UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISIÓN CIENCIAS BÁSICAS E
INGENIERIA

ESTABILIDAD EN EL EQUILIBRIO ECONÓMICO GENERAL

TESIS

QUE PRESENTA:

Natanael Fernando Márquez Juárez

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

Matemáticas Aplicadas e Industriales

Asesor: **Dr. Carlos Ibarra Valdez**

Jurado:

Ciudad de México

Índice general

Introducción General

La noción de que en cualquier economía competitiva converge al equilibrio económico general (EEG en adelante) planteó tres problemas matemáticos inherentes a él. El primer de ellos, concerniente a la existencia, había sido abordado sin éxito por León Walras en sus El´ements dEconomie Politique Pure en 1874. Si bien una primera aproximación a la solución sería esclarecida por Wald en 1937, la respuesta definitiva debería aguardar hasta el año de 1954, en el cual Arrow, Debreu y Mckenzie (éste último de forma independiente) apuntalarían la economía matemática al esclarecer los elementos teóricos necesarios para observar la existencia del equilibrio económico, como sería la introducción de la Teoría de Puntos Fijos al análisis económico, y de este modo dar respuestas a los planteamientos rudimentarios y generalizados de Adam Smith, expuestos doscientos años atrás en la Riquezas de las Naciones y sintetizados en la metáfora de la *mano invisible*.

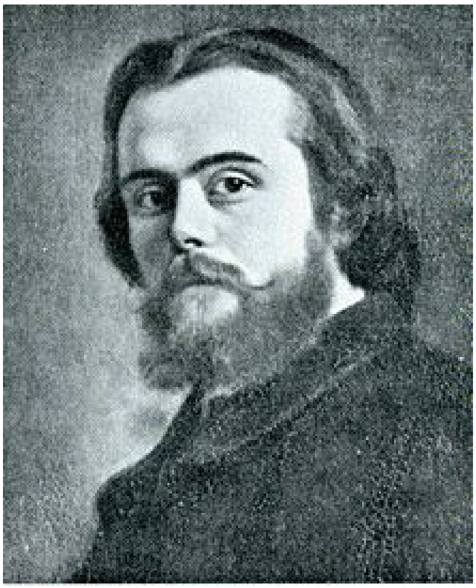


Figura 1: *León Walras (1834-1910)*

En el contexto del primer problema, pueden situarse resultados de alta trascendencia que hoy son temáticas clásicas como los Teorema del Bienestar y cuyas consecuencias motivarían el desarrollo del programa del EEG como puntas de lanzas para analizar el intercambio puro, los mecanismos de precios y las propiedades del equilibrio económico en términos de la eficiencia social que adquieren las sociedades capitalistas bajo el supuesto de competencia y racionalidad perfecta. Así como temáticas de índole meramente matemática, pero con importante valor ulterior en los avances del programa como lo serían las diversas equivalencias entre teoremas de punto fijo y el problema de existencia del EEG cuyas principales consecuencias devendrán en una amplia gama de algoritmos de búsqueda inaugurados por Scarf en 1960.

El segundo problema que estudia la unicidad, fue desarrollado por los trabajos de Debreu en los 70, acuñando el concepto de economías regulares para ese fin. Este problema más bien técnico no presentaría el mismo grado de síntesis que el problema precedente y rápidamente pudo contrastarse una enorme literatura con resultados particulares y restrictivos que a todas luces eran insuficientes para introducir al programa, el análisis comparativo que tenían como finalidad extender y utilizar el modelo de Arrow y Debreu en materia de política económica, objetivo que sólo tendría sentido bajo un esquema de equilibrio único, sin embargo los mejores resultados obtenidos fueron en el esquema de unicidad local cuyo resultado más representativo es el Teorema del índice el cual dota al programa con dos consecuencias relevantes: de no ser único globalmente el equilibrio, éste es finito y el número de ellos será siempre impar y en general, el resultado precedente tienden un nexo interesante para estudiar variedades de equilibrios en el que se estudian sus propiedades y que se cumplen para al menos toda economía de intercambio.

Figura 2: *Kenneth Arrow (1921-2017)*

La estabilidad del Equilibrio Económico General, por otro lado, centrada en estudiar la dinámica de precios, caracterizados por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (tantas ecuaciones como mercados sea considerados en la economía), cuyos argumentos reflejan la relación matemática entre oferta y demanda agregadas, ha llegado ser el paradigma de las dificultades que afronta la disciplina económica.

Mucho se ha escrito sobre la cuestión. Desde Bala y Kiefer (1995), denominándolo “el santo grial” del EEG, pasando por Steve Smale quien en *Mathematical Problems for the Next Century* lo considera “el principal problema de la teoría económica”, hasta Donald Saari (1995) –cuyo artículo es la mejor síntesis del problema- y su dramática sentencia: "*even simple economic models can exhibit dynamical behavior far more complex than anything found in classical physics or biology"*, la estabilidad del EEG no requiere mayor justificación por su importancia en una teoría que condiciona sus resultados más relevantes en el equilibrio.

Como explicaría Fischer (1970) los principales resultados del programa del EEG parten tácitamente del buen funcionamiento dinámico de la economía, en cuyo caso los Teoremas del Bienestar y las propiedades óptimas en el equilibrio requieren que la economía converja al equilibrio en el “corto plazo”, sin convergencia los resultados del PEEG poco valen y en cuyo caso “it is not too strong to say that the entire theory of value is at stake”

(Fisher, 1987).

Históricamente la teoría sobre estabilidad del EEG, fue gestándose incluso antes de tener una solución satisfactoria al problema de existencia. Aunque dicha gestación era general y sin una teoría sobre unicidad global específica para el EEG, autores destacados como J. Hicks (1946) introduce una primera definición de estabilidad (llamándola estabilidad perfecta) y Samuelson (1947), autor del problema ordinario tal como lo conocemos hoy día, despejaron el camino para que en 1958 , Arrow y Hurwitz en *On the Stability of the Competitive Equilibrium I* estandarizaran tanto la definición de estabilidad como el planteamiento del problema. Un año después a la publicación anterior, Arrow y Hurwitz presentan los primeros resultados generales tanto para estabilidad (y por muchos años los únicos que existían) como para unicidad global. A partir de ese momento, fueron notables las contribuciones de Scarf (1963) exponiendo una economía de intercambio globalmente inestable, que en un primer momento no alarmaría a la comunidad hasta bien entrados en la década de los 70's cuando Sonnenschein, Mantel y Debreu demuestran que la micro-fundamentación (de la cual dependen el EEG como teoría que supone una mano invisible que guía el sistema al equilibrio) no proporciona una estructura bien definida a partir de los axiomas conductuales de los agentes a niveles agregados (Kirman, 2006, p. 257) y que a la postre culminaría con una rígida y despiadada crítica al PEEG ante sus pésimos resultados empíricos lo que supuso cuestionar "el carácter central de la teoría del equilibrio económico general y plantear alternativas a la misma" (Rizvi, 2006). Si bien, algunos autores como Kirman (1989) y Bliss (1993) señalarían la vacuidad acerca de la teoría del EEG al parecer insostenible tener enunciados falsables, el artículo de Brown y Matzkin (1996) demostraría parcialmente lo contrario. Parcialmente porque -como señala Rizvi (2005)- Brown y Matzkin prueban que efectivamente la variedad de equilibrio da pie a contrastar teoría con datos reales, sin embargo ellos son incapaces de mostrar lo mismo para las funciones de exceso de demanda, las cuales son el centro del Teorema de Sonnenschein, Mantel y Debreu.

En paralelo a los descubrimientos independientes de Sonnenschein, Mantel y Debreu, el programa del EEG implementaría diversas líneas estratégicas para atacar economías tipo Scarf, siendo particularmente fructíferas el desarrollo de la teoría de mecanismos (continuos) de precios efectivos los cuales desembocarían a partir del artículo de Smale (1974) como una alternativa atractiva al tanteo walrasiano. Smale (1974) descubriría que bajo una cierta forma funcional, la información necesaria para lograr convergencia local requería el vector de precios y la tasa de cambio de los mismos, sin embargo rápidamente se hizo notorio el alto costo computacional de hacer operativo el método de Smale. Saari y Simon (1976) comprobarían que la información del método de Smale no podía reducirse sin perder sus atractivos teóricos, hecho que sería patente al contrastarse con otros mecanismos diseñados por Kayima (1991) y Nukherji (1995).Resultados semejantes se obtendrían al considerar mecanismos iterativos, para los cuales se evidencio al trabajar con economías tipo Scarf que las economías podían mostrar caos y barajándose la posibilidad de un concepto de caos no conocido hasta entonces por la literatura (Saari, 1995).

Figura 3: *Gerad Debreu (1921-2004)*

Si bien, cada línea estratégica usada para atacar la inestabilidad en las economías han fracasado en mayor o menor grado, la inspiración para sesgarse en el estudio de este problema es su estrecho vínculo con los problemas más impactantes de la teoría económica moderna, del artículo de Saari (1995) no parece descabellado asentar que las fallas de estabilidad en el equilibrio económico general son consecuencia de las dificultades de agregar consistentemente hecho que ha sido corroborado en diversas áreas de la teoría económica. Los objetivos que se persiguen en este trabajo son comentar superficialmente esos vínculos, así como sintetizar los principales resultados del problema, los cuales presumiblemente son desconocidos en los círculos de economistas teóricos y aplicados.

La división del trabajo fue organizada de la siguiente manera: El primer capítulo aborda la *mano invisible* de Adam Smith. En el segundo, el lector podrá encontrar resultados ampliamente conocidos en la teoría económica, usada para construir el modelo de intercambio del EEG. En el tercero, se procederá a discutir el problema de existencia y unicidad para finalmente dar paso a los resultados de estabilidad del EEG.

Capítulo 1

Mano Invisible

1.1. Introducción

Pocos temas en economía han sido tan estudiados y controversiales como lo ha sido la Teoría del Equilibrio General Económico (EEG en adelante), en la que más de doscientos años de pensamiento económico han contribuido para establecer sus grandes consecuencias entorno a la formación de precios, la producción y la demanda, en términos de una estructura matemáticamente consistente, axiomatizada y libre de discusiones más bien filosóficas que inherentemente acompañaron a la economía política en sus primeras disertaciones.

Pese a los grandes avances de la disciplina respecto a sus humildes orígenes, en el pensamiento económico pocas premisas han tenido tanta trascendencia y efecto en el pensamiento colectivo de una disciplina como la metáfora de Adam Smith. Desde los primeros cursos de economía política, los economistas son formados en diversas interpretaciones de la mano invisible y sus premisas han atraído la atención por el contenido y sus impactos en el modelo del precio del EEG y han sido aceptadas por unanimidad por economistas de primera línea, para explicar cómo las fuerzas del mercado actúan y permiten consolidar el bienestar económico en los sistemas capitalistas mediante el libre mercado, el sistema de precios y el liberalismo económico como principales ejes del análisis económico moderno.

1.2. Una Interpretación de la Mano Invisible

Más de dos siglos han transcurrido desde que Adam Smith diera a la imprenta la Riqueza de las Naciones, obra que por demás es reflejo fidedigno de una época ilustrada, revolucionaria y compleja que dudosamente podría haberse gestado fuera del seno y cobijo de la revolución industrial británica a la que Smith alude constantemente a lo largo y ancho de su obra. Diez años de esmerado trabajo tardaría en reunir y ordenar sus manuscritos en la obra que hoy conocemos, influenciado en mayor o menor medida por la fisiocrácia, el mercantilistas y la filosofía política de Hobbes y Hume, mismas que cristalizaría en una de sus aportaciones más significativas una vez teniendo un elemento teórico sobre la conformación de la sociedad que ha trascendido del estado de naturaleza a una sociedad estatizada que permite a sus individuos interactuar y solventar sus necesidades acudiendo al mercado para tal índole.

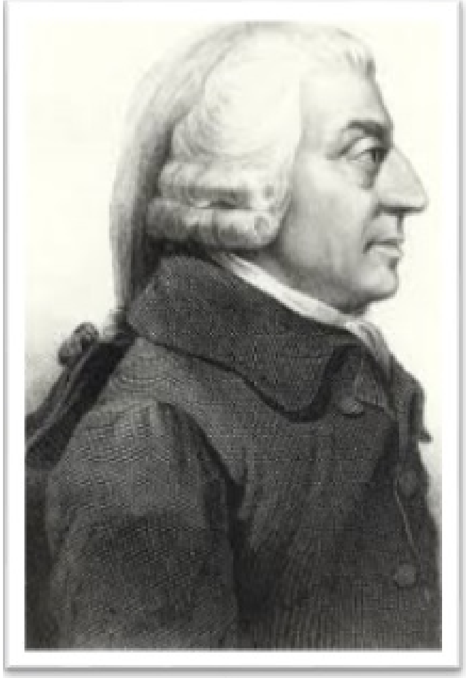
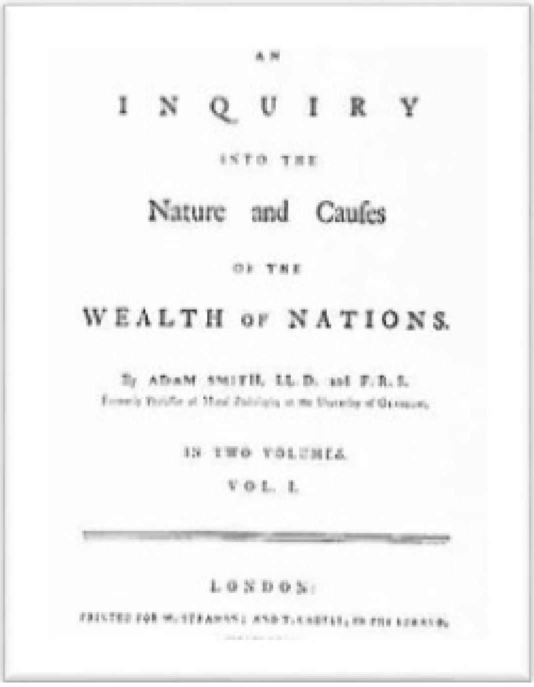
Como abría de esperarse de una obra fundacional, antes de Smith, es insostenible encontrar la reunión y sistematización de temáticas tan bastas en materia económica como fueron agrupadas en las Riqueza de las Naciones. Si bien es cierto, no era el único tratado que venía hablando de economía política[1] las aportación de las Riqueza de las Naciones al pensamiento económico son incuestionables; así lo demostraría el itinerario de los clásicos en torno a la acumulación del capital y la teoría del valor trabajo, pero de todas ellas, la metáfora de la Mano Invisible ha sido indudablemente la más importante y duradera de todas ellas:

Cuando prefiere (el individuo) la actividad económica de su país a la extranjera, únicamente considera su seguridad, y cuando dirige la primera de tal forma que su producto represente el mayor valor posible, sólo piensa en su ganancia propia; pero en éste como en muchos casos, es conducido por una mano invisible a promover un fin que no entraba en sus intensiones. Mas no implica mal alguno para la sociedad que tal fin no entre en formar parte de sus propósitos, pues al perseguir sus propio interés, promueve el de la sociedad de una manera más efectiva que si esto entrara en sus designios. (Smith, p.412)

Si bien el pasaje anterior sería la única mención explícita de la metáfora en las Riquezas de las Naciones, ha existido gran controversia sobre las identidades de la mano invisible y sus funciones una vez teniendo como punto de partida individuos que a priori difieren mutuamente en sus objetivos. De este modo la mano invisible ha padecido de una disfuncionalidad conceptiva que dificulta en gran medida identificar concretamente el sujeto del que se dice de ella, explicado en parte por las pocas referencias que tenemos en el corpus Smithiano *Riqueza de las Naciones* , donde puede leerse:[2] y otro tanto más por las

[1]La economía política, considerada como uno de los ramos de la ciencia del legislador o del estadista, se propone dos objetivos distintos: el primero, suministrar al pueblo de un abundante ingreso, o subsistencia, o hablando con más propiedad, habilitar a sus individuos y ponerles en condición de lograr por si mismos ambas cosas; el segundo proveer al Estado o República de rentas suficientes para los servicios públicos. Procurar realizar, pues, ambos fines, o sea enriquecer al soberano y al pueblo. Smith p. 377

[2]El pasaje citado es el único lugar donde aparece la metáfora. Dentro del corpus principal smithiano, la primera aparición de la mano invisible data del año 1756 en Teoría de los sentimientos Morales. Una segunda referencia se encuentra en History of Astronomy. La primera referencia es más cercana a la idea de Smith en la *Riqueza de las Naciones* , donde puede leerse: *They are led by an invisible hand to share out life?s necessities in just about the same way that they would have been shared out if the earth been divided into equal portions among all its inhabitants. And so without intending it, without knowing it, they advance the interests of the society .ªs a whole", and provide means for the survival of the species.* Ver Samuels,



AN

INQUIRY

INTO THE

Nature and Caufes

OF THE

WEALTH OF NATIONS.

IN TWO VOLUMES.

VOL. I.

LONDON:

Figura 1.1: Adam Smith (1700-1779)

diferentes identidades que a lo largo de la historia se han asociado a la metáfora y no han sido pocas las dificultades por esclarecer con precisión lo que la mente de Smith venía pensado al lanzar su metáfora como piedra de toque en sus concepciones económicas de la sociedad. De este modo, la metáfora se ha asociado con los mercados competitivos, el sistema de precios, o en un caso extremo con la existencia de múltiples “manos invisibles” o simplemente como un recurso retorico con reminiscencias teológicas, sin que por ello se exenten dificultades lingüísticas en cada caso.[3]

Pese a ello, parece haber consenso en admitir que la *mano invisible* interrelaciona de algún modo los intereses individuales en expresiones económicamente significativas con el sistema de precios, la eficiencia social y el liberalismo económico, en forma tal que al agrupar o agregar individuos conductualmente racionales y egoístas, el sistema económico muestra sus más grandes virtudes. Dicho de este modo, uno de los paradigmas económicos que con mayor popularidad y tradición han contribuido en describir las modalidades de la *mano invisible* en el sistema económico han devenido directamente del EEG cuyo propósito es estudiar las fuerzas del mercado desde un punto de vista axiomático una vez que éste establece como identidad de la mano invisible al sistema como un todo. Sin embargo las aceptaciones cotidianas de la metáfora poco caso han hecho al comprender que la *mano invisible* en mayor o menor medida es un concepto repleto de dinamismo, y no denotan una situación estática en la que la parsimonia y el orden social

Johnson y Perry (2011) para más detalles.

[3]Por ejemplo Samuels, Johnson y Perry (2011, p.63) señalan:

Some of those who identify the invisible hand as a metaphor also identify the market as a metaphor, leading to the awkward result in which one metaphor is employed to identify another metaphor.

surjan espontáneamente y por consecuencia el sistema como un todo integra en sí la ingeniería por la cual los mecanismos de precios actúan como el andamiaje principal que conduce y pone en marcha los elementos que por consenso son admitidos como identidades de la *mano invisible*.

Sea que Smith usara la metáfora como un recurso retorico o no, el EEG al establecer una interpretación sistémica de la mano invisible en la que cada individuo se ve involucrado en un *quid pro quo* de modo que si bien no es la benevolencia del carnicero, del cervecero o del panadero la que nos procura el alimento, sino la consideración de su propio interés." (Smith, p.17) por la que naturalmente los bienes encuentran su reproducción, y el beneficio económico del que sede derechos de propiedad; en el intercambio las fuerzas del mercado al determinar el sistema de precios establecen una situación socialmente óptima según un principio, en el que sin importar la cantidad y juegos de interés, los planes de cada individuo son mutuamente compatibles únicamente en el equilibrio económico. De este modo, una vez aceptado que los individuos promueven sus intereses personales y esta competencia es una situación tal que sin dañar, o agravar las libertades individuales, cada uno se ve sujeto en hacer uso de sus pericias y recursos , mismos que al competir, la mano invisible guía al sistema económico al bienestar social gracias a que cada individuo aún sin considerarlo, contribuye con sus esfuerzos por buscar oportunidades de bienestar individual, en el que el sistema económico por si mismo se las arregla sin necesidad de involucrar al estado en su dinámica de ajuste.

Por consiguiente, suprimidos por completo todos los sistemas, ya sean preferentes o restrictivos se establece de modo espontaneo el evidente y simple sistema de libertad natural. Todo hombre, en cuanto no viole las leyes de la justicia, queda en completa libertad para procurar su interés a su modo, y para competir, tanto con su capital como su habilidad, con cualquier otro hombre o asociación de hombres. El soberano queda completamente liberado de un deber, en el que está expuesto a inumerables errores.

Dejando los detalles para más adelante, la perspectiva de la mano invisible como un principio que parte de unidades fundamentales para generar situaciones socialmente positivas, es en muchos sentidos una idea tentadora para explicar la trascendencia de lo que en economía se ha llamado microfundamentación y comprender los alcances de una teoría agregada, cimentada en unos cuantos axiomas que abstraen las características conductuales de sus unidades fundamentales.

Ciertamente, desde muchas perspectivas la metáfora de la *mano invisible* presupone como características la racionalidad y el egoísmo sin embargo si decimos como Dierker (1982) *General equilibrium theory describes those states of an economy in which the individual plans of many agents with partially conflicting interests are compatible with each other* y tal estado amerite ser llamado equilibrio económico, los problemas concernientes al EEG se sustenta en la medida en que el modelo pueda dar una explicación sobre la determinación de los precios que no es otra cosa que una explicación de la determinación del valor en las economías, de modo que una vez aceptado que el EEG genera su teoría del valor mediante los supuestos conductuales, podamos entender como el sistema económico constituye el equilibrio a partir del sistema de precios y el mecanismo de ajuste. De este modo debemos distinguir que la mano invisible en este sentido parte de un conjunto de individuos racionales y egoístas, que el sistema de precios según el cual, sin el que opere alguna fuerza distorsionadora, logra la perfecta coordinación entre todos los participantes de la economía estableciendo la información necesaria para intercambiar y retroalimentar al sistema, siendo tarea de la teoría del valor del EEG determinar los precios por medio de las fuerzas del mercado y, demostrar que en primer lugar el equilibrio existe y es óptimo para posteriormente estudiar si efectivamente el mecanismo de precios culmina en el equilibrio general.

1.3. Comentarios Adicionales

Al menos desde la publicación de la *Riquezas de las Naciones*, los economistas clásicos (Smith, Ricardo, Mill y Marx) tuvieron gran interés por desentrañar los determinantes de los precios mediante la postulación de una medida de valor invariante en el tiempo que permitiera analizar, no el valor monetario del bien, sino la tasación relativa de intercambio (precios relativos). Desde su óptica generativista , en economías (que denominaremos de intercambio) donde el dinero se omiten y los derechos de propiedad son definidos en formas elementales, o bien, en el "estado primitivo y rudo de la sociedad que precede a la acumulación del capital y a la apropiación de la tierra" , la formulación de los clásicos postularía como medida coherente del valor al trabajo , relegando a la clase bienes "que no puede multiplicar la actividad humana" (Ricardo, p.10) a ser considerados como bienes especiales, exentos de ser cuantificados por el trabajo y estar determinados en términos de su escasez. Como sería familiar en ellos, distinguirían entre dos acepciones en el término valor: valor de uso y valor en cambio mismos que constituyen el valor en términos de su utilidad y el trabajo incorporado en ellos, respectivamente; coincidiendo en la mayoría de los cosos uno con otro, cuya excepción desembocaría en la denominada paradoja del agua y los diamantes:

Las cosas que tienen un gran valor en uso tienen comúnmente escaso o ningún valor en cambio no tienen, muchas veces, sino un pequeño valor en uso, o ninguno. No hay nada más útil que el agua, pero con ella apenas se puede comprar cosa alguna ni recibir nada a cambio. Por el contrario, el diamante apenas tiene valor de uso, pero generalmente se puede adquirir, a cambio de él, una gran cantidad de otros bienes. (Smith,p.30)

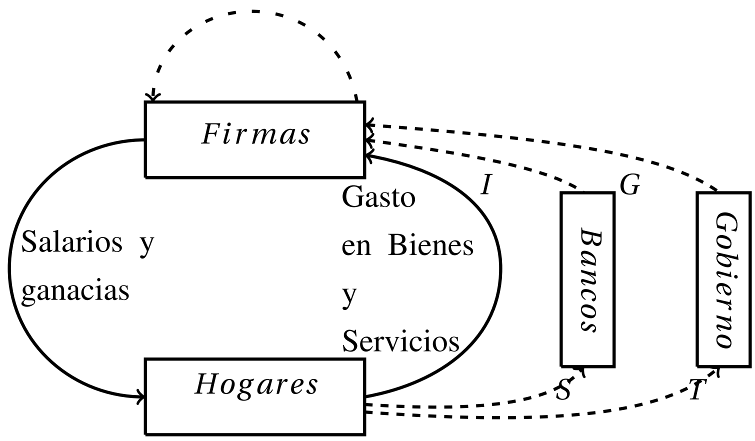
Aunque la discusión es más larga y ameritaría una mayor profundidad, el principal nexo entre los clásicos y el EEG reside en la concepción que los marginalistas como Jevons, Mengel y Walras, cuyas aportaciones permitieron desarrollar la teoría del valor que hoy conforma nuestro entendimiento de la Ley de la Demanda , por la cual se trasladaba el problema de la determinación de los precios de un esquema donde las características intrínsecas del bien dictaban la formación los precios relativos, a uno donde el principio de la utilidad marginal se desentiende de una atribución específica para tasar el valor por una perspectiva más bien subjetiva sin necesidad de atender o considerar las propiedades físicas o el trabajo incorporadas en los bienes, estableciéndose bajo el marginalismo que más bien atienden al deseo o la necesidad. [. . .] (misma que conduce a que) una persona esté dispuesta a pagar por el cumplimiento o la satisfacción de un deseo. (Marshall, p.81) o bien, en cuyo caso Utility must be considered as measured by, or even as actually identical with, the addition made to a person's happiness (Jevons, p.45).

Capítulo 2

Fundamentos Microeconómicos

2.1. Introducción

Desde la Aparición del Articulo de Arrow y Debreu: *Existence of an equilibrium for a competitive economy* (1954) han surgido diversos modelos del precio atendiendo a la naturaleza determinística o estocástica de los mercados y los bienes que se adquieren en ellos. Un elemento común a todos ellos es la inclusión de la oferta y demanda para determinar los precios relativos como atribución de la *mano invisible*. Si bien, los mercados estocásticos se muestran con mayores dificultades para ser englobados en un esquema tan simple, la teoría del EEG estándar parte exclusivamente de *economías perfectamente competitivas de naturaleza determinística* (EPCD) para derivar de las unidades primarias de análisis (consumidores y productores) una construcción axiomática de la oferta y la demanda a partir del supuesto de racionalidad perfecta. Las unidades primarias de análisis pueden describirse en un diagrama de flujo circular (imagen 1.1) dejando de lado el sector gobierno y los sistemas financieros a los que los modelos estocásticos prestan cercana atención.



Esencialmente las EPCD pueden clasificarse en Economías de Intercambio y Economías de Propiedad Privada. Las primeras ponen especial énfasis en el intercambio puro, i.e. son economías donde la producción y el dinero se omiten para abstraer los fenómenos de la demanda dando a cada consumidor un conjunto de bienes denominadas dotaciones iniciales, mediante las cuales el sistema de precios determina la proporción de intercambio de cada bien, en cambio, las economías de propiedad privada generalizan las anteriores e incorporan la producción y constituir planes de producción que permiten reproducción los bienes a lo largo del tiempo.Por razones de simplicidad, en este trabajo abordaremos únicamente economías de intercambio para estudiar el Programa del Equilibrio Económico General, que como se ha mencionado en la introducción, es constituido el problema de existencia, unicidad y estabilidad del EEG.

2.2. Racionalidad Económica

Uno de los supuestos más importantes del modelaje en teoría económica están ampliamente enraizada con el supuesto de racionalidad. El principal énfasis que ha dado la teoría económica en este rubro, ha consistido en estudiar la elección en entornos donde la incertidumbre es un sinónimo de información limitada en la que el agente debe decidir entre un conjunto de alternativas para seleccionar la mejor dada la información privada de suya y las posibles elecciones de otros agentes con capacidades intelectuales homogéneas a las de él.

Si bien el concepto de racionalidad es un concepto más amplio que el descrito arriba, la racionalidad en el sentido económico es un principio conductual que reclama consistencia en la elección y demanda del agente un gran autoconocimiento para distinguir preferencias y objetivos concretos. Así mismo, el grado de racionalidad que se dice de un individuo toma en consideración las habilidades cognitivas del sujeto, usadas para computabilizar y procesar información (Simon, 1954). De modo que la racionalidad al ser un supuesto conductual o también conocido como enfoque de caja negra, en contra a uno funcional donde las estructuras cognitivas del agente se relacionan para esclarecer el mecanismo de decisión (Bigelow, Rosenblueth, Wiener, 1943), se ha hecho de un lugar nada despreciable en la literatura para comprender elementos como aprendizaje y retroalimentación en entornos complejos y las pautas para “alcanzar el mejor resultado o, cuando hay incertidumbre, el mejor resultado esperado.” (Norving, 2007, p.5), así como aspectos epistemológicos más orillado a problemas de teoría de juegos , aunque también con cierta intersección con el enfoque del EEG.

Uno de los supuestos de racionalidad más populares ha sido denominado racionalidad perfecta en el sentido que los agentes tienen pleno conocimiento de toda la información existente en la economía (como precios, bienes, dotaciones iniciales). Este tipo de racionalidad a todas luces irreal, ha sido modelado exitosamente mediante espacios de elección $(X, \succeq)$ constituido por un conjunto de alternativas abstractas y una relación binaria

Figura 2.1: Caja Negra

$\geq\subset X \times X$ que permite realizar comparaciones dos a dos, dadas las alternativas existentes y cuya interpretación es la siguiente: dados $x, y \in X$ x es al menos tan buena que y siempre que . En cambio, cuando es una relación de preferencia (completa y transitiva), el enfoque de racionalidad perfecta cimienta la teoría microeconómica y por ende al EEG.

Si bien ha existido gran controversia en admitir un enfoque donde los agentes resuelven problemas de optimización instantáneamente, el enfoque de las relaciones de preferencias ha sido uno de los instrumentos mejor adaptados en economía matemática para construir problemas específicos de gran interés para este trabajo, como lo son la teoría del consumidor y del productor, a la vez que ha sido una de las exportaciones del pensamiento económico a otros campos como psicología y política más exitosos, una vez que adaptamos adecuadamente funciones de utilidad para estudiar problemas de desición racional.

Pese a que el enfoque precedente ha sido el más estudiado e incorporado en el modelaje, la literatura económica ha tenido la necesidad de incorporar conceptos de racionalidad más coherentes con las capacidades cognitivas humanas como lo es el tipo de racionalidad propuesto por Simón y conocido como *racionalidad acotada*:

An agent is boundedly rational if time and effort on his part are necessary to gain access to and process information, create a mental imagen of futures outcomes, carry out the necessary calculations to obtain a solution to a decision problem, and if the agent is limited in the amount of time and effort he can devote to such activities. (Magil y Quinzii, 1998, p.13).
Enfoque que acepta las siguientes limitaciones:

1. Limitaciones en el conocimiento que tiene el agente de su ambiente
2. Limitaciones en las habilidades por realizar inferencias del futuro
3. Finalmente, limitaciones en el cálculo de estrategias óptimas

El primero de ellos hace una referencia explícita a la asimetría de la información, mientras que el segundo punto ha encontrado un campo fértil en la teoría de los contratos. En cambio los aspectos relacionados con las estrategias óptimas han caído en la injerencia directa de la Teoría de Juegos (Magil y Quinzii, 1998, p.13) y hasta cierto punto se ha integrado a la literatura de diseño de mecanismos efectivos como elementos a considerar en un modelaje más realista. (Hurwitz, 2008).

Otro tipo de racionalidad existente, y que ha tenido mucho apogeo como alternativa seria a las precedentes son las *expectativas racionales* que en términos generales han sido usados con mayor frecuencia por macroeconomistas y por supuesto en modelos de EEG computacionales de corte Keynesianos. Bajo un esquema de expectativas racionales, el costo inherente de procesar información se traslada a la facultad de los agentes por interpretar las señales del presente para extrapolar en el futuro según una regla específica el valor futuro de alguna variable de interés. (Magil y Quinzii, 1998, p.21). Finalmente debe señalarse que este tipo de racionalidad se explota con mayor énfasis en modelos no determinísticos como los modelos financieros o en modelos de política económica monetaria.

Aunque cada uno de estos enfoques tiene ventajas comparativas uno respecto a otro, Magil y Quinzii (1998) señalan que mientras la racionalidad perfecta induce a los agentes a centrarse en la obtención de ganancias y (de haber la posibilidad) aprovechar oportunidades de arbitraje, la racionalidad acotada obliga a los agentes a incurrir en costos para obtener mayor información del ambiente económico. Desde luego Magil y Quinzii piensan, en lo que respecta a la primera propuesta de racionalidad, bajo una panorámica más orientada a los problemas de los mercados incompletos, es destacable para el problema de la estabilidad tener siempre presente que la información ejerce un centro neurálgico en el modelaje de la teoría del precio del EEG, en el que convenientemente se elige el primer esquema sobre la racionalidad acotada para centrarse exclusivamente en las cotas de información procedentes del sistema económico el cual nosotros en este trabajo no atendremos de lleno, aunque eso no signifique que la teoría de mecanismos no haya explorado la segunda alternativa desde un instrumental matemático para integrar estos elementos.

Siguiendo un orden lógico de exposición, nos dedicaremos a partir de este punto a desarrollar los elementos básicos para introducir los dos primeros problemas del programa del EEG, dedicándonos a introducir el concepto de economías de intercambio y los por menores de la teoría de la demanda.

2.3. Economías de Intercambio

Como hemos dicho en la introducción de esté capitulo una Economía de Intercambio es la forma más elemental de estudiar las fuerzas del mercado a partir del análisis exclusivo del sistema de demandas. Nuestro objetivo en esta sección será generar sus principales rudimentos a partir de los axiomas de racionalidad perfecta hasta obtener un modelo holístico de la economía que agrupe en una expresión las principales relaciones entre los parámetros de los agentes (dotaciones iniciales), el sistema de precios y sus interrelaciones con todos los mercados considerados en la economía.

Supongamos una economía compuesta por $\mathscr{I} = \{1, ..., m\}$ consumidores y $\mathscr{J} = \{1, ..., n\}$ bienes. Una *economía de intercambio* $\mathscr{E} = \left\{X, \succeq, \omega^i_j\right\}^{i\in\mathscr{I}}_{j\in\mathscr{J}}$ queda determinada por un sistema de precios $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, un vector de dotaciones iniciales $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{i}\in\mathscr{I}}$ estrictamente positiva y el espacio de bienes $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n_+$ no vacio, acotado por abajo y cerrado, siendo $\succeq \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ es una relación binaria.

Definición 2.3.1. *Una relación binaria $\succeq \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ se dice:*

1. ***Completa*** *si para toda cesta de consumo* $\mathbf{x^0}, \mathbb{1} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{x^0} \succeq \mathbf{x^1}$ *o* $\mathbf{x^1} \succeq \mathbf{x^0}$

2. ***Transitiva*** *si para toda cesta de consumo* $\mathbf{x^0}, \mathbf{x^1}, \mathbf{x^2} \in \mathbb{R}^n_+$ $\mathbf{x^0} \succeq \mathbf{x^1}$ *y* $\mathbf{x^2} \succeq \mathbf{x^3}$ *entonces* $\mathbf{x^1} \succeq \mathbf{x^3}$

3. ***Continua*** *si para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ *los conjuntos* $\succeq (\mathbf{x}) \equiv \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+ | \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}\right\}$ *y* $(\mathbf{x}) \succeq \equiv \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+ | \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\right\}$ *son cerrados*

4. ***Localmente no Saciable*** *si para toda cesta de consumo* $\mathbf{x^1} \in \mathbb{R}^n_+$ *y todo* $\epsilon > 0$ *existe una cesta* $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x^1})_\epsilon \cap \mathbb{R}^n_+$ *tal que* $\mathbf{x} \succ \mathbf{x^1}$ *(*$\mathbf{x}$ *sea estrictamente preferible a* $\mathbf{x^1}$*)*

5. ***Convexa*** *si* $\mathbf{x^0} \succeq \mathbf{x^1}$ *entonces* $t\mathbf{x^0} + (1-t)\mathbf{x^1} \succeq \mathbf{x^1}$ *para todo* $0 \le t \le 1$

6. ***Estrictamente Convexa*** *si* $\mathbf{x^0} \succeq \mathbf{x^1}$ *y* $\mathbf{x^0} \neq \mathbf{x^1}$ *entonces* $t\mathbf{x^0} + (1-t)\mathbf{x^1} \succeq \mathbf{x^1}$ *para todo* $0 < t < 1$

5. ***Estrictamente Creciente*** *si para toda cesta de consumo* $\mathbf{x^0}, \mathbb{1} \in \mathbb{R}^n_+$,*si* $\mathbf{x^0} \geq \mathbf{x^1}$ *entonces* $\mathbf{x^0} \succeq \mathbf{x^1}$ *mientras que si* $\mathbf{x^0} \gg \mathbf{x^1}$ *entonces* $\mathbf{x^0} \succ \mathbf{x^1}$

Diremos en adelante que $\succeq$ es una relación de preferencia si es completa y transitiva.

En una economía de intercambio, los consumidores son carácterizados por su relación de preferencia $\succeq$ y su respectiva restricción presupuestal $B_i(\mathbf{p}, w^i) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{p} \cdot \omega^i\right\}$ donde $w = \mathbf{p} \cdot \omega^i$ es la riqueza del i-esímo consumidor tasada por el sistema de precios, siendo únicamente de nuestro interés aquellas cestas $\mathbf{x} \in B_i(\mathbf{p}, w^i)$ factibles que puede adquirir el consumidor por su riqueza determinada por el valor de mercado de sus dotaciones iniciales.

Proposición 2.3.1. *La restricción presupuestal* $B_i(\mathbf{p}, w^i) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{p} \cdot \omega^i\right\}$ *es un conjunto compacto no vacío y convexo.*

Demostración. Es inmediato de la definición de la restricción presupuestaria. □

Una primera dificultad para construir un modelo de la demanda en términos del sistema de precios y la riqueza es la ausencia de un orden natural en $\mathbb{R}^n_+$ de modo que para conservar la información procedente de las relaciones de preferencia $\succeq_(i)$ para todo $i \in \mathscr{I}$

requiera transformarse bajo un esquema que permita ordenar artificialmente las cestas de consumo atendiendo al grado de preferencia de las mismas. Eso precisamente se consigue al introducir las funciones de utilidad que aplican de $\mathbb{R}^n_+$ a $\mathbb{R}$, preservando la relación de preferencia, es decir para cada cesta $\mathbf{x^0}, \mathbf{x^1} \in \mathbb{R}^n_+$ se cumple que $u(\mathbf{x^0}) \geq u(\mathbf{x^0})$ si y sólo si $\mathbf{x^0} \succeq \mathbf{x^1}$.

Teorema 2.3.1. *Si una relación de preferencia $\succeq \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ es continua y estrictamente monótona, entonces existe una función de utilidad continua que representa $\succeq$*

Demostración. Jehle y Reny (2011, pp.14-16) □

El Teorema 2.3.1 facilita nuestra tarea para implementar la maquinaria del análisis real en los problemas microeconómicos, así mismo es importante observar que el resultado anterior garantiza la existencia de una función de utilidad, pero no su unicidad. Para todos los usos prácticos esto no representará un problema para construir nuestro sistema de demandas, sin embargo para simplificar la exposición y tener presente las principales propiedades de las funciones de utilidad es necesario tener presente el siguiente resultado:

Proposición 2.3.2. *Sea $\succeq$ una relación de preferencia representada por la función de utilidad $u : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:*

1. *$u(\cdot)$ es continua si y sólo si $\succeq$ es continua*
2. *$u(\cdot)$ es estrictamente creciente si y sólo si $\succeq$ es estrictamente monótona*
3. *$u(\cdot)$ es cuasi cóncava si y sólo si $\succeq$ es convexa*
1. *$u(\cdot)$ es estrictamente cuasi cóncava si y sólo si $\succeq$ es estrictamente convexa*

Demostración. Jehle y Reny (2011, p.17) □

Ahora estamos en posición de enunciar lo que en adelante denominaremos como el *primer problema del consumidor* (PPC), el cual permite al modelo de intercambio introducir un problema de maximización sobre el conjunto de cestas factibles atendiendo a la restricción presupuestal.

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}, w) = \max_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, w)} u(\mathbf{x}) \qquad s.a. \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega \tag{2.1}$$

En primera instancia, la existencia de una solución queda garantizada por la proposición 2.3.1, sin embargo la solución $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ puede no ser una función, sino más bien una correspondencia. Es necesario adicionar el supuesto de concavidad estricta sobre las funciones de utilidad para garantizar que efectivamente $\mathbf{x}^*$ sea con todo derecho una función en cuyo caso el sistema de ecuaciones obtenidas del PPC son precisamente *las funciones de demanda no compensadas*, o *demandas marshallianas*.

En la imagen 2.1 se ilustra la solución del problema, donde puede verificarse que la función de utilidad indirecta definida como $v(\mathbf{p}, w) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, w))$ es tangente a $\mathbf{B}(\mathbf{p}, w)$ dados el vector de precios y la riqueza especificados por el problema de optimización.

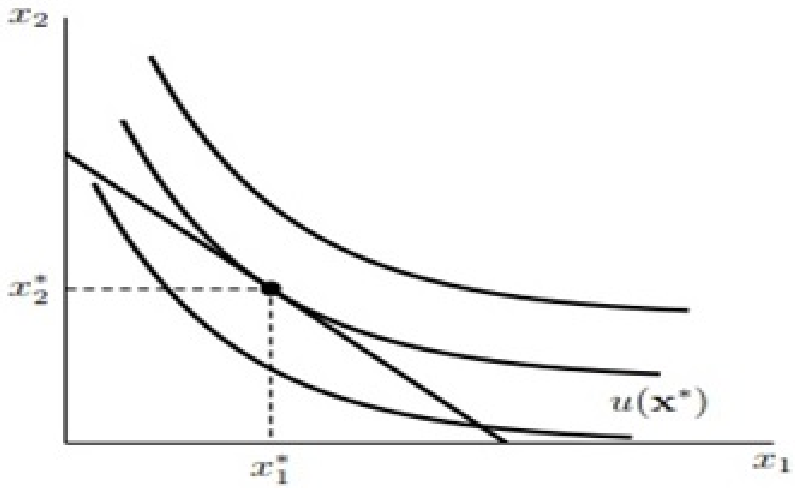


Figura 2.1: Solución del PPC

Terminaremos está sección con la enunciación del siguiente teorema, que enumera las principales propiedades de la función de utilidad indirecta.

Teorema 2.3.2. *Si $u(\cdot)$ es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^n_+$, entonces la función de utilidad indirecta $v(\mathbf{p}, w)$ es:*

1. *Continua en $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$*

2. *Estrictamente Creciente en w*

3. *Cuasi Convexa en $(\mathbf{p}, w)$*

1. *Satisface la Identidad de Roy: si $v(\mathbf{p^0}, w^0)$ es diferenciable en $(\mathbf{p^0}, w^0)$ entonces:*

$$\mathbf{x_j}(\mathbf{p}, w) = -\frac{\partial v(\mathbf{p^0}, w^0)/\partial p_j}{\partial v(\mathbf{p^0}, w^0)/\partial w} \quad \forall j \in \mathscr{J} \tag{2.2}$$

Demostración. Ver Jehle y Reny (2011, pp.29-32). □

2.3.1. Propiedades de las Demandas Marshallianas

La determinación de nuestro sistema de demandas permite explorar exhaustivamente todas sus propiedades matemáticas. Vale la pena señalar que estos resultados conformarán los primeros resultados significativos para abordar el programa del EEG.

Teorema 2.3.3. *Bajo el supuesto que $\succeq$ sea completa, continua, estrictamente monótona y estrictamente convexa, entonces:*

1. *$\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ es continua para todo $(\mathbf{p}, w) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$*

2. *Homogeneidad de Grado Cero: pata todo $t > 0$ y $(\mathbf{p}, w) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$, $t\mathbf{x}(\mathbf{p}, w) = \mathbf{x}(t\mathbf{p}, tw)$*

3. *Ley de Walras: para todo* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}, w) = w$

4. *Sea* $\mathbf{x}(\mathbf{p}^0, w^0)$ *de clase* C^2, *si* $u(\cdot)$ *es continua,* $du(\mathbf{p})/dx_j$ *para algún* $j = 1, ..., n$ *y* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ *donde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} D^2 u(\mathbf{x}) & \nabla u(\mathbf{x}) \\ \nabla u^T(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Demostración. Ver Mas-Colell, Whinston y Green (1995) □

Se observa que gracias a la homogeneidad es posible introducir en el modelo de intercambio un sistema de precios relativos, definiendo previamente un numerario, que simplifica en gran medida el modelo al evitar la introducción del dinero. De no hacerlo, el dinero como cualquier bien se supone deseable y por lo tanto la introducción de fenómenos monetarios sería inevitable. Para todos los fines, el suponer una economía sin un sistema monetario, no es un inconveniente para que los consumidores realices sus transacciones, recordemos que la ventaja de trabajar con precios relativos nos permite hablar de una proporción de intercambio.

Adicionalmente, el Teorema 2.3.3 nada afirma sobre la dirección ni la proporción en que los consumidores alteran sus planes de consumo ante cambios en los precios. La dirección es nuestra noción de la Ley de la demanda, mientras que la proporción se deriva de la ecuación de Slutsky. Cabe mencionar que al ser el PPC el microfundamento del EEG, conocer si todas las implicaciones derivadas por él, son exhaustivas y enunciadas completamente por las propiedades de $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ supondrán una gran ventaja en el momento de agregar preferencias en una expresióin que describa simultáneamente todos los mercados de la economía de intercambio. Finalmente, debe observarse que el PPC mantiene fijo la riqueza, siendo el vector de precios el determinante de las demandas.

2.4. Teorema de Dualidad

Un problema complementario al PPC fue descrito por Hicks (1938) con el objetivo de responder a la pregunta: ¿Cuál es el nivel mínimo de gasto $e = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ que el consumidor debe hacer frente a un conjunto determinado de precios para alcanzar un nivel determinado de utilidad? Formalmente:

$$\mathbf{e}(\mathbf{p}, u) = \min_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, w)} u(\mathbf{x}) \qquad s.a. \qquad u(\mathbf{p}) \geq u \tag{2.4}$$

Donde $e : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la *función de gasto* y $\mathscr{U} = \{u(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}\}$ es el conjunto de niveles de utilidad alcanzables.

El problema de minimización del gasto al que denominaremos SPC, establece una relación importante con el PPC, en el sentido de que si la solución es única y bien definida, el siguiente teorema prevalece:

Teorema 2.4.1. *Supongamos que la función de utilidad $u(\cdot)$ es continua y estrictamente creciente, entonces para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $w \in \mathbb{R}$*

$$1.\ \min_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p},w)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{p}, w) = w \qquad s.a. \qquad u(\mathbf{p}) \geq u \tag{2.5}$$

$$2.\ \max_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p},w)} u(\mathbf{e}(\mathbf{p}, u)) = u \qquad s.a. \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \omega \tag{2.6}$$

o equivalentemente

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w)) = w \tag{2.7}$$

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u \tag{2.8}$$

Demostración. Ver Jehle y Reny (2011, p.42). □

Como puede observarse la solución al SPC dependen del vector de precios y el nivel de utilidad, que análogamente al PPC y la demanda marshalliana, determina la función de *demanda hicksiana* $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$ que no es directamente observable debido a que el SPC no considera la riqueza del consumidor y en consecuencia desconoce el nivel de utilidad alcanzable por la restricción presupuestal.

A semejanza de la función de utilidad indirecta, $e(\mathbf{p}, u)$ satisface algunas propiedades que proporcionan información de las demandas hicksianas, en particular el *Lema de Shepard* vincula la función de gasto con la demanda que soluciona el SPC.

Teorema 2.4.2. *Si $u(\cdot)$ es continua y estrictamente creciente, entonces $e(\mathbf{p}, u)$ es:*

1. *Continua en $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathscr{U}$*
2. *Para todo $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ estrictamente creciente y no acotada superiormente por $u \in \mathscr{U}$*
3. *Homogénea de Grado uno en $\mathbf{p}$*
4. *Creciente en $\mathbf{p}$*
5. *Cóncava en $\mathbf{p}$*
6. *Satisface el Lema de Shepard:si $e(\mathbf{p}, u)$ es diferenciable en $\mathbf{p}$ para $(\mathbf{p^0}, u^0)$ con $\mathbf{p^0} >> \mathbf{0}$, entonces:*

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} = \mathbf{h_j}(\mathbf{p^0}, u^0) \quad \forall j \in \mathscr{J} \tag{2.9}$$

Demostración. Ver Jehle y Reny (2011, pp.29-32). □

La *demanda hicksiana* también es conocida como *demanda compensada* en el sentido de que si el consumidor predefine un nivel de utilidad objetivo u del que parte, esté configura su cestas de tal forma que si el consumidor recibe compensaciones adecuadas en su riqueza ante variaciones en el precio, la demanda hicksiana determina el mínimo gasto $e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$ que alcanza nuevamente la curva de indiferencia para la cual la utilidad objetivo es tangente.

Ahora enunciaremos el *Teorema de Dualidad* el cual es un resultado auxiliar muy poderoso para establecer los principales nexos entre las demandas obtenidas y será de mucha ayuda para obtener la ecuación de Slutsky.

Teorema 2.4.3. *Bajo el supuesto de que $u(\cdot)$ sea continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi cóncava, lo siguiente se cumple para todo $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $w > 0$, $u \in \mathcal{U}$*

1. $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w))$

2. $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))$

Demostración. (Esbozo): Puesto que $u(.)$ sea continúa, estrictamente creciente y estrictamente cuasi cóncava la solución al PPC existe y es única. En efecto si tomamos $v(\mathbf{p}, w) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, w))$ podemos hacer uso de la Ley de Walras y desprender $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}, w) = w$.
Por el Teorema 2.4.1, se puede concluir que $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ resuelve el SPC tal que

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, w) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w))$$

De forma análoga, se observa que $u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)) \geq u$ para todo $u \in \mathcal{U}$ hecho que al considerar $e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$ y el Teorema 2.4.1 concluimos

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))$$

□

Para cerrar la discusión en torno a las demandas compensadas, es importante observar que las compensaciones hipotéticas que permiten al consumidor tener un nivel de utilidad constante actúan tanto a favor como en contra de él, hecho que es de gran importancia para estudiar la ley de la demanda que con posterioridad abordaremos. Por ahora, lo que se gana con estudiar está demanda no observable permite abordar las incidencias reales cuando los parámetros y variables de nuestro modelo cuando se alteran y la posibilidad de expresar el efecto total en dos efectos exhaustivos conocidos como *efecto sustitución* y *efecto renta* en términos de las funciones de demanda estudiados.

2.5. Ecuación de Slutsky

La Ecuación de Slutsky es conocida como la *Ecuación Fundamental del Análisis Microeconómico*. Este resultado, demostrado a principios del siglo pasado, establece que los cambios en los parámetros que determinan la demanda de una cesta de consumo particular, puede ser aislado a partir de dos efectos fundamentales descritos por las funciones de demanda obtenidas en los problemas del consumidor.

Teorema 2.5.1. *Consideremos la demanda marshalliana* $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ *asociada al PPC y sea* $v(\mathbf{p}, w) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, w))$ *la función de utilidad indirecta. Si* $e(\mathbf{p}, u)$ *satisface el Lema de Shepard,* $D_{\mathbf{p}}e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{h}(p, u)$*. Entonces, la ecuación de Slutsky viene dada por la expresión:*

$$D_{\mathbf{p}}\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = D_{\mathbf{p}}\mathbf{x}(\mathbf{p}, w) + D_w\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{p}, w) \tag{2.10}$$

Demostración. Del Teorema 2.4.3 tomemos $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))$ y diferenciando respecto a $\mathbf{p}$ se obtiene

$$D_{\mathbf{p}}h(\mathbf{p}, u) = D_{\mathbf{p}}\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) + D_w\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))D_{\mathbf{p}}e(\mathbf{p}, u) \tag{2.11}$$

Al hacer uso del Lema de Shepard (inciso 6. Teorema 2.4.2) y el inciso 2. del Teorema 2.4.3 se observa que

$$D_{\mathbf{p}}e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, w) \tag{2.12}$$

y al sustituir (2.12) en (2.11) se concluye

$$D_{\mathbf{p}}h(\mathbf{p}, u) = D_{\mathbf{p}}\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) + D_w\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u))\mathbf{x}(\mathbf{p}, w) \tag{2.13}$$

□

A la matriz $D_{\mathbf{p}}\mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$ comúnmente se le denomina en la literatura matriz de sustitución, que con posterioridad será retomada hasta el cápitulo 4, sin embargo vale la pena mencionar que la ecuación de Slutsky conforma uno de los resultados más importantes en el análisis del equilibrio parcial y de estática comparativa, al observar que el efecto total (lado derecho de la igualdad) es igual a la resta del efecto sustitución menos el efecto renta.La matriz de sustitución tiene propiedades destacables para completar las propiedades de las demandas marshallianas y delinear todas las consecuencias de la teoría de la demanda basada en un esquema de racionalidad completa.

Teorema 2.5.2. *La matriz sustitución* $\mathbf{S}(\mathbf{p}, w)$ *es simétrica (S), negativa semidefinida (NSD) y satisface:*

1. $\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{p}, w) = \mathbf{0}$

2. $\mathbf{S}(\mathbf{p}, w)\mathbf{p} = \mathbf{0}$

Demostración. Ver Mas-Colell, Whinston y Green (1995) □

finalizamos la sección enunciado el *Teorema de Integrabilidad*

Teorema 2.5.3. *Una función continuamente diferenciable* $\mathbf{x} : \mathbb{R}^{n+1}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ *es la función de demanda no compensada generada por alguna función de utilidad creciente, y cuasi cóncava si satisface (NSD), (S) y los incisos 1. y 2. del Teorema 2.5.2.*

Demostración. Ver Nikaido y Uzawa (1969) □

Observación 2.5.1. *El Teorema 2.5.2 completa el cuadro de todas las propiedades derivables por el esquema de Racionalidad perfecta. Como es conocido, la historia del análisis microeconómico estuvo particularmente interesado en obtener un esquema equivalente que generará las propiedades de las demandas marshallianas. Hoy conocemos que el esquema alternativo requiere de gran consistencia más allá de la transitividad, siendo notable la necesidad de trabajar con preferencias no cíclicas para evitar cualquier tipo de inconsistencia. Remitiendo al lector interesado a Jehle (año) y Mas-Colell (1995) para más detalles.*

En la siguiente sección presentaremos la famosa Ley de la Demanda, centrandonos principalmente en las condiciones suficientes y necesarias para que las demandas obtenidas por los dos problemas del consumidor la satisfagan.

2.6. Ley de la Demanda

Por Ley de la de Demanda se hace referencia a un resultado de microeconomía elemental que establece una relación inversa entre la cantidad demandada y los precios. Matemáticamente, la Ley establece que si consideramos dos periodos lo suficientemente cercanos para apreciar la variación inmediata del precio, ceteris paribus lo demás, las demandas marshallianas satisfacen:

$$\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{p} < 0 \tag{2.14}$$

Si bien, como observa Hildelbrand, la Ley de la Demanda no hace referencia a la demanda de un individuo particular, sino más bien *to the mean demand of a large population of households* (Hildelbrand, 1992, p.25) la teoría económica ha hecho importantes esfuerzos para delimitar la clase de bienes que la satisfacen[1]. Aunque todos los resultados concernientes a la Ley de la Demanda han sido explorados desde una perspectiva que respeta el proyecto microfundacional del EEG y por lo tanto se ha puesto enfásis en deducirla a partir de la teoría racional de los consumidores para las demandas compensadas y no compensadas, se han tenido fuertes restricciones por constrastarla desde dicho enfoque.

2.6.1. Conceptos Auxiliares

Una lección aprendida de la ecuación de Slutsky es que el cambio en el precio altera en dos formas distintas los planes de consumo. Por un lado, un incremento del precio en una cantidad determinada de bienes encarece su adquisición y por el otro, este cambio altera en forma real la riqueza del consumidor. Debido a que la Ley de la Demanda es una propiedad que relaciona exclusivamente cantidades y precios, es una necesidad desaparecer el efecto renta y trabajar con el concepto de compensaciones, que dependiendo del tipo

[1] Desde el siglo XIX los economistas tenían conocimiento que la expresión 2.10 no se cumplia para toda clase de bienes. Como es sabido, la clase de bienes que no la satisfacen son los bienes Giffen.

de función de demanda se pueden desprender dos tipos: 1) *Compensación en el sentido de Hicks*, el cual es un esquema de compensación usado para trabajar con demandas hicksianas y mantener fijo el nivel de utilidad ante cambios en los precios, de este modo las demandas hicksianas cumplen 1) si:

$$w^1 - w^0 = e(\mathbf{p}, u) - w^0 \tag{2.15}$$

$$w^1 = \mathbf{p^1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{p^1}, u) \tag{2.16}$$

2) las *compensaciones en el sentido de Slutsky*. En el segundo caso se realiza una compensación en la riqueza tomando como referencia la dupla $(\mathbf{p^0}, w^0)$ respecto a $(\mathbf{p^1}, w^1)$ entonces se dice que las demandas no compensadas cumplen 2) si

$$w^1 - w^0 = (\mathbf{p^1} - \mathbf{p^0}) \cdot (\mathbf{x}(\mathbf{p^1}, w^1) - \mathbf{x}(\mathbf{p^0}, w^0)) \tag{2.17}$$

Una particularidad del primer caso y en general, una ventaja comparativa de las demandas hicksianas es que instantáneamente estás satisfacen la Ley de la Demanda, hecho que no es inmediato para las demandas marshallianas por las razones expuestas más arriba.

Proposición 2.6.1. *Bajo el supuesto que $u(\cdot)$ sea continua y representa una relación de preferencia no saciada, entonces las demandas hicksianas satisfacen la Ley de la Demanda:*

$$(\mathbf{p^1} - \mathbf{p^0}) \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{p^1}, w^1) - \mathbf{h}(\mathbf{p^0}, w^0)) \leq 0 \tag{2.18}$$

Como hemos señalado oportunamente, nuestro modelo necesita un resultado análogo a (número) contemplándose el caso para las demandas marshallianas. A continuación, haremos una rápida revisión, para la cual mayoritariamente seguiremos muy de cerca a Whinston, Green y Mas-Colell (1995).

2.6.2. Ley de la Demanda y las Demandas Marshallianas

Algunos de los resultados de esta sección tienen mayor impacto e interés que otros, nosotros presentaremos de mayor a menor importancia los casos en que la Ley de la Demanda se satisface para las demandas no compensadas.

- *Vía Axioma Débil de las Preferencias Reveladas*

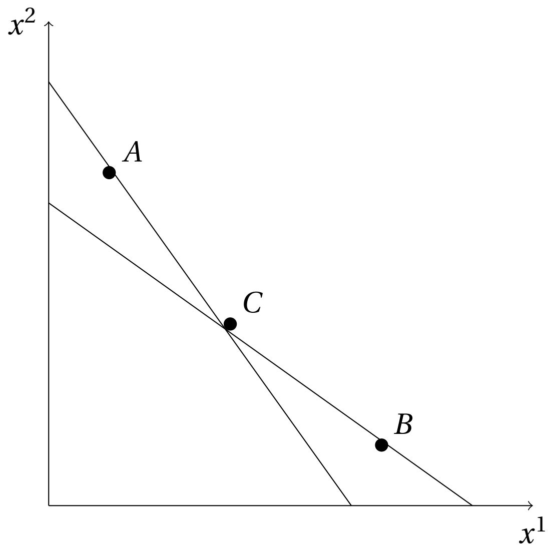
Con objeto denunciar los principales supuestos para que las demandas marshallianas satisfagan la Ley de la Demanda, es necesario discutir brevemente el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas el cual fue postulado por Samuelson con intensión de analizar el comportamiento del consumidor una vez que éste adquiere su correspondiente cesta de consumo. Consideremos la siguiente definición

Definición 2.6.1. *Sea $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ el sistema de demandas no compensadas continua, homogénea de grado cero y satisface la Ley de Walras. Decimos que $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ satisface) cumple con el* ***Axioma Débil de las Preferencias Reveladas*** *(ADPR) si para $(\mathbf{p^0}, w^0)$ y $(\mathbf{p^1}, w^1)$*

$$\mathbf{p^0} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p^1}, w^1) \leq w^0 \quad y \quad \mathbf{x}(\mathbf{p^0}, w^0) \neq \mathbf{x}(\mathbf{p^1}, w^1) \quad entonces \quad \mathbf{p^1} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p^0}, w^0) > w^1$$

- *Vía Axioma Débil de las Preferencias Reveladas*

El Axioma Débil tiene interesantes propiedades que le han valido un lugar imperecedero en la literatura microeconómica. Sin entrar en suficientes detalles, el Axioma Débil ha sido usado para deducir a partir de él las principales conclusiones de la Teoría Microeconómica, es decir, las conclusiones del Teorema (número), sin embargo, la propuesta de Samuelson no es suficiente para establecer todos los resultados, aunque si gran parte de ellos. Aún con esta pequeña desventaja, el ADPR se muestra como un axioma lo suficientemente robusto como para hacer cumplir la Ley de la Demanda a las demandas no compensadas.



Proposición 2.6.2. *Sea* $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ *el sistema de demandas no compensadas continua, homogénea de grado cero y satisface la Ley de Walras, entonces* $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ *satisface el ADPR si y sólo si se cumple que :*

$$(\mathbf{p^1} - \mathbf{p^0}) \cdot (\mathbf{x}(\mathbf{p^1}, w^1) - \mathbf{x}(\mathbf{p^0}, w^0)) \leq 0 \tag{2.19}$$

En consecuencia la demanda marshalliana satisface el ADPR siempre que verifiquemos (número), y se suponga que ante variaciones en los precios, el consumidor recibe una compensación en el sentido de Slutsky y en consecuencia obtenga la riqueza suficiente para adquirir la cesta de consumo con el nuevo régimen de precios.

- *Vía Ecuación de Slutsky*

Una segunda alternativa que puede usarse para observar el cumplimiento de la Ley de la Demanda es hacer uso de la Ecuación de Slutsky, usada para demostrar que se cumple sin problemas siempre que trabajemos con bienes normales o inferiores. El razonamiento es el siguiente: aproximemos la ecuación (número) por

$$\Delta \mathbf{x}_k \approx \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w))}{\partial \mathbf{p}_n} \Delta \mathbf{p}_n + \mathbf{x}_k(\mathbf{p}, w) \frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{p}, w)}{\partial w} \Delta \mathbf{p}_n \tag{2.20}$$

Para n=k es posible hacer uso del Teorema (número). Bajo el supuesto que el n-esímo bien es normal la desigualdad

$$\Delta \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k(\mathbf{p}, w)\frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{p}, w)}{\partial w}\Delta \mathbf{p}_n \leq 0 \tag{2.21}$$

completa la demostración de la ley de la demanda. Un argumento semejante al anterior se cumple para los bienes inferiores (ver tabla).

Bienes Normales	$\Delta \mathbf{p}_n > 0$	$\frac{\partial \mathbf{x}_n(\mathbf{p}, w)}{\partial w} > 0$	$\Delta \mathbf{x}_n > 0$
Bienes Inferiores	$\Delta \mathbf{p}_n > 0$	$\frac{\partial \mathbf{x}_n(\mathbf{p}, w)}{\partial w} < 0$	$\Delta \mathbf{x}_n < 0$

Observe en particular que al multiplicar (número) por Δp_n se obtiene la matriz de sustitución

$$\Delta \mathbf{p}_n \Delta \mathbf{x}_k \approx \Delta \mathbf{p}_n(\frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, w))}{\partial \mathbf{p}_n} + \mathbf{x}_k(\mathbf{p}, w)\frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{p}, w)}{\partial w})\Delta \mathbf{p}_n \tag{2.22}$$

Y de este modo se tiende un interesante vínculo con el ADPR al corroborar que (número) es resultado de calcular la derivada total de (número).

- *Vía Función de Demanda Inversa*

Otro resultado conocido en el que la Ley se satiaface para las demandas no compensadas fue demostrada por Mitiushin y Polterovich (1978) quienes requieren pedir una condición sobre las funciones de utilidad. El resultado de Mitiushin y Polterovich (1978) hace uso de la función de demanda inversa, enunciado a continuación:

Proposición 2.6.3. *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua y estrictamente convexa para la cual $\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$ es el sistema de demandas no compensadas que resuleve el PPC, entonces la función de demanda inversa asociada al i-bien y $w = 1$ viene dada por:*

$$p_i(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i(\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i)} \tag{2.23}$$

Como menciona Mas-Colell (1995) el resultado de Polterovich permite observar la importancia del efecto sustitución.

Teorema 2.6.1. *(Mitiushin y Polterovich, 1978) Sea $\mathbf{x}(\mathbf{p},\mathbf{w})$ un sistema de funciones de demanda no compensadas de clase C^1, asociadas a una función de utilidad $u(\cdot)$ de clase C^2. Si*

$$\sigma(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}\cdot \nabla^2 u(\mathbf{x})\mathbf{x}}{\mathbf{x}\nabla u(\mathbf{x})} < 4 \tag{2.24}$$

Entonces $\mathbf{x}(\mathbf{p},\mathbf{w})$ satisface la Ley de la Demanda:

$$(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{x}(\mathbf{p}, w) - \mathbf{x}(\mathbf{q}, w)) < 0 \tag{2.25}$$

para todo $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ y $w > 0$

La conclusión más valiosa de este apartado es que si el ADPR se mantiene como una propiedad para las demandas no compensadas, la Ley de la Demanda se cumplirá automáticamente. Más adelante se comprobará que la propiedad del ADPR se hereda al trabajar con la Función de Demanda Agregada lo cual representa una gran ventaja al momento de plantear el problema de estabilidad del EEG.

Capítulo 3

El Programa del Equilibrio Económico General

3.1. Problema de Existencia

3.1.1. Introducción

Tal como hoy conocemos la prueba al problema de existencia, no es sorprendente que Walras (1874) cuyo método de prueba radicaba en contar ecuaciones e incógnitas para asegurar existencia y unicidad fuera insuficiente para cerrar el problema definitivamente. Aunque después de él, surgirían algunas soluciones ingeniosas para obtener el resultado deseado como sería el caso de Wald (1935), habrían de pasar 80 años para que la maquinaría teórica del EEG tuviera las herramientas conceptuales necesarias para comprender a cabalidad los interesantes nexos con el análisis y sus peculiaridades en lo que respectaba a la estructura matemática del equilibrio económico.

Una primera aproximación que justifica la incapacidad de Walras por demostrar la existencia del equilibrio económico general, quedó patente una vez que Arrow y Debreu (1954) hicieran uso del hicieran uso del Teorema de Punto Fijo de Brouwer, siendo estos a su vez inspirados en mayor medida por la demostración que cuatro años atrás Nash (1950) implementaría para probar la existencia del equilibrio que hoy lleva su nombre. En pocas palabras: si Walras fue incapaz se debe atribuir a que el análisis matemático no conocería el Teorema de Brouwer hasta el año de 1911. Aunque este no sería el caso de Wald (1935), el problema fundamental que radicaba en su propuesta era

what many would regard as unnecessarily restrictive assumptions on consumers' preferences. In effect, he required that preferences be strongly separable and that every good exhibit diminishing marginal utility (Jehle, 2011)

Observación 3.1.1. *Un hecho menos conocido es la importancia que tuvo Lionind Mckenzie en el desarrollo axiomático del EEG. En la actualidad se da crédito al trabajo independiente de Mckenzie , en la que desde muchas perspectivas se debería considerar el autor con la primicia en desarrollar la primera demostración satisfactoria del problema de Existencia del EEG. Un libro que puede resultar interesante al lector en profundizar en la tematica esta temática es (referencia).*

Como llegaría a comprobarse a lo largo del desarrollo afanoso del PEEG, la importancia de los teoremas de punto fijo en la economía matemática resultaron primordiales para estudiar otros aspectos relevantes con la mano invisible, y la abrumadora tecnificación de la económica matemática a partir de este punto de su historia.

A continuación avanzaremos en la discusión de cómo obtener una función que relacione oferta y demanda en términos del vector de precios y la riqueza que abarque y considere todos los mercados de la economía de intercambio. Antes de dar ese paso, discutiremos brevemente una función auxiliar de gran importancia.

3.1.2. Agregación

Una de las grandes diferencias entre estudiar el consumo de un agente particular y el consumo de un grupo de individuos es el tipo de información que las constituyen. La primera es información que sólo describe la conducta especifica del individuo, en tanto que en el segundo caso se aproxima mediante un procedimento de agregación, la tendencia global del consumo en forma consistente y significativa, que reduzca en lo posible cualquier tipo de distorción proveniente de la estacionalidad de la información a ser agregada o reducir en la medida de lo posible cualquier tipo de sensibilidad del método al agrupar disparidades en el consumo del grupo considerado.

Observación 3.1.2. *La Agregación puede definirse como la conjunción de información, dirigida a su representación compacta (autor). La economía es una disciplina caracterizada por la información agregada como lo es el Producto Interno Bruto, el Ingreso Total o el Ahorro Nacional.*

Los problemas específicos para el EEG y la construcción de agregados tiene importantes simplificaciones en comparación a los problemas aplicados donde la información recibe ciertos arreglos para mitigar cualquier efecto no atribuible al fenómeno estudiado, sin embargo usualmente en los problemas económicos donde la agregación es una necesidad inmediata para construir variables macroeconómicas, en la mayoría de las veces no se presta atención debida a la justificación matemática de dicho procedimiento a partir de las unidades fundamentales de análisis. Como señala (Daal y Merkies, 1984), las condiciones generales para que un procedimiento de agregación se considere consistente tiende en la mayoría de los casos a ser verdaderamente restrictivos y astringentes como lo han demostrado algunos problemas clásicos encontrados en la literatura económica en general. Por mencionar algunos problemas de ellos:

1. **Agregación de Bienes**: El problema puede describirse sencillamente a partir de lo que hemos visto anteriormente. Supongamos que tenemos un conjunto de bienes determinados, se desea conocer condiciones sobre las cuales es posible construir grupos de bienes cuyas categorías son bien definidas (por ejemplo considere tres tipos de bienes distintos cuya adquisición sacia necesidades alimenticias, el problema de agregación consistiría en agrupar dichos bienes en una categoría definida como alimentos).

2. **Agregación de Funciones de Producción**: Quizás uno de los problemas más documentados en la literatura y más sesgado hacia los problemas de la oferta agregada y las teorías del crecimiento económico. Una de las grandes dificultades que exhibe este problema es la inexistencia completa de una función de producción que agrega factores de producción como capital y trabajo. Así como la ausencia completa de significado económico en la agregación de capital.

3. **Agregación de Preferencias**: En el contexto de la teoría del bienestar y la elección social, la historia de este problema se remonta al análisis de algunos sistemas de votación en el siglo XVIII, donde aparecen las primeras paradojas de la votación. Uno de los grandes exponentes en esta rúbrica es Arrow, quien en 1957 postula una función de bienestar social para la cual supone ciertas condiciones de regularidad e idealizan un sistema elección racional que impide la existencia de un dictador, obtiene un resultado inconsistente. A este resultado se le suele denominar como el Teorema de Imposibilidad de Arrow.

Una peculiaridad entre estos problemas es la necesidad de suponer, lo que en la literatura de agregación se denomina separabilidad (ver) en el procedimiento de agregación (con excepción del tercer punto). Entre las primeras nociones de separabilidad, y atribuida a Leontief, nacen en el contexto del segundo problema, para que en 1946, Nataf demuestra las primeras condiciones para agregar funciones de producción.Precisamente el Teorema de Nataf y sus aseveraciones en torno a la forma funcional del procedimiento de agregación de funciones de producción son hasta cierto punto la forma más generalizada de observar las dificultades teóricas de construir agregados consistentes.

3.1.3. Agregación Consistente

Con el objeto de poder visualizar más de cerca la consistencia en los procedimientos de agregación y siguiendo muy de cerca a (Daal y Merkies, 1984) consideremos una aplicación aplicación $H : \mathbb{R}^{n\times m} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde el dominio de H considera una matriz de n variables dependientes y m variables independientes, siendo

$$y = H(\mathbf{X}) \tag{3.1}$$

el principal agregado. Un procedimiento de agregación será consistente si es posible desagregar (4.1) hasta las unidades primarias de análisis del modelo

$$y_j = \phi_j(\mathbf{x}_j^1, ..., \mathbf{x}_j^n) \qquad j = 1, ..., m \tag{3.2}$$

de modo que (4.2) se constituyen de información microeconómica, y a su vez que

$$\mathbf{x}_i = g_i(\mathbf{x}_1^i, ..., \mathbf{x}_m^i) \qquad i = 1, ..., n \tag{3.3}$$

la expresión (4.3), la cual representa la información de las variables independientes en función de las unidades primarias de análisis, mantengan el mismo valor númerico respecto a (4.1)

$$\begin{aligned} y = G(y_1, ..., y_m) &= G(\phi_1(\mathbf{x}_1^1, ..., \mathbf{x}_1^n), ..., \phi_m(\mathbf{x}_m^1, ..., \mathbf{x}_m^n)) = \\ &= F(g_1(\mathbf{x}_1^1, ..., \mathbf{x}_m^1), ..., g_n(\mathbf{x}_1^n, ..., \mathbf{x}_m^n)) = F(x_1, ..., x_n) \\ &= H(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

tal como lo ilustra el siguiente diagrama una forma elemental de satisfacer los requerimientos solicitados es trabajar con formas funcionales simples como $y = \sum_i \sum_j x_{ij}$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^1 & \dots & x_j^1 & \dots & x_J^1 & \xrightarrow{\phi_1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ x_i^1 & \dots & c & \dots & & \xrightarrow{\phi_i} & y_i \\ \vdots & & & & & & \\ x_I^1 & \dots & & & & & y_m \\ \downarrow & \dots & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1 & \dots & x_j & \dots & x_i & \xrightarrow{\phi_1} & y \end{array}$$

Teorema 3.1.1. *Sea $H : \mathbb{R}^{n \times m} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continuamente diferenciable, cuyas parciales son no nulas. Una condición suficiente y necesaria para que (número) sea consistentemente agregada es que todas las funciones del esquema sea aditivamente separables*

$$y = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(x_{ij})\right) \tag{3.4}$$

3.1.4. Demanda Agregada

Así mismo uno de los problemas integrales a las temáticas de agregación son las concernientas a los trabajos originales de Gorman (1954) quien obtiene condiciones suficientes y necesarias para que una función de demanda agregada exista, y en observancia a la microfundamentación del EEG, el resultado sea consistentemente agregable por las unidades fundamentales de análisis.

Iniciemos considerando nuevamente nuestra economía de intercambio en la que suponemos m agentes racionales que resuelven simultáneamente sus respectivos problemas presupuestales, al que nosotros hemos denominado como el PPC.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^1(\mathbf{p}, w^1) &= \arg\max_{\mathbf{x}\in B(\mathbf{p},w)} u_1(\mathbf{x}) \qquad s.a \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^1 \leq \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^1 \\
\mathbf{x}^2(\mathbf{p}, w^m) &= \arg\max_{\mathbf{x}\in B(\mathbf{p},w)} u_1(\mathbf{x}) \qquad s.a \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^2 \leq \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^2 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}^m(\mathbf{p}, w^m) &= \arg\max_{\mathbf{x}\in B(\mathbf{p},w)} u_m(\mathbf{x}) \qquad s.a \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^2 \leq \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^2
\end{aligned}$$

Como vimos, las soluciones que reportan los m-agentes constituyen nuestro sistema de demandas no compensadas. Deseamos construir un agregado cuyos insumos son precisamente el sistema mencionado y cuyo resultado se represente como una forma funcional del sistema de precios y la riqueza agregada.

$$\mathbf{D}(\mathbf{p}, \sum_{j=1}^{n} w^j) = \psi(\mathbf{x}^1(\mathbf{p}, w^1), ..., \mathbf{x}^n(\mathbf{p}, w^n)) \tag{3.5}$$

Al que denominaremos como procedimiento de agregación de la demanda y cuya función es conocida como Demanda Agregada. Un PDA requiere que se establezcan condiciones suficientes y necesarias para que la agregación sea consistente y (número) tenga la ventaja de ser desagregada si la necesidad lo requiere hasta las unidades primarias de análisis (consumidores). En este sentido, lo que debe entenderse por agregación consistente es básicamente "that the macro relation as a mathematical expression is consistent with the micro relations through some aggregation formulae." (Daal y Merkies, 1984).

Teorema 3.1.2. *Sean* $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w)$ *un sistema de demandas no compensadas. Una condición Suficiente y Necesaria para que el sistema de demandas no compensadas satisfaga (2.27) debe verificar que*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j(\mathbf{p}, w^j) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{j}}(\mathbf{p}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{p}) \sum_{j=1}^{n} w^j \tag{3.6}$$

o bien

$$\mathbf{e^j}(\mathbf{p}, u) = a(\mathbf{p}) u_j + b(\mathbf{p}) \tag{3.7}$$

La expresión (2.29) habitualmente recibe el nombre de la *forma polar de Gorman* y ha probado tener un nexo recurrente con preferencias homotéticas y en general, debe observarse que la forma funcional del resultado anterior cae bajo la influencia del Teorema de Nataf. Así mismo, debe apuntarse que el Teorema (número) va en sintonía con lo que en macroeconomía se conoce como el problema del consumidor representativo, el cual afirma que es posible pensar la demanda agregada generada por las preferencias de un consumidor (Ver Mas-Colell, 1995, pp.116-122)

Retomando rápidamente la discusión de la sección 2.5, es sencillo verificar a raíz de la forma funcional de la forma polar de Gorman que el ADPR se satisface inmediatamente, siendo posible establecer un nexo con la Ley de la Demanda al comprobar que las preferencias homotéticas la implican (Mas-Colell, 1995, p.112) y en consecuencia la Ley de la Demanda será una propiedad consecuente de la agregación consistente de (número).

3.2. Función Exceso de Demanda

El siguiente paso hacia la construcción de nuestro modelo de intercambio es la postulación de la *Función Exceso de Demanda*. Supongamos nuevamente que nuestra economía es de intercambio para la cual el sistema de ecuaciones describe instantaneamente la situación entre oferta y demanda:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_1^i - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega^i} \\
\boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_2^i - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega^i} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_k^i - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega^i}
\end{aligned}$$

Como puede apreciarse, el sistema de ecuaciones relaciona en la función $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = [\boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{p}), \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{p}), ..., \boldsymbol{\xi}_n(\mathbf{p})]$ la demanda y la oferta agregadas para los n mercados definidos en la economía de intercambio. Cuando la oferta y la demanda son iguales diremos que la economía de intercambio se encuentra en *equilibrio walrasiano* siempre que verifiquemos la existencia del vector de precios $\mathbf{p}^*$ tal que $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*)$.

Ahora que se cuenta con la Función Exceso de Demanda, el centro de la discusión se dirige a probar que el equilibrio walrasiano existe. Sin embargo es preciso conocer las propiedades de nuestra función objetivo:

Teorema 3.2.1. *Si $u_i(\cdot)$ es continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi concava para todo $i \in \mathscr{I}$, entonces para todo $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ es:*

1. *Continua en* $\mathbf{p}$
2. *Homogenea de Grado Cero*

$$\boldsymbol{\xi}(\lambda\mathbf{p}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) \tag{3.8}$$

3. *Satisface la Ley de Walras*

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = 0 \tag{3.9}$$

Demostración. 1. Es inmediato del Teorema (número).

2. Por el Teorema (número), las demandas no compensadas satisface la propiedad de homogeneidad y por inspeción en la definición de $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ es cierto que para todo $\lambda > 0$, $\boldsymbol{\xi}(\lambda\mathbf{p}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$

3. Supongamos que para todo $iin\mathbb{I}$, $u_i(\cdot)$ es estrictamente creciente, entonces por el Teorema (número) las demandas individuales satisfacen:

$$p_j x_j^i(\mathbf{p}, w^i) = 0 \quad \forall j \in \mathscr{J} \tag{3.10}$$

ahora observe que la Ley de Walras para las demandas no compensadas puede escribirse como:

$$\sum_j^n p_j x_j^i(\mathbf{p}, w^i) - \sum_j^n p_j \omega_j^i = 0 \tag{3.11}$$

y al sumar sobre el indice $\mathbb{I}$ en (2.36) y permutar las sumas podemos obtener:

$$\sum_j^n \sum_{i\in\mathscr{I}} p_j x_j^i(\mathbf{p}, w^i) - \sum_j^n \sum_{i\in\mathscr{I}} p_j \omega_j^i = 0 \tag{3.12}$$

$$\sum_j^n p_j \sum_{i\in\mathscr{I}} x_j^i(\mathbf{p}, w^i) - \sum_j^n p_j \sum_{i\in\mathscr{I}} \omega_j^i = 0 \tag{3.13}$$

$$\sum_j^n p_j \left(\sum_{i\in\mathscr{I}} x_j^i(\mathbf{p}, w^i) - \omega_j^i \right) = 0 \tag{3.14}$$

$$\sum_j^n p_j \xi_j(\mathbf{p}) = 0 \tag{3.15}$$

y por lo tanto es claro que la función exceso de demanda satisface $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = 0$ □

Nuevamente, la propiedad de Homogeneidad permite a $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ trabajar en un espacio de precios normalizado, pues si

$$\xi(\alpha\mathbf{p}) = \xi(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}, \alpha > 0$$

al tomar $\alpha = 1/\left\|\mathbf{p}\right\|^2$ el espacio de precios es

$$\triangle = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n : \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\} \tag{3.16}$$

Así mismo la Homogeneidad es una propiedad que puede ser explotada para demostrar la existencia del equilibrio Walrasiano, por ahora basta comentar que el simplex es un conjunto compacto convexo, mismo que al contar con el siguiente resultado

Teorema 3.2.2. *(Teorema de Punto Fijo de Brouwer) Si C es un compacto convexo en $\mathbf{R}^n$, y $f : C \longrightarrow C$ es continua, entonces f tiene al menos un punto fijo, i.e., existe $\mathbf{x}^* \in C$ tal que $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.*

Demostración. Ver Border (1998, p.28) □

es posible establecer la siguiente implicación trabajando con una definición alternativa de equilibrio Walrasiano, es decir, si $\mathbf{p}^*$ es un vector de precios walrasiano de equilibrio, entonces $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$[1].

[1] Sólo se útilizara está definición en la demostración del Teorema 2.8.3

Teorema 3.2.3. *El Teorema de Punto Fijo de Brouwer implica el Equilibrio Walrasiano.*

Demostración. Consideremos $\boldsymbol{\psi} : \triangle \longrightarrow \triangle$ una función real, compacta y convexa definida como

$$\psi_j(\mathbf{p}) = \frac{p_j + \max\{0, \xi_j(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_j^n \max\{0, \xi_j(\mathbf{p})\}} \quad \forall j \in \mathscr{J} \tag{3.17}$$

entonces por el Teorema (2.8.2) existe $\mathbf{p}^* \in \triangle$ tal que

$$p_j^* = \frac{p_j^* + \max\{0, \xi_j(\mathbf{p}^*)\}}{1 + \sum_j^n \max\{0, \xi_j(\mathbf{p}^*)\}} \quad \forall j \in \mathscr{J} \tag{3.18}$$

Al multiplicar (2.43) por $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ y aplicar la Ley de Walras

$$\mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) = \left(\frac{\mathbf{p}^* + \max\{\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*)\}}{1 + \sum_j^n \max\{0, \xi_j(\mathbf{p}^*)\}} \right) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) \tag{3.19}$$

y aplicar la Ley de Walras

$$\max\{\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*)\} \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) = 0 \tag{3.20}$$

Por contradicción, si $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) > \mathbf{0}$ entonces $\max\{\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*)\} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*)$ y por lo tanto:

$$\|\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*)\|^2 > 0 \tag{3.21}$$

contradiciendo (2.45) y en consencuencia debe ser cierto que $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$ □

La demostración del Teorema 2.8.3 es bastante sugerente para comprobar la existencia de al menos un equilibrio walrasiano. Siguiendo muy de cerca a Jehle y Reny (2011) el siguiente Teorema establece condiciones necesarias.

Teorema 3.2.4 (Wald, MacKenzie, Debreu, Arrow; 1920 a 1954)**.** . *Supongamos que $\xi : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface las siguientes condiciones:*

1. $\xi : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una función continua;*

2. *Se cumple que* $\mathbf{p} \cdot \xi(\mathbf{p}) = 0$ *para todo* $\mathbf{p} >> 0$

3. *Sea* $\{\mathbf{p}^m\}$ *es una sucesión de vectores de precios en* $\mathbb{R}^n_{++}$ *que converge a* $\mathbf{q} \neq 0$*. Si para algún bien k se cumple* $q_k = 0$*, entonces existe algún bien l tal que* $q_l = 0$*, y la sucesión asociada de excesos de demanda en el mercado l – ésimo, i.e. la secuencia* $\{\xi_l(\mathbf{p}^m)\}$*, no está acotada superiormente.*

Entonces*, existe un vector (sistema) de precios* $\mathbf{p}^* >> 0$ *tal que* $\xi(\mathbf{p}^*) = 0$.

Demostración. (Esbozo) Definamos para todo $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $\overline{\xi_j}(\mathbf{p}) = \text{mín}\{\xi_j(\mathbf{p}), 1\}$ para todo $j \in \mathscr{J}$ y sea $\overline{\xi}(\mathbf{p}) = \left(\overline{\xi_1}(\mathbf{p}), ..., \overline{\xi_n}(\mathbf{p})\right)$.
Fijemos un $\epsilon \in (0,1)$ de modo que nuestro espacio de precios sea

$$\triangle_\epsilon = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++} : \sum_j^n p_j = 1 \quad y \quad p_j \geq \frac{\epsilon}{1+2n}, \quad \forall j \in \mathscr{J} \right\} \tag{3.22}$$

Se puede demostrar que (2,47) satisface las condiciones del Teorema de Punto Fijo de Brouwer, de modo que para todo $\mathbf{p} \in \triangle_\epsilon$ la siguiente función $\boldsymbol{\psi} : \triangle_\epsilon \longrightarrow \triangle_\epsilon$ es continua:

$$\psi_j(\mathbf{p}) = \frac{\epsilon + p_j + \max\left\{0, \overline{\xi_j}(\mathbf{p})\right\}}{n\epsilon + 1 + \sum_{l=1}^{n} \max\left\{0, \overline{\xi_l}(\mathbf{p})\right\}} \tag{3.23}$$

para la cual existe un $\mathbf{p}^\epsilon \in \triangle_\epsilon$, tal que $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{p}^\epsilon) = \mathbf{0}$ y en consencuencia

$$p_j^\epsilon \left[n\epsilon + 1 + \sum_{l=1}^{n} \max\left\{0, \overline{\xi_l}(\mathbf{p}^\epsilon)\right\} \right] = \epsilon + p_j^\epsilon + \max\left\{0, \overline{\xi_j}(\mathbf{p}^\epsilon)\right\} \tag{3.24}$$

valida para todo $\epsilon \in (0,1)$.
Puesto que $\{\mathbf{p}^\epsilon\}$ es una sucesión acotada en $\triangle_\epsilon$, entonces toda subsucesión de $\{\mathbf{p}^\epsilon\}$ debe converger a $\mathbf{p}^*$ y por 3. el vector de precios $\mathbf{p}^* >> \mathbf{0}$ es estrictamente positivo, el cual representa el vector de precios de equilibrio. □

La idea intuitiva que reside en la tercera condición del Teorema 2.7.1 es la siguiente: Si un precio es arbitrariamente cercano a cero, la demanda agregada asociada al bien es arbitrariamente alta, y en consencuencia es de esperarse que un bien con precio nulo, de ser un bien normal, se demanden infinidad de unidades del bien en cuestión. Así mismo puede comprobarse que trabajar con está condición es indispensable para obtener la conclusión del Teorema anterior[2] y por supuesto, es posible expresar el Teorema 2.7.1 en términos de las funciones de utilidad y de las demandas agregadas para concluir que

Teorema 3.2.5. *Si las preferencias de cada consumidor pueden describirse por funciones de utilidades continuas, estrictamente crecientes y estrictamente convexas, y si adicionalmente se cumple que la oferta agregada es estrictamente positiva, entonces existe al menos un vector de precios de equilibrio* $\mathbf{p}^*$ *tal que* $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$

Demostración. Ver Jehle y Reny (2011, pp.209-211) □

[2]Considere

$$\boldsymbol{\xi}(p_1, p_2) = (-1, p_1/p_2) \tag{3.25}$$

es claro que (2.18) es continua y satisface la Ley de Walras, sin embargo es sencillo mostrar que la condición tres del Teorema 2.7.1 no se cumple.
Sea sin perdida de generalidad $p_1 = 0$ para el cual $\mathbf{p^m}$ converge a $\mathbf{p}$

Debe observarse que si $\mathbf{p}^*$ es un vector de precios de equilibrio entonces el rayo $\alpha\mathbf{p}^*$, $\alpha > 0$ también es solución del sistema $\xi(\mathbf{p}^*) = \xi(\alpha\mathbf{p}^*) = 0$. Este grado de libertad se aprovecha al comprobar que gracias a la Ley de Walras es posible garantizarse que al estar en equilibrio walrasiano los $n-1$ mercados entonces el n-esímo mercado también lo estará.

Cerremos la sección demostrando que el Teorema de Punto Fijo de Brouwer es equivalente al equilibrio walrasiano. Para ello seguimos muy de cerca a Border (1998).

Teorema 3.2.6. *El Teorema de Punto Fijo de Brouwer es equivalente al Equilibrio Walrasiano*

Demostración. La necesidad se establece inmediatamente por el Teorema 2.8.4.
Procesamos a demostrar la suficiencia.
Consideremos $\boldsymbol{\theta} : \triangle \longrightarrow \triangle$ una aplicación continua y $\boldsymbol{\xi} : \triangle \longrightarrow \mathbb{R}^n_{++}$ la función exceso de demanda definida como

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p})}{\|\mathbf{p}\|^2}\mathbf{p} \tag{3.26}$$

Una inspección rápida nos convence que (2.51) satisface las propiedades del Teorema 2.8.1. Por el Teorema 2.8.4, existe al menos un equilibrio walrasiano $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$ que verifica:

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}^*) = \frac{\mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}^*)}{\|\mathbf{p}^*\|^2}\mathbf{p}^* \tag{3.27}$$

puesto que $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}^*) \cdot \mathbf{1}^T \in \triangle$ y en consencuencia $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}^*) \cdot \mathbf{1}^T = 1$

$$\frac{\mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}^*)}{\|\mathbf{p}^*\|^2}\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{1}^T = 1 \tag{3.28}$$

pero $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{1}^T = 1$

$$\frac{\mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}^*)}{\|\mathbf{p}^*\|^2} = 1 \tag{3.29}$$

y por lo tanto

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^* \tag{3.30}$$

que es precisamente la propiedad de punto fijo. □

Observación 3.2.1. *Tanto el Teorema 2.8.4 como el Teorema 2.8.3 fueron demostrados por Uzawa en 1962. Algunas de sus principales implicaciones en el programa del equilibrio general fue el desarrollo vertiginoso de algoritmos de búsqueda en el simplex o en otras geometrías para obtener puntos fijos y en consecuencia equilibrio walrasianos.*

El primer algoritmo de búsqueda fue ideado por Scarf en la década de los 60's, en el cual usaría como inspiración el Lema de Sperner, que como es sabido es punto de partida para demostrar el Teorema de Punto Fijo de Brouwer. Un texto que aborda in extenso estas vertientes es Todd (2013), también es una excelente alternativa revisar Border (1998).

En la siguiente sección desarrollaremos la teoría estándar sobre los Teoremas del Bienestar. Como se advirtio en la introducción del cápitulo presente, nuestro principal interés son las economías de intercambio, sin embargo el lector que desee estudiar sus equivalentes para economías con producción puede consultar Mas-Colell, Whiston y Green (1995).

3.3. Teoremas del Bienestar

Teniendo el resultado de existencia del EEG, podemos estudiar una vertiente de la *mano invisible*:

¿El egoísmo de los participantes resulta en situaciones eficientes para la economía?

Los *Teoremas del Bienestar* a menudo son asociados a la pregunta anterior. Sus principales consecuencias son que al postular un principio de eficiencia, el equilibrio walrasiano sitúa a las economías de intercambio en una posición inmejorable.

Una particularidad de los Teoremas de Bienestar es el énfasis que ponen en las asignaciones de bienes y el intercambio puro como se ilustra en la siguiente imagen en la que se supone una economía de intercambio con dos bienes y dos consumidores, cuya asignación eficiente coincide con el equilibrio walrasiano y éste es único.

La generalización ilustrada en la Caja de Edgeworth es la consencuencia del Primer Teorema del Bienestar. Partamos de la siguiente definición.

Definición 3.3.1. *Sea* $\mathbf{p}^*$ *precio de equilibrio, con dotaciones iniciales* $\boldsymbol{\omega}$ *y*

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) = \left[\mathbf{x}^1(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \omega^{\mathbf{1}}), \mathbf{x}^2(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \omega^{\mathbf{2}}), ..., \mathbf{x}^n(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \omega^{\mathbf{n}})\right] \tag{3.31}$$

con $\mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \omega^{\mathbf{i}})$ *la demanda no compensada para el consumidor i-esímo. Entonces* $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ *se denominaasignación walrasiana de equilibrio*

En economías de intercambio $\mathscr{E} = \left\{X, \succeq, \omega^i_j\right\}^{i\in\mathscr{I}}_{j\in\mathscr{J}}$, existe una restricción natural entre lo que puede asignarse y los bienes que existen en la economía, está es la idea que recoge el conjunto de asignaciones factibles caracterizado por:

$$\boldsymbol{\Omega} = \left\{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega_i}\right\} \tag{3.32}$$

Dentro de $\boldsymbol{\Omega}$ nos interesan aquellas asignaciones que sean eficientes, i.e. todas aquellas cestas de consumo $\mathbf{x_i} \in \boldsymbol{\Omega}$ para las cuales no exista otra $\mathbf{y}_i \in \boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{y}_i \succeq \mathbf{x}_i$, con al menos una preferencia estricta. Además serán eficientes en el sentido de Pareto, todas aquellas cestas de consumo eficientes que en términos de utilidad, la asignación de una cesta a un consumidor no haga empeorar a otro. En economías de intercambio, una asignación eficiente es la mejor cesta, en términos de utilidad, que reporta el mayor bienestar social, por lo

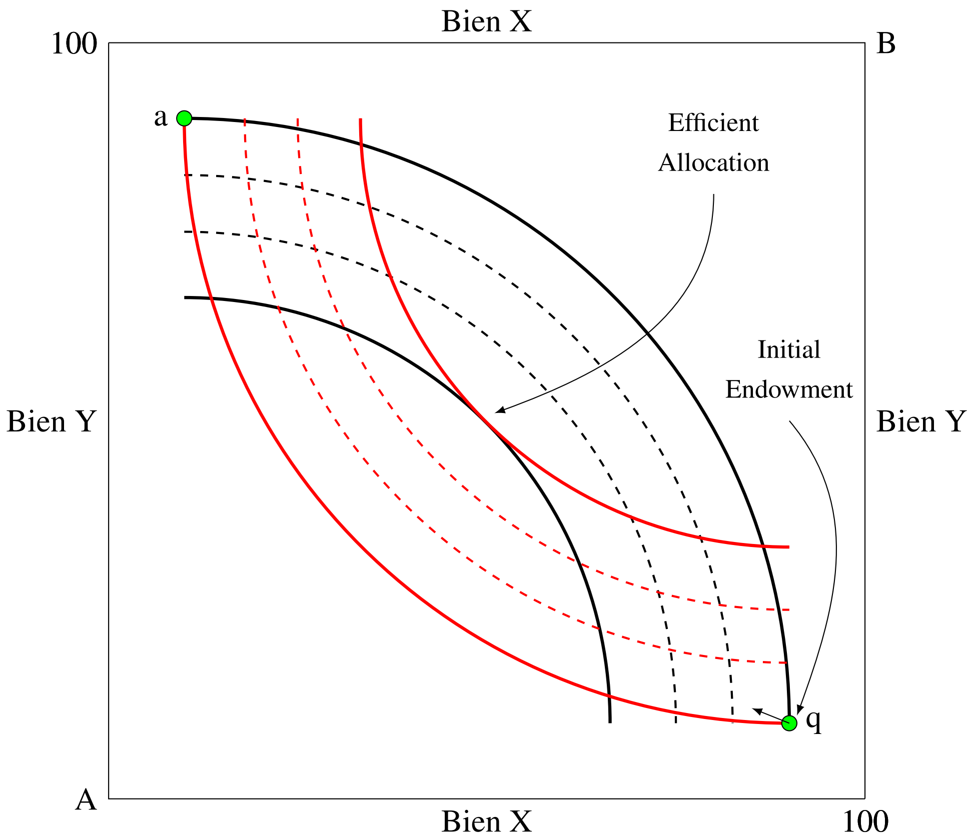


Figura 3.1: Caja de Edgeworth.

que ninguna aglutinación de consumidores (denominadas coaliciones) permite bloquear las cestas eficientes sin que se verifique la existencia de una mejor cesta a la eficiente. Formalmente una coalición es un subcojunto de individuos S tal que se verifique:

1. $\sum_{i \in S} \mathbf{y}_i = \sum_{i \in S} \boldsymbol{\omega}_i$
2. $\mathbf{y}_i \succeq \mathbf{x}_i$ para todo $i \in S$ con al menos una preferencia estricta.

Teorema 3.3.1. *(**Primer Teorema del Bienestar**) Dada una economía de intercambio, si $u(.)$ es estrictamente creciente, toda asignación walrasiana de equilibrio es Pareto eficiente.*

Demostración. Ver Jehle y Reny (2011,p.217) □

Puede observarse que el concepto de eficiencia es un concepto de bienestar, cuantificado por la utilidad de los participantes. Si las asignaciones walrasianas de equilibrio son eficientes, ningún participante, en el equilibrio de la economía, puede perder bienestar, y al menos alguno situado en una mejor situación. Si aspiramos que las asignaciones walrasianas sean eficientes en el sentido de Pareto, ninguna coalición puede bloquearla, hallando una cesta en $\boldsymbol{\Omega}$ mejor. La noción de bienestar del EEG no atiende a nociones derivadas de algún concepto de justicia social en la distribución de la riqueza (el lector interesado en esas discusiones puede remitirse a textos clásicos en la materia: Rawls, La Teoría de la

Justicia y Nozick, Anarquía, Estado y Utopía).

Teorema 3.3.2. ***(Segundo Teorema del Bienestar)*** *En una economía de intercambio* $\mathscr{E} = \left\{X, \succeq, \omega_j^i\right\}_{j\in\mathscr{J}}^{i\in\mathscr{I}}$ *con dotaciones* $\sum_{i\in S} \boldsymbol{\omega}_i >> 0$ *y* $u(.)$ *estrictamente creciente. Suponga que* $\mathbf{x}$ *es una asignación eficiente en el sentido de Pareto para* $\mathscr{E} = \left\{X, \succeq, \omega_j^i\right\}_{j\in\mathscr{J}}^{i\in\mathscr{I}}$*), y que las dotaciones son redistribuidas resultando en el vector* $\mathbf{x}^*$ *.Entonces* $\mathbf{x}^*$ *es una asignación walrasiana de equilibrio para la economía de intercambio* $\mathscr{E} = \left\{X, \succeq, \omega_j^i\right\}_{j\in\mathscr{J}}^{i\in\mathscr{I}}$

Demostración. Ver Jehle y Reny (2011, pp.218-219) □

Respecto al segundo Teorema del Bienestar señala Jehle y Reny (2011, p.219):

One can view the Second Welfare Theorem as an affirmative answer to the following question: is a system that depends on decentralised, self-interested decision making by a large number of consumers capable of sustaining the socially "best.ªllocation of resources, if we could just agree on what that was? Under the conditions stated before, the Second Welfare Theorem says yes, as long as socially "best" require , at least, Pareto efficiency.

Con los Teoremas del Bienestar terminamos de presentar los principales resultados del problema de existencia del EEG. A continuación pasaremos a revisar los por menores del problema de unicidad.

3.4. Problema de Unicidad

3.4.1. Introducción

En está sección discutiremos superficialmente algunos resultados interesantes sobre el problema de unicidad. Diferentes enfoques pueden ser utilizados para abordar está área indudablemente "dura" y "técnica" del PEEG; una de las exposiciones más intuitivas proviene de Mas-Colell, Whinston y Green (1995) y en ciertos aspectos se complementa con la exposición más avanzada y cuidada de Mas-Colell (1998) las cuales seguiremos muy de cerca en este apartado. Otra alternativa menos recomendable, aunque de consulta obligatoria son Arrow y Hahn (1976), Belasko (1988), Debreu (1970). En general hay abundantes resultados sobre unicidad en el trabajo clásico de Arrow y Hahn (1976) nosotros sólo estudiaremos el caso para sustitutos brutos, pero el lector debe tener conocimiento que es posible utilizar el axioma débil de las preferencias reveladas, o imponer algunas condiciones sobre el jacobiana de la función exceso de demanda como diagonal dominada o la propiedad de Gale para demostrar unicidad global.

3.4.2. Unicidad Global

Dos de las grandes virtudes que se consiguen con garantizar unicidad global en el EEG, en primer lugar, permite establecer si dichas condiciones son restrictivas o no, para implementar la maquinaria teórica del EEG en asuntos de política económica mediante estática comparativa y, en segundo lugar, contrastar la teoría con los fenómenos económicos que pretende anticipar . (Bryant, año) argumenta que la no unicidad en el EEG conlleva a una inexistente teoría del valor, cosa que para el argumento de la Mano Invisible es mortal.

Desafortunadamente, aunque se ha conseguido demostrar que la unicidad es posible, está se condicionada a supuestos más restrictivos que los establecidos en el teorema (número del teorema de existencia). En este apartado presentaremos algunas de esas condiciones, considerando dos de las más celebres condiciones suficientes para garantizar unicidad global.

Iniciemos con un par de definiciones. Consideremos en adelante una función de exceso de demanda la cual supondremos normalizada en algún precio, por ejemplo el n-precio, i.e. $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = (\xi_1(\mathbf{p}),\ldots,\xi_n(\mathbf{p}))$ tal que para todo $\mathbf{p} \in \triangle$ se tiene que $\mathbf{p} = (p_1,...,p_{n-1},1)$. Diremos que $\boldsymbol{\xi} : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface el *Axioma Débil de las Preferencias Reveladas* si para todo $\mathbf{p},\mathbf{p}^{'} \in \triangle$ tal que $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) \neq \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^{'})$ y $\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) \leq 0$, entonces $\mathbf{p}^{'}\cdot\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) > 0$. Mientras que $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ satisface la propiedad de *sustitutos brutos* si para todo $\mathbf{p},\mathbf{p}^{'} \in \triangle$ algún l, $p^{'}_l > p_l$ y $p^{'}_k = p_k$ para todo $l \neq k$ se tiene $\xi_k(\mathbf{p}^{'})\xi_k(\mathbf{p}) >$. La primera propiedad ya ha sido discutida anteriormente, resultado evidente que la propiedad ADPR para las funciones exceso de demanda se cumplen automáticamente como consecuencia heredable de las demandas no compensadas. La razón de ello es, como en el caso del Teorema número, la forma funcional de $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$. Como consecuencia de heredar la propiedad ADPR de las demandas no compensadas, recordemos que una condición suficiente para probar su mantenimiento es el cumplimiento de la Ley de la Demanda, por tanto, el ADPR para $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ permite conservar la monotonía de la función bajo dicha propiedad.

Proposición 3.4.1. *Supongamos que el sistema de demandas no compensadas satisface la propiedad ADPR, entonces* $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = (\xi_1(\mathbf{p}),\ldots,\xi_n(\mathbf{p}))$ *también lo satisface. Más aún,* $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ *satisface la Ley de la demanda:*

Un hecho menos discutido es la propiedad de sustituibilidad bruta, la cual surge en el contexto de la Ecuación de Slutsky. Una interpretación familiar de la propiedad puede establecerse en los siguientes términos:

Si el precio de un bien aumenta, manteniendo lo demás constante, la demanda de dicho bien disminuye, mientras que la demanda de los restantes bienes aumenta.

La figura 2.3 describe lo anterior para una economía de intercambio donde $l = 2$. Claramente se observa que conforme disminuye ξ_1), su homologa aumenta a medida que el precio del bien uno aumenta. La naturaleza de este fenomeno puede explicarse en términos de la ecuación de Slutsky.

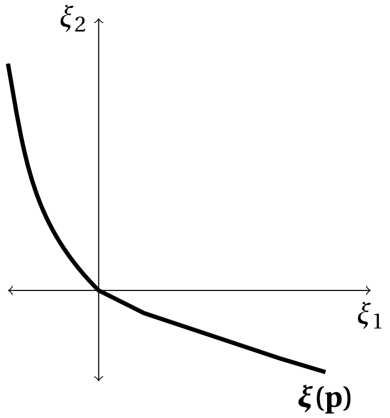


Figura 3.2: propiedad de Sustitutos Brutos

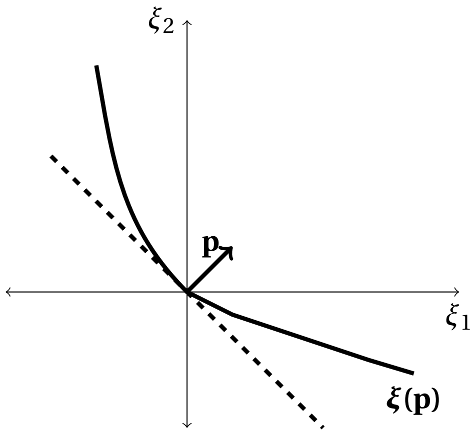


Figura 3.3: Relación entre el ADPR y la propiedad SB

Un hecho interesante de está propiedad es, como sucede con el ADPR, sus cualidades microfundamentadas. Es decir, si las demandas no compensadas cumplen con la propiedad SB, entonces las funciones exceso de demanda la satisfacen instantaneamente. Sin embargo,a diferencia de la propiedad ADPR para la versión de las demandas no compensadas, la propiedad de SB es más difícil de garantizar a nivel individual.

Desde luego, una pregunta que resulta importante en términos de la relaciones entre estás dos propiedades es naturalmente, si ambas están emparentadas en algún modo. Como señala Mas-Collel (1995) no hay razones para fundamentar que el $ADPR \Rightarrow SB$, y aunque menos obvio tampoco es cierto $SB \Rightarrow ADPR$.

3.4.3. Unicidad Local

Una conclusión que emerge de la sección anterior es la dificultad que representa generalizar condiciones suficientes para que el equilibrio walrasiano sea unico, sin que por ello la condición usada sea restrictiva como sucede con la propiedad SB, de modo que cuando la unicidad global no es una propiedad generica de las economías de intercambio, la mejor alternativa sea estudiar cuándo el equilibrio walrasiano es localmente único.

Supongamos por el momento una economía con dos agentes y dos bienes. Asociaremos a cada bien un precio p_1 y p_2. Sea $\boldsymbol{\xi}(p_1, p_2)$ la función de exceso de demanda con los supuestos usuales. Decimos que en la economía E el vector de precios es localmente único para $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ si no existe otro y $\epsilon > 0$ tal que. Es decir, si no existe otro vector de precios p cercano a p* tal que se verifique $\boldsymbol{\xi}(p_1, p_2) = 0$. Las siguientes figuras describen dos posibles comportamientos de la función ξ para las que se cumple la definición de unicidad local.

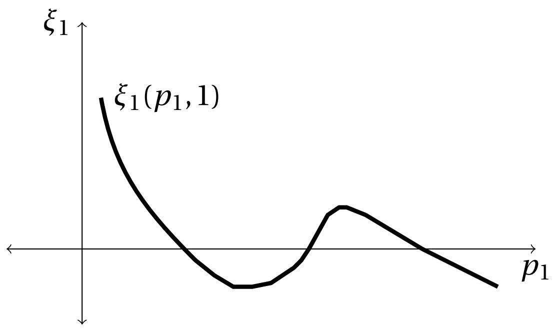


Figura 3.4: Economía Regular con tres equilibrios walrasianos

En la figura 4 puede apreciarse tres equilibrios walrasianos. Para esta simple economía, una rápida inspección de la función nos sugiere que la pendiente de ξ_1 y la alternancia de su signo juega un papel preponderante en la determinación y cantidad de los precios de equilibrio.

A diferencia de la economía 4, la economía 5 muestra un continuo de equilibrios para la cual no existe alternancia en el signo de la pendiente y la derivada en todos los equilibrios es siempre cero.

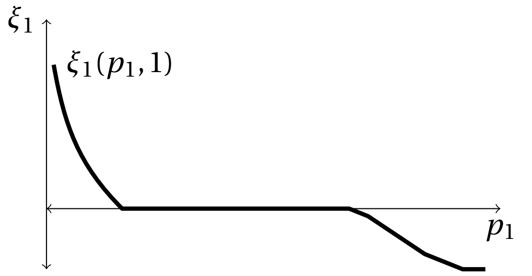


Figura 3.5: Economía patologica con un continuo de equilibrio walrasianos

Estos dos elementos destacados anteriormente (alternancia del signo y pendiente) son las ideas esenciales para entender una porción importante de la teoría relacionada con la unicidad local en el Equilibrio General y fueron indispensables para que en un artículo titulado Economies with a Finite Set of Equilibria Gerard Debreu (1970) desarrollará una teoría que permitía estudiar las economías de intercambio desde una perspectiva de la topología diferencial, en la que haría uso de algunos resultados como el Teorema de Sard para explorar las clases de economía que tenían como propiedad genérica la unicidad local y otras problemáticas relacionadas con la estática comparativa en el EEG. Estás clases de economías serían bautizadas por Debreu (1970) como *economías regulares* y hasta la fecha siguen siendo un campo fértil y en pleno desarrollo dentro del PEEG (ver Balasko (2002) para más detalles).

3.4.4. Economías Regulares

Una consecuencia que noto Debreu (1970) al trabajar con economías regulares era precisamente que bajo el supuesto de compacidad en el equilibrio, el conjunto

$$E = \left\{\mathbf{p} \in \triangle : \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\right\} \tag{3.33}$$

no sólo era bien comportado como lo ilustra la figura 1, sino que más importante aún se podía destacar que el conjunto $E = \left\{\mathbf{p} \in \triangle : \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\right\}$ es finito y al menos, por lo que hemos podido observar a raíz del Teorema de Equivalencia y el Lema de Sperner, se podría conjeturar que $E = \{\mathbf{p} \in \triangle : \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}$ contiene un número impar de equilibrios walrasianos.

Observación 3.4.1. *Si bien como observa (Nagata, 2004) el adjetivo regular puede sugerirnos alguna carácteristica intrinseca de la economía en el equilibrio, como sucede con el concepto de eficiencia en el sentido de Pareto, más bien el adjetivo describe una característica matemática que alude a lo que se denominan puntos (o valores) regulares como propiedad de las aplicaciones diferenciables.Más precisamente una economía se dice regular si el jacobiano de la demanda de mercado es de rango completo.*

Thus, the term regular economies is solely used in a theoretical and mathematical context, which makes the word less popular than others even though it has already gained a firm footing in the field of mathematical economics. Accordingly, the term is conceptually abstract and rigorous. (Nagata, 2004, p. viii.)

Con el objetivo de esbozar porqué las dos afirmaciones anteriores son ciertas, partamos de una economía de intercambio para la cual nuestra función de interés es la función exceso de demanda definida para n bienes y continuamente diferenciable. Un precio de equilibrio normalizado se denominará regular si la matriz $D\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ es no singular que es equivalente a pedir que el rango de $D\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ sea completo, de modo que si todos los precios de equilibrio son regulares, la economía de intercambio se denominará regular.Una rápida inspección de esta definición nos convencerá para concluir que es una generalización del caso unidimensional. Desde luego, al ser $D\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ la mejor aproximación lineal de $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ en $\mathbf{p}$ y haciendo uso de las propiedades del Teorema (numero),

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\xi}(\alpha\mathbf{p}),\ \alpha > 0 \tag{3.34}$$

al derivar la expresión (2.21) respecto a $\alpha = 1$ se obtiene por regla de la cadena que $\partial\boldsymbol{\xi}(\alpha\mathbf{p})|_{\alpha=1} = \partial\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})\mathbf{p} = 0$. Por lo que es ahora sencillo observar que el sistema de ecuaciones tiene solución si y sólo si $D\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ es no singular.

Teorema 3.4.1. *En una economía de intercambio regular,los precios de equilibrios son localmente únicos y el número de precios walrasianos* $\#E = \{\mathbf{p} \in \triangle : \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}$ *es finito.*

Demostración. Consideremos un precio de equilibrio regular normalizado, entonces $\operatorname{rank} D\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) \leq n-1$ y por lo tanto $D\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ es no singular. Por el *Teorema de la Función Inversa*, existe un abierto $\mathbf{V}$ de $\mathbf{p}$ y una función $\boldsymbol{\xi}^{-1} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\boldsymbol{\xi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})) = \boldsymbol{\xi}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{p} \tag{3.35}$$

que está en $\mathbf{V}$ y por el supuesto de unicidad local sobre $\mathbf{p}$ se concluye lo que deseábamos. Finalmente Debreu (1970) muestra que E es compacto, entonces de la continuidad de $\boldsymbol{\xi}$ se desprende efectivamente que $\#E = \{\mathbf{p} \in \triangle : \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}$ es finito.

□

Una definición alternativa de economías regulares es propuesta por Mas-Colell (1979) en la que establece que si la matriz

$$D = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) & \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n_+ \tag{3.36}$$

es no singular, entonces el precio de equilibrio es regular. Como destacará Mas-Colell (1986) es posible derivar el Teorema del índice a raíz de la matriz anterior observado efectivamente que si el determinante es no nulo entonces debe ser o bien positivo o negativo. Antes de enunciar el anterior problema, definiremos el índice el índice de p, vector de precios de equilibrio regular como $\sigma(\mathbf{p}) = \pm 1$ acorde al signo de (2.22), i.e. $\sigma(\mathbf{p}) = 1$ si $D > 0$, $\sigma(\mathbf{p}) = -1$ en caso contrario.

Teorema 3.4.2. *Para alguna economía regular*

$$\sum_{\{\mathbf{p} \in \triangle : \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}\}} \sigma(\mathbf{p}) = +1 \tag{3.37}$$

Demostración. Ver Mas Colell (1985), sección 5,6, pp. 201-215 □

Si volvieramos a nuestra economía regular para el caso $n = 2$, la principal aseveración del Teorema del índice es: sin importar la cantidad de precios de equilibrios regulares, la economía tendrá una cantidad impar de ellos, para los cuales el signo $\sigma(\mathbf{p})$ se alternará hasta que finalmente el signo del determinante (2.22) sea positivo, además, debido a que el índice nunca puede ser nulo, el resultado precedente, es a su vez un Teorema de Existencia.

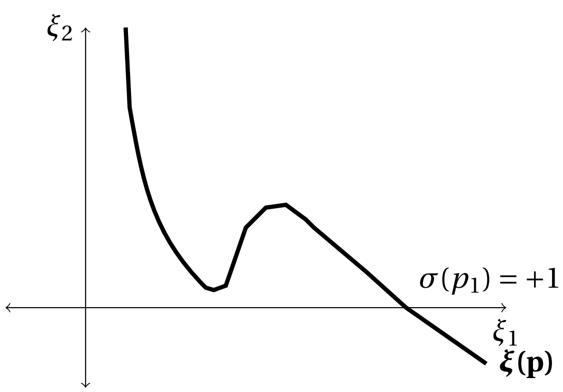


Figura 3.6: Economía regular cuyo equilibrio es globalmente único

El caso más obvio es cuando el equilibrio es único en el que se aprecía (figura 2.7) la validez del Teorema del índice.

Esta última observación nos permite garantizar que si todos los precios regulares de equilibrio tienen como signo $\sigma(\mathbf{p}) = +1$ el equilibrio debe ser único.

Otras consencuencias importantes y como se verá en el problema de estabilidad,el Teorema del índice permite clasificar los precios de equilibrio en dos categorías, de modo que $\sigma(\mathbf{p}) = +1$ será el caso con mayor relevancia en la discusión de mecanismos de precios estables.

Finalmente el Teorema es un resultado máximal en la teoría de las economías regulares sin que por ello se apele a condiciones adicionales en el modelo.

Capítulo 4

Estabilidad

4.1. Introducción

Una pregunta natural que emerge después de estudiar las condiciones bajo las cuales el equilibrio y la unicidad son posibles en un modelo de intercambio simple, supone trasladar el problema de la determinación de los precios desde una óptima dinámica en la que se desea conocer los alcances y consistencia del modelo teniendo presente las concepciones de la mano invisible en el EEG y la restricción microfundamentada del modelo.

Si bien, como se ha evidenciado en el capítulo anterior, pese a que el programa del equilibrio económico responde afirmativamente a las principales conjeturas de Smith y su mano invisible, esto es, que el equilibrio es una situación socialmente óptima en la cual los individuos egoístas concilian su interés; las principales aseveraciones de la mano invisible quedan aún sin ser abordadas sistemáticamente con el modelo del precio propuesto en el segundo capítulo. Como podrá recordarse, la mano invisible no sólo contempla la existencia de una situación idealmente óptima para las economías sino que también es un argumento de la universalidad del sistema de precio y del liberalismo económico según el cual las economías pueden arreglárselas para alcanzar el equilibrio sin otros elementos que las fuerzas del mercado y algún mecanismo de precios que refleje la evolución de la economía con las principales herramienta del modelo: la Ley de la Demanda y los efectos contemplado por la Matriz de Sustitución, los cuales deben satisfacerse para el máximo nivel agregado: la función exceso de demanda.

En esta perspectiva el problema de estabilidad del EEG, cuyos principales resultados en breve se discutirán, radica precisamente en responder a las preguntas ¿cómo puede la economía converger al equilibrio, a partir de un sistema de precios inicial que por definición es ineficiente en la asignación de los recursos de la economía? ¿Cuánto tiempo demoraría? Y ¿qué tipo de condiciones específicas necesitamos atribuir al sistema económico para que la estabilidad sea una propiedad matemática adjudicada al mecanismo de precios? De este modo, como escribiría Fisher el problema de la estabilidad no sólo describe las formas en que se alcanza el equilibrio, sino que además abre la puerta al análisis dinámico-económico fuera del equilibrio (out-equilibrium) en el que aun suponiendo que en la dinámica de los mercados el equilibrio es un caso recurrente, el análisis del desequilibrio es importante por sí mismo:

For one thing, only such analysis can provide the assurance that our equilibrium theories are consistent; if equilibrium is the usual case, we need to know why. Further, only analysis of the dynamic path that a stable system follows in disequilibrium can tell us to which of several possible equilibria that system will go. This is a matter of considerable importance, not only because multiplicity of equilibria is the rule rather than the exception, but also because, as we shall see, analysis of disequilibrium shows that the dynamic behavior involved often changes the equilibrium that is eventually reached. (Fischer, 1978 I).

En consecuencia, aun cuando los principales resultados del PEEG ha reservado sus más poderosas consecuencias exclusivamente en el equilibrio, armado con el supuesto de racionalidad perfecta de los agentes económicos que no es otra cosa que agentes que entienden que la economía se encuentra en desequilibrio, y por lo tanto perciben oportunidades de arbitraje el estudio de la universalidad del sistema de precio y el liberalismo económico requieren más que los Teoremas del Bienestar, desde luego, se requiere asegurar *that competitive economies are close to equilibrium most of the time. That assurance cannot be provided by only examining the properties of equilibria.* (Fisher, 1978, II).

En el resto del cápitulo usaremos la notación de Anaya, Alvarez y Ibarra(2007).

4.2. Nociones Básicas

La introducción del “movimiento” para alguna economía de intercambio particular, digamos requiere la introducción de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas que permitan modelar el comportamiento de todos los mercados considerados en la economía propuesta. Una de las primeras dificultades que resultan evidentes al tratar con problemas dinámicos de esta naturaleza es la definición de estabilidad que puede decirse tanto del proceso mismo, de la solución del sistema autónomo y de los precios de equilibrio, en cuyo caso existen una amplia variedad de definiciones como podría descubrirse en cualquier texto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

En primer lugar, es necesario mencionar que los resultados estándar de dichos textos en la mayoría de los casos resultan sustancialmente diferentes y apartados de la literatura económica al menos en lo que respecta a la teoría de la estabilidad en el EEG, de lo contrario la teoría de existencia y unicidades desarrolladas hasta ahora serían innecesarios, así como las características particulares de los campos vectoriales que no son otra cosa que las funciones exceso de demanda. En particular está clase de campos vectoriales no suelen suponer continuidad uniforme, y por supuesto la noción de estabilidad en el EEG ha sido construida a partir de una definición de estabilidad asintótica que por propio derecho traslada las particularidades de la teoría de la demanda a la noción de estabilidad usada.

En consecuencia antes de dar cualquier tipo de noción específica sobre la discusión que presentaremos, debemos contextualizar al lector sobre lo que en adelante entenderemos por estabilidad. Siguiendo a Arrow y Hurwitz (1958), Hahn (1976), Saari (1976, 1985,1995) y Anaya, Alvarez y Ibarra(2007) , decimos que el sistema autónomo:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{p}) \tag{4.1}$$

Es *globalmente (asintóticamente) estable* si para algún vector de precios$\mathbf{p_0} \in \mathbb{R}^n_+$, la función $\psi(t, \mathbf{p_0})$ solución de (3.1) converge a $\mathbf{p_{eq}}$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Será *Localmente (asintóticamente) estable* si para algún vector de precios inicial $\mathbf{p_0}$ en alguna una vecindad de $\mathbf{p_{eq}}$ la trayectoria de $\psi(t, \mathbf{p_0})$ converge a $\mathbf{p_{eq}}$ cuando $t \longrightarrow \infty$. En cambio, el proceso (3.1) será *universalmente (asintóticamente) estable* si el proceso 3.1 genera una trayectoria que converge a un equilibrio para algún tipo de función de exceso de demanda.

La terminología usual del problema de estabilidad del EEG, denomina al sistema autónomo (3.1) como mecanismo de precios. Se diría que el mecanismo de precios es globalmente (asintóticamente) estable, Localmente (asintóticamente) estable o universalmente (asintóticamente) estable si se cumplen las condiciones enunciadas anteriormente.

4.3. Mecanismos de Precios

Un mecanismo, informalmente y en forma general, es el medio por el cual se alcanzan ciertos objetivos, dada una función objetivo (usualmente una función de bienestar) atendiendo los canales en que la información es distribuida a los integrantes de la economía y estipulando ciertas reglas en el proceso. La teoría desarrollada por Hurwitz (2006) respecto al diseño de mecanismo centra sus energías en la evaluación de mecanismos cuyas principales aristas radican en las cotas de información necesarias que permitan al mecanismo trabajar y su procesamiento para eliminar información espuria o poco relevante para los integrantes de la economía.

Un elemento que a todas luces ha quedado fuera del análisis convencional de los problemas estáticos del EEG son los costos derivados de procesar grandes cúmulos de información procedentes del ambiente económico mismo que son constitutivos para el desarrollo de algún modelaje con fines a formular metodologías de alto impacto en el ámbito social, fiscal o de la banca en general. En el caso concreto de una economía de intercambio, estos costos pueden ser importantes aun cuando se excluyen del modelo elementos como la producción el dinero o las dificultades de esparcir fehacientemente la información relevante entre cada agente para la toma oportuna de decisiones. Naturalmente, en lo que nos respecta, un mecanismo de precios para economías lo suficientemente simples donde se excluyen conductas irregulares en las estrategias de los mismos y situaciones ajenas a la competencia perfecta, reduce sustancialmente la dificultad del problema.

Debido a que un mecanismo de precios pretende estudiar la dinámica de las *fuerzas del mercado* con la información que provee el ambiente económico, la principal intuición que debe conservarse en su diseño es la tendencia que la información económicamente relevante suministra al mecanismo, es decir:

1. El Sistema de Precios,
2. Los parámetros de las unidades primarias $\theta_j = (\succeq_j, \omega^j)$ para las cuales se suelen suponer conocidas a lo largo del tiempo.
3. Información Agregada: Demanda y Oferta

Estos factores son fundamentalmente la información suministrada a los mecanismos como (número) de modo que una estrategia bastante poderosa que ha sido implementada en la literatura para atacar el problema de la estabilidad ha sido introducir la retroalimentación en el diseño de mecanismos de precios desde una lógica de trial and error hasta alcanzar el equilibrio . Uno de esos enfoques es el Tanteo Walrasiano que como su nombre indica, se plantea corregir la trayectoria de (número) hasta alcanzar el equilibrio. Otros enfoques menos convencionales que han sido introducidos son el análisis de la complejidad de los mecanismos como es la línea de (autores) y por supuesto propuestas más elaboradas.

4.4. Complejidad

La búsqueda de una medida de la complejidad de un mecanismo de precios es de gran relevancia para comprender a qué tipo de dificultades nos enfrentamos. La complejidad de los mecanismos de precios, para el estudio del EEG, es traducido en términos de la información necesaria para que el mecanismo converja a un equilibrio. En la literatura de sistemas dinámicos, la noción de complejidad y caos no tienen una definición estandarizada, sin embargo nociones como la complejidad de Kolmogorov o la noción de entropía de Shannon ensambladas en la dinámica simbólica del proceso, permitirían un mayor entendimiento de los mecanismos en el sentido cualitativo de los sistemas dinámicos, esto es: traduciendo el comportamiento de las orbitas mediante dinámica simbólica, podemos hacer uso cadenas dado un alfabeto Σ para estudiar el comportamiento del mecanismo a lo largo del tiempo. Esta idea es la base en las demostraciones de Saari (197) para mecanismos discretos, fuera de ello, la opción más práctica para determinar la cantidad de información en términos de bits por iteración. En adelante llamaremos a CSS como la clase de mecanismos de precios que requieren $(l-1)^2+(l-1)$ bits o más, por iteración, i.e.

4.5. Tanteo Walrasiano

Uno de los mecanismos más estudiados en la literatura de la estabilidad del EEG ha sido el denominado Tanteo Walrasiano, propuesto por Walras[1] (1874) y posteriormente modificado por Samuelson (1947). La idea fundamental del TW es básicamente explotar la teoría de la demanda que se ha desarrollado hasta ahora en términos de la información agregada como lo es la función exceso de demanda, de la cual es indispensable que se cumpla la Ley de la Demanda para conocer el estado de la economía en términos del signo de la función.

In order that equilibrium should be stable, it is necessary that a slight movement away from the equilibrium position should set up forces tending to restore equilibrium. This means that a rise in price above the equilibrium level must set up forces tending to produce a fall in price; which implies, under perfect competition, that a rise in price makes supply greater than demand. The condition of stability is that a rise in price makes supply greater than demand, a fall in price demand greater than supply. Hicks (1942, p.61).

La inicialización del TW toma un vector de precios inicial en el espacio de precios arbitrariamente el cual anuncia una autoridad central a cada individuo. Al iniciar este proceso, los agentes maximizan sus utilidades, formando su exceso de demanda. La autoridad revisa el estado de la economía directamente de la f.e.d.a y reajusta los precios, proporcionalmente al signo de la f.e.d.a hasta que el precio obtenido sea de equilibrio. Este mecanismo es asimilado como una "subasta" generalizada que condiciona a cada participante a cumplir las siguientes reglas: 1)Si $\mathbf{p}$ es un vector de precios arbitrario, éste se modifica únicamente si no es el vector de precios de equilibrio $\mathbf{p_{eq}}$, 2)Los agentes intercambian en el mercado únicamente si y sólo si $\mathbf{p_{eq}}$. Finalmente, los precios de los mercados se mueven simultáneamente en respuesta a la función exceso de demanda en cada mercado mediante un proceso definido como (Uzawa,1960):

[1]En realidad Walras (1874) consideraría dos tipos de tanteos: El primero como un proceso de ajuste simultáneo (que es al que dedicaremos completa atención) y un proceso de ajuste sucesivo ambos respecto al sistema de precios (Uzawa, 1960). En el tanteo sucesivo la lógica radica en considerar un mercado y el precio asociado al bien, dejando el los demás constantes hasta lograr el equilibrio, así hasta que se consiga el equilibrio general.

$$\frac{dp_i}{dt} = M_i(\lambda_i \xi_i(\mathbf{p})) \qquad i = 1, ..., n \tag{4.2}$$

$$con \quad M_i(0) = 0 \quad M_i^{'} > 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \quad si \quad p_i = 0 \quad y \quad \xi_i(\mathbf{p}) < 0 \tag{4.4}$$

Donde λ_i es la velocidad de ajuste del i-esímo mercado, con $\xi_i(\mathbf{p})$ función exceso de demanda continuamente diferenciable, homogénea de grado cero y que satisface la Ley de Walras y la condición de acotamiento del Teorema de Existencia, mientras que función $\mathbf{M}(\cdot)$ se supone continua, acotada por abajo y retiene el signo de $\xi_i(\mathbf{p})$.

Las bondades que pueden señalarse al construir el sistema dinámico 3.1 subyacen en la interpretación económica que puede hacerse de él. En primera instancia es sencillo observar que utilizar funciones de demanda agregada como campos vectoriales de interés permiten conocer el estado de la economía a partir del signo de la función $\mathbf{M}(\cdot)$, digamos el h-esímo mercado tiene un exceso de demanda (ver Figura (1.1), entonces a partir de la definición de $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$, se tiene que:

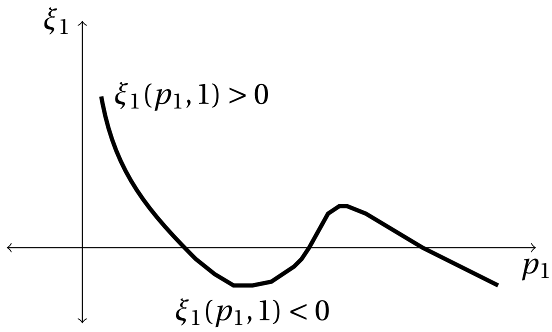


Figura 4.1: *Economía Regular con tres equilibrios walrasianos. Se observa que el signo de la pendiente de $\xi_1(p_1, 1)$ determina si la economía tiene exceso de demanda o exceso de oferta.*

$$\boldsymbol{\xi}_h(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_1^h - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{h}} > 0 \tag{4.5}$$

En caso contrario, es decir, en la situación que el h-esímo mercado tenga un exceso de oferta entonces resultará $\xi_h(\mathbf{p}) < 0$. Este razonamiento se generaliza para todos los mercados faltantes siendo evidente que en el caso que $\xi_h(\mathbf{p}) = 0$ para todo h entonces p debe ser de equilibrio:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{4.6}$$

Un elemento adicional que suele contemplase en los mecanismos de precios son las constantes de ajuste, cuya introducción se justifica desde un aspecto económico según el cual todos los mercados tienen una velocidad diferente en que se ajustan al equilibrio. Por ejemplo de los problemas estándar de estática comparativa la velocidad de ajuste suele ser mayor o menor de acuerdo a las pendientes (elasticidades) de la oferte y la demanda.

4.5.1. Normalización

Otra ventaja que menciona Bryant (2000) respecto al uso de mecanismos como (número) es la relativa baja cantidad de información que el mecanismo necesita para ser operable. Concretamente la cantidad de información necesaria para que el TW sea operable necesita de n bits por iteración cuando trabajamos en el espacio de precios no normalizado, sin embargo la elección del bien propuesto para que actué como numerario puede influir la dinámica del proceso (Tuinstra, 2000, p.29) aunque en algunos casos es posible hacer la reducción dimensional del problema y considerar n-1 mercados como indicaría la Ley de Walras, en estos casos por ejemplo:

- **Tanteo Walraseano Lineal**

$$\frac{dp_i}{dt} = \lambda_i \xi_i(\mathbf{p}) \qquad i = 1, ..., n \tag{4.7}$$

Admite como normalización la esfera unitaria $\mathbb{S} = \mathbf{p} : \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 1$

$$\frac{d}{dt}\sum p_i^2 = 2\sum p_i \frac{dp_i}{dt} = 2\sum \lambda_i p_i \xi_i(\mathbf{p}) = 0 \tag{4.8}$$

- **Tanteo Walraseano Multiplicativo**

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{\lambda_i} - \xi_i(\mathbf{p}) \qquad i = 1, ..., n \tag{4.9}$$

Admite como normalización el simplex $\triangle = \mathbf{p} : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ que puede verse más facilmente usamos diferencias finitas sobre (1.8)

$$p_i^{t+1} = p_i^t(1 - \lambda_i p_i \xi_i(\mathbf{p})) \tag{4.10}$$

al sumar sobre el índice

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{t+1} = \sum_{i=1}^{n} p_i^t(1 - \lambda_i \xi_i(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i^t - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i^t \xi_i(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i^t \tag{4.11}$$

- **Tanteo Walraseano Max-Lineal**

$$\frac{dp_i}{dt} = \max\{0, \lambda_i \xi_i(\mathbf{p})\} \qquad i = 1, ..., n \tag{4.12}$$

El proceso propuesto por Uzawa también puede ser normalizado la esfera unitaria con una lógica parecida a la de (número).

En general, la elección de algún método que normalice el espacio de precios no tiene mayores incidencias en las trayectorias del proceso (Tuinstra, 2000, p.27).

4.5.2. Estabilidad Global en el TW

Los primeros resultados encaminados a estudiar la estabilidad global del Tanteo Walrasiano fueron establecidos en los artículos: (nombre) Arrow et al (1958) en donde la imposición de la propiedad de sustitubilidad bruta sobre todos los bienes de la economía de intercambio, garantizaban en primera instancia la unicidad del equilibrio, y la estabilidad (asintóticamente) global del mecanismos.

Teorema 4.5.1. *Characterise the economy by its excess demand map and suppose that this map is a continuous function which satisfies Walras Law, is homogeneous of degree zero in prices and is bounded below. If is such that all goods are gross substitutes at all prices, then the adjustment process in (8.1) is globally asymptotically stable.*

Demostración. Arrow and Hahn (1971; pp. 288–289). ■ □

Así mismo bajo el supuesto del Axioma Débil de las Preferencias Reveladas, fue posible comprobar que la estabilidad (asintóticamente) global del TW.

Teorema 4.5.2. *Suponga que la función exceso de demanda satisface la propiedad del Axioma Débil de las Preferencias Reveladas (ADPF). Entonces el tanteo para todo p_0, converge asintóticamente al equilibrio.*

Demostración. Ver Nikaidó y Uzawa (1961). ■ □

Una razón de por qué estas propiedades son efectivas reside en que siempre es posible proponer una función de Lyapunov que es valida para trayectorias $\psi(t, \mathbf{p}_0)$ que toman precios iniciales no proporcionales al precio de equilibrio.

Lema 4.5.1. *Si $\mathbf{p}^*$ es un equilibrio Walrasiano y si el valor de la función exceso de demanda en algún otro $\mathbf{p}$, no proporcional a $\mathbf{p}^*$ es positivo cuando evaluamos $\mathbf{p}^*$ (i.e. $\mathbf{p}^*\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) > 0 \forall \mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}^*$), entonces los precios generados como soluciones a la ecuación diferencial (8.1) converge a $\mathbf{p}^*$, para algún punto en el simplex unitario.*

Demostración. Siguiendo a Mas-Colell (1995) consideremos la norma $f(\mathbf{p}) = 1/\lambda_i(p_i - p_i^*)^2$, entonces:

$$\frac{df(\mathbf{p})}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}(p_i - p_i^*)\frac{dp_i}{dt} \tag{4.13}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}(p_i - p_i^*)\lambda_i\xi_i(\mathbf{p}) \tag{4.14}$$

$$= -\mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0} \tag{4.15}$$

de donde se concluye que $\mathbf{p}$ alcanza monotonicamente a $\mathbf{p}^*$, siendo valida la igualdad en el caso que $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}^*$, pues de (1.15) $\mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\xi}(\alpha\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$. ■ □

Observación 4.5.1. *Otras propiedades (más débiles) que aseguran estabilidad global (y unicidad global) fueron investigadas por Metzkler, Hicks y Gale. Un común denominador de todas ellas es suponer cierta estructura como diagonal dominada para garantizar en primera instancia unicidad global y proponer una función de Lyapunov para investigar la estabilidad global del equilibrio. Todos estos resultados pueden consultarse en Arrow y Hahn (1971; pp. 288–289).*

El problema con la estabilidad que se aseguraba con SB y el ADPR era el costo de imponer a las economías de intercambio dichas restricciones. En primer lugar, SB es un fenómeno que involucra mucha regularidad en los mercados que más bien se adecua al tanteo sucesivo que al simultaneo. En segundo lugar estos resultados trabajan sin la necesidad de considerar economías regulares ya que ambos garantizan que el equilibrio Walrasiano es único.

4.5.3. Otros Resultados sobre Estabilidad Global

Con el objetivo de estudiar la estabilidad sin los supuestos anteriores, e incorporar situaciones donde el equilibrio no necesariamente sea único, se puede comprobar que efectivamente el TW es globalmente (asintóticamente) estable para el caso $n = 2$.

$$\frac{dp_i}{dt} = M_i(\xi_i(\mathbf{p})) \qquad i = 1,2 \tag{4.16}$$

$$con \quad M_i(0) = 0 \quad M_i^{'} > 0 \tag{4.17}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \quad si \quad p_i = 0 \quad y \quad \xi_i(\mathbf{p}) < 0 \tag{4.18}$$

Consideremos una economía de intercambio normalizada donde $\xi_1(1, p_2)$ y $\xi_2(1, p_2)$ satisfacen los supuestos usuales y la condición de acotamiento, y sea (Uzawa,1960):

$$\phi(p_1, p_2) = -\int_0^{p_2/p_1} \xi(v,1)dv; \quad (p_1, p_2) > 0 \tag{4.19}$$

diferenciando (3.16) y aplicando la Ley de Walras y homogeneidad:

$$\frac{\partial\phi(p_1,p_2)}{\partial p_1} = \frac{1}{p_2}\xi_1(p_1/p_2,1) = \xi_1(p_1,p_2) \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial\phi(p_1,p_2)}{\partial p_2} = \frac{}{\xi_1}(p_1/p_2,1) = \xi_1(p_1,p_2) \tag{4.21}$$

por lo que se concluye que:

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{p})}{dp_1}M_1(\xi_1(\mathbf{p})) + \frac{\partial\phi(\mathbf{p})}{dp_2}M_2(\xi_2(\mathbf{p})) \tag{4.22}$$

$$= -\frac{1}{p_1}[M_1(\xi_1(\mathbf{p}))\xi_1(\mathbf{p}) + M_2(\xi_1(\mathbf{p}))\xi_2(\mathbf{p})] \leq 0 \tag{4.23}$$

De lo anterior se puede observar que (3.19) se eligio adecuadamente para ser usada como función de Lyapunov. Así mismo se puede observar que como la solución a (3.16) sólo puede ser negativa y M_i para $i = 1,2$ tiene el mismo signo que las funciones exceso de demanda, la desigualdad (3.23) permanece. Finalmente se debe observar que la condición de acotamiento fue usada para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en (3.19).

4.6. Estabilidad Local

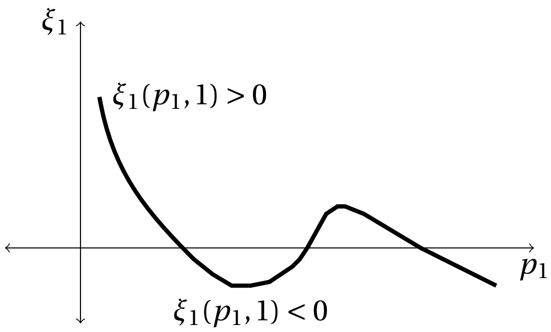


Figura 4.2: *Economía Regular con tres equilibrios walrasianos. Se observa que los equilibrios impares son localmente estables.*

Cuando existen más de un equilibrio, el mejor resultado que podemos considerar es la estabilidad (asíntoticamente) local. Mas-Colell (1995) ilustra los por menores usando una economía regular con $n = 2$ (ver Figura (número)) y mediante un argumento del Teorema del índice, establece una interesante relación entre unicidad local y estabilidad: "The equilibrium is locally stable, or locally totally unstable, according to the sign of the slope of excess demand at the equilibrium" (Mas-Colell, Whinston y Gree (1995),p.622).

Desafortunadamente, aunque se comprobo que la estabilidad es global para el TW (y local cuando hay más de un equilibrio y la economía es de intercambio), a partir de $n \geq 3$ el Tanteo Walrasiano pierde sus ventajas comparativas respecto a otros mecanismos de precios que tendremos la oportunidad de análizar. De hecho es posible construir una economía de intercambio cuyo equilibrio es único y que de hecho ¡nunca converge!

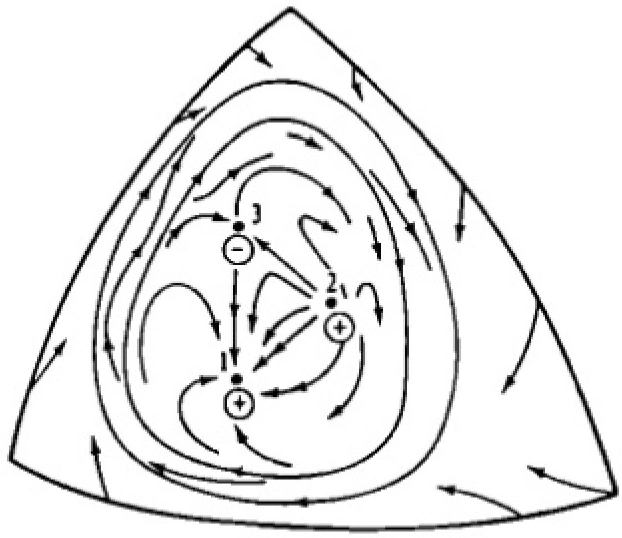


Figura 4.3: *Ilustración de una economía normalizada en la esfera unitaria con $n = 3$ bienes, donde puede apreciarse la naturaleza de sus equilibrios según la estabilidad*

Teorema 4.6.1. *El Tanteo Walrasiano es globalmene inestable para $n = 3$*

Demostración. Consideré una economía con tres consumptives y tres bienes, cuyas preferencias son descritas por las siguientes funciones de utilidad:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \text{mín}\{x_1, x_2\} \tag{4.24}$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \text{mín}\{x_2, x_3\} \tag{4.25}$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \text{mín}\{x_1, x_3\} \tag{4.26}$$

con dotaciones iniciales $\omega_1 = (1,0,0)$, $\omega_2 = (0,1,0)$ y $\omega_3 = (0,0,1)$ respectivamente.

Al resolver el problema del consumidor, es sencillo comprobar que las funciones exceso de demanda para cada agente son:

$$\xi_1(p_1,p_2,p_3) = \frac{-p_2}{p_1+p_2} + \frac{p_3}{p_1+p_3} \tag{4.27}$$

$$\xi_2(p_1,p_2,p_3) = \frac{-p_3}{p_2+p_3} + \frac{p_1}{p_1+p_2} \tag{4.28}$$

$$\xi_3(p_1,p_2,p_3) = \frac{-p_1}{p_1+p_3} + \frac{p_2}{p_3+p_2} \tag{4.29}$$

respectivamente, y por consencuencia es fácil descubrir que si $\mathbf{p}^*$ es de equilibrio para $\xi(\mathbf{p})$ se debe tener que:

$$p_1^* = p_2^* = p_3^* = 1 \tag{4.30}$$

por Ley de Walras se deduce que

$$\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}{dt} = 2p_1\xi_1 + 2p_2\xi_2 + 2p_3\xi_3 = 0 \tag{4.31}$$

$$\therefore p_1^2+p_2^2+p_3^2 = \alpha \tag{4.32}$$

de donde puede observarse que la norma del vector de precios permanece constante.

Ahora bien, si suponemos que $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{p}(0);t)$ es solución al sistema, entonces

$$\frac{d}{dt}\left[\psi_1(p(0);t)\psi_2(p(0);t)\psi_3(p(0);t)\right] = \frac{d}{dt}\left[p_1p_2p_3\right] \tag{4.33}$$

$$= \frac{dp_1}{dt}(p_2p_3) + \frac{dp_2}{dt}(p_1p_3) + \frac{dp_3}{dt}(p_1p_2) \tag{4.34}$$

$$= \xi_1(\mathbf{p})(p_2p_3) + \xi_2(\mathbf{p})(p_1p_3) + \xi_3(\mathbf{p})(p_1p_2) \tag{4.35}$$

y sustituyendo en (4.27), (4.28) y (4.29)

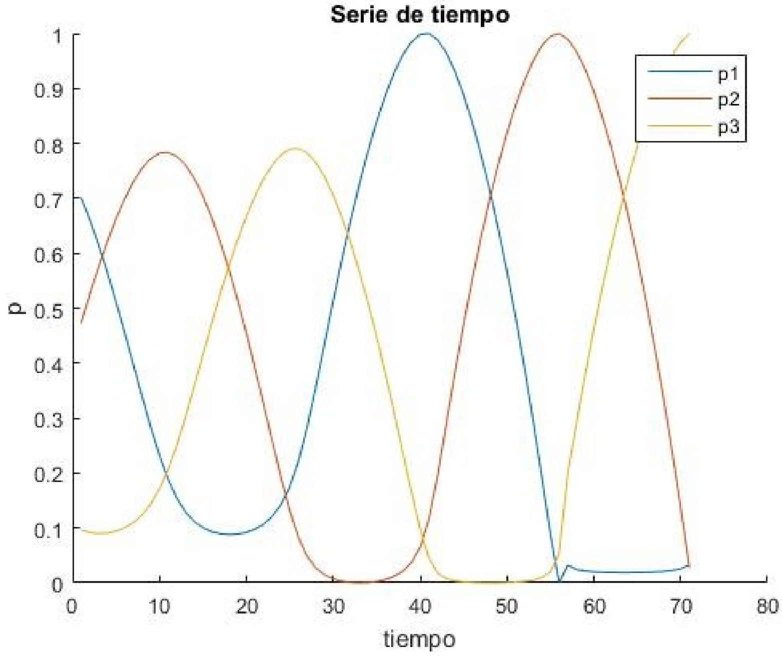
$$\frac{d}{dt}\left[\psi_1(p(0);t)\psi_2(p(0);t)\psi_3(p(0);t)\right] = \tag{4.36}$$

$$\frac{p_1p_2p_3}{(p_1+p_2)(p_1+p_3)(p_2+p_3)}\left[p_3^2 - p_2^2 + p_1^2 - p_3^2 + p_2^2 - p_2^2\right] = 0 \tag{4.37}$$

de donde se sique que

$$\frac{d}{dt}\left[\psi_1(p(0);t)\psi_2(p(0);t)\psi_3(p(0);t)\right] = \frac{d}{dt}\left[p_1p_2p_3\right] \neq 1 \tag{4.38}$$

lo cual permite concluir que la solución $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{p}(0);t)$ nunca converge al equilibrio. □



Este ejemplo propuesto por Scarf (1960), adjudicaba el comportamiento inestable del mecanismo a las características del ejemplo[2] y en particular "the initial holdings are of a rather extreme type", lo cual significarìa que la inestabilidad se adjudicaba al mal comportamiento de la complementariedad de los bienes y no a la agregación, aunque "ho wever,that it is quite easy to obtain instability with none of the objectionable properties mentioned above". Hirota (1981) generaliza la economía de Scarf, poniendo especial énfasis en "inquire whether or not the instability of his system is robust against changes in the as signment of initial holdings.", aunque las condiciones que establece son bastante astringentes. Finalmente, refiriendose a la economía de Scarf, Bryant (2010) menciona:

the instability instanced by Scarf (1960) can be multiplied almost indefinitely, even in economies with smooth and homothetic preferences. Consequently, approaches to stability which seek to impose minimal structure on the excess demand map have been actively sought.

En lo subsiguiente se discutirá por qué la afirmación de Bryant (2010) es cierta.

4.7. Mecanismos de Precio Continuos

Pese a que el TW tiene propiedades muy importantes, la falta de estabilidad global hacen que el ajuste de precio sea desechado en la búsqueda de variaciones del mismo que pertenezcan a CMPE. Una examinación cuidadosa del TW abre dos grandes posibilidades para remediar el problema. En primer lugar, el teorema de equivalencia de Uzawa justifica

[2]Una de esas características es la normalidad de los bienes. Las curvas de indiferencias no son estrictamente convexas.

el desarrollo de algoritmos de búsqueda en conjuntos compactos y convexos para hallar puntos fijos. Como se verá una de las explicaciones de la falta de estabilidad del TW, es el hecho que TW CSS . La segunda posibilidad será examinada en la siguiente sección.

En el artículo de Kellog, Li y Yorke (1976) desarrollan una demostración constructiva del TPFB. La característica del método reside en trabajar con una función retractiva continua $H : \triangle \longrightarrow \partial\triangle$ para la cual, dado $\mathbf{p_0} \in \partial\triangle$ el conjunto $H^{-1}(\mathbf{p_0})$ "contains a curve leading from $\mathbf{p_0}$ to the set of fixed points." que a diferencia del algoritmo propuesto por Scarf (año) no requiere de particionar el simple, confiriendo al método mayor simplicidad y establecer "a close relationship with Newton's method".

Basandose en las ideas de Kellog, Li y Yorke (1976), Smale (1976) perfecciona el resultado de los anteriores, relajando los supuestos sobre los eigenvalores de $D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$, proponiendo como mecanismo de precio:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{dt} = -\sigma[D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})]^{-1}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) \tag{4.39}$$

El mecanismo (4.39) requiere que si $\mathbf{p} \in \mathbf{E}$, la matriz $D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ sea no singular. Una ventaja de (número) permite heredar de la propuesta de Kellog, Li y Yorke (1976), la propiedad de rango completo para $D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$, consolidando que el mecanismo trabaje en economías regulares y por lo tanto $\mathbf{E}$ sea finito. Una característica de Newton cuando trabajamos con funciones escalares, consiste en ser un método de descenso que converge con mayor velocidad a otros métodos como el de máximo descenso, al ser su convergencia cuadrática, asegura convergencia en una iteración si la función objetivo es cuadrática. Dado que la función $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ es no lineal, es necesario que el punto inicial este cerca del vector de precios $\mathbf{p}^*$ de ahí que la estabilidad que se desprende de Newton sea localmente asintótica. Para el caso de campos vectoriales, el mecanismo trabaja al demostrar que $V(p) = -\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ es función de Liapunov para (4.39), manteniendo intacta la invarianza del TW:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{dt} = -\sigma[D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})]^{-1}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = 0 \tag{4.40}$$

Teorema 4.7.1. *En una economía tipo Scarf con $n \geq 1$ agentes, el método de Newton Generalizado es globalmente estable.*

Demostración. Tomemos como función de Lyapunov:

$$V(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{1+p_1} + \frac{1}{1+p_1/p_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+p_2} + \frac{1}{1+p_2/p_1}\right)^2 \tag{4.41}$$

derivamos (3.36):

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{p_1(1-p_2)^2(1-p_1)^2}{(p_1+p_2)(1-p_1)(1-p_2)+4p_1p_2} \tag{4.42}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{p_2(1-p_2)^2(1-p_1)^2}{(p_1+p_2)(1-p_1)(1-p_2)+4p_1p_2} \tag{4.43}$$

$$\frac{din(V)}{dt} = -2 \tag{4.44}$$

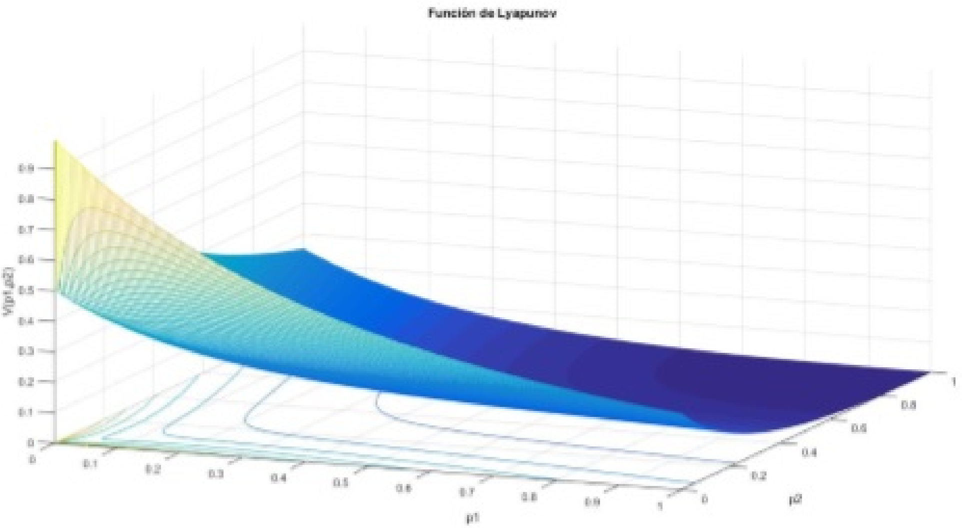


Figura 4.4: Función de Lyapunov (3.36).

□

Teniendo en mente que NG requiere un aumento considerable de información respecto al TW, Saari y Simón (1978) estudian la posibilidad de reducirle, manteniendo su propiedad más notable: la estabilidad local.Desafortunadamente, no sólo demostraron que la información que proporciona el jacobiano $D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ es indispensable para que Newton converja, también probaron que esa cantidad no puede reducirse sin que el mecanismo de precios pierda su efectividad.
Antes de mostrar el resultado principal de Saari y Simón (1978), los autores introdujeron las siguientes definiciones:

Definición 4.7.1. *Se dice que $M(\mathbf{x}, y_{11}, ..., y_{nn})$ es un* mecanismo localmente efectivo *si para alguna función exceso de demanda $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ suave y para algún $\mathbf{q}$ tal que $\xi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ el punto $\mathbf{q}$ es un atractor para:*

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}), D_{\mathbf{q}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})) \tag{4.45}$$

tal que exista una función suave $\boldsymbol{\xi}^*$ y un cero $\mathbf{q}^*$ tal que $D\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}), D_{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}^*))$ sea no singular.

en cambio

Definición 4.7.2. *Se dice que $M(\mathbf{x}, y_{11}, ..., y_{nn})$ es un* mecanismo de precios efectivo *si para alguna función exceso de demanda $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ suave lo siguiente se satisface:*

1. *si $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}), D_{\mathbf{q}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}$*

2. *para al menos todo $\mathbf{q}$ en un abierto, la solución de (3.41) tiende asintóticamente a un equilibrio de $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}))$ cuando $t \longrightarrow \infty$, y finalmente*

3. *existe algún* $\mathbf{q}$ *y* $\boldsymbol{\xi}^*$ *suave para la cual* $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$ *es un cero no singular de* $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}^*(\mathbf{q}), D_{\mathbf{q}}\boldsymbol{\xi}^*(\mathbf{q}))$.

Definición 4.7.3. *Una coordenada* y_{ij} *del proceso* $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}), D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}))$ *es ignorable si* $\partial\mathbf{M}/\partial y_{ij} = 0$.

Teorema 4.7.2. *Sea* $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})$ *una función exceso de demanda de una economía de intercambio con n bienes y sea* $\mathbf{M} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{(n-1)(n-1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ *un mecanismo de precio. Entonces:*

1. *Si* $n \geq 3$ *y si* $\mathbf{M}$ *tiene alguna coordenada omitible* y_{ij} *en alguna vecindad de* $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, *entonces* $\mathbf{M}$ *no puede ser un mecanismo localmente efectivo.*

2. *Si* $n \geq 3$ *y si tanto* y_{ij} *como* y_{hk} *son coordenadas omitibles de* $\mathbf{M}$ *en alguna vecindad de* $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, *donde* $i \neq h$ *y* $j \neq k$ *y si* a_{ij} *tanto como* a_{hk} *no son identicamente iguales a cero en* $\{0\} \times \mathbb{R}^{(n-1)^2}$, *entonces* $\mathbf{M}$ *no puede ser un mecanismo de precios efectivo.*

3. *Si el vector* y_j *y algún* y_{ik} *para* $k \neq j$ *son coordenadas ignorables para* $\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}, y_1, ..., y_n)$, *entonces* $\mathbf{M}$ *no puede ser un mecanismo de precio efectivo.*

4. *si* $n = 3$ *o* $n = 4$ *y* $\mathbf{M}$ *tiene dos coordenadas omitibles* y_{ij} *como* y_{hk} *donde* $i \neq h$ *y* $j \neq k$ *entonces* $\mathbf{M}$ *no puede ser un mecanismo de precio efectivo.*

5. *Finalmente si* $n = 5$ *y si* $\mathbf{M}$ *tiene tres coordenadas omitibles entonces* $\mathbf{M}$ *no puede ser un mecanismo de precio efectivo.*

Demostración. Ver Saari y Simon (1978, pp. 1108–1112) □

El costo de construir mecanismos como NG hace patente algunas conclusiones. En primer lugar la cantidad de información requerida por NG necesita $(l-1)+(l-1)^2$ bits por iteración, dado que ahora consideramos los gradientes de $\xi(\mathbf{p})$. Esto significaría que -señala Bryant (2010)- “who points out that there have been about $7{,}884x1014$ minutes since the big bang. This number is about equal to the number of bits of information that a process like (nùmero) needs at each iteration to adjust the markets in an economy with 28 million goods and services”. Otra desventaja, inofensiva aparentemente, es la perdida total de significado económico en el mecanismo que sí confería TW. Respecto a ello Hahn (197) comenta: “These method are of interest as algorithms they have the drawback that it does not seem possible to give them an economic motivation”. Posteriormente reitera Saari (1985): “To the best of my knowledge, no one has examined whether this (Newton Generalizado) dynamic admits an economic justification” y Jordan (1983): “Although the Global Newton method has no apparent institutional interpretation, its generic convergence properties have reopened the question of whether there exist economically interesting price adjustment mechanisms which stabilize competitive equilibrium in general.”

Aparte del NG dos procesos importantes fueron desarrollados por Kamiya y Nukherji en la década de los años 90. Estos mecanismos vinieron a corroborar que el m´etodo simplial que implementa el mecanismo para cada uno entregaba algunas propiedades diferentes al

NG.

Método del Jacobiano Trasnpuesto: Nukherji (1993) explora otro tipo de mecanismo donde se introduce al mecanismo $[Dpz(p)]^{tr}$ la traspuesta de las tasas de cambio. Pese a que en comparación a Newton, el calcular transpuestas es computacionalmente más económico, el mecanismo:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\sigma[D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}))]^{tr}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})) \tag{4.46}$$

Requiere la misma cantidad de información que Newton en términos de bits. Fuera de ese inconveniente, (3.41) es más robusto en términos de estabilidad, siento asintóticamente estable en cada uno de los precios en E. La característica más notable del proceso es la unicidad global.

Método de Kayima:Es un modelo hibrido que combina el tanteo walra- siano usual y el método de Smile. Puede observarse que el método propuesto por Kayima (1990), necesita adicionalmente al jacobiano y las funciones exceso de demanda, el vector de precios iniciales.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\sigma[\frac{D_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}))}{\|\mathbf{p_0}\|} - \frac{I}{\|\mathbf{p}-\mathbf{p_0}\|}]^{-1}\boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})) \tag{4.47}$$

su convergencia que superditada si tomamos p0 en un conjunto que no tenga medida cero. Kamiya desarrolla su mecanismo a los algoritmos simpliales desarrollado por Merril y detallado por Van der Laan y Talman (1986).

Observación 4.7.1. *La razón por la que el mecanismo de Smale difiera en sus propiedades de estabilidad respecto a Kayima o Nukherji se explica por la descomposición simplial que desarrollan los algoritmos de búsqueda. El mecanismo de Smile no es homotopico como sucede con Kamiya, además Smile requiere arrancar en la frontera del espacio de precios, desventaja que no sucede con los dos anteriores por el mismo argumento.*

4.8. Mecanismo Iterativos

La gran conclusión de la sección anterior reitera que los mecanismos de precios continuos que aspiren a ser eficientes estarán condicionados a pertenecer a CSS. Más aún, $\beth(MPE) \leq (l-1) + (l-1)^2$ será la mínima cota superior en términos de información que los MPE deberán satisfacer para pertenecer a CMPE. La opción más viable para encargarnos de resolver la restricción de los MPE continuos, es explorar alternativas que no dependan continuamente sobre la información del sistema, dichos mecanismos discretos, requerirán, como en el caso continuo, algunas restricciones para guardar consistencia con el problema de hallar estabilidad global y universal.

Algunos MPI propuestos en la literatura fueron explorados en los trabajos de Uzawa (año), Hommes (año), Bala (año), Tuinstra (2000) y Hahn (año) con resultados sorprendentes. Una de las primeras conclusiones mostraría que los MPD no garantizaban estabilidad global (aun suponiendo sustitutos brutos), muy por el contrario, el comportamiento de sistemas determinísticos como el TW, $p_j(n+1) = p_j(n) + \lambda\xi_j(p_j(n))$ más bien es errático, aleatorio y altamente sensible a las variaciones en las condiciones iniciales. Un ejemplo puede ilustrar estás dificultades. Siguiendo muy de cerca a Tuinstra (2000), considere:

$$\xi_1(p_1, p_2) = \frac{p_2^\rho(n)}{p_1^\rho(n)} + \frac{1}{p_1^{2-\rho}(n)} - 2 \tag{4.48}$$

$$\xi_2(p_1, p_2) = \frac{p_1^\rho(n)}{p_2^\rho(n)} - 2 \tag{4.49}$$

cuyo equilibrio es $\mathbf{p}^* = (1,1)$. Tuinstra (2000) propone 200 iteraciones, tomando como condiciones iniciales $\mathbf{p}_0 = (0,95, 0,98)$ y $\rho = 0,85$.

La serie de tiempo permite observar que al tomar un precio inicial muy cerca del equilibrio, el sistema se aleja de él al transcurrir el tiempo, corroborando que no existe estabilidad. ¿Qué posibilidades existen para resolver el problema? La primera respuesta sería que los MPI tienen comportamientos caóticos por la forma funcional de las demandas, o bien, la información, como en los MPEC es insuficiente para verificar estabilidad local. Explorar la primera alternativa implicaría estudiar si los MPI requerirían perder universalidad para ganar estabilidad global, mientras que la segunda alternativa se vuelve más compleja y sorpresivamente elusiva.

Con el fin de estudiar exhaustivamente las posibilidades descritas arriba, Saari (1985) retoma el esquema de MPE, formando,

$$p(n+1) = p_n + M(f(p_n), \frac{df(p_n)}{dt}) \tag{4.50}$$

y suponer la hipótesis de estabilidad global. Bala y Kiefer (1994) y Saari (1985) enumeran las cualidades que cabría esperarse de un mecanismo iterativo estable:

1. La cantidad de información requerida esté acotada
2. Estacionaridad de la información (i.e que las reglas del mecanismo no se modifiquen con el tiempo)
3. Dado $\mathbf{p_0}$, la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{p}^*$
4. $M(f(\mathbf{p}^*), \frac{df(p_n^*)}{dt}) = 0$

La aserción más importante del Teorema (número) implica que los fenómenos observados en el ejemplo (número), no es resultado de la elección de $f \in \boldsymbol{\Theta}$. Saari demuestra que el conjunto de precios iniciales NC para los cuales $M(f(\mathbf{p}^*), \frac{df(p_n^*)}{dt})$ nunca converge, es no numerable y f pueda modificarse adecuadamente, cualquiera sea la elección de D y concluir. "This means that it is impossible, with the limited information provided, to instruct the users of this system how to select an appropriate initial price."Saari (1985).

Si deseáramos usar las tasas de cambio de las demandas, como en el caso continuo, descubriríamos que la dificultad persistiría.

Teorema 4.8.1. *No existe un mecanismo de precio del tipo (4.50) que cumpla con 3. y* $\mathbf{M}(\mathbf{0},-) = \mathbf{0}$ *y el cual sea globalmente convergente para todo* $\mathbf{f} \in \Theta$ *donde*

$$\Theta = \left\{ \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) : \boldsymbol{\xi} \in \mathscr{C}(\mathbf{R}^{n}_{++}), t > 0\ \boldsymbol{\xi}(t\mathbf{p}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p})\ y\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \right\} \tag{4.51}$$

más aún, para algún mecanismo $\mathbf{M}$ *como (4.50) existe un abierto* $\mathbf{V} \subset \Theta$ *y* $\mathbf{f} \in \mathbf{V}$ *entonces existe un abierto de condiciones iniciales para las cuales, las trayectorias de (4.50) no convergen.*

Demostración. Ver Saari (1985, pp.1126-1129) □

La gran sorpresa del Teorema 4.8.1 ya no deja posibilidad alguna para dudar que los mecanismos iterativos no cuentan con la información necesaria para alcanzar los resultados de Newton, pareciendo inevitable sacrificar la búsqueda de mecanismos universales, al menos hasta entender la clase de funciones en V para las cuales se satisface el resultado anterior. Por lo pronto Bala y Kiefer (1994, p.301) nos dicen:

”The impossibility result leads naturally to consideration of mechanisms outside Saari’s class. Is it possible to generalize the class of mechanisms so that a universally convergent procedure can be found? How dramatic a generalization would be needed”.

y continuan:

”We may be able to avoid the impossibility result if we can somehow sides-tep the basic reason behind Saari’s theorem, which is: the function space is so rich that for any given procedure we can construct smooth maps which trap? the procedure into a small region of the domain containing no equilibria of the function. Thus, if we can find a process which cannot get trapped in the above manner, we may be able to employ it as a universal mechanism.” Bala y Kiefer (1994, p.302)

Teorema 4.8.2. *Sea* $f : X^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *de clase* $\mathscr{C}([0,1])$ *y* $(\mathbf{X}, \mathscr{B})$ *espacio medible con* $\mathscr{B}$ *la* σ*-álgebra de Borel y* λ *la medida de Lebesgue. Entonces existe* $T_m : X^m \longrightarrow X^m$ *para la cual, el sistema dinámico asociado a* $\phi : X^m \times X^m \longrightarrow X^m \times X^m$ *definido como* $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \longmapsto (\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ *tal que* $\mathbf{x}^*) T_m$ *y*

$$\mathbf{p}^* = \begin{cases} \mathbf{p}\, si\, \mathbf{x} \in L(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} : f(T_m(\mathbf{x})) \geq f(\mathbf{p}) \right\} \\ T_m \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{x} \notin L(\mathbf{p}) \end{cases} \tag{4.52}$$

para toda condición inicial $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in X^{2m}$ *en un conjunto de medida* λ*:*

1. $\mathbf{p}_n \in E$ *entonces* $p_{n+j} = p_n$ *para toda* $j \geq 1$

2. $\lim_{n \longrightarrow \infty} f(\mathbf{p}) = 0$

3. $\lim_{n \longrightarrow \infty} \inf_{\mathbf{x}^* \in \mathbf{E}} d(\mathbf{x}^*, \mathbf{p_n}) = 0$

Demostración. Bala y Kiefer (1994) □

Algunos comentarios sobre $\phi : \mathbf{X}^m \times \mathbf{X}^m \to \mathbf{X}^m \times \mathbf{X}^m$ son pertinentes. Intuitivamente, la segunda coordenada de $\phi(\cdot, \mathbf{p})$ permite buscar la mejor estimación del equilibrio, eso es precisamente lo que permite el conjunto $L(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} : f(T_m(\mathbf{x})) \geq f(\mathbf{p})\}$, en tanto $\phi(\mathbf{x}, \cdot)$ introduce nuevos valores de prueba como candidatos al equilibrio. La aplicación T_m recuerda al Tent map, y se pide que sea de clase $\mathcal{C}$ y produzca orbitas densas. El hecho que el teorema trabaje con el compacto $\mathbf{X} = [0, 1]$ no restringe su aplicabilidad para el EEG, cualquier espacio homeomorfo a él puede ser utilizado, por lo que $g : \mathbf{X}^m \to \Delta$ biyectiva, bastará para trabajar en el espacio de precios normalizado. La caracteristica más importante del Teorema (número) es la estabilidad inducida por la distancia $d(\mathbf{x}^*, p_n)$. Aunque Bala y Kiefer (1994) logran decir algo más respecto a la universalidad de los mecanismos iterativos, mencionan que el problema de estabilidad universal está muy lejos de ser satisfactoria:

"For local effectiveness, this is the same amount of information as the Saari and Simon (1978) informational requirement for global effectiveness in continuous time. For global effectiveness, the Bala and Keifer process requires an infinite amount of information. Thus in terms of reducing the informational requirement for stability, the Bala and Kiefer approach does not represent an improvement relative to the approaches that preceded them." (Bryant, 2010 pp.222-223)

4.9. Teorema Schonenchein- Mantel- Debreu

Dada la especificación de nuestro modelo de intercambio, existen dos grandes posibilidades para tratar la inestabilidad en economías descritas por Scarf (1960). La primera de ellas, prácticamente agotada a la luz de los resultados de Saari(1978, 1985), fue estudiar mecanismos de precios de clase CSS que garantizan estabilidad local con un mínimo de bits por iteración del orden $(n-1)^2 + n - 1$. La segunda alternativa, parcialmente implícita en la discusión de los MP discretos.

Antes de los años setentas, si bien es cierto que a nivel individual, las pro- piedades que se desprendían del primer problema del consumidor habían sido exhaustivas gracias a los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2, no se sabía con precisión si las propiedades que se derivaron del esquema agregado eran las únicas que podían esperarse de un conjunto de individuos racionales. Para sorpresa de muchos teóricos del EGG, en una serie de artículos H. Sonnechein (1971), Mantel (1973) y Debreu (1974) descubrieron que no sólo el listado era exhaustivo, sino además era un resultado, como lo popularizarían Mas-Collel, Michael Whinston, y Jerry Green (1995, 598), .[a]nything goes.[en] el sentido de que la microfundamentación del EEG no dotaba a las funciones exceso de demanda de una construcción particular, pues siempre era posible tener

Ante la extensa teoría que se ha desarrollado acerca del teorema SMD y las múltiples formulaciones del teorema desde Debreu (1974) (una excelente referencia a lo anterior puede encontrarse en), quizás la reformulación más interesante se debe a Saari (1995) quien establece una de las relaciones más profundas del EEG con otras ramas de la teoría económica, centrada en explicar por qué surgen resultados anything goes en el equilibrio económico general.

Teorema 4.9.1. *(Saari,1995) Sea $\Xi(n)$ el conjunto de campos vectoriales tangentes y continuos en $\triangle$, $\mathscr{U}$ el conjunto de funciones de utilidad continuas, convexas y $\mathbf{R}^n_{++}$ el espacio de dotaciones iniciales. Para $n \geq 2$ y $\epsilon > 0$, la aplicación:*

$$\mathscr{F} : \left[\mathscr{U} \times \mathbf{R}^n_{++}\right]^m \longrightarrow \Xi(n) \tag{4.53}$$

es sobre si y sólo si $m \geq n$

En esta versión, el teorema SMD asegura que dada una economía con tantos agentes como bienes, asignando a cada uno de ellos una dotación inicial y una función de utilidad, continua, monótona y estrictamente convexa. La función de exceso de demanda agregada es la función seleccionada del conjunto de campos vectoriales tangentes al simplex unitario. Con esta interpretación, añade Saari (1995): *the complexity of the social sciences derives from the unlimited variety in individual preferences; preferences that defines a sufficiently large dimensional domain that, when aggregated, can generate all imaginable forms of pathological behaviour* y contrastando con la sentencia de Arrow: *in the aggregate, the hypothesis of rational behaviour has in general no implications*.

Cuando Saari (1995) afirma que en el agregado *can generate all imaginable forms of pathological behaviour* hacía referencia a que el Teorema SMD no es un resultado aislado dentro de la teoría económica neoclásica y en las ciencias sociales. Existen multitud de resultados que apoyan su interpretación, casi todos ellos derivados de una teoría de racionalidad completa como lo es la teoría microeconómica del consumidor. En efecto, el esquema que deriva

4.10. Notas y Comentarios

Una fuerte restricción que se derivan del tanteo es la nula actuación de los individuos de la economía. El comportamiento asintótico inestable del tanteo no permite (nunca) acoplar en el proceso situaciones donde los agentes intercambian sus dotaciones iniciales al precio corriente. En general, todo proceso donde permite inicializar intercambios sin que la economía esté en equilibrio son conocidos como *Procesos no Walrasianos*.

Durante la década de los 60, aparecieron algunos procesos que permitían solventar las restricciones del intercambio, fuera del equilibrio. Los procesos más importantes fueron propuestos por Hahn (1960), Negishi y Hahn (1962) y Uzawa (1962). Esta línea estratégica para estudiar el intercambio y la estabilidad del EEG intentó sin mucho éxito solventar los problemas del clásico tanteo Walras-Samuelson. Expondremos rápidamente en que consiste cada uno de ellos y su naturaleza asintótica.

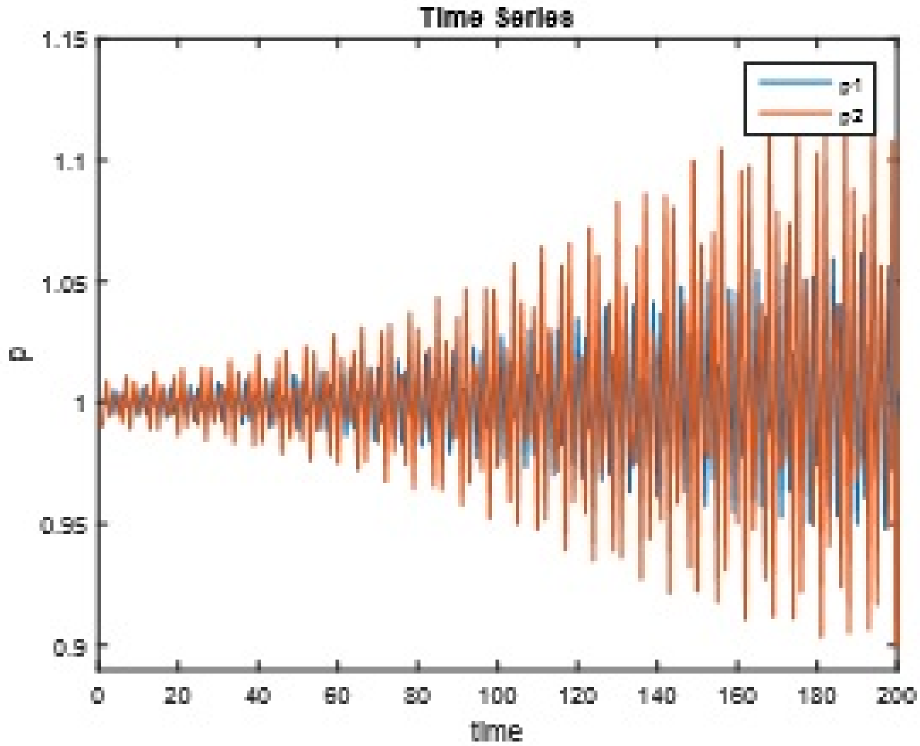


Figura 4.5: propiedad de Sustitutos Brutos

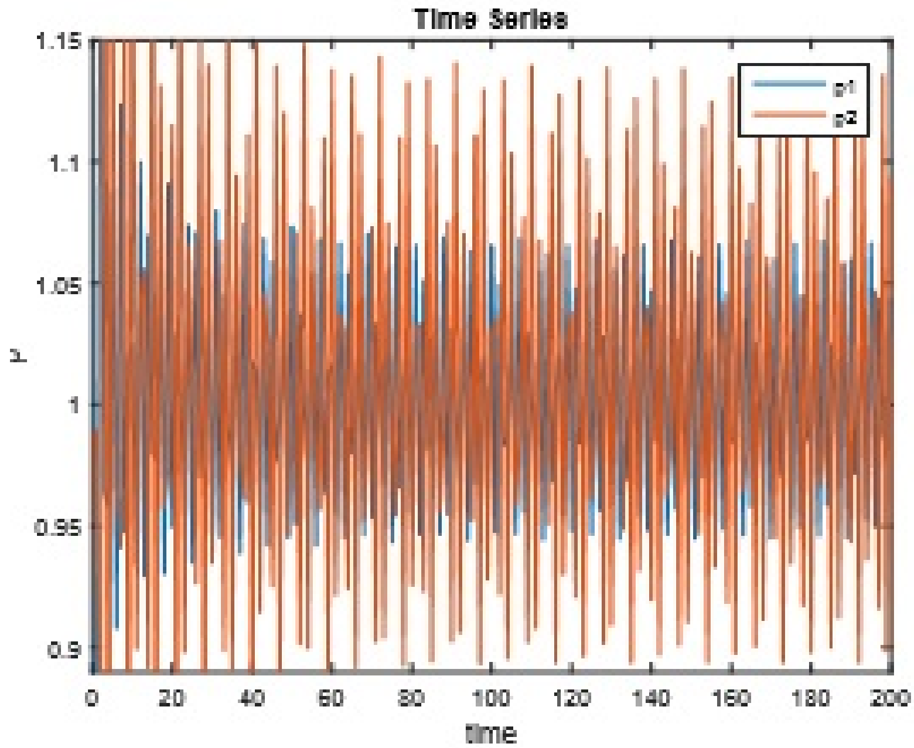


Figura 4.6: Relación entre el ADPR y la propiedad SB

H|H

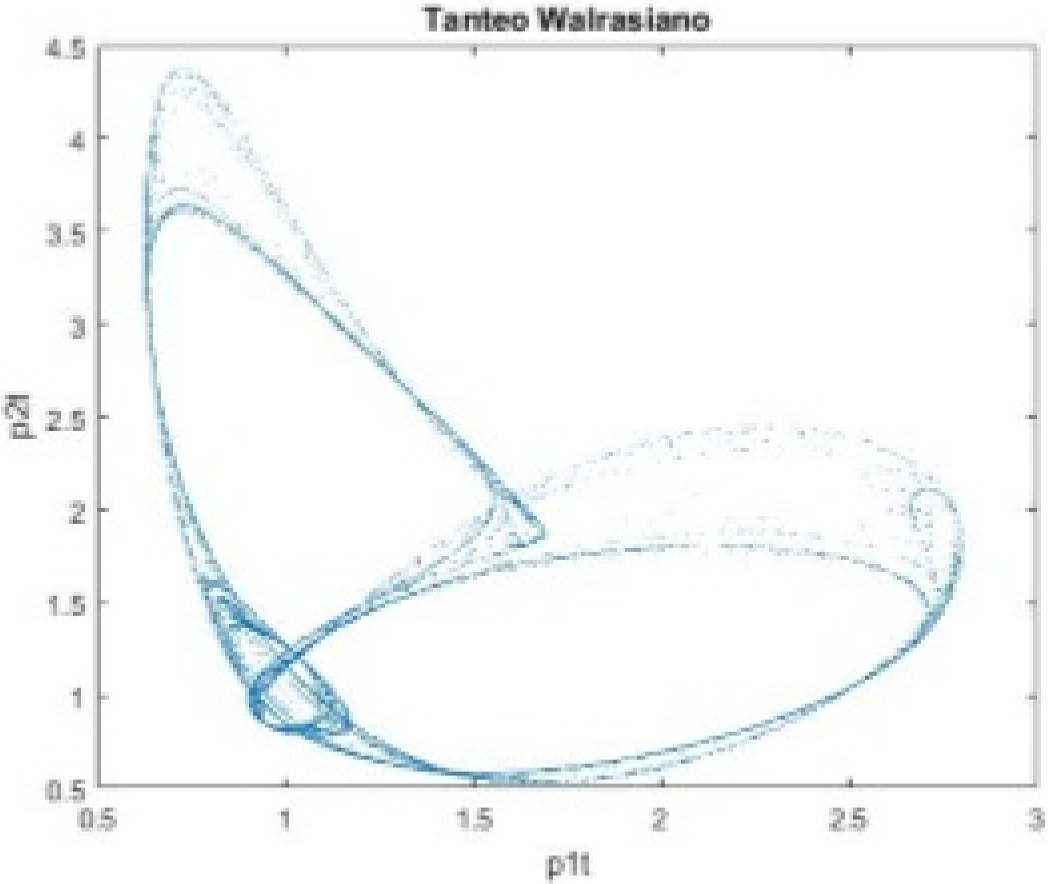


Figura 4.7: propiedad de Sustitutos Brutos

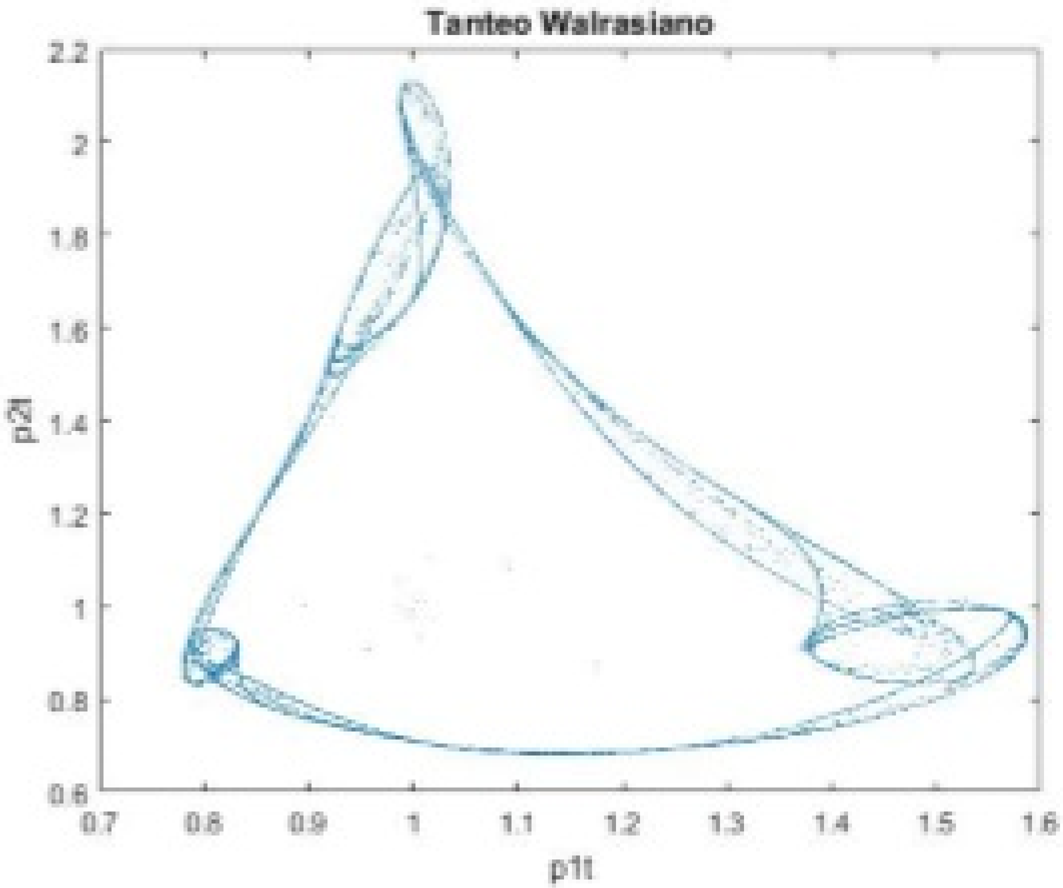


Figura 4.8: Relación entre el ADPR y la propiedad SB

Capítulo 5

Conclusiones

La revisión de la literatura económica en torno al problema de la estabilidad del EEG nos ha mostrado que el gran proyecto del pensamiento económico de las últimas décadas se ha vuelto extremadamente negativo e ilustrativo. Más allá de inclinarse a concluir que las hipótesis de la mano invisible aparentan insostenibilidad teoría (cosa que no sería sorprendente al observar las más inmediatas realidades económicas), una lección podemos rescatar de todo esto: la naturaleza favorece la complejidad y el caos, antes que la parsimonia y el orden, en cuyo caso tal aseveración sea más evidente al caer ante la irresistible tentación de estudiar problemáticas sociales de alto impacto y conmocionarse ante el juicio de Saari:

simple models from introductory courses in economics can exhibit dynamical behavior far more complex than anything found in classical physics or biology. In fact, all kinds of complicated dynamics (e.g., involving topological entropy, strange attractors, and even conditions yet to be found) already arise in elementary models that only describe how people exchange goods. Saari (1995, p. 222).

No debería sorprendernos, es parte inherente del modelaje matemático y sus interminables forcejeos con las cajas negras que sintetizan estructuras dinámicas y altamente interrelacionadas, en términos manejables para nuestro intelecto limitado. Sin embargo, no todo resultado negativo ante una teoría monumental en sus objetivos como es el EEG debería ser recibido como una mala noticia, quizás los resultados negativos aportan más para una disciplina como la economía que aún resta por desarrollarse en sus concepciones de la realidad socialantes bien los señalamientos de Saari (1995) identifican e incorporan al análisis económico valiosos comentarios que al menos todo economista aplicado debería tener siempre presente:

1. Los problemas sobre el diseño de Mecanismo de Precios Descentralizado es un problema previsiblemente complejo en los que no podemos esperar resultados eficientes con una cantidad “manejable” de información. Así mismo

2. La complejidad está correlacionada con la cantidad que participan en el ambiente económico.

3. La estabilidad local se puede cumplir sólo si consideramos un conjunto de sistemas dinámicos que recubran el espacio de precios normalizados, y finalmente

4. La estabilidad universal “quizás es un sueño imposible”.[**?**]

Bibliografía

[1] Arrow, K. J. (2012). *Social choice and individual values* (Vol. 12). Yale university press.

[2] Arrow, K. J., y Hahh, F. (1971), *General Competitive Analysis*. San Francisco.

[3] Arrow, K. J., y Hurwicz, L. (1958). On the stability of the competitive equilibrium, I. *Econometrica*: Journal of the Econometric Society, 522-552.

[4] Arrow, K. J., Block, H. D., y Hurwicz, L. (1959). On the stability of the competitive equilibrium, II. *Econometrica*: Journal of the Econometric Society, 82-109.

[5] Arrow, K. J., y Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 265-290.

[6] Bala, V., y Majumdar, M. (1992). Chaotic tatonnement. Economic Theory, 2(4), 437-445.

[7] Bala, V., Majumdar, M. y Mitra, T. (1998) A note on controlling a chaotic tatonnement, Journal of Economic Behavior and Organization, 33(3–4), pp. 411–420.

[8] Balasko, Y. (1988). *Foundations of the theory of general equilibrium*. World Scientific

[9] Border, K. C. (1989). *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge university press.

[10] Bryant, W. D. (2010). *General equilibrium: theory and evidence*. World Scientific.

[11] Daal, J. V. (2005). General Equilibrium: Problems and Prospects. Economica, 72(287), 552-553.

[12] Daal, J., y Merkies, A. H. Q. M. (1984). *Aggregation in economic research: from individual to macro relations*. Springer Netherlands.

[13] Deaton, A., y Muellbauer, J. (1980). *Economics and consumer behavior*. Cambridge university press.

[14] Debreu, G. (1970). Economies with a finite set of equilibria. Econometrica, 38(3), 387-392.

[15] Debreu, G. (1974). Excess demand functions. Journal of mathematical economics, 1(1), 15-21.

[16] Düppe, T., y Weintraub, E. R. (2014). *Finding equilibrium: Arrow, Debreu, McKenzie and the problem of scientific credit*. Princeton University Press.

[17] Fernandez-Anaya, G., Alvarez-Ramirez, J., y Ibarra-Valdez, C. (2007). On feedback and stable price adjustment mechanisms. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 377(1), 211-226.

[18] Fisher F.M. (1989) *Adjustment Processes and Stability*. In: Eatwell J., Milgate M., Newman P. (eds) General Equilibrium. The New Palgrave. Palgrave Macmillan, London

[19] Fisher, F. M. y Felipe, J. (2003) 'Aggregation in Production Functions: What Applied Economists should Know', Metroeconomica, 54(2/3), pp. 208–262.

[20] Goeree, J. K., Hommes, C., y Weddepohl, C. (1998). Stability and complex dynamics in a discrete tatonnement model. Journal of economic behavior y organization, 33(3-4), 395-410.

[21] Hahn, F. (1982). Stability. *Handbook of mathematical economics*, 2, 745-793.

[22] Hahn, F. H., y Negishi, T. (1962). A theorem on non-tatonnement stability. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 463-469.

[23] Hicks, J. (1946). *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*. Oxford

[24] Hildenbrand, W. (1992). *Market demand: Theory and empirical evidence* (Vol. 215). Princeton University Press.

[25] Hirota, M. (1981). On the stability of competitive equilibrium and the patterns of initial holdings: an example. International Economic Review, 461-467.

[26] Hurwicz, L., y Reiter, S. (2006). *Designing economic mechanisms*. Cambridge University Press.

[27] Jehle, G. A., y Reny, P. J. (2011). *Advanced Microeconomic Theory*, Addison Wesley Longman.

[28] Jordan, J. S. (1983). Locally stable price mechanisms. Journal of Mathematical Economics, 11(3), 235-259.

[29] Kamiya, K. (1990). A globally stable price adjustment process. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1481-1485.

[30] Kellogg, R. B., Li, T. Y., y Yorke, J. (1976). A constructive proof of the Brouwer fixed-point theorem and computational results. SIAM Journal on Numerical Analysis, 13(4), 473-483.

[31] Kuhn, H. W. (1968). Simplicial approximation of fixed points. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 61(4), 1238.

[32] Magill, M., y Quinzii, M. (2002). *Theory of incomplete markets* (Vol. 1). Mit press.

[33] Mantel, R. R. (1976). Homothetic preferences and community excess demand functions. Journal of Economic Theory, 12(2), 197-201.

[34] Mas-Colell, A. (1989). *The theory of general economic equilibrium: A differentiable approach* (No. 9). Cambridge University Press.

[35] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., y Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory* (Vol. 1). New York: Oxford university press.

[36] Moore, J. C. (2006). *General equilibrium and welfare economics: an introduction*. Springer Science and Business Media.

[37] Mukherji, A. (1995). A locally stable adjustment process. *Econometrica*: Journal of the Econometric Society, 441-448.

[38] Nagata, R. (2004). *Theory of regular economies* (Vol. 1). World scientific.

[39] Negishi, T. (1960). Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy. Metroeconomica, 12(2-3), 92-97.

[40] Rizvi, S. A. T. (2006). The Sonnenschein-Mantel-Debreu results after thirty years. History of Political Economy, 38, 228-245.

[41] Rosenblueth, A., Wiener, N., y Bigelow, J. (1943). Behavior, purpose and teleology. *Philosophy of science*, 10(1), 18-24.

[42] Saari, D. (1995). Mathematical complexity of simple economics. Notices of the AMS, 42(2), 222-230.

[43] Saari, D. G. (1988) ‘On the types of information and mechanism design’, Journal of Computational and Applied Mathematics, 22(2–3), pp. 231–242.

[44] Saari, D. G. (1995). A chaotic exploration of aggregation paradoxes. SIAM review, 37(1), 37-52.

[45] Saari, D. G. (1985). Iterative price mechanisms. *Econometrica*: Journal of the Econometric Society, 1117-1131.

[46] Saari, D. G. (1991). Erratic behavior in economic models. Journal of Economic Behavior y Organization, 16(1-2), 3-35.

[47] Shafer, W., y Sonnenschein, H. (1982). Market demand and excess demand functions. *Handbook of mathematical economics*, 2, 671-693.

[48] Smale, S. (1976). A convergent process of price adjustment and global Newton methods. Journal of Mathematical Economics, 3(2), 107-120.

[49] Smale, S. (1998). Mathematical problems for the next century. *The mathematical intelligencer*, 20(2), 7-15.

[50] Smith, A. (2010). *The theory of moral sentiments*. Penguin.

[51] Smith, A. (2004). *Investigación sobre la Naturaleza y causas de la Riqueza de las Naciones*. Fondo de Cultura Económica

[52] Sonnemans, J., Hommes, C., Tuinstra, J., y van de Velden, H. (2004). The instability of a heterogeneous cobweb economy: a strategy experiment on expectation formation. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 54(4), 453-481.

[53] Sonnenschein, H. (1972). Market excess demand functions. *Econometrica*: Journal of the Econometric Society, 549-563.

[54] Todd, M. J. (2013). *The computation of fixed points and applications* (Vol. 124). Springer Science and Business Media.

[55] Tuinstra, J. (2000). *Price dynamics in equilibrium models*, Springer .

[56] Uzawa, H. (1960). Walras' tatonnement in the theory of exchange. The Review of Economic Studies, 27(3), 182-194.

[57] Uzawa, H. (1961). The stability of dynamic processes. *Econometrica*: Journal of the Econometric Society, 617-631.

[58] van der Laan, G., y Talman, A. J. J. (1987). A convergent price adjustment process. Economics Letters, 23(2), 119-123.

[59] Varian, H. R. (1992) *Microeconomics Analysis*, Norton New York

[60] Scarf, H. (1960). Some examples of global instability of the competitive equilibrium. International Economic Review, 1(3), 157-172.

[61] Scarf, H. E., y Hansen, T. (1973). The computation of economic equilibria (No. 24). Yale University Press.

[62] Samuels, W. J. (2011). *Erasing the invisible hand: Essays on an elusive and misused concept in economics*. Cambridge University Press.