

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**CONSTRUCCIÓN DE
UN SISTEMA HAMILTONIANO
A PARTIR DE
UN MAPEO SIMPLÉCTICO**

Tesis que presenta:
Yazmin Calva Rojas
Para obtener el grado de
Maestría en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: **Dr. José Antonio García Rodríguez**

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

Secretario: Dra. Martha Álvarez Ramírez

Vocal: Dr. José Antonio García Rodríguez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**CONSTRUCCIÓN DE
UN SISTEMA HAMILTONIANO
A PARTIR DE
UN MAPEO SIMPLÉCTICO**

Tesis que presenta:
Yazmin Calva Rojas
Para obtener el grado de
Maestría en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: **Dr. José Antonio García Rodríguez**

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

Secretario: Dra. Martha Álvarez Ramírez

Vocal: Dr. José Antonio García Rodríguez

Manuel Jesús Falconi Magaña
Martha Álvarez Ramírez
~~*[Signature]*~~

Agradecimientos

A mi hermana Maria Eugenia por todo el apoyo que me ha dado.

Al Dr. Antonio García por aceptarme como su alumna, por toda su comprensión, paciencia y el tiempo que dedicó para la realización de este trabajo.

A la Dra. Martha Álvarez por sus consejos y todo el tiempo que destinó para escucharme, por la revisión y sugerencias para la mejora de este trabajo.

Al Dr. Manuel Falconi por su paciencia en la revisión de esta tesis y sus valiosas recomendaciones para la mejora de la misma.

A todos mis profesores de la UAM, muy en especial a la Dra. Shirley Bromberg por su paciencia, sus consejos, el tiempo y la motivación que me ha dado a lo largo de estos años.

Al Dr. Richard Wilson, por su apoyo en la realización de este proyecto.

A la Dra. Patricia Saavedra y a la M. en C. Iseo González por su siempre amable atención.

Al Conacyt por la beca otorgada.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	3
1. Preliminares	7
1.1. Formas Diferenciales	7
1.2. Espacios cubrientes	12
2. Mapeo simpléctico y funciones generadoras	17
2.1. Estructura simpléctica en los mapeos	17
2.2. Funciones generadoras	20
3. Extensión de un levantamiento simpléctico exacto	27
3.1. Primera extensión de $h(x_1, y)$	28
3.2. Segunda extensión de $h(x_1, y)$	34
3.3. Tercera y cuarta extensión de $h(x_1, y)$	37
4. Cálculo de Variaciones	41
4.1. Preliminares de cálculo de variaciones	41
4.2. Construcción del Hamiltoniano	44
4.3. Extensión periódica del Hamiltoniano	50

5. Mapeo de Billar	61
Conclusiones y Perspectivas	65
Apéndice	67
Bibliografía	74

Índice de figuras

1.1. Imagen de π	14
2.1. Flujo del mapeo P	19
2.2. Imagen de $P(c, y)$	20
2.3. Área asociada a la función generadora cuando depende de x_1 .	21
2.4. Área asociada a la función generadora que depende de x . . .	22
2.5. Área de la función generadora sin traslación y con traslación. .	23
3.1. Función cut-off $Z(y)$	29
3.2. Sucesión de funciones $Z_n(y)$	30
3.3. Gráfica de $\gamma(x_1, y)$	34
3.4. Área bajo $(1 - s)\gamma(x, sy)$	36
4.1. Regiones de definición de χ_t	53
4.2. Regiones de definición de \widehat{H}	54
5.1. Billar	69

Introducción

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $X' = F(X, t)$, definido en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , y sea $\phi(t, x)$ su flujo, tal que $\phi(0, x) = x$. Entonces se pueden definir varios difeomorfismos que contienen la estructura de la ecuación diferencial. Uno de ellos es $P(x) = \phi(t_0, x)$, donde $t_0 > 0$ es fijo. Este mapeo se llama el mapeo de Poincaré del flujo, el cual ha sido ampliamente estudiado ya que conserva las propiedades geométricas de la ecuación diferencial y reduce en uno la dimensión del problema. Muchos conceptos de las ecuaciones diferenciales ordinarias son definidos a través de sus mapeos de Poincaré, pero son calculados directamente usando las ecuaciones diferenciales.

Entonces para el problema inverso se parte de un difeomorfismo $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ con el cual se construye una ecuación diferencial tal que $F(x)$ sea el mapeo de Poincaré de tal sistema. La construcción de tal sistema se basa en la relación de equivalencia $(x, 1) \sim (F(x), 0)$ definida en $D \times [0, 1]$, que denota la identificación de $(x, 1)$ con $(F(x), 0)$. Definimos el campo vectorial $X(x, s) = (0, 1)$ y finalmente se observa que $F(x)$ es un mapeo de Poincaré de este campo vectorial (cf.[1]). Esta construcción depende de $F(x)$ en la definición de la relación de equivalencia por lo que no es útil para estudiar perturbaciones o errores numéricos.

En este trabajo se presenta este resultado para el caso de los mapeos simplécticos y los sistemas Hamiltonianos. Este tipo de ecuaciones y difeomorfismos cuentan con cierta estructura que nos permite construir una ecuación diferencial a partir de un difeomorfismo sin presentar estos problemas.

En [9] se demuestra que dado un sistema Hamiltoniano, si se sigue cada solución un tiempo fijo t_0 se obtiene un mapeo simpléctico. Luego, nosotros usaremos esto para estudiar el problema inverso, es decir, dado un mapeo

simplético construir un Hamiltoniano, tal que el mapeo obtenido al seguir el flujo hasta un tiempo dado, digamos $t = 1$, obtenemos el mapeo simplético original.

La demostración de este resultado involucrará formas diferenciales, Cálculo de Variaciones, así como de Análisis donde toma particular atención el teorema de extensión de Borel. Es importante resaltar que nuestra demostración es completamente constructiva, además que debido a ésta y a la relación de los mapeos simpléticos con las funciones generadoras, el sistema obtenido permanece invariante bajo pequeñas perturbaciones.

Para cumplir con nuestro propósito, en el Capítulo 1 revisamos la estructura de las formas diferenciales y en particular la forma diferencial simplética. En esta estructura se encuentra la relación entre las formas diferenciales exactas y cerradas, y recordamos el Lema de Poincaré. Además de estudiar la relación entre los mapeos de los anillos $S^1 \times [a, b]$ y sus levantamientos en el espacio cubriente $\mathbb{R} \times [a, b]$.

En el Capítulo 2 estudiamos los conceptos de mapeos simpléticos, función generadora, mapeos twist, así como encontrar la conexión que existe entre ellos. Se pone énfasis en la caracterización para los distintos dominios de las funciones generadoras.

El objetivo del Capítulo 3 es construir a partir de un mapeo twist definido en una franja $\mathbb{R} \times [a, b]$, un mapeo twist definido en el plano \mathbb{R}^2 . En el caso en que el mapeo twist original sea el levantamiento de un mapeo definido en un anillo topológico $S^1 \times [a, b]$ la extensión será el levantamiento de un mapeo definido en $S^1 \times \mathbb{R}$. La estructura simplética permite usar una función generadora en lugar del mapeo simplético original, lo que reduce en una dimensión el problema.

Este proceso se realiza en cuatro secciones, en la sección 3.1 veremos como se reflejan las propiedades simpléticas del mapeo twist $P(x, y) = (x_1, y_1)$, en una función generadora con dominio $x_1 \in \mathbb{R}$, $y \in [a, 0]$, después se extiende el dominio de esta función a \mathbb{R}^2 de manera suave tal que ésta es la función generadora de un mapeo twist definido en $y \in [a, \rho]$, con $\rho > 0$ fijo. En este paso se usa directamente la técnica de Borel(cf.[6]).

En la sección 3.2 se modifica la función definida en la sección 3.1 para que sea la función generadora de un mapeo twist definido para $y \geq a$. En la sección 3.3 se modifica dos veces la función generadora para que ésta sea la

función generadora de un mapeo twist donde las rectas $y = a'$ para $a' \gg 1$ se verifica que sean preservadas y el flujo sea lineal. Aplicando la misma técnica para $y \leq a$, se puede extender el mapeo twist $P(x, y) = (x_1, y_1)$ donde $x \in \mathbb{R}$, $y \in [a, \infty)$, a un mapeo twist definido para $y \in \mathbb{R}$ y tal que las rectas $y = a'$ para $|y|$ grande son invariantes.

En el Capítulo 4 enunciamos algunos conceptos del Cálculo de Variaciones, como son la ecuación de Euler-Lagrange y la transformación de Legendre las cuales relacionan la forma Lagrangiana y Hamiltoniana de un sistema. También revisamos la transformación de un espacio de fases a otro, por medio de una función generadora. En la segunda sección usamos estas herramientas para construir, a partir de un mapeo twist con dominio \mathbb{R}^2 , un Hamiltoniano $H(t, x, y)$ donde $0 \leq y \leq 1$, y tal que el mapeo de Poincaré a tiempo $t = 1$ es el mapeo twist inicial. En la sección 4.3 se modifica el Hamiltoniano anterior para construir un Hamiltoniano que tiene periodo 1 en el tiempo, y tal que el mapeo de Poincaré continúa siendo el mapeo twist original. En el Capítulo 5 se revisa la construcción del Hamiltoniano en un mapeo de billar específico.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Formas Diferenciales

En esta sección damos una breve introducción a las formas diferenciales, en particular revisamos la estructura algebraica y diferencial de éstas, además de los conceptos de formas diferenciales cerradas y exactas, y algunas relaciones entre ellas.

Definición 1.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto con frontera suave. Una 0 -forma diferencial es simplemente una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, es decir de clase C^1 .

Las 1-formas básicas son símbolos dx_1, dx_2, \dots, dx_n . La operación producto a izquierda entre ellas la denotamos con “ \wedge ”, y satisface

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Las 2-formas básicas son $\{dx_i \wedge dx_j : i, j = 1, \dots, n\}$. En general, las k -formas básicas son $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$. Observemos que si hay dos índices repetidos en una k -forma entonces se anula.

Definición 1.2. Si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto con frontera suave y $k \in \mathbb{N}$, entonces una k -forma diferencial w en D es la expresión

$$w = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

con $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $f_{i_1, \dots, i_k} : D \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. El conjunto de las k -formas diferenciales en D es

$$\Omega^k(D) = \left\{ \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \mid f_{i_1 i_2 \dots i_k} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \right.$$

diferenciable $\left. \right\}$.

Sea $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, entonces expresamos a las k -formas por

$$w = \sum_I f_I dx_I.$$

Generalmente hablaremos de formas o formas diferenciales indistintamente, especificando su orden sólo cuando sea necesario. Ahora vamos a construir la estructura de las formas diferenciales.

Definición 1.3. La suma de las k -formas $w_1 = \sum_I f_I dx_I$ y $w_2 = \sum_I h_I dx_I$ es

$$w_1 + w_2 = \sum_I (f_I + h_I) dx_I.$$

La siguiente proposición nos resume las propiedades de la suma.

Proposición 1.1. Sean w_1, w_2, w_3 k -formas entonces

(i) $(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3)$.

(ii) $w_1 + 0 = w_1$, donde 0 es la k -forma dada por $0 = \sum_I 0 dx_I$.

(iii) $w_1 + (-w_1) = 0$.

(iv) $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$.

Entonces $\Omega^k(D)$ es un grupo abeliano con la suma. Además observamos que $\Omega^k(D)$ es un espacio vectorial sobre el campo de los reales. La operación producto cuña entre formas diferenciales se define de la siguiente forma:

Definición 1.4. Sean $w_1 = \sum_I f_I dx_I$, $w_2 = g$ una k -forma y una 0-forma entonces el producto cuña de estas dos formas es

$$w_2 \wedge w_1 = \sum_I (g f_I) dx_I.$$

El producto cuña entre las 0-formas f y g es simplemente el producto usual entre funciones, $f \wedge g = fg$. Observemos que este producto satisface:

Proposición 1.2. Sean f_1, f_2 0-formas, w_1, w_2 k -formas entonces

$$(i) (f_1 f_2) \wedge w_1 = f_1 \wedge (f_2 \wedge w_1).$$

$$(ii) 1 \wedge w_1 = w_1.$$

$$(iii) (f_1 + f_2) \wedge (w_1 + w_2) = f_1 \wedge w_1 + f_2 \wedge w_1 + f_1 \wedge w_2 + f_2 \wedge w_2.$$

Vemos que $\Omega^k(D)$ es un módulo sobre $C^\infty(D, \mathbb{R})$. Definimos el producto cuña entre formas diferenciales de la siguiente manera:

Definición 1.5. Sean $w_1 = \sum f_I dx_I$, $w_2 = \sum h_J dx_J$ formas diferenciales en \mathbb{R}^n , la operación *producto cuña* es

$$w_1 \wedge w_2 = \sum (f_I h_J) dx_I \wedge dx_J.$$

El producto cuña para formas diferenciales satisface las siguientes propiedades.

Proposición 1.3. Sean w_1, w_2, w_3 formas de orden k, j, s respectivamente, entonces

$$(i) w_1 \wedge w_2 = (-1)^{kj} w_2 \wedge w_1.$$

$$(ii) (w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 = w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3).$$

$$(iii) \text{ Si } s=j \text{ entonces } w_1 \wedge (w_2 + w_3) = (w_1 \wedge w_2) + (w_1 \wedge w_3).$$

Ejemplo 1.1. 1-forma $w = ydx + xdy$.

Ejemplo 1.2. 2-forma $w = zdx \wedge dy - xydy \wedge dz + ydx \wedge dz$.

Ejemplo 1.3. 3-forma $w = x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3 x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$.

Ahora daremos una definición de gran importancia.

Definición 1.6. Sea $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, luego la *forma simpléctica* w en \mathbb{R}^{2n} es la 2-forma

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} J_{ij} dx_i \wedge dx_j = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ con I_n la matriz identidad de dimensión n . También denotamos la forma simpléctica w por

$$w = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i = dx \wedge dy.$$

Para abordar los conceptos de formas diferenciales exactas y cerradas definimos la derivada exterior, la cual es una transformación lineal entre los espacios de formas diferenciales y está relacionada con la derivada.

Definición 1.7. El operador $d : \Omega^k(D) \rightarrow \Omega^{k+1}(D)$, llamado la *derivada exterior* de $\sum_{i=1}^n f_I dx_i$, es la forma definida como

$$dw = \sum df_I \wedge (dx_I),$$

o sea

$$dw = \sum \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I.$$

El operador derivada exterior satisface las siguientes propiedades:

Proposición 1.4. Sean w_1 y w_2 formas diferenciales, entonces

- (i) d es una transformación lineal.
- (ii) $d(dw_1) = 0$.
- (iii) $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$.
- (iv) $d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2$, donde k es el orden de w_1 .

Definición 1.8. Una k -forma diferencial w_1 es *exacta* si hay una $(k-1)$ -forma w_2 tal que $w_1 = dw_2$. Y denotamos por B_k al subespacio vectorial de k -formas diferenciales exactas.

Definición 1.9. Una k -forma diferencial w se dice *cerrada* si $dw=0$. Y Z_k denotará al subespacio vectorial de las k -formas cerradas.

Observamos que si $d : \Omega^k(D) \rightarrow \Omega^{k+1}(D)$ es la derivada exterior entonces

$$\begin{aligned} \text{Kernel}(d) &= Z_k, \\ \text{Im}(d) &= B_k. \end{aligned}$$

donde Im denota la imagen de la transformación d . Con esta estructura presente abordamos los siguientes conceptos.

Proposición 1.5. Todas las formas exactas son cerradas, es decir $B_k \subset Z_k$.(cf.[4])

Un ejemplo de una 2-forma diferencial cerrada y exacta es la forma simpléctica pues $d(\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i) = \sum_{i=1}^n d(dx_i \wedge dy_i) = \sum_{i=1}^n d^2 x_i \wedge dy_i - dx_i \wedge d^2 y_i = 0$, y además $d(\sum_{i=1}^n x_i dy_i) = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. Una pregunta inmediata es determinar las condiciones necesarias para que una forma cerrada sea exacta. Este problema es importante porque refleja las propiedades topológicas del conjunto D .

Lema 1.1 (de Poincaré). Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ contractil a un punto, y tal que ∂D es suave entonces todas las formas cerradas son exactas. Esto es, si w_1 es una k -forma en D tal que $dw_1=0$, entonces existe una $(k-1)$ -forma w_2 en D tal que $w_1=dw_2$.

La siguiente construcción la usaremos para profundizar el estudio de las propiedades topológicas de D .

Definición 1.10. La *cohomología de De Rham* en D es la sucesión de módulos

$$H^k(D) = Z_k/B_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A continuación ilustramos este concepto con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.4.

$$H^0(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}, \quad H^0(\mathbb{R}^1) = \mathbb{R} = Z_0/B_0.$$

Ejemplo 1.5. Sea U la unión disjunta de m intervalos abiertos en \mathbb{R} . Entonces

$$H^0(D) = \mathbb{R}^m, \quad H^1(D) = 0.$$

En general la dimensión de $H^0(D)$ es el número de componentes arcoconexas de D .

La siguiente definición nos permitirá ver cómo actúan las funciones suaves sobre las formas diferenciales.

Definición 1.11. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ un mapeo diferenciable tal que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $w = \sum_I g_I dy_I$ una k -forma diferencial definida en D . Definimos f^*w como la k -forma en U dada por

$$f^*w = g(f(x))(dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}), \quad \text{para cada } i$$

donde

$$dy_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Observemos que f^* opera en sentido contrario a $f : U \rightarrow D$. Una forma de volumen es una forma no degenerada, sobre una variedad con la misma dimensión que la forma diferencial, a la cual le podemos asociar las 1-formas, 2-formas y las 3-formas la longitud, además de el área y el volumen de la variedad, respectivamente. Observemos que si $w = \sum dx_i \wedge dy_i$ entonces $w^n = n! dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ es no degenerada por lo que es una forma de volumen de dimensión $2n$.

1.2. Espacios cubrientes

Una herramienta que será de utilidad para el planteamiento de nuestro problema son los espacios cubrientes, que discutiremos en esta sección.

Definición 1.12. Sean X, Y variedades con frontera, $\pi : X \rightarrow Y$ una aplicación suave. Entonces X es un *espacio cubriente de Y* y π es un *mapeo cubriente* si para todo $y \in Y$ existen $U \subset Y$ vecindad de y , y una familia U_α de abiertos disjuntos en X , tales que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, y cada $\pi : U_\alpha \rightarrow U$ es un *difeomorfismo*.

Definición 1.13. Sean $\pi : X \rightarrow Y$ mapeo cubriente, $P : X \rightarrow X$, $p : Y \rightarrow Y$ suaves. Decimos que P es un *levantamiento de p* si $\pi \circ P = p \circ \pi$, es decir el *diagrama es conmutativo*.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & X \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

Ejemplo 1.6. Sea $x, y \in \mathbb{R}$. Definimos la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Z}$. Luego \mathbb{R}/\sim es identificado con la circunferencia S^1 . Considerando esta relación de equivalencia y el mapeo $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ donde $\pi : x \mapsto \bar{x}$, el conjunto \mathbb{R} es el espacio cubriente universal de S^1 .

Para ver esto consideremos los siguientes conjuntos $U = (0, 1)$, $V = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset S^1$. Para $n \in \mathbb{Z}$, definimos $U_n = (n, n+1)$, $V_n = (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}$, entonces $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n$, $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, claramente $\pi|_{U_n} : U_n \rightarrow U$ y $\pi|_{V_n} : V_n \rightarrow V$ son difeomorfismos.

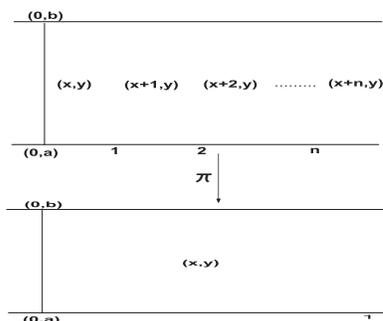
Proposición 1.6. $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es el levantamiento de un mapeo $p : S^1 \rightarrow S^1$ si P es difeomorfismo y satisface

- (i) $P(x+1) = P(x) + 1$ (si P es creciente),
- (ii) $P(x+1) = P(x) - 1$ (si P es decreciente).

Ejemplo 1.7. Consideremos $A = S^1 \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2$, el cual es topológicamente un anillo, luego la banda $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times [a, b]$ es un espacio cubriente de A , donde el mapeo $\pi : \mathcal{A} \rightarrow A$ identifica a todos los puntos de la forma

$$\{(x+n, y), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ver la Figura 1.1.

Figura 1.1: Imagen de π .

Observamos que la frontera de \mathcal{A} está formada por la unión de los conjuntos $\mathbb{R} \times \{a\}$ y $\mathbb{R} \times \{b\}$.

Proposición 1.7. $P : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b]$ es el levantamiento de un mapeo $p : S^1 \times [a, b] \rightarrow S^1 \times [a, b]$ si P es difeomorfismo y satisface

- (i) $P(x + 1, y) = P(x, y) + (1, 0)$ (si la primera componente de P es creciente),
- (ii) $P(x + 1, y) = P(x, y) - (1, 0)$ (si la primera componente de P es decreciente).

Recordemos que nuestro interés es estudiar los difeomorfismos $P : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b]$ los cuales son levantamientos de mapeos $p : S^1 \times [a, b] \rightarrow S^1 \times [a, b]$. Construimos el levantamiento $P : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b]$, con el siguiente método. Como primer paso tomamos al conjunto $[0, 1) \times [a, b]$, al cual cubrimos con conjuntos abiertos \mathcal{U}_i de manera que estos conjuntos abiertos estén cubiertos por π . Ahora hacemos una subdivisión $[x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ de $[0, 1) \times [a, b]$ con $p([x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]) \subset \mathcal{U}_i$. Para cada \mathcal{U}_i realizamos una partición \mathcal{V}_j de $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ tal que para cada j se cumple $\pi(\mathcal{V}_j) \subset \mathcal{U}_i$. Definimos el levantamiento para cada

$$(x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$$

como

$$P(x, y) = (\pi|_{\mathcal{V}_j})^{-1}(p(x, y)).$$

Por el Lema del Pegamento (cf.[11]) P es continuo en $[0, 1) \times [a, b]$. Luego para cada $(x_i, y_i) \in [1, 2) \times [a, b]$ tenemos que $(x_i, y_i) = (x+1, y)$ con $(x, y) \in [0, 1) \times [a, b]$, y definimos $P(x_i, y_i) = P(x+1, y) = P(x, y) + (1, 0)$. De la misma manera para cualquier $[n, n+1) \times [a, b]$, el levantamiento P para $(x_i, y_i) \in [n, n+1) \times [a, b]$ se define como $P(x_i, y_i) = P(x+1, y) = P(x, y) + (1, 0)$ con $(x, y) \in [n-1, n)$.

Capítulo 2

Mapeo simpléctico y funciones generadoras

En este capítulo estudiamos la estructura simpléctica de los difeomorfismos $p : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$, donde $I = [a, b]$ ó \mathbb{R} , y sus levantamientos $P : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$. También veremos las propiedades, tales como la exactitud de estos mapeos y su relación con las funciones generadoras.

2.1. Estructura simpléctica en los mapeos

En esta sección damos los conceptos necesarios para la construcción de la función generadora de un mapeo simpléctico.

Definición 2.1. Sea $P : \mathbb{R}^n \times I^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times I^n$ un difeomorfismo tal que $P(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (z_1, z_2, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n)$, decimos que es *simpléctico* si $\sum dx_i \wedge dy_i = \sum dz_i \wedge dw_i$, o en notación abreviada si $dx \wedge dy = dz \wedge dw$.

Sean $A = S^1 \times I$ y $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times I$. Al tomar $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ con $P(x, y) = (x_1, y_1)$, notamos que $dx_1 \wedge dy_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y} \frac{\partial y_1}{\partial x} \right) dx \wedge dy$, es decir P es simpléctico si $\left(\frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y} \frac{\partial y_1}{\partial x} \right) = 1$.

Si $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es el levantamiento de un mapeo $p : A \rightarrow A$ simpléctico

entonces P se llama levantamiento simpléctico. En este trabajo sólo estudiaremos difeomorfismos de este tipo de clase C^∞ .

Observamos que si p es simpléctico entonces $p^*w = w$, de donde $p^*w^n = w^n$, y por lo tanto p preserva la forma de volumen w^n .

De aquí en adelante usaremos la notación $P(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (x_1, y_1)$ indistintamente.

Definición 2.2. Sea $p : A \rightarrow A$ con $p(x, y) = (x_1, y_1)$, decimos que p es un mapeo exacto si la 1-forma diferencial $y_1 dx_1 - y dx$ es exacta.

Definición 2.3. Si $p : A \rightarrow A$ es exacto entonces $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es un levantamiento simpléctico exacto. A veces diremos simplemente que P es un mapeo simpléctico exacto.

Observemos que $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es un levantamiento simpléctico exacto si y sólo si P preserva la forma simpléctica, y para las curvas $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisfacen $\zeta(t+1) = \zeta(t) + (1, 0)$ entonces

$$\int_{P(\zeta)} y dx = \int_{\zeta} y dx.$$

Equivalentemente, P es simpléctico exacto si el área comprendida entre las gráficas de $P(\zeta)$ y ζ es cero. Ver la Figura 2.1. Observamos que si $I = [a, b]$ entonces todos los levantamientos simplécticos son exactos (cf.[5]).

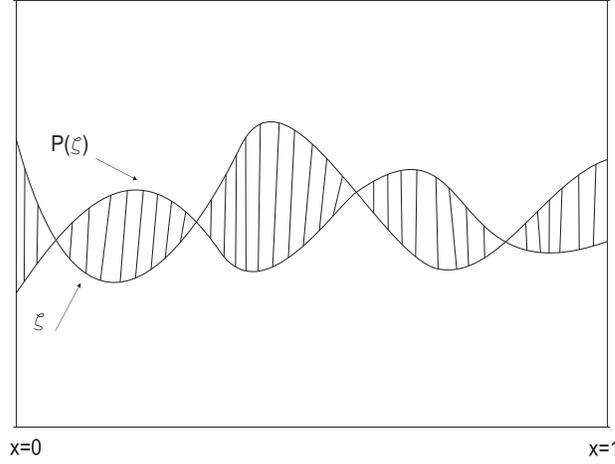
Definición 2.4. Sea $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ un levantamiento simpléctico con $P(x, y) = (x_1, y_1)$, P se llama un mapeo *twist monótono* si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $(x, y) \in \mathcal{A}$

$$\varepsilon < \left| \frac{\partial x_1(x, y)}{\partial y} \right| < \varepsilon^{-1}.$$

Esta cantidad es conocida como el twist del mapeo.

Cuando esta condición satisfaga que $\frac{\partial x_1(x, y)}{\partial y} > 0$ diremos que el twist es positivo y cuando $\frac{\partial x_1(x, y)}{\partial y} < 0$ diremos que el twist es negativo.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\frac{\partial x_1}{\partial y} > \varepsilon$, es decir la función $y \mapsto x_1(c, y)$ es estrictamente creciente, entonces la imagen de la recta $x = c$ bajo el mapeo P es la gráfica de una curva suave sobre el eje x . Ver la Figura 2.2.

Figura 2.1: Flujo del mapeo P

Lema 2.1. Sea $P : \mathcal{A} = \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathcal{A}$ con $P(x, y) = (x_1, y_1)$ un levantamiento simpléctico, entonces las funciones $\alpha(x) = x_1(x, a)$, $\beta(x) = x_1(x, b)$ satisfacen

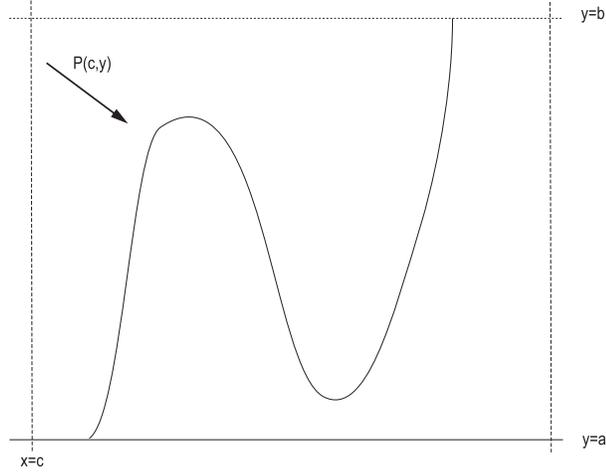
- (i) $\alpha(x), \beta(x)$ son estrictamente crecientes y $\alpha(x) < \beta(x)$.
- (ii) $\alpha(x), \beta(x)$ son invertibles.

Demostración. (i) Como P es un levantamiento se tiene que $x_1(x + 1, y) = x_1(x, y) + 1$, para cada $y \in [a, b]$ arbitrario y fijo. Es decir, $x_1(x + n, y) = x_1(x, y) + n$, en particular se satisface para $y = a, b$. Además $\frac{\partial y_1}{\partial x} = 0$ en $y = a, b$, entonces $\frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial y_1}{\partial y} = 1$, es decir $\frac{\partial x_1}{\partial x} \neq 0$, de donde concluimos que $\frac{\partial x_1}{\partial x} > 0$, i.e., $x_1(x, a)$ es estrictamente creciente. Lo mismo ocurre para $y = b$, y dado que $a < b$ tenemos que $\alpha(x) < \beta(x)$. (ii) Se sigue de (i). \square

Observamos que

$$B = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \times [\alpha(x), \beta(x)] = \{(x, x_1) : P(x, y) = (x_1, y_1)\},$$

para algún $y, y_1 \in [a, b]$.

Figura 2.2: Imagen de $P(c, y)$

2.2. Funciones generadoras

Sea $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ un mapeo simpléctico con $\frac{\partial x_1}{\partial y} > 0$, sea $(x, y) \in \mathcal{A}$ con $P(x, y) = (x_1, y_1)$ y definimos $\mathcal{L}_1 = \{x \times [a, b]\}$, entonces la imagen de \mathcal{L}_1 bajo P es la gráfica de una curva cuya primera coordenada como función real es inyectiva. La intersección de $P(\mathcal{L}_1)$ con la recta $\{(x_1, y) | y \in [a, b]\}$ consiste del único punto (x_1, y_1) . Sea $g : [\alpha(x), \beta(x)] \rightarrow [a, b]$ la función definida por la gráfica de $P(\mathcal{L}_1)$. Sea $S_1(x, x_1)$ dada por

$$S_1(x, x_1) = \int_{\alpha(x)}^{x_1} g(u) du,$$

entonces

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_1}(x, x_1) = g(x_1) = y_1.$$

Luego $S_1(x, x_1)$ representa el área dada en la Figura 2.3.

Análogamente al considerar $\mathcal{L}_2 = \{x_1 \times [a, b]\}$. Entonces la intersección de $P^{-1}(\mathcal{L}_2)$ con $\{(x, y) | y \in [a, b]\}$ consta del punto (x, y) . Sea $g_1 : [\alpha^{-1}(x_1), \beta^{-1}(x_1)] \rightarrow [a, b]$ como la gráfica de $P^{-1}(\mathcal{L}_2)$ y vemos que $S_1(x, x_1)$ está dada por

$$S_1(x, x_1) = \int_x^{\beta^{-1}(x_1)} g_1(v) dv,$$

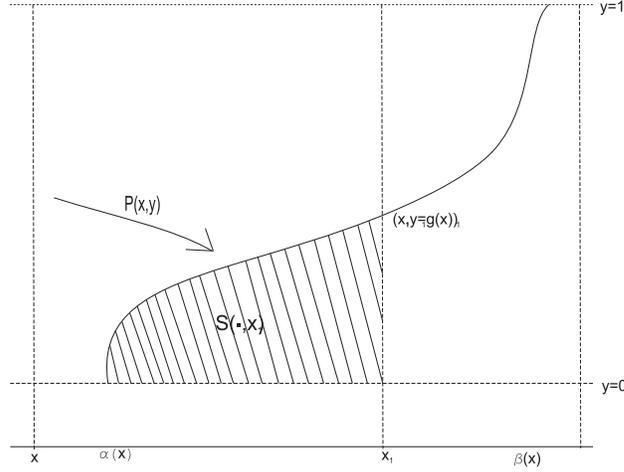


Figura 2.3: Área asociada a la función generadora cuando depende de x_1

o bien

$$\frac{\partial S_1}{\partial x}(x, x_1) = -g_1(x) = -y.$$

Ver la Figura 2.4.

La función $S_1(x, x_1)$ es conocida como función generadora.

A partir de un levantamiento simpléctico y twist podemos construir una función generadora $S_1(x, x_1)$ como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.1. Sea $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ un levantamiento simpléctico twist, i.e., $0 < \frac{\partial x_1}{\partial y} < \infty$ entonces existe una función generadora $S_1: B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (i) Si $P(x, y) = (x_1, y_1)$ entonces $y = -\frac{\partial S_1}{\partial x}(x, x_1)$, $y_1 = \frac{\partial S_1}{\partial x_1}(x, x_1)$,
- (ii) $\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1 \partial x} \neq 0$,
- (iii) Si \mathcal{A} es cubriente del mapeo P entonces $S_1(x + 1, x_1 + 1) = S_1(x, x_1)$.

Demostración. (i) Esta parte de la demostración es como se muestra en la anterior discusión. Otra manera de verificar esto es observar que dado que $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es un mapeo simpléctico con $P(x, y) = (x_1, y_1)$. Entonces P satisface $dx \wedge dy = dx_1 \wedge dy_1$, por lo tanto $dy \wedge dx = dy_1 \wedge dx_1$ si y solo si

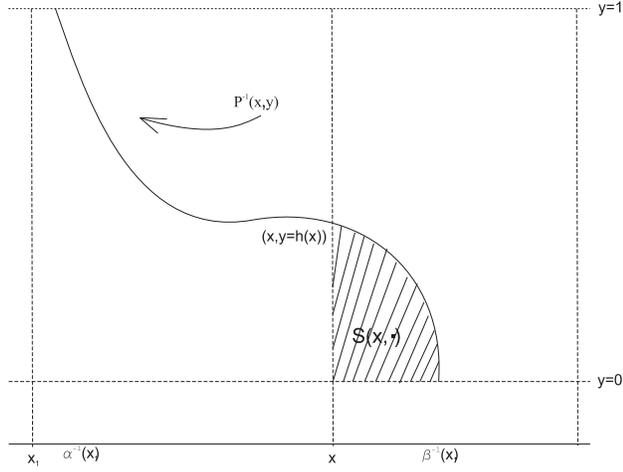


Figura 2.4: Área asociada a la función generadora que depende de x

$dy_1 \wedge dx_1 - dy \wedge dx = 0$ es decir $d(y_1 dx_1 - y dx) = 0$. Es decir la 1-forma diferencial $y_1 dx_1 - y dx$ es cerrada en $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, que es un conjunto contractil. A partir del Lema de Poincaré concluimos que existe una 0-forma S_1 tal que

$$dS_1 = \frac{\partial S_1}{\partial x} dx + \frac{\partial S_1}{\partial y} dy + \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial S_1}{\partial y_1} dy_1 = y_1 dx_1 - y dx.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial S_1}{\partial y} = \frac{\partial S_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial S_1}{\partial x_1} = y_1,$$

entonces S_1 depende explícitamente de x y x_1 , es decir, el dominio de S_1 es el conjunto B , y de la propiedad twist de P tenemos que $S_1(x, x_1)$ está bien definida.

(ii) Afirmamos que $\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1 \partial x} \neq 0$, pues

$$-\frac{\partial S_1}{\partial x} = y,$$

entonces

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} + y = 0,$$

derivando con respecto a y se tiene

$$1 + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1 \partial x} \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0,$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1 \partial x} \frac{\partial x_1}{\partial y} = -1.$$

Finalmente usando la condición twist tenemos

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1 \partial x} < 0. \tag{2.2.1}$$

A este resultado también le llamaremos propiedad twist.

(iii) Como la función generadora es el área bajo una curva, la periodicidad $S_1(x + 1, x_1 + 1) = S_1(x, x_1)$ corresponde a una traslación de área. Ver la Figura 2.5.

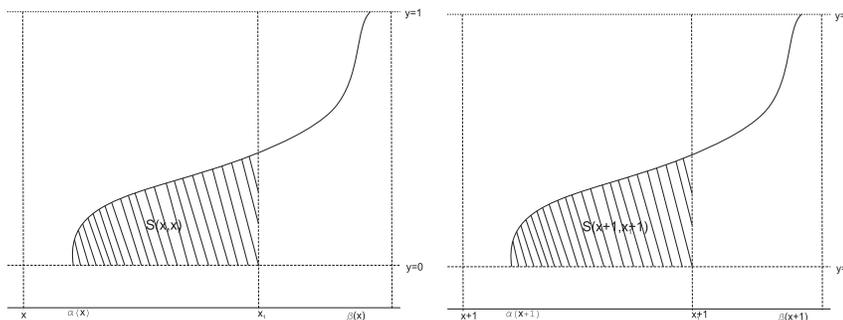


Figura 2.5: Área de la función generadora sin traslación y con traslación.

□

Además partiendo de una función generadora $S_1(x, x_1)$ que cumple ciertas condiciones construimos un mapeo simpléctico y twist definido en la banda \mathcal{A} .

Teorema 2.2. Sea $S_1: B \rightarrow \mathbb{R}$, que satisface $\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x} \neq 0$, $S(x + 1, x_1 + 1) = S(x, x_1)$ y además

$$y = -\frac{\partial S}{\partial x}(x, x_1), \quad y_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}(x, x_1),$$

entonces existe $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $P(x, y) = (x_1(x, y), y_1(x, y))$ con P twist, simpléctico, exacto.

Demostración. Pongamos $F : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $F : (x, y, x_1, y_1) \mapsto (y + \frac{\partial S_1}{\partial x}(x, x_1), y_1 - \frac{\partial S_1}{\partial x_1}(x, x_1))$, entonces $F(x, y, x_1, y_1) = (0, 0)$ para todo (x, y, x_1, y_1) . Además

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} & 1 & \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1 \partial x} & 0 \\ -\frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial x_1} & 0 & -\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Y del teorema de la función inversa y la condición twist tenemos que en una vecindad arbitraria existe $P(x, y) = (x_1, y_1)$. Ahora veamos que P está definido en toda la banda \mathcal{A} . Sea $(a, 0) \in \mathcal{A}$ y V_0 una vecindad de $(a, 0)$, por el teorema de la función inversa existe una vecindad V_1 de (x_1, y_1) tal que $P(V_0) = V_1$. Sea y_0 cercano a cero y V_0^* una vecindad de (a, y_0) , entonces existe una vecindad V_1^* tal que $P(V_0^*) = V_1^*$. Ahora verifiquemos que P esta bien definida, es decir que si $(x_1, y_1) \in P(V_0) \cap P(V_0^*)$ entonces existen $(x, y) \in V_0$ y $(x^*, y^*) \in V_0^*$ tal que $P(x, y) = (x_1, y_1) = P(x^*, y^*)$ y además $(x, y) = (x^*, y^*)$. Esto es cierto, ya que de lo contrario existiría $(x^*, y^*) \in V_0$ tal que $P(x^*, y^*) \neq (x_1, y_1)$ con $(x, y) = (x^*, y^*)$, es decir que no se cumpliría el teorema de la función inversa. Al realizar este proceso en todo el segmento de recta $\{0\} \times [a, b]$, aplicando el Lema del tubo ([cf.11]) tenemos una vecindad alrededor de este segmento de recta donde esta definido el mapeo P , realizando el mismo proceso en cualquier punto $(x, 0)$ tenemos que el mapeo P está definido en toda la banda \mathcal{A} . Además $S(x+1, x_1+1) = S(x, x_1)$ y entonces

$$y = -\frac{\partial S}{\partial x}(x+1, x_1+1), \quad y_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}(x+1, x_1+1),$$

por lo que

$$P(x+1, y) = (x_1(x+1, y), y_1(x+1, y)) = (x_1+1, y_1).$$

Y dado que $\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x} < 0$ entonces $-\frac{\partial y}{\partial x_1} < 0$, es decir $\frac{\partial x_1}{\partial y} > 0$, por lo tanto el mapeo P satisface la condición twist. Por último $S(x, x_1)$ satisface que $dS = -y dx + y_1 dx_1$, entonces $d^2 S = -dy \wedge dx + dy_1 \wedge dx_1$, es decir $dx \wedge dy = dx_1 \wedge dy_1$ y por lo tanto P es simpléctico. Además dado que esta definido en la banda \mathcal{A} concluimos que es exacto. \square

Lema 2.2. Sea $P : \mathcal{A} = \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathcal{A}$ mapeo simpléctico y twist, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $P : \mathcal{A} = \mathbb{R} \times [b - \varepsilon, b] \rightarrow \mathcal{A}$ satisface $\frac{\partial x_1}{\partial x} \neq 0$.

Demostración. Se sigue del Lema 2.1. \square

Es importante hacer notar que la propiedad que nos permitio construir la función generadora S_1 , en términos de las variables (x, x_1) es la condición $\frac{\partial x_1}{\partial y} > 0$.

Para definir de manera correcta la función generadora $S_2(x_1, y)$ pedimos otra condición sobre la función $x_1(x, y)$ como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.3. Sea $P : \mathbb{R} \times [b - \varepsilon, b] \rightarrow \mathcal{A}$ un levantamiento simpléctico con $0 < \frac{\partial x_1}{\partial x} < \infty$ entonces existe una función generadora $S_2 : B' \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(i) \text{ Si } P(x, y) = (x_1, y_1) \text{ entonces } y_1 = \frac{\partial S_2}{\partial x_1}(x_1, y), \quad x = \frac{\partial S_2}{\partial y}(x_1, y),$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 S_2}{\partial y \partial x_1} \neq 0,$$

donde $B' = \{(x_1, y) : P(x, y) = (x_1, y_1), \text{ para algún } x, y_1\}$.

Demostración. (i) Si $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es un mapeo simpléctico tal que $P(x, y) = (x_1, y_1)$. Entonces P satisface $dx \wedge dy = dx_1 \wedge dy_1$, por lo tanto $dx \wedge dy = -dy_1 \wedge dx_1$ si y solo si $dy_1 \wedge dx_1 + dx \wedge dy = 0$ o equivalentemente $d(y_1 dx_1 + x dy) = 0$. Es decir la 1-forma diferencial $y_1 dx_1 + x dy$ es cerrada en $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, el cual es contractil. A partir del Lema de Poincaré concluimos que existe una 0-forma S_2 tal que

$$dS_2 = \frac{\partial S_2}{\partial x} dx + \frac{\partial S_2}{\partial y} dy + \frac{\partial S_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial S_2}{\partial y_1} dy_1 = y_1 dx_1 + x dy.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial S_2}{\partial y} = \frac{\partial S_2}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial S_2}{\partial x_1} = y_1,$$

entonces S_2 solo depende de y y x_1 , por lo que el dominio de S_2 es el conjunto B' , y debido a la condición $\frac{\partial x_1}{\partial x} > 0$ la función $S_2(x_1, y)$ está bien definida.

(ii) Afirmamos que $\frac{\partial^2 S_2}{\partial y \partial x_1} \neq 0$, pues

$$\frac{\partial S_2}{\partial y} = x,$$

entonces

$$\frac{\partial S_2}{\partial y} - x = 0,$$

derivando con respecto a x se tiene

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial x_1 \partial y} \frac{\partial x_1}{\partial x} - 1 = 0,$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial x_1 \partial y} \frac{\partial x_1}{\partial x} = 1.$$

Finalmente al usar la condición $\frac{\partial x_1}{\partial x} > 0$

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial x_1 \partial y} > 0.$$

□

La siguiente proposición nos da las condiciones necesarias para construir funciones generadoras localmente a partir de un mapeo P simpléctico.

Proposición 2.1. Sea $P : (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ un levantamiento simpléctico en la banda \mathcal{A} .

- (i) Si $\frac{\partial x_1}{\partial y} > 0$ sii $\frac{\partial S_1(x, x_1)}{\partial x} = -y$, $\frac{\partial S_1(x, x_1)}{\partial x_1} = y_1$ y $\frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial x_1} \neq 0$,
- (ii) Si $\frac{\partial x_1}{\partial x} > 0$ sii $\frac{\partial S_2(x_1, y)}{\partial y} = x$, $\frac{\partial S_2(x_1, y)}{\partial x_1} = y_1$ y $\frac{\partial^2 S_2}{\partial x_1 \partial y} \neq 0$,
- (iii) Si $\frac{\partial y_1}{\partial x} > 0$ sii $\frac{\partial S_3(y_1, y)}{\partial y} = x$, $\frac{\partial S_3(y_1, y)}{\partial y_1} = -x_1$ y $\frac{\partial^2 S_3}{\partial y_1 \partial y} \neq 0$,
- (iv) Si $\frac{\partial y_1}{\partial y} > 0$ sii $\frac{\partial S_4(x, y_1)}{\partial x} = y$, $\frac{\partial S_4(x, y_1)}{\partial y_1} = x_1$ y $\frac{\partial^2 S_4}{\partial y_1 \partial x} \neq 0$,

con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, donde cada S_i denota una función generadora definida en una vecindad.

Además debido a lo que mostramos anteriormente para la función generadora S_1 hay una equivalencia entre la existencia de esta función y la del mapeo simpléctico P .

Observamos que la función generadora de la identidad es $S(x_1, y) = x_1 y$.

Capítulo 3

Extensión de un levantamiento simpléctico exacto

El objetivo de este y el siguiente capítulo es construir a partir de un mapeo twist exacto en el anillo A , un Hamiltoniano de periodo 1 en t y x , que a su vez defina un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias tal que su mapeo de Poincaré sea el mapeo twist inicial. Para realizar esta demostración seguimos las ideas que se presentan en [10]. Esta construcción se hará en dos partes, en este capítulo se extenderá el dominio de definición del mapeo twist exacto a \mathbb{R}^2 , para evitar algunos problemas en la definición del Hamiltoniano. Esta extensión deberá continuar siendo twist y exacta. En el siguiente capítulo se usarán técnicas variacionales para definir el Hamiltoniano.

Sea $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ un levantamiento del mapeo twist simpléctico exacto $p : A \rightarrow A$, entonces $P : (x, y) \mapsto (x_1(x, y), y_1(x, y))$ satisface

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y} \frac{\partial y_1}{\partial x} = 1, \\ (ii) \quad & x_1(x+1, y) = x_1(x, y) + 1, y_1(x+1, y) = y_1(x, y), \\ (iii) \quad & y_1(x, y) - y = 0 \text{ para } y = a, b, \\ (iv) \quad & \frac{\partial x_1}{\partial y} > 0. \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

La condición (i) y (ii) garantizan que P es un levantamiento simpléctico, la condición (iii) nos dice que el mapeo P preserva la frontera y la (iv) es la condición twist.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a < b = 0$ y analizaremos únicamente $b = 0$. A partir del lema 2.1 tenemos que $\frac{\partial x_1}{\partial x}(x_1, 0) > 0$, entonces del Teorema 2.3 tenemos que en una vecindad de $b = 0$ existe una función generadora $S(x_1, y) = x_1 y + h(x_1, y)$, tal que

$$x = x_1 + h_y(x_1, y), \quad y_1 = y + h_{x_1}(x_1, y),$$

con $h \in C^\infty$, la cual tiene periodo 1 en x_1 , y se satisface la siguiente proposición.

Proposición 3.1. Sea $S(x_1, y) = x_1 y + h(x_1, y)$ definida de manera que $x_1 \in \mathbb{R}$, $y \in [0, \varepsilon]$ entonces satisface

$$(i) \quad 1 + h_{x_1 y}(x_1, y) > 0,$$

$$(ii) \quad h_{x_1}(x_1, y) = 0,$$

$$(iii) \quad h_{yy}(x_1, y) < 0.$$

Demostración. (i) Observamos que debido a que $\frac{\partial y_1}{\partial x}$ en $y = 0$, entonces P es simpléctico si $\frac{\partial y_1}{\partial y} > 0$, en términos de la función generadora esta condición es equivalente a $1 + h_{x_1 y}(x_1, 0) > 0$.

(ii) Además $h_{x_1} = 0$ para $y = 0$, pues $h_{x_1}(x_1, 0) = y_1(x, 0) - 0$.

(iii) De la definición de $S(x_1, y)$ y las relaciones con sus derivadas parciales tenemos que la condición $\frac{\partial x_1}{\partial y} > 0$ es equivalente a $h_{yy} = -\frac{\partial x_1}{\partial y} < 0$. Por continuidad estas condiciones son validas en una vecindad de radio ε . \square

Nuestra meta es extender $h(x_1, y)$ de manera suave a \mathbb{R}^2 , cuidando que se preserven las propiedades mencionadas en la proposición anterior, y usando la función generadora definir el mapeo P en todo \mathbb{R}^2 .

3.1. Primera extensión de $h(x_1, y)$

En esta sección vamos a extender $h(x_1, y)$ en una franja de la forma $0 < y < \rho$ de manera suave. La expansión formal de Taylor de $h(x_1, y)$ en $y = 0$ es

$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x_1)y^n$ donde $h_n(x_1) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n h(x_1, 0)}{\partial y^n}$; observemos que $h_2(x_1) = \frac{1}{2!} h_{yy} < 0$.

Como consecuencia de la técnica de Borel (cf.[6]), solo hace falta tener que $h(x_1, y)$ sea de clase C^∞ en $y = 0$, es decir no necesitaremos analiticidad. Sea $Z \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función de salto, dada por:

$$Z(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq 0 \\ f(y) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

con $f(y)$ decreciente, entonces $\frac{d^n Z(0)}{dy^n} = \frac{d^n Z(1)}{dy^n} = 0$. La representación gráfica de la función $Z(y)$ se muestra en la Figura 3.1.

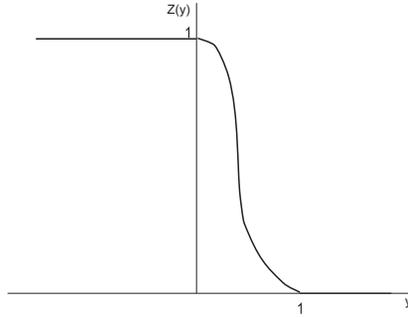


Figura 3.1: Función cut-off $Z(y)$

Lema 3.1. Si $M_n = \max_{\substack{x_1 \\ |m| \leq n}} \{|h_n(x_1)|, |h'_n(x_1)|, |h''_n(x_1)|, |h'''_n(x_1)|, |h_n^{(4)}(x_1)|, \dots, |h_n^{(m)}(x_1)|\}$ entonces $M_n < \infty$.

Demostración. Se sigue directamente del hecho de que $h(x_1)$ es periódica. \square

Sea $\rho > 0$ una constante pequeña, definimos la sucesión:

$$\frac{2^n}{\rho} < \lambda_n = 2^n \rho^{-1} (1 + M_n) < \infty.$$

Lema 3.2. Sea $Z_n(y) = Z(\lambda_n y)$ entonces

$$(i) \quad Z_n(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq 0 \\ f(\lambda_n y) & \text{si } 0 < y < \frac{1}{\lambda_n} \\ 0 & \text{si } y \geq \frac{1}{\lambda_n} \end{cases}$$

(ii) Si $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $yZ_n(y) \leq \frac{1}{\lambda_n}$.

(iii) $\forall \epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall y \geq \epsilon$ se tiene $Z_n(y) = 0$.

Demostración. De la definición de $Z(y)$ se deduce (i).

(ii) Observemos que si $y \geq \frac{1}{\lambda_n}$, $Z_n(y) = Z'_n(y) = Z''_n(y) = 0$, por lo que es suficiente estudiar el intervalo $0 \leq y \leq 1/\lambda_n$. Si $0 \leq y \leq \frac{1}{\lambda_n}$ entonces $0 \leq Z_n(y) = f(\lambda_n y) \leq 1$, y por lo tanto $yZ_n(y) \leq y \leq \frac{1}{\lambda_n}$.

(iii) Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0$, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|\lambda_n| < \epsilon$, por lo tanto para toda $y > \epsilon$ se tiene que $Z_n(y) = 0$. \square

La Figura 3.2 muestra la gráfica de $Z_n(y)$.

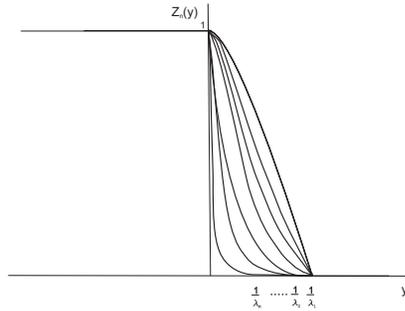


Figura 3.2: Sucesión de funciones $Z_n(y)$

Para $x_1 \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ definimos

$$R(x_1, y) = \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1) y^n Z_n(y) = \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1) y^n Z(\lambda_n y).$$

Teorema 3.1. La función $R(x_1, y)$ tiene las siguientes propiedades:

(i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $y > \varepsilon$ entonces

$$R(x_1, y) = \sum_{n=3}^N h_n(x_1) y^n Z(\lambda_n y),$$

(ii) $R(x_1, 0) = 0$, $\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_1, 0) = \frac{\partial^2 R}{\partial x_1^2}(x_1, 0) = 0$,

(iii) Si $|y| \leq 1$ entonces $|R(x_1, y)| < \frac{\rho y^2}{4}$,

(iv) $|R(x_1, y)|$, $\left| \frac{\partial R}{\partial x_1} \right|$, $\left| \frac{\partial R}{\partial y} \right|$, $\left| \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial y} \right|$, $\left| \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right|$, $\left| \frac{\partial^2 R}{\partial x_1^2} \right| = \mathcal{O}(\rho)$,

(v) $R(x_1, y) \in C^\infty$.

Demostración. Iniciemos por demostrar (i). A partir del inciso (iii) del Lema 3.2 tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $y > \varepsilon$ entonces $Z_n(y) = 0$, por lo que se sigue (i).

Para demostrar (ii) tenemos que $R(x_1, 0) = \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1)(0)Z_n(y) = 0$, además

$$\frac{\partial R}{\partial x_1}(x_1, 0) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{R(x_2, 0) - R(x_1, 0)}{x_2 - x_1} = 0.$$

La demostración del otro caso es similar. Para (iii) tenemos:

$$\begin{aligned} |R(x_1, y)| &= \left| \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1) y^n Z_n(y) \right| \leq \sum_{n=3}^{\infty} |h_n(x_1) y^n Z_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=3}^{\infty} |h_n(x_1)| |y|^{n-1} |y Z_n(y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} |h_n(x_1)| y^{n-1} \lambda_n^{-1} \\
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|h_n(x_1)|}{(1 + \max |h_n(x_1)|)} y^{n-1} \rho 2^{-n} \\
&\leq \rho y^2 \sum_{n=3}^{\infty} 2^{-n} = \rho y^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \rho \left(\frac{y}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ahora para demostrar (iv) consideremos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial R}{\partial x_1} \right| &= \left| \sum_{n=3}^{\infty} h'_n(x_1) y^n Z_n(y) \right| \\
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} |h'_n(x_1) y^{n-1}| |y Z_n(y)| \\
&\leq \sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{h'_n(x_1)}{2^n (1 + M_n)} \right| |y^{n-1}| \rho \\
&\leq y \rho \left(\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Además, dado que $|R(x_1, y)| \leq \rho \left(\frac{y}{2}\right)^2$, entonces $\left| \frac{\partial R}{\partial y} \right| \leq \rho \frac{y}{2}$. Los otros casos se demuestran de manera similar.

Para (v) es suficiente hacer notar que para cada derivada parcial que tomemos de $R(x_1, y)$, podemos encontrar una cota superior M_n , y de esta forma la serie dada por las derivadas de $R(x_1, y)$ será uniformemente convergente. \square

Definimos la primera extensión de $h(x_1, y)$ como:

$$\tilde{h}(x_1, y) = \begin{cases} h(x_1, y) & \text{para } a \leq y \leq 0 \\ \sum_{n=0}^2 h_n(x_1) y^n + R(x_1, y) & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

donde

$$R(x_1, y) = \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1) y^n Z_n(y) = \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1) y^n Z(\lambda_n y).$$

Aplicando el Teorema 3.1 obtenemos que $R(x_1, y) = \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1)y^n Z_n(y)$ tiene un número finito de términos, por lo tanto $\tilde{h}(x_1, y)$ esta bien definida.

Proposición 3.2. La primera extensión $\tilde{h}(x_1, y)$ es C^∞ y satisface $\tilde{h}_{yy} < 0$ y $1 + \tilde{h}_{x_1y} > 0$ para $0 \leq y < \rho$.

Demostración. Si $y \neq 0$ la primera extensión $\tilde{h}(x_1, y)$ es suave. Veamos que pasa con la primera derivada alrededor de $y = 0$, los otros casos se demuestran de forma análoga. Queremos mostrar que

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{h}(x_1, y) - \tilde{h}(x_1, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{h}(x_1, y) - \tilde{h}(x_1, 0)}{y},$$

para la derivada lateral izquierda tenemos

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{h}(x_1, y) - \tilde{h}(x_1, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{h(x_1, y) - h(x_1, 0)}{y} = \frac{\partial h}{\partial y}(x_1, 0) = h_1(x_1),$$

mientras que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{h}(x_1, y) - \tilde{h}(x_1, 0)}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=0}^2 h_n(x_1)y^n + \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1)y^n Z_n(y) - h_0(x_1)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{h_1(x_1)y + h_2(x_1)y^2 + \sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1)y^n Z_n(y)}{y}, \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} h_1(x_1) + h_2(x_1)y + \frac{\sum_{n=3}^{\infty} h_n(x_1)y^n Z_n(y)}{y},$$

por lo tanto

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{h}(x_1, y) - \tilde{h}(x_1, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(h_1(x_1) + h_2(x_1)y + \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^N \rho}{y} \right),$$

lo cual queríamos demostrar. Por lo tanto, si ρ es lo suficientemente pequeña tenemos que $\tilde{h}_{yy} < 0$ y $1 + \tilde{h}_{x_1y} > 0$ para $0 \leq y < \rho$. \square

Corolario 3.1. La extensión $\tilde{h} : \mathbb{R} \times [a, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^2$ define un mapeo twist simpléctico, periódico en x , dado por

$$x = x_1 + \tilde{h}_y(x_1, y), \quad y_1 = y + \tilde{h}_{x_1}(x_1, y),$$

tal que $P^*|_{\mathbb{R} \times [a, 0]} = P$.

3.2. Segunda extensión de $h(x_1, y)$

Para continuar con la extensión para $y > \rho$ reemplazamos el término $h_2(x_1)y^2$ por $\psi(x_1, y) = a(x_1) + b(x_1)y - \frac{c}{2}y^2$, de manera que extendamos suavemente $\tilde{h}(x_1, y)$, para lo cual haremos uso de la siguiente construcción. Escogemos $c > 0$, tal que

$$\gamma(x_1, y) = -\frac{c}{2} + (h_2(x_1) + \frac{c}{2})Z(\frac{y}{\rho}) < 0,$$

para toda $y > 0$. Ver la Figura 3.3.

Sea

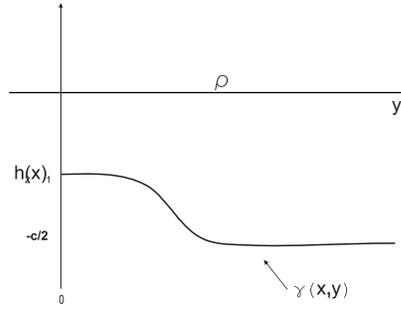


Figura 3.3: Gráfica de $\gamma(x_1, y)$.

$$\begin{aligned} \psi(x_1, y) &= 2 \int_0^y \int_0^{y'} \gamma(x_1, y'') dy'' dy' = 2 \int_0^y \int_{y''}^y \gamma(x_1, y'') dy' dy'' \\ &= 2 \int_0^y \gamma(x_1, y'')(y - y'') dy'' = 2 \int_0^1 \gamma(x_1, sy)(y - sy) y ds \end{aligned}$$

$$= 2y^2 \int_0^1 (1-s)\gamma(x_1, sy)ds$$

donde

$$s = \frac{y''}{y}, \quad ds = \frac{dy''}{y}, \quad dy'' = yds.$$

Luego tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3. La función $\psi(x_1, y)$ satisface:

$$(i) \quad \begin{aligned} \psi(x_1, y) &= h_2(x_1)y^2 + \mathcal{O}(\rho), \text{ para } y \gtrsim 0, \\ \psi(x_1, y) &= a(x_1) + b(x_1)y - \frac{c}{2}y^2, \text{ para } y > \rho, \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \psi_{yy} = 2\gamma < 0,$$

$$(iii) \quad \psi_{x_1y} = \mathcal{O}(\rho).$$

Demostración. (i) Dado que

$$\psi(x_1, y) = 2y^2 \int_0^1 (1-s)\gamma(x_1, sy)ds,$$

además

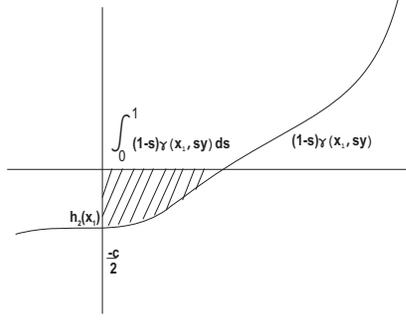
$$(1-s)\gamma(x_1, sy) = \begin{cases} \gamma(x_1, 0) = h_2(x_1) & \text{si } s = 0 \\ k\gamma(x_1, sy) & \text{si } 0 < s \leq 1 \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(x_1, sy) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{c}{2} + \frac{c}{2}Z\left(\frac{sy}{\rho}\right) + h_2(x_1)Z\left(\frac{sy}{\rho}\right) \approx h_2(x_1) + \mathcal{O}(\rho)$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(x_1, y) &\approx 2y^2 \int_0^y (1-s)\gamma(x_1, sy)ds \approx 2y^2 \int_0^y (1-s)h_2(x_1)ds \\ &\approx 2y^2 h_2(x_1) \int_0^y (1-s)ds \\ &\approx 2y^2 h_2(x_1) \left[s - \frac{s^2}{2} \right]_0^y \approx y^2 h_2(x_1), \end{aligned}$$

Figura 3.4: Área bajo $(1 - s)\gamma(x, sy)$

de donde

$$\psi(x_1, y) = y^2 h_2(x_1) + \mathcal{O}(\rho).$$

Además si $y > \rho$, por hipótesis tenemos $\psi(x_1, y) = a(x_1) + b(x_1)y - \frac{c}{2}y^2$.

(ii) Ya que

$$\psi(x_1, y) = 2 \int_0^y \int_0^{y'} \gamma(x, y'') dy'' dy', \quad \text{entonces} \quad \psi_y(x_1, y) = 2 \int_0^y \gamma(x_1, y') dy',$$

por lo tanto

$$\psi_{yy}(x_1, y) = 2\gamma(x_1, y).$$

(iii) Sabemos que

$$\psi_y(x_1, y) = 2 \int_0^y \gamma(x_1, y') dy' = 2 \int_0^y \left(-\frac{c}{2} + (h_2(x_1) + \frac{c}{2})Z\left(\frac{y'}{\rho}\right) \right) dy',$$

$$\psi_{yx_1}(x_1, y) = 2 \int_0^y h_2'(x_1) Z\left(\frac{y'}{\rho}\right) dy' = 2h_2'(x_1) \int_0^y Z\left(\frac{y'}{\rho}\right) dy'.$$

Si tomamos

$$v = \frac{y'}{\rho}, \quad dv = \frac{dy'}{\rho},$$

concluimos que

$$\psi_{yx_1}(x_1, y) = 2h_2'(x_1) \int_0^{\frac{y}{\rho}} Z(v) \rho dv = 2h_2'(x_1) \rho \int_0^{\frac{y}{\rho}} Z(v) dv,$$

y por lo tanto

$$|2h_2'(x_1)\rho \int_0^{\frac{y}{\rho}} Z(v)dv| < K\rho.$$

□

Luego la extensión queda determinada como sigue:

$$h^*(x_1, y) = \begin{cases} h_0(x_1) + h_1(x_1)y + h_2(x_1)y^2 + R(x_1, y) & \text{si } 0 < y < \rho \\ h_0^*(x_1) + h_1^*(x_1)y - \frac{c}{2}y^2 + R(x_1, y) & \text{si } y > \rho. \end{cases}$$

Proposición 3.4. La extensión $h^*(x_1, y) \in C^\infty$ satisface

- (i) $h_{yy}^* < 0$, además si $y > \rho$ entonces $h_{yy}^* = -c + R_{yy} < 0$,
- (ii) $1 + h_{x_1y}^* > 0$

Demostración. Para toda $y > 0$ se cumple

$$1 + h_{x_1y}^* = 1 + h_1'(x_1) + \mathcal{O}(\rho) > 0.$$

Si $0 < y < \rho$ entonces

$$h_{yy}^* = \psi_{yy} + R_{yy} < 0,$$

mientras que si $y > \rho$

$$h_{yy}^* = -c + R_{yy} < 0.$$

□

Corolario 3.2. La extensión $\tilde{h} : \mathbb{R} \times [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$ define un mapeo twist simpléctico, periódico en x , dado por

$$x = x_1 + h_y^*(x_1, y) \quad y_1 = y + h_{x_1}^*(x_1, y),$$

tal que $P^*|_{\mathbb{R} \times [a, 0]} = P$.

3.3. Tercera y cuarta extensión de $h(x_1, y)$

Ahora modificamos la extensión $h^*(x_1, y)$ para que el mapeo preserve $y = a'$ con constantes a' lo suficientemente grandes, reemplazamos h^* para $y > \rho$ por

$$h^*(x_1, y) = h_0^*(x_1) + h_1^*(x_1)\xi(y) - \frac{\varepsilon}{2}y^2, \quad \xi(y) = \int_0^y Z(\varepsilon(y' - \rho))dy'.$$

Si $y > \rho + \varepsilon^{-1}$ entonces $\xi(y) = 0$. Sea $\sigma = \varepsilon^2$ una constante pequeña. Sea

$$\widehat{h}(x_1, y) = h^*(x_1, y) + (Z(\sigma(y - \rho)) - 1)(h^*(x_1, y) + \frac{c}{2}y^2).$$

Proposición 3.5. El mapeo $\widehat{h}(x_1, y)$ satisface

- (i) $\widehat{h}(x_1, y) = h(x_1, y)$ si $a \leq y \leq 0$
- (ii) $1 + \widehat{h}_{x_1y} > 0$, $\widehat{h}_{yy} < 0$
- (iii) Si $y \geq \rho + \sigma^{-1}$ entonces $P(x, y) = (x + cy, y)$
- (iv) Si $y \geq \rho + \sigma^{-1}$ entonces $\widehat{h}_{yy} = -c$.

Demostración.

(i) Se sigue de la definición de $\widehat{h}(x_1, y)$.

(ii)

$$1 + \widehat{h}_{x_1y} = 1 + Zh_{x_1y}^* + \mathcal{O}(\varepsilon) = 1 + h_1'(x_1)Z\xi' + \mathcal{O}(\rho) + \mathcal{O}(\varepsilon) > 0,$$

$$\widehat{h}_{yy} = Zh_{yy}^* + (Z - 1)c + \mathcal{O}(\sigma) < 0,$$

para toda $y > 0$, siempre y cuando $\rho, \sigma = \varepsilon^2$ son lo suficientemente pequeñas. Luego, si $y \geq \rho + \sigma^{-1}$ entonces

$$\widehat{h}_y = -cy, \quad \widehat{h}_{yy} = -c.$$

□

Por lo tanto la extensión en el semiplano superior está definida por

$$\widehat{h}(x_1, y) = \begin{cases} h_0(x_1) + h_1(x_1)y + \psi(x_1, y) + R(x_1, y) & \text{si } 0 < y \leq \rho, \\ h^*(x_1, y) + (Z(\sigma(y - \rho)) - 1)(h^*(x_1, y) + \frac{c}{2}y^2) & \text{si } \rho < y < \rho + \sigma^{-1}, \\ -\frac{c}{2}y^2 & \text{si } y \geq \rho + \sigma^{-1}. \end{cases}$$

Corolario 3.3. La extensión $\widehat{h} : \mathbb{R} \times [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ define un mapeo twist simpléctico, periódico en x , que preserva los círculos $y = a'$, dado por

$$x = x_1 + \widehat{h}_y(x_1, y), \quad y_1 = y + \widehat{h}_{x_1}(x_1, y),$$

tal que $\widehat{P}|_{\mathbb{R} \times [\rho + \sigma^{-1}, \infty)} = (x + cy, y)$.

Con este corolario hemos obtenido la extensión del mapeo P al semiplano superior; de forma análoga se demuestra que el mapeo P se puede extender al semiplano inferior de \mathbb{R}^2 . Luego tenemos que el mapeo P está definido en todo \mathbb{R}^2 . Observamos que debido a las relaciones de la función generadora $S(x_1, y)$ tenemos que $\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{-h_{yy}}{1+h_{yx_1}}$, es decir $\frac{\partial x_1}{\partial y} > 0$ por lo que tenemos la condición del Teorema 2.1 para pasar de la función generadora $S(x_1, y)$ a la función $S(x, x_1)$. Al escribir P en términos de una función generadora $S(x, x_1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, tenemos

$$y = -S_x(x, x_1), \quad y_1 = S_{x_1}(x, x_1),$$

donde $-S_x(x, \cdot)$ es la función inversa de $f(x, \cdot)$. Debido a la condición twist sobre P , tenemos que

$$\delta \leq f_y(x, y) \leq \delta^{-1},$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ donde $\delta > 0$ es una constante fija. Por lo tanto

$$\delta \leq -S_{xx_1} \leq \delta^{-1},$$

y de el Teorema 2.1 tenemos que la periodicidad de la función generadora está dada por

$$S(x + 1, x_1 + 1) = S(x, x_1).$$

Capítulo 4

Cálculo de Variaciones

El problema que nos ocupa en este Capítulo es construir a partir de un mapeo twist definido en \mathbb{R}^2 , un Hamiltoniano periódico en el tiempo, tal que su sección de Poincaré sea el mapeo twist original. Para llevar a cabo la construcción usaremos la dualidad que existe entre los problemas Hamiltonianos y Lagrangianos. Usaremos funciones generadoras para representar el mapeo simpléctico, y las usaremos en términos de las coordenadas (x, x_1) .

4.1. Preliminares de cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones se ocupa de encontrar las funciones $x(t)$ que minimizan o maximizan un funcional $Q(x)$. La siguiente proposición nos dice como encontrar tales extremales para $Q(x)$ en un espacio de funciones.

Proposición 4.1. Sea $Q : \mathcal{C}^2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional dado por

$$Q(x) = \int_0^1 L(t, x, \dot{x}) dt,$$

donde las derivadas parciales de L con respecto a t, x, \dot{x} son continuas. Decimos que $x \in \mathcal{C}^2[0, 1]$ con $x_0 = x(0)$ y $x_1 = x(1)$ es un extremo de Q si satisface

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (4.1.1)$$

para toda $t \in [0, 1]$. Esta relación se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange.

Para construir el Hamiltoniano haremos uso de la transformación de Legendre que nos da una relación entre el funcional $L(t, x, \dot{x})$ y el Hamiltoniano $H(t, x, y)$ ¹.

Definición 4.1. Sean $L(t, x, \dot{x})$ lagrangiano, $z = \dot{x}$, $y = L_z(t, x, z)$ de manera que $L_{zz}(t, x, z) \neq 0$. Entonces definimos la transformada de Legendre como

$$H(t, x, y) = yz - L(t, x, z), \quad (4.1.2)$$

donde la variable y está dada implícitamente por medio de

$$y = L_z(t, x, z). \quad (4.1.3)$$

Es importante hacer notar que esta transformación es una involución, es decir, una función cuya inversa es ella misma, si $H_y = z + y \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, entonces al aplicar la transformada de Legendre a $H_y = z$ tenemos $zy - yz + L(t, x, z) = L(t, x, z)$.

Desde otro punto de vista, observamos que al derivar la función

$$-H(t, x, y) + yz$$

con respecto a y , tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y}(-H(t, x, y) + yz) = -H_y + z = 0,$$

es decir, si se satisface la condición $H_y = z$, entonces $L(t, x, z)$ es un extremo de la función $-H(t, x, y) + yz$, además si

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}[-H(t, x, y) + yz] = -H_{yy} < 0,$$

¹En la literatura el Hamiltoniano está en términos de las variables (t, q, p) , como nosotros usamos la variable p para denotar el mapeo simpléctico ponemos a H en términos de las variables (t, x, y) .

tenemos que

$$L(t, x, z) = \underset{y}{\text{máx}}[-H(t, x, y) + yz].$$

Por otro lado, de la transformación de Legendre y la ecuación de Euler-Lagrange tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{y}, \quad H(t, x, y) = y\dot{x} - L(t, x, \dot{x}),$$

entonces

$$H_x = -L_x = -\dot{y}, \quad H_y = \dot{x},$$

las cuales son las ecuaciones Hamiltonianas. El cálculo variacional nos brinda una técnica para pasar de un espacio fase a otro en los sistemas Hamiltonianos.

Definición 4.2. Dados Q, \tilde{Q} funcionales, decimos que son variacionalmente equivalentes si generan el mismo conjunto de extremos.

Los mapeos simplécticos nos brindan una conexión entre los sistemas Hamiltonianos asociados a distintos espacios de fase. Consideremos

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y}; \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_1} = \dot{x}_1, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} = -\dot{y}_1.$$

dos sistemas Hamiltonianos. Luego podemos asociar las soluciones de estos sistemas a los extremos de los funcionales

$$Q(x) = \int_0^1 L(t, x, \dot{x})dt, \quad Q(x_1) = \int_0^1 \bar{L}(t, x_1, \dot{x}_1)dt.$$

Ya que

$$Q(x) = \int_0^1 y\dot{x} - H(t, x, y)dt, \quad Q(x_1) = \int_0^1 y_1\dot{x}_1 - \bar{H}(t, x_1, y_1).$$

Además dos funcionales son variacionalmente equivalentes si sus integrandos difieren por un diferencial. Sea

$$y\dot{x} - H(t, x, y) = y_1\dot{x}_1 - \bar{H}(t, x_1, y_1) + \frac{d}{dt}S(t, x, x_1),$$

donde S es la función generadora de un mapeo simpléctico. Luego

$$\frac{d}{dt}S(t, x, x_1) = y\dot{x} - y_1\dot{x}_1 + \bar{H}(t, x_1, y_1) - H(t, x, y).$$

A partir de la derivada

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial S}{\partial x_1} \dot{x}_1 \right) + \frac{\partial S}{\partial t},$$

y como

$$y = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad y_1 = -\frac{\partial S}{\partial x_1},$$

obtenemos

$$\bar{H}(t, x_1, y_1) = H(t, x, y) + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Con esto tenemos una transformación que nos permite pasar de un espacio de fases a otro. Y también nos da una relación entre la función generadora y los espacios de fase. Por otro lado si tenemos

$$\bar{S} = S + \text{const.}$$

entonces

$$\bar{H} = H(t, x, y) + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = H(t, x, y) + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

por lo tanto

$$\bar{H} = 0.$$

4.2. Construcción del Hamiltoniano

Comenzamos determinando condiciones sobre el lagrangiano para que se satisfagan las condiciones de frontera que requerimos para la construcción del Hamiltoniano. Primero pedimos que la trayectoria que une las condiciones $x(0) = x_0$ y $x(1) = x_1$ sea lineal, para simplificar el trabajo. La siguiente condición que imponemos es que el lagrangiano coincida con la función generadora, para que el mapeo de Poincaré coincida con el mapeo twist inicial $P(x, y) = (x_1, y_1)$ en los extremos.

Proposición 4.2. Si $L(t, x, \dot{x})$ satisface

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x} \right) L_z = L_x,$$

entonces las líneas rectas $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$, son extremos del funcional

$$Q(x_0, x_1) = \int_0^1 L(t, x, \dot{x}) dt.$$

Demostración. De la ecuación de Euler-Lagrange, $x(t)$ es un extremo si se cumple

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Sea $z = \dot{x}$ entonces

$$\frac{d}{dt} (L_z(t, x, z)) = \frac{\partial L}{\partial x},$$

es decir

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} + \frac{\partial L_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial L_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x},$$

por lo tanto

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} + z \frac{\partial L_z}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x},$$

luego $x(t)$ es un extremo si $L(t, x(t), \dot{x}(t))$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x} \right) L_z = L_x. \tag{4.2.1}$$

□

Hasta este momento hemos encontrado la ecuación diferencial parcial que el lagrangiano debe satisfacer para que la trayectoria que une las condiciones sea la recta que propusimos. Al resolver dicha ecuación y definir esta solución en términos de la función generadora, obtendremos los resultados que buscamos.

Proposición 4.3. La función $L(t, x, z)$ es de la forma

$$L(t, x, z) = L_0(t, x, z) + z m_x(t, x) + m_t(t, x),$$

donde

$$L_0(t, x, z) = - \int_0^z (z - z') S_{x_0 x_1}(x - z't, x + z'(1 - t)) dz',$$

y

$$m(t, x) = (1 - t)u(x) - tv(x).$$

Demostración. Derivando con respecto a z la ecuación (4.2.1), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} L_z + z \frac{\partial}{\partial x} L_z \right) = \frac{\partial}{\partial z} L_x,$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{zz} + z \frac{\partial}{\partial x} L_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} L_z = \frac{\partial}{\partial z} L_x.$$

Luego obtenemos la ecuación diferencial parcial

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x} \right) L_{zz} = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial L_{zz}(t, x, z)}{\partial t} + z \frac{\partial L_{zz}(t, x, z)}{\partial x} = 0. \quad (4.2.2)$$

Resolviendo (4.2.2) por el método de las ecuaciones características

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = z,$$

entonces

$$t = s, \quad x = zs + c,$$

por lo tanto

$$L_{zz}(t, x, z) = G(x - zt, z). \quad (4.2.3)$$

Sea $G(x, z) = -S_{x_0 x_1}(x, x + z) > 0$, por lo tanto $G(x - zt, z) = -S_{x_0 x_1}(x - zt, x + z(1 - t)) > 0$, además $L_{zz}(t, x, z) = -S_{x_0 x_1}(x - zt, x + z(1 - t))$.

Integrando (4.2.3)

$$\int_0^{z''} L_{zz}(t, x, z) dz' = - \int_0^{z''} S_{x_0 x_1}(x - z't, x + z'(1 - t)) dz',$$

luego

$$L_z(t, x, z) = - \int_0^{z''} S_{x_0x_1}(x - z't, x + z'(1-t)) dz' + m_x(t, x),$$

es decir

$$L(t, x, z) = - \int_0^z \int_0^{z''} S_{x_0x_1}(x - z't, x + z'(1-t)) dz' dz'' + zm_x(t, x) + m_t(t, x).$$

De donde

$$L(t, x, z) = - \int_0^z \int_{z'}^z S_{x_0x_1}(x - z't, x + z'(1-t)) dz'' dz' + zm_x(t, x) + m_t(t, x).$$

Por lo tanto

$$L(t, x, z) = L_0(t, x, z) + zm_x(t, x) + m_t(t, x),$$

donde

$$L_0(t, x, z) = - \int_0^z (z - z') S_{x_0x_1}(x - z't, x + z'(1-t)) dz',$$

$$m(t, x) = (1-t)u(x) - tv(x).$$

□

Ahora verifiquemos que el difeomorfismo P obtenido en el Capítulo 3, se ve como el mapeo de Poincaré de un sistema Hamiltoniano que es periódico en x y que satisface la condición de Legendre.

Teorema 4.1. Sea P un mapeo twist monótono de \mathbb{R}^2 en sí mismo, con una función generadora $S(x, x_1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, que satisface:

- (i) $\delta \leq -S_{xx_1} \leq \delta^{-1}$
- (ii) $S(x+1, x_1+1) = S(x, x_1)$

Entonces $P(x, y)$ es el mapeo de Poincaré de un sistema Hamiltoniano suave, esto es, existe una función Hamiltoniana $H = H(t, x, y) \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$ con las siguientes propiedades:

- (i) $0 < \delta \leq H_{yy} \leq \delta^{-1}$
(ii) $H(t, x, y) = H(t, x + 1, y)$
(iii) Si $\varphi(t, x, y)$ es el flujo del sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = H_y(t, x, y), \quad \dot{y} = -H_x(t, x, y), \quad (4.2.4)$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, entonces $\varphi(1, x_0, y_0) = P(x_0, y_0)$.

Demostración. Dados

$$Q(x_0, x_1) = \int_0^1 L(t, x(t), z) dt, \quad z = \dot{x}(t),$$

un funcional, y las condiciones de frontera $x(0) = x_0$ y $x(1) = x_1$, luego obtenemos que la trayectoria que minimiza la distancia entre ellas es una línea recta. El lema anterior nos proporciona la condición sobre $L(t, x, z)$ para que los extremos del funcional sean líneas rectas que unen estos puntos. Luego el funcional $L(t, x, \dot{x})$ está dado por

$$L(t, x, z) = L_0(t, x, z) + z m_x(t, x) + m_t(t, x),$$

donde

$$L_0(t, x, z) = - \int_0^z (z - z') S_{x_0 x_1}(x - z't, x + z'(1 - t)) dz',$$

$$m(t, x) = (1 - t)u(x) - tv(x).$$

Evaluando $m(t, x)$ en $t = 0, 1$ tenemos

$$m(0, x_0) = u(x_0), \quad m(1, x_1) = -v(x_1).$$

El extremo del funcional está dado por

$$Q(x_0, x_1) = Q_0(x_0, x_1) + m(1, x_1) - m(0, x_0),$$

donde Q_0 es el extremo integral de L_0 . Y además se satisfacen las relaciones

$$Q_{x_0} = -L_z(0, x_0, x_1 - x_0), \quad Q_{x_1} = L_z(1, x_1, x_1 - x_0), \quad Q_{x_0 x_1} = -L_{zz}(0, x_0, x_1 - x_0). \quad (4.2.5)$$

Pues

$$Q_{x_0} = \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} dt,$$

y debido a la ecuación de Euler- Lagrange (4.1.1) tenemos

$$Q_{x_0} = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial x}{\partial x_0} dt + \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} dt,$$

Al integrar por partes la segunda integral de esta ecuación obtenemos

$$Q_{x_0} = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial x}{\partial x_0} dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial x_0},$$

es decir

$$Q_{x_0} = -L_z(0, x_0, x_1 - x_0).$$

Además

$$Q_{x_0 x_1} = - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_1} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) \Big|_0^1,$$

entonces

$$Q_{x_0 x_1} = -L_{zz}(0, x_0, x_1 - x_0).$$

De la tercera condición de (4.2.5) tenemos que

$$Q_0 = S + u(x_0) + v(x_1), \tag{4.2.6}$$

entonces $Q = S$. Por lo tanto

$$Q_{x_0} = -S_{x_0}, \quad Q_{x_1} = S_{x_1}, \quad Q_{x_0 x_1} = S_{x_0 x_1},$$

de la definición de $m(t, x)$ y de la ecuación (4.2.6) tenemos que

$$m_x(t, x) = -(1-t)S_{x_0}(x, x) + tS_{x_1}(x, x), \quad m_t(t, x) = S(x, x).$$

Luego obtenemos que m_x , m_t y $Q(t, x, z)$ tienen periodo 1 en x . De la condición twist tenemos

$$L_{zz}(t, x, z) = -S_{x_0 x_1}(x - zt, x + z(1-t)) > 0.$$

Ahora aplicamos la transformación de Legendre y tenemos

$$H(t, x, y) = yz + L_0 + z((t-1)S_{x_0}(x, x) + tS_{x_1}(x, x)) + S(x, x),$$

donde

$$L_0 = \int_0^z (z - z') S_{x_0 x_1}(x - z't, x + z'(1 - t)) dz',$$

$$y = - \int_0^{z''} S_{x_0 x_1}(x - z't, x + z'(1 - t)) dz' + t S_{x_1}(x, x) - (1 - t) S_{x_0}(x, x),$$

donde z es una función que depende de y . Debido a que $\delta \leq -S_{x x_1} \leq \delta^{-1}$ y $L_{zz} = -S_{x_0 x_1}$, tenemos:

$$0 < \delta \leq L_{zz} \leq \delta^{-1},$$

además de la ecuación (4.1.2)

$$H_y = z_y y + z - L_z z_y \quad \text{entonces} \quad H_y = z$$

por lo que

$$H_{yy} = z_y$$

y de la ecuación (4.1.3)

$$L_{zz} z_y = 1$$

de donde $H_{yy} \cdot L_{zz} = 1$, por lo tanto

$$0 < \delta \leq H_{yy} \leq \delta^{-1}.$$

Debido a la periodicidad de $S(x, x_1)$ el Hamiltoniano $H(t, x, y)$ es periódico en x de periodo 1.

Finalmente tenemos

$$H_x = -L_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{d}{dt} y,$$

pues $L_z = S_x$, además $H_y = \dot{x}$, y debido a las restricciones en las condiciones de frontera sobre el funcional concluimos que para $t = 1$ el flujo está dado por $\varphi_1 = P(x_0, y_0)$. \square

4.3. Extensión periódica del Hamiltoniano

En la sección anterior construimos un Hamiltoniano $H(t, x, y)$ periódico en x , y que satisface la condición de Legendre. Ahora a partir de la función generadora $S(x, x_1)$ con la restricción de que $0 \leq t \leq 1$. Extenderemos H para todo $t \in \mathbb{R}$ a todos los reales y bajo la condición de que $H(t, x, y)$, sea periódico en t , y que preserve las curvas $y = a$, y $y = b$, además que satisfaga la condición de Legendre.

Teorema 4.2. Dado el mapeo twist P , monótono de clase C^∞ que cumple las propiedades (i) a (iv) de (3.0.1), entonces existe una función Hamiltoniana $H = H(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{A})$ con

- (i) $H(t + 1, x, y) = H(t, x, y) = H(t, x + 1, y)$
- (ii) $H_x(t, x, y) = 0$ para $y = a, b$
- (iii) $H_{yy} > 0$
- (iv) Si φ_t es el flujo del sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = H_y(t, x, y), \quad \dot{y} = -H_x(t, x, y),$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, entonces $\varphi_t(1, x_0, y_0) = P(x_0, y_0)$.

Demostración.

Sea P un mapeo twist, que cumple las propiedades (i) a (iv) de (3.0.1) dado por:

$$f(x, y) = x + cy, \quad g(x, y) = y,$$

es decir, $P(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ para $|y|$ grande. Ya que

$$y = -S_x(x, x_1), \quad y_1 = S_{x_1}(x, x_1),$$

entonces

$$-S_x = \frac{x_1 - x}{c} \quad S_{x_1} = \frac{x_1 - x}{c},$$

por lo tanto

$$S(x, x_1) = \frac{1}{2c}(x_1 - x)^2 + \text{const.}$$

donde const para $\pm(x_1 - x)$ no es necesariamente la misma. Haciendo uso de las ecuaciones concluimos que

$$S_{x_0 x_1} = \frac{-1}{c}, \quad S_{x_0}(x, x) = 0, \quad S_{x_1}(x, x) = 0$$

$$S(x, x) = 0, \quad m_x = 0, \quad m_t = 0.$$

Luego

$$L_0 = - \int_0^z (z - z') \left(\frac{-1}{c} \right) dz',$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^z \left(-\frac{z'}{c} + \frac{z}{c}\right) dz', \\
&= \frac{z^2}{2c} + \text{const.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $L = \frac{z^2}{2c} + \text{const.}$ Además

$$y = L_z(t, x, z), \quad H(t, x, y) = yz - L(t, x, z),$$

entonces

$$H = ycy - \frac{y^2}{2c} + \text{const.}$$

es decir

$$H = \frac{c}{2}y^2 + \text{const.}$$

Definimos periódicamente el Hamiltoniano $H(t, x, y)$ en $t \in [0, 1)$ al poner $L(t, x, z) = L(t - j, x, z)$ con un entero $j \in [t, t + 1)$. Dadas estas consideraciones, las funciones L, H y el campo de vectores no son necesariamente continuos en $t \in \mathbb{Z}$. Luego debemos reparar estas discontinuidades no esenciales, para que el flujo de el sistema dado por H sea continuo en $t \in \mathbb{R}$.

Iniciemos por reemplazar L y H por funciones suaves \tilde{L}, \tilde{H} , donde el Hamiltoniano \tilde{H} sea t -periódico y satisfaga la condición de Legendre, y el flujo $\tilde{\varphi}_t$ coincida con φ_t en $t = 0$ y $t = 1$; y sea el mapeo de Poincaré de este sistema.

Sabemos que el flujo asociado a el Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}y^2$ está definido por $\varsigma^s : (x, y) \mapsto (x + sy, y)$. Consideremos

$$\varphi_1 = \varsigma^{-\varepsilon} \circ P \circ \varsigma^{-\varepsilon},$$

para $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, el cual es un mapeo twist monótono para ε pequeño. Aplicando el Teorema 4.1 a φ_1 obtenemos un flujo φ_τ con $0 \leq \tau \leq 1$ donde $\varphi_\tau = id$, φ_1 para $\tau = 0, 1$, respectivamente. Definimos

$$\chi_t = \begin{cases} \varsigma^t & \text{si } 0 \leq t < \varepsilon \\ \varphi_\tau \circ \varsigma^\varepsilon & \text{si } \tau = (t - \varepsilon)/(1 - 2\varepsilon), \varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon \\ \varsigma^{t-1} \circ P & \text{si } 1 - \varepsilon < t \leq 1 \end{cases}$$

el cual es continuo para $t \in [0, 1]$ e intercambia $\chi_0 = id$ y $\chi_1 = P$. Más aún, χ_t es suave excepto en $t = \varepsilon, 1 - \varepsilon$. El flujo χ_t está definido como se muestra en la Figura 4.1 El Hamiltoniano asociado a este flujo está dado por

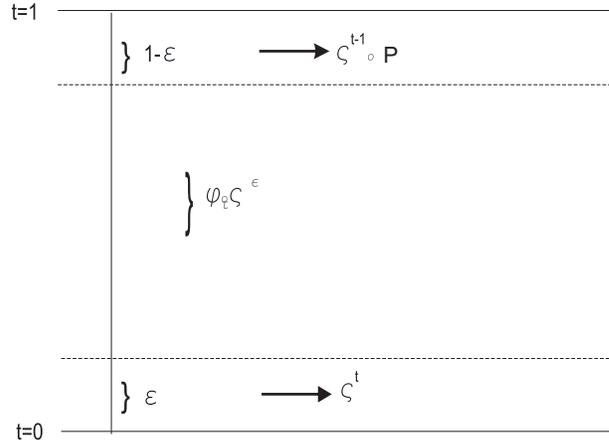


Figura 4.1: Regiones de definición de χ_t

$$\widehat{H} = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2 & \text{si } t \in [0, \varepsilon) \text{ y } t \in (1 - \varepsilon, 1) \\ \frac{1}{1-2\varepsilon}H(\tau, x, y) & \text{si } \tau = (t - \varepsilon)/(1 - 2\varepsilon), t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \end{cases}$$

Para $|y|$ grande tenemos $\widehat{H} = \frac{1}{2}y^2 + const.$ Este Hamiltoniano es suave a trozos y si escogemos $c = 1 - 2\varepsilon$, de manera que $\widehat{H}_x, \widehat{H}_y - y$ sean diferentes de cero en el compacto $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, además $\widehat{H}_{yy} > 0$. El Hamiltoniano \widehat{H} está definido como se muestra en la Figura 4.2. El Hamiltoniano tiene discontinuidades en $t = \varepsilon$ y $t = 1 - \varepsilon$; luego para removerlas tendremos que modificar el Hamiltoniano en estos puntos. Iniciemos por aproximar \widehat{H} por la función Hamiltoniana H^* la cual es suave e imponemos la condición $H^*_{yy} > 0$. Después cambiamos el flujo φ_t^* fuera de un intervalo cercano a $t = \varepsilon$ por el flujo $\tilde{\varphi}_t$ que coincide con φ_t . Con las adecuadas aproximaciones buscamos que el Hamiltoniano \tilde{H} que genera el flujo $\tilde{\varphi}$ satisfaga la condición de Legendre.

Para suavizar \tilde{H} cerca de $t = \varepsilon$ para $0 < \rho < \varepsilon$ tomamos

$$H^*(t, x, y) = \widehat{H} * \eta_\rho = \rho^{-1} \int_0^\rho \widehat{H}(t - \tau, x, y) \eta(\rho^{-1}(\tau)) d\tau,$$

$$\eta_\rho = \rho^{-1} \eta(\rho^{-1}\tau),$$

donde $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}), 0 \leq \eta \leq 1, \eta(s) = 0$ para $|s| \geq 1$, y

$$\int \eta(s) ds = 1.$$

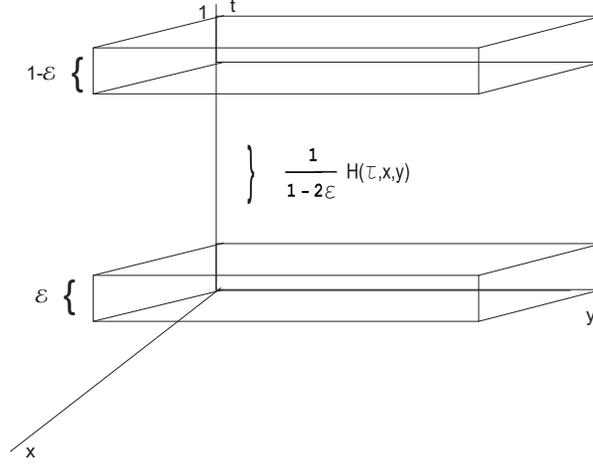


Figura 4.2: Regiones de definición de \widehat{H}

Observamos que si $t \geq \rho$ entonces $\eta_\rho = 0$, además si $t < \varepsilon - \rho$ entonces $\eta_\rho \approx 1$, de manera que H^* es C^∞ para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ y $H^* = \widehat{H}$ para $t < \varepsilon - \rho$ (cf.[6]). Además, como $\eta \geq 0$ tenemos $H_{yy}^* > 0$.

Sea $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ con $D^\ell = \frac{\partial \ell_1}{\partial x} \frac{\partial \ell_2}{\partial y}$ donde $D^\ell \widehat{H}$ es suave a trozos en t , entonces

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |D^\ell(H^* - \widehat{H})| dt \leq \int_0^\rho |D^\ell(H^* - \widehat{H})| dt + \int_\rho^{\frac{1}{2}} |D^\ell(H^* - \widehat{H})| dt$$

y tenemos

$$\leq \int_{|\tau| < \rho} |D^\ell(\widehat{H}(t - \tau, x, y) - \widehat{H}(t, x, y))| dt \leq c_1 \sup_{|\tau| < \rho} \int |D^\ell(\widehat{H}(t - \tau, x, y) - \widehat{H}(t, x, y))| dt$$

por lo cual

$$\leq c_1 \sup_{|\tau| < \rho} \int |D^\ell(\widehat{H}(t - \tau, x, y) - \widehat{H}(t, x, y))| dt \leq C_\ell \rho.$$

También se cumple

$$\sup_{|t - \varepsilon| \geq \rho} |D^\ell(H^* - \widehat{H})| \leq c_2 \sup_{|\tau| < \rho} |D^\ell(\widehat{H}(t - \tau, x, y) - \widehat{H}(t, x, y))| \geq C_\ell \rho. \quad (4.3.1)$$

para $|t - \varepsilon| \geq \rho$. Como $H^* - \widehat{H}$ tienen soporte compacto en $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, entonces estas estimaciones son uniformes en x, y . Sea φ_t^* el flujo determinado por H^* , del Teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene

$$|\varphi_t^* - \chi_t|_m \leq c_3 \int_0^{\frac{1}{2}} |H^* - \widehat{H}|_{m+1} dt = O(\rho), \quad (4.3.2)$$

para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, donde la norma para $H = H(t, x, y)$ está definida por

$$|H|_m = \sup_{x, y} \sum_{|\ell| \leq m} |D^\ell H| \quad |\ell| = \ell_1 + \ell_2.$$

Luego, de la ecuación diferencial y (4.3.1), al derivar con respecto a t la ecuación (4.3.2) se obtiene

$$|\partial_t(\varphi_t^* - \chi_t)|_m \leq c_4 |H^* - \widehat{H}|_{m+1} = O(\rho), \quad (4.3.3)$$

para $|t - \varepsilon| \geq \rho$. Además $\varphi_t^* = \chi_t$ para $0 \leq t < \varepsilon - \rho$.

Por lo tanto φ_t^* para $t > t_2 > \varepsilon$ coincide con χ_t . Para verificar que φ_t^* preserva las condiciones que requerimos, representamos χ_t, φ_t^* con funciones generadoras $x_1 y + \widehat{h}(t, x_1, y), x_1 y + h^*(t, x_1, y)$, de manera que \widehat{h}, h^* tienen periodo 1 en x_1 . Para ε lo suficientemente pequeña los mapeos χ_t, φ_t^* son casi la identidad entonces representamos estos mapeos con las funciones generadoras, de tal forma que de las ecuaciones (4.3.2) y (4.3.3) tenemos

$$|h^* - \widehat{h}|_m = O(\rho) \quad t \leq 2\varepsilon,$$

$$|\partial_t(h^* - \widehat{h})|_m = O(\rho) \quad \varepsilon + \rho \leq t \leq 2\varepsilon.$$

Para $0 < t < \varepsilon - \rho$ se tiene $h^* = \widehat{h}$. Además para $\varepsilon < t_1 < t_2 < 2\varepsilon$ usamos la función $\Phi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\Phi = 1$ para $t < t_1$ y $\Phi = 0$ para $t > t_2$ y definimos

$$\widetilde{h} = (1 - \Phi)\widehat{h} + \Phi h^*,$$

donde $\widetilde{h} = h^*$ para $t < t_1$ y $\widetilde{h} = \widehat{h}$ para $t > t_2$. También $\widetilde{h} = \widehat{h}$ para $0 < t < \varepsilon - \rho$, por lo tanto el flujo $\widetilde{\varphi}_t$ definido por \widetilde{h} es suave en $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ y coincide con χ_t cerca de los extremos. Ahora solo nos queda verificar que el Hamiltoniano \widetilde{H} correspondiente a $\widetilde{\varphi}_t$ satisface la condición de Legendre.

Sea $(x, y) \rightarrow (x' = x(t), y' = y(t))$ el flujo definido por el Hamiltoniano

$H = H(t, x', y')$, entonces de la teoría de transformaciones canónicas tenemos para $h(t, x', y)$

$$H(t, x', y') = -\partial_t h(t, x', y),$$

al derivar con respecto a y tenemos

$$H_{y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = -h_{ty},$$

y de la condición (i) de la Proposición 3.1 concluimos que

$$H_{y'} = \frac{-h_{ty}}{1 + h_{x'y}}.$$

Si volvemos a derivar con respecto a y tenemos

$$H_{y'y'}(1 + h_{x'y}) = \frac{-h_{tyy}(1 + h_{x'y}) + h_{ty}h_{x'yy}}{1 + h_{x'y}},$$

entonces

$$H_{y'y'} = \frac{-h_{tyy}(1 + h_{x'y}) + h_{ty}h_{x'yy}}{(1 + h_{x'y})^3},$$

y debido a que $(1 + h_{x'y}) > 0$, tenemos que la condición de Legendre $H_{y'y'} > 0$ es equivalente a

$$h_{tyy}(1 + h_{x'y}) - h_{ty}h_{x'yy} < 0.$$

Por la construcción que hemos realizado esto se cumple para $h = \widehat{h}$, así como para h^* y por continuidad para una C^3 -vecindad de éstas. Ahora verifiquemos la condición H_{yy} para \widetilde{h} solo en $[t_1, t_2]$, por lo anteriormente demostrado tenemos

$$|\widetilde{h} - \widehat{h}|_3 = 0(\rho),$$

es decir para ρ suficientemente pequeña se satisface $h = \widetilde{h}$, y por lo tanto $\widetilde{H}_{yy} > 0$ en $(0, \frac{1}{2})$.

Luego ya hemos removido la discontinuidad en $t = \varepsilon$. Usando un argumento análogo se remueve la discontinuidad en $t = 1 - \varepsilon$, y de esta forma obtenemos un Hamiltoniano suave $\widetilde{H}(t, x, y)$ de periodo 1 en t y x con $\widetilde{H}_{yy} > 0$, tal que su mapeo de Poincaré coincide con el mapeo P . Ahora veamos que se cumple la condición (ii) para este Hamiltoniano. Desde este

momento renombramos al Hamiltoniano $\tilde{H}(t, x, y)$ con $H(t, x, y)$, el cual satisface $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. El flujo φ_t manda las curvas $y = a, b$ a las curvas Γ_t^a, Γ_t^b , ya que P deja invariantes estas curvas entonces

$$\Gamma_i^a = \Gamma_0^a, \quad \Gamma_i^b = \Gamma_0^b. \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Ahora veamos que las curvas Γ_t^a, Γ_t^b son gráficas de funciones C^∞ de la forma

$$\nu^a(t, x), \quad \nu^b(t, x),$$

que tienen periodo 1 en t y x . La imagen de la banda \mathcal{A} bajo φ_t está dada por

$$\mathcal{A}_t : \nu^a(t, x) \leq y \leq \nu^b(t, x).$$

Tomemos $y = c$, donde $c = a$ ó b y consideremos la curva Γ_t dada por

$$(x, y) = \varphi_t(x_0, c) = (x(t, x_0, c), y(t, x_0, c)).$$

Definimos el vector tangente

$$(X, Y) = \frac{\partial \varphi_t(x_0, c)}{\partial x_0} = d\varphi_t(1, 0) \neq 0.$$

Entonces $X = X(t, x_0), Y = Y(t, x_0)$ tienen periodo 1 en x_0 y (X, Y) describe una curva cerrada ι_t para cada t fija. Para $t = 0$ tenemos $(X, Y) = d\varphi_0(1, 0) = (1, 0)$ y

$$X > 0 \quad \text{para } t = n \in \mathbb{Z} \text{ y todo } x_0.$$

ya que el mapeo inducido es un difeomorfismo y $y = c$ es invariante bajo φ_j . Queremos probar que $X > 0$ para $t \geq 0$. Supongamos que $t_0 > 0$ es el primer cero de $\inf_{x_0} X$, de manera que $X > 0$ para $t \in (0, t_0)$ y todo x_0 , pero que para algún x_0^* tengamos

$$X(t_0, x_0^*) = 0.$$

Entonces de la ecuación diferencial $\dot{X} = H_{yx}X + H_{yy}Y$ tenemos que $\dot{X}(t_0, x_0^*) \neq 0$, de donde $\dot{X}(t_0, x_0^*) = H_{yy}Y \neq 0$. Ahora, si ponemos que $Y(t_0, x_0^*) < 0$, tenemos que tal cruce de ι_t a el eje negativo no desaparece para $t > t_0$ y esto contradice el hecho de que $X > 0$ para $t = j \in \mathbb{Z}$ y todo x_0 . Si fuera cierto que $Y(t_0, x_0^*) < 0$, existiría un último cruce $t = t_1 < 1$ a el eje Y negativo, pues ι_t es suave por lo que depende continuamente de t y además X y Y no se anulan simultáneamente. Por lo tanto

$$X(t_1, x_0') = 0 \quad Y(t_1, x_0') < 0,$$

$$X(t, x_0) > 0 \quad \text{para } t \in (t_1, t_1 + \varepsilon) \text{ y todo } x_0.$$

Como habíamos dicho anteriormente, esto nos lleva a una contradicción, por lo tanto $Y(t_1, x_0) > 0$. Entonces concluimos que

$$X = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0, a) > 0 \quad \text{para } t \geq 0.$$

Al hacer uso del Teorema de la Función Inversa obtenemos una representación $y = \nu(t, x)$ para esta curva, que satisface $\nu(t, x + 1) = \nu(t, x)$, pues H tiene periodo 1 en x . Más aún, como $\int_0^1 \nu(t, x)$ es independiente de t , entonces

$$\int_0^1 \nu^a(t, x) dx = a, \quad \int_0^1 \nu^b(t, x) dx = b.$$

Ahora buscamos una transformación simpléctica exacta ϑ_t que mande las curvas Γ_t^a, Γ_t^b a Γ_0^a, Γ_0^b , respectivamente. La más general de estas transformaciones está dada por

$$\vartheta_t(x, y) = (G(t, x), G_x^{-1}(y - U(t, x))),$$

donde $G_x > 0$; $G - x, U$ tienen periodo 1 en x . Dado que ϑ_t las curvas Γ_t^a, Γ_t^b a Γ_0^a, Γ_0^b entonces

$$G_x^{-1}(\nu^a - U(t, x)) = a, \quad G_x^{-1}(\nu^b - U(t, x)) = b.$$

Resolviendo este sistema tenemos

$$G_x = \frac{\nu^a - U(t, x)}{a},$$

entonces

$$U(t, x) = \frac{b\nu^a - a\nu^b}{b - a}, \quad G_x(t, x) = \frac{\nu^b - \nu^a}{b - a}.$$

Así determinamos U de manera única, y la función G la fijamos con $G(t, 0) = 0$. Como G_x, U , están en términos de la función $\nu(t, x)$ entonces son periódicas de período 1 en x , también $\vartheta_i = \text{identidad}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Ahora definimos el flujo

$$\bar{\varphi}_t = \vartheta_t \circ \varphi_t,$$

el cual preserva las curvas Γ_0^a y Γ_0^b . Por lo tanto, obtenemos el flujo en $\mathcal{A} = \{(x, y) : a \leq y \leq b\}$.

El Hamiltoniano \bar{H} asociado al flujo $\bar{\varphi}_t$ está dado por

$$\bar{H}(t, x', y') = H(t, x, y) + W_t(t, x, y'),$$

con $(x', y') = \vartheta_t(x, y)$ y

$$W = G(t, x)y' + \int_0^x U(t, \lambda)d\lambda,$$

con W la función generadora de ϑ_t y además $\frac{\partial y'}{\partial y} = G_x^{-1}$, de donde se cumple

$$G_x^{-1}\bar{H}_{y'} = H_y + G_x^{-1}W_{ty'},$$

entonces

$$H_{y'} = G_x H_y + W_{ty'},$$

por lo tanto

$$H_{y'y'} = G_x^2 H_{yy} > 0.$$

Finalmente llegamos al Hamiltoniano \bar{H} que satisface la condición de Legendre, el cual restringido a \mathcal{A} cumple con todas las propiedades requeridas. Además el flujo $\bar{\varphi}_i = \varphi_i$ para toda $i \in \mathbb{Z}$. \square

Capítulo 5

Mapeo de Billar

En este capítulo mostramos la técnica que utilizamos en los Capítulos 3 y 4 para construir un sistema Hamiltoniano para el mapeo del billar definido en el círculo. Consideremos la circunferencia unitaria parametrizada por longitud de arco.

El mapeo del billar $P : S^1 \times [0, \pi] \rightarrow S^1 \times [0, \pi]$ se define como $P(s, r) = (s + 2 \arccos(-r), r)$ ¹ donde $r = -\cos(\theta)$. Notemos $-1 \leq r \leq 1$.

Un método para extender el mapeo $P(s, r)$, es extenderlo periódicamente, es decir, definirlo como

$$\begin{cases} P(s, r) & \text{si } -1 \leq r < 1 \\ P(s, r - 2) + (2\pi, 2) & \text{si } r \geq 1 \\ P(s, r + 2) - (2\pi, 2) & \text{si } r < -1. \end{cases}$$

Observamos que esta extensión cumple con las propiedades de ser twist y simpléctico a trozos, pero debido a que esta definida en términos del $\arccos(-r)$ no es una extensión suave. El Hamiltoniano asociado a el flujo $\varphi_t(s, r) = (s + t(2 \arccos(-r)), r)$ está dado por

$$H(t, s, r) = 2 \int \arccos(-r) dr.$$

Ahora vamos a usar la técnica del Capítulo 3 para construir la extensión. El mapeo del billar está dado por $P(s, r) = (s + g(r), r)$ donde $g(r) =$

¹Ver Apéndice

$2 \arccos(-r) \in C^\infty(-1, 1)$. Debido a que en la frontera la derivada de $g(r)$ tiende a infinito, vamos a considerar $\delta > 0$ y $P : \mathbb{R} \times [-1 + \delta, 1 - \delta] \rightarrow \mathbb{R} \times [-1 + \delta, 1 - \delta]$, además definimos $F : \mathbb{R} \times [-2 + 2\delta, 0] \rightarrow \mathbb{R} \times [-2 + 2\delta, 0]$ con $F(s, u)$ que satisface

$$\begin{array}{ccc} (s, u) & \xrightarrow{F} & (s_1, u_1) \\ \downarrow \mathcal{M} & & \downarrow \mathcal{M} \\ (s, r) & \xrightarrow{P} & (s_1, r_1) \end{array}$$

donde $u = r - (1 - \delta)$, con $r \in [1 - \delta, 1)$ es decir

$$F(s, u) = \mathcal{M}^{-1} \circ P \circ \mathcal{M}(s, u),$$

$$F(s, u) = (s + g(u + 1 - \delta), u).$$

Ya que nuestro objetivo es extender el mapeo $F(s, u)$ a todo \mathbb{R}^2 . Haremos uso de la función generadora $S(s_1, u)$ asociada a el mapeo $F(s, u)$, la cual cumple

$$\frac{\partial S}{\partial s_1} = u_1 = u, \quad \frac{\partial S}{\partial u} = s = s_1 - g(u + 1 - \delta).$$

Como

$$\frac{\partial S}{\partial s_1} = u, \quad \text{entonces} \quad S(s_1, u) = us_1 + k(u),$$

de donde

$$\frac{\partial S}{\partial u} = s_1 + k'(u) = s_1 - g(u + 1 - \delta),$$

y por lo tanto

$$S(s_1, u) = us_1 + h(s_1, u),$$

con

$$\begin{aligned} h(s_1, u) &= u \arccos(-1 - u + \delta) - (-1 + \delta) \arcsen(1 - \delta + u) + \\ &+ \sqrt{-(-2 + \delta - u)(\delta - u)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la función $h(s_1, u)$ es analítica en una vecindad de radio $\frac{\delta}{2}$ alrededor de $u = 0$, entonces para la serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n(0)}{n!} u^n = (\sqrt{-\delta(\delta-2)} - (\delta-1)\text{arcSen}(1-\delta)) + u(\pi - \text{arc cos}(1-\delta)) + \frac{u^2}{2\sqrt{-\delta(\delta-2)}} - \frac{(\delta-1)u^3}{6(-(\delta-2)\delta)^{\frac{3}{2}}} + \dots$$

y las constantes $M, R = \frac{\delta}{2}$ tal que $|h(s_1, u)| \leq M$ se satisface

$$|h^n(0)| \leq \frac{n!}{R^n} M.$$

Observemos que la constante M existe pues cada una de las derivadas de $h(s_1, u)$ es acotada. Con estas condiciones sobre la función $h(s_1, u)$ construimos $Z_n(u) = Z(\lambda_n u)$ donde $\lambda_n = \frac{R^n \rho}{M}$ con $\rho > 0$ constante pequeña. Definimos

$$\tilde{h}(s_1, u) = \begin{cases} h(s_1, u) & \text{para } -2 + 2\delta \leq u \leq 0 \\ \sum_{n=0}^2 h_n(s_1) u^n + R(s_1, u) & \text{para } u > 0 \end{cases}$$

donde

$$R(s_1, u) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{h^n(0)}{n!} u^n Z_n(u).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{h^n(0)}{n!} u^n Z_n(u) &\leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n! M}{R^n n!} u^{n-1} \frac{R^n \rho}{M} \\ &\leq \rho u^2 \end{aligned}$$

Luego el mapeo $\tilde{h}(s_1, u)$ satisface las condiciones de la Proposición 3.2 sobre la extensión. Ahora reemplazamos $h_2(s_1)u^2$ por $\psi(s_1, u) = a(s_1) + b(s_1)u - (\frac{c}{2})u^2$ con $c > 0$ tal que para

$$\gamma(s_1, u) = -\frac{c}{2} + (h_2(s_1) + \frac{c}{2})Z\left(\frac{u}{\rho}\right),$$

entonces se cumplen las siguientes condiciones

$$(i) \quad \begin{aligned} \psi(s_1, u) &= h_2(s_1)u^2 \text{ para } u > 0 \text{ cercano a cero} \\ \psi(s_1, u) &= a(s_1) + b(s_1)u - \left(\frac{c}{2}\right)u^2 \text{ para } u > \rho \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \psi_{uu} = 2\gamma < 0$$

$$(iii) \quad \psi_{s_1 u} = 0$$

Las cuales nos permiten tener la extensión

$$h^*(s_1, u) = \begin{cases} h(s_1, u) & \text{para } -2 + 2\delta \leq u \leq 0 \\ h_0(s_1) + h_1(s_1)u + \psi(s_1, u) + R(s_1, u) & \text{para } u > 0. \end{cases}$$

tal que para $u > \rho$ y $h^*(s_1, u) = h_0^*(s_1) + h_1^*(s_1)u - \frac{c}{2}u^2$.

Ahora para que el mapeo conserve los círculos $y = a'$, con a' grande, definimos para $u > \rho$

$$h^*(s_1, u) = h_0^*(s_1) + h_1^*(s_1)\xi(u) - \frac{c}{2}u^2,$$

con

$$\xi(u) = \int_0^u Z(\varepsilon(u' - \rho))du'.$$

Por último, definimos

$$\widehat{h}(s_1, u) = h^*(s_1, u) + (Z(\sigma(u - \rho)) - 1)(h^*(s_1, u) + \frac{c}{2}u^2).$$

con $\sigma = \varepsilon^2$, el cual satisface que $\widehat{h}(s_1, u) = -\frac{c}{2}u^2$ para $u > \rho + \sigma^{-1}$, además estas extensiones satisfacen la propiedades deseadas. El mapeo está dado por

$$s_1 = s + cu, \quad u_1 = u,$$

es decir

$$F(s, u) = (s + cu, u).$$

Observamos que la extensión del mapeo es idéntico al encontrado en el Capítulo 3, por lo que podemos aplicar las mismas técnicas que en el Capítulo 4 para obtener un sistema Hamiltoniano, para el cual el mapeo F sea el mapeo de Poincaré de tal sistema y cumpla con las propiedades mencionadas en el Teorema 4.2.

Conclusiones

Hemos construido un sistema Hamiltoniano partiendo de un mapeo twist definido en la banda $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times [a, b]$, tal que $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, y tal que $P(x+1, y) = P(x, y) + (1, 0)$. La definición de $P(x, y) = (x_1, y_1)$ y la estructura topológica de la banda nos permitieron dar la base para representar el mapeo twist mediante las funciones generadoras $S(x, x_1)$ ó $S(x_1, y)$, etcetera. Aquí usamos propiedades de las formas diferenciales.

Como primer paso hemos extendido la función generadora $S(x_1, y)$ a todo \mathbb{R}^2 . En la primera extensión usamos la técnica de Borel para extender de manera suave $S(x_1, y)$ a todo \mathbb{R}^2 , tal que en una vecindad de \mathcal{A} sigue siendo la función generadora de un mapeo twist. Aquí aproximamos la función generadora por su serie de Taylor alrededor de $y = 0$, y extendimos con ayuda de funciones cut-off apropiadas para lograr que la extensión cumpliera con las condiciones de suavidad.

Luego trabajando con los primeros términos de la primera extensión, hacemos uso de otra función cut-off para construir una nueva extensión que sea twist. Con en la tercera y cuarta extensión obtenemos un mapeo twist definido en todo el plano tal que preserve los círculos $y = a$ para a lo suficientemente grande.

Como segundo paso se planteó un problema variacional cuyo valores extremos del funcional coinciden la función generadora $S(x, x_1)$, de tal forma que trabajamos en un sistema de dimensión 1. Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos permiten obtener las condiciones para que la trayectoria que cumpla las condiciones sea óptima y vemos la equivalencia entre las condición twist y la condición de Legendre. A partir de aquí pasamos del problema variacional al sistema Hamiltoniano por medio de la relación que guardan los sistemas hamiltonianos con los lagrangianos, es decir, por medio de la transforma-

ción de Legendre. Debido a las restricciones impuestas para las condiciones iniciales del problema variacional y la relación de las derivadas de la función generadora con las otras variables del mapeo conseguimos que al tiempo $t = 1$ el flujo del mapeo coincidiera con el mapeo P . Después se extendió en t periódicamente el Hamiltoniano obtenido y se suaviza en $t \in \mathbb{Z}$.

Observamos que si el mapeo twist original depende suavemente de un parámetro μ , entonces esta construcción depende suavemente en μ . Terminamos la tesis observando cómo funciona la construcción en un problema de billares.

Este trabajo nos deja como trabajo a futuro el estudio de la relación entre los mapeos simplécticos y los sistemas Hamiltonianos, así como las implicaciones que tiene esta relación en los sistemas físicos. Otra pregunta que surge es si existe otra propiedad diferente a la twist para construir un sistema Hamiltoniano a partir de un mapeo simpléctico, o cómo podríamos dar otras caracterizaciones a partir de esta construcción.

Apéndice

En este apéndice presentamos algunos aspectos básicos sobre el mapeo del billar y se muestra un ejemplo de un billar en el plano.

Definición 5.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región convexa con frontera suave, cerrada y simétrica ∂D . Un *billar* es el sistema que consiste de una partícula puntual m moviéndose a una velocidad constante donde el ángulo de incidencia cuando m choca con ∂D es igual al ángulo de reflexión.

Llamaremos órbitas singulares a las que no chocan con ∂D o lo hacen solo una vez, y órbitas no singulares a las que chocan con la frontera dos o más veces.

A las órbitas no singulares les asociaremos el mapeo del billar

$$\tilde{P}: U \subset \partial D \times [0, \pi] \rightarrow \partial D \times [0, \pi]$$

$$(x, \theta) \mapsto (x_1, \theta_1)$$

donde x es un punto en la frontera, θ es el ángulo que forma el vector de dirección de la trayectoria de m con la tangente a ∂D en ese punto, x_1 es el primer punto de la frontera con la que choca m después de colisionar en x , y θ_1 es el ángulo que forma la tangente en x_1 con el vector de dirección.

Sea $r = -\cos(\theta)$, puesto que la función $\cos(\theta)$ es biyectiva en $[0, \pi]$ entonces definimos como mapeo de billar

Definición 5.2. El Mapeo del billar es la función dada por

$$P : \tilde{U} \subset \partial D \times [-1, 1] \rightarrow \partial D \times [-1, 1]$$

$$(x, r) \mapsto (x_1, r_1)$$

donde $r = -\cos(\theta)$, $r_1 = -\cos(\theta_1)$, donde θ y θ_1 son los ángulos que se definieron anteriormente.

Proposición 5.1. El mapeo del billar P preserva área, orientación y es twist.

Ejemplo 5.1. Sea D la región acotada por la circunferencia unitaria S^1 , la cual está parametrizada por longitud de arco dada por $\alpha(s) = (\cos(s), \sin(s))$, el mapeo del billar circular está dado por $\tilde{P}(s, \theta) = (s_1, \theta_1)$ como se muestra en la Figura 5.1 Debido a las propiedades geométricas de la circunferencia unitaria el mapeo es de la forma $\tilde{P}(s, \theta) = (s + 2\theta, \theta)$. Al poner P en términos de las variables (s, r) tenemos que $P(s, r) = (s + 2 \arccos(-r), r)$.

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región convexa con frontera ∂D suave, cerrada, simétrica y parametrizada por longitud de arco con la función $\alpha(s)$.

Sean $\alpha(s)$ y $\alpha(s_1)$ dos puntos de la curva $\alpha(s)$, los vectores tangentes unitarios en cada uno de ellos T, T_1 , y $u = \frac{\alpha(s_1) - \alpha(s)}{\|\alpha(s_1) - \alpha(s)\|}$.

Definición 5.3. Sean $\alpha(s), \alpha(s_1)$ se define la función generadora de el mapeo del billar como

$$S(s, s_1) : U \times V \subset \partial D \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(s, s_1) \mapsto -\|\alpha(s) - \alpha(s_1)\|.$$

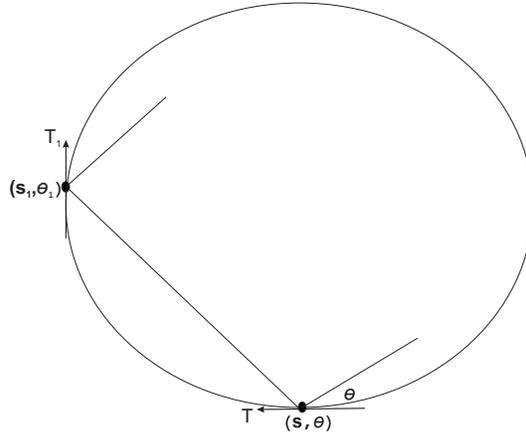


Figura 5.1: Billar

Teorema 5.1. Sea $\alpha(s)$ una curva parametrizada por longitud de arco, y K su curvatura, T y N la tangente y la normal a $\alpha(s)$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} T' &= KN, \\ N' &= -KT. \end{aligned}$$

Estas son conocidas como las ecuaciones de Serret-Frenet.

Proposición 5.2. Dados S la función generadora y T, T_1 las tangentes en $\alpha(s)$ y $\alpha(s_1)$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(s, s_1)}{\partial s} &= r, \\ \frac{\partial S(s, s_1)}{\partial s_1} &= -r_1. \end{aligned}$$

Demostración.

$$\frac{\partial S(s, s_1)}{\partial s} = -\frac{1}{2}((\alpha(s_1) - \alpha(s))^2)^{-\frac{1}{2}}(2(\alpha(s_1) - \alpha(s)))(-\alpha'(s)),$$

$$\frac{\partial S(s, s_1)}{\partial s} = \frac{(\alpha(s_1) - \alpha(s))}{\|\alpha(s) - \alpha(s_1)\|} - \alpha'(s),$$

$$\frac{\partial S(s, s_1)}{\partial s} = u \cdot T = \|u\| \|T\| \cos(\theta) = r,$$

Además

$$\frac{\partial S(s, s_1)}{\partial s} = -\frac{1}{2}((\alpha(s_1) - \alpha(s))^2)^{-\frac{1}{2}}(2(\alpha(s_1) - \alpha(s)))(\alpha'(s_1)),$$

$$\frac{\partial S(s, s_1)}{\partial s} = \frac{(\alpha(s_1) - \alpha(s))}{\|\alpha(s) - \alpha(s_1)\|} \alpha'(s_1),$$

$$\frac{\partial S(s, s_1)}{\partial s} = -u \cdot T_1 = -\|u\| \|T_1\| \cos(\theta_1) = -r_1.$$

Concluimos lo que queriamos demostrar. \square

Proposición 5.3. Si $P : (s, r) \mapsto (s_1(s, r), r_1(s, r))$ entonces la derivada de P es:

$$DP = \frac{-1}{\frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} & 1 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1}\right)^2 & \frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} \end{pmatrix}$$

Demostración.

Dado que

$$DP = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial s} & \frac{\partial s_1}{\partial r} \\ \frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\partial r}{\partial r} \end{pmatrix}$$

derivando implícitamente tenemos:

$$DP = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1} + \frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} \frac{\partial s_1}{\partial s} - \frac{\partial r_1}{\partial s} & \frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} \frac{\partial s_1}{\partial r} - \frac{\partial r_1}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s} & \frac{\partial^2 S}{\partial s_1 \partial s} \frac{\partial s_1}{\partial r} + 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$DP = -1/\frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} & 1 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1}\right)^2 & \frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} \end{pmatrix}$$

□

Proposición 5.4. Sean T , N , K , T_1 , N_1 , K_1 la tangente, la normal y la curvatura en $\alpha(s)$ y $\alpha(s_1)$ respectivamente y u el vector unitario en la dirección $\alpha(s_1) - \alpha(s)$ entonces:

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{S(s, s_1)}(T - u(u \cdot T))$$

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{S(s, s_1)}(-T_1 + u(u \cdot T_1))$$

$$(iii) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} = -K_1 u \cdot N_1 + \frac{1}{S(s, s_1)}(1 - (u \cdot T_1)^2)$$

$$(iv) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = K u \cdot N + \frac{1}{S(s, s_1)}(1 - (u \cdot T)^2)$$

$$(v) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1} = \frac{1}{S(s, s_1)}((u \cdot T)(u \cdot T_1) - T \cdot T_1)$$

Demostración. Puesto que

$$u = \frac{\alpha(s_1) - \alpha(s)}{\|\alpha(s_1) - \alpha(s)\|},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \alpha'(s)[(\alpha(s_1) - \alpha(s))^2(\alpha(s_1) - \alpha(s))^{\frac{-3}{2}} - (\alpha(s_1) - \alpha(s))^{\frac{-1}{2}}], \\ &= \frac{\alpha'(s_1)}{S(s, s_1)}[-\alpha(s_1) - \alpha(s))^2(\alpha(s_1) - \alpha(s))^{\frac{-1}{2}} + 1], \\ &= \frac{1}{S(s, s_1)}(T - u(u \cdot T)), \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s_1} &= \alpha'(s_1)[(\alpha(s_1) - \alpha(s))^2]^{-\frac{1}{2}} - (\alpha(s_1) - \alpha(s))^2(\alpha(s_1) - \alpha(s))^2]^{-\frac{3}{2}}, \\ &= \frac{\alpha'(s)}{S(s, s_1)}[u \cdot u - 1], \\ &= \frac{1}{S(s, s_1)}(-T_1 + u(u \cdot T_1)).\end{aligned}$$

Por otro lado, usando las ecuaciones de la Proposición 6.7

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = \alpha''(s)u + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \alpha'(s),$$

Usando la ecuación de Serret-Frenet $T' = KN$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} &= Ku \cdot N + \frac{T}{S(s, s_1)}(T - u(u \cdot T)), \\ \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} &= Ku \cdot N + \frac{1}{S(s, s_1)}(T^2 - (u \cdot T)^2), \\ \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} &= Ku \cdot N + \frac{1}{S(s, s_1)}(1 - (u \cdot T)^2).\end{aligned}$$

Además

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} = -\alpha''(s_1)u - \frac{\partial u}{\partial s_1} \cdot \alpha'(s),$$

usando la ecuación de Serret-Frenet $T'_1 = KN_1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} &= Ku \cdot N_1 + \frac{1}{S(s, s_1)}(T_1^2 - (u \cdot T_1)^2), \\ \frac{\partial^2 S}{\partial s_1^2} &= Ku \cdot N_1 + \frac{1}{S(s, s_1)}(1 - (u \cdot T_1)^2).\end{aligned}$$

Por último

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1} &= -\alpha'(s_1) \frac{\partial u}{\partial s_1}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial s \partial s_1} &= \frac{1}{S(s, s_1)}((u \cdot T)(u \cdot T_1) - T_1 \cdot T).\end{aligned}$$

□

Bibliografía

- [1] D.K. Arrowsmith y C.M. Place. *An introduction to Dynamical Systems, 1st Ed.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [2] R. Bott, L.W.Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology, Second Ed.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, USA, 1986.
- [3] Van Brunt B. *Calculus of Variations*, Universitext, Springer Verlag, New York, 2004.
- [4] M.P Do Carmo. *Differential Forms and Applications* , Universitext, Springer Verlag, New York, 1991.
- [5] C. Golé. *Symplectic Twist Maps*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics Vol.18, World Scientific, Singapore, 2001.
- [6] M. Golubitsky, V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities, 1st Ed.* Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, 1973.
- [7] A.Katok y B.Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its applications Vol. 54, Cambridge University Press, USA, 1995.
- [8] J.E. Marsden y A.J. Tromba. *Cálculo Vectorial, 3a Ed.* Addison- Wesley Iberoamericana, USA, 1991.
- [9] K. Meyer, G. Hall y D. Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N–Body Problem, Second Ed.* Applied Math. Sciences Vol. 90, Springer, New York, 2009.

- [10] J.Moser. *Monotone twist mappings and the calculus of variations*. Ergodic theory and dynamical systems, 1986.

- [11] J.R. Munkres. *Topología, 2a Ed.* Prentice Hall, España, 2002.

- [12] S.Lang. *Undergraduate Analysis, Second Ed.* Undergraduate texts in Mathematics, Springer, USA, 1996.