x = 0 \quad Y = L_\eta/\ell \quad (4.19)$$

$$u_x = u_\eta \quad Y = d_\eta/\ell \quad (4.20)$$

donde u_η es una velocidad localizada en $Y = d_\eta/\ell \approx 3$ que se puede determinar a partir de realizar PSS. Además, nótese que en la Ec. (4.18) se reemplazó la caída de presión por C^* de acuerdo a la Ec. (4.4). De esta manera, el perfil de velocidad local en el medio libre que no es afectada por la presencia de las partículas del medio poroso está dado por

$$u_x(y/\ell) = -\frac{1}{2}C^* \left(Y - \frac{L_\eta}{\ell} \right) \left(Y - \frac{d_\eta}{\ell} \right) + u_\eta \left(\frac{Y - L_\eta/\ell}{d_\eta/\ell - L_\eta/\ell} \right) \quad (4.21)$$

donde es posible identificar términos como los encontrados en las expresiones para un flujo de Poiseuille y Couette. En la figura 4.12 se compara el perfiles de u_x en un corte transversal en $x/\ell = 0.5$ de los perfiles locales obtenidos de la PSS con el predicho usando la Ec. (4.21). Los perfiles obtenidos de la PSS corresponde al medio poroso hecho de círculos en línea para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$. Cualitativamente no se puede apreciar alguna diferencia tanto en el canal completo (ver figura 4.12 (a)) como alrededor de la velocidad máxima en la región del medio libre (ver figura 4.12 (b)). Además, se puede ver que los perfiles siguen estando superpuestos en la vecindad de $y = d_\eta$, donde inicia la suposición de flujo totalmente desarrollado. Estas observaciones se confirmaron evaluando el porcentaje de error relativo definido como

$$\text{Error } \% = \frac{|u_x|_{PSS} - u_x|_{\text{Eq.(4.21)}}|}{u_x|_{\text{Eq.(4.21)}}} \times 100 \% \quad (4.22)$$

donde encontró que este es del orden de $10^{-8} \%$. El mismo tipo de resultados se obtuvieron usando los medios porosos compuestos de círculos escalonados y cuadrados en línea mostrados en la figura 4.4.

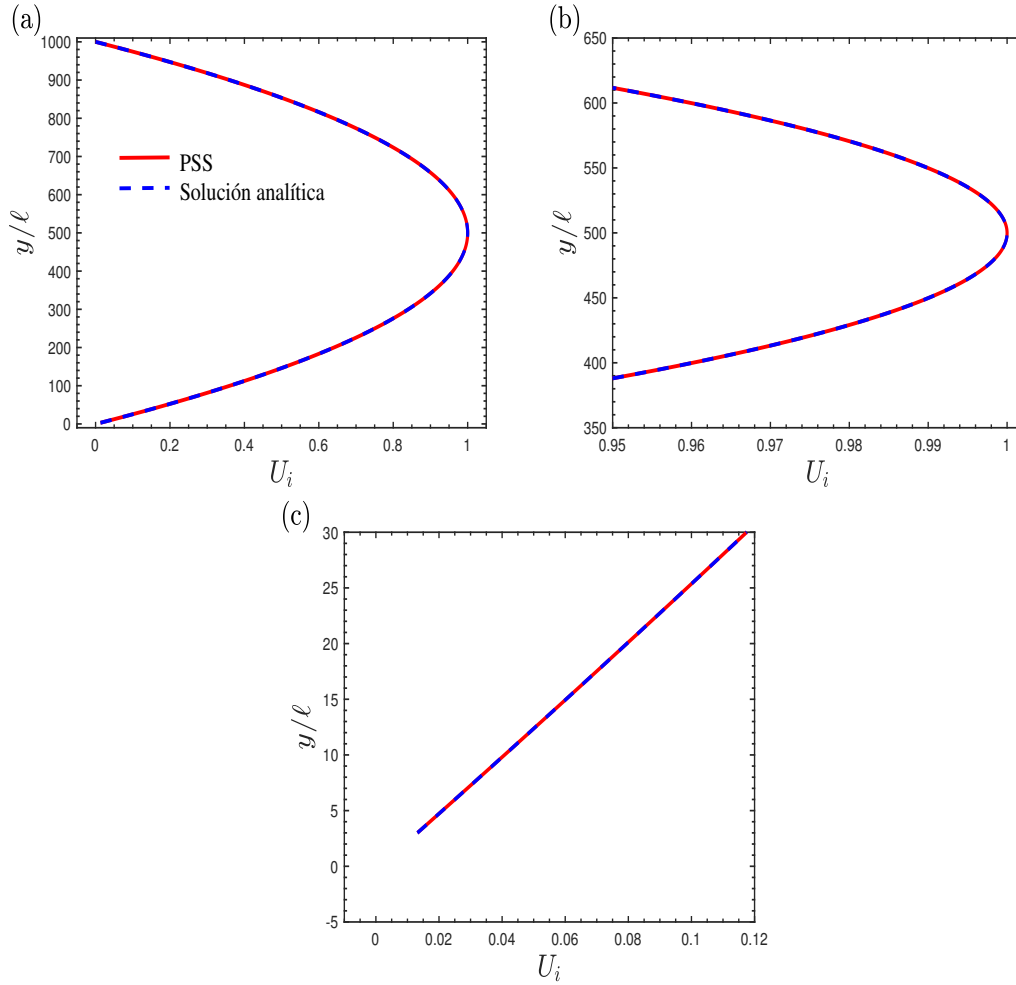


Figura 4.12: Comparación de los perfiles de velocidad en la región del medio libre obtenidos en un corte transversal en $x/\ell = 0.5$ a partir de realizar PSS en el dominio representativo del canal y de la Ec. (4.21) para $d_\eta = 3\ell$ y $u_\eta = 0.0165$. Los perfiles mostrados son (a) en el sistema completo, (b) alrededor de la velocidad máxima y (c) en la vecindad de $y = d_\eta$. El perfil obtenido de la PSS corresponde al medio poroso compuesto de círculos en línea con $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$, $C^* = 10^{-5}$ y $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$.

4.4 Relación entre el tamaño de la capa de Brinkman y la raíz cuadrada de la permeabilidad del seno del medio poroso

Como se mencionó anteriormente, la capa de Brinkman se define como la zona de transición del perfil de velocidad promedio donde la velocidad decrece dramáticamente de la velocidad en la superficie del medio poroso ($\langle u \rangle_{int}$) hasta alcanzar la velocidad de Darcy ($\langle u \rangle_\omega$). La determinación del tamaño de esta zona, aunque se ha llegado a diferentes estimaciones, sigue recibiendo gran atención en la literatura (Sahraoui and Kaviany, 1992; Ochoa-Tapia and Whitaker, 1995a,b; Goyeau *et al.*, 2003; Goharzadeh *et al.*, 2005; Morad and Khalili, 2009). Por ejemplo, Tam (1969); Saffman (1971); Goyeau *et al.* (2003) estimaron que la capa de Brinkman es de orden de la raíz cuadrada de la permeabilidad del seno del medio poroso $O(\sqrt{K_{\beta\omega}})$. O bien, Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b) sugirieron que el espesor de esta zona es al menos $O(30\sqrt{K_{\beta\omega}})$. Por su parte, Gupte and Advani (1997) sugirieron que el espesor de esta zona es comparable a la profundidad del medio poroso $O(L_\omega)$. O en su caso, Goharzadeh *et al.* (2005); Morad and Khalili (2009) mostraron experimentalmente que el tamaño

de esta zona es del orden del tamaño de partícula promedio $O(d_{pm})$. Con el fin de proporcionar otro punto de vista, con los resultados de este trabajo, a continuación se evalúa la relación dada por

$$\frac{\delta_B}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} \approx \frac{r_0}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} \quad (4.23)$$

En primer lugar se debe recordar que líneas arriba se mostró que el tamaño de la capa de Brinkman es $\delta_B \approx r_0$. De esta forma, de la relación anterior solo falta determinar a $K_{\beta\omega}$. Este coeficiente se determinó a partir de despejarlo de la ley de Darcy. Para ello, se resolvió el problema local dado por las Ecs. (4.9) en una celda unitaria del seno del medio poroso, donde se impuso una caída de presión junto con condiciones de frontera de periodicidad de la velocidad local y de las desviaciones de la presión local en todas las direcciones. Una vez obtenido los perfiles de velocidad local, se calculó la velocidad de promedio superficial, y de la ley de Darcy se despejó a $K_{\beta\omega}$. En la figura 4.13(a) se presenta el valor de la $K_{\beta\omega}$ como función $\varepsilon_{\beta\omega}$, donde se puede ver que la permeabilidad es una función creciente de este. Estas predicciones son para el medio poroso compuesto de círculos en línea (ver figura 4.4 (a)). Además, siguiendo las ideas de Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019), en la misma figura se muestran aquellas predicciones obtenidas usando los medios porosos compuestos de capilares en línea y placas paralelas (ver Ecs. (4.32)). Nótese que las predicciones para estas dos últimas geometrías son similares a los obtenidos usando el medio poroso compuesto de círculos en línea únicamente para valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ cercanos a 1.

De esta manera, una vez obtenidos los valores de $K_{\beta\omega}$, se evaluó la relación dada por $(\delta_B/\sqrt{K_{\beta\omega}}) \approx (r_0/\sqrt{K_{\beta\omega}})$. En la figura 4.13(b) se muestra esta relación para diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Se observa que cuando $\varepsilon_{\beta\omega} < 1$, el tamaño de la capa de Brinkman es aproximadamente dos órdenes de magnitud más grande que $\sqrt{K_{\beta\omega}}$. Además, cuando $\varepsilon_{\beta\omega} \rightarrow 1$, el tamaño de la capa de Brinkman es aproximadamente un orden de magnitud más grande que $\sqrt{K_{\beta\omega}}$. Cabe resaltar que estas observaciones se obtuvieron usando a $r_0 = \ell$, por lo que el tamaño de capa de Brinkman será varios ordenes de magnitud más grande que $\sqrt{K_{\beta\omega}}$ al incrementar el tamaño de r_0 . Con base en lo anterior, se concluye que, en general, el tamaño de la capa de Brinkman es mucho más grande que $\sqrt{K_{\beta\omega}}$ en lugar de ser del mismo orden que esta o del orden del tamaño de partícula, $\ell_\sigma \approx \ell$, tal como lo indican diversos trabajos reportados en la literatura. Cabe señalar que estos hallazgos tienen una mejor concordancia con las ecuaciones de medio efectivo ampliamente utilizadas en la literatura que aquellos encontrados en los trabajos reportados. Esto se debe a que los resultados aquí encontrados se obtuvieron utilizando cantidades promedio de volumen, las cuales son las cantidades que aparecen en las ecuaciones de medio efectivo, mientras los resultados reportados se han obtenidos utilizando cantidades promedio de línea o a partir de estimaciones teóricas.

4.5 Discusión de resultados

En la §4.2.1, se analizó los límites de aplicabilidad del modelo de Stokes para el flujo de un fluido en un sistema análogo al estudiado por BJ. Los resultados confirman, por primera vez, que incluso si la formulación no inercial puede utilizarse para modelar el flujo en el seno del medio poroso, puede haber casos donde es necesario incluir los términos inerciales en la inter-región medio libre/medio poroso, tal como se hizo en la derivación de la condición de salto por Ochoa-Tapia and Whitaker

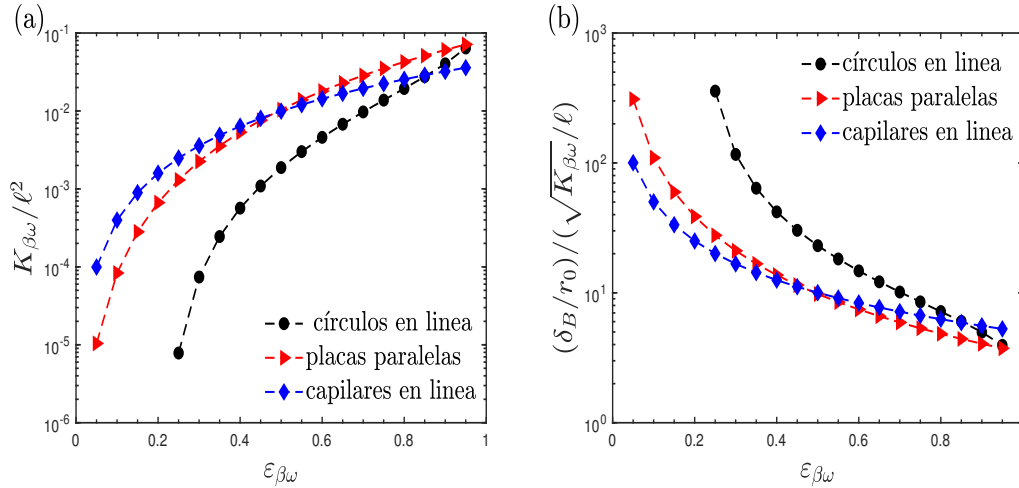


Figura 4.13: (a) Permeabilidad del seno del medio poroso y (b) relación del tamaño de la capa de Brinkman (δ_B) con la raíz cuadrada de la permeabilidad del seno del medio poroso ($\sqrt{K_{\beta\omega}}$). Todos los cálculos son usando $r_0 = \ell$ para tres geometrías del medio poroso.

(1998b). En un estudio posterior se planea utilizar los perfiles de velocidad promedio obtenidos de las simulaciones a la escala poro para evaluar las ecuaciones promedio de cantidad de movimiento obtenidas del escalamiento de las ecuaciones válidas en la escala microscópica para el flujo de Stokes. Por ello, las simulaciones a la escala de poro se limitaron al valor de la caída de presión adimensional dada por $C^* = 10^{-5}$.

Posteriormente, se mostró la existencia de una zona de transición en el perfil de velocidad promedio cerca de la frontera de un medio poroso (ver figura 4.7), la cual se conoce como la inter-región. Además, se mostró que dentro de ella existe la bien conocida capa de Brinkman, la cual va desde la velocidad de Darcy ($\langle u_x \rangle_\omega = \langle u_x \rangle|_{y \approx -r_0}$) hasta la velocidad en la superficie del medio poroso ($\langle u_x \rangle_{int} = \langle u_x \rangle|_{y=0}$). Interesantemente, se encontró que el tamaño de esta capa (δ_B) es $O(r_0)$, por lo que δ_B crece al incrementar el valor r_0 . Esto sugiere que para describir el perfil de velocidad promedio en cualquier lugar de un medio poroso, tanto en su seno como cerca de sus fronteras, la ley de Darcy debe incluir términos adicionales, principalmente cuando $r_0 > \ell$. Por ejemplo, incluir un término viscoso como lo propuso Brinkman (1949a,b), o bien, incluir dos términos viscosos como lo propusieron Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b). Esto complementa y confirma los resultados previamente reportados por Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019), quienes usaron un medio poroso compuesto de capilares y placas paralelas, respectivamente.

Por otro lado, se observó que, incluso para una representación simplificada como la de un medio poroso particulado, las simulaciones a la escala de poro pueden ser muy complicadas de alcanzar si se utilizan cientos o miles de celdas unitarias para construir el medio poroso (*i. e.*, que satisfaga cierta disparidad de longitudes características). Esto motiva a proponer otras alternativas que permitan obtener a los perfiles de velocidad promedio. Por ejemplo, utilizar las expresiones analíticas obtenidas, suponiendo un medio poroso compuesto de capilares, por Ochoa-Tapia *et al.* (2017). O bien, aquellas expresiones desarrolladas, considerando un medio poroso compuesto por placas paralelas, por Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019). En este segundo caso, el perfil de velocidad local entre cada placa está dado por el bien conocido modelo de flujo de Poiseuille. Por lo tanto,

usando un operador promediado, se obtuvieron las expresiones analíticas para los perfiles de velocidad promedio. Notablemente, las diferencias entre los perfiles de velocidad para el sistema del canal usando el medio poroso hecho de capilares o placas paralelas con los obtenidos usando los medios porosos particulados son despreciables, tal como se muestra en la figura 4.8. Cabe notar que estas diferencias fueron despreciables, a pesar de que las geometrías de capilares o placas paralelas no permiten la transferencia de masa y cantidad de movimiento entre el medio poroso y el medio libre (ver tabla 4.4). Estas observaciones son aplicables para cualquier tamaño de la región de promediado ($2r_0$) y valor de la porosidad del seno del medio poroso ($\varepsilon_{\beta\omega}$).

Más adelante, se analizó la distancia de efecto que tiene el flujo en el medio libre sobre el flujo en el medio poroso, y viceversa. Esto se evaluó midiendo las distancias desde la frontera del medio poroso en $y = 0$ hasta las posiciones donde la velocidad local se modifica en cada región, por lo que el análisis es independiente del tamaño de la región de promediado (o un proceso de promediado), y se hace únicamente para los medios porosos particulados, ya que para los medios porosos estratificados, sin lugar a dudas, $d_\omega = d_\eta = 0$. Esto es debido a que cuando se utilizan estos medios porosos no existe un intercambio de flujo entre ambas regiones. Los resultados se muestran en la figura 4.11, los cuales indican en general que el el flujo en el medio libre puede afectar el flujo dentro del medio poroso hasta una distancia entre $1.5\ell < d_\omega < 5\ell$, mientras que las partículas en la frontera del medio poroso pueden afectar el flujo en el medio libre hasta una distancia entre $1.5\ell < d_\eta < 3\ell$. Por otro lado, para analizar el efecto que tiene el flujo en el medio libre sobre el flujo en el medio poroso en la escala promedio, los perfiles de velocidad promedio para los tres medios porosos particulados se muestran en la figura 4.14. De estos resultados se puede apreciar que el tamaño de la capa de Brinkman para los sistemas particulados, está dada por $\delta_B = r_0 + 2\ell$, donde r_0 es la parte de esta zona debido al tamaño de la región de promediado y 2ℓ es la parte debido al efecto del flujo en el medio libre sobre el medio poroso. Esta segunda parte de δ_B se desvanece gradualmente al incrementar el tamaño de r_0 . Además, se debe notar que, sin duda alguna, para los casos donde el medio poroso consiste en capilares en línea y placas paralelas estas distancias son $d_\eta = d_\omega = 0$, por consiguiente $\delta_B = r_0$.

A continuación, como un análisis adicional, usando las distancias d_η y d_ω , se explican algunos de los resultados mostrados anteriormente. En primer lugar, se dirige la atención al hecho de que $\varepsilon_{\beta\omega}$ afecta únicamente a los perfiles de velocidad promedio en el seno del medio poroso y en la inter-región medio libre/medio poroso, mientras que estos efectos son despreciables en la región homogénea del medio libre, tal como se muestra en la figura 4.9. Esto se puede caracterizar cuantitativamente en términos de la Ec. (4.21), a partir de la cual la posición donde la velocidad máxima en el sistema se puede obtener como

$$Y_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{L_\eta}{\ell} + \frac{d_\eta}{\ell} \right) - 2 \frac{u_\eta}{C^*} \left(\frac{L_\eta}{\ell} - \frac{d_\eta}{\ell} \right)^{-1} \quad (4.24)$$

Esta expresión, dado que la relación de longitudes entre la escala macroscópica del sistema y la escala de poro utilizada es $L_\eta = 10^3\ell$ y que $u_\eta \approx 0.02$ en $d_\eta = 3\ell$, se puede simplificar como

$$Y_{max} \approx \frac{1}{2} \frac{L_\eta}{\ell} \quad (4.25)$$

Donde al usar este resultado en la Ec. (4.21), considerando la disparidad de longitudes características

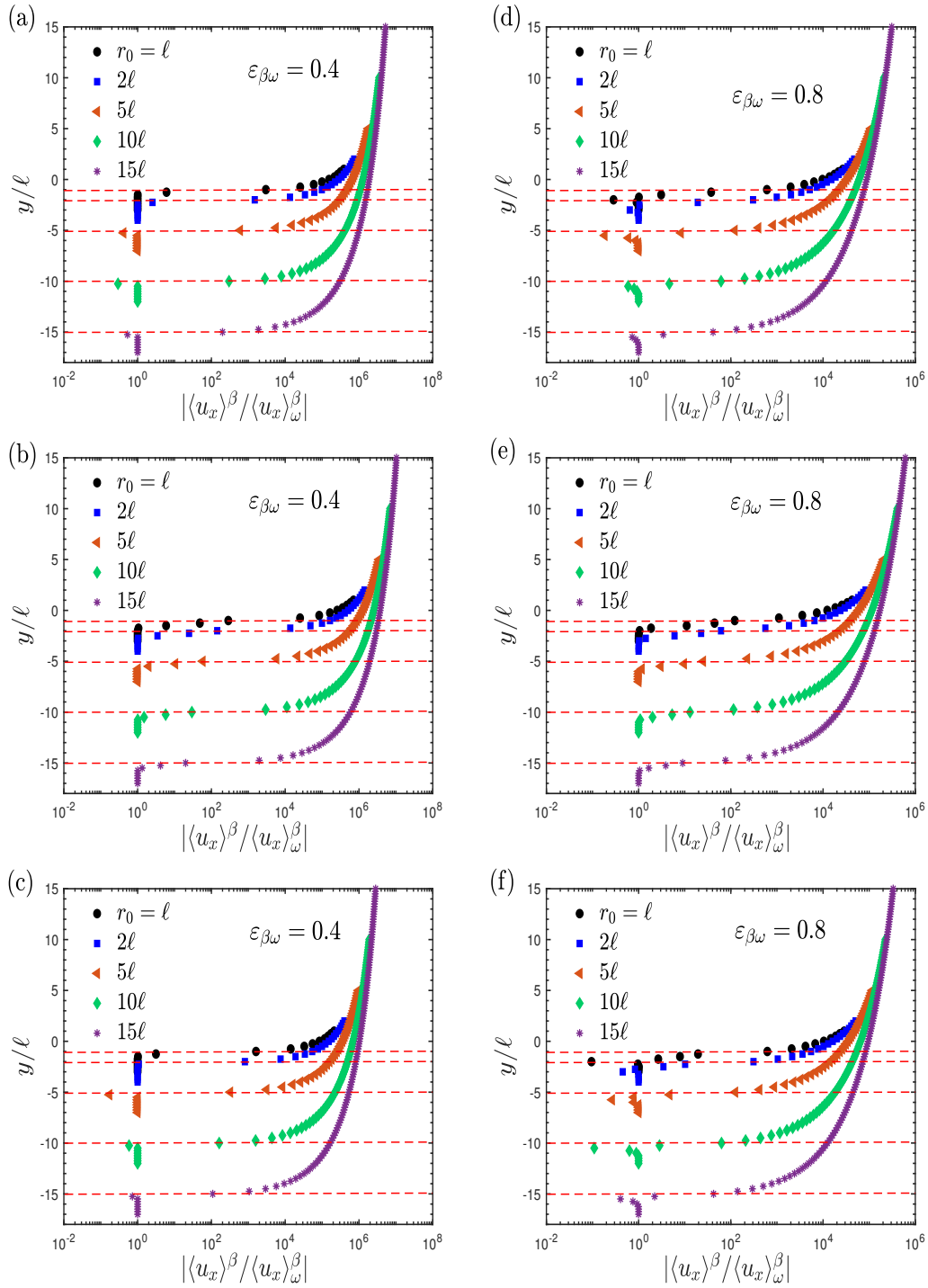


Figura 4.14: Perfiles de velocidad de promedio intrínseco en la inter-región medio libre/medio poroso usando diferentes tamaños de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. La microestructura del medio poroso consiste en (a), (b) círculos en línea, (b), (e) círculos escalonados y (c),(f) cuadrados en línea. En todos los cálculos se fija a $L_\eta = 10^3\ell$, $L_\omega = 10^2\ell$ y $C^* = 10^{-5}$.

dada por $\ell \ll L_\eta$, la velocidad máxima para $C^* = 10^{-5}$ es igual a

$$u_{max} \approx \frac{1}{8}C^* \left(\frac{L_\eta}{\ell}\right)^2 = 1.25 \quad (4.26)$$

el cual es la velocidad obtenida de las PSSs para cualquier valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Cabe remarcar que, el uso del perfil de velocidad parabólico en la región del medio libre puede ser relevante para la solución del problema a la escala de poro (ver Ecs. (4.9)), ya que como se dijo anteriormente, esto puede evitar la solución numérica en el dominio representativo comprendido en $d_\eta \leq y \leq L_\eta$, y así reducir el costo computacional.

Por otro lado, las distancias d_η y d_ω pueden ayudar a justificar el orden de magnitud de $\langle u_x \rangle^\beta|_{y=0}$. Dicho estimado se puede obtener a partir de las expresiones analíticas desarrolladas por Ochoa-Tapia *et al.* (2017) o Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019), lo cual conduce a

$$\frac{\langle u_x \rangle^\beta|_{y=0}}{u_{max}} \approx \frac{r_0}{L_\eta} \left(\frac{2}{1 + \varepsilon_{\beta\omega}} \right) \quad (4.27)$$

Esto es porque la Ec. (7) en Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019), que fue obtenida para medios porosos estratificados formados por placas paralelas, para muestras localizadas en $y = 0$, justo a la mitad de la inter-región medio libre/medio poroso, junto con las expresiones de la tabla A.1, se reduce a

$$\frac{\langle u_x \rangle|_{y=0}}{u_{max}} = \frac{1}{2} \left[2 \frac{r_0}{L_\eta} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{L_\eta} \right) + \varepsilon_{\beta\omega} \langle u_x \rangle_\omega^\beta \right] \quad (4.28)$$

Esta expresión es válida para cualquier valor de r_0 y es el promedio aritmético del flujo en el medio libre y el medio poroso contenido en la muestra. Para otro medio poroso estratificado, como el utilizado en Ochoa-Tapia *et al.* (2017), el significado físico de $\langle u_x \rangle^\beta|_{y=0}$ es el mismo. Sin embargo, la Ec. (4.28) ya no es válida para medio porosos granulados, debido que no incluye a los efectos de intercambio de flujo entre el medio libre y el medio poroso. De esta manera, usando la expresión de $\langle u_x \rangle_\omega^\beta$ para el medio poroso hecho de placas paralelas, la Ec. (4.28) toma la forma

$$\frac{\langle u_x \rangle|_{y=0}}{u_{max}} = \frac{r_0}{L_\eta} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{L_\eta} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\ell}{L_\eta} \right)^2 \varepsilon_{\beta\omega} \quad (4.29)$$

que sobre la base de $\ell \ll L_\eta$ se reduce a

$$\frac{\langle u_x \rangle|_{y=0}}{u_{max}} \approx O \left(\frac{r_0}{L_\eta} \right) \quad (4.30)$$

Por último, la fracción de volumen del fluido en $y = 0$ está dado por

$$\varepsilon_\beta|_{y=0} = \left(\frac{1 + \varepsilon_{\beta\omega}}{2} \right) \quad (4.31)$$

lo cual conduce a la estimación previa de $\langle u_x \rangle^\beta|_{y=0}$ dada por la Ec. (4.27). Los valores de esta velocidad a partir de la ecuación anterior son similares a los obtenidos usando a los medios porosos estratificados y son del mismo orden a los obtenidos usando los medios porosos particulados, tal como se reportan en la tabla 4.4. Cabe señalar que todos los valores son muy cercanos para $r_0 \geq 10\ell$. En otras palabras, para estos tamaños de la muestra los efectos del flujo en una región sobre la otra llegan a ser despreciables.

Como último punto a discutir es la relación entre el tamaño de la capa de Brinkman δ_B y la raíz

cuadrada de la permeabilidad $\sqrt{K_{\beta\omega}}$ mostrado en la figura 4.13. Se encontró que dicha relación incrementa al incrementar el tamaño de r_0 y decrece al incrementar el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Además, se mostró que esta relación es $O(1)$ cuando $r_0 \approx \ell$. De esta forma, se puede concluir que, en general, $\delta_B \gg \sqrt{K_{\beta\omega}}$. Resultados similares se encontraron para el medio poroso compuesto de círculos escalonados y cuadrados alineados. Además, para los medios porosos utilizados por Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019), se pueden obtener expresiones analíticas para estimar a $\delta_B/\sqrt{K_{\beta\omega}}$, las cuales están dadas por

$$\frac{\delta_B/r_0}{\sqrt{K_{\beta\omega}/\ell}} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\varepsilon_{\beta\omega}} \quad \text{para capilares} \quad (4.32a)$$

$$\frac{\delta_B/r_0}{\sqrt{K_{\beta\omega}/\ell}} = \frac{2\sqrt{3}}{\varepsilon_{\beta\omega}^{1.5}} \quad \text{para placas paralelas} \quad (4.32b)$$

Cabe señalar que, Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a) estimaron que el espesor de la capa de Brinkman es $O(50\sqrt{K_{\beta\omega}})$, mientras que Goyeau *et al.* (2003) estimaron que es $(30\sqrt{K_{\beta\omega}})$, lo cual concuerda con los resultados de este trabajo cuando $r_0 = \ell$.

4.6 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se estudió la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de medio libre y un medio poroso usando un sistema similar al utilizado por Beavers and Joseph (1967). En particular, se abordó la pregunta sobre la existencia o no de la zona de transición en el perfil de velocidad cerca de la frontera de un medio poroso, lo cual puede ayudar a determinar a la ecuación de la transferencia de cantidad de movimiento válida en el medio poroso.

De este análisis se confirmó la existencia de esta zona de transición en el perfil de velocidad promedio conocida como la inter-región y así también de la conocida como la capa de Brinkman. Dentro del medio poroso, el tamaño de esta segunda zona es aproximadamente la mitad de la región de promediado. Cabe enfatizar que estos hallazgos no son resultados obtenidos de la solución de ecuaciones de medio efectivo derivadas a partir de una técnica de escalamiento o técnicas empíricas, sino más bien de utilizar cantidades promedio. Por lo tanto, se puede concluir que, para predecir esta zona de transición, es necesario incluir términos adicionales en la ley de Darcy, ya que esta última no permite predecir variaciones en el perfil de velocidad cerca de las fronteras de un medio poroso. Además, se mostró que para describir el perfil de velocidad promedio en un sistema medio libre/medio poroso no es relevante considerar el intercambio de cantidad de movimiento entre la región del medio libre y el medio poroso. Estas conclusiones representan las mayores contribuciones de este capítulo, las cuales corroboran y complementan los trabajos previos de Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019).

Por otro lado, cabe enfatizar que las expresiones analíticas de la velocidad promedio presentados en este trabajo, y aquellas presentados por Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019), pueden ser de gran importancia para reducir los costos computacionales en el estudio de la transferencia de calor o masa en un sistema compuesto por una región de medio libre y un medio poroso.

Por último, cabe mencionar que los resultados presentados en este capítulo se utilizarán como

Capítulo 4. Flujo de Stokes entre regiones homogéneas

referencia en los siguientes para estudiar la validez de las ecuaciones macroscópicas desarrolladas utilizando el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999).

5. Modelo de un dominio de flujo de Stokes

Para describir en la escala macroscópica a la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de medio libre y un medio poroso, el curso de acción más apropiado consiste en utilizar un modelo de un dominio (Ochoa-Tapia and Whitaker, 1995a,b; Goyeau *et al.*, 2003). Este tipo de modelo busca describir a la transferencia de cantidad de movimiento tanto en las regiones homogéneas como en la inter-región entre estas. Para ello, se utiliza una ecuación de transporte generalizada, la cual es válida en todas partes del sistema, ya que contiene coeficientes efectivos dependientes de la posición. Sin embargo, este tipo de modelo, incluso para flujos totalmente desarrollados y unidimensionales, posee dos problemas importantes. El primero de ellos consiste en definir a la ecuación de transporte generalizada. Esto se debe a que en la literatura se pueden encontrar diferentes ecuaciones de transporte para un mismo sistema medio libre/medio poroso, y por consiguiente se pueden obtener diferentes predicciones de la transferencia de cantidad de movimiento. Esto conduce a cuestionar sobre cuál de los perfiles de velocidad promedio resultantes es el apropiado para predecir observaciones experimentales, o, en otras palabras, para obtener predicciones lo más realista posible. El segundo radica en que hasta el momento no existe una metodología que sea ampliamente aceptada para predecir las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos en la inter-región, por lo que se han propuesto diferentes expresiones heurísticas para este fin (Ochoa-Tapia and Whitaker, 1995a,b; Angot *et al.*, 1999; Goyeau *et al.*, 2003; Zampogna and Bottaro, 2016; Luminari *et al.*, 2019). Estas expresiones están limitadas a geometrías simples del medio poroso, y por consiguiente no se tiene una garantía de que puedan proporcionar predicciones adecuadas para geometrías más complejas. Por ejemplo, medios porosos fibrosos, medios porosos particulados de geometrías no regulares, etc. Además, hasta ahora se desconoce la relación que existe entre las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos con el tamaño de la región de promediado, utilizado para derivar las ecuaciones macroscópicas. Esto último es crucial en la comparación de predicciones teóricas con observaciones experimentales.

Con base en lo anterior, en este capítulo se muestra que el modelo de un dominio, cuando la ecuación de transporte generalizada se desarrolla a partir del método del promedio volumétrico, y con una predicción precisa de los coeficientes efectivos, es capaz de predecir el transporte de cantidad de movimiento en un sistema medio libre/medio poroso. Además, se aborda la pregunta sobre si son necesarios o no términos adicionales, como una primera y una segunda corrección de Brinkman, en la ecuación de transporte de cantidad de movimiento (Hernandez-Rodriguez *et al.*, 2021)

5.1 Definición del sistema y de las ecuaciones en la microescala

5.1.1 Planteamiento del problema

Para iniciar el análisis de este capítulo, se considera el flujo de un fluido (fase- β) sobre y a través de un medio poroso hecho de una fase sólida rígida (fase- σ), tal como el que se muestra en la figura 5.1. La zona ocupada por el medio poroso de altura L_ω se referirá como la región del medio poroso (o región- ω), mientras que la región libre de obstáculos de altura L_η como la región de medio libre (o región- η). Aquí se toman en cuenta de nuevo las condiciones de flujo dadas por las suposiciones 4.1.1, por lo que las ecuaciones que gobiernan el transporte de masa total y de cantidad de movimiento en la escala microscópica de la fase- β están dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad \text{en la fase } -\beta \quad (5.1b)$$

junto con las condiciones de frontera en las interfaces sólido/fluido ($\mathcal{A}_{\beta\sigma,M}$) y en las entradas o salidas ($\mathcal{A}_{\beta,e}$) del sistema macroscópico, definidas como

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma,M} \quad (5.1c)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_e \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta,e} \quad (5.1d)$$

En este punto, vale la pena recordar que en general la solución del problema válido en la microescala dado por las Ecs. (5.1) es casi imposible de obtener, por lo que una descripción en la macroescala resulta ser una opción más conveniente. Para ello es necesario desarrollar las ecuaciones válidas en esta escala que capturen la información esencial de la microescala. Esta tarea se puede lograr escalando las ecuaciones válidas en la microescala utilizando una técnica de escalamiento adecuada. En este trabajo, se utiliza el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999) para dicho fin, como se detalla en las siguientes secciones.

Antes de continuar, es pertinente mencionar que para el problema de la microescala dado por las Ecs. (5.1), la derivación de las ecuaciones de transporte generalizadas (GTE por sus siglas en inglés), usando el método del promedio volumétrico, fue primero presentada por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a) y más recientemente por Valdés-Parada *et al.* (2007b). En este último trabajo también se proporcionó el problema de cerradura local (PCL) asociado para predecir las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad intrínseco. Sin embargo, una validación de la ecuación de transporte, así como la pertinencia de términos adicionales en la ecuación de cantidad de movimiento, no ha sido proporcionado hasta al momento. Además, hasta ahora no se cuenta con una evaluación de los coeficientes efectivos predichos a partir de la solución del PCL. Por lo tanto, la originalidad de

este capítulo consiste en validar las GTEs y evaluar la predicción de la permeabilidad obtenida de la solución del PCL. Para ello, se revisa la derivación de las GTEs de masa total y de cantidad de movimiento. En aras de la brevedad, se presentan únicamente aquellos pasos donde es necesario realizar modificaciones. Además, los coeficientes efectivos se predicen a partir de la solución del PCL asociado y se propone una nueva metodología basada en simulaciones a la escala de poro (PSS por sus siglas en inglés).

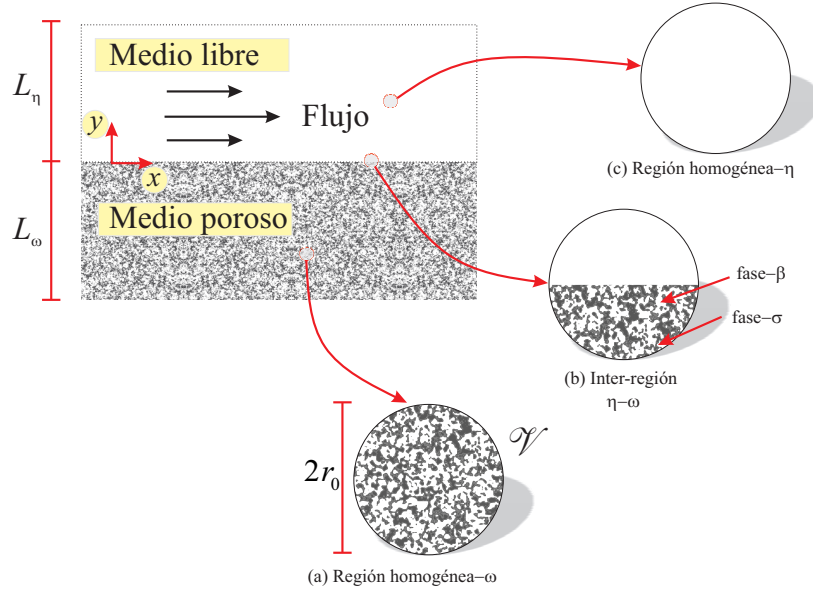


Figura 5.1: Esquema de un sistema compuesto por un medio poroso y muestras localizadas en las regiones homogéneas ((a) en el seno del medio poroso y (c) en el seno del medio libre) y en la inter-región ((b) medio libre/medio poroso).

5.2 Desarrollo de las ecuaciones promedio

5.2.1 Operadores de promediado

Para iniciar el desarrollo de las ecuaciones macroscópicas, se define una región de promediado $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ (de volumen V), la cual puede estar localizada en cualquier parte del sistema (*i. e.*, la región homogénea- η , la región homogénea- ω y así como la inter-región $\eta\omega$), tal como se muestran en la figura 5.1. Nótese que $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ puede contener todas las fases involucradas (*i. e.*, $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_\beta(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_\sigma(\mathbf{x})$). De esta manera, en términos de la región de promediado se introducen dos operadores de promediado de alguna cantidad ψ_β definida en la fase- β . El operador de promedio superficial se define como

$$\langle \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{y}_\beta \in \mathcal{V}_\beta(\mathbf{x})} \psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dV \quad (5.2)$$

el cual se relaciona al operador de promedio intrínseco mediante la ecuación de Dupuit-Forchheimer dada por

$$\langle \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \quad (5.3)$$

donde, cabe recordar que, $\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = V_\beta(\mathbf{x})/V$ es la fracción de volumen de la fase β contenida en la región de promediado o porosidad. Este coeficiente adquiere los siguientes valores en el sistema medio libre/medio poroso

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{región homogénea} - \eta \\ \varepsilon_{\beta\eta\omega}(\mathbf{x}) & \text{inter-región } \eta\omega \\ \varepsilon_{\beta\omega} & \text{región homogénea} - \omega \end{cases} \quad (5.4)$$

donde $\varepsilon_{\beta\omega}$ es la porosidad de la región homogénea ω , $\varepsilon_{\beta\eta\omega}(\mathbf{x})$ es la porosidad en la inter-región $\eta\omega$ y 1 es la porosidad de la región homogénea η . Cabe mencionar que el término región homogénea se refiere a la porción del sistema donde las propiedades efectivas se mantienen constantes con respecto a una región de promediado y un proceso dado (Quintard and Whitaker, 1987). Además, el término de inter-región se refiere a la zona localizada entre ambas regiones homogéneas, donde los coeficientes efectivos son dependientes de la posición (*i. e.*, cambian abruptamente su valor de una región a otra) también con respecto a una región de promediado y proceso dado.

En las ecuaciones anteriores el vector \mathbf{x} localiza la posición del centroide de la región de promediado medido desde un sistema coordenadas fijo y arbitrario, el vector $\mathbf{r}_\beta = \mathbf{x} + \mathbf{y}_\beta$ localiza puntos de la fase β contenida en la región de promediado relativo al mismo sistema coordenado y el vector \mathbf{y}_β también localiza puntos de la fase β contenida en la región de promediado, pero relativo al centroide. Nótese que las cantidades promedio están evaluadas en \mathbf{x} y las cantidades locales están evaluadas en \mathbf{r}_β . A continuación se muestra la aplicación de los operadores anteriores para desarrollar las ecuaciones promedio.

5.2.2 Ecuación continuidad promedio

En primer lugar, dirigiendo la atención a la ecuación de transporte de masa total, se aplica el operador de promedio superficial a la Ec. (5.1a), lo cual permite obtener a

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (5.5)$$

Para intercambiar integración y derivación espacial, se utiliza el teorema de promediado superficial (Howes and Whitaker, 1985), lo cual conduce a

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta dA = 0 \quad (5.6)$$

Donde $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$ representa las interfaces $\beta - \sigma$ contenidas en la región de promediado \mathcal{V} . Al hacer uso de la condición de no deslizamiento dada por la Ec. (4.1c), la Ec. (5.7) se reduce a su forma final dada por

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (5.7)$$

Notése que esta ecuación es idéntica a su contraparte en la microescala, y es una ecuación cerrada, por lo que no requiere de un proceso de cerradura local. Más aún, esta ecuación se puede escribir en términos de promedios intrínsecos, lo cual se obtiene al usar la Ec. (5.3). Lo anterior conduce a la

siguiente expresión

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = -\nabla \ln \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (5.8)$$

Está último resultado será útil en el desarrollo del problema de cerradura local de la ecuación de transporte de cantidad de movimiento.

5.2.3 Ecuación promedio de cantidad de movimiento

Ahora, dirigiendo la atención a la ecuación de transporte de cantidad de movimiento, se aplica el operador de promedio superficial a la Ec. (4.1b), donde al considerar a μ_β y ρ_β como constantes, se obtiene

$$\mathbf{0} = -\langle \nabla p_\beta \rangle + \rho_\beta \mathbf{g} \langle 1 \rangle + \mu_\beta \langle \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (5.9)$$

Aplicando el teorema del promediado espacial a los términos de esfuerzos viscosos y de presión, conduce a

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}p_\beta + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta) dA}_{\text{Esfuerzos interfaciales locales}} \quad (5.10)$$

donde se puede identificar una superficial que captura los esfuerzos interfaciales locales. Ahora, al hacer uso de la Ec. (5.3) al primer término, se obtiene el siguiente resultado

$$\mathbf{0} = -\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} - \nabla \varepsilon_\beta \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}p_\beta + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta) dA \quad (5.11)$$

Para simplificar esta ecuación, del teorema del promedio espacial con $\psi_\beta = 1$ se puede obtener la siguiente definición

$$-\nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \quad (5.12)$$

la cual permite escribir a la Ec. (5.11), después de dividirla entre $\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$, como

$$\mathbf{0} = - \underbrace{\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}}}_{\text{Esfuerzos de presión}} + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{Esfuerzos volumétricos}} + \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}}}_{1^{\text{ra}} \text{ corrección de Brinkman}} - \underbrace{\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left(\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} \right)}_{2^{\text{da}} \text{ corrección de Brinkman}} + \underbrace{\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})}_{\text{Esfuerzos interfaciales}} \quad (5.13)$$

Donde se ha introducido el vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ definido por

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \right) \right] dA \quad (5.14)$$

Para el sistema medio libre/medio poroso como el mostrado en la figura 5.1, este coeficiente adquiere los siguientes valores

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{en la región homogénea} - \eta \\ \mathbf{f}_{\beta\eta\omega}(\mathbf{x}) & \text{inter-región } \eta\omega \\ \mathbf{f}_{\beta\omega} & \text{en la región homogénea} - \omega \end{cases} \quad (5.15)$$

Nótese que en la Ec. (5.13) los primeros tres términos son similares a su contraparte en la microescala. En particular, el término $\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}}$ describe los esfuerzos normales macroscópicos debidos a la caída de presión. El término $\rho_\beta \mathbf{g}$ corresponde a los esfuerzos volumétricos debidos a las fuerzas de gravedad. Y el término $\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}}$ captura los esfuerzos viscosos macroscópicos debidos al fluido. Este último se conoce usualmente como *la primera corrección de Brinkman*, donde la viscosidad efectiva está por $\mu_{eff} = \mu_\beta / \varepsilon_\beta(\mathbf{x})$. Además, otros dos términos aparecen como resultado del proceso de promediado. En específico, el término $\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left(\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} \right)$ incorpora otra parte de los esfuerzos viscosos macroscópicos debido a la microestructura del medio poroso y a las variaciones espaciales de $\varepsilon_{\beta\omega}(\mathbf{x})$. Dicho término se conoce en la literatura como *la segunda corrección de Brinkman*. Por último, el término $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ describe los esfuerzos interfaciales que ejercen las partículas sólidas del medio poroso al flujo del fluido (*i. e.*, fuerzas de fricción por unidad de volumen).

Nótese que, hasta este punto, en el desarrollo de las Ecs. (5.7) y (5.13) no se ha hecho uso de alguna suposición o simplificación basada en restricciones de longitudes de escala, por lo que estas ecuaciones son válidas en cualquier punto de un sistema medio libre/medio poroso. En otras palabras, estas son las GTEs de masa total y de cantidad de movimiento exactas. Sin embargo, para cerrar a la (5.13) se requiere conocer de antemano al vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$, el cual contiene cantidades locales y promedio. Para resolver este problema, en este trabajo se presentan dos alternativas. La primera involucra predecir al vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ utilizando perfiles locales obtenidos de realizar PSS, mientras que la segunda consiste en representar a $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ solo en términos de cantidades promedio, lo cual quiere derivar y resolver el PCL. En el resto de este capítulo se explora la primera alternativa.

5.3 Predicción de coeficientes efectivos exactos

En esta sección se predicen las variaciones espaciales de las componentes del vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ usando los perfiles locales obtenidos mediante PSS en un sistema medio libre/medio poroso. Esto permitirá cerrar a las Ecs. (5.7) y (5.13) de manera exacta. Cabe mencionar que este curso de acción puede ser más complicado que resolver únicamente el problema de la escala de poro, y posteriormente promediar los perfiles locales para obtener los perfiles promedio, tal como se mostró en el capítulo anterior. Sin embargo, se pueden resaltar las siguientes ventajas

- Permite analizar la precisión de las ecuaciones promediadas, para predecir los perfiles de

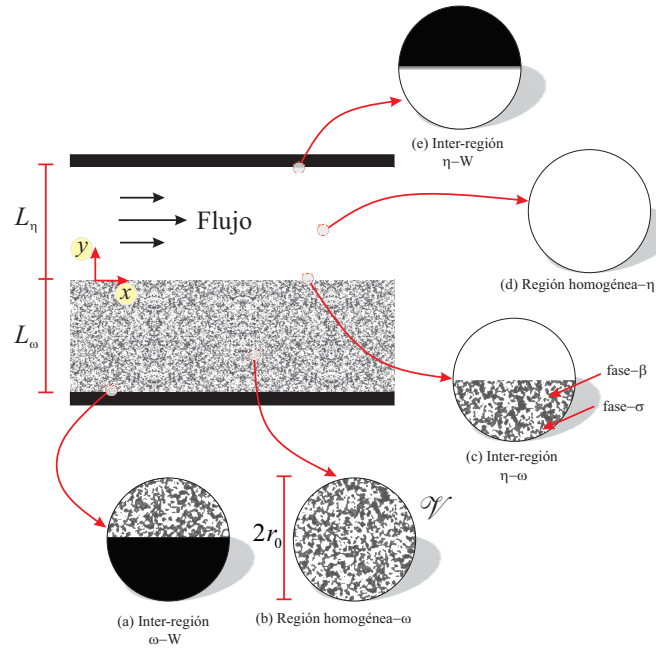


Figura 5.2: Esquema de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso y muestras localizadas en las regiones homogéneas ((b) en el seno del medio poroso y (d) en el seno del medio libre) y en las inter-regiones ((a) medio poroso/pared inferior, (c) medio libre/medio poroso y (e) medio libre/pared superior).

velocidad promedio, antes de adoptar un conjunto de simplificaciones basadas en restricciones de longitud de escala que reduzcan la información proveniente de la microescala.

- Permite evaluar de manera exacta la contribución de cada uno de los términos en las ecuaciones promediadas.
- Permite desarrollar de una manera más simple, debido al término $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$, las condiciones de salto que completan el TDA para un sistema compuesto por un medio libre y un medio poroso.

A continuación se describe la metodología utilizada para realizar las PSS y con ellas determinar a $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$.

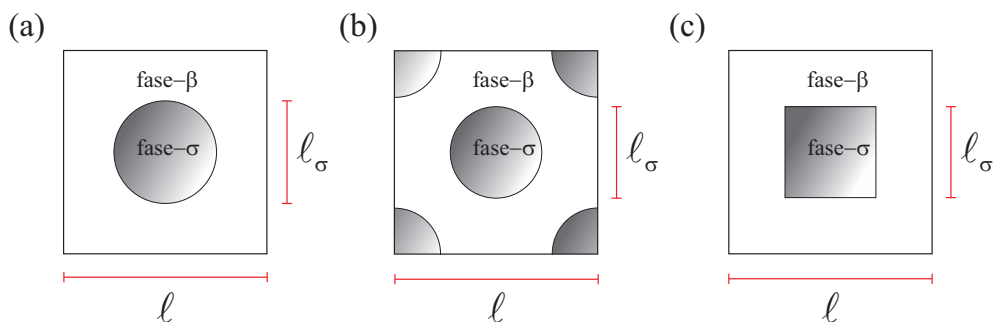


Figura 5.3: Celdas unitarias bidimensionales con partículas sólidas en tres arreglos diferentes: (a) cilindros en línea, (b) cuadros en línea y (c) cilindros escalonados.

5.3.1 Simulaciones a la escala de poro

Para llevar a cabo las PSS, se considera como caso de estudio nuevamente un sistema similar al utilizado por Beavers and Joseph (1967), tal como el que se muestra en la figura 5.2. Cabe recordar

que este sistema consiste en el flujo de un fluido a través de un canal parcialmente ocupado con un medio poroso, el cual está limitado por dos paredes impermeables, una en la parte superior y otra en la inferior. Dada la geometría del sistema el fluido fluye sobre y a través del medio poroso. La zona libre de obstáculos se referirá como la región del medio libre (o región $-\eta$) y la zona del medio poroso como la región del medio poroso (o región $-\omega$). Se considera que el flujo satisface las suposiciones 4.1.1, junto con la de totalmente desarrollado, y que es causado por una caída de presión promedio constante entre la salida y la entrada del canal, la cual está dada por

$$\frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} = C \quad \forall y \in (-L_\omega, L_\eta) \quad (5.16)$$

De esta forma, las Ecs. (5.1) siguen siendo válidas en la microescala, mientras que las Ecs. (5.7) y (5.13) siguen siendo válidas en la macroescala. Se considera que las alturas de la región del medio libre y del medio poroso están dadas por $L_\eta = 10^3 \ell$ y $L_\omega = 10^2 \ell$, respectivamente. Además, se supone que el medio poroso consiste de un arreglo periódico de una celda unitaria bidimensional de longitud de lado ℓ con partículas sólidas de longitud ℓ_σ . Estas dos longitudes quedan determinadas al especificar el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Para los propósitos prácticos se consideran tres geometrías de la celda unitaria, las cuales se muestran en la figura 5.3. Nótese que este sistema es igual al del capítulo anterior, utilizado para estudiar la existencia de la capa de Brinkman, por lo que se retoman los perfiles locales ya disponibles. Los detalles para realizar la PSS se pueden encontrar en la §4.2.1.

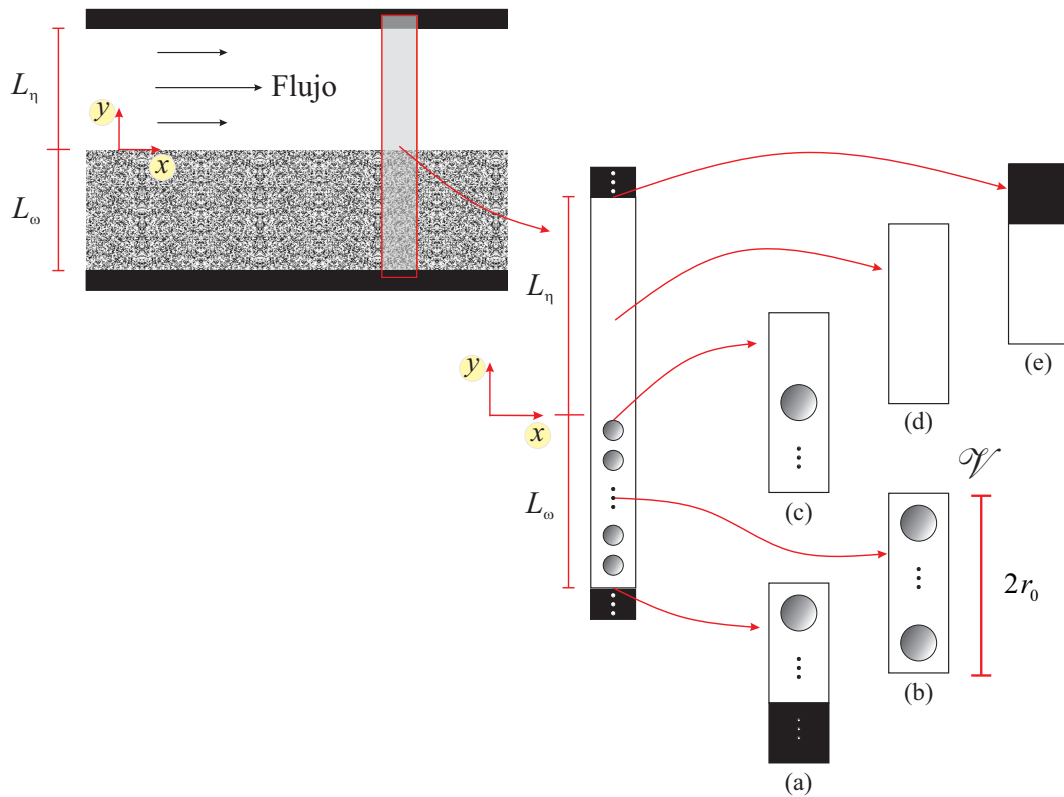


Figura 5.4: Canal parcialmente ocupado con un medio poroso compuesto de un arreglo periódico de una celda unitaria con un círculo centrado y dominio representativo del canal la dirección horizontal.

5.3.2 Variaciones espaciales del término no homogéneo $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$

Una vez realizadas las PSSs, se determinaron las variaciones espaciales de las componentes del vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ usando la Ec. (5.14). Para lograr esto se calcularon los términos locales y promedio que aparecen en esta ecuación a partir de la información resultante de las PSSs. Para lograr esto, debido a que el vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ está en términos de una integral superficial definida en todas las interfaces $\beta - \sigma$ contenidas dentro de \mathcal{V} , se definió la forma y el tamaño de dicha región. Basado en la geometría del dominio utilizado en la solución del problema de la microescala (ver 4.2.1), se tomó como región de promediado a un paralelepípedo de sección transversal rectangular perpendicular a la dirección del flujo, tal como los que se muestran en la figura 5.4. El área de su sección transversal es $2r_0\ell$, siendo r_0 la mitad de su altura y ℓ su ancho. Las predicciones se llevaron a cabo usando diferentes tamaños de r_0 , donde por simplicidad, se fijó que r_0 es un número entero de ℓ . Cabe señalar que, bajo estas condiciones los principales cambios de $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ son únicamente en la coordenada $-y$. Además, para predecir los perfiles de velocidad promedio en el canal completo, sólo es necesario calcular su componente tangencial a la superficie del medio poroso (*i. e.*, $f_{\beta_x} = \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x$).

En la figura 5.5 se presentan las variaciones espaciales de la componente $f_{\beta_x}(y)$ en la inter-región $\eta\omega$ normalizadas con su valor en el seno del medio poroso (*i. e.*, $f_{\beta\omega}$). Estas predicciones se obtuvieron usando diferentes tamaños de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Los cálculos se obtuvieron para los tres medios porosos hechos de arreglos periódicos de cada celda unitaria mostrada en la figura 5.3. En todos los casos, se observa que la variación $f_{\beta_x}(y)$ se reduce al valor del seno del medio poroso aproximadamente en $y \approx -r_0 - 2\ell$, y no en $y = -r_0$, que es la última posición, de abajo hacia arriba, donde la región de promediado está completamente dentro del medio poroso. Esto se atribuye al efecto del flujo del fluido en la región de medio libre sobre las primeras partículas sólida que componen al medio poroso, tal como se mostró en la §4.3. Además, la variación de $f_{\beta_x}(y)$ alcanza el valor de cero en $y = +r_0$, que es la posición donde la región de promediado ya no contiene más partículas sólidas. Lo anterior permite dividir las variaciones espaciales de $f_{\beta_x}(y)$ como

$$f_{\beta_x}(y) = \begin{cases} 0 & +r_0 \leq y \leq L_\eta - r_0 \\ f_{\beta\eta\omega,x}(y) & -r_0 - 2\ell < y < L_+ r_0 \\ f_{\beta\omega,x} & -L_\omega + r_0 \leq y \leq -r_0 - 2\ell \end{cases} \quad (5.17)$$

donde $f_{\beta\eta\omega,x}(y)$ representa las variaciones espaciales de $f_{\beta_x}(y)$ en la inter-región $\eta\omega$ y $f_{\beta\omega,x}(y)$ denota el valor de $f_{\beta_x}(y)$ en la región homogénea del medio poroso, el cual es constante siempre y cuando el medio poroso es homogéneo. Interesantemente, se aprecia que la zona de cambios de $f_{\beta_x}(y)$ está restringida por las posiciones dadas por $-r_0 - 2\ell \leq y \leq +r_0$, lo cual muestra que esta zona tiene un tamaño aproximado de $\delta_{f_{\beta_x}} \approx 2r_0 + 2\ell$. Además, esto ilustra que la porción de la zona de cambios de $f_{\beta_x}(y)$ localizada debajo de la frontera del medio poroso es dos celdas unitarias más grande que en la porción ubicada por arriba de la frontera del medio poroso, y por consiguiente es más grande que el tamaño de la región de promediado, $2r_0$. Cabe mencionar que, una consecuencia de esto, como se verá en el capítulo siguiente, es que la zona de cambios de la permeabilidad será igual al de $f_{\beta_x}(y)$. Esto contrasta con lo sugerido por Valdés-Parada *et al.* (2009a, 2013), quienes encontraron que la porción de la zona de cambios de la permeabilidad encontrada por debajo de la frontera del medio

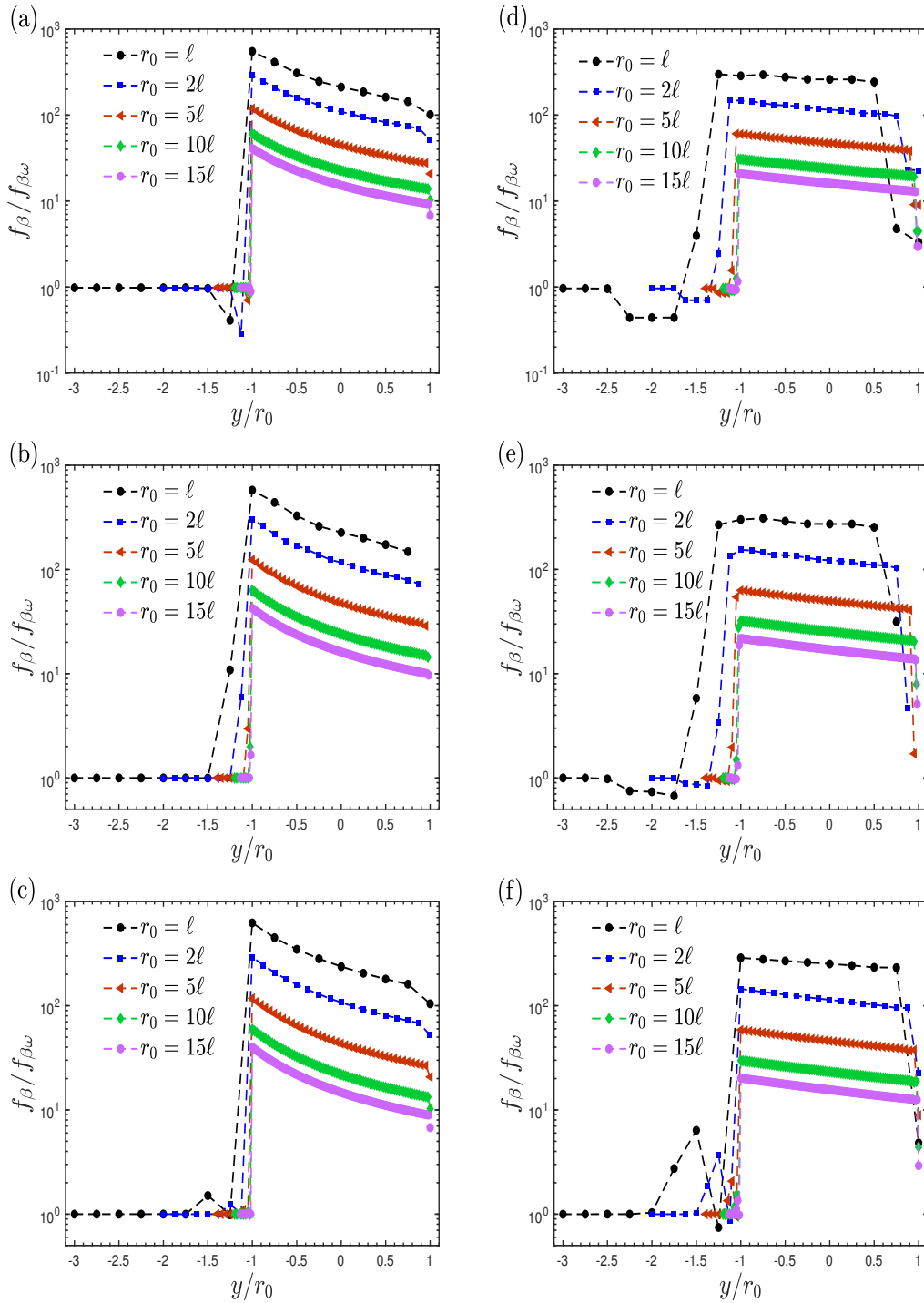


Figura 5.5: Variaciones espaciales de la componente tangencial, a la superficie del medio poroso, del término no homogéneo $f_{\beta_x}(y)$ en la inter-región $\eta\omega$ para tres modelos del medio poroso compuestos por: (a, d) cuadrados en línea, (b, e) círculos en línea y (c, f) círculos escalonados. Para los cálculos se utilizaron cinco tamaños de r_0 para dos valores de la porosidad del seno del medio poroso $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a-c) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y (d-f) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$.

poroso es igual a la del medio libre. Sin embargo, sus hallazgos se obtuvieron a partir de la solución de un PCL aproximado.

Por otro lado, en la figura 5.5 se observa que las variaciones espaciales de $f_{\beta_x}(y)$ en la inter-región $\eta\omega$ tiene tres velocidades de cambio. La primera de ellas se encuentra entre las posiciones dadas

por $-r_0 \lesssim y \lesssim -r_0 - 2\ell$, donde $f_{\beta x}(y)$ incrementa rápidamente. La segunda zona se localiza entre las posiciones dadas por $-r_0 + 2\ell \lesssim y \lesssim +r_0 - \ell$, donde $f_{\beta x}(y)$ decrece suavemente. La tercera zona se localiza entre las posiciones dadas por $+r_0 - \ell \lesssim y \lesssim +r_0$, donde $f_{\beta x}(y)$ decrece bruscamente hasta alcanzar el valor de cero. Por último, se aprecia que con las tres geometrías del medio poroso, el valor $f_{\beta x}(y)$ decrece al incrementar el tamaño de r_0 . Además, el valor de este coeficiente cambia más rápidamente cuando $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ que cuando $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$.

5.3.3 Variaciones espaciales de la porosidad $\varepsilon_{\beta}(\mathbf{x})$

Otro coeficiente necesario para cerrar a las ecuaciones macroscópicas, es la fracción de volumen de la fase β contenida en \mathcal{V} , $\varepsilon_{\beta}(\mathbf{x})$. Al igual que el coeficiente de resistencias interfaciales calculado líneas arriba, los principales cambios de $\varepsilon_{\beta}(\mathbf{x})$ son en la coordenada vertical (coordenada y). Con esto en mente, este coeficiente se obtuvo usando la definición dada por $\varepsilon_{\beta}(y) = V_{\beta}(y)/V$, donde $V = 2r_0\ell W$ y $V_{\beta}(y) = \int_{V_{\beta}(y)} dV$, en cada posición de la región de promediado en la dirección vertical del dominio representativo periódico mostrado en la figura 5.4. Las predicciones se hicieron utilizando diferentes tamaños de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Esto se hizo para los tres modelos del medio poroso hechos de las unitarias mostradas en la figura 5.3.

Como se esperaba, los valores de $\varepsilon_{\beta}(y)$ en el seno del medio poroso y la región del medio libre son $\varepsilon_{\beta\omega}$ y 1, respectivamente. Además, en la inter-región $\eta\omega$, $\varepsilon_{\beta}(y)$ tiene un comportamiento oscilatorio que va del valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$ a 1 para valores de r_0 cercanos a la unidad y tiende a un comportamiento lineal al incrementar el valor de r_0 . Esta zona de cambios de $\varepsilon_{\beta}(y)$ se encuentra entre las posiciones dadas por $-r_0 \leq y \leq r_0$, por lo que esta tiene un tamaño $\delta_{\varepsilon_{\beta}} = 2r_0$, el cual es aproximadamente dos celdas unitarias más pequeña que la zona de cambios del $f_{\beta x}(y)$. Esto se debe a que $\varepsilon_{\beta}(y)$ solo dependen de la microestructura del medio poroso, mientras que $f_{\beta x}$ depende tanto de la microestructura del medio poroso como de los esfuerzos superficiales en la inter-región. Cabe mencionar que, es posible derivar expresiones algebraicas para $\varepsilon_{\beta}(y)$ en la inter-región, las cuales contienen a la función entero mayor, para describir de manera exacta a este coeficiente. Sin embargo, para propósitos prácticos, se encontró que se puede utilizar una interpolación lineal entre los valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ y 1. Los resultados se ajustaron a la siguiente expresión

$$\varepsilon_{\beta}(y) = \begin{cases} 1 & +r_0 \leq y \leq L_{\eta} - r_0 \\ \frac{1 + \varepsilon_{\beta\omega}}{2} + \frac{1 - \varepsilon_{\beta\omega}}{2n_0} \left(\frac{y}{\ell}\right) & -r_0 < y < +r_0 \\ \varepsilon_{\beta\omega} & -L_{\omega} + r_0 \leq y \leq -r_0 \end{cases} \quad (5.18)$$

En todos los casos, el valor del coeficiente de correlación R^2 es mayor que 0.999. Cabe señalar que este tipo de ajuste solo es cierto para las variaciones espaciales de $\varepsilon_{\beta}(y)$ y no para aquellas de $f_{\beta x}(y)$, las cuales son funciones más complejas, tal como se mostró en la figura 5.5.

5.4 Solución del modelo de un dominio I

Una vez predichos los coeficientes efectivos, se evalúan las capacidades de las ecuaciones macroscópicas desarrolladas para predecir a los perfiles de velocidad promedio en el sistema medio libre/medio poroso mostrado en la figura 5.2. Para llevar a cabo esto, se comparan los perfiles de

velocidad promedio obtenidos de la solución de un ODA, compuesto por las GTEs dadas por las Ecs. (5.13) junto con sus correspondientes condiciones de frontera, con los obtenidos de promediar los perfiles de velocidad local resultantes de realizar PSSs.

5.4.1 Velocidad promedio obtenida de las simulaciones a la escala de poro

Por un lado, para obtener los perfiles de velocidad promedio a partir de las PSSs, se sustituyeron los perfiles de velocidad local, ya disponibles en este punto del análisis, en la Ec. 5.2. Esto permitió obtener a los perfiles de velocidad de promedio superficial. Para ello, y para ser consistentes con la predicción de los coeficientes efectivos, se consideró la misma región de promediado, tanto en forma como en tamaño, utilizada para predecir las variaciones espaciales de $f_{\beta,x}(y)$ y $\varepsilon_{\beta}(y)$. Cabe señalar que, el hecho utilizar la misma forma y tamaño de la región de promediado es crucial en la comparación con los perfiles obtenidos de la solución del ODA, de lo contrario se obtendrían errores en la comparación de los perfiles. Además, cabe recordar que el ODA considera el efecto de la forma y el tamaño de la región de promedio a través de los coeficientes efectivos (ver figura 5.5). Por último, se debe tener en cuenta que los perfiles locales no dependen del región de promediado, mientras que los perfiles promedio si.

5.4.2 Velocidad promedio predicha a partir del modelo de un dominio

Por otro lado, para obtener los perfiles de velocidad a partir de la solución del ODA y para propósitos de esta comparación, primero se propuso escribir a las ecuaciones macroscópicas en forma adimensional. Así, usando las variables adimensionales dadas por las Ecs. (4.8), junto con las siguientes

$$\mathbf{f}_{\beta}^*(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}_{\beta}(\mathbf{x})\ell^2}{\mu_{\beta}v_{ref}}, \quad \langle \mathbf{u} \rangle^{\beta} = \frac{\langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}}{v_{ref}}, \quad \langle p \rangle^{\beta} = \frac{\langle p_{\beta} \rangle^{\beta}}{v_{ref}}, \quad (5.19)$$

las Ecs. (5.7) y (5.13) quedan como

$$\nabla^* \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (5.20a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla^* \langle p \rangle^{\beta} + \varepsilon_{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle - \varepsilon_{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla^* \varepsilon_{\beta} \cdot \nabla \left(\varepsilon_{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{u} \rangle \right) + \mathbf{f}_{\beta}^*(\mathbf{x}) \quad (5.20b)$$

No obstante, debido a que el flujo es totalmente desarrollado y unidireccional en la dirección de la caída de presión a través del canal parcialmente ocupado por un medio poroso, la única componente no nula del vector de velocidad es la componente tangencial a la superficie del medio poroso, *i. e.*, $\langle u_x \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_x$. La ecuación de $\langle u_x \rangle$ se obtiene haciendo el producto escalar de las Ecs. (5.20) con el vector unitario en la dirección $-x$, lo cual conduce a

$$0 = -\frac{d\langle p \rangle^{\beta}}{dX} + \varepsilon_{\beta}^{-1}(Y) \frac{d^2 \langle u_x \rangle}{dY^2} - \varepsilon_{\beta}^{-1}(Y) \frac{d\varepsilon_{\beta}}{dY} \frac{d}{dY} \left(\varepsilon_{\beta}^{-1}(Y) \langle u_x \rangle \right) + f_{\beta,x}^*(Y) \quad (5.21)$$

Además, para completar este ODA, se imponen las siguientes condiciones a la frontera en los límites superior e inferior del canal

$$\langle u_x \rangle = 0 \quad \text{en} \quad Y = (L_\eta + r_0)/\ell \quad (5.22a)$$

$$\langle u_x \rangle = \langle u_x \rangle_{\omega, \infty} \quad \text{en} \quad Y = -(L_\omega - r_0)/\ell \quad (5.22b)$$

donde $\langle u_x \rangle_{\omega, \infty}$ es la velocidad en el seno de medio poroso (*i. e.*, la velocidad de Darcy), la cual está dada por $\langle u_x \rangle_{\omega, \infty} = -K_{\beta\omega}^* d \langle p \rangle_\omega^\beta / dX$. Nótese que en lugar de utilizar la condición de frontera de no deslizamiento en la pared impermeable inferior localizada en $Y = -L_\omega/\ell$, se impuso la velocidad del seno del medio poroso justo antes de esta pared en $Y = (-L_\omega + r_0)/\ell$. Esto se hizo con el objetivo de enforzar el análisis desde la parte inferior del seno del medio poroso hasta la pared superior. Sin embargo, se debe recordar que las condiciones del seno del medio poroso se alcanzan en una distancia $\delta_B \approx r_0 + 2\ell$ por debajo de la superficie de este, tal como se mostró en el capítulo anterior. Por otro lado, se debe notar en la parte superior del canal se impuso la condición de no deslizamiento dentro de la pared impermeable en $Y = (L_\eta + r_0)/\ell$. Esto se debe a que en un sentido promedio, la velocidad promedio no necesariamente es cero en $Y = L_\eta/\ell$, ya que en esa posición la región de promediado aún contiene una parte de la región de medio libre, lo cual se mostró por Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019). Además de lo anterior, debido al tipo de flujo y sistema experimental considerado por Beavers and Joseph (1967), es razonable suponer que la caída de presión en ambas regiones está dada por

$$\frac{d \langle p \rangle^\beta}{dX} = \frac{d \langle p \rangle_\eta^\beta}{dX} = \frac{d \langle p \rangle_\omega^\beta}{dX} = C^* \quad (5.23)$$

De esta manera, el ODA para la transferencia de cantidad de movimiento entre el medio libre y el medio poroso está dado por la Ec. (5.21) y las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (5.22). Con base en esto, y debido a la dependencia con respecto a la posición de los coeficientes efectivos, el ODA se resolvió numéricamente. Para ello se utilizó un esquema de diferencias finitas para discretizar las ecuaciones y un método de eliminación Gaussiana para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes. Se realizaron pruebas de convergencia, que consistieron en incrementar gradualmente el número de nodos computacionales, de tal forma que la solución fuese independiente del número de nodos. El tamaño de paso utilizado es $\Delta Y = 1 \times 10^{-3}$, por lo que el número de nodos es $N_Y = (L_\eta + L_\omega)/(\ell \Delta Y)$. Algunos ejemplos de los perfiles de la velocidad de promedio intrínseco se muestran a continuación de la siguiente forma

$$U_i = \frac{\langle u_x \rangle_i^\beta}{\max(\langle u_x \rangle_{PSS}^\beta)}; \quad i = PSS, ODA \quad (5.24)$$

En la figura 5.6 se muestran los perfiles de velocidad promedio del sistema medio libre/medio poroso obtenidos de resolver el ODA. Además, en la misma figura se muestran los perfiles obtenidos de promediar los campos de velocidad local resultantes de las PSSs. Todos los perfiles son para el modelo de medio poroso compuesto de un arreglo periódico de la celda unitaria con un círculo centrado (ver figura 5.3(a)) y usando diferentes tamaños de la región de promediado para dos valores

de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Cabe aclarar que, en la descripción mediante el ODA, los efectos del tamaño de la región de promediado se incorporan implícitamente a través de los coeficientes efectivos. En particular, en las figuras 5.6 (a) y (d) se muestran los perfiles de velocidad en todo el sistema, donde se puede observar que los perfiles obtenidos del ODA son idénticos a aquellos de las PSSs. Esto se puede confirmar visualmente en los acercamientos hechos alrededor de las velocidad máxima en la región del medio libre mostrados en las figuras 5.6 (b) y (e) y aquellos hechos alrededor de la región de la frontera medio libre/medio poroso presentados en las figuras 5.6 (c) y (d). Las observaciones anteriores aplican para cualquier tamaño de r_0 y para ambos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$.

Con el fin de cuantificar las capacidades predictivas del ODA, se calculó el porcentaje de error relativo de dicho modelo para predecir a los perfiles de velocidad en la inter-región $\eta\omega$, con respecto a los obtenidos de las PSSs, de acuerdo a la siguiente expresión

$$Error_1 = \frac{100}{2r_0/\ell} \int_{Y=r_0/\ell}^{Y=r_0/\ell_1} \left| \frac{\langle u_x \rangle_{PSS}^\beta - \langle u_x \rangle_{ODA}^\beta}{\langle u_x \rangle_{PSS}^\beta} \right| dY \quad (5.25)$$

En la tabla 5.1 se presentan los valores del $Error_1$ como función de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estos resultados son para las tres geometrías del medio poroso. Como se puede ver, en todos los casos el valor del $Error_1$ está por debajo del 4%, siendo menores para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ que aquellos para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$. Esto se atribuye a que cuando decrece el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$ se incrementa la rapidez con la que cambia la velocidad en la región del medio libre a la velocidad de Darcy, lo cual resulta más complicado de describir por el ODA. Sin embargo, se encontró que los valores del $Error_1$ pueden disminuirse al incrementar el número de puntos utilizados para predecir el coeficiente $f_{\beta x}$. Las predicciones $f_{\beta x}$ presentadas hasta este punto están separadas por una distancia $\ell/4$.

Tabla 5.1: Porcentaje de error relativo de las predicciones de la velocidad promedio en la inter-región $\eta\omega$ obtenidas de la solución del ODA con respecto a las obtenidas de las PSSs.

r_0/ℓ	círculos en línea		círculos escalonados		cuadrados alineados	
	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$
1	3.36	1.87	3.53	2.60	5.65	5.02
2	3.00	1.22	5.87	6.28	2.90	3.33
5	1.16	0.47	6.46	6.94	3.73	5.37
10	0.57	0.26	6.12	6.87	4.41	6.12
15	0.36	0.17	6.08	6.52	4.64	6.36

Como una segunda medida de las capacidades predictivas del ODA, se calculó el porcentaje de error relativo de este modelo para describir a la velocidad máxima en la región del medio libre $\langle u_x \rangle_{max}^\beta$, con respecto los obtenidos de las PSSs, de acuerdo a la siguiente expresión

$$Error_2 = 100 \left| \frac{\langle u_x \rangle_{PSS}^\beta - \langle u_x \rangle_{ODA}^\beta}{\langle u_x \rangle_{PSS}^\beta} \right| \quad (5.26)$$

En la tabla 5.2 se muestran los valores del $Error_2$ como función de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estas mediciones son para los tres modelos del medio poroso. Se puede apreciar que en todos los

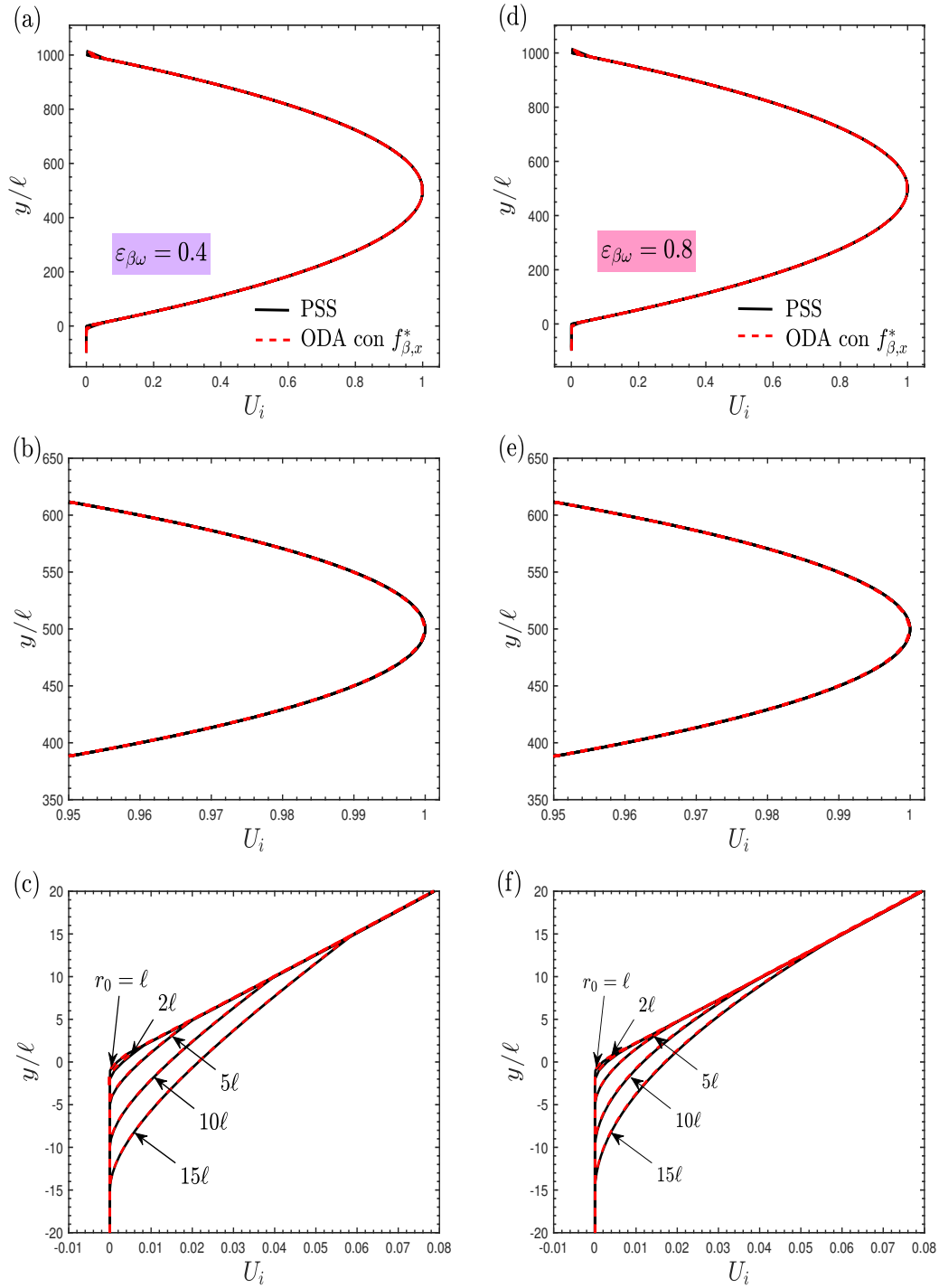


Figura 5.6: Comparación de los perfiles de velocidad promedio en el canal parcialmente ocupado con un medio poroso (hecho de un arreglo periódico de una celda unitaria con una partícula circular centrada) obtenidos de la solución del ODA que contiene el término no homogéneo $f_{\beta,x}(y)$ con los obtenidos de la PSS para cinco valores de r_0 y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a-c) 0.4 y (d-f) 0.8. El tamaño del sistema medio libre-medio poroso consiste en $L_\eta = 10^3\ell$ y $L_\omega = 10^2\ell$.

casos el error es menor que 10^{-2} . Esto indica que los errores introducidos en la predicción de los perfiles de velocidad en la inter-región $\eta\omega$ tienen efectos despreciables sobre las predicciones en el medio libre. Esto se debe a que el flujo en el medio libre es afectado únicamente en las primeras celdas

unitarias, lo cual se mostró en la §4.3. Además, las dimensiones del sistema satisfacen la disparidad de longitudes características dada por $\ell/L_\eta \ll 1$. Si esto no fuera el caso, los errores introducidos en la predicción de los perfiles en la inter-región $\eta\omega$ tendrían efectos significativos en la predicción de los perfiles en el medio libre, tal como lo sugieren Neale and Nader (1974).

Tabla 5.2: Porcentaje de error relativo de las predicciones de la velocidad promedio alrededor de la velocidad máxima en la región homogénea del medio libre obtenidas de la solución del ODA con respecto a las obtenidas de las PSSs.

r_0/ℓ	círculos en línea		círculos escalonados		cuadrados en línea	
	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$
1	7.91×10^{-3}	1.17×10^{-2}	7.13×10^{-4}	2.00×10^{-3}	6.16×10^{-3}	5.41×10^{-3}
2	7.74×10^{-3}	6.24×10^{-4}	1.13×10^{-2}	1.49×10^{-2}	2.18×10^{-3}	2.54×10^{-3}
5	7.59×10^{-3}	1.19×10^{-3}	2.73×10^{-2}	3.20×10^{-2}	8.83×10^{-3}	1.72×10^{-2}
10	7.37×10^{-3}	2.3×10^{-5}	5.33×10^{-2}	6.01×10^{-2}	2.69×10^{-2}	4.06×10^{-2}
15	7.18×10^{-3}	3.18×10^{-4}	7.90×10^{-2}	8.76×10^{-2}	4.47×10^{-2}	6.35×10^{-2}

Con base en lo anterior, es posible concluir que los perfiles de velocidad en todo el sistema medio libre/medio poroso obtenidos de la solución del ODA concuerdan satisfactoriamente con los obtenidos de las PSSs. Esto sugiere que las GTEs en su forma actual, desarrolladas usando el método del promedio volumétrico, son capaces de capturar la información esencial de la microescala en la macroescala. Para lograr esto, se intuye que todos los términos de la ecuación de movimiento deben ser incluidos, lo cual se analiza en la siguiente sección.

5.5 Contribuciones de la primera y la segunda correcciones de Brinkman

Como se mostró anteriormente, la GTE de la transferencia de cantidad de movimiento incluye tanto a una primera como a una segunda corrección de Brinkman. Cabe recordar que ambos términos describen los esfuerzos macroscópicos, pero el primero de ellos se debe al fluido y el segundo se debe a la microestructura del medio poroso y a las variaciones espaciales de ε_β . Es importante señalar que si la región de medio libre. así como el medio poroso son regiones homogéneas, la segunda corrección de Brinkman solo existirá en la inter-región entre ambas regiones (Whitaker, 1999). Sin embargo, diversos trabajos reportados en la literatura sugieren que la segunda corrección de Brinkman puede despreciarse incluso la inter-región, ya que su contribución se toma en cuenta indirectamente a través de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos como la porosidad y la permeabilidad Chandesris and Jamet (2006, 2007), aunque hasta ahora esto no se ha demostrado. Con el fin de proporcionar una análisis sobre ello, en esta sección se evalúa la contribución de cada término viscoso en la GTE de la transferencia de cantidad de movimiento para predecir los perfiles de velocidad promedio. Para llevar a cabo esto, se propone resolver el ODA dado por las Ecs. (5.21) bajo dos casos. Primero despreciando la segunda corrección de Brinkman en la inter-región $\eta\omega$ y conservado la primera en todos lados, y después al revés.

De esta manera, en la figura 5.7 se comparan los perfiles de velocidad promedio para el sistema mostrado en la figura 5.2 obtenidos de resolver el ODA bajo los dos casos antes mencionados con aquellos obtenidos de resolver el ODA completo y de las PSSs. Estos resultados se obtuvieron usando el modelo de medio poroso compuesto de un arreglo periódico de la celda unitaria con un círculo centrado. Para las tres soluciones del ODA se tomaron en cuenta las variaciones espaciales de $f_{\beta x}$

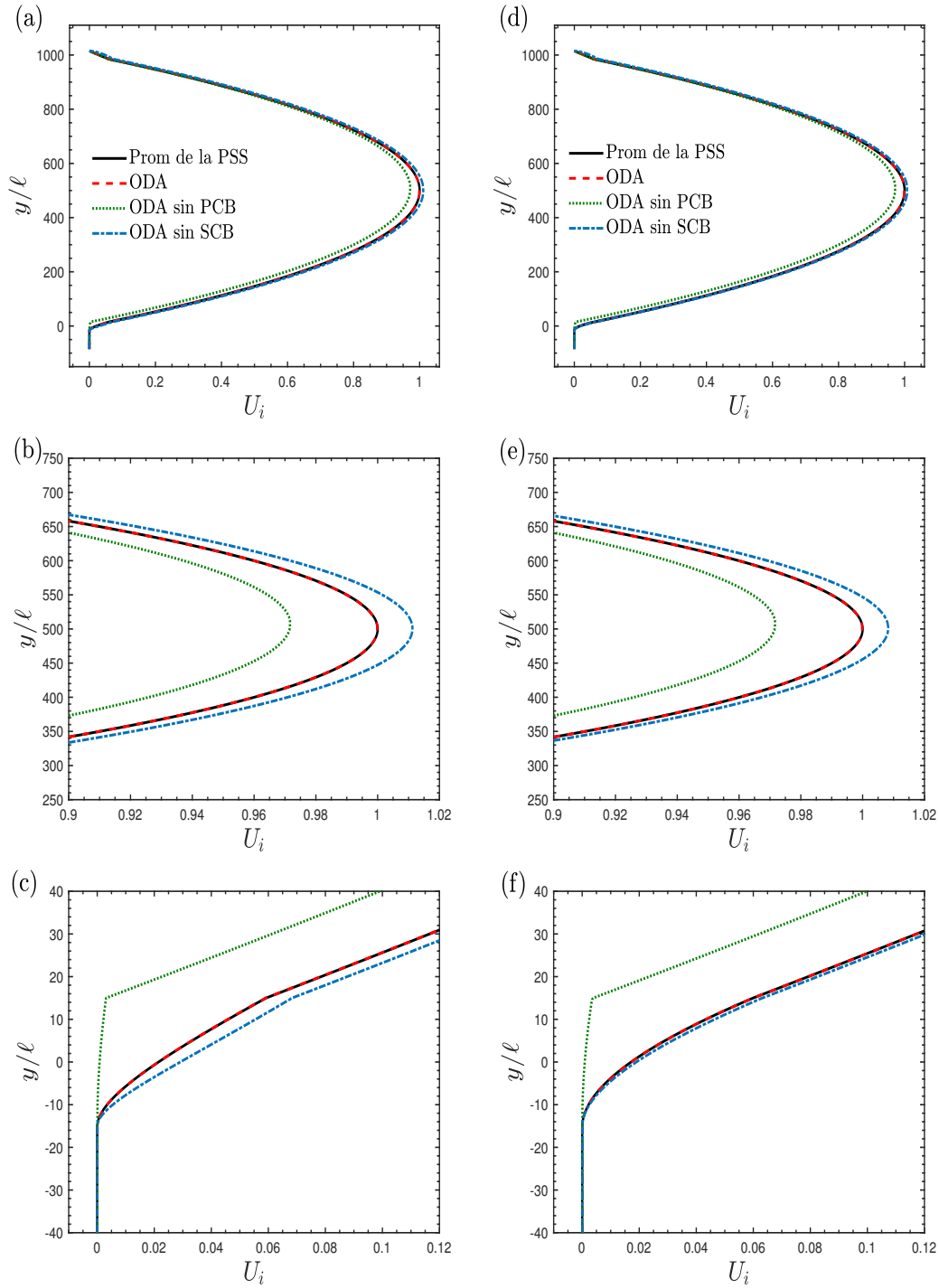


Figura 5.7: Comparación de los perfiles de velocidad en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso obtenidos de la solución del ODA con el término no homogéneo f_{β_x} (modelo completo, modelo sin la primera corrección de Brinkman(PCB) y modelo sin la segunda corrección de Brinkman (SCB)) con los obtenidos de las PSSs para $r_0 = 15\ell$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a-c) 0.4 and (d-f) 0.8. El medio poroso consiste en un arreglo periódico de celdas unitarias con cilindros en línea. En todos los cálculos el tamaño del sistema fluido-medio poroso consiste en $L_\eta = 10^3\ell$ and $L_\omega = 10^2\ell$.

usando $r_0 = 15\ell$ y $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ mostradas en la figura 5.5. Analizando esta comparación, se pueden hacer los siguientes comentarios

- Por un lado, al despreciar la primera corrección de Brinkman (PCB) en el ODA, las predicciones de los perfiles de velocidad muestran desviaciones de los obtenidos tanto del ODA completo como de los perfiles locales. Estas desviaciones se pueden apreciar sin hacer ampliaciones en la inter-región $\eta\omega$ o alrededor de la velocidad máxima. Además, se puede notar que al despreciar la PCB, las predicciones del ODA subestiman los perfiles de velocidad promedio, presentando un cambio abrupto alrededor de $y = 15\ell$. Esto resalta la relevancia de incluir la PCB en el ODA para predecir los perfiles de velocidad cerca de la frontera medio libre/medio poroso.
- Por otro lado, al despreciar a la segunda corrección de Brinkman (SCB), también se introducen desviaciones en la predicción de los perfiles de velocidad promedio Sin embargo, estas desviaciones son menores a las obtenidas de despreciar a la PCB, por lo que las predicciones de velocidad están más cercanas a las obtenidas del ODA completo y de las PSSs.
- Cabe mencionar que, ya sea despreciar la primera o la segunda corrección de Brinkman, la magnitud de los errores introducidos decrece al incrementar el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Esto se atribuye a que los cambios de la velocidad del seno del medio poroso a la velocidad de deslizamiento son más rápidos para cuando $\varepsilon_{\beta\omega} \rightarrow 0$, incrementando la contribución de las correcciones de Brinkman en la captura de dichos cambios.
- Por último, como era de esperarse los perfiles de velocidad obtenidos de la solución del ODA completo reproducen satisfactoriamente los perfiles obtenidos de la PSS.

Con el fin de tener una perspectiva más cuantitativa sobre los errores introducidos en la predicción de los perfiles de velocidad promedio por despreciar la primera y la segunda corrección de Brinkman, se calculó el porcentaje de error relativo de cada caso usando una ecuación similar a la Ec. (5.25). En la tabla se muestran los valores del $Error_1$ usando diferentes valores de r_0 y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Analizando estos datos, se aprecia que para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ el error introducido por despreciar la PCB es aproximadamente $97\% \pm 2\%$ y por despreciar la SCB es aproximadamente $35\% \pm 2\%$. Además, para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ estos errores se mantienen en $97\% \pm 1\%$ cuando se desprecia la PCB y son aproximadamente $10\% \pm 1\%$ cuando se desprecia la SCB.

Tabla 5.3: Porcentaje de error relativo del ODA sin la primera corrección de Brinkman (PCB) y del ODA sin la segunda corrección de Brinkman (SCB) en la inter-región para predecir los perfiles de velocidad promedio con respecto al ODA completo. Los cálculos son para diferentes valores de r_0 y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$.

r_0/ℓ	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$		$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	
	sin la PCB	sin la SCB	sin la PCB	sin la SCB
1	99.75	32.13	99.64	2.85
2	99.50	36.07	99.26	11.09
5	98.72	38.13	98.22	10.83
10	97.44	38.36	96.48	10.73
15	96.20	38.14	94.76	10.70

Por último, para apreciar las contribuciones de cada término de la GTE de la transferencia de cantidad de movimiento, en la figura 5.8 se presentan las variaciones espaciales de las dos correcciones de Brinkman y el término f_{β_x} en la inter-región $\eta\omega$ usando $r_0 = 15\ell$ para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Analizando estos resultados, se puede apreciar que para ambos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ la PCB es del mismo orden de magnitud que el término de resistencias f_{β_x} , aunque son de signo opuesto. Por otro

lado, aunque la SCB tenga un orden de magnitud menor a los otros dos términos, su contribución puede ser importante, ya que los otros dos términos tienden a cancelarse al ser de signo opuesto y del mismo orden. Cabe señalar que la magnitud de todos los términos decrece al incrementar el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$, indicando que las resistencias al flujo disminuyen cuando se incluye más fluido en las celdas unitarias.

Por lo tanto, con base en lo anterior se concluye que para describir de manera precisa a los perfiles de velocidad promedio entre una región de medio libre y un medio poroso se deben incluir tanto la primera como la segunda corrección de Brinkman en la GTE de cantidad de movimiento. Esto comprueba que contribución de la PCB no es necesariamente incluida a través de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, tal como lo sugieren diversos trabajos (Chandesris and Jamet, 2006, 2007). Estos hallazgos confirman aquellos esbozados por Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019). Resultados similares se obtuvieron para otros modelos del medio poroso (compuestos de un arreglo periódico de la celda unitaria con círculos escalonados y un cuadrado centrado) y otros valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$

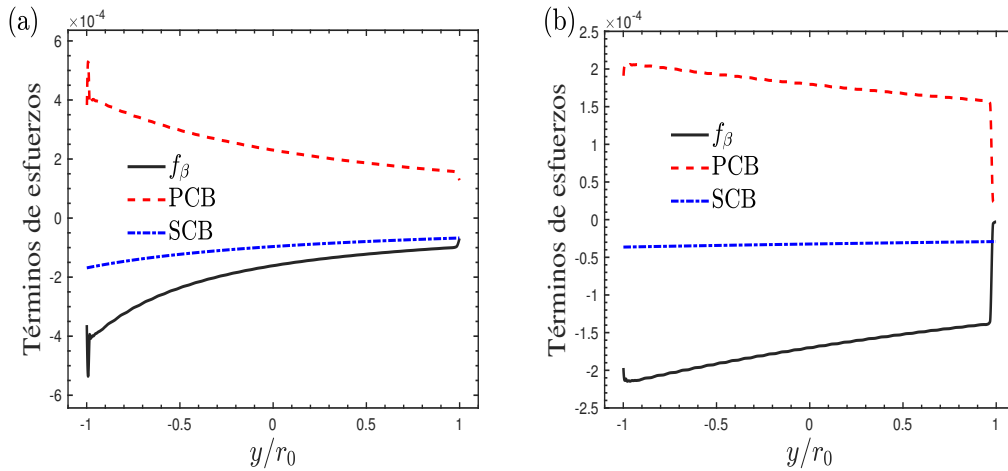


Figura 5.8: Variaciones espaciales de los términos viscosos de la GTE del transporte de cantidad de movimiento en la inter-región $\eta\omega$ para $r_0 = 15\ell$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a) 0.4 and (b) 0.8. El medio poroso consiste en un arreglo periódico de una celda unitaria con un círculo centrado. En todos los casos se fijó que las alturas del sistema medio libre/medio poroso son $L_\eta = 10^3\ell$ y $L_\omega = 10^2\ell$.

5.6 Resumen del capítulo

En este capítulo se desarrollaron las ecuaciones promedio para describir a la transferencia de masa total y cantidad de movimiento entre una región de medio libre y un medio poroso. Durante su desarrollo no se adoptó alguna suposición o restricción de longitud de escala, por lo que las ecuaciones promedio son válidas en todo el sistema y dependen de información proveniente de la escala de poro. En particular, la ecuación promedio de la transferencia de cantidad de movimiento contiene términos adicionales como una primera y una segunda corrección de Brinkman. Además, contiene coeficientes efectivos tales como $\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$ y $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ que capturan la distribución de las partículas del medio poroso y las resistencias al flujo del fluido, respectivamente. Con base en esto, se abordó la pregunta sobre la necesidad de incluir los términos adicionales y en consecuencia la validez de la ecuación promedio de

cantidad de movimiento.

Para cumplir con lo anterior, se aplicaron las ecuaciones promedio para estudiar un sistema similar al utilizado por Beavers and Joseph (1967), el cual consiste en un canal parcialmente lleno con medio poroso. Para predecir los coeficientes efectivos, se llevaron a cabo simulaciones a la escala de poro. Las predicciones se hicieron usando diferentes tamaños de la región de promediado (r_0) para dos valores de la porosidad ($\varepsilon_{\beta\omega}$). Se encontró que los coeficientes dependen de la microestructura del medio poroso, de r_0 y $\varepsilon_{\beta\omega}$.

Posteriormente, usando los coeficientes efectivos, se resolvieron las ecuaciones promedio y los perfiles de velocidad promedio resultantes se compararon con los obtenidos de promediar a los perfiles de velocidad local. Se mostró que las ecuaciones promedio desarrolladas en este capítulo pueden describir satisfactoriamente los perfiles de velocidad promedio, encontrando errores cercanos a uno. Para cumplir con esto, es necesario que la ecuación de la transferencia de cantidad de movimiento contenga tanto una primera como una segunda corrección de Brinkman. Así como también, un término de resistencias $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$. De lo contrario, se pueden obtener desviaciones en las predicciones de los perfiles de velocidad. Lo anterior muestra la validez de la propuesta hecha por Brinkman (1949a,b) sobre incluir un término viscoso en la ley de Darcy, aunque incompleta debido a que no se definió a la viscosidad efectiva en ese momento. De acuerdo al desarrollo presentado en este capítulo, $\mu_{eff} = \mu/\varepsilon_\beta$.

En este punto, cabe señalar que las ecuaciones promedio desarrolladas en este capítulo no solo pueden utilizarse para estudiar la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de medio libre y medio poroso. De hecho, se pueden utilizar para estudiar la transferencia de cantidad de movimiento entre otras configuraciones entre regiones homogéneas. Por ejemplo, entre dos medios porosos, entre un medio poroso o bien un medio poroso y una pared impermeable.

Por último, cabe recordar que la intención de este capítulo no fue proporcionar un conjunto de GTEs con un término no homogéneo $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$, sino más bien mostrar las capacidades predictivas de dichas ecuaciones antes de adoptar un conjunto de simplificaciones que reduzcan la información proveniente de la microescala. A continuación, se revisa la derivación del problema de cerradura local que conduce a la forma cerrada de las ecuaciones de transporte generalizadas de cantidad de movimiento. Esto permite definir, así como predecir, al tensor de permeabilidad dependiente de la posición a partir de un problema de valor en la frontera auxiliar.

6. Problema de cerradura de flujo de Stokes

En el capítulo anterior se desarrollaron las GTEs para el flujo de Stokes entre una región de medio libre y un medio poroso (Ecs. (5.7) y (5.7)), las cuales son válidas en cualquier parte de esta configuración, tanto en las regiones homogéneas como en las inter-regiones. Sin embargo, estas ecuaciones aún dependen del problema en la escala de poro, debido al término $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ (Ec. (5.14)). Aunque es posible desarrollar PSSs usando modelos simples del medio poroso para determinar a este coeficiente, como los utilizados en el capítulo anterior, aquellas para medios porosos reales son altamente costosas computacionalmente. Por consiguiente, en su forma actual la solución de las GTEs puede ser más complicada de obtener. Este problema ha sido frecuentemente abordado en la literatura al postular la forma del vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ y posteriormente evaluar las consecuencias de tal elección (Chandesris and Jamet, 2006, 2007). Por ejemplo, para condiciones de flujo de Stokes, el vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ ha sido reemplazado por un término de Darcy. O bien, para situaciones de flujo inercial, el vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ ha sido reemplazado por la ecuación de Ergun (Ergun, 1952). Ambas alternativas han sido ampliamente utilizadas para modelar flujos sobre y a través de medios porosos (Beckermann *et al.*, 1988; Khalili *et al.*, 1998; Gobin *et al.*, 1998; Jiménez-Islas *et al.*, 2009) y así como también en reactores de lecho empacado (Vafai and Tien, 1981, 1982; Cheng *et al.*, 1991; Das *et al.*, 2018; George *et al.*, 2021). Aunque en dichas alternativas se ha proporcionado la forma cerrada de las ecuaciones, no existe una guía para predecir las variaciones espaciales de la permeabilidad o permeabilidad aparente, recurriendo a al uso de expresiones semiempíricas para ello.

Con el objetivo de cerrar de manera formal a las GTEs desarrolladas en el capítulo anterior para el flujo de Stokes entre un medio libre y un medio poroso, es necesario desarrollar el PCL asociado. Como se mencionó anteriormente, este problema fue desarrollado y resuelto por Valdés-Parada *et al.* (2007a, 2009a). Sin embargo, una evaluación de las predicciones proporcionadas no ha sido reportado hasta el momento. Esto último es el objetivo de este capítulo, así como proporcionar una alternativa aproximada.

6.1 Planteamiento del problema

Considérese nuevamente el flujo de un fluido sobre y a través de un medio poroso, tal como el que se muestra en la figura 6.1. Se considera que las suposiciones 4.1.1 siguen siendo válidas para este sistema. En el capítulo anterior, se mostró que las ecuaciones que gobiernan el proceso de flujo en la microescala están dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad \text{en la fase } -\beta \quad (6.1b)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma,M} \quad (6.1c)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_e \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta,e} \quad (6.1d)$$

Además, se obtuvo que las ecuaciones promedio de las ecuaciones anteriores se pueden expresar como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left(\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \quad (6.2b)$$

donde el vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ está dado por

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right] dA \quad (6.3)$$

De esta manera, el objetivo ahora es obtener la forma cerrada de estas ecuaciones, lo cual requiere expresarlas únicamente en términos de cantidades promedio. Para hacer esto, es necesario desarrollar el PCL asociado.

6.2 El problema de cerradura local

Para iniciar el desarrollo del PCL, se introduce la descomposición espacial de alguna cantidad ψ_β definida en la fase $-\beta$ en términos de su promedio intrínseco $\langle \psi_\beta \rangle^\beta$ y desviaciones locales $\tilde{\psi}_\beta$ (Gray, 1975), la cual está dada por

$$\psi_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \tilde{\psi}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} \quad (6.4)$$

Esto permite escribir a la Ec. (6.3) como

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(\tilde{p}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \Delta \langle p_\beta \rangle^\beta \right) \right] dA + \mu_\beta \nabla \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \Delta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \Big|_{\mathbf{x}} \quad (6.5)$$

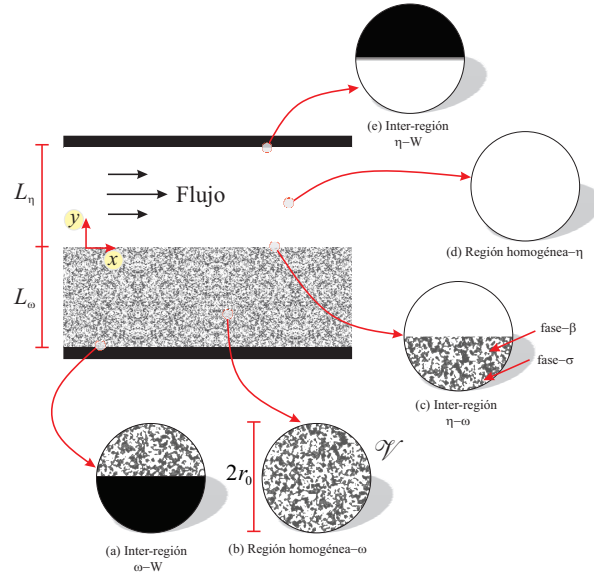


Figura 6.1: Esquema de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso y muestras localizadas en las regiones homogéneas ((b) en el seno del medio poroso y (d) en el seno del medio libre) y en las inter-regiones ((a) medio poroso/pared, (c) medio libre/medio poroso y (e) medio libre/pared superior).

donde se ha utilizado la siguiente definición

$$\Delta \langle \psi_\beta \rangle^\beta = \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (6.6)$$

De esta forma, la Ec. (6.2b) es ahora una ecuación promedio abierta, debido a que involucra dos tipos de variables dependientes (*i. e.*, los promedios y las desviaciones locales) y solo un conjunto de ecuaciones. Por lo tanto, es necesario encontrar expresiones de las desviaciones espaciales en términos de cantidades promedio, el cual es un procedimiento que se conoce como *el problema de cerradura local* Whitaker (1999). La derivación y solución formal del problema de las desviaciones es un procedimiento bastante extenso, por lo que para conservar la brevedad de esta parte del trabajo, los detalles se muestran en el Apéndice A. Aquí es suficiente mencionar que la solución formal de las desviaciones locales de la velocidad y de la presión son

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{B}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (6.7a)$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{b}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (6.7b)$$

donde el vector \mathbf{b}_β y el tensor \mathbf{B}_β son denominados como variables de cerradura, cuyos campos se puede predecir de la solución de un problema de valor a la frontera asociado, el cual se reporta en el Apéndice A. Cabe señalar que la solución formal anterior es válida siempre que se satisfagan las restricciones de longitudes de escala dadas por (Valdés-Parada *et al.*, 2007a, 2009b)

$$\frac{r_0}{L} \ll 1 \quad \frac{r_0^2}{L^2} \ll 1 \quad \frac{\ell^2}{r_0 L} \ll 1 \quad (6.8)$$

donde ℓ es la longitud característica más grande asociada a la escala de poro, r_0 es la longitud característica de la región de promediado y L es la longitud características más pequeña asociada

a la escala macroscópica. Estas restricciones hacen que se abandone parte de la información de la microescala, por lo que se espera que, usando los coeficientes efectivos predichos usando el PCL, las predicciones de las ecuaciones de transporte generalizadas sean también aproximadas. Además, nótese que bajo estas mismas restricciones de escala el término $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ dado por la Ec. (6.5) se puede escribir como

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} \right] dA \quad (6.9)$$

donde únicamente aparecen las desviaciones espaciales de la velocidad local y de la presión local. Con base en lo anterior, en este punto se tiene la posibilidad de cerrar a la GTE de cantidad de movimiento, lo cual se muestra en la siguiente sección.

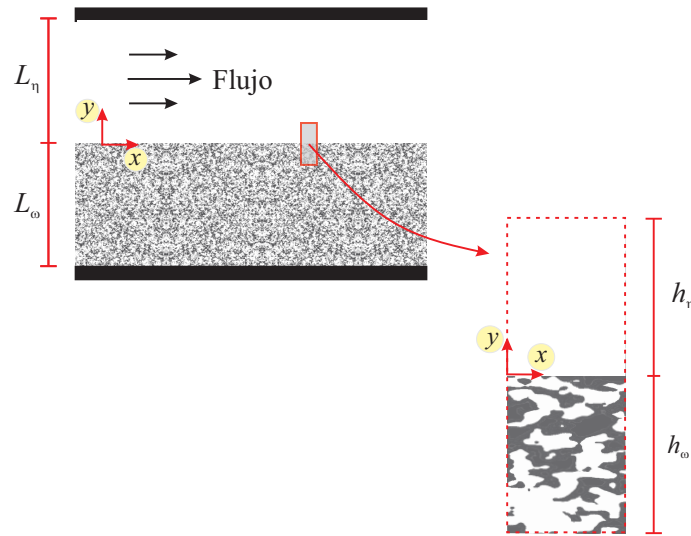


Figura 6.2: Dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso para la solución del problema de cerradura local.

6.3 Ecuaciones de transferencia generalizadas cerradas

Como se mencionó anteriormente, la GTE de continuidad no requiere de un PCL, por lo que su forma final está dada por la Ec. (6.2a). En cambio, la ecuación de cantidad de movimiento aún debe cerrarse. Para llevar a cabo esto, se introduce la solución formal de las desviaciones dada por las Ecs. (6.7) en las Ec. (6.9). Esto permite expresar a la Ec. (6.2b) como

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left(\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} \right) - \mu_\beta \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \quad (6.10)$$

Nótese que en la ecuación anterior el vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ toma la forma de un término de Darcy con un tensor de permeabilidad intrínseco $\mathbf{K}_\beta(\mathbf{x})$ dependiente de la posición. Este coeficiente está definido en

términos de variables de cerradura de acuerdo a la siguiente expresión

$$\varepsilon_{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{K}_{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{V_{\beta}(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}_{\beta} + \nabla\mathbf{B}_{\beta}) dA \quad (6.11)$$

Así, para calcular las variaciones espaciales de $\mathbf{K}_{\beta}^{-1}(\mathbf{x})$ es necesario resolver el problema de cerradura local dado por las Ecs. (A.5). Como se mencionó en el Apéndice A, el dominio de solución debe ser un dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso suficientemente grande de tal forma que contenga a la inter-región, tal como los que se muestran figura 6.2. Cabe mencionar que, para un sistema medio libre/medio poroso, $\mathbf{K}_{\beta}^{-1}(\mathbf{x})$ adquiere los siguientes valores

$$\mathbf{K}_{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{región homogénea} - \eta \\ \mathbf{K}_{\beta\eta\omega}^{-1} & \text{inter-región } \eta\omega \\ \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} & \text{región homogénea} - \omega \end{cases} \quad (6.12)$$

donde $\mathbf{K}_{\beta\eta\omega}$ es el tensor de permeabilidad en la inter-región y $\mathbf{K}_{\beta\omega}$ es el tensor de permeabilidad del seno medio poroso. Cabe señalar que los valores de $\mathbf{K}_{\beta\omega}$ también se pueden calcular de la solución del PCL asociado en una sola celda unitaria del seno del medio poroso (Whitaker, 1999). En tal caso es necesario imponer condiciones de periodicidad para las variables de cerradura en las tres direcciones.

Con base en lo anterior, la forma cerrada de las GTEs de continuidad y de cantidad de movimiento están dadas por las Ecs. (6.2a) y (6.10). Cabe señalar que la segunda ecuación será válida siempre que se satisfagan las restricciones de escala dadas por la Ec. (6.8), las cuales se utilizaron en el desarrollo del PCL. En la siguiente sección se reportan las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos mediante la solución del PCL para el sistema medio libre/medio poroso.

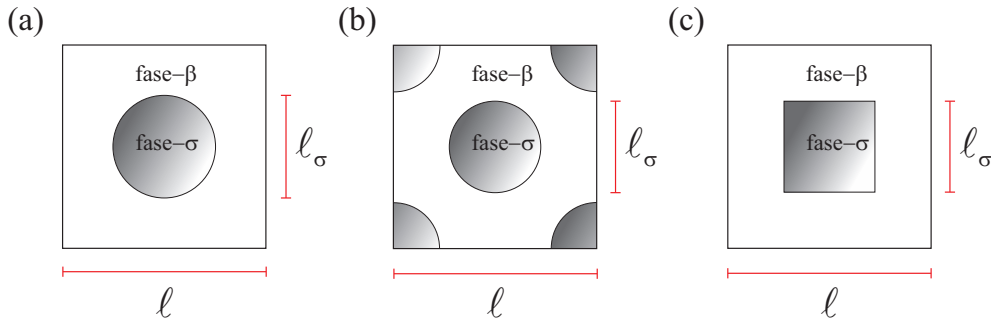


Figura 6.3: Celdas unitarias bidimensionales con partículas sólidas en tres arreglos diferentes: (a) cilindros en línea, (b) prismas cuadros en línea y (c) cilindros escalonados.

6.4 Solución del modelo de un dominio II

6.4.1 Variaciones espaciales de \mathbf{K}_{β} de la solución del problema de cerradura local

Como se mostró en el capítulo anterior, para resolver las GTEs, es necesario conocer las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, el cual es el objetivo de esta sección. Nótese que, además de ε_{β} , ahora es necesario predecir a \mathbf{K}_{β} . Para ello, nuevamente el análisis se restringe a un sistema similar al utilizado por Beavers and Joseph (1967), el cual se muestra en la figura 6.1. Cabe recordar

que el sistema consiste en el flujo de un fluido a través de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso. El flujo satisface las suposiciones 4.1.1, junto con la de totalmente desarrollado y que es causado por una caída de presión constante en la dirección horizontal dada por

$$\frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} = C \quad \forall y \in (-L_\omega, L_\eta) \quad (6.13)$$

Se propone que el medio poroso se compone de un arreglo periódico de una celda unitaria de longitud de lado ℓ que contiene partículas de longitud ℓ_σ . Se consideran las tres celdas unitarias mostradas en la figura 6.3, que conducen a obtener tres medios porosos diferentes. Por un lado, debido a que las geometrías de los medios porosos son idénticas a las utilizadas en el capítulo anterior, las variaciones espaciales de ε_β están dadas por la Ec. (5.18). Por su parte, para predecir a las variaciones espaciales de \mathbf{K}_β , es necesario resolver el PCL y posteriormente aplicar la Ec. (6.11). Debido a que la geometría del sistema medio libre/medio poroso es periódica en una distancia igual a ℓ en la dirección horizontal, para resolver el PCL se utilizó un dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso de altura $h = h_\eta + h_\omega$ y ancho ℓ , tal como los que se muestra en la figura 6.4. Las alturas h_λ ($\lambda = \omega, \eta$) fueron suficientemente grandes con el fin de incluir a la inter-región medio libre/medio poroso, y que las predicciones de la permeabilidad en el límite superior e inferior correspondan a los del seno de cada región. Se encontró que las alturas h_ω y h_η deben estar relacionadas con el tamaño r_0 . Estas alturas deben de ser igual a $h_\omega \approx 2r_0 + 3\ell$ y $h_\eta \approx 2r_0$. Por lo tanto, la posición del centroide de la región de promediado está restringida a las posiciones dadas por $-(3\ell + r_0) \leq y \leq +r_0$.

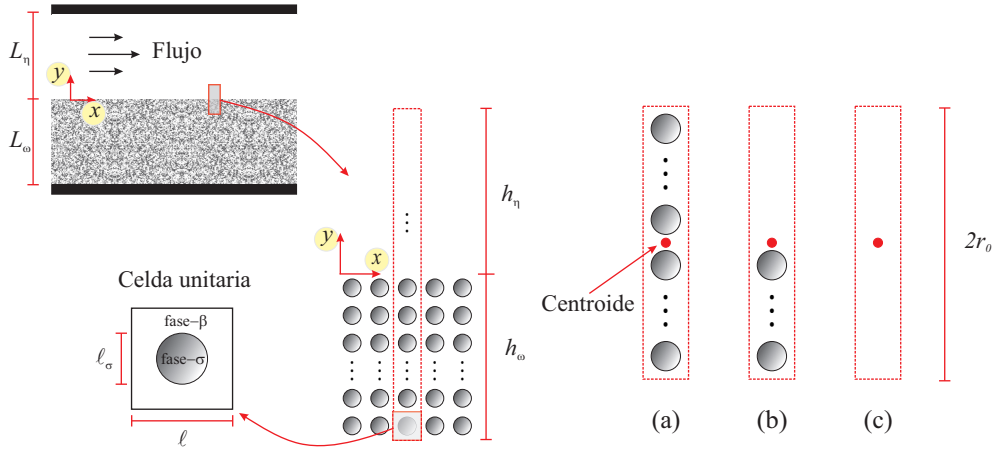


Figura 6.4: Esquema del dominio representativo periódico de la frontera medio libre/medio poroso, donde el medio poroso se compone de un arreglo periódico de círculos alineados, para la solución del problema de cerradura local.

Antes de continuar, se debe notar que para predecir a \mathbf{K}_β usando la Ec. (6.1), es necesario definir la forma y el tamaño de una región de promediado. Para este fin, se utilizó nuevamente a un paralelepípedo con sección transversal rectangular igual a $2r_0\ell$. Por simplicidad en todos los cálculos se fijó que r_0 es un número entero de celdas unitarias. Se debe señalar que la forma y el tamaño de la región de promediado deben ser consistentes con aquellos que serán utilizados para promediar los perfiles de velocidad local resultantes de la simulaciones a la escala de poro. Usar la misma región de promediado

evitará introducir fuentes de desviaciones en la comparación de los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución del modelo de un dominio con los obtenidos de la simulaciones a la escala de poro.

Con base en lo anterior, el PCL dado por las Ecs. (A.5), después de hacer un cambio de variable como el sugerido por Whitaker (1999), se resolvió numéricamente usando el software de elementos finitos COMSOL Multiphysics 5.2. Para ello, se utilizó una malla triangular no estructurada junto con el resolvidor PARDISO. Además, se implementó un refinamiento de malla adaptativo para asegurar que resultados fueran independientes de número de nodos computacionales. Así, teniendo los campos de las variables de cerradura, se calcularon las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad usando la Ec. (A.9). Debido a que el flujo es totalmente desarrollado y a que la geometría del sistema es periódica, la única componente del tensor de permeabilidad necesaria para predecir a la velocidad promedio es la componente xx (*i. e.*, $K_\beta = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}_\beta \cdot \mathbf{e}_x$). Además, las variaciones espaciales de esta componente son únicamente en la dirección vertical (*i. e.*, en la coordenada $-y$).

En la figura 6.5 se muestran las variaciones espaciales de K_β^{-1} en la inter-región $\eta\omega$ usando diferentes valores de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. De estos resultados, se puede observar que, para ambos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$, K_β^{-1} cambia abruptamente de su valor en una región homogénea a otra. Nótese que este coeficiente adquiere el valor de $K_{\beta\omega}^{-1}$ cuando la región de promediado se localiza completamente dentro del medio poroso (*i. e.*, $y = -r_0 - \ell$) y el valor de 0 cuando está completamente en la región de fluido (*i. e.*, $y = r_0$). Por lo tanto, el PCL indica que la zona de cambios de K_β^{-1} está restringida por las posiciones dadas por $-\ell - r_0 \leq y \leq r_0$, y por consiguiente tiene un tamaño $\delta_{K_\beta} = 2r_0 + \ell$. Cabe mencionar que el límite inferior de esta zona se hace evidente cuando r_0 tiende al tamaño del lado de una celda unitaria ℓ . También, se puede apreciar que K_β^{-1} decrece al incrementar el tamaño de r_0 , e incrementa al aumentar el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estas observaciones contrastan con las presentadas por Valdés-Parada *et al.* (2007a, 2009b); Aguilar-Madera *et al.* (2011b,a), donde la estrategia utilizada por dichos autores para resolver al PCL condujo a obtener predicciones suavizadas de K_β^{-1} . Sus resultados son para modelos de medios porosos hechos de arreglos periódicos de una celda unitaria en 2D y 3D con un cuadrado y un cubo centrados, respectivamente. Además, de acuerdo con Valdés-Parada *et al.* (2009b), la altura del dominio de solución de problema de cerradura local debe ser $h_\eta + h_\omega = 40\ell$, y en consecuencia el tamaño de la inter-región $\eta\omega$ es $\delta_{K_\beta} = 2r_0 = 20\ell$. Por simplicidad, estos autores en todos los cálculos consideraron que $h_\eta = h_\omega$. Sin embargo, se ha encontrado que la longitud de la región de medio poroso en el dominio de solución es ligeramente más grande que el de la región de medio libre (*i. e.*, $h_\eta < h_\omega$).

En la siguiente sección se proporciona una validación de las GTEs dadas por las Ecs. (6.2a) y (6.10). Para ello se comparan los perfiles de velocidad promedio obtenidos de resolver el modelo de un dominio asociado a estas ecuaciones con los obtenidos de promediar perfiles de velocidad local.

6.4.2 Solución del modelo de un dominio

Ahora que se han determinado los coeficientes efectos a partir de la solución del PCL, se evalúan las capacidades de las GTEs para predecir a los perfiles de velocidad promedio en un sistema medio libre/medio poroso. Para llevar a cabo esto se resuelven estas ecuaciones, y los perfiles de velocidad resultantes se comparan con aquellos obtenidos de promediar, usando una región de promediado de tamaño característico r_0 , los perfiles de velocidad local que surgen de realizar simulaciones a la escala

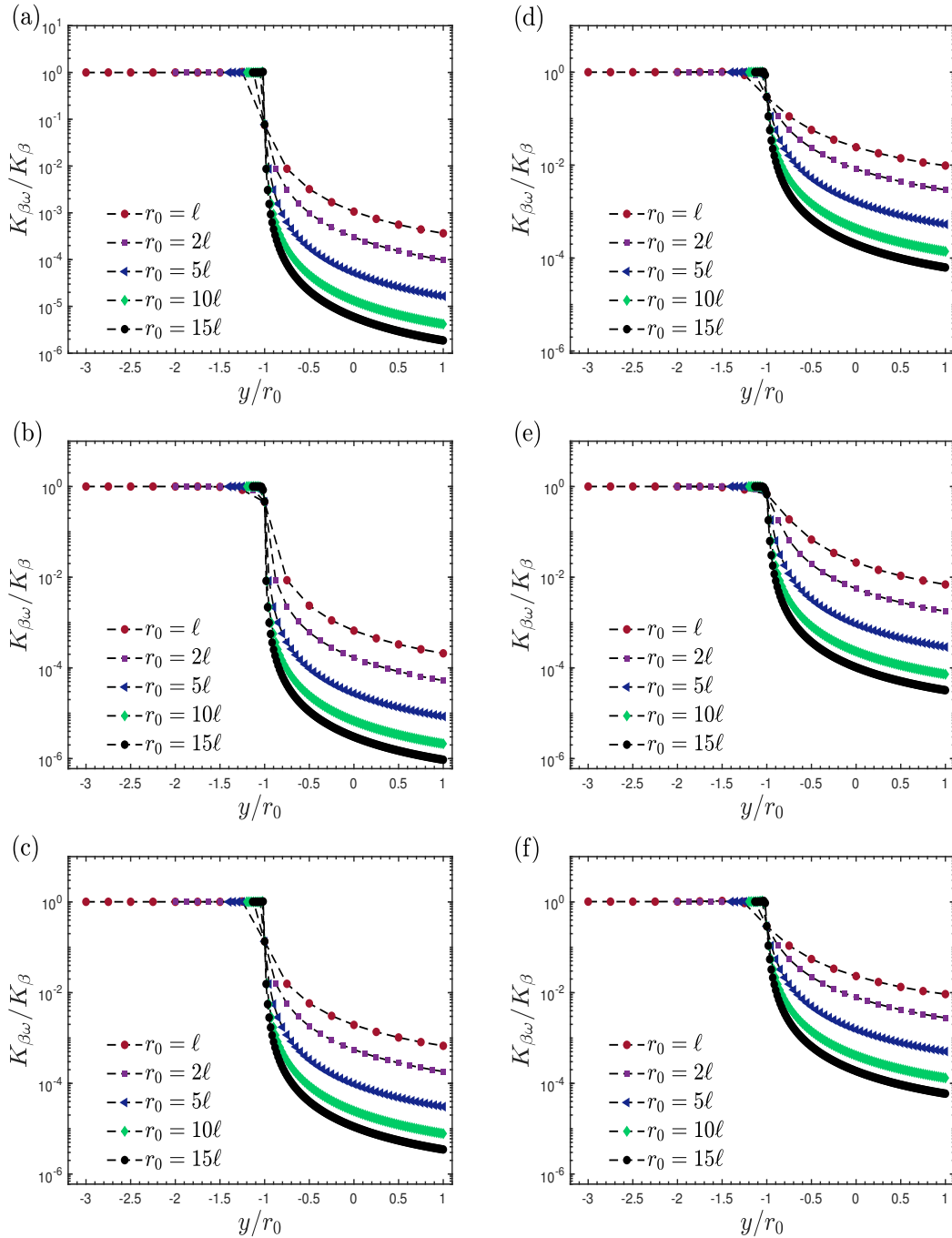


Figura 6.5: Variaciones espaciales de K_{β} la inter-región medio libre/medio poroso obtenidos de la solución del problema de cerradura local para tres modelos del medio poroso: (a, d) círculos en línea, (b, e) círculos escalonados y (c, f) cuadrados en línea. Todos los cálculos se obtuvieron para diferentes tamaños de r_0 y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a-c) 0.4 and (d-f) 0.8.

de poro.

Para esta comparación se estudia el flujo a través del canal parcialmente ocupado por un medio poroso similar al estudiado por Beavers and Joseph (1967). Se considera que la altura de la región de medio libre y del medio poroso son $L_{\eta} = 10^3\ell$ y $L_{\omega} = 10^2\ell$, respectivamente. En aras de ser consistentes con las predicciones de los coeficientes efectivos mostrados en la sección anterior, se

propone que en la microescala el medio poroso está compuesto de un arreglo periódico de una celda unitaria de longitud de lado ℓ con partículas sólidas de longitud característica ℓ_σ . Los cálculos se realizaron para los tres medios porosos hechos de las celdas unitarias mostradas en la figura 6.3.

Por un lado, las simulaciones a la escala de poro consisten en resolver la forma adimensional de las Ecs. (6.1). Los detalles de esta solución se pueden encontrar en la §4.2.1. Una vez obtenidos los perfiles de velocidad local, estos se sustituyen en la Ec. (5.2) o (5.3) para obtener los perfiles de velocidad de promedio superficial o intrínseco en la dirección vertical del sistema. Para ello, se utilizó la misma forma y tamaño de la región de promediado empleada en la sección anterior para calcular los coeficientes efectivos.

Por otro lado, las ecuaciones en la macroescala están dadas por las Ecs. (6.2a) y (6.10). Con el fin de resolverlas, es conveniente escribirlas en forma adimensional usando las variables adimensionales dadas por la Ec. (4.8), junto con la siguiente

$$\mathbf{K}_\beta^* = \frac{\mathbf{K}_\beta}{\ell^2} \quad (6.14)$$

Así, las GTEs adquieren la siguiente forma

$$\nabla^* \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (6.15a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla^* \langle p \rangle^\beta + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla^* \varepsilon_\beta \cdot \nabla^* \left(\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{u} \rangle \right) - \mathbf{K}_\beta^{*-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \quad (6.15b)$$

Sin embargo, debido a que el flujo es unidireccional y totalmente desarrollado, similar al sistema experimental estudiado por BJ, las Ecs. (6.15) se reducen a

$$0 = -\frac{d\langle p \rangle^\beta}{dX} + \varepsilon_\beta^{-1}(Y) \frac{d^2 \langle u_x \rangle}{dY^2} - \varepsilon_\beta^{-1}(Y) \frac{d\varepsilon_\beta}{dY} \frac{d}{dY} \left(\varepsilon_\beta^{-1}(Y) \langle u_x \rangle \right) - K_\beta^{*-1}(Y) \langle u_x \rangle \quad (6.16)$$

donde $\langle u_x \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_x$ y $K_\beta^{*-1}(Y) = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}_\beta^{*-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x$. A continuación, para completar el problema de valor a la frontera, se utilizan las condiciones de frontera dadas por la Ec. (5.22). Donde la primera es la condición de no deslizamiento en el límite superior, mientras que la segunda es el valor de la velocidad de Darcy en el seno del medio poroso. De esta manera, el ODA está compuesto por la Ec. (6.16) y las condiciones de frontera dadas por la Ec. (5.22). En este punto, se debe recordar que para este sistema es posible suponer que la caída de presión en ambas regiones del canal son una constante, las cuales están dadas por la Ec. (5.23). Además, se debe señalar que en la GTE de cantidad de movimiento ahora aparece un término de Darcy donde es necesario utilizar a las variaciones de la permeabilidad predichas en la sección anterior.

Con base en lo anterior, debido a la dependencia no trivial con respecto a la posición de los coeficientes efectivos, el ODA se resolvió numéricamente. Para ello se utilizó un esquema de diferencias finitas para discretizar a las ecuaciones y un método de eliminación Gaussiana para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes. Se realizaron pruebas estándar de convergencia para garantizar la confiabilidad de los resultados numéricos. Algunos ejemplos de los perfiles de velocidad de promedio

intrínseco se muestran a continuación de la siguiente manera

$$U_i = \frac{\langle u_x \rangle_i}{\max(\langle u_x \rangle_{PSS})}; \quad i = PSS, ODA \quad (6.17)$$

En la figura 6.6 se presentan los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución del ODA usando diferentes tamaños de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estos resultados son para el medio poroso que consiste en un arreglo periódico de una celda unitaria con una partícula circular centrada (ver figura 6.3 (a)). Además, en la misma figura se presentan aquellos perfiles obtenidos de las simulaciones a la escala de poro. Una primera evaluación de las predicciones se puede hacer de las figuras 6.6 (a) y (d), donde se muestran los perfiles de velocidad en todo el canal. Analizando estos perfiles se puede notar que las predicciones del ODA son similares a las obtenidas de promediar los perfiles de velocidad local. Sin embargo, los acercamientos presentados tanto en las figuras 6.6(b) y (e) como en las figuras 6.6(c) y (f) evidencian que las predicciones del ODA poseen desviaciones tanto alrededor de la velocidad máxima como en la inter-región $\eta\omega$, respectivamente. Estas desviaciones son más grandes en la inter-región que alrededor de la velocidad máxima. Además, nótese que las desviaciones son más grandes para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ que aquellas para 0.8.

Con el fin de cuantificar las capacidades predictivas del ODA, se calculó el porcentaje de error relativo de este modelo para predecir los perfiles de velocidad promedio en la inter-región η/ω , con respecto a los obtenidos de las simulaciones a la escala de poro, de acuerdo a la Ec. (5.25). En la tabla 6.1 se presentan los valores del $Error_1$ tomando diferentes tamaños de r_0 para dos valores $\varepsilon_{\beta\omega}$. Esto mediciones son para los tres modelos de medios porosos construidos con cada celda unitaria mostrada en la figura 6.3. Nótese que para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$, con cualquier tamaño de r_0 y geometría, los errores son aproximadamente del $21\% \pm 2\%$. Mientras que para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ los errores decrecen aproximadamente hasta el $16\% \pm 2\%$.

Tabla 6.1: Porcentaje de error relativo del ODA para predecir los perfiles de velocidad promedio en la inter-región $\eta\omega$ cuando se utiliza a $K_{\beta}^{PCL}(y)$ con respecto a cuando se usa $K_{\beta}^{PSS}(y)$.

r_0/ℓ	cuadrados alineados		círculos alineados		círculos escalonados	
	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$
1	22.07	19.29	21.47	19.15	24.67	17.17
2	21.63	18.00	21.13	17.95	19.64	17.90
5	22.75	17.26	22.52	17.26	19.83	17.70
10	23.46	16.39	23.33	16.41	21.36	16.80
15	23.83	15.65	23.73	15.67	22.21	16.02

Con el fin de cuantificar los efectos que tienen los errores introducidos en la predicciones de los perfiles de la velocidad en la inter-región sobre la velocidad en la región del medio libre, se calculó el porcentaje de error relativo de las predicciones del ODA para predecir a la velocidad máxima en la región del medio libre con respecto a la predicciones obtenidas de las PSSs, de acuerdo a la Ec. (5.26). En la tabla 6.2 se muestran los valores de este error para varios valores de r_0 y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estas mediciones son para las tres geometrías del medio poroso antes mencionadas. Es interesante notar que este error está por abajo del 2% en todos los casos. Esto sugiere que los errores introducidos en las predicciones de la inter-región poseen efectos despreciables en la región

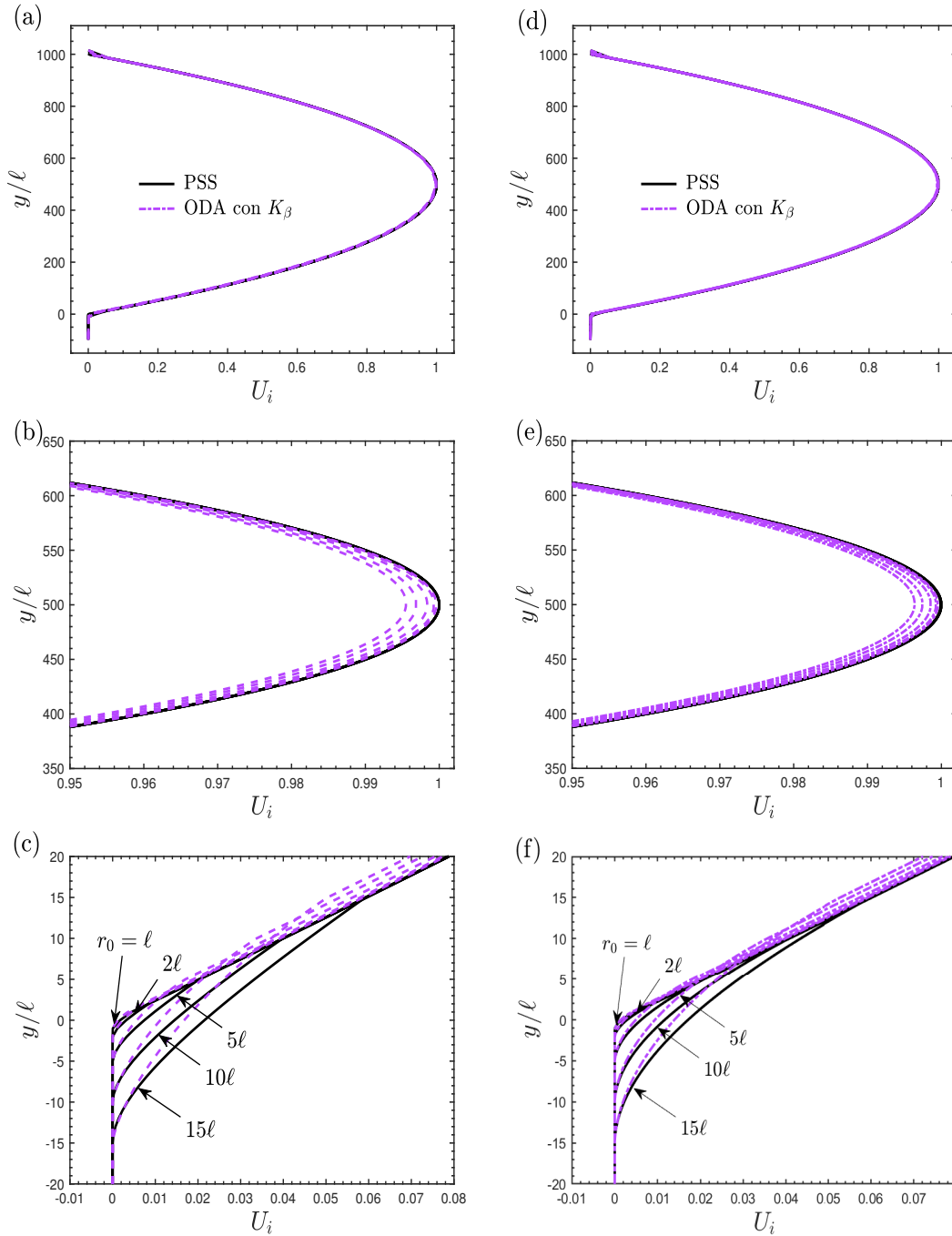


Figura 6.6: Perfiles de velocidad promedio en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso obtenido de la solución del ODA con $K_{\beta, PCL}$ y de simulaciones a la escala de poro usando diferentes valores de r_0 y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a-c) 0.4 and (d-f) 0.8. Los perfiles son en (a, d) el canal completo, (b, e) alrededor de la velocidad máxima y (c, f) la inter-región medio libre/medio poroso. El medio poroso consiste en un arreglo periódico de una celda unitaria con un círculo centrado. Todos los cálculos se realizaron para $L_\eta = 10^3\ell$ y $L_\omega = 10^2\ell$.

homogénea del medio libre. Lo anterior se atribuye principalmente a que las longitudes características del canal satisfacen la desigualdad dada por $\ell \ll L$. En el caso contrario se espera que se introduzcan desviaciones importantes en la predicciones de la velocidad en las regiones homogéneas.

Por último, de los resultados anteriores, es claro que las predicciones del ODA exhiben desviacio-

Tabla 6.2: Porcentaje de error relativo del ODA para predecir los perfiles de velocidad promedio máxima en el medio libre cuando se utiliza a $K_{\beta}^{PCL}(y)$ con respecto a cuando se usa $K_{\beta}^{PSS}(y)$.

r_0/ℓ	cuadrados alineados		círculos alineados		círculos escalonados	
	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$
1	$4.09x10^{-2}$	$4.81x10^{-2}$	$4.01x10^{-3}$	$4.82x10^{-2}$	$3.11x10^{-2}$	$2.50x10^{-2}$
2	$7.18x10^{-2}$	$7.21x10^{-2}$	$7.10x10^{-3}$	$7.23x10^{-2}$	$6.20x10^{-2}$	$4.96x10^{-2}$
5	$1.63x10^{-1}$	$1.43x10^{-1}$	$1.62x10^{-2}$	$1.43x10^{-1}$	$1.53x10^{-1}$	$1.21x10^{-1}$
10	$3.10x10^{-1}$	$2.56x10^{-1}$	$3.09x10^{-2}$	$2.56x10^{-1}$	$3.00x10^{-1}$	$2.34x10^{-1}$
15	$4.50x10^{-1}$	$3.62x10^{-1}$	$4.49x10^{-2}$	$3.63x10^{-1}$	$4.41x10^{-1}$	$3.41x10^{-1}$

nes de las obtenidas a partir de las PSSs, particularmente en la inter-región $\eta\omega$. Esto podría evidenciar dos posibles problemas, los cuales pueden evitar que el ODA desarrollado en este capítulo sea de utilidad. Primero, esto podría poner en duda la validez de las GTEs para describir el flujo de un fluido entre un medio libre y un medio poroso. Segundo, esto podría insinuar que el PCL es incapaz de predecir correctamente las variaciones espaciales de \mathbf{K}_{β} en la inter-región $\eta\omega$, debido a que una gran cantidad de información de la microescala ha sido abandonada durante su desarrollo. Para aclarar esta incertidumbre, en la siguiente sección se propone una metodología para predecir las variaciones espaciales de \mathbf{K}_{β} a partir de información obtenida de PSSs y posteriormente se resuelve el ODA con estas nuevas predicciones.

6.5 Solución del modelo de un dominio III

6.5.1 Predicciones de \mathbf{K}_{β} a partir de simulaciones a la escala de poro

Como se mostró líneas arriba, cuando se utilizan las variaciones espaciales de \mathbf{K}_{β} obtenidas a partir de la solución del PCL para cerrar el ODA, los perfiles de velocidad resultantes presentan desviaciones de los perfiles de referencia, principalmente en la inter-región $\eta\omega$. Para encontrar la causa de tales desviaciones, en esta sección se propone una metodología alternativa para predecir a \mathbf{K}_{β} . Esta alternativa consiste en predecir a este coeficiente a partir de información de la microescala obtenida de PSSs (Breugem, 2005; Chandesris and Jamet, 2006, 2007). Esto significa que las predicciones obtenidas pueden considerarse como exactas, ya que no involucran suposiciones más allá de las utilizadas en el problema microscópico. Cabe señalar que esta metodología, aunque depende de las PSSs, posee las siguientes ventajas. Primero, permitirá analizar las capacidades del PCL para predecir a \mathbf{K}_{β} . Segundo, permitirá evaluar la validez de las GTEs derivadas usando el método del promedio volumétrico. Tercero, no requiere que las PSSs se realicen en todo el sistema medio libre/medio poroso, sino solo en un dominio representativo de este.

Para cumplir con el objetivo antes mencionada, se debe recordar que el término de Darcy en la GTE de cantidad de movimiento (Ec. (6.10)), antes de desarrollar el PCL, es igual al vector $\mathbf{f}_{\beta}(\mathbf{x})$ (Ec. (6.9)). Por lo tanto, el término de Darcy se puede expresar como

$$-\mu_{\beta}\varepsilon_{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{K}_{\beta}^{-1}(\mathbf{x})\cdot\langle\mathbf{v}_{\beta}\rangle^{\beta}=\mathbf{f}_{\beta}(\mathbf{x}) \quad (6.18)$$

Nótese que el lado izquierdo de la expresión anterior es un resultado de proceso de cerradura, mientras que el lado derecho es un resultado del proceso de promediado. De esta manera, la expresión anterior proporciona una definición para calcular las variaciones espaciales de \mathbf{K}_{β} a partir de los perfiles de la

escala de poro. Para ello, es necesario calcular cada uno de los términos involucrados en cada posición del centroide de la región de promediado. Debido a la periodicidad en su dirección horizontal, en el sistema medio libre/medio poroso del canal dado por la figura 6.1, las posiciones del centroide son únicamente en la dirección vertical. Además, debido a que el flujo es unidireccional y completamente desarrollado, la única componente necesaria del tensor de permeabilidad es $K_{\beta}^{-1} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}_{\beta} \cdot \mathbf{e}_x$, la cual se puede obtener como

$$K_{\beta}^{-1} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}_{\beta} \cdot \mathbf{e}_x = f_{\beta x} \quad (6.19)$$

En la figura 6.7 se presentan las variaciones espaciales de K_{β} en la inter-región $\eta\omega$ obtenidos usando los perfiles de la escala de poro. Esto es para diferentes tamaños de r_0 con dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Los resultados se obtuvieron para tres geometrías del medio poroso hechos de arreglos periódicos de las celdas unitarias mostradas en la figura 6.3. Como se puede ver, estas variaciones de K_{β}^{-1} son similares a las obtenidas mediante la solución del PCL (ver figura 6.7), aunque se logran capturar algunos detalles adicionales. De igual forma, K_{β}^{-1} cambia rápidamente de su valor en el seno del medio poroso (*i. e.*, $y \leq -(r_0 + 3\ell)$) a su valor en la región de medio libre (*i. e.*, $y \geq +r_0$). Además, el valor de K_{β}^{-1} decrece al incrementar el tamaño de r_0 e incrementa al aumentar el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Mas aún, se puede notar que las predicciones de K_{β} obtenidas a partir de las simulaciones a la escala de poro se reduce al valor de $K_{\beta\omega}^{-1}$ aproximadamente en $y = -(r_0 + 3\ell)$, en lugar de $y = -r_0$ como lo muestran las predicciones obtenidas de la solución del PCL (ver figura 6.5). Esto se atribuye a que parte de la información de la escala de poro se ha perdido (filtrado) en la derivación del PCL. Por lo tanto, de acuerdo a las predicciones de K_{β} obtenidas de la información de la escala de poro, la zona de cambios está restringida por las posiciones dadas por $-(r_0 + 3\ell) \leq y \leq r_0$, y en consecuencia tiene un espesor igual $\delta_{K_{\beta}} = 2r_0 + 3\ell$, lo cual es dos celdas unitarias más grande que el tamaño de la región de promediado. Esto confirma que la zona de cambios de K_{β} no necesariamente coincide con aquella de $\varepsilon_{\beta\omega}$.

Tabla 6.3: Porcentaje de error relativo de los perfiles de velocidad promedio en la inter-región medio libre/medio poroso obtenidos mediante la solución del ODA con respecto a los perfiles obtenidos de la PSS.

r_0/ℓ	cuadrados alineados		círculos alineados		círculos escalonados	
	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$
1	5.65	5.02	3.36	1.87	10.81	6.47
2	2.90	3.33	3.00	1.22	7.72	5.99
5	3.73	5.37	1.16	0.47	8.61	8.32
10	4.41	6.12	0.57	0.26	8.03	8.28
15	4.64	6.36	0.36	0.17	7.81	8.24

6.5.2 Solución del modelo de un dominio

Una vez predichas las variaciones espaciales de K_{β} a partir de la información de la escala de poro, se reevalúan las capacidades de las GTE para predecir a los perfiles de velocidad. Para este fin, se compara nuevamente los perfiles de velocidad promedio resultantes de la solución de las GTEs con los obtenidos de promediar los perfiles de velocidad local para el sistema medio libre/medio poroso mostrado en la figura 6.1. Se debe recordar que para este caso el ODA está dado por la GTE dada por la Ec. (6.16) junto con las condiciones de frontera dadas por la Ec. (5.22). Además, la caída de

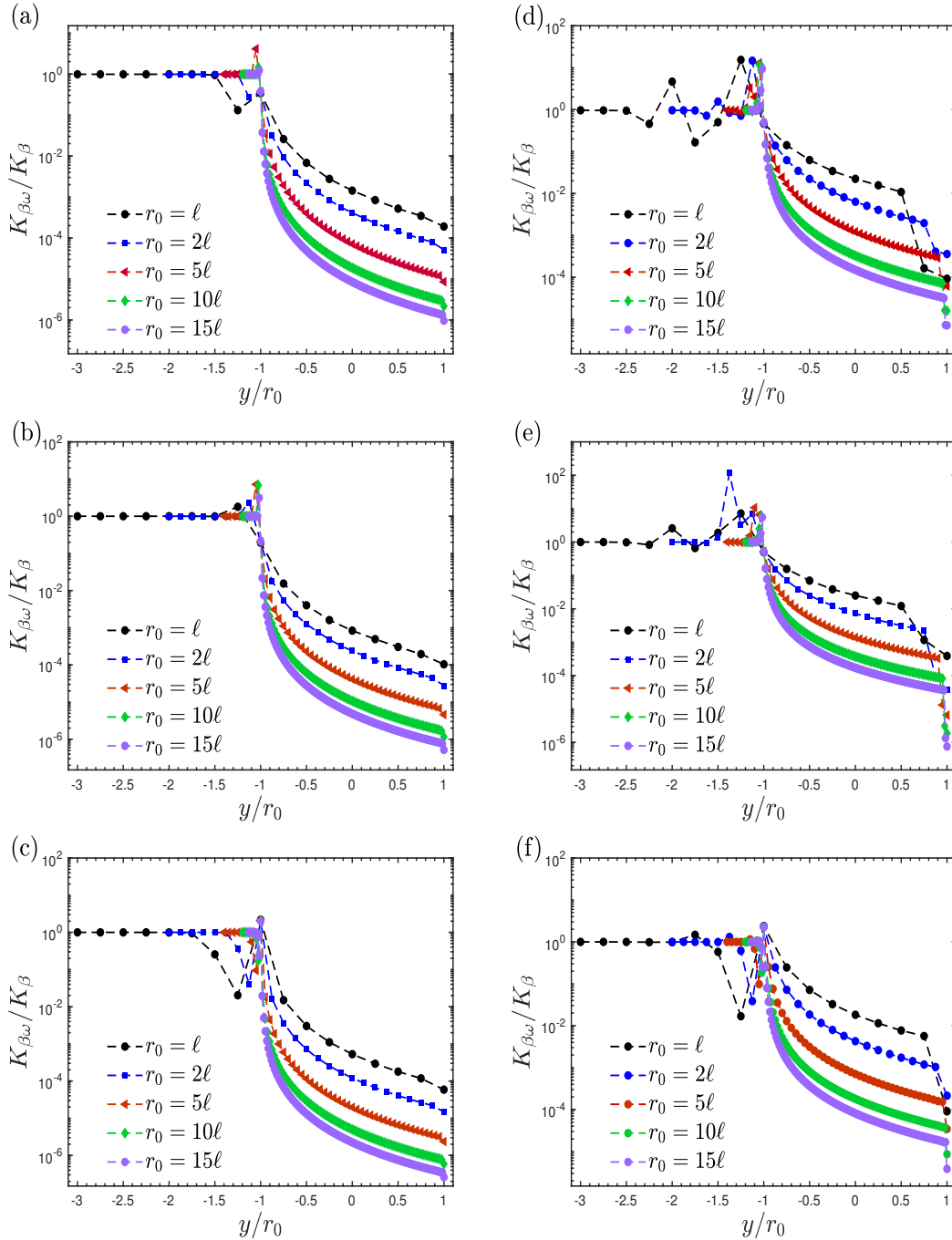


Figura 6.7: Variaciones espaciales de $K_{\beta, PSS}$ en la inter-región $\eta\omega$ obtenidos de las PSS para los tres modelos del medio poroso: (a, d) círculos en línea, (b, e) cilindros escalonados y (c, f) cuadrados en línea. Todos los cálculos se obtuvieron para diferentes tamaños de r_0 y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a-c) 0.4 and (d-f) 0.8.

presión tanto en la región de medio libre y en el medio poroso son iguales a una constante, la cual está dada por la Ec. (5.23). De esta forma, el ODA se resolvió numéricamente, donde ahora se usa los valores de K_{β} predicha a partir de la información de la escala de poro. Algunos ejemplos de los perfiles de velocidad promedio se muestran a continuación de acuerdo a la Ec. (5.24).

En la figura 6.8 se comparan los perfiles de velocidad promedio en el canal obtenidos mediante la solución del ODA y de promediar los perfiles locales usando diferentes valores de r_0 para dos valores

de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estas predicciones son para el modelo de medio poroso compuesto de una celda unitaria con una partícula circular centrada (figura 6.3 (a)). Un primer análisis se puede hacer de los perfiles de velocidad en todo el canal mostrados en las figuras 6.8 (a) y (d). Se puede notar que las predicciones del ODA han mejorado significativamente cuando se utilizan las predicciones de K_β obtenidas de la información de la escala de poro. Esto se puede confirmar en los acercamientos alrededor de la velocidad máxima mostrados en las figuras 6.8 (b) y (e), y principalmente en la inter-región $\eta\omega$ mostrados en las figuras 6.8 (c) y (f).

Con el fin de obtener una mejor perspectiva de las nuevas capacidades predictivas del ODA, se calculó el porcentaje de error relativo de este modelo para describir a la velocidad de promedio en la inter-región $\eta\omega$ con respecto a los obtenidos de la escala de poro. Para ello se evaluó a la Ec. (5.25) para cada tamaño de r_0 con los dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$, y los resultados se presentan en la tabla 6.3. Estos cálculos son para las tres geometrías del medio poroso. Es interesante notar que para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$, el porcentaje de error relativo se encuentra por de bajo del 4%, lo cual es considerado usualmente aceptable en muchas aplicaciones. Más aún, estos errores son menores para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$. Como en la sección anterior, esto se atribuye a que cuando el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$ incrementa, ocurren cambios más abruptos en la permeabilidad, los cuales son más complicados de capturar incluso para las predicciones obtenidas a partir los perfiles locales. Este error se puede reducir si se utiliza un número más grande de puntos de muestreo de K_β . En las predicciones presentadas hasta ahora se utilizó un espaciamiento dado por $\ell/4$. Cuando se incrementa el número de puntos de muestreo, por ejemplo, $\ell/8$, el porcentaje de error relativo tiende a cero.

Análogamente a la sección anterior, con el fin de tener una perspectiva de los efectos de los errores introducidos en la predicciones en la inter-región $\eta\omega$ sobre la región del medio libre, se calculó el porcentaje de error relativo de solución del ODA para predecir a la velocidad máxima con respecto a las obtenidas de las simulaciones a la escala de poro, de acuerdo a la Ec. (5.26). En la tabla 6.4 se muestran los errores usando diferentes valores de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Esto se llevó a cabo para las tres geometrías del medio poroso. De estos resultados se puede observar que los porcentajes de error son aproximadamente $\mathbf{O}(10^{-3})$ e incrementan un orden al incrementar el tamaño de r_0 . Esto confirma que los errores en las predicciones del perfil de velocidad promedio en la inter-región medio libre/medio poroso inducen efectos despreciables en las predicciones alrededor de la velocidad máxima en la región de medio libre. Se debe recordar que esto es debido a que el sistema aquí considerado se satisface una separación de longitudes características. Como se mencionó anteriormente, en condiciones opuestas dichos errores pueden incrementar considerablemente.

Tabla 6.4: Porcentaje de error relativo de la velocidad promedio máxima en la región homogénea del fluido obtenida de la solución del ODA con respecto a la obtenida de la PSS.

r_0/ℓ	prismas cuadrados en línea		cilindros en línea		cilindros escalonados	
	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$
1	6.16×10^{-3}	5.41×10^{-3}	7.91×10^{-3}	1.17×10^{-2}	7.13×10^{-4}	2.00×10^{-3}
2	2.18×10^{-3}	2.54×10^{-3}	7.74×10^{-3}	6.24×10^{-4}	1.13×10^{-2}	1.49×10^{-2}
5	8.83×10^{-3}	1.72×10^{-2}	7.59×10^{-3}	1.19×10^{-3}	2.73×10^{-2}	3.20×10^{-2}
10	2.69×10^{-2}	4.06×10^{-2}	7.37×10^{-3}	2.3×10^{-5}	5.33×10^{-2}	6.01×10^{-2}
15	4.47×10^{-2}	6.35×10^{-2}	7.18×10^{-3}	3.18×10^{-4}	7.90×10^{-2}	8.76×10^{-2}

Con base en lo anterior, se puede concluir que las GTEs de masa total y cantidad de movimiento

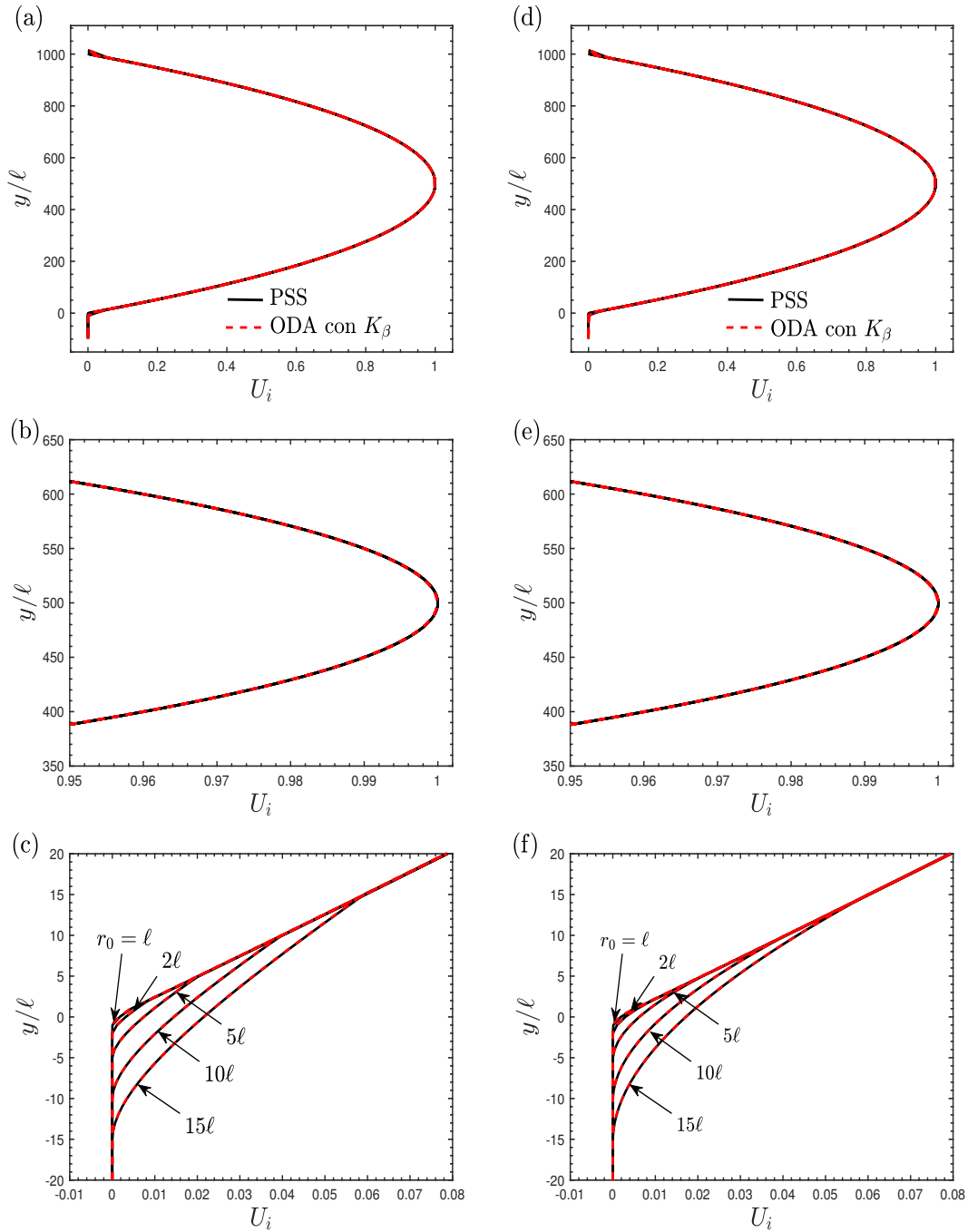


Figura 6.8: Perfiles de velocidad promedio en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso obtenido de la solución del ODA con $K_{\beta,PSS}$ y de simulaciones a la escala de poro usando diferentes valores de r_0 y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a-c) 0.4 and (d-f) 0.8. Los perfiles son en (a,d) el canal completo, (b,e) alrededor de la velocidad máxima y (c,f) la inter-región $\eta\omega$. El medio poroso consiste en un arreglo periódico de una celda unitaria con un círculo centrado. Todos los cálculos se realizaron para $L_\eta = 10^3\ell$ y $L_\omega = 10^2\ell$.

desarrolladas mediante el método del promedio volumétrico son capaces de predecir los perfiles de velocidad en un sistema medio libre/medio poroso (tanto en las regiones homogéneas como en las inter-regiones) siempre que las variaciones espaciales de la permeabilidad sean precisas. Por lo tanto, los errores en las predicciones del ODA mostradas en la §6.4.1 se deben a que el PCL únicamente proporciona predicciones aproximadas de la permeabilidad en la inter-región medio libre/medio

poroso. Cabe señalar que estas observaciones son aplicables para otros valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Por ejemplo, para $0.25 \leq \varepsilon_{\beta\omega} \leq 0.95$ en la celda unitaria con un círculo centrado, $0.25 \leq \varepsilon_{\beta\omega} \leq 0.95$ en la celda unitaria con partículas circulares escalonadas y $0.05 \leq \varepsilon_{\beta\omega} \leq 0.95$ en la celda unitaria de un cuadrado centrado.

En la siguiente sección se resuelven las GTEs desarrolladas en este capítulo usando diferentes expresiones para predecir a la permeabilidad en la inter-región $\eta\omega$.

6.6 Otras alternativas para predecir a las variaciones espaciales de K_β

Como se mostró anteriormente, un punto importante para la solución de las GTEs es conocer las variaciones espaciales de K_β . Sin embargo, hasta ahora no había sido claro cómo debe variar este coeficiente en la inter-región $\eta\omega$, por lo que para representarlo frecuentemente se ha optado por utilizar expresiones heurísticas (Luminari *et al.*, 2019; Sudhakar *et al.*, 2021). Por ejemplo, una función lineal, Heaviside, senoidal, error e hiperbólica. Aunque tales aproximaciones han permitido cerrar a las GTE, no garantizan que estas puedan predecir a los perfiles de velocidad tanto en las regiones homogéneas como en la inter-región. Lo anterior se analiza en esta sección al comparar las variaciones espaciales de K_β obtenidas a partir de diferentes expresiones heurísticas con aquellas obtenidas a partir de la solución del problema de cerradura local y de la escala de poro. Además, se evalúan las predicciones de los perfiles de velocidad promedio que se obtienen con dichas aproximaciones de K_β .

Una de las ecuaciones más utilizadas para predecir a K_β en la inter-región $\eta\omega$ se puede obtener de la ecuación de Carman-Kozeny (CK) como sigue

$$K_{\beta\eta\omega}^{-1} = \frac{180}{\ell_\sigma^2} \frac{(1 - \varepsilon_\beta)^2}{\varepsilon_\beta^3} \quad \text{para} \quad -r_0 < y < +r_0 \quad (6.20)$$

en la cual se utiliza a ε_β en lugar de $\varepsilon_{\beta\omega}$, y se considera a ℓ_σ como una constante. Cabe señalar que una suposición implícita en la Ec. (6.20) es que las zonas de cambios de la porosidad y la permeabilidad son las mismas, lo cual en previas secciones se mostró que no es necesariamente cierto. La ecuación anterior ha sido utilizada por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b); Goyeau *et al.* (2003); Valdés-Parada *et al.* (2007a).

Otra alternativa para predecir a K_β en la inter-región $\eta\omega$ se puede obtener de suponer que este coeficiente varía linealmente con la posición de su valor en el seno del medio poroso (en $y = -r_0$) a aquél en el medio libre (en $y = r_0$). Esto permite obtener la siguiente expresión

$$K_{\beta\eta\omega}^{-1} = \frac{K_{\beta\omega}^{-1}}{2} \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) \quad \text{para} \quad -r_0 < y < +r_0 \quad (6.21)$$

Cabe señalar que esta expresión también considera que la zona de cambios de K_β es igual a la de ε_β . Esta ecuación ha sido utilizada para describir a la K_β en la inter-región fluido medio poroso dentro de una cavidad cuadrada por Luminari *et al.* (2019).

Así mismo, una tercera alternativa para predecir a K_β en la inter-región $\eta\omega$ consiste en utilizar

una función Heaviside, la cual se puede escribir como

$$K_{\beta\eta\omega}^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y \leq r_0 \\ K_{\beta\omega}^{-1} & \text{si } -r_0 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

Note que esta ecuación considera un cambio abrupto de K_{β} en $y = 0$. En otras palabras esta expresión no considera una zona de transición de K_{β} , sino más bien una superficie divisoria localizada en $y = 0$. Esta alternativa ha sido utilizada por Beckermann *et al.* (1987, 1988); Goyeau *et al.* (2003); Bruneau and Mortazavi (2004, 2008); Bruneau *et al.* (2010); Jiménez-Islas *et al.* (2009).

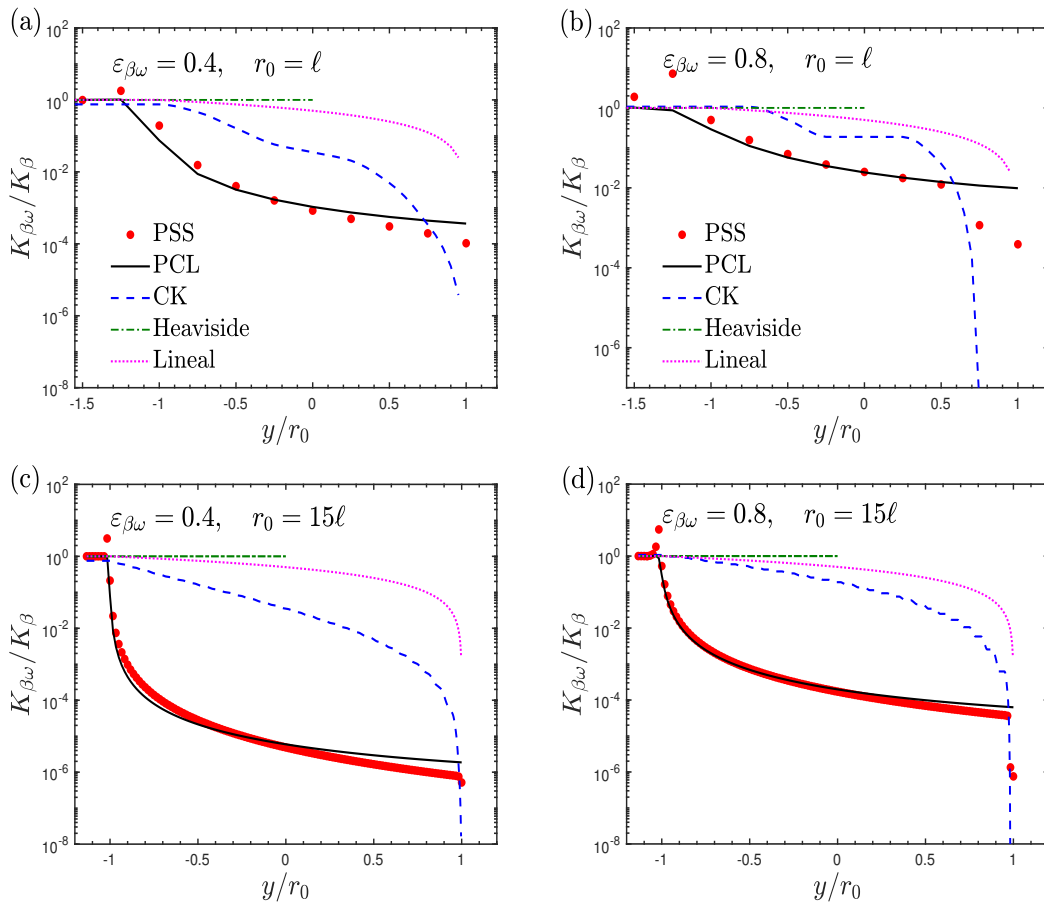


Figura 6.9: Variaciones espaciales de K_{β} en la inter-región medio libre/medio poroso obtenidos de la solución del PCL, la PSS, de una extensión de la ecuación de CK, de una función Heaviside y una función lineal. Estas predicciones se hicieron usando dos valores de r_0 y dos valores $\epsilon_{\beta\omega}$: (a,c) 0.4 y (b,d) 0.8.

En la figura 6.9 se presentan las variaciones espaciales de K_{β}^{-1} predichas con las ecuaciones anteriores usando dos valores de r_0 para dos valores de $\epsilon_{\beta\omega}$. Además, en la misma figura se presentan las predicciones obtenidas a partir de la solución del PCL (ver figura 6.5) y del problema en la escala de poro (ver figura 6.7). Como se puede observar, las predicciones proporcionadas por la función Heaviside son las más alejadas de las obtenidas a partir de la información de la escala de poro, mientras que las obtenidas con la ecuación de CK son las más cercanas. Además, las predicciones proporcionadas por la expresión lineal se encuentran entre las obtenidas por las otras dos ecuaciones. Sin embargo, aunque las predicciones de la ecuación de CK son las más cercanas a las obtenidas de la

información de la escala de poro, las predicciones a partir de la solución del PCL reproducen mejor a las obtenidas de la información de la escala de poro. Lo anterior sugiere que hasta que se propongan mejores alternativas que no dependan de los perfiles de la escala de poro, el PCL seguirá siendo la mejor alternativa disponible para predecir las variaciones de K_β .

Con el fin de analizar a los perfiles de velocidad promedio que se obtendrían de utilizar a las tres ecuaciones anteriores de K_β , el modelo de un dominio se resolvió usando estas ecuaciones con $r_0 = 15\ell$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Los perfiles de velocidad promedio resultantes se presentan en la figura 6.10. Además, en la misma figura se muestran los perfiles obtenidos de resolver el modelo de un dominio usando las predicciones K_β predichas de la solución del PCL y de promediar a los a los perfiles de la escala de poro. En general se puede observar que, usando las tres ecuaciones anteriores de K_β , se pierden algunos detalles de los perfiles de velocidad tanto en la regiones homogéneas como en la inter-región $\eta\omega$. En particular se puede observar que los perfiles de velocidad obtenidos con la ecuación de CK presentan las mayores desviaciones de los perfiles obtenidos de la escala de poro, seguidos por los perfiles obtenidos con la función Heaviside. Además, se debe señalar que con las predicciones de K_β obtenidas de PCL, los perfiles de velocidad obtenidos se encuentran más cerca de los perfiles obtenidos de la escala de poro. Estas observaciones aplican para otros valores de r_0 y $\varepsilon_{\beta\omega}$. Lo anterior confirma que, hasta que se propongan mejores alternativas que no dependan de los perfiles de la escala de poro, el PCL seguirá siendo la alternativa que mejor predice a las variaciones espaciales de K_β en la inter-región $\eta\omega$.

6.7 Efecto del tamaño de partícula variable en las variaciones espaciales de K_β

Hasta ahora las predicciones de los coeficientes efectivos en las GTEs se han restringido a sistemas donde, al nivel de una celda unitaria, el medio poroso es homogéneo hasta su superficie adyacente a la región de medio libre. Sin embargo, en numerosos sistemas, el medio poroso puede contener un tamaño de partícula variable cerca de las fronteras. Por lo tanto, esto puede conducir a tener otra forma de variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, y por consiguiente tener diferentes perfiles de velocidad promedio, tal como en procesos de solidificación (Goyeau *et al.*, 1997, 1999; Bousquet-Melou *et al.*, 2002; Roux *et al.*, 2006; Kumar *et al.*, 2013). De hecho, en diversos sistemas medio libre/medio poroso, la superficie del medio poroso también pueden presentar protuberancias o rugosidades que pueden influenciar las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos y así como el flujo en la región de medio libre, tal como se mostró por Valdés-Parada *et al.* (2009b). De esta forma, con el fin de analizar los efectos que puede tener un tamaño de partícula variable en las fronteras de un medio poroso, en esta sección se predicen las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos usando el medio poroso mostrado en la figura 6.11.

Las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos se obtuvieron a partir de simulaciones en la escala de poro en un dominio representativo de un canal, como el que se describió en las secciones anteriores. Nótese que el medio poroso consiste en un arreglo periódico de una celda unitaria con un círculo centrado (ver figura 6.3), aunque ahora el tamaño de partícula en el seno del medio poroso es una constante y varía en una distancia L_s por de bajo de la superficie del medio poroso. En esta zona la fracción volumétrica de cada celda unitaria, la cual es una función de la dirección vertical,

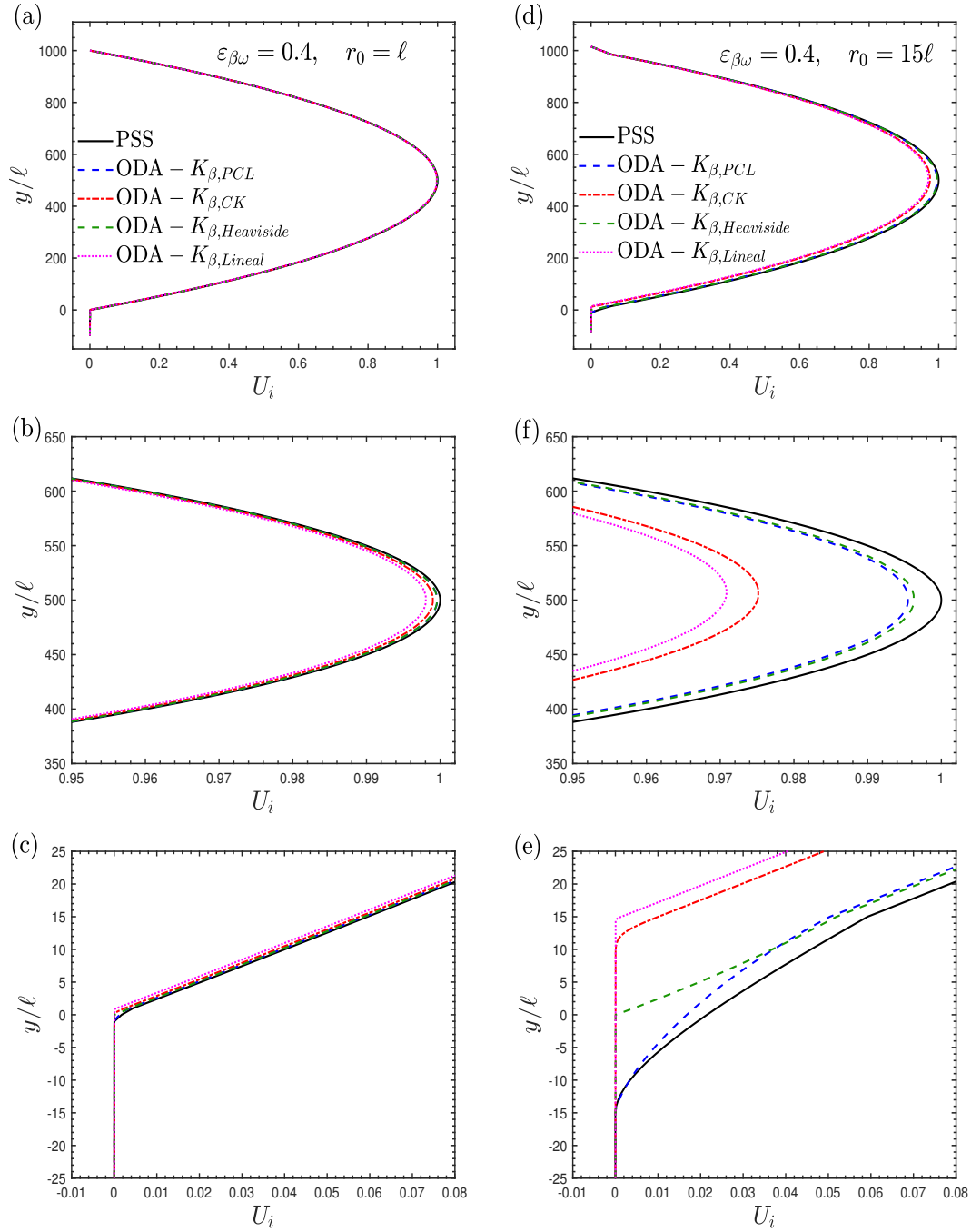


Figura 6.10: Perfiles de velocidad promedio en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso obtenidos de la solución del ODA con K_β obtenida de la solución del PCL, la PSS, de una extensión de la ecuación de CK, de una función Heaviside y una función lineal. Los cálculos se realizaron para $r_0 = 15\ell$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a-c) 0.4 y (d-f) 0.8. En todos los cálculos se utilizó a $L_\eta = 10^3\ell$ y $L_\omega = 10^2\ell$.

está dada por

$$\varepsilon_{\beta s} = \left(\frac{\varepsilon_{\beta, \max} - \varepsilon_{\beta, \min}}{h_\eta - \ell} \right) \left(y + h_\eta - \frac{\ell}{2} \right) + \varepsilon_{\beta, \min} \quad (6.23)$$

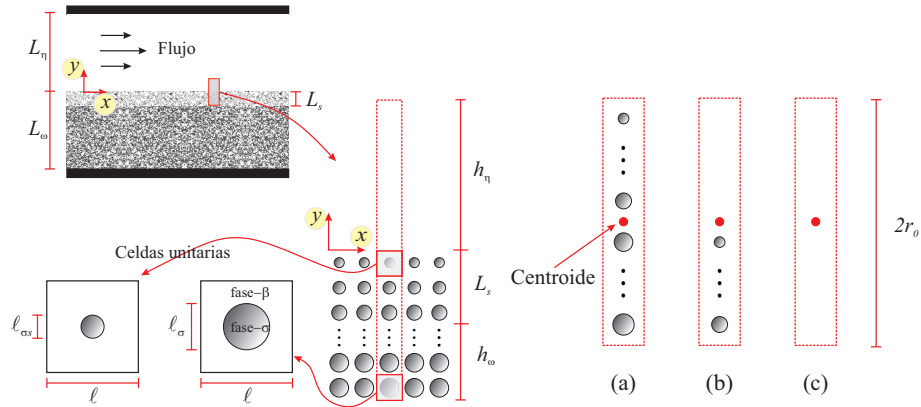


Figura 6.11: Dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso con un tamaño de partícula variable. Muestras rectangulares en tres posiciones de la inter-región: (a) $y = -r_0$, (b) $y = 0$ y (c) $y = r_0$.

mientras que el tamaño de las partículas ℓ_{σ_s} estará dada por

$$\frac{\ell_{\sigma_s}}{\ell} = \left[\frac{1 - \varepsilon_{\beta_s}}{\pi} \right]^{0.5} \quad (6.24)$$

De esta manera, tomando diferentes valores de r_0 para $\varepsilon_{\beta, \min} = \varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y $\varepsilon_{\beta, \max} = 0.95$, se calcularon las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, los cuales se muestran en la figura 6.12. Por un lado, se puede observar que ε_{β} varía sigmoidealmente de su valor en el seno del medio poroso a su valor en la región de medio libre. Así la zona de cambios de este coeficiente está restringido a las posiciones dadas por $-r_0 - L_s \leq y \leq +r_0$. Por su parte, se puede apreciar que K_{β}^{-1} presenta dos zonas de cambio, la primera es debido a la variación de las partículas en la zona restringida por las posiciones $-r_0 - L_s \leq y \leq -r_0$, mientras que la segunda es debido a que la región de promediado se mueve de estar completamente en el medio poroso a otra donde está completamente en la región de medio libre y que está restringido por las posiciones $-r_0 \leq y \leq +r_0$. De esta manera, la zona de cambios completa de K_{β} está restringida por las posiciones $-r_0 \leq y \leq +r_0$, la cual es más grande que cuando el tamaño de partícula es constante en la frontera del medio poroso.

Por último, usando los coeficientes efectivos anteriores, se resolvió el modelo de un dominio. Los perfiles de velocidad resultantes se muestran en la figura 6.13. Ya que las diferencias en las regiones homogéneas son mínimas, los perfiles presentados son únicamente en la inter-región $\eta\omega$. Como se puede observar las predicciones del modelo de un dominio concuerdan con las obtenidas a partir de los perfiles a la escala de poro. Estas observaciones se pueden confirmar cualitativamente en la figura 6.13(b), donde los mismos perfiles se presentan en escala logarítmica. Además de lo anterior, con el objetivo de analizar la contribución de la segunda corrección de Brinkman, las predicciones del ODA al despreciar la segunda corrección de Brinkman se muestran en la figura 6.13. Es interesante notar que al despreciar la segunda corrección de Brinkman se introducen desviaciones en las predicciones del ODA, las cuales son mayores donde se tiene un tamaño de partícula variable cerca de las fronteras. Esto se puede atribuir a que el gradiente de la fracción volumétrica tiene una contribución más importante en la GTEs de cantidad de movimiento.

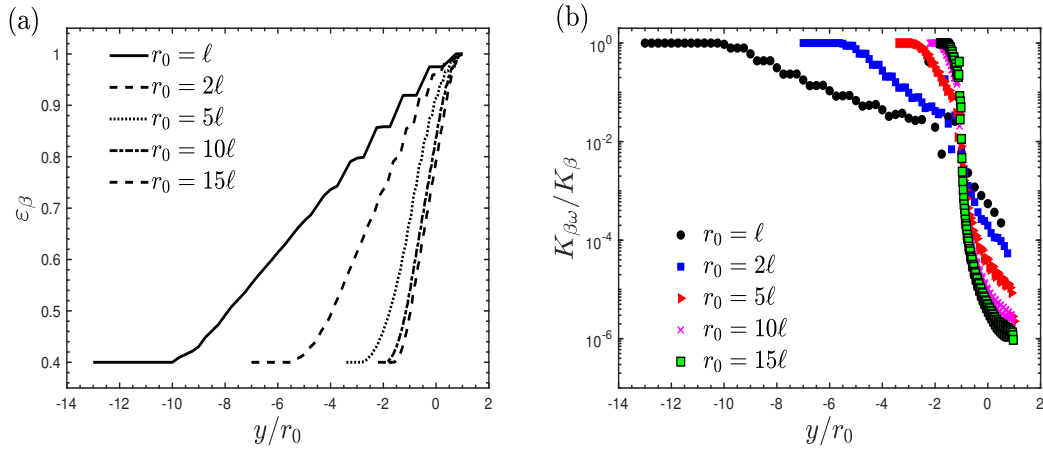


Figura 6.12: Coeficientes efectivos en la inter-región $\eta\omega$ con un tamaño de partícula variable: (a) fracción volumétrica y (b) permeabilidad. Los cálculos son para diferentes valores de r_0 , $\varepsilon_{\beta,min} = 0.4$, $\varepsilon_{\beta,max} = 0.95$.

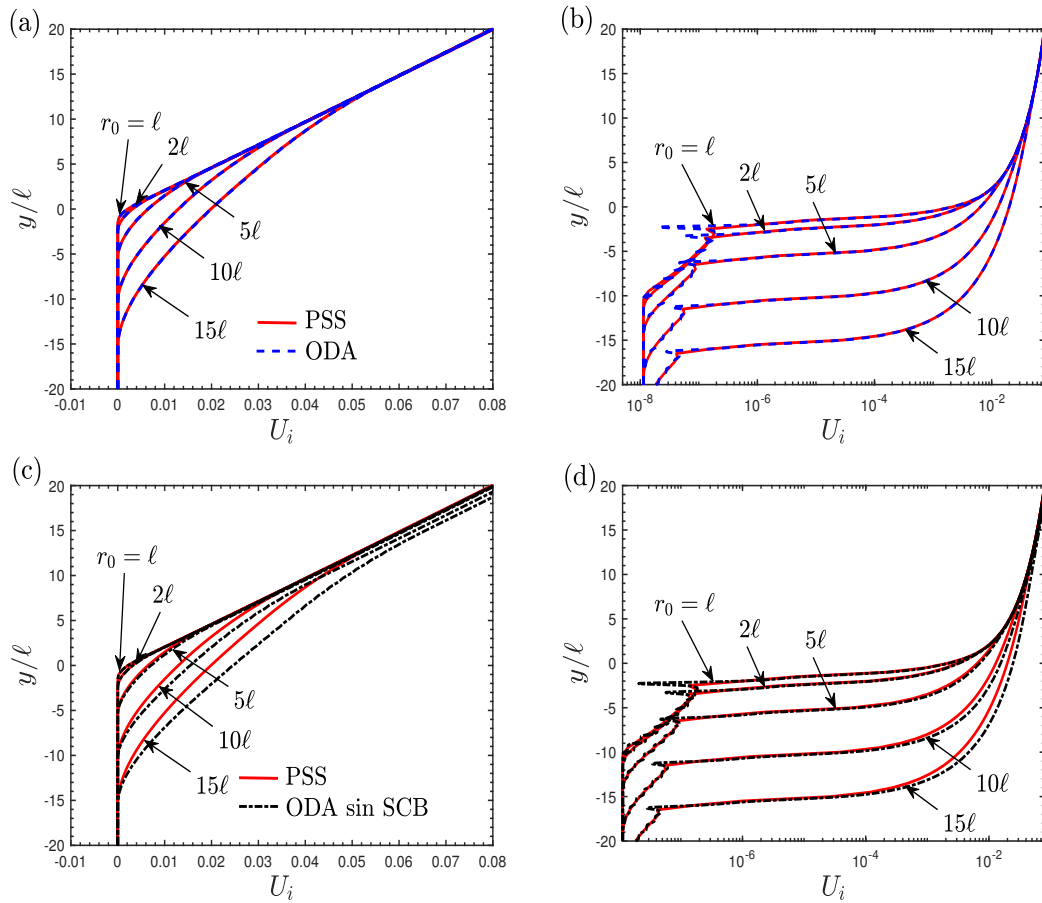


Figura 6.13: Perfiles de velocidad promedio en la inter-región $\eta\omega$ en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso obtenidos de la solución del ODA y de la PSS para diferentes valores de r_0 , $\varepsilon_{\beta,min} = 0.4$ y $\varepsilon_{\beta,max} = 0.95$.

6.8 Discusión de resultados

Con base en los resultados presentados en este capítulo, a continuación se hacen los siguientes comentarios

Por un lado, al comparar los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución del ODA y de promediar los perfiles de velocidad a la escala de poro, se mostró que la GTE desarrollada usando el método del promedio volumétrico puede predecir el flujo totalmente desarrollado en un sistema medio libre/medio poroso, como el estudiado por Beavers and Joseph (1967). Para ello, la GTE de cantidad de movimiento debe incluir dos términos viscosos y un término de Darcy. Cabe señalar que incluir o no estos términos conduce a diferentes predicciones de los perfiles de velocidad, y por consiguiente conducirá a obtener diferentes descripciones de otras cantidades como el transporte de calor o masa en un sistema medio libre/medio poroso. Desde el punto de vista de este trabajo, lo anterior contribuye a esclarecer el rango de validez de las correcciones de Brinkman a la ley Darcy que han sido el objeto de gran debate en la literatura Vafai and Kim (1990); Nield (1991); Sahraoui and Kaviany (1992); Auriault (2009); Zampogna and Bottaro (2016). Las correcciones de Brinkman se deben incluir en las inter-regiones, y pueden despreciarse con respecto al término de Darcy en el seno del medio poroso, tal como se ha indicado por diversos autores (Whitaker, 1999). Además, en la primera corrección de Brinkman, la viscosidad efectiva debe estar dada por $\mu_{eff} = \mu_\beta / \varepsilon_\beta$. Todas estas observaciones se obtuvieron para diferentes valores de r_0 y usando un modelo de medio poroso compuestos de una celda unitaria con un círculo centrado ($0.25 \leq \varepsilon_{\beta\omega} \leq 0.95$), aunque también con un arreglo escalonado de círculos ($0.25 \leq \varepsilon_{\beta\omega} \leq 0.95$) y un cuadrado centrado ($0.05 \leq \varepsilon_{\beta\omega} \leq 0.95$).

Posteriormente, en los perfiles de velocidad promedio se observó una zona de transición en la inter-región $\eta\omega$, de la velocidad en el seno del medio poroso (*i. e.*, $y < -r_0$) a aquella en la región de medio libre (*i. e.*, $y > r_0$). Cabe recordar que la porción del perfil de velocidad por debajo de la superficie del medio poroso ($-(3\ell + r_0) \leq y \leq 0$) es lo que se conoce como la capa de Brinkman (Goharzadeh *et al.*, 2005; Morad and Khalili, 2009). En el capítulo 4 se mostró que el espesor de esta zona depende del tamaño de la región de promediado y su espesor es del orden de $\delta_B = 2r_0 + 3\ell$, lo cual es mucho más grande que $\sqrt{K_{\beta\omega}}$, tal como lo sugieren diversos estudios Saffman (1971); Goyeau *et al.* (2003); Chandesris and Jamet (2006, 2007). Además, se encontró que esta zona de transición es un resultado de utilizar cantidades promedio, y no de la forma de las ecuaciones macroscópicas desarrolladas en este trabajo, ya que primero se obtuvo de promediar únicamente los perfiles de velocidad local. Aunque ciertamente, como se mostró en este capítulo, se puede predecir a partir de la solución de las ecuaciones macroscópicas. Esto confirma las conclusiones esbozadas por Ochoa-Tapia *et al.* (2017).

Por otro lado, de una comparación entre las variaciones espaciales de la K_β obtenidos de la solución del PCL y de los perfiles a la escala de poro (ver figura 6.9), se mostró que el PCL es únicamente una alternativa aproximada para predecir a este coeficiente. Sin embargo, se debe señalar que el PCL es un problema auxiliar que permite obtener formalmente la forma cerrada de las ecuaciones macroscópicas. Además, se encontró que el PCL proporciona mejores predicciones de K_β que algunas ecuaciones empíricas ampliamente utilizadas en la literatura. Por ejemplo, proporciona mejores predicciones que una extensión de la ecuación de Carman-Kozeny, una función Heaviside o una función lineal. Más aún, cuando las predicciones empíricas de K_β se utilizan para resolver el ODA, se encontró que los perfiles resultantes se encuentran mucho más alejados de los obtenidos de promediar los perfiles locales, que aquellos obtenidos cuando se utiliza a K_β predicho de la solución del PCL. Por lo tanto, hasta que se encuentren mejores alternativas para predecir a las variaciones espaciales de K_β en la inter-región, el PCL es la mejor alternativa disponible para dicho fin.

Por otra parte, se mostró que las variaciones espaciales de K_β dependen del tamaño de la región de promediado (ver figura 6.5 y 6.7). Además, usando valores más grandes de r_0 , se encontró que las variaciones espaciales de K_β no presentan un comportamiento asintótico. Esto se atribuye a que cuando el valor r_0 incrementa, más fluido se añade en la región de promediado, lo cual conduce a valores más grandes de K_β . Sin embargo, con el fin de proporcionar predicciones adecuadas de este coeficiente, cabe recordar que el valor r_0 debe estar restringido por la desigualdad dada por $r_0 \leq L$. Observaciones similares se pueden hacer en los perfiles de velocidad promedio en la inter-región $\eta\omega$, lo cual se mostró por Ochoa-Tapia *et al.* (2017); Hernandez-Rodriguez *et al.* (2019). De hecho, el tamaño y forma de la región de promediado debe tomarse en cuenta para realizar una comparación de predicciones con observaciones experimentales (Baveye and Sposito, 1984; Cushman, 1984).

En cuanto al dominio de solución del PCL, Valdés-Parada *et al.* (2007a) indican que la altura de este dominio debe ser $h_\eta + h_\omega = 40\ell$, donde se considera que $h_\eta = h_\omega$. Esto hace que el espesor de la zona de cambios de K_β sea igual a $\delta_{K_\beta} \approx 20\ell$. Sin embargo, en las secciones anteriores se encontró que el dominio de solución del PCL depende del tamaño de r_0 . En particular se mostró que la altura de la región de medio libre es igual a $h_\eta = 2r_0$, mientras que la altura del medio poroso es igual $h_\omega \approx 2r_0 + 3\ell$. Cabe notar que la porción del medio poroso contenido en el dominio de solución es ligeramente más grande que la porción de fluido (*i. e.*, $h_\eta < h_\omega$), lo cual se debe a que K_β debe alcanzar el valor de $K_{\beta\omega}$. Por lo tanto, de acuerdo con los resultados de este trabajo, el espesor de la zona de cambios de K_β es igual a $\delta_{K_\beta} = 2r_0 + 3\ell$.

Por último, cabe recordar que una alternativa al ODA es un TDA. Esta alternativa, para condiciones de flujo de Stokes, puede involucrar a la ecuación de Darcy y a la ecuación de Stokes, o bien, a la ecuación de Darcy-Brinkman y a la ecuación de Stokes. Además, para cualquiera de estas combinaciones de las ecuaciones, en general, es necesario desarrollar dos condiciones de salto, una para la velocidad y otra para el esfuerzo. Ambas condiciones de salto se pueden obtener en usando el método del promedio volumétrico, tal como se mostró en Valdés-Parada *et al.* (2013). En este contexto, dichas condiciones contienen coeficientes de salto que dependen de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos en la inter-región Valdés-Parada *et al.* (2007b,a, 2009a,b, 2013). Por lo tanto, conocer las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos adquiere mayor importancia. Sin embargo, la predicción de los coeficientes efectivos se ha basado en utilizar expresiones empíricas y en el mejor de los casos en la solución del PCL, los cuales, como se mostró en las secciones anteriores, puede conducir a obtener coeficientes efectivos aproximados, y por lo tanto coeficientes de salto aproximados. Con esto en mente, los coeficientes efectivos predichos usando los perfiles resultantes de la simulaciones a la escala de poro, por primera vez, proporcionan la oportunidad de predecir de manera precisa a los coeficientes de salto y posteriormente evaluar las predicciones del TDA. Esto y otras ideas se explorarán en futuros trabajos. Vale la pena mencionar que también se pueden utilizar otras alternativas para derivar condiciones de salto, tal como la técnica de homogenización multiescala (Zampogna and Bottaro, 2016; Lācis and Bagheri, 2017; Bottaro and Naqvi, 2020; Sudhakar *et al.*, 2021). En ese contexto, los coeficientes de salto dependen de la microestructura de la frontera del medio poroso, aunque no requieren conocer las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos. De hecho, para condiciones de flujo de Stokes, los coeficientes de salto se pueden predecir de resolver problemas de valor a la fronteras auxiliares en dominios representativos de la frontera.

6.9 Resumen del capítulo

En este capítulo se desarrolló el problema de cerradura local para obtener la forma cerrada de la ecuación de transporte generalizada de cantidad de movimiento para el flujo de Stokes entre un medio libre y un medio poroso. Como resultado de ello, esta ecuación contiene, además de dos términos viscosos indicados como la primera y la segunda corrección de Brinkman, un término de Darcy con un tensor de permeabilidad intrínseco \mathbf{K}_β dependiente de la posición.

En primer lugar, las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad se obtuvieron resolviendo el problema de cerradura local en un dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso con diferentes microestructuras del medio poroso. Esto se hizo usando diferentes tamaños de la región de promediado r_0 y diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Posteriormente, usando estos coeficientes, se resolvieron las ecuaciones de transporte generalizadas para un sistema similar al estudiado por BJ. Se encontró que los perfiles de velocidad promedio resultantes poseen desviaciones de los obtenidos de promediar a los perfiles de velocidad de simulaciones a la escala de poro.

En segundo lugar, con el fin de evaluar las predicciones de la permeabilidad obtenidas a partir de la solución del problema de cerradura local, y al mismo tiempo determinar el origen de las desviaciones en las predicciones de las ecuaciones macroscópicas, la dependencia espacial de la permeabilidad se predijo utilizando la información de los perfiles locales obtenidos de simulaciones a la escala de poro. Enseguida, con estas nuevas predicciones, las ecuaciones se resolvieron nuevamente para el mismo sistema. Lo anterior ilustró que, que las ecuaciones macroscópicas desarrolladas aquí pueden describir satisfactoriamente el flujo entre un medio libre y un medio poroso, siempre y cuando las predicciones de la permeabilidad sean exactas. Además, se encontró que incluso si las predicciones de la permeabilidad obtenidas del problema de cerradura local son aproximadas, proporciona mejores predicciones de la permeabilidad que las obtenidas de expresiones heurísticas usualmente utilizadas en la literatura.

Por último, se exhibió que las ecuaciones macroscópicas aquí desarrolladas también pueden describir los perfiles de velocidad promedio en cualquier parte de un sistema medio libre/medio poroso para cuando el medio poroso presenta un tamaño de partícula variable cerca de sus fronteras.

7. Modelo de un dominio de flujo inercial

El flujo inercial de una fase simple entre un medio libre y un medio poroso se puede estudiar en la escala macroscópica usando también un modelo de un dominio. En este caso, ahora las ecuaciones contienen coeficientes efectivos que, además de capturar los efectos de la microestructura del medio poroso, deben capturar parte de los efectos inerciales de la microescala. Sin embargo, los modelos de un dominio para el flujo inercial utilizados actualmente en la literatura padecen de dificultades similares a las encontradas en aquellos para el flujo de Stokes. En primer lugar, aún es necesario desarrollar y establecer las ecuaciones macroscópicas que describen a la transferencia de cantidad de movimiento, ya que en la literatura se pueden encontrar diferentes ecuaciones empíricas que no garantizan una descripción precisa de esta. En segundo lugar, aún se requiere desarrollar una metodología para predecir las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos que capturen tanto los efectos de la microestructura del medio poroso como de las fuerzas inerciales locales, lo cual ha conducido a utilizar interpolaciones heurísticas para esto.

Con base en lo anterior, el objetivo de este capítulo es demostrar que un modelo de un dominio del flujo inercial, cuando las ecuaciones de transporte generalizadas se derivan a partir del método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999), junto con una detallada predicción de los coeficientes efectivos, es capaz de describir de manera precisa a la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso. Cabe señalar que el desarrollo de las ecuaciones ya ha sido presentado en la literatura, aunque su validación y la predicción exacta de los coeficientes efectivos siguen siendo problemas abiertos.

7.1 Definición del sistema y las ecuaciones en la microescala

Para cumplir con lo antes mencionado, el sistema de estudio de este capítulo consiste una vez más en el flujo estacionario e incompresible de un fluido Newtoniano (fase- β) sobre y a través de un medio poroso hecho de una fase sólida rígida (fase- σ), tal como el que se muestra en la figura 7.1.

Capítulo 7. Modelo de un dominio de flujo inercial

Sin embargo, en esta ocasión se supone que el flujo de la fase- β sucede en un rango del número de Reynolds donde se justifica que tanto las contribuciones inerciales y las viscosas son importantes dentro y fuera del medio poroso. De esta manera, las ecuaciones microscópicas que gobiernan el transporte de masa total y de cantidad de movimiento de la fase- β están dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \quad (7.1a)$$

$$\rho_\beta \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad \text{en la fase } -\beta \quad (7.1b)$$

las cuales están sujetas a la condición de frontera de no deslizamiento en las interfases sólido-fluido ($\mathcal{A}_{\beta\sigma}$), dada por

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma, M} \quad (7.1c)$$

junto con las condiciones de frontera en las entradas y salidas del sistema macroscópico, que se pueden escribir como

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\beta, e} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta e, M} \quad (7.1d)$$

Análogamente al capítulo anterior, la solución del problema microscópico de arriba puede ser muy complicada de obtener, por lo que a continuación se desarrollan las ecuaciones macroscópicas de transporte de masa total y de cantidad de movimiento mediante el promediado y escalamiento de las ecuaciones microscópicas usando el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999).

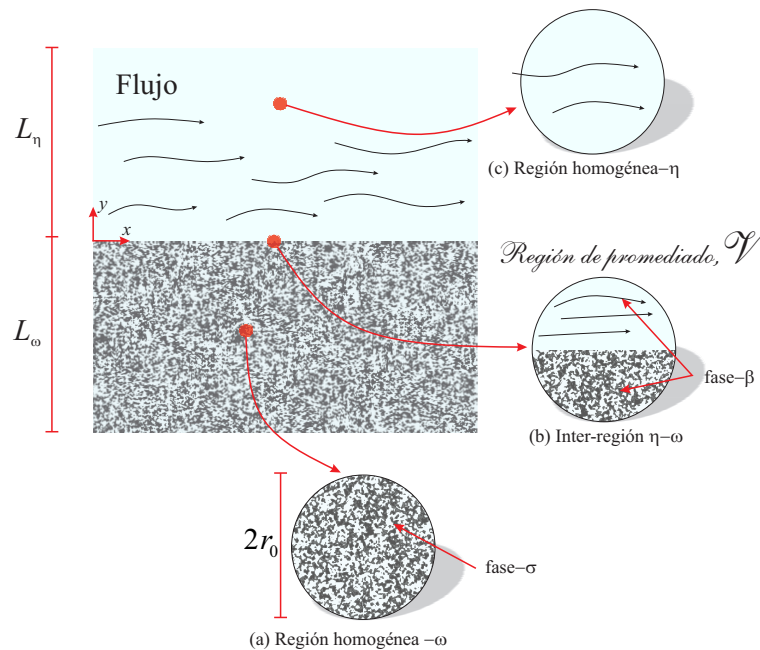


Figura 7.1: Sistema en el que un fluido Newtoniano fluye sobre y a través de un medio poroso. Muestras en tres regiones del sistema (a) el seno del medio poroso, (b) el seno del medio libre y (c) la inter-región medio libre/medio poroso

7.2 Desarrollo de las ecuaciones promedio

7.2.1 Operadores de promediado

Para promediar las ecuaciones locales se retoman los operadores de promedio superficial e intrínseco dados por las Ecs. (5.2) y (5.3). Cabe recordar que estos operadores están definidos en términos de una región de promediado \mathcal{V} cuyo centróide \mathbf{x} se puede localizar en cualquiera de las dos fases del sistema, tanto en las regiones homogéneas como en la inter-región medio libre/medio poroso.

7.2.2 Ecuación promedio de continuidad

Enfocando primero la atención a la ecuación promedio de masa total, se puede notar que la ecuación de continuidad de la microescala de este capítulo es igual a la utilizada en el problema de flujo de Stokes descrito en el capítulo 4, por lo que la ecuación promedio resultante será la misma. De esta forma, basta mencionar que dicha ecuación en términos de promedios superficiales está dada por

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (7.2)$$

O bien, al utilizar la Ec. (5.3), en términos de promedios intrínsecos como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = -\nabla \ln \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (7.3)$$

Cabe recordar que ninguna de las dos formas de esta ecuación requiere de un proceso de cerradura local, debido a que ya es una ecuación cerrada. Este no es el caso de la ecuación promedio de cantidad de movimiento, como se verá a continuación.

7.2.3 Ecuación promedio de cantidad de movimiento

Dirigiendo ahora la atención al promediado de la ecuación de cantidad de movimiento local, se puede advertir que los términos del lado derecho de la Ec. (7.1b) son idénticos a los de la Ec. (5.1b), siendo diferente solamente en los términos de su lado izquierdo. Por ello, aquí se presenta únicamente el promediado del lado izquierdo, y el resultado se igualará a la forma promedio del lado derecho desarrollado anteriormente en el capítulo 5. De esta manera, al aplicar el operador de promediado superficial dado por la Ec. (5.2) al lado izquierdo (L.I.) de la Ec. (7.1b), conduce a

$$\langle L.I. \rangle = \rho_\beta \langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta) \rangle \quad (7.4)$$

Con el fin de intercambiar diferenciación espacial e integración espacial, se utiliza el teorema del promediado espacial (Howes and Whitaker, 1985), junto con la condición de no deslizamiento dada por la Ec. (7.1c), en la ecuación anterior, lo cual permite obtener

$$\langle L.I. \rangle = \rho_\beta \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (7.5)$$

Así, al igualar la ecuación anterior con la Ec. (5.13), se obtiene la ecuación promedio de cantidad de movimiento dada por

$$\rho_\beta \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left(\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \quad (7.6)$$

donde el vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ está dado por la Ec. (5.14). La Ec. (7.6) es la ecuación de transporte generalizada de cantidad de movimiento de flujo inercial, y es válida en cualquier parte del sistema medio libre/medio poroso mostrado en la figura 7.1. No obstante, al igual que la ecuación del problema de flujo de Stokes, la solución de la ecuación de arriba puede ser muy complicada de obtener. Esto se debe a que, en su forma actual, esta ecuación está en términos de cantidades locales debido al vector $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ y además al término inercial dado por $\rho_\beta \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle$. Para superar este problema se puede realizar un desarrollo análogo al presentado en el capítulo 5, el cual consiste en predecir estos dos términos usando simulaciones a la escala de poro, conduciendo así a la forma cerrada de las ecuaciones. Cabe señalar que, aunque esta no es una opción práctica, es muy conveniente porque permite evaluar, de forma casi exacta, las predicciones de las ecuaciones promedio antes de adoptar suposiciones que llevan a restricciones de longitudes de escala. Para mantener la fluidez en la presentación, dicho análisis se presenta en el Apéndice C, donde se encontró que las ecuaciones, antes de adoptar un conjunto de suposiciones, pueden describir satisfactoriamente a los perfiles de velocidad promedio entre un medio libre y un medio poroso.

Otra alternativa para resolver el problema anterior, y al mismo tiempo proporcionar una ecuación más práctica, consiste en desarrollar el problema de cerradura local asociado. Esto conducirá también a la forma cerrada de la ecuación de cantidad de movimiento, y a definir coeficientes de medio efectivo con un sentido físico más fácil de tratar, tal como se muestra a continuación. Cabe mencionar que este problema de cerradura local fue presentado previamente por Paéz-García *et al.* (2017), pero su solución y así como la predicción de los coeficientes efectivos en una inter-región medio libre/medio poroso siguen siendo problemas abiertos.

7.3 Problema de cerradura local

Para iniciar el desarrollo del problema de cerradura local, se introduce la descomposición espacial de cualquier cantidad ψ_β definida en la fase $-\beta$, en términos de su promedio intrínseco y desviaciones, la cual está dada por la Ec. (6.4). Al hacer uso de esta ecuación en los dos términos de la Ec. (7.6) que contienen cantidades locales, conduce a

$$\rho_\beta \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} = \rho_\beta \nabla \cdot \left\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right\rangle \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.7a)$$

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(\tilde{p}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \Delta \langle p_\beta \rangle^\beta \right) \right] dA + \mu_\beta \nabla \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \Delta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.7b)$$

donde $\Delta\psi_\beta = \langle \psi_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \psi_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}}$. Lo anterior hace que la ecuación promedio de cantidad de movimiento involucre dos tipos de variables, las desviaciones y los promedios, y un solo conjunto de ecuaciones, las ecuaciones promedio. Por lo tanto, ahora se requiere encontrar expresiones de las desviaciones espaciales de la velocidad y de la presión en términos de cantidades promedio o sus derivadas. Este proceso es extenso, por lo que los detalles de la derivación de estas expresiones se presenta en el Apéndice ???. Aquí es suficiente mencionar que la solución formal de las desviaciones está dada por

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{B}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.8a)$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{b}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.8b)$$

donde el vector \mathbf{b}_β y el tensor de segundo orden \mathbf{B}_β son las variables de cerradura locales. Nótese que esta solución formal es idéntica a la obtenida en el problema de cerradura de flujo de Stokes (ver Ecs. (6.7)). Sin embargo, el problema de valor en la frontera asociado a las variables de cerradura de la solución formal de arriba incluye ahora contribuciones inerciales, tal como se puede ver en la Ec. (B.12b). Cabe mencionar que, para obtener las ecuaciones anteriores se impusieron las restricciones de escala dadas por las Ecs. (6.8) junto con $\ell \ll r_0$. Una consecuencia directa de estas restricciones es que las Ecs. (7.7a) se pueden reducir a

$$\rho_\beta \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle = \rho_\beta \nabla \cdot \left(\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle + \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \right) \quad (7.9a)$$

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{l} \tilde{p}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} \right] dA \quad (7.9b)$$

Con base en lo anterior, la GTE de cantidad de movimiento se puede cerrar formalmente, lo cual se muestra a continuación.

7.4 Ecuaciones macroscópicas cerradas

La forma final de la ecuación promedio de continuidad está dada por la Ec. (7.2). En cambio, la forma final de la ecuación promedio de cantidad de movimiento se obtiene al sustituir las Ecs. (7.8) en la Ec. (7.6). De esta manera, las dos ecuaciones promedio cerradas se pueden escribir como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (7.10a)$$

$$\underbrace{\varepsilon_\beta^{-1} \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \cdot \mathbf{C}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right)}_{\text{fuerzas inerciales}} = - \underbrace{\nabla \langle p_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{caída de presión}} + \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{fuerzas volumétricas}} + \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{1ra corrección de Brinkman}} - \underbrace{\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left(\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right)}_{\text{2da corrección de Brinkman}} - \underbrace{\mu_\beta \mathbf{H}_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle}_{\text{término de Darcy}} \quad (7.10b)$$

Nótese que ahora la ecuación de cantidad de movimiento, además de las contribuciones dadas por los esfuerzos viscosos (*i. e.*, la primera y la segunda corrección de Brinkman) analizados en el capítulo

anterior, contiene un término que describe los esfuerzos inerciales debidos al mismo fluido y un nuevo término de resistencias superficiales al flujo del fluido (*i. e.*, término de Darcy). Más aún, se han introducido dos coeficientes efectivos definidos en términos de las variables de cerradura local de acuerdo a las siguientes expresiones

$$\mathbf{C}_\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \langle \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{B}_\beta \rangle^\beta \quad (7.11a)$$

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}\mathbf{b}_\beta + \nabla \mathbf{B}_\beta) dA \quad (7.11b)$$

Estos coeficientes capturan los efectos de la microestructura del medio poroso y así como una parte de las fuerzas inerciales locales en la descripción macroscópica del sistema medio libre/medio poroso. Desde un punto de vista físico, el tensor de cuarto orden $\mathbf{C}_\beta(\mathbf{x})$ es un coeficientes que describe todas las contribuciones inerciales presentes en bulk del fluido, mientras que el tensor de segundo orden $\mathbf{H}_\beta(\mathbf{x})$ es un coeficiente que captura las resistencias al flujo del fluido ejercidas por el medio poroso y por fuerzas inerciales locales. Este último se puede considerar como un tensor de permeabilidad aparente y está relacionado a los tensores de permeabilidad intrínseco $\mathbf{K}_\beta(\mathbf{x})$ y de Forchheimer $\mathbf{F}_\beta(\mathbf{x})$, de acuerdo a la siguiente expresión (Whitaker, 1996)

$$\mathbf{H}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{F}_\beta(\mathbf{x})) \quad (7.12)$$

El coeficiente $\mathbf{K}_\beta(\mathbf{x})$ captura las resistencias ejercidas por el medio poroso al flujo del fluido, tal como se discutió en el capítulo anterior, mientras que el coeficiente $\mathbf{F}_\beta(\mathbf{x})$ captura únicamente las resistencias debidas a las fuerzas inerciales. Cabe señalar que, cuando el valor del número de Reynolds es mucho menor que uno, \mathbf{H}_β se reduce a

$$\mathbf{H}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \quad (7.13)$$

Esto debido a que las contribuciones inerciales en la Ec. (B.12b) pueden despreciarse con respecto a los esfuerzos viscosos. Con base en lo anterior, las GTEs de flujo inercial entre un medio libre y un medio poroso están dadas por las Ecs. (7.10), y para aplicarlas, es necesario conocer las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, lo cual se presenta en la siguiente sección.

7.5 Predicción de los coeficientes efectivos

Para predecir a los coeficientes efectivos definidos por las Ecs. (7.11), se precisa resolver el PCL dado por las Ecs. (B.12) en un dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso. Además, también es necesario conocer a los perfiles de velocidad local que aparecen en el término inercial de la Ec. (B.12b). Estos perfiles se pueden obtener de realizar simulaciones a la escala de poro en todo el sistema medio libre/medio poroso. Por consiguiente, la predicción de los coeficientes efectivos mediante la solución del PCL involucra resolver dos problemas de valor a la frontera en dos dominios diferentes. Sin embargo, esto hace que este curso de acción sea poco práctico y se evitará en este capítulo. Para superar esta desventaja, se propone predecir a los coeficientes efectivos usando solo la información proveniente de las simulaciones a la escala de poro, tal como se muestra a continuación.

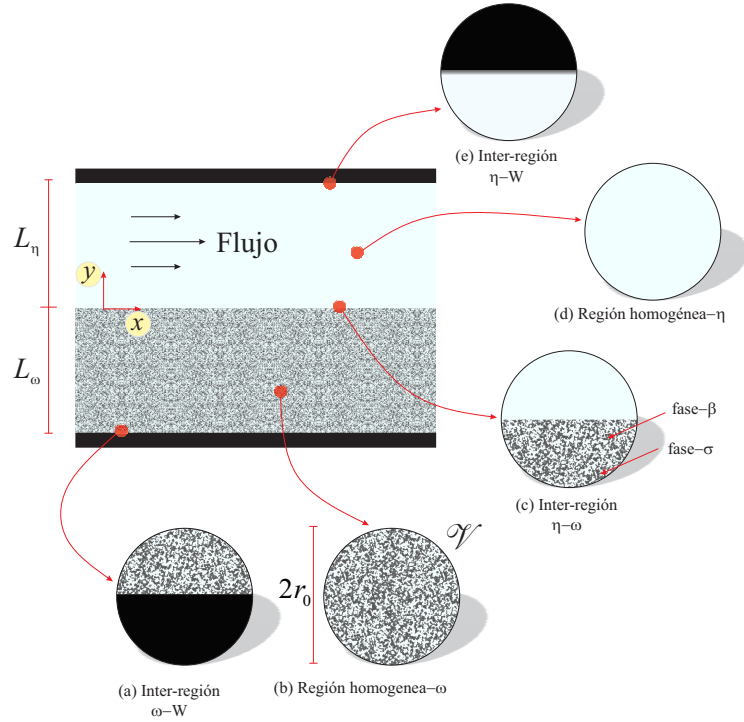


Figura 7.2: Flujo a través de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso similar al sistema estudiado por Beavers and Joseph (1967). Muestras en el seno de cada región ((a) seno del medio poroso, (d) seno del medio libre) y en las inter-regiones ((a) pared impermeable/pared, (c) medio poroso/medio libre y (e) medio libre/pared impermeable).

Para efectuar esto, se precisa primero encontrar definiciones de los coeficientes efectivos en términos de cantidades locales. Recordando la metodología utilizada en la §6.5.1, estas expresiones se obtienen al sustituir las Ecs. (6.4) y (7.8) en las Ecs. (7.11), lo cual conduce a

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{C}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (7.14a)$$

$$\mu_\beta \mathbf{H}_\beta^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{-1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \mu_\beta \left(\nabla \mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right] dA \quad (7.14b)$$

Así, estas ecuaciones proporcionan una definición para predecir los coeficientes efectivos a partir de los campos locales que resultan de llevar a cabo las simulaciones a la escala de poro, tal como se muestra líneas abajo.

7.5.1 Simulaciones a la escala de poro

Para realizar las PSSs, se considera el flujo de un fluido en un sistema medio libre/medio poroso que consiste en un canal parcialmente ocupado por un medio poroso, tal como el que se muestra en la figura 7.2. Cabe mencionar que, aunque este sistema es análogo al utilizado por Beavers and Joseph (1967), en este caso se considera que los efectos inerciales son importante tanto en la región

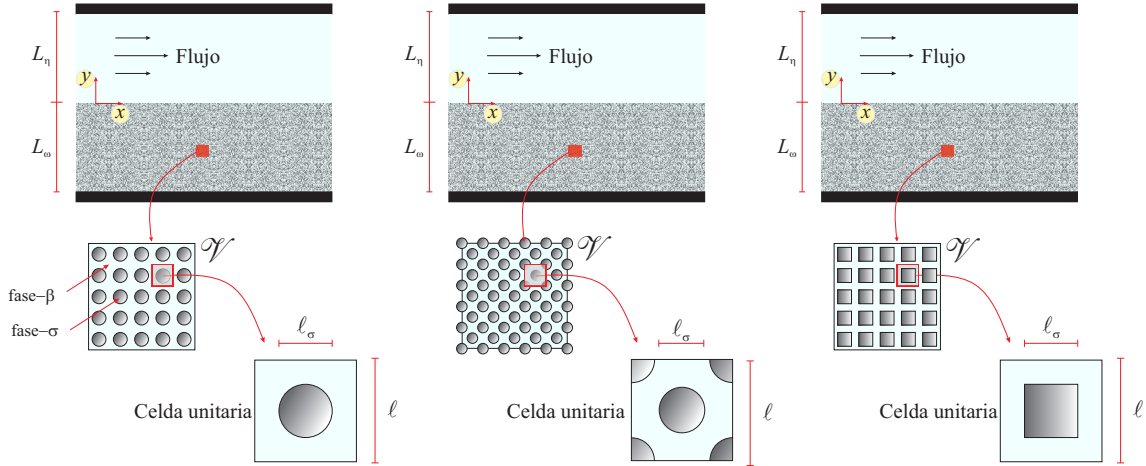


Figura 7.3: Canal parcialmente ocupado por un medio poroso hecho de un arreglo periódico de (a) cilindros alineados de sección transversal circular, (b) cilindros escalonados de sección transversal circular y (c) cilindros alineados de sección transversal cuadrada.

del medio libre como del medio poroso. La altura del canal está dada por $L_T = L_\eta + L_\omega$, donde L_η es la altura de la región del medio libre y L_ω es la altura de la región del medio poroso. Se considera que el medio poroso se compone de un arreglo periódico de una celda unitaria de longitud de lado ℓ con partículas sólidas de longitud ℓ_σ , como las que se muestran en la figura 6.3. En todos los cálculos se consideran tres geometrías en la celda unitaria que llevan a tres medios porosos con diferente estructura. Además, se supone que el flujo es completamente desarrollado y que es motivado por una caída de presión constante, lo cual es válido si el análisis se hace suficientemente lejos de las entradas y salidas del canal. Para imponer la caída de presión promedio constante, se introduce la descomposición espacial de la presión en términos de su promedio y desviaciones. Bajo estas condiciones, el flujo en la microescala será periódico en la dirección horizontal en una distancia igual a la longitud de lado de una celda unitaria ℓ . Por lo tanto, basta con utilizar un dominio representativo periódico de altura L_T y ancho ℓ para llevar a cabo las PSSs, tal como el que se muestra en la figura 7.4. Esto permite abandonar las condiciones de frontera en las entradas y salidas dadas por las Ecs. (7.1d). Con base en esto, el problema microscópico a resolver está dado por las Ecs. (7.1a)-(7.1c) junto con las condiciones de periodicidad y la restricción integral dadas por

$$\boldsymbol{\psi}_\beta(\mathbf{r}_\beta) = \boldsymbol{\psi}_\beta(\mathbf{r}_\beta + \ell_x), \quad \text{para} \quad \boldsymbol{\psi}_\beta = \mathbf{v}_\beta, \tilde{p}_\beta \quad (7.15)$$

$$\langle \boldsymbol{\psi}_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (7.16)$$

Con el objetivo de obtener resultados genéricos, el problema microscópico antes mencionado se escribe en forma dimensional usando las variables adimensionales dadas por

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}_\beta}{v_{ref}}, \quad p_\beta^* = \frac{p_\beta}{p_{ref}}, \quad \nabla^* = \ell \nabla \quad Re = \frac{\rho_\beta \ell v_{ref}}{\mu} \quad (7.17)$$

donde $v_{ref} = \ell^2 \|\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta\| / \mu_\beta$ y $p_{ref} = \ell \|\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta\|$. Esto conduce al siguiente problema microscópico

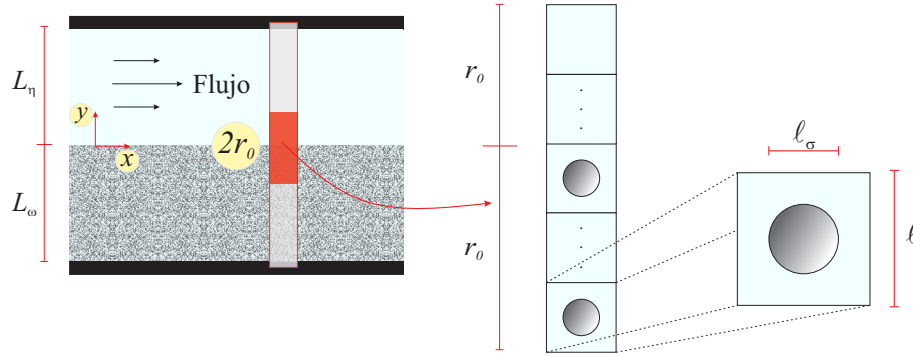


Figura 7.4: Dominio representativo del canal parcialmente ocupado por un medio poroso con una estructura de cilindros alineados de sección transversal circular.

adimensional

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta^* = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \quad (7.18a)$$

$$Re \mathbf{v}_\beta^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}_\beta^* = -\nabla^* \bar{p}_\beta^* + \nabla^{*2} \mathbf{v}_\beta^* - \nabla^* \langle p_\beta^* \rangle^\beta \quad \text{en la fase } -\beta \quad (7.18b)$$

$$\mathbf{v}_\beta^* = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (7.18c)$$

$$\psi_\beta(\mathbf{r}_\beta) = \psi_\beta(\mathbf{r}_\beta + \ell_x), \quad \text{para } \psi_\beta = \mathbf{v}_\beta^* \cdot \bar{p}_\beta^* \quad (7.18d)$$

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (7.18e)$$

donde Re es el número de Reynolds. En este punto, es pertinente mencionar que, debido a que el flujo debe ser inercial en ambas regiones del canal y al mismo tiempo conservar la validez de las ecuaciones microscópicas, se consideró que la altura de la región del medio libre está dada por $L_\eta = 5\ell$ y que la altura de la región del medio poroso es $L_\omega = 10\ell$. De esta manera, la altura total del canal es $L_T = L_\eta + L_\omega = 15\ell$. Con esto en mente, el problema microscópico se resolvió numéricamente usando el software de elementos finitos COMSOL Multiphysics 5.5. Se utilizó una malla triangular libre no estructurada, y se escogió el resolvidor PARDISO. Se realizaron pruebas de malla para garantizar que los resultados fueran independientes del número de elementos.

En la figura 7.5 se muestran ejemplos de las líneas de corriente junto coloreadas con la magnitud de la velocidad local en la frontera medio libre/medio poroso. Los cálculos son para la estructura del medio poroso de círculos en línea, $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ y diferentes valores Re . Como se esperaba, las velocidades más grandes se encuentran en la región del medio libre y las más pequeñas se encuentran en el medio poroso para cualquier valor de Re . Nótese que el flujo es paralelo y unidireccional para las posiciones dadas por $y > \ell$, mientras que tiene un carácter bidimensional para las posiciones dadas por $y < \ell$. Además, se aprecia que las líneas de corriente cambian al incrementar el valor de Re , siendo más evidente para $Re > 10^2$. Esto muestra la presencia de efectos inerciales en los campos de la velocidad local. Cabe remarcar que estos efectos inerciales deben ser capturados en los coeficientes efectivos para que las ecuaciones macroscópicas describan satisfactoriamente los perfiles de velocidad promedio. Estas observaciones son aplicables para las otras estructuras de medio poroso, cuyas líneas de corriente se muestran en la figura 7.6.

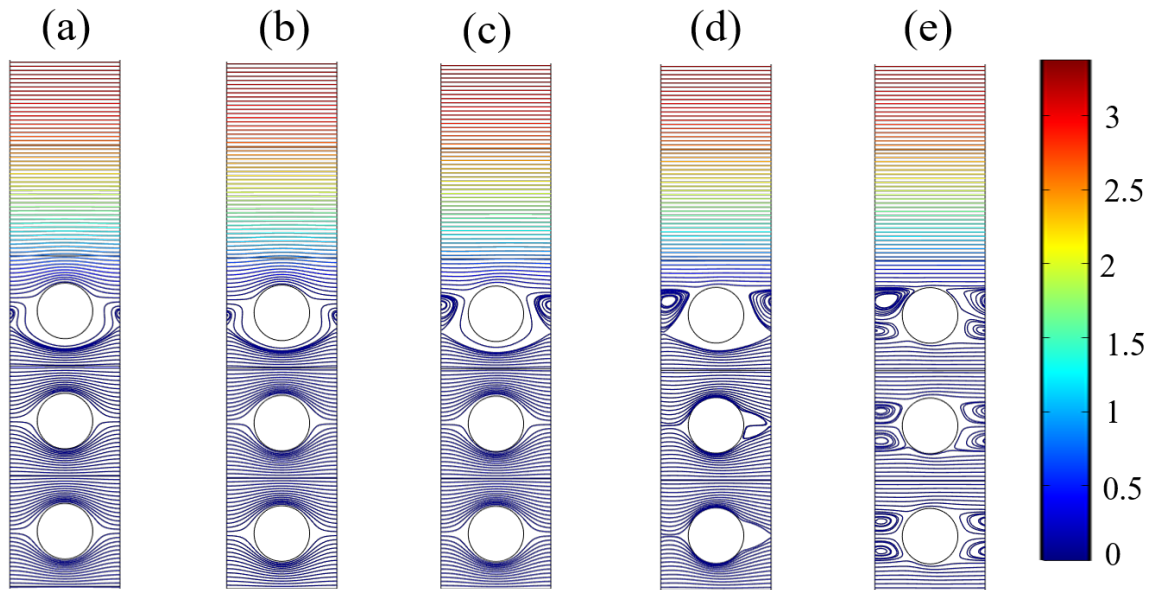


Figura 7.5: Ejemplo de las líneas de corriente coloreadas con la magnitud de velocidad local en la frontera medio libre/medio poroso para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ y cinco valores de Re : (a) 0.1, (b) 1, (c) 10^2 , (d) 10^3 y (e) 10^4 . Estos perfiles son para el medio poroso compuesto de un arreglo periódico de cilindros alineados de sección transversal circular. En todos cálculos se utilizó a $L_\eta = 5\ell$ y $L_\omega = 10\ell$.

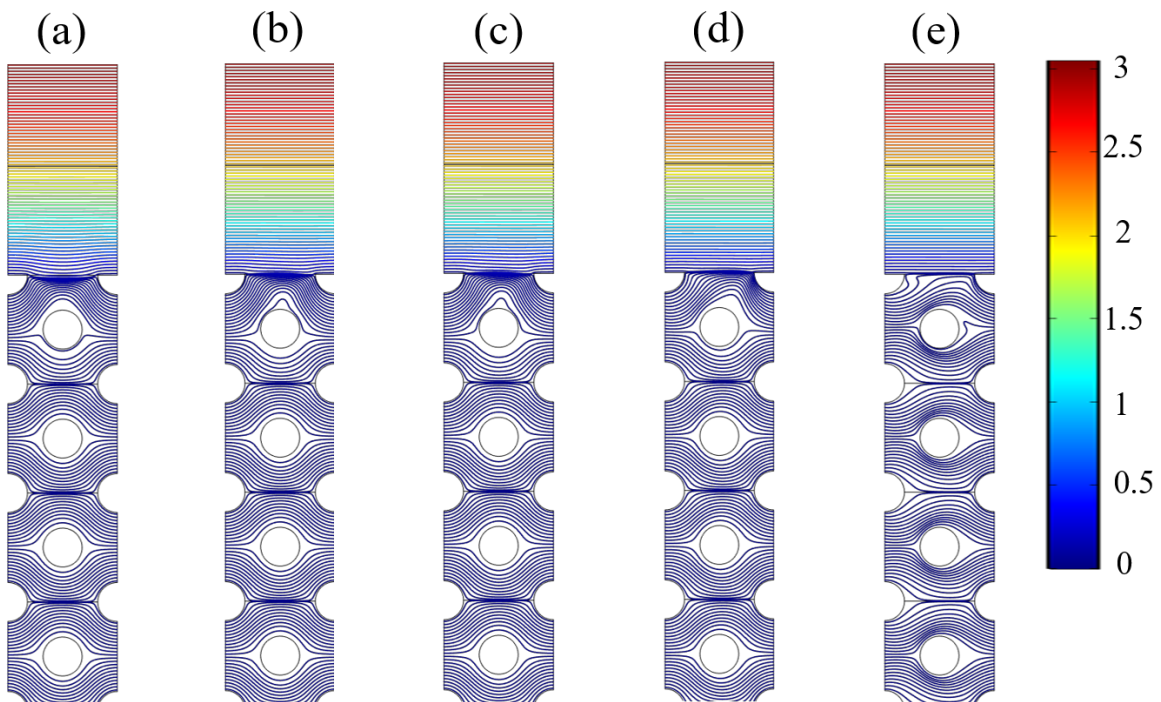


Figura 7.6: Ejemplo de las líneas de corriente coloreada con la magnitud de velocidad local en la frontera medio libre/medio poroso para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ y cinco valores de Re (a) 0.1, (b) 1, (c) 2, (d) 10^3 y (e) 10^4 . Estos perfiles son para el medio poroso compuesto de un arreglo periódico de cilindros escalonados de sección transversal circular. En todo los cálculos se utilizó $L_\eta = 5\ell$ y $L_\omega = 10\ell$.

7.5.2 Coeficiente de permeabilidad aparente H_β y de inercial total C_β

Una vez obtenidos los campos de la velocidad local y las desviaciones de la presión local, se calcularon los coeficientes efectivos usando las Ecs. (7.14). Esto requiere calcular cada uno de los términos involucrados en dichas ecuaciones con respecto a una región de promediado. Para llevar a cabo esto, debido a la forma del dominio de solución del problema local, se definió una región de promediado de sección transversal rectangular, de ancho ℓ y de altura $2r_0$, donde se consideró que $r_0 = \ell/2$ puesto que la altura del canal es $L_T = 15\ell$. Cabe destacar que, debido a que la altura del sistema es únicamente un orden de magnitud más grande que el de la región de promediado r_0 , en este caso no se hace un análisis del efecto de r_0 sobre las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, tal como en los capítulos anteriores. Sin embargo, se espera que haya un efecto del tamaño de r_0 sobre dichos coeficientes. En su lugar, a continuación, se hace un análisis sobre la dependencia de los coeficientes efectivos con el valor de Re . Además, debido a la periodicidad de la geometría del sistema en la dirección horizontal, los principales cambios de los coeficientes son en la dirección vertical del canal (coordenada $-y$). Más aún, puesto que el flujo del fluido a través del canal es unidireccional en la dirección horizontal y completamente desarrollado, la única componente necesaria de los coeficientes efectivos para resolver a las GTEs son las componentes $H_\beta = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{H}_\beta \cdot \mathbf{e}_x$ y $C_\beta = \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x : \mathbf{H}_\beta : \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x$.

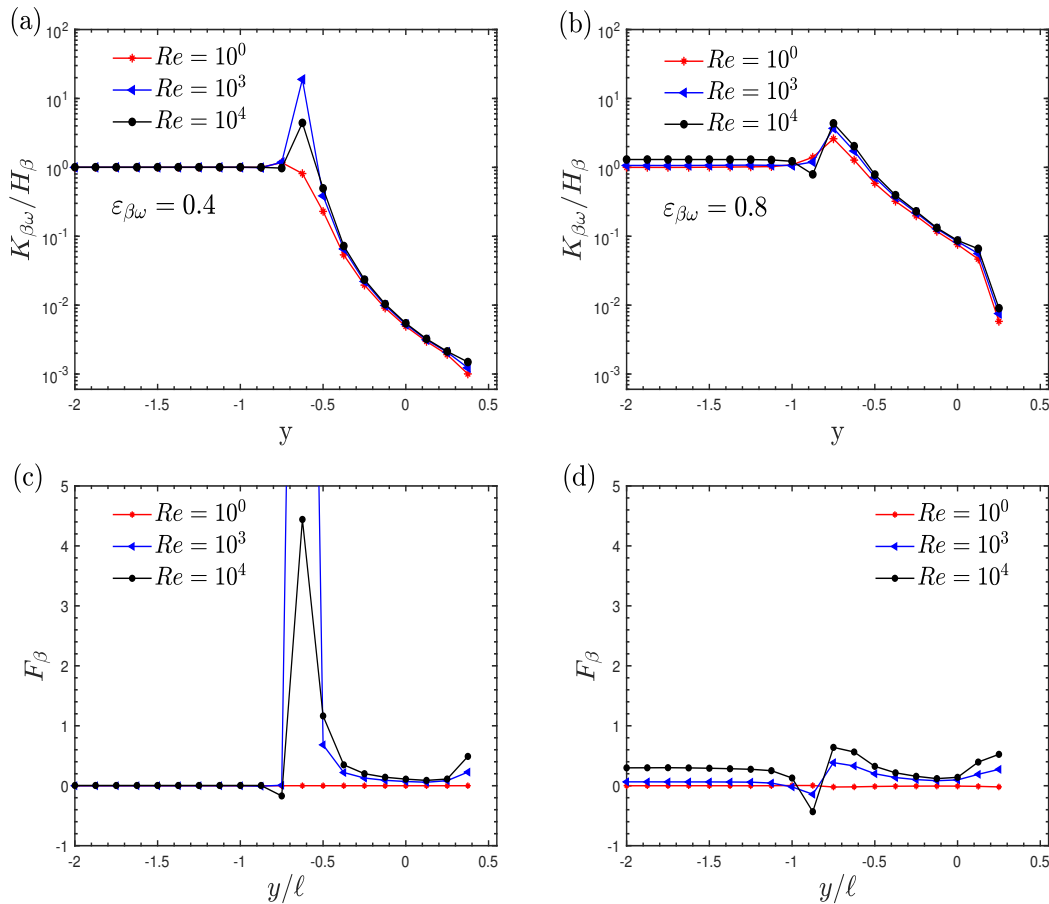


Figura 7.7: Variaciones espaciales de la componente H_β del tensor de permeabilidad aparente y componente F_β del tensor de Forchheimer usando diferentes valores de Re para dos valores de $\epsilon_{\beta\omega}$. Estos cálculos son para el medio poroso compuesto de un arreglo periódico de cilindros alineados de sección transversal circular.

En las figuras 7.7(a) y (b) se muestran las variaciones espaciales del inverso de la componente

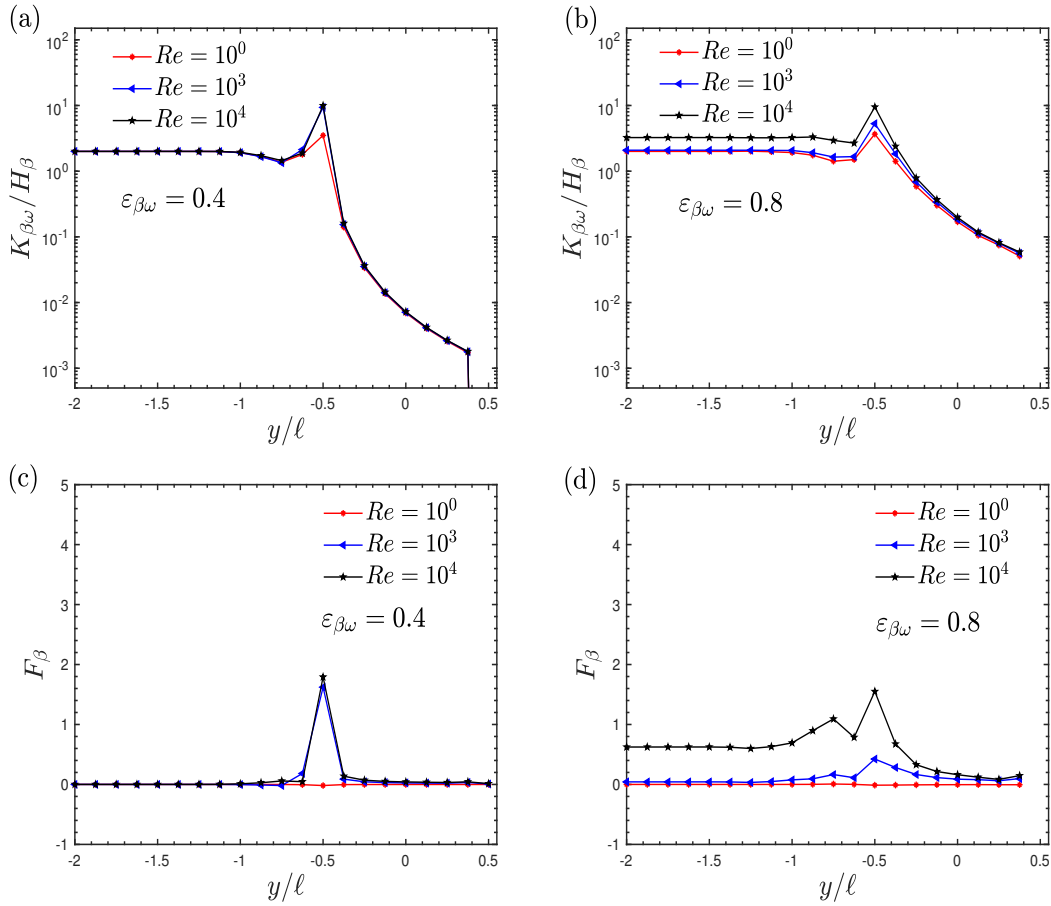


Figura 7.8: Variaciones espaciales de la componente H_β del tensor de permeabilidad aparente y componente F_β del tensor de Forchheimer usando diferentes valores de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estos cálculos son para el medio poroso compuesto de un arreglo periódico de cilindros escalonados de sección transversal circular.

$H_\beta = H_{\beta,xx}$ del tensor de permeabilidad aparente obtenidas de . Estas predicciones son para la estructura del medio poroso hecho de círculos en línea, fijando tres valores diferentes de Re y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Nótese que esta es la única componente del tensor necesaria para predecir los perfiles de velocidad promedio en el sistema medio libre/medio poroso aquí considerado, por lo que no se presentan las predicciones de las componentes restantes. Por un lado, se puede observar que, las variaciones de H_β^{-1} son similares a las de K_β^{-1} mostradas en la figura 6.7. En todos los casos, H_β^{-1} crece para luego decrecer súbitamente, alrededor de $y = -0.5\ell$, de su valor en el seno del medio poroso definido en $y \approx -(r_0 + 0.5\ell)$ al valor en la región de medio libre definido en $y \approx r_0$. Esto indica que la zona de cambios de H_β^{-1} está restringido por las posiciones dadas por $-(\ell + r_0) \leq y \leq r_0$, por lo que tiene un tamaño de $\delta_{H_\beta} \approx 2r_0 + \ell$. Lo anterior es similar al tamaño de la zona de cambios de las variaciones de K_β^{-1} . Por otro lado, se puede apreciar que los valores de H_β^{-1} incrementan al aumentar el valor de Re . Para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$, los valores de H_β^{-1} incrementan únicamente desde el límite inferior de primera celda unitaria dentro del medio poroso hasta $y \approx r_0$, mientras que para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ los valores de H_β^{-1} incrementan en todas partes. Esto implica que las resistencias al flujo del fluido incrementan cuando los efectos inerciales se vuelven importantes, lo cual sucede para $Re > 10^2$ en todos los casos, pero principalmente para valores $\varepsilon_{\beta\omega}$ cercanos a uno.

A continuación, es pertinente recordar que el coeficiente de permeabilidad aparente se puede

descomponer en el tensor de permeabilidad intrínseco y el coeficiente de Forchheimer, tal como se muestra en la Ec. (7.12). Por un lado, la variación de K_β está dada por aquella de H_β para cuando $Re \ll 0$, tal como se muestra en las figuras 7.7(a) y (b). Por su parte, las variaciones de F_β tomando los mismos valores anteriores de Re_p y $\varepsilon_{\beta\omega}$ se muestran en las figuras 7.7(c) y (d). Analizado estos perfiles, se observa que, en todos los casos, los valores de F_β incrementan al aumentar el valor de Re , siendo estos incrementos más evidentes para $Re > 10^2$. En particular, para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y un valor fijo de Re , F_β varía únicamente en la inter-región medio libre/medio poroso, de su valor dentro del medio poroso en $y \approx -(0.25\ell + r_0)$ a su valor en el medio libre en $y \approx r_0$. En contraste, para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ y un valor fijo de Re , F_β incrementa en todos lados, permaneciendo constante en la mayor parte del medio poroso y varía suavemente en la inter-región medio libre/medio poroso de una región a otra. Lo anterior muestra que para ambos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$, los mayores efectos inerciales sobre las variaciones de F_β se presentan en las primeras celdas unitarias del medio poroso, mostrando que la zona de cambios abruptos de F_β es similar a la de H_β , como se describió líneas arriba.

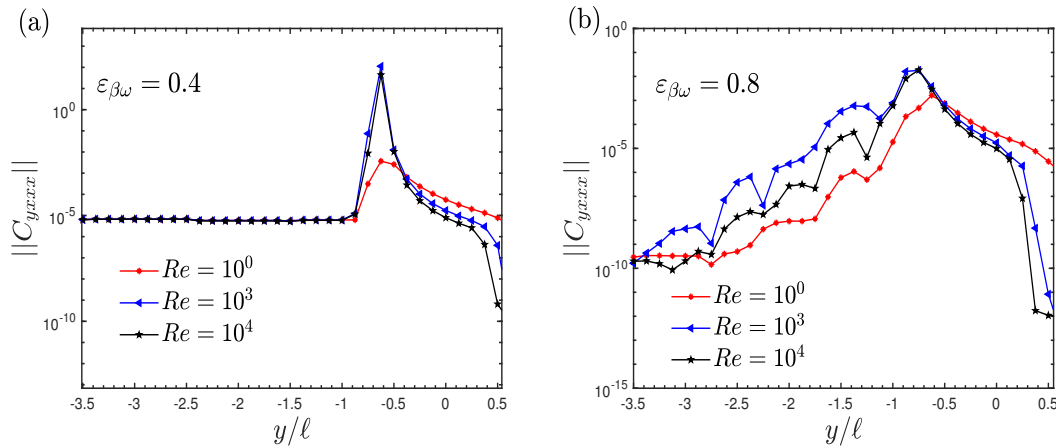


Figura 7.9: Variaciones espaciales de la componente C_β del tensor de inercia total en la inter-región $\eta\omega$ para diferentes valores de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estos cálculos son para el medio poroso compuesto de un arreglo periódico de cilindros alineados de sección transversal circular.

Por último, en la figura 7.9 se muestran las variaciones espaciales de la componente $C_\beta = C_{\beta yxxx}$ del tensor de inercia total para la estructura del medio poroso de cilindros en línea, fijando diferentes valores de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Por un lado, se puede apreciar que este coeficiente varía de su valor en el seno del medio poroso a su valor en la región de medio libre en zonas diferentes. Para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y un valor de Re , el coeficiente C_β varía en las posiciones dadas por $-(0.5\ell + r_0) \leq y \leq r_0$, mientras que para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ y un valor de Re , el coeficiente C_β varía en las posiciones dadas por $-(3\ell + r_0) \leq y \leq r_0$. Esto muestra que el efecto del flujo en el medio libre dentro del medio poroso es mayor al incrementar el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$, y así como al incrementar el valor Re . Por otro lado, se puede apreciar que en todos los casos los valores C_β se encuentran en un rango que va desde 10^{-5} a 10^{-2} . Esto sugiere que la contribución del término inercial en la GTE de cantidad de movimiento se puede despreciar al menos para la sección del canal aquí estudiada. Esto se atribuye principalmente a que el estudio está restringido a la zona del canal donde el flujo es unidireccional y completamente desarrollado. Sin embargo, se espera que este coeficiente sea importante en las entradas y salidas del canal, donde el flujo en la macroescala es claramente bidimensional. Por lo tanto, las variaciones de

este coeficiente no se utilizan en la solución del ODA. Estas observaciones pueden aplicarse para las variaciones de C_β con la estructura del medio poroso de círculos escalonados mostrados en la figura 7.10.

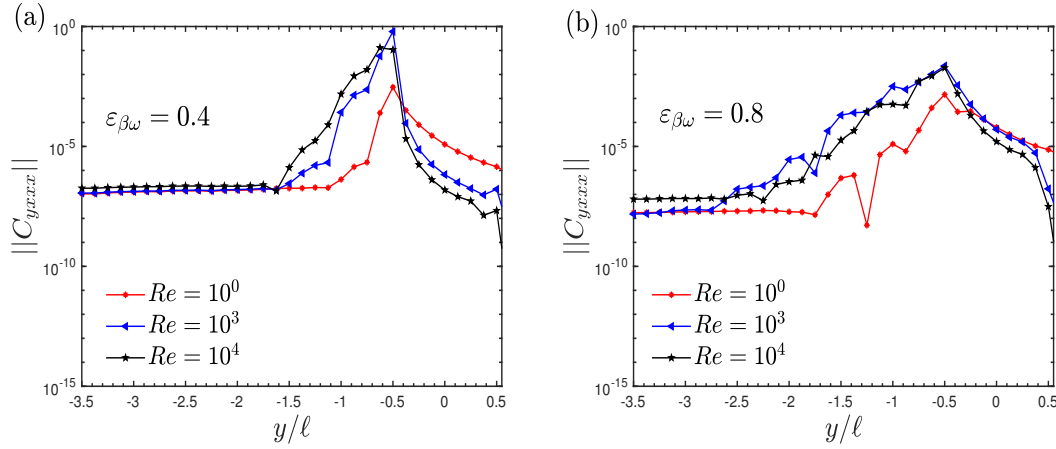


Figura 7.10: Variaciones espaciales de la componente C_β del tensor de inercia total en la inter-región $\eta\omega$ para diferentes valores de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estos cálculos son para el medio poroso compuesto de un arreglo periódico de cilindros escalonados de sección transversal circular.

7.6 Solución del modelo de un dominio

Una vez obtenidas las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, se evaluaron las capacidades predictivas de las ecuaciones macroscópicas desarrolladas líneas arriba. Esto se llevó a cabo al comparar los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución de las GTE en un ODA con aquellos obtenidos de promediar a los perfiles de velocidad local resultantes de las simulaciones a la escala de poro. Por un lado, el ODA está dado por las Ecs. (7.10), las cuales para condiciones de flujo unidireccional y completamente desarrollado, y en forma adimensional, se pueden escribir como

$$0 = -\frac{d\langle p_\beta^* \rangle^\beta}{dx^*} + \varepsilon_\beta^{-1}(y^*) \frac{d^2 \langle v_{\beta x}^* \rangle}{dy^{*2}} - \varepsilon_\beta^{-1}(y^*) \frac{d\varepsilon_\beta}{dy^*} \frac{d}{dy^*} \left(\varepsilon_\beta^{-1}(y^*) \langle v_{\beta x}^* \rangle \right) - H_\beta^{*-1}(y^*) \langle v_{\beta x}^* \rangle \quad (7.19a)$$

Además, esta ecuación está sujeta a las condiciones de frontera en la parte superior e inferior del canal dadas por

$$\langle v_{\beta x}^* \rangle = 0 \quad \text{at} \quad y^* = L_\eta/\ell \quad (7.19b)$$

$$\langle v_{\beta x}^* \rangle = 0 \quad \text{at} \quad y^* = -L_\omega/\ell \quad (7.19c)$$

En estas ecuaciones se tomaron en cuenta las variables adimensionales dadas por

$$\langle v_{\beta x}^* \rangle = \frac{\langle v_{\beta x} \rangle}{v_{ref}}; \quad \langle p_\beta^* \rangle^\beta = \frac{\langle p_\beta \rangle^\beta}{p_{ref}}; \quad x^* = \frac{x}{\ell}, \quad y^* = \frac{y}{\ell}; \quad H_\beta^* = \frac{H_\beta}{\ell^2} \quad (7.20)$$

Cabe recordar que para generar el flujo se impuso una caída de presión constante, la cual debido a las variables adimensionales anteriores se puede expresar como $-d\langle p \rangle^\beta / dx^* = 1$. De esta manera,

el ODA para el flujo inercial en el canal está dado por la Ec. (7.19a) y las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (7.19b) y (7.19c). Debido a la dependencia no trivial de los coeficientes con la posición, el ODA se resolvió numéricamente. Se utilizó un esquema de diferencias finitas (DF) para discretizar a las ecuaciones. En específico, las derivadas de primer y segundo orden se discretizaron utilizando DF centradas. Además, dada la linealidad del problema, se utilizó un método de eliminación Gaussiana para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes. Se realizaron pruebas de convergencia de tal forma que la solución fuese independiente del número de nodos. El tamaño de paso utilizado es $\Delta y^* = 1 \times 10^{-3}$, por lo que el número de nodos es $N_y^* = (L_\eta + L_\omega) / (\ell \Delta y^*)$.

En la figura 7.11 se muestran los perfiles de velocidad promedio en el canal parcialmente ocupado por el medio poroso obtenidos de la solución del ODA y de simulaciones a la escala de poro tomando diferentes valores de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estos perfiles son para la estructura del medio poroso de círculos alineados. En general, se puede notar que los valores de la velocidad promedio decrecen al incrementar el valor de Re , aunque no en todos lados. Por un lado, para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$, los valores de la velocidad promedio permanecen idénticos en el medio poroso, decrecen en la inter-región medio libre/medio poroso, y decrecen en la región del medio libre. Por su lado, para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$, los valores de la velocidad promedio decrecen en todos lados. Lo anterior se atribuye al incremento de las resistencias debidas a las fuerzas inerciales en la microescala, lo cual se puede apreciar en el incremento de los valores de la relación dada por $K_{\beta\omega}/H_\beta$ mostradas en la figura 7.7, principalmente para valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ cercanos a la unidad. Por otro lado, es interesante advertir que los perfiles de velocidad obtenidos de la solución del ODA reproducen satisfactoriamente a aquellos obtenidos de las simulaciones a la escala de poro en todos lados del sistema para cualquier valor de Re^* y $\varepsilon_{\beta\omega}$. Esto sugiere que el ODA, cuando las GTEs se desarrollan a partir del método del promedio volumétrico, junto con una determinación apropiada de los coeficientes efectivos, puede ser utilizado para predecir la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso. Más aún, esto indica que la GTE de cantidad de movimiento debe incluir términos adicionales tales como una primera y una segunda correcciones de Brinkman y así como también un término de resistencias al flujo del fluido con la forma de un término de Darcy con una permeabilidad aparente. Todas estas observaciones son aplicables para las otras estructuras del medio poroso, que en aras de la brevedad no se presentan en este capítulo.

Con el fin de tener una perspectiva más cuantitativa sobre las capacidades del ODA para predecir a los perfiles de velocidad, se calculó el porcentaje de error relativo de las predicciones del ODA con respecto a las obtenidas de las PSSs, usando una ecuación similar a la Ec. (5.25). Los valores del porcentaje de error se muestran en la tabla 7.1 para diferentes valores de Re y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estas mediciones del error se hicieron para las tres estructuras del medio poroso mostradas en la figura 7.4. Como se puede ver, en todos los casos el porcentaje de error es $O(10^{-3})$, lo cual confirma que el ODA, cuando las GTEs se obtienen a partir del método del promedio volumétrico y con una apropiada predicción de los coeficientes efectivos, puede describir satisfactoriamente el flujo inercial entre un medio libre y un medio poroso. Sobre esto, cabe señalar que un aspecto relevante es la predicción de los coeficientes efectivos, ya que no basta solo con tener la forma correcta de las GTEs de masa total y de cantidad de movimiento, lo cual se muestra en la siguiente sección.

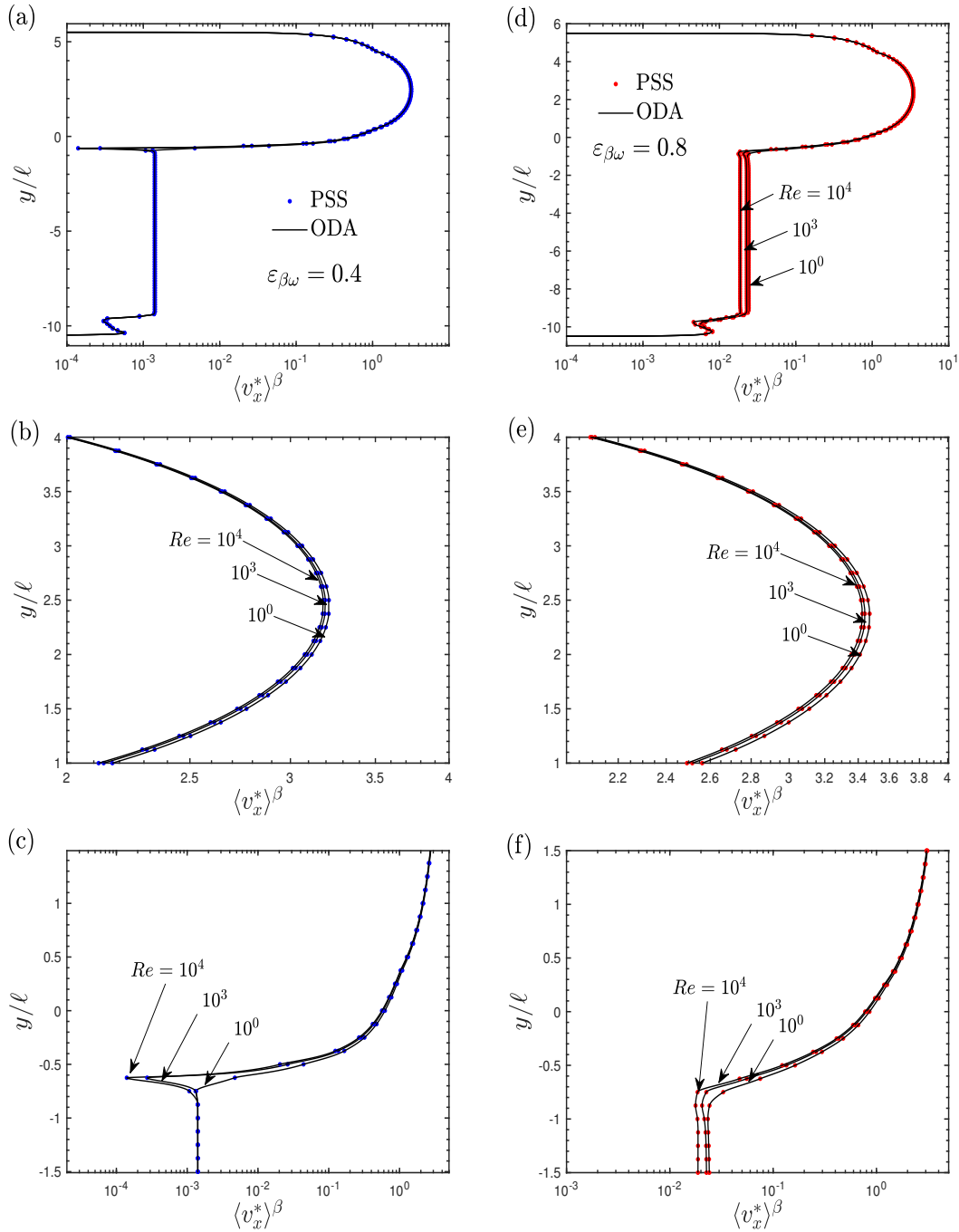


Figura 7.11: Perfiles de velocidad promedio en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso obtenidos de la PSS y de la solución del ODA tomando diferentes valores de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a)-(c) 0.4 y (d)-(f) 0.8. Los perfiles mostrados son (a) y (d) en todo el canal, (b) y (e) en el medio libre y (c) y (f) la inter-región medio libre/medio poroso. Los cálculos son para la estructura del medio poroso de cilindros alineado de sección transversal circular, $L_\omega = 10\ell$, $L_\eta = 5\ell$ y $r_0 = 0.5\ell$.

7.7 Comparación con otros modelos

En la sección anterior se obtuvieron las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, principalmente en la inter-región medio libre/medio poroso, a partir de información proveniente de PSS. Sin embargo, entre los estudios reportados en la literatura, estos coeficientes se predicen

Tabla 7.1: Porcentaje de error relativo del ODA para predecir los perfiles de velocidad promedio en todo el canal parcialmente ocupado por un medio poroso. Los errores medidos son para tres estructuras del medio poroso con dos valores diferentes de $\epsilon_{\beta\omega}$.

Re	cuadrado centrado		círculo centrado		círculos escalonados	
	$\epsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\epsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\epsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\epsilon_{\beta\omega} = 0.8$	$\epsilon_{\beta\omega} = 0.4$	$\epsilon_{\beta\omega} = 0.8$
1	4.09×10^{-2}	4.81×10^{-2}	3.95×10^{-3}	3.89×10^{-3}	4.23×10^{-3}	3.89×10^{-3}
2	7.18×10^{-2}	7.21×10^{-2}	3.95×10^{-3}	3.89×10^{-3}	4.22×10^{-3}	3.89×10^{-3}
5	1.63×10^{-1}	1.43×10^{-1}	3.85×10^{-3}	3.89×10^{-3}	4.23×10^{-3}	3.89×10^{-3}
10	3.10×10^{-1}	2.56×10^{-1}	4.03×10^{-3}	3.9×10^{-3}	4.36×10^{-3}	3.9×10^{-3}
15	4.50×10^{-1}	3.62×10^{-1}	7.06×10^{-3}	3.9×10^{-3}	5.15×10^{-3}	3.9×10^{-3}
15	4.50×10^{-1}	3.62×10^{-1}	4.44×10^{-3}	3.9×10^{-3}	5.27×10^{-3}	3.92×10^{-3}

frecuentemente utilizando expresiones heurísticas. Como se mencionó anteriormente, estas expresiones no garantizan una predicción precisa de los coeficientes efectivos y por consiguiente de los perfiles de velocidad a partir de la solución de un ODA en todo el rango de condiciones de flujo y geometrías del medio poroso. A continuación se evalúan tres alternativas ampliamente utilizadas en la literatura para predecir a $H_{\beta,\eta\omega}$. La primera alternativa consiste en suponer una variación lineal de su valor en el seno del poroso localizado en $y = -r_0$ a aquel en la región del medio libre localizado en $y = r_0$. Esto conduce a la siguiente expresión

$$H_{\beta,\eta\omega}^{-1} = \frac{H_{\beta,\omega}^{-1}}{2} \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) \quad \text{para} \quad -r_0 \leq y \leq r_0 \quad (7.21)$$

Esta variación ha sido utilizada para predecir a $H_{\beta\eta\omega}$ en una cavidad cuadrada parcialmente ocupada por un medio poroso por Luminari *et al.* (2019). La segunda alternativa para predecir a H_{β} consiste en suponer que este coeficiente cambia abruptamente en $y = 0$ de su valor en el seno del medio poroso a aquel en la región del medio libre, lo cual da lugar a

$$H_{\beta\eta\omega}^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y \leq r_0 \\ H_{\beta\omega}^{-1} & \text{si } -r_0 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

Esta ecuación ha sido utilizada para describir el flujo alrededor y a través de un obstáculo poroso por Bruneau and Mortazavi (2004, 2008); Bruneau *et al.* (2010); Cimolin and Discacciati (2013). Una tercera alternativa para predecir a H_{β} se puede obtener de la bien conocida ecuación empírica de Ergun, la cual está dada por

$$-\frac{d\langle p_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta}}{dx} = \mu_{\beta} K_{\beta\omega, BK}^{-1} + \rho K_{\omega, BP}'^{-1} \|\langle v_{\beta\omega x} \rangle\| \langle v_{\beta\omega x} \rangle \quad (7.23)$$

donde $K_{\beta\omega}$ es la permeabilidad intrínseca dada por la ecuación de Blake-Kozeny (BK) y $K' = \beta^{-1}$ es el inverso del coeficiente de Forchheimer dado por la ecuación de Burke-Plummer (BP). Al escribir esta ecuación en la forma de la ley de Darcy conduce a

$$-\frac{d\langle p_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta}}{dx} = \mu_{\beta} H_{\beta\omega}^{-1} \langle v_{\beta\omega x} \rangle \quad (7.24)$$

donde se tiene que el coeficiente $H_{\beta,\omega}$ está dado por

$$H_{\beta\omega}^{-1} = K_{\beta\omega}^{-1} \left(1 + \frac{K_{\beta\omega} \rho_{\beta} \|\langle v_{\beta\omega x} \rangle\|}{K'_{\omega} \mu_{\beta}} \right) \quad (7.25)$$

De esta manera, al utilizar las variaciones espaciales de $\varepsilon_{\beta}(y)$ en lugar de $\varepsilon_{\beta\omega}$ en las ecuaciones de BK y BP, se obtiene una expresión para las variaciones de $H_{\beta\eta\omega}(y)$, la cual está dada por

$$H_{\beta\eta\omega}^{-1}(y) = K_{\beta,BK}^{-1}(y) \left(1 + \frac{K_{\beta,BK}(y) \rho_{\beta} \|\langle v_{\beta x} \rangle\|}{K'_{BP}(y) \mu_{\beta}} \right) \quad \text{para } -r_0 \leq y \leq r_0 \quad (7.26)$$

Esta extensión de la ecuación de Ergun es la más utilizada para describir el flujo en reactores de lecho empacado con baja relación de diámetro a partícula ($d_t/d_p < 8$), debido a que la baja relación de d_t/d_p conduce a obtener abruptos cambios de los coeficientes efectivos, tal como lo describen Uribe *et al.* (2021); Hernandez-Aguirre *et al.* (2022b,a). De esta manera, se tienen tres ecuaciones empíricas para predecir a las variaciones espaciales de $H_{\beta\eta\omega}(y)$, las cuales se comparan a continuación.

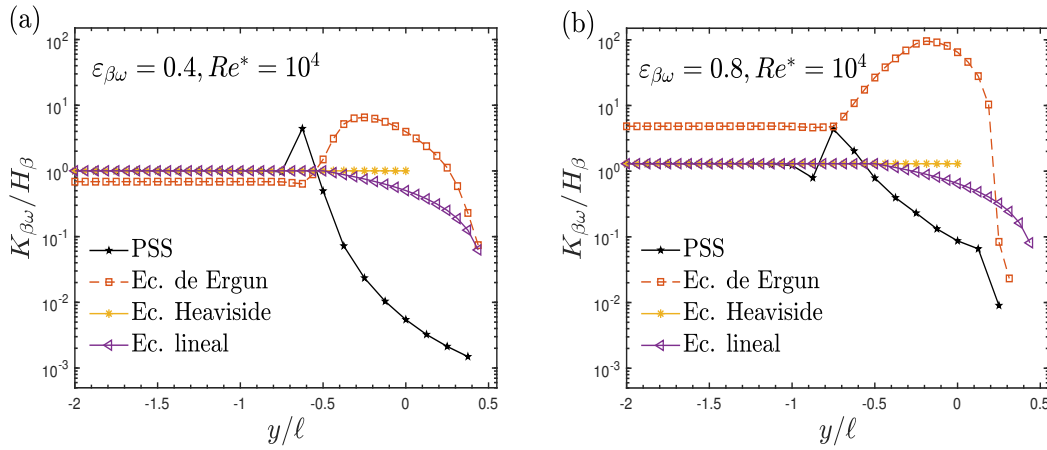


Figura 7.12: Comparación de las variaciones espaciales de la componente H_{β} del tensor de permeabilidad aparente en la inter-región medio libre/medio poroso obtenidas de expresiones heurísticas y de la PSS para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a) 0.4 y (b) 0.8. Las predicciones obtenidas de la PSS son aquellas usando el medio poroso compuesto de un arreglo de cilindros alineados de sección transversal circular.

En la figura 7.12 se muestra la comparación de las variaciones espaciales de $H_{\beta} = H_{zz}$ obtenidos las ecuaciones heurísticas mencionadas arriba para $Re = 10^4$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Además, en la misma figura se presentan las variaciones de H_{β} obtenidas de la información de la PSS, usando la estructura del medio poroso de círculos escalonados. De estos resultados se puede apreciar que las predicciones de las ecuaciones heurísticas se encuentran alejadas entre ellas mismas y de las obtenidas de la PSS para ambos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Nótese que las predicciones obtenidas de una función lineal son las más cercanas a las obtenidas de la PSS, seguidas por las de la función Heaviside y por último por aquellas de la ecuación de Ergun. Además, se debe notar que las predicciones de la extensión de la ecuación de Ergun subestima los valores de H_{β} para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y sobreestima aquellos para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$. Lo anterior sugiere que las predicciones de las ecuaciones heurísticas son incapaces de capturar la microestructura del medio poroso, por lo que se espera encontrar desviaciones en los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución del ODA cuando se utilizan estas predicciones. Las

observaciones anteriores son aplicables para otros valores de Re , $\varepsilon_{\beta\omega}$ y otras microestructuras del medio poroso.

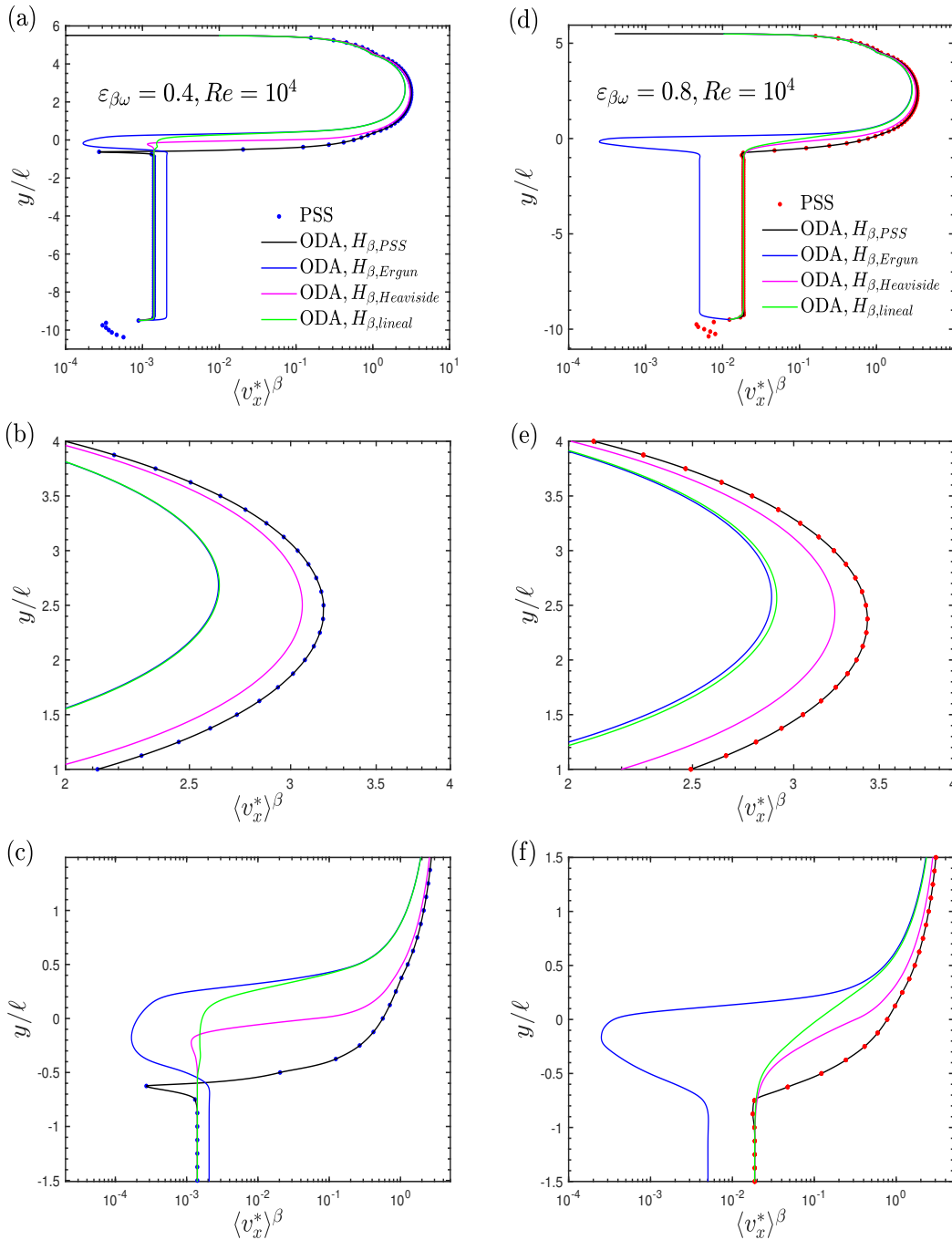


Figura 7.13: Comparación de los perfiles de velocidad promedio en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso obtenidos de la PSS y de la solución del ODA usando diferentes predicciones de H_β para $Re = 10^4$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a)-(c) 0.4 y (d)-(f) 0.8. Los perfiles son ((a) y (d)) en todo el canal, ((b) y (e)) en la región del medio libre y ((c) y (f)) en la inter-región medio libre/medio poroso. En todos los cálculos se utilizó $L_\eta = 5\ell$, $L_\omega = 10\ell$ y $r_0 = 0.5\ell$. Las predicciones obtenidas de la PSS son aquellas usando el medio poroso compuesto de un arreglo de cilindros alineados de sección transversal circular.

A continuación, usando las predicciones de H_β obtenidas de las ecuaciones heurísticas, se resolvió el ODA dado por las Ecs. (7.19). En la figura 7.13 se presenta los perfiles de velocidad promedio en el

canal obtenidos de la solución del ODA para $Re = 10^4$ con dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Además, en la misma figura se presentan los perfiles obtenidos del ODA usando las variaciones de H_β resultantes de las PSS y los perfiles obtenidos de la PSS. Es interesante notar que los perfiles de velocidad de la solución del ODA con las predicciones empíricas de H_β presentan desviaciones importantes en la inter-región medio libre/medio poroso, las cuales afectan a aquellas en la región del medio libre. En específico, los perfiles obtenidos usando H_β de la función Heaviside son los más cercanos a los obtenidas mediante la PSS, seguidos por aquellos usando la función lineal y por último por aquellos usando la ecuación de Ergun. Esto confirma que las variaciones espaciales de H_β ampliamente utilizadas en la literatura no son capaces capturar los efectos de la microestructura del medio poroso y de las fuerzas inerciales en la macroescala. Por lo tanto, las predicciones de H_β proporcionadas en este capítulo y así como la GTE desarrolladas en este capítulo representan una mejora a los ampliamente utilizados en la literatura. Sin embargo, es posible que cálculos adicionales en celdas unitarias en 3D y microestructuras más complejas sean necesarias para confirmar las observaciones antes mencionadas.

7.8 Resumen del capítulo

En este capítulo se revisó el desarrollo de un ODA para el flujo inercial entre un medio libre y un medio poroso. La GTE se desarrolló a partir del promediado y escalamiento del problema de la escala de poro usando el método del promedio volumétrico. En particular, la GTE de cantidad de movimiento contiene dos términos de fuerzas viscosas, un término de fuerzas inerciales y un término de resistencias superficiales con la forma de la ley de Darcy. Además, esta ecuación está en términos de dos coeficientes efectivos, un tensor de cuarto orden y uno de segundo orden, los cuales tienen el objetivo de capturar los efectos de la microestructura del medio poroso y así como de algunas fuerzas inerciales locales en la descripción macroscópica del flujo entre un medio libre y un medio poroso.

En primer lugar, para predecir los coeficientes efectivos se realizaron simulaciones a la escala de poro en dominios representativos de un sistema medio libre/medio poroso usando tres diferentes estructuras periódicas para el medio poroso. En cada estructura se mostró que los coeficientes efectivos permanecen constantes en el seno de cada región y varían abruptamente en la inter-región medio libre/poroso. Además, se mostró la dependencia de estos coeficientes con el número de Reynolds. Esto conduce a concluir que los coeficientes predichos en este capítulo son capaces de capturar efectos de la microestructura del medio poroso y así como también para de las fuerzas inerciales locales.

En segundo lugar, para validar el ODA se compararon los perfiles de velocidad promedio obtenidos de su solución con aquellos obtenidos de promediar los perfiles locales resultantes de las simulaciones a la escala de poro. Se encontró que, para cualquier valor de Re , $\varepsilon_{\beta\omega}$ y estructura del medio poroso, puede predecir los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la PSS con un porcentaje de error relativo varios ordenes menor que uno. Esto permite concluir que la GTE debe incluir términos adicionales como dos términos de fuerzas viscosas y un término de resistencias en la forma de un término de Darcy con una permeabilidad aparente.

Por último, se evaluaron expresiones heurísticas de $H_\beta(y)$ ampliamente utilizadas en la literatura. Este análisis mostró que las expresiones heurísticas son incapaces de capturar los efectos de la microestructura del medio poroso y conducen a perfiles de velocidad promedio con desviaciones importantes de aquellos obtenidos de la PSS. Lo anterior muestra que las expresiones heurísticas

Capítulo 7. Modelo de un dominio de flujo inercial

conducir a obtener predicciones erróneas de los perfiles de velocidad, las cuales a su vez pueden conducir a predicciones erróneas de la transferencia de masa o calor por convección entre un medio poroso y un medio libre.

8. Conclusiones

En este trabajo se revisaron y validaron los desarrollos de dos modelos de un dominio para la transferencia de cantidad de movimiento de un fluido en sistemas compuestos por un medio libre y un medio poroso. Ambos modelos consisten en ecuaciones de transporte generalizadas de masa total y de cantidad de movimiento derivados a partir del promediado y escalamiento de las ecuaciones válidas en la microescala del problema usando una forma no convencional del método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999). El primer modelo describe a la transferencia de cantidad de movimiento en sistemas medio libre/medio poroso para cuando los efectos viscosos son más importantes que los inerciales (*i. e.*, flujo reptante). En este caso, la ecuación de cantidad de movimiento involucra un término de fuerzas normales debidas a la presión, dos términos de esfuerzos viscosos (conocidos como una primera y una segunda corrección de Brinkman a ley de Darcy) y un término de resistencias al flujo del fluido con la forma de la ley Darcy y que contiene un coeficiente de permeabilidad intrínseco. El segundo modelo describe a la transferencia de cantidad de movimiento en sistemas medio libre/medio poroso para cuando los efectos inerciales son más importantes que los viscosos (*i. e.*, flujo inercial). En este caso, la ecuación de cantidad de movimiento involucra, además de los términos de esfuerzos normales y viscosos anteriores, un término de fuerzas inerciales con un coeficiente de inercia y un término de resistencias al flujo del fluido con la forma de la ley Darcy y un coeficiente de permeabilidad aparente. En ambos modelos se abordaron dos cuestionamientos centrales. El primero de ellos es sobre si los dos términos viscosos y el término de Darcy (con el coeficiente de permeabilidad intrínseca o de permeabilidad aparente) en la ecuación de transporte generalizada de cantidad de movimiento son válidos para el estudio del flujo de un fluido entre un medio libre y medio poroso o simplemente son resultado del método de escalamiento utilizado para derivar a dichas ecuaciones. El segundo consiste en cómo deben ser las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos entre un medio libre y un medio poroso, y así como cuál es el efecto del tamaño de una región de promediado sobre ellos. Para llevar a cabo esto, se compararon los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución de

cada modelo con los obtenidos de promediar los perfiles de velocidad local resultantes de realizar simulaciones a la escala de poro.

Con respecto al modelo de un dominio de flujo reptante presentado en el capítulo 6, se encontró que este modelo predice a los perfiles de velocidad entre un medio libre y un medio poroso con porcentajes de error relativo que son $O(1\%)$. Para lograr esto, las dos correcciones de Brinkman a ley de Darcy son cruciales, principalmente en la inter-región entre ambas regiones. Cuando uno de estos términos se desprecia deliberadamente, se introducen importantes desviaciones en la predicción de la velocidad promedio, las cuales son más representativas cuando se desprecia la primera corrección de Brinkman. En específico, al despreciar la primera corrección de Brinkman, los errores son $O(30\%)$, mientras que al despreciar la segunda son $O(10^2\%)$. Por lo tanto, con el fin de alcanzar una predicción precisa de los perfiles de velocidad entre un medio libre y un medio poroso, se recomienda incluir ambas correcciones de Brinkman a la ley de Darcy. Lo anterior elucida la pertinencia de la primera corrección de Brinkman a la ley de Darcy propuesta por Brinkman (1949a,b), donde se tiene que la viscosidad efectiva debe estar dada por $\mu_{eff} = \mu_\beta / \varepsilon_\beta \omega$, lo cual ha sido hasta ahora objeto de gran controversia en la literatura.

Dirigiendo la atención al modelo de un dominio de flujo inercial presentado el capítulo 7, también se encontró que este modelo predice a los perfiles de velocidad promedio entre un medio libre y un medio poroso con porcentajes de error relativo que son $O(10^{-3}\%)$. Para este fin, las dos correcciones de Brinkman a ley de Darcy siguen siendo relevantes, por lo que en este trabajo se recomienda su inclusión. Además, se encontró que el término que tiene el objetivo de capturar las resistencias superficiales al flujo del fluido, debido a la estructura del medio poroso y a fuerzas inerciales locales, es un término con la forma de la ley Darcy con un coeficiente de permeabilidad aparente, y no un término cuadrático como el término de Darcy-Forchheimer, el cual es un término empírico que aparece en los modelos de un dominio de flujo inercial convencionalmente utilizados en la literatura. De hecho, los modelos empíricos resultantes han sido utilizados para estudiar el flujo de un fluido, no solo sobre superficies permeables, sino también en reactores de lecho empacado. En específico, en lechos empacados con una baja relación de diámetro de tubo a partícula (d_t/d_p), tal como lo describen (Das *et al.*, 2018; George *et al.*, 2021; Hernandez-Aguirre *et al.*, 2022b,a). Por lo tanto, los hallazgos de este trabajo pueden trascender a otros sistemas prácticos de ingeniería química.

Por otro lado, se encontró que para obtener una predicción precisa de los perfiles de velocidad entre un medio libre y un medio poroso, ya sea bajo condiciones de flujo reptante o inercial de un fluido, no basta con tener las ecuaciones de transporte generalizadas obtenidas a partir de un desarrollo formal, sino también se requiere contar con las predicciones precisas de los coeficientes efectivos como la porosidad ε_β , la permeabilidad intrínseca K_β o la permeabilidad aparente H_β . Lo anterior se demostró usando dos metodologías para predecir las variaciones espaciales de la permeabilidad y resolviendo los modelos con cada una de estas predicciones. La primera metodología consistió en predecirla a partir de la solución del PCL asociado, mientras que la segunda en predecirla a partir de información proveniente de simulaciones a la escala poro. En el primer caso se encontró que los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución del modelo de un dominio presentan desviaciones en la inter-región medio libre/medio poroso con respecto a los perfiles obtenidos de promediar a los perfiles locales. Esto señaló que el PCL es sólo una alternativa aproximada para predecir a las variaciones espaciales de la permeabilidad. Sin embargo, también se encontró que

el PCL proporciona predicciones más precisas de este coeficiente que las expresiones empíricas y heurísticas extensivamente utilizadas en la literatura (*e. g.*, una función lineal, una función Heaviside, una función hiperbólica, la ecuación de Carman-Kozeny, la ecuación de Blake-Kozeny o ecuación de Burke-Plummer), las cuales conducen a errores que pueden ser $O(10^2\%)$. Por su parte, en el segundo caso, se encontró que los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución del ODA reproducen satisfactoriamente a los obtenidos de promediar a los perfiles locales. Por lo tanto, se sugiere que, cuando realizar simulaciones a la escala de poro no es un curso de acción viable, y hasta que se cuenten con mejores alternativas, la vía del PCL es la mejor alternativa para predecir las variaciones espaciales de la permeabilidad.

Con base en lo anterior, es posible concluir que los términos de esfuerzos viscosos y el término de resistencias con la forma de la ley de Darcy no son únicamente un resultado del método de escalamiento utilizado para derivar las ecuaciones macroscópicas, sino más bien son términos, que se deben incluir para describir satisfactoriamente la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso. En este punto, cabe enfatizar que, incluir o no los términos adicionales en las ecuaciones de macroscópicas puede conducir a desviaciones en las predicciones de los perfiles de velocidad promedio entre un medio libre y un medio poroso, los cuales a su vez pueden cambiar las predicciones de otras cantidades de interés como la transferencia de calor o masa que con frecuencia también están presentes. De esta manera, ambos modelos de un dominio revisados en este trabajo representan una mejora a los comúnmente utilizados en la literatura, lo cual se elucidó comparando las predicciones de los perfiles de velocidad obtenidos con dichos modelos convencionales.

Por último, cabe mencionar que, los resultados presentados en este trabajo corroboran y complementan aquellos presentados por Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a,b); Valdés-Parada *et al.* (2007a, 2009b); Ochoa-Tapia *et al.* (2017). Además, estos resultados constituyen el primer paso a la derivación de condiciones de frontera de salto exactas que completan a un modelo de dos dominios para la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso. Esto se debe a que ahora se tiene la certeza de cómo deben ser las ecuaciones de transporte generalizadas, las cuales son necesarias para desarrollar las condiciones de frontera de salto, tal como se muestra en Valdés-Parada *et al.* (2013). Además, antes de este trabajo se desconocía si estas ecuaciones eran capaces de predecir satisfactoriamente los perfiles de velocidad promedio entre un medio libre y un medio poroso y cómo debían ser las variaciones espaciales de la permeabilidad.

Trabajo a futuro

Desde un punto vista crítico, se reconoce que esta investigación posee los siguientes puntos de oportunidad, los cuales se pueden considerar en trabajos futuros

- Predecir los coeficientes efectivos (*i. e.*, fracción volumétrica, permeabilidad intrínseca y permeabilidad aparente) utilizando estructuras del medio poroso más realistas, obtenidos ya sea experimentalmente o a partir del uso de software especializados.
- Estudiar flujos bi y tridimensionales en dominios compuestos por un medio libre y medio poroso utilizando las GTEs desarrolladas en este trabajo.
- Mostrar la aplicación de las GTEs desarrolladas en esta investigación en sistemas prácticos de ingeniería química. Por ejemplo, lechos empacados, intercambiadores de calor con insertos porosos, sistemas de control pasivo de flujo, por mencionar algunos.
- Desarrollar las condiciones salto, libres de coeficientes ajustables, que completan el modelo de dos dominios para la transferencia de cantidad de movimiento entre un medio libre y un medio poroso.

A. Problema de cerradura de flujo de Stokes

Para cerrar la GTE dada por las Ec. (6.2b), se precisa derivar y resolver formalmente las ecuaciones gobernantes de las desviaciones locales de la velocidad y la presión. Para llevar a cabo esto, de la Ec. (6.4) se deduce que dichas ecuaciones se pueden obtener de restar las Ecs. (6.2a) y (6.2b) a las Ecs. (6.1a) y (6.1b). Al hacer esto, se llega al siguiente resultado

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{A.1b})$$

Además, las condiciones de frontera para las desviaciones se obtienen al introducir la Ec. (6.4) en las Ecs. (6.1c) y (6.1d), lo cual conduce a

$$\text{C. F. 1: } \tilde{\mathbf{v}}_\beta = -\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma,M} \quad (\text{A.1c})$$

$$\text{C. F. 2: } \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{v}_e - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta e} \quad (\text{A.1d})$$

Cabe señalar que, para obtener las ecuaciones anteriores, se ha considerado la siguiente aproximación

$$\langle \Psi \rangle|_{\mathbf{r}_\beta} \approx \langle \Psi \rangle|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.1e})$$

la cual se obtiene al aproximar solo mediante el término de orden cero de una serie de Taylor. Esta aproximación es válida cuando se satisfacen las restricciones de longitud de escala dadas por Whitaker (1999)

$$r_0 \ll L, \quad r_0^2 \ll L^2 \quad (\text{A.1f})$$

Apéndice A. Problema de cerradura de flujo de Stokes

donde r_0 es el tamaño característico de la región de promediado y $L = \min(L_\eta, L_\omega)$ es la longitud más pequeña del sistema completo. Lo anterior tiene dos implicaciones, mientras que la primera de ellas es que las cantidades promedio se pueden considerar como cantidades constantes dentro de la región de promediado o bien tanto en las integrales de superficie como de volumen, la segunda es que las desviaciones locales estarán sujetas a las siguientes restricciones promedio

$$\text{Restricción : } \langle \tilde{\psi} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = 0, \quad \tilde{\psi} = \tilde{\mathbf{v}}_\beta, \tilde{p}_\beta \quad (\text{A.1g})$$

A continuación, se precisa establecer el dominio de solución del problema de las desviaciones. Para hacer esto, se considera las regiones del medio poroso y del medio libre en el sistema aquí estudiado son regiones homogéneas en el sentido Quintard and Whitaker (1987), por lo que se puede suponer que suficientemente lejos de la superficie del medio poroso las desviaciones locales corresponden a las desviaciones del seno de cada región homogénea. Por un lado, en la región del medio libre, a una distancia suficientemente grande por arriba de la superficie del medio poroso, las desviaciones de la velocidad local serán aproximadamente cero. Por el otro lado, en la región del medio poroso, a una distancia suficientemente grande por debajo de la superficie del medio poroso, las desviaciones locales de la velocidad serán igual a las del seno medio poroso. Por lo tanto, el dominio de solución para el problema de las desviaciones puede ser un dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso ($\mathcal{V}_{\eta\omega}$), tal como el que se muestra en la figura A.1. La altura de este dominio representativo debe ser lo suficientemente grande de tal forma que los valores de los coeficientes efectivos medidos con respecto a región de promediado se reduzcan a su valor en el seno de cada región homogénea. De esta forma, en la parte superior e inferior del dominio representativo, se pueden imponer las siguientes condiciones de frontera para las desviaciones locales

$$\text{C. F. 2: } \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } y = h_\eta \quad (\text{A.1h})$$

$$\text{C. F. 3: } \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \tilde{\mathbf{v}}_{\beta\omega} \quad \text{en } y = -h_\omega \quad (\text{A.1i})$$

donde h_λ (con $\lambda = \eta, \omega$) representa la altura de la porción de la región λ contenida en $\mathcal{V}_{\eta\omega} = \mathcal{V}_\eta + \mathcal{V}_\omega$ y $\tilde{\mathbf{v}}_{\beta\omega}$ denota las desviaciones locales de la velocidad en el seno del medio poroso. Además, si se considera que el medio poroso es periódico en las direcciones paralelas a la superficie del medio poroso en una distancia igual a \mathbf{l}_i , se pueden imponer condiciones de periodicidad en las dos direcciones horizontales del dominio representativo dadas por

$$\text{Periodicidad : } \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \quad \psi = \tilde{\mathbf{v}}_\beta, \tilde{p}_\beta \quad i = x, z \quad (\text{A.1j})$$

Con base en lo anterior, las cantidades promedio y su derivadas se pueden considerar como fuentes constantes en el problema de las desviaciones, las cuales en este caso están dadas por $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ and $\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$. Por lo tanto, usando el principio de superposición, la solución formal de las desviaciones locales se puede expresar como

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{B}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_\beta : \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.2a})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{b}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \mathbf{M}_\beta : \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.2b})$$

Apéndice A. Problema de cerradura de flujo de Stokes

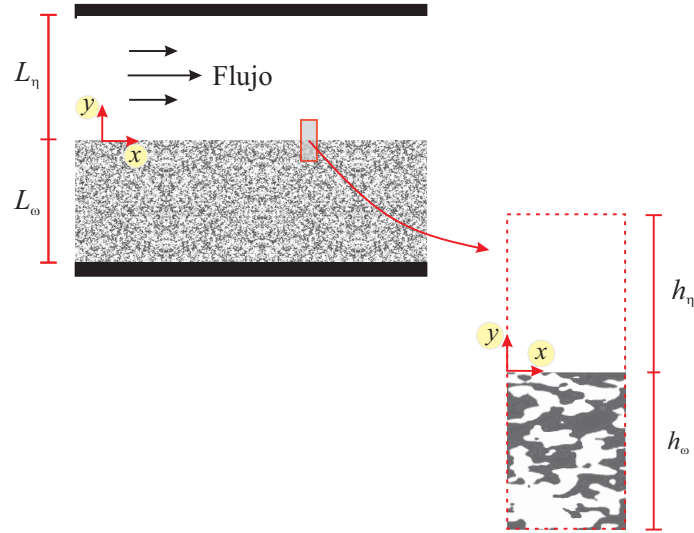


Figura A.1: Dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso para la solución del problema de cerradura local.

donde los coeficientes dados por el vector \mathbf{b}_β y el tensor de segundo orden \mathbf{B}_β que multiplican a los términos fuente se conocen como variables de cerradura local, y describen como se distribuyen las fuentes promedio en las desviaciones locales. Sin embargo, con base en la restricción de longitud de escala dada por

$$\ell^2 \ll r_0 L \quad (\text{A.3})$$

es posible desprestigiar el segundo término fuente con respecto al primero, tal como se muestra en Valdés-Parada *et al.* (2007a). Por lo tanto, la solución formal se puede simplificar a

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{B}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.4a})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{b}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.4b})$$

Al sustituir las Ecs. (A.4) en las Ecs. (A.1) se puede extraer el siguiente problema de valor a la frontera para \mathbf{b}_β y \mathbf{B}_β

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\beta = \nabla \ln \varepsilon_\beta \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{A.5a})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \mathbf{b}_\beta + \nabla^2 \mathbf{B}_\beta - \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \varepsilon_\beta \mathbf{I} + \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{A.5b})$$

$$\text{C. F. 1: } \mathbf{B}_\beta = -\mathbf{I} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{A.5c})$$

$$\text{C. F. 2: } \mathbf{B}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } y = h_\eta \quad (\text{A.5d})$$

$$\text{C. F. 3: } \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_{\beta\omega} \quad \text{en } y = -h_\omega \quad (\text{A.5e})$$

$$\text{Periodicidad: } \boldsymbol{\psi}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{I}_i) = \boldsymbol{\psi}_\beta(\mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\psi}_\beta = \mathbf{B}_\beta, \mathbf{b}_\beta \quad i = x, z \quad (\text{A.5f})$$

$$\text{Restriction: } \langle \boldsymbol{\psi}_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (\text{A.5g})$$

el cual se conoce como el problema de cerradura local. Análogamente, al sustituir la solución formal de las desviaciones en la Ec. (6.9), el tensor de permeabilidad se puede expresar en términos de las

variables de cerradura como

$$-\varepsilon_\beta(\mathbf{x})\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}_\beta + \nabla\mathbf{B}_\beta) dA \quad (\text{A.6})$$

Analizando este problema de cerradura local, se puede notar que este depende únicamente de la geometría del medio poroso en la región de la frontera medio libre/medio poroso, por lo que el tensor de permeabilidad en la inter-región es una propiedad intrínseca, al igual que la permeabilidad del seno del medio poroso. De esta forma, para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad se debe resolver el problema de cerradura dado por las Ecs. (A.4) en el dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso y posteriormente aplicar la Ec. (A.6). Para cumplir con esto, se consideran tres estructuras del medio poroso compuestas por un arreglo periódico de celdas unitarias con partículas sólidas, tal como los que se muestran en la figura 6.4. Sin embargo, debido al carácter periódico del medio poroso, basta con utilizar un dominio con una altura dada por $h_T = h_\eta + h_\omega$ y un ancho igual a la longitud de lado de una celda unitaria ℓ .

Sin embargo, antes de continuar, se debe notar que el problema de cerradura dado por las Ecs. (A.5) involucra un ecuación integrodiferencial, por lo que su solución puede ser muy complicada de obtener. Para superar este problema, es conveniente utilizar el cambio de variables sugerido por Whitaker (1999)

$$\mathbf{d}_\beta = \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}); \quad \mathbf{D}_\beta = \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{B}_\beta + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

el cual permite escribir el problema de cerradura local como

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{A.8a})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla\mathbf{d}_\beta + \nabla^2\mathbf{D}_\beta + \mathbf{I} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{A.8b})$$

$$\text{C. F. 1: } \mathbf{D}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{A.8c})$$

$$\text{C. F. 2: } \frac{\partial\mathbf{D}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad \text{en } y = h_\eta \quad (\text{A.8d})$$

$$\text{C. F. 3: } \frac{\partial\mathbf{D}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad \text{en } y = -h_\omega \quad (\text{A.8e})$$

$$\text{Periodicidad: } \psi_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \psi_\beta(\mathbf{r}), \quad \psi_\beta = \mathbf{D}_\beta, \mathbf{d}_\beta \quad i = x, z \quad (\text{A.8f})$$

$$\text{Restriction: } \langle \psi_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (\text{A.8g})$$

Además, el tensor de permeabilidad se puede calcular a partir de la siguiente expresión

$$\mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{D}_\beta \rangle \quad (\text{A.9})$$

Nótese que, debido a que en el seno del medio poroso los campos de las variables de cerradura son periódicas en el plano xy y simétricas en la dirección vertical, la condición de frontera en $y = h_\omega$ se ha reemplazó por una condición de frontera de simetría, la cual está dada por la Ec. (A.8e). Además, debido a que la permeabilidad intrínseca adquiere un valor infinito en el seno del medio libre, el campo de las variables de cerradura deben ser también infinito, por lo que la condición de frontera en

$y = h_\eta$ se ha reemplazado por la condición de frontera donde la derivada de la variable \mathbf{D}_β es igual a cero, la cual está dada por la Ec. (A.8d). Con referencia a lo anterior, el cambio de condición de frontera en parte inferior puede justificarse analizando el campo de la variable de cerradura local \mathbf{D}_β en el seno del medio poroso. Sin embargo, se reconoce que el uso de la condición de frontera en la parte superior del dominio representativo es más por conveniencia que una necesidad, lo cual se debe a que la solución del problema dado por las Ecs. (A.4) no se ha obtenido hasta hoy en día debido a su complejidad.

En la figura (6.9) se presentan las variaciones espaciales de K_β , en la inter-región medio libre/medio poroso, predichas a partir de solución del problema de cerradura local usando dos valores de r_0 para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Además, en la misma figura, se presentan aquellas predicciones obtenidas utilizando simulaciones a la escala de poro, una extensión de la ecuación de Carman-Kozeny (CK), una función lineal y una función de salto en escalón (Ochoa-Tapia and Whitaker, 1995a,b; Angot *et al.*, 1999; Goyeau *et al.*, 2003; Valdés-Parada *et al.*, 2009b). Para el caso de la extensión de la ecuación de CK, esta se obtiene al reemplazar el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$ por ε_β . Es interesante notar que las variaciones de K_β obtenidas del PCL son las más cercanas a las obtenidas de las simulaciones a la escala de poro. En contraste, las predicciones obtenidas usando la función de salto en escalón tiene las mayores desviaciones con respecto a las de la simulaciones a la escala de poro. Por último, las predicciones utilizando la extensión de la ecuación de CK y la función lineal también presentan desviaciones, aunque sus predicciones se encuentran más cerca a las obtenidas de la simulaciones a la escala de poro que las obtenidas de la función de salto en escalón. Por lo tanto, se resuelve que hasta que se encuentren mejores metodologías para predecir a la permeabilidad, y cuando llevar a cabo simulaciones a la escala de poro no sea una alternativa viable, las predicciones usando el problema de cerradura local seguirá siendo la mejor alternativa disponible para dicho fin.

B. Problema de cerradura de flujo inercial

En este capítulo se busca desarrollar y resolver formalmente las ecuaciones gobernantes de las desviaciones locales de la velocidad y de la presión para el flujo inercial entre un medio libre y un medio poroso. Para cumplir con esto, análogamente al desarrollo presentado en el apéndice anterior, las ecuaciones gobernantes de las desviaciones locales se obtienen de restar las Ecs. (7.3) y (7.6) a las Ecs. (7.1a) y (7.1b). Esto conduce a las siguientes ecuaciones

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad \text{en la fase-}\beta \quad (\text{B.1a})$$

$$\begin{aligned} & \rho_\beta \nabla \cdot \left[\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right] \\ & - \rho_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \varepsilon_\beta^{-1} \rho_\beta \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta \\ & - \mu_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{I} \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA \quad (\text{B.1b}) \end{aligned}$$

Para completar el problema de valor a la frontera, las condiciones de frontera de las desviaciones locales se obtienen al introducir la Ec. (6.4) en las Ecs. (7.1c) y (7.1d), lo cual lleva a ecuaciones similares a las Ecs. (A.1c) y (A.1d). Cabe recordar que esto requiere considerar la aproximación dada por la Ec. (A.1d), la cual es válida cuando se satisfacen las restricciones de longitudes de escalas dadas por la Ec. (A.1e). También, se debe tener presente que esta aproximación involucra que las cantidades promedio se pueden tratar como cantidades constantes dentro de las integrales de superficie o de volumen y que las desviaciones locales están sujetas a la restricción promedio dada por la Ec. (A.1g).

Nótese que en la ecuación de cantidad de movimiento de las desviaciones locales, además de los términos viscosos promedio, aparecen algunos términos convectivos promedio, que hacen que la

Apéndice B. Problema de cerradura de flujo inercial

solución del problema de las desviaciones locales sea más complicada de obtener. Con el objetivo de analizar la relevancia de estos términos, se lleva a cabo un estimado de orden de magnitud de ellos. De esta manera, considerando que el primer término del lado derecho de la Ec. (B.1b) se puede reescribir como

$$\rho_\beta \nabla \cdot \left[\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right] = \rho_\beta \left[\left(\nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \right] \quad (\text{B.2})$$

los estimados de orden de magnitud de todos los términos convectivos en la Ec. (B.1b) están dados por

$$\rho_\beta \left(\nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \tilde{\mathbf{v}}_\beta = O \left(\rho_\beta \frac{\| \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \|^2}{r_0} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = O \left(\rho_\beta \frac{\| \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \|^2}{r_0} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta = O \left(\rho_\beta \frac{\| \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \|^2}{\ell} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\rho_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = O \left(\rho_\beta \frac{\| \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \|^2}{r_0} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$\varepsilon_\beta^{-1} \rho_\beta \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle = O \left(\rho_\beta \frac{\| \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \|^2}{L} \right) \quad (\text{B.7})$$

Analizando estas estimaciones, se deduce que cuando se satisface la restricción de longitud de escala dada por

$$\ell \ll r_0 \quad (\text{B.8})$$

se pueden suponer las siguientes desigualdades

$$\rho_\beta \left(\nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \tilde{\mathbf{v}}_\beta \ll \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (\text{B.9a})$$

$$\rho_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \ll \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (\text{B.9b})$$

$$\rho_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \ll \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (\text{B.9c})$$

$$\varepsilon_\beta^{-1} \rho_\beta \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle \ll \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (\text{B.9d})$$

Por lo tanto, la ecuación de cantidad de movimiento de las desviaciones locales se puede expresar

como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta = & -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \mu_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \\ & - \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \quad \text{en la fase } -\beta \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

lo cual representa una reducción de la complejidad del problema de las desviaciones locales y por consiguiente de la complejidad de su solución.

Una vez más no es de interés resolver el problema de las desviaciones locales en todo el sistema medio libre/medio poroso, debido a que eso requiere conocer la microestructura de todo el medio poroso, lo cual es casi imposible de obtener. Para superar esta dificultad, se considera que las regiones del medio poroso y del medio libre son regiones homogéneas (Quintard and Whitaker, 1987). Esto hace que sea suficiente utilizar un dominio representativo de la región de la frontera medio libre/medio poroso como dominio de solución para el problema de las desviaciones, tal como el que se muestra en la figura A.1. Esto conduce también a imponer el par de condiciones de frontera en el límite superior $y = h_\eta$ e inferior $y = -h_\omega$ del dominio representativo dadas por las Ecs. (A.1g) y (A.1h). Más aún, si se considera que el medio poroso es periódico en una distancia \mathbf{l}_i en la dirección paralela a la superficie del medio poroso, las condiciones de frontera en las entradas y salidas del sistema se pueden reemplazar por condiciones de periodicidad en las dos direcciones horizontales del dominio representativo dadas por las Ecs. (A.1h) y (A.1i). En resumen, se tiene que el problema de valor a la frontera de las desviaciones locales de la velocidad y presión ahora está dado por

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad \text{in the } \beta\text{-phase} \quad (\text{B.11a})$$

$$\mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \mu_\beta \nabla \ln \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.11b})$$

$$\text{C. F. 1: } \tilde{\mathbf{v}}_\beta = -\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma,M} \quad (\text{B.11c})$$

$$\text{C. F. 2: } \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } y = h_\eta \quad (\text{B.11d})$$

$$\text{C. F. 3: } \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \tilde{\mathbf{v}}_{\beta\omega} \quad \text{en } y = -h_\omega \quad (\text{B.11e})$$

$$\text{Periodicidad: } \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \quad \psi = \tilde{\mathbf{v}}_\beta, \tilde{p}_\beta \quad i = x, z \quad (\text{B.11f})$$

$$\text{Restricción: } \langle \tilde{\psi} \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = 0, \quad \tilde{\psi} = \tilde{\mathbf{v}}_\beta, \tilde{p}_\beta \quad (\text{B.11g})$$

En este problema las cantidades promedio y sus derivadas se pueden considerar como fuentes constantes, las cuales nuevamente están dadas por la velocidad promedio y su gradiente, como en el problema de cerradura de flujo de Stokes. De es forma, la solución formal de las desviaciones estará dada por expresiones similares a las Ecs. (A.2). Sin embargo, debido a la restricción de longitud de escala dada por la Ec. (A.8), se puede despreciar el gradiente de la velocidad promedio con respecto a la velocidad promedio en la solución formal. Por consiguiente, la solución de las desviaciones se reduce a una expresión similar a la Ec. (A.4). Más aún, al introducir dicha solución en las Ecs. (B.11), se puede extraer el siguiente problema de valor a la frontera de las variables de cerradura locales

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\beta = \nabla \ln \varepsilon_\beta \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.12a})$$

Apéndice B. Problema de cerradura de flujo inercial

$$\mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \mathbf{B}_\beta = -\nabla \mathbf{b}_\beta + \nabla^2 \mathbf{B}_\beta - \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \varepsilon_\beta \mathbf{I} + \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.12b})$$

$$\text{C. F. 1: } \mathbf{B}_\beta = -\mathbf{I} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{B.12c})$$

$$\text{C. F. 2: } \mathbf{B}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } y = h_\eta \quad (\text{B.12d})$$

$$\text{C. F. 3: } \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_{\beta\omega} \quad \text{en } y = -h_\omega \quad (\text{B.12e})$$

$$\text{Periodicidad: } \psi_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{I}_i) = \psi_\beta(\mathbf{r}), \quad \psi_\beta = \mathbf{B}_\beta, \mathbf{b}_\beta \quad i = x, z \quad (\text{B.12f})$$

$$\text{Restriction: } \langle \psi_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (\text{B.12g})$$

Además, sustituyendo la solución formal de las desviaciones locales en las Ecs. (7.9), se pueden definir dos coeficientes efectivos en términos de las variables de cerradura dados por

$$\mathbf{C}_\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \langle \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{B}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.13a})$$

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}\mathbf{b}_\beta + \nabla \mathbf{B}_\beta) dA \quad (\text{B.13b})$$

Con base en lo anterior, resolviendo el problema de cerradura en un dominio representativo de la frontera medio libre/medio poroso, se pueden predecir dichos coeficientes efectivos. Estos coeficientes deben capturar los efectos de la microestructura del medio y así como de efectos inerciales locales en la descripción macroscópica del sistema. Por un lado, el primer coeficiente se puede considerar como un coeficiente de dispersión de inercia, el cual captura todos los efectos inerciales que toman lugar en el fase fluida. Por otro lado, el segundo coeficiente se puede considerar como un coeficiente de permeabilidad aparente, debido a que captura tanto la resistencias al flujo del fluido debido a la microestructura del medio poroso y así como de fuerzas inerciales locales. Este último coeficiente está relacionado al tensor de permeabilidad intrínseco y así como al tensor de resistencias inerciales (o tensor de Forchheimer) de acuerdo a la siguiente expresión

$$\mathbf{H}_\beta^{-1} = \mathbf{K}_\beta^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{F}_\beta) \quad (\text{B.14})$$

Notése que, cuando el valor del número de $Re \ll 1$, el problema de cerradura local se reduce al de flujo de Stokes, y por consiguiente $\mathbf{H}_\beta \approx \mathbf{K}_\beta$.

Por último, cabe mencionar que inspeccionando el problema de las variables de cerradura, se puede advertir que la ecuación de continuidad, las condiciones de frontera y la restricción promedio son idénticas a las del problema de cerradura local de flujo de Stokes. Sin embargo, la diferencia yace en la ecuación de cantidad de movimiento, en la cual ahora aparece un término inercial donde se requiere conocer el perfil de velocidad local. Esto último se puede obtener a partir de la solución del problema de la microescala usando simulaciones a la escala de poro o bien de observaciones experimentales. En este trabajo esto se obtiene a partir de las simulaciones a la escala de poro. De esta forma, cabe señalar que los coeficientes efectivos no son intrínsecos, debido a que ahora dependen del campo de velocidad local y así como de las propiedades del fluido, tal como se puede observar en la Ec. (B.12b).

C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

En este capítulo se estudia el flujo inercial entre un medio libre y un medio poroso usando la ecuación promediada de Navier-Stokes dada por la Ec. (7.6). Esto tiene el objetivo de analizar las capacidades predictivas de dicha ecuación, antes de adoptar suposiciones basadas en restricciones de longitud de escala que reduzcan la información proveniente de la microescala. Para llevar a cabo esto, primero se predicen las variaciones espaciales de los términos promedio $\langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle$ y $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ a partir de simulaciones a la escala poro, lo cual permite cerrar a la Ec. (7.6). Posteriormente, se aplica dicha ecuación para estudiar el flujo en un sistema medio libre/medio poroso.

C.1 Predicción de los términos promedio

Para cumplir con lo anterior, se considera el sistema que consiste en el flujo a través de un canal parcialmente ocupado por un medio poroso, tal como el que se muestra en la figura 7.2. Se considera que el medio poroso tiene una estructura hecha de cilindros alineados de sección transversal circular. Los detalles para realizar las PSSs en este sistema se describen en la §7.5. Una vez obtenidos los perfiles de velocidad local y desviaciones de la presión local, se calcularon los términos promedio $\langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle$ y $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ definidos por las Ecs. (7.9). Esto requiere utilizar a la Ec. (6.4), lo cual conduce a reescribir a estos términos como

$$\rho_\beta \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{v}_\beta \rangle = \rho_\beta \nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) + \nabla \cdot \left\langle \left(\mathbf{v}_\beta - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \left(\mathbf{v}_\beta - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \right\rangle^\beta \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \right) \right] dA \quad (\text{C.2})$$

Mientras el primer término promedio representa las fuerzas inerciales macroscópicas debidas únicamente al flujo del fluido, el segundo describe las resistencias al flujo del fluido debido a la microestructura del medio poroso relacionado a los esfuerzos totales locales y a una parte de los efectos inerciales locales. De esta manera, los términos promedio se calcularon introduciendo los campos locales obtenidos de las PSSs en las definiciones de arriba. Para hacer esto, tomando en cuenta la forma del dominio de solución de problema local, el cual es un dominio rectangular de alto $L_T = L_\eta + L_\omega$ y ancho ℓ , se utilizó una región de promediado de sección transversal cuadrada de alto $2r_0$ y de ancho ℓ , donde $2r_0 = \ell$. Aquí se calcularon únicamente las componentes $f_{\beta x} = \mathbf{f}_\beta \cdot \mathbf{e}_x$ y $\langle v_y^* v_x^* \rangle = \mathbf{e}_y \cdot \langle v_y^* v_x^* \rangle \cdot \mathbf{e}_x$ de los términos promedio, las cuales son las únicas componentes necesarias para la solución de la ecuación promedio. Esto se debe a que el análisis del flujo se restringe a una zona del canal localizada suficientemente lejos de sus entradas y salidas donde es razonable suponer que el flujo es unidireccional y completamente desarrollado. Además, debido a la periodicidad de la geometría del sistema en la dirección del flujo, las predicciones de estas componentes se hicieron solo en la dirección vertical.

En la figura C.1 se muestran las variaciones espaciales de $f_{\beta x}$ en la inter-región medio libre/medio poroso usando tres valores del número de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Estos resultados son para la estructura del medio poroso compuesta de cilindros alineados (ver figura 7.3(a)). Aquí se muestra que el coeficiente $f_{\beta x}$ se mantiene constante en la región del medio poroso (para $y < -(0.5\ell + r_0)$), incrementa súbitamente al inicio de la inter-región (en $-(0.5\ell + r_0) \leq y \leq -(0.25\ell + r_0)$) para después decrecer suavemente en la mayor parte de ella (en $-(0.25\ell + r_0) \ll y \leq 0.2\ell$), y finalmente decrece súbitamente hasta alcanzar el valor de cero en el medio libre (en $0.2\ell \leq y \leq r_0$). Esto ilustra que la zona de cambios de $f_{\beta x}$ está localizada por las posiciones dadas por $-(0.5\ell + r_0) \leq y \leq r_0$, teniendo un tamaño $\delta_{f_{\beta x}} \approx 2r_0 + 0.5\ell$. Cabe mencionar que, el tamaño de $\delta_{f_{\beta x}}$ estará directamente relacionado con el espesor de la zona de cambios de H_β , tal como se muestra en el capítulo 7. Por otro lado, se exhibe que $f_{\beta x}$ depende del valor de Re únicamente en los extremos de la zona de cambios. En específico, los valores de $f_{\beta x}$ disminuyen al incrementar el valor de Re para las posiciones dadas por $-(0.5\ell + r_0) \ll y \leq -r_0$ y crecen al incrementar el valor de Re para aquellas dadas por $0 \leq y \leq r_0$. Esto se debe a que el flujo es completamente desarrollo y unidireccional, por lo que las resistencias relacionadas a efectos inerciales locales son importantes únicamente en la primera partícula de la superficie del medio poroso.

Dirigiendo la atención al término promedio de fuerzas inerciales, las variaciones espaciales de $\langle v_{\beta,y}^* v_{\beta,x}^* \rangle$ usando diferentes valores de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ se presentan en la figura C.2. Estos resultados son para la estructura del medio poroso compuesta de cilindros alineados (ver figura 7.3(a)). Analizando estos resultados, se aprecia que $\langle v_{\beta,y}^* v_{\beta,x}^* \rangle$ se mantiene constante en el seno del medio poroso, incrementa súbitamente en la primeras posiciones de la inter-región, decrece suavemente en las posiciones intermedias de la inter-región y por último, decrece súbitamente en las posiciones cercanas al seno del medio libre. Además, se puede notar que la zona de cambios de $\langle v_{\beta,y}^* v_{\beta,x}^* \rangle$ depende del valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$. Para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$, la zona de cambios está restringida por las posiciones dadas por $-0.5\ell - r_0 \leq y \leq 2\ell$, teniendo un espesor $\delta_{\langle v_{\beta,y}^* v_{\beta,x}^* \rangle} \approx 3\ell$. Por su parte, para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$, la zona de cambios se restringe a las posiciones dadas por $-3\ell - r_0 \leq y \leq 2\ell$, teniendo un espesor $\delta_{\langle v_{\beta,y}^* v_{\beta,x}^* \rangle} \approx 6\ell$. Esto se debe a que, al incrementar el valor $\varepsilon_{\beta\omega}$, los efectos del flujo en el medio libre se introducen cada vez más dentro el medio poroso. Asimismo, se puede apreciar que para ambos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$, cerca de la frontera del medio poroso, los valores de $\langle v_{\beta,y}^* v_{\beta,x}^* \rangle$ decrecen al incrementar el valor de Re ,

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

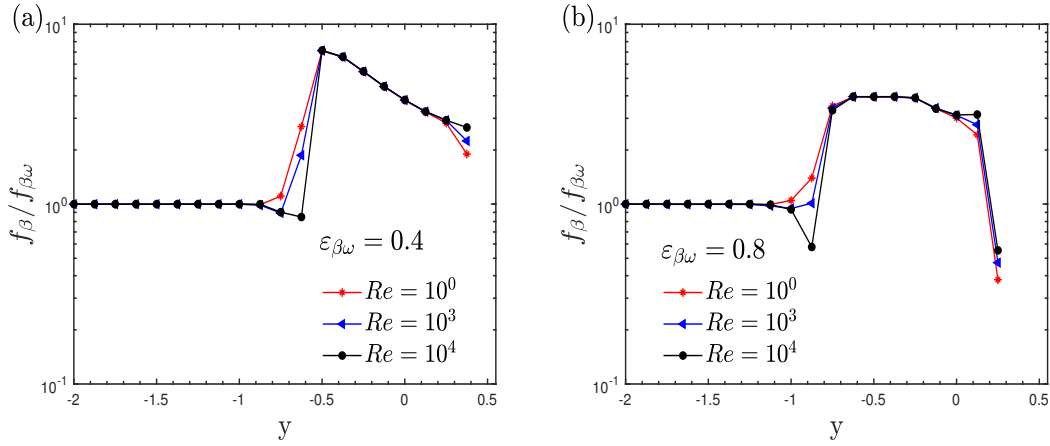


Figura C.1: Variaciones espaciales de la componente f_{β_x} del vector de resistencias en la inter-región medio libre/medio poroso obtenidas de simulaciones a la escala de poro bajo tres escenarios de flujo para $\varepsilon_{\beta\omega}$ y $r_0 = \ell$. Todos los cálculos son para la estructura del medio poroso hecho de círculos alineados.

indicando que las fuerzas inerciales macroscópicas disminuyen. Por último, cabe señalar que, aunque se han calculado las variaciones espaciales de $\langle v_{\beta,y}^* v_{\beta,x}^* \rangle$, su contribución en la ecuación de cantidad de movimiento se puede despreciar con respecto a las contribuciones viscosas, lo cual se muestra líneas abajo.

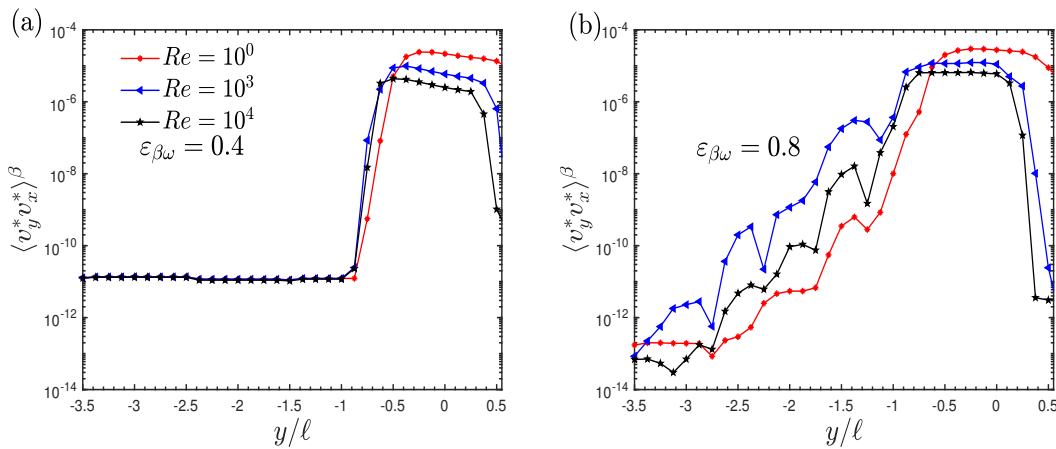


Figura C.2: Variaciones espaciales del término promedio $\langle v_y^* v_x^* \rangle^\beta$ en la inter-región medio libre/medio poroso obtenidas de simulaciones a la escala de poro bajo tres escenarios de flujo para $\varepsilon_{\beta\omega}$ y $r_0 = \ell$. Todos los cálculos son para la estructura del medio poroso hecho de círculos alineados.

C.2 Solución del modelo de un dominio de flujo inercial abierto

Una vez obtenidas las variaciones espaciales de los términos promedio, $\langle v_x^* v_y^* \rangle$ y $f_{\beta_x}^*$, se precisa evaluar las capacidades de la Ec. (7.6) para predecir a los perfiles de velocidad promedio en el canal. Dado que el flujo es unidireccional y completamente desarrollado, la única componente necesaria de

esta ecuación es la componente $-x$, por lo que se puede reescribir como

$$Re \frac{d\langle v_{\beta y}^* v_{\beta x}^* \rangle}{dy^*} = -\frac{d\langle p_{\beta}^* \rangle^{\beta}}{dx^*} + \varepsilon_{\beta}^{-1}(y^*) \frac{d^2\langle v_{\beta x}^* \rangle}{dy^{*2}} - \varepsilon_{\beta}^{-1}(y^*) \frac{d\varepsilon_{\beta}}{dy^*} \frac{d}{dy^*} \left(\varepsilon_{\beta}^{-1}(y^*) \langle v_{\beta x}^* \rangle \right) - f_{\beta x}^*(y^*) \quad (C.3)$$

donde se han utilizado las variables adimensionales dadas por la Ec. (7.20). Esto conduce a que la caída de presión promedio esté dada por $-d\langle p_{\beta}^* \rangle^{\beta}/dx^* = 1$. Además, para completar el ODA, la ecuación de arriba está sujeta a las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (7.19). De esta manera, las ecuaciones anteriores forman el ODA de flujo inercial, donde la ecuación de cantidad de movimiento se ha cerrado a partir de la predicción de sus términos promedio usando información proveniente de las PSSs. Con base en lo anterior, y usando las variaciones espaciales de los términos promedio, el modelo de arriba se resolvió numéricamente. Se utilizó un esquema de diferencias finitas para discretizar a las ecuaciones y el método de punto fijo para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes.

La figura C.3 muestra los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la solución del ODA y de promediar los perfiles de velocidad local resultantes de las PSSs. Estos perfiles son para el canal con la estructura del medio poroso compuesto de cilindros alineados y usando tres valores del número de Re para dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$. En primera instancia, se aprecia que la velocidad promedio decrece al incrementar el valor de Re , lo cual coincide con el incremento de las resistencias debido a los efectos inerciales locales con el valor de Re , tal como se muestra en la figura C.1. En segundo lugar, en todos los casos, se observa que los perfiles de velocidad obtenidos del ODA pueden predecir satisfactoriamente a aquellos obtenidos de las PSSs, lo cual muestra la validez de la ecuación promediada de Navier-Stokes dada por la Ec. (7.6). Además, esto indica que los términos promedio dados por $\langle v_y^* v_x^* \rangle$ y $f_{\beta x}^*$ pueden capturar la información de la microescala en la descripción macroscópica.

Resultados similares a los anteriores se obtuvieron usando otras estructuras del medio poroso que consisten en cilindros escalonados de sección transversal circular y cilindros alineados de sección transversal cuadrada, como los mostrados en la figura 7.3. Sin embargo, en aras de la brevedad, dichos resultados no se presentan en este capítulo, sino hasta que el ODA se cierre usando el problema de cerradura local, lo cual se muestra en el capítulo ??

C.3 Contribución de los términos de la ecuación de transporte generalizada

Cómo último punto de análisis, a continuación se evalúa la contribución de cada uno de los términos de la Ec. (C.3). Para llevar a cabo esto, se predijeron las variaciones de dichos términos a partir de los perfiles de velocidad promedio provenientes de las PSSs, y los resultados se muestran en la figura C.4. Estas predicciones se hicieron usando dos valores de Re para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$. Por un lado, se observa que las variaciones del término inercial y aquellas del términos de resistencias sólido-fluido son las únicas que se modifican al incrementar el número de Re , mientras que aquellas de la primera y segunda corrección de Brinkman permanecen idénticas. Esto se atribuye a que los efectos inerciales microscópicos son capturados únicamente por los dos primeros términos. No obstante, se puede notar que los valores del término inercial son mucho más pequeños que el de los demás términos, sugiriendo que su contribución se puede desprestigiar con respecto a los otros, conduciendo así a una forma simplificada de la Ec. (C.3). Cabe señalar que estas observaciones son aplicables únicamente

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

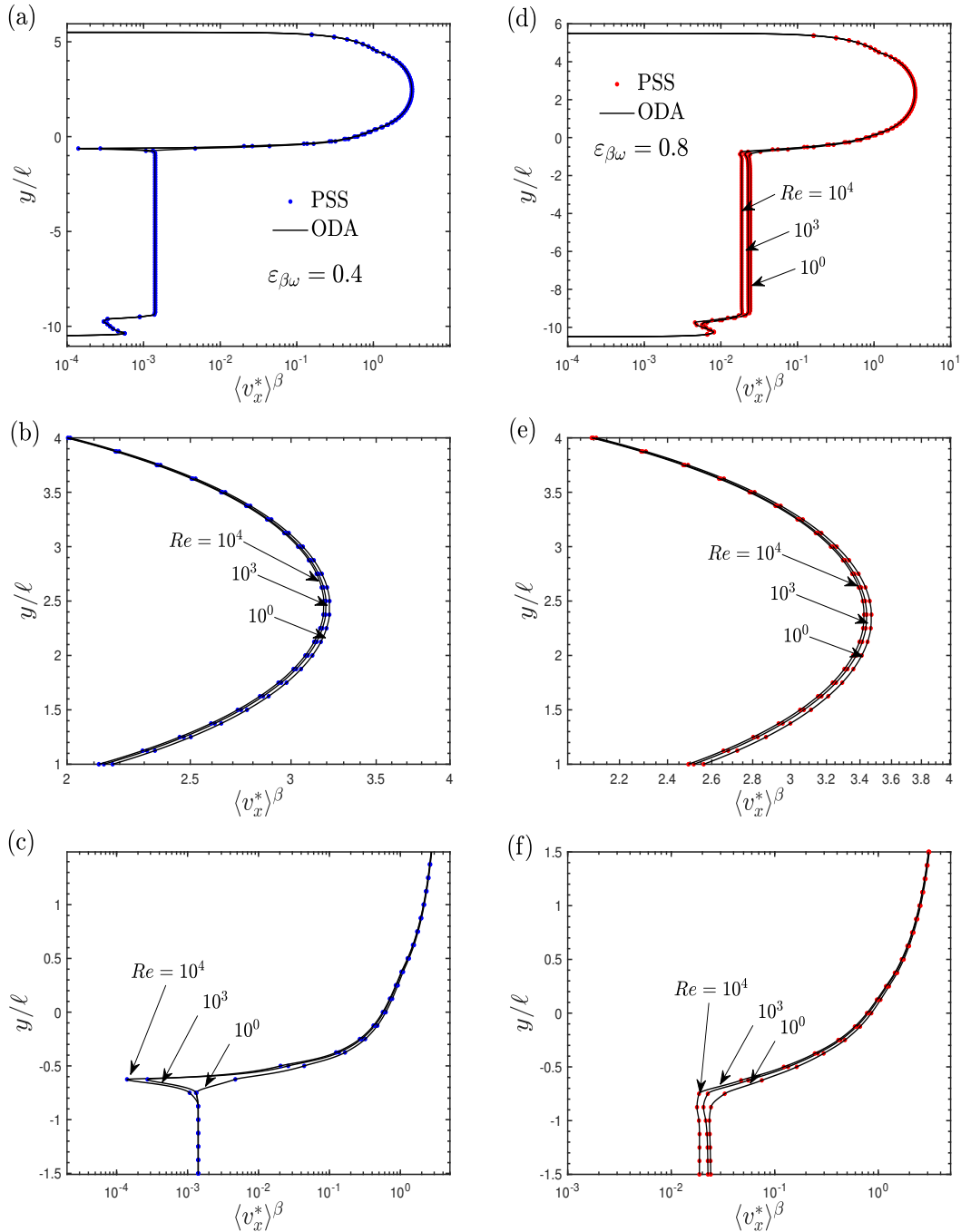


Figura C.3: Perfiles de velocidad promedio para el flujo inercial en el canal parcialmente ocupado por un medio poroso obtenidos de la solución del modelo de un dominio en términos de $f_{\beta x}^*$ y de simulaciones a la escala de poro. En todos los cálculos se utilizó a $L_\eta = 5\ell$, $L_\omega = 10$ y dos valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$: (a)-(c) 0.4 y (d)-(f) 0.8.

para cuando el flujo es completamente desarrollado y unidireccional, ya que se espera que el término inercial sea importante en las entradas y salidas del canal. Por otro lado, la figura C.4 muestra que tanto la primera como la segunda corrección de Brinkman contribuyen en la ecuación de cantidad de movimiento, aunque la magnitud de la segunda es un orden más pequeño que la primera, sugiriendo que la contribución de este término también puede depreciarse. No obstante, se espera que cuando

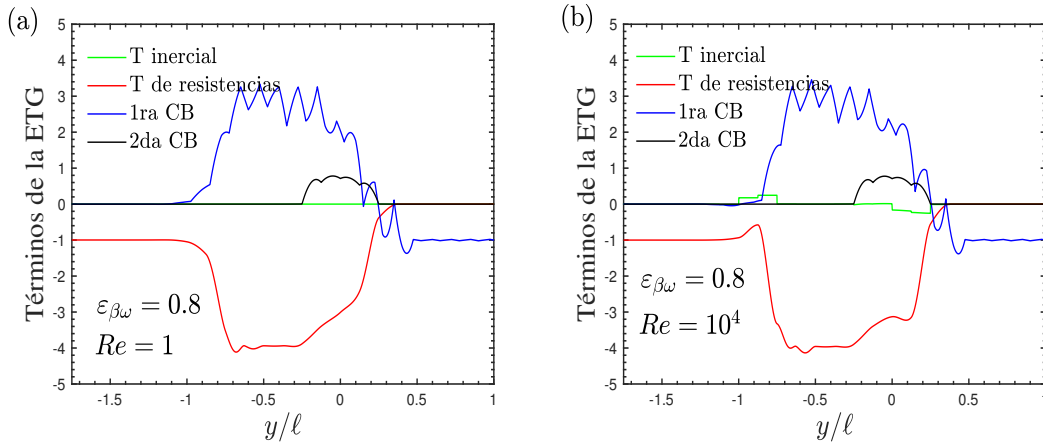


Figura C.4: Variaciones espaciales de cada uno de los términos en la GTE dada por la Ec. (C.3) en la inter-región medio libre/medio poroso. Estas predicciones son para dos valores de Re y $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$.

se incremente el tamaño de la región de promedio, incremente el orden de magnitud de la segunda corrección de Brinkman, tal como se mostró en la §5.5.

Con el objetivo de validar lo antes observado, el modelo de un dominio, Ecs. (C.3) y (7.19), se resolvió bajo tres situaciones. La primera consistió en despreciar el término inercial en la inter-región, la segunda en despreciar a la primera corrección de Brinkman y la tercera en despreciar a la segunda corrección de Brinkman. La figura C.5 muestra los perfiles de velocidad promedio obtenidos a partir de la solución del ODA para los tres casos mencionados. Además, en la misma figura, se presentan las predicciones obtenidas de las PSSs. Estos resultados confirman el término inercial se pueden despreciar en la inter-región medio libre/medio poroso. Por el contrario, al despreciar la primera y la segunda corrección de Brinkman en la inter-región se generan desviaciones tanto en la inter-región como en el medio libre, siendo mayores cuando se desprecia la primera corrección. Esto se atribuye principalmente al hecho de que la altura del medio libre es del mismo orden que el tamaño de la celda unitaria ℓ , haciendo que los errores en la inter-región tengan un mayor alcance en la región de medio libre.

Con base en lo anterior, se puede concluir que la Ec. (7.6) logra predecir satisfactoriamente a los perfiles de velocidad promedio entre un medio libre y medio poroso. Para llevar a cabo esto, es necesario conservar tanto la primera como la segunda corrección de Brinkman en la inter-región y así como el término de resistencias f_{β_x} , mientras que se puede prescindir del término inercial. Esto evidencia que el término f_{β_x} es suficiente para incorporar la información de la microescala en la descripción macroscópico. Estas observaciones son aplicables al menos para cuando se tiene flujo unidireccional y completamente desarrollado.

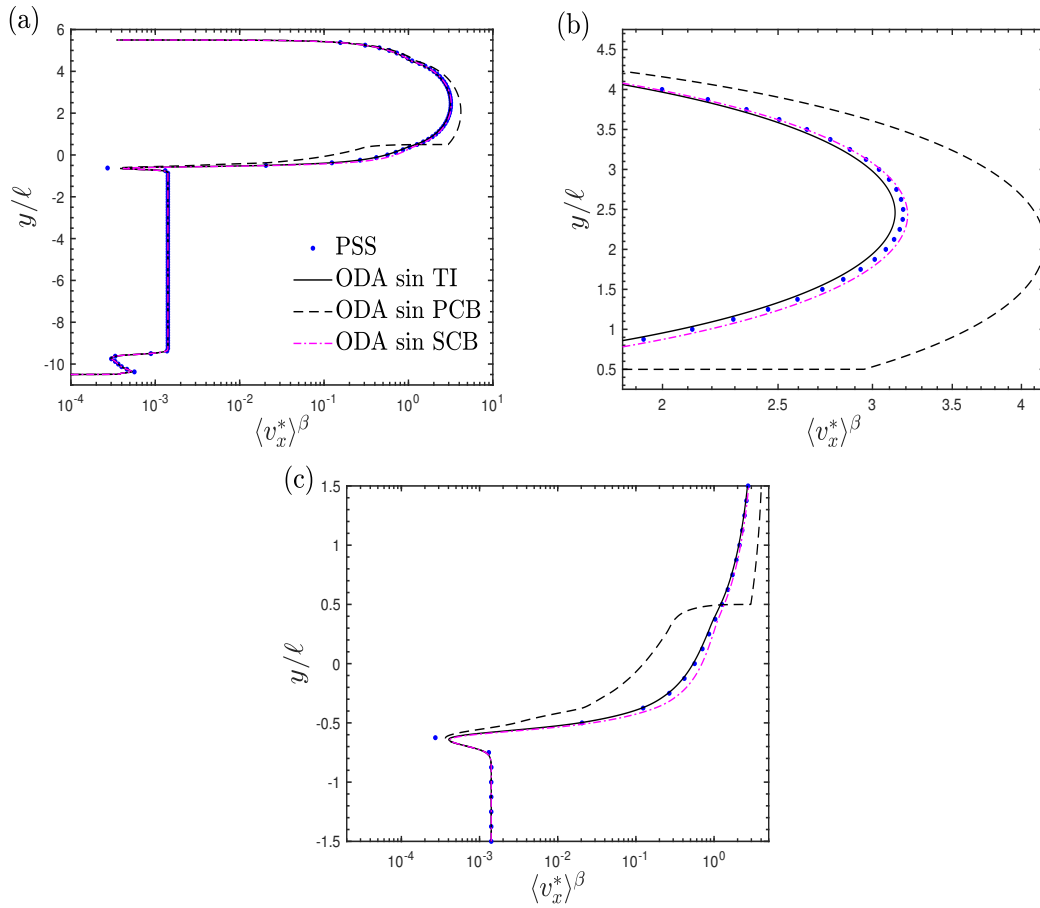


Figura C.5: Comparación de los perfiles de velocidad promedio obtenidos de la PSS y de la solución del ODA bajo tres condiciones: (i) despreciando el término inercial (TI), (ii) despreciando la primera corrección de Brinkman (PCB) y despreciando la segunda corrección de Brinkman (SCB). En todos los cálculos se utilizó $L_\omega = 10\ell$, $L_\eta = 5\ell$, $2r_0 = \ell$ y $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$.



Bibliografía

- Adler, P. (1978). Viscosity of concentrated suspensions of aggregable particles. *Rheologica Acta*, 17(3):288–295.
- Adler, P. and Mills, P. (1979). Motion and rupture of a porous sphere in a linear flow field. *Journal of Rheology*, 23(1):25–37.
- Agnaou, M., Lasseux, D., and Ahmadi, A. (2016). From steady to unsteady laminar flow in model porous structures: an investigation of the first hopf bifurcation. *Computers & Fluids*, 136:67–82.
- Agnaou, M., Lasseux, D., and Ahmadi, A. (2017). Origin of the inertial deviation from darcy's law: An investigation from a microscopic flow analysis on two-dimensional model structures. *Physical Review E*, 96(4):043105.
- Aguilar-Madera, C. G., Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2011a). Convective heat transfer in a channel partially filled with a porous medium. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(8):1355–1368.
- Aguilar-Madera, C. G., Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2011b). One-domain approach for heat transfer between a porous medium and a fluid. *International journal of heat and mass transfer*, 54(9-10):2089–2099.
- Alazmi, B. and Vafai, K. (2000). Analysis of variants within the porous media transport models. *Journal of Heat Transfer*, 122(2):303–326.
- Alazmi, B. and Vafai, K. (2001). Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(9):1735–1749.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Alazmi, B. and Vafai, K. (2004). Analysis of variable porosity, thermal dispersion, and local thermal nonequilibrium on free surface flows through porous media. *Journal of Heat Transfer*, 126(3):389–399.
- Alkam, M., Al-Nimr, M., and Hamdan, M. (2001). Enhancing heat transfer in parallel-plate channels by using porous inserts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(5):931–938.
- Angot, P., Bruneau, C.-H., and Fabrie, P. (1999). A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4):497–520.
- Angot, P., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2017). Asymptotic modeling of transport phenomena at the interface between a fluid and a porous layer: Jump conditions. *Physical Review E*, 95(6):1–16.
- Ansys, I. (2009). Cfx-solver theory guide. *Release 12.1 ed.*
- Auriault, J.-L. (1987). Nonsaturated deformable porous media: quasistatics. *Transport in Porous media*, 2(1):45–64.
- Auriault, J.-L. (2009). On the domain of validity of brinkman’s equation. *Transport in porous media*, 79(2):215–223.
- Basu, A. and Khalili, A. (1999). Computation of flow through a fluid-sediment interface in a benthic chamber. *Physics of Fluids*, 11(6):1395–1405.
- Baveye, P. and Sposito, G. (1984). The operational significance of the continuum hypothesis in the theory of water movement through soils and aquifers. *Water Resources Research*, 20(5):521–530.
- Bear, J. (2013). *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation.
- Bear, J. and Cheng, A. H.-D. (2010). *Modeling groundwater flow and contaminant transport*, volume 23. Springer Science & Business Media.
- Beavers, G., Sparrow, E. M., and Masha, B. (1974). Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow. *AIChE Journal*, 20(3):596–597.
- Beavers, G. S. and Joseph, D. D. (1967). Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of fluid mechanics*, 30(1):197–207.
- Beavers, G. S., Sparrow, E. M., and Magnuson, R. A. (1970). Experiments on coupled parallel flows in a channel and a bounding porous medium. *Journal of Basic Engineering*, 92D(4):843 – 848.
- Beckermann, C., Ramadhyani, S., and Viskanta, R. (1987). Natural convection flow and heat transfer between a fluid layer and a porous layer inside a rectangular enclosure. *Journal of heat transfer*, 109(2):363–370.
- Beckermann, C., Viskanta, R., and Ramadhyani, S. (1988). Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid and porous layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 186:257–284.
- Bottaro, A. and Naqvi, S. B. (2020). Effective boundary conditions at a rough wall: a high-order homogenization approach. *Meccanica*, 55(9):1781–1800.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Bousquet-Melou, P., Goyeau, B., Quintard, M., Fichot, F., and Gobin, D. (2002). Average momentum equation for interdendritic flow in a solidifying columnar mushy zone. *International journal of heat and mass transfer*, 45(17):3651–3665.
- Breugem, W.-P. (2005). The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows. In *Technische Universiteit Delft*.
- Brinkman, H. (1949a). A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1(1):27.
- Brinkman, H. (1949b). On the permeability of media consisting of closely packed porous particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1(1):81.
- Bruneau, C.-H., Creusé, E., Depeyras, D., Gilliéron, P., and Mortazavi, I. (2010). Coupling active and passive techniques to control the flow past the square back ahmed body. *Computers & Fluids*, 39(10):1875–1892.
- Bruneau, C.-H., Lasseux, D., and Valdes-Parada, F. J. (2020). Comparison between direct numerical simulations and effective models for fluid-porous flows using penalization. *Meccanica*, 55(5):1061–1077.
- Bruneau, C.-H. and Mortazavi, I. (2004). Passive control of the flow around a square cylinder using porous media. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 46(4):415–433.
- Bruneau, C.-H. and Mortazavi, I. (2008). Numerical modelling and passive flow control using porous media. *Computers & Fluids*, 37(5):488–498.
- Carman, P. C. (1938). Determination of the specific surface of powders i. transactions. *J. Soc. Chemical Industries.*, 57:225–234.
- Carman, P. C. (1956). Flow of gases through porous media. *J. Soc. Chemical Industries.*, 00:000–000.
- Cd-Adapco, S. (2017). Star ccm+ user guide version 12.04. *CD-Adapco: New York, NY, USA*, 62.
- Chandesris, M. and Jamet, D. (2006). Boundary conditions at a planar fluid–porous interface for a poiseuille flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(13-14):2137–2150.
- Chandesris, M. and Jamet, D. (2007). Boundary conditions at a fluid–porous interface: an a priori estimation of the stress jump coefficients. *International journal of heat and mass transfer*, 50(17-18):3422–3436.
- Chandesris, M. and Jamet, D. (2009). Jump conditions and surface-excess quantities at a fluid–porous interface: a multi–scale approach. *Transport in porous media*, 78(3):419–438.
- Cheng, P., Chowdhury, A., and Hsu, C. (1991). Forced convection in packed tubes and channels with variable porosity and thermal dispersion effects. In *Convective heat and mass transfer in porous media*, pages 625–653. Springer.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Cimolin, F. and Discacciati, M. (2013). Navier–stokes/forchheimer models for filtration through porous media. *Applied Numerical Mathematics*, 72:205–224.
- Cushman, J. H. (1984). On unifying the concepts of scale, instrumentation, and stochastics in the development of multiphase transport theory. *Water Resources Research*, 20(11):1668–1676.
- Darcy, H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de dijón, dalmont. *Paris: Dalmont*.
- Das, S., Deen, N., and Kuipers, J. (2018). Multiscale modeling of fixed-bed reactors with porous (open-cell foam) non-spherical particles: Hydrodynamics. *Chemical Engineering Journal*, 334:741–759.
- Deng, C. and Martinez, D. (2005). Viscous flow in a channel partially filled with a porous medium and with wall suction. *Chemical Engineering Science*, 60(2):329–336.
- Eggenweiler, E. and Rybak, I. (2020). Unsuitability of the beavers–joseph interface condition for filtration problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 892.
- Eidsath, A., Carbonell, R., Whitaker, S., and Herrmann, L. (1983). Dispersion in pulsed systems iii: comparison between theory and experiments for packed beds. *Chemical Engineering Science*, 38(11):1803–1816.
- Ene, H. I. and Polisevski, D. (2012). *Thermal flows in porous media*, volume 1. Springer Science & Business Media.
- Ergun, S. (1952). Fluid flow through packed columns. *Chem. Eng. Prog.*, 48:89–94.
- Ettefagh, J., Vafai, K., and Kim, S. (1991). Non-darcian effects in open-ended cavities filled with a porous medium. *Journal of Heat Transfer*, 113(4):892–898.
- Flesch, T. K. and Wilson, J. D. (1999). Wind and remnant tree sway in forest cutblocks. ii. relating measured tree sway to wind statistics. *Agricultural and Forest Meteorology*, 93(4):243–258.
- Forchheimer, P. (1901). Wasserbewegung durch boden. *Z. Ver. Deutsch, Ing.*, 45:1782–1788.
- Freed, K. F. and Muthukumar, M. (1978). On the stokes problem for a suspension of spheres at finite concentrations. *The Journal of Chemical Physics*, 68(5):2088–2096.
- George, G. R., Bockelmann, M., Schmalhorst, L., Beton, D., Gerstle, A., Torkuhl, L., Lindermeir, A., and Wehinger, G. D. (2021). Workflow for computational fluid dynamics modeling of fixed-bed reactors packed with metal foam pellets: Hydrodynamics. *AIChE Journal*, page e17284.
- Givler, R. and Altobelli, S. (1994). A determination of the effective viscosity for the brinkman–forchheimer flow model. *Journal of Fluid Mechanics*, 258:355–370.
- Gobin, D. and Goyeau, B. (2008). Natural convection in partially porous media: a brief overview. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 18(3/4):465–490.
- Gobin, D., Goyeau, B., and Songbe, J.-P. (1998). Double diffusive natural convection in a composite fluid-porous layer. *J. Heat Transfer*, 120:234–242.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Goharzadeh, A., Khalili, A., and Jørgensen, B. B. (2005). Transition layer thickness at a fluid-porous interface. *Physics of Fluids*, 17(5):057102.
- González-Brambila, M. and López-Isunza, F. (2007). Transporte de masa y reacción en una biopelícula. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 6(2):127–136.
- Goyeau, B., Benihaddadene, T., Gobin, D., and Quintard, M. (1997). Averaged momentum equation for flow through a nonhomogeneous porous structure. *Transport in porous media*, 28(1):19–50.
- Goyeau, B., Gobin, D., Benihaddadene, T., and Quintard, M. (1999). Numerical calculation of the permeability in a dendritic mushy zone. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 30(4):613–622.
- Goyeau, B., Lhuillier, D., Gobin, D., and Velarde, M. (2003). Momentum transport at a fluid-porous interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(21):4071–4081.
- Gray, W. G. (1975). A derivation of the equations for multi-phase transport. *Chemical Engineering Science*, 30(2):229–233.
- Gray, W. G. and Miller, C. T. (2014). *Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems*. Springer.
- Guo, Z. and Zhao, T. (2005). A lattice boltzmann model for convection heat transfer in porous media. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 47(2):157–177.
- Gupte, S. and Advani, S. (1997). Flow near the permeable boundary of a porous medium: An experimental investigation using lda. *Experiments in Fluids*, 22(5):408–422.
- Hernandez-Aguirre, A., Castillo, C. O., Ochoa-Tapia, J. A., and Hernandez-Rodriguez, R. (2022a). A generalized pseudo-continuous model for single phase flow in a packed bed reactor with a low d_t/d_p . *Chemical Engineering Journal*, 429:132061.
- Hernandez-Aguirre, A., Hernandez-Martinez, E., López-Isunza, F., and Castillo, C. O. (2022b). Framing a novel approach for pseudo continuous modeling using direct numerical simulations (dns): Fluid dynamics in a packed bed reactor. *Chemical Engineering Journal*, 429:132061.
- Hernandez-Rodriguez, R., Angot, P., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2019). Average velocity profile between a fluid layer and a porous medium: Brinkman boundary layer. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, (-):-.
- Hernandez-Rodriguez, R., Angot, P., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2021). Momentum transport in the free fluid-porous medium transition layer: one-domain approach. *Chemical Engineering Science*, page 117111.
- Howes, F. A. and Whitaker, S. (1985). The spatial averaging theorem revisited. *Chemical engineering science*, 40(8):1387–1392.
- Hubbert, M. K. (1940). The theory of ground-water motion. *The Journal of Geology*, 48(8, Part 1):785–944.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Inc, F. (2003). Fluent user's guide. *Fluent Inc.*, 2(3).
- Irmay, S. (1958). On the theoretical derivation of darcy and forchheimer formulas. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 39(4):702–707.
- Jiménez-Islas, H., Calderón-Ramírez, M., Navarrete-Bolaños, J., Botello-Álvarez, J., Martínez-González, G., and López-Isunza, F. (2009). Numerical study of natural convection in a 2-d square cavity with fluid-porous medium interface and heat generation. *Revista mexicana de ingeniería química*, 8(2):169–185.
- Jones, I. (1973). Low reynolds number flow past a porous spherical shell. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 73, pages 231–238. Cambridge University Press.
- Khalili, A., Basu, A., and Pietrzyk, U. (1998). Flow visualization in porous media via positron emission tomography. *Physics of Fluids*, 10(4):1031–1033.
- Khalili, A., Matyka, M., Mohammadi, R. M., Weise, J., and Kuypers, M. M. (2018). Porosity variation within a porous bed composed of multisized grains. *Powder technology*, 338:830–835.
- Khalili, A., Morad, M. R., Matyka, M., Liu, B., Malekmohammadi, R., Weise, J., and Kuypers, M. M. (2014). Porosity variation below a fluid–porous interface. *Chemical Engineering Science*, 107:311–316.
- Kim, S. and Russel, W. B. (1985). Modelling of porous media by renormalization of the stokes equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 154:269–286.
- Kolodziej, J. (1988). Influence of the porosity of a porous medium on the effective viscosity in brinkman's filtration equation. *Acta Mechanica*, 75(1):241–254.
- Koplik, J., Levine, H., and Zee, A. (1983). Viscosity renormalization in the brinkman equation. *The Physics of fluids*, 26(10):2864–2870.
- Kozeny, J. (1927). Uber kapillare leitung der wasser in boden. *Royal Academy of Science, Vienna, Proc. Class I*, 136:271–306.
- Kumar, A., Založnik, M., Combeau, H., Goyeau, B., and Gobin, D. (2013). A numerical simulation of columnar solidification: influence of inertia on channel segregation. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 21(4):045016.
- Kuznetsov, A. (1996). Analytical investigation of the fluid flow in the interface region between a porous medium and a clear fluid in channels partially filled with a porous medium. *Applied scientific research*, 56(1):53–67.
- Kuznetsov, A. and Xiong, M. (1999). On the limitations of the single-domain approach for computation of convection in composite channels? comparisons with exact solutions. *Hybrid Methods in Engineering*, 1(3).
- Lācis, U. and Bagheri, S. (2017). A framework for computing effective boundary conditions at the interface between free fluid and a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 812:866–889.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Larson, R. and Higdon, J. J. (1986). Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. part 1. axial flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 166:449–472.
- Larson, R. and Higdon, J. J. (1987). Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. part 2. transverse flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 178:119–136.
- Lasseux, D., Abbasian Arani, A. A., and Ahmadi, A. (2011). On the stationary macroscopic inertial effects for one phase flow in ordered and disordered porous media. *Physics of fluids*, 23(7):073103.
- Le Breton, P., Caltagirone, J., and Arquís, E. (1991). Natural convection in a square cavity with thin porous layers on its vertical walls. *ASME Journal of Heat and Mass Transfer*, 113(4):892–898.
- Lowe, R. J., Shavit, U., Falter, J. L., Koseff, J. R., and Monismith, S. G. (2008). Modeling flow in coral communities with and without waves: A synthesis of porous media and canopy flow approaches. *Limnology and Oceanography*, 53(6):2668–2680.
- Luminari, N., Zampogna, G. A., Airiau, C., and Bottaro, A. (2019). A penalization method to treat the interface between a free-fluid region and a fibrous porous medium. *Journal of Porous Media*, 22(9).
- Lundgren, T. S. (1972). Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 51(2):273–299.
- Macdonald, I., El-Sayed, M., Mow, K., and Dullien, F. (1979). Flow through porous media-the ergun equation revisited. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 18(3):199–208.
- Marle, C. (1967). Ecoulements monophasiques en milieu poreux. *Rev. Inst. Francais du Petrole*, 22(10):1471–1509.
- Martys, N., Bentz, D. P., and Garboczi, E. J. (1994). Computer simulation study of the effective viscosity in brinkman’s equation. *Physics of Fluids*, 6(4):1434–1439.
- Matheron, G. (1965). *Les variables régionalisées et leur estimation: une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature*. Masson et CIE.
- Mei, C. C. and Vernescu, B. (2010). *Homogenization methods for multiscale mechanics*. World scientific.
- Mercier, J.-F. o., Weisman, C., Firdaouss, M., and Le Qué´re´, P. (2002). Heat transfer associated to natural convection flow in a partly porous cavity. *J. Heat Transfer*, 124(1):130–143.
- Min, J. Y. and Kim, S. J. (2005). A novel methodology for thermal analysis of a composite system consisting of a porous medium and an adjacent fluid layer. *J. Heat Transfer*, 127(6):648–656.
- Minale, M. (2016). Modelling the flow of a second order fluid through and over a porous medium using the volume averages. i. the generalized brinkman’s equation. *Physics of Fluids*, 28(2):023102.
- Morad, M. R. and Khalili, A. (2009). Transition layer thickness in a fluid-porous medium of multi-sized spherical beads. *Experiments in Fluids*, 46(2):323.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Neale, G. and Nader, W. (1974). Practical significance of brinkman's extension of darcy's law: coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 52(4):475–478.
- Nield, D. (1991). The limitations of the brinkman-forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 12(3):269–272.
- Nield, D. A. and Bejan, A. (2006). *Convection in porous media*, volume 3. Springer.
- Ochoa-Tapia, J. A., Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B., and Lasseux, D. (2017). Fluid motion in the fluid/porous medium inter-region. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 16(3):923938.
- Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1995a). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid -i. theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(14):2635–2646.
- Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1995b). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-ii. comparison with experiment. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(14):2647–2655.
- Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1997). Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(11):2691–2707.
- Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1998a). Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: the one-equation model. *Journal of Porous Media*, 1(1).
- Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1998b). Momentum jump condition at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: inertial effects. *Journal of Porous Media*, 1(3):201–217.
- Oliveros-Muñoz, J. M., Calderón-Alvarado, M. P., Martínez-González, G. M., Navarrete-Bolaños, J. L., and Jiménez-Islas, H. (2017). One-domain approach for studying multiphase transport phenomena in biofilm growing systems. *Biofouling*, 33(4):336–351.
- Paéz-García, C. T., Valdés-Parada, F. J., and Lasseux, D. (2017). Macroscopic momentum and mechanical energy equations for incompressible single-phase flow in porous media. *Physical Review E*, 95(2):1–12.
- Poulikakos, D. and Renken, K. (1987). Forced convection in a channel filled with porous medium, including the effects of flow inertia, variable porosity, and brinkman friction. *Journal of heat transfer*, 109(4):880–888.
- Quintard, M. and Whitaker, S. (1987). Ecoulement monophasique en milieu poreux: Effet des hétérogénéités locales. *J. Meca Theor. Appl*, 6:691–726.
- Richardson, S. (1971). A model for the boundary condition of a porous material. Part 2. *J. Fluid Mech.*, 49(part2):327–336.
- Ross, S. (1983). Theoretical model of the boundary condition at a fluid-porous interface. *AIChE journal*, 29(5):840–846.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Roux, P., Goyeau, B., Gobin, D., Fichot, F., and Quintard, M. (2006). Chemical non-equilibrium modelling of columnar solidification. *International journal of heat and mass transfer*, 49(23-24):4496–4510.
- Rybak, I., Schwarzmeier, C., Eggenweiler, E., and Rde, U. (2021). Validation and calibration of coupled porous-medium and free-flow problems using pore-scale resolved models. *Computational Geosciences*, 25(2):621–635.
- Saberinejad, H., Keshavarz, A., Payandehdoost, M., Azmoodeh, M. R., and Batooei, A. (2018). Numerical study of heat transfer performance in a pipe partially filled with non-uniform porous media under Itne condition. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 28(8):1845–1865.
- Saffman, P. G. (1971). On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium. *Studies in Applied Mathematics*, 50(2):93–101.
- Sahraoui, M. and Kaviany, M. (1992). Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(4):927–943.
- Sánchez-Palencia, E. (1980). Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture notes in physics*, 127.
- Sánchez-Palencia, E. (1986). Homogenization in mechanics. a survey of solved and open problems. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 44(1):1–45.
- Sro-Guillaume, O. and Margerit, J. (2002). Modelling forest fires. part i: a complete set of equations derived by extended irreversible thermodynamics. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(8):1705–1722.
- Slattery, J. C. (1967). Flow of viscoelastic fluids through porous media. *AIChE Journal*, 13(6):1066–1071.
- Sudhakar, Y., Lcis, U., Pasche, S., and Bagheri, S. (2021). Higher-order homogenized boundary conditions for flows over rough and porous surfaces. *Transport in Porous Media*, 136(1):1–42.
- Tam, C. K. (1969). The drag on a cloud of spherical particles in low reynolds number flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 38(3):537–546.
- Targui, N. and Kahalerras, H. (2013). Analysis of a double pipe heat exchanger performance by use of porous baffles and pulsating flow. *Energy Conversion and Management*, 76:43–54.
- Targui, N. and Kahalerras, H. (2014). Analysis of a double pipe heat exchanger performance by use of porous baffles and nanofluids. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineerig*, 8(9):1581–1586.
- Taylor, G. I. (1971). A model for boundary condition of a porous material. Part 1. *J. Fluid Mech.*, 49(2):310–326.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Turki, S. and Lauriat, G. (1990). An examination of two numerical procedures for natural convection in composite enclosures. In *AIAA/ASME Thermophys. Heat Transfert Conf. ASME-HTD*, volume 130, pages 107–113.
- Uribe, S., Qi, B., Cordero, M. E., and Al-Dahhan, M. (2021). Comparison between pseudohomogeneous and resolved-particle models for liquid hydrodynamics in packed-bed reactors. *Chemical Engineering Research and Design*, 166:158–171.
- Vafai, K. and Kim, S. (1990). Fluid mechanics of the interface region between a porous medium and a fluid layer: an exact solution. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 11(3):254–256.
- Vafai, K. and Kim, S. (1995). On the limitations of the brinkman-forchheimer-extended darcy equation. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 16(1):11–15.
- Vafai, K. and Tien, C. L. (1981). Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24(2):195–203.
- Vafai, K. and Tien, C. L. (1982). Boundary and inertia effects on convective mass transfer in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 25(8):1183–1190.
- Valdés-Parada, F. J., Aguilar-Madera, C. G., Ochoa-Tapia, J. A., and Goyeau, B. (2013). Velocity and stress jump conditions between a porous medium and a fluid. *Advances in water resources*, 62:327–339.
- Valdés-Parada, F. J., Alvarez-Ramírez, J., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2009a). Computation of jump coefficients for momentum transfer between a porous medium and a fluid using a closed generalized transfer equation. *Transport in porous media*, 78(3):439–457.
- Valdés-Parada, F. J., Alvarez-Ramírez, J., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2009b). Jump condition for diffusive and convective mass transfer between a porous medium and a fluid involving adsorption and chemical reaction. *Transport in porous media*, 78(3):459–476.
- Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2006). Diffusive mass transfer between a microporous medium and an homogeneous fluid: Jump boundary conditions. *Chemical Engineering Science*, 61(5):1692–1704.
- Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B., and Ochoa-Tapia, J. A. (2007a). Jump momentum boundary condition at a fluid–porous dividing surface: derivation of the closure problem. *Chemical engineering science*, 62(15):4025–4039.
- Valdés-Parada, F. J., Ochoa-Tapia, J. A., and Alvarez-Ramírez, J. e. (2007b). Diffusive mass transport in the fluid–porous medium inter-region: Closure problem solution for the one-domain approach. *Chemical Engineering Science*, 62(21):6054–6068.
- Wang, Y., Ahmadi, A., and Lasseux, D. (2019). On the inertial single phase flow in 2d model porous media: Role of microscopic structural disorder. *Transport in Porous Media*, pages 1–20.
- Ward, J. (1964). Turbulent flow in porous media. *Journal of the Hydraulics Division*, 90(5):1–12.

Apéndice C. Modelo de un dominio de flujo inercial abierto

- Whitaker, S. (1966). The equations of motion in porous media. *Chemical Engineering Science*, 21(3):291–300.
- Whitaker, S. (1969). Advances in theory of fluid motion in porous media. *Industrial & engineering chemistry*, 61(12):14–28.
- Whitaker, S. (1981). Introduction to fluid mechanics, re kriegler pub. Co., Malabar, Florida.
- Whitaker, S. (1986). Flow in porous media i: A theoretical derivation of darcy's law. *Transport in porous media*, 1(1):3–25.
- Whitaker, S. (1996). The forchheimer equation: a theoretical development. *Transport in Porous media*, 25(1):27–61.
- Whitaker, S. (1999). *The method of volume averaging*. Kluwer Academic Publishers.
- Whitaker, S. (2009). Chemical engineering education: Making connections at interfaces. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 8(1):1–33.
- Wilson, J. D. and Flesch, T. K. (1999). Wind and remnant tree sway in forest cutblocks. iii. a windflow model to diagnose spatial variation. *Agricultural and Forest Meteorology*, 93(4):259–282.
- Wood, B. D., Quintard, M., and Whitaker, S. (2000). Jump conditions at non-uniform boundaries: the catalytic surface. *Chemical Engineering Science*, 55(22):5231–5245.
- Wood, B. D. and Valdés-Parada, F. J. (2013). Volume averaging: Local and nonlocal closures using a green's function approach. *Advances in water resources*, 51:139–167.
- Yu, P. (2012). Numerical simulation on oxygen transfer in a porous scaffold for animal cell culture. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(15-16):4043–4052.
- Zampogna, G. A. and Bottaro, A. (2016). Fluid flow over and through a regular bundle of rigid fibres. *Journal of Fluid Mechanics*, 792:5–35.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00091

Matrícula: 2153805257

MODELOS DE UN DOMINIO PARA EL FLUJO DE UN FLUIDO EN LA INTER-REGIÓN MEDIO LIBRE/MEDIO POROSO.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 16 del mes de junio del año 2023 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ
- DR. JOSE JAVIER VALENCIA LOPEZ
- DR. ELISEO HERNANDEZ MARTINEZ
- DR. HUGO JIMENEZ ISLAS
- DR. CARLOS OMAR CASTILLO ARAIZA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (INGENIERIA QUIMICA)

DE: ROEL HERNANDEZ RODRIGUEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



ROEL HERNANDEZ RODRIGUEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

VOCAL

DR. JOSE JAVIER VALENCIA LOPEZ

VOCAL

DR. ELISEO HERNANDEZ MARTINEZ

VOCAL

DR. HUGO JIMENEZ ISLAS

SECRETARIO

DR. CARLOS OMAR CASTILLO ARAIZA