Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

OBSERVADORES PARA SISTEMAS BILINEALES: UNA APROXIMACION DIFERENCIAL ALGEBRAICA

Tesis que presenta

Rafael Martínez Guerra

para la obtención del grado de

DOCTOR EN CIENCIAS
Abril,1996

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

UNIDAD IZTAPALAPA
Av. Michoacán y La Purísima, Col. Vicentina, 09340 México, D.F. Tel.: 724-4600 TELEFAX: (5) 612 0885

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

OBSERVADORES PARA SISTEMAS BILINEALES: UNA APROXIMACION DIFERENCIAL ALGEBRAICA

Tesis que presenta

Rafael Martínez Guerra

para la obtención del grado de

DOCTOR EN CIENCIAS
Abril,1996

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

UNIDAD IZTAPALAPA
Av. Michoacán y La Purísima, Col. Vicentina, 09340 México, D.F. Tel.: 724-4600 TELEFAX: (5) 612 0885

Agradecimientos

Mi agradecimiento a los *Doctores Jaime Alvarez Gallegos*, y *Raúl Montes de Oca Machorro*, por sus observaciones y sugerencias para el buen desarrollo de esta tesis, así como, por haber aceptado formar parte del Jurado.

Deseo agradecer profundamente a los *Doctores Jesús De León Morales* y *José Alvarez Ramírez,* por su apoyo constante y por la oportunidad que me brindaron para poder colaborar con ellos, así como, por haber aceptado formar parte del Jurado.

Mi agradecimiento muy especial a mi asesor, el *Dr. Rodolfo Suárez Cortes*, por su invaluable apoyo y su valioso asesoramiento que hizo posible concluir el presente trabajo.

Mi agradecimiento al *Dr. Sette Diop*, que tuvo la gentileza de invitarme al Laboratoire de Signaux et systemes del CNRS, Gif s/yvette Francia y dedicó su tiempo para la revisión y discusión del presente trabajo y el haber aceptado formar parte del Jurado.

Finalmente, quiero agradecer a mi esposa *Marilén* y a mi hijo *Rafael* su amor, comprensión y su apoyo en todo momento; así también extiendo este agradecimiento a mis padres *Carlos* y *Virginia*, así como, a mi hermanos *Javier*, *Víctor*, *Arturo* y *Marisela*.

Observadores para una Clase de Sistemas Bilineales: Una Aproximación Diferencial Algebraica

Resumen.- En el presente trabajo, una nueva aproximación diferencial algebraica es implementada o utilizada para tratar el problema de construcción o síntesis de observadores para una clase de sistemas bilineales (CSB), los cuales pueden ser transformables a una forma canónica no lineal denominada Forma Canónica de Observabilidad Generalizada (FCOG Trasladada) Trasladada, cuyo término de traslación es dado en forma general por una matriz no lineal con inyección de la salida [MA, DE1] (caso multivariable FCOG Multisalida Trasladada) y de una forma más particular, estos son tranformables a un sistema lineal observable variante en el tiempo [DI3, FL], [DI4, FL] (en el sentido de observabilidad dado por Diop y Fliess), formado por un vector de traslación el cual es no lineal y depende solamente de la entrada y derivadas de esta (caso monovariable) [MA, ALI], [MA, AL2], [MA1], [MA2].

Mostramos aquí que la clase de sistemas bilineales dada, puede ser llevada mediante una transformación de coordenadas a una FCOG Trasladada o a una FCOG Multisalida Trasladada. Dicha transformación de coordenadas es dada por el elemento primitivo diferencial, el cual es presentado como una combinación lineal de los estados y una combinación lineal de las entradas [MA, DE1], [MA, DE2], [MA, DE3], cuyos coeficientes son funciones meromorfas que pertenecen a un campo diferencial de base dado. Tal transformación es sugerida gracias al análogo diferencial del elemento primitivo [FL1], permitiendo proporcionar con ello una forma explícita del cambio de coordenadas. El elemento primitivo diferencial es elegido de dos formas en el caso multivariable. Por otra parte, se proponen dos tipos de observadores para una clase de sistemas bilineales.

Un observador tipo Kalman, el cual es una copia del sistema original mas un término correctivo que depende del sistema observable transformado y de un parámetro que determina la velocidad de convergencia del observador, este observador es obtenido a partir de la minimización de un criterio de

tipo cuadrático [BO, CO, CE]. Un segundo observador tipo Luenberger, es propuesto con ganancia variante en el tiempo, el cual también es una copia del sistema, con una matriz de ganancia que pondera el error de salida. Dicha matriz depende de las entradas y derivadas de ésta [MA1]. Se establece aquí, de manera general, como pueden ser halladas tales ganancias las cuales aseguran que el error converge asintoticamente a cero.

Se establece una extensión de la síntesis de observadores a otros sistemas bilineales (sistemas bilineales modulo una inyección de salida). Se construye un observador-controlador basado en herramientas de álgebra diferencial para resolver el problema de seguimiento en sistemas bilineales (SB). Esta ley de control obtenida mediante la Forma Canónica Controlador Generalizada dada por Fliess (FCCG), es una ley de control estabilizante que depende de la estimación de los errores de seguimiento y de sus derivadas. Para ello es introducido un observador (dada la FCOG). Posteriormente, se propone la extensión de estos resultados a una clase más amplia de sistemas no lineales. Y finalmente, se muestran algunos ejemplos de aplicación en los cuales se ilustran estas técnicas.

INDICE

Introducción

Normalmente, cuando se trata de aplicar una estrategia de control a un sistema cualquiera, llega a ser frecuentemente necesario reconstruir el estado de este sistema. Sin embargo, enfrentamos algunas dificultades: por ejemplo la utilización de sensores o medidores para conocer los valores de estas variables de estado, puede resultar difícil o incluso imposible; o cuando utilizamos una representación en variables de estado, estas variables pueden representar magnitudes no medibles, las cuales pueden no tener significado físico. Es por eso que la estimación de estas variables llega a ser importante y es así como la teoría de observadores puede contribuir a resolver este problema.

Un observador es un sistema dinámico auxiliar, que permite estimar el estado desconocido de otro sistema a partir de la información de la entrada y de la salida de este sistema de otra forma, la síntesis de un observador la podemos explicar de la siguiente manera:

Dado un sistema Σ descrito mediante ecuaciones diferenciales y una función de salida. Construimos otro sistema $\mathcal{O}$ que tiene como entradas la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ del sistema original Σ, y tiene como salida una estimación del estado $x(t)$ del sistema original Σ. Este nuevo sistema $\mathcal{O}$ es denominado un observador para el sistema Σ.

La noción de observabilidad está ligada a la reconstrucción del estado. Es una condición suficiente para la reconstrucción del estado en el caso de sistemas lineales.

Existen casos bien conocidos concernientes a la síntesis de observadores, por ejemplo:

i) El observador de Luenberger [LU1]

ii) El observador de Kalman [KA, BU]

En 1963, Luenberger estudió la teoría de observadores para la reconstrucción del estado de sistemas dinámicos lineales con coeficientes constantes. La utilización de observadores y su relación con los principales conceptos de la teoría de sistemas hacen de la teoría de observadores un área de investigación muy importante. Kalman introdujo los métodos de variables de estado y es así como aparece la teoría de observadores para los sistemas causales multivariables.

Un sistema es observable si y solamente si a partir de observaciones de la salida y de la entrada podemos reconstruir el estado inicial del sistema. (Daremos más tarde, la formulación matemática de este concepto).

Cuando consideramos una clase de sistemas bilineales dada, la construcción de un observador no es evidente. Podemos distinguir dos clases de sistemas; aquellos que son observables para toda entrada y aquellos que tienen entradas singulares (es decir, entradas que hacen que el sistema sea inobservable i.e. "malas entradas"). Cuando deseamos construir un observador, las malas entradas (entradas singulares) son evidentemente molestas: ellas constituyen el problema de singularidad. La ausencia de singularidad explica que podemos, en el caso de sistemas lineales construir observadores asintóticos (con velocidad de convergencia arbitraria en la estimación), estos son los observadores clásicos de Kalman y Luenberger.

Para aquellos sistemas los cuales son observables para toda entrada, los primeros resultados obtenidos conducen al caso donde la clase de sistemas bilineales puede ser transformable a un sistema lineal observable variante en el tiempo, módulo una inyección de la salida.

Para el caso de sistemas no lineales, la noción de observabilidad se encuentra ligada a las entradas $u(t)$, es decir, para un sistema no lineal observable, ciertas entradas $u(t)$ no permiten observar toda pareja de puntos del espacio de estados con lo cual podemos hablar entonces acerca del concepto de entradas "singulares". Estas malas entradas complican la síntesis del observador en el caso no lineal. Luego entonces, es interesante conocer o describir estas entradas, a fin de evitar su aplicación sobre el sistema original.

El estudio de sistemas bilineales es de gran importancia práctica, ya que muchos sistemas (ecológicos, reactores nucleares, petroquímica, etc.) son modelados bajo esta forma. Los sistemas bilineales son los más simples de los sistemas no lineales. Estudios recientes [BO, CO, CE] [GA, KA] han mostrado que bajo una transformación no lineal (por ejemplo: vía inmersión [LE, MAR] [MA3], inyección de la salida, etc.) podemos representar un sistema no lineal por un sistema bilineal (Eventualmente de dimensión superior al sistema inicial en el caso de inmersión) y reconstruir el estado del sistema no lineal a partir del observador del sistema bilineal. Es por tanto fundamental el estudio de sistemas bilineales.

En el presente trabajo, la clase de sistemas bilineales considerada, está representada por:

$$\begin{aligned}\Sigma_1: \quad \dot{x} &= \left(A_0 + \sum_i^m A_i u_i\right) x + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y &= Cx + Du \qquad\qquad\qquad\quad y \in \mathbb{R}^p\end{aligned}$$

donde A_i, $0 \leq i \leq m, B, C$ y D son matrices de dimensiones apropiadas.

Esta clase de sistemas puede ser transformada en la siguiente clase de sistemas representada por Σ_2 [MA2].

$$\begin{aligned}\Sigma_2: \quad \dot{z} &= A_u z + \varphi(u, y) \\ y &= Cz\end{aligned}$$

Σ_2 es observable independientemente del valor de la entrada u si y solamente si z es observable con respecto a $\{u, y\}$ i.e., z es algebraico sobre $K\langle u, y\rangle$ (z satisface una ecuación diferencial algebraica sobre $K\langle u, y\rangle$).

Tomando en cuenta que Σ_2 es observable, podemos encontrar L_u tal que la expresión matricial $(A_u - L_u C)$ tenga su espectro en el semiplano izquierdo complejo $(\sigma(A_u - L_u C) \subseteq \mathbb{C}^-)$. Entonces obtenemos un polinomio diferencial algebraico en μ_j, u y derivadas de la entrada:

$$L_u = \bar{\beta}_j - \rho(\mu_j, u, \dot{u} \ldots), \; 1 \leq j \leq n, \quad \bar{\beta}_j = \text{ cte},$$

donde $\rho(\mu_j, u, \dot{u} \ldots)$ es un polinomio diferencial algebraico en $K\langle u\rangle$ y $\mu_j = \{L_{u_i}, 1 \leq i \leq j\}$.

Con esta selección de L_u, se puede diseñar un observador exponencial dado por:

$$(\mathcal{O})_1 \qquad \dot{\hat{z}} = A_u \hat{z} + \varphi(u, y) - L_u(y - \hat{y})$$

Sin embargo, se puede proponer otro observador, el cual es tipo Kalman. Este puede ser descrito como:

$$(\mathcal{O})_2 \qquad \begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= A_u \hat{z} + \varphi(u, y) - S^{-1} C^T [C\hat{z} - y] \\ \dot{S} &= -\theta S - A_u^T S - S A_u + C^T C\end{aligned}$$

donde θ es una constante estrictamente positiva y $\hat{z}$ converge exponencialmente a $z(t)$ cuando t tiende al infinito $(t \to \infty)$.

Algunos autores han trabajado sobre el desarrollo de estimadores de estado para clases restringidas de sistemas no lineales, ya sea desde el punto de vista geométrico (Teoría debida principalmente a Hermann, Krener, Isidori, Van der Schaft, Nijmeijer, Gauthier, Bornard, Hammouri, Zeitz, Williamson, Levine y Marino) o desde el punto de vista algebraico (Introducido por Fliess en 1986). Esta última aproximación está basada en el Algebra Diferencial [FL5] con la cual se pretende capturar la naturaleza algebraica del concepto de observabilidad. Trabajos preliminares en esta dirección ya han sido publicados [FL2], [PO], [GL].

En [KR, IS], y [KR, RE] los autores caracterizaron los sistemas bilineales y en general a los no lineales. Estos mediante un difeomorfismo son llevados a alguna forma canónica del tipo dado en Σ_2.

Para los sistemas bilineales podemos encontrar observadores asintóticos, en ciertos casos: trabajos de Hara-Furuta [HA, FU] y Funahashi [FUN] por ejemplo. En estos artículos, ciertas condiciones suficientes garantizan la convergencia asintótica del error de estimación.

En [WI] Williamson muestra que los sistemas bilineales, no teniendo entradas singulares, poseen una forma canónica de observabilidad, esto le permite dar un observador que toma en cuenta esta estructura. La generalización de este resultado a sistemas no lineales observables para toda entrada fue dada por Gauthier J.P. y G. Bornard [GA, BO].

Recientemente en [GA, HM, OT], los autores muestran utilizando esta forma canónica que estos sistemas poseen un observador de alta ganancia. Esta extensión a sistemas observables para toda entrada (caso multivariable) fue discutido en [BO, HM].

Los sistemas afines en el estado, módulo una inyección de la salida, tienen en forma general entradas singulares, esto es, entradas que hacen que los sistemas sean inobservables. A pesar de este hecho, existen observadores que funcionan para una cierta clase de entradas. Estos observadores son una adaptación del filtro de Kalman en el caso determinista.

Nuestra contribución en la presente memoria se sitúa en los siguientes puntos:

1. Introducción de un nuevo enfoque diferencial algebraico para la construcción de observadores, que permite caraterizar la clase de sistemas bilineales transformables a sistemas afines en el estado, módulo una inyección de salida (FCOG trasladada.).

2. Establecemos un resultado sobre la generalización de la forma canónica de observabilidad generalizada trasladada con inyección de la salida para el caso multivariable (Multi-entrada, Multi-salida).

3. Caracterización explícita sobre el tipo de transformación de coordenadas (utilizando el elemento primitivo diferencial) empleada para llevar a esta clase de sistemas bilineales (CSB) a la forma canónica de observabilidad generalizada trasladada Multientrada-Multisalida, módulo una inyección de salida (Caso Monovariable y Caso Multivariable).

4. Proponemos dos tipos de observadores: un observador tipo Kalman (de alta ganancia), y un observador tipo Luenberger, cuyas ganancias son variantes en el tiempo.

5. Basado en herramientas del álgebra diferencial, una ley de control es construida para resolver los problemas de seguimiento y estabilización (local) introduciendo un observador para estimar el error de seguimiento y derivadas de este.

6. Extensión de estas técnicas a una clase más amplia de sistemas no lineales, dando algunas aplicaciones de esta técnica a algunos modelos, por ejemplo a reactores químicos.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

El primer Capítulo está dedicado a dar algunos conceptos y definiciones elementales del álgebra diferencial, necesarios para la comprensión de los capítulos posteriores. En el Capítulo II, dada la definición de una dinámica no lineal en función de extensiones diferencialmente algebraicas finitamente generadas con determinada salida, establecemos el concepto de observabilidad algebraica.

En el Capítulo III se introduce el concepto de Forma Canónica de Observabilidad Generalizada (FCOG) caso monovariable y caso multivariable. En el Capítulo IV, proponemos la síntesis de dos observadores un observador tipo Kalman y un observador tipo Luenberger con ganancias variantes en el tiempo, para la estimación del estado de una clase de sistemas bilineal. En el Capítulo V implementamos un observador-controlador para resolver los problemas de seguimiento y estabilización (local). Y finalmente, en el Capítulo VI, se extiende el problema de síntesis de observadores para una clase más amplia de sistemas no lineales.

Capítulo I

Algebra Diferencial

I.1. Introducción

Este capítulo presenta algunas definiciones básicas del álgebra diferencial e ideas de base sobre las cuales se fundamenta este trabajo.

La utilización de las técnicas del álgebra diferencial toman cada vez más importancia en Control Automático, es por ello que juzgamos necesario no solo recordar los elementos de este lenguaje que nos son útiles, sino que nos va a servir prácticamente como un lenguaje descriptivo para las demostraciones de diferentes lemas y corolarios que se relacionan con esta teoría. Artículos u obras especializadas en el tema son dadas en [RI2], [KO], [DI2].

El Algebra diferencial es una teoría de Estructuras que generaliza de cierta forma aquellas ya largamente utilizadas en las matemáticas tradicionales y sus aplicaciones. Estas estructuras algebraicas son: anillo, campo, módulo, espacio vectorial, etc. ver por ejemplo [BOU].

Las estucturas algebraicas diferenciales elementales son esencialmente anillos diferenciales, campos diferenciales, etcétera. Estas poseen estructuras subyacentes que son estructuras algebraicas usuales correspondientes. Su construcción obedece al esquema general siguiente: añadimos operaciones a las estructuras subyacentes, esto es, leyes suplementarias tales como derivación sujetas a algunos axiomas de coherencia, obteniendo así estucturas más ricas, pero también más complejas.

Las palabras clave en este capítulo son los polinomios diferenciales, su manipulación, así como las estructuras algebraicas diferenciales elementales tales como: anillos diferenciales, campos diferenciales, extensiones diferenciales, etcétera.

I.2 Elementos de Algebra Diferencial

I.2.1 Noción de Extensión de Campo. Algebraica y trascendente,

Subcampo, Extensión de Campos

Definición. *Sea K un campo, un subcampo K' de K es un subanillo de K provisto de las leyes de composición internas inducidas por aquellas de K, la cual le da una estructura de campo y K se denomina extensión del campo K'.*

Definición. *Sea L una extensión del campo K y sea S una parte de L. El subcampo generado por $K \cup S$ es representado por $K(s)$; y es el subcampo obtenido añadiendo S a K.*

Si S es reducido a un elemento $\alpha \in L$ (y $\alpha \notin K$) decimos que tenemos una extensión simple $K(\alpha)$.

Dependencia Algebraica

Definición. *Sea L una extensión del campo K y $(x_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de L. Decimos que la familia $(x_i)_{i\in I}$ es algebraicamente dependiente sobre K si existe una parte finita $\{i_1, \dots, i_n\}$ de I y un polinomio P no nulo de $A[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ (anillo de polinomios) tal que $P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = 0$ y se denomina algebraicamente independiente sobre K si ningún polinomio no nulo de $A[(x_i)_{i\in I}]$ se anula para $(x_i)_{i\in I}$ (es el análogo exacto de independencia lineal de vectores en espacios vectoriales).*

Elemento trascendente, Elemento algebraico

Definición. *Un elemento α de una extensión L de un campo K es denominado algebraico sobre K si α es algebraicamente dependiente sobre K i.e., existe un polinomio no nulo $P \in K[x]$ tal que $P(\alpha) = 0$, sino decimos que α es trascendente sobre K.*

Ejemplos

i) $K = \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in L = \mathbb{R}$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$, ya que $x^2 - 2 = 0$,

ii) todo elemento de $\mathbb{Q}$ es algebraico sobre $\mathbb{Z}$

iii) $i \in \mathbb{C}$ es algebraico sobre $\mathbb{R}$ $(i^2 + 1 = 0)$

iv) $L = \mathbb{R}$, π, e son trascendentes sobre $\mathbb{Q}$

Extensión algebraica, Extensión trascendente

Definición. *Una extensión L de un campo K es denominada algebraica si todos sus elementos son algebraicos sobre K y trascendente si existe al menos uno de sus elementos el cual es trascendente sobre K.*

Base de trascendencia

Definición. *Dada L una extensión del campo K es posible demostrar la existencia de un subconjunto x de L algebraicamente independiente sobre K y tal que L es algebraico sobre $K(x)$. Tal subconjunto es denominado base de trascendencia de la extensión L/K (análogo de bases en espacios vectoriales). La cardinalidad de tal subconjunto maximal es denominada grado de trascendencia de la extensión L/K y lo denotamos por $d^0tr\ L/K$.*

Ejemplos

i) la extensión L/K es algebraica si y solo si $d^0tr\ L/K = 0$

ii) sea $K = \mathbb{R}$, consideremos el campo de funciones racionales en una indeterminada (una variable) s, denotado por $\mathbb{R}(s)$

$$\frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m} \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

s es trascendente sobre $K = \mathbb{R}$ entonces $d^0tr\ \mathbb{R}(s)/\mathbb{R} = 1$

Definición. *Sea L una extensión del campo K, decimos que la extensión L/K es de tipo finito si existe una parte finita x de L tal que $L = K(x)$.*

I.3 Anillos y Campos Diferenciales

El álgebra diferencial fue introducida entre las dos guerras mundiales por el matemático estadounidense Ritt [RI1], [RI2] para ofrecer a la teoría de ecuaciones diferenciales herramientas similares a aquellas que propone el álgebra conmutativa para las ecuaciones algebraicas [AT, MAC].

Definición. *Sea A un anillo conmutativo con elemento unidad. Una derivación ∂ de A es una aplicación ∂ de A en A tal que para toda pareja $(a,b) \in A \times A$*

$$\partial(a+b) = \partial a + \partial b$$

$$y$$

$$\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$$

Anillo Diferencial.

Definición. *Un Anillo diferencial A es un anillo conmutativo con unidad provisto de un conjunto finito Δ de operadores de derivación sobre A tal que $\forall \partial_1 \in \Delta$, $\forall \partial_2 \in \Delta$, $\forall a \in A$*

$$\partial_1 \partial_2 a = \partial_2 \partial_1 a$$

Definición. *Un anillo diferencial se denomina ordinario o parcial según Δ contenga una o varias derivaciones, estas sirven para estudiar las ecuaciones diferenciales algebraicas ordinarias y las ecuaciones diferenciales algebraicas parciales respectivamente.*

Definición. *Un subanillo diferencial de un anillo diferencial A es un subanillo del anillo A tal que provisto de la derivación de A, es un anillo diferencial.*

Definición. *Un campo diferencial es un anillo diferencial el cual es también un campo.*

Definición. *Una constante de un anillo diferencial es un elemento a tal que $\forall \;\; \partial \in \Delta \;\; \partial(a) = 0$.*

El conjunto de constantes de un anillo (respectivamente campo) diferencial forma un subanillo (respectivamente subcampo) diferencial.

Bosquejo de la demostración:

Sea A un anillo diferencial. Sea C el conjunto de constantes

C al menos contiene al 0 y el 1

$$\forall a \in A \quad a+0 = a \Rightarrow \;\; \partial(a+0) = \partial a + \partial(0) = \partial(a) \Rightarrow \partial(0) = 0$$
$$y \;\; \partial(a \cdot 1) = \partial a = 1 \cdot \partial a + a\partial 1 \Rightarrow \partial(1) = 0$$

sean c_1 y c_2 constantes

$$\begin{aligned}\partial(c_1+c_2) &= \partial(c_1)+\partial(c_2)=0\\ \partial(c_1c_2) &= \partial(c_1)c_2+\partial(c_2)c_1=0\end{aligned}$$

sea c constante diferente de cero, entonces $\frac{1}{c}$ es constante,

$$\forall\partial\in A\quad \partial\left(\frac{1}{c}\right)=-\frac{\partial c}{c^2}=0.$$

I.3.1 Noción de Extensión de Campos Diferenciales. Algebraica y trascendente

Extensión de Campo Diferencial

Definición. *Si L y K son dos campos diferenciales tales que K es un subanillo diferencial de L ($K\subseteq L$), entonces L es denominada extensión diferencial de K.*

Definición. *La intersección de un conjunto de subcampos diferenciales de L es también un subcampo diferencial de L.*

Definición. *Un elemento $a\in L$ es denominado diferencialmente algebraico sobre K si y solamente si existe una ecuación diferencial algebraica con coeficientes en K i.e. existe un polinomio con coeficientes en K, $P(x,\dot{x},\ldots,x^{(\alpha)})$, en un número finito de derivaciones de x tal que $P(a,\dot{a},\ldots,a^{(\alpha)})=0$.*

Ejemplos

1. $K=\mathbb{Q}$, $a=e^t\in L$ satisfface la ecuación diferencial $\dot{x}-x=0$
2. $K=\mathbb{R}$, L el campo $\mathbb{R}(x)$ y $\dot{x}=e^x$, $\ddot{x}=\dot{x}e^x$, el elemento x satisface la ecuación diferencial con coeficientes en $\mathbb{R}$ dada por $\ddot{x}-\dot{x}^2=0$.

Definición. *La extensión L/K se denomina diferencialmente algebraica si y solamente si todo elemento de L es diferencialmente algebraico sobre K (hiperalgebraico).*

Definición. *Un elemento $a\in L$ se dice diferencialmente trascendente si y solamente si no es diferencialmente algebraico.*

Definición. *La extensión L/K se dice diferencialmente trascendente si y solamente si existe al menos un elemento de L diferencialmente trascendente sobre K (hipertrascendente).*

Definición. *Un conjunto $\{\xi_i / i \in I\}$ de elementos en L se denomina diferencialmente K-algebraicamente dependiente si y solamente si el conjunto de derivadas de cualquier orden $\{\xi_i^{(\nu_i)} / i \in I, \nu_i = 0, 1, 2, \ldots\}$ es K-algebraicamente dependiente.*

Definición. *Un conjunto el cual no es diferencialmente K-algebraicamente dependiente se denomina diferencialmente K-algebraicamente independiente.*

I.4 Elemento Primitivo Diferencial y Base de Trascendencia diferencial

Definición. *Toda familia diferencialmente K-algebraicamente independiente que es maximal con respecto a la inclusión es denominada una base de trascendencia diferencial de L/K. Si elegimos dos bases, éstas tienen la misma cardinalidad la cual es denominada grado de trascendencia diferencial de L/K, denotado por $d^0 tr\ diff\ \ L/K$.*

Ejemplo L/K es diferencialmente algebraico $\Leftrightarrow d^0 tr\ diff\ L/K = 0$.

Propiedad del grado de trascendencia diferencial

Sea $K \subseteq L \subseteq M$ una torre de extensiones de campos diferenciales entonces:

$$d^0 tr\ diff\ M/K = d^0 tr\ diff\ M/L + d^0 tr\ diff\ L/K$$

El siguiente resultado clásico en álgebra diferencial será muy útil:

Teorema [FL1] [FL5]. *Una extensión diferencial finitamente generada es diferencialmente algebraica si y solamente si su grado de trascendencia (no-diferencial) es finito.*

De otra forma menos precisa, diremos que el grado de trascendencia no diferencial es el número de condiciones iniciales las cuales son necesarias para calcular las soluciones de las ecuaciones diferenciales algebraicas.

Elemento Primitivo Diferencial

Dada una extensión algebraica finitamente generada (no diferencial) L/K. Un resultado importante es el llamado *teorema del elemento primitivo*: existe un solo elemento $\gamma \in L$ el cual es un *elemento primitivo* tal que $L = K\langle\gamma\rangle$ i.e. L es generado por K y γ.

El teorema precedente puede ser extendido para una extensión diferencial como sigue:

Dada una extensión diferencial algebraica finitamente generada L/K, *el teorema del elemento primitivo diferencial* [KO], [FL1] afirma que existe un solo elemento $\delta \in L$ el cual es *el elemento primitivo diferencial* tal que $L = K\langle\delta\rangle$ i.e. L es diferencialmente generado por K y δ.

(En lo que sigue afirmamos que cada extensión diferencialmente algebraica L/K es finitamente generada por un conjunto finito $\{\xi_1, \ldots, \xi_n, u_1, \ldots, u_m\}$ entonces la combinación $\sum_i^n \alpha_i\xi_i + \sum_j^m \beta_j u_j$, $\alpha_i, \beta_j \in K\langle u\rangle$ es un elemento primitivo diferencial [MA1], [MA4], [MA, AL1]).

Capítulo II

Observabilidad Algebraica de Sistemas Bilineales

II.1. Introducción

La noción de observabilidad es al igual que la noción de controlabilidad, uno de los conceptos claves que la teoría de sistemas presenta desde las últimas tres décadas.

Su definición en el caso lineal nos conduce a los trabajos realizados por Kalman en 1960 [KA, BU]. En ese tiempo una gran cantidad de literatura en teoría de sistemas fue dedicada a este concepto. Para sistemas no lineales mencionamos contribuciones importantes como las obtenidas por Hermann y Krener en 1977 [HE, KR], Williamson en 1977 [WI], Sontag en 1979, y 1985 [SO1], [SO2], Sussman en 1979 [SU], Bartosiewicz en 1987 y 1988 [BA1], [BA2], etc. Hermann y Krener relacionan el concepto de observabilidad con el concepto de indistinguibilidad de estados con respecto a la entrada.

Para sistemas bilineales con una sola salida Williamson dió una nueva prueba de observabilidad en términos de la matriz de transformación. Este trabajo recibió un importante interés y posteriormente se generalizó en el de Gauthier y Bornard en 1981 [GA, BO]. El trabajo de Sontag [SO1], [SO2] fue dirigido hacia el concepto de observabilidad dado en los casos continuo y discreto. Sussman [SU] mostró que existen las denominadas entradas universales; este concepto está relacionado con la capacidad de reconstruir el estado por medio de un valor especial de la entrada. Recientes trabajos sobre observabilidad son dados en Isidori 1989 [IS] y Nijmeijer y Van der Schaft en 1990 [NI, SC].

Hasta la fecha, las publicaciones previas del estado del arte acerca de la teoría de observabilidad muestran que es una teoría útil e importante.

El punto ahora es que todas estas aproximaciones dependen de la existencia y disponibilidad de la descripción del espacio de estados del sistema.

Este es el principal punto, con respecto a el cual, nuestra aproximación debe ser tan interesante como este tipo de aproximación lo ha sido en controlabilidad ([PO] Pommaret en 1988 y Fliess en 1990 [FL1], [FL3]). Aquí trataremos de capturar la naturaleza algebraica del concepto de Observabilidad. Trabajos preliminares ya han sido publicados por Fliess en 1987 [FL2], Pommaret en 1988 [PO] y Glad en 1990 [GL].

Dado un sistema con variables u, y y z donde u es la entrada, y la salida y z la variable latente o auxiliar [DI3, FL] ¿Qué significa la observabilidad de la variable z?. Intuitivamente el problema es que los valores de u de la entrada son conocidos y los valores de y de la salida son medibles en el proceso, entonces se desea calcular un valor estimado $\bar{z}$ de z.

Una pregunta intuitiva básica que nos hacemos es la siguiente:

¿Es absolutamente necesario el conocimiento de las condiciones iniciales de $\bar{z}$ para calcular $\bar{z}$?

Nuestro argumento puede aclarar la pregunta anterior.

El conocimiento de las condiciones iniciales de $\bar{z}$ no es necesario si y solamente si $\bar{z}$ verifica una ecuación algebraica (no-diferencial) con coeficientes dependiendo de u y y; en otras palabras, $\bar{z}$ debe ser algebraico sobre el campo $K\langle u, y\rangle$.

Esta es la motivación de la siguiente definición. *Un sistema es observable si z es algebraico sobre el campo $K\langle u, y\rangle$.*

Decimos que una variable z es universalmente observable con respecto a otras variables u y y si z satisface una ecuación algebraica para toda entrada u (no singular), la cual representa una buena entrada. Una variable universalmente observable es una variable observable.

Un sistema bilineal puede ser observable aun teniendo entradas que lo hagan inobservable. Todos los trabajos ligados a la construcción de un observador para los sistemas bilineales consisten en primer lugar en el estudio de la observabilidad del sistema en los casos siguientes:

i) Sea que el sistema no tenga entradas singulares, en cuyo caso buscamos alguna Forma Canónica de Observabilidad. En [GA, BO], [HM, GA], [BO, HM] los autores muestran que en el caso monovariable, tales sistemas poseen una forma canónica de observabilidad que ha sido utilizada para construir un observador.

ii) O bien que el sistema tenga una entrada singular. En este caso existen muy pocos resultados. Hasta la fecha, los únicos observadores existentes no son más que variantes del filtro de Kalman extendido. La convergencia de estos observadores depende de la naturaleza de la excitación.

Este capítulo está dedicado a algunos conceptos y herramientas de base de la observabilidad algebraica de sistemas.

II.2 Observabilidad Algebraica

Definición de una Dinámica no lineal

Sea K un campo diferencial de base dado. Si los coeficientes de las ecuaciones diferenciales algebraicas empleadas son constantes tomaremos a $K = \mathbb{R}$; si los coeficientes son variables tomaremos a K como un campo de funciones meromorfas de una o varias variables:

Sea $u = (u_1, \ldots, u_m)$ una familia finita de cantidades diferenciales, denotamos $K\langle u \rangle$ el campo diferencial generado por K y las componentes de u.

Ejemplo

$$\frac{\left(u_1^{(45)}\right)^{28} \dot{u}_2^2 - 1}{\ddot{u}_1 + 3\left(u_2^{(6)}\right)^8}$$

Sea $u = (u_1, \ldots, u_m)$ y $y = (y_1, \ldots, y_p)$ dos familias finitas de cantidades diferenciales denotamos $K\langle u, y \rangle$ el campo diferencial generado por K y las componentes de "u" y "y".

Definición. *Una dinámica $G/K\langle u \rangle$ es una extensión diferencialmente algebraica finitamente generada, i.e. $d^0 tr\ diff\ G/K\langle u \rangle = 0$. Esto significa que cualquier elemento de G satisface una ecuación diferencial algebraica con coeficientes los cuales son funciones racionales sobre K en las componentes de u y un número finito de sus derivadas. Las variables de salida pueden ser vistas como sensores en la dinámica; formalmente definimos una salida como un conjunto finito $y = (y_1, \ldots, y_p) \in G$.*

Sabemos por un teorema dado en el capítulo I que el grado de trascendencia (no diferencial) de $G/K\langle u \rangle$ es finito, sea n el grado de trascendencia de $G/K\langle u \rangle$, luego entonces, una base de trascendencia es dada por $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Cualquier componente de la derivada $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ y de "y" son $K\langle u \rangle$-algebraicamente dependientes de x. Esto es:

$$
\begin{aligned}
A_1(\dot{x}_1, x, u, \ldots, u^{(\gamma)}) &= 0 \\
&\vdots \\
A_n(\dot{x}_n, x, u, \dot{u} \ldots, u^{(\gamma)}) &= 0 \\
B_1(y_1, x, u, \dot{u} \ldots, u^{(\beta_1)}) &= 0 \\
&\vdots \\
B_p(y_p, x, u, \dot{u} \ldots, u^{(\beta_p)}) &= 0
\end{aligned}
$$

Donde los A_i y B_j $1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq p$ son funciones polinomiales sobre K. Denominaremos en este contexto a x un estado (generalizado).

Observabilidad Algebraica

Definición. *Sea un subconjunto $\{u, y\}$ de G en una dinámica $G/K\langle u\rangle$. Un elemento $\xi \in G$ se denomina observable con respecto a $\{u, y\}$ si es algebraico sobre $K\langle u, y\rangle$. Esto es, ξ puede ser expresado como una función algebraica de las componentes de $\{u, y\}$ y un número finito de sus derivadas.*

Definición. *Un subconjunto S de G se denomina observable con respecto a $\{u, y\}$ si y solamente si cualquier elemento de S lo es.*

En la definición usual de observabilidad uno puede suponer al conjunto S como el conjunto de variables de estado. Por lo tanto *un estado $\bar{x}$ se denomina observable si y solamente si es observable con respecto a $\{u, y\}$.*

Finalmente tenemos otra definición.

Definición. *Una dinámica $G/K\langle u\rangle$ con salida y se dice observable si y solamente si cualquier estado generalizado es observable.*

Aquí el concepto de observabilidad es equivalente al hecho de que la extensión del Campo Diferencial $G/K\langle u, y\rangle$ es algebraica. Esto significa que la información diferencial algebraica completa está contenida en $K\langle u, y\rangle$, ya que cualquier elemento en G puede ser calculado a partir de $K\langle u, y\rangle$ vía una ecuación diferencial algebraica.

Ha sido demostrado en Diop-Fliess [DI3, FL] en el caso de una representación en variables de estado usual que la observabilidad puede ser verificada vía la condición de rango dada por Hermann y Krener [HE, KR].

II.3 Ejemplos Ilustrativos

1. Sea el sistema lineal bidimensional una entrada-una salida

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0\\ \dot{x}_2 &= u + x_2\\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

   es observable ya que x_1 y x_2 satisfacen dos polinomios diferenciales algebraicos en $K\langle u, y\rangle$ a saber:

$$\dot{y} - u - x_2 = 0 \quad \text{y} \quad y - x_1 - \dot{y} + u = 0.$$

2. Sea el sistema bilineal bidimensional una entrada-una salida

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ux_2\\ \dot{x}_2 &= ux_2 + x_1\end{aligned}$$

   i) Si u y $y = x_2$ son medidas entonces x_1 y x_2 verifican $x_1 - \dot{y} + uy = 0$ y $x_2 - y = 0$. De aquí x_1 y x_2 son universalmente observables.

   ii) Si u y $y = x_1$ son medidas entonces x_1 y x_2 verifican los siguientes polinomios diferenciales algebraicos en $K\langle u, y\rangle$: $x_1 - y = 0$ y $ux_2 - \dot{y} = 0$ por lo tanto x_1 es universalmente observable, mientras que x_2 no es observable si $u = 0$.

   En adición a los comentarios dados en la sección II.1 de la Introducción, el siguiente ejemplo ilustra la necesidad de definir el concepto de observabilidad algebraica antes dado.

3. Dado un sistema bilineal monovariable una entrada-una salida

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ux\\ y &= x^{\alpha}\end{aligned}$$

   para algún $\alpha \geq 2$ es observable en el contexto diferencial geométrico (con excepción del punto singular $x = 0$) y también en nuestro contexto algebraico. Note ahora que x no puede ser calculada de "u" y "y" y sus derivadas mediante una expresión racional. Este hecho muestra la necesidad de definir el concepto de observabilidad algebraica.

Capítulo III

Forma Canónica de Observabilidad Generalizada

III.1. Introducción

Como se ha visto, en la última década han existido varios intentos por tratar de generalizar las formas canónicas lineales a las no lineales. En particular, la Forma Canónica Observador lineal invariante en el tiempo (Kailath 1980 [KAI] y Ackermann 1983 [ACK]) fue introducida por primera vez por Kalman en 1963 [KA1]. Este fue un punto de inicio conveniente para el diseño de observadores para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

Uno de los primeros trabajos más relevantes empleando este tipo de formas canónicas, fué publicado en 1966 [LU1] y en 1967 [LU2] por Luenberger, quien diseñó observadores transformando sistemas lineales invariantes en el tiempo a estas formas canónicas. Poco después Seal y Sttubberud en 1969 [SE, ST] extendieron esta transformación al caso variante en el tiempo, permitiendo el diseño de observadores para sistemas lineales variantes en el tiempo. Para generalizar el diseño al caso no lineal Bestle y Zeitz en 1983 [BE, ZE] definieron una forma canónica no lineal; sin embargo, el cálculo actual de la transformación no lineal dentro de esta forma canónica no lineal, es un problema aún no resuelto.

Krener e Isidori en 1983 [KR, IS] discutieron la pregunta de cuando un sistema no lineal sin entradas puede ser trasformado a un sistema lineal mediante un cambio de variable de estado e inyección de la salida.

El problema del observador para sistemas no lineales con entradas ha sido considerado en dos artículos dados por Krener y Respondek en 1985 [KR, RE] y Keller en 1986 [KE]. Krener y Respondek dividen el sistema, el cual puede ser no lineal en el estado y entrada en una parte del sistema y otra parte, dependiente de la entrada. Mientras que Keller considera sistemas más especializados que son no lineales en el estado, pero lineales en el vector de entrada.

Los autores dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una transformación la cual lleva el sistema no forzado en una forma observador lineal no forzada [KR, RE] o, una forma canónica observador no lineal no forzada [KE] respectivamente.

El diseño del observador presentado aquí se basa en una transformación, la cual se deriva a partir de una combinación lineal de los estados y las entradas cuyos coeficientes son funciones meromorfas en un campo diferencial $K\langle u\rangle$. Esta lleva al sistema a una Forma Canónica de Observabilidad Generalizada que, en contraste con las formas previas, depende de las n primeras derivadas de las variables de entrada.

Mostraremos aquí que dos de estas formas canónicas pueden ser obtenidas muy facilmente gracias a nuestros métodos [MA1], [MA2], [MA4], [MA, DE1],[MA, DE2], [MA, DE4], [MA, SUA].

III.2 Utilidad del Elemento Primitivo Diferencial

Tomemos la forma usual del espacio de estado

$$\dot{x}_i = A_i(x_1, \ldots, x_n, u, \ldots, u^{(s)}), \qquad i = 1, \ldots, n$$

tal que $x_1, \ldots, x_n$ son diferencialmente algebraicos sobre $K\langle u\rangle$.

Aplicando la generalización diferencial algebraica del teorema del elemento primitivo diferencial [KO], existe un elemento ξ tal que $K\langle u, \xi\rangle = K\langle u, x_1, \ldots, x_n\rangle$. Sea d el mínimo entero positivo tal que $\xi^{(d+1)}$ es analíticamente dependiente sobre $\xi, \dot{\xi}, \ldots, \xi^{(d)}, u, \dot{u}, \ldots$:

$$\phi\left(\xi^{(d+1)}, \xi^{(d)}, \ldots, \xi, u, \ldots, u^{(s)}\right) = 0$$

puede ser localmente resuelta como

$$\xi^{(d+1)} = -a\left(\xi, \ldots, \xi^{(d)}, u, \ldots, u^{(s)}\right)$$

Sea $q_i = \xi^{(i)}$, $i = 0, \ldots, d$. Obtenemos la siguiente forma de espacio de estado local la cual puede ser vista como una generalización de la *forma canónica controlador lineal* definida en [FL4].

$$\Sigma_3 : \qquad \begin{array}{l} \dot{q}_0 = q_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{d-1} = q_d \\ \dot{q}_d = -a(q_0, \ldots, q_d, u, \ldots, u^{(s)}). \end{array}$$

Por simplicidad, tomemos un sistema con una salida y i.e. $p = 1$. Sea d el mínimo entero positivo tal que $y^{(d+1)}$ es analíticamente dependiente sobre $y, \dot{y}, \ldots, y^{(d)}, u, \dot{u}, \ldots$:

$$\psi\left(y^{(d+1)}, y^{(d)}, \ldots, y, u, \ldots, u^{(s)}\right) = 0.$$

Podemos resolver localmente como:

$$y^{(d+1)} = -b\left(y, \ldots y^{(d)}, u, \ldots, u^{(s)}\right)$$

Sea $q_i = y^{(i)}$, $i = 0, \ldots, d$. Obtenemos la siguiente forma de espacio de estado local la cual puede ser vista como una generalización de la *forma canónica lineal de observabilidad* [FL4].

$$\Sigma_4 : \qquad \begin{array}{l} \dot{q}_0 = q_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{d-1} = q_d \\ \dot{q}_d = -b(q_0, \ldots, q_d, u, \ldots, u^{(s)}) \\ y = q_0 \end{array}$$

En contraste con las formas canónicas previas habituales usadas para sistemas lineales, la forma canónica presentada aquí depende de las variables de entrada y sus derivadas.

Observación 3.1 Cabe señalar que utilizando también esta aproximación diferencial algebraica, es posible llegar a establecer este tipo de formas canónicas de observabilidad generalizadas, esto es, empleando el concepto de comportamiento externo i.e., el comportamiento entrada-salida [MA, DE4], [DI1], [DI2], [DI5], [DI6], [DI7].

III.3 Caso Monovariable

Consideremos la Clase de Sistemas Bilineales CSB Σ_1, dada.

La siguiente proposición afirma que para una elección apropiada del elemento primitivo diferencial es posible obtener una Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Trasladada de Fliess con inyección de la salida (FCOG Trasladada).

Proposición 1. Sea la CSB Σ_1 dada. Si el elemento primitivo diferencial es elegido como:

$$y = \sum_{i}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j}^{m} \beta_j u_j \qquad \alpha_i, \beta_j \in K\langle u \rangle$$

entonces el sistema Σ_1 es transformable a la FCOG Trasladada con inyección de la salida

$$\Sigma_5 \qquad \begin{aligned} \dot{\tau} &= A_u \tau + \varphi(u, y) \\ y &= C\tau = \tau_1 \end{aligned}$$

donde $\varphi(u, y)$ es un vector no lineal. El vector $\varphi(u, y)$ es el vector de traslación de la FCOG y y denota la inyección de la salida en el vector de traslación.

Además, la matriz A_u tiene sus entradas en $K\langle u \rangle$.

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1 \times n-1} \\ 0 & -\sigma(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \end{bmatrix} \qquad \varphi(u, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

siendo γ un entero positivo.

Demostración. Sea el conjunto $\{\epsilon, \epsilon^{(1)}, \ldots, \epsilon^{(n-1)}\}$ una base de trascendencia finita de la dinámica $G/K\langle u \rangle$ (extensión diferencialmente algebraica finitamente generada) con $\epsilon^{(i-1)} = y^{(i-1)}$ $1 \leq i \leq n$ donde $n > 0$ es el mínimo entero positivo tal que $y^{(n)}$ es algebraicamente dependiente de $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, \ldots$; Redefiniendo $\tau_i = \epsilon^{(i-1)}$ $1 \leq i \leq n$; obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_1 &= \tau_2 \\ \dot{\tau}_2 &= \tau_3 \\ &\vdots \\ \dot{\tau}_{n-1} &= \tau_n \\ \dot{\tau}_n &= -\mathcal{L}(\tau_2, \ldots, \tau_n, u, \ldots, u^{(\gamma)}) + g(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y) \end{aligned}$$

la cual puede ser escrita como el sistema $(\Sigma_5) - (1)$.

$\blacksquare$

Observación 3.2 Podemos llevar el SB dado por Σ_1 a la FCOG Trasladada por medio de

$$\tau = \theta x \tag{2}$$

donde θ es una matriz con entradas en $K\langle u\rangle$.

Como esta relación depende de u, existen entradas u para las cuales θ es singular es decir, existen entradas bajo las cuales el sistema llega a ser inobservable (entradas singulares).

De hecho, nosotros trabajaremos con *las denominadas Buenas Entradas BE (entradas no singulares), entradas bajo las cuales (2) es no singular.*

III.4 Caso Multivariable

De acuerdo con el teorema del elemento primitivo diferencial (existe un elemento $\delta \in L$ el cual es un elemento primitivo diferencial $L = K\langle\delta\rangle$ i.e. L es diferencialmente generado por K y δ) existe $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots y_p)$ y un η_k entero tal que $0 \leq \eta_k \leq n$, $1 \leq k \leq p$ de modo que $y_k^{(\eta_k)}$ es algebraicamente dependiente de $y_k, y_k^{(1)}, \ldots, y_k^{(\eta_k-1)}, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$ i.e.

$$y_k^{(\eta_k)} = -\mathcal{L}_k(y_k, \ldots, y_k^{(\eta_k-1)}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)})$$

Sea

$$\xi_i^{(\eta_k)} = y_k^{(i-\ell)}, \quad \ell = 1,\ \eta_1 + 1, \eta_1 + \eta_2 + 1, \ldots, \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots + \eta_{p-1} + 1$$

$$\sum_{1\leq k\leq p} \eta_k = n, \quad 1 \leq i \leq \eta_1 + \cdots + \eta_p = n \ \text{ y } \ \eta_1 \leq \eta_2 \leq \ldots \leq \eta_p \leq n$$

donde los enteros $\eta_1, \ldots, \eta_p$ son denominados los índices de observabilidad algebraica.

Entonces podemos escribir una representación de espacio de estado local en la forma especial de una generalización de la Forma Canónica de Observabilidad Multisalida. Tal forma canónica es la *Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Multisalida* dada por:

$$
\Sigma_6: \quad \eta_1 \begin{cases} \dot{\xi}_1^{\eta_1} = \xi_2^{\eta_1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\eta_1-1}^{\eta_1} = \xi_{\eta_1}^{\eta_1} \\ \dot{\xi}_{\eta_1}^{\eta_1} = -\mathcal{L}_1(\xi_1^{\eta_1}, \dots, \xi_{\eta_1}^{\eta_1}, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma)}) \end{cases}
$$

$$
\eta_2 \begin{cases} \dot{\xi}_{\eta_1+1}^{\eta_2} = \xi_{\eta_1+2}^{\eta_2} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\eta_1+\eta_2-1}^{\eta_2} = \xi_{\eta_1+\eta_2}^{\eta_2} \\ \dot{\xi}_{\eta_1+\eta_2}^{\eta_2} = -\mathcal{L}_2(\xi_{\eta_1+1}^{\eta_2}, \dots, \xi_{\eta_1+\eta_2}^{\eta_2}, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma)}) \end{cases}
$$

$$
\eta_p \begin{cases} \dot{\xi}_{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{p-1}+1}^{\eta_p} = \xi_{\eta_1+\cdots+\eta_{p-1}+2}^{\eta_p} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\eta_1+\ldots+\eta_p-1}^{\eta_p} = \xi_{\eta_1+\cdots+\eta_p}^{\eta_p} \\ \dot{\xi}_{\eta_1+\ldots+\eta_p}^{\eta_p} = -\mathcal{L}_p(\xi_{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{p-1}+1}^{\eta_p}, \dots, \xi_{\eta_1+\ldots+\eta_p}^{\eta_p}, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma)}) \end{cases}
$$

$$
\begin{gathered} y_k = \xi_\ell^{\eta_k}, \\ \ell = 1, \eta_1 + 1, \eta_1 + \eta_2 + 1, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{p-1} + 1, \\ \sum_{1 \le k \le p} \eta_k = n. \end{gathered}
$$

La siguiente proposición afirma que mediante una elección apropiada del elemento primitivo diferencial es posible obtener una FCOG Trasladada Multisalida.

Proposición 2. Sea el Sistema Bilineal dado por Σ_1 con $y \in \mathbb{R}^p$. El elemento primitivo diferencial es elegido como:

$$
y_k = \sum_{i=n-\eta_k+1}^{\sum_{1 \le k \le p} \eta_k} \alpha_i x_i + \sum_{j}^{m} \beta_j u_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in K\langle u \rangle
$$

Si el sistema es desacoplado por bloques. Y

$$y_k = \sum_{i}^{\sum_{1\leq k\leq p} \eta_k} \alpha_i x_i + \sum_{j}^{m} \beta_j u_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in K\langle u\rangle$$

Si el sistema es acoplado por bloques.
donde $u = (u_1, \ldots, u_m)$ y $K\langle u\rangle$ denota el campo diferencial generado por K y u.

Entonces la clase de sistemas bilineales dada por Σ_1, con la salida $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ es transformable a la siguiente FCOG Trasladada Multisalida con inyección de la salida dada por:

$$\Sigma_7 : \begin{array}{rcl} \dot{\tau} & = & A_{\underset{k}{u}} \tau + \varphi_k(u, y) \\ y & = & C\tau \end{array}$$

donde $\varphi_k(u, y)$ es una matriz no lineal. La matriz $\varphi_k(u, y)$ es la matriz de traslación no lineal de la FCOG Multisalida y "y" denota la inyección de la salida en la matriz de traslación. Además, la matriz $A_{\underset{k}{u}}$ tiene sus entradas en $K\langle u\rangle$

$$A_{\underset{k}{u}} = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{bmatrix}, \quad A_k = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & -\sigma_k(u, u^{(1)} \ldots, u^{(\gamma)}) & & \end{bmatrix}\right\} \eta_k, \quad 1 \leq k \leq p$$

$$\varphi_k(u, y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(u, y_1) \\ \varphi_2(u, y_2) \\ \vdots \\ \varphi_p(u, y_p) \end{bmatrix}, \qquad \varphi_k(u, y_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_k(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y_k) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_p \end{bmatrix}, \qquad C_k = [1\ 0\ \ldots\ 0]$$

Demostración. Sea el conjunto $\{\xi_i^{\eta_k} = y_k^{(i-\ell)}\} = \{\xi_1^{\eta_k}, \ldots, \xi_n^{\eta_k}\}$ una base de trascendencia finita de la dinámica $G/K\langle u\rangle$ que representa al sistema Σ_1

(ξ^{η_k} es un estado de dimensión minimal su dimensión es $\sum_{1\le k\le p} \eta_k = n$, esto es $d^0 tr\ G/K\langle u\rangle = n$) con

$$y_k = \xi_\ell^{\eta_k}(i=\ell),\ \ \ell = 1, \eta_1+1, \dots, \eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{p-1}+1,\ \ 1\le k\le p$$

donde η_k, $0 \le \eta_k \le n$ es un entero tal que $y_k^{(\eta_k)}$ es algebraicamente dependiente de $y_k, y_k^{(1)}, \dots, y_k^{(\eta_k-1)}, u, u^{(1)}, \dots$; Redefiniendo la transformación de coordenadas τ como:

$$\begin{array}{lcl}
\tau_1^{\eta_1} & = & y_1\\
\tau_2^{\eta_1} & = & y_1^{(1)}\\
\vdots & & \\
\tau_{\eta_1}^{\eta_1} & = & y_1^{(\eta_1-1)}\\
\vdots & & \\
\tau_{\eta_1+\cdots+\eta_{p-1}+1}^{\eta_p} & = & y_p\\
\tau_{\eta_1+\cdots+\eta_{p-1}+2}^{\eta_p} & = & y_p^{(1)}\\
\vdots & & \\
\tau_{\eta_1+\cdots+\eta_p}^{\eta_p} & = & y_p^{(\eta_p-1)}
\end{array}$$

Obtenemos

$$\begin{array}{lcl}
\dot\tau_1^{\eta_1} & = & \tau_2^{\eta_1}\\
\dot\tau_2^{\eta_1} & = & \tau_3^{\eta_1}\\
\vdots & & \\
\dot\tau_{\eta_1-1}^{\eta_1} & = & \tau_{\eta_1}^{\eta_1}\\
\dot\tau_{\eta_1}^{\eta_1} & = & -\mathcal{L}_1(\tau_1^{\eta_1}, \dots, \tau_{\eta_1}^{\eta_1}, u, \dots, u^{(\gamma)}) + g_1(u, \dots, u^{(\gamma)}, y_1)\\
\dot\tau_1^{\eta_2} & = & \tau_2^{\eta_2}\\
\dot\tau_2^{\eta_2} & = & \tau_3^{\eta_2}\\
\vdots & & \\
\dot\tau_{\eta_1+\eta_2}^{\eta_2} & = & -\mathcal{L}_2(\tau_{\eta_1+1}^{\eta_2}, \dots, \tau_{\eta_1+\eta_2}^{\eta_2}, u, \dots, u^{(\gamma)}) + g_2(u, \dots, u^{(\gamma)}, y_2)\\
\vdots & & \\
\dot\tau_1^{\eta_p} & = & \tau_2^{\eta_p}\\
\dot\tau_2^{\eta_p} & = & \tau_3^{\eta_p}\\
\vdots & & \\
\dot\tau_{\eta_1+\cdots+\eta_p}^{\eta_p} & = & -\mathcal{L}_p(\tau_{\eta_1+\cdots+\eta_{p-1}+1}^{\eta_p}, \dots, \tau_{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_p}^{\eta_p}, u, \dots, u^{(\gamma)}) + g_p(u, \dots, u^{(\gamma)}, y_p)
\end{array}$$

lo cual puede ser representado o descrito en la forma dada por (Σ_7)-(3).

∎

Observación 3.3 El elemento Primitivo Diferencial dado en III.3 y III.4 (Caso Monovariable y Multivariable) es sugerido por la demostración del teorema del elemento primitivo diferencial, la demostración sugiere o propone, que el elemento primitivo diferencial sea descrito como una combinación lineal de los estados, donde los coeficientes pertenecen a un campo diferencial. De modo que la forma propuesta en las proposiciones anteriores, sugiere algo mas que una combinación lineal de los estados, esto es, también como una combinación lineal de las entradas cuyos coeficientes pertenecen al mismo campo diferencial.

∎

Observación 3.4 Podemos llevar el SB Σ_1 con salida $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ a la FCOG Trasladada Multisalida por medio de la siguiente transformación de coordenadas

$$\tau = \theta x \tag{4}$$

donde θ es ahora una matriz por bloques con entradas en $K\langle u \rangle$

∎

Observación 3.5 Para un sistema observable en la forma Σ_7 en el sentido de observabilidad de Diop y Fliess. Cualquier estado τ es observable con respecto a $\{u, y\}$; esto es en otras palabras, τ es algebraico sobre $K\langle u, y \rangle$.

∎

III.5 Ejemplos Ilustrativos

1. Sea el sistema bilineal bidimensional una entrada-una salida

$$\tilde{\Sigma}: \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ux_2 \\ \dot{x}_2 & = & ux_1 \\ y & = & x_1 \end{array}$$

El elemento primitivo diferencial se puede elegir como $y = x_1$ (ver proposición 1)

$$\begin{aligned} z_1 &= y = x_1 \\ z_2 &= ux_2 \\ z_3 &= \frac{\dot{u}}{u} z_2 + u^2 z_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u^2 & \dfrac{\dot{u}}{u} \end{bmatrix} z$$

Redefiniendo $\tau_i = z_i \quad i = 1, 2.$

Entonces podemos construir $\tau = \theta x$ donde $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ tiene sus entradas en el campo diferencial $K\langle u \rangle$, si el determinante de la matriz θ es diferente de cero, i.e., $|\theta| \neq 0$, el sistema tiene solución única $x = \theta^{-1}\tau$ es decir θ es invertible esto es cierto siempre y cuando u sea diferente de cero además podríamos obtener las entradas para las cuales el sistema llega a ser inobservable. Como la $\dfrac{\partial \tau}{\partial x}$ representa el Jacobiano de la transformación τ, y si $\left|\dfrac{\partial \tau}{\partial x}\right| \neq 0$ entonces podemos hallar la clase de entradas para las cuales el sistema es observable (ver Capítulo IV).

Si $u = 0$ entonces $\left|\dfrac{\partial \tau}{\partial x}\right| = 0$

Se tiene que $u = 0$ es una entrada singular de modo que dado un conjunto de entradas admisibles Ω un abierto en $\mathbb{R}^m$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^m)$ entonces podemos construir un conjunto abierto para el cual el sistema es observable i.e., $\Omega \backslash \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$, de modo que, para este conjunto de entradas no cero es posible estimar los estados del sistema original dado por $\tilde{\Sigma}$.

2. Dado el sistema bilineal bidimensional una entrada-una salida

$$\Sigma_b : \begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(C - x_1) - rx_1 \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - ux_2 \\ y &= x_2 + u \end{aligned}$$

Podemos elegir como elemento primitivo diferencial $z_1 = x_2 + u$ (ver proposición 1) de aquí $z_2 = rx_1 - ux_2 + \dot{u}$. Entonces podemos llegar a la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Trasladada con inyección de la salida dada por:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= r\dot{x}_1 - \dot{u}x_2 - u\dot{x}_2 + \ddot{u}\end{aligned}$$

En forma compacta:

$$\Rightarrow$$
$$\dot{z} = A_u z + \varphi(u,y)$$

donde

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(2u+r) \end{bmatrix},$$

$$\varphi(u,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ ruC + [-u^2 - \dot{u} - ur]y + u^3 + 3u\ddot{u} + ru^2 + r\dot{u} + \ddot{u} \end{bmatrix}$$

Definiendo: $\tau_1 = z_1 - u, \tau_2 = z_2 - \dot{u}$ Podemos escribir τ en la forma $\tau = \theta x$ esto es:

$$\tau = \begin{pmatrix} z_1 - u \\ z_2 - \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

donde θ tiene sus entradas en el campo diferencial $K\langle u\rangle$.

Ahora como, el Jacobiano de τ es:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \quad = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r & -u \end{pmatrix},$$

se tiene que su determinante es diferente de cero, si r es diferente de cero i.e.:

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial x}\right| \neq 0 \text{ si } r \neq 0$$

por lo tanto el sistema es universalmente observable para toda entrada [DI1], [DI2] en algún conjunto abierto (Ω conjunto de entradas admisibles) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$.

3. Dado el sistema bilineal Multivariable Multientrada-Multisalida

$$\Sigma_M : \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & u_1(C_1 - x_1) - r_1 x_1 \\ \dot{x}_2 & = & r_1 x_1 - u_1 x_2 \\ \dot{x}_3 & = & u_2(C_2 - x_3) - r_2 x_3 \\ \dot{x}_4 & = & r_2 x_3 - u_2 x_4 \\ y_1 & = & x_2 + u_1 \\ y_2 & = & x_4 + u_2 \end{array}$$

El sistema es desacoplado por bloques.

Podemos elegir $z_1 = x_2 + u_1$ y $z_3 = x_4 + u_2$ tales que (ver proposición 2):

$$z_2 = r_1 x_1 - u_1 x_2 + \dot{u}_1 \quad \text{y} \quad z_4 = r_2 x_3 - u_2 x_4 + \dot{u}_2$$

entonces es posible llevar Σ_M a la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Trasladada Multisalida con inyección de la salida donde $A_{\frac{u}{k}}$ y $\varphi_k(u, y_k)$, $(k = 1, 2)$ son dados por:

$$A_{\frac{u}{k}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -(2u_k + r_k) \end{bmatrix},$$

$$\varphi_k(u, y_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ r_k u_k C_k + u_k^3 + 3u_k\dot{u}_k + r_k u_k^2 + r_k \dot{u}_k + \ddot{u}_k - [u_k^2 + r_k u_k + \dot{u}_k] y_k \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} z_1 - u_1 \\ z_2 - \dot{u}_1 \\ z_3 - u_2 \\ z_4 - \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r_1 & -u_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r_2 & -u_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} x \qquad \text{con} \quad \underset{i=1,2}{\theta_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r_i & -u_i \end{pmatrix}$$

y dado que, $\dfrac{\partial \tau}{\partial x}$ es el Jacobiano de τ, se tiene que:

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial x}\right| = |\theta_1|\,|\theta_2| = r_1 r_2 \neq 0$$

si r_1 y r_2 son diferentes de cero, luego entonces el sistema es universalmente observable, esto es, para cualquier entrada el sistema Σ_M es observable (ver Capítulo IV).

Capítulo IV

Observadores para una clase de Sistemas Bilineales

IV.1. Introducción

En este capítulo daremos una síntesis de resultados existentes en la literatura de observadores para Sistemas Bilineales, así como los resultados de los observadores propuestos.

Recordamos que en general el objetivo principal de un observador es la reconstrucción completa del estado del sistema. En el caso lineal es muy fácil ver cómo éste es propuesto, siendo formado de una copia del sistema original más un término correctivo constituído por el error de salida de tal manera que si las salidas coinciden las trayectorias del sistema original y el observador son iguales.

En el caso de Sistemas Bilineales en [HA, FU], [FUN], [WI] los autores conciben observadores que funcionan para toda entrada, pero estos observadores no funcionan mas que para una clase particular de sistemas bilineales.

Restringiendo la clase de entradas en [GA, KA] y [BO, CO, CE] los autores muestran que es posible dar un observador para todo sistema bilineal.

Hara y Furuta consideran observadores de orden infinito que no dependen de las entradas ni de las condiciones iniciales, solamente que éstos no funcionan para cualquier sistema bilineal dado. En [FUN], el autor establece que la clase de sistemas que poseen un observador es mas grande que aquella dada por Hara y Furuta. El observador de Williamson [WI], funciona para una cierta clase de sistemas bilineales que no poseen entradas singulares.

Una pregunta interesante a resolver es la siguiente: Dada la aproximación diferencial algebraica propuesta ¿Es posible hallar un observador para la CSB dada por Σ_1?

Presentamos aquí dos tipos de observadores:

i) El observador tipo Luenberger con ganancias variantes en el tiempo

ii) El observador tipo Kalman

El primero es un observador cuya matriz de ganancia se encuentra dada en un campo diferencial $K\langle u\rangle$ cuyo error de salida decrece en forma exponencial a cero con constante positiva independiente de la entrada; dicho observador es del tipo inicializado (i.e. es independiente de las condiciones iniciales). El sistema observador que se presenta es simple en su construcción, dada la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Trasladada, la dinámica del observador es una copia de dicha FCOG Trasladada mas un error de salida ponderado por una matriz de ganancia, donde las entradas de ésta se encuentran en un campo diferencial $K\langle u\rangle$.

Observación 4.1 Si el sistema que determina la FCOG Trasladada es invariante en el tiempo, el sistema observador puede ser reducido a la dinámica dada por el observador de Krener e Isidori [KR, IS].

∎

El segundo es un observador tipo Kalman trabajado por algunos autores [BO, CO, CE] [GA, HM, OT] en el caso monovariable (una entrada-una salida) con una matriz de ganancia en un grupo lineal general de matrices definidas positivas simétricas de tamaño $n \times n$, con entradas en $\mathbb{R}$.

El observador tiene características de ser un observador exponencial cuya matriz de ganancia está dada por la solución de una ecuación diferencial de Lyapunov, la cual se encuentra dada, a diferencia de lo presentado en [GA, HM, OT], en un grupo lineal general de matrices simétricas definidas positivas de tamaño $n \times n$, pero con coeficientes ahora en un campo diferencial $K\langle u\rangle$. Dicha solución depende de un coeficiente constante que determina la aceleración de convergencia del error de salida y, en consecuencia, de las trayectorias de estado. Dicho observador es del tipo inicializado, i.e. es independiente de las condiciones iniciales.

En el caso monovariable y multivariable presentamos una demostración corta y diferente a la dada en [BO, CO, CE] acerca de la convergencia del observador tipo Kalman dado.

IV.2 Caso Monovariable

Dos resultados de existencia de observadores para una clase de Sistemas Bilineales son dados.

Lema 1. Considere el sistema Σ_5 observable con una salida (proposición 1 en el caso monovariable). Entonces

$$\dot{\hat{\tau}} = A_u \hat{\tau} + \varphi(u, y) - L_u(y - \hat{y}) \tag{5}$$

es un observador asintótico donde $\hat{\tau}$ es un estimado de τ.

Además, las entradas de la matriz de ganancia del observador L_u están en un campo diferencial $K\langle u\rangle$ y $\|\tau - \hat{\tau}\| \leq \nu \exp(-\delta t)$ con constante $\delta > 0$ y δ independiente de la entrada.

Demostración. Definiendo el error de observación como $\epsilon = \tau - \hat{\tau}$ tenemos que la dinámica del error está dada por:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\tau} - \dot{\hat{\tau}}.$$

La substitución del sistema observable una salida dado por la proposición 1 y la dinámica del observador en la ecuación dinámica del error conduce a:

$$\dot{\epsilon} = (A_u + L_u C)\epsilon$$

Escogiendo una matriz constante K con $\sigma(K) \subseteq \mathbb{C}^-$ donde $\sigma(K)$ es el espectro de la matriz K. Tal que $A_u + L_u C = K$, con K dada por:

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \sigma_\ell \neq 0, \;\; \sigma_\ell < 0, \;\; 1 \leq \ell \leq n$$

Entonces podemos escribir

$$L_u C = K - A_u \tag{6}$$

ahora, dado que C tiene entradas constantes, L_u debe tener sus entradas en el campo diferencial $K\langle u\rangle$. Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que $\|\epsilon\| \leq \nu \exp(-\delta t)$, δ independiente de la entrada.

Podemos verificar que la ecuación (6) tiene al menos una solución. Como el polinomio característico de $A_u + L_u C$ está dado por:

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(L_u, u, \dot{u} \ldots)\lambda^{n-j} \tag{7}$$

donde $\alpha_j(L_u, u, \dot{u}, \ldots) = L_{u_j} + \rho(\mu_j, u, \dot{u}, \ldots)$ y $\mu_j = \{L_{u_i},\ 1 \leq i \leq j\}$ y el polinomio característico de la matriz K está dado por:

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_j \lambda^{n-j} \qquad \bar{\beta}_j = \text{ cte } 1 \leq j \leq n \tag{8}$$

Igualando los coeficientes de (7) y (8) obtenemos:

$$L_{u_j} = \bar{\beta}_j - \rho(\mu_j, u, \dot{u}, \ldots),\ \ 1 \leq j \leq n$$

de aquí que (6) tiene al menos una solución.

∎

Corolario. Suponga u es una buena entrada (BE). Entonces el sistema dinámico dado por el lema 1 junto con

$$x = \theta^{-1}\tau \tag{9}$$

constituye un observador asintótico para la clase de sistemas bilineales dado por Σ_1.

∎

Por lo que respecta al observador tipo Kalman planteamos el siguiente lema.

Lema 2. Considere el sistema Σ_5 observable con una salida dado por la proposición 1, entonces el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\tau}} &= A_u\hat{\tau} + \varphi(u, y) + S^{-1}C^T(C\hat{\tau} - y) \\ \dot{S} &= -\psi S - A_u^T S - S A_u + C^T C \end{aligned} \tag{10}$$

$\psi > 0$, y $S(\psi) \in GL(n, K\langle u \rangle)$ es un observador exponencial para el sistema dado en la proposición 1. Además el error de observación es dado por $\epsilon = \tau - \hat{\tau}$ y $\|\epsilon\| \leq \bar{K}e^{-\frac{\psi t}{2}}$.

Demostración. Considere el error de observación $\epsilon = \tau - \hat{\tau}$. Entonces la ecuación dinámica del error es dada por:

$$\dot{\epsilon} = (A_u - S^{-1}C^TC)\epsilon$$

Considere la función de Lyapunov $\epsilon^T S\epsilon$.

Sea $V(t) = \epsilon^T S\epsilon$, como S es simétrica definida positiva $V(t) \geq 0$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{\epsilon}^T S\epsilon + \epsilon^T \dot{S}\epsilon + \epsilon^T S\dot{\epsilon} = \\
&= \epsilon^T(A_u S - C^TC)\epsilon + \epsilon^T(-\psi S - A_u^T S - SA_u + C^TC)\epsilon + \\
&\quad +\epsilon^T(SA_u - C^TC)\epsilon = -\epsilon^T C^TC\epsilon - \psi\epsilon^T S\epsilon = \\
&= -\psi V(t) - \epsilon^T C^T C\epsilon
\end{aligned}$$

Note que $\epsilon^T C^T C\epsilon > 0$ esto implica que

$$\begin{aligned}
-\psi V(t) &- \epsilon^T C^T C\epsilon \leq -\psi V(t) \\
&\Rightarrow \dot{V}(t) \leq -\psi V(t) \\
&\Rightarrow 0 \leq V(t) \leq V(0)e^{-\psi t}
\end{aligned}$$

Ya que existen α y β tal que

$$\alpha\|\epsilon\|^2 \leq V(\epsilon) \leq \beta\|\epsilon\|^2$$

$$\Rightarrow \|\epsilon\| \leq \bar{K}e^{-\frac{\psi t}{2}} \text{ con } \bar{K} = \left(\frac{V(0)}{\alpha}\right)^{1/2}$$

Observe que el parámetro ψ determina la razón de convergencia del observador y este es fijado a criterio del diseñador.

Establecemos finalmente el siguiente corolario

Corolario. Suponga que u es una BE. Entonces el sistema dinámico dado en el lema 2 junto con

$$x = \theta^{-1}\tau \tag{11}$$

Constituye un observador exponencial para el SB Σ_1.

∎

IV. 3 Caso Multivariable

El siguiente resultado es cierto para un sistema observable multivariable.

Lema 3. Considere el sistema observable multisalida dado por la proposición 2 sección III.4, entonces el sistema

$$\dot{\hat{\tau}}_k = A_{\frac{u}{k}}\hat{\tau}_k + \varphi_k(u,y) - L_{\frac{u}{k}}(y_k - \hat{y}_k) \tag{12}$$

es un observador asintótico, donde $\hat{\tau}_k$ es un estimado de τ_k. Además las entradas de la matriz ganancia del observador $L_{\frac{u}{k}}$ están en $K\langle u\rangle$ y $\|\tau_k - \hat{\tau}_k\| \leq \nu\exp(-\delta_k t)$ con constante $\delta_k > 0$ (δ_k independiente de la entrada u).

Demostración Como en el caso monovariable definiendo el error de observación como $e_k = \tau_k - \hat{\tau}_k$ tenemos que $\dot{e}_k = \dot{\tau}_k - \dot{\hat{\tau}}_k$, entonces de la substitución del sistema observable multisalida y el sistema observador en la ecuación dinámica del error tenemos que

$$\dot{e}_k = (A_{\frac{u}{k}} + L_{\frac{u}{k}}C_k)e_k$$

Escogiendo una matriz constante K_k con $\sigma(K_k) \subset \mathbb{C}^-$ donde $\sigma(K_k)$ es el espectro de la matriz K_k tal que $A_{\frac{u}{k}} + L_{\frac{u}{k}}K_k$, con K_k dado como:

$$K_k = \begin{bmatrix} \sigma_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{k_\ell} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq \ell \leq n \\ \\ \sigma_{k_\ell} \neq 0, \quad \sigma_{k_\ell} < 0. \end{array}$$

Entonces podemos escribir

$$L_{\frac{u}{k}}C_k = K_k - A_{\frac{u}{k}}, \tag{13}$$

y ya que, C_k tiene entradas constantes, la matriz $L_{\frac{u}{k}}$ debe tener sus entradas en el campo diferencial $K\langle u\rangle$. Entonces existe una constante $\delta_k > 0$ tal que

$$\|e_k\| \leq \nu\exp(-\delta_k t)$$

δ_k independiente de la entrada.

Podemos verificar que la ecuación (13) tiene al menos una solución.

Como, el polinomio característico de $A_{\substack{u\\k}} + L_{\substack{u\\k}} C_k$ está dado por

$$\lambda_k^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(L_{\substack{u\\k}}, u, \dot{u}, \ldots)\lambda_k^{n-j} \tag{14}$$

donde $\alpha_j(L_{\substack{u\\k}}, u, \dot{u}, \ldots) = L_{\substack{u_j\\k}} + \rho(\mu_j, u, \dot{u}, \ldots)$ y

$$\mu_j = \{L_{\substack{u_i\\k}},\ 1 \leq i \leq j\}$$

y el polinomio característico de la matriz K_k está dado por:

$$\lambda_k^n + \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_j \lambda_k^{n-j} \qquad \bar{\beta}_j = \text{ cte } \ 1 \leq j \leq n \tag{15}$$

Igualando los coeficientes de (14) y (15) obtenemos:

$$L_{\substack{u_j\\k}} = \bar{\beta}_j - \rho(\mu_j, u, \dot{u}, \ldots), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto (13) tiene al menos una solución.

∎

Finalmente establecemos el siguiente corolario.

Corolario. Suponga u es una BE. Entonces el sistema dinámico dado por el Lema 3 junto con:

$$x = \theta^{-1}\tau \tag{16}$$

constituye un observador asintótico para CSB (1).

∎

El siguiente resultado es cierto para un sistema multivariable.

Lema 4. Considere el sistema observable multisalida dado por la proposición 2 sección III.4 entonces el sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{\hat{\tau}} & = & A_{\substack{u\\k}} \hat{\tau}_k + \varphi_k(u, y) + S_k^{-1} C_k^T (C_k \hat{\tau}_k - y_k) \\ \dot{S}_k & = & -\psi_k S_k - A_{\substack{u\\k}}^T S_k - S_k A_{\substack{u\\k}} + C_k^T C_k \quad 1 \leq k \leq p \end{array} \tag{17}$$

es un observador exponencial para el sistema observable multisalida, donde $\psi_k > 0$ y $S_k(\psi)$ está en $\mathrm{GL}(n, K\langle u \rangle)$. Además el k-ésimo error de observación es dado por $\epsilon_k = \tau_k - \hat{\tau}_k$ y $\|\epsilon_k\| \leq \bar{K} \exp(-\psi_k t/2)$

Demostración. Considere el k-ésimo error de observación $\epsilon_k = \tau_k - \hat{\tau}_k$. Entonces la ecuación dinámica del error es dada por:

$$\dot{\epsilon}_k = (A_{\frac{u}{k}} - S_k^{-1} C_k C_k^T)\epsilon_k$$

Considere la función de Lyapunov $\epsilon_k^T S_k \epsilon_k$.

Sea $V_k(t) = \epsilon_k^T S_k \epsilon_k$. Como S_k es simétrica definida positiva entonces $V_k(t) \geq 0$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_k(t) &= \dot{\epsilon}_k^T S_k \epsilon_k + \epsilon_k^T \dot{S}_k \epsilon_k + \epsilon_k^T S_k \dot{\epsilon}_k = \\
&= \epsilon_k^T \left(A_{\frac{u}{k}} S_k - C_k^T C_k\right) \epsilon_k + \epsilon_k^T \left(-\psi_k S_k - A_{\frac{u}{k}}^T S_k - S_k A_{\frac{u}{k}} + C_k^T C_k\right) \epsilon_k \\
&\quad + \epsilon_k^T (S_k A_{\frac{u}{k}} - C_k^T C_k)\epsilon_k = -\epsilon_k^T C_k^T C_k \epsilon_k - \psi_k \epsilon_k^T S_k \epsilon_k = \\
&= -\psi_k V_k(t) - \epsilon_k^T C_k^T C_k \epsilon_k
\end{aligned}$$

Note que $\epsilon_k^T C_k^T C_k \epsilon_k > 0$ esto implica que

$$\begin{aligned}
-\psi_k V_k(t) &- \epsilon_k^T C_k^T C_k \epsilon_k \leq -\psi_k V_k(t) \\
&\Rightarrow V_k(t) \leq -\psi_k V_k(t) \\
&\Rightarrow 0 \leq V_k(t) \leq V_k(0) e^{-\psi_k t}
\end{aligned}$$

como existen α_k, β_k tal que

$$\alpha_k \|\epsilon_k\|^2 \leq V_k(\epsilon_k) \leq \beta_k \|\epsilon_k\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|\epsilon_k\| \leq \bar{K} e^{-\frac{\psi_k t}{2}} \quad \text{con} \quad \bar{K} = \left(\frac{V_k(0)}{\alpha_k}\right)^{1/2}$$

■

ψ_k determina la razón de convergencia del observador y este es fijado a criterio del diseñador.

Finalmente establecemos el corolario.

Corolario. Suponga u una BE. Entonces el sistema dinámico dado en el Lema 4 junto con

$$x = \theta^{-1}\tau. \tag{18}$$

Constituye un observador exponencial para el SB (1). ($\hat{x} = \theta^{-1}\hat{\tau}$ es la función de salida del sistema dado en el Lema 4).

IV. 4 Ejemplos Ilustrativos

Aplicación a un Modelo de Reactor Químico

Ejemplo 1. Caso Monovariable.

Sea el siguiente sistema bidimensional una sola entrada-una sola salida que representa un modelo de reactor químico

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & u(Ce - x_1) - rx_1 \\ \dot{x}_2 & = & rx_1 - ux_2 \\ y & = & x_2 + u \end{array} \tag{19}$$

con coeficientes en el campo de los números reales $\mathbb{R}$, el cual es considerado como un campo diferencial ordinario.

x_1, x_2 denotan las concentraciones del reactante y el producto, la entrada u corresponde al flujo de entrada del reactante, r y Ce denotan los parámetros del reactor y cinético respectivamente.

Si u y $y = x_2 + u$ son medidas x_1 y x_2 verifican los polinomios diferenciales algebraicos siguientes:

$$\begin{array}{l} x_2 - y + u = 0 \\ rx_1 - \dot{y} - uy + u^2 + \dot{u} = 0 \end{array}$$

de donde x_1 y x_2 son universalmente observables [DI1], [DI2].

El sistema (19) puede ser llevado a la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Trasladada con inyección de la salida por medio del elemento primitivo diferencial $z_1 = x_2 + u$ Donde A_u y $\varphi(u, y)$ son dados por:

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(2u + r) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(u, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ ruCe + (-u^2 - \dot{u} - ur)y + u^3 + 3u\dot{u} + ru^2 + r\dot{u} + \ddot{u} \end{bmatrix}$$

Donde es posible construir un observador asintótico eligiendo la matriz de ganancia del observador como:

$$\begin{array}{rcl} L_{u_1} & = & \psi_1 + (2u + r), \quad \psi_1 < 0 \\ L_{u_2} & = & -\psi_2 - (\psi_1 + 2u + r)(2u + r), \quad \psi_2 > 0 \end{array}$$

con lo cual se observa que el error de observación decae exponencialmente aplicando una colocación de polos arbitraria (ver Figuras 4a y 4b).

Ejemplo 2. Caso Multivariable.

Sea el siguiente sistema multi-entrada multi-salida el cual representa un modelo de reactor químico

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1(C_{1e} - x_1) - r_1 x_1 \\
\dot{x}_2 &= r_1 x_1 - u_1 x_2 \\
\dot{x}_3 &= u_2(C_{2e} - x_3) - r_2 x_3 \\
\dot{x}_4 &= r_2 x_3 - u_2 x_4 \\
y_1 &= x_2 + u_1 \\
y_2 &= x_4 + u_2
\end{aligned} \tag{20}$$

con coeficientes en el campo de números reales $\mathbb{R}$ considerado como un campo diferencial ordinario.

x_1, x_3 y x_2, x_4 denotan las concentraciones del reactante y del producto respectivamente, u_i corresponde a las entradas del reactante, r_i y C_{ie} denotan los parámetros del reactor y cinético respectivamente.

Para las salidas $y_1 = x_2 + u$ y $y_2 = x_4 + u_2$ no es difícil verificar que el sistema es observable (algebraicamente) y x_1, x_2, x_3 y x_4 verifican

$$\begin{array}{ll}
x_2 - y_1 + u_1 = 0 & x_u + u_2 - y_2 = 0 \\
\dot{y}_1 + u_1 y_1 - u_1^2 - r_1 x_1 - \dot{u}_1 = 0 & \dot{y}_2 - r_2 x_3 + u_2 y_2 - u_2^2 - \dot{u}_2 = 0
\end{array}$$

Del teorema del elemento primitivo diferencial partiendo de $z_1 = x_2 + u_1$ y $z_3 = x_4 + u_2$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ll}
z_1 = x_2 + u_1 & z_3 = x_4 + u_2 \\
z_2 = r_1 x_1 - u_1 x_2 + u_1 & z_4 = r_2 x_3 - u_2 x_4 + \dot{u}_2
\end{array}$$

Podemos transformar el sistema (20) a la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Trasladada Multisalida con inyección de la salida donde:

$$A_{\frac{u}{k}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ & \\ 0 & -(2u_k + r_k) \end{bmatrix}$$

y

$$\varphi_k(u, y_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ r_k u_k C_k + u_k^3 + 3u_k \dot{u}_k + r_k u_k^2 + r_k \dot{u}_k + \ddot{u}_k - [-u_k^2 + r_k u_k + \dot{u}_k] y_k \end{bmatrix}$$

Por el lema 4 es posible construir un observador exponencial.

En este caso:

$$A_{\frac{u}{k}} = A_k + \Gamma_{\frac{u}{k}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(2u_k + r_k) \end{bmatrix}$$

por lo tanto el observador puede ser descrito como sigue:

$$\dot{\hat{z}}_k = A_k \hat{z}_k + \Gamma_{\frac{u}{k}} \hat{z}_k + \varphi_k(u, y) + S_k^{-1} C_k^T (C_k \hat{z}_k - y_k)$$

con S_k solución de la ecuación de Lyapunov

$$\dot{S}_k = -\psi_k S_k - A_k^T S_k - S_k A_k + C_k^T C_k, \quad 1 \leq k \leq 2$$

Luego la matriz de ganancia S_k está dada por:

$$S_1 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 \\ \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -\theta_1 s_1 + 1 \\ \dot{s}_2 &= -\theta_1 s_2 - s_1 \\ \dot{s}_3 &= -\theta_1 s_3 - 2s_2 \\ \dot{\bar{r}}_1 &= -\theta_2 \bar{r}_1 + 1 \\ \dot{\bar{r}}_2 &= -\theta_2 \bar{r}_2 - \bar{r}_1 \\ \dot{\bar{r}}_3 &= -\theta_2 \bar{r}_3 - 2\bar{r}_2 \end{aligned}$$

con $\theta_k = \psi_k$ la cual representa la convergencia del observador.

Finalmente se muestran algunas gráficas para el caso monovariable y multivariable (ver Figuras 4a, 4b, 4c y 4d). Las gráficas muestran las dinámicas del sistema y del observador con las siguientes condiciones iniciales para las figuras 4a y 4b (caso monovariable), $x_1 = 1$, $x_1e = 0.5$, $x_2 = 0$, $x_2e = 0.2$ y con condiciones iniciales para las figuras 4c y 4d (caso multivariable), $x_1 = 1$, $x_1e = -1$, $x_2 = 3$, $x_2e = 0$, $x_3 = 1$, $x_3e = -1$, $x_4 = 3$ y $x_4e = 0$. En cada uno de los casos se observa que la dinámica del observador responde rapidamente al objetivo es decir alcanza la dinámica del sistema siendo el error exponencialmente nulo para una asignación de polos adecuada.

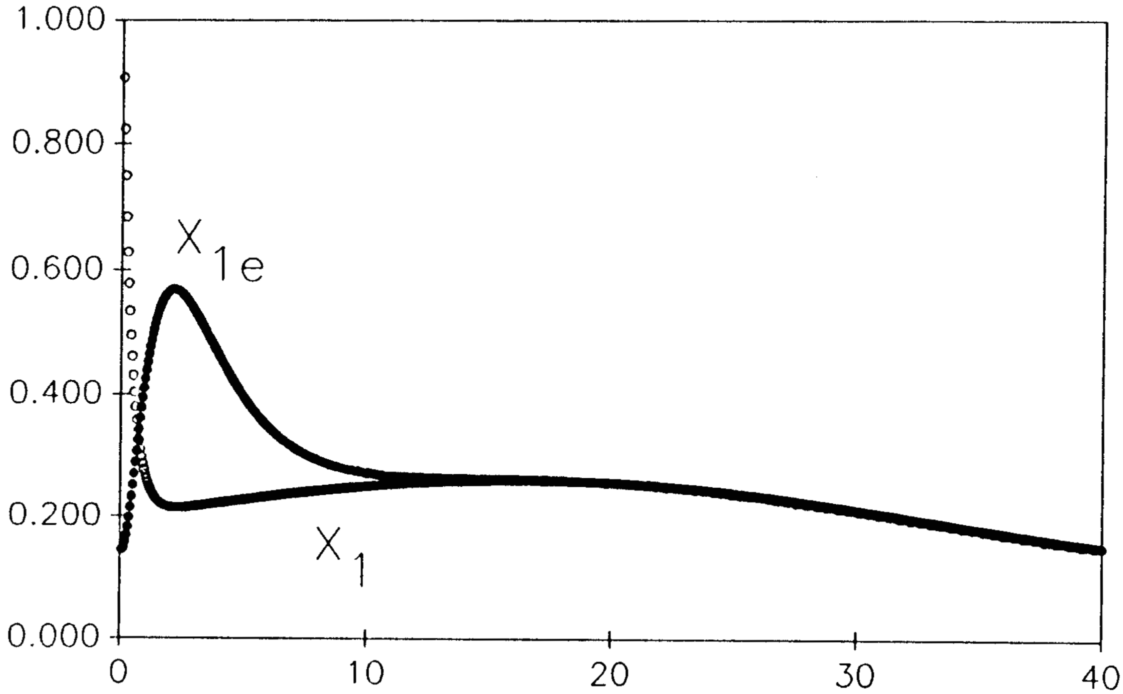

Fig. 4a

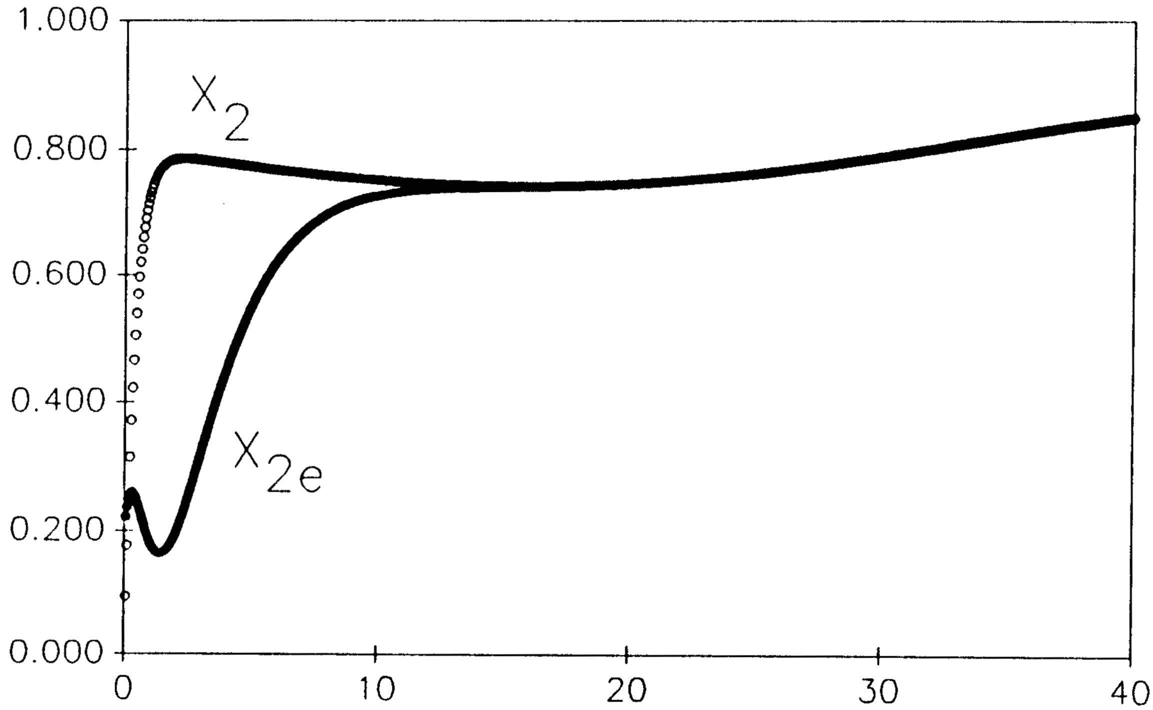

Fig. 4b

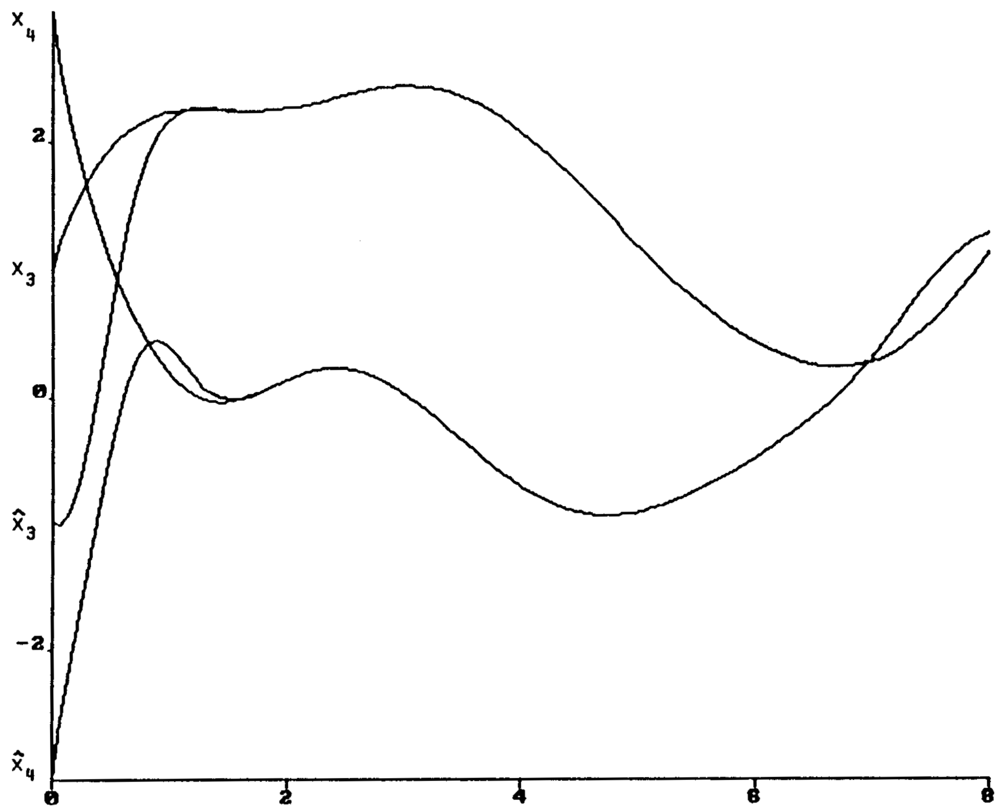

Fig. 4c

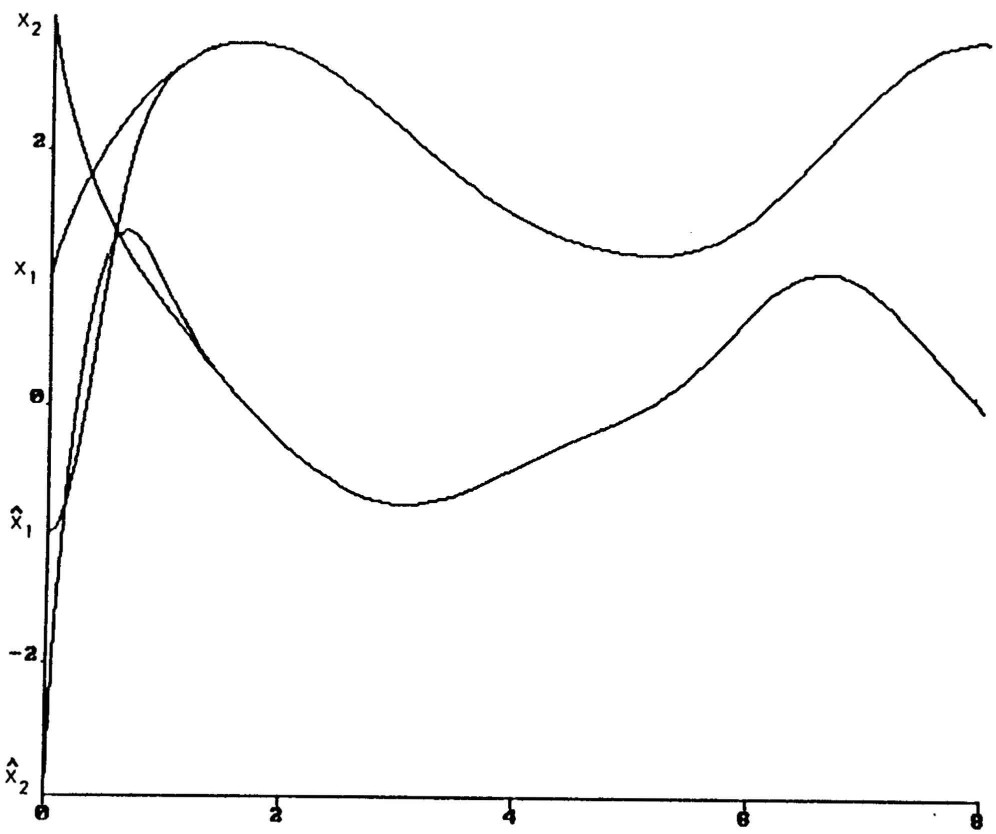

Fig. 4d

Capítulo V

Problema de estabilización (local) y seguimiento de la salida asintótico de una clase de sistemas bilineales por medio de un observador: una aproximación diferencial algebraica.

Diseño de un observador-controlador basado en técnicas del algebra diferencial.

V.1. Introducción

En años recientes una variedad de aproximaciones han sido utilizadas en el estudio de la síntesis de observadores y algoritmos de control. En particular, han sido reportadas ampliamente aplicaciones de técnicas de estimación y control modernas a reactores químicos (punto de vista geométrico). Por ejemplo Lynch y Ramírez [LY, RA] han diseñado controladores optimales con un filtro de Kalman para la estimación del estado en un reactor continuo de tanque agitado (RCTA), en Alvarez, Suárez y Sánchez [ALV, SUA, SA] se diseña un controlador no lineal semiglobal para resolver el problema de seguimiento de la salida con rechazo a perturbaciones aplicado a un RCTA, Huang, Chao, Chen [HU, CHA, CHE] han usado un control adaptable también para este tipo de procesos, Cebuhar y Constanza [CE, CON] han aplicado estrategias de control a un modelo de reactor químico bilineal.

Las técnicas de control referidas anteriormente suponen un conocimiento completo del vector de estado en cualquier tiempo. Este no es siempre el caso ya que las técnicas para la medición de algunas variables del proceso son casi siempre indirectas. Debido a esta restricción es necesario diseñar e implementar estimadores. El problema de medición del estado es resuelto introduciendo un estimador de estado en el esquema de control, el método de estimación y la ley de control empleadas son algoritmos basados en el álgebra diferencial.

En [FL1] ha sido demostrado que, dado cualquier sistema dinámico descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, este tiene asociado una Forma Canónica Controlador Generalizada dependiendo de las entradas y sus derivadas, también una Forma Canónica de Observabilidad Generalizada la cual es obtenida suponiendo que la salida del sistema es un elemento primitivo diferencial (ver proposición 1 y proposición 2).

La Forma Canónica de Observabilidad Generalizada es obtenida por medio de una transformación de coordenadas de estado basada en la salida (elemento primitivo diferencial) la cual es en general dependiente del control y posiblemente incluye un número finito de derivadas de éste. Aplicaciones de esta aproximación a modelos de sistemas físicos se dan por ejemplo en [SI1, AH, ZR], [SI2], [SI3].

V.1.1 Linealización por retroalimentación de una dinámica no-lineal

El problema de linealización exacta con una retroalimentación de estado estática de una dinámica no lineal ha sido propuesta por Brockett [BRO], por Jackubczyk y Respondek [JA, RE], y por otra parte Hunt, Su y Meyer [HU, SU, ME] en términos de paréntesis de Lie y campos vectoriales.

Recientemente Charlet, Levine y Marino [CH, LE, MAR] dieron condiciones suficientes para permitir la linealización vía una retroalimentación de estado dinámica de sistemas no lineales.

V.1.2 Linealización vía una retroalimentación de estado dinámica

Tomando la forma canónica controlador local generalizada (III.2) e igualando la última ecuación diferencial con un polinomio homogéneo con coeficientes en un campo diferencial, esto es

$$a(\xi, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\alpha)}) = \ell\left(x, v, \dot{v}, \ldots, v^{(\beta)}\right) \tag{21}$$

en algun sentido esto define una retroalimentación de estado dinámica linealizante.

En el presente capítulo se propone un compensador dinámico no lineal linealizante (variante en el tiempo) basado en la construcción de un observador este es claramente sugerido por la forma canónica obtenida.

Una estrategia de control (retroalimentación dinámica) es propuesta para resolver el problema de estabilización (local) y seguimiento asintótico en la salida. Se implementa en el esquema de control un observador exponencial no lineal para la estimación del error de seguimiento, La aproximación es completamente basada en la FCOG usando algunos resultados del álgebra diferencial.

V.2 Principio de Separación

Supóngase que se dispone de una ley de control por retroalimentación de estado que estabiliza al sistema y que un observador ha sido construido. Se propone reemplazar en el control calculado, el estado real del sistema, el cual es desconocido, mediante el estimado obtenido por el observador.

La pregunta fundamental es saber si el sistema en lazo cerrado (control + observador) preserva la estabilidad.

Este es un problema muy delicado de estudiar. En general se trata de encontrar un compromiso entre la velocidad de convergencia del observador y la rapidez con que se va a estabilizar el sistema.

Es bien sabido que si procedemos como en el caso de los sistemas lineales, el espectro del sistema en lazo cerrado con el estado estimado se descompone en dos partes: el espectro del observador y el espectro del sistema en lazo cerrado sin observador, los cuales permanecen invariables.

La estabilidad del sistema en lazo cerrado con observador depende sólo de la estabilidad del observador y de la del sistema en lazo cerrado sin observador.

El principio de separación consiste en controlar un sistema por medio de un observador, este principio de separación que facilita considerablemente la síntesis, no es en general aplicable para el caso no lineal.

Para los sistemas lineales se satisface el principio de separación siguiente:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
\dot{z} &= Az + Bu - KC(z - x)
\end{aligned}
$$

Si $u = Fz + v$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + BFz + Bv \\
\dot{z} &= Az + BFz - KC(z - x) + Bv \\
\epsilon &= z - x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BF \\ \\ KC & A + BF - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ \\ B \end{pmatrix} v
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (A + BF)x + BF\epsilon + Bv \\
\dot{\epsilon} &= (A - KC)\epsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ \\ 0 & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ \\ 0 \end{pmatrix} v
$$

uno puede escoger los valores propios de cada subsistema independientemente de las ganancias del controlador y observador F y K respectivamente (F, K).

En el caso no lineal en general esto no se cumple.

V.3 Problema de seguimiento en la salida y estabilización (local). Una aproximación diferencial algebraica

El problema es planteado de la siguiente manera:

Considere la clase de sistemas bilineales dada como:

$$
\Sigma_{SB} : \begin{array}{rcll} \dot{x} &=& (A_0 + \sum_i^m A_i u_i)x + Bu & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ \\ y &=& Cx + Du & y \in \mathbb{R} \end{array} \tag{22}
$$

donde A_i, $0 \leq i \leq m$; B, C y D son matrices de tamaño apropiado. Supóngase que el sistema Σ_{SB} es observable en el sentido de observabilidad dado por

Diop y Fliess. Dado el elemento primitivo diferencial como en la proposición 1 del capítulo III y definiendo $y^{(i-1)} = \bar{\eta}_i$ $1 \leq i \leq n$, se obtiene la siguiente representación explícita de la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada dada por:

$$\Sigma_{FCO}: \begin{array}{rcl} \dot{\bar{\eta}}_i & = & \bar{\eta}_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\bar{\eta}}_n & = & -\mathcal{L}_0\left(\bar{\eta}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\bar{\alpha})}\right) \\ y & = & \bar{\eta}_1 \end{array} \tag{23}$$

para algún $\bar{\alpha} > 0$, y $\bar{\eta} =$ col $(\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n)$. El sistema Σ_{SB} es transformable en la FCOG representada por Σ_{FCO} mediante el uso de la proposición 1 dada en la sección III.3.

Ahora, sea $y_R(t)$ la función de salida de referencia diferenciable al menos n-veces con respecto al tiempo t. El problema de Seguimiento Asintótico de la salida consiste en construir un controlador dinámico posiblemente descrito mediante una ecuación diferencial ordinaria escalar implícita variante en el tiempo la cual presenta como funciones de entrada:

a) la señal de referencia de salida $y_R(t)$, junto con un número finito de sus derivadas $y_R^{(i)}(t)$ $\quad 1 \leq i \leq n$; y

b) las coordenadas de estado $\bar{\eta}_i$ del sistema, y en algunas ocasiones implicitamente el error de seguimiento $e = y(t) - y_R(t)$,

y es capaz de producir como señal de salida una función escalar u, la cual localmente obliga a la salida del sistema Σ_{FCO}, $y = \bar{\eta}_1$ a converger asintóticamente hacia la función de salida de referencia deseada $y_R(t)$.

Definiendo a la función de error de seguimiento de salida $e(t)$ como la diferencia entre la salida del sistema original $y(t)$ y la señal de salida de referencia $y_R(t)$:

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \tag{24}$$

Por definición la función coordenada transformada $\bar{\eta}_i$ coincide con la $(i-1)$-ésima derivada de la salida $y(t)$, esto es $\bar{\eta}_i = y^{(i-1)}$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} e^{(i)}(t) & = & \bar{\eta}_{i+1} - y_R^{(i)}(t) \qquad 0 \leq i \leq n-1 \\ e^{(n)}(t) & = & \dot{\bar{\eta}}_n - y_R^{(n)}(t) = -\mathcal{L}_0\left(\bar{\eta}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\bar{\alpha})}\right) - y_R^{(n)}(t) \end{array} \tag{25}$$

definiendo $e_i = e^{(i-1)}$, $i = 1, \ldots, n$ como las componentes del vector $e(t)$ obtenemos (ver proposición 1, sección III.3):

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 \\
\dot{e}_2 &= e_3 \\
&\vdots \\
\dot{e}_{n-1} &= e_n \\
\dot{e}_n &= -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i \\
\bar{e} &= e_1
\end{aligned}
\tag{26}
$$

o en forma compacta

$$
\begin{aligned}
\dot{e} &= Fe \\
\bar{e} &= e_1
\end{aligned}
\tag{27}
$$

donde:

$$
F = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
 & & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
-a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

y

$$
\mathcal{L}_0 \left(\psi_R(t) + e(t), u, \dot{u}, \ldots, u^{(\bar{\alpha})} \right) - y_R^{(n)}(t) = -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_R(t) &= \operatorname{col}\left(y_R(t), y_R^{(1)}(t), \ldots, y_R^{(n-1)}(t) \right) \\
e(t) &= \operatorname{col}\left(e_1(t), \ldots, e_n(t) \right)
\end{aligned}
$$

El punto de equilibrio asintótico del sistema en el error de seguimiento (27) es simplemente dado por $e(t) = 0$. De aquí que, bajo tal condición de equilibrio i.e. bajo seguimiento perfecto, el controlador dinámico resultante presenta la siguiente dinámica

$$
\mathcal{L}_0 \left(\psi_R(t), u, \dot{u}, \ldots, u^{(\bar{\alpha})} \right) = y_R^{(n)}(t) \tag{29}
$$

Suponemos que la solución u de (29) es definida para todo tiempo, y es acotada, de la misma manera la función $y_R(t)$ es acotada así como sus derivadas.

Para obtener el control de retroalimentación dinámica de la ecuación diferencial ordinaria implícita, es necesario resolverla en términos del controlador u sobre la base del vector de error no conocido $e(t)$ y el conocimiento del vector $\psi_R(t)$. Para resolver esta dificultad es necesario la implementación de un observador para reemplazar el error de seguimiento $e(t)$ por su estimado $\hat{e}(t)$.

Debe hacerse notar que la dinámica del controlador (29) tiene una interpretación en términos de un sistema inverso que toma como entradas la función de salida de referencia deseada $y_R(t)$ y un número finito de sus derivadas y se obtiene como función de salida el control de entrada escalar u.

Ahora, escribimos el sistema (27) como sigue:

$$\dot{e}(t) = Ee(t) + \varphi(e(t), y_R(t), y_R^{(1)}(t), \ldots, y_R^{(n)}(t), u(t), u^{(1)}(t), \ldots, u^{(\bar{\alpha})}(t)) \quad (30)$$

donde los elementos de la matriz E son dados por $E_{ij} = \delta_{i,j-1}$ y

$$\begin{aligned} &\varphi(e(t), y_R(t), y_R^{(1)}(t), \ldots, y_R^{(n)}(t), u(t), u^{(1)}(t), \ldots, u^{(\bar{\alpha})}(t)) \\ &= \mathrm{col}(0, \ldots, 0, (\mathcal{L}_0(\psi_R(t) + e(t), u, u^{(1)}(t), \ldots, u^{(\bar{\alpha})}(t)) - y_R^{(n)}(t))) \end{aligned} \quad (31)$$

entonces, la estimación del error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_R(t)$ es dada mediante el uso de un observador no lineal exponencial de la forma (ver lema 2, sección IV.2):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}(t) \;\; = \;\; & E\hat{e}(t) + \varphi(\hat{e}(t), y_R(t), y_R^{(1)}(t), \ldots, y_R^{(n)}(t), u(t), u^{(1)}(t), \ldots, u^{(\bar{\alpha})}(t)) - \\ & S_\theta^{-1} C^T (C\hat{e}(t) - e_1(t)) \end{aligned} \quad (32)$$

donde S_θ es solución de la ecuación

$$\theta S_\theta + E^T S_\theta + S_\theta E - C^T C = 0, \quad (33)$$

para $\theta > 0$.

Sea

$$\begin{aligned} \rho(u_{\hat{e}}, y_R(t), \hat{e}(t)) \;\; = \;\; & \mathcal{L}_0(\psi_R(t) + \hat{e}(t), u_{\hat{e}}, u_{\hat{e}}^{(1)}, \ldots, u_{\hat{e}}^{(\bar{\alpha})}) - y_R^{(n)}(t) + \\ + \;\; & \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} \hat{e}_i(t) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

con $u_{\hat{e}}$ la dinámica del controlador resultante obtenida a partir de

$$\rho(u_{\hat{e}}, y_R(t), \hat{e}(t)) = 0 \tag{35}$$

las dinámicas de $\hat{e}(t)$ y $\epsilon_0(t) = \hat{e}(t) - e(t)$, el estimado del error de seguimiento y el error de observación respectivamente, son dadas por:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{e}}(t) &= E\hat{e}(t) + \varphi(\hat{e}(t), y_R(t), y_R^{(1)}(t), \ldots, y_R^{(n)}(t), \\
&\quad u_{\hat{e}}(t), u_{\hat{e}}^{(1)}(t), \ldots, u_{\hat{e}}^{(\bar{\alpha})}(t)) - S_\theta^{-1}C^T(C\hat{e}(t) - e_1(t)) \qquad (36) \\
\dot{\epsilon}_0(t) &= (E - S_\theta^{-1}C^TC)\epsilon_0(t) + \Phi(\epsilon_0(t), \hat{e}(t))
\end{aligned}$$

las cuales podemos reescribir como:

$$\bar{S}: \begin{array}{rcl}
\dot{\hat{e}}(t) &=& F\hat{e}(t) - S_\theta^{-1}C^T(C\hat{e}(t) - e_1(t)) \\
\dot{\epsilon}_0(t) &=& (E - S_\theta^{-1}C^TC)\epsilon_0(t) + \Phi(\epsilon_0(t), \hat{e}(t))
\end{array} \tag{37}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Phi(\epsilon_0(t), \hat{e}(t)) &= \varphi(\hat{e}(t), y_R(t), y_R^{(1)}(t), \ldots, y_R^{(n)}(t), u_{\hat{e}}(t), u_{\hat{e}}^{(1)}(t), \ldots, u_{\hat{e}}^{(\bar{\alpha})}(t)) - \\
&\quad \varphi(e(t), y_R(t), y_R^{(1)}(t), \ldots, y_R^{(n)}(t), u_{\hat{e}}(t), u_{\hat{e}}^{(1)}(t), \ldots, u_{\hat{e}}^{(\bar{\alpha})}(t))
\end{aligned} \tag{38}$$

Consideremos las siguientes hipótesis:

H1) $\Phi(\epsilon_0(t), \hat{e}(t)) = \Phi(\epsilon_0(t))$ es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$.

H2) las señales $u_{\hat{e}}$ y $y_R(t)$ y sus derivadas respectivas hasta al menos n son acotadas.

Teorema 1. Sea $u_{\hat{e}}$ la retroalimentación de estado dinámica linealizante obtenida de la expresión (35) $\rho(u_{\hat{e}}, y_R(t), \hat{e}(t) = 0$. Suponga que las hipótesis H1 y H2 se satisfacen. Entonces el sistema en lazo cerrado Σ_{FCO} es localmente asintóticamente estable. De otra forma, el sistema dado por $\bar{S}$ es localmente asintóticamente estable.

Demostración. Sea el sistema $\bar{S}$ dado por

$$\bar{S}: \begin{array}{rcl} \dot{\hat{e}}(t) & = & F\hat{e}(t) - S_\theta^{-1}C^T(C\hat{e}(t) - e_1(t)) \\ \dot{\epsilon}_0(t) & = & (E - S_\theta^{-1}C^TC)\epsilon_0(t) + \Phi(\epsilon_0(t)) \end{array}$$

donde

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \dots & 01 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1\times n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considere la siguiente candidato a función de Lyapunov,

$$V(\hat{e}, \epsilon_0) = V_1(\hat{e}) + V_2(\epsilon_0) = \hat{e}^TP\hat{e} + \epsilon_0^TS_\theta\epsilon_0 \tag{39}$$

siendo P y S_θ matrices simétricas definidas positivas y P es tal que $F^TP + PF = -I$ con F estable y $(S_\theta)_{ij} = \dfrac{1}{\theta^{i+j-1}}\alpha_{ij}$, ($\alpha_{ij}$ matriz simétrica definida positiva) solución de la ecuación

$$\theta S_\theta + E^TS_\theta + S_\theta E - C^TC = 0.$$

Mostraremos que V es una función de Lyapunov para el sistema $\bar{S}$

i)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_2(\epsilon_0) &= \frac{d}{dt}(\epsilon_0^TS_\theta\epsilon_0) = \dot{\epsilon}_0^TS_\theta\epsilon_0 + \epsilon_0^TS_\theta\dot{\epsilon}_0 = \\ &= \epsilon_0^TE^TS_\theta\epsilon_0 - \epsilon_0^TC^TC\epsilon_0 + \Phi^T(\epsilon_0)S_\theta\epsilon_0 + \\ &+ \epsilon_0^TS_\theta(E - S_\theta^{-1}C^TC)\epsilon_0 + \epsilon_0^TS_\theta\Phi(\epsilon_0) = \\ &= \epsilon_0^T[E^TS_\theta + S_\theta E - C^TC]\epsilon_0 - \epsilon_0^TC^TC\epsilon_0 + \underbrace{2\epsilon_0^TS_\theta\Phi(\epsilon_0)}_{(*)} \leq \\ &\leq -\theta\epsilon_0^TS_\theta\epsilon_0 + 2\epsilon_0^TS_\theta\Phi(\epsilon_0) \qquad (\text{pues } \epsilon_0^TC^TC\epsilon_0 \geq 0) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\|\epsilon_0\|_{S_\theta}^2 \leq -\theta\|\epsilon_0\|_{S_\theta}^2 + 2\|\epsilon_0\|_{S_\theta}\|\Phi(\epsilon_0)\|_{S_\theta} \end{aligned}$$

justificación de (*)

$$\|\epsilon_0^T S_\theta \Phi(\epsilon_0)\| = \|\epsilon_0^T M M^T \Phi(\epsilon_0)\| = \|\tilde{\epsilon}_0^T \tilde{\Phi}(\epsilon_0)\|$$

donde

$$\tilde{\epsilon}_0^T = \epsilon_0^T M, \tilde{\Phi}(\epsilon_0) = M^T \Phi(\epsilon_0)$$

$$\|\tilde{\epsilon}_0^T\| = (\epsilon_0^T M M^T \epsilon_0)^{1/2} = (\epsilon_0^T S_\theta \epsilon_0)^{1/2} = \|\epsilon_0\|_{S_\theta}$$

entonces

$$\|\tilde{\epsilon}_0^T \tilde{\Phi}(\epsilon_0)\| \leq \|\tilde{\epsilon}_0^T\| \|\tilde{\Phi}(\epsilon_0)\| = \|\epsilon_0\|_{S_\theta} \|\Phi(\epsilon_0)\|_{S_\theta}$$

y como Φ es Lipschitz

$$\|\Phi(\epsilon_0)\|_{S_\theta} \leq \lambda_1 \|\epsilon_0\|_{S_\theta} \tag{39'}$$

(λ_1 es independiente de θ, ver justificación al final de la demostración). Continuando con la demostración

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\epsilon_0\|_{S_\theta}^2 &\leq -\theta\|\epsilon_0\|_{S_\theta}^2 + 2\lambda_1\|\epsilon_0\|_{S_\theta}^2 \\
\frac{d}{dt}\|\epsilon_0\|_{S_\theta} &\leq -\frac{\theta}{2}\|\epsilon_0\|_{S_\theta} + \lambda_1\|\epsilon_0\|_{S_\theta} \\
\frac{d}{dt}\|\epsilon_0\|_{S_\theta} &\leq -\|\epsilon_0\|_{S_\theta}\left[\frac{\theta}{2} - \lambda_1\right]
\end{aligned}$$

Escogemos θ tal que

$$\frac{\theta}{2} - \lambda_1 = \gamma_\theta > 0$$

con lo cual obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\|\epsilon_0\|_{S_\theta} \leq -\gamma_\theta\|\epsilon_0\|_{S_\theta}$$

$$\Rightarrow \|\epsilon_0\|_{S_\theta} \leq e^{-\gamma_\theta t}\|\epsilon_0(0)\|_{S_\theta} \tag{40}$$

ii) Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_1(\hat{e}) &= \frac{d}{dt}(\hat{e}^T P\hat{e}) \leq -\hat{e}^T\hat{e} - 2\hat{e}^T PS_\theta^{-1}C^T C\epsilon_0 \leq \\
&\leq -\alpha\hat{e}^T P\hat{e} - 2\hat{e}^T PS_\theta^{-1}C^T C\epsilon_0 = -\alpha V_1(\hat{e}) - 2\,\underbrace{\hat{e}^T PS_\theta^{-1}C^T C\epsilon_0}_{(**)}
\end{aligned}$$

(Para alguna constante $\alpha > 0$)

$$\frac{dV_1(\hat{e})}{dt} \leq -\alpha V_1(\hat{e}) + 2\bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0\|_{S_\theta}\|\hat{e}\|_p$$

Justificación de (**)

$$\|\hat{e}^T PS_\theta^{-1}C^T CS_\theta^{-1}S_\theta\epsilon_0\| \leq \bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0\|_{S_\theta}\|\hat{e}\|_p$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1(\hat{e})}{dt} &\leq -\alpha V_1(\hat{e}) + 2\bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0\|_{S_\theta}V_1^{1/2}(\hat{e}) \\
\frac{d\|\hat{e}\|_p}{dt} &\leq \frac{-\alpha}{2}\|\hat{e}\|_p + \bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0\|_{S_\theta} \\
\|\hat{e}\|_p &\leq \|\hat{e}(0)\|_p e^{-\alpha/2t} + \int_0^t \bar{\rho}_\theta e^{-\alpha/2(t-\tau)}\|\epsilon_0(\tau)\|_{S_\theta}d\tau \leq \\
&\leq \|\hat{e}(0)\|_p e^{-\alpha/2t} + \int_0^t \bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0(0)\|_{S_\theta}e^{-\gamma_\theta\tau}e^{-\alpha/2(t-\tau)}d\tau = \\
&= \|\hat{e}(0)\|_p e^{-\alpha/2t} + \bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0(0)\|_{S_\theta}e^{-\alpha/2t}\int_0^t e^{(-\gamma_\theta+\alpha/2)\tau}d\tau = \\
&= \|\hat{e}(0)\|_p e^{-\alpha/2t} + \bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0(0)\|_{S_\theta}e^{-\alpha/2t}\left\{\frac{1}{\alpha/2-\gamma_\theta}e^{(-\gamma_\theta+\frac{\alpha}{2})t}\right\}\Big|_0^t \\
\|\hat{e}\|_p &\leq \left[\|\hat{e}(0)\|_p + \frac{\bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0(0)\|_{S_\theta}}{\gamma_\theta-\alpha/2}\right]e^{-\alpha/2t} + \frac{\bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0(0)\|_{S_\theta}}{\alpha/2-\gamma_\theta}e^{-\gamma_\theta t}
\end{aligned}$$

$$\|\hat{e}\|_p \leq K_1 e^{-\alpha/2t} + K_2 e^{-\gamma_\theta t}$$

con

$$K_1 = \|\hat{e}(0)\|_p + \frac{\bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0(0)\|_{S_\theta}}{\gamma_\theta-\alpha/2}$$

$$K_2 = \frac{\bar{\rho}_\theta\|\epsilon_0(0)\|_{S_\theta}}{-\gamma_\theta+\alpha/2}$$

entonces
$$\|\hat{e}\|_p \leq (K_1 + K_2)e^{-\min\{\alpha/2,\gamma_\theta\}t}$$
escogemos $\gamma_\theta > \alpha/2$ i.e., $\theta > 2\lambda_1 + \alpha$, entonces:
$$\|\hat{e}\|_p \leq (K_1 + K_2)e^{-\alpha/2t} \tag{41}$$
finalmente de i) y ii) se tiene que el sistema $\bar{S}$ es localmente asintóticamente estable.

∎

Observación 5.1 El problema de seguimiento y estabilidad para una clase de sistemas no lineales es abordado en [MA, SUA].

En los siguientes resultados verificaremos que la constante de Lipschitz que aparece en la expresión (39') es independiente de θ.

Proposición 3. $\exists\beta > 0$ tal que $A_\theta - \beta I$ es definida positiva y A_θ es definida como:
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\theta^{2n-2} & \dots & \alpha_{1n}\theta^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}\theta^{n-1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$
Demostración. Dada A_θ como antes
$$\begin{aligned} A_\theta - \beta I &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\theta^{2n-2} - \beta & \dots & \alpha_{1n}\theta^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}\theta^{n-1} & \dots & \alpha_{nn} - \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha_{11} - \beta)\theta^{2n-2} & & \dots & \alpha_{1n}\theta^{n-1} \\ & (\alpha_{22} - \beta)\theta^{2n-4} & \dots & \\ & & \ddots & \\ \alpha_{n1}\theta^{n-1} & & \dots & \alpha_{nn} - \beta \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \beta(\theta^{2n-2} - 1) & & \dots & 0 \\ & \beta(\theta^{2n-4} - 1) & \dots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= A + B \end{aligned}$$

donde A es definida positiva (pues $[\alpha_{ij}]$ es una matriz definida positiva y por consiguiente $[\alpha_{ij}] - \beta$ es definida positiva donde β es un elemento de perturbación) y B es semidefinida positiva, y como $A+B$ es definida positiva, se concluye que $A_\theta - \beta I$ es definida positiva por lo tanto existe $1 > \beta > 0$ (como $\alpha_{11} = 1$, $0 < \beta < 1$, igualmente para θ, para $n = 2$, $\theta > 1$) tal que $A_\theta - \beta I$ es definida positiva.

∎

Proposición 4. Dada $S_\theta = \frac{1}{\theta^{2n-1}} A_\theta$ con A_θ simétrica definida positiva, A_θ como en la proposición 3, entonces $\|x\|^2 \leq \frac{\theta^{2n-1}}{\beta} \|x\|^2_{S_\theta}$, $\beta > 0$.

Demostración. Por la Proposición 3, $\exists \beta > 0$ tal que $A_\theta - \beta I$ es definida positiva, por lo tanto

$$\begin{aligned} &\langle (A_\theta - \beta I)x, x\rangle \geq 0 \ \ \forall x \\ \Rightarrow \ \ &\langle A_\theta x, x\rangle \geq \beta \langle x, x\rangle \\ \Rightarrow \ \ &\|x\|^2_{A_\theta} \geq \beta \|x\|^2 \\ \Rightarrow \ \ &\|x\|^2 \leq \tfrac{1}{\beta} \|x\|^2_{A_\theta} \ \ (\beta > 0) \end{aligned}$$

como

$$S_\theta = \frac{1}{\theta^{2n-1}} A_\theta \Rightarrow \|x\|^2_{S_\theta} = \frac{1}{\theta^{2n-1}} \|x\|^2_{A_\theta}$$

de aquí

$$\begin{aligned} &\|x\|^2_{A_\theta} = \theta^{2n-1} \|x\|^2_{S_\theta} \\ \Rightarrow &\|x\|^2 \leq \frac{1}{\beta} \theta^{2n-1} \|x\|^2_{S_\theta}, \ \ \beta > 0. \end{aligned}$$

∎

Teorema 2. Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz, $\Phi(0) = 0$, $\Phi = (0, \ldots, 0, \varphi(x))^T$ entonces existe $\bar{\lambda}$ independiente de θ tal que $\|\Phi(x)\|^2_{S_\theta} \leq \bar{\lambda} \|x\|^2_{S_\theta}, x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Como

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x)\|^2_{S_\theta} &= \frac{1}{\theta^{2n-1}}(0,\dots,0,\varphi(x))\begin{pmatrix} \theta^{2n-2}\alpha_{11} & \dots & \theta^{n-1}\alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \theta^{n-1}\alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\theta^{2n-1}}\alpha_{nn}\varphi^2(x)
\end{aligned}$$

y ya que Φ es Lipschitz entonces φ es Lipschitz i.e., $\exists k > 0$ tal que $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$.

Por lo tanto

$$\|\Phi(x)\|^2_{S_\theta} = \langle S_\theta\Phi(x), \Phi(x)\rangle = \frac{\alpha}{\theta^{2n-1}}\varphi^2(x) \leq \quad (\alpha = \alpha_{nn})$$

usando la proposición 4 y el hecho de que φ es Lipschitz

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x)\|^2_{S_\theta} &\leq \frac{\alpha k^2}{\theta^{2n-1}}\|x\|^2 \leq \frac{\alpha k^2}{\theta^{2n-1}}\frac{\theta^{2n-1}}{\beta}\|x\|^2_{S_\theta} \\
&\Rightarrow \|\Phi(x)\|^2_{S_\theta} \leq \bar{\lambda}\|x\|^2_{S_\theta}
\end{aligned}$$

donde $\bar{\lambda} = \dfrac{\alpha k^2}{\beta}$ es independiente de θ.

∎

V.4 Aplicación a un modelo de Reactor Químico

En esta sección aplicamos el teorema anteriormente dado y algunos resultados obtenidos en el capítulo II para resolver el problema de seguimiento y estabilización (local) para un modelo de reactor químico.

El siguiente sistema bidimensional una entrada-una salida representa un modelo de reactor químico

$$\Sigma_{RQ}: \begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(Ce - x_1) - rx_1 \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - ux_2 \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{42}$$

con coeficientes en el campo de números reales $\mathbb{R}$ (campo diferencial ordinario).

Empleando la proposición 1 dada en la sección III.3 afirmamos que la siguiente transformación de coordenadas, en los estados y en las entradas nos permite obtener una FCOG para nuestro sistema.

Eligiendo el elemento primitivo diferencial como $z_1 = x_2$ las siguientes relaciones se siguen:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 = y \\ z_2 &= rx_1 - ux_2 = \dot{y} \end{aligned} \tag{43}$$

siendo el conjunto $\{y, \dot{y}\}$ una base de trascendencia finita de $G/K\langle u\rangle$ la cual representa a la dinámica dada por el sistema Σ_{RQ} y cuyo grado de trascendencia es $d^0 tr\ G/K\langle u\rangle = 2$.

De modo que, la correspondiente inversa de (43) es:

$$\begin{aligned} x_2 &= z_1 \\ x_1 &= \frac{z_2 + uz_1}{r}, \quad r \neq 0 \end{aligned}$$

y la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas de estado (43) es dada por:

$$J = \frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r & -u \end{bmatrix}$$

$$det\ J = |J| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| = r \neq 0, \quad r \in \mathbb{R}$$

la cual es claramente no singular, si r es diferente de cero.

La FCOG para el sistema Σ_{RQ} es entonces obtenida

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= rC_e - z_1[u^2 + ur + \dot{u}] - z_2(2u + r) \end{aligned} \tag{44}$$

Si la trayectoria de referencia deseada $y_R(t)$ es dada por

$$y_R(t) = \cos(2t) + 2$$

de la expresión anterior calculamos las correspondientes derivadas requeridas $y_R^{(1)}$, $y_R^{(2)}(t)$, constituyendo el vector $\psi_R(t)$ definido en la sección V.3 el cual será utilizado mas tarde en la dinámica del controlador basado en el observador.

Definiendo el error de seguimiento como $e(t) = y(t) - y_R(t) = x_2 - y_R(t)$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales basado en los resultados de la sección V.3 los cuales describen la dinámica del error de seguimiento esto es:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 \\
\dot{e}_2 &= e_1[-\dot{u} - u^2 - ur] + e_2[-u+1] + ruC + \\
&\quad + y_R[-\dot{u} - u^2 - ur] + \dot{y}_R[-u+1] - \ddot{y}_R \\
e &= e_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{e} &= Ee + \varphi(e(t), y_R, \dot{y}_R, \ddot{y}_R, u, \dot{u}) \\ e &= e_1 \end{aligned} \tag{45}$$

donde:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e(t), y_R, \dot{y}_R, \ddot{y}_R, u, \dot{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e_1(-\dot{u} - u^2 - ur) + ruC \\ +y_R(-\dot{u} - u^2 - ur) + \\ \dot{y}_R(-u+1) - \ddot{y}_R + (-u+1)e_2 \end{pmatrix}$$

el sistema (45) es observable, entonces proponemos un sistema observador no lineal exponencial como en la sección IV.2 para la estimación del error de seguimiento el cual será implementado en la dinámica del controlador basado en el observador.

$$\Sigma_{ES}: \begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= E\hat{e} + \varphi(\hat{e}, u, \dot{u}, y_R, \dot{y}_R, \ddot{y}_R) + S_\theta^{-1}C^T(C\hat{e} - e_1) \\ 0 &= \theta S_\theta + E^T S_\theta + S_\theta E - C^T C \end{aligned} \tag{46}$$

donde:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\theta > 0$ y $S_\theta \in Gl(n, K\langle u \rangle)$ (grupo lineal de matrices simétricas definidas positivas) el sistema dado por Σ_{ES} es un observador exponencial.

La linealización exacta de la dinámica del error del seguimiento puede ahora realizarse igualando la última ecuación diferencial en (45) a una expresión lineal invariante en el tiempo en las coordenadas del error (polinomio estable).

Esto es equivalente a tener la dinámica del error en lazo cerrado como $\ddot{e}_1 = \dot{e}_2 = v$ (doble integrador) con $v = -a_1 e_1 - a_2 e_2$.

Por lo tanto la respuesta del error asintóticamente estable es facilmente diseñada mediante una estrategia de colocación de polos elemental en un sistema controlable de segundo orden expresado en la Forma Canónica de Brunovsky [BR].

Uno puede escribir la ecuación del regulador dinámico no lineal variante en el tiempo como:

$$\dot{u} = \frac{a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + (-u^2 - ru)[\hat{e}_1 + y_R] + 2u + [-u+1][\hat{e}_2 + \dot{y}_R] - \ddot{y}_R}{\hat{e}_1 + y_R} \tag{47}$$

de donde por el Teorema de la sección V.3 el controlador dinámico (47) estabiliza el sistema en lazo cerrado dado por Σ_{RQ} con el controlador el cual es solución de la ecuación diferencial en u dada en (47).

V.5 Simulación y Resultados

Las simulaciones fueron realizadas con los siguientes valores de los parámetros: $r = 1$, $c = 2$.

La figura 5.a muestra la trayectoria $(\cos 2t + 2)$ de referencia deseada $y_R(t)$ y la respuesta de x_2 (concentración del producto) de la dinámica controlada. Las condiciones iniciales dadas para x_2 y y_R son: $x_2 = 0$ y $y_R = 3$

La figura 5.b describe la trayectoria de la derivada de la señal de referencia $y_R(t)$ y la respuesta resultante x_1 (concentración del reactante) de la dinámica controlada. El error de seguimiento converge asintóticamente a cero. Las condiciones iniciales dadas para x_1 y $\dot{y}_R$ son dadas por: $x_1 = 3$ y $\dot{y}_R = 0$.

La figura 5.c y 5.d representan la dinámica generada por el error de seguimiento y la estimación del error dado por el sistema observador no lineal Σ_{ES}. Las condiciones iniciales para e_1, $\hat{e}_1$, e_2 y $\hat{e}_2$ son dadas por:$e_1 = 0$, $\hat{e}_1 = 3$, $e_2 = 0$ y $\hat{e}_2 = -3$.

Observamos que el sistema obviamente es estabilizado y el error de seguimiento converge a cero. Y finalmente en la figura 5.e se muestra la dinámica generada por el observador-controlador, con condición inicial $u = 0$.

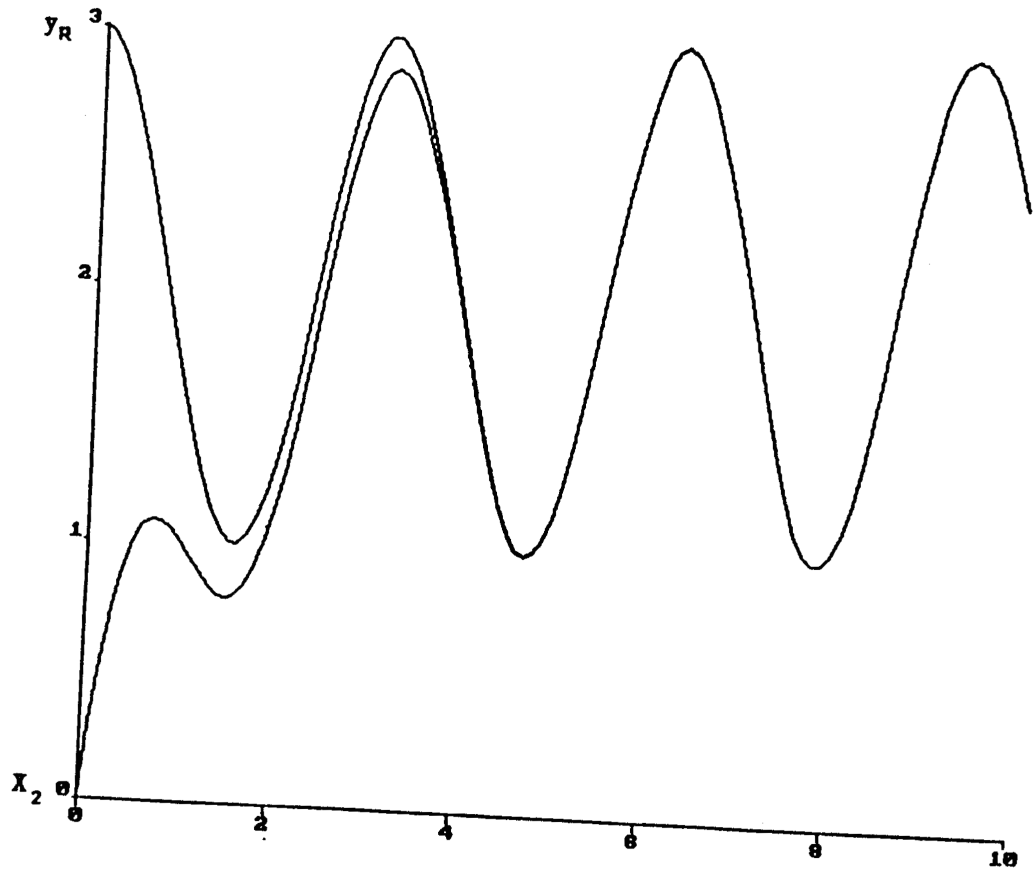

Fig. 5a

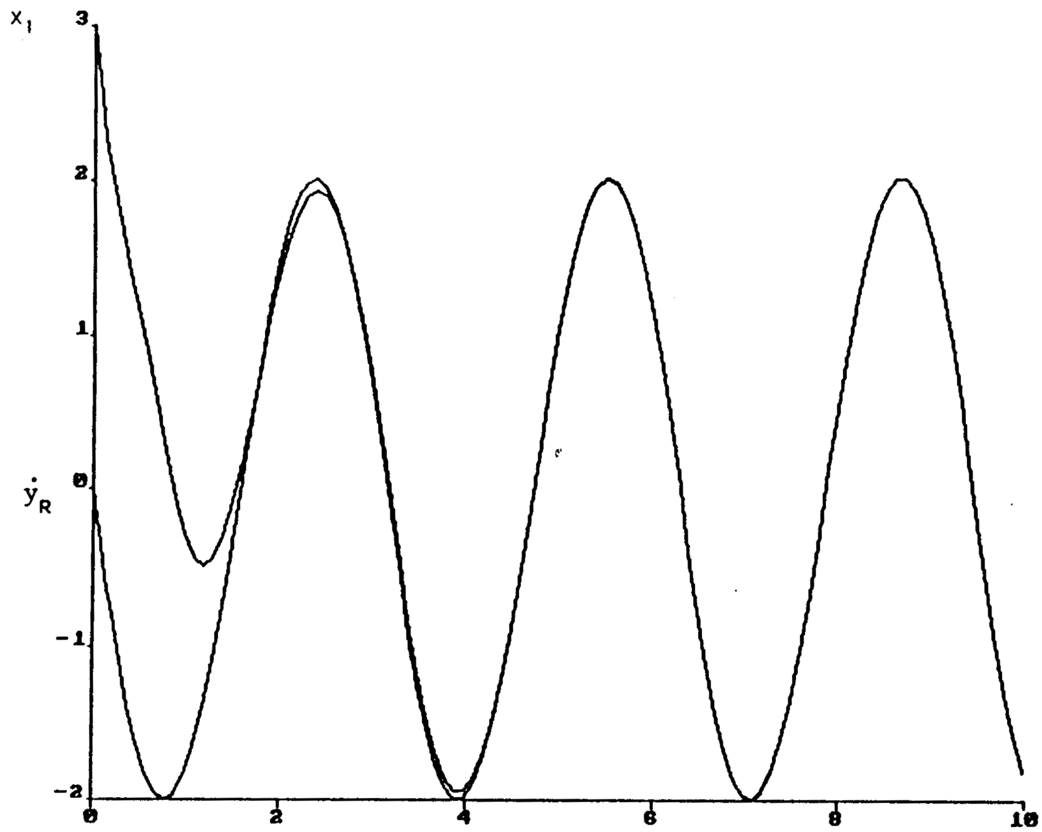

Fig. 5b

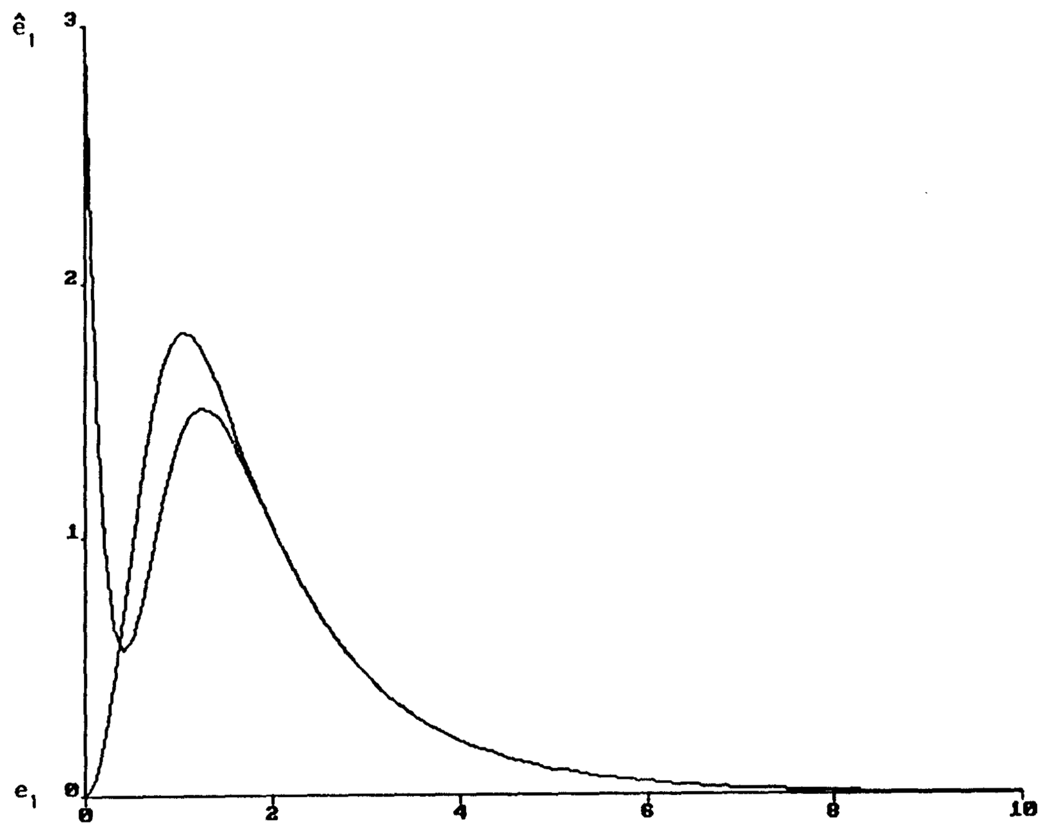

Fig. 5c

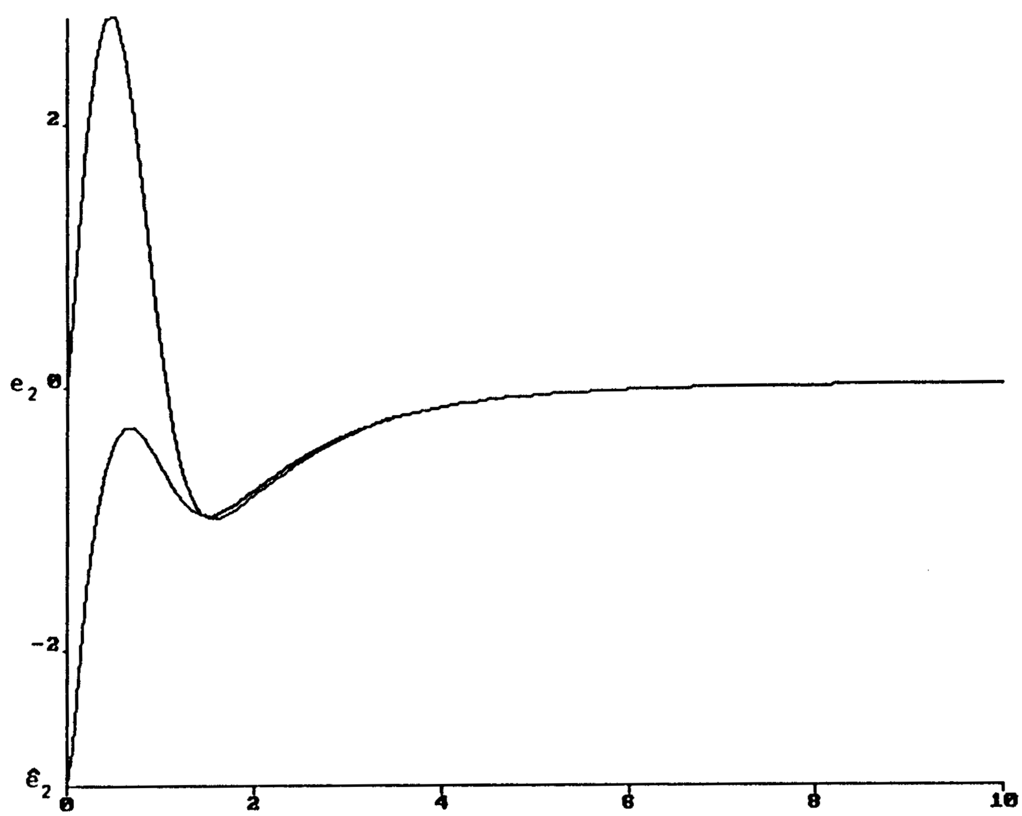

Fig. 5d

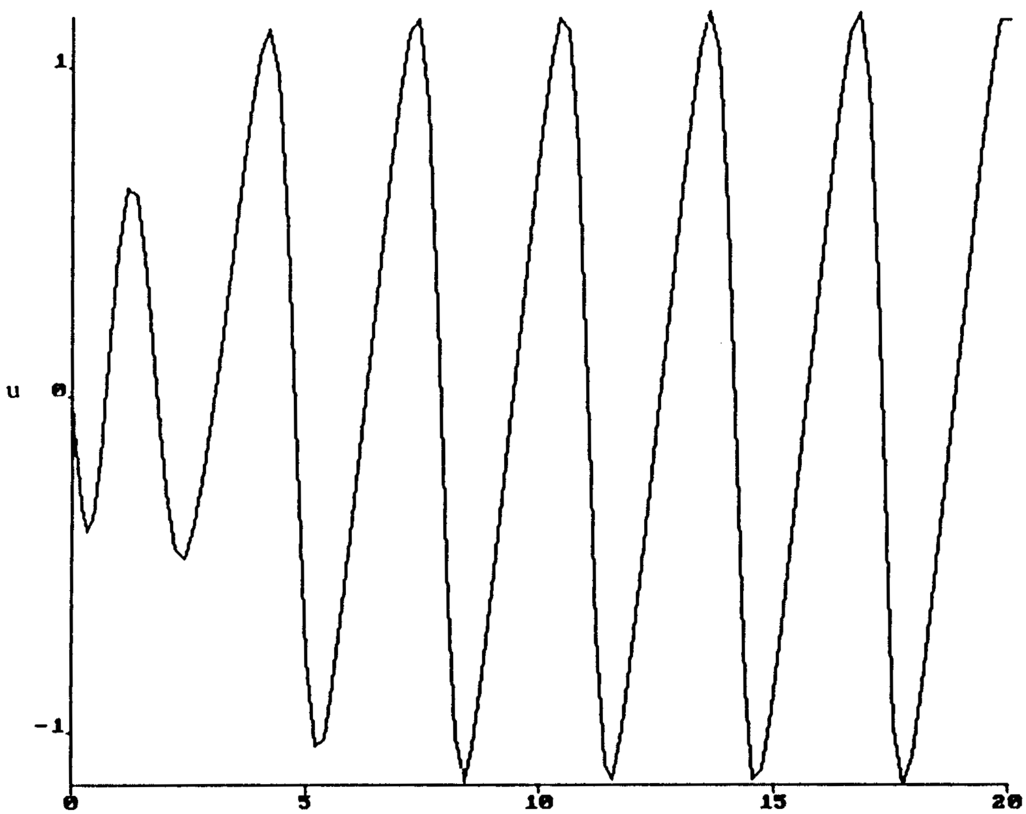

Fig. 5e

Capítulo VI

Extensión de resultados al Caso no lineal

VI.1. Introducción

Existen dificultades de extensión de los resultados de observadores al caso no lineal. Para obtener un observador es necesario que la dinámica del error de observación sea estable. El caso donde la dinámica del error es lineal es particularmente simple ya que esta condición implica la estabilidad exponencial y luego se resume todo a un simple cálculo de valores propios.

En general para un sistema no lineal, salvo para casos muy particulares, el error de estimación es no lineal, y se tiene que para sistemas no lineales el estudio de la estabilidad es extremadamente complicado teniendo en cuenta el hecho de que ésta depende continuamente de parámetros del sistema y del observador.

Consideramos el error de estimación formado a partir del sistema Σ_{SNL} dado por:

$$\Sigma_{SNL}: \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& f(x,u) \\ y &=& h(x,u) \end{array} \tag{48}$$

y el observador definido por:

$$\Sigma_{O}: \begin{array}{rcl} \dot{\xi} &=& \varphi(\xi,u,y) \\ \hat{x} &=& \xi \\ \xi(t_0) &=& \xi_0 \end{array} \tag{49}$$

esto es:

$$\begin{array}{rcl} \dot{e} &=& \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &=& f(x,u) - \varphi(\xi,u,y) \end{array}$$

Supongamos que queremos una aproximación de primer orden alrededor de $e = 0$.

En la vecindad de $\|e\| = 0$

$$\begin{array}{rcl} f(x,u) &=& f(\hat{x},u) + \dfrac{\partial}{\partial x} f(\hat{x},u)e + 0(\|e\|) \\ &=& f(\xi,u) + \dfrac{\partial}{\partial x} f(\xi,u)e + 0(\|e\|) \end{array}$$

entonces
$$\begin{aligned}
\dot{e} &= f(x,u) - \varphi(\xi,u,y) \\
&= f(\xi,u) + \frac{\partial}{\partial x} f(\xi,u)e + 0(\|e\|) - \varphi(\xi,u,y)
\end{aligned}$$

Sea
$$\begin{aligned}
A(\xi,u,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(\xi,u) \\
D(\xi,u,y) &= f(\xi,u) - \varphi(\xi,u,y)
\end{aligned}$$

en la vecindad de $\|e\| = 0$, la dinámica del error se puede escribir como:

$$\dot{e} = A(\xi,u,y)e + D(\xi,u,y) + 0(\|e\|) \tag{50}$$

Se pueden plantear algunas situaciones.

1) Caso en el que $A(\xi,u,y)$ es una matriz constante y donde $D(\xi,u,y)$ es pequeño en relación a $\|e\|$.

   La dinámica del error es entonces lineal (o casi lineal) y la estabilidad del sistema es entonces asegurada por una elección adecuada de valores propios de la matriz $A(\xi,u,y)$.

2) Caso donde $A(\xi,u,y)$ varía lentamente.

   Entonces bajo ciertas hipótesis existe aun estabilidad, pero esto contradice en alguna forma la definición de lo que es un observador. Su dinámica debe en efecto variar, pero más rapidamente que la dinámica del sistema Σ_{SNL} a fin de poder corregir los errores de estimación.

VI.2 Síntesis de un Observador para una dinámica no lineal

Consideremos la siguiente clase de sistemas no lineales (CSN) dada por:

$$\Sigma_{NL} : \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& f(x,u) \\ y &=& h(x,u) \end{array} \tag{51}$$

donde la entrada $u = (u_1, \ldots, u_m)$ esta en $\mathbb{R}^m$, el estado $x = (x_1 \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y como función de salida medida $y = h(x,u)$ en $\mathbb{R}$.

Supongamos que el sistema es observable (como en la definición dada en la Sección II.2).

Nos planteamos la siguiente pregunta

¿Es posible sintetizar un observador exponencial para el sistema Σ_{NL}?

La respuesta es afirmativa y es resuelta en la última sección.

Es bien conocida la noción del elemento primitivo para una extensión algebraica finitamente generada no diferencial $G/K\langle u\rangle$. (ver definición Sección I.4). El análogo diferencial del teorema del elemento primitivo [FL1] afirma que existe un elemento y y un entero n positivo tal que $y^{(n)}$ es algebraicamente dependiente sobre $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$, i.e.:

$$y^{(n)} = -\mathcal{L}_0\left(y, \ldots, y^{(n-1)}u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}\right)$$

Afirmamos la existencia de otro conjunto de variables de estado $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ tal que en estas variables las ecuaciones diferenciales formadas por este conjunto toman la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada; dicha forma tiene la representación obtenida en la sección III.2.

Dado $\bar{\eta}_i = y^{(i-1)}$, $1 \leq i \leq n$ entonces podemos dar la siguiente representación en la FCOG:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\bar{\eta}}_i & = & \bar{\eta}_{i+1} \;\; 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\bar{\eta}}_n & = & -\mathcal{L}_0(\bar{\eta}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\gamma)}) \\ y & = & \bar{\eta}_1. \qquad \text{Para algún } \gamma > 0. \end{array} \tag{52}$$

La transformación de coordenadas de estado T_u de x a ξ emplea las variables de entrada y un número finito de sus derivadas.

$$\xi = T_u(x) \tag{53}$$

Esta transformación de coordenadas T_u es generada por el elemento primitivo diferencial el cual puede ser elegido como se menciona en el siguiente resultado.

La siguiente proposición afirma que para una elección apropiada del elemento primitivo diferencial es posible obtener una FCOG trasladada con inyección de la salida.

Proposición 5. Sea la CSN dada por Σ_{NL}. Si el elemento primitivo diferencial es:

$$y = \sum_i^n \alpha_i x_i + \sum_j^m \beta_j u_j \qquad \alpha_i, \beta_j \in K\langle u\rangle$$

Entonces la CSN es transformable a la siguiente FCOG trasladada con inyección de la salida dada por:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_{TR}: \; \dot{\bar{\eta}} & = & A\bar{\eta} + \Psi(\bar{\eta}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) + \Phi(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}, y) \\ y & = & C\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 \end{array} \tag{54}$$

donde $\Psi(\bar{\eta}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)})$ y $\Phi(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}, y)$ son vectores no lineales y el segundo depende de la función de salida (inyección de la salida). Además A es la matriz descrita por $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\quad A_{ij} = \delta_{i,j-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(\bar{\eta}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi(\bar{\eta}, u, \ldots, u^{(\gamma)}) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y) \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea el conjunto $\{\xi, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n-1)}\}$ una base de trascendencia finita de la dinámica $G/K\langle u\rangle$ con salida $y = h(x, u)$ la cual representa al sistema Σ_{NL}, donde $(\xi, \dot{\xi}, \ldots, \xi^{(n-1)})$ es un estado generalizado de dimensión minimal y la cardinalidad del conjunto es "n"; en otras palabras el grado de trascendencia de $G/K\langle u\rangle$ denotado por $d^0 tr\ G/K\langle u\rangle$ es igual a "n".

Sea $\xi^{(i-1)} = y^{(i-1)}$, $1 \leq i \leq n$, donde $n \geq 0$ es el mínimo entero tal que $y^{(n)}$ es $K\langle u\rangle$ -algebraicamente dependiente sobre $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, \ldots,$ Redefiniendo

$$\bar{\eta}_i = \xi^{(i-1)}, \;\; 1 \leq i \leq n \;\text{ se tiene:}$$

$$
\begin{array}{lcl}
\dot{\bar{\eta}}_1 & = & \bar{\eta}_2 \\
\dot{\bar{\eta}}_2 & = & \bar{\eta}_3 \\
\vdots & & \\
\dot{\bar{\eta}}_{n-1} & = & \bar{\eta}_n \\
\dot{\bar{\eta}}_n & = & \psi(\bar{\eta}, u, \ldots, u^{(\gamma)}) + \varphi(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y)
\end{array}
$$

el cual puede escribirse como en Σ_{TR} con:

$$
\begin{array}{rcl}
\Phi(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}, y) & = & (0\,0\,\ldots\,0\,\varphi(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y))^T \\
\Psi(\bar{\eta}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) & = & (0\,0\,\ldots\,0\,\psi(\bar{\eta}, u, \ldots, u^{(\gamma)}))^T
\end{array}
$$

lo cual completa la demostración.

∎

Observación 6.1 Podemos llevar el sistema Σ_{NL} a una FCOG trasladada por medio de la relación

$$\bar{\eta} = T_u(x) \qquad (54')$$

∎

VI.2.1 Síntesis del Observador

Describimos ahora como un observador puede ser de ayuda para la estimación del estado de una clase de sistemas no lineales.

Supondremos que la transformación T_u es no singular en el sentido de que las componentes de T_u son algebraicamente independientes y u es una entrada no singular (BE).

Consideremos las siguientes hipótesis:

A1) $\Psi_D(\bar{\epsilon}_0)$ es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$

donde:

$$\Psi_D(\bar{\epsilon}_0) = \Psi(\hat{\bar{\eta}} + \bar{\epsilon}_0, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) - \Psi(\hat{\bar{\eta}}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \qquad (55)$$

A2) Las señales u y sus derivadas son acotadas (al menos hasta la n-ésima derivada).

Ahora tenemos el siguiente resultado importante.

Teorema 3. Considere el sistema observable una salida dado por Σ_{TR} el cual satisface las condiciones A1 y A2, entonces el sistema

$$\begin{aligned} \Sigma_{OB}: \dot{\hat{\bar{\eta}}} &= A\hat{\bar{\eta}} + \Psi(\bar{\eta}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) + \Phi(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}, y) - \\ & \quad -S_\theta^{-1}C^T(C\hat{\bar{\eta}} - \bar{\eta}_1) \\ & \quad \theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A = C^T C \end{aligned} \tag{56}$$

es un observador exponencial para el sistema Σ_{TR} donde $\theta \in \mathbb{R}^+$ y S_θ es una matriz simétrica definida positiva. Además el error de observación $\bar{\epsilon}_0 = \hat{\bar{\eta}} - \bar{\eta}$ converge exponencialmente a cero cuando t tiende a $+\infty$.

Demostración. Sea $\bar{\epsilon}_0 = \hat{\bar{\eta}} - \bar{\eta}$ el error de observación cuya dinámica es descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}}_0 &= (A - S_\theta^{-1}C^T C)\bar{\epsilon}_0 + \Big\{\Psi(\hat{\bar{\eta}} - \bar{\epsilon}_0, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \\ & \quad -\Psi(\hat{\bar{\eta}}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)})\Big\} \\ \dot{\bar{\epsilon}}_0 &= (A - S_\theta^{-1}C^T C)\bar{\epsilon}_0 + \Psi_D(\bar{\epsilon}_0) \end{aligned} \tag{57}$$

Considere la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\bar{\epsilon}_0) = \bar{\epsilon}_0^T S_\theta \bar{\epsilon}_0$$

entonces tomando la derivada con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V}(\bar{\epsilon}_0) = 2\bar{\epsilon}_0^T S_\theta A \bar{\epsilon}_0 - 2(C\bar{\epsilon}_0)^2 + 2\bar{\epsilon}_0^T S_\theta \Psi_D(\bar{\epsilon}_0)$$

ya que S_θ satisface $-\theta S_\theta - A^T S_\theta - S_\theta A + C^T C = 0$ entonces las siguientes desigualdades se cumplen

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\epsilon}_0) &= -\theta V(\bar{\epsilon}_0) - (C\bar{\epsilon}_0)^2 + 2\bar{\epsilon}_0^T S_\theta \Psi_D(\bar{\epsilon}_0) \leq \\ &\leq -\theta V(\bar{\epsilon}_0) + 2\bar{\epsilon}_0^T S_\theta \Psi_D(\bar{\epsilon}_0) \end{aligned}$$

usando la desigualdad de Schwarz obtenemos

$$\dot{V}(\bar{\epsilon}_0) \leq -\theta V(\bar{\epsilon}_0) + 2\|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta} \|\Psi_D(\bar{\epsilon}_0)\|_{S_\theta}$$

como Ψ_D es Lipschitz, y por la forma particular de ψ_D podemos aplicar el teorema 2, esto es:

$$\|\Psi_D(\bar{\epsilon}_0)\|_{S_\theta} \leq \mu \|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta}$$

con μ independiente de θ, entonces

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{\epsilon}_0) &= \frac{d}{dt}(\|\bar{\epsilon}_0\|^2_{S_\theta}) \leq -\theta\|\bar{\epsilon}_0\|^2_{S_\theta} + 2\mu\|\bar{\epsilon}_0\|^2_{S_\theta} \\
& \frac{d}{dt}(\|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta}) \leq -\frac{\theta}{2}\|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta} + \mu\|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta} \\
& \frac{d}{dt}(\|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta}) \leq -\|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta}\left[\frac{\theta}{2} - \mu\right]
\end{aligned}$$

Elegimos θ tal que

$$\frac{\theta}{2} - \mu = \mu_\theta > 0,$$

con lo cual obtnemos

$$\frac{d}{dt}(\|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta}) \leq -\mu_\theta\|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta}$$

$$\Rightarrow \|\bar{\epsilon}_0\|_{S_\theta} \leq -e^{-\mu_\theta t}\|\bar{\epsilon}_0(0)\|_{S_\theta} \tag{58}$$

lo cual finaliza la demostración.

∎

VI. 3. Aplicación a un modelo no lineal

En esta sección aplicamos el observador propuesto al siguiente sistema no lineal una entrada-una salida el cual representa un modelo no lineal con coeficientes en el campo de los números reales $\mathbb{R}$ el cual es considerado un campo diferencial ordinario (constante)

$$\Sigma_{NL1} \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& ux_2 \\ \dot{x}_2 &=& ux_1x_2 + ux_1, \quad u \neq 0 \\ y &=& x_1 \end{array} \tag{59}$$

Si u y $y = x_1$ son medidas entonces se verifican dos polinomios diferenciales algebraicos sobre $K\langle u, y\rangle$ esto es:

$$x_1 - y = 0\;; \qquad \dot{y} - ux_2 = 0$$

a partir del elemento primitivo diferencial $\bar{\eta}_1 = x_1$ las siguientes relaciones se satisfacen

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= x_1 \\ \bar{\eta}_2 &= ux_2 \end{aligned}$$

lo cual transforma el sistema Σ_{NL1} en la FCOG con inyección de la salida

$$\Sigma_{NL2}: \begin{aligned} \dot{\bar{\eta}} &= A\bar{\eta} + \Psi(\bar{\eta}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) + \Phi(u, u^{(1)}, \ldots, y) \\ y &= C\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 \end{aligned} \tag{60}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Psi(\bar{\eta}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{u}}{u}\bar{\eta}_2 + u\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi(u, u^{(1)}, \ldots, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ u^2 y \end{pmatrix}$$

Note que $\Phi(u, u^{(1)}, \ldots, y)$ y $\Psi(\bar{\eta}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)})$ son vectores no lineales.

Por el teorema anterior es posible construir un observador exponencial para el sistema Σ_{NL2} de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\bar{\eta}}}_1 &= \hat{\bar{\eta}}_2 + 2\theta(\hat{\bar{\eta}}_1 - \bar{\eta}_1) \\ \dot{\hat{\bar{\eta}}}_2 &= \frac{\dot{u}}{u}\hat{\bar{\eta}}_2 + u\hat{\bar{\eta}}_2\hat{\bar{\eta}}_1 + u^2\bar{\eta}_1 + \theta^2(\hat{\bar{\eta}}_1 - \bar{\eta}_1) \\ \hat{x}_1 &= \hat{\bar{\eta}}_1 \\ \hat{x}_2 &= \frac{\hat{\bar{\eta}}_2}{u}, u \neq 0 \end{aligned}$$

Observación 6.2 La entrada $u = 0$ es una entrada singular para el sistema Σ_{NL1} entonces cuando esta entrada es aplicada al sistema, es claro que el observador no trabaja (más aún el sistema es inobservable).

VI.4 Simulación y Resultados

El observador propuesto ha sido aplicado a un modelo no lineal de la forma dada por Σ_{NL1}. Los resultados de simulación pueden mostrar que los estimados convergen a los estados reales u originales del sistema Σ_{NL1} (ver figuras 6a y 6b), con las siguientes condiciones iniciales para $x_1, \hat{x}_1, x_2$ y $\hat{x}_2$: $x_1 = 2$, $\hat{x}_1 = 1$, $x_2 = 1$ y $\hat{x}_2 = 2$.

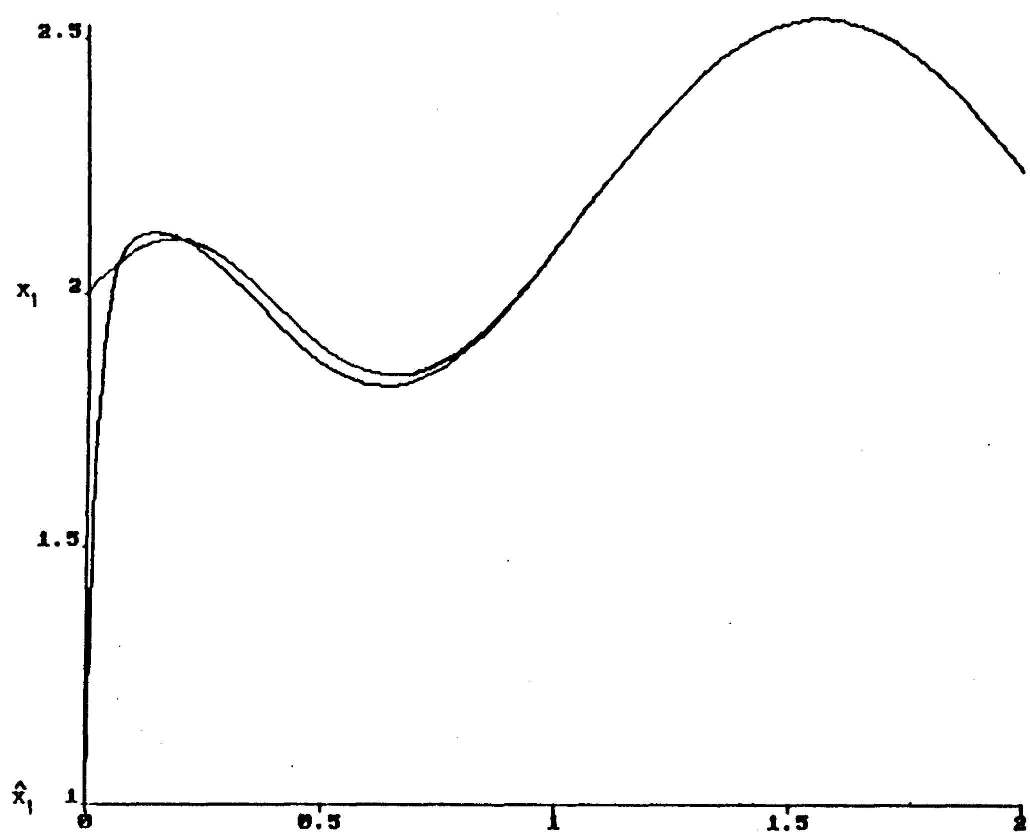

Fig. 6a

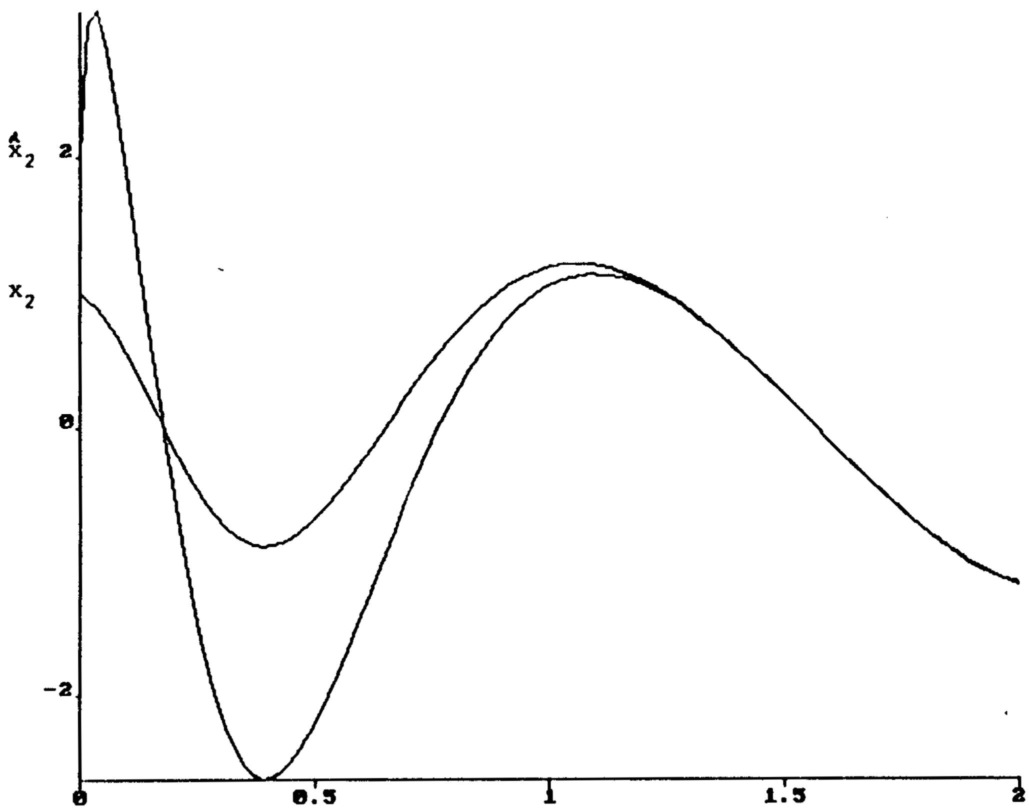

Fig. 6b

Conclusión

En el presente trabajo se ha abordado el problema de la síntesis de observadores y algoritmos de control para una clase de sistemas bilineales. Estos resultados han sido extendidos a una clase más amplia de sisitemas no lineales, utilizando una aproximación diferencial algebraica. Se hace énfasis en la dificultad que existe en dar una teoría general de la síntesis de observadores; esto es debido a la presencia de entradas singulares, entradas que hacen que el sistema sea no observable.

Hemos propuesto la estructura de dos observadores cuyas ganancias son: para el primero, variantes en el tiempo (dependientes de u y sus derivadas) y un segundo observador cuyas ganancias se encuentran en un grupo lineal de matrices simétricas definidas positivas con entradas en un campo diferencial $K\langle u\rangle$.

Hemos tratado una clase de sistemas no lineales, y muy particularmente una clase de sistemas bilineales considerados observables (desde el punto de vista algebro diferencial dado por Diop y Fliess) [DI4, FL] que pueden ser transformados en otros sistemas no lineales observables, para los cuales es posible construir un observador. La transformación es dada gracias a la existencia del elemento primitivo diferencial, el cual es mostrado explícitamente. La transformación de coordenadas permite en general llevar a todo sistema bilineal observable a una Forma Canónica de Observabilidad Generalizada.

Se ha ideado una ley de control mediante el uso de estos observadores logrando resolver el problema de seguimiento en la salida y estabilización (local) utilizando una aproximación diferencial algebraica.

Aún existe mucho trabajo por hacer en lo que concierne al tratamiento de singularidades, y se requiere trabajar algunos otros métodos algebraicos, para llegar a establecer formas canónicas de observabilidad generalizadas (por ejemplo utilizando el concepto de comportamiento externo) [MA, DE4], [DI1], [DI5], [DI6].

Bibliografía

[ACK] ACKERMANN J., *Abtastreyelung*, Vol 1, New York Springer-Verlag, 1983.

[ALV, SUA, SA] ALVAREZ,J., SUÁREZ,R., SÁNCHEZ A., "*Semiglobal Nonlinear Control Based on Complete input-output Linearization and its application to the start-up of a Continuous polymerization Reactor, Chemical Engineering Science*", Vol. 49, No. 21 pp 3617-3630, 1994.

[AT, MAC] ATIYAH, MACDONALD, "*Introduction to conmutative algebra*", Adison Wesley publishing Company, 1969.

[BA1] BARTOSIEWICZ, Z., "*Rational Systems and Observation fields*", Syst. Contr. Letters, Vol. 9, pp 379-386, 1987.

[BA2] BARTOSIEWICZ, Z., "*Minimal polinomial realizations*", Mathematical Control Signals Systems, I, pp 227-237, 1988.

[BE, ZE] BESTLE D., ZEITZ M., "*Canonical Form Design for nonlinear time variable systems*", International Journal Control 38 pp 419-431, 1981.

[BO, HM] BORNARD G., HAMMOURI, "*A high gain for a class of nonlinear systems under locally regular inputs*", IEEE Conf. on Dec. and Control CDC Brighton G.B., 1991.

[BO, CO, CE] BORNARD G., COUENNE N., CELLE, F., "*Regularly persistent observers for bilinear systems*", Proceedings of the 29 International Conference on nonlinear Systems. New trends in nonlinear system theory. Vol 122, Springer Verlag, 1988.

[BOU] BOURBAKI, N. *Èléments de Mathématique, Algèbre Commutative*, Masson, Paris, 1985.

[BR] BRUNOVSKY P., "*A Classification of linear Controllable systems*", Kybernetika 6 pp 176-188, 1970.

[BRO] BROCKETT R.W. "*Control Theory and analytical mechanics*", in Geometric Contr. Theory C. Martin and R. Hermann, Eds. Brookline MA: Math. Sci. Press, pp 1-46, 1977.

[CE, CON] CEBUHAR, W.A., COSTANZA, V., "*Nonlinear control of CSTR's*", Chem. Engng. Scie., 39(12) pp 1715-1720, 1984.

[CH, LE, MAR] CHARLET, B., LEVINE, J., MARINO, R. "*On dynamic feedback linearization*", Syst. Cont. Lett., Vol 13, pp 143-151, 1989.

[DI1] DIOP, S., "*On Universal Observability*", IEEE, CDC Tucson Arizona, pp 3669-3672, 1992.

[DI2] DIOP, S., "*Closedness of morphisms of differential algebraic sets*". Application to system theory. Forum Math. (por aparecer).

[DI3, FL] DIOP, S., FLIESS, M., "*On nonlinear Observability*", Proceedings of the first European Control Conference. C. Commault et al., Grenoble, Paris: Hermès pp 152-157, 1991.

[DI4, FL] DIOP, S., FLIESS, M., "*Nonlinear Observability, identifiability, and persistent trajectories*", IEEE CDC Bringhton England pp 714-719, 1991.

[DI5] DIOP, S., "*Elimination in control theory*", Math. Control Signals Systems, 4, pp 17-32, 1991.

[DI6] DIOP, S., "*Théorie de l'Élimination et Principe du Modèle Interne*", Thesis Université Paris-Sud, Orsay, 1989.

[DI7] DIOP, S., "*Rational system equivalence, and generalized realization theory*", 2nd. IFAC-Symposium NOLCOS'92, Pergamon Press Oxford, pp 153-158, 1993.

[FL1] FLIESS, M. "*Generalized Controller Canonical Forms for linear and nonlinear Dynamics*", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35 No. 9, pp 994-1001, 1990.

[FL2] FLIESS, M. "*Quelques Remarques sur les observateurs non lineaires*", Proc. Colloque Gretsi Trait. Signal Images, Nice pp 169-172, 1987.

[FL3] FLIESS, M., "*Nonlinear Control Theory and differential Algebra*", in Modelling and Adaptive Control Ch. I. Byrnes, A. Kurzhanski, Eds.

(Lecture Notes Control Inform. Sci.), Vol 105. New York: Springer Verlag pp 134-135, 1988.

[FL4] FLIESS, M., "*Généralisation non linéaire de la forme canonique de commande et linéarisation par bouclage*", C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. I-308 pp 377-379, 1989.

[FL5] FLIESS, M. "*Automatique et Corps différentiels*", Forum Math., Vol 1, pp 227-238, 1989.

[FUN] FUNAHASHI, Y., "*Stable state estimator for bilinear Systems*", Inter. J. Control, Vol. 29, No. 2, pp 181-188, 1979.

[GA, BO] GAUTHIER, J.P., BORNARD G., "*Observability for any $u(t)$ of a Class of Nonlinear Systems*", IEEE Transactions on Automatic Control Vol AC-26, No. 4, pp 922-926, 1981.

[GA, HM, OT] GAUTHIER, J.P., HAMMOURI, H., OTHMAN, S. "*A Simple Observer for Nonlinear Systems Applications to Bioreactors,* IEEE Transactions on Automatic Control Vol 36, No. 6, pp 875-880, 1992.

[GA, KA] GAUTHIER, J.P., KAZAKOS, D. "*Observabilité et observateurs de systèmes non linéaires*", RAIRO APII Analyse des Systèmes, Vol 21, pp 201-212, 1987.

[GL] GLAD, S.T., "*Differential algebraic modelling of nonlinear Systems*", in M.A. Kaashoek, J. H. van Schuppen and A.C.M. Ran (Eds.), Realization and Modelling in system Theory MTNS-89, Birhäuser, Boston pp 97-105, 1989.

[HA, FU] HARA, S., FURUTA, K. "*Minimal order state observers for bilinear Systems*", Int. J. Control, Vol 24, No. 5, pp 705-718, 1976.

[HE, KR] HERMANN, R., KRENER, A.J., "*Nonlinear controllability and observability*", IEEE Trans. Automat. Control Vol 22 pp 728-740, 1977.

[HM, GA], "HAMMOURI, H., GAUTHIER, J.P., "*Bilinearization up to output injection*", Systems and Control Letters 11, pp 139-149, 1988.

[HUA, CHA, CHE] HUANG, H., CHAO, Y., CHENG, CH., "*Identification and adaptive Control for a CSTR process*", American Control Conference Arlington, 1982.

[HU, SU, ME] HUNT, L.R., SU, R., MEYER, G., "*Global transformations of nonlinear systems*", IEEE Trans. Automat. Control Vol AC-28 pp 24-31, 1983.

[IS] ISIDORI, A., *Nonlinear Control Systems*, Springer Verlag Berlin, 1989.

[JA, RE] JAKUBCZYK, B., RESPONDEK, W., "*On Linearization of Control Systems*", Bull. Acad. Polon. Scie. Sér. Math., Vol 28 pp 517-522, 1980.

[KA1] KALMAN, R.E., "*Mathematical description of linear systems*", SIAM J. Contr. Vol. 1, pp 152-192, 1963.

[KA, BU] KALMAN, R.E., BUCY, R., "*New results in linear filtering and prediction theory*", J. of Basic Engineering 82 D, pp 35-40, 1960.

[KAI] KAILATH, T., "*Linear Systems*", Englewood cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.

[KE] KELLER, H., "*Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer Canonical form*", Int. J. Control, Vol 46, pp 1915-1930, 1987.

[KO] KOLCHIN, E.R., *Differential Algebra and Algebraic Groups*, New York: Academic, 1973.

[KR, IS] KRENER, A.J., ISIDORI, A. "*Linearization by output injection and nonlinear observers*", Systems and control letters, 3, pp 47-52, 1983.

[KR, RE] KRENER, A.J., RESPONDEK, W. "*Nonlinear Observers with linear error dynamics*", SIAM J. Control Optim., 23 pp 197-216, 1985.

[LE, MAR] LEVINE, J., MARINO, R. "*Nonlinear systems Immersion Observers and finite dimension filters*", Systems and Control Letters, 7, pp 133-142, 1986.

[LU1] LUENBERGER, D.G., "*Observers for Multivariable systems*", IEEE Trans. Automatic Control 11, pp 190-197, 1966.

[LU2] LUENBERGER, D.G., "*Canonical Forms for linear Multivariable Systems*", IEEE Trans. Automat Contr., Vol AC-12 pp 290-293, 1967.

[MA1] MARTÍNEZ-GUERRA, R., "*Estimation of the states of a Class of Bilinear Systems: A Differential Algebraic Approach*", IEEE Conf. Dec. and Control San Antonio Texas pp 735-736, 1993.

[MA2] MARTÍNEZ-GUERRA, R., "*Observer Synthesis for a Class of Bilinear Systems*", 32nd Annual Allerton Conference on Communication Control and Computing pp 523-524, 1994.

[MA3] MARTÍNEZ-GUERRA, R., "*Inmersión de un sistema no lineal y construcción de un observador no lineal para un sistema TPA*", Congreso Latinoamericano de Control Automático, Habana, Cuba, pp 251-255, 1992.

[MA4] MARTÍNEZ-GUERRA, R., "*A New Differential Algebraic Approach for the Estimation of the State of a Class of Bilinear Systems*", Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 14 pp 289-295, 1994.

[MA, AL1] MARTÍNEZ-GUERRA, R., ALVAREZ, J., "*A note on Observers for a Bilinear System Class*", IEEE Conf. on Dec. and Control, Tucson, Arizona pp 3434-3435, 1992.

[MA, AL2] MARTÍNEZ-GUERRA, R., ALVAREZ, J., "*On Observers for a Class of Bilinear Systems*", 2nd. IEEE Conf. on Control Applications, Vancouver, B.C., Canadá, pp 777-781, 1993.

[MA, DE1] MARTÍNEZ-GUERRA, R., DE LEÓN-MORALES, J., "*Observers for a Multi-input Multi-output Bilinear System Class: A Differential Algebraic Approach*", Journal Mathematical and Computer Modelling Vol 20, No. 12 pp 125-132, 1994.

[MA, DE2] MARTÍNEZ-GUERRA, R., DE LEÓN-MORALES, J., "*Observer Synthesis for a Class of Bilinear Systems: A Differential Algebraic Approach*", IEEE Conf. on Dec. and Control. Lake Buena Vista, Florida, pp 1209-1210, 1994.

[MA, DE3] MARTÍNEZ-GUERRA, R., DE LEÓN-MORALES, J., "*Some Results About Nonlinear Observers for a Class of Bilinear Systems*", American Control Conference, Seattle Washington, pp 1643-1644, 1995.

[MA, DE4] MARTÍNEZ-GUERRA, R., DE LEÓN-MORALES, J., "*Nonlinear Estimators: A Differential Algebraic Approach*", Por aparecer en Journal Applied Mathematics Letters, 1996.

[MA, SUA] MARTÍNEZ-GUERRA, R., SUÁREZ, R., "*Asymptotic Output Tracking of a Class of Nonlinear Systems by means of an Observer: A Differential Algebraic Approach*", Sometido, 1996.

[NI, SC] NIJMEIJER, H., VAN DER SCHAFT, A.J., *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New York.

[PO] POMMARET, J.F., "*Géométrie Différentielle-Géometrie différentielle algébrique et théorie du contrôle*", C.R. Acad. Sc. Paris, t. 302, Série I, No. 15 pp 547-550, 1986.

[RI1] RITT, J.F., *Differential Equations from the Algebraic Stand point*, New York: Americal Mathematical Society, 1932.

[RI2] RITT, J.F., *Differential Algebra*, New York: American Mathematical Society, 1950.

[SE, ST] SEAL, C.E., STUBBERUD, A.R., IEEE Trans. Automat. Control 14, pp 704-711 ,1969.

[SI1, AH, ZR] SIRA-RAMÍREZ, H., AHMAD, S., ZRIBI, N., "*Dynamical Feedback Control of Robotic Manipulator with Joint Flexibility*", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol 22, No. 4, pp 736-747, 1992.

[SI2] SIRA-RAMÍREZ, H., "*The Differential Algebraic approach in nonlinear Dynamical Feedback Controlled landing manouvers*", IEEE Trans. Automat Contr., Vol 37, pp 518-524, 1992.

[SI3] SIRA-RAMÍREZ, H., "*Dynamical Feedback Strategies in aerospace systems control: A Differential algebraic approach*", Proc. Eur. Contr. Conf., Vol 3, Grenoble, France, pp 2238-2243, 1991.

[SO1] SONTAG, E.D. "*On the Observability of polynomial systems I: Finite-time problems*" SIAM J. Control Optimiz, 17, pp 139-151, 1979.

[SO2] SONTAG, E.D. "*A concept of local Observability*" Systems and Control Letters, 5, pp 41-47, 1985.

[SUS] SUSSMAN, H.J., "*Single-input observability of continuous-time systems*", Math. System Theory 12 pp 371-393, 1979.

[WI] WILLIAMSON, D., "*Observation of bilinear systems with application to biological control*", Automatica 13, pp 243-254, 1977.

Anexo A

≪Observers for a Multi-input Multi-output Bilinear System Class: A Differential Algebraic Approach≫

R. Martínez-Guerra, J. De León-Morales
en Journal Mathematical and Computer Modelling Vol. 20, No. 12, pp 125-132, 1994.

Pergamon

Mathl. Comput. Modelling Vol. 20, No. 12, pp. 125–132, 1994

0895-7177/94 $9.50 + 0.00

0895-7177(94)00190-1

Observers for a Multi-Input Multi-Output Bilinear System Class: A Differential Algebraic Approach

R. MARTÍNEZ-GUERRA*
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal 55-534, México, D.F., 09340, Mexico
rafa@xanum.uam.mx

J. DE LÉON-MORALES
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Apartado Postal 148-F
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, CP. 66451, Mexico

(Received and accepted July 1994)

Abstract—An exponential observer is constructed for a multi-output observable Bilinear System Class (BSC) in the Diop-Fliess' Observability sense. A differential algebraic approach is proposed for the estimation of the state of a class of bilinear system. A result on Multi-output Translated Fliess' Generalized Observability Canonical Form (MTGOCF) is given.

Keywords—Differential primitive element, Multi-output Translated Fliess' Generalized Observability Canonical Form, Exponential observer, Bilinear System Class.

1. INTRODUCTION

In recent years, a variety of approaches have been used on the study of the synthesis of estimation and control algorithms. The control techniques assume a complete knowledge of the state vector at any time. This is not always the case since techniques for on-line measurements of some process are almost always indirect. Due to this restriction, it is necessary to design and implement estimators.

An important problem in system theory is the state measurement which is solved by introducing a state estimator. A system whose task is to give an estimation of the state is called an observer.

An estimation of the state for linear systems is given by the Luenberger's observer, while for bilinear systems, and in general for nonlinear ones, the construction of observers is more difficult.

Many authors have worked on the development of the state estimators for a restricted class of nonlinear systems such as bilinear systems either by the differential geometric viewpoint (theory mainly due to Hermann, Krener, Isidori, Van der Schaft, Nijmeijer, Gauthier [1], Bornard [2], Hammouri [3,4], Zeitz, Williamson, Levine, Marino, etc.), or by the algebraic one (introduced by Fliess in 1986). The latter approach is based on differential algebra and has, among other features, the ability to define observability [5,6], and consequently, gives an estimation of the state through

*Author to whom correspondence should be addressed.
The authors are indebted to the reviewers for their helpful comments.

the design of observers [7-9] for systems represented by an arbitrary set of algebro-differential equations.

This paper is addressed in the algebraic direction. We propose the construction of an exponential nonlinear observer for a multi-input multi-output observable bilinear system class (in the Diop-Fliess' Observability sense). An application to a chemical reactor model is given.

2. STATEMENT OF THE PROBLEM

We start with some basic definitions which are considered in [5].

DEFINITION 2.1. *A Dynamics is a finitely generated differential algebraic extension $G/k\langle u\rangle$. This means that any element of G satisfies an algebraic differential equation with coefficients which are rational functions over k in the components of u and a finite number of their time derivatives.*

DEFINITION 2.2. *Let a subset $\{u, y\}$ of G in a dynamics $G/k\langle u\rangle$. An element in G is said to be observable with respect to $\{u, y\}$ if it is algebraic over $k\langle u, y\rangle$. Therefore, a state $\bar{x}$ is said to be observable if and only if it is observable with respect to $\{u, y\}$.*

DEFINITION 2.3. *A Dynamics $G/k\langle u\rangle$ with output y is said to be observable if and only if any state is so.*

Here, the concept of observability means that the differential field extension $G/k\langle u, y\rangle$ is algebraic; that is to say, that the whole differential information is contained in $k\langle u, y\rangle$.

Let us now consider the following Bilinear System Class (BSC):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(A_0 + \sum_{i}^{m} A_i u_i\right) x + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{1}$$

where $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbf{R}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbf{R}^p$, $A_i, 0 \le i \le m$, B, C and D are real matrices of appropriate size.

Suppose that BSC (1) is observable in the Diop-Fliess' Observability sense. Then let us pose the following problem.

Is it possible to synthesize an exponential observer for the system (1)?

3. MULTI-OUTPUT FLIESS' LOCAL GENERALIZED OBSERVABILITY CANONICAL FORM

According to the theorem of the differential primitive element, there exist k-elements y_k and let η_k, $0 \le \eta_k \le n$, an integer such that $y_k^{(\eta_k)}$ is algebraically dependent on $y_k, y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots, y_k^{(\eta_k - 1)}$, $u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$, i.e.,

$$y_k^{(\eta_k)} = -\mathcal{L}_k\left(y_k, \ldots, y_k^{(\eta_k - 1)}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}\right). \tag{2}$$

Let

$$\begin{gathered} \xi_i^{\eta_k} = y_k^{(i-\ell)}, \qquad \ell = 1, \eta_1 + 1, \eta_1 + \eta_2 + 1, \ldots, \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{p-1} + 1, \\ \sum_{1 \le k \le p} \eta_k = n, \qquad 1 \le i \le \eta_1 + \cdots + \eta_p = n, \end{gathered}$$

where the integers $\eta_1, \ldots, \eta_p$ are called algebraic observability indices.

Then, we can write a local state space representation in the special form of a generalization of the observability canonical form (multi-output). Such a canonical form is the MGOCF given by:

$$\eta_1 \begin{cases} \dot{\xi}_1^{\eta_1} = \xi_2^{\eta_1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\eta_1 - 1}^{\eta_1} = \xi_{\eta_1}^{\eta_1} \\ \dot{\xi}_{\eta_1}^{\eta_1} = -\mathcal{L}_1(\xi_1^{\eta_1}, \ldots, \xi_{\eta_1}^{\eta_1}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \end{cases}$$

$$
\eta_2 \begin{cases} \dot{\xi}^{\eta_2}_{\eta_1+1} = \xi^{\eta_2}_{\eta_1+2} \\ \vdots \\ \dot{\xi}^{\eta_2}_{\eta_1+\eta_2-1} = \xi^{\eta_2}_{\eta_1+\eta_2} \\ \dot{\xi}^{\eta_2}_{\eta_1+\eta_2} = -\mathcal{L}_2(\xi^{\eta_2}_{\eta_1+1}, \ldots, \xi^{\eta_2}_{\eta_1+\eta_2}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \end{cases} \tag{3}
$$

$$
\eta_p \begin{cases} \dot{\xi}^{\eta_p}_{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{p-1}+1} = \xi^{\eta_p}_{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{p-1}+2} \\ \vdots \\ \dot{\xi}^{\eta_p}_{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_p-1} = \xi^{\eta_p}_{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_p} \\ \dot{\xi}^{\eta_p}_{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_p} = -\mathcal{L}_p(\xi^{\eta_p}_{\eta_1+\eta_2,\ldots,\eta_{p-1}+1}, \ldots, \xi^{\eta_p}_{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_p}, u, \ldots, u^{(\gamma)}) \end{cases}
$$

$$
y_k = \xi^{\eta_k}_\ell
$$

$$
\ell = 1, \eta_1+1, \eta_1+\eta_2+1, \ldots, \eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{p-1}+1, \qquad \sum_{1\le k\le p} \eta_k = n.
$$

The following proposition states that by an appropriate choice of the differential primitive element it is possible to obtain a Multi-output Translated GOCF (MTGOCF).

PROPOSITION 3.1. *Let the BSC (1) be given. If the differential primitive element is chosen like*

$$
y_k = \sum_{i=n-\eta_k+1}^{\sum_{1\le k\le p}\eta_k} \alpha_i x_i + \sum_j^m \beta_j u_j, \qquad \alpha_i, \beta_j \in k\langle u\rangle,
$$

where $u = (u_1, \ldots, u_m)$ and $k\langle u\rangle$ denotes the differential field generated by k and u. Then the BSC (1) is transformable to the following Multi-output Translated Fliess' GOCF with output injection given by

$$
\Sigma_1 : \begin{array}{l} \dot{\tau} = A_u \tau + \varphi(u,y) = \bar{A}\tau + \lambda(u,\tau) + \varphi(u,y), \\ y = C\tau, \end{array} \tag{4}
$$

where $\varphi(u,y)$ is a nonlinear block matrix. The matrix $\varphi(u,y)$ is the translation matrix of the MGOCF, and y denotes the output injection in the translation matrix. Furthermore, the matrix A_u has its entries in $k\langle u\rangle$.

$$
\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{bmatrix} \quad A_k = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \eta_k, \qquad 1 \le k \le p,
$$

$$
\lambda(u,\tau) = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} \quad B_k = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -\sigma_k(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y_k) \end{bmatrix}\right\} \eta_k, \tag{5}
$$

$$
\varphi(u,y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(u,y_1) \\ \varphi_2(u,y_2) \\ \vdots \\ \varphi_p(u,y_p) \end{bmatrix}, \quad \varphi_k(u,y_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_k(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y_k) \end{bmatrix},
$$

$$
C = \begin{bmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_p \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.
$$

PROOF. Let the set $\{\xi_i^{\eta_k} = y_k^{(i-\ell)}\} = \{\xi_1^{\eta_k}, \dots, \xi_n^{\eta_k}\}$ be a η_k-finite differential transcendence basis with

$$y_k = \xi_\ell^{\eta_k}(i = \ell), \qquad \ell = 1, \eta_1 + 1, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{p-1} + 1, \quad 1 \le k \le p,$$

where η_k, $0 \le \eta_k \le n$, is an integer such that $y_k^{(\eta_k)}$ is dependent of

$$y_k, y_k^{(1)}, \dots, y_k^{(\eta_k - 1)}, u, u^{(1)}, \dots.$$

Redefining the transformation of coordinates τ like:

$$\begin{aligned}
\tau_1^{\eta_1} &= y_1 \\
\tau_2^{\eta_1} &= y_1^{(1)} \\
&\vdots \\
\tau_{\eta_1}^{\eta_1} &= y_1^{(\eta_1 - 1)} \\
&\vdots \\
\tau_{\eta_1 + \dots + \eta_{p-1} + 1}^{\eta_p} &= y_p \\
\tau_{\eta_1 + \dots + \eta_{p-1} + 2}^{\eta_p} &= y_p^{(1)} \\
&\vdots \\
\tau_{\eta_1 + \dots + \eta_p}^{\eta_p} &= y_p^{(\eta_p - 1)},
\end{aligned}$$

we obtain:

$$\begin{aligned}
\dot{\tau}_j^{\eta_1} &= \tau_{j+1}^{\eta_1}, \qquad 1 \le j \le \eta_1 - 1, \\
\dot{\tau}_{\eta_1}^{\eta_1} &= -\mathcal{L}_1\left(\tau_1^{\eta_1}, \dots, \tau_{\eta_1}^{\eta_1}, u, \dots, u^{(\gamma)}\right) + g_1\left(u, \dots, u^{(\gamma)}, y_1\right), \\
\dot{\tau}_j^{\eta_2} &= \tau_{j+1}^{\eta_2}, \qquad \eta_1 + 1 \le j \le \eta_1 + \eta_2 - 1, \\
\dot{\tau}_{\eta_1+\eta_2}^{\eta_2} &= -\mathcal{L}_2\left(\tau_{\eta_1+1}^{\eta_2}, \dots, \tau_{\eta_1+\eta_2}^{\eta_2}, u, \dots, u^{(\gamma)}\right) + g_2\left(u, \dots, u^{(\gamma)}, y_2\right), \\
&\vdots \\
\dot{\tau}_j^{\eta_p} &= \tau_{j+1}^{\eta_p}, \qquad \eta_1 + \dots + \eta_{p-1} + 1 \le j \le \eta_1 + \dots + \eta_p - 1, \\
\dot{\tau}_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_p}^{\eta_p} &= -\mathcal{L}_p\left(\tau_{\eta_1+\dots+\eta_{p-1}+1}^{\eta_p}, \dots, \tau_{\eta_1+\dots+\eta_p}^{\eta_p}, u, \dots, u^{(\gamma)}\right) + g_p\left(u, \dots, u^{(\gamma)}, y_p\right),
\end{aligned}$$

which can be rewritten as in (4) and (5). ∎

REMARK 1. We can take the BSC (1) into MTGOCF by means of

$$\tau = \theta x, \tag{6}$$

where θ is a block matrix (the size of each block is η_k, $1 \le k \le p$) with entries in $k\langle u \rangle$. Because this relation depends on u, there exists inputs u for which θ is singular; moreover, there are also problems for values of u such that θ^{-1} is singular.

REMARK 2. The solution of the transformation (6) is guaranteed characterizing the class of inputs for which the system (1) is carried out into the form (6) given above, avoiding the case of singular inputs in the transformation τ (6) and in the system Σ_2 (7).

As a last definition, we have the following.

DEFINITION 3.2. *If u is an input to the system for which* (6) *is nonsingular, then u is called a good input (GI).*

Actually, we work with good inputs.

REMARK 3. For an observable BSC (4) in the Diop-Fliess' Observability sense, any state τ is observable with respect to $\{u, y\}$; in other words, τ is algebraic differentially over $k\langle u, y\rangle$.

4. OBSERVER SYNTHESIS

We have the following result on the existence of an exponential observer for the BSC (1).

LEMMA 4.1. *Consider the multi-output observable system Σ_1 given by (4); then the system:*

$$\Sigma_2 : \begin{array}{l} \dot{\hat{\tau}}_k = A_{\frac{*}{k}} \hat{\tau}_k + \varphi_k(u, y) + S_k^{-1} C_k^T (C_k \hat{\tau}_k - y_k), \\ \dot{S}_k = -\psi_k S_k - A_{\frac{*}{k}}^T S_k - S_k A_{\frac{*}{k}} + C_k^T C_k, \qquad 1 \le k \le p, \end{array} \tag{7}$$

$\psi_k > 0$, and $S_k(\psi)$ in GL $(n, k(u))$ (a linear group of symmetric positive definite matrices) is an exponential observer for Σ_1, moreover, the k-observation error is given by $\epsilon_k = \tau_k - \hat{\tau}_k$ and $\|\epsilon_k\| \le \bar{k} e^{-\psi_k (t/2)}$.

PROOF. Consider the k-observation error as $\epsilon_k = \tau_k - \hat{\tau}_k$. Then the error dynamic equation is given by

$$\dot{\epsilon}_k = \left(A_{\frac{*}{k}} - S_k^{-1} C_k^T C_k \right) \epsilon_k.$$

Consider the Lyapunov function $\epsilon_k^T S_k \epsilon_k$.

Let $V_k(t) = \epsilon_k^T S_k \epsilon_k$. Since S_k is a symmetric positive definite matrix $V_k(t) \ge 0$

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(t) &= \dot{\epsilon}_k^T S_k \epsilon_k + \epsilon_k^T \dot{S}_k \epsilon_k + \epsilon_k^T S_k \dot{\epsilon}_k \\ &= -\epsilon_k^T C_k^T C_k \epsilon_k - \psi_k \epsilon_k^T S_k \epsilon_k = -\psi_k V_k(t) - \epsilon_k^T C_k^T C_k \epsilon_k. \end{aligned}$$

Notice that $\epsilon_k^T C_k^T C_k \epsilon_k > 0$; this implies that

$$-\psi_k V_k(t) - \epsilon_k^T C_k^T C_k \epsilon_k \le -\psi_k V_k(t), \qquad 0 \le V_k(t) \le V_k(0) e^{-\psi_k t}.$$

Since $\exists\ \alpha_k, \beta_k$ such that

$$\begin{aligned} &\alpha_k \|\epsilon_k\|^2 \le V_k(\epsilon_k) \le \beta_k \|\epsilon_k\|^2 \\ &\Rightarrow \|\epsilon_k\| \le \bar{k} e^{-\psi_k (t/2)}, \qquad \text{where } \bar{k} = \left(\frac{V_k(0)}{\alpha_k} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

∎

Regard that the parameter ψ_k determines the rate of convergence and has to be fixed by the designer.

REMARK 4. We can select the matrix S_k in the observer (7) solving the equation:

$$\dot{S}_k = -\psi_k S_k - A_{\frac{*}{k}}^T S_k - S_k A_{\frac{*}{k}} + C_k^T C_k, \qquad 1 \le k \le p.$$

The solution of the Lyapunov equation is:

$$S_k(\psi) = e^{-\psi_k t} e^{-A_{\frac{*}{k}}^T t} S_k(0) e^{-A_{\frac{*}{k}} t} + \int_0^t e^{-\psi_k (t-\sigma)} e^{-A_{\frac{*}{k}}^T (t-\sigma)} C_k^T C_k e^{-A_{\frac{*}{k}} (t-\sigma)} \, d\sigma,$$

where $S_k(0)$ is an initialization symmetric positive definite matrix; then the solution $S_k(\psi)$ is a symmetric positive definite matrix.

COROLLARY 4.2. *Suppose that u is a GI. Then the dynamical system Σ_2 (7) along with*

$$x = \theta^{-1} \tau. \tag{8}$$

Constitute an exponential observer for the BSC (1) ($\hat{x} = \theta^{-1} \hat{\tau}$ is the output function of the system Σ_2).

5. AN APPLICATION TO A CHEMICAL REACTOR MODEL

The following multi-input multi-output system represents a chemical reactor model [10]

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1(C_{1e} - x_1) - r_1 x_1, \\
\dot{x}_2 &= r_1 x_1 - u_1 x_2, \\
y_1 &= x_2 + u_1, \\
\dot{x}_3 &= u_2(C_{2e} - x_3) - r_2 x_3, \\
\dot{x}_4 &= r_2 x_3 - u_2 x_4, \\
y_2 &= x_4 + u_2,
\end{aligned} \tag{9}
$$

with coefficients in the field of real numbers **R** which is considered as an ordinary differential field (of constants).

In (9), x_1, x_3 and x_2, x_4 denote the reactant and product concentrations, respectively. The input u_i corresponds to the inputs-flow of reactant, r_i and C_{ie} $(i = 1,2)$ denote kinetic and reactor parameters.

If u_i, and

$$y_i = x_j + u_i \quad \begin{matrix} (j = 1,3) \\ (i = 1,2) \end{matrix}$$

are known x_1 and x_3 verify

$$
\begin{aligned}
x_1 - y_1 + u_1 &= 0, \\
x_3 - y_2 + u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

but x_2 and x_4 do not verify the algebraic differential polynomial over $k\langle u, y\rangle$, then x_1 and x_3 are universally observable [6,11], but x_2 and x_4 are not. For the outputs $y_1 = x_2 + u_1$, $y_2 = x_4 + u_2$, it is not hard to see that the system (9) is observable in the Diop-Fliess' Observability sense if u_i $(i = 1,2)$ and $y_1 = x_2 + u_1$, $y_2 = x_4 + u_2$ are measured; then x_1, x_2, x_3 and x_4 verify:

$$
\begin{aligned}
&x_2 - y_1 + u_1 = 0, && x_4 + u_2 - y_2 = 0, \\
&\dot{y}_1 + u_1 y_1 - u_1^2 - r_1 x_1 - \dot{u}_1 = 0, && \dot{y}_2 - r_2 x_3 + u_2 y_2 - u_2^2 - \dot{u}_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Hence, $k\{u_1, y_1, x_i\}_{i=1,2}$ and $k\{u_2, y_2, x_j\}_{j=3,4}$ are integral over $k\{u_i, y_i\}_{i=1,2}$, respectively, x_2 and x_4 are universally observable [6,11].

From the differential primitive element $z_1 = x_2 + u_1$ and $z_3 = x_4 + u_2$, the following relationship holds:

$$
\begin{aligned}
&z_1 = x_2 + u_1, && z_3 = x_4 + u_2, \\
&z_2 = r_1 x_1 - u_1 x_2 + \dot{u}_1, && z_4 = r_2 x_3 - u_2 x_4 + \dot{u}_2,
\end{aligned}
$$

which transforms system (9) into the MTGOCF with output injection where $A_{\tilde{k}}$ and $\varphi_k(u, y_k)$ $(k = 1,2)$ are given, respectively, by

$$
A_{\tilde{k}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -(2u_k + r_k) \end{bmatrix},
$$

$$
\varphi_k(u, y_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ r_k u_k C_k + u_k^3 + 3u_k \dot{u}_k + r_k u_k^2 + r_k \dot{u}_k + \ddot{u}_k - [u_k^2 + r_k u_k + \dot{u}_k] y_k \end{bmatrix},
$$

where $\varphi_k(u, y_k)$ is a nonlinear translation matrix of the MGOCF and y_k denotes the k-output injection.

By Lemma 4.1, it is possible to construct an exponential observer Σ_2 for system (9). This is attained by choosing an observer's gain matrix S_k appropriate [1].

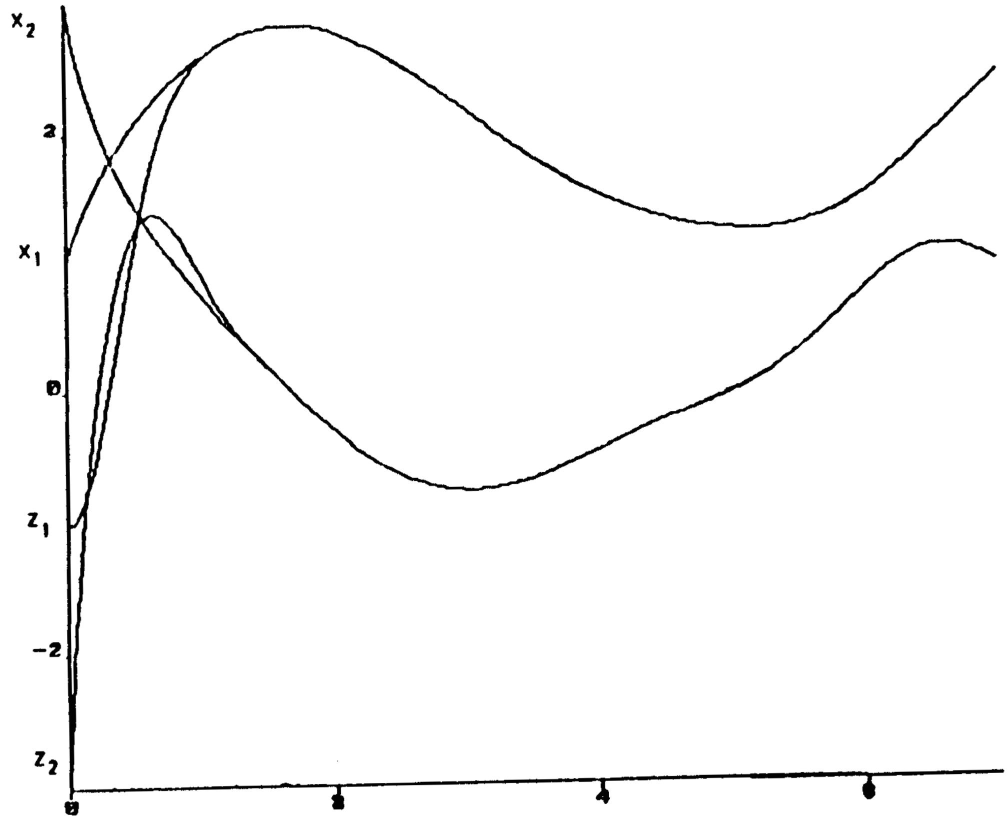

Figure 1.

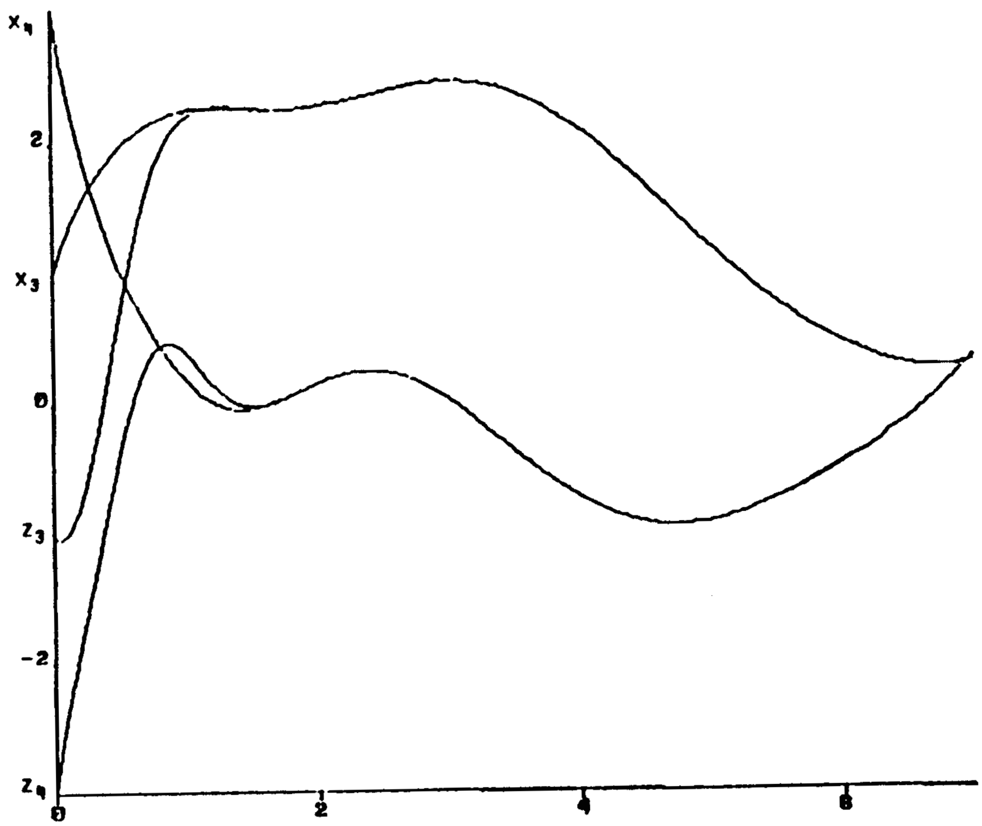

Figure 2.

6. CONCLUDING REMARKS

We have presented a new differential algebraic approach to obtain an exponential observer for a multi-output observable bilinear system class in the Diop-Fliess' Observability sense. The observer (7)-(8) has been tested numerically in the case of a chemical reactor. Some simulation results of the proposed scheme applied to the model (9) are shown (see Figures 1 and 2). By applying the observer's gain matrix, an exponential decaying in the observation error is obtained.

REFERENCES

1. J.P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman, A simple observer for nonlinear systems. Application to bioreactors, *IEEE Trans. Automat. Control* **37** (6), 875-880 (June 1992)
2. G. Bornard, N. Couenne and F. Celle, Regularly persistent observers for bilinear systems, In *Proceedings of the 29th International Conference on Nonlinear Systems New Trends in Nonlinear System Theory*, Vol. 122, Springer-Verlag, (June 1988).
3. H. Hammouri and J. De Leon Morales, Topological properties of observer's inputs, In *Proceedings of the International Conference on Controlled Dynamical Systems*, Lyon, France, July 3-7 1990, pp. 233-242, Birkhäuser, Boston, (1991).
4. H. Hammouri and J. De Leon Morales, On observer synthesis for state affine systems, In *IEEE Proc. 29th Conf. Dec. Contr.*, Hawaii, December 1990, pp. 784-785
5. S. Diop and M. Fliess, Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories, In *IEEE Proc. 30th Conf. Dec. Contr.*, Brighton, England, December 1991, pp. 714-719.
6. S. Diop, On universal observability, In *IEEE Proc. 31st Conf. Dec. Contr.*, Tucson, AZ, December 1992, pp. 3669-3672.
7. R. Martínez and J. Alvarez, On observers for a class of bilinear systems, In *IEEE Proc. 2nd Conf. on Contr. Appl.*, Vancouver, Canada, September 1993, pp. 777-781.
8. R. Martínez, Estimation of the states of a class of bilinear systems: A differential algebraic approach, In *IEEE Proc. 32nd Conf. Dec. Contr.*, San Antonio, TX, December 1993, pp. 735-736.
9. R. Martínez and J. De Leon Morales, Observer synthesis for a class of bilinear systems: A differential algebraic approach, (submitted), (1994).
10. D. Perlmutter, *Stability of Chemical Reactors*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1972).
11. S. Diop, Closedness of morphisms of differential algebraic set. Applications to system theory, *Forum Math.* (to appear).

Anexo B

≪Nonlinear Estimators: A Differential Algebraic Approach≫

R. Martínez-Guerra, J. De León-Morales
Por aparecer en Journal Applied Mathematics Letters, 1996.

Nonlinear Estimators:
A Differential Algebraic Approach.

Rafael Martínez-Guerra[1]
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal 55-534
México, D.F. 09340 MÉXICO
Phone: (5) 7-244656
Fax: (5) 7-244653
e-mail: rafa@xanum.uam.mx

Jesús de León-Morales
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Apartado Postal 148-F
San Nicolás de los Garza, Nuevo León CP 66451, MÉXICO
Phone: (83) 764514
Fax: (91) 83764514

Abstract

Based on differential algebra techniques, an exponential observer is proposed for the state estimation of a class of nonlinear systems. Simulations illustrating the performance of the proposed observer are included.

Keywords: Exponential observer, Nonlinear Systems.

1 Introduction

The control techniques assume a complete knowledge of the state vector at any time. Unfortunately, this is not always the case for physical reasons. It is therefore necessary to build an observer for such systems.

Several works based on differential geometry approach propose observers for nonlinear systems [8]. However, when the system is described by polynomial terms, apply the latter observers become dificult. For this reasons, the differential algebra is an excellent tool for solving problems in nonlinear control theory. We propose an observer for nonlinear systems.

2 Generalized Observability Canonical Form

We start this section introducing some definitions and notation which are useful in this note (see [1,2,4,5,6]).

[1] To whom correspondence should be addressed.

Definition 1: A differential field extension L/K is given by two differential fields, K and L, such that: i) K is a subfield of L; ii) the derivation of K is the restriction to K of the derivation of L.

Definition 2: Let u be a differential scalar indeterminate and let k be a differential field, with derivation denoted by "$\frac{d}{dt}$".

A *Dynamics* is defined as a finitely generated differentially algebraic extension $G/k\langle u\rangle$ of the differential field $k\langle u\rangle$, where $k\langle u\rangle$ denotes the differential field generated by k and the elements of a finite set $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ of differential quantities.

Definition 3: A set $S = \{\xi_i | i \in I\}$ of elements of L is said to be differentially K-algebraically dependent if and only if the set, $\left\{\frac{d^{\nu_i}\xi_i}{dt^{\nu_i}}\middle| i \in I;\ \nu_i = 0, 1, 2, \ldots\right\}$, of derivatives of $\{\xi_i\}$ satisfy some algebraic equation. A set which is not differentially K-algebraically dependent is said to be differentially K-algebraically independent.

Definition 4: ([1,2]) Consider a subset $\{u, y\}$ of G in a dynamics $G/k\langle u\rangle$. An element x_0 in G is said to be observable with respect to $\{u, y\}$ if it is algebraic over $k\langle u, y\rangle$. This means that x_0 can be expressed as an algebraic function of the components of $\{u, y\}$ and a finite number of their time derivatives. Therefore, a state x is said to be algebraically observable if and only if is algebraically observable with respect to $\{u, y\}$.

Definition 5: A dynamics $G/k\langle u\rangle$ with output variable y in G is said to be algebraically observable if and only if any (generalized) state is so.

In this note we consider the following Nonlinear System Class (NSC)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{1}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$, f and h are assumed to be polynomial in their arguments. Systems (1) are assumed to be universally observable (see [3, 2]) with external behavior described by equations of the form

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -L_0\left(y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right),$$

where L_0 is a polynomial of its arguments.

Defining the following change of variable $\bar{\eta}_i = \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$; $1 \leq i \leq n$, then one can write the following generalized state space representation of system (1) which has the special form of a *Generalized Observability Canonical Form* [1, 5, 6, 7].

$$\frac{d\bar{\eta}_i}{dt} = \bar{\eta}_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \tag{2.a}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\eta}_n}{dt} &= -L_0\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right) \\ y &= \bar{\eta}_1.\end{aligned} \tag{2.b}$$

Remark. Representation (2) can be seen as in the form

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\eta}} &= A\bar{\eta} + \Psi\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right) + \Phi\left(u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}, y\right), \\ y &= C\bar{\eta} = \bar{\eta}_1\end{aligned} \tag{3}$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{(n-1)\times(n-1)} \\ 0 & 0_{(n-1)\times(1)} \end{pmatrix};$$

$$\Phi\left(u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}, y\right) = \mathrm{Col}\left(0 \ldots 0 \quad \varphi\left(u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}, y\right)\right)$$

and

$$\Psi\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right) = \mathrm{Col}\left(0 \ldots 0 \quad \psi\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right)\right)$$

3 Observer Synthesis

Theorem 1: The following system

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{\hat{\eta}} = A\hat{\eta} + \Psi\left(\hat{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right) + \Phi\left(u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}, y\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -S_\infty^{-1}C^T(C\hat{\eta} - \bar{\eta}) \\ &\theta S_\infty + A^T S_\infty + S_\infty A = C^T C \end{aligned}\right. \tag{4}$$

is an exponential observer for system (3), where $\theta \in \mathbb{R}^+$ and S_∞ is a symmetric positive definite matrix, and the following

A1) $\Psi(\eta, z_0, z_1, \ldots, z_\gamma)$ is globally Lipschitz with respect to η, and uniformly with respect to $z_0, z_1, \ldots, z_\gamma$.

A2) u and their derivatives up to n are bounded.

is assumed.

Proof: Let $\epsilon = \bar{\eta} - \hat{\eta}$ be the observation error whose dynamics is described by

$$\dot{\epsilon} = (A - S_\infty^{-1}C^T C)\epsilon + \left\{\Psi\left(\hat{\eta} + \epsilon(t), u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right) - \Psi\left(\hat{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right)\right\}$$

Consider the following Lyapunov function

$$V(\epsilon) = \epsilon^T S_\infty \epsilon$$

then, taking the derivative with respect to time along the observation error dynamics, we get

$$\dot{V}(\epsilon(t)) \leq -2\theta V(\epsilon(t)) + 2\epsilon^T(t) S_\infty \left\{ \Psi\left(\hat{\eta} + \epsilon(t), u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{q}}u}{dt^{\bar{q}}}\right) - \Psi\left(\hat{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{q}}u}{dt^{\bar{q}}}\right) \right\}$$

Using the Schwarz inequality, we obtain

$$\dot{V}(\epsilon(t)) \leq -2\theta V(\epsilon(t)) + 2\|\epsilon^T\|_{S_\infty} \left\| \Psi\left(\hat{\eta} + \epsilon(t), u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{q}}u}{dt^{\bar{q}}}\right) - \Psi\left(\hat{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{q}}u}{dt^{\bar{q}}}\right) \right\|_{S_\infty}$$

where we denote by $\|x\|_{S_\infty}$ the norm $(x^T S_\infty x)^{1/2}$. From assumptions A1, A2 and using the particular form of $\Psi\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{q}}u}{dt^{\bar{q}}}\right)$ we get

$$\left\| \Psi\left(\hat{\eta} + \epsilon, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{q}}u}{dt^{\bar{q}}}\right) - \Psi\left(\hat{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{q}}u}{dt^{\bar{q}}}\right) \right\|_{S_\infty} \leq \gamma \|\epsilon(t)\|_{S_\infty}$$

where γ is a Lipschitz constant.

Hence

$$\dot{V}(\epsilon(t)) \leq -2(\theta - \gamma) V(\epsilon(t))$$

Since

$$\dot{V}(\epsilon(t)) = \frac{d\|\epsilon(t)\|^2_{S_\infty}}{dt} \leq -2(\theta - \gamma)\|\epsilon(t)\|^2_{S_\infty}.$$

It follows that

$$\frac{d\|\epsilon(t)\|_{S_\infty}}{dt} \leq -(\theta - \gamma)\|\epsilon(t)\|_{S_\infty}$$

Taking θ sufficiently large such that $\theta > \gamma$, then

$$\|\epsilon(t)\|_{S_\infty} \leq \|\epsilon(0)\|_{S_\infty} e^{-(\theta-\gamma)t} = \|\epsilon(0)\|_{S_\infty} e^{-\rho t}; \;\; \rho = \theta - \gamma > 0$$

this completes the proof.

∎

4 An application to a Nonlinear model

In this section we apply the proposed observer to the following single-output system which represents a nonlinear model with coefficients in the field of real numbers $\mathbb{R}$ which is considered as an ordinary differential field (constants).

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2^3 \\ \dot{x}_2 & = & ux_2 \\ y & = & x_1 \end{array}\right. \tag{5}$$

We have

$$x_1 - y = 0; \qquad x_2^3 - \dot{y} = 0$$

which shows that the system is universally observable [2,3].

The external behavior of system (5) is

$$\ddot{y} - 3u\dot{y} = 0,$$

and is *equivalent* to

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\eta}_1 & = & \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 & = & 3u\eta_2 \\ y & = & \eta_1. \end{array}\right. \tag{6}$$

An observer for system (6) is derived from Theorem 1 and reads as

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\hat{\eta}}_1 & = & \hat{\eta}_2 + 2\theta(y - \hat{\eta}_1) \\ \dot{\hat{\eta}}_2 & = & 3u\hat{\eta}_2 + \theta^2(y - \hat{\eta}_1) \\ \hat{x}_1 & = & \hat{\eta}_1 \\ \hat{x}_2 & = & \sqrt[3]{\hat{\eta}_2}. \end{array}\right.$$

As well-known, for very low value of θ either the convergence rate is too slow or, even worth, the error dynamics is unstable. This is pictured in Figure 1 where $\theta = .01$, and there was no measurements noise.

When a reasonable value of θ is chosen then the observer does well its job: see Figure 2 where *theta* $= 5$, and the measurements noise standard deviation is fixed to 10^{-6}, which means that y is corrupted by a noise of about 10%.

5 References

[1] Diop, S. Fliess, M. "*Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories*", IEEE Proc. 30th. Conf. Dec. Contr. Brighton, England. Dec. 1991, pp. 714-719.

[2] Diop, S. "*On Universal Observability*", IEEE Proc. 31st. Conf. Dec. Contr. Tucson Az., Dec. 1992, pp. 3669-3672.

[3] Diop, S. "*Closedness of morphisms of differential algebraic set. Applications to the system theory*", Forum Math., 5, 1993, 33–47.

[4] Fliess, M. "*Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics*", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-35 Sep 1990, pp. 994-1001.

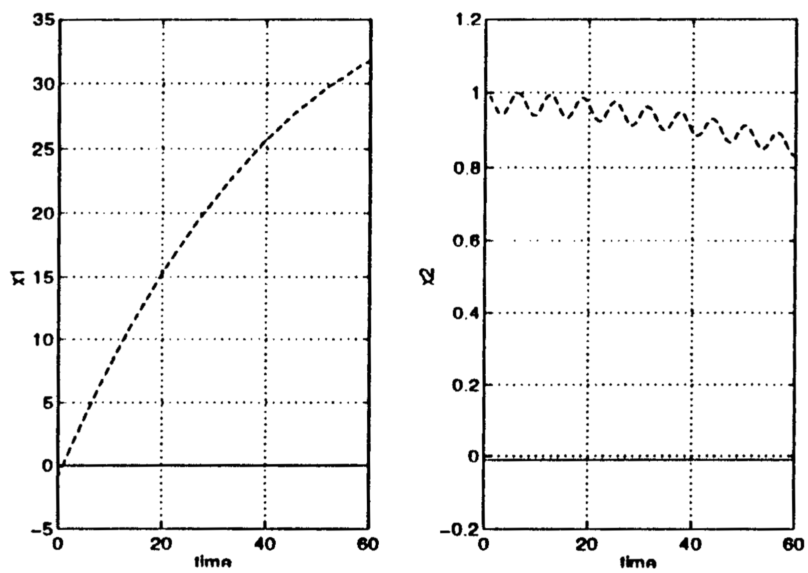

Figure 1: x_1 (—), $\hat{x}_1$ (- - -) x_2 (—), $\hat{x}_2$ (- - -), for $\theta = .01$

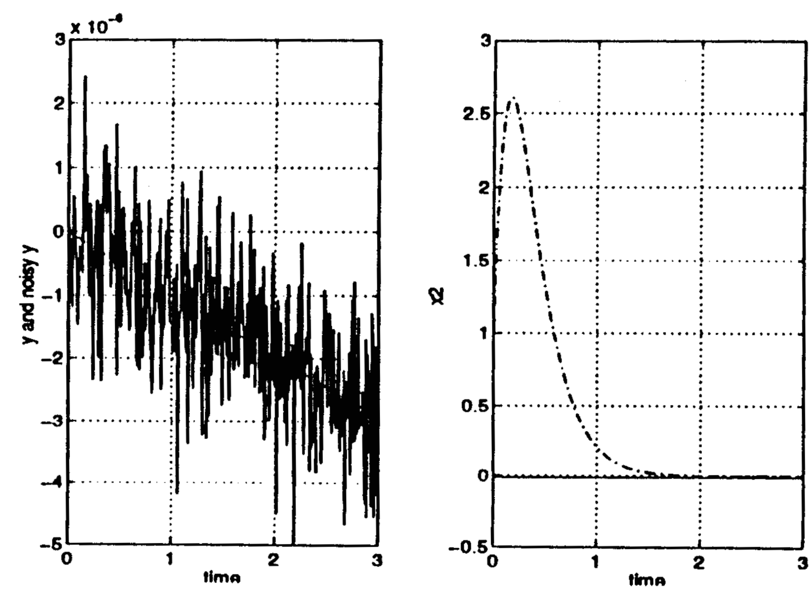

Figure 2: y (- - -), noisy y (—) x_2 (—), $\hat{x}_2$ (- - -), for $\theta = 5$

[5] Fliess, M. "*Nonlinear Control Theory and differential algebra*" in Modelling and Adaptative Control. C. Byrnes and A. Kurszhanski Eds. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 15 Springer-Verlag-Berlin, 1985, pp. 135-145.

[6] Fliess, M. "*Quelques remarques sur les observateurs nonlineares*", Proc. of the Coll. GRETSI Traitement Signal Images. Nice, 1987, pp. 169-172.

[7] Sira-Ramirez, H. "*The differential Algebraic approach in nonlinear Dynamical feedback controlled landing maneuvers*", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 37, Apr. 1992, pp. 518-524.

[8] Gauthier, J.P., Hammouri, H., Othman, S., "*A simple observer for nonlinear systems. Application to Bioreactors*", IEEE, Trans. Automat. Contr. 37 (6), Jun. 1992, pp. 875-880.

Anexo C

≪Asymptotic Output Tracking of a Class of Nonlinear Systems by means of an Observer: A Differential Algebraic Approach≫

R. Martínez-Guerra, R. Suárez

Sometido, 1996.

Asymptotic output tracking of a class of nonlinear systems by means of an observer: A Differential Algebraic Approach.

Rafael Martínez-Guerra[1] and Rodolfo Suárez-Cortés
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal 55-534
México, D.F. 09340 MÉXICO
Phone: (5) 7-244656
Fax: (5) 7-244653
e-mail: rafa@xanum.uam.mx   rsua@xanum.uam.mx

Abstract

Based on techniques of the differential algebra an observer-based controller strategy for a class of nonlinear systems is proposed. The Generalized Observability Canonical Form (GOCF) and the Generalized Controller Canonical Form (GCCF) introduced by Fliess, are the main ingredients in our approach. Our controller actually achieves both stability and tracking by linearizing the tracking error.

Keywords: Differential algebra, Exponential observer, stabilization, Output tracking, Nonlinear Systems.

1 Introduction

In recent years a variety of approaches have been proposed in the synthesis of observers and control. A considerable number of researches have studied the stability and output tracking problems of dynamical systems using the commonest mathematical tool in nonlinear control theory of today: differential geometry. However, if the nonlinearities involved are all polynomial there are methods from algebra that can be used instead. It has been showed

[1] To whom correspondence should be addressed.

by M. Fliess that the differential algebra is a natural mathematical tool for solving problems in nonlinear control theory.

We treat the stability and output tracking problems for nonlinear systems from the dynamical feedback error linearization strategy. The approach is based on Fliess'generalized observability canonical form (GOCF) and generalized controller canonical form (GCCF) which are easy consequences of differential primitive element theorem [2,3,5].

The controller we propose is obtained by means of exact linearization of the tracking error dynamics. In general it is necessary to use an observer for the tracking error dynamics in order to implement such a controller. The observer we use is high gain observer [6,7]. Finally, we check that the separation principle is satisfied: the overall system consisting of the plant and the observer-based controller is stable.

This note is organized as follows: In section II, we introduce some definitions and notation used in this paper. The stabilization and output tracking problems by means of an exponential observer, using the differential algebraic approach, are dealt with in section III. Some concluding remarks will close the paper.

2 Basic Definitions

We start this section introducing some definitions and notation which are useful in this note (see [1,2,4]).

Definition 1: A differential field extension L/K is given by two differential fields, K and L, such that: i) K is a subfield of L; ii) the derivation of K is the restriction to K of the derivation of L.

Definition 2: Let u be a differential scalar indeterminate and let k be a differential field, with derivation denoted by "$\frac{d}{dt}$".

A *Dynamics* is defined as a finitely generated differentially algebraic extension $G/k\langle u\rangle$ of the differential field $k\langle u\rangle$, where $k\langle u\rangle$ denotes the differential field generated by k and the elements of a finite set $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ of differential quantities.

Definition 3: A set $S = \{\xi_i / i \in I\}$ of elements of L is said to be differentially K-algebraically dependent if and only if the set, $\left\{\frac{d^{\nu_i}\xi_i}{dt^{\nu_i}} / i \in I;\ \nu_i = 0, 1, 2, \ldots\right\}$ of derivatives of $\{\xi_i\}$ satisfy some algebraic equation. A set which is not differentially K-algebraically dependent is said to be differentially K-algebraically independent.

Definition 4: Consider a subset $\{u, y\}$ of G in a dynamics $G/k\langle u\rangle$. An element x_0 in G is said to be observable with respect to $\{u, y\}$ if it is algebraic over $k\langle u, y\rangle$. This means that x_0 can be expressed as an algebraic function of the components of $\{u, y\}$ and a finite number of their time derivatives. Therefore, a state $\bar{x}$ is said to be algebraically observable if and only if is algebraically observable with respect to $\{u, y\}$.

Definition 5: A dynamics $G/k\langle u\rangle$ with output variable y in G is said to be algebraically observable if and only if any (generalized) state is so.

According to the theorem of the differential primitive element there exists an element $\bar{\xi} \in G$ such that $G = K\langle u, \bar{\xi}\rangle$. The transcendence degree n of $G/K\langle u\rangle$ [2,3], which is equal to the dimension of the system (1), and is the smallest integer such that $\bar{\xi}^{(n)}$ is $K\langle u\rangle$-algebraically dependent on $\left\{\bar{\xi}, \frac{d\bar{\xi}}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}\bar{\xi}}{dt^{n-1}}\right\}$ which is a transcendence basis of $G/K\langle u\rangle$ [2,3].

Defining the following change of variable of the form $\xi_i = \frac{d^{i-1}\bar{\xi}}{dt^{i-1}}$ $1 \leq i \leq n$.

It is clear that the $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ is a transcendence basis of $G/K\langle u\rangle$ too. Hence a nonlinear generalization of the controller canonical form is given by

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \xi_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1 \tag{1.a}$$

$$D\left(\frac{d\xi_n}{dt}, \xi, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\gamma}u}{dt^{\gamma}}\right) = 0 \tag{1.b}$$

where $D(\cdot, \ldots, \cdot)$ is a polynomial with coefficients in K. If one can locally solve for $\frac{d\xi_n}{dt}$ in (1.b), one obtains an explicit system of first order differential equations, known as the *Generalized Controller Canonical Form* (GCCF):

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_i}{dt} &= \xi_{i+1} \qquad 1 \le i \le n-1\\ \frac{d\xi_n}{dt} &= L_c\left(\xi, u, \frac{du}{dt}, \cdot, \frac{d^\gamma u}{dt^\gamma}\right)\end{aligned}$$

for γ a strictly positive integer.

Now, let y be the scalar output and let n be the smallest integer such that $\frac{d^n y}{dt^n}$ is algebraically dependent on

$$\left\{y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right\},$$

i.e.

$$\frac{d^n y}{dt^\nu} = -L_0\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right).$$

Defining the following change of variable $\bar{\eta}_i = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$; $1 \le i \le n$, then one can write a local state space representation which has the special form of a *Generalized Observability Canonical Form* (GOCF)

$$\frac{d\bar{\eta}_i}{dt} = \bar{\eta}_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-1 \tag{2.a}$$

$$\frac{d\bar{\eta}_n}{dt} = -L_0\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right) \tag{2.b}$$

$$y = \bar{\eta}_1$$

for ν a strictly positive integer.

3 A differential algebraic approach to asymptotic stabilization and output tracking

Consider the following nonlinear system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u)\\ y &= h(x, u)\end{aligned} \tag{3}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$, f and h are assumed to be polynomial in their arguments. System (3) is assumed to be observable in the Diop-Fliess'Observability sense [1].

By defining $\bar{\eta}_i = \dfrac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$, $1 \leq i \leq n$ locally, we obtain an explicit GOCF of system (3) as following

$$\dot{\bar{\eta}}_i = \bar{\eta}_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \eta - 1 \tag{3'.a}$$

$$\dot{\bar{\eta}}_n = -L_0\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{\gamma}}u}{dt^{\bar{\gamma}}}\right) \tag{3'.b}$$

$$y = \eta_1$$

for some $\bar{\gamma} > 0$.

Now, let $y_R(t)$ be prescribed reference output function which is differentiable at least n times. The asymptotic output tracking problem consists in finding a dynamical controller described by a time-varying scalar ordinary differential equation, which is possibly implicit, and which has as input:

a) The output reference signal $y_R(t)$, together with a finite number of its time derivatives $\dfrac{d^i y_R(t)}{dt^i}$, $1 \leq i \leq n$ and,

b) The state coordinates $\bar{\eta}_i$ of the system.

The controller is supposed to produce a scalar function u, which locally forces y to asymptotically convergence towards $y_R(t)$.

Define an output tracking error function $e(t)$ as the difference between $y(t)$ and signal $y_R(t)$:

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \tag{4}$$

By definition, $\bar{\eta}_i$ is equal to the $(i-1)$th time derivative of $y(t)$, that is $\bar{\eta}_i = \dfrac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$, for $1 \leq i \leq n$. Then, we have

$$\frac{d^i e(t)}{dt^i} = \bar{\eta}_{i+1} - \frac{d^i y_R(t)}{dt^i}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \tag{5}$$

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} = \frac{d\bar{\eta}_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} = -L_0\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{\gamma}}u}{dt^{\bar{\gamma}}}\right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} \tag{6}$$

By requiring a linear time-invariant autonomous dynamics for the tracking error function:

$$\frac{d^n e(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = 0 \tag{7}$$

and by virtue of (5) and (6), it follows that (7) may be rewritten as

$$\frac{d\bar{\eta}_n}{dt} - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}\left[\bar{\eta}_i - \frac{d^{i-1} y_R(t)}{dt^{i-1}}\right] = 0 \tag{8}$$

that is

$$-L_0\left(\bar{\eta}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{\gamma}} u}{dt^{\bar{\gamma}_u}}\right) = \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} - \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}\left[\bar{\eta}_i - \frac{d^{i-1} y_R(t)}{dt^{i-1}}\right] \tag{9}$$

This scalar time-varying differential equation implicitly defines u, which accomplishes asymptotic stabilization to zero for the tracking error, in a manner entirely prescribed by the set of constant design coefficients $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

By defining $e_i = \dfrac{d^{i-1} e(t)}{dt^{i-1}}$, for $1 \le i \le n$, as components of an error vector e, we obtain

$$\frac{de_i}{dt} = e_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-1 \tag{10.a}$$

$$\frac{de_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i \tag{10.b}$$

or in compact form

$$\frac{de}{dt} = Fe \tag{11}$$

where

$$-L_0\left(\psi_R(t) + e, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{\gamma}} u}{dt^{\bar{\gamma}}}\right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} = -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i \tag{12}$$

$$\psi_R(t) = \mathrm{Col}\left(y_R(t), \frac{dy_R(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_R(t)}{dt^{n-1}}\right);$$

$$e(t) = \mathrm{Col}\left(e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t)\right)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

The origine, $e = 0$, is an equilibrium point for the tracking error dynamics (10). We assume that the solution u of (12) is defined for all time, and is bounded for all bounded functions $y_R(t)$ which also exhibit bounded derivatives. Note that the dynamical feedback controller depends on the state vector of the tracking error dynamics, which should be estimated by means of an observer.

Now write system (10) as follows

$$\dot{e}(t) = Ee(t) + \varphi\left(e(t), y_R(t), \frac{dy_R(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n y_R(t)}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{\gamma}} u}{dt^{\bar{\gamma}}}\right)$$

where the elements of the matrix E are given by

$$E_{ij} = \delta_{ij-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j-1 \\ 0 & \text{if } i+1 \neq j \end{cases}$$

and

$$\varphi\left(e(t), y_R(t), \frac{dy_R(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n y_R(t)}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{\gamma}} u}{dt^{\bar{\gamma}}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -L_0\left(\psi_R(t) + e(t), u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{\gamma}} u}{dt^{\bar{\gamma}}}\right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} \end{pmatrix}$$

then, the estimation of the tracking error $e(t) = y(t) - y_R(t)$ is given by an exponential nonlinear observer (0) [6,7] of the form:

$$\begin{aligned} (0) : \dot{\hat{e}}(t) &= E\hat{e} + \varphi\left(\hat{e}, y_R(t), \frac{dy_R(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n y_R(t)}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar{\gamma}} u}{dt^{\bar{\gamma}}}\right) \\ &\quad -S_\infty^{-1} C^T (C\hat{e}(t) - e_1(t)) \end{aligned}$$

where S_∞ is solution of the equation $\theta S_\infty + E^T S_\infty + S_\infty E - C^T C = 0$, for $\theta > 0$.

Let

$$\rho(u_{\hat e}, y_R(t), \hat e(t)) = -L_0\left(\psi_R(t) + \hat e(t), u_{\hat e}, \frac{du_{\hat e}}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar\gamma} u_{\hat e}}{dt^{\bar\gamma}}\right) - \frac{d^n y_R(t)}{dt^n} + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}\hat e_i(t) = 0$$

and $u_{\hat e}$ be the observer-based control resulting from $\rho(u_{\hat e}, y_R(t), \hat e(t)) = 0$.

The dynamics of $\hat e(t)$ and $\epsilon_0 = \hat e(t) - e(t)$, the estimate tracking error and the observation error, respectively, are given by

$$\begin{aligned}\dot{\hat e}(t) &= E\hat e + \varphi\left(\hat e, y_R(t), \frac{dy_R(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n y_R(t)}{dt^n}, u_{\hat e}, \frac{du_{\hat e}}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar\gamma} u_{\hat e}}{dt^{\bar\gamma}}\right)\\ &\quad -S_\infty^{-1}C^T(C\hat e(t) - e_1(t))\end{aligned}$$

$\dot\epsilon_0(t) = (E - S_\infty^{-1}C^TC)\epsilon_0(t) + \Phi(\epsilon_0(t), \hat e(t))$ which becomes

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{\hat e}(t) = F\hat e(t) - S_\infty^{-1}C^T(C\hat e(t) - e_1(t)) \\ \dot\epsilon_0(t) = (E - S_\infty^{-1}C^TC)\epsilon_0(t) + \Phi(\epsilon_0(t), \hat e(t)) \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned}\Phi(\epsilon_0(t), \hat e(t)) &= \varphi\left(\hat e(t), y_R(t), \frac{dy_R(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n y_R(t)}{dt^n}, u_{\hat e}, \frac{du_{\hat e}}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar\gamma} u_{\hat e}}{dt^{\bar\gamma}}\right)\\ &\quad - \varphi\left(e(t), y_R(t), \frac{dy_R(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n y_R(t)}{dt^n}, u_{\hat e}, \frac{du_{\hat e}}{dt}, \ldots, \frac{d^{\bar\gamma} u_{\hat e}}{dt^{\bar\gamma}}\right)\end{aligned}$$

We assume that:

A1) $\Phi(\epsilon_0(t), \hat e(t))$ is locally Lipschitzian in $\mathbb{R}^n$ with respect to $\epsilon_0(t)$.

A2) The signals $u_{\hat e}$, $y_R(t)$ and its derivatives up to n at least are bounded.

Theorem: Let $u_{\hat e}$ be the linearizing dynamic state feedback obtained from $\rho(u_{\hat e}(t), y_R(t)\hat e(t)) = 0$. Suppose that assumptions $A1, A2$ are satisfied. Then the closed loop system (3') with control $u_{\hat e}$ is locally asymptotically stable.

Proof. The proof uses the following Lyapunov function

$$V(\hat e(t), \epsilon_0(t)) = V_1(\hat e(t)) + V_2(\epsilon_0(t))$$

with

$$V_1(\hat{e}(t)) = \hat{e}^T(t)P\hat{e}(t);\ V_2(\epsilon_0(t)) = \epsilon_0^T(t)S_\infty\epsilon_0(t)$$

where P and S_∞ are symmetric positive definite matrices, and P is such that $F^TP + PF = -I$. Let us show that V is a Lyapunov function for the system (Σ). Taking the derivative with respect to time, we have

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(\hat{e}(t)) &\leq -\alpha\hat{e}^T(t)P\hat{e}(t) + \hat{e}^T(t)PS_\infty^{-1}C^TC\epsilon_0(t) + \epsilon_0^T(t)C^TCS_\infty^{-1}P\hat{e}(t) \\
\dot{V}_2(\epsilon_0(t)) &= -\theta\epsilon_0^T(t)S_\infty\epsilon_0(t) + 2\epsilon_0^TS_\infty\Phi(\hat{e}(t),\epsilon_0(t)) - \epsilon_0^T(t)C^TC\epsilon_0(t)
\end{aligned}$$

for some constant $\alpha > 0$.

Denote by $\|x\|_{S_\infty}$ the norm $(x^TS_\infty x)^{1/2}$ and by using the Schwarz inequality, we obtain

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(\hat{e}(t)) &\leq -\alpha\|\hat{e}(t)\|_p^2 + 2\mu(\theta)\|\hat{e}(t)\|_p\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty} \\
\dot{V}_2(\epsilon_0(t)) &\leq -\theta\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}^2 + 2\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}\|\Phi(\hat{e}(t),\epsilon_0(t))\|_{S_\infty} - \|C\epsilon_0(t)\|^2
\end{aligned}$$

where $|\hat{e}^T(t)PS_\infty^{-1}C^TC\epsilon_0(t)) \leq \mu(\theta)\|\hat{e}(t)\|_p\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}$, for some constant $\mu(\theta)$. Using the particular form of $\Phi(\epsilon_0(t),\hat{e}(t))$ and S_∞ and the fact that $\Phi(\epsilon_0(t),\hat{e}(t))$ is locally Lipschitzian in $\mathbb{R}^n$ we obtain

$$\|\Phi(\hat{e}(t),\epsilon_0(t))\|_{S_\infty} \leq \gamma\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}$$

for some constant γ. It follows that

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(\hat{e}(t)) &= \frac{d\|\hat{e}(t)\|_P^2}{dt} \leq -\alpha\|\hat{e}(t)\|_p^2 + 2\mu(\theta)\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}\|\hat{e}(t)\|_p \\
\dot{V}_2(\epsilon_0(t)) &= \frac{d\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}^2}{dt} \leq -2\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right)\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}^2.
\end{aligned}$$

Finally, we get

$$\frac{d\|\hat{e}(t)\|_P}{dt} \leq -\frac{\alpha}{2}\|\hat{e}(t)\|_p + \mu(\theta)\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty};\ \frac{d\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}}{dt} \leq -\left(\frac{\theta}{2} - \gamma\right)\|\epsilon_0(t)\|_{S_\infty}.$$

Hence, the solutions are of the form

$$\|\hat{e}(t)\|_p \leq K_1e^{-\alpha/2t} + K_2e^{-(\frac{\theta}{2}-\gamma)t},$$

with:

$$K_1 = \|\hat{e}(0)\|_p + \frac{\mu(\theta)\|\epsilon_0(0)\|_{S_\infty}}{\frac{\theta}{2} - \gamma - \frac{\alpha}{2}}, \quad K_2 = \frac{\mu(\theta)\|\epsilon_0(0)\|_{S_\infty}}{\gamma - \frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2}};$$

$$\|\epsilon_0\|_{S_\infty} \leq \|\epsilon_0(0)\|_{S_\infty} e^{-(\frac{\theta}{2}-\gamma)t}$$

i.e.

$$\|\hat{e}\|_p \leq (K_1 + K_2) e^{-\min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\theta}{2}-\gamma\}t}; \; \|\epsilon_0\|_{S_\infty} \leq \|\epsilon_0(0)\|_{S_\infty} e^{-(\frac{\theta}{2}-\gamma)t}$$

then

$$\|\hat{e}\|_p \leq (K_1 + K_2) e^{\frac{-\alpha t}{2}}.$$

Finally we choose θ such that $\theta > 2\gamma + \alpha$.
This completes the proof.

∎

4 An application to a Nonlinear Model

The following single-output system which represents a nonlinear model with coefficients in the field of real number $\mathbb{R}$ which is considered as an ordinary differential field (constants)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u x_2 \\ \dot{x}_2 &= u x_1 x_2 + u x_1 \; ; \quad u \neq 0 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{13}$$

From the differential primitive element $z_1 = x_1$ the following relationship holds

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 = y \\ z_2 &= u x_2 = \dot{y} \end{aligned} \tag{14}$$

$\{y, \dot{y}\}$ is a transcendence basis in $G/K\langle u\rangle$ which represents the nonlinear dynamics given in (13) and the transcendence degree of $G/K\langle u\rangle$ is given by $d^0 tr\ G/K\langle u\rangle = 2$ and its corresponding inverse.

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \frac{z_2}{u}, \qquad u \neq 0 \end{aligned}$$

The Jacobian matrix of the state coordinate transformation (14) is given by

$$J = \frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$$

$$|J| = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| = u \neq 0$$

which is clearly nonsingular if u is different to zero.

The GOCF for the system (13) is then obtained

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= u z_1 z_2 + u^2 z_1 + \frac{\dot{u}}{u} z_2 \end{aligned}$$

The corresponding desired trajectory is given by:

$$y_R(t) = 2\sin(t) \tag{15}$$

From expression (15) we compute the corresponding required time derivatives $\frac{dy_R(t)}{dt}, \frac{d^2 y_R(t)}{dt^2}$, constituting the vector $\psi_R(t)$ which will be used in dynamical observer-based controller.

Defining the tracking error as $e = y(t) - y_R(t) = x_1 - y_R(t)$, one obtains based on the results of section 3 the system of differential equation describing the tracking error dynamics as:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ee + \varphi(e_1, e_2, y_R, \tfrac{dy_R}{dt}, \tfrac{d^2 y_R}{dt^2}, u, \tfrac{du}{dt}) \\ \bar{e} &= e_1 \end{aligned} \tag{16}$$

where

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\varphi(e_1, e_2, y_R, \frac{dy_R}{dt}, \frac{d^2 y_R}{dt^2}, u, \frac{du}{dt}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e_1(u\frac{dy_R}{dt} + u^2) + e_2(u y_R + \frac{\frac{du}{dt}}{u}) \\ +e_1 e_2 u + u\frac{dy_R}{dt} y_R + u^2 y_R + \\ y_R \frac{\frac{du}{dt}}{u} - \frac{d^2 y_R}{dt^2} \end{pmatrix}$$

The system (16) is observable then we propose a nonlinear exponential observer [6,7] for the estimation of the tracking error.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= E\hat{e} + \Phi(\epsilon_0(t), \hat{e}(t)) - S_\infty^{-1} C^T (C\hat{e} - e_1) \\ 0 &= -\theta S_\infty - E^T S_\infty - S_\infty E + C^T C \end{aligned} \tag{17}$$

Exact linearization of the tracking error dynamics can now be accomplished by equating the last differential equation in (16) to a linear time invariant expression in the error coordinates (see (12)).

$$-L_0\left(\psi_R(t) + e, u, \frac{du}{dt}\right) - \frac{d^2 y_R(t)}{dt} = -a_1 e_1 - a_2 e_2$$

One can write the nonlinear time varying dynamical regulator equation as:

$$\frac{du}{dt} = \frac{u a_1 \hat{e}_1 + u a_2 \hat{e}_2 + u\frac{d^2 y_R}{dt^2} - u^3 y_R - \hat{e}_1 (u\frac{dy_R}{dt} + u^2) u - \hat{e}_2 u^2 y_R - \hat{e}_1 \hat{e}_2 u^2 - u^2 \frac{dy_R}{dt} y_R}{\hat{e}_2 + y_R} \tag{18}$$

5 Numerical Simulations

The observer,based controller strategy (18) has been applied to the nonlinear model (13), the initial conditions for the system are $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ and for the dynamical controller-observer were chosen to be $u = 0$.

Figure 1 shows desired sinusoidal trajectory $y_R(t)$ and the actual dynamical controlled response x_1.

Figure 2 depicts the derivative reference trajectory $\frac{dy_R}{dt}(t)$ and the resulting actual dynamical controlled response x_2. The tracking error asymptotically converges to zero.

6 Concluding Remarks

An observer-based controller has been proposed for a class of nonlinear systems. In particular, sufficient conditions have been given to guarantee the stability of the closed-loop system including the observer. This result illustrates the connections between the gain of the observer and the gain of the controller.

7 References

[1] Diop, S. Fliess, M. "*On nonlinear observability*", Proc. of the First European Control Conference. Commault et al, Grenoble 1991, Paris Hermes, pp. 152-157.

[2] Fliess, M. "*Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics*", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-35 Sep 1990, pp. 994-1001.

[3] Fliess, M. "*Nonlinear control theory and differential algebra*" in Modelling and Adaptative Control. C. Byrnes and A. Kurszhanski Eds. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 105 Springer-Verlag-Berlin, 1988, pp. 134-145.

[4] Fliess, M. "*Quelques remarques sur les observateurs non linéaires*", Proc. of the Coll. GRETSI Traitement Signal Images. Nice, 1987, pp. 169-172.

[5] Sira-Ramirez, H. "*The differential Algebraic approach in nonlinear dynamical feedback controlled landing maneuvers*", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 37, Apr. 1992, pp. 518-524.

[6] Martínez-Guerra, R., De León-Morales, J. "*Observers for a Multi-input Multi-output Bilinear Systems Class: A Differential Algebraic Approach*", J. of Math. and Computer Modelling, Vol. 20, No. 12, 1994, pp. 125-132.

[7] Martínez-Guerra, R., De León-Morales, J. "*Some results about nonlinear observers for a class of bilinear systems*", American Control Conference Seattle, Washington, 1995, pp. 1643-1644.

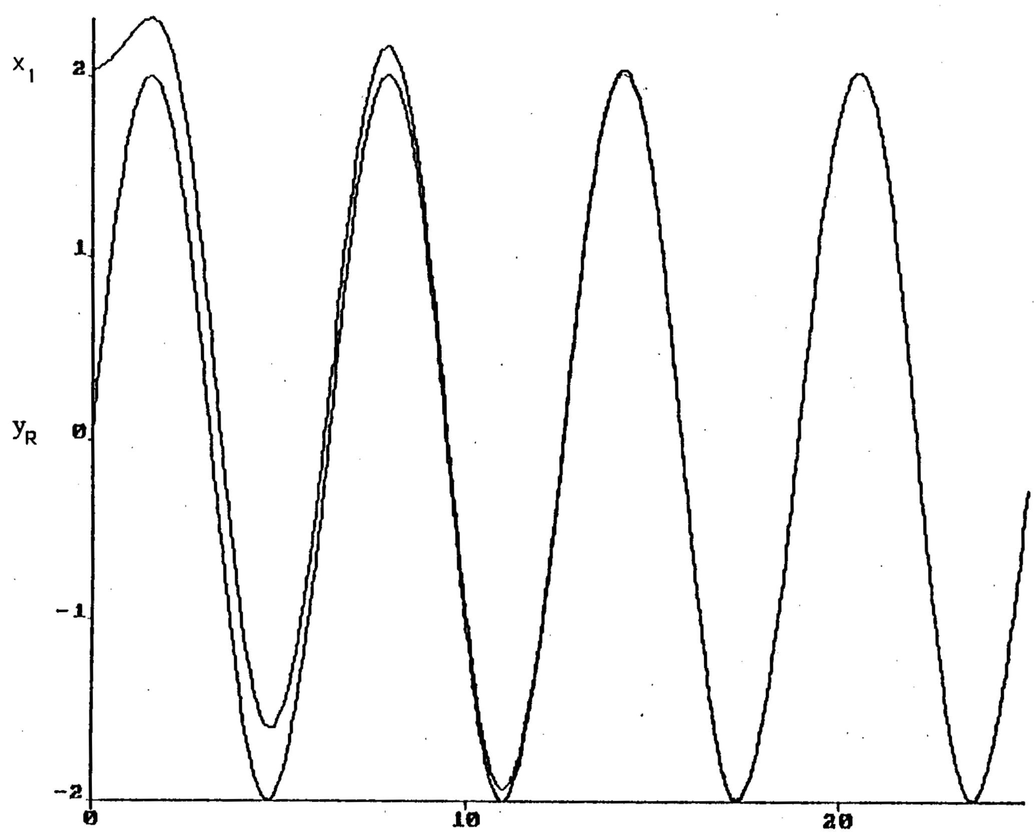

Fig. 1

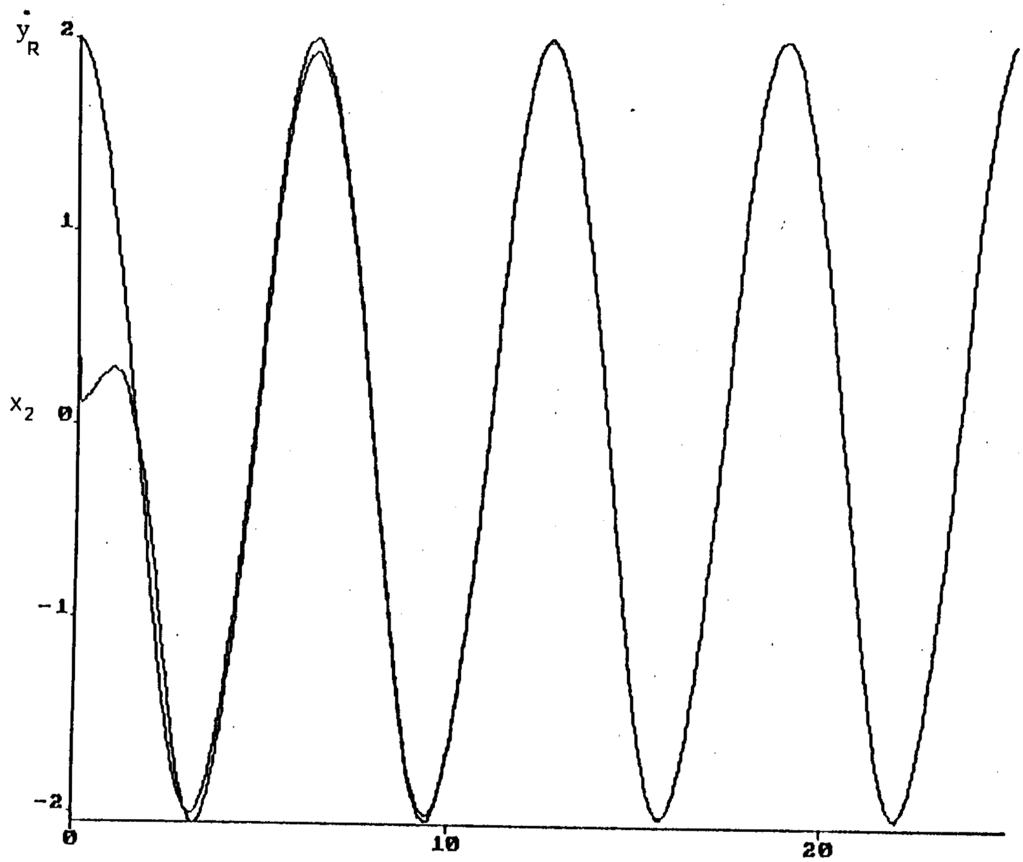

Fig. 2

Anexo D

≪On Observers for a Class of Bilinear Systems≫

R. Martínez-Guerra, J. Alvarez-Ramírez
en IEEE Conf. on Control Applications, Vancouver, B.C. Canadá, pp 777-781, 1993.

On Observers for a Class of Bilinear Systems

Rafael Martinez and José Alvarez

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa
Apartado Postal 55-534
México, D.F., 09340 MEXICO

Abstract - In this note, by means of differential algebra tools, an essential result on the *translated* Generalized Observability Canonical Form (GOCF) and an asymptotic nonlinear observer for one-output reconstructible bilinear systems are given.

Keywords: *Differential primitive element, translated generalized observability canonical form, bilinear systems.*

1. Introduction

An important problem in system theory is to estimate the non-directly accessible quantities. The main issue is the construction of an observer which, using knowledge of the inputs and outputs, estimates the non-directly accessible components of the state or the unknown structural parameters.

Recently, some researchers have given ideas for the construction of asymptotic observers for bilinear systems. Among them are Williamson [10], Fliess [3,4], Grasselli and Isidori [6], Hammouri and Morales [7], Zeitz [11], etc. The central idea is to the construction of the observer using some nonlinear canonical form. In general, such methodologies involve the solution of a set of partial differential equations (PDE) [11].

Departing from a differential algebra approach [1-4], in this note we address the synthesis of asymptotic observers for a class of bilinear systems. The differential algebra approach allows an easier way of defining observability and reconstruction concepts [1,2,3].

2. Statement of the Problem.

Let the following basic definitions be considered [3].

Definition 1. A quantity is said to be reconstructible if and only if it can be obtained as a function of the inputs and the outputs, and of a finite number of their time derivatives.

The reconstruction problem of a non-directly accessible quantity can be seen as resulting from the outputs measurement and a finite number of their time derivatives. In general reconstructing these time derivatives is very hard. To overcome this difficulty we search an asymptotic observer.

Definition 2. A system is Picard-Vessiot (PV) if and only if the $k\langle u\rangle$-vector space generated by the derivatives of the set $\{\overset{(\mu)}{y}, \ \mu \geq 0\}$ has finite dimension. In other words, the $k\langle u\rangle$-vector space generated by the derivatives of the above set has zero as differential dimension.

Let us consider the following bilinear system (BS) class:

$$\dot{x} = (A_0 + \sum_{1}^{m} A_i u_i)x, \qquad x \in R^n, \qquad (1)$$
$$y = Cx, \qquad y \in R,$$

where A_i, $0 \le i \le m$, and C are real matrices of appropriate size. Furthermore, suppose that (1) is reconstructible.

Remark 1. It is not hard to prove that all bilinear systems are PV [5]. ∎

Now, we pose the following problem:
Is it possible to synthesize an asymptotic observer for the system (1)?

3. Generalized Observability Canonical Form (GOCF).

By the differential algebraic generalization of the Primitive Element Theorem [2], there exists an element $\bar{y}$ and $\eta \ge 0$ to be the minimum integer such that $\bar{y}^{(\eta+1)}$ is analytically dependent on $\bar{y}$, $\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(\eta)}$, $u, u^{(1)}, \ldots$; i.e.,

$$H(\bar{y}^{(\eta+1)}, \bar{y}^{(\eta)}, \ldots, \bar{y}, u, u^{(1)}, \ldots\ldots, u^{(\gamma)}) = 0.$$

which can be solved locally as:

$$\bar{y}^{(\eta+1)} = -\mathcal{L}(\bar{y}, \ldots, \bar{y}^{(\eta)}, u, u^{(1)}, \ldots\ldots, u^{(\gamma)})\cdot$$

Let $\xi_i = \bar{y}^{(i)}$, $0 \le i \le \eta$. Then a local state space form is obtained which can be written as a GOCF:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_0 &= \xi_1 \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
&\ \ \vdots \\
\dot{\xi}_{\eta-1} &= \xi_\eta \\
\dot{\xi}_\eta &= -\mathcal{L}(\xi_0, \ldots, \xi_\eta, u, \ldots, u^{(\gamma)}) \\
\bar{y} &= \xi_0
\end{aligned} \tag{2}$$

The following proposition states that by an appropriate choice of the differential primitive element, it is possible to obtain a *translated* GOCF:

Proposition 1. If the BS is PV, and the differential primitive element is chosen as a linear combination of the states and the inputs of the system (see [8]):

$$y = \sum_i^n \alpha_i x_i + \sum_j^m \beta_j u_j \qquad \alpha_i, \beta_j \in k\langle u\rangle,$$

where $u = (u_1, \ldots, u_m)$, and $k\langle u\rangle$ denotes the differential field generated by k and u. Then, the BS class (1) is transformable to the following *translated* GOCF:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_u z + \varphi(u) \\
y &= Cz = z_1
\end{aligned} \tag{3}$$

where $\varphi(u)$ is a nonlinear vector. The vector $\varphi(u)$ is the translation vector of the GOCF (2), i.e., if $\varphi(u) = 0$, system (3) is reduced to the GOCF (2). Moreover, the matrix A_u has its entries in $k\langle u\rangle$:

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma(u, \ldots, & u^{(\gamma)}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Proof. Let the set $\{ c, c^{(1)}, \ldots, c^{(n-1)}\}$ be a finite differential transcendence basis with $c^{(i-1)} = y^{(i-1)}$, $1 \le i \le n$, where $n \ge 0$ is the minimum integer such that $y^{(n)}$ is dependent of y, $y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$, $u, \ldots\ldots$ Redefining $z_i = c^{(i-1)}$ $1 \le i \le n$, yields

$$\dot{z}_j = z_{j+1} \qquad 1 \le j \le n-1$$

$$\dot{z}_n = -\Sigma(z_1, \ldots, z_n, u, \ldots, u^{(\gamma)}) + g(u, \ldots, u^{(\gamma)})$$

which can be rewritten as in (3)-(4), along with $\varphi(u) = [0\ 0 \ldots 0, g(u, \ldots, u^{(\gamma)})]^t$. ∎

Remark 2. We can take the BS (1) to the *translated* GOCF by means of:

$$z = \Psi x \tag{5}$$

where Ψ is a matrix with entries in $k\langle u\rangle$. Because this relation depends on u, there exist inputs u for which Ψ is singular. If u is an input for which (5) is nonsingular, then u is called a *good input* (GI). ∎

4. Observer Design.

We have the following result on the existence of an asymptotic observer for the BS class (1).

Lemma 1. Consider the reconstructible single output system (3). Then

$$\dot{\hat{z}} = A_u\hat{z} - L_u(y - \hat{y}) + \varphi(u) \qquad (6)$$

is an asymptotic observer, where $\hat{z}$ is an estimate of z. Furthermore, the entries of the observer gain matrix L_u are in k<u>, and $\|z(t) - \hat{z}(t)\| \le \nu \exp(-\delta t)$ with constant $\delta > 0$ (δ independent of the input u).

Proof. Defining the observation error as $e = z - \hat{z}$, we have that $\dot{e} = \dot{z} - \dot{\hat{z}}$. Substitution of (3) and (6) in the above error dynamic yields:

$$\dot{e} = (A_u + L_uC)e$$

Let us choose a constant matrix K with $\sigma(K) \subset C^-$, where $\sigma(K)$ is the spectrum of the matrix K. If we set $A_u + L_uC = K$, then

$$L_uC = K - A_u \qquad (7)$$

and there is a positive constant δ (independent of the input u) such that $\|e(t)\| \le \nu \exp(-\delta t)$. As C has constant entries, L_u must have its entries in k<u>. Finally, we shall show that (7) has at least one solution for L_u. It is not hard to see that the characteristic polynomial of $A_u + L_uC$ is given by:

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(L_u, u, \dot{u}, \ldots)\, \lambda^{n-j} \qquad (8)$$

where $\alpha_j(L_u, u, \dot{u}, \ldots) = L_{uj} + \rho(\ell_j, u, \dot{u}, \ldots)$ and $\ell_j = \{ L_{ui} : 1 \le i < j \}$. Let the following polynomial

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, \lambda^{n-j} \qquad \beta_j = \text{constant} \quad 1 \le j \le n \qquad (9)$$

be the characteristic polynomial of the matrix K. By matching the coefficients of (8) and (9), and solving for L_u we obtain:

$$L_{uj} = \beta_j - \rho(\ell_j, u, \dot{u}, \ldots) \qquad 1 \le j \le n.$$

Therefore, (7) has at least one solution for L_u. ∎

Corollary 1. Suppose that u is a GI. Then, the dynamical system (6) along with:

$$x = \Phi^{-1}(z) \qquad (10)$$

constitute an asymptotic observer for the BS class (1).

Proof. From proposition 1, system (1) is transformable to the translated GOCF (3). From lemma 1, (6) is an asymptotic observer for (3). Since u is a GI, the matrix Φ in (5) is globally invertible. Hence, the dynamical system (6) and (10) generate asymptotic estimates of the states of the system (1). ∎

5. Examples.

Example 5.1. Consider the following chemical reactor model [9]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(x_{1e} - x_1) - rx_1 \\ \dot{x}_2 &= -ux_2 + rx_1 \end{aligned} \qquad (11)$$

where x_1 and x_2 denote the reactant and product concentrations, respectively. The input u corresponds to the input-flow of reactant. r and x_{1e} denote kinetic and reactor parameters. For the output $y = x_2$, it is easy to see that the system (11) is reconstructible.

From the differential primitive element $z_1 = x_2$, it is derived the following relationship:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 \\ z_2 &= rx_1 - ux_2 \end{aligned} \qquad (12)$$

which transforms system (11) to the translated GOCF (3), with A_u given by

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(2u^2 + ur) + u^2 - \dot{u} & -(2u + r) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ rux_{1e} \end{pmatrix}.$$

By lemma 1, it is possible to construct an asymptotic observer (6) for system (11). In fact, this is attained by choosing the observer gain matrix $L_u = [L_{u1}\ L_{u2}]^t$ in the form:

$$L_{u1} = \beta_1 + (2u + r) \qquad \beta_1 < 0$$

$$L_{u2} = -\beta_2 - L_{u1}(2u + r) + u^2 + ur + \dot{u} \qquad \beta_2 > 0$$

The eigenvalues of the observer, λ_1 and λ_2, are related to β_1 and β_2 by:

$$\beta_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \beta_2 = \lambda_1\lambda_2$$

Figures 1a,b show the dynamics of the reactor states x and their estimates x_e. The input was taken as $u(t) = 0.5 + 0.2\mathrm{Sin}(0.1t)$; the reactor parameters took the values $r = 2.0$ and $x_{1e} = 1.0$. The observer eigenvalues was placed at -1.0 and -0.5.

Example 5.2. In order to show the effect of the singularities of the matrix A_u in the observation dynamics, let us consider the following system, which is reconstructible if u is a GI.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ux_2 \\ \dot{x}_2 &= ux_1 \qquad\qquad (13) \\ y &= x_1 \ . \end{aligned}$$

As in the above example, the *relationship*

$$z_1 = x_1$$
$$z_2 = ux_2$$

transforms the system (13) to the GOCF (3). Hence,

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u^2 & \dot{u}/u \end{pmatrix} \qquad (14)$$

and $\varphi(u) = 0$. By choosing the gain matrix of the observer L_u as:

$$L_{u1} = \beta_1 - \dot{u}/u \qquad L_{u2} = -\beta_2 + L_{u1}(\dot{u}/u) - u^2$$
$$\beta_1 < 0, \quad \beta_2 > 0$$

we can construct an observer as in lemma 1. Observe that the dynamics of the system (13) in the GOCF is not well defined at u = 0: the system (13) is not reconstructible. Assume that the input $u(t) = 1.0 + \sin(2t)$ is applied to (13). In order that (14) be well defined, consider the following *"regularization"* $u_r(t)$ of the input u(t):

$$u_r(t) = \begin{cases} c & \text{if} \quad |u(t)| \le c \\ u(t) & \text{otherwise} \end{cases}$$

and construct the observer with A_{u_r}. Figs. 2a,b show *the dynamical* behavior of x, and its estimate x_e, for $= 10^{-6}$. When $u_r(t) \neq u(t)$, there is a peaking in the estimates, eventhough the mismatching of the observation is maintained bounded.

References.

[1] Diop, S. and Fliess, M., "On nonlinear observability", *Proc. First. European Contr. Conf.*, C. Commault *et al.*, Grenoble, 1991. Paris: Hermès, pp. 152-157.

[2] Diop, S. and Fliess, M., "Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories". *IEEE Proc. 30th. Conf. Dec. Contr.*, Brighton, England, December 1991, pp. 714-719.

[3] Fliess, M., "Quelques remarques sur les observateurs non linéaires", *Proc. Coll. GRETSI trait. signal Images*, Nice, 1987, pp. 169-172.

[4] Fliess, M., "Nonlinear control theory and differential algebra", in *Modelling and adaptive control, Lectures Notes in Control and Inform. Sc.*, Vol 105, N. Y.: Springer-Verlag, pp. 134-145, 1988.

[5] Fliess, M. and Reutenauer C., "Une application de

l'algèbre différentielle aux systèmes réguliers (ou bilineaires)", In *Analysis and Optimization of Systems*, Proc. Conf. Versailles, Bensoussan A. and Lions J.L. Eds., Lect. Notes Contr. Inf. Sc., 44, Springer-Verlag, Berlin, pp. 99-107, 1982.

[6] Grasselli, O. M., and Isidori, A., "An existence theorem for observers of bilinear systems", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-26 No. 6, Dec. 1981, pp. 1299-1300.

[7] Hammouri, H. and J.L. Morales, "Observer synthesis for state-affine systems", *IEEE Proc.29th. Conf. Dec. Contr.*, Honolulu, HI., Dec. 1990, pp. 784-785.

[8] Martinez, R. and Alvarez J., "A note on observers for a bilinear system class", *IEEE Proc. 31st. Conf. Dec. Contr.*, Tucson, AZ, December, 1992, pp. 3434-3435.

[9] Perlmutter, D. *Stability of Chemical Reactors*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.

[10] Williamson, D., "Observation of bilinear systems with application to biological control", *Automatica*, Vol. 13, 1977, pp. 243-254.

[11] Zeitz, M., "Canonical forms for nonlinear systems", *In Geometric Theory of Nonlinear Control Systems*, B. Jakubczyk, W. Respondek, K. Tchon Eds. Technical University of Wroclaw / Poland, pp. 255-278, 1986.

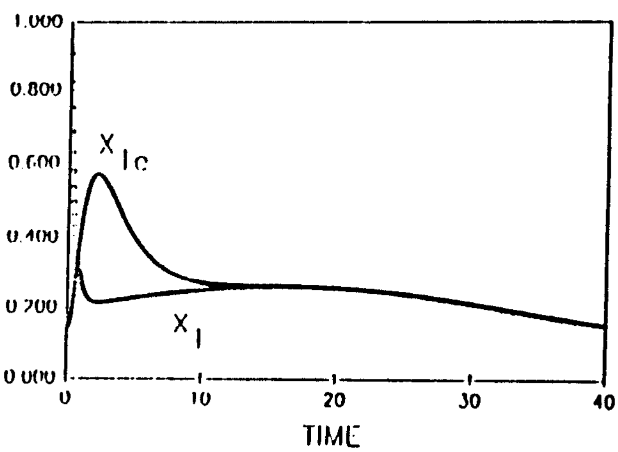

Figure 1.a

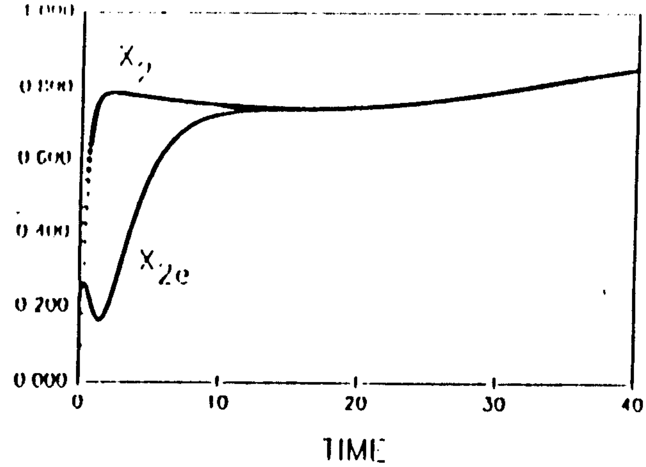

Figure 1.b

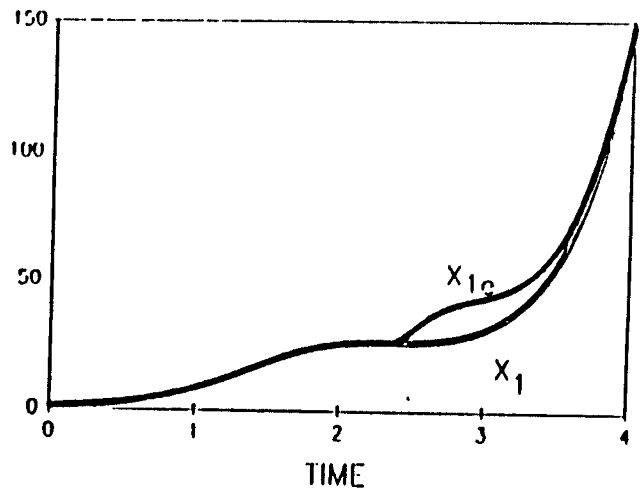

Figure 2.a

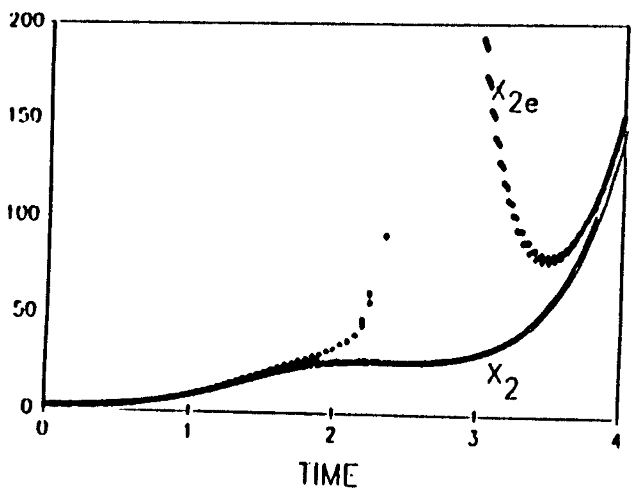

Figure 2.b

Anexo E

≪A New Differential Algebraic Approach for the Estimation of the State of a Class of Bilinear Systems≫

R. Martínez-Guerra.
en Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 14, pp 289-295, 1994.

APORTACIONES MATEMÁTICAS Serie Comunicaciones 14 (1994) 289–295

A NEW DIFFERENTIAL ALGEBRAIC APPROACH FOR THE ESTIMATION OF THE STATE OF A CLASS OF BILINEAR SYSTEMS

RAFAEL MARTÍNEZ GUERRA
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa
Apartado Postal 55-534, México DF 09340, México
email: rafa@xanum.uam.mx

Abstract. A differential algebraic approach is proposed for the estimation of the states of a class of bilinear systems. An observer is easily constructed for a single output observable bilinear system class (in the Diop-Fliess' observability sense) which can be carried out into a *Translated* Fliess' generalized observability canonical form (GOCF) with *output injection* by means of an adequated differential primitive element. An application to a chemical reactor model is given.

Key words: Differential primitive element, *translated* generalized observability canonical form, observer, bilinear systems, output injection

1. Introduction

A system whose task is to give an estimation of the state is called an observer. An important problem in system theory is to estimate the non-directly accesible quantities using knowledge of the inputs and outputs through an observer.

An estimation of the state for linear systems is given by the Luenberger's observer while, for bilinear systems and in general for nonlinear ones, the construction of observers is more difficult.

Recently, some authors have given some ideas for the synthesis or observers design of bilinear systems either by the differential geometric viewpoint (theory mainly due to Hermann, Krener, Isidori, Nijmeijer, Van der Schaft, Gauthier, Zeitz, Williamson, Levine, Marino, etc.) or by the algebraic one (introduced by Fliess in 1986). The latter approach is based on differential algebra and has, among other features, that of being able to define observability [1,2] and, consequently, gives an estimation of the states through observers design [5,6] for systems represented by an arbitrary set of algebro-differential equations.

In this paper the observer synthesis problem is addressed in the algebraic direction. We propose the construction of an asymptotic nonlinear observer for one-output observable bilinear system. An application to a chemical reactor model is given.

2. Statement of the Problem

We start with some basic definitions which are considered in [1].

Definition 1: A *dynamics* is a finitely generated differential algebraic extension $G/k\langle u\rangle$. This means that any element of G satisfies an algebraic differential equation with coefficients which are rational functions over k in the components of u and a finite number of their time derivatives.

Definition 2: Let a subset $\{u, y\}$ of G in a dynamics $G/k\langle u\rangle$. An element in G is said to be *observable with respect to* $\{u, y\}$ if it is algebraic over $k\langle u, y\rangle$. Therefore a state $\bar{x}$ is said to be *observable* if, and only if, it is observable with respect to $\{u, y\}$.

Definition 3: A dynamics $G/k\langle u\rangle$ with output y is said to be *observable* if, and only if, any state is so.

Here, the concept of observability means that the differential field extension $G/k\langle u, y\rangle$ is algebraic; that is to say, that the whole differential information is contained in $k\langle u, y\rangle$.

Let us now consider the following Bilinear *System Class* (BS):

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \Big(A_0 + \sum_i^m A_i u_i\Big)x + Bu, \qquad x \in \mathbf{R}^n \\
y &= Cx \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y \in \mathbf{R}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

where A_i, $0 \le i \le m$, B and C are real matrices of appropriate size. Suppose that BS (1) is observable in the Diop-Fliess' observability sense, and let us pose the following problem: is it possible to synthesize an asymptotic observer for the system (1)? The answer is yes, and is solved in the fourth section.

3. Fliess' local generalized observability canonical form

According to the theorem of the differential primitive element there exists an element y and n the smallest integer such that $y^{(n)}$ is algebraically dependent on y, $y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$, u, $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$, i.e.,

$$y^{(n)} = -\mathcal{L}(y, \ldots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}). \tag{2}$$

Let $\xi_i = y^{(i-1)}$, $1 \le i \le n$. Then, we can write a local state space representation in the special form of a generalization of the observability canonical form. Such a canonical form is the GOCF given by:

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_j &= \xi_{j+1}, \quad 1 \le j \le n-1 \\
\dot{\xi}_n &= -\mathcal{L}(\xi, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \\
y &= \xi_1.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Further details can be found in [8].

The following proposition states that, by an appropriate choice of the differential primitive element, it is possible to obtain a *Translated* Fliess' GOCF with *output injection*.

Proposition 1: *Let the BS (1) be given. If the differential primitive element is chosen like:*

$$y = \sum_{i}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j}^{m} \beta_j u_j \qquad \alpha_i, \beta_j \in k\langle u \rangle$$

then the BS (1) is transformable to the Translated Fliess' GOCF with output injection given by:

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= A_u \tau + \varphi(u, y) \\ y &= C\tau = \tau_1, \end{aligned} \tag{4}$$

where $\varphi(u, y)$ is a nonlinear vector. The vector $\varphi(u, y)$ is the translation vector of the GOCF and y denotes the output injection in the translation vector. Futhermore, the matrix A_u has entries in $k\langle u \rangle$:

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -\sigma(u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma)}) \end{bmatrix}, \quad \varphi(u, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(u, \dots, u^{(\gamma)}, y) \end{bmatrix}.$$

Remark 1: In general, by choosing an adequated differential primitive element, it is possible to transform a nonlinear system of the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + ug(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

into the *Translated* Fliess' GOCF with *output injection* [4] and a finite number of their time derivatives, i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= A_{(u, y, \dot{y}, \dots, y^{(\mu)})} \tau + \varphi(u, y, \dot{y}, \dots, y^{(\mu)}), \quad \mu < \infty \\ y &= \tau_1 \end{aligned} \tag{4*}$$

where $A_{(u, y, \dots, y^{(\mu)})}$ and $\varphi(u, y, \dots, y^{(\mu)})$ are given by

$$A_{(u, y, \dots, y^{(\mu)})} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -\sigma(u, \dots, u^{(\gamma)}, y, \dots, y^{(\mu)}) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(u, y, \dots, y^{(\mu)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(u, \dot{u}, \dots, u^{(\gamma)}, y, \dots, y^{(\mu)}) \end{bmatrix}$$

Remark 2: We can take the $BS(1)$ into a *Translated* Fliess' GOCF by means of

$$\tau = \theta x \tag{5}$$

where θ is a matrix with entries in $k\langle u\rangle$.

As a last definition we have:

Definition 4: If u is an input to the system for which (5) is nonsingular then u is called a *good input* (GI).

Actually, we work with good inputs (GI).

Remark 3: For an observable BS class (4) in the Diop-Fliess' observability sense any state τ is observable with respect to $\{u, y\}$, in other words, τ is algebraic differentially over $k\langle u, y\rangle$.

4. Observer synthesis

An existence result of an asymptotic observer for the BS Class (1) follows.

Lemma 1: *Consider the observable single output system (4). Then*

$$\dot{\hat{\tau}} = A_u\hat{\tau} - L_u(y - \hat{y}) + \varphi(u, y) \tag{6}$$

is an asymptotic observer, where $\hat{\tau}$ is an estimate of τ. Furthermore, the entries of observer's gain matrix L_u are in $k\langle u\rangle$ and $\|\tau(t) - \hat{\tau}(t)\| \leq \nu \exp(-\delta t)$ with constant $\delta > 0$, δ independent of the input.

Remark 4: If the system (4) is time-invariant, the observer system (6) just mentioned above is reduced to the observer system given by Krener-Isidori [4].

Remark 5: An observer can be easily constructed for the system (4*), that is:

$$\dot{\hat{\tau}} = A_{(u,y,\ldots,y^{(\mu)})}\hat{\tau} - L_u(y - \hat{y}) + \varphi(u, y, \dot{y}, \ldots, y^{(\mu)}).$$

Corollary 1: *Suppose that u is a GI. Then the dynamical system (6), along with*

$$x = \theta^{-1}\tau, \tag{7}$$

constitute an asymptotic observer for the BS class (1).

5. Application to a chemical reactor model

The following two-dimensional single-input single-output system represents a chemical reactor model [7]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(C_e - x_1) - rx_1 \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - ux_2 \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{8}$$

with coefficients in the field of real numbers $\mathbf{R}$, which is considered as an ordinary differential field (of constants).

In (8) x_1 and x_2 denote the reactant and product concentrations respectively. The input u corresponds to the input-flow of reactant r and C_e denote kinetic and reactor parameters.

For the output $y = x_2$ it is not hard to see that the system (8) is observable in the Diop-Fliess' observability sense. If u and $y = x_2$ are measured then x_1 and x_2 verify: $x_2 - y = 0$ and $rx_1 - \dot{y} - uy = 0$.

Hence $k\{u, y, x\}$ is integral over $k\{u, y\}$, and x_1 and x_2 are universally observable [2,3]. The external behavior with respect to u and y is described by the following equation [3]:

$$\ddot{y} + (2u + r)\dot{y} + (u^2 + ru + \dot{u})y - ruC_e = 0.$$

From the differential primitive element $z_1 = x_2$ the following relationship holds

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 \\ z_2 &= rx_1 - ux_2 \end{aligned}$$

which transforms system (8) into the *Translated* Fliess' GOCF with *output injection* where A_u and $\varphi(u, y)$ are given respectively by:

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -(2u + r) \end{bmatrix}, \quad \varphi(u, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ ruC_e + [-u^2 - \dot{u} - ur]y \end{bmatrix}$$

where $\varphi(u, y)$ is a nonlinear vector of the GOCF and y denotes the *output injection*.

If u and $y = x_1$ are known, x_1 verifies $x_1 - y = 0$, but x_2 does not verify an algebraic differential polynomial over $k\langle u, y\rangle$, then x_1 is universally observable, but x_2 is not.

From Lemma 1 it is possible to construct an asymptotic observer (6) for system (8). This is attained by choosing the observer's gain matrix $L_u = [L_{u_1}, L_{u_2}]^T$ in the form:

$$\begin{aligned} L_{u_1} &= \psi_1 + (2u + r), \quad \psi_1 < 0 \\ L_{u_2} &= -\psi_2 - (\psi_1 + 2u + r)(2u + r), \quad \psi_2 > 0. \end{aligned}$$

The dynamics of the reactor states x and their estimates x_e are shown in figures 1 and 2. The input was taken as $u(t) = 0.5 + 0.2\sin(.1t)$; and the reactor parameter values $r = 2.0$ and $C_e = 1.0$.

Remark 6: The observer (6)-(7) has been tested numerically in the case of a chemical reactor. Applying an arbitrary observer pole placement an exponential decaying in the observation error was obtained.

References

1. Diop, S. and Fliess, M., *"Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories"*. IEEE Proc. 30th Conf. Dec. Contr., Brighton, England, December 1991, pp. 714-719.

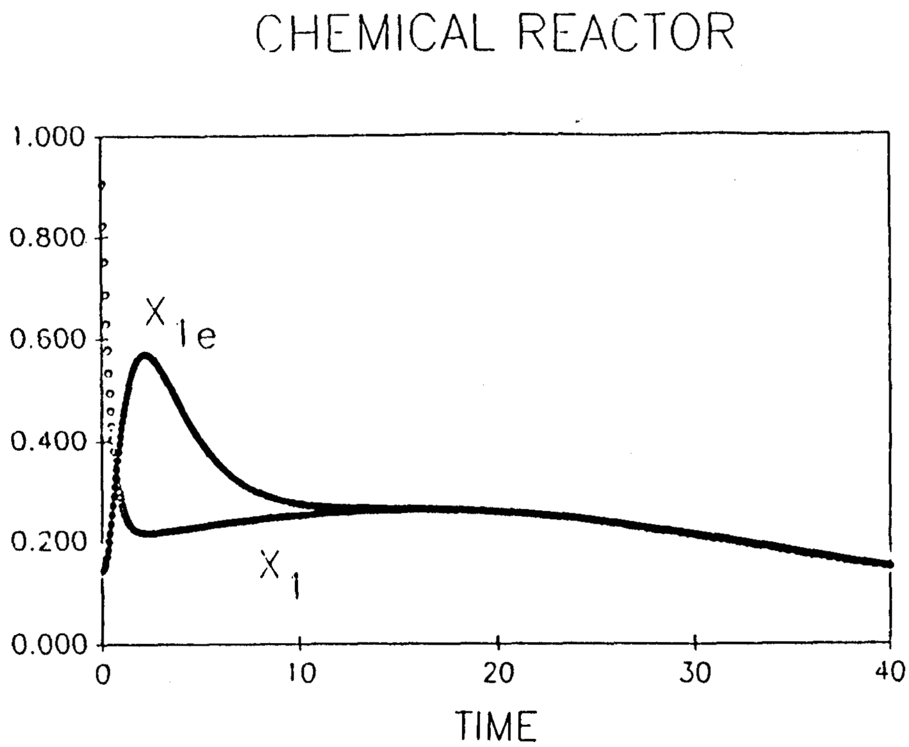

Fig. 1.

2. Diop, S., "*On Universal Observability*". IEEE Proc. 31st Conf. Dec. Contr., Tucson, Az., Dec. 1992, pp. 3669-3672.
3. Diop, S. "*Closedness of morphisms of differential algebraic sets. Applications to system theory*", Forum Math., to appear.
4. Krener, J.A. and Isidori, A., "*Linearization by output injection and nonlinear observers*". Syst. & Contr. Lett. Vol. 3, Jun 1983. pp. 47-52.
5. Martínez, R. and Alvarez, J., "*A Note on Observers for a Bilinear System Class*". IEEE Proc. 31st Conf. Dec. Contr., Tucson, Az., Dec. 1992, pp. 3434-3435.
6. Martínez, R. and Alvarez, J., "*On Observers for a Class of Bilinear Systems*", IEEE Proc. 2nd.

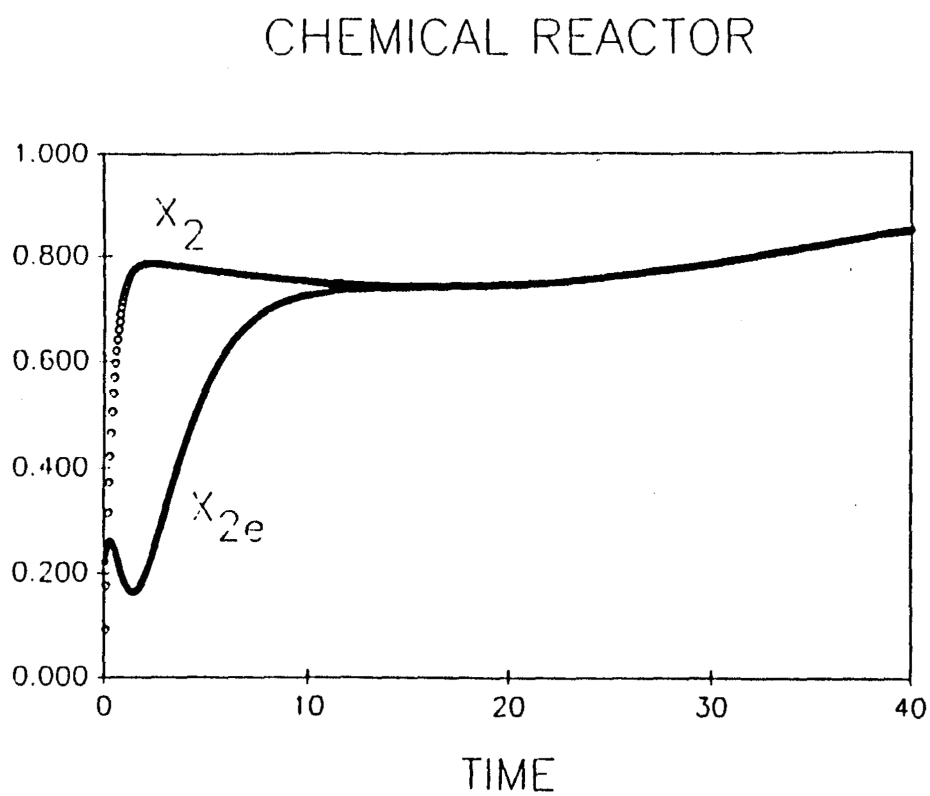

Fig. 2.

Conf. on Contr. Appl. Vancouver, Canada, Sept. 1993, pp. 777-781.

7. Perlmutter, D., "*Stability of Chemical Reactors*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.
8. Sira-Ramírez, H., "*The differential algebraic approach in nonlinear dynamical feedback controlled landing manouvers*". IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 37, Apr. 1992, pp. 518-524.

Anexo F

≪Estimation of the States of a Class of Bilinear Systems: A Differential Algebraic Approach≫

R. Martínez-Guerra.
en IEEE Conf. on Dec. and Control, San Antonio, Texas, pp 735-736, 1993.

Proceedings of the 32nd Conference
on Decision and Control
San Antonio, Texas · December 1993

Estimation of the States of a Class of Bilinear Systems: A Differential Algebraic Approach.

Rafael Martínez Guerra

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal 55-534
México, DF. 09340 MEXICO

Abstract

A differential algebraic approach is proposed for the estimation of the states of a class of bilinear systems. An observer is easily constructed for a single output observable bilinear system class (in the Diop-Fliess' Observability sense). An application to a chemical reactor model is given.

1. Introduction.

A system whose task is to give an estimation of the state is called an observer. An important problem in system theory is to estimate the non-directly accesible quantities using knowledge of the inputs and outputs through an observer.

An estimation of the state for linear systems is given by the Luenberger's observer while for bilinear systems and in general for nonlinear ones the construction of observers is more difficult.

Recently, some authors have given some ideas for the synthesis or observers design of bilinear systems either by the Differential geometric viewpoint (theory mainly due to Hermann, Krener, Isidori, Nijmeijer, Van der Schaft, Gauthier, Zeitz, Williamson, Levine, Marino, etc.) or by the algebraic one (introduced by Fliess in 1986). The latter approach is based on differential algebra and has among other features of being able to define observability [1,2] and consequently gives an estimation of the states through Observers Design [5,6] for systems represented by an arbitrary set of algebro-differential equations.

This paper is addressed in the algebraic direction. We propose the construction of an asymptotic nonlinear observer for one-output observable bilinear system. An application to a chemical reactor model is given.

2. Statement of the Problem.

We start with some basic definitions which are considered in [1].

Definition 1. *A Dynamics is a finitely generated differential algebraic extension $G/k\langle u\rangle$. This means that any element of G satisfies an algebraic differential equation with coefficients which are rational functions over k in the components of u and a finite number of their time derivatives.*

Definition 2. *Let a subset $\{u,y\}$ of G in a dynamics $G/k\langle u\rangle$. An element in G is said to be observable with respect to $\{u,y\}$ if it is algebraic over $k\langle u,y\rangle$. Therefore a state x is said to be observable if and only if it is observable with respect to $\{u,y\}$.*

Definition 3. *A dynamics $G/k\langle u\rangle$ with output y is said to be observable if, and only if, any state is so.*

Here, the concept of observability means that the differential field extension $G/k\langle u,y\rangle$ is algebraic; that is to say, that the whole differential information is contained in $k\langle u,y\rangle$.

Let us now, consider the following Bilinear *System Class* (BS):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0+\sum_i^m A_i u_i)x + Bu, \quad x\in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx, \qquad\qquad\qquad\qquad y\in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

where A_i, $0\le i\le m$, B and C are real matrices of appropiate size.

Suppose that BS (1) is observable in the Diop-Fliess' Observability sense, then let us pose the following problem.

Is it possible to synthesize an asymptotic observer for the system (1)?. The answer is yes, and is solved in the fourth section.

3. Fliess' Local Generalized Observability Canonical Form.

According to the theorem of the differential primitive element there exists an element y and let n also be the smallest integer such that $y^{(n)}$ is algebraically dependent on $y, y^{(1)},\dots,y^{(n-1)}$, u, $u^{(1)}, u^{(2)},\dots$, i.e. :

$$y^{(n)} = -\mathcal{L}(y,\dots,y^{(n-1)},u,u^{(1)},\dots,u^{(\gamma)}). \tag{2}$$

Let $\xi_i = y^{(i-1)}$, $1\le i\le n$. Then, we can write a local state space representation in the special form of a generalization of the observability canonical form. Such a canonical form is the GOCF given by:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= \xi_{j+1}, \quad 1\le j\le n-1 \\ \dot{\xi}_n &= -\mathcal{L}(\xi,u,u^{(1)},\dots,u^{(\gamma)}) \\ y &= \xi_1 ; \end{aligned} \tag{3}$$

further details on this can be found in [8].

The following proposition states that by an appropiated choice of the differential primitive element it is possible to obtain a *translated* Fliess' GOCF with *output injection.*

Proposition 1. Let the BS (1) be given. If the differential primitive element is chosen like:

$$y=\sum_i^n \alpha_i x_i + \sum_j^m \beta_j u_j \qquad \alpha_i,\beta_j\in k\langle u\rangle$$

then the BS (1) is transformable to the *translated* Fliess' GOCF with *output injection* given by:

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= A_u\tau + \varphi(u,y) \\ y &= C\tau = \tau_1, \end{aligned} \tag{4}$$

where $\varphi(u,y)$ is a nonlinear vector. The vector $\varphi(u,y)$ is the translation vector of the GOCF and y denotes the *output injection* in the translation vector. Futhermore, the matrix A_u has its entries in $k\langle u\rangle$.

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -\sigma(u,u^{(1)},\dots,u^{(\gamma)}) \end{bmatrix},\ \varphi(u,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(u,\dots,u^{(\gamma)},y) \end{bmatrix}$$

■

Remark 1. In general, choosing an adequated differential primitive element it is possible to transform a nonlinear system of the form:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + ug(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

into the *translated* Fliess' GOCF with *output injection* [4] and a finite number of their time derivatives, i.e. :

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= A_{(u,y,\dot{y},\ldots,y^{(\mu)})}\tau + \varphi(u,y,\dot{y},\ldots,y^{(\mu)}), \quad \mu < \infty \\ y &= \tau_1 \end{aligned} \qquad (4*)$$

where $A_{(u,y,\ldots,y^{(\mu)})}$ and $\varphi(u,y,\ldots,y^{(\mu)})$ are given by

$$A_{(u,y,\ldots,y^{(\mu)})} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -\sigma(u,\ldots,u^{(\gamma)},y,\ldots,y^{(\mu)}) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(u,y,\ldots,y^{(\mu)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(u,\dot{u},\ldots,u^{(\gamma)},y,\ldots,y^{(\mu)}) \end{bmatrix}.$$

∎

Remark 2. We can take the $BS(1)$ into a *translated* Fliess' GOCF by means of

$$\tau = \theta x \qquad (5)$$

where θ is a matrix with entries in $k(u)$ (see [5]).

∎

As a last definition we have:

Definition 4. If u is an input to the system for which (5) is nonsingular then u is called a good input (GI).

Actually, we work with good inputs (GI).

Remark 3. For a observable BS class (4) in the Diop-Fliess' Observability sense any state τ is observable with respect to $\{u,y\}$, in other words τ is algebraic differentially over $k\langle u,y\rangle$.

∎

An existence result of an asymptotic observer for the BS Class (1) follows.

4. Observer Synthesis.

Lemma 1. Consider the observable single output system (4). Then

$$\dot{\hat{\tau}} = A_u\hat{\tau} - L_u(y - \hat{y}) + \varphi(u,y) \qquad (6)$$

is an asymptotic observer, where $\hat{\tau}$ is an estimate of τ. Furthermore, the entries of observer's gain matrix L_u are in $k(u)$ and $\|\tau(t) - \hat{\tau}(t)\| \leq \nu \exp(-\delta t)$ with constant $\delta > 0$, δ independent of the input (see [6]).

∎

Remark 4. An observer can be easily constructed for the system (4*), that is:

$$\dot{\hat{\tau}} = A_{(u,y,\ldots,y^{(\mu)})}\hat{\tau} - L_u(y - \hat{y}) + \varphi(u,y,\dot{y},\ldots,y^{(\mu)})$$

∎

Corollary 1. Suppose that u is a GI. Then, the dynamical system (6) along with:

$$x = \theta^{-1}\tau \qquad (7)$$

constitute an asymptotic observer for the BS class (1) (see [6]).

∎

Finally, we present an application.

5. An application to a chemical reactor model.

The following two-dimensional single-input single-output system represents a chemical reactor model [7]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(C_e - x_1) - rx_1 \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - ux_2 \\ y &= x_2 \end{aligned} \qquad (8)$$

with coefficients in the field of real numbers $\mathbb{R}$, which is considered as an ordinary differential field (of constants).

In (8) x_1 and x_2 denote the reactant and product concentrations respectively. The input u corresponds to the input-flow of reactant r and C_e denote kinetic and reactor parameters.

For the output $y = x_2$ it is not hard to see that the system (8) is observable in the Diop-Fliess' Observability sense if u, and $y = x_2$ are measured then x_1 and x_2 verify: $x_2 - y = 0$ and $rx_1 - \dot{y} - uy = 0$.

Hence $k\{u,y,x\}$ is integral over $k\{u,y\}$, and x_1 and x_2 are universally observable [2,3]. The external behavior with respect to u and y is described by the following equation [3]:

$$\ddot{y} + (2u + r)\dot{y} + (u^2 + ru + \dot{u})y - ruC_e = 0.$$

From the differential primitive element $z_1 = x_2$ the following relationship

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 \\ z_2 &= rx_1 - ux_2 \end{aligned}$$

holds, which transforms system (8) into the *translated* Fliess' GOCF with *output injection* where A_u and $\varphi(u,y)$ are given respectively by:

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -(2u+r) \end{bmatrix}, \quad \varphi(u,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ ruC_e + [-u^2 - \dot{u} - ur]y \end{bmatrix}$$

where $\varphi(u,y)$ is a nonlinear vector of the GOCF and y denotes the *output injection*.

If u, and $y = x_1$ are known x_1 verify $x_1 - y = 0$, but x_2 does not verify an algebraic differential Polynomial over $k\langle u,y\rangle$. then x_1 is universally observable, but x_2 is not.

By lemma 1, it is possible to construct an asymptotic observer (6) for system (8). This is attained by choosing the observer's gain matrix $L_u = [L_{u_1}, L_{u_2}]^T$ in the form:

$$\begin{aligned} L_{u_1} &= \psi_1 + (2u + r), \quad \psi_1 < 0 \\ L_{u_2} &= -\psi_2 - (\psi_1 + 2u + r)(2u + r), \quad \psi_2 > 0. \end{aligned}$$

Remark 5. The observer (6)-(7) has been tested numerically in the case of a chemical reactor (see [6]). Applying an arbitrary observer pole placement an exponential decaying in the observation error was obtained.

∎

References.

[1] Diop, S. and Fliess, M., "*Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories*". IEEE Proc. 30th Conf. Dec. Contr., Brighton, England, December 1991, pp. 714-719.

[2] Diop, S., "*On Universal Observability*". IEEE Proc. 31st Conf. Dec. Contr., Tucson, Az., Dec. 1992, pp. 3669-3672.

[3] Diop, S. "*Closedness of morphisms of differential algebraic sets. Applications to system theory*", Forum Math., to appear.

[4] Krener, J.A., Isidori A., "*Linearization by output injection and nonlinear observers*". Syst. & Contr. Lett. Vol. 3, Jun 1983. pp 47-52.

[5] Martínez, R., Alvarez, J., "*A note on observers for a Bilinear System Class*". IEEE Proc. 31st Conf. Dec. Contr., Tucson, Az., Dec. 1992, pp. 3434-3435.

[6] Martínez, R., Alvarez, J., "*On Observers for a Class of Bilinear Systems*", IEEE Proc. 2nd. Conf. on Contr. Appl. Vancouver, Canada, Sept. 1993.

[7] Perlmutter, D., "*Stability of Chemical Reactors*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.

[8] Sira-Ramírez, H., "*The differential algebraic approach in nonlinear dynamical feedback controlled landing manouvers*". IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 37, Apr. 1992, pp. 518-524.

Anexo G

≪A Note on Observers for a Bilinear System Class≫

R. Martínez-Guerra, J. Alvarez-Ramírez
en IEEE Conf. on Dec. and Control, Tucson Arizona, pp 3434-3435, 1992.

Proceedings of the 31st Conference
on Decision and Control
Tucson, Arizona • December 1992

A NOTE ON OBSERVERS FOR A BILINEAR SYSTEM CLASS.

Rafael Martínez and José Alvarez

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa
Apartado Postal 55-534
México, D.F., 09340 MEXICO

ABSTRACT

In this note, by means of differential algebra tools, an essential result on the *translated* Generalized Observability Canonical Form (GOCF) and an asymptotic nonlinear observer for one-output reconstructible bilinear systems are given.

I. INTRODUCTION

An important problem in system theory is to estimate the non directly accessible quantities. The main issue is the construction of an observer which, thanks to the knowledge of the inputs and outputs, estimates the non directly accessible components of the state or the unknown structural parameters.

Recently, some researchers have given ideas on the construction of asymptotic observers for bilinear systems. Among them are Williamson [6], Fliess [1,2], Grasselli-Isidori [4], Hammouri-Morales [5], Zeitz [7], etc. The central idea is to try to construct the observer using some nonlinear canonical form.

In this note, synthesis of an observer for a bilinear system class is carried out by means of tools derived from differential algebra.

II. STATEMENT OF THE PROBLEM

Let the following basic definitions be considered [1].

Definition 1. A quantity is said to be reconstructible if and only if it can be obtained as a function of the inputs and the outputs, and of a finite number of their time derivatives.

The reconstruction problem of a non directly accessible quantity can be seen as the result of the outputs and a finite number of their time derivatives. In general the reconstruction of these time derivatives is very hard. To overcome this difficulty we search an asymptotic observer.

Definition 2. A system is Picard-Vessiot (PV) if and only if the k<u>-vector space generated by the derivatives of the set $\{y^{(\mu)},\ \mu \geq 0\}$ has finite dimension. In other words, the k<u>-vector space generated by the derivatives of the set just mentioned above has zero as differential dimension.

Let us now, consider the following bilinear system (BS) class:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + \sum_{i}^{m} A_i u_i)x, \quad && x \in R^n, \\ y &= Cx, && y \in R, \end{aligned} \tag{1}$$

where A_i, $0 \leq i \leq m$, and C are real matrices of appropriate size. Furthermore, suppose that (1) is reconstructible.

Remark 1. It is not hard to prove that all bilinear systems are PV [3]. ∎

Let us pose the following problem:

Is it possible to synthesize an asymptotic observer for the system (1)?

III. GENERALIZED OBSERVABILITY CANONICAL FORM (GOCF)

By the differential algebraic generalization of the Primitive Element Theorem [2], there exists an element $\bar{y}$ and $\eta \geq 0$ to be the minimum integer such that $\bar{y}^{(\eta+1)}$ is analytically dependent on $\bar{y}$, $\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(\eta)}$, $u, u^{(1)}, \ldots$; i.e.,

$$H(\bar{y}^{(\eta+1)}, \bar{y}^{(\eta)}, \ldots, \bar{y}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) = 0.$$

which can be solved locally as:

$$\bar{y}^{(\eta+1)} = -\mathcal{L}(\bar{y}, \ldots, \bar{y}^{(\eta)}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)})$$

Let $\xi_i = \bar{y}^{(i)}$, $0 \leq i \leq \eta$. Then a local state space form is obtained which can be seen as a GOCF:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\eta-1} &= \xi_\eta \\ \dot{\xi}_\eta &= -\mathcal{L}(\xi_0, \ldots, \xi_\eta, u, \ldots, u^{(\gamma)}) \\ \bar{y} &= \xi_0 \end{aligned} \tag{2}$$

The following proposition states that by an adequate choice of the differential primitive element, it is possible to arrive to a *translated* GOCF:

Proposition 1. If the BS is PV, and if the differential primitive element is chosen as a linear combination of the states and the inputs of the system:

$$y = \sum_i^n \alpha_i x_i + \sum_j^m \beta_j u_j \qquad \alpha_i, \beta_j \in k\langle u\rangle,$$

where $u = (u_1, \ldots, u_m)$, and $k\langle u\rangle$ denotes the differential field generated by k and u. Then, the BS class (1) is transformable to the following *translated* GOCF:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_u z + \varphi(u) \\ y &= Cz = z_0 \end{aligned} \tag{3}$$

where $\varphi(u)$ is a nonlinear vector. The vector $\varphi(u)$ is the translation vector of the GOCF (2), i.e., if $\varphi(u) = 0$, system (3) is reduced to the GOCF (2). Moreover, the matrix A_u has its entries in $k\langle u\rangle$:

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\sigma(u, \ldots, u^{(\gamma)}) & \end{bmatrix}$$

■

Remark 2. We can take the BS (1) to the *translated* GOCF by means of:

$$z = \Psi x \tag{4}$$

where Ψ is a matrix with entries in $k\langle u\rangle$. Because this relation depends on u, there exist inputs u for which Ψ is singular. If u is an input to the system for which (4) is nonsingular, then u is called a *good input* (GI).
■

IV. OBSERVER DESIGN

We have the following result on the existence of an asymptotic observer for the BS class (1).

Lemma 1. Consider the reconstructible single output system (3). Then there exists an asymptotic observer given by:

$$\dot{\hat{z}} = A_u \hat{z} - L_u(y - \hat{y}) + \varphi(u) \tag{5}$$

where L_u is the observer's gain matrix with entries in $k\langle u\rangle$ and $\hat{z}$ is an asymptotic estimate of the state z.
■

Corollary 1. Suppose that u is a GI. Then, the dynamical system (5) along with:

$$x = \Psi^{-1}(z) \tag{6}$$

constitute an asymptotic observer for the BS class (1).
■

Remark 3. Observer (5)-(6) has been tested numerically in the cases of a chemical reactor (bounded states) and an example with unbounded trajectories. In both cases, an arbitrary observer pole placement was possible., such that, observation error had an exponential decaying.
■

REFERENCES

[1] Fliess, M., "Quelques Remarques sur les observateurs non linéaires", Proc. Coll. GRETSI trait. signal Images, Nice, 1987, pp. 169-172.

[2] Fliess, M., "Nonlinear Control Theory and Differential Algebra", in Modelling and Adaptive Control, Lect. Notes Contr. and Inf. Sc., Vol. 105, N. Y.: Springer-Verlag, pp. 134-145, 1988.

[3] Fliess, M. and Reutenauer C., "Une Application de l'Algèbre Différentielle aux Systèmes Réguliers (ou bilineaires)", in Analysis and Optimization of Systems, Proc. Conf. Versailles, Bensoussan A. and Lions J.L. Eds., Lect. Notes Contr. Inf. Sc., 44, Springer-Verlag, Berlin, pp. 99-107, 1982.

[4] Grasselli, O. M., and Isidori, A., "An Existence Theorem for Observers of Bilinear Systems", IEEE TAC, Vol. AC-26 No. 6, Dec. 1981, pp. 1299-1300.

[5] Hammouri, H. and J.L. Morales, "Observer Synthesis for State-Affine Systems", Proc.29th. Conf. Dec. Contr., Honolulu, HI., Dec. 1990, pp. 784-785.

[6] Williamson, D., "Observation of Bilinear Systems with application to Biological Control", Automatica, Vol. 13, 1977, pp. 243-254.

[7] Zeitz, M., "Canonical Forms for Nonlinear Systems", In Geometric Theory of Nonlinear Control Systems, B. Jakubczyk, W. Respondek, K. Tchon Eds. Technical University of Wroclaw / Poland, pp. 255-278, 1986.

Anexo H

≪Observer Synthesis for a Class of Bilinear Systems: A Differential Algebraic Approach≫

R. Martínez-Guerra, J. De León-Morales
en IEEE Conf. on Dec. and Control, Lake Buena Vista, Florida, pp 1209-1210, 1994.

Proceedings of the 33rd
Conference on Decision and Control
Lake Buena Vista, FL - December 1994

Observer Synthesis for a Class of Bilinear Systems: A Differential Algebraic Approach.

Rafael Martínez-Guerra
Universidad Autónoma Metropolitana-I.
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal 55-534
México, D.F., 09340 MÉXICO
email rafa@xanum.uam.mx

Jesús De Léon-Morales
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ing. Mecánica y Eléctrica
Apartado Postal 148-F
San Nicolás de los Garza,
Nuevo León, MÉXICO CP. 66451

Abstract

A differential algebraic approach is proposed for the estimation of the state of a class of bilinear systems. An exponential observer is easily constructed for a single output observable bilinear system class (in the Diop-Fliess'Observability sense). An application to a chemical reactor model is given.

1. <u>INTRODUCTION.</u> An important problem in system theory is to estimate the non directly accesible quantities. A system whose task is to given an estimation of these quantities is called an observer. An estimation of the state for linear systems is given by the Luenberger's observer while for bilinear systems and in general for nonlinear ones the construction of observers is more difficult.

Recently, some authors have given some ideas for the synthesis observer of bilinear systems either by the differential geometric viewpoint (theory mainly due to Hermann, Krener, Isidori, Van der Schaft, Nijmeijer, Gauthier, Hammouri [4,5], Zeitz, Williamson, Levine, Marino, etc.) or by the algebraic one (introduced by Fliess in 1986). The latter approach is based on the differential algebra and has among other features of being able to define observability [1,2] and consequently gives estimation of the states through observers design [6,7] for systems represented by an arbitrary set of algebro-differential equations.

This paper is addressed in the algebraic direction. We propose the construction of an exponential nonlinear observer for one-output observable bilinear system. An application to a chemical reactor model is given.

2. <u>STATEMENT OF THE PROBLEM.</u> We start with some basic definitions which are considered in [1].

Definition 2.1. *A Dynamics is a finitely generated differential algebraic extension $G/k(u)$. This means that any element of G satisfies an algebraic differential equation with coefficients which are rational functions over k in the components of u and a finite number of their time derivatives.*

Definition 2.2. *Let a subset $\{u, y\}$ of G in a dynamics $G/k(u)$. An element in G is said to be observable with respect to $\{u, y\}$ if it is algebraic over $k(u, y)$. Therefore a state x is said to be observable if and only if it is observable with respect to $\{u, y\}$.*

Definition 2.3. *A Dynamics $G/k(u)$ with output y is said to be observable if and only if any state is so.*

Here, the concept of observability means that the differential field extension $G/k(u, y)$ is algebraic; that is to say, that the whole differential information is contained in $k(u, y)$.

Let us now, consider the following Bilinear System Class (BSC):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + \sum_i^m A_i u_i)x + Bu, & x \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du, & y \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad (1)$$

where A_i, $0 \le i \le m$, B, C and D are real matrices of appropriate size.

Suppose that BS (1) is observable in the Diop-Fliess'Observability sense, then let us pose the following problem.

Is it possible to sinthesize an exponential observer for the system (1)? The answer is yes, and is solved in the fourth section.

3. <u>FLIESS'LOCAL GENERALIZED OBSERVABILITY CANONICAL FORM.</u>

According to the theorem of the differential primitive element there exists an element y and let n also be the smallest integer such that $y^{(n)}$ is algebraically dependent on $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$, i.e.:

$$y^{(n)} = -\mathcal{L}(y, \ldots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}). \qquad (2)$$

Let $\xi_i = y^{(i-1)}$, $1 \le i \le n$. Then, we can write a local state space representation in the special form of a generalization of the observability canonical form. Such a canonical form is the GOCF given by:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} &= \xi_n \\ \dot{\xi}_n &= -\mathcal{L}(\xi_1, \ldots, \xi_n, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \\ y &= \xi_1; \end{aligned} \qquad (3)$$

further details on this can be found in [9].

The following proposition states that by an appropriate choice of the differential primitive element it is possible to obtain a *Translated Fliess'Generalized Observability Canonical Form with output injection.*

Proposition 3.1 *Let the BS (1) be given. If the differential primitive element is chosen like:*

$$y = \sum_i^n \alpha_i x_i + \sum_j^m \beta_j u_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in k(u)$$

where $u = (u_1, \ldots, u_m)$ and $k(u)$ denotes the differential field generated by k and u. Then the BS (1) is transformable to the TGOCF with output injection given by:

$$\Sigma_1 : \begin{aligned} \dot{\tau} &= A_u \tau + \varphi(u, y) \\ y &= C\tau = \tau_1, \end{aligned} \qquad (4)$$

where $\varphi(u, y)$ is a nonlinear vector. The vector $\varphi(u, y)$ is the translation vector of the GOCF and y denotes the output injection in the translation vector. Furthermore, the matrix A_u has its entries in $k(u)$.

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -\sigma(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \end{bmatrix},$$

0-7803-1968-0/94$4.00©1994 IEEE

$$\varphi(u,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(u,\dots,u^{(\gamma)},y) \end{bmatrix} \tag{5}$$

∎

Remark 1. We can take the BS (1) into a TGOCF by means of

$$r = \theta x \tag{6}$$

where θ is a matrix with entries in $k(u)$. Because this relation depends on u, there exist inputs u for which θ is singular.

∎

As a last definition we have:

Definition 3.2. *If u is an input to the system for which (6) is non-singular then u is called a good input (GI).*

Actually, we work with good inputs.

Remark 2. For a observable BSC (4) in the Diop-Fliess'Observability sénse any state r is observable with respect to $\{u, y\}$, in other words r is algebraic differentially over $k(u, y)$.

∎

4. Observer Synthesis

We have the following result on the existence of an exponential observer for the BSC (1).

Lemma 4.1. *Consider the observable single output system Σ_1 given by (1) then the system:*

$$\Sigma_2 : \begin{array}{rcl} \dot{\hat{r}} & = & A_u \hat{r} + \varphi(u,y) + S^{-1}C^T(C\hat{r} - y) \\ \dot{S} & = & -\psi S - A_u^T S - S A_u + C^T C, \end{array} \tag{7}$$

$\psi > 0$, and $S(\psi)$ in $GL(n, k(u))$ (a linear group of symmetric positive definite matrices) is an observer for Σ_1, moreover the error is given by $\epsilon = r - \hat{r}$ and $\|\epsilon\| \leq \bar{k}e^{\frac{-\psi}{2}t}$.

∎

Regard that the parameter ψ determines the rate of convergence and has to be fixed by the designer.

Corollary 4.2. *Suppose that u is a GI. Then, the dynamical system Σ_2 (7) along with:*

$$x = \theta^{-1} r \tag{8}$$

constitute an exponential observer for the BS class (1).

∎

5. An Application to a Chemical Reactor Model

The following two-dimensional single-input single-output system represents a chemical reactor model [8]

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & u(Ce - x_1) - r x_1 \\ \dot{x}_2 & = & r x_1 - u x_2 \\ y & = & x_1 - x_2 \end{array} \tag{9}$$

with coefficients in the field of real numbers $\mathbb{R}$ which is considered as an ordinary differential field (of constants).

In (9) x_1 and x_2, denote the reactant and product concentrations respectively. The input u corresponds to the input-flow of reactant, r and Ce denote kinetic and reactor parameters.

If u, and $y = x_1$ are known x_1 verify $x_1 - y = 0$, but x_2 does not verify an algebraic differential polynomial over $k(u, y)$. Then x_1 is universally observable [2,3] but x_2 is not.

For the output $y = x_2$ it is not hard to see that the system (9) is observable in the Diop-Fliess'Observability sense if u and $y = x_2$ are measured then x_1 and x_2 verify: $x_2 - y = 0$ and $r x_1 - \dot{y} - uy = 0$.

Furthermore, if u and $y = x_1 - x_2$ are measured then x_1 and x_2 verify:

$$\dot{y} + 2ry + 2rx_2 + uy - uCe = 0$$
$$\dot{y} + 2rx_1 + uy - uCe = 0$$

Hence $k(u, y, x)$ is integral over $k(u, y)$ and x_1 and x_2 are universally observable [2,3].

From the differential primitive element $z_1 = x_1 - x_2$ the following relationship

$$z_1 = x_1 - x_2$$
$$z_2 = uCe - x_1(u + 2r) + ux_2$$

holds, which transforms system (9) into the TGOCF with output injection where A_u and $\varphi(u, y)$ are given respectively by:

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & \frac{u^2 + 4ur + 2r^2 - \dot{u} + 1}{-2r} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{uCe}{2r}\left[u^2 + 4ur + 2r^2 - \dot{u} + 1\right] + \omega \end{pmatrix}$$

$$\omega = \left[2u^2 + 4u - 5ru - 1 - \frac{1}{2r}\left(-u^3 - u\dot{u} + u\right)\right] y$$

where $\varphi(u, y)$ is a nonlinear vector of the GOCF and y denotes the output injection.

By Lemma 4.1 it is possible to construct an exponential observer Σ_2 for system (9). This is attained by choosing an observer's gain matrix S appropriate.

Remark 3. The observer (7)-(8) has been tested numerically in the case of a chemical reactor. Applying the observer's gain matrix adequated an exponential decaying in the observation error is obtained.

∎

6. References

[1] Diop, S., Fliess, M., "*Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories*". IEEE Proc. 30th Conf. Dec. Contr. Brighton, England. December 1991, pp. 714-719.

[2] Diop, S., "*On Universal Observability*". IEEE Proc. 31st Conf. Dec. Contr., Tucson, Az., Dec. 1992, pp. 3669-3672.

[3] Diop, S., "*Closedness of morphisms of differential algebraic set. Applications to system theory*". Forum Math. to appear.

[4] Hammouri, H., De Leon Morales, J., "*Topological properties of observer's inputs*". Proceedings of the International Conference on Controlled Dynamical Systems, Lyon. France 3-7 July 1990. *Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin, pp. 233-242, 1991.*

[5] Hammouri, H., De Leon Morales, J., "*Observer synthesis for state affine systems*". IEEE Proc. 29th Conf. Dec. Contr. Hawaii, December 1990, pp. 784-785.

[6] Martínez, R., Alvarez, J., "*On Observers for a Class of Bilinear Systems*". IEEE Proc. 2nd. Conf. on Contr. Appl. Vancouver, Canada, Sep. 1993, pp. 777-781.

[7] Martínez, R., "*Estimation of the states of a Class of Bilinear Systems: A Differential Algebraic Approach*". IEEE Proc. 32nd. Conf. Dec. Contr., San Antonio, Texas U.S.A. Dec. 1993, pp. 735-736.

[8] Perlmutter, D., "*Stability of Chemical Reactors*". Prentice Hall, Englewood Cliff, N. J., 1972.

[9] Sira-Ramírez, H., "*The differential algebraic approach in nonlinear dynamical feedback controlled landing manouvers*". IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 37, Apr. 1992, pp. 518-524.

Anexo I

≪Some Results About Nonlinear Observer for a Class of Bilinear Systems≫

R. Martínez-Guerra, J. De León-Morales
en American Control Conference (ACC), Seattle Washington, pp 1643-1644, 1995.

Proceedings of the
American Control Conference
Seattle, Washington • June 1995

Some Results About Nonlinear Observers for a Class of Bilinear Systems.

Rafael Martínez-Guerra
Universidad Autónoma Metropolitana-I.
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal 55-534
México, D.F., 09340 MÉXICO
email rafn@xanum.uam.mx

Jesús De Léon-Morales
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Apartado Postal 148-F
San Nicolás de los Garza,
Nuevo León, MÉXICO CP. 66451

Abstract

A differential algebraic approach is proposed for the estimation of the state of a class of bilinear systems. An exponential observer is easily constructed for a single output observable bilinear system class (in the Diop-Fliess'Observability sense). An application to a chemical reactor model is given.

1. INTRODUCTION. An important problem in system theory is to estimate the non directly accesible quantities. A system whose task is to given an estimation of these quantities is called an observer. An estimation of the state for linear systems is given by the Luenberger's observer while for bilinear systems and in general for nonlinear ones the construction of observers is more difficult.

Recently, some authors have given some ideas for the synthesis observer of bilinear systems either by the differential geometric viewpoint (theory mainly due to Hermann, Krener, Isidori, Van der Schaft, Nijmeijer, Gauthier, Hammouri [4,5], Zeitz, Williamson, Levine, Marino, etc.) or by the algebraic one (introduced by Fliess in 1986). The latter approach is based on the differential algebra and has among other features of being able to define observability [1,2] and consequently gives estimation of the states through observers design [6,7] for systems represented by an arbitrary set of algebro-differential equations.

This paper is addressed in the algebraic direction. We propose the construction of an exponential nonlinear observer for one-output observable bilinear system. An application to a chemical reactor model is given.

2. STATEMENT OF THE PROBLEM. We start with some basic definitions which are considered in [1].

Definition 2.1. *A Dynamics is a finitely generated differential algebraic extension $G/k(u)$. This means that any element of G satisfies an algebraic differential equation with coefficients which are rational functions over k in the components of u and a finite number of their time derivatives.*

Definition 2.2. *Let a subset $\{u, y\}$ of G in a dynamics $G/k(u)$. An element in G is said to be observable with respect to $\{u, y\}$ if it is algebraic over $k(u, y)$. Therefore a state x is said to be observable if and only if it is observable with respect to $\{u, y\}$.*

Definition 2.3. *A Dynamics $G/k(u)$ with output y is said to be observable if and only if any state is so.*

Here, the concept of observability means that the differential field extension $G/k(u, y)$ is algebraic; that is to say, that the whole differential information is contained in $k(u, y)$.

Let us now, consider the following Bilinear System Class (BSC):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + \sum_{i}^{m} A_i u_i)x + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du, \qquad\qquad\qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

where A_i, $0 \le i \le m$, B, C and D are real matrices of appropriate size.

Suppose that BS (1) is observable in the Diop-Fliess'Observability sense, then let us pose the following problem.

Is it possible to sinthesize an exponential observer for the system (1)? The answer is yes, and is solved in the fourth section.

3. FLIESS'LOCAL GENERALIZED OBSERVABILITY CANONICAL FORM. According to the theorem of the differential primitive element there exists an element y and let n also be the smallest integer such that $y^{(n)}$ is algebraically dependent on $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$, i.e.:

$$y^{(n)} = -\mathcal{L}(y, \ldots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}). \tag{2}$$

Let $\xi_i = y^{(i-1)}$, $1 \le i \le n$. Then, we can write a local state space representation in the special form of a generalization of the observability canonical form. Such a canonical form is the GOCF given by:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} &= \xi_n \\ \dot{\xi}_n &= -\mathcal{L}(\xi_1, \ldots, \xi_n, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \\ y &= \xi_1; \end{aligned} \tag{3}$$

further details on this can be found in [9].

The following proposition states that by an appropriate choice of the differential primitive element it is possible to obtain a *Translated Fliess'Generalized Observability Canonical Form with output injection.*

Proposition 3.1 *Let the BS (1) be given. If the differential primitive element is chosen like:*

$$y = \sum_{i}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j}^{m} \beta_j u_j, \quad \alpha_i, \beta_j \in k(u)$$

where $u = (u_1, \ldots, u_m)$ and $k(u)$ denotes the differential field generated by k and u. Then the BS (1) is transformable to the TGOCF with output injection given by:

$$\Sigma_1 : \begin{aligned} \dot{\tau} &= A_u \tau + \varphi(u, y) \\ y &= C\tau = \tau_1, \end{aligned} \tag{4}$$

where $\varphi(u, y)$ is a nonlinear vector. The vector $\varphi(u, y)$ is the translation vector of the GOCF and y denotes the output injection in the translation vector. Furthermore, the matrix A_u has its entries in $k(u)$.

$$\begin{aligned} A_u &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -a(u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\gamma)}) \end{bmatrix}, \\ \varphi(u, y) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(u, \ldots, u^{(\gamma)}, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Remark 1. We can take the BS (1) into a TGOCF by means of

$$\tau = \theta x \tag{6}$$

where θ is a matrix with entries in $k(u)$. Because this relation depends on u, there exist inputs u for which θ is singular. ∎

As a last definition we have:

Definition 3.2. *If u is an input to the system for which (6) is non-singular then u is called a good input (GI).*

Actually, we work with good inputs.

Remark 2. For a observable BSC (4) in the Diop-Fliess'Observability sense any state τ is observable with respect to $\{u, y\}$, in other words τ is algebraic differentially over $k(u, y)$. ∎

4. OBSERVER SYNTHESIS.

We have the following result on the existence of an exponential observer for the BSC (1).

Lemma 4.1. *Consider the observable single output system Σ_1 given by (4) then the system:*

$$\Sigma_2 : \begin{array}{rcl} \dot{\hat{\tau}} & = & A_u \hat{\tau} + \varphi(u, y) + S^{-1} C^T (C\hat{\tau} - y) \\ \dot{S} & = & -\psi S - A_u^T S - S A_u + C^T C, \end{array} \tag{7}$$

$\psi > 0$, and $S(\psi)$ in $GL\,(n, k(u))$ (a linear group of symmetric positive definite matrices) is an observer for Σ_1, moreover the error is given by $\epsilon = \tau - \hat{\tau}$ and $\|\epsilon\| \le k e^{\frac{-\psi}{3} t}$. ∎

Regard that the parameter ψ determines the rate of convergence and has to be fixed by the designer.

Corollary 4.2. *Suppose that u is a GI. Then, the dynamical system Σ_2 (7) along with:*

$$x = \theta^{-1} \tau \tag{8}$$

constitute an exponential observer for the BS class (1). ∎

5. AN APPLICATION TO A CHEMICAL REACTOR MODEL.

The following two-dimensional single-input single-output system represents a chemical reactor model [8]

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & u(Ce - x_1) - r x_1 \\ \dot{x}_2 & = & r x_1 - u x_2 \\ y & = & x_1 - x_2 \end{array} \tag{9}$$

with coefficients in the field of real numbers R which is considered as an ordinary differential field (of constants).

In (9) x_1 and x_2, denote the reactant and product concentrations respectively. The input u corresponds to the input-flow of reactant, r and Ce denote kinetic and reactor parameters.

If u, and $y = x_1$ are known x_1 verify $x_1 - y = 0$, but x_2 does not verify an algebraic differential polynomial over $k(u, y)$. Then x_1 is universally observable [2,3] but x_2 is not.

For the output $y = x_2$ it is not hard to see that the system (9) is observable in the Diop Fliess'Observability sense if u and $y = x_2$ are measured then x_1 and x_2 verify: $x_2 - y = 0$ and $r x_1 - \dot{y} - u y = 0$.

Furthermore, if u and $y = x_1 - x_2$ are measured then x_1 and x_2 verify:

$$\dot{y} + 2ry + 2r x_2 + uy - uCe = 0$$

$$\dot{y} + 2r x_1 + uy - uCe = 0$$

Hence $k\{u, y, x\}$ is integral over $k\{u, y\}$ and x_1 and x_2 are universally observable [2,3].

From the differential primitive element $z_1 = x_1 - x_2$ the following relationship

$$z_1 = x_1 - x_2$$
$$z_2 = uC\dot{e} - x_1(u + 2r) + u x_2$$

holds, which transforms system (9) into the TGOCF with output injection where A_u and $\varphi(u, y)$ are given respectively by:

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & \frac{u^2 + 4ur + 2r^2 - \dot{u} + 1}{-2r} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{uCe}{2r}\left[u^2 + 4ur + 2r^2 - \dot{u} + 1\right] + \omega \end{pmatrix}$$

$$\omega = \left[2u^2 + 4u - 5ru - 1 - \frac{1}{2r}\left(-u^3 - u\dot{u} + u\right)\right] y$$

where $\varphi(u, y)$ is a nonlinear vector of the GOCF and y denotes the output injection.

By Lemma 4.1 it is possible to construct an exponential observer Σ_2 for system (9). This is attained by choosing an observer's gain matrix S appropriate.

6. CONCLUDING REMARKS.

We have proposed a new differential algebraic approach for the observation of the state of a class of bilinear systems. The observer (7)-(8) has been tested numerically in the case of a chemical reactor. Some simulation results are shown (see Figure 1). Applying the observer's gain matrix adequated an exponential decaying in the observation error is obtained. ∎

7. REFERENCES.

[1] Diop, S., Fliess, M., "*Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories*". IEEE Proc. 30th Conf. Dec. Contr. Brighton, England. December 1991, pp. 714-719.

[2] Diop, S., "*On Universal Observability*". IEEE Proc. 31st Conf. Dec. Contr., Tucson, Az., Dec. 1992, pp. 3669-3672.

[3] Diop, S., "*Closedness of morphisms of differential algebraic set. Applications to system theory*". Forum Math. to appear.

[4] Hammouri, H., De Leon Morales, J., "*Topological properties of observer's inputs*". Proceedings of the International Conference on Controlled Dynamical Systems, Lyon. France 3-7 July 1990. Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin, pp. 233-242, 1991.

[5] Hammouri, H., De Leon Morales, J., "*Observer synthesis for state affine systems*". IEEE Proc. 29th Conf. Dec. Contr. Hawaii, December 1990, pp. 784-785.

[6] Martínez, R., Alvarez, J., "*On Observers for a Class of Bilinear Systems*". IEEE Proc. 2nd. Conf. on Contr. Appl. Vancouver, Canada, Sep. 1993, pp. 777-781.

[7] Martínez, R., "*Estimation of the states of a Class of Bilinear Systems: A Differential Algebraic Approach*". IEEE Proc. 32nd. Conf. Dec. Contr., San Antonio, Texas U.S.A. Dec. 1993, pp 735-736.

[8] Perlmutter, D., "*Stability of Chemical Reactors*". Prentice Hall, Englewood Cliff, N. J., 1972.

[9] Sira-Ramírez, H., "*The differential algebraic approach in nonlinear dynamical feedback controlled landing manouvers*". IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 37, Apr. 1992, pp. 518-524.

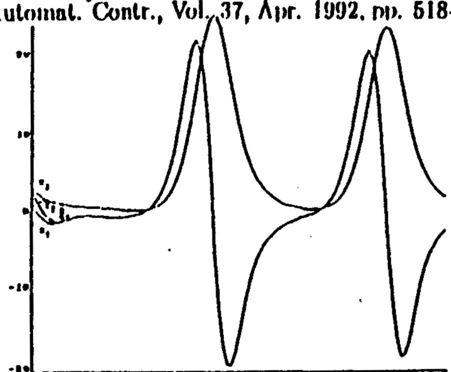

Figure 1

Anexo J

≪Observer Synthesis for a Class of Bilinear Systems≫

R. Martínez-Guerra
en Conference on Communication Control and Computing, pp 523-524, 1994.

Observer Synthesis for a Class of Bilinear Systems.

Rafael Martínez-Guerra
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
Departamento de Matemáticas
Apdo. Postal 55-534, México, D.F. 09340 MEXICO

INTRODUCTION. An important problem in system theory is to estimate the non-directly ccessible quantities. An estimation of the state for linear systems is given by the Luen-erger's observer while for bilinear systems and in general for nonlinear ones the construc-ion of observers is more difficult. Some authors have given some ideas for the synthesis r observers design of bilinear systems either by the differential geometric viewpoint (Her-iann, Krener, Isidori, etc.) or by the algebraic one (Fliess 1986). The latter approach is ased on differential algebra. In this paper the observer synthesis problem is addressed a the algebraic direction.

I.AN ASYMPTOTIC OBSERVER FOR A CLASS OF BILINEAR SYSTEMS. Let us now, con-ider the following Bilinear *System Class* (BS):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_0 + \sum_i^m A_i u_i)x + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx + Du, \qquad\qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

where A_i, $0 \le i \le m$, B, C, and D are real matrices of appropriate size.

Suppose that BS (1) is observable in the Diop-Fliess'Algebraic Observability sense [1,2], then let us pose the following problem.

Is it possible to synthesize an asymptotic observer for the system (1)?

The following proposition states that by an appropriate choice of the differential primitive element [1] it is possible to obtain a *Translated* Fliess' GOCF *(TGOCF)* with *output injection*.

Proposition 1. Let the BS (1) be given. If the differential primitive element is chosen like:

$$y = \sum_i^n \alpha_i x_i + \sum_j^m \beta_j u_j \qquad \alpha_i, \beta_j \in k(u) \quad .$$

then the BS (1) is transformable to the *TGOCF* with *output injection* given by:

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= A_u \tau + \varphi(u,y) \\ y &= C\tau = \tau_1, \end{aligned} \tag{2}$$

where $\varphi(u,y)$ is a nonlinear vector. The vector $\varphi(u,y)$ is the translation vector of the GOCF and y
denotes the *output injection* in the translation vector. Futhermore, the matrix A_u has entries in $k(u)$.

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -\sigma(u, u^{(1)}, \dots, u^{(\gamma)}) \end{bmatrix}, \quad \varphi(u,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(u, \dots, u^{(\gamma)}, y) \end{bmatrix} .$$

Remark 1. We can take the $BS(1)$ into a $TGOCF$ by means of $\quad \tau = \theta x \qquad (3)$
where θ is a matrix with entries in $k(u)$.

Lemma 1. Consider the observable single output system (2). Then

$$\dot{\hat{\tau}} = A_u\hat{\tau} - L_u(y - \hat{y}) + \varphi(u,y) \tag{4}$$

is an asymptotic observer, where $\hat{\tau}$ is an estimate of τ. Furthermore, the entries of observer's gain matrix L_u are in $k(u)$ and $\|\tau(t) - \hat{\tau}(t)\| \leq \nu \exp(-\delta t)$ with constant $\delta > 0$, δ independent of the input.

Corollary 1. Suppose that u is a *good input* [4]. Then, the dynamical system (4) along with: $\quad x = \theta^{-1}\tau \quad$ (5) constitute an asymptotic observer for the DS class (1).

3. APPLICATION TO A CHEMICAL REACTOR MODEL. The following two-dimensional single-input single-output system represents a chemical reactor model [4]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(C_e - x_1) - rx_1 \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - ux_2 \\ y &= x_2 + u \end{aligned} \tag{6}$$

with coefficients in the field of real numbers $\mathbb{R}$, which is considered as an ordinary differential field. In (6) x_1 and x_2 denote the reactant and product concentrations respectively. The input u corresponds to the input-flow of reactant r and C_e denote kinetic and reactor parameters.

If u, and $y = x_2 + u$ are measured then x_1 and x_2 verify: $x_2 - y + u = 0$ and $rx_1 - \dot{y} - uy + u^2 + \dot{u} = 0$. Hence $k\langle u,y,x\rangle$ is integral over $k\langle u,y\rangle$, and x_1 and x_2 are universally observable [2,3].

The system (6) is carried out into the *TGOCF* (2) with output injection by means of the differential primitive element $z_1 = x_2 + u$. Where A_u and $\varphi(u,y)$ are given respectively by,

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -(2u+r) \end{bmatrix}, \varphi(u,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ ruC_e + [-u^2 - \dot{u} - ur]y + u^3 + 3u\dot{u} + ru^2 + r\dot{u} + \ddot{u} \end{bmatrix}$$

From lemma 1, it is possible to construct an asymptotic observer (4) for system (6). This is attained by choosing the observer's gain matrix $L_u = [L_{u_1}, L_{u_2}]^T$ in the form:

$$\begin{aligned} L_{u_1} &= \psi_1 + (2u + r), \quad \psi_1 < 0 \\ L_{u_2} &= -\psi_2 - (\psi_1 + 2u + r)(2u + r), \quad \psi_2 > 0. \end{aligned}$$

Remark 2. The observer (4)-(5) has been tested numerically in the case of a chemical reactor. Applying an arbitrary observer pole placement an exponential decaying in the observation error is obtained.

4. REFERENCES.

[1] Diop, S. and Fliess, M., "*Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories*". IEEE Proc. 30th Conf. Dec. Contr., Brighton, England, December 1991, pp. 714-719.

[2] Diop, S., "*On Universal Observability*". IEEE Proc. 31st Conf. Dec. Contr., Tucson, Az., Dec. 1992, pp. 3669-3672.

[3] Diop, S. "*Closedness of morphisms of differential algebraic sets. Applications to system theory*", Forum Math., to appear.

[4] Martínez, R. and Alvarez, J., "*On Observers for a Class of Bilinear Systems*", IEEE Proc. 2nd. Conf. on Contr. Appl. Vancouver, Canada, Sept. 1993, pp. 777-781.

Anexo K

≪Inmersión de un Sistema no Lineal y Construcción de un Observador no Lineal para un Sistema TPA≫

R. Martínez-Guerra
en Congreso Latinoamericano de Control Automático, Habana, Cuba, pp 251-255, 1992.

Inmersión de un sistema no lineal y construcción de un Observador no lineal para un sistema TPA

Rafael Martínez Guerra
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Iztapalapa
Departamento de Matemáticas
Apdo. Postal 55-534, CP.09340
México, D.F. MEXICO.

Resumen

Se muestra una metodología bajo la cual, el sistema TPA (Trayectografía pasiva) es inmerso en un sistema lineal, el cual es además observable, y admite la existencia de un observador.

El método consiste en hallar una aproximación lineal de la salida, que verifica la condición de observabilidad dada por Hermann y Krener [3], y utilizando otro criterio, contrariamente al establecido por Claude et al [1] y Levine et al [2], se encuentra la inmersión del sistema TPA. Este criterio consiste en obtener derivadas de Lie iteradas de la función de salida como combinación lineal de los estados. El proceso de derivación termina, si las ecuaciones obtenidas son suficientes para determinar el valor de cada estado.

El método es útil y práctico, ya que en [8], utilizando los criterios dados en [1] y [2], es demostrado que el sistema TPA no es inmerso en un sistema lineal.

Palabras Claves Inmersión, Sistema TPA, Observabilidad, Observador.

Abstract

In this work we show a technique which inmerses the TPA (nonlinear) System into a linear one. Moreover, the latter is observable and admits an observer.

To obtain such linear system we compute the Lie derivatives successively of the output function as linear combination of the states. The derivative process ends when the number of equations is enough to determine the value of each state.

Keywords: Immersion, TPA System, Observability, Observer.

1 Introducción

La idea de realizar la inmersión de un sistema no lineal (SNL) de dimensión n en un sistema lineal (SL) de dimensión N (con $N \geq n$) fué introducida por Claude, Fliess e Isidori [1] para sistemas continuos con el objeto de dar condiciones bajo las cuales un sistema no lineal produce un mapeo entrada/salida lineal. En el caso especial en que la inmersión sea un difeomorfismo local del estado ($N = n$) y que el sistema lineal inmerso sea observable, Krener Isidori [9] y Krener-Respondek [10] han mostrado que el sistema admite un observador.

Levine-Marino [2] han mostrado recientemente que se obtiene una generalización substancial en el problema de observación si las inmersiones de sistemas no lineales se permiten también en la familia de transformaciones usadas para construir observadores no lineales. Esta aproximación no utiliza ni inyección de la salida, ni cambios de coordenadas y muestra que si un sistema no lineal observable puede ser inmerso en un sistema lineal observable, entonces admite un observador y, además, las condiciones suficientes que se obtienen son menos fuertes que las correspondientes al restringir la inmersión a un difeomorfismo.

Un problema interesante que abordaremos aquí , es el problema de inmersión de un sistema TPA (trayectografía pasiva). Modelizamos generalmente el proceso de adquisición de medidas en trayectografía pasiva, mediante un modelo no lineal donde el estado es de dimensión 4 y donde la salida es un escalar. Decimos entonces que este sistema es inmerso en un sistema lineal si podemos encontrar una transformación tal que el sistema se pueda describir, en las nuevas coordenadas como un sistema lineal.

De hecho, los sistemas inmersos en un sistema lineal son relativamente raros. En [8] es mostrado que utilizando los criterios dados en [1] y [2] el sistema TPA no presenta esta propiedad.

Aquí , establecemos una metodología bajo la cual este sistema (TPA) es inmerso en un sistema lineal, el cual es además observable.

Está alternativa consiste en obtener un sistema de ecuaciones lineal en los estados por medio de derivadas de Lie iteradas de la función de salida Linealizada. Las derivadas iteradas de la función de salida se obtienen luego como combinación lineal de los estados, que permiten construir un sistema lineal que es además observable y utilizando la Teoría de Observadores [5], construimos un observador a partir del cual encontraremos los estados deseados del sistema no lineal.

Descripción general del trabajo.

El presente trabajo, trata de los desarrollos recientes de la teoría de Observadores no lineales, el reporte está formado de dos partes; la primera consiste en la descripción de una forma breve de un sistema TPA, así como la inmersión a un sistema lineal observable, finalmente describimos la construcción de un observador. En la segunda parte planteamos el problema de estabilidad, y para finalizar el trabajo se exponen las conclusiones.

2 Descripción del sistema TPA

Presentamos el problema de un sistema TPA (trayectografía pasiva), el cual consiste en la obtención de un estimado de posición y velocidad de una fuente generadora de ruido en cada instante.

Consideramos dos móviles en el plano una antena A y una fuente de ruido B. El movimiento de la antena A es perfectamente conocido, y el movimiento de la fuente B es supuesto rectilíneo uniforme. Se asume el acceso a la medición en cada instante del ángulo formado entre la (antena-fuente) y la vertical (ver fig. 1).

La modelización bajo forma cartesiana es representada por un modelo no lineal donde el estado es de dimensión 4 y la salida es un escalar. Entonces tenemos el siguiente sistema dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= u_3 \\ \dot{x}_4 &= u_4 \\ y &= \theta \end{aligned} \tag{1}$$

donde:

$x_1 = x_{AB} =$ distancia entre la fuente y la antena en X.
$x_2 = y_{AB} =$ distancia entre la fuente y la antena en Y.
$x_3 = v_{x_{AB}} =$ Velocidad en X de la fuente con respecto a la antena
$x_4 = v_{y_{AB}} =$ Velocidad en Y de la fuente con respecto a la antena
$y = \theta =$ Angulo formado entre la (Antena-fuente) y la vertical (salida del sistema)

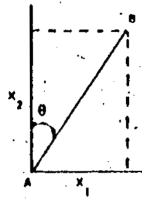

Figura 1:

A continuación describimos el proceso de inmersión, así como la construcción de un observador para un sistema TPA.

3 Inmersión y construcción de un observador. Aplicación a un sistema TPA.

3.1 Introducción

Para obtener un sistema el cual es representado por un modelo matemático lineal por medio de una aproximación lineal de la salida de un sistema no lineal, es preciso suponer que las variables tienen una pequeña desviación con respecto a una condición de operación.

Utilizamos la linealización por medio de la Serie de Taylor, la cual consiste en desarrollar las ecuaciones de un modelo no lineal en la serie de Taylor, cuando esta existe alrededor de un punto nominal, tomamos solamente los primeros términos que se aproximan linealmente al modelo.

Esta aproximación es válida unicamente en una región alrededor de este punto, luego la linealización de la función de salida con una aproximación de segundo orden es la siguiente:

$$y = k^0 + k''x_1 + k'''x_2 + Px_1x_2 + Lx_1^2 + Nx_2^2$$

donde:

$$\begin{aligned}
k^0 &= k_1 - k_2\bar{x}_1 - k_3\bar{x}_2 + \frac{k_4}{2}\bar{x}_1^2 + k_5\bar{x}_1\bar{x}_2 + \frac{k_6}{2}\bar{x}_2^2 \\
k'' &= k_2 - k_4\bar{x}_1 - k_5\bar{x}_2, \qquad N = \frac{k_6}{2}, \qquad P = k_5 \\
k''' &= k_3 - k_5\bar{x}_1 - k_6\bar{x}_2, \qquad L = \frac{k_4}{2},
\end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \theta = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \tan^{-1}\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}, \quad k_2 = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2^2 + \bar{x}_1^2}, \quad k_3 = \frac{-\bar{x}_1}{\bar{x}_2^2 + \bar{x}_1^2} \\
k_4 &= \frac{-2\bar{x}_1\bar{x}_2}{(\bar{x}_2^2 + \bar{x}_1^2)^2}, \quad k_5 = \frac{\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2}{(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2)^2} \quad k_6 = -k_4
\end{aligned}$$

con $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ el punto de operación alrededor del cual hacemos la aproximación lineal.

Observación.- El coeficiente k^0 no interviene en ningún momento en el sistema de ecuaciones a resolver.

Enseguida, obtendremos algunas condiciones bajo las cuales el sistema obtenido por esta linealización es inmerso en un sistema lineal y además observable.

Daremos algunos resultados de la Teoría de inmersión, los cuales son mostrados en [1].

3.2 Condición de Observabilidad e Inmersión

El problema se caracteriza por la obtención de un sistema inmersible y observable, estableciendo la condición de existencia de un observador que pueda reconstruir los estados del sistema no lineal original.

Mostramos ahora la condición de observabilidad dada por Herman y Krener [3], el lema de Inmersión dado en las referencias [1] y [2], y finalmente un teorema que asegura la existencia de un observador.

Sean los siguientes sistemas dados:

$$\sum: \begin{array}{l} \dot{x} = f(x,u), \\ y = h(x_1, x_2) \end{array} \qquad \tilde{\sum}: \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} + Gu \\ y = H\tilde{x} \end{array}$$

entonces es establecida la condición de observabilidad y el siguiente Teorema sobre la inmersión.

Condición de observabilidad.- El sistema $\sum$ satisface la condición de observabilidad si:

$$dim\{dh, dL_{f^j}h, dL_{f^j}(L_{f^j}h), \cdots, dL_{f^j}(\cdots(L_{f^j}h)\cdots)\}(\bar{x}) = n$$

donde $f^j = f(x, u^j)$, $j = 1, \cdots, k$ con u^j = constante.

Lema.- El sistema $\sum$ es inmersible en $\tilde{\sum}$ en U_0 (abierto) si y solamente si en U_0:

1. $E_0 = span\{L_{f_j}^k h_i : 1 \leq i \leq p, k \geq 0\}$ es un R-espacio vectorial de dimensión finita.
2. $L_{g_j}\lambda =$ constante para cada $\lambda \in E_0$ y cada $j = 1, \ldots, m$.

y finalmente establecemos el teorema que da la existencia de un observador.

Teorema.- Si la condición de observabilidad se satisface y si $\sum$ es inmersible en un sistema dimensional finito $\tilde{\sum}$ en U_0, entonces existe un observador para cada condición inicial $x(t_0)$ tal que $x(t) \in U_0$ para $t \geq t_0$.

Enseguida verificamos la condición de observabilidad dada en [3].

Sea el sistema cartesiano TPA dado por (1), y (1') con la función de salida linealizada (aproximación de 2do. orden).

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_4 \\
\dot{x}_3 &= u_3 \\
\dot{x}_4 &= x_4 \\
y &= k^0 + k''x_1 + k'''x_2 + Px_1x_2 + Lx_1^2 + Nx_2^2
\end{aligned} \qquad (1')$$

con una aproximación polinomial en la función salida de orden 2, donde k^0, k'', k''', P, L, N representan los coeficientes del desarrollo de Taylor (ver 3.1) y son funciones del valor nominal o del punto de operación en una región dada (abierto).

Considerando el sistema equivalente de (1') tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x,u) \\
y &= h(x_1, x_2)
\end{aligned} \qquad (2)$$

El sistema (1') representado por (2) satisface el criterio de observabilidad [3].

$$dim\{dh, dL_{f^j}h, dL_{f^j}h(L_{f^j}h), \cdots, dL_{f^j}h(\cdots(L_{f^j}h)\cdots)\}(\bar{x}) = n$$

Para verificar si el sistema dado por (1') es observable, damos la condición de observabilidad que el sistema (1') debe satisfacer.

Condición de Observabilidad.

$$\hat{A}(\hat{F}(\hat{M}\hat{S}-\hat{O}\hat{R})-\hat{G}(\hat{J}\hat{S}-\hat{O}\hat{Q}))-\hat{B}(\hat{E}(\hat{M}\hat{S}-\hat{O}\hat{R}))+\hat{C}(\hat{E}(\hat{J}\hat{S}-\hat{O}\hat{Q})) \neq 0.$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= k'' + Px_2 + 2Lx_1; & \hat{E} &= k''' + Px_1 + 2Nx_2; \\
\hat{B} &= 2Lx_3 + Px_4; & \hat{F} &= Px_3 + 2Nx_4; \\
\hat{C} &= 2Lu_3^1 + Pu_4^1; & \hat{G} &= Pu_3^1 + 2Nu_4^1; \\
\hat{J} &= Px_2 + 2Lx_1 + k''; & \hat{Q} &= k''' + Px_1 + 2Nx_2; \\
\hat{M} &= 4Lx_3 + 2Px_4; & \hat{R} &= 2Px_3 + 4Nx_4; \\
\hat{O} &= 2Lu_3^1 + Pu_4^1 + 2Lu_3^1 + 2Pu_4^1 & \hat{S} &= Pu_3^1 + 2Nu_4^1 + 2Pu_3^1 + 4Nu_4^1
\end{aligned}$$

Para justificar que el sistema (1') es inmersible, construiremos un sistema de ecuaciones dado por derivadas iteradas de Lie de la función de salida, donde las ecuaciones son combinación lineal de los estados x_1, x_2, x_3 y x_4. El número de ecuaciones a establecer sera dado según el número de estados a determinar, es decir, terminamos de obtener las derivadas de Lie si las ecuaciones obtenidas son suficientes para determinar el valor de cada estado.

Observación.- No podemos utilizar la técnica de inmersión dada en el artículo de Claude, Fliess e Isidori [1], porque el espacio E_0 generado es un espacio de dimensión infinita ya que u es una función variante en el tiempo.

Entonces, si la salida esta dada por la expresión: $y = k^0 + k''x_1 + k'''x_2 + Px_1x_2 + Lx_1^2 + Nx_2^2$.

Obtenemos:

$$y^{(1)} = k''x_3 + k'''x_4 + Px_1x_4 + Px_2x_3 + 2Lx_1x_3 + 2Nx_2x_4$$

$$y^{(2)} = k''u_3 + k'''u_4 + P(x_1u_4 + x_4x_3) + P(x_2u_3 + x_3x_4) + \\ +2L(x_1u_3 + x_3^2) + 2N(x_2u_4 + x_4^2)$$

$$y^{(3)} = k''\dot{u}_3 + k'''\dot{u}_4 + (P\dot{u}_4 + 2L\dot{u}_3)x_1 + (P\dot{u}_3 + 2N\dot{u}_4)x_2 + \\ +(3Pu_4 + 6Lu_3)x_3 + (3Pu_3 + 6Nu_4)x_4 \qquad (3)$$

$$y^{(4)} = k''\ddot{u}_3 + k'''\ddot{u}_4 + (3Pu_4 + 6Lu_3)u_3 + (3Pu_3 + 6Nu_4)u_4 + \\ +(P\ddot{u}_4 + 2L\ddot{u}_3)x_1 + (P\ddot{u}_3 + 2N\ddot{u}_4)x_2 + +(4P\dot{u}_4 + 8L\dot{u}_3)x_3 + \\ +(4P\dot{u}_3 + 8N\dot{u}_4)x_4 \qquad (4)$$

$$y^{(5)} = k''\dddot{u}_3 + k'''\dddot{u}_4 + (7P\dot{u}_4 + 14L\dot{u}_3)u_3 + (7P\dot{u}_3 + 14N\dot{u}_4)u_4 + \\ +(3Pu_4 + 6Lu_3)\dot{u}_3 + (3Pu_3 + 6Nu_4)\dot{u}_4 + (P\dddot{u}_4 + 2L\dddot{u}_3)x_1 + \\ +(P\dddot{u}_3 + 2N\dddot{u}_4)x_2 + (5P\ddot{u}_4 + 10L\ddot{u}_3)x_3 + \\ + (5P\ddot{u}_3 + 10N\ddot{u}_4)x_4 \qquad (5)$$

$$y^{(6)} = k''u_3^{(4)} + k'''u_4^{(4)} + (12P\ddot{u}_4 + 24L\ddot{u}_3)u_3 + (12P\ddot{u}_3 + 24N\ddot{u})u_4 + \\ +(10P\dot{u}_4 + 20L\dot{u}_3)\dot{u}_3 + (10P\dot{u}_3 + 20N\dot{u}_4)\dot{u}_4 + (3Pu_4 + 6Lu_3)\ddot{u}_3 \\ + (3Pu_3 + 6Nu_4)\ddot{u}_4 + (Pu_4^{(4)} + 2Lu_3^{(4)})x_1 + (Pu_3^{(4)} + 2Nu_4^{(4)})x_2 \\ +(6P\dddot{u}_4 + 12L\dddot{u}_3)x_3 + (6P\dddot{u}_3 + 12N\dddot{u}_4)x_4 \qquad (6)$$

Para resolver el sistema en la incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 es suficiente obtener hasta la sexta derivada de Lie, obteniendo el sistema de ecuaciones construido a partir de las expresiones (3), (4), (5) y (6).

$$\begin{bmatrix} Q' \\ R' \\ S' \\ T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' \\ E' & F' & G' & H' \\ I' & J' & K' & L' \\ M' & N' & O' & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Donde:

$$A' = P\dot{u}_4 + 2L\dot{u}_3 \quad B' = P\dot{u}_3 + 2N\dot{u}_4 \quad Q' = \tilde{\eta}_4 - X$$
$$E' = P\ddot{u}_4 + 2L\ddot{u}_3 \quad F' = P\ddot{u}_3 + 2N\ddot{u}_4 \quad R' = \tilde{\eta}_5 - Y$$
$$I' = P\dddot{u}_4 + 2L\dddot{u}_3 \quad J' = P\dddot{u}_3 + 2N\dddot{u}_4 \quad S' = \tilde{\eta}_6 - W$$
$$M' = Pu_4^{(4)} + 2Lu_3^{(4)} \quad N' = Pu_3^{(4)} + 2Nu_4^{(4)} \quad T' = \tilde{\eta}_7 - Z$$

$$C' = 3Pu_4 + 6Lu_3 \quad D' = 3Pu_3 + 6Nu_4$$
$$G' = 4P\dot{u}_4 + 8L\dot{u}_3 \quad H' = 4P\dot{u}_3 + 8N\dot{u}_4$$
$$K' = 5P\ddot{u}_4 + 10L\ddot{u}_3 \quad L' = 5P\ddot{u}_3 + 10N\ddot{u}_4$$
$$O' = 6P\ddot{u}_4 + 12L\dddot{u}_3 \quad P' = 6P\dddot{u}_3 + 12N\dddot{u}_4$$

con:

$$X = k''\dot{u}_3 + k'''\dot{u}_4$$
$$Y = k''\ddot{u}_3 + k'''\ddot{u}_4 + (3Pu_4 + 6Lu_3)u_3 + (3Pu_3 + 6Nu_4)u_4$$
$$W = k''\dddot{u}_3 + k'''\dddot{u}_4 + (7P\dot{u}_4 + 14L\dot{u}_3)u_3 + (7P\dot{u}_3 + 14N\dot{u}_4)u_4 + \\ (3Pu_4 + 6Lu_3)\dot{u}_3 + (3Pu_3 + 6Nu_4)\dot{u}_4$$
$$Z = k''u_3^{(4)} + k'''u_4^{(4)} + (12P\ddot{u}_4 + 24L\ddot{u}_3)u_3 + (12P\ddot{u}_3 + 24N\ddot{u}_4)u_4 + \\ (10P\dot{u}_4 + 20L\dot{u}_3)\dot{u}_3 + (10P\dot{u}_3 + 20N\dot{u}_4)\dot{u}_4 + (3Pu_4 + 6Lu_3)\ddot{u}_3 + \\ (3Pu_3 + 6Nu_4)\ddot{u}_4$$

Entonces el sistema matricial (7) tiene una solución única y podemos estimar los estados del sistema no lineal (1) si $\Delta \neq 0$.

Donde:

$$\Delta = A'\{F'[K'P' - O'L'] - G'[J'P' - L'N'] + H'[O'J' - N'K']\} - \\ -B'\{E'[K'P' - O'K'] - G'[I'P' - M'L'] + H'[I'O' - M'K']\} + \\ +C'\{E'[J'P' - N'L'] - F'[I'P' - M'L'] + H'[I'N' - M'J']\} - \\ -D'\{E'[J'O' - N'K'] - F'[I'O' - M'K'] + G'[I'N' - M'J']\} \neq 0$$

Podemos decir que el sistema (1') es inmersible en un sistema lineal con 7 estados y una salida dado en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}}_1 &= \tilde{\eta}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_2 &= \tilde{\eta}_3 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 &= \tilde{\eta}_4 \\ \dot{\tilde{\eta}}_4 &= \tilde{\eta}_5 \\ \dot{\tilde{\eta}}_5 &= \tilde{\eta}_6 \\ \dot{\tilde{\eta}}_6 &= \tilde{\eta}_7 \\ \dot{\tilde{\eta}}_7 &= \tilde{\eta}_8 \end{aligned} \qquad (8)$$

donde:

$$\tilde{\eta}_8 = y^{(7)} = A'' + B''\tilde{\eta}_4 + C''\tilde{\eta}_5 + D''\tilde{\eta}_6 + E''\tilde{\eta}_7$$

$$\tilde{\eta}_8 = k''u_3^{(5)} + k'''u_4^{(5)} + (21P\dddot{u}_4 + 42L\dddot{u}_3)u_3 + (21P\dddot{u}_3 + 42N\dddot{u}_4)u_4 \\ +(35P\ddot{u}_4 + 70L\ddot{u}_3)\dot{u}_3 + (35P\ddot{u}_3 + 70N\ddot{u}_4)\dot{u}_4 + (Pu_4^{(5)} + 2Lu_3^{(5)})x_1 + \\ +(Pu_3^{(5)} + 2Nu_4^{(5)})x_2 + (7Pu_4^{(4)} + 14Lu_3^{(4)})x_3 + (7Pu_3^{(4)} + \\ +14Nu_4^{(4)})x_4 \qquad (8.a)$$

Sustituyendo x_1, x_2, x_3, x_4 en (8.a), tenemos $y^{(7)}$ expresada en función de $\tilde{\eta}_4$, $\tilde{\eta}_5$, $\tilde{\eta}_6$ y $\tilde{\eta}_7$ entonces podemos escribir:

$$y^{(7)} = A'' + B''y^{(3)} + C''y^{(4)} + D''y^{(5)} + \\ +E''y^{(6)} = A'' + B''\tilde{\eta}_4 + C''\tilde{\eta}_5 + D''\tilde{\eta}_6 + E''\tilde{\eta}_7$$

donde las expresiones A'', B'', C'', D'' y E'' serán dadas más tarde en la sección 6.

Podemos hallás los estados estimados x_j, $(j = 1, 2, 3, 4)$ de la forma siguiente:

Colocando Q', R', S', T' en lugar de A', E', I', M'; (esto es en el Sistema matricial dado por (7)), respectivamente en la ecuación dada por Δ, obteniendo así Δ', luego el valor de x_1 será:

$$x_1 = \frac{\Delta'}{\Delta} \qquad (8.b)$$

De la misma manera podemos obtener x_2 colocando Q', R', S', T' en lugar de B', F', J', N' para obtener x_2.

$$x_2 = \frac{\Delta''}{\Delta} \qquad (8.c)$$

Continuando obtendremos x_3 reemplazando C', G', K', O' por Q', R', S', T' y finalmente, obtendremos x_4 reemplazando D', H', L', P' por Q', R', S', T'. Obteniendo así x_3 y x_4:

$$x_3 = \frac{\Delta'''}{\Delta} \quad y \quad x_4 = \frac{\Delta''''}{\Delta} \qquad (8.d)$$

Entonces el sistema (8) puede estar escrito en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_1 \\ \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \\ \dot{\tilde{\eta}}_4 \\ \dot{\tilde{\eta}}_5 \\ \dot{\tilde{\eta}}_6 \\ \dot{\tilde{\eta}}'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & B'' & C'' & D'' & E'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \\ \tilde{\eta}_4 \\ \tilde{\eta}_5 \\ \tilde{\eta}_6 \\ \tilde{\eta}_7 \end{bmatrix}$$

con

$$\dot{\tilde{\eta}}'_7 = \dot{\tilde{\eta}}_7 - A'' = y^{(7)} - A''$$

es decir tenemos un sistema diferencial en la forma dada por (9)

$$\dot{\tilde{\eta}} = F\tilde{\eta} \qquad (9)$$

donde el sistema de diferencias está dado por:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1(k+1) \\ \tilde{\eta}_2(k+1) \\ \tilde{\eta}_3(k+1) \\ \tilde{\eta}_4(k+1) \\ \tilde{\eta}_5(k+1) \\ \tilde{\eta}_6(k+1) \\ \tilde{\eta}'_7(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & B''\delta & C''\delta & D''\delta & E''(\delta+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1(k) \\ \tilde{\eta}_2(k) \\ \tilde{\eta}_3(k) \\ \tilde{\eta}_4(k) \\ \tilde{\eta}_5(k) \\ \tilde{\eta}_6(k) \\ \tilde{\eta}_7(k) \end{bmatrix} \qquad (10)$$

con $\tilde{\eta}'_7(k+1) = \tilde{\eta}_7(k+1) - \delta A''$ y δ representa el paso de muestreo o de integración.

Podemos decir que el sistema (10) es observable ya que la salida es

$$y = \tilde{\eta}_1 \qquad (11)$$

y como el sistema (10) con la salida dada por (11) es lineal, y observable, podemos construir el observador de estado correspondiente, utilizando el teorema dado en 3.2 [2].

$$\dot{\hat{\eta}} = F\hat{\eta} - k(y(t) - H\hat{\eta}) + Gu(t) = F\hat{\eta} - K(y(t) - H\hat{\eta})$$

donde

$$K^T = [K_1K_2K_3K_4K_5K_6K_7] \quad y \quad H = [1000000]$$

luego construimos el observador de estado que es determinado por;

$$
\begin{aligned}
\hat{\eta}_1(k+1) &= \hat{\eta}_1(k) + \delta\hat{\eta}_2(k) - K_1(\bar{\eta}_1 - \hat{\eta}_1(k)) \\
\hat{\eta}_2(k+1) &= \hat{\eta}_2(k) + \delta\hat{\eta}_3(k) - K_2(\bar{\eta}_1 - \hat{\eta}_1(k)) \\
\hat{\eta}_3(k+1) &= \hat{\eta}_3(k) + \delta\hat{\eta}_4(k) - K_3(\bar{\eta}_1 - \hat{\eta}_1(k)) \\
\hat{\eta}_4(k+1) &= \hat{\eta}_4(k) + \delta\hat{\eta}_5(k) - K_4(\bar{\eta}_1 - \hat{\eta}_1(k)) \\
\hat{\eta}_5(k+1) &= \hat{\eta}_5(k) + \delta\hat{\eta}_6(k) - K_5(\bar{\eta}_1 - \hat{\eta}_1(k)) \\
\hat{\eta}_6(k+1) &= \hat{\eta}_6(k) + \delta\hat{\eta}_7(k) - K_6(\bar{\eta}_1 - \hat{\eta}_1(k)) \\
\hat{\eta}_7(k+1) &= \hat{\eta}_7(k)[E''\delta + 1] + \delta A'' + B''\delta\hat{\eta}_4(k) \\
&\quad + C''\delta\hat{\eta}_5(k) + D''\delta\hat{\eta}_6(k) - K_7(\bar{\eta}_1 - \hat{\eta}_1(k))
\end{aligned} \tag{12}
$$

donde los $\hat{\eta}_i$ representan las variables estimadas a obtener del sistema dado por (12). Considerando los valores obtenidos de $\hat{\eta}_i$ ($1 \le i \le 7$) podemos calcular los estimados del estado original x_1, x_2, x_3 y x_4 (utilizando solamente $\hat{\eta}_4, \hat{\eta}_5, \hat{\eta}_6, \hat{\eta}_7$, en las ecuaciones Q', R', S', T' del sistema dado por (7)).

4 Estabilidad

La propiedad de observabilidad asegura la existencia de una matriz constante K tal que el espectro de $(F + KH)$ está en la parte estrictamente negativa del plano complejo [2], [4].

Sabemos que:

$$\dot{\hat{\eta}} = (F + KH)\hat{\eta} - Ky(t) \tag{13}$$

Si $e = \hat{\eta} - \eta$ de la expresión (13) podemos llegar a establecer la relación:

$$\dot{e} = (F + KH)e \tag{14}$$

eligiendo una matriz K en una forma adecuada, tendremos que $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ y de una forma particular $\lim \|\hat{\eta} - \eta\| = 0$ y si $x(t)$ está en una vecindad U_0, tendremos que $\lim_{t\to\infty} \|\theta^{-1}(\hat{\eta}(t)) - \theta^{-1}(\eta(t))\| = 0$, es decir $\lim_{t\to\infty} \|\hat{x} - x(t)\| = 0$, donde $\hat{x} = \theta^{-1}(\hat{\eta})$ y la transformación θ está dada por $\theta(x) = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots, \bar{\eta}_8)$.

A continuación damos las expresiones que establecen la relación entre la matriz de ganancia K y la colocación de polos (P_i) deseada, los cuales son elegidos en función de los resultados de simulación del observador, esto es, del punto de vista de rapidez y calidad de la convergencia.

$$
\begin{aligned}
K_1 &= -E'' + [\dot{A} + P_5 + P_6 + P_7] \\
K_2 &= -E''K_1 + D'' + [(\dot{B} + \dot{A}P_5) + (\dot{A} + P_5)P_6 + (\dot{A} + P_5 + P_6)P_7 \\
K_3 &= -D''K_1 + E''K_2 + C'' - [(\dot{C} + \dot{B}P_5) + (\dot{B} + \dot{A}P_5)P_6 + \\
&\quad + [(\dot{B} + \dot{A}P_5) + (\dot{A} + P_5)P_6]P_7] \\
K_4 &= E''K_3 - C''K_1 + B'' + D''K_2 + (\dot{C}P_5 + \dot{D}) + (\dot{C} + \dot{B}P_5)P_6 + \\
&\quad + [\dot{C} + \dot{B}P_5 + (\dot{B} + \dot{A}P_5)P_6]P_7 \\
K_5 &= C''K_2 - B''K_1 + E''K_4 + D''K_3 - [P_5\dot{D} + P_6(\dot{C}P_5 + \dot{D}) + \\
&\quad + P_7[\dot{C}P_5 + \dot{D} + (\dot{C} + \dot{B}P_5)P_6]] \\
K_6 &= B''K_2 + D''K_4 + E''K_5 + C''K_3 + P_5P_6\dot{D} + P_7[(P_5\dot{D}) + \\
&\quad + P_6(\dot{C}P_5 + \dot{D})] \\
K_7 &= B''K_3 + E''K_6 + D''K_5 + C''K_4 - P_5P_6P_7\dot{D}
\end{aligned} \tag{15}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
\dot{A} &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\
\dot{B} &= P_4(P_1 + P_2 + P_3) + P_3(P_1 + P_2) + P_1P_2 \\
\dot{C} &= P_4[(P_1 + P_2)P_3 + P_1P_2] + P_1P_2P_3 \\
\dot{D} &= P_1P_2P_3P_4
\end{aligned}
$$

5 Conclusión

Se ha diseñado una metodología muy simple, con la cual el sistema TPA es inmerso en un sistema lineal, que es además observable, y admite la existencia de un observador, contrariamente a lo establecido en [8].

Esta metodología es basada, en la utilización de derivadas de Lie iteradas de la función de salida como combinación lineal de los estados. El proceso de derivación termina cuando el número de ecuaciones es suficiente para determinar el valor de cada estado.

Bibliografía

[1] D. Claude, Fliess, Isidori,(1983). *"Immersion, directe et par bouclage, d'un système non linéaire dans un linéaire"*. Automatique théorique. C.R. Acad. Sc. Paris t. 296 Serie I, Pag. 237-240.

[2] J. Levine, R. Marino,(1986). *"Non linear system immersion, observers and finite-dimensional filters"*. Systems & Control letters North Holland, Pag. 133-142.

[3] R. Hermann. A. Krener, (1977). *"Nonlinear Controllability and Observability"*. IEEE, Pag. 728-740.

[4] A. Bensoussan, (1988). *"Observateurs et Stabilité"*. Université Paris IX Dauphine et INRIA, Pag. 73-83.

[5] Notas, (1988). *"Theorie des Observateurs"*. (Université Paris IX et l'Ecole des Mines).

[6] J. Levine, R. Marino, (1988). *"Constant-speed target tracking via bearings -only measurements*. Systems & Control Letters Jul., Pag 1-12.

[7] J. Levine, R. Marino (1988) *"On fault-Tolerant Observers"*. Systems & Control Letters Jul., Pag. 1-10.

[8] J. Levine, M. Vogel, (1988). *"Filtrage non lineaire pour trajectographie passive"*. Rapport intermediaire du Centre d'Automatique et d'Informatique de l'Ecole des Mines (Fontainebleau-France).

[9] A.J. Krener, A. Isidori, (1983). *"Linearization by output injection and nonlinear observers"* Systems & Control Letters, Vol. 3. pp. 47-52.

[10] A. J. Krener, W.Respondek, (1985). *"Nonlinear observer with linearizable error dynamics"*, SIAM J. Control and Optimization, Vol 23, No. 2, pp. 197-216.

6 Apéndice

Resumimos en este apéndice algunas expresiones relevantes, necesarias para el cálculo de los estados.

La ecuación $y^{(7)}$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
y^{(7)} &= A'' + B''y^{(3)} + C''y^{(4)} + D''y^{(5)} + E''y^{(6)} \\
&= A'' + B''\bar{\eta}_4 + C''\bar{\eta}_5 + D''\bar{\eta}_6 + E''\bar{\eta}_7
\end{aligned}
$$

Entonces, podemos escribir $y^{(7)}$ en función de Δ', Δ'', Δ''', y Δ''''

$$
\begin{aligned}
y^{(7)} &= K''u_3^{(5)} + K'''u_4^{(5)} + (21P\dddot{u}_4 + 42L\dddot{u}_3)u_3 + \\
&\quad + (21P\dddot{u}_3 + 42N\dddot{u}_4)u_4 + (35P\ddot{u}_4 + 70L\ddot{u}_3)\dot{u}_3 + \\
&\quad + (35P\ddot{u}_3 + 70N\ddot{u}_4)\dot{u}_4 + \frac{1}{\Delta}[(Pu_4^{(5)} + 2Lu_3^{(5)})\Delta' + \\
&\quad + (Pu_3^{(5)} + 2Nu_4^{(5)})\Delta'' + (7Pu_4^{(4)} + 14Lu_3^{(4)})\Delta''' \\
&\quad + (7Pu_3^{(4)} + 14Nu_4^{(4)})\Delta'''']
\end{aligned}
$$

finalmente escribimos $y^{(7)}$ en función de $\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_5, \bar{\eta}_6, \bar{\eta}_7$.

Entonces

$$y^{(7)} = A'' + B''\bar{\eta}_4 + C''\bar{\eta}_5 + D''\bar{\eta}_6 + E''\bar{\eta}_7$$

donde $A'' = X_0 + \hat{Q}$

y definimos

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \tfrac{1}{\Delta}(Pu_4^{(5)} + 2Lu_3^{(5)}) & \beta_2 &= \tfrac{1}{\Delta}(Pu_3^{(5)} + 2Nu_4^{(5)}) \\
\beta_3 &= \tfrac{1}{\Delta}(7Pu_4^{(4)} + 14Lu_3^{(4)}) & \beta_4 &= \tfrac{1}{\Delta}(7Pu_3^{(4)} + 14Nu_4^{(4)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_0 &= K''u_3^{(5)} + K'''u_4^{(5)} + (21P\dddot{u}_4 + 42L\dddot{u}_3)u_3 + (21P\dddot{u}_3 + 42N\dddot{u}_4)u_4 \\
&\quad + (35P\ddot{u}_4 + 70L\ddot{u}_3)\dot{u}_3 + (35P\ddot{u}_3 + 70N\ddot{u}_4)\dot{u}_4
\end{aligned}
$$

y $\hat{Q}$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
Q = [&-F'K'P'\beta_1 + F'L'O'\beta_1 + J'G'P'\beta_1 - J'H'O'\beta_1 - N'G'L'\beta_1 + N'H'K'\beta_1 + \\
&+ E'K'P'\beta_2 - E'L'O'\beta_2 - I'G'P'\beta_2 + I'H'O'\beta_2 + M'G'L'\beta_2 - M'H'K'\beta_2 + \\
&+ E'N'L'\beta_3 - E'J'P'\beta_3 + I'F'P'\beta_3 - I'N'H'\beta_3 - M'F'L'\beta_3 + M'J'H'\beta_3 + \\
&+ E'J'O'\beta_4 - E'N'K'\beta_4 - I'F'O'\beta_4 + I'N'G'\beta_4 + M'F'K'\beta_4 - M'J'G'\beta_4]X + \\
&+ [B'K'P'\beta_1 - B'L'O'\beta_1 - J'C'P'\beta_1 + J'D'O'\beta_1 + N'C'L'\beta_1 - N'D'K'\beta_1 - \\
&- A'K'P'\beta_2 + A'L'O'\beta_2 + I'C'P'\beta_2 - I'D'O'\beta_2 - M'C'L'\beta_2 + M'D'K'\beta_2 + \\
&+ A'J'P'\beta_3 - A'N'L'\beta_3 - I'B'P'\beta_3 + I'N'D'\beta_3 + M'B'L'\beta_3 - M'J'D'\beta_3 + \\
&+ A'N'K'\beta_4 - A'J'O'\beta_4 + I'B'O'\beta_4 - I'N'C'\beta_4 - M'B'K'\beta_4 + M'J'C'\beta_4]Y + \\
&+ [-B'G'P'\beta_1 + B'H'O'\beta_1 + F'C'P'\beta_1 - F'D'O'\beta_1 - N'C'H'\beta_1 + N'D'G'\beta_1 + \\
&+ A'G'P'\beta_2 + -A'H'O'\beta_2 - E'C'P'\beta_2 + E'D'O'\beta_2 - M'D'G'\beta_2 - A'F'P'\beta_3 + \\
&+ A'N'H'\beta_3 + M'C'H'\beta_2 + E'B'P'\beta_3 - E'N'D'\beta_3 - M'B'H'\beta_3 + M'F'D'\beta_3 + \\
&+ A'F'O'\beta_4 - A'N'G'\beta_4 - E'B'O'\beta_4 + E'N'C'\beta_4 + M'B'G'\beta_4 - M'F'C'\beta_4]W + \\
&+ [B'G'L'\beta_1 - B'H'K'\beta_1 - F'C'L'\beta_1 + F'D'K'\beta_1 + J'C'H'\beta_1 - J'D'G'\beta_1 - \\
&- A'G'L'\beta_2 + A'H'K'\beta_2 + E'C'L'\beta_2 - E'D'K'\beta_2 - I'C'H'\beta_2 + I'D'G'\beta_2 + \\
&+ A'F'L'\beta_3 - A'J'H'\beta_3 - E'B'L'\beta_3 + E'J'D'\beta_3 + I'B'H'\beta_3 - I'F'D'\beta_3 - \\
&- A'F'K'\beta_4 + A'J'G'\beta_4 + E'B'K'\beta_4 - E'J'C'\beta_4 - I'B'G'\beta_4 + I'F'C'\beta_4]Z
\end{aligned}
$$

y los coeficientes de $\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_5, \bar{\eta}_6$ y $\bar{\eta}_7$ están dados por:

$$
\begin{aligned}
B'' = &[F'K'P' - F'L'O' - J'G'P' + J'H'O' + N'G'L' - N'H'K']\beta_1 + \\
&[I'G'P' - E'K'P' - M'G'L' + M'H'K' - I'H'O' + E'L'O']\beta_2 + \\
&[M'F'L' - I'F'P' + E'J'P' - M'J'H' + I'N'H' - E'N'L']\beta_3 + \\
&[E'N'K' - M'F'K' + I'F'O' - E'J'O' + M'J'G' - I'N'G']\beta_4 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C'' = {} & [-B'K'P' + B'L'O' + J'C'P' - J'D'O' - N'C'L' + N'D'K']\beta_1 + \\
& [-I'C'P' - A'L'O' + M'C'L' - M'D'K' + I'D'O' + A'K'P']\beta_2 + \\
& [-M'B'L' + A'N'L' - A'J'P' + I'B'P' + M'J'D' - I'N'D']\beta_3 + \\
& [-A'N'K' + M'B'K' - M'J'C' + I'N'C' + A'J'O' - I'B'O']\beta_4 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D'' = {} & [B'G'P' - B'H'\Theta' - F'C'P' + F'D'O' + N'C'H' - N'D'G']\beta_1 + \\
& [-A'G'P' + A'H'O' - M'C'H' + M'D'G' + E'C'P' - E'D'O']\beta_2 \\
& [-A'N'H' + M'B'H' + A'F'P' - E'B'P' - M'D'F' + E'N'D']\beta_3 \\
& [-M'B'G' - A'F'O' + E'B'O' + M'F'C' - E'N'C' + A'N'G']\beta_4 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E'' = {} & [-B'G'L' + B'H'K' + F'C'L' - F'D'K' - J'C'H' + J'D'G']\beta_1 + \\
& [-E'C'L' + A'G'L' - A'H'K' + I'C'H' - I'D'G' + E'D'K']\beta_2 + \\
& [E'B'L' - A'F'L' - I'B'H' - E'J'D' + A'J'H' + I'F'D']\beta_3 + \\
& [A'F'K' + I'B'G' - E'B'K' - A'J'G' - I'F'C' + E'J'C']\beta_4 +
\end{aligned}
$$

luego entonces

$$y^{(7)} = A'' + B''\eta_4 + C''\eta_5 + D''\eta_6 + E''\eta_7$$

donde $A'' = X_0 + \bar{Q}$ y B'', C'', D'' y E'' están dados por las expresiones anteriores.