Prerradicales en anillos puro-semisimples.

Tesis que presenta
Eder Santiago Martelo Gómez
para obtener el título de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

2 de octubre de 2022

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a México, el país que me acogió por varios años, no sólo ofreciéndome un nuevo hogar sino un camino lleno de oportunidades. Muchas gracias a la Universidad Autónoma Metropolitana de la cual me siento orgulloso de ser estudiante. Al Departamento de Matemáticas y a sus profesores de los cuales me llevo muy buenos recuerdos.

A mi asesor, el doctor Rogelio Fernández-Alonso de quién he aprendido mucho, gracias por todo su apoyo durante todo mi camino en la UAM. Le tengo mucho que agradecer desde que me dió su voto de confianza para trabajar en este proyecto con usted. Gracias por estar siempre presente en mi crecimiento académico a lo largo de mi paso por la maestría y el doctorado; por su paciencia y por su dedicación al ayudarme a sacar este proyecto adelante.

A la doctora Patricia Saavedra por brindarme su apoyo en los momentos más complicados que tuve al estar tan lejos de mi familia. De verdad, muchas gracias todo sus consejos y por todo su apoyo incondicional.

Al doctor José Luis García, muchas palabras de agradecimiento, por el tiempo dedicado durante el trabajo que realizamos durante la estancia de investigación que realicé con él en Murcia, España. De verdad infinitas gracias por toda su ayuda y disposición para sacar resultados que fueron importantes en mi tesis. A los doctores José Ríos, Efrén Pérez y Lizbeth Sandoval por haberse tomado el tiempo de leer este trabajo, además de todas las sugerencias que dieron para la mejora del mismo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico no sólo durante el doctorado sino también para realizar la estancia de investigación en España.

A todos muchas gracias.

E.S. Martelo Gómez

Resumen

Se define una partición de la retícula de prerradicales R-pr sobre un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo, y se describen las clases de equivalencias de los radicales idempotentes, las cuales corresponden con teorías de torsión escindibles inducidas por la partición Ext-inyectivas del conjunto de los módulos finitamente generados e inescindibles R-ind. Específicamente, en una clase particular de estos anillos, el cuál sólo tiene dos módulos no isomorfos simples, se llega a la descripción completa de la retícula de prerradicales idempotentes, los radicales y por supuesto los radicales idempotentes. Finalmente se da una caracterización general de prerradicales en esta clase de anillos.

Introducción

En la Teoría de Anillos y Módulos se han estudiado muchas clases de anillos definidos con ciertas propiedades. A través de la historia, muchos resultados importantes se han centrado en caracterizar estos anillos por medio de su retícula de módulos y más recientemente en México por medio de su retícula de prerradicales ([37],[38] y [39]).

Para un anillo semisimple artiniano R, es posible describir su retícula de prerradicales por medio del conjunto completo e irredundante de R-módulos simples, R-Simp, esto se debe en gran parte a dos hechos fundamentales: todo módulo es suma directa de módulos simples y los prerradicales "abren" sumas directas; así es posible hacer un estudio general de prerradicales en base a cómo se comportan en el conjunto R-Simp ([37]). Ahora bien, surge la idea de analizar la retículas de prerradicales para una clase más amplia de anillos que incluya a los semimimples, los anillos puro-semisimples. Por lo que el objetivo principal de este trabajo es caracterizar y/o dar descripciones de la retícula de prerradicales de anillos que han sido bastante estudiados durante las últimas décadas: Los anillos puro-semisimples izquierdos.

La mayor parte de resultados que se tienen para estos anillos giran en torno a su categoría de módulos; por ejemplo, se sabe que los anillos puro-semisimples izquierdos y derechos son precisamente los anillos de representación finita, es decir, aquellos que tienen sólo un número finito de clases de isomorfismos de módulos izquierdos y derechos finitamente generados e inescindibles ([6],[24],[41]). Por otra parte se tiene la Conjetura Puro-Semisimple que establece que los anillos puro-semisimples izquierdos son puro-semisimples derechos y por tanto de representación finita.

Teniendo en cuenta el caso semisimple bastaría con tener un conjunto que me describa la categoría de módulos de un anillo puro-semisimple izquierdo. Pero se sabe que un anillo R es puro-semisimple izquierdo si y sólo si todo R-módulo es suma directa de R-módulos finitamente generados e inescindibles izquierdos ([50]), por lo tanto el conjunto que permite describir a los módulos en R-Mod, es el conjunto completo e irreduntante de R-módulos izquierdos inescindibles y finitamente generados, R-ind.

Si bien se tiene el conjunto R-ind, la retícula de submódulos totalmente invariantes de un módulo inescindible puede ser muy variada por lo que no resulta sencillo evaluar prerradicales en R-ind. De esta forma se pretende estudiar una clase intermedia, la de los anillos puro-semisimples hereditarios izquierdos con el fin de hacer uso de la particiones de R-ind como la partición Ext-inyectiva del conjunto R-ind y la partición fuerte-preinyectiva ([11], [13],[53]) y de sus propiedades para hacer un mejor estudio de la retícula de prerradicales en esta clase de anillos.

Para hacer esto, este trabajo consta de cuatro capítulos, los cuales se pueden sintetizar de la siguiente manera.

En el primer capítulo se muestran conceptos y propiedades básicas de los prerradicales y de las teorías de torsión para luego ver cómo relacionar estos dos conceptos. También se muestra en detalle cómo los anillos semisimples pueden ser caracterizados por medio de su retícula de prerradicales y al mismo tiempo cómo esta descripción depende del conjunto R-Simp.

En el segundo capítulo, las secciones 2.1, 2.2 y 2.3 pretenden dar una introducción al concepto de sucesiones exactas puras y de los módulos planos para que de esta manera se puedan definir los anillos puro-semisimples izquierdos en términos de las sucesiones exactas que se escinden. Así, la sección 2.4 muestra una síntesis de resultados relacionados a caracterizar anillos puro-semisimples izquierdos por medio de su categoría de módulos y poder hacer uso de la descomposición de los módulos a través del conjunto R-ind.

Ya se conoce que el conjunto fundamental en la descomposición de R-módulos para cualquier anillo R puro-semisimple izquierdo, es el conjunto R-ind. Por lo que en el capítulo 3, se hace un resumen de resultados que se conocen de las particiones Ext-inyectiva y fuerte-preinyectiva del conjunto R-ind, así como diversas propiedades relacionadas a éstas. De tal manera que este capítulo es una de las bases fundamentales de este trabajo ya que dichas propiedades se pueden trasladar a propiedades de ciertas particiones de la retícula R-pr, las cuales se mencionan en la sección 3.4.

Finalmente, en el último capítulo se muestra cómo todos los anteriores capítulos se relacionan y dan como resultado el cumplimiento de parte del objetivo principal: describir la retícula de prerradicales de anillos inescindibles puro-semisimples hereditarios izquierdos con dos módulos simples. Se presentan una serie de resultados asociados a los prerradicales de esta clase de anillos y haciendo uso de estas propiedades se presentan tres teoremas principales en este capítulo. Los dos primeros teoremas describen de manera concreta la retícula de prerradicales idempotentes, la retícula de radicales y estos dos a su vez proporcionan la descripción de la retícula de radicales idempotentes. El tercer y último teorema principal de este capítulo es el que describe cualquier prerradical para esta clase de anillos, por medio de sus valores en los módulos finitamente generados e inescindibles.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Prerradicales

Esta sección se dedica a las definiciones y propiedades básicas en la clase de todos los prerradicales sobre el anillo R, la cual será denotada por R-pr. Se presentan operaciones binarias y reticulares; además se definen dos tipos importantes de prerradicales llamados *alfa* y *omega*, los cuales permiten demostrar que R-pr es una gran retícula atómica y coatómica.

Definición 1.1.1. *Un prerradical sobre el anillo R es un subfuntor del funtor identidad en la categoría R-Mod; esto es, es un funtor*

$$\sigma\colon R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$$

tal que:

1. *Para cada $M \in R$-Mod se tiene que $\sigma(M) \leq M$.*
2. *Para cada $f \in Hom_R(M, N)$ se cumple que $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$.*

Ejemplo 1.1.2. *Dada $\mathcal{A} \subseteq R$-Mod, se tiene que* $\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}()$ *y* $\mathrm{Rej}_{\mathcal{A}}()$ *son prerradicales. En particular,* $\mathrm{Soc}() = \mathrm{Tr}_{\mathbf{S}}()$ *y* $\mathrm{Rad}() = \mathrm{Rej}_{\mathbf{S}}()$ *donde* $\mathbf{S}$ *denota la clase de módulos simples.*

Se denotará por R-pr al conglomerado[1] de todos los prerradicales sobre R.

Los prerradicales cumplen ciertas propiedades respecto a sumas directas y produtos directos, las cuales se pueden enunciar así:

Proposición 1.1.3. *Sean $\sigma \in R$-pr y $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq R$-Mod. Entonces, se tiene que:*

1. $\sigma(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in I} \sigma(M_\alpha)$
2. $\sigma(\prod_{\alpha \in I} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha \in I} \sigma(M_\alpha)$.

[1] Note que un prerradical es una clase, al ser una asignación entre clases. Por tanto R-pr es estrictamente hablando un conglomerado.

Demostración. En primer lugar se demostrará (1), así para cada $\beta \in I$, sean $M_\beta \xrightarrow{\iota_\beta} \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ y $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \xrightarrow{p_\beta} M_\beta$ las inclusiones y proyecciones naturales, respectivamente. Entonces, para cada $\beta \in I$ se tiene que:

$$\iota_\beta(\sigma(M_\beta)) \leq \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right) \tag{1.1}$$

y

$$p_\beta\left(\sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right)\right) \leq \sigma(M_\beta) \tag{1.2}$$

Ahora bien, sea $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$. Entonces por la desigualdad (1.2), se tiene que para cada $\alpha \in I$, $x_\alpha = p_\alpha(x) \in \sigma(M_\alpha)$, de donde $x \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$. Por tanto,

$$\sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right) \leq \bigoplus_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha)$$

Por otro lado, si $x \in \bigoplus_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha)$, entonces $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}$ con $x_\alpha \in \sigma(M_\alpha)$ para cada $\alpha \in I$, por lo que existen $b_j \in I, j \in \{1, ..., n\}$ tales que para cada β_j se tiene que $x = \sum_{j=1}^{n} \iota_{\beta_j} p_{\beta_j}(x)$. Ahora, por 1.2, $p_{\beta_j}(x) \in \sigma(M_{\beta_j})$, y por 1.1, $\iota_{\beta_j} p_{\beta_j}(x) \in \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$ para cada $j = 1, ..., n$. Luego, $x \in \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$. Por tanto, $\bigoplus_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha) \leq \sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$.

La parte (2) se demuestra de forma análoga haciendo uso de las proyecciones mencionadas al inicio de la demostración. □

Ejemplo 1.1.4. *Considere los $\mathbb{Z}$-módulos izquierdos, $\mathbb{Z}_p$ con p primo y sea σ el prerradical que asigna a cada módulo, su torsión. Entonces sea $M = \prod_{p\text{-primo}} \mathbb{Z}_p$, así es claro que $\sigma(M) = \bigoplus_{p\text{-primo}} \mathbb{Z}_p$ y $\prod_{p\text{-primo}} \sigma(\mathbb{Z}_p) = \prod_{p\text{-primo}} \mathbb{Z}_p$ y por lo tanto no se cumple la igualdad en (2) de la Proposición 1.1.3.*

1.1.1. Operaciones y propiedades

Definición 1.1.5. *Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Se dice que $\sigma \preceq \tau$ si y sólo si para cada $M \in R$-Mod se tiene que $\sigma(M) \leq \tau(M)$.*

La anterior definición hace de R-pr una clase parcialmente ordenada.

Definición 1.1.6. *Para cada $\sigma, \tau \in R$-pr se definen las siguientes operaciones:*

1. *El producto* $\sigma\tau$, *tal que para cada* $M \in R$*-Mod se tiene que* $(\sigma\tau)(M) = \sigma(\tau(M))$.
2. *El coproducto* $(\sigma : \tau)$, *tal que para cada* $M \in R$*-Mod se cumple que* $(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M))$.
3. *La cuña* $\sigma \wedge \tau$, *tal que para todo* $M \in R$*-Mod,* $(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$.
4. *La yunta* $\sigma \vee \tau$, *tal que para todo* $M \in R$*-Mod,* $(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$.

Observación 1.1.7. *En la definición anterior, se permite el uso de los símbolos "* $\wedge$ *" y "* $\vee$ *" para denotar a la cuña y yunta, puesto que estas operaciones satisfacen las propiedades del ínfimo y supremo respectivamente con el orden dado en la Definición 1.1.6.*

Se puede demostrar que las definiciones (1), (2),(3) y (4) son en efecto prerradicales. Se mostrará el caso (1) y (2), los casos (3) y (4) se comprueban de manera análoga.

Para (1), sea $M \in R$*-Mod como* $\tau \in R$*-pr entonces* $\tau(M) \leq M$ *y así* $\sigma\tau(M) = \sigma(\tau(M)) \leq \sigma(M) \leq M$. *Ahora, si* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ *como* $\tau \in R$*-pr se tiene que* $f(\tau(M)) \leq \tau(N)$. *De esta forma, se puede definir un homomorfismo* $f' \colon \tau(M) \to \tau(N)$ *con* $f' = f|_{\tau(M)}^{\tau(N)}$ *y usando el hecho de que* σ *es un prerradical,* $f(\sigma\tau(M)) = f'(\sigma(\tau(M))) \leq \sigma\tau(N)$, *terminando así la prueba que* $\sigma\tau$ *es un prerradical.*

Para (2), sea $M \in R$*-Mod entonces* $(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M)) \leq M/\sigma(M)$, *es decir,* $(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) \leq M/\sigma(M)$ *y esto implica* $(\sigma : \tau)(M) \leq M$. *La segunda parte, si* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ *considere el morfismo inducido por este morfismo* $f' : M/\sigma(M) \to N/\sigma(N)$, *de esta forma* $f(\tau(M/\sigma(M))) \leq \tau(N/\sigma(N))$, *terminando así la prueba de (2).*

Para (3), se tiene que $\sigma(M) \leq M$ *y* $\tau(M) \leq M$ *por lo que* $\sigma \wedge \tau(M) = \sigma(M) \cap \tau(M) \leq M$. *Por otro lado, si* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ *entonces como* σ *y* τ *son prerradicales,* $f(\sigma(M) \leq \sigma(N)$ *y* $f(\tau(M)) \leq \tau(N)$. *De esta forma,*

$f(\sigma \wedge \tau(M)) \leq f(\sigma(M)) \cap f(\tau(M)) \leq \sigma(N) \cap \tau(N) = \sigma \wedge \tau(N)$, *probando así (3). La demostración de (4) es análoga a esta última demostración.*

Las operaciones definidas en 1.1.6 se pueden comparar de la siguiente manera:

Proposición 1.1.8. *Sean* $\sigma, \tau \in R$*-pr. Entonces, se tiene que*

$$\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau \preceq \sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$$

Demostración. Indicación: La demostración de las dos primeras desigualdades de esta proposición se pueden probar de manera inmediata, haciendo uso de las definiciones de las operaciones del producto, cuña y yunta entre prerradicales. La tercera y última desigualdad se puede observar por medio de la definición de la yunta, el coproducto y también el uso del Teorema de la Correspondencia para módulos. □

Definición 1.1.9. *Sean* I *una clase de índices,* $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$*-pr y* $M \in R$*-Mod. Se define*

1. *La cuña arbitraria* $\bigwedge_{i\in I} \sigma_i$, *por* $(\bigwedge_{i\in I} \sigma_i)(M) = \bigcap_{i\in I} \sigma_i(M)$

2. *La yunta arbitraria* $\bigvee_{i\in I}\sigma_i$, *por* $(\bigvee_{i\in I}\sigma_i)(M)=\sum_{i\in I}\sigma_i(M)$.

La cuña y la yunta definen prerradicales que tienen la propiedad de ser el ínfimo y el supremo con el orden dado en la Definición 1.1.5. Así, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.1.10. $\langle R-pr,\preceq,\vee,\wedge\rangle$ *es una gran retícula completa, con elemento mayor el funtor identidad en R-Mod y elemento menor el funtor cero de R-Mod.*

Observación 1.1.11. *Aunque R-pr en general no es distributiva, se tiene que R-pr es modular. Además, el nombre de gran retícula se debe a que R-pr satisface las propiedades de una retícula pero no necesariamente es un conjunto.*

Proposición 1.1.12 (Ley Modular, Ver [46] Pág. 157.)**.** *Sean* $\sigma,\tau,\eta\in$ *R-pr. Entonces,*

$$\sigma\preceq\tau\Rightarrow\sigma\vee(\tau\wedge\eta)=\tau\wedge(\sigma\vee\eta)$$

La siguiente proposición muestra propiedades de distributividad del producto y coproducto respecto a la conjunción y disyunción arbitrarias.

Proposición 1.1.13 (Ver Teorema 8 de [37])**.** *Dados* I *una clase de índices,* $\{\sigma_i\}_{i\in I}\subseteq$ *R-pr y* $\tau\in$ *R-pr, se tiene que*

1. $(\bigwedge_{i\in I}\sigma_i)\tau=\bigwedge_{i\in I}(\sigma_i\tau)$
2. $(\bigvee_{i\in I}\sigma_i)\tau=\bigvee_{i\in I}(\sigma_i\tau)$
3. $(\tau:\bigwedge_{i\in I}\sigma_i)=\bigwedge_{i\in I}(\tau:\sigma_i)$
4. $(\tau:\bigvee_{i\in I}\sigma_i)=\bigvee_{i\in I}(\tau:\sigma_i)$

Definición 1.1.14. *Sea* $\sigma\in$ *R-pr Se dice que :*

1. σ *es idempotente, si* $\sigma^2=\sigma$.
2. σ *es radical, si* $(\sigma:\sigma)=\sigma$

Proposición 1.1.15. *Sea* $\sigma\in$ *R-pr. Entonces,* σ *es radical si y sólo si* $\sigma(M/\sigma(M))=0$ *para todo* $M\in$ *R-Mod.*

Demostración. Si σ es radical y M es un R-módulo, entonces por definición, $\sigma(M/\sigma(M))=(\sigma\colon\sigma)/\sigma(M)=\sigma(M)/\sigma(M)=0$.

El reverso es inmediato por el Teorema de la correspondencia. □

Ejemplo 1.1.16. *Dada* $\mathcal{A}\subseteq$ *R-Mod, se tiene que* $Tr_{\mathcal{A}}()$ *es idempotente y* $Rej_{\mathcal{A}}()$ *es radical.*

De ahora en adelante, R-id denotará la clase de todos los prerradicales idempotentes y R-rad la clase de todos los radicales.

Proposición 1.1.17. *Sea I una clase de índices y $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-pr. Entonces, se tiene que*

1. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-id, entonces $\bigvee_{i\in I} \sigma_i \in R$-id*

2. *Si $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-rad, entonces $\bigwedge_{i\in I} \sigma_i \in R$-rad.*

Demostración. Para (1), observe que usando la parte (2) de la Proposición 1.1.13 se tiene que

$$\sigma = \bigvee_{i\in I} \sigma_i = \bigvee_{i\in I} (\sigma_i\sigma_i) \preceq \bigvee_{i\in I} (\sigma_i\sigma) = (\bigvee_{i\in I} \sigma_i)\sigma = \sigma\sigma \preceq \sigma.$$

De donde $\sigma = \bigvee_{i\in I} \sigma_i$ es idempotente.

La demostración de (2) es de forma análoga pero ahora se usa la parte (1) de la Proposición 1.1.13.

□

Lema 1.1.18. *Sea $\sigma \in R$-pr. Si $\sigma(ES) = 0$ para cada $S \in R$-Simp entonces $\sigma = 0$ (ES denota la cápsula inyectiva de S).*

Demostración. Sea $\sigma \in R$-pr y $M \in R$-Mod. Dado que $P_0 = \prod_{R\text{-Simp}} ES$ cogenera la categoría R-Mod, se tiene que existe un monomorfismo $f\colon M \to (P_0)^X$ para cierto conjunto X y puesto que σ es un prerradical y f es mono, se obtiene que

$$\sigma(M) = \sigma(f(M)) \leq \sigma\left((P_0)^X\right) \leq \left(\prod_{R\text{-Simp}} \sigma(ES)\right)^X = 0$$

Lo anterior demuestra que $\sigma(M) = 0$ para cada $M \in R$-Mod, es decir $\sigma = 0$.
□

1.1.2. Prerradicales alfa y omega

Definición 1.1.19. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Entonces, se dice que N es un submódulo totalmente invariante de M si y sólo si para cada $f \in End_R(M)$ se tiene que $f(N) \leq N$.*

Ejemplo 1.1.20. *Sea $S \in R$-simp. Si $f \in End_R(ES)$ entonces $f(S) = S$, o bien $f(S) = 0$. De esta forma, se sigue que S es totalmente invariante en ES.*

Ejemplo 1.1.21. *Un ideal izquierdo I del anillo R es un submódulo totalmente invariante de R si y sólo si I es un ideal (bilateral) de R.*

Definición 1.1.22. *Sea $M \in R$-Mod y sea N un submódulo totalmente invariante de M. Entonces para cada $K \in R$-Mod se definen los funtores*

$$\alpha_N^M(K) := \sum\{f(N) | f \in Hom_R(M, K)\},$$
$$\omega_N^M(K) := \bigcap\{g^{-1}(N) | g \in Hom_R(K, M)\}.$$

Observación 1.1.23. *En la definición anterior, se tiene que* $\alpha_N^M(K)$ *y* $\omega_N^M(K)$ *son submódulos de* K*. Más aún,* α_N^M *y* ω_N^M *son prerradicales sobre* R*.*

Observación 1.1.24. *Dados* $M, K \in R$*-Mod, se tiene que*

$$\alpha_M^M(K) := \sum\{f(M)|f \in Hom_R(M,K)\} = Tr_M(K),$$
$$\omega_0^M(K) := \bigcap\{\ker\ g|g \in Hom_R(K,M)\} = Rej_M(K).$$

Es claro que 0 *y* M *son submódulos totalmente invariantes de* M*.*

Observación 1.1.25. *En principio,* α_N^M *y* ω_N^M *se podrían definir para todo submódulo* N *de* M*. Sin embargo, en caso de ser* N *totalmente invariante en* M*, se cumple que* $\alpha_N^M(M) = N = \omega_N^M(M)$*.*

A los prerradicales α_N^M y ω_N^M con N totalmente invariante en M se les conoce como prerradicales alfa y omega respectivamente.

Lema 1.1.26. *Sea* $M \in R$*-Mod y* K, N *submódulos totalmente invariantes de* M *tales que* $K \leq N$*. Entonces,*

$$\alpha_K^M \preceq \alpha_N^M \ \ y \ \ \omega_K^M \preceq \omega_N^M.$$

Proposición 1.1.27. *Sea* $M \in R$*-Mod. Entonces,* N *es un submódulo totalmente invariante de* M *si y sólo si existe* $\sigma \in R$*-pr tal que* $\sigma(M) = N$*.*

Demostración. Si N es un submódulo totalmente invariante de M, entonces por la Observación 1.1.25 se probaría la primera implicación de la proposición. Ahora, para el recíproco, suponga que existe un prerradical σ tal que $\sigma(M) = N$ y sea $f \in \mathrm{End}(M)$. Entonces $f(N) = f(\sigma(M)) \leq \sigma(M) = N$. De esta forma N es un submódulo totalmente invariante de M. □

Proposición 1.1.28 (Ver Proposición 5 de [37])**.** *Sean* $M \in R$*-Mod,* N *un submódulo totalmente invariante de* M *y* $\sigma \in R$*-pr. Entonces,* $\sigma(M) = N$ *si y sólo si* $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$*.*

La siguiente proposición se deriva de las definiciones de los prerradicales traza y rechazo.

Proposición 1.1.29. *Sea* $\mathcal{A} \subseteq R$*-Mod, entonces para cada* $K \in R$*-Mod, se tiene que*

$$Tr_{\mathcal{A}}(K) = \sum_{M\in\mathcal{A}} \alpha_M^M(K) = (\bigvee_{M\in\mathcal{A}} \alpha_M^M)(K)$$
$$Rej_{\mathcal{A}}(K) = \bigcap_{M\in\mathcal{A}} \omega_0^M(K) = (\bigwedge_{M\in\mathcal{A}} \omega_0^M)(K)$$

En particular,

$$1 = Tr_{R\text{-}Mod} = \bigvee_{R-Mod} \alpha_M^M$$
$$0 = Rej_{R\text{-}Mod} = \bigwedge_{R-Mod} \omega_0^M.$$

Se tiene ahora la siguiente proposición

Proposición 1.1.30. *Sea $\sigma \in R$-pr entonces*

1. $\sigma = \bigvee\{\alpha^M_{\sigma(M)} \mid M \in R\text{-Mod}\}$
2. $\sigma = \bigwedge\{\omega^M_{\sigma(M)} \mid M \in R\text{-Mod}\}$.

Demostración. Considere $\sigma \in R$-pr. Entonces,

1. Sea $M \in R$-Mod. Por la Proposición 1.1.28 se tiene que $\alpha^M_{\sigma(M)} \preceq \sigma \preceq \omega^M_{\sigma(M)}$, de donde $\bigvee\limits_{R\text{-Mod}} \alpha^M_{\sigma(M)} \preceq \sigma$. Por otro lado, si $L \in R$-Mod, por la Observación 1.1.25 se sigue que

$$\sigma(L) = \alpha^L_{\sigma(L)}(L) \leq \left(\bigvee\nolimits_{R\text{-Mod}} \alpha^M_{\sigma(M)}\right)(L)$$

Demostrando así la igualdad.

2. La desigualdad $\sigma \preceq \bigwedge\limits_{R\text{-Mod}} \omega^M_{\sigma(M)}$ se sigue nuevamente de la proposición 1.1.28. Aplicando la Observación 1.1.25, si $L \in R$-Mod,

$$\bigwedge_{R\text{-Mod}} \omega^M_{\sigma(M)}(L) \leq \omega^L_{\sigma(L)}(L) = \sigma(L),$$

es decir, $\bigwedge\limits_{R\text{-Mod}} \omega^M_{\sigma(M)} \preceq \sigma$ con lo que se demuestra la igualdad.

□

Lema 1.1.31. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\sigma = 1$ si y sólo si $\sigma(R) = R$.*

Demostración. La necesidad es inmediata. Para la suficiencia, suponga que $\sigma(R) = R$. Puesto que R es un generador de la categoría R-Mod, existe un epimorfismo $f\colon R^{(X)} \to M$, con X un conjunto. Además, como $\sigma \in R$-pr, se tiene

$$f\left(\sigma(R^{(X)})\right) \leq \sigma(M) \leq M.$$

Pero,

$$f\left(\sigma(R^{(X)})\right) = f\left((\sigma(R))^{(X)}\right) = f(R^{(X)}) = M.$$

Por tanto, $\sigma(M) = M$ para cada $M \in R$-Mod y se concluye que $\sigma = 1$. □

Definición 1.1.32. *Dada una retícula $\langle L, \leq, \vee, \wedge\rangle$ con elemento menor $\mathbf{0}$, decimos que L es atómica, si para cada $b \in L$ con $b \neq \mathbf{0}$, existe un átomo $a \in L$ tal que $a \leq b$.*

Definición 1.1.33. *Dada una retícula $\langle L, \leq, \vee, \wedge\rangle$ con elemento mayor $\mathbf{1}$, decimos que L es coatómica, si para cada $b \in L$, con $b \neq \mathbf{1}$, existe un coátomo $a \in L$ tal que $a \geq b$.*

Proposición 1.1.34. *R-pr es una gran retícula atómica. El conjunto de sus átomos es*

$$\{\alpha_S^{ES} |\ S \in R\text{-}Simp\}.$$

Demostración. Sea $\sigma \in R$-pr tal que $\sigma \neq 0$. Por el Lema 1.1.18, existe $S \in R$-simp, tal que $\sigma(ES) \neq 0$. Dado que S es totalmente invariante en ES se tiene que $\alpha_S^{ES} \preceq \alpha_{\sigma(ES)}^{ES}$ y por la Proposición 1.1.28 se tiene que $\alpha_{\sigma(ES)}^{ES} \preceq \sigma$.

Sólo falta probar que α_S^{ES} es un átomo para cada $S \in R$-simp. Para esto, sea $S \in R$-Simp y sea $\tau \in R$-pr tal que $\tau \prec \alpha_S^{ES}$. Como se tiene una desigualdad estricta, entonces $\tau(ES) < \alpha_S^{ES}(ES) = S$. Ahora, como S es simple, entonces $\tau(ES) = 0$, por hipótesis.

Ahora bien, si $S' \in R$-simp, con $S' \ncong S$., entonces se tiene que $\tau(ES') < \alpha_S^{ES}(S') = 0$. De esta forma, $\tau(ES') =$ y así, por el lema 1.1.18, $\tau = 0$ y se finaliza la prueba.

□

La demostración del siguiente resultado es similar a la de 1.1.34, haciendo uso del Lema 1.1.31.

Proposición 1.1.35. *R-pr es una gran retícula coatómica. El conjunto de coátomos es*

$$\{\omega_I^R |\ I \text{ un ideal máximo de } R\}.$$

Por otro lado, se tiene el siguiente resultado en cuanto a los generadores y cogeneradores en la categoría R-Mod

Proposición 1.1.36. *G es un generador (cogenerador) de R-Mod si y sólo si $\alpha_G^G = 1$. ($\omega_0^G = 0$.)*

Teorema 1.1.37. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces,*

1. *$\sigma \in R$-id si y sólo si $\sigma = \bigvee\{\alpha_M^M |\ M \in R\text{-}Mod, \sigma(M) = M\}$*
2. *$\sigma \in R$-rad si y sólo si $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^M |\ M \in R\text{-}Mod, \sigma(M) = 0\}$*

Demostración. Sea σ idempotente, entonces por la Proposición 1.1.28, si M es un R-módulo tal que $\sigma(M) = M$ entonces $\alpha_M^M \preceq \sigma$. De esta manera, se sigue que $\bigvee\{\alpha_M^M |\ M \in R\text{-Mod}, \sigma(M) = M\} \preceq \sigma$. Ahora bien, si $L \in R$-Mod, como σ es idempotente, $\sigma(\sigma(L)) = \sigma(L)$. Si se considera la inclusión canónica $\sigma(L) \hookrightarrow L$ se tiene que $\sigma(L) = \alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)}(\sigma(L)) \leq \alpha_{\sigma(L)}^{\sigma(L)}(L)$. por lo que $\sigma \preceq \bigvee\{\alpha_M^M |\ M \in R\text{-Mod}, \sigma(M) = M\}$, probando la igualdad. El recíproco es inmediato, al notar que $\alpha_M^M = \mathrm{Tr}_M$ es idempotente así y usando la Proposición 1.1.17. De esta manera se demuestra (1).

La demostración de (2) es análoga. □

De la definición de submódulo totalmente invariante se puede verificar que:

Proposición 1.1.38. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{N_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Mod con $N_i \leq M_i$ para todo $i \in I$. Entonces,*

1. *Si $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$; $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ y si N es un submódulo totalmente invariante de M entonces, para cada $i \in I$, N_i es un submódulo totalmente invariante de M_i.*

2. *Si* $M = \prod_{i\in I} M_i$; $N = \prod_{i\in I} N_i$ *y si* N *es un submódulo totalmente invariante de* M *entonces, para cada* $i \in I$, N_i *es un submódulo totalmente invariante de* M_i.

Por medio de la proposición anterior se puede deducir que:

Proposición 1.1.39. *Sean* $\{M_i\}_{i\in I}, \{N_i\}_{i\in I} \subseteq R$*-Mod con* $N_i \leq M_i$ *para todo* $i \in I$. *Entonces,*

1. *Si* $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$; $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ *y si* N *es un submódulo totalmente invariante de* M *entonces*
$$\bigvee_{i\in I} \alpha_{N_i}^{M_i} = \alpha_N^M$$
2. *Si* $M = \prod_{i\in I} M_i$; $N = \prod_{i\in I} N_i$ *y si* N *es un submódulo totalmente invariante de* M *entonces*
$$\bigwedge_{i\in I} \omega_{N_i}^{M_i} = \omega_N^M.$$

Demostración. Sean $\{M_i\}_{i\in I}, \{N_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Mod. Entonces.

1. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ y $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$. Por definición se tiene que para cada $K \in R$-Mod
$$\alpha_N^M(K) = \sum \left\{ f(\bigoplus_{i\in I} N_i) \mid f \in \operatorname*{Hom}_R \left(\bigoplus_{i\in I} M_i, K \right) \right\}$$
y
$$\alpha_{N_i}^{M_i}(K) = \sum \left\{ g(N_i) \mid g \in \operatorname*{Hom}_R (M_i, K) \right\}$$
Para cada $i \in I$, sean ι_i y π_i las inclusiones y proyecciones naturales. Entonces, para cada $i \in I$ y $g \in \mathrm{Hom}_R(M_i, K)$ se tiene que
$$g(N_i) = g \circ \pi_i \left(\bigoplus_{i\in I} N_i \right) \leq \alpha_N^M(K)$$
Así, $\bigvee_{i\in I} \alpha_{N_i}^{M_i} \preceq \alpha_N^M$.

   Por otro lado, para cada $f \in \operatorname*{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, K)$ se tiene que
$$f(\bigoplus_{i\in I} N_i) = \sum_{i\in I} f \circ \iota_i(N_i) \leq \sum_{i\in I} \alpha_{N_i}^{M_i}(K)$$
Así, $\bigvee_{i\in I} \alpha_{N_i}^{M_i} \succeq \alpha_N^M$, con lo que termina la demostración.

□

1.2. Teorías de torsión y prerradicales.

Si σ es un prerradical en R-pr, entonces se pueden asociar a este prerradical, dos clases de módulos dadas por:

$$\mathcal{T}_\sigma = \{M |\ \sigma(M) = M\}$$
$$\mathcal{F}_\sigma = \{M |\ \sigma(M) = 0\}.$$

Estas clases cumplen las siguientes propiedades:

Proposición 1.2.1. *$\mathcal{T}_\sigma$ es cerrada bajo coproductos y cocientes, mientras que $\mathcal{F}_\sigma$ es cerrada bajo productos y submódulos.*

Demostración. Para ver que $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes, sea $N \leq M$ y $M \in \mathcal{T}_\sigma$. Considere $\pi \colon M \to M/N$ el epimorfismo natural. Entonces usado la definición de prerradical, se tiene que $M/N = \pi(M) = \pi(\sigma(M)) \leq \sigma(M/N) \leq M/N$, lo cual prueba que $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes. Ahora bien, para probar que es cerrada bajo coproductos, sea $(M_i)_I$ una familia arbitraria de elementos de $\mathcal{T}_\sigma$. Dado que $\sigma(M_i) = M_i$, entonces por la Proposición 1.1.3, se tiene que $\sigma(\bigoplus_I M_i) = \bigoplus_I \sigma(M_i) = \bigoplus_I M_i$ probando así que $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrada bajo coproductos. De forma dual se puede demostrar que $\mathcal{F}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos y productos. $\square$

Corolario 1.2.2. *Si $M \in \mathcal{T}_\sigma$ y $N \in \mathcal{F}_\sigma$ entonces* $\operatorname{Hom}(M, N) = 0$.

Ahora bien, una clase es llamada *clase de pretorsión* si es cerrada bajo cocientes y coproductos, y es llamada *clase prelibre de torsión* si es cerrada bajo submódulos y productos.

Proposición 1.2.3. *Existe una correspondencia biyectiva entre prerradicales idempotentes en R-Mod y las clases de pretorsión de R-Mod. Dualmente, existe una correspondencia biyectiva entre los radicales en R-Mod y las clases de prelibres de torsión de R-Mod.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una clase de pretorsión, entonces a esta clase asígnele el prerradical idempotente $\bigvee_{M\in\mathcal{C}} \alpha_M^M$. Si σ es cualquier prerradical entonces considere la clase de pretorsión $\mathcal{T}_\sigma$. Esto da la correpondencia entre las clases de pretorsión y los prerradicales idempotentes debido a la parte (1) del Teorema 1.1.37. De forma dual se muestra la asignación para radicales. $\square$

Proposición 1.2.4 (Ver Proposición 1.5 de [46])**.** *Para todo prerradical σ existe un mayor prerradical idempotente $\widehat{\sigma}$ menor que σ y existe un menor radical $\overline{\sigma}$ mayor que σ.*

Proposición 1.2.5 (Ver Proposición 1.6 de [46])**.** *Sea σ un prerradical. Entonces se cumple que:*

(i) Si σ es idempotente entonces $\overline{\sigma}$ es idempotente.

(ii) Si σ es un radical entonces $\widehat{\sigma}$ es un radical.

Definición 1.2.6. *Una teoría de torsión en R-Mod es un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de clases de módulos, tales que* *(i)* $\text{Hom}(T, F) = 0$ *para todo* $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$.

(ii) *Si* $\text{Hom}(C, F) = 0$ *para todo* $F \in \mathcal{F}$, *entonces* $C \in \mathcal{T}$.

(iii) *Si* $\text{Hom}(T, C) = 0$ *para todo* $T \in \mathcal{T}$ *entonces* $C \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{T}$ *es llamada clase de torsión y sus objetos son módulos de torsión, mientras que* $\mathcal{F}$ *es una clase libre de torsión y sus objetos son módulos libres de torsión.*

Cualquier clase $\mathcal{C}$ de módulos genera una teoría de torsión de la siguiente forma:

$$\mathcal{F} = \{F |\ \text{Hom}(C, F) = 0 \text{ para todo } C \in \mathcal{C}\}.$$

$$\mathcal{T} = \{T |\ \text{Hom}(T, F) = 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}.$$

Claramente, este par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión, y $\mathcal{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathcal{C}$. Dualmente, la clase $\mathcal{C}$ cogenera una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ tal que $\mathcal{F}$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathcal{C}$.

Proposición 1.2.7 (Proposición 2.1, [46]). *Las siguientes propiedades de una clase* $\mathcal{T}$ *de módulos son equivalentes:*

(a) $\mathcal{T}$ *es una clase de torsión para alguna teoría de torsión.*

(b) $\mathcal{T}$ *es cerrada bajo cocientes, coproductos y extensiones.*

Proposición 1.2.8 (Proposición 2.3, [46]). *Existe una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión y los radicales idempotentes.*

Corolario 1.2.9. *Si* σ *es un prerradical idempotente, entonces* $\overline{\sigma}$ *es el radical idempotente correspondiente a la teoría de torsión generada por* $\mathcal{T}_\sigma$.

Definición 1.2.10. *Una teoría de torsión se escinde si todo subobjeto de torsión en* C *es un sumando directo de* C, *para cada objeto* C.

1.3. Anillos semisimples

Definición 1.3.1. R *se llama anillo semisimple si el módulo regular* ${}_RR$ *es semisimple*

En estos anillos no hay distinción de izquierdo o derecho ya que esta definición es equivalente a que el módulo regular derecho R_R sea semisimple como módulo. La estructura de estos anillos está completamente determinada por el Teorema de Wedderburn-Artin, el cual establece que

Teorema 1.3.2 (Teorema de Wedderburn-Artin,Teorema 13.7, [2]). *Un anillo* R *es semisimple si y sólo si* R *es el producto directo de un número finito de anillos simples artinianos.*

En cuanto a su categoría de módulos se pueden decir las siguientes características sintetizadas en el siguiente teorema,

Teorema 1.3.3 (Sección 13, [2]). *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo* R :

(a) R es semisimple

(b) Todo R-módulo es semisimple

(c) Todo R-módulo es inyectivo

(d) Toda sucesión exacta de R-módulos se escinde

(e) Todo R-módulo es proyectivo

En cuanto a los prerradicales, de forma general éstos cumplen propiedades que fueron mostradas en la sección 1.1.1; una de estas propiedades es que los prerradicales abren sumas directas. Es decir, para una familia de R-módulos $\{M_\alpha\}_I$ y un prerradical σ se cumple que $\sigma(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha) = \bigoplus\limits_{\alpha\in I}\sigma(M_\alpha)$. Como todo módulo es semisimple, los prerradicales quedan completamente determinados por su valores en el conjunto de módulos simples, R-Simp.

En primer lugar se tiene este resultado para anillos simples artinianos,

Teorema 1.3.4 (Teorema 9, [37]). *R es un anillo simple artiniano si y sólo si R-pr es una retícula trivial.*

En cuanto a los anillos semisimples, se tiene la siguiente caracterización

Teorema 1.3.5 (Teorema 11, [37]). *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R :*

(a) R es un anillo semisimple

(b) R-pr es una retícula booleana finita

(c) Para cada $\sigma \in R$-pr, $\sigma = \vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid \alpha_S^{E(S)} \preceq \sigma\}$

(d) $1 = \vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R$-simp$\}$

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Dado que todo R-módulo es semisimple, entonces todo prerradical es determinado por sus valores en R-Simp y por tanto R-pr es una gran retícula isomorfa a la retícula de subconjuntos de R-Simp. De ahí, R-pr es finita y booleana.

$(b) \Rightarrow (c)$. En una retícula booleana y atómica, cada elemento es la unión de los átomos debajo de él y lo mismo ocurre en una gran retícula booleana atómica.

$(c) \Rightarrow (d)$. Es inmediato.

$(d) \Rightarrow (a)$. $1 = \mathrm{Soc}_{R\text{-Simp}}$ entonces, $R = \mathrm{Soc}_{R\text{-Simp}}(R)$ y por tanto R es semisimple artiniano. □

Con los teoremas anteriores se pueden dar ejemplos de retículas de prerradicales para ciertos anillos, como el caso de anillos simples artinianos y anillos semisimples con dos y tres módulos simples respectivamente. Más aún se puede probar que si n es el número de módulos simples no isomorfos, entonces la cardinalidad de R-pr es 2^n.

Ejemplo 1.3.6. *R es un anillo simple artiniano si y sólo si R-pr es la retícula trivial dada por*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[d, dash] \\ \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.3.7. *Si R es un anillo semisimple y R-simp $= \{S, T\}$, con $S \neq T$, entonces la retícula de prerradicales, R-pr, viene dada por*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \alpha_S^{ES} \arrow[dr, dash] & & \alpha_T^{ET} \arrow[dl, dash] \\ & \mathbf{0} & \end{tikzcd}$$

Donde ES es la cápsula inyectiva de S y ET la cápsula inyectiva de T.

Ejemplo 1.3.8. *Sea R es un anillo semisimple tal que $|R\text{-simp}| = 3$. Suponga que R-simp $= \{S, T, U\}$, entonces existen ideales izquierdos máximos I, J, K de R tales que $S \cong R/I, T \cong R/J$ y $U \cong R/K$. De esta forma la retícula de prerradicales queda descrita de la siguiente forma:*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \omega_K^R \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \omega_J^R \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \omega_I^R \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ \alpha_S^{ES} \arrow[dr, dash] & \alpha_T^{ET} \arrow[d, dash] & \alpha_U^{EU} \arrow[dl, dash] \\ & \mathbf{0} & \end{tikzcd}$$

Capítulo 2

Anillos puro-semisimples izquierdos

2.1. Producto tensorial de módulos

Se considerará a R un anillo asociativo con 1. Esta sección es sólo una herramienta introductoria para poder definir los módulos planos y las sucesiones exactas puras en términos del producto tensorial por lo que más contenido en detalle y demostraciones de resultados presentados aquí pueden ser encontrados en el capítulo 10 y 11 de [10].

Definición 2.1.1. *Considere ${}_RN, M_R$ y G un grupo abeliano. Una función $\beta\colon M \times N \to G$ es R-balanceada si*

1. $\beta(m_1 + m_2, n) = \beta(m_1, n) + \beta(m_2, n)$ *para todo* $m_1, m_2 \in M$ *y* $n \in N$.
2. $\beta(m, n_1 + n_2) = \beta(m, n_1) + \beta(m, n_2)$ *para todo* $m \in M$ *y* $n_1, n_2 \in N$.
3. $\beta(mr, n) = \beta(m, rn)$ *para todo* $m \in M, n \in N$ *y* $r \in R$.

Definición 2.1.2. *Un producto tensorial entre M_R y ${}_RN$ es un par $\langle T, \tau\rangle$ donde T es un grupo abeliano y $\tau\colon M \times N \to T$ es una función R-balanceada que cumple la propiedad universal: Para cada función R-balanceada $\beta\colon M \times N \to G$ existe un único morfismo $f\colon T \to G$ de grupos abelianos tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, dashed, "f"] \\ M \times N \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "\beta"'] & G \end{tikzcd}$$

Lo anterior dice que $\tau\colon M \times N \to T$ es un objeto inicial de cierta categoría.

Teorema 2.1.3. *Si existe el producto tensorial. éste es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Todo objeto inicial es único salvo isomorfismo. $\square$

Teorema 2.1.4. *El producto tensorial de módulos existe.*

Demostración. Ver capítulo 10 de [10] □

Ahora bien, dados los R-módulos M_R y $_RN$. El producto tensorial ente M_R y $_RN$ será denotado por $M \otimes_R N$. Si el anillo es claro, se denotará por $M \otimes N$.

Proposición 2.1.5. *Considere M_R y $_RN$. Entonces:*

(1) $M \otimes_R R \cong M_R$

(2) $R \otimes_R N \cong_R N$

(3) Si se tiene $_RN_T$, entonces $(M \otimes_R N) \otimes_T L \cong M \otimes_R (N \otimes_T L)$ como grupos abelianos.

Demostración. Las partes (1) y (2) son consecuencias del Teorema 1.12 de [42]. Finalmente (3) es el Teorema 14, página 371 de [10]. □

Teorema 2.1.6. *Si $I \leq R$ es un ideal y $_RM$, entonces $R/I \otimes M \cong M/IM$.*

Demostración. Es el Ejemplo 8 de la página 370 de [10]. □

Teorema 2.1.7. *Sean M, M' R-módulos derechos y sean N, N', R-módulos izquierdos. Entonces hay únicos isomorfismos de grupos*

$$(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N)$$
$$M \otimes_R (N \oplus N') \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N')$$

Demostración. Ver el Teorema 17, página 373 de [10]. □

Teorema 2.1.8. *Sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos derechos y $\{N_j\}_{j\in J}$ una familia de R-módulos izquierdos. Sean $M_R = \bigoplus_{i\in I} M_i$ y $_RN = \bigoplus_{j\in J} N_j$. Entonces,*

$$M \otimes_R N \cong \bigoplus_{j\in J}\bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N_j).$$

Demostración. Ver el Teorema 17, página 373 de [10]. □

Corolario 2.1.9. $R \otimes M^{(I)} \cong (R \otimes M)^{(I)} \cong M^{(I)}$.

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.1.7. □

2.2. Límites directos en R-Mod

Más contenido acerca de esta sección puede ser consultada en [42]. Además parte del contenido de esta sección y la siguiente pueden ser consultadas en [40].

Definición 2.2.1. *Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es dirigido superiormente si para todo $p, q \in P$, existe $r \in P$ tal que $p, q \leq r$. Si $\mathcal{M}$ es una categoría y I es un conjunto dirigido, se dice que una pareja $(\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i \xrightarrow{f_{ij}} M_j\}_{i\leq j})$ es un sistema dirigido en $\mathcal{M}$ si cada $M_i \in \mathcal{M}$, y f_{ij} es un morfismo en $\mathcal{M}$ para todo $i \leq j$ con las siguientes propiedades:*

1. f_{ii} *es la identidad en* M_i.

2. $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ *para todo* $i \leq j \leq k$.

Se abreviará el sistema $(\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i \xrightarrow{f_{ij}} M_j\}_{i\leq j})$ *por* $\{M_i, f_{ij}\}$.

Se denotará por $N \leq_{f.g.} M$ cuando N es un submódulo finitamente generado de M.

Ejemplo 2.2.2. *Sea* ${}_RM$ *un R-módulo izquierdo. Entonces, el par* $(\{N \leq M \mid N \text{ es f.g.}\}, \{K \xrightarrow{f_{K,L}} L\})$ *donde* $f_{K,L}$ *es la inclusión, es un sistema dirigido, ya que, si* $K, L \leq M$ *son finitamente generados, entonces* $K, L \hookrightarrow L + K \leq_{f.g.} M$.

Definición 2.2.3. *Un cono definido desde el sistema dirigido* $(\{M_i\}_{i\in I}, \{M_i \xrightarrow{f_{ij}} M_j\}_{j\leq i})$ *hacia un conjunto* X *es una familia de morfismos* $\{M_i \xrightarrow{\psi_i} X\}_I$ *tal que si* $i \leq j$ *entonces* $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$. *Es decir, si* $i \leq j$, *entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & M_j \arrow[dl, "\psi_j"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

conmuta.

El límite directo puede ser definido en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ por medio de una propiedad universal.

Definición 2.2.4. *Sea* $\langle X_i, f_{ij}\rangle$ *un sistema dirigido de objetos y morfismos de* $\mathcal{C}$. *El límite directo de ese sistema es un objeto* X *en* $\mathcal{C}$ *junto con morfismos* $\phi_i\colon X_i \to X$ *que satisfacen* $\phi_i = \phi_j \circ f_{ij}$. *El par* $\langle X, \phi_i\rangle$ *debe ser universal en el sentido de que para cualquier otro par* $\langle Y, \psi_i\rangle$ *existe un único morfismo* $u\colon X \to Y$ *que realiza que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\ & X \arrow[d, dashed, "!u"] & \\ & Y & \end{tikzcd}$$

conmute para todo $i, j \in I$.

El límite directo es a menudo denotado como $X = \varinjlim X_i$, *cuando el sistema directo* $\langle X_i, f_{ij}\rangle$ *se entiende. Por otra parte, cabe mencionar que el límite directo se puede ver como el objeto inicial de cierta categoría.*

Ejemplo 2.2.5. *El sistema dirigido* $(\{N \leq_{f.g.} M\}, \{K \overset{\iota_{K,L}}{\hookrightarrow} L\})$ *del ejemplo 2.2.2 tiene límite directo. Más aún,* $\varinjlim\{N \leq_{f.g.} M\} \cong M$.

Considere el cono

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\iota_{K,L}"] \arrow[dr, "\psi_K"'] & & L \arrow[dl, "\psi_L"] \\ & {}_RA & \end{tikzcd}$$

para el sistema $(\{N \leq_{f.g.} M\}, \{K \overset{\iota_{K,L}}{\hookrightarrow} L\})$ *y para cada* $x \in M$, *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[rr, "\iota_{Rx,L}"] \arrow[dr, "\psi_{Rx}"'] & & L \arrow[dl, "\psi_L"] \\ & {}_RA & \end{tikzcd}$$

Defina $h\colon M \to A$ *como* $h(x) = \psi_{Rx}(x)$, *está bien definido, pues si* $x \in N \leq_{f.g.} M$, *entonces* $Rx \hookrightarrow N$, *y*

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[rr, "\iota_{Rx,N}"] \arrow[dr, "\psi_{Rx}"'] & & N \arrow[dl, "\psi_N"] \\ & {}_RA & \end{tikzcd}$$

conmuta y $\psi_{Rx}(x) = \psi_N(x)$. *Además resulta que* h *es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\iota_{K,L}"] \arrow[dr, "\iota_K"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_K"'] & & L \arrow[dl, "\iota_L"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_L"] \\ & M \arrow[d, dashed, "!h"] & \\ & A & \end{tikzcd}$$

Sólo falta verificar que h *es un homomorfismo, en efecto: Sean* $x, y \in M$ *entonces* $h(x+y) = \psi_{R(x+y)}(x+y)$, *pero se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[rr, "\iota_{Rx,Rx+Ry}"] \arrow[dr, "\psi_{Rx}"'] & & Rx + Ry \arrow[dl, "\psi_{Rx+Ry}"] \\ & {}_RA & \end{tikzcd}$$

por el cual se obtiene que $h(x) = \psi_{Rx}(x) = \psi_{Rx+Ry}(x)$ *y de manera análoga, con un diagrama similar,* $h(y) = \psi_{Ry}(y) = \psi_{Rx+Ry}(y)$. *De esta forma, como* ψ_{Rx+Ry} *es un homomorfismo, y haciendo uso del resultado anterior se concluye que:* $h(x+y) = \psi_{R(x+y)}(x+y) = \psi_{R(x+y)}(x) + \psi_{R(x+y)}(y) = h(x) + h(y)$. *La R-linealidad se argumenta de manera similar probando así que* h *es un homomorfismo.*

Por tanto, $\varinjlim\{N \leq_{f.g.} M\} \cong M$.

Se puede formular el resultado del ejemplo anterior en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.6. *Todo R-módulo es el límite directo de sus submódulos finitamente generados.*

Los límites directos no siempre existen en todas las categorías. Sin embargo, la categoría R-Mod sí es cerrada bajo límites directos.

Teorema 2.2.7. *Todo sistema dirigido $\{M_i, \varphi_{ij}\}$ de R-módulos tiene límite directo.*

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $\iota_i \colon M_i \to \bigoplus M_i$ la i-ésima inclusión en la suma. Defina

$$\varinjlim M_i = (\bigoplus M_i)/S,$$

Donde S es el submódulo generado por todos los elementos $\iota_j f_{ij}(m_i) - \iota_i(m_i)$, donde $m_i \in M_i$ y $i \leq j$. Si se define ahora, $\psi \colon M_i \to \varinjlim M_i$ por $m_i \mapsto \iota_i(m_i) + S$, entonces se puede verificar de manera directa que se satisface la propiedad universal del límite directo. $\square$

Los elementos de $\varinjlim N_i$ serán denotados por $\overline{n}$. Ahora, sea I un conjunto dirigido fijo. Sean $M = \{M_i, f_{ij}\}$ y $N = \{N_i, g_{ij}\}$ sistemas dirigidos de R-módulos sobre I. Un morfismo $\varphi \colon M \to N$ se obtiene mediante morfismos $\varphi \colon M_i \to N_i$ para cada $i \in I$, tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "f_{ij}"'] & N_i \arrow[d, "g_{ij}"] \\ M_j \arrow[r, "\varphi_j"'] & N_j \end{tikzcd}$$

conmuta cuando $i \leq j$.

Si $\varphi \colon M \to N$ es un morfimo de sistema dirigidos, como en la parte anterior, se define $\vec{\varphi} \colon \varinjlim M_i \to \varinjlim N_i$ como: sea $x \in \varinjlim M_i$ representado por $x_i \in M$ (ver demostración del Teorema 2.2.7) y sea $\vec{\varphi}\,(x)$ representado por $\varphi_i(x_i) \in N_i$. Se puede verificar que esta definición es independiente de la elección de los representantes x_i.

El siguiente teorema establece la relación entre los límites directos y el producto tensorial.

Teorema 2.2.8. *$M \otimes \_$ conmuta con $\varinjlim\{\_\}$. Es decir, $M \otimes \varinjlim\{N_i\} \cong \varinjlim\{M \otimes N_i\}$.*

Demostración. Sea $(\{{}_R N_i\}_I, \{N_i \xrightarrow{f_{ij}} N_j\}_{i \leq j})$ un sistema dirigido de R-módulos y $\{N_i \xrightarrow{\psi_i} \varinjlim\{N_i\}\}$ su límite directo. Al tensar con ${}_R M$ se obtiene un nuevo sistema dirigido $(\{M \otimes N_i\}_I, \{M \otimes N_i \xrightarrow{1_M \otimes f_{ij}} M \otimes N_j\}_{i \leq j})$, y un cono $\{M \otimes N_i \xrightarrow{1_M \otimes \psi_i} M \otimes \varinjlim\{N_i\}\}$. Para ver que $M \otimes \varinjlim\{N_i\}$ tiene la propiedad universal del límite directo, si $\{M \otimes N_i \xrightarrow{\gamma_i} X\}_I$ es otro cono, basta definir la función bilineal $\gamma \colon M \times \varinjlim\{N_i\} \to X$, como $\gamma(m, \overline{n_i}) = \gamma_i(m \otimes n_i)$. Luego por la propiedad universal del producto tensorial, hay un único $M \otimes \varinjlim\{N_i\} \xrightarrow{\psi} X$ tal que $\psi \circ \otimes = \gamma$. Así, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N_i \arrow[rr, "1_M \otimes f_{ij}"] \arrow[dr, "1_M \otimes \psi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_i"'] & & M \otimes N_j \arrow[dl, "1_M \otimes \psi_j"'] \arrow[ddl, bend left, "\gamma_j"] \\
& M \otimes \varinjlim\{N_i\} \arrow[d, dashed, "!\psi"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

y se concluye que $M \otimes \varinjlim\{N_i\} \cong \varinjlim\{M \otimes N_i\}$. $\square$

Proposición 2.2.9. *Sea I un conjunto dirigido. Suponga que hay una familia de morfismos de sistemas directos sobre I*

$$\{K_i, \varphi_{ij}\} \xrightarrow{t} \{M_i, \psi_{ij}\} \xrightarrow{s} \{N_i, \gamma_{ij}\}$$

tal que

$$0 \to K_i \xrightarrow{t_i} M_i \xrightarrow{s_i} N_i \to 0$$

es exacta para cada $i \in I$. Entonces, hay una sucesión exacta de módulos

$$0 \to \varinjlim K_i \xrightarrow{\overrightarrow{t}} \varinjlim M_i \xrightarrow{\overrightarrow{s}} \varinjlim N_i \to 0.$$

Demostración. Suponga que $x \in \varinjlim K_i$ y que $\overrightarrow{t}\ x = 0$ en $\varinjlim M_i$. Sea $\varinjlim K_i = (\bigoplus K_i)/S$ y sea $\lambda_i \colon K_i \to \bigoplus K_i$ la i-ésima inclusión; sea $\varinjlim M_i = (\bigoplus M_i)/T$ y $\mu_i \colon M_i \to \bigoplus M_i$ la i-ésima inclusión. Entonces, $x = \lambda_i a_i + S$ y $\overrightarrow{t}\ (x) = \mu_i t_i a_i + T$. Dado que $\overrightarrow{t}\ (x) = 0$, existe $j \geq i$ con $\psi_{ij} t_i a_i = 0$. Como t es un morfismo entre sistemas directos, se tiene que $t_j \varphi_{ij} a_i = 0$. Pero, t_j es mono, de donde $\varphi_{ij} a_i = 0$ y así $x = \lambda_i a_i + S = 0$. Esto prueba que $\overrightarrow{t}$ es mono. La demostración de que $\overrightarrow{s}$ es epi: si $y \in \varinjlim N_i$ es representado por $y_i \in N_i$, entonces existen $x_i \in M_i$ tal que $s_i(x_i) = y_i$ y los x_i representan un elemento x de $\varinjlim M_i$ tal que $\overrightarrow{s}\ (x) = y$.

Ahora bien, por la definición de $\overrightarrow{t}$, es claro que $\operatorname{Im} \overrightarrow{t} \subseteq \ker \overrightarrow{s}$. Así, suponga que $x \in \ker \overrightarrow{s}$, y sea x representado por $x_i \in M_i$. De esta forma, $s_i(x_i) = 0$ en el límite, por lo tanto $\psi_{ij} t_i(x_i) = 0$ para algún $j \geq i$. Se puede asumir que $j = i$. Entonces $x_i \in \ker s_i = \operatorname{Im} t_i$ y así, $x_i = t_i(z_i)$ para algún $z_i \in L_i$. Luego, se sigue que $x \in \operatorname{Im} \overrightarrow{t}$ probando así la exactitud. $\square$

2.3. Módulos planos, módulos puro-inyectivos y sucesiones puras

La mayoría de los resultados presentados en esta sección fueron tomados de [2], [10] y [42].

Definición 2.3.1. *M_R es plano si $M \otimes_R \_\_$ es un funtor exacto. Es decir, si $M \otimes_R \_\_$ es exacto izquierdo.*

Ejemplo 2.3.2. *R_R es plano pues $R \otimes_R \_\_ \cong Id$. Es decir, para cada R-módulo M se tiene que $R \otimes_R M \cong M$.*

Teorema 2.3.3. *$\bigoplus_{i \in I} P_k$ es plano si y sólo si cada P_k es plano.*

Demostración. En primer lugar, note que si $\{f_k \colon A'_k \to A_k\}$ es una familia de morfismos, existe un único morfismo $\oplus f_k \colon \bigoplus A'_k \to \bigoplus A_k$ con $\sum a'_k \mapsto \sum f(a'_k)$; Más aún, $\oplus f_k$ es mono si y sólo si cada f_k es mono.

Suponga que $f \colon M \to N$ es mono. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus P_k) \otimes M \arrow[r, "1 \otimes f"] \arrow[d] & (\bigoplus P_k) \otimes N \arrow[d] \\
\bigoplus (P_k \otimes M) \arrow[r, "\oplus(1_k \otimes f)"] & \bigoplus (P_k \otimes N)
\end{tikzcd}$$

donde $1_k = 1_{P_k}$ y los morfismos verticales son isomorfismos. Por la indicación inicial, se tiene que $1 \otimes f$ es mono si y sólo si $1_k \otimes f$ es mono, esto es, $\bigoplus P_k$ es plano si y sólo si cada P_k es plano. □

Corolario 2.3.4. *Los módulos libres son planos.*

Demostración. Si L_R es libre, entonces para algún conjunto $X, L \cong R^{(X)}$. Este último módulo es plano, ya que R es plano. □

Corolario 2.3.5. *Los módulos proyectivos son planos.*

Demostración. Si un módulo M es proyectivo entonces es sumando directo de un módulo libre y por el Teorema 2.3.3 se tiene que M es plano. □

Teorema 2.3.6. *El límite directo de un sistema de módulos planos, es plano.*

Demostración. Sea $(\{P_i\}_I, \{P_i \stackrel{f_{ij}}{\longrightarrow} P_j\}_{i \leq j})$ un sistema dirigido de R-módulos planos y $0 \to L \stackrel{\varphi}{\to} M$ exacta. Se quiere probar que $L \otimes \varinjlim\{P_i\} \stackrel{\varphi \otimes Id}{\longrightarrow} M \otimes \varinjlim\{P_i\}$ es mono. Dado que cada P_i es plano, para cada $i \in I$, se tiene que $0 \to L \otimes P_i \stackrel{\varphi \otimes Id_{P_i}}{\longrightarrow} M \otimes P_i$ es exacta. Por otro lado, se sabe que $L \otimes \varinjlim\{P_i\} \cong \varinjlim\{L \otimes P_i\}$ y lo mismo para M, así por la Proposición 2.2.9, se tiene que $0 \to \varinjlim\{L \otimes P_i\} \to \varinjlim\{M \otimes P_i\}$ es exacta y por tanto, $L \otimes \varinjlim\{P_i\} \to M \otimes \varinjlim\{P_i\}$ es mono y de esta forma se concluye que $\varinjlim\{P_i\}$ es plano.

□

Corolario 2.3.7. *Si todo submódulo finitamente generado de M es plano, entonces M es plano.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.6, se sabe que todo módulo es el límite directo de sus submódulos finitamente generados, y por el Teorema 2.3.6, se obtiene el resultado. □

Definición 2.3.8. *Una sucesión exacta $0 \to K \to L \to M \to 0$ es pura si para todo R-módulo derecho A_R, la sucesión $0 \to A \otimes K \to A \otimes L$ es exacta. Es decir, $0 \to A \otimes K \to A \otimes L \to A \otimes M \to 0$ es exacta (La exactitud de la derecha siempre se tiene).*

Definición 2.3.9. *Un submódulo N de un R-módulo M se llama submódulo puro de M en el caso de que la sucesión exacta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ sea pura.*

En el capítulo 4 de [32], se muestra una equivalencia a la definición anterior:

Proposición 2.3.10. *N es puro en M si y sólo si para un sistema finito de ecuaciones lineales $\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j = a_j, 1 \leq j \leq m$, donde $r_{ij} \in R$ y $a_i \in N$, si el sistema tiene solución $(s_1, ..., s_n) \in M^n$, también tiene solución $(t_1, ..., t_n) \in N^n$.*

Definición 2.3.11. *Un R-módulo $_RE$ se dice puro-inyectivo si $_RE$ tiene la propiedad de inyectividad relativa a la clase de sucesiones exactas puras izquierdas.*

Por la Proposición 2.2.6, todo R-módulo es límite directo de sus submódulos finitamente generados y luego por la Proposición 2.2.9 se sabe que los límites directos preservan monomorfismos, de esta forma se puede concluir el siguiente teorema:

Teorema 2.3.12. *Una sucesión exacta $0 \to K \to L \to M \to 0$ es pura si y sólo si para todo F_R finitamente generado se tiene que $0 \to F \otimes K \to F \otimes L \to F \otimes M \to 0$ es exacta.*

Lema 2.3.13. *Sea $_RE$ es cogenerador inyectivo en R-Mod. Entonces $0 \to N \to M$ es exacta si y sólo si $\mathrm{Hom}_R(M, E) \to \mathrm{Hom}_R(N, E) \to 0$ es exacta.*

Recuerde que un R-módulo M es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Hom}(\_, M)$ es exacto derecho, por lo tanto manda monos a epis.

El siguiente teorema es una caracterización para módulos planos:

Teorema 2.3.14. *Sea $_RP$ un módulo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $_RP$ es plano

(b) Toda sucesión $0 \to A \to B \to P \to 0$ es pura

(c) Existe una sucesión $0 \to M \to N \to P \to 0$ pura con N plano.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $0 \to A \to B \to P \to 0$ exacta. Por el Teorema 2.3.12 se medirá la pureza en módulos finitamente generados. Sea F_R finitamente generado, por definición hay una sucesión exacta $0 \to K \to R^n \to F \to 0$. Dado que P y R^n son planos y $R^n \otimes M \cong M^n$ para todo R-módulo M, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & K\otimes A \arrow[r, "f\mapsto d"] \arrow[d, "f\mapsto g"] & K\otimes B \arrow[r, "d\mapsto e"] \arrow[d, "d\mapsto c"] & K\otimes P \arrow[r] \arrow[d, "e\mapsto 0\Rightarrow e=0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^n \arrow[r, "b\mapsto c", "g\mapsto c\Rightarrow b=g\Rightarrow a=0"'] \arrow[d, "b\mapsto a"] & B^n \arrow[r, "c\mapsto 0"] \arrow[d, "c\mapsto 0"] & P^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & F\otimes A \arrow[r, "a\mapsto 0"] \arrow[d] & F\otimes B \arrow[r] \arrow[d] & F\otimes P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Se quiere probar que $F\otimes A\to F\otimes B$ es mono, pero esto se ve haciendo la persecución de elementos en el diagrama en orden alfabético.

$(b)\Rightarrow(c)$. Dado que R es un generador de R-Mod, entonces se tiene la exactitud de $R^{(X)}\to P\to 0$, para cierto conjunto X. Si K es el núcleo de dicho epimorfismo, entonces se tiene que existe una sucesión exacta pura $0\to K\to R^{(X)}\to P\to 0$, por hipótesis y además $R^{(X)}$ es plano.

$(c)\Rightarrow(a)$. Considere $0\to I\hookrightarrow R\to R/I\to 0$. Al aplicar el funtor $Id\otimes\_$, a la sucesión de la hipótesis se obtiene:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r] & I\otimes M \arrow[r, "e\mapsto f", "f\mapsto c\Rightarrow f=b\Rightarrow a=0"'] \arrow[d, "e\mapsto d"] & I\otimes N \arrow[r, "b\mapsto a"] \arrow[d, "b\mapsto c"] & I\otimes P \arrow[r] \arrow[d, "a\mapsto 0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d\mapsto c"] \arrow[d, "d\mapsto\overline{d}"] & N \arrow[r, "c\mapsto 0"] \arrow[d, "c\mapsto\overline{0}"] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M/IM \arrow[r, "\overline{d}\mapsto\overline{0}\Rightarrow\overline{d}=\overline{0}"'] \arrow[d] & N/IN \arrow[r] \arrow[d] & P/IP \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Pues, $R\otimes\_\cong Id$ y $R/I\otimes A\cong A/IM$ para todo R-módulo A. Lo que se quiere es mostrar que $I\otimes P\to P$ es mono para lo cuál se verifica la persecución de elementos. $\square$

Teorema 2.3.15. *Sea ${}_RE$ cogenerador inyectivo y ${}_RP_S$, entonces P_S es plano si y sólo si ${}_S\operatorname{Hom}(P,E)$ es inyectivo.*

Demostración. Suponga que P_S es plano, se probará que $\operatorname{Hom}(P,E)$ es inyectivo. Considere $0\to N\to M$ exacta; dado que P_S es plano, entonces se tiene la exactitud $0\to P\otimes N\to P\otimes M$ y como E es un cogenerador inyectivo, por el Lema 2.3.13 se tiene que $\operatorname{Hom}(P\otimes M,E)\to\operatorname{Hom}(P\otimes N,E)\to 0$ es exacta. Pero, se sabe que $\operatorname{Hom}(P\otimes M,E)\cong\operatorname{Hom}(M,\operatorname{Hom}(P,E))$ y lo mismo para N (par adjunto). De esta forma, se obtiene que $\operatorname{Hom}(P,E)$ es inyectivo.

Recíprocamente, suponga ahora que $\mathrm{Hom}(P,E)$ es inyectivo. Por demostrar que P_S es plano, para esto considere $0 \to N \to M$, se mostrará que $0 \to P \otimes N \to P \otimes M$ es exacta. Dado que $\mathrm{Hom}(P,E)$ es inyectivo, entonces se tiene la exactitud $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(P,E) \to \mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}(P,E)) \to 0$. Por el mismo argumento utilizando en la primera parte (par adjunto), se tiene que $\mathrm{Hom}(P \otimes M, E) \to \mathrm{Hom}(P \otimes N, E) \to 0$ es exacta y por ser E cogenerador inyectivo, se aplica el Lema 2.3.13 y se obtiene el resultado.

□

Lema 2.3.16. *El grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo de la categoria Ab.*

Demostración. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible, siendo éste un cociente de $\mathbb{Q}$, entonces es inyectivo. Sea M un grupo abeliano, y sea $m \in M$, con $m \neq 0$. Si m tiene orden infinito, defina $f\colon \langle m \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $m \mapsto \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$; si m tiene orden finito, dígase n, defina $f\colon \langle m \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $m \mapsto 1/n + \mathbb{Z}$. En ambos casos, $f(m) \neq 0$. Ahora se usa la inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ para extender f a todo M. □

Tomando, $R = \mathbb{Z}$ y $E = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se obtiene:

Corolario 2.3.17. *P_S es plano si y sólo si ${}_S\mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es inyectivo.*

El siguiente criterio para planitud puede ser comparado en cierta forma al criterio de Baer para la inyectividad.

Teorema 2.3.18. *${}_RP$ es plano si y sólo si para todo ideal derecho I de R se tiene que $0 \to I \otimes P \to R \otimes P \cong P$ es exacta.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Es claro por la definición de plano.

($\Leftarrow$). Sea $I \overset{\iota}{\hookrightarrow} R$ por hipótesis, $0 \to I \otimes P \to R \otimes P$ es exacta y dado que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo, esto implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}(R, \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(I, \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(R \otimes P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(I \otimes P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

conmute. Esto quiere decir que para cada $I \overset{\varphi}{\to} \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ existe $R \overset{\psi}{\to} \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tal que $\varphi = \psi \circ \iota$. Como lo anterior ocurre para cada ideal derecho I de R, aplicando el Criterio de Baer, $\mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es inyectivo y por el Teorema 2.3.15, P es plano. □

El resultado anterior, se puede mejorar si se restringe a ideales finitamente generados.

Teorema 2.3.19. *${}_RP$ es plano si y sólo si para todo ideal derecho J finitamente generado de R se tiene que $0 \to J \otimes P \to R \otimes P \cong P$ es exacta.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Es por el Teorema 2.3.18.

($\Leftarrow$). Sea $I \overset{\iota}{\hookrightarrow} R$. Por lo demostrado en 2.3.18, basta demostrar que $I \otimes P \overset{\iota \star 1}{\to} P$ es mono, donde $i \otimes p \mapsto ip$. Sea $x \in I \otimes P$, entonces $x = \sum_{k=1}^{n} j_k \otimes x_k$ con $j_k \in I$, $x_k \in P$. Considere el ideal finitamente generado $J = \langle j_1, ..., j_n \rangle \hookrightarrow R$. Note que $x \in J \otimes P$. Si $x \mapsto 0$, entonces por la hipótesis, $x = 0$. Esto prueba que $\iota \star 1$ es mono y P es plano. □

Lema 2.3.20. *Sea I un ideal bilateral de R y sea $_RN \leq_R M$ Entonces son equivalentes:*

(a) $IN = N \cap IM$.

(b) $0 \to (R/I) \otimes_R N \to (R/I) \otimes_R M$ *es un monomorfismo de R-módulos*

Teorema 2.3.21. *Sea I un ideal bilateral de R. Entonces son equivalentes:*

(a) Para todo $N \leq M, IN = N \cap IM$.

(b) Para todo $_RJ \leq R, IJ = I \cap J$.

(c) $(R/I)_R$ *es plano*

Demostración. (a) implica (b) es directo, y (b) implica (c) es por el Teorema 2.3.18 junto con el Lema 2.3.20 y finalmente (c) implica (a) es por el Lema 2.3.20. □

2.4. Anillos puro-semisimples

Para poder encontrar las caracterizaciones que hagan posible generalizar resultados hallados en los anillos semisimples y realizar un estudio en la retícula de prerradicales de un anillo puro-semisimple (izquierdo), es de suma importancia tener en cuenta como trabajar la Teoría de pureza y puro-inyectividad. Esta teoría podría ser llamada *la Teoría de sistemas de ecuaciones lineales para módulos*. Un sistema típico dentro de este formato tiene la siguiente forma: Empezando con un R-módulo M, un elemento $(m_i)_{i\in I} \in M^I$, y una matriz $(r_{ij})_{i\in I, j\in J}$ con un número finito de elementos de R en cada fila y de esta forma considerar el sistema

$$\sum_{j\in J} r_{ij}X_j = m_i \ \ (i \in I), \quad (\star)$$

y se llama a cada elemento de M^J que satisface la ecuación $(\star)$ una solución en M. Un primer indicador de una relación entre tales sistemas y la teoría de pureza y puro-inyectividad fue expuesta por Fieldhouse ([23]), quien observó que la pureza de un submódulo N de un R-módulo M es equivalente a la siguiente condición: *Todo sistema finito de ecuaciones lineales con coeficientes al lado derecho en N, el cual es soluble en M, tiene solución en N.* Este resultado daba como resultado un puente que conectaba sistemas lineales y el concepto puro-inyectivo, pero tales sistemas no tienen que ser finitos como dice el siguiente resultado

Teorema 2.4.1 (Warfield,1969, [48])**.** *Para cada $M \in R$-Mod, son equivalentes*

(1) M es puro-inyectivo [1]

(2) Cualquier sistema de la forma $(\star)$ que sea finitamente soluble en M (esto es, tiene la propiedad que, para cualquier subconjunto finito $J \subseteq I$, el subsistema finito de ecuaciones indicadas por $j \in J$ es soluble en M.) tiene una solución global en M.

[1] Ver definición de módulo puro-inyectivo en la Definición2.3.11

(3) M es un sumando directo de un R-módulo Hausdorff y compacto N (es decir, N es un grupo abeliano compacto y Hausdorff tal que todas las multiplicaciones por elementos de R son continuas).

Aunque la parte (3) del teorema anterior relaciona conceptos topológicos, las partes (1) y (2) del Teorema 2.4.1 traen consigo ciertas implicaciones interesantes. Para observarlas, se debe definir lo siguiente:

Definición 2.4.2. *Dado un anillo asociativo con identidad, un R-módulo M se dice algebraicamente compacto si cada sistema*

$$\sum_{j\in J} r_{ij}X_j = m_i \quad (i \in I)$$

basado en una matriz, (r_{ij}), con un número finito de elementos de R y $m_i \in M$, el cuál es finitamente soluble en M, tiene solución global en M. Más aún, M se dice $\sum$-algebraicamente compacto en caso de que todas las sumas directas de copias de M son algebraicamente compactos.

Luego, el Teorema de Warfield, 2.4.1, lo que afirma es que los módulos puro-inyectivos y los módulos algebraicamente compactos coinciden.

Definición 2.4.3. *Un anillo R es puro-semisimple (izquierdo) si toda sucesión exacta pura de R-módulos izquierdos se escinde.*

Se sabe del capítulo anterior que dado un anillo semisimple R, es posible dar caracterizaciones para la categoría R-Mod y la clase R-pr. De hecho, estas caracterizaciones se pueden sintetizar diciendo que todo R-módulo es semisimple e inyectivo y R-pr es una retícula booleana finita. Lo que se desea en este capítulo es dar caracterizaciones similares que extiendan los resultados anteriores pero tomando en cuenta ahora, los anillos puro-semisimples izquierdos. De ahora en adelante, se tomará siempre como referencia anillos puro-semisimples izquierdos a menos que se diga contrario.

Teorema 2.4.4. *R es un anillo puro-semisimple izquierdo si y sólo si todo R-módulo izquierdo es puro-inyectivo.*

Demostración. Sea R un anillo puro-semisimple y se $M \in R$-Mod. Se deberá probar que M es puro-inyectivo; para esto considere una sucesión exacta pura $0 \to K \xrightarrow{\lambda} L$ y un R-morfismo $K \xrightarrow{f} M$. Dado que R es puro-semisimple, existe $\eta\colon L \to K$ tal que $\eta \circ \lambda = 1_K$. Tome $F = f \circ \eta$ y se prueba lo deseado.

Recíprocamente, suponga ahora que todo R-módulo es puro-inyectivo y considere una sucesión exacta pura, $0 \to K \xrightarrow{\lambda} L \xrightarrow{\mu} M \to 0$. Por hipótesis K es puro-inyectivo y por tanto se tiene que existe $F\colon L \to K$ tal que

$$\begin{tikzcd} & K & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[u, "Id_K"] \arrow[r, "\lambda"'] & L \arrow[ul, dashed, "F"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Esto es, $F \circ \lambda = Id_K$, lo cual implica que $0 \to K \xrightarrow{\lambda} L \xrightarrow{\mu} M \to 0$ se escinde y R es puro-semisimple.

$\square$

De acuerdo a este teorema y al hecho de que todo módulo inyectivo es puro-inyectivo, es natural que el primer ejemplo para anillos puro-semisimples sea el siguiente:

Ejemplo 2.4.5. *Todo anillo semisimple es puro-semisimple izquierdo y derecho; y por tanto de representación finita.*

Para poder dar una caracterización en torno a la descomposición de módulos cuando un anillo es puro-semisimple izquierdo, se usa como herramienta el siguiente teorema cuya demostración será omitida pero puede ser encontrada con más detalle en [50].

Teorema 2.4.6 (Gruson-Jensen,Huisgen-Zimmermann,[51])**.** *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) Todo R-módulo izquierdo es una suma directa de submódulos finitamente generados izquierdos.

(2) Existe un número cardinal $\aleph$ tal que todo R-módulo izquierdo es una suma directa de submódulos $\aleph$-generados izquierdos.

(3) Todo R-módulo izquierdo es suma directa de submódulos inescindibles izquierdos.

(4) Todo R-módulo izquierdo es algebraicamente compacto.

Por el Teorema 2.4.4 y el Teorema de Warfield, 2.4.1, se establece el siguiente resultado que dan caracterizaciones para un anillo puro-semsisimple izquierdo.

Teorema 2.4.7. *Para un anillo R son equivalentes las siguientes condiciones:*

(1) R es puro-semisimple izquierdo.

(2) Toda sucesión exacta pura de módulos izquierdos se escinde.

(3) Todo R-módulo izquierdo es puro-inyectivo .

(4) Todo R- módulo izquierdo es una suma directa de submódulos finitamente generados izquierdos.

Definición 2.4.8. *Un anillo R tiene dimensión global pura izquierda* [2] *cero si y sólo si cada inclusión pura de R-módulos izquierdos se escinde.*

Con la definición anterior junto con el Teorema 2.4.7, se tiene que un anillo R es de dimensión global pura izquierda cero si y sólo si R es puro-semisimples izquierdo. Por otro lado, recuerde que un anillo R es de tipo de representación finita si y sólo si hay un número finito de clases de isomorfismos de módulos izquierdos y derechos finitamente generados e inescindibles. En el Teorema 14 de [50], se prueba el siguiente resultado:

[2]En [28] Griffith define la dimensión global pura izquierda para cualquier anillo R, y entre otras cosas caracteriza anillos conmutativos R de dimensión global pura izquierda cero, como anillos de ideales principales, o equivalentemente, como anillos R para los cuales todo R-módulo es una suma directa de módulos cíclicos. La dimensión global pura izquierda también ha sido investigada por Gruson y Jensen [29], y por Kielpińsky y Simson [31].

Teorema 2.4.9 (Auslander, Ringel-Tachikawa, Fuller-Reiten)**.** *Un anillo R tiene tipo de representación finita si y sólo si las dimensiones globales puras izquierdas son ceros.*

Finalmente, por todo lo anterior, se puede deducir que un anillo R es de tipo de representación finita si y sólo si R es puro-semisimple izquierdo y derecho.

Ahora bien, se presentan algunos ejemplos de anillos puro-semisimples. Por medio del Teorema 2.4.7 se puede dar el siguiente ejemplo de un anillo puro-semisimple izquierdo que no es semisimple.

Ejemplo 2.4.10. *Considere $\mathbb{Z}_{p^n}$ con p primo y $n \geq 1$. Como anillo $\mathbb{Z}_{p^n}$ es conmutativo y su retícula de ideales es una cadena finita*

$$0 < p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n} < ... < p^2\mathbb{Z}_{p^n} < p\mathbb{Z}_{p^n} < \mathbb{Z}_{p^n}$$

que consta de los $\mathbb{Z}_{p^n}$-módulos totalmente invariantes de $\mathbb{Z}_{p^n}$. En [25], se demuestra que todo $\mathbb{Z}_{p^n}$-módulo es isomorfo a una suma directa de ideales de $\mathbb{Z}_{p^n}$ y utilizando el hecho de que los ideales de $\mathbb{Z}_{p^n}$ forman un conjunto, la parte (5) del Teorema 2.4.7 implica que $\mathbb{Z}_{p^n}$ es un anillo puro-semisimple izquierdo. Además, cabe notar que $\mathbb{Z}_{p^n}$ no es semisimple, por lo que la clase de anillos puro-semisimples izquierdos es una clase más amplia que la clase de anillos semisimples.

Usando ahora el Teorema 2.4.9, se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4.11. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita sobre un campo K de tipo de representación finita. Entonces, por el Teorema 2.4.9 en combinación con el Teorema 2.4.7, todo A-módulo M, tiene una descomposición de la forma*

$$M = M_1^{(X_1)} \oplus \cdots \oplus M_n^{(X_n)}$$

donde $M_1, ..., M_n$ son A-submódulos inescindibles de M. En particular, si Q es un carcaj finito acíclico y K un campo entonces el álgebra de caminos KQ es de dimensión finita y además de tipo de representación finita, entonces KQ tiene estructura de anillo puro-semisimple izquierdo y derecho.

Si bien hay muchas formas de caracterizar anillos puro semisimples izquierdos, como las mencionadas en el anterior teorema, también se pueden caracterizar por medio de condiciones en cadenas ascendentes de morfismos en módulos inescindibles finitamente generados. Por lo que en primer lugar se muestra cuando una sucesión de morfismos es noetheriana.

Definición 2.4.12. *Una sucesión de morfismos $\mathcal{F} = \{f_i : M_i \to M_{i+1}\}_{i<\omega}$ de R-módulos izquierdos es noetheriana si existe un número natural $n < \omega$ tal que $f_n \cdots f_1 f_0 = 0$ o para todo $k \geq n$ el morfismo f_k es un isomorfismo.*

El siguiente resultado menciona anillos de Krull-Schmidt, sobre los cuales no se entrará en detalle pero sólo se dirá que se sabe que si R es un anillo puro-semisimple izquierdo entonces R es una anillo de Krull-Schmidt (consultar Sección 3, [30]). Este resultado da una caracterización de anillos puro-semisimples izquierdos haciendo uno de sucesiones de morfismos.

Lema 2.4.13 (Lema 3.2, [30])**.** *Sea R un anillo de Krull-Schmidt. Entonces R es un anillo puro-semisimple izquierdo si y sólo si toda sucesión de morfismos $\mathcal{F} = \{f_i : M_i \to M_{i+1}\}_{i<\omega}$ de R-módulos inescindibles izquierdos es noetheriana.*

Ahora bien, dado un anillo asociativo R con identidad, se sabe que si R es semisimple entonces R es artiniano. ¿sucederá lo mismo en el caso de que R sea puro-semisimple? La demostración no es tan simple como parece. El Teorema de Faith-Walker (capítulo 7, [2]), afirma que un anillo R es noetheriano izquierdo si y sólo si existe un cardinal κ tal que todo R-módulo inyectivo es suma directa de módulos κ-generados, por lo tanto (2) del Teorema 2.4.6 implica que un anillo puro-semimple izquierdo es noetheriano izquierdo.

Por otro lado, uno de los resultados de Chase mencionados en [50], afirma que: *Si existe un cardinal κ tal que todo los R-módulos R^I son sumas directas de submódulos κ-generados, entonces R es perfecto izquierdo* (Chase,[8]). Teniendo en cuenta todo esto, se puede enunciar el siguiente resultado que muestra que todo anillo puro-semisimple izquierdo es artiniano izquierdo.

Teorema 2.4.14. *Si R es anillo puro-semisimple izquierdo entonces R es artiniano izquierdo.*

Demostración. En primer lugar, la parte (2) del Teorema 2.4.6 [Gruson-Jensen, Huisgen-Zimmermann] dice que existe un número cardinal $\aleph$ tal que todo R-módulo es una suma directa de submódulos $\aleph$-generados. Pero (2) y el Teorema de Chase ([8]) implican que R es perfecto izquierdo. Además, (2) y el Teorema de Faith-Walker ([2]) implican que R es noetheriano izquierdo, y al ser R noetheriano izquierdo, cumple la condición de cadenas ascendentes (a.c.c.) en anuladores. Aplicando el Teorema de Faith ([19]), como R es perfecto izquierdo y cumple la condición a.c.c. en anuladores entonces R es semiprimario izquierdo (el radical de Jacobson J de R nilpotente y R/J semisimple). Finalmente, por el Teorema de Hopkins (ver capítulo 4, [2]), R es semiprimario y noetheriano izquierdo si y sólo si R es artiniano izquierdo. □

La siguiente pregunta en torno a los anillos puro-semisimples es ¿Qué sucede con la retícula R-pr? Una respuesta a este cuestionamiento la da el siguiente resultado:

Teorema 2.4.15. *Si R es un anillo puro-semisimple entonces R-pr está en correspondencia biyectiva con un conjunto.*[3]

Demostración. Si R es puro-semisimple, entonces por el Teorema 4.4.7, existe un conjunto X de R-módulos tal que todo R-módulo es isomorfo a una suma directa de elementos de X. Sea $X = \{A_x\}_{x\in X}$ y defina $\Gamma\colon R\text{-pr} \to \prod_{x\in X} S_{fi}(A_x)$, donde $S_{fi}(A_x)$, denota los submódulos totalmente invariantes de A_x y $\Gamma(\sigma) = (\sigma(A_x))_{x\in X}$ para todo $\sigma \in R$-pr. Por demostrar que Γ es inyectiva; para esto suponga que $\sigma(A_x) = \gamma(A_x)$ para todo $x \in X$ y se probrará que $\sigma = \gamma$. En efecto, sea $M \in R$-Mod, entonces $M = \bigoplus_{x\in X} N_x^{(\kappa_x)}$ y $N_x \cong A_x$ para todo $x \in X$. Luego, dado que $\sigma(A_x) = \gamma(A_x)$ para todo $x \in X$ entonces $\sigma(N_x) = \gamma(N_x)$ para todo $x \in X$ y de esta forma se tiene que

$$\sigma(M) = \bigoplus_{x\in X} \sigma(N_x)^{(\kappa_x)} = \bigoplus_{x\in X} \gamma(N_x)^{(\kappa_x)} = \gamma(M)$$

[3]En general, R-pr es un conglomerado puesto que sus elementos son funtores entre clases pero se puede expresar el hecho diciendo que en el caso de que R es puro-semisimple, “R-pr es un conjunto ”

Lo anterior es válido para cada $M \in R$-Mod, por tanto $\sigma = \gamma$. De esta forma, hay una función inyectiva de R-pr al conjunto $\prod_{x \in X} S_{fi}(A_x)$, y se concluye el resultado. □

El teorema anterior proporciona una cota para la cardinalidad de R-pr cuando R es un anillo puro-semisimple y está dada por el siguiente teorema:

Teorema 2.4.16. *Sea R un anillo puro-semisimple. Entonces*

(1) Si $|R| \geq \aleph_0$ entonces $|R\text{-pr}| \leq 2^{2^{|R|}}$

(2) Si $|R| < \aleph_0$ entonces $|R\text{-pr}| \leq 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Considere la función a $\Gamma\colon R\text{-pr} \to \prod_{M \in \mathcal{F}} S_{fi}(M)$, donde $S_{fi}(M)$, denota los submódulos totalmente invariantes de M y $\mathcal{F}$ el conjunto completo e irreduntantes de representantes de clases de isomorfismos de R-módulos finitamente generados y $\Gamma(\sigma) = (\sigma(M))_{M \in \mathcal{F}}$ para todo $\sigma \in R$-pr. Por la demostración del Teorema 2.4.15, se tiene que Γ inyectiva y por tanto

$$|R\text{-pr}| \leq |\prod_{M \in \mathcal{F}} S_{fi}(M)| \tag{2.1}$$

Por lo tanto, para determinar una cota para la cardinalidad de R-pr, basta con encontrar una cota para $|\prod_{M \in \mathcal{F}} S_{fi}(M)|$.

Ahora, si $M \in \mathcal{F}, M \cong R^n/K$ para K submódulo de R^n y $n \geq 1$. Por tanto, $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ donde $\mathcal{F}_n = \{R^n/K : K \leq R^n\}$ y $|\mathcal{F}_n| \leq 2^{|R|^n}$.

Para probar (1), sea $|R| \geq \aleph_0$ entonces $|R|^n = |R|$ y $|\mathcal{F}_n| = 2^{|R|^n} = 2^{|R|}$ lo anterior para cada $n \geq 1$. Así $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0 \cdot 2^{|R|} = 2^{|R|}$. Por otra parte, $|S_{fi}(M)| \leq 2^{|R|^n} = 2^{|R|}$ por tanto

$$|R\text{-pr}| \leq (2^{|R|})^{|\mathcal{F}|} \leq 2^{2^{|R|}}.$$

Para (2). Si $|R| < \aleph_0$, entonces $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$ y $|S_{fi}(M)| < 2^{|R|^n}$ y por tanto

$$|R\text{-pr}| \leq (2^{|R|^n})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

□

2.5. Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya.

En esta sección se muestra la unicidad de las descomposiciones de sumas directas $N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ donde cada N_i tiene anillo de endomorfismos local. Para mayor información se puede consultar la página 125 de [46] en donde se dan estos resultados de manera más general en categorías de Grothendieck.

Definición 2.5.1. *Un anillo es local si todos los elementos no invertibles forman un ideal propio.*

Un anillo local tiene precisamente un ideal máximo, el cual es el único ideal máximo derecho.

Teorema 2.5.2 (Krull-Schmidt-Remak-Azumaya,Proposición 5.4,[46])**.** *Si* $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ *donde cada* M_i *tiene anillo de endomorfismos local y cada* N_j *es inescindible, entonces* $m = n$ *y existe una permutación* π *de* $\{1, \ldots, n\}$ *tal que* $M_i \cong N_{\pi(i)}$ *para todo* i*.*

Este teorema fue mejorado y extendido para sumas infinitas, diciendo que para dos descomposiciones de un módulo M

$$M = \bigoplus_i M_i = \bigoplus_j M'_j$$

donde los anillos de endomorfismos $\mathrm{End}(M_i)$ y $\mathrm{End}(M_j)$ son locales para cada i y para cada j, dichas descomposiciones son isomorfas en el sentido del teorema anterior (Ver Teorema 2.12 de [17]).

Capítulo 3

Particiones de R-ind y de R-pr.

En el capítulo 1 se menciona cómo los prerradicales en anillos semisimples quedan determinados por medio de los módulos simples. En el caso de anillos puro-semisimples izquierdos, se sabe que todo módulo es suma directa de módulos finitamente generados e inescindibles (Teorema 2.4.7), por lo tanto todo prerradical queda determinado por sus valores en el conjunto R-ind. Si bien la retícula de submódulos de un módulo finitamente generado e inescindible puede ser no tan sencilla de describir, se puede hacer un estudio de forma general del conjunto R-ind por medio de otra herramientas.

En este capítulo se introducen dos tipos de particiones del conjunto de los módulos finitamente generados e inescindibles, las cuales han sido usadas por varios autores, tales como Nguyen Dung, José Luis García y Birge Zimmermann-Huisgen, para caracterizar anillos puro-semisimples izquierdos por medio de la existencia de dichas particiones. Las referencias a los resultados de estas caracterizaciones se irán presentado a lo largo del desarrollo de este capítulo.

Durante todo este capítulo R denotará un anillo asociativo con unidad y cuando sea necesario se mencionará si R tiene alguna otra propiedad. Además, para una familia $\mathcal{C}$ de módulos izquierdos $\mathrm{Add}(\mathcal{C})[\mathrm{add}(\mathcal{C})]$ denotará a la clase de todos los módulos que son sumandos directos de sumas directas [finitas] de módulos en $\mathcal{C}$.

3.1. Particiones fuerte-preinyectivas

En primer lugar se menciona una partición asociada al conjunto R-ind, la cual se enuncía en la siguiente definición y fue introducida por Auslander y Smalø en [5].

Definición 3.1.1. *Sea R un anillo y $\mathcal{C}$ una familia de R-módulos finitamente generados e inescindibles izquierdos no isomorfos. Se dice que $\mathcal{C}$ tiene una partición fuerte-preinyectiva si* $\mathcal{C} = \bigcup_{\alpha<\lambda'} \mathcal{C}_\alpha$ *para un número ordinal λ', con las siguientes propiedades:*

(i) $\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{C}_\beta = \emptyset$ *si* $\alpha \neq \beta$.

(ii) *Cada* $\mathcal{C}_\alpha$ *es finito.*

(iii) *Para cada ordinal* $\alpha < \lambda'$, $\mathcal{C}_\alpha$ *es el mínimo conjunto cogenerador de* $\bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{C}_\beta$.

El menor ordinal μ con $\mathcal{C}_\mu = \emptyset$ es llamado la longitud de la partición y en este caso está denotado por λ'.

El siguiente teorema, muestra a fondo qué módulos conforman las secciones de esta partición, y cuya demostración no será incluida en el desarrollo de este capítulo debido a que sólo se menciona para mostrar una descripción más concreta de esta partición.

Teorema 3.1.2 (Teorema 2.3, [5])**.** *Sea* $\mathcal{C}$ *una familia de módulos finitamente generados e inescindibles. Suponga que* $\mathcal{C}$ *tiene una partición fuerte-preinyectiva* $\mathcal{C} = \bigcup_{\alpha < \lambda'} \mathcal{C}_\alpha$*. Si se toma* $\mathcal{D}_\alpha = \bigcup_{\beta \geq \alpha} C_\beta$*, entonces cada* $\mathcal{C}_\alpha$ *consiste precisamente de los módulos* $C \in \mathcal{D}_\alpha$ *para los cuales cualquier monomorfismo* $C \to M$ *con* $M \in Add(\mathcal{D}_\alpha)$ *se escinde.*

Definición 3.1.3. *Un módulo inescindible* M *se dice Esc-inyectivo en* $\mathcal{C}$ *si cualquier monomorfismo* $f\colon M \to N$ *con* $N \in Add(\mathcal{C})$ *se escinde.*

Entonces por esta definición y el teorema anterior, se puede decir que si $M \in \mathcal{C}_\alpha$ para un ordinal $\alpha \leq \lambda'$, entonces M es Esc-inyectivo en $\bigcup_{\alpha \leq \beta \leq \lambda'} \mathcal{C}_\beta$.

El siguiente resultado prueba la existencia de estas particiones en anillos que tienen dimensión global pura izquierda cero; es decir, para anillos donde todo módulo izquierdo es suma directa de módulos finitamente generados e inescindibles izquierdos, y por tanto para anillos puro-semisimples izquierdos.

Teorema 3.1.4 (Teorema A, [53])**.** *Si* R *tiene dimensión global pura izquierda cero, entonces la familia de todos los* R*-módulos finitamente generados inescindibles izquierdos tiene una única partición fuerte-preinyectiva de longitud contable; esta longitud no es un ordinal límite ni el sucesor de un ordinal límite. Análogamente, la familia de todos los* R*-módulos finitamente presentados inescindibles derechos tiene una única partición fuerte-preinyectiva de longitud contable; Si* R *es artiniano derecho derecho y tiene morita dualidad por la derecha, las mismas restricciones pueden aplicarse a la longitud como en el caso anterior.*

De acuerdo al anterior resultado, dado un anillo R puro-semisimple izquierdo, existe una única partición fuerte-preinyectiva del conjunto R-ind.

Ejemplo 3.1.5. *Considere el anillo* $R = \mathbb{Z}_{p^n}$ *con* $n \geq 1$*. Entonces* R *es un anillo puro-semisimple izquierdo . En este caso sólo se puede mencionar la existencia de una partición fuerte-preinyectiva para el conjunto de los módulos finitamente generados inescindibles que por el Ejemplo 2.4.10, se sabe que es una cadena dada por*

$$0 < p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n} < \cdots < p^2\mathbb{Z}_{p^n} < p\mathbb{Z}_{p^n} < \mathbb{Z}_{p^n}$$

Por la parte (iii) de la Definición 3.1.1 y la cadena anterior, la partición fuerte-preinyectiva viene dada por $\mathcal{C}_0 = \{\mathbb{Z}_{p^n}\}, \mathcal{C}_1 = \{p\mathbb{Z}_{p^n}\} \cdots, \mathcal{C}_{n-1} = \{p^{n-1}\mathbb{Z}_p\}$.

3.2. Particiones Ext-inyectivas

En esta sección se mencionan las particiones Ext-inyectivas y se dan algunas características importantes que serán usadas para el desarrollo de los resultados principales de este trabajo. Para más información sobre éstas, se puede consultar [11]. Antes de introducir este tipo de partición, se procede inicialmente a definir conceptos y dar algunos resultados importantes para la existencia de estas particiones.

En primer lugar se tiene:

Definición 3.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de R-Mod. Un módulo $X \in \mathcal{C}$ se dice casi* Esc*-inyectivo en $\mathcal{C}$ si cualquier sucesión exacta $0 \to X \to A \to B \to 0$ con $A, B \in \mathcal{C}$ se escinde.*

Con esta definición se puede observar que si un módulo X es Esc-inyectivo en $\mathcal{C}$, entonces X es *casi* Esc-inyectivo en $\mathcal{C}$. Pero el recíproco no es cierto.

Para definir el concepto de partición Ext-inyectiva, es importante mencionar la siguiente definición de módulos Ext-inyectivos,

Definición 3.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos de R-Mod. Un R-módulo izquierdo X en $\mathcal{C}$ se dice* Ext*-inyectivo en $\mathcal{C}$ si $\operatorname{Ext}^1_R(C, X) = 0$ para todo $C \in \mathcal{C}$.*

Algunas propiedades que poseen los módulos Ext-inyectivos se enuncian en el siguiente lema y en el cual se puede ver como se relacionan a los módulos *casi* Esc-inyectivos y Esc-inyectivos:

Lema 3.2.3 (Lema 4.6, [14])**.** *Sea R un anillo y $\mathcal{C}$ una subcategoría de R-Mod. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) La clase de los módulos Ext*-inyectivos en $\mathcal{C}$ es cerrada bajo productos y sumandos directos.*

(b) Si un módulo X en $\mathcal{C}$ es Ext*-inyectivo, entonces X es casi* Esc*-inyectivo en $\mathcal{C}$.*

(c) Sea $\mathcal{C}$ cerrada bajo extensiones. Entonces si un módulo X en $\mathcal{C}$ es casi Esc*-inyectivo, entonces X es* Ext*-inyectivo en $\mathcal{C}$.*

Demostración. La demostración de (a) es de forma directa debido a que para cualquier $i \geq 1$, se cumple que $\operatorname{Ext}^i_R(M, \prod_\alpha N_\alpha) \cong \prod_\alpha \operatorname{Ext}^i_R(M, N_\alpha)$.

Para demostrar (b), suponga que X es Ext-inyectivo en $\mathcal{C}$ y $0 \to X \xrightarrow{f} A \to B \to 0$ con $A, B \in \mathcal{C}$ una sucesión exacta. Por definición la sucesión exacta se escinde, y por tanto X es Esc-inyectivo en $\mathcal{C}$.

Finalmente, se prueba (c). Suponga que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo extensiones y X es Esc-inyectivo en $\mathcal{C}$. Dada una sucesión $0 \to X \xrightarrow{f} B \to C \to 0$ con $C \in \mathcal{C}$, se tiene que $B \in \mathcal{C}$ por hipótesis, por lo tanto la sucesión se escinde y X es Ext-inyectivo en $\mathcal{C}$. □

La siguiente es una definición que ayudará a obtener unos resultados que serán de mucha utilidad para demostrar un teorema que muestra cómo son las particiones Ext-inyectivas en anillos puro-semisimples hereditarios izquierdos.

Definición 3.2.4. *Sea $\mathcal{A}$ una familia de módulos cerradas bajo sumandos directos y sumas directas finitas, y $\mathcal{B}$ una subfamilia de $\mathcal{A}$, un morfismo $f \colon N \to M$*

con $N \in \operatorname{add}(\mathcal{B})$ *es una* $\mathcal{B}$*-aproximación derecha de* M *si cada morfismo en* $\operatorname{Hom}(X, M)$ *con* $X \in \operatorname{add}(\mathcal{B})$ *se factoriza a través de* f*. Si* $f \colon N \to M$ *es una* $\mathcal{B}$*-aproximación derecha de* M *tal que para cualquier endomorfismo* $g \colon N \to N, f \circ g = f$ *implica que* g *es un automorfismo de* N*, se dice que* f *es una* $\mathcal{B}$*-cubierta de* M*.*

Si $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva y $\mathcal{B}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *contravariantemente finita* en $\mathcal{A}$ si cada objeto M de $\mathcal{A}$, tiene una $\mathcal{B}$-aproximación. La Proposición 2.3 de [14], muestra que para R un anillo puro-semisimple izquierdo y $\mathcal{A}$ una familia de módulos finitamente generados inescindibles izquierdo, la familia $\operatorname{Add} \mathcal{A}$ es contravariantemente finita en R-Mod.

El siguiente es un resultado bastante útil para demostrar la existencia de las particiones Ext-inyectivas en ciertos anillos puro-semisimples.

Teorema 3.2.5 (Teorema 4.4, [14])**.** *Sea* R *un anillo puro-semisimple izquierdo, y sea* $\mathcal{C}$ *una subcategoría de* R*-Mod tal que* $\mathcal{C}$ *es cerrada bajo sumas directas y submódulos. Entonces* $\mathcal{C}$ *contiene sólo un número finito de módulos no isomorfos inescindibles casi* Esc*-inyectivos.*

Demostración. En primer lugar se consideran $I_1, \ldots, I_n$ el conjunto de módulos inescindibles inyectivos. Por la nota anterior a este teorema, se sabe que $\mathcal{C}$ es contravarientemente finita en R-Mod, por lo que existen $\mathcal{C}$ aproximaciónes $f_k \colon M_k \to I_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Donde M_k es un módulo finitamente generado en $\mathcal{C}$. Como consecuencia del Teorema 3.1.4, se sabe que toda familia de módulos finitamente generados tiene una partición fuerte-preinyectiva, por lo tanto $\mathcal{C}$ contiene un conjunto finito de cogeneradores que consiste de todos los módulos Esc-inyectivos en $\mathcal{C}$. Y luego por (c) del Lema 3.2.3, es posible probar este resultado usando este conjunto finito. Así, si X es un módulo Esc-inyectivo en $\mathcal{C}$, para terminar la demostración basta con mostrar que si X no es isomorfo a un módulo Esc-inyectivo inescindible en $\mathcal{C}$ entonces X debe ser isomorfo a un sumando directo inescindible del $\ker(f_k)$ para algún k y aquí finalizará la prueba. □

Ahora se procede a definir lo que es una partición Ext-inyectiva,

Definición 3.2.6. *Sea* R *un anillo y* $\mathcal{C}$ *una familia de módulos no isormorfos finitamente generados e inescindibles izquierdos. Se dice que* $\mathcal{C}$ *tiene una partición Ext-inyectiva si* $\mathcal{C} = \bigcup_{\alpha<\rho} \mathcal{U}_\alpha$ *para un ordinal* ρ*, con las siguientes propiedades:*

(i) $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta = \emptyset$ *para cada* $\alpha, \beta < \rho$ *tal que* $\alpha \neq \beta$*,*

(ii) $\mathcal{U}_\alpha$ *es no vacío y finito para cada* $\alpha < \rho$*,*

(iii) Para cada $\alpha < \rho$*,* $\mathcal{U}_\alpha$ *es el conjunto de todos los módulos Ext-inyectivos en* $\bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{U}_\beta$*.*

Como uno de los objetivos de este trabajo es caracterizar a la retícula de prerradicales en anillos puro-semisimples izquierdos, es de suma importancia mencionar el siguiente resultado ya que muestra las condiciones equivalentes para que una familia de módulos finitamente generados e inescindibles izquierdos tenga una partición Ext-inyectiva. Esta partición será una de las herramientas principales para el desarrollo de los objetivos de este trabajo.

Proposición 3.2.7 (4.3, [11]). *Sea R un anillo puro-semisimple izquierdo. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ una partición del conjunto $\mathcal{I}$ de todos los R-módulos inescindibles izquierdos que satisface las siguientes propiedades,*

(a) Si $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$, entonces $\operatorname{Hom}_R(D, C) = 0$.

(b) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ entonces $\operatorname{Ext}^2_R(C_1, C_2) = 0$.

Entonces se cumple:

(c) Si $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ entonces $\operatorname{Ext}^1_R(C, D) = 0$. Más aún, $\operatorname{add}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo extensiones.

(d) Si $\mathcal{C}_1$ es el conjunto de todos los módulos Ext-inyectivos en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$, entonces $\mathcal{C}_1$ es finito, y para cada $X \in \mathcal{C}_1$ e $Y \in \mathcal{C}_2$ se tiene que $\operatorname{Hom}_R(X, Y) = 0$. Por tanto el par $(\mathcal{C}_2, \mathcal{D} \cup \mathcal{C}_1)$ es una partición de $\mathcal{I}$ que satisface (a) y (b)

(e) $\mathcal{C}$ tiene una partición Ext-inyectiva $\mathcal{C} = \bigcup_{\alpha<\rho} \mathcal{U}_\alpha$, donde ρ es un ordinal no límite.

Demostración. Inicialmente se prueba que (a) implica (c). Para esto, sea $0 \to D \xrightarrow{f} X \to C \to 0$ una sucesión exacta con $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$. Se debe probar que esta sucesión exacta se escinde y por tanto esto probaría que $\operatorname{Ext}^1_R(C, D) = 0$. En efecto, como R es un anillo puro-semisimple izquierdo entonces X es una suma directa de módulos finitamente generados e inescindibles, que en este caso al ser $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ una partición de R-ind, particularmente se puede expresar X como $X = X_1 \oplus X_2$ donde X_1 es una suma directa de módulos en $\mathcal{C}$ y X_2 una suma directa de módulos en $\mathcal{D}$. Por (a), $\operatorname{Hom}(X_2, C) = 0$, lo cual quiere decir que X_2 está contenido en la imagen $f(D)$. Por otro lado, como $\operatorname{Hom}(D, X_1) = 0$, se tiene que $f(D)$ está contenido en X_2, de esta manera $f(D) = X_2$ y la sucesión se escinde, probando así que $\operatorname{Ext}^1_R(C, D) = 0$. Usando este mismo argumento se puede demostrar que $\operatorname{add}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo extensiones. En efecto, tome una sucesión exacta corta $0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0$ con $A, C \in \operatorname{add}(\mathcal{C})$. Entonces $B = X \oplus Y$ con $X \in \operatorname{add}(\mathcal{C})$ e $Y \in \operatorname{add}(\mathcal{D})$. Usando la condición (a), se sigue que $X \subseteq f(A)$. Sin embargo, $\operatorname{Hom}(X, f(A)) = 0$ por esta condición, por lo tanto $X = 0$ y $B \in \operatorname{add}(\mathcal{C})$ probando que $\operatorname{add}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo extensiones.

Para probar (d), considere la subcategoría plena $\mathcal{D}'$ de R-Mod, de todos los R-módulos que no tienen sumandos directos en $\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{D}'$ es cerrada bajo sumandos directos y por (a) es cerrada bajo submódulos, por lo tanto haciendo uso del Teorema 3.2.5, se tiene que $\mathcal{D}'$ contiene sólo un número finito de módulos no isomorfos que son casi Esc-inyectivos en $\mathcal{D}'$. Luego, por la parte (c) del Lema 3.2.3 se tiene que la clase $\mathcal{C}_1$ de todos los módulos inescindibles Ext-inyectivos de $\mathcal{D}'$, y por tanto Ext-inyectivos en $\mathcal{C}$ es un conjunto finito.

Para la segunda parte de (d), se muestra que si $X \in \mathcal{C}_1, Y \in \operatorname{add}(\mathcal{C}_2)$ y $f \colon X \to Y$ es un monomorfismo, entonces $X = 0$. Esto implicará que $\operatorname{add}(\mathcal{C}_2)$ es cerrada bajo submódulos. Sea $Z = \operatorname{Coker}(f)$ con $Z = Z_0 \oplus Z_1$ donde Z_0 es suma directa de módulos de $\mathcal{C}$ y Z_1 es suma directa de módulos de $\mathcal{D}$. Considere el monomorfismo $Z_1 \to Z$ y el epimorfismo $Y \to Z$. Tome el producto fibrado que resulta de estos dos morfismos, entonces como se está en una categoría abeliana se obtiene un epimorfismo $U \to Z_1$ y una sucesión exacta $0 \to X \to U \to Z_1 \to 0$. Aplicando el funtor, $\mathrm{Ext}^1_R(C,-)$ para cualquier $C \in \mathcal{C}$ y usando (c), se infiere que $\mathrm{Ext}^1_R(C,U) = 0$, y de ahí cada sumando directo inescindible de U pertenece a $\mathcal{D}$ o $\mathcal{C}_1$. De forma análoga también se tiene una sucesión exacta $0 \to U \to Y \to Z_0 \to 0$. Como $Z_0 \in \mathcal{D}$ entonces $\mathrm{Ext}^1_R(Z_0,U) = 0$ y esta sucesión se escinde. Por otro lado como $Y \in \mathrm{add}(\mathcal{C}_2)$ se tiene que $U = 0$. Dado que existe un monomorfismo $X \to U$ se prueba que $X = 0$.

Para finalizar con la prueba de (d), se demuestra que si $X \in \mathcal{C}_1$ y $Y \in \mathcal{C}_2$ entonces no existen epimorfismos $X \xrightarrow{f} Y$. Sea $K = \ker f$ entonces $K \in \mathrm{add}(\mathcal{C})$ y $\mathrm{Ext}^2_R(C,K) = 0$ para todo $C \in \mathcal{C}$, por (b). De esta manera, $0 = \mathrm{Ext}^1_R(C,X) \to \mathrm{Ext}^1_R(C,Y)$ es un epimorfismo y por tanto Y es Ext-inyectivo y así $Y = 0$. Como no existen epimorfismos de módulos en $\mathcal{C}_1$ a módulos de $\mathcal{C}_2$ y $\mathrm{add}(\mathcal{C}_2)$ es cerrada bajo submódulos, entonces se prueba (d).

Finalmente, para probar (e) se inicia la construcción de la partición fijando $\mathcal{I}^0 = \mathcal{D}$ e $\mathcal{I}_0 = \mathcal{C}$. El par $(\mathcal{I}_0, \mathcal{I}^0)$ satisface las condiciones (a) y (b) de la proposición.

Suponga ahora que se ha definido el par $(\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{I}^\alpha)$ para un ordinal α, y dicho par satisface (a) y (b). Entonces se define $\mathcal{U}_\alpha$ como el conjunto de todos los módulos Ext-inyectivos en $\mathcal{I}_\alpha$. De esta manera, se define $\mathcal{I}^{\alpha+1} = \mathcal{I}^\alpha \cup \mathcal{U}_\alpha$ e $\mathcal{I}_{\alpha+1}$ como el complemento de $\mathcal{I}^{\alpha+1}$ en $\mathcal{I}$. Entonces $\mathcal{U}_\alpha$ es un conjunto finito por la condición (d) probada anteriormente.

Suponga ahora que α es un ordinal límite y se han definido $\mathcal{I}^\beta, \mathcal{I}_\beta$ y $\mathcal{U}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Entonces defina $\mathcal{I}^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{I}^\beta$ e $\mathcal{I}_\alpha = \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^\alpha$, de esta forma nuevamente se obtiene que el par $(\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{I}^\alpha)$ satisface las condiciones (a) y (b) de la proposición. Se define $\mathcal{U}_\alpha$ como el conjunto de los módulos Ext-inyectivos en $\mathcal{I}_\alpha$.

Observe que si $\mathcal{I}_\alpha$ es no vacío para un cierto ordinal α, entonces por el Teorema 3.1.4, se tiene que que $\mathcal{I}_\alpha$ tiene un subconjunto no vacío de módulos Esc-inyectivos. Ahora, el Lema 3.2.3, muestra que todo módulo Esc-inyectivo en $\mathcal{I}_\alpha$ es Ext-inyectivo en $\mathcal{I}_\alpha$, puesto que $\mathcal{I}_\alpha$ es cerrada bajo extensiones y de esta forma, $\mathcal{U}_\alpha$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{I}_\alpha$. También se puede observar que para un ordinal límite infinito α, el conjunto $\mathcal{I}_\alpha$ es no vacío si $\mathcal{I}_\beta$ es no vacío para cada $\beta < \alpha$. Para esto, si $\mathcal{I}_\alpha = \emptyset$ entonces, todos los módulos proyectivos inescindibles pertenecen a $\mathcal{I}^\alpha$ y por tanto todos ellos pertenecen a $\mathcal{I}^\beta$ para algún $\beta < \alpha$. Así, $\mathcal{I}_\beta$ sería vacío ya que el par $(\mathcal{I}_\beta, \mathcal{I}^\beta)$ satisface (a). De esta forma existe un ordinal mínimo ρ tal que $\mathcal{I}_\rho = \emptyset$, y como se ha mencionado ρ no es un ordinal límite a menos que $\rho = 0$. Por tanto el conjunto de todos los $\mathcal{U}_\alpha$ con $\alpha < \rho$ consiste de subconjuntos no vacíos de $\mathcal{C}$ y da una partición de $\mathcal{C}$, que por la construcción es una partición Ext-inyectiva. □

El siguiente lema será usado en la demostración de una proposición que será muy útil más adelante.

Lema 3.2.8 (Harada-Sai, 54.1, [49]). *Sea $\{N_\alpha\}_\Lambda$ una familia de R-módulos inescindibles con longitudes $l(M_\alpha) \le b$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y algún $b \in \mathbb{N}$. Entonces, para toda sucesión de morfismos que no son isomorfismos $\{f_r \colon N_{\lambda_r} \to N_{\lambda_{r+1}}\}_\mathbb{N}$ con $\lambda_r \in \Lambda$ se tiene que $f_k \cdots f_2 f_1 = 0$ para $k = 2^b - 1$.*

Demostración. Se demostrará por inducción sobre $k (\le b)$ que las longitudes de las imágenes de los morfismos $f_{2^k-1} \cdots f_1$ son menores o iguales que $b - k$. Dado que f_1 no es un isomorfismo por hipótesis, se tiene que $l(f_1) \le b - 1$.

Suponga ahora que es válido para $k(< b)$. Entonces, para $h = f_{2^k-1} \cdots f_1$ y $f = f_{2^{k+1}-1} \cdots f_{2^k+1}$, las longitudes de $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Im}(h)$ son menores o iguales a $b-k$. Si una de las dos longitudes es menor o igual a $b-k-1$ entonces también se cumple para la longitud de $\mathrm{Im}(f_{2^{k+1}-1} \cdots f_1)$ y la afirmación es verificada. Así considere el caso en que $l(\mathrm{Im}(f)) = l(\mathrm{Im}(h)) = b-k$. Sea $g = f_{2^k}$ entonces se probará que $l(\mathrm{Im}(fgh)) \leq b-k-1$. Suponga entonces que $l(\mathrm{Im}(fgh)) = b-k$, entonces

$$\mathrm{Im}(h) \cap \ker(fg) = 0 \text{ y } \mathrm{Im}(gh) \cap \ker(f) = 0x.$$

Dado que $l(\mathrm{Im}\, h) = b-k$ y $l(\ker fg) = l(N_{2^k}) - (b-k)$, entonces por la primera ecuación se tiee que $N_{2^k} = \ker fg \oplus \mathrm{Im}(h)$, y dado que N_{2^k} es inescindible, se tiene que $\ker fg = 0$ y por tanto g es monomorfismo.

Ahora como $l(\mathrm{Im}\, gh) = b-k$ y $l(\ker f) = l(N_{2^{k+1}}) - (b-k)$ de la segunda ecuación se obtiene que $N_{2^{k+1}} = \mathrm{Im}(gh) \oplus \ker(f)$ y dado que $N_{2^{k+1}}$ es inescindible, $\ker(f) = 0$ y así gh es epimorfimso, y por tanto g es epimorfismo. De esta manera, $g = f_{2^k}$ sería isomorfismo, lo cual contradice la hipótesis.

□

Definición 3.2.9. *Un anillo R se dice* **hereditario** *si todo submódulo de un R-módulo proyectivo es proyectivo.*

Lo anterior equivale a decir que R es hereditario si y sólo si todos los módulos izquierdos tienen *resoluciones proyectivas* de longitud a lo sumo 1. Es decir, que la dimensión global izquierda es a lo sumo 1. Por tanto los funtores derivados Ext^i_R y Tor^i_R son triviales para $i > 1$.

Ahora bien, la siguiente proposición muestra que, para un anillo artiniano R hereditario izquierdo, la existencia de una partición Ext-inyectiva en R-Mod es equivalente a que R sea puro-semisimple izquierdo.

Proposición 3.2.10 (2.2, [13]). *Sea R un anillo artiniano hereditario izquierdo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) La familia de todos los R-módulos finitamente generados e inescindibles tiene una partición Ext-inyectiva R-ind $= \bigcup_{\alpha<\rho} \mathcal{U}_\alpha$ (donde ρ es un ordinal no límite).

(2) La familia R-ind tiene una partición R-ind$= \bigcup_{\alpha<\rho} \mathcal{U}_\alpha$, donde cada $\mathcal{U}_\alpha$ es finito y para todo $X \in \mathcal{U}_\alpha, Y \in \mathcal{U}_\beta$ con $\alpha < \beta$ se tiene que $\mathrm{Hom}_R(X, Y) = 0$.

(3) R es puro-semisimple.

Demostración. En primer lugar se probará que (1) implica (2). Sea $\mathcal{D}$ la familia de todos los R-módulos inyectivos inescindibles izquierdos, y $\mathcal{C}$ la familia de todos los R-módulos inescindibles no inyectivos izquierdos. Si $\mathcal{C} = \emptyset$ entonces la propiedad es inmediata; de lo contrario, $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una partición de R-ind que satisface (a) de la proposición 3.2.7, y por tanto $\mathcal{C}$ tiene una partición Ext-inyectiva que cumple (d) de la Proposición 3.2.7, dado que R-ind es la unión de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, entonces R-ind tiene una partición Ext-inyectiva con la propiedad (d) de la Proposición 3.2.7, probando así (2). Ahora (2) implica (3). Como R es artiniano, para probar que R es puro-semisimple izquierdo, es suficiente con demostrar que para una sucesión infinita de morfismos no nulos que no son ismorfismos entre módulos finitamente generados e inescindibles,

$$M_{i_1} \xrightarrow{f_1} M_{i_2} \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow M_{i_n} \xrightarrow{f_n} \cdots ,$$

con distintos $i_n \in I$, existe un entero positivo n tal que $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1 = 0$ (ver Lema 2.4.13).

Suponga que $M_{i_k} \in \mathcal{U}_{\alpha_k}$ para algún entero positivo k. Es claro que $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k$ por (2). Entonces se tiene una sucesión infinita de ordinales $\alpha_1 \geq \alpha_1 \cdots \geq \alpha_n \geq \cdots$, la cual debe parar en algún punto. Se sigue que un número infinito de módulos M_{i_k} debe pertenecer al mismo $\mathcal{U}_\alpha$ para algún α. Como el conjunto $\mathcal{U}_\alpha$ es finito, existe una cota b (entero positivo) en las longitudes de los módulos en $\mathcal{U}_\alpha$. Usando el Lema de Harada-Sai, 3.2.8, cualquier composición de $m = 2^b - 1$ de morfismos no nulos entre los módulos M_{i_k} de $\mathcal{U}_\alpha$ debe ser cero. Por lo tanto se prueba que existe entero positivo n tal que $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1 = 0$.

Para finalizar (3) implica (1), como R es puro-semisimple hereditario, se sigue por la parte (e) de la Proposición 3.2.7 que la familia R-ind tiene una partición Ext-inyectiva $R\text{-ind} = \bigcup_{\alpha<\rho} \mathcal{U}_\alpha$ con ρ es un ordinal no límite.

□

Se puede decir un poco más acerca de esta partición, en efecto si R es un anillo hereditario puro-semisimple izquierdo entonces por la proposición anterior, existe una partición Ext-inyectiva $R\text{-ind} = \bigcup_{\alpha<\rho} \mathcal{U}_\alpha$ de la familia R-ind con ρ un ordinal no límite. Por tanto, $\rho = \delta + 1$ para algún ordinal δ, y $R\text{-ind} = \bigcup_{\alpha\leq\delta} \mathcal{U}_\alpha$. Para cada entero positivo n, hay sólo un número finito de clases de isomorfismo de módulos inescindibles de longitud n (Ver Corolario 10 de [52]), **por lo tanto δ debe ser contable.** Denotemos $\mathcal{I} = R$-ind, y para cada ordinal α, sea $\mathcal{I}^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta$ y $\mathcal{I}_\alpha$ el complemento de $\mathcal{I}^\alpha$ en R-ind. Entonces, $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{I}^{\alpha+1} \setminus \mathcal{I}_\alpha$ para cada α. Observe que si α es un ordinal límite infinito, entonces $\mathcal{I}^\alpha$ es la unión de todos los $\mathcal{I}^\beta$ con $\beta < \alpha$. Por la forma en que está descrita la partición Ext-inyectiva, es claro que U_0 es el conjunto de todos los R-módulos inescindibles inyectivos izquierdos, y todos los módulos en el último conjunto finito $\mathcal{U}_\delta$ son proyectivos.

Inicialmente ver estas particiones sólo por medio de las definiciones es un poco complejo por lo que los siguientes ejemplos muestran una ilustración de estas particiones en ciertos anillos más específicos:

Ejemplo 3.2.11. *Sea R un anillo semisimple, entonces su partición Ext-inyectiva consta sólo de un bloque formado por todo R-Simp.*

Ejemplo 3.2.12. *Considere el álgebra de caminos $\Lambda = K\mathbb{A}_3$ generado por el carcaj $\mathbb{A}_3$:* $\overset{e_1}{\bullet} \longrightarrow \overset{e_2}{\bullet} \longrightarrow \overset{e_3}{\bullet}$ *(Ver página 225 de [6]).*

En este caso el módulo inyectivo $I_3 \cong P_1$ y además tiene serie de composición $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset 0$. Por otro lado, $I_3/Soc\ I_3 \cong I_2$ y $I_2/Soc\ I_2 \cong I_1$. Entonces sólo hay tres sucesiones casi escindibles, que son, $0 \to P_3 \to P_2 \to S_2 \to 0$ y $0 \to P_2 \to S_2 \oplus P_1 \to I_2 \to 0$ y $0 \to S_2 \to I_2 \to I_1 \to 0$

De esta forma su diagrama de Auslander-Reiten queda dado por:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {[P_1 \cong I_3]} \arrow[dr] & & \\
 & {[P_2]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[I_2]} \arrow[dr] & \\
{[P_3]} \arrow[ur] & & {[S_2]} \arrow[ur] & & {[I_1]}
\end{tikzcd}$$

y su partición Ext-inyectiva viene dada por las diagonales empezando por la superior que es la que contiene a todos los módulos inescindibles inyectivos. Esto es $\mathcal{U}_0 = \{I_3, I_2, I_1\}, \mathcal{U}_1 = \{P_2, S_2\}, \mathcal{U}_3 = \{P_3\}$.

Ejemplo 3.2.13. *Considere el ágebra de caminos* $\Lambda = K\mathbb{B}_3$ *generado por el carcaj* $\mathbb{B}_3 : \overset{e_1}{\bullet} \longleftarrow \overset{e_2}{\bullet} \longrightarrow \overset{e_3}{\bullet}$ *. Para mayor información revisar página 226 de [6].*

Los Λ*-módulos inescindibles son los módulos simples* S_1, S_2, S_3 *correspondientes a los vértices* e_1, e_2 *y* e_3*, la cubierta proyectiva* P_2 *de* S_2 *y las cápsulas inyectivas* I_1 *de* S_1 *y* I_3 *de* S_3*. Entonces las sucesiones que casi se escinden son,* $0 \to S_3 \to P_2 \to I_1 \to 0$, $0 \to P_2 \to I_1 \oplus I_3 \to S_2 \to 0$ *y* $0 \to S_1 \to P_2 \to I_3 \to 0$

De esta forma su diagrama de Auslander-Reiten queda dado por:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
{[S_3]} \arrow[dr] & & {[I_1]} \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & \\
 & {[P_2]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[S_2]} \arrow[ll, dashed] \\
{[S_1]} \arrow[ur] & & {[I_3]} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

y su partición Ext-inyectiva viene dada por las diagonales empezando por la superior que es la que contiene a todos los módulos inescindibles inyectivos. Esto es $\mathcal{U}_0 = \{I_1, S_2, I_3\}, \mathcal{U}_1 = \{P_2, S_3, S_1\}$.

Los siguientes resultados son propiedades interesantes que poseen estas particiones bajo ciertas condiciones y cuyas demostraciones se pueden consultar en las respectivas referencias. Por ejemplo, existe una relación entre la partición Ext-inyectiva y la partición fuerte-preinyectiva de el conjunto de los R-módulos finitamente generados e inescindibles izquierdos dada por la siguiente proposición:

Proposición 3.2.14 ([13],Proposición 2.3)**.** *Sea* R *un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo con la partición Ext-inyectiva* R*-ind* $= \bigcup_{\beta<\rho} \mathcal{U}_\beta$ *y la partición fuerte-preinyectiva* R*-ind* $= \bigcup_{\beta<\iota} C_\beta$*. Para todo ordinal límite* α*, se tiene que* $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$.

También se pueden mencionar más características que tienen estar particiones. En [13], se muestra que cuando R es un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo y además es inescindible como anillo, los módulos proyectivos inescindibles se encuentran en los conjuntos $\mathcal{U}_{\beta+k}$ con $0 \leq k \leq n$ y $\delta = \beta + n$ para n entero no negativo y β un ordinal límite. Esto puede ser enunciado por medio de la siguiente proposición,

Proposición 3.2.15 (Corolario 2.11, [13]). *Sea R un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo e inescindible, con partición Ext-inyectiva R-ind $= \bigcup_{\alpha \leq \delta} \mathcal{U}_\alpha$. Sea $\delta = \beta + n$, donde β es un ordinal límite y n es un entero no negativo. Entonces existe un entero negativo $m \leq n$ tal que todo módulo proyectivo inescindible izquierdo pertenece a uno de los conjuntos $\mathcal{U}_{\beta+k}$ con $m \leq k \leq n$, y cada conjunto $\mathcal{U}_{\beta+k}$ contiene un módulo proyectivo.*

Por los resultados encontrados en [47], se concluye que para cada ordinal $\alpha \leq \beta$, el conjunto $\mathcal{U}_\alpha$ contiene exactamente k módulos donde $k = |R\text{-Simp}|$.

Finalmente, si se considera N un R-módulo izquierdo y $S = \mathrm{End}(_R N)$, se llama el local dual de N al módulo derecho $D(N) = \mathrm{Hom}_S(N_S, C_S)$ donde C_S es el mínimo cogenerador inyectivo de Mod-S. Si N es finitamente presentado con un anillo de endomorfismo local, entonces $D(N)$ es inescindible puro-inyectivo.

Si se denota por $\mathrm{Tr}(M)$ el módulo transpuesto del módulo finitamente presentado M, aplicando el Teorema de Auslander, si R es semiperfecto, entonces para todo módulo no proyectivo finitamente presentado C con anillo de endomorfismo local, existe una sucesión casi escindible [1] $0 \to A \to B \to C \to 0$ con $A \cong D(Tr(C))$. Si R es puro-semisimple izquierdo entonces esta es una sucesión casi escindible en R-mod.

De esta manera se tiene el siguiente resultado,

Teorema 3.2.16 (Proposición 2.7, [13]). *Sea R un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo con partición Ext-inyectiva de R-ind $= \bigcup_{\alpha \leq \delta} \mathcal{U}_\alpha$. Entonces para todo ordinal $\alpha < \delta$, los módulos del conjunto $\mathcal{U}_{\alpha+1}$ son precisamente módulos de la forma $D(\mathrm{Tr}(M))$ para todo módulo no proyectivo inescindible M en $\mathcal{U}_\alpha$.*

Nota 1: Auslander demostró en [4] que para un módulo finitamente presentado C no proyectivo y con anillo de endomorfismo local, siempre existe una sucesión casi escindible $0 \to A \to B \to C \to 0$ en R-Mod y $A = D(\mathrm{Tr}(C))$. por lo tanto, si R es un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo con partición Ext-inyectiva de R-ind $= \bigcup_{\alpha \leq \delta} \mathcal{U}_\alpha$. Entonces para todo ordinal $\alpha < \delta$, existe una sucesión casi escindible $0 \to A \to X \to C \to 0$ con $A \in \mathcal{U}_{\alpha+1}$ y $C \in \mathcal{U}_\alpha$ con C no proyectivo.

3.3. Pares de torsión que se escinden

La siguiente es una definición que da otra herramienta para abordar el estudio de las particiones Ext-inyectivas por medio de otras particiones más sencillas del conjunto R-ind.

Definición 3.3.1. *Una partición $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ de R-ind, se llama par de torsión que se escinde si* $\mathrm{Hom}_R(D, C) = 0$ *para todo $C \in \mathcal{C}$ y todo $D \in \mathcal{D}$.*

[1] Una sucesión $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es llamada casi escindible si $\mathrm{End}(C)$ es local y f es casi escindible en R-Mod. Consultar [6]

La siguiente proposición muestra una propiedadad que se deriva de esta definición cuando R es un anillo puro-semisimple izquierdo,

Proposición 3.3.2. *Sea R un anillo puro-semisimple izquierdo izquierdo.*

Entonces $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ es un par de torsión que se escinde de R-ind si y sólo si $(\mathrm{Add}(\mathcal{D}), \mathrm{Add}(\mathcal{C}))$ es una teoría de torsión que se escinde en R-Mod.

Demostración. Si R es un anillo puro-semisimple izquierdo entonces el anillo de endomorfismos de cada R-módulo inescindible es local. Por tanto, por el Teorema de Krull-Schimdt-Remak-Azumaya, Teorema 2.5.2, cada $M \in R$-Mod tiene una única descomposición, salvo isomorfismos, en sumandos directos inescindibles. Esto implica que si $\mathcal{C} \subseteq R$-ind entonces $\mathrm{Add}(\mathcal{C})$ consiste de R-módulos los cuales son isomorfos a sumas directas de elementos de $\mathcal{C}$. Ahora bien, asuma que $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ es un par de torsión que se escinde de R-ind. Si $D \in \mathrm{Add}(\mathcal{D})$ y $C \in \mathrm{Add}(\mathcal{C})$ entonces, $D = \bigoplus D_i$ y $C = \bigoplus C_j$, donde cada $C_j \in C$ y cada $D_i \in D$; De ahí, $\mathrm{Hom}_R(D, C) = 0$. Si $M \in R$-Mod es tal que $\mathrm{Hom}(M, C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{C}$ entonces como R es puro-semisimple izquierdo, $M = \bigoplus M_i$ donde cada $M_i \in R$-ind. Si algún $M_{i_0} \in \mathcal{C}$ entonces $\mathrm{Hom}(M, M_{i_0}) \neq 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, cada M_i pertenece a $\mathcal{D}$, es decir $M \in \mathrm{Add}(\mathcal{D})$. Similarmente, si $N \in R$-Mod es tal que $\mathrm{Hom}(D, M) = 0$ para todo $D \in \mathcal{D}$ entonces $N \in \mathrm{Add}(\mathcal{C})$. Y se concluye que $(\mathrm{Add}(D), \mathrm{Add}(C))$ es una teoría de torsión.

Recíprocamente, si $(\mathrm{Add}(D), \mathrm{Add}(C))$ es una teoría de torsión entonces, en particular, para cada $D \in \mathcal{D}$ y cada $C \in \mathcal{C}$ tenemos que $\mathrm{Hom}(D, C) = 0$, esto es, $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ es un par de torsión que se escinde de R-ind.

□

Ahora se mostrarán dos lemas que serán de ayuda para la demostración de un resultado que a su vez será de gran utilidad más adelante:

Lema 3.3.3 (Lema 2.6, [15])**.** *Sea R un anillo puro-semisimple izquierdo y $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ un par de torsión que se escinde de R-ind tal que $\mathcal{D}$ contiene todos los módulos inyectivos inescindibles. Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de módulos Ext-inyectivos de $\mathcal{C}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $\mathrm{Ext}^2_R(C, -) = 0$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$.

(b) $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$ *para todo* $X \in \mathcal{W}$ *y todo* $Y \in \mathcal{C}/\mathcal{W}$.

(c) $\mathcal{C}$ tiene una partición Ext-inyectiva $\mathcal{C} = \bigcup_{\alpha \leq \rho} \mathcal{U}_\alpha$.

Demostración. Sea X un R-módulo finitamente presentado, y tome una sucesión exacta en R-mod, $0 \to X \to E \to Z \to 0$ donde E es inyectivo. De esta forma $E \in \mathrm{add}\, \mathcal{D}$, y así cada sumando directo inescindible de $\mathcal{Z}$ pertenece a $\mathcal{D}$, ya que por hipótesis no hay morfismos no-nulos de E a módulos de $\mathcal{C}$. De esta manera si se considera la homología para cualquier $C \in \mathcal{C}$,

$$\to \mathrm{Ext}^1_R(C, Z) = 0 \to \mathrm{Ext}^2_R(C, X) \to \mathrm{Ext}^2_R(C, E) = 0$$

se observa que $\mathrm{Ext}^2_R(C, X) = 0$, probando así (a).

Por otro lado (b) y (c) se deducen de la Proposición 3.2.7. □

Es bastante útil describir morfismos de módulos Ext-inyectivos en una clase de $\mathcal{C}$ de módulos. El siguiente lema muestra información acerca de los núcleos de estos morfismos,

Lema 3.3.4 (Lema 2.7 de [15]). *Sea R un anillo puro-semisimple izquierdo y $(\mathcal{D},\mathcal{C})$ un par de torsión que se escinde de R-ind tal que $\mathcal{D}$ contiene todos los módulos inyectivos inescindibles. Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de todos los módulos Ext-inyectivos inescindibles en $\mathcal{C}$. Para cualquier módulo Y, Z en $\mathcal{W}$ y cualquier morfismo no nulo, $f\colon Y \to Z, \ker(f)$ no contiene submódulos inescindibles que pertenecen a $\mathcal{W}$.*

Demostración. En primer lugar se demostrará que $\ker(f)$ no contiene sumandos directos inescindibles que pertenecen a $\mathcal{W}$. Sea $Z_0 = \operatorname{Im}(f)$, entonces como $\operatorname{add}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo submódulos, se tiene que $Z_0, \ker(f) \in \operatorname{add}(\mathcal{C})$. Sea $K = \ker(f) = K_0 \oplus K_1$ donde $K_0 \in \operatorname{add}(\mathcal{W})$ y K_1 no tiene sumandos directos en $\mathcal{W}$. Se probará que $K_0 = 0$. Considere la sucesión exacta inducida, $0 \to K/K_0 \cong K_1 \to Y/K_0 \to Z_0 \to 0$, por lo que $Y/K_0 \in \operatorname{add}(\mathcal{C})$ porque $\operatorname{add}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo extensiones (Proposición 3.2.7). Ahora bien, la sucesión exacta $0 \to K_0 \to Y \to Y/K_0 \to 0$ se escinde ya que K_0 es Ext-inyectivo en $\mathcal{C}$, por hipótesis. Esto implica que K_0 es un sumando directo de Y. Como Y es inescindible , entonces $K_0 = Y$ o $K_0 = 0$. El primer caso, es imposible ya que f es no nulo. Por tanto $K_0 = 0$, que era lo que se quería demostrar.

Se sabe que no hay morfismos de módulos de $\mathcal{D}$ a módulos de $\mathcal{C}$, entonces cada submódulo inescindible de $\ker(f)$ debe pertenecer a $\mathcal{C}$. Usando la parte anterior de esta demostración, $\ker(f) = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$ donde $X_1, \ldots, X_m$ son módulos inescindibles que pertenecen a $\mathcal{C} \setminus \mathcal{W}$. Usando el Lema 3.3.3, no hay morfismos no-nulos de módulos en $\mathcal{W}$ en módulos de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{W}$, y esto implica que $\ker(f)$ no contiene submódulos inescindibles que pertencen a $\mathcal{W}$. □

El siguiente es un resultado que será útil para describir más propiedades que aparecen en la partición Ext-inyectiva,

Proposición 3.3.5 (Corolario 2.8, [15]). *Sea R un anillo puro-semisimple izquierdo y $(\mathcal{D},\mathcal{C})$ un par de torsión que se escinde de R-ind tal que $\mathcal{D}$ contiene todos los módulos inescindibles inyectivos. Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de todos los módulos Ext-inyectivos en $\mathcal{C}$. Sea $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ un morfismo no nulo entre módulos inescindibles X, Y, Z en $\mathcal{W}$. Entonces la composición $g \circ f\colon X \to Z$ es un morfismo no nulo.*

Demostración. Dado que $\operatorname{add}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo submódulos, aplicando la parte (b) del Lema 3.3.3, se tiene que $\operatorname{Im}(f) \in \operatorname{add}(\mathcal{W})$, y así $\operatorname{Im}(f)$ no puede estar contenida en el $\ker(g)$ por el Lema 3.3.4, por tanto la composición $g \circ f$ es no nula. □

El siguiente resultado muestra propiedades interesantes sobre los módulos de $\mathcal{C}$,

Proposición 3.3.6. *Sea R una anillo puro-semisimple izquierdo y $(\mathcal{D},\mathcal{C})$ un par de torsión que se escinde de R-ind tal que $\mathcal{D}$ contiene todos los módulos inescindibles inyectivos. Entonces para cada módulo $M \in \mathcal{C}$, el anillo de endomorfismos de M es un anillo con división y $\operatorname{Ext}^1_R(M, M) = 0$.*

Demostración. Sea $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ un par de torsión que se escinde de R-ind como en el enunciado. Por la parte (e) de la Proposición 3.2.7, $\mathcal{C}$ tiene una partición Ext-inyectiva $\mathcal{C} = \bigcup_{\alpha \leq \delta} \mathcal{U}_\alpha$. Así, si $M \in \mathcal{C}$ entonces $M \in \mathcal{U}_\alpha$ para algún ordinal α. Sea $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D} \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta)$ y $\mathcal{C}_\alpha = \bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{U}_\beta$. Entonces, $(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{C}_\alpha)$ es un nuevo par de torsión que se escinde de R-ind y además M es Ext-inyectivo en $\mathcal{C}_\alpha$, en particular, $\operatorname{Ext}^1_R(M, M) = 0$. Más aún, para cada endomorfismo f de M la Proposicion 3.3.5, muestra que f^n es no nulo para cada cada entero positivo n. Como M es de longitud finita e inescindible, por la afirmación anterior y aplicando el Lema de Fitting [2] (Corolario 11.8 de [2]) se tiene que f no es nilpotente y esto es equivalente a decir que f es un automorfismo, por lo tanto $\operatorname{End}_R M$ es un anillo con división.

□

El siguiente resultado establece algunas propiedades generales que se sintetizan a manera de Teorema, acerca de la partición Ext-inyectiva de R-ind; dichas propiedades serán de gran utilidad a la hora de establecer propiedades que se obtienen en la retícula de prerradicales de anillos puro-semisimples hereditarios izquierdos.

Teorema 3.3.7 ([15],Teorema 3.1)**.** *Sea R un anillo puro semisimple hereditario izquierdo. Entonces se cumple que:*

(a) R-ind tiene una única particíon Ext-inyectiva R-ind $= \bigcup_{\alpha \leq \delta} \mathcal{U}_\alpha$. Además, para todo $X \in \mathcal{U}_\gamma, Y \in \mathcal{U}_\lambda$ con $\gamma < \lambda \leq \delta$, se tiene que $\operatorname{Hom}_R(X, Y) = 0$.

(b) Si M es cualquier R-módulo inescindible izquierdo, entonces $\operatorname{End}_R(M)$ *es un anillo con división, y* $\operatorname{Ext}^1_R(M, M) = 0$.

(c) Para cualquier par de módulos inescindibles izquierdos no isomorfos X e Y, se cumple que $\operatorname{Hom}_R(X, Y) = 0$ *o* $\operatorname{Hom}_R(Y, X) = 0$.

(d) Para cualquier ordinal $\alpha \leq \delta$, si $f : X \to Y$ es un homomorfismo no nulo entre módulos inescindibles X e Y en $\mathcal{U}_\alpha$, entonces f es un monomorfismo o un epimorfismo.

(e) Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de módulos en R-ind. Entonces existe un módulo $M \in \mathcal{A}$ tal que $\operatorname{Hom}(M, X) = 0$ *para todo módulo inescindible izquierdo $X \in \mathcal{A}$ con $X \ncong M$.*

Demostración. La parte (a) es la parte (2) de la Proposición 3.2.10. Para ver la parte (b), tome $\mathcal{D}$ como la familia de todos los R-módulos inyectivos inescindibles izquierdos, y $\mathcal{C}$ como la familia de todos los R-módulos inescindibles no inyectivos izquierdos. Por la Proposición 3.3.6 se tiene que para todo módulo inescindible no inyectivo M, el anillo $\operatorname{End}_R(M)$ es un anillo con división y $\operatorname{Ext}^1_R(M, M) = 0$. Si N es un módulo inyectivo inescindible, todo morfismo no nulo $f : N \to N$ es un automorfismo porque R es hereditario, y esto prueba que $\operatorname{End}_R(N)$ es una anillo con división. Es claro que $\operatorname{Ext}^1_R(N, N) = 0$.

[2]Lema de Fitting: Si M es un módulo de longitud finita n y si f es un endomorfismo de M, entonces $M = \operatorname{Im} f^n \oplus \ker f^n$.

Para la parte (c), suponga que X e Y son módulos inescindibles no isomorfos tal que $\mathrm{Hom}_R(X,Y) \neq 0$ y $\mathrm{Hom}_R(Y,X) \neq 0$. Por la parte (a) se tiene que tanto como X e Y pertenecen al mismo $\mathcal{U}_\alpha$ para algún α. Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ morfismos no nulos, entonces la composición $g \circ g\colon X \to X$ es un morfismo no nulo por la Proposición 3.3.5, entonces como $\mathrm{End}_R(X)$ es un anillo con división, debe ser un isomorfismo. Por lo tanto X e Y son isomorfos y esto es una contradicción.

Las demostraciones de (d) y (e) pueden ser consultadas en el Teorema 3.1 de [15]. □

Los módulos tilting juegan un papel importante, es por eso que se tiene su definición a continuación:

Definición 3.3.8. *Un R-módulo finitamente generado W se llama tilting, si la clase $Gen(W)$ de todos los R-módulos generados por W es coincide con la clase $W^\perp$ de todos los R-módulos X que satisfacen* $\mathrm{Ext}^1_R(W,X) = 0$.

Se considerarán módulos tilting que son sumas directas finitas de módulos inescindibles no isomorfos dos a dos, a estos módulos se les llama módulos tilting básicos.

Ahora se consideran algunas propiedades de ser tilting para ciertos módulos inducidos por los pares de torsión que escinden de R-ind. Este resultado se enunciará y su demostración puede ser consultada en la referencia del mismo. Aunque es un resultado interesante, en el caso de esta investigación sólo será usado como herramienta para demostrar una proposición que muestra como es la partición Ext-inyectiva para anillos de matrices triangulares con exactamente dos módulos.

Teorema 3.3.9 (Teorema 2.1, [15])**.** *Sea R un anillo puro-semisimple izquierdo y $(\mathcal{D},\mathcal{C})$ un par de torsión que se escinde de R-ind. Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de todos los módulos* Ext*-inyectivos de $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los módulos proyectivos en $\mathcal{D}$ y W la suma directa de los módulos $\mathcal{W} \cup \mathcal{P}$. Si alguna de las condiciones siguientes se satisface*

(a) $\mathcal{D}$ contiene todos los módulos inyectivos inescindibles, o

(b) R es hereditario

Entonces W es un módulo tilting.

3.4. Partición de R-pr en anillos puro-semisimples.

Ahora bien, se introducirán particiones de R-pr inducidas por una clase de R-módulos (Ver [36]).

Definición 3.4.1. *Para cualquier anillo R, sea $\mathcal{C} \subseteq R$-*Mod *una clase de R-módulos izquierdos. Se dice que dos prerradicales σ y τ son equivalentes respecto a $\mathcal{C}$, denotado por $\sigma \sim_{\mathcal{C}} \tau$, si $\sigma(C) = \tau(C)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.*

Esto es un relación de equivalencia en R-pr y las clases de equivalencia para cual prerradical es un intervalo dado por:

Proposición 3.4.2 ([36]). *Para cualquier anillo R, sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos izquierdos y $\gamma \in R$-pr. Sea $[\gamma]_\mathcal{C} = \{\sigma \in R\text{-pr}: \sigma \sim_\mathcal{C} \tau\}$ la clase de equivalencia de γ. Entonces, $[\gamma]_\mathcal{C}$ es un intervalo en la retícula de R-pr dado por $[\gamma]_\mathcal{C} = [\bigvee_{M\in\mathcal{C}} \alpha^M_{\gamma(M)}, \bigwedge_{M\in\mathcal{C}} \omega^M_{\gamma(M)}]$.*

Si R es puro-semisimple hereditario izquierdo, por el Teorema 3.3.7, existe una partición Ext-inyectiva de R-ind dada por

$$R\text{-ind} = \bigcup_{\alpha\leq\delta} \mathcal{U}_\alpha$$

para algún ordinal δ. Esta partición de R-ind induce pares de torsión que se escinden en R-ind. Para cualquier ordinal β tal que $1 \leq \beta \leq \delta$, hay un par de torsión (I^β, I_β), de R-ind, donde $I^\beta = \bigcup_{\kappa<\beta} \mathcal{U}_\kappa$ y $I_\beta = \bigcup_{\kappa\geq\beta} \mathcal{U}_\kappa$. Por la Proposición 3.3.2, cada una de estos pares de torsión induce una teoría de torsión que se escinde $(\mathrm{Add}(I^\beta), \mathrm{Add}(I_\beta))$, la cual corresponde a un radical idempotente γ_β (Ver Sección 1.2). Note que para cada $M \in R$-ind, si $M \in \mathcal{U}_\kappa$, entonces $\gamma_\beta(M) = M$ si $\kappa < \beta$ y $\gamma_\beta(M) = 0$ si $\kappa \geq \beta$. Observe también que si $0 \leq \alpha < \beta \leq \delta$ entonces $I^\alpha \subsetneq I^\beta$, por lo que $\mathrm{Add}(I^\alpha) \subsetneq \mathrm{Add}(I^\beta)$ y $\gamma_\alpha \prec \gamma_\beta$. De esta forma se obtiene una cadena de radicales idempotentes:

$$\gamma_1 \prec \gamma_2 \prec \cdots \prec \gamma_\delta.$$

Como R es puro-semisimple izquierdo, todo R-módulo izquierdo es isomorfo a una suma directa de R-modulos en R-ind, así que si $\mathcal{C} = R$-ind, la relación $\sim_\mathcal{C}$ es trivial, es decir, $\tau \sim_\mathcal{C} \sigma$ si y sólo si $\tau = \sigma$. Por otro lado, si $\mathcal{C} = \mathcal{U}_0$, entonces para cada $\beta \leq \delta$ se tiene que $\gamma_\beta \in [\gamma_1]_\mathcal{C}$. Hay una forma de escoger $\mathcal{C}$ de tal forma de que cada γ_β esté en clase de equivalencia diferente:

Proposición 3.4.3. *Sea $\mathcal{C} = R\text{-ind}\setminus\{\mathcal{U}_\delta\}$ y sean α y β ordinales. Entonces:*

1. *Si $1 \leq \alpha < \beta \leq \delta$ entonces $[\gamma_\alpha]_\mathcal{C} \neq [\gamma_\beta]_\mathcal{C}$.*
2. *Si $1 \leq \beta \leq \delta$ entonces $[\gamma_\beta]_\mathcal{C} = [\gamma_\beta, \eta_\beta]$, donde $\eta_\beta = \bigwedge_{M\in(I_\beta\setminus\mathcal{U}_\delta)} \omega^M_0$.*
3. *$\gamma_\beta = \bigvee_{M\in I^\beta} \alpha^M_M$*
4. *Si $1 \leq \alpha < \beta \leq \delta$ entonces $\gamma_\alpha \prec \gamma_\beta$ y $\eta_\alpha \prec \eta_\beta$.*

Demostración. 1. Sea $1 \leq \alpha < \beta \leq \delta$ y considere $M \in \mathcal{U}_\alpha$. Se tiene que, $\gamma_\alpha(M) = 0$ y $\gamma_\beta(M) = M$, esto demuestra que existe $M \in \mathcal{C}$ tal que $\gamma_\alpha(M) \neq \gamma_\beta(M)$, es decir, $[\gamma_\alpha]_\mathcal{C} \neq [\gamma_\beta]_\mathcal{C}$.

2. Sea $1 \leq \beta \leq \delta$ y $\sigma \in [\gamma_\beta]_\mathcal{C}$. Entonces $\sigma(M) = \gamma_\beta(M)$ para cada $M \in \mathcal{C}$ y $\gamma_\beta(N) = 0$ para cada $N \in \mathcal{U}_\delta$. Por tanto, $\gamma_\beta \preceq \sigma$, lo cual prueba que γ_β es el menor elemento de $[\gamma_\beta]_\mathcal{C}$.

   Ahora usando la Proposición 3.4.2, y el hecho de que $\omega^M_M = 1_R$ para cada $M \in R$-Mod, se tiene que

$$\eta_\beta = \bigwedge_{M\in\mathcal{C}} \omega^M_{\gamma_\beta(M)} = \bigwedge_{M\in\mathcal{I}^\beta} \omega^M_M \wedge \bigwedge_{M\in(\mathcal{I}_\beta\setminus\mathcal{U}\delta)} \omega^M_0 = \bigwedge_{M\in(\mathcal{I}_\beta\setminus\mathcal{U}\delta)} \omega^M_0$$

Nótese que $\eta_\delta = 1$.

3. Es consecuencia de la Proposición 3.4.2.

4. Si $\alpha < \beta$ entonces $I^\alpha \subsetneq I^\beta$ y $I_\beta \subsetneq I_\alpha$, entonces por el resultado anterior se tiene que $\gamma_\alpha \prec \gamma_\beta$ y $\eta_\alpha \prec \eta_\beta$.

$\square$

Por medio de la proposición anterior se puede obtener el siguiente diagrama para la partición asociada a $\mathcal{C}$ de la retícula de prerradicales para un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo:

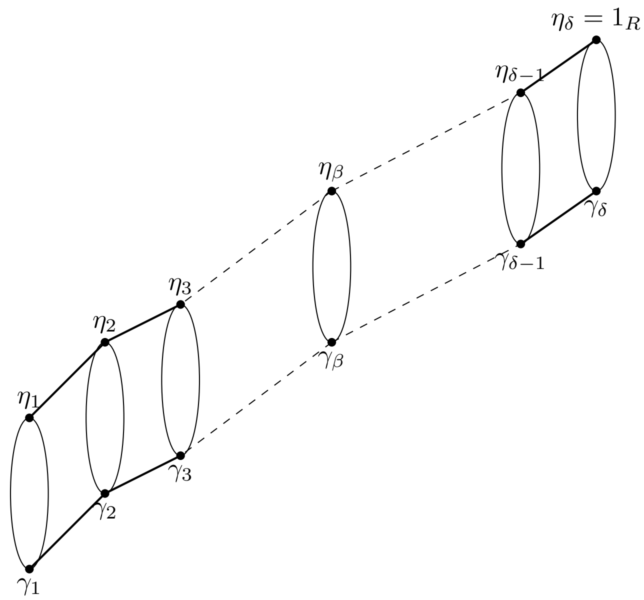

Figura 3.1: Clases de equivalencia en R-pr de los radicales idempotentes asociados a pares de torsión que se escinden.

Por medio de estas particiones se plantean varias preguntas. La primera estaría relacionada con respecto a qué propiedades o características se pueden obtener de R-pr o incluso del anillo R en el caso de que $\eta_\lambda = \gamma_\lambda$ para todo $\lambda < \delta$, es decir, en el caso de que estos intervalos colapsen en un sólo punto. Observe que en el caso de $\lambda = \delta$ siempre tenemos al menos dos prerradicales diferentes, que son el prerradical, $\mathbf{1}_R$ y el prerradical γ_δ.

Aparte de planterse acerca de qué sucede con la retícula de prerradicales y el anillo R cuando dichos intervalos colapsan, también se plantea la siguiente pregunta: ¿Bajo qué condiciones sobre el anillo R, se colapsan dichos intervalos en un sólo punto? En el próximo capítulo se dará una respuesta a esta última pregunta por medio de ciertos anillos puro-semisimples izquierdos los cuáles tienen condiciones muy particulares.

Capítulo 4

Prerradicales en anillos de matrices triangulares

Siguiendo con lo mostrado en el capítulo 3, se sabe que una caracterización para los anillos puro-semisimples izquierdos es la existencia de particiones fuerte-preinyectivas; mientras que para el caso de anillos puro-semisimples hereditarios izquierdos, esto equivale a la existencia de una única partición Ext-inyectiva del conjunto R-ind. En este capítulo se hará uso de estas dos particiones para el caso particular de anillos puro-semisimples hereditarios básicos izquierdos con exactamente dos módulos simples.

Más adelante en este capítulo se observará que salvo isomorfismos, estos anillos puro-semisimples con precisamente dos módulos simples izquierdos son anillos de matrices triangulares de la forma $R = \begin{pmatrix} F & 0 \\ B & G \end{pmatrix}$ donde F, G son anillos con división y B es un G-F-bimódulo, el cual es de dimensión finita como G-módulo izquierdo y de dimensión finita como F-módulo derecho. Estos anillos tienen un papel muy importante porque ellos están relacionados a la *conjetura puro-semisimple.* Recuerde que esta conjetura establece que los anillos puro-semisimples izquierdos son puro-semisimples derechos y por tanto de representación finita ([6],[24],[41]). *En [43], Simson probó que la conjetura puro-semisimple es verdadera para todos los anillos hereditarios si, y sólo si, es cierta para todos los anillos de matrices triangulares mencionados anteriormente*, por lo que estos anillos juegan un papel importante dentro de la teoría de anillos puro-semisimples.

Con dichas particiones y propiedades que se obtienen de las mismas en estos anillos se caracterizan prerradicales idempotentes, radicales y de forma general los prerradicales. Para hacer esto, en primer lugar se observará cómo quedan determinadas las particiones del conjunto de los módulos finitamente generados e inescindibles en estos anillos.

4.1. Orden lineal de R-ind

Los siguientes resultados muestran la existencia de una única partición Ext-inyectiva en un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo con exactamente dos módulos simples izquierdos, de la cual se puede obtener una partición fuerte-preinyectiva del conjunto R-ind.

Proposición 4.1.1. *Sea R un anillo inescindible puro-semisimple hereditario izquierdo con exactamente dos módulos simples izquierdos. Sean P_0, P_1 los módulos proyectivos inescindibles en R-mod, con P_0 simple. Entonces se cumple que la familia R-ind tiene una única partición Ext-inyectiva, R-ind $= \bigcup_{\alpha \leq \delta} \mathcal{U}_\alpha$, y cada $\mathcal{U}_\alpha$ consiste de dos módulos $\mathcal{U}_\alpha = \{M_\alpha, N_\alpha\}$, con $\mathrm{Hom}_R(M_\alpha, N_\alpha) = 0$ y $\mathrm{Hom}(N_\alpha, M_\alpha) \neq 0$. Más aún, $\mathcal{U}_\delta = \{P_0, P_1\}$ ó $\mathcal{U}_\delta = \{P_0\}$ y P_1 pertenece a $\mathcal{U}_\alpha$ con $\delta = \alpha + 1$.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.10 la familia R-ind tiene una partición Ext-inyectiva, R-ind $= \bigcup_{\alpha \leq \delta} \mathcal{U}_\alpha$. Como R es inescindible y sólo hay dos módulos proyectivos izquierdos P_0 Y P_1, usando la Proposición 3.2.15, se tiene que $\mathcal{U}_\delta = \{P_0, P_1\}$ ó $\mathcal{U}_\delta = \{P_0\}$ y P_1 pertenece a $\mathcal{U}_\alpha$ con $\alpha + 1 = \delta$. Entonces para cada $\alpha < \delta$, no hay módulos proyectivos en $\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}_\beta$ por lo que el Teorema 3.3.9 muestra que W_α, es un módulo tilting, por lo que el Corolario 3.7.5 de [9], muestra que W_α contiene exactamente dos módulos inescindibles, digamos, M_α y N_α, donde M_α es Esc-inyectivo en $\mathcal{I}_\alpha = \bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{U}_\beta$. Ahora suponga que M_α y N_α no son módulos inyectivos, se sabe que los sumando directos de de los núcleos de $\mathcal{I}_\alpha$-cubiertas de módulos inyectivos son Ext-inyectivos en $\mathcal{I}_\alpha$. Por lo tanto, debe existir un sumando directo inescindible de ese núcleo que no es Esc-inyectivo en $\mathcal{I}_\alpha$. Esto demuestra que N_α no es Esc-inyectivo en $\mathcal{I}_\alpha$, Así M_α es el único módulo Esc-inyectivo en $\mathcal{I}_\alpha$. En particular, M_α cogenera a N_α, y así $\mathrm{Hom}(N_\alpha, M_\alpha) \neq 0$. Por la parte (c) del Teorema 3.3.7, se tiene que $\mathrm{Hom}(M_\alpha, N_\alpha) = 0$. □

Dualmente a la definición de módulo tilting se tiene la siguiente definición para módulos cotilting:

Definición 4.1.2. *Sea R un anillo. Un R-módulo izquierdo finitamente generado W se llama módulo cotilting si la clase* $\mathrm{Cogen}(W)$ *de todos los R-módulos izquierdos cogenerados por W coincide con la clase ${}^\perp W$ de todos los R-módulos izquierdos X que satisfacen* $\mathrm{Ext}^1_R(X, W) = 0$.

Para abreviar, se llama a un módulo tilting M, básico o tilting básico, si M es la suma directa finita de un par de módulos inescindibles no isomorfos .

El siguiente resultado muestra que el conjunto R-ind tiene una distribución muy particular en este tipo de anillos, y dicha distribución será una herramienta fundamental para el desarrollo de los resultados acerca de los prerradicales

Proposición 4.1.3 (Teorema 3.8 de [15])**.** *Sea R un anillo inescindible puro-semisimple hereditario izquierdo con dos simples Entonces se cumple:*

(a) Existe una partición fuerte-preinyectiva R-ind $= \bigcup_{\alpha \leq \lambda} \mathcal{C}_\alpha$, donde $\mathcal{C}_0$ consta de dos módulos inyectivos inescindibles izquierdos (E_0, E_1 con E_0 simple), y para todo $\alpha \geq 1$, $\mathcal{C}_\alpha$ consiste de sólo un módulo, $\mathcal{C}_\alpha = \{M_\alpha\}$

(b) La partición fuerte-preinyectiva R-ind $= \bigcup_{\alpha \leq \lambda} \mathcal{C}_\alpha$, da un buen orden del conjunto R-ind dado por $M_{-1}, M_0, \ldots, M_{\lambda+1}$ y denotando $M_{-1} = E_0, M_0 =$

E_1. Este buen orden tiene la propiedad de que dados dos módulos M_α, M_β con $0 \leq \alpha < \beta$, se tiene que $\mathrm{Hom}_R(M_\alpha, M_\beta) = 0$ *y $Hom_R(M_\beta, M_\alpha) \neq 0$.*

(c) Para todo M_α con $\alpha \geq -1$ y $\alpha + 2 \leq \lambda + 1$, hay una sucesión exacta que casi se escinde $0 \to M_{\alpha+2} \to M_{\alpha+1}^k \to M_\alpha \to 0$ en R-mod.

(d) Para todo α con $-1 \leq \alpha < \lambda + 1, M_\alpha \oplus M_{\alpha+1}$ es un módulo tilting y cotilting, y $\mathrm{End}_R(M_\alpha \oplus M_{\alpha+1})$ *es otra vez un anillo hereditario puro-semisimple izquierdo con exactamente dos módulos simples izquierdos. Más aún, cualquier morfismo no nulo $f \colon M_{\alpha+1} \to M_\alpha$ es un monomorfismo o un epimlorfismo. Recíprocamente, si M es cualquier R-módulo tilting básico izquierdo, entonces $M \cong M_\alpha \oplus M_{\alpha+1}$ para algún $-1 \leq \alpha < \lambda + 1$.*

Demostración. (a) Usando la notación de la Proposición 4.1.1, se probará que para cada ordinal $\alpha \neq 0, M_\alpha$ y N_α no son inyectivos, M_α es el único módulo Esc-inyectivo del conjunto $\mathcal{I}_\alpha = \bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{U}_\beta$ y N_α es el único módulo Esc-inyectivo del conjunto $\mathcal{I}_\alpha / M_\alpha$. En efecto, por la Proposición 4.1.1 se obtiene una partición Ext-inyectiva con M_α y N_α no inyectivos para $\alpha \neq 0$. Para la segunda parte, note que no hay morfismos no nulos de N_α a módulos de $\bigcup_{\beta \geq \alpha+1} \mathcal{U}_\beta$, además $\mathrm{End}_R(N_\alpha)$ es un anillo con división, entonces cada monomorfismo $N_\alpha \hookrightarrow X_\alpha \in \mathrm{add}(\mathcal{I}_\alpha / M_\alpha)$ se escinde. Por tanto, N_α es Esc-inyectivo en $\mathcal{I}_\alpha / M_\alpha$.

Por el Teorema de Auslander (Ver Nota 1 del Teorema 3.2.16), hay una sucesión casi escindible $0 \to M_{\alpha+1} \to X \to M_\alpha \to 0$. Así, para cada sumando directo Y de X, si Y no es isomorfo a N_α entonces $\mathrm{Hom}_R(M_{\alpha+1}, Y) = 0$ o $\mathrm{Hom}_R(Y, M_\alpha) = 0$ lo cual no es posible. Por tanto Y es isomorfo a N_α y X es una suma directa de copias de N_α. De esta forma, $M_{\alpha+1}$ es cogenerado por N_α.

Usando argumentos similares, hay una sucesión casi escindible $0 \to N_{\alpha+1} \to M_{\alpha+1}^k \to N_\alpha \to 0$ para algún $k > 0$ y por tanto $N_{\alpha+1}$ es cogenerado por $M_{\alpha+1}$, por esta razón $N_{\alpha+1}$ es cogenerado por N_α. Lo anterior demuestra que $\{M_\alpha\}$ es un conjunto cogenerador mínimo y es el único módulo Esc-inyectivo de $\mathcal{I}_\alpha / M_\alpha$. De esta forma se ha probado que para $\alpha \geq 1$ el conjunto $\mathcal{C}_\alpha$ consiste de un único módulo.

Para la parte (b), es inmediato que si $\beta > \alpha > 0$ entonces el buen orden se hereda de la partición Ext-inyectiva de la Proposición 4.1.3, por lo que no hay morfismos de módulos de $\mathcal{U}_\alpha$ a módulos de $\mathcal{U}_\beta$. Por otro lado, si se consideran los módulos M_α y N_α que están en $\mathcal{U}_\alpha$ entonces como M_α cogenera a N_α, se tiene que $\mathrm{Hom}_R(N_\alpha, M_\alpha) \neq 0$ y aplicando la parte (c) de la Proposición 3.3.7 se obtiene que $\mathrm{Hom}_R(M_\alpha, N_\alpha) = 0$ obteniendo así el orden lineal para $\alpha > 0$. Para $\alpha = 0$ es inmediato puesto que $X_0 = E_1$ es el único inyectivo no simple.

La parte (c) se usa el mismo argumento de la demostración de la parte (a). Y la demostración de la parte (d) puede ser consultada en la referencia de este Teorema.

□

4.2. Anillos de matrices

Suponga que R es un anillo puro-semisimple hereditario izquierdo con exactamente dos módulos simples. Entonces, por la Proposición 4.1.3 se tiene que el conjunto R-ind tiene una partición fuerte-preinyectiva que se puede organizar de forma lineal como:

$$R\text{-ind} = \{M_{-1}, M_0, M_1, \cdots, M_\alpha, \cdots M_\lambda, M_{\lambda+1}\} \tag{4.1}$$

para algún ordinal λ. Aquí, M_{-1} es el módulo simple inyectivo, M_0 es el módulo inyectivo que no es simple, M_λ es el módulo proyectivo que no es simple y $M_{\lambda+1}$ es el módulo simple proyectivo. También se puede observar que M_0 es la cápsula inyectiva de $M_{\lambda+1}$ y que $\mathrm{Soc}(M_0) \cong M_{\lambda+1}$.

Definición 4.2.1. *Sea R un anillo con un conjunto completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de elementos primitivos ortogonales idempotentes. El anillo R se dice básico, si $e_iR \not\cong e_jR$ para todo $i \neq j$.*

La anterior definición implica que si R es un anillo básico puro-semisimple hereditario izquierdo entonces ${}_RR$ es la suma directa de los módulos proyectivos finitamente generados e inescindibles.

Ahora bien, se tiene que el siguiente resultado

Proposición 4.2.2. *Si R es un anillo puro-semisimple hereditario básico izquierdo con dos módulos simples entonces R es un anillo de matrices triangulares de la forma*

$$R = \begin{pmatrix} F & 0 \\ B & G \end{pmatrix}$$

donde B es G-F-bimódulo y G, F son un anillos con división .

Demostración. R es un anillo puro-semisimple hereditario básico izquierdo con dos módulos simples, entonces hay exactamente dos módulos proyectivos inescindibles P_1, P_0, con P_0 simple. Dado que R es básico entonces ${}_RR$ es suma directa de los módulos proyectivos inescindibles P_0 y P_1, esto es, ${}_RR = P_0 \oplus P_1$. Además por la Proposición 4.1.3, existe un orden lineal de R-ind de tal forma que $\mathrm{Hom}_R(P_1, P_0) = 0$ y $\mathrm{Hom}_R(P_0, P_1) \neq 0$. Por el Teorema 3.3.7, se sabe que $F = \mathrm{End}_R(P_0)$ y $G = \mathrm{End}_R(P_1)$ son anillos con división, y es claro que $B = \mathrm{Hom}_R(P_0, P_1)$ es un $G - F$-bimódulo.

Ahora, considere el anillo de matrices $S = \begin{pmatrix} \mathrm{End}_R(P_1) & 0 \\ \mathrm{Hom}_R(P_0, P_1) & \mathrm{End}_R(P_0) \end{pmatrix}$. Entonces se mostrará que $R \cong S$.

En efecto, se tiene que que $R = \mathrm{End}_R(R) \cong \mathrm{End}_R(P_0 \oplus P_1)$ y probando que $\mathrm{End}_R(P_0 \oplus P_1) \cong S$ se finaliza la demostración. □

Usando la proposición anterior, entonces por medio de la equivalencia de categorías mostrada en el Apéndice 4.2, los módulos que aparecen el orden lineal 4.1, se pueden representar de la siguiente forma: M_{-1} como la aplicación canónica $B \otimes_F F \to 0$, M_λ se representa por la aplicación canónica $B \otimes_F 0 \to G$ y M_0 por la aplicación $B \otimes_F B^* \to G$, donde $B^* = \mathrm{Hom}_G(B, G)$.

Ahora bien, sea M cualquier R-módulo izquierdo finitamente generado, el cual no tiene sumandos directos isomorfos a M_{-1} o a $M_{\lambda+1}$. Este módulo puede ser identificado con una aplicación lineal $B \otimes_F V \to W$. Si $\dim_F(V) = n$ y $\dim(W) = m$, entonces la longitud del módulo M es $m + n$. En efecto, existe una suceción exacta

$$0 \to M_{\lambda+1}^m \to M \to M_{-1}^n \to 0$$

donde los morfismos son representados por las siguientes pares de morfismos horizantales en el diagrama commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} B\otimes_F 0 & \longrightarrow & B\otimes_F V & \longrightarrow & B\otimes_F F^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G^m & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.2}$$

Habiendo escogido bases para V y W, se usan los isomorfismos canónicos $G^m \to W$ y $V \to F^n$. Así se puede obervar que $\mathrm{Soc}(M) \cong M^m_{\lambda+1}$, y así $M/\mathrm{Soc}(M) \cong M^n_{-1}$.

Por otra parte, dicho orden cumple, por definición de partición fuerte-preinyectica que: Para todo $1 \leq \beta \leq \alpha \leq \lambda+1$, M_β cogenera a M_α, ver definición 3.1.1. De hecho se cumple que,

Proposición 4.2.3 (Proposición 4.1 de [22])**.** *Para todo* $-1 < \beta \leq \alpha \leq \lambda+1$ *existe un monomorfismo* $M_\alpha \rightarrowtail M^k_\beta$ *para algún entero positivo* k*, esto es,* M_β *cogenera finitamente a* M_α*.*

Demostración. Sean α, β como en la proposición. Se tiene que M_α es finitamente generado y artiniano, puesto que R es artiniano. De ahí, $\mathrm{Soc}(M_\alpha)$ es esencial en M_α, además $\mathrm{Soc}(M_\alpha)$ es finitamente generado, ya que M_α is noetheriano. Por lo tanto, M_α es finitamente cogenerado, y M_β cogenera finitamente a M_α. (Ver [2, Sección 10]). □

De ahora en adelante se hará uso de la representación de los módulos inescidibles en la nueva categoría que se menciona en el Apéndice 4.2. De esta manera se puede tener el siguiente resultado,

Proposición 4.2.4 (Proposición 4.2 de [22])**.** *Para todo* $-1 < \alpha \leq \lambda$ *y* $\beta \leq \alpha$*, existe un epimorfismo* $M^k_\alpha \twoheadrightarrow M_\beta$

Demostración. Primero tome $\alpha = \lambda$. Entonces M_λ se puede representar por medio de la aplicación canónica $f_\lambda : B\otimes_F F \to B$, la cual de hecho es un isomorfismo. Sea $M \in R$-ind y suponga que M es representado por la aplicación lineal $f : B\otimes_F V \to W$. Observe que f es suprayectiva, ya que en caso contrario, su imagen W' sería un sumando directo de W, es decir, $W = W' \oplus W''$ donde $W'' \neq 0$. Entonces se tendría que $M = M' \oplus M''$, donde M' es representado por $B\otimes_F V \to W'$ y M'' es representado por $B\otimes_F 0 \to W''$, lo cual es una contradicción.

De esta manera se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B\otimes_F F^n & \xrightarrow{\varphi} & B\otimes_F V \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B^n & \xrightarrow{g} & W \end{array} \tag{4.3}$$

donde $n = \dim_F(V)$, φ y ψ son isomorfismos, y $g = f \circ \varphi \circ \psi^{-1}$. Por tanto, g es suprayectiva, es decir existe un epimorfismo $M^n_\lambda \twoheadrightarrow M$.

Ahora, si $-1 \leq \alpha < \lambda$, por (d) del Teorema 4.1.3, $R' = \mathrm{End}_R(M_\alpha \oplus M_{\alpha+1})$ es nuevamente un anillo puro-semisimple izquierdo de la forma [(4.4),Apéndice]. También por el Teorema [13, Theorem 3.3] existe una equivalencia de categorías $H\colon \mathrm{add}(\{M_\kappa\colon \kappa \leq \alpha+1\}) \to \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{Y}$ una subcategoría plena de R'-mod.

Usando el hecho de que H es una equivalencia, se tiene que $H(M_\alpha)$ y $H(M_\beta)$ son módulos en R'-ind, y $H(M_\alpha)$ es, salvo isomorfismo, el módulo proyectivo no simple en R'-ind, así que se puede aplicar el mismo argumento del párrafo anterior y concluir que en R'-Mod existe un epimorfismo $H(g) : H(M_\alpha)^n \twoheadrightarrow H(M_\beta)$, donde $g : M_\alpha^n \longrightarrow M_\beta$ es también un epimorfismo.

□

En el orden lineal para R-ind dado por la partición fuerte-preinyectiva, cualquier cortadura sobre dicho orden lineal induce particiones de R-ind, las cuales son pares de torsión que se escinden y por tanto se obtiene la existencia radicales idempotentes γ_α, para cualquier $-1 \leq \alpha \leq \lambda + 1$ que se menciona en 3.3.2 y los cuales denotaremos como:

$$(M_{-1}, \bigcup_{\alpha \geq 0} M_\alpha) \to \gamma_0$$

$$(M_{-1} \cup M_0, \bigcup_{\alpha \geq 1} M_\alpha) \to \gamma_1$$

$$(\bigcup_{\alpha < 2} M_\alpha, \bigcup_{\alpha \geq 2} M_\alpha) \to \gamma_2$$

$$\vdots$$

$$(\bigcup_{\alpha < \beta} M_\alpha, \bigcup_{\alpha \geq \beta} M_\alpha) \to \gamma_\beta$$

$$\vdots$$

$$(\bigcup_{\alpha < \lambda+1} M_\alpha, M_{\lambda+1}) \to \gamma_{\lambda+1}$$

Observe que para $-1 \leq \alpha, \beta \leq \lambda + 1$ se tiene que $\gamma_\beta(M_\alpha) = M_\alpha$ si $\alpha < \beta$, y $\gamma_\beta(M_\alpha) = 0$ si $\alpha \geq \beta$. Estos radicales idempotentes forman una cadena $\gamma_0 \prec \gamma_1 \prec \cdots \prec \gamma_{\lambda+1}$. Lo cual implica que *si R es de tipo de representación infinita entonces R-pr es una retícula infinita.*

El siguiente resultado muestra propiedades que serán de gran utilidad para carcaterizar los prerradicales en esta clase de anillos:

Proposición 4.2.5 (Proposición 4.3 de [22])**.** *Sea $\sigma \in R$-pr y sea α un ordinal tal que $-1 \leq \alpha \leq \lambda + 1$. Entonces se cumple que:*

1. *Si $\alpha \neq -1$ y $\sigma(M_\alpha) = 0$ entonces $\sigma(M_\beta) = 0$ para todo $\beta \geq \alpha$.*
2. *Si $\alpha \neq \lambda + 1$ y $\sigma(M_\alpha) = M_\alpha$ entonces $\sigma(M_\beta) = M_\beta$ para todo $\beta \leq \alpha$.*
3. *Si $\alpha \neq -1$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$ entonces $\mathrm{Soc}(M_\alpha) \leq \sigma(M_\alpha)$.*
4. *Si $\sigma(M_{-1}) = 0$ entonces $\sigma(M_\alpha) \leq \mathrm{Soc}(M_\alpha)$.*

Demostración. 1. Por la Proposición 4.2.3, existe un monomorfismo $f : M_\beta \rightarrowtail M_\alpha^k$. Por tanto, $f(\sigma(M_\beta)) \leq \sigma(M_\alpha)^k = 0$, y así $\sigma(M_\beta) = 0$.

2. Usando la Proposición 4.2.4, existe un epimorfismo $M_\alpha^n \twoheadrightarrow M_\beta$. Dado que $M_\alpha \in \mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrado bajo epimorfismos y sumas directas (ver sección 1.2), entonces $M_\beta \in \mathbb{T}_\sigma$, es decir, $\sigma(M_\beta) = M_\beta$.

3. Si $\alpha \neq -1$ entonces todo submódulo simple de M_α debe ser isomorfo a $M_{\lambda+1}$, entonces $\mathrm{Soc}(M_\alpha)$ es una suma de directa de copias de $M_{\lambda+1}$. Como arriba, dado que $M_{\lambda+1} \in \mathbb{T}_\sigma$ entonces $\mathrm{Soc}(M_\alpha) \in \mathbb{T}_\sigma$. Por tanto, $\mathrm{Soc}(M_\alpha) = \sigma(\mathrm{Soc}(M_\alpha)) \leq \sigma(M_\alpha)$.

4. Para $\alpha = -1$ o $\alpha = \lambda + 1$ se tiene que $\mathrm{Soc}(M_\alpha) = M_\alpha$, así que la desigualdad se cumple. Ahora, para todo $-1 < \alpha < \lambda + 1$ se tiene que $p : M_\alpha \to M_\alpha/\mathrm{Soc}(M_\alpha) \cong M_{-1}^n$, con $n > 0$. Por tanto, $p(\sigma(M_\alpha)) \leq \sigma(\mathrm{Soc}(M_\alpha)) = 0$, es decir, $\sigma(M_\alpha) \leq \mathrm{Soc}(M_\alpha)$.

□

Sea $\sigma \in R$-pr. De ahora en adelante se dirá que

$$\sigma \equiv [N_{-1}, N_0, N_1, \cdots, N_\alpha, \cdots, N_{\lambda+1}]$$

si se cumple que $\sigma(M_\alpha) = N_\alpha$ para todo $-1 \leq \alpha \leq \lambda + 1$.

Corolario 4.2.6. *Sea $\sigma \in R$-pr. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\sigma(M_{-1}) = 0$ *y* $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$

(b) $\sigma \equiv [0, \mathrm{Soc}(M_0), \mathrm{Soc}(M_1), \cdots, \mathrm{Soc}(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}]$

(c) $\sigma = \alpha_{M_{\lambda+1}}^{M_{\lambda+1}} = \omega_0^{M_{-1}}$

Demostración. En primer lugar se probará $(a) \Rightarrow (b)$. Si $\sigma(M_{-1}) = 0$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$, por la parte (3) y (4) de la Proposición 4.2.5 se tiene que $\sigma(M_\alpha) = \mathrm{Soc}(M_\alpha)$, para todo $-1 < \alpha < \lambda + 1$.

Ahora, para demostrar $(b) \Rightarrow (c)$, sea $\tau \in R$-pr es tal que $\tau(M_{\lambda-1}) = M_{\lambda+1}$, por la parte (3) de la Proposición 4.2.5 se tiene que $\mathrm{Soc}(M_\alpha) \leq \tau(M_\alpha)$, para todo $-1 < \alpha \leq \lambda + 1$. Por tanto, para cada $-1 \leq \alpha \leq \lambda + 1$ se tiene que $\sigma(M_\alpha) \leq \tau(M_\alpha)$, de ahí $\sigma \preceq \tau$ y se concluye que $\sigma = \alpha_{M_{\lambda+1}}^{M_{\lambda+1}}$ (ver Sección 1.1). Por otro lado, si $\eta \in R$-pr es tal que $\eta(M_{-1}) = 0$, por la parte (4) de la Proposición 4.2.5 se tiene que $\eta(M_\alpha) \leq \mathrm{Soc}(M_\alpha)$ para todo $-1 \leq \alpha < \lambda + 1$. Por tanto, para cada $-1 \leq \alpha \leq \lambda + 1$ se tiene que $\eta(M_\alpha) \leq \sigma(M_\alpha)$, así $\eta \preceq \sigma$, y se concluye que $\sigma = \omega_0^{M_{-1}}$.

Finalmente para ver $(c) \Rightarrow (a)$, observe que si $\mathrm{Hom}_R(M_{-1}, M_{\lambda+1}) = 0$, entonces $\alpha_{M_{\lambda+1}}^{M_{\lambda+1}}(M_{-1}) = 0$. Por otro lado es claro que $\alpha_{M_{\lambda+1}}^{M_{\lambda+1}}(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$ y esto finaliza la prueba.

□

Lema 4.2.7 (Lema 4.5 de [22]). *Sea $\sigma \in R$-pr con $\sigma \neq 0$. Si $\sigma(M_{-1}) = \sigma(M_{\lambda+1}) = 0$ entonces $\sigma^2 = 0$.*

Demostración. Si $\sigma(M_{-1}) = 0$ entonces, por la parte (4) de la Proposición 4.2.5, se tiene que $\sigma(M_\alpha) \leq \mathrm{Soc}(M_\alpha)$ para todo $-1 \leq \alpha < \lambda + 1$. En particular $\sigma(M_0) \leq \mathrm{Soc}(M_0)$. Si $\sigma \neq 0$, por la parte (1) de la Proposición 4.2.5, se tiene que $\sigma(M_0) \neq 0$ y, como $\mathrm{Soc}(M_0) \cong M_{\lambda+1}$ es simple, se tiene que $\sigma(M_0) = \mathrm{Soc}(M_0) \cong M_{\lambda+1}$. Por tanto, $\sigma^2(M_0) \cong \sigma(M_{\lambda+1}) = 0$ y otra vez por la Proposición 4.2.5 se concluye que $\sigma^2 = 0_R$. □

Lema 4.2.8 (Lema 4.6 de [22])**.** *Sea $\sigma \in R$-pr. Si $\sigma(M_{-1}) = M_{-1}$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$ entonces $\sigma^{(2)} = 1$.*

Demostración. Si $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$ entonces, por la parte (3) de la Proposición 4.2.5, se tiene que $\mathrm{Soc}(M_\alpha) \leq \sigma(M_\alpha)$ para todo $-1 < \alpha \leq \lambda + 1$. En particular $\mathrm{Soc}(M_\lambda) \leq \sigma(M_\lambda)$. Si $\sigma \neq 1$, por la parte (2) de la Proposición 4.2.5 se tiene que $\sigma(M_\lambda) < M_\lambda$, y la descomposición de este submódulo propio tiene que ser de la forma $\sigma(M_\lambda) = M^k_{\lambda+1}$. Por tanto, $\mathrm{Soc}(M_\lambda) = \sigma(M_\lambda)$ y se tiene $M_\lambda/\sigma(M_\lambda) \cong M^n_{-1}$, con $n > 0$. Dado que $\sigma(M_{-1}) = M_{-1}$, se obtiene $\sigma(M_\lambda/\sigma(M_\lambda)) = M_\lambda/\sigma(M_\lambda)$, lo cual significa por definición que $(\sigma\colon \sigma)(M_\lambda) = M_\lambda$. Por la Proposición 4.2.5, se llega a que $(\sigma\colon \sigma)(M_\alpha) = M_\alpha$ para todo $-1 \leq \alpha \leq \lambda$. Y se concluye que $\sigma^{(2)} = 1_R$. □

El siguiente es el Teorema 4.7 que se encuentra en [22]:

Teorema 4.2.9 (Caracterización de prerradicales idempotentes)**.** *Sea $\sigma \in R$-pr, con $\sigma \neq 0$. Entonces σ es idempotente si y sólo si σ tiene una de las siguientes formas:*

1. $\sigma = 0_R$,
2. $\sigma = \alpha^{M_{\lambda+1}}_{M_{\lambda+1}} \equiv [0, \mathrm{Soc}(M_0), \mathrm{Soc}(M_1), \cdots, \mathrm{Soc}(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}]$,
3. $\sigma = \iota_\beta \equiv [M_{-1}, \cdots, \mathrm{Soc}(M_\beta), \cdots, \mathrm{Soc}(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}]$, *donde* $\beta = \min\{-1 < \alpha < \lambda + 1\colon \sigma(M_\alpha) \neq M_\alpha\}$,
4. $\sigma = \gamma_\beta \equiv [M_{-1}, \cdots, \sigma(M_\beta) = 0, \cdots, 0]$, *donde* $\beta = \min\{-1 < \alpha < \lambda + 1\colon \sigma(M_\alpha) = 0\}$ *y* $\beta > -1$,
5. $\sigma = 1_R$.

Demostración. Los módulos M_{-1} y $M_{\lambda+1}$ son representantes de los dos R-módulos simples no isomorfos. Entonces para cualquier prerradical σ se tiene que

$$\sigma(M_{-1}) = \begin{cases} M_{-1}, \text{ ó} \\ 0 \end{cases}$$

$$\sigma(M_{\lambda+1}) = \begin{cases} M_{\lambda+1}, \text{ ó} \\ 0 \end{cases}$$

Por lo que se tienen exactamente uno de los siguientes cuatro casos:

1. Si $\sigma(M_{-1}) = \sigma(M_{\lambda+1}) = 0$, por Lema 4.2.7 se tiene que $\sigma^2 = 0_R$, y dado que σ es idempotente, se concluye que $\sigma = 0_R$.
2. Si $\sigma(M_{-1}) = 0$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$, por Corolario 4.2.6, se tiene que $\sigma = \alpha^{M_{\lambda+1}}_{M_{\lambda+1}}$.
3. Suponga que $\sigma(M_{-1}) = M_{-1}$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$. Por Proposición 4.2.5, se tiene que $\mathrm{Soc}(M_\alpha) \leq \sigma(M_\alpha)$ para todo $-1 < \alpha \leq \lambda + 1$. Suponga también que $\sigma \neq 1_R$ y sea $\beta = \min\{\kappa\colon \sigma(M_\kappa) \neq M_\kappa\}$. Sea κ tal que $\beta \leq \kappa < \lambda + 1$. La descomposición de $\sigma(M_\kappa)$ debe ser de la forma $\sigma(M_\kappa) \cong \bigoplus_{\kappa<\alpha\leq\lambda+1} M^{k_\alpha}_\alpha$, con $k_\alpha \geq 0$. Observe que no puede existir

un sumando inescindible M_α con $\alpha < \kappa$, porque en ese caso se tendría $\mathrm{Hom}_R(M_\alpha, M_\kappa) \neq 0$, lo cual contradice la Proposición4.1.3. Tampoco hay un sumando inescindible isomorfo a M_κ, ya que éste tiene longitud finia y $\sigma(M_\kappa) < M_\kappa$. Ahora suponga que hay un sumando inescindible M_{α_0} con $\kappa < \alpha_0 < \lambda + 1$. Dado que σ es idempotente, entonces $\sigma(M_\kappa) = \sigma^2(M_\kappa)$ y, vía isomorfismo, se tiene que

$$\bigoplus_{\kappa<\alpha\leq\lambda+1} M_\alpha^{k_\alpha} = \sigma\left(\bigoplus_{\kappa<\alpha\leq\lambda+1} M_\alpha^{k_\alpha}\right) = \bigoplus_{\kappa<\alpha\leq\lambda+1} \sigma(M_\alpha)^{k_\alpha}$$

con $k_\alpha \geq 0$ para todo $\kappa < \alpha \leq \lambda + 1$ y $k_{\alpha_0} > 0$. Entonces, en particular $\sigma(M_{\alpha_0}) = M_{\alpha_0}$, lo cual implica, por Proposición 4.2.5(2), que $\sigma(M_\beta) = M_\beta$, lo cual es una contradicción. Por tanto la descomposición tiene la forma $\sigma(M_\kappa) = M_{\lambda+1}^{k_\kappa}$, y se concluye que $\sigma(M_\kappa) = \mathrm{Soc}(M_\kappa)$ para todo κ con $\beta \leq \kappa \leq \lambda + 1$.

4. Ahora suponga que $\sigma(M_{-1}) = M_{-1}$ y que $\sigma(M_{\lambda+1}) = 0$.
Sea $\beta = \min\{\kappa \colon \sigma(M_\kappa) = 0\}$. Si μ es tal que $-1 < \mu < \beta$ y $\sigma(M_\mu)$ es un submódulo propio de M_μ. Al igual que la parte anterior, la descomposición de $\sigma(M_\mu)$ debe ser de la forma $\sigma(M_\mu) \cong \bigoplus_{\mu<\alpha<\lambda+1} M_\alpha^{k_\alpha}$, con $k_\alpha \geq 0$. Dado que σ es idempotente, entonces $\sigma(M_\mu) = \sigma^2(M_\mu)$ y, vía isomorfismo, se tiene que

$$\bigoplus_{\mu<\alpha<\lambda+1} M_\alpha^{k_\alpha} = \sigma\left(\bigoplus_{\mu<\alpha<\lambda+1} M_\alpha^{k_\alpha}\right) = \bigoplus_{\mu<\alpha<\lambda+1} \sigma(M_\alpha)^{k_\alpha}$$

Como $\mu < \beta$, entonces $\sigma(M_\mu) \neq 0$, y existiría α_0 tal que $\mu < \alpha_0 < \lambda+1$ con $\sigma(M_{\alpha_0}) = M_{\alpha_0}$, lo cual implica, por la Proposición 4.2.5(2), que $\sigma(M_\mu) = M_\mu$, y esto es una contradicción. Así se concluye que $\sigma(M_\mu) = M_\mu$ para cada $-1 \leq \mu < \beta$. Es decir, $\sigma = \gamma_\beta$.

□

Usando el Teorema anterior, se pueden ordenar los prerradicales idempotentes de la siguiente manera:

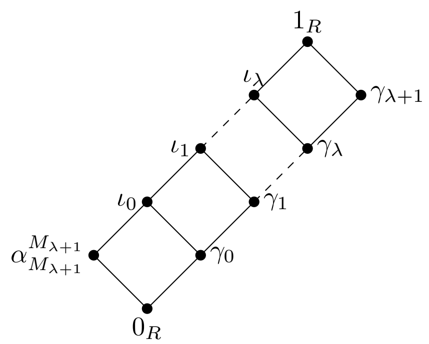

Figura 4.1: Retícula de prerradicales idempotentes sobre anillos del tipo (4.4).

Dualmente se caracterizan radicales en anillos de la forma (4.4) usando el siguiente teorema ([Teorema 4.8 de [22]])

Teorema 4.2.10 (Caracterización de radicales)**.** *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces σ es un radical si, y sólo si, σ tiene exactamente una de las siguientes formas:*

1. $\sigma = 1_R$,
2. $\sigma = \omega_0^{M_{-1}} \equiv [0, \mathrm{Soc}(M_0), \mathrm{Soc}(M_1), \cdots, \mathrm{Soc}(M_{\lambda+1})]$,
3. $\sigma = \rho_\beta \equiv [0, \mathrm{Soc}(M_0), \cdots, \sigma(M_\beta) = 0, 0, \cdots, 0]$, *donde* $\beta = \text{mín}\{\alpha > -1 \colon \sigma(M_\alpha) = 0\}$, $\beta > 0$ *y* $\sigma(M_\alpha) = \mathrm{Soc}(M_\alpha)$ *para todo* $-1 < \alpha < \beta$,
4. $\sigma = \gamma_\beta \equiv [M_{-1}, M_0, \cdots, \sigma(M_\beta) = 0, 0, \cdots, 0, 0]$, *donde* $\beta = \text{mín}\{\alpha \colon \sigma(M_\alpha) \neq M_\alpha\}$ *y* $\beta > -1$,
5. $\sigma = 0_R$.

Demostración. Al igual que en el teorema anterior, para cualquier $\sigma \in R$-pr se tienen los siguientes posibles valores en los dos R-módulos simples no isomorfos M_{-1} y $M_{\lambda+1}$:

$$\sigma(M_{-1}) = \begin{cases} M_{-1}, \text{ ó} \\ 0 \end{cases}$$

$$\sigma(M_{\lambda+1}) = \begin{cases} M_{\lambda+1}, \text{ ó} \\ 0 \end{cases}$$

y nuevamente se tiene uno de los siguientes cuatro casos:

1. Si $\sigma(M_{-1}) = M_{-1}$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$, por Lema 4.2.8 se tiene que $(\sigma \colon \sigma) = 1_R$, y dado que σ es un radical, se concluye que $\sigma = 1_R$.
2. Si $\sigma(M_{-1}) = 0$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$, por Corolario 4.2.6 se tiene que $\sigma = \omega_0^{M_{-1}}$.
3. Suponga que $\sigma(M_{-1}) = 0$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = 0$. Por la Proposición 4.2.5(4), se tiene que $\sigma(M_\alpha) \leq \mathrm{Soc}(M_\alpha)$ para todo $-1 \leq \alpha \leq \lambda + 1$. Asuma también que $\sigma \neq 0$. Por la Proposición 4.2.5(1) se tiene que $\sigma(M_0) \neq 0$, y como $\mathrm{Soc}(M_0)$ es simple y esencial en M_0, entonces $\mathrm{Soc}(M_0) \leq \sigma(M_0)$, y se concluye que $\sigma(M_0) = \mathrm{Soc}(M_0)$.

   Ahora bien si $0 < \mu < \beta$ con $\beta = \text{mín}\{-1 < \alpha \leq \lambda+1 \colon \sigma(M_\alpha) = 0\}$. Usando la equivalencia descrita en el Apéndice 4.2.1, se puede identificar M_μ con una aplicación G-lineal $M_\mu \colon B \otimes_F V \to W$ donde V es un F-espacio vectorial izquierdo W es un G-espacio vectorial izquierdo. Similarmente, se identifican el submódulo $\sigma(M_\mu)$ de M_μ y el módulo cociente $M_\mu/\sigma(M_\mu)$ para considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\sigma(M_\mu)\colon & B \otimes_F V' \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[d] \\
M_\mu\colon & B \otimes_F V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
M_\mu/\sigma(M_\mu)\colon & B \otimes_F V/V' \arrow[r] & W/W'
\end{tikzcd}$$

donde V' es un subespacio de V y W' es un subespacio de W. Dado que σ es un radical se tiene que $\sigma(M_\mu/\sigma(M_\mu)) = 0$. Suponga que M_κ es un sumando directo inescindible de $M_\mu/\sigma(M_\mu)$, con $\kappa > -1$. Entonces $\sigma(M_\kappa) = 0$, y así $\beta \leq \kappa$. De esta manera se tiene $\mu < \kappa$ y se tendría un morfismo no nulo $M_\mu \to M_\mu/\sigma(M_\mu) \to M_\kappa$, lo cual es una contradicción. Por tanto, todo sumando directo inescindible de $M_\mu/\sigma(M_\mu)$ es isomorfo a M_{-1}, el cual está representado por la aplicación lineal $B \otimes_F F \to 0$. Por tanto $W/W' = 0$, es decir, $W = W'$. Como se menciona en el diagrama 4.2, $\mathrm{Soc}(M_\mu)$ está representado por la aplicación lineal $B \otimes_F 0 \to W$ y dado que $\sigma(M_\mu)$ está representado por la aplicación $B \otimes V' \to W$, se tiene que $\mathrm{Soc}(M_\mu) \leq \sigma(M_\mu)$. De esta manera se concluye que $\sigma(M_\mu) = \mathrm{Soc}(M_\mu)$ para todo $0 < \mu < \beta$.

4. Ahora suponga que $\sigma(M_{-1}) = M_{-1}$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = 0$. Sea $\beta = \min\{\alpha\colon \sigma(M_\alpha) \neq M_\alpha\}$. Si $\sigma(M_\beta) \neq 0$, por la definición de β se tiene que $\sigma(M_\beta) < M_\beta$. Entonces se tiene una descomposición de la forma $M_\beta/\sigma(M_\beta) \cong \bigoplus_{-1\leq\alpha<\beta} M_\alpha^{k_\alpha}$, con al menos algún $k_{\alpha_0} > 0$. En efecto, no puede haber un sumando inescindible M_α con $\alpha > \beta$, ya que en tal caso $\mathrm{Hom}_R(M_\beta, M_\alpha) \neq 0$, lo cual contradice el Teorema 4.1.3(b). Tampoco M_β puede ser un sumando directo porque éste es de longitud finita. Dado que σ es un radical, se tiene que $\sigma(M_\beta/\sigma(M_\beta)) = 0$, y así, $\bigoplus_{-1\leq\alpha<\beta} \sigma(M_\alpha)^{k_\alpha} = 0$. En particular, $\sigma(M_{\alpha_0}) = 0$ para algún $-1 < \alpha_0 < \beta$, lo cual es una contradicción, de acuerdo a la Proposición 4.2.5(1). Por tanto, $\sigma(M_\beta) = 0$, y esto implica, por la misma proposición, que $\sigma(M_\alpha) = 0$ para todo $\beta \leq \alpha \leq \lambda + 1$. Es decir, $\sigma = \gamma_\beta$.

□

De igual forma se pueden ordenar los radicales haciendo uso del anterior resultado por medio de la siguiente figura:

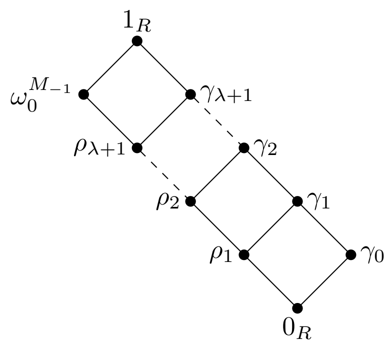

Figura 4.2: Retícula de radicales sobre anillos de la forma (4.4).

Haciendo uso de los Teoremas 4.2.9 y 4.2.10 se tiene el siguiente corolario:

Corolario 4.2.11 (Caracterización de radicales idempotentes)**.** *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces σ es una radical idempotente si, y sólo si, σ tiene una y sólo una de las siguientes formas:*

1. $\sigma = 0_R$,
2. $\sigma = \alpha_{M_{\lambda+1}}^{M_{\lambda+1}} = \omega_0^{M_{-1}}$,
3. $\sigma = \gamma_\beta$ *para algún* $0 \leq \beta \leq \lambda + 1$,
4. $\sigma = 1_R$.

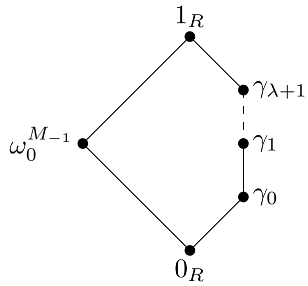

Figura 4.3: Retícula de radicales idempotentes sobre anillos de la forma (4.4).

Además, se tiene la siguiente propiedad acerca de esta retícula (Ver ejercicio 2.6, [2])

Corolario 4.2.12. *Si R es un anillo hereditario puro-semisimple izquierdo con exactamente dos módulos simples izquierdos con* $|R\text{-}ind| \geq 3$, *entonces la retícula de radicales idempotentes no es modular.*

También se tienen consecuencias derivadas de los teoremas anteriores y de los diagramas presentados:

Corolario 4.2.13. *Si R es un anillo hereditario puro-semisimple izquierdo con dos módulos simples entonces:*

1. *Si* $n = |R\text{-}ind|$ *es finito, entonces* $|R\text{-}rad| = |R\text{-}idem| = 2n$. *Además,* $|R\text{-}Tors| = n + 2$.
2. *Si* $\kappa = |R\text{-}ind|$ *es infinito, entonces* $|R\text{-}rad| = |R\text{-}idem| = |R\text{-}Tors| = \kappa$

Observe que si la conjetura puro-semisimple es cierta entonces el segundo caso no se cumple.

El siguiente resultado describe la estructura de cualquier prerradical en esta clase de anillos,

El siguiente es el Teorema 4.12 de [22]:

Teorema 4.2.14 (Estructura de prerradicales en anillos de matrices triangulares)**.** *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces σ tiene una y sólo una de las siguientes formas:*

1. $\sigma = 0_R$ *ó* $\sigma = 1_R$,

2. $\sigma = \alpha_{M_{\lambda+1}}^{M_{\lambda+1}} = \omega_0^{M_{-1}} \equiv [0, \mathrm{Soc}(M_0), \mathrm{Soc}(M_1), \cdots, \mathrm{Soc}(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}]$,

3. $\sigma \equiv [M_{-1}, \cdots, \sigma(M_\beta), \cdots, \sigma(M_\lambda) = \mathrm{Soc}(M_\lambda), M_{\lambda+1}]$, *donde* $\beta = \text{mín}\{-1 < \alpha < \lambda+1 \colon \sigma(M_\alpha) \neq M_\alpha\}$, $\beta \geq 0$, *y* $\mathrm{Soc}(M_\alpha) \leq \sigma(M_\alpha) < M_\alpha$ *para todo* $\beta \leq \alpha < \lambda + 1$*; en este caso,* $(\sigma \colon \sigma) = 1_R$*,*

4. $\sigma \equiv [0, \sigma(M_0) = \mathrm{Soc}(M_0), \cdots, \sigma(M_1), \cdots, \sigma(M_\beta) = 0, \cdots, 0, 0]$, *donde* $\beta = \text{mín}\{-1 < \alpha \leq \lambda+1 \colon \sigma(M_\alpha) = 0\}$ *y* $0 \neq \sigma(M_\alpha) \leq \mathrm{Soc}(M_\alpha)$ *para todo* $-1 < \alpha < \beta$*; En este caso,* $\sigma^2 = 0_R$.

5. $\sigma \equiv [M_{-1}, M_0, \cdots, \sigma(M_\mu), \cdots, \sigma(M_\nu) = 0, \cdots, 0, 0]$, *donde* $\mu = \text{mín}\{-1 < \alpha < \lambda+1 \colon \sigma(M_\alpha) \neq M_\alpha\}$ *y* $\nu = \text{mín}\{-1 < \alpha \leq \lambda+1 \colon \sigma(M_\alpha) = 0\}$*, y de esta manera* $\mu \leq \nu$*. Si* $\mu = \nu$ *entonces* $\sigma = \gamma_\mu$*. Si* $\mu < \nu$ *entonces* σ *no es idempotente ni tampoco es un radical; En este caso, existe un entero positivo* $m > 1$ *tal que* $\sigma^m = \gamma_\mu$*. En este mismo caso también* $\sigma^{(\omega)} = \gamma_\nu$*. Si* ν *no es límite, entonces existe un entero* $n > 1$ *tal que* $\sigma^{(n)} = \gamma_\nu$ *(ver Sección 1.1).*

Demostración. Al igual que en los teoremas anteriores, para cualquier $\sigma \in R$-pr se tienen los siguientes posibles valores para M_{-1} and $M_{\lambda+1}$:

$$\sigma(M_{-1}) = \begin{cases} M_{-1}, & \text{or} \\ 0 \end{cases}$$

$$\sigma(M_{\lambda+1}) = \begin{cases} M_{\lambda+1}, & \text{or} \\ 0 \end{cases}$$

y se tienen los siguientes cuatro casos:

1. Si $\sigma(M_{-1}) = 0$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$, por el Corolario 4.2.6, se tiene que $\sigma = \alpha_{M_{\lambda+1}}^{M_{\lambda+1}} = \omega_0^{M_{-1}}$.

2. Si $\sigma(M_{-1}) = M_{-1}$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}$ entonces, por el Lema 4.2.8 $(\sigma \colon \sigma) = 1$. También, por la Proposición 4.2.5(3) se tiene que $\mathrm{Soc}(M_\alpha) \leq \sigma(M_\alpha)$ para todo $-1 < \alpha \leq \lambda + 1$. Si $\sigma \neq 1_R$ entonces $\sigma(M_\lambda) < M_\lambda$, y como R es hereditario, $\sigma(M_\lambda)$ es proyectivo, y se concluye que $\sigma(M_\lambda) = \mathrm{Soc}(M_\lambda)$.

3. Si $\sigma(M_{-1}) = 0$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = 0$ entonces, por el Lema 4.2.7 $\sigma^2 = 0_R$. también, por la Proposición 4.2.5(4) se tiene que $\sigma(M_\alpha) \leq \mathrm{Soc}(M_\alpha)$ para todo $-1 \leq \alpha \leq \lambda + 1$. Si $\sigma \neq 0_R$ entonces $\sigma(M_0) \neq 0$, y así, como $\mathrm{Soc}(M_0) \cong M_{\lambda+1}$ es un módulo simple, se concluye que $\sigma(M_0) = \mathrm{Soc}(M_0)$.

4. Si $\sigma(M_{-1}) = M_{-1}$ y $\sigma(M_{\lambda+1}) = 0$ entonces tanto como ν y μ existen, como se definen en la parte (4) del teorema. Si $\mu = \nu$ entonces $\sigma = \gamma_\mu$, por definición. Si $\mu < \nu$, Por el Teorema 4.2.9 y el Teorema 4.2.10, se tiene que σ no es idempotente ni tampoco un radical. En este caso, $0 \neq \sigma(M_\mu) < M_\mu$, entonces se tiene una descomposición $\sigma(M_\mu) \cong \bigoplus_{\mu < \alpha < \lambda+1} M_\alpha^{k_\alpha}$, con $k_\alpha \geq 0$. Si $\sigma^2(M_\mu) = \sigma(M_\mu)$ entonces existiría α_0 tal que $\mu < \alpha_0 < \lambda + 1$ con $\sigma(M_{\alpha_0}) = M_{\alpha_0}$, lo cual implica, por la Proposición 4.2.5(2), que $\sigma(M_\mu) = M_\mu$, lo cual es una contradicción. Por tanto se tiene que $\sigma^2(M_\mu) < \sigma(M_\mu)$. Si $\sigma^2(M_\mu) \neq 0$, se puede aplicar el

mismo argumento, y como M_μ tiene longitud finita, se obtiene una cadena finita $0 = \sigma^m(M_\mu) < \cdots < \sigma^2(M_\mu) < \sigma(M_\mu) < M_\mu$ para algún entero $m > 1$. Observe que $\sigma^m(M_\alpha) = M_\alpha$ para todo $-1 \leq \alpha < \mu$ y, por la Proposición 4.2.5(1), se tiene que $\sigma^m(M_\alpha) = 0$ para todo $\mu \leq \alpha \leq \lambda + 1$, y así se concluye que $\sigma^m = \gamma_\mu$.
También suponga que $\mu < \nu$, y sea β tal que $\mu \leq \beta < \nu$. Entonces $0 \neq \sigma(M_\beta) < M_\beta$ y se tiene una descomposición de la forma $M_\beta/\sigma(M_\beta) \cong \bigoplus_{-1\leq\alpha<\beta} M_\alpha^{k_\alpha}$, con al menos algún $k_{\alpha_0} > 0$. Si $\sigma(M_\beta/\sigma(M_\beta)) = 0$ entonces se tendría que $\sigma(M_{\alpha_0}) = 0$ para algún $-1 < \alpha_0 < \beta$, lo cual es una contradicción, de acuerdo a la Proposición 4.2.5(1). Por tanto $\sigma(M_\beta/\sigma(M_\beta)) \neq 0$, es decir, $\sigma(M_\beta) < (\sigma\colon \sigma)(M_\beta)$. Si $(\sigma\colon \sigma)(M_\beta) < M_\beta$, se puede aplicar el mismo argumento, y como M_β tiene longitud finita , se obtiene una cadena $0 < \sigma(M_\beta) < \sigma^{(2)}(M_\beta) < \cdots < \sigma^{(n)}(M_\beta) = M_\beta$ para algún entero $n > 1$. Esto garantiza que para todo $-1 \leq \beta < \nu$ se tiene $\sigma^{(\omega)}(M_\beta) = M_\beta$ y que $\sigma^{(\omega)}(M_\beta) = 0$ para todo $\nu \leq \beta \leq \lambda + 1$, de esta forma se concluye que $\sigma^{(\omega)} = \gamma_\nu$. Si ν no es un ordinal límite, para $\beta = \nu - 1$ existe un entero $n > 1$ tal que $\sigma^{(n)}(M_\beta) = M_\beta$, y de ahí que $\sigma^{(n)} = \gamma_\nu$.

$\square$

Ejemplo 4.2.15. *Sea K un campo y sea $\Lambda = K\mathbb{A}_2$ el álgebra de caminos generada por el carcaj $\mathbb{A}_2$:* $\overset{e_1}{\bullet} \longrightarrow \overset{e_2}{\bullet}$ *. Entonces $\Lambda \cong \begin{pmatrix} K & 0 \\ K & K \end{pmatrix}$. En este caso se tienen 3 módulos inescindibles, R-ind $= \{S_1, P, S_2\}$ donde $S_1 = \Lambda e_1$ es el módulo simple proyectivo, $P = \Lambda e_2$ es proyectivo y $S_2 = P/rP$ es el módulo simple inyectivo. Luego su diagrama de Auslander-Reiten viene dado por:*

$$\begin{tikzcd} & {[P]} \arrow[dr] & \\ {[S_1]} \arrow[ur] & & {[S_2]} \end{tikzcd}$$

Como Λ es un anillo inescindible hereditario puro-semisimple izquierdo con sólo dos módulos simples, la Proposición 4.1.3 se tiene orden lineal de R-ind dado por $\{S_2, P, S_1\}$.

De acuerdo a las formas enumeradas en el Teorema 4.2.14 la lista de Λ-prerradicales es

1. $0_\Lambda \equiv [0, 0, 0], 1_\Lambda \equiv [S_2, P, S_1]$,
2. $\alpha_{S_1}^{S_1} = \omega_0^{S_2} \equiv [0, S_1, S_1]$,
3. $\iota_0 \equiv [S_2, S_1, S_1]$,
4. $\rho_1 \equiv [0, S_1, 0]$,
5. $\gamma_0 \equiv [S_2, 0, 0], \gamma_1 \equiv [S_2, P, 0], \xi \equiv [S_2, S_1, 0]$.

Es decir Λ-pr $= \{0 =_\Lambda, \alpha_{S_1}^{S_1} = \omega_0^{S_2}, \gamma_0, \gamma_1, \rho_1, \iota_0, \xi, 1_\Lambda\}$.

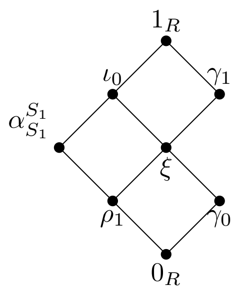

Figura 4.4: La retícula de prerradicales de $K\mathbb{A}_2$.

El conjunto de prerradicales idempotentes es $\{0_R, \alpha_{S_1}^{S_1}, \gamma_0, \gamma_1, \iota_0, 1_R\}$

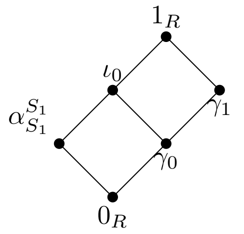

Figura 4.5: Retícula de perradicales idempotentes de $K\mathbb{A}_2$.

El conjunto de radicales es $\{0_R, \omega_0^{S_2}, \gamma_0, \gamma_1, \rho_1, 1_R\}$

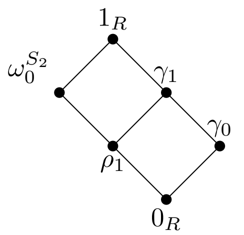

Figura 4.6: Retícula de radicales de $K\mathbb{A}_2$.

Finalmente los radicales idempotentes,

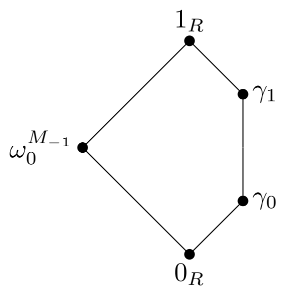

Figura 4.7: Retícula de radicales idempotentes de $K\mathbb{A}_2$.

Conclusiones y perspectivas

Muchos resultados importantes acerca de los anillos puro-semisimples izquierdos están estrechamente ligados a dar respuesta a la Conjetura Puro-semisimple, la cual establece que los anillos puro-semisimples izquierdos también son derechos y por tanto de representación finita. Es por esta razón que es de suma importancia tener una caracterización de estos anillos, sin embargo muchas de estas caracterizaciones se han centrado en hacerlo por medio de su categoría de módulos. Esta información es bastante completa en el sentido de que se sabe que un anillo R es puro-semisimple izquierdo si y sólo si toda sucesión exacta pura de R-módulos izquierdos se escinde si y sólo si todo R-módulo izquierdo es puro-inyectivo, entre otras caracterizaciones.

Ahora bien, usar prerradicales es una forma de describir y caracterizar anillos, como se observó en la sección 1.3 en donde se caracterizan anillos semisimples por medio de su retícula de prerradicales, en donde ésta resulta ser una retícula booleana finita. Al inicio de la investigación, se observó que para un anillo semisimple el conjunto clave para hacer esta descripción y caracterización es el conjunto completo e irreduntante de módulos simples, denotado por R-Simp.

Se observó también que el conjunto que juega un papel fundamental en la descomposición de módulos en suma directa de elementos de este conjunto en un anillo puro-semisimple resulta ser ahora el conjunto de módulos finitamente generados e inescindibles, R-ind.

El propósito inical de la investigación era dar una caracterización completa de la retícula de prerradicales en anillos puro-semisimples, sin embargo durante el desarrollo del trabajo, se observó que el conjunto R-ind, era un poco más complejo de tratar. Por esta razón, se decide abordar el problema desde clases intermedias de anillos puro-semisimples izquierdos, como es el caso de los anillos puro-semisimples hereditarios izquierdos.

Usando la partición Ext-inyectiva del conjunto R-ind para el caso hereditario, se muestran como ésta induce una partición en la retícula de prerradicales de estos anillos. Esta nueva partición que se obtiene en la retícula de prerradicales deja problemas abiertos y preguntas que pueden establecerse para trabajos posteriores. Por ejemplo:

- *¿Qué se puede decir acerca del anillo R en el caso de que los intervalos mencionados en la Sección 3.4 colapsen? es decir Si $\eta_\alpha = \gamma_\alpha$ para todo $\alpha < \delta$ entonces ¿Qué se puede decir acerca de R?*

- *¿Qué condiciones o características debe tener el anillo R para que dichos intervalos colapsen en un sólo punto?*

- *¿ Si en vez de $\mathcal{C} = R$-ind$/\{\mathcal{U}_\delta\}$, se toma el conjunto $\mathcal{C} = R$-ind$/\{\mathcal{U}_0\}$, ¿Qué pasa con la nueva partición de la reticula de prerradicales?*

- *¿ Es posible describir los prerradicales dentro de cada intervalo?*

Aunque estas preguntas son interesantes para trabajos posteriores, si se puede responder parte de la segunda pregunta y afirmar que para el caso de anillos de matrices triangulares que se estudió al final del trabajo, todos estos intervalos colapsan en un sólo punto a excepción del último intervalo, esto derivado de las propiedades de estos prerradicales descritas en la Proposición 4.2.5. Es decir, una característica suficiente para el anillo R, es que sea un anillo de matrices triangulares del tipo que se estudió en el capítulo 4.

Finalmente, se puede observar que para el caso de anillos de matrices triangulares tanto la retícula de prerradicales idempotentes y de los radicales queda totalmente descrita como se muestran en el Teorema 4.2.9 y Teorema 4.2.10. Por otro lado el Teorema 4.2.14 da la estructura de cualquier prerradical en esta clase de anillos, sin embargo queda por describir un segmento medio que aparece en dicha estructura. Esto es, cuando se da la caracterización en la parte (5) de este Teorema se muestra que un prerradical de este tipo es de la forma:

$$\sigma \equiv [M_{-1}, M_0, \cdots, \sigma(M_\mu), \cdots, \sigma(M_\nu) = 0, \cdots, 0, 0],$$

donde $\mu = \text{mín}\{-1 < \alpha < \lambda + 1 \colon \sigma(M_\alpha) \neq M_\alpha\}$ y $\nu = \text{mín}\{-1 < \alpha \leq \lambda + 1 \colon \sigma(M_\alpha) = 0\}$.

Se sabe que este segmento $\{\sigma(M_\mu), \cdots, \sigma(M_\nu)\}$ corresponde a submódulos totalmente invariantes de los correspondientes módulos donde se aplica el prerradical σ, por lo que si se llega a mejorar dicha caracterización entonces se puede dar una descripción más precisa y completa de la retícula total de prerradicales de los anillos de matrices triangulares.

Una idea que se tiene para abordar este problema, es usar las componentes de Auslander-Reiten sobre anillos puro-semisimples. En [20], se realizó un estudio de retículas de prerradicales sobre anillos de tipo de representación finita por medio de las componentes de Auslander-Reiten en el cual se dió una caracterización completa de dicha retícula. Por otro lado, en [3], los autores dieron resultados sobre las componentes de Auslander-Reiten para anillos puro-semisimples hereditarios izquierdos, en particular, el Ejemplo 4.3 describe el diagrama de Auslander-Reiten de los módulos finitamente generados inescindibles para el caso de anillos de matrices triangulares y esto puede ser usado como una herramienta para próximos resultados que mejoren o describan en su totalidad la retícula de prerradicales de los anillos de matrices triangulares.

Apéndice

4.2.1. Anillos de matrices triangulares

A continuación se presenta un breve estudio sobre anillos de matrices triangulares de la forma:

$$R = \begin{pmatrix} F & 0 \\ B & G \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Donde F, G son anillos con división y B es un G-F-bimódulo. Más aún B es de dimensión finita como G-módulo izquierdo y como F-módulo derecho. Se sabe que R con estas condiciones es artiniano izquierdo y hereditario. Además se pide la condición que las cápsulas inyectivas de R-módulos simples izquierdos y derechos sean finitamente generadas.

Estos anillos son de especial interés puesto que están relacionados directamente con la Conjetura Puro-semisimple, (PssC), ya que se sabe que de existir un contraejemplo de dicha conjetura, entonces hay un contraejemplo que es un anillo de matrices triangulares puro-semisimple derecho de la forma mencionada.

La idea prinicipal de esta sección es mostrar como se puede estudiar de una forma más sencilla la categoría de R-módulos para esta clase de anillos de matrices triangulares.

En primer lugar, se construye una nueva categoría cuyos objetos son 3-tuplas (V, W, g), donde V es un F-espacio vectorial izquierdo, W es un G-espacio vectorial izquierdo y $g\colon B \otimes_F V \to W$ es un morfismo de G- espacios vectoriales. Los morfismos de categorías son dados como pares lineales (a, b), tal que $(a, b)\colon (V_1, W_1, g_1) \to (V_2, W_2, g_2)$ consiste de aplicaciones $a\colon V_1 \to V_2$, $b\colon W_1 \to W_2$ que hacen que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_G V_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "1\otimes a"'] & W_1 \arrow[d, "b"] \\
B \otimes_G V_2 \arrow[r, "g_2"] & W_2
\end{tikzcd}$$

conmute. La composición de morfismos es dada por la composición usual de ambas componentes. Haciendo uso de estas definiciones y conceptos, se puede definir un isomorfismo de categorías entre esta nueva categoría y R-Mod, donde R es el anillo de matrices triangulares mencionado al inicio de esta sección. Así las cosas, dado un objeto (V, W, g), el funtor F toma este objeto y lo asigna al R-módulo, que como grupo abeliano, es $V \oplus W$, y donde el producto por elementos de R es dado de forma matricial por:

$$\begin{pmatrix} F & 0 \\ B & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$$

haciendo uso de las estructuras de V y W como F y G espacios vectoriales respectivamente, y también del producto $g\colon B \otimes_G V \to W$. Por medio de este producto por elementos de R, se puede observar que que $V \oplus W$ es un R-módulo.

Para los morfismos dados por $(a, b)\colon (V_1, W_1, g_1) \to (V_2, W_2, g_2)$, el par de aplicaciones lineales $a\colon V_1 \to V_2$ y $b\colon W_1 \to W_2$ define un homomorfismo de grupos $V_1 \oplus W_1 \to V_2 \oplus W_2$. Este también es un homomorfismo de R-módulos, porque podemos observar lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ u & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx \\ g_1(u \otimes x) + ry \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} sa(x) \\ b(g_1(u \otimes x)) + rb(y) \end{pmatrix}$$

y esta coincide con

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ u & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(x) \\ b(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa(x) \\ g_2(u \otimes a(x)) + rb(y) \end{pmatrix}$$

puesto que $b \circ g_1 = g_2 \circ (1 \otimes a)$ por hipótesis. Así que de esta forma actúa el funtor en los morfismos. Es claro que preserva la composición de morfismos, puesto que la composición en esta categoría es dada sólo por la composición. Esto es, para morfismos $\phi = (a_1, b_1)$ y $\psi = (a_2, b_2)$ y el funtor F, se cumple que $F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi)$.

Ahora se construye un funtor inverso. Sea M un R-módulo, si se escribe $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces se tiene que $M = eM \oplus (1-e)M = M_1 \oplus M_2$ como grupos abelianos. De esta manera se puede dotar a M_1 de una estructura de F-módulo izquierdo, para esto sean $s \in F$ y $x \in M$ entonces $ex \in M_1$ por lo que sólo se debe demostrar que $s(ex) \in M_1$. En efecto, identificando $s \in F$ y la matriz $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $s(ex) = (se)x = esx$ y dado que $s \in F$ y $x \in M$ entonces $sx \in M$ y esto prueba que $s(ex) \in M_1$.

De forma análoga, hay una estructura de G-módulo izquierdo en M_2, tomando ahora $r \in G$ y $y \in M$ de esta manera $r((1-e)y) = (r(1-e))y = (1-e)ry$ e identificando $r \in G$ con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ se obtiene la G-estructura de M_2. Por otro lado, se tiene la aplicación

$$g\colon B \otimes M_1 \to M_2, \text{donde, } g(u \otimes ex) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} ex = (1-e) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} x$$

la cual es un G-homomorfismo. De esta manera se asigna la tupla (M_1, M_2, g) al módulo M, es decir, $F^{-1}(M) = (M_1, M_2, g)$. Ahora bien, dado un morfismo $M \to N$, se tienen los restricciones de este morfismo, $a\colon eM \to eN$ y $b\colon (1-e)M \to (1-e)N$. Para ver que esto induce un morfismo $(M_1, M_2, g_1) \to (N_1, N_2, g_2)$ sólo basta con probar que estas restricciones satisfacen $b \circ g_1 = g_2 \circ (1_B \otimes a)$, lo cual se puede hacer usando los generadores $u \otimes ex$ con $u \in B$ y $x \in M$.

Para probar que se tiene una equivalencia de categorías, primero se debe observar la acción de ambos funtores. Primero en objetos. Empezando con un módulo M, se obtiene (M_1, M_2, g) como antes y el módulo $M = M_1 \oplus M_2$. El producto es dado de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ u & r \end{pmatrix} \cdot (ex + (1-e)y) = (sex + g(u \otimes ex) + r(1-e)y)$$

teniendo presente que $g(u \otimes ex) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} ex$ es decir este producto es,

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ex + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} ex + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} (1-e)y$$

el cual es el producto original de la estructura de módulo. De igual forma se puede verificar para morfismos, ya que un morfismo es primeramente descompuesto en dos partes y nuevamente usado para reestablecer el morfismo original como se muestra en toda la parte anterior. Si empezamos del otro lado, se empieza con un objeto (V, W, g) y se construye el módulo $V \oplus W$ y aplicando el segundo funtor a este módulo se obtiene el objeto original.

De esta manera se puede hacer una descripción más detallada de los R-módulos en esta clase de anillos. El anillo R se puede escribir como una suma directa de ideales izquierdos, de hecho se puede ver que $Re = F \oplus B$. Además, $eRe = F$ se puede observar como F-módulo izquierdo y $(1-e)Re = B$ como un G-módulo izquierdo. De esta forma la aplicación lineal asociada es $B \otimes_F F \to B$, que envía (u, s) a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} s = us \in B$.

y dicha aplicación es canónica.

El otro sumando es $R(1-e) = 0 \oplus G$ y su función asociada es $B \otimes_F 0 \to G$ que es la trivial. De esta manera, R_R puede ser descrito en suma directa de estos ideales izquierdos, es decir $R_R = F \oplus (B \oplus G)$, y su aplicación asociada es $B \otimes_F F \to B \oplus G$. Como podemos ver la idea es de cierta forma hacer una representación más simple de estos R-módulos por medio de dichas aplicaciones y poder dar propiedades más específicas de los mismos.

Siguiendo la descomposición del anillo R podemos decir que estos ideales corresponden a los módulos proyectivos y de igual forma se pueden considerar módulos inyectivos los cuales son cápsulas inyectivas de módulos simples. Para esto tenga en cuenta que un módulo simple es un cociente de un módulo máximo del anillo, del cual ya hemos decrito su descomposición y por tanto es un cociente de la inclusión

$$B \otimes_F 0 \to B \oplus G \subseteq R$$

el cual corresponde a la función $B \otimes_F F \to 0$. Esta representación en sí correponde a un módulo inyectivo, el otro módulo simple es proyectivo y su representación viene dada por $B \otimes_F 0 \to G$. Este tiene una cápsula inyectiva, el cual es $B \otimes_F \mathrm{Hom}_G(B, G) \to G$, una aplicación canónica, que de forma corta podemos denotar por $B \otimes_F B^* \to G$, donde $B^* = \mathrm{Hom}_G(B, G)$.

Bibliografía

[1] Adámek, J., Herrlick, H. and Strecker G. *Abstract and concrete Categories.* John Wiley and Sons, New York (1990).

[2] Anderson F. W and Fuller K.R. *Rings and Categories of Modules.* Springer-Verlag, New York (1992).

[3] Angeleri L. and Herbera D. *Auslander-Reiten components over pure-semisimple hereditary rings.* Journal of Algebra (331)285-303 (2011).

[4] Auslander M. *Functors and morphisms determined by objects* . Lecture Notes in Pure and Appl. Math., (37) 1-244, (1978).

[5] Auslander M. and Smalø O. *Preprojective Modules over Artin Algebras.* Journal in Algebra, (66) 61-122, (1980).

[6] Auslander M. *Representation theory of Artin algebras II.* Communications in Algebra, (1) 269–310, (1974).

[7] Bican, L., Kepka T., and Nemec P. *Rings, Modules and Preradicals.* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel (1982).

[8] Chase S.U. *Direct products of modules.* Transactions of the American Mathematical Society, (97) 457-473, (1960).

[9] Colby R.R, Fuller K.R. *Equivalence and Duality for Module Categories (with Tilting and Cotilting for Rings* . Camb. Tracts Math., Vol 161, Cambridge University Press, (2004).

[10] Dummit David S. and Foote Richard M. *Abstract Algebra.* Third edition, John Wiley & Sons, Inc. 2004

[11] Dung Nguyen V. and García José L. *Definable Subcategories over Pure Semisimple Rings.* Journal of Algebra and Its Applications, (11)(5)1250099(2012)

[12] Dung Nguyen V. and García José L. *Endofinite Modules and pure semi-simple Rings.* Journal of Algebra, (289)574-593 (2005).

[13] Dung Nguyen V. and García José L. *Indecomposable Modules over Pure Semisimple Hereditary Rings.* Journal of Algebra, (371)577-595(2012)

[14] Dung Nguyen V. and García José L. *Preinjective Modules over Pure Semi-simple Rings.* Journal of Pure and Applied Algebra, (212)1207-1221 (2008)

[15] Dung Nguyen V. and García José L. *Splitting torsion Pairs over Pure Semisimple Rings.* Journal of Pure and Applied Algebra, (219)2637-2657(2015)

[16] Erné M., Koslowski J.,Melton A., and Strecker E. *A primer on Galois Connections.* Papers on general topology and applications, Ann. New York Acad. Sci., (704) 103-125, (1991).

[17] Facchini A. *Module Theory: Endomorphism rings and direct sum descompositions in some classes of Modules.* Springer Basel AG (1998).

[18] Facchini A. *Relative Injectivity and Pure-inyective Modules over Prüfer Rings.* Journal of Algebra Academic Press, Inc., (110) 380-406 (1987).

[19] Faith C. *Rings with Ascending Condition on Annihilators.* Nagoya Math,. J. (27) 179-191, (1966).

[20] Fernández-Alonso R. and Herbera D. *Finite lattices of prerradicals and finite representation type rings.* International Electronic Journal of Algebra, (21) 103-120 (2017).

[21] Fernández-Alonso R. and Magaña J. *Rings with Galois Connections between lattices of preradicals induced by adjoint pairs between categories of modules.* Applied Categorical Structures. DOI 10.007/s10485-10485-015-9395-x. Springer Science+Business Media Dordrecht, (2015).

[22] Fernández-Alonso R. and Martelo E.S. *Preradicals over left pure semisimple hereditary rings.* Communications in Algebra. Taylor & Francis Group, LLC 3145-3160(2021).

[23] Fieldhouse D.J. *Aspects of purity in Ring Theory.* Lecture Notes in Pure and Applied Math 7. Proc. Conf. Univ. Oklahoma, 185-196, (1974).

[24] Fuller K.R. and Reiten I. *Note on rings of finite representation type and decompositions of modules.* Proceedings of the American Mathematical Society, (50) 92–94, (1975).

[25] Gavito Silvia. *La retícula de prerradicales sobre los anillos $\mathbb{Z}_{p^n}$.* Tesis de Maestría. UAM (2005).

[26] Gavito Silvia. *Sobre la condición de ser conjunto para retículas de prerradicales.* Tesis de doctorado. UAM (2013).

[27] Grätzer G. *Lattice Theory: Foundation.* Birkhäuser, Basel (2011).

[28] Griffith P. *On the descomposition of modules and generalized left uniserial rings.* Mathematische Annalen. (184) 300-308 (1970).

[29] Gruson L. and Jensen C.U. *Modules algébraiquement compact et foncteurs $\varinjlim^{(i)}$.* C.R. Acad. Sci. ,Paris, Sér. A (276) 1651-1653 (1973).

[30] Herzog Ivo *A test for finite representation type.* Journal of Pure and Applied Algebra (95)151-182 (1994).

[31] Kielpiński R. *On Γ-pure injective modules.* Bull Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.(15)127-131 (1967).

[32] Lam and Tsit-Yuen. *Lectures on modules and rings.* Graduate Texts in Mathematics (189). Springer-Verlag, (1999).

[33] Mac Lane Saunders. *Categories for the Working Mathematician.* Second edition,Springer-Verlag New York, (1998).

[34] Martelo, E. *Anillos puro-semisimples y prerradicales.* Tesis de Maestría, UAM (2016).

[35] Mehdi, AR. *Purity Relative to Classes of Finitely Presented Modules.* Journal of Algebra and Its Applications. January (2013).

[36] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R. *Basic Preradicals and main injective modules.* Journal of Algebra, (71) 195-218, (1981).

[37] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The Lattice Structure of Preradicals.* Communications in Algebra, 30(3) 1533-1544, (2002).

[38] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The Lattice Structure of Preradicals II: Partitions.* Journal of Algebra and Its Applications, 1(2) 201-214, (2002).

[39] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The Lattice Structure of Preradicals III: Operators.* Journal of Pure and Applied Algebra, (190) 251-265, (2004).

[40] Rincón H. *Notas de Álgebra Moderna.* Transcritas por Alberto Alcalá.

[41] Ringel C.M. and Tachikawa H. *QF-3 rings.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, (272) 49–72, (1975).

[42] Rotman Joseph J. *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press New York, (1979).

[43] Simson D. *Partial coxeter functors and right pure semisimple hereditary rings .* Journal of Algebra, (71) 195-218, (1981).

[44] Skowroński A. and Yamagata K. *Frobenius Algebras I: Basic Representation Theory.* European Mathematical Society, (2011).

[45] Suppes P. *Axiomatic Set Theory.* Dover Publications, INC. (1972).

[46] Stenström Bo. *Ring of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory.* Springer Verlag. (1975).

[47] Valenta H. *Existence criteria and construction methods of certain classes of tilting modules.* communications in Algebra. (22) 6047-6072, (1994).

[48] Warfield R.B., Jr. *Purity and algebraic compactness for modules.* Pacific Journal of Mathematics. (28) 699-719, (1969).

[49] Wisbauer R. *Foundations of Module and Ring Theory. A handbook for study and research.* Gordon and Breach Science Publishers, Reading. University of Düsseldorf, (1991).

[50] Zimmerman-Huisgen B. *Purity, Algebraic Compactness, Direct Sum Descompositions, and Representation Type.* In Infinite Length Modules. H. Krause and C.M. Ringel, Eds, 331-367, Basel (2000).

[51] Zimmermann-Huisgen B. *Einige Charakterisierungen der Ringe über denen reine Untermoduln direkte Sum-manden sind.* Bayer. Akad. Wiss. Math-Natur. KI. S-B. 77-79, (1973).

[52] Zimmermann-Huisgen B and Zimmermann Wolfgang *On the Sparsity of Representations of Rings of Pure Global Dimension Zero.* Transactions of the American Mathematical Society. (320)2, (1990).

[53] Zimmermann-Huisgen B. *Strong Preinjective Partitions and Represenation Type of Artinian Rings.* Proceedings of the American Mathematical Society. (109)2, (1990).

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00078
Matrícula: 2142800693

Prerradicales en anillos puro-semisimples.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 30 del mes de agosto del año 2022 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE RIOS MONTES
DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ
DR. JESUS EFREN PEREZ TERRAZAS
DRA. MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA

Eder Santiago Martelo Gomez
EDER SANTIAGO MARTELO GOMEZ
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: EDER SANTIAGO MARTELO GOMEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Roman Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

José Rios M.
DR. JOSE RIOS MONTES

VOCAL

R. Fernández A.
DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ

VOCAL

Jesús Efrén Pérez Terrazas
DR. JESUS EFREN PEREZ TERRAZAS

SECRETARIA

DRA. MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA