Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA–IZTAPALAPA

DISCRETIZACION DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS: CORRECCIONES DE SHEPPARD Y HOLLAND

TESIS QUE PRESENTA

CARMEN EDITH GARCIA BERNAL

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

MAESTRO EN MATEMATICAS

Octubre, 1987

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

079380

IZTAPALAPA
SERVICIOS DOCUMENTALES

A KALITA

En primer término quiero darles las gracias a mi esposo y a mis hijos Fernando y Sergio por haberme tenido paciencia durante el tiempo que estuve desarrollando los estudios de maestría.

Deseo también agradecer al M. en C. Fernando Galaz Fontes y al M. en C. Raul Rueda la ayuda que me prestaron en el desarrollo del presente trabajo, y al Dr. Federico O'Reilly sus valiosas sugerencias. Asimismo, agradezco al Dr. Alberto Castillo sus comentarios asi como el haberme sugerido el tema y facilitarme algunos articulos, y al Dr. Jorge García Peña sus sugerencias y amabilidad.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a todos aquellos que me apoyaron para poder terminar con éxito este trabajo, en especial a las siguientes personas: Sra. Carmen C. de Bernal, mis padres, Dr. Luis Verde Star, M. en C. Luis Javier Alvarez, Dr. Gustavo Chapela, M. en C. Constancio Hernandez, Mat. Gabriela Muñoz, y Dra. Patricia Saavedra.

INDICE

CAPITULO 1. Introducción y Antecedentes

CAPITULO 2. Las Correcciones de Sheppard

2.1 Introducción

2.2 Discretización inducida de norma h

2.3 Resultados preliminares

2.4 Las Correcciones de Sheppard

2.5 Correcciones de Sheppard para variables aleatorias con rango infinito

2.6 Distribución Gamma

2.7 Distribución Normal

2.8 Distribución Lognormal

CAPITULO 3. El Método de Holland

3.1 Introducción

3.2 Generalidades

3.3 Distribución Gamma

3.4 Distribución Exponencial

3.5 Distribución Normal

3.6 Distribución Lognormal

3.7 Aspectos prácticos

CAPITULO 4. Conclusiones

4.1 Introducción

4.2 Comparación entre los Métodos de Sheppard y Holland

4.3 Relación entre las Correcciones de Sheppard y de Holland

CAPITULO 1

Introducción y Antecedentes

Supóngase que se está trabajando con un experimento que da lugar a una cierta variable aleatoria continua X. Para su estudio, se observan los valores del rango de X (R_X) pero, en la práctica, estos valores se redondean debido a que los instrumentos de medición no son exactos. Es decir, lo que se hace en la práctica, es aproximar los valores reales hasta una exactitud que depende, en unos casos, del instrumento de medición, y en otros, de la necesidad de la exactitud de la medición en el experimento.

Para ilustrar esto daremos un ejemplo: Si X mide las alturas en centímetros de una cierta población humana, el rango de X será un intervalo, digamos, [a,b] ($b>a\geq 0$) por lo que X es continua. Sin embargo, para estudiar la distribución de X, comunmente se miden las alturas de los individuos únicamente hasta valores enteros. De esta forma, si la altura de un individuo queda entre 155 y 156 cm., pero está más cercana a 155 cm., se dirá que ese individuo "mide" 155 cm.. Asi pues, en la práctica los valores que se hace tomar a X forman un conjunto finito y, por lo tanto, se trabaja de hecho con una variable aleatoria discreta (inducida por X), a la cual se le llama discretización de X.

Claramente si en el ejemplo anterior en vez de hasta centímetros se hubiera medido hasta milímetros, hubiéramos obtenido otra discretización distinta para X. De esto se infiere que la discretización de una cierta variable aleatoria depende de la

exactitud hasta la cual se van a hacer las mediciones. Esta exactitud puede describirse mediante la norma de una partición sobre $[a,b]=R_X$. Además, esta partición constituirá el rango de la discretización. Asi, en el ejemplo citado, la norma de la partición sería 1 cm. y la partición ó rango correspondiente de la discretización de una variable aleatoria continua X la denotaremos por la letra Y.

Ahora bien, el estudio de una distribución continua X involucra el cálculo de su función de distribución acumulativa y sus primero y segundo momentos. Sin embargo, de lo expuesto anteriormente se desprende que, en la práctica, la única información de la que se dispone para estudiar X es la proporcionada por una discretización suya Y.

Aunque en general

$$E(X^k) \neq E(Y^k) \qquad , k=1,2,..$$

esperamos que si la norma de la partición es pequeña,

$$E(X^k) \approx E(Y^k) \qquad , k=1,2,...$$

Desde el punto de vista estadístico surge entonces, en particular, el problema de medir la bondad de los estimadores $\bar{y}$ y s_Y^2 con respecto a la distribución de X. El presente trabajo está dedicado al estudio de este problema.

Una de las primeras referencias al problema de la discretización de variables aleatorias continuas aparece en el artículo de 1908 de Student [7] relativo a las medidas de las alturas de 3,000 personas. En este trabajo la norma de la partición de la discretización es de 1 pulgada.

A finales del siglo pasado, Sheppard da a conocer unas relaciones que expresan los momentos de X en términos de los de Y, y en donde aparecen las Correcciones de Sheppard. Dos autores que discuten estas correcciones son Kendall & Stuart [3] y Cramér [4]. El Capítulo 2 está dedicado a su estudio.

Recientemente, en 1975, Holland [5] da una nueva técnica para determinar la bondad de los estimadores de los dos primeros momentos de X basados en E(Y) y $E(Y^2)$. Esto se tratará en el Capítulo 3.

También, los Capítulos 2 y 3 examinan teóricamente las Correcciones de Sheppard y el Método de Holland en las distribuciones Gamma, Normal y Lognormal.

Finalmete, el trabajo compara los estimadores para E(X) y V(X) basados en Y obtenidos por los métodos de Sheppard, Holland y de Máxima Verosimilitud en las distribuciones Normal, Lognormal y Gamma.

CAPITULO 2

Las Correcciones de Sheppard

2.1 Introducción

Sheppard presenta sus correcciones por discretización en 1898 [5], pero omite señalar explícitamente algunas condiciones sobre la función de densidad probabilística de la variable aleatoria continua X de las que hace uso, y utiliza argumentos geométricos difíciles de seguir.

En 1946, Cramér [1] da una demostración más formal de las Correcciones de Sheppard.

En 1943, Kendall & Stuart [3] dan una presentación más ó menos precisa, aunque muy escueta, de las Correcciones de Sheppard distinta de la que Cramér da. En esta presentación no se discute el error.

Este capítulo dará con detalle una variante de la demostración dada por Kendall & Stuart, discutirá el error y estudiará, como caso especial, el de las variables aleatorias continuas con rango infinito.

2.2 Discretización inducida de norma h.

Sea X una variable aleatoria continua con f.d.p. f. Supongamos que $R_X=[a,b]$. Dividamos [a,b] en n intervalos de igual longitud h (i.e., estamos generando una partición de [a,b] de norma h). Los elementos de la partición de R_X así generada son

$$\{a,\ a+h\ ,\ a+2h\ ,\ldots,\ a+jh\ ,\ldots,\ a+nh=b\}.$$

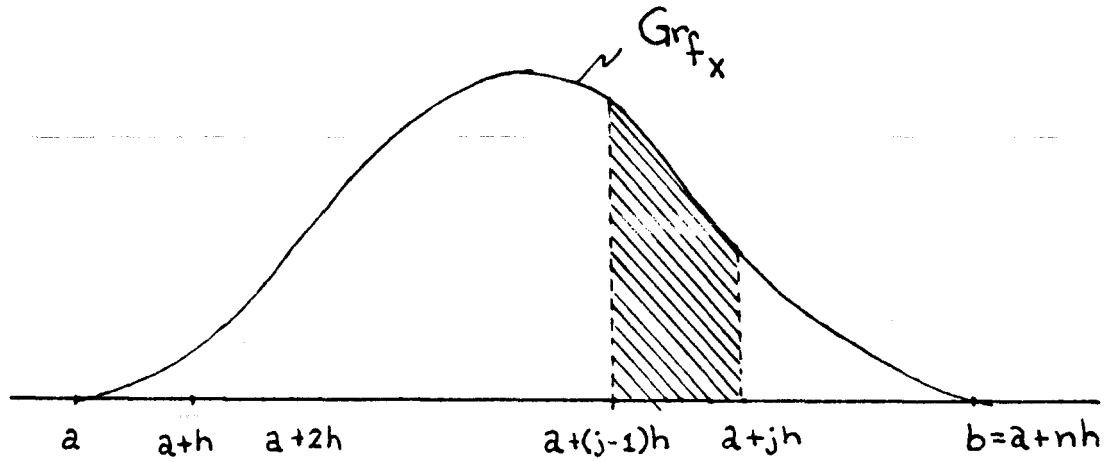


Fig. 2.2.1

Sea $j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Denotemos al punto medio del j° intervalo $[a+(j-1)h, a+jh]$ por x_j, esto es,

$$x_j=a+(j-(0.5)h), \qquad j=1,2,\ldots,n. \quad . \quad . \quad (2.2.2)$$

Sea Y la discretización de X tal que

$$R_Y=\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}.$$

Asi (ver Fig. 2.2.1), resulta natural definir la función de probabilidad asociada a Y como

$$f_j \equiv P(Y=x_j) \equiv P\{X \in [a+(j-1)h, a+jh]\}, \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

Haciendo el cambio de variable $\xi=x-x_j$ resulta

$$P\{X\in[a+(j-1)h, a+jh]\} = \int_{a+j\ 1)h}^{a+jh} f(x)\ dx = \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(x_j+\xi)\ d\xi.$$

Luego, podemos expresar la función de probabilidad asociada a Y como

$$f_j \equiv P(Y=x_j) \equiv \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(x_j+\xi)\ d\xi \quad \ldots\ (2.2.3)$$

A la variable aleatoria Y con esta función de probabilidad asociada la llamaremos la **discretización de norma h inducida por X.**

2.3. Resultados Preliminares.

En la presente sección probaremos algunos resultados que intervienen en la prueba y análisis de las Correcciones de Sheppard.

Lema 2.3.1. Sea X una variable aleatoria continua con rango [a,b], y f.d.p. f. Consideremos $n\in\mathbb{N}$ fijo y $h=(b-a)/n$. Sean $r\in\mathbb{N}$, y Y la discretización de norma h inducida por X. Definamos $y_r(x):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$y_r(x) \equiv x^r \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(x+\xi)\ d\xi \quad \ldots\ (2.3.1)$$

Entonces,

$$(1/h)\int_{a-h}^{b+h} y_r(x)\ dx = \sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{1}{2j+1} ((0.5)h)^{2j}\ \mu'_{r-2j}$$

donde μ'_r denota el k° momento de X.

IZTAPALAPA
SERVICIOS DOCUMENTALES

Demostración

Denotemos $R = [a-h, b+h] \times [-(0.5)h, (0.5)h]$. Entonces, de (2.3.1) se tiene

$$\int_{a-h}^{b+h} y_r(x)\, dx = \iint_R x^r\, f(x+\xi)\, d\xi\, dx \qquad \ldots\ldots (2.3.2)$$

Ya que $f(\zeta)=0$ para todo $\zeta \notin [a,b]$, se cumple $f(x+\xi)=0$ cuando $\xi<a-x$ ó $\xi>b-x$, lo cual sucede si $(x,\xi) \in R_1 \cup R_3$, donde R_1 y R_3 son las regiones señaladas en la Fig. 2.3.3. Por lo tanto,

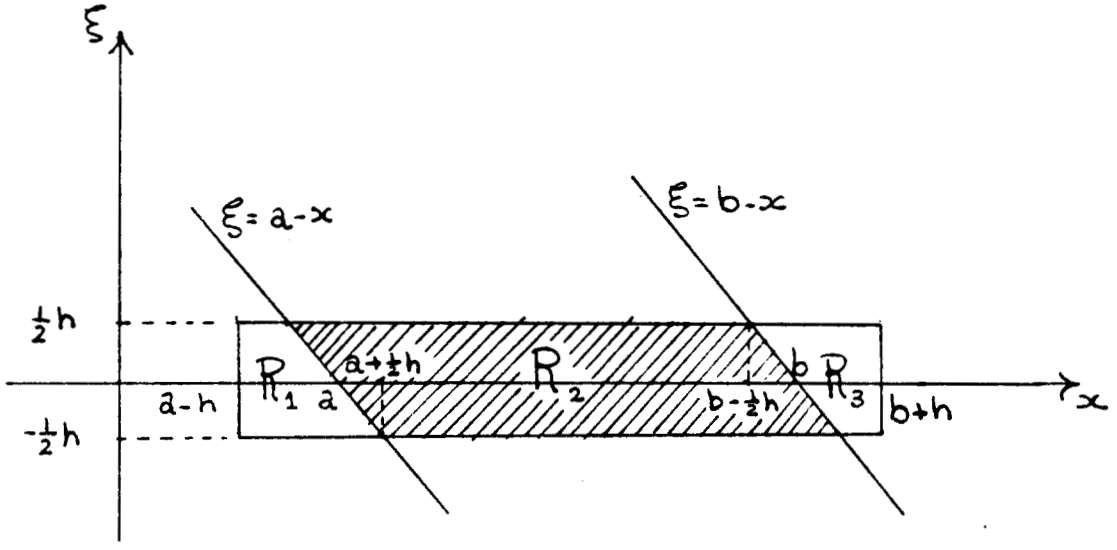


Fig. 2.3.3

$$\iint_R x^r\, f(x+\xi)\, d\xi\, dx = \iint_{R_2} x^r\, f(x+\xi)\, d\xi\, dx \qquad \ldots\ldots (2.3.4)$$

siendo R_2 la región indicada en la Fig. 2.3.3. Para evaluar esta

integral, hagamos el cambio de variable

$$G(x,\xi) = (u,\xi)$$

donde

$$u(x,\xi) = x+\xi.$$

Como el jacobiano de esta transformación es 1, a partir de (2.3.2) y (2.3.4) tendremos

$$\int_{a-h}^{b+h} y_r(x)\,dx = \iint_{G(R_2)} (u-\xi)^r f(u)\,du\,d\xi = \int_a^b \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} (u-\xi)^r f(u)\,du\,d\xi \qquad \ldots\ldots (2.3.5)$$

después de observar que $G(R_2)=[a,b] \times [-(0.5)h,(0.5)h]$ (Fig. 2.3.6).

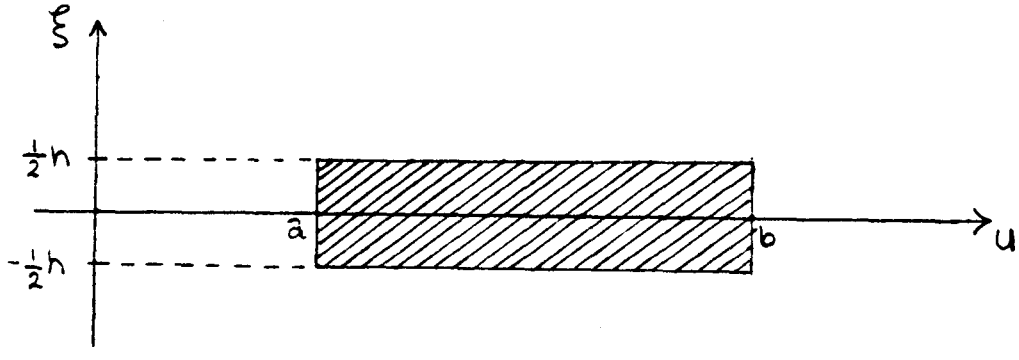


Fig. 2.3.6

Notemos ahora que, usando el hecho de que

$$(u+(0.5)h)^{r+1} - (u-(0.5)h^{r+1} = \sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{r+1}{2j+1} u^{r-2j}\,((0.5)h)^{2j}\,h,$$

se tiene

079380

$$(1/h)\int_a^b f(u)\int_{-(0.5)h}^{(0.5)h}(u-\xi)^r\,d\xi\,du =$$

$$=\int_a^b f(u)\left\{\sum_{j=0}^{[r/2]}\frac{\binom{r}{2j}\frac{r+1}{2j+1}\,u^{r-2j}\,((0.5)h)^{2j}}{r+1}\right\}du$$

$$=\sum_{j=0}^{[r/2]}\binom{r}{2j}\frac{1}{2j+1}((0.5)h)^{2j}\,\mu'_{r-2j}\,.$$

Luego, de (2.3.5) se obtiene lo deseado.

q.e.d.

Definición 2.3.2. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ y $k\in\mathbb{N}$. Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es tal que

i) $f\in C^{k-1}([a,b])$ y

ii) $f^{(l)}(a)=f^{(l)}(b)=0$, $l=0,1,2,\ldots,k-1$,

diremos que f es una **función de Sheppard de orden k-1 sobre [a,b]**. Si i) y ii) se satisfacen para todo $k\in\mathbb{N}$, diremos que f es una **función de Sheppard de orden ∞ sobre [a,b]**.

Notemos que si f es una función de Sheppard de orden k-1 sobre [a,b], entonces $f\in C^{k-1}(\mathbb{R})$, si definimos $f(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}-[a,b]$.

Lema 2.3.3. Sean $r,n\in\mathbb{N}$ fijos y $h=(b-a)/n$. Sea X una variable aleatoria continua de rango [a,b], f.d.p. f y F.d.a. F. Sea y_r la

función dada por (2.3.1) definida sobre [a-h, b+h]. Supongamos que f es función de Sheppard de orden 2m-1 sobre [a,b], m∈N. Entonces y_r es 2m veces derivable y

$$y_r^{(k)}(x)= \sum_{s=0}^{\min(r,k)} \binom{k}{s} \frac{r!}{(r-s)!} x^{r-s} \left[\right.$$

$$\left. \left[f^{(k-s-1)}(x+(0.5)h) - f^{(k-s-1)}(x-(0.5)h) \right] \right. \quad , \; k=1,2,\ldots,2m,$$

donde $f^{(0)}=f$ y $f^{(-1)}= F$.

Demostración

De (2.3.1) vemos que y_r puede expresarse como

$$y_r(x)=x^r\, G(x) \qquad \ldots\ldots (2.3.7)$$

donde

$$H(x)= \int_{-(0.5)}^{(0.5)h} f(x+\xi)\, d\xi \qquad \ldots\ldots (2.3.8)$$

Observemos que, ya que f es función de Sheppard de orden k-1 sobre [a,b], entonces H tiene k derivadas. Además, haciendo el cambio de variable $\eta=x+\xi$, de (2.3.8) se obtiene

$$H^{(l)}(x) = f^{(l-1)}(x+(0.5)h) - f^{(l-1)}(x-(0.5)h) \quad , \; l=1,2,\ldots,k.$$

$$\ldots\ldots (2.3.9)$$

Consideremos ahora dos casos:

Caso 1. Si $r \geq k$, aplicando a (2.3.7) la Regla del Producto para derivadas sucesivas ([6] pag. 159) y luego la igualdad (2.3.9), obtenemos lo deseado.

Caso 2. Si $k>r$. En este caso, la igualdad establecida en el lema se

obtiene de manera análoga a como se hizo en el *Caso* 1, pero observando que si $k>r$, entonces todas las derivadas de x^r de orden mayor que r son 0.

De los casos 1 y 2 se desprende lo deseado.

q.e.d.

Para establecer las Correcciones de Sheppard es fundamental la Fórmula para Sumas de Euler-Maclaurin que a continuación enunciamos ([8], sección 7.5).

Teorema 2.3.4. Sea w(x) una función con 2m derivadas en [a,b]. Si $l\in\mathbb{N}$ y $t=(b-a)/n$ entonces,

$$(1/t)\int_a^b w(x)\,dx = \left[w(a+(0.5)t)+w(a+(1.5)t)+\ldots+w(a+(n-(0.5))t)\right]$$

$$-A_m - S_{2m} \qquad \ldots\ldots (2.3.10)$$

donde

$$A_m=\sum_{j=1}^{m} \frac{t^{2j-1}}{(2j)!}\, B_{2j}(0.5)\, \left[w^{(2j-1)}(x)\right]_a^b,$$

$w^{(r)}=r^a$ derivada de w,

$$B_{2m}(z)=(-1)^{m-1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2\cos(2\pi rz)}{(2\pi r)^{2m}}$$ (Polinomio de Bernoulli de orden 2m ([1], pags. 123-124)),

y

$$S_{2m} = \frac{nt^{2m}}{(2m)!} B_{2m}(0.5) \quad w^{(2m)}(x_0) \quad \text{para algún } x_0 \in (a,b) \quad . \quad . \quad . \quad (2.3.11)$$

2.4 Las Correcciones de Sheppard.

En esta sección se probará un teorema del cual se derivan las Correcciones de Sheppard, que permiten expresar los momentos de la variable aleatoria continua X en función de h y los momentos de su discretización Y, más un error. Además, se discute la magnitud de ese error y se dan condiciones bajo las cuales éste puede ser 0.

Teorema 2.4.1. Sea X una variable aleatoria continua de rango [a,b] con f.d.p. f. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ fijo y $h=(b-a)/n$. Sea Y la discretización de norma h inducida por X. Sea $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que f es función de Sheppard de orden 2m-1 sobre [a,b]. Entonces, si $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{1}{2j+1} ((0.5)h)^{2j} \mu'_{r-2j} - \bar{\mu}'_r = -S_{2m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.4.1)$$

donde μ'_k y $\bar{\mu}'_k$ son los momentos de X y Y, respectivamente, y

$$S_{2m} = \frac{nh^{2m}}{(2m)!} B_{2m}(0.5) \quad y_r^{(2m)}(x_0) \quad \text{para algún } x_0 \in (a-h, b+h).$$

Demostración

Consideremos nuevamente la función

$$y_r(x)= x^r \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(x+\xi)\, d\xi$$

definida en $\mathbb{R}$.

Notemos primero que, ya que

$$\int_{a-h}^{a} f(\xi)\, d\xi = 0,$$

se tiene que

$$y_r(a-(0.5)h) = (a-(0.5)h)^r \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(a-(0.5)h+\xi)\, d\xi$$

$$=(a-(0.5)h)^r \int_{a-h}^{a} f(\xi)\, d\xi = 0 \qquad \ldots\ldots (2.4.2)$$

Análogamente,

$$y_r(b+(0.5)h)=0. \qquad \ldots\ldots (2.4.3)$$

Ahora bien, como se cumplen las hipótesis del lema 2.3.3, y_r tiene 2m derivadas. Por lo tanto, es posible aplicar el teorema 2.3.4 a y_r en el intervalo $[a-h, b+h]$, dividiendo este último en n+2 intervalos de igual longitud h. Asi pues, tenemos

$$(1/h)\int_{a-h}^{b+h} y_r(x)\, dx =$$

$$= \left[y_r(a-h+(0.5)h)+y_r(a-h+(1.5)h)+\ldots+y_r(a-h+(n+2-(0.5))h)\right]-A_m-S_{2m}$$

$$=$$

$$\left[y_r(a-(0.5)h)+y_r(a+(0.5)h)+\ldots+y_r(b-(0.5)h)+y_r(b+(0.5)h)\right]-A_m-S_{2m}$$

$$= \left[y_r(a+(0.5)h)+y_r(a+(1.5)h)+\ldots+y_r(a+(n-(0.5))h)\right]-A_m-S_{2m}$$

(por (2.4.2) y (2.4.3))

$$= \bar{\mu}'_r - A_m - S_{2m} \qquad \ldots\ldots (2.4.4)$$

Pero

$$y_r^{(2j-1)}(a-h) = y_r^{(2j-1)}(b+h)=0 \qquad , \ j=1,2,\ldots,m$$

Luego, ya que (por el teorema 2.3.4)

$$A_m = -\sum_{j=1}^{m} \frac{h^{2j-1}}{(2j)!} B_{2j}(0.5) \left[y_r^{(2j-1)}(b+h) - y_r^{(2j-1)}(a-h)\right],$$

se tiene $A_m=0$. Asi pues, de (2.4.4) se tiene

$$(1/h)\int_{a-h}^{b+h} y_r(x) = \bar{\mu}'_r - S_{2m} .$$

Finalmente, del lema 2.3.3 concluimos que

IZTAPALAPA
SERVICIOS DOCUMENTALES

$$\sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{1}{2j+1} ((0.5)h)^{2j} \mu'_{r-2j} - \bar{\mu}'_r = -S_{2m}.$$

q.e.d.

Definición 2.4.2. Bajo las hipótesis del teorema 2.4.1, definimos el error de Sheppard para el r° momento, E_r , por

$$E_r = S_{2m}.$$

La igualdad (2.4.1) permite expresar los momentos de X en términos de los momentos de Y de menor orden (más un error), despejando los momentos de X. Enseguida daremos el 1° y 2° momentos de X en términos de los de Y.

Corolario 2.4.3. Bajo las hipótesis del teorema 2.4.1 se tiene

$$\mu'_1 = \bar{\mu}'_1 + E_1 ,$$

$$\mu'_2 = \bar{\mu}'_2 - (1/12)h^2 + E_2$$

donde E_1 y E_2 son como en la definición 2.4.2.

Las ecuaciones dadas por este corolario son las llamadas **Correcciones de Sheppard** para el 1° y 2° momentos. Despejando μ'_r ($r \in \mathbb{N}$) de la ecuación (2.4.5), es posible encontrar las Correcciones de Sheppard para los demás momentos. Dado que este trabajo estudia principalmente los primeros dos momentos, se dan únicamente las expresiones para ellos.

Veamos ahora qué tan grande es E_r. Supongamos que $m \in \mathbb{N}$ es tal que f tiene 2m derivadas y $y_r^{(2m)}$ es acotada. Sea Q_m una cota para $y_r^{(2m)}$.

Usando el hecho de que

079380

$$\left| \frac{B_{2j}(0.5)}{(2j)!} \right| < \frac{4}{(2\Pi)^{2j}} \quad \ldots\ldots (2.4.6)$$

([3] pag.76), tenemos que

$$|E_r| = |S_{2m}| \leq n \frac{h^{2m}}{(2m)!} \frac{4}{(2\Pi)^{2m}} Q_m$$

$$= (b-a)\, h^{2m-1} \frac{4}{(2\Pi)^{2m}} Q_m$$

$$\equiv C_{2m} \quad \ldots\ldots (2.4.7)$$

Si C_{2m} es "aceptablemente pequeño" para un experimentador, éste puede suponer que $\mu'_r \approx \bar{\mu}'_r$. En particular, para el 1° y 2° momentos, puede suponer $\mu'_1 \approx \bar{\mu}'_1$ y $\mu'_2 \approx \bar{\mu}'_2 - (1/12)h^2$.

Para el 2° momento, definamos el error total (No Sheppard) por

$$E_{NS} = \mu'_2 - \bar{\mu}'_2.$$

E_{NS} es el error derivado de aproximar el 2° momento de X por el de Y, sin usar Correcciones de Sheppard.

Dado que

$$E_2 = \mu'_2 - \bar{\mu}'_2 + (1/12)h^2$$

entonces

$$E_2 = E_{NS} + (1/12)h^2.$$

Luego,

$$E_{NS} = E_2 - (1/12)h^2 \ldots\ldots (2.4.8)$$

Ahora bien, de (2.4.7) vemos que la mínima potencia de h que aparece en $S_{2m}=E_2$ es 1. Entonces,

$$E_2=O(h^i), \quad i\geq 1.$$

Luego, de (2.4.8) se sigue que

$$E_{NS}= \begin{cases} O(h) & \text{si} \quad i=1 \\ O(h^2) & \text{si} \quad i=2,.... \end{cases}$$

Consideremos ahora dos casos:

Caso 1. Si $E_2= O(h^i)$ (i.e., si $i=1,2$), entonces el orden de E_2 y de E_{NS} son iguales y por lo tanto, desde este punto de vista, es indistinto usar la Correcciones de Sheppard que no usarlas.

Caso 2. Si $E_2= O(h^i)$, $i\geq 3$, entonces el orden de E_2 es mayor que el de E_{NS} y, por lo tanto, es preferible usar las Correcciones de Sheppard a no usarlas.

De lo anterior se concluye que, si $m>1$, es preferible usar las Correcciones de Sheppard a no usarlas' y que mientras mayor es m, mayor es el orden de E_2 , y mejores serán las Correcciones de Sheppard.

Veremos enseguida qué sucede con el error E_r de las Correcciones de Sheppard en el caso especial de que la f.d.p. de X sea C^∞.

Para esto, observemos primero que en el teorema 2.3.4, para cada $k\in N$ tal que $1\leq k\leq m$, el residuo de la expresión (2.3.10) se puede escindir en dos partes: A_k y S_{2k} ; i.e., cada $1\leq k\leq m$ determina una pareja (A_k , S_{2k}) tal que A_k+S_{2k} forma el residuo. Asi pues, dado que en el teorema 2.4.1, $A_m=0$, se tienen ahí residuos iguales $S_2=S_4=...=S_{2m}$. De esta manera, el error de Sheppard E_r dado en

IZTAPALAPA SERVICIOS DOCUMENTALES

la definición 2.4.2 satisface el que

$$E_r = S_2 = S_4 = \ldots = S_{2m}. \qquad \ldots\ldots \quad (2.4.9)$$

En base a lo anterior probaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.4.4. Sea X una variable aleatoria continua en [a,b] con f.d.p. f. Consideremos $r, n \in \mathbb{N}$ y $h=(b-a)/n$. Sea Y la discretización de norma h inducida por X. Si

i) f es función de Sheppard de orden ω sobre [a,b], y

ii) existen $\alpha, Q > 0$ tales que

$$|y_r^{(2k)}(x)| \leq \alpha\, Q^{2k}$$

para todo $x \in [a,b]$ y $k \in \mathbb{N}$,

entonces $E_r = 0$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Observemos que

$$\lim_{k \to \omega} \frac{\left(\frac{Qh}{2\pi}\right)^{2k}}{(2k)!} = 0$$

Entonces, existe una mínima $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$4n\alpha \frac{\left(\frac{Qh}{2\pi}\right)^{2M}}{(2M)!} < \varepsilon.$$

Luego, dado que

$$\left| \frac{B_{2k}(0.5)}{(2k)!} \right| < \frac{4}{(2\pi)^{2k}},$$

utilizando la hipótesis de que

$$|y_r^{(2k)}(x)| \leq \alpha Q^{2k}$$

tenemos

$$|S_{2k}| < n \frac{h^{2k}}{(2k)!} \frac{4}{(2\Pi)^{2k}} |y_r^{(2k)}(x)|$$

$$\leq n \frac{h^{2k}}{(2k)!} \frac{4\alpha}{(2\Pi)^{2k}} Q^{2k}$$

$$= 4n\alpha \frac{(Qh)^{2k}}{(2\Pi)^{2k}} \frac{1}{(2k)!}$$

$$= 4n\alpha \frac{\left[\frac{Qh}{2\Pi}\right]^{2k}}{(2k)!} < \varepsilon \quad , \qquad \text{si } k=M.$$

Asi pues, existe $M \in N$ tal que

$$|S_{2M}| < \varepsilon.$$

Luego, por (2.4.9),

$$|E_r| \leq |S_{2M}|$$

y, asi

$$|E_r| < \varepsilon.$$

Ya que ε es arbitrario, se concluye que $E_r=0$.

q.e.d.

Notemos entonces que si se complen las hipótesis del teorema 2.4.4., se tiene

$$\sum_{j=0}^{[r/2]} \left[\begin{matrix} r \\ 2j \end{matrix}\right] \frac{1}{2j+1} ((0.5)h)^{2j} \mu'_{r-2j} = \bar{\mu}'_r \quad .$$

En particular,

079380

$$\mu_1' = \bar{\mu}_1' \qquad y \qquad \mu_2' = \bar{\mu}_2' - (1/12)h^2$$

El siguiente teorema da condiciones sobre la f.d.p. f de X para que $y_r^{(k)}(x)$ tenga una cota de la forma $\alpha\, Q^k$ ($k\in \mathbb{N}$).

Teorema 2.4.5. Sea X una variable aleatoria continua en [a,b] con f.d.p. f. Consideremos $r,n\in\mathbb{N}$ y $h=(b-a)/n$. Sea Y la discretización de norma h inducida por X. Si existe $R>0$ tal que

$$|f^{(k)}(x)| \le R^k \quad \text{para algún } k\in\mathbb{N} \text{ tal que } k\le r,$$

se tiene

$$|y_r^{(k)}(x)| \le h\, r!\, M^r\, (R+1)^k$$

donde

$$M = \max\{|a|, |b|, 1\}.$$

Demostración

Ya que $k\ge r$, por el lema 2.3.6 se tiene

$$|y_r^{(k)}(x)| \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{r} \left[\begin{matrix} k \\ s \end{matrix} \right] \frac{r!}{(r-s)!} M^{r-s} \left| f^{(k-s-1)}(x+(0.5)h) - f^{(k-s-1)}(x-(0.5)h) \right|$$

. . . . . (2.4.10)

$$\le \sum_{s=0}^{r} \binom{k}{s} \frac{r!}{(r-s)!} M^{r-s}\, h\, |f^{(k-s)}(x_0)| \qquad (x_0\in(x-(0.5)h, x+(0.5)h)$$

$$\le \sum_{s=0}^{r} \binom{k}{s} \frac{r!}{(r-s)!} M^{r-s}\, h\, R^{k-s}$$

$$\leq M^r \; h \; r! \sum_{s=0}^{r} \binom{k}{s} \; R^{k-s}$$

$$= M^r \; h \; r! \; (R+1)^k.$$

Esto prueba lo deseado.

q.e.d.

2.5. Correcciones de Sheppard para variables aleatorias con rango infinito.

Las secciones anteriores de este capítulo han tratado exclusivamente de variables aleatorias continuas cuyo rango es un intervalo cerrado y acotado. Sin embargo, existen variables aleatorias importantes (como la normal) cuyo rango no es de esta forma. Esta sección tratará de la aplicación de las Correcciones de Sheppard a este tipo de variables aleatorias. Kendall & Stuart mencionan este caso de manera muy breve; nosotros, debido a su impotancia, lo desarrollaremos más ampliamente. También, la manera como se expone el tema es distinta de la expuesta por Cramér ([1] pp. 359-362).

Notemos primero que, si X es una variable aleatoria continua con rango de la forma $(a,b]$, $[a,b)$ ó (a,b), con f.d.p. f, lo desarrollado en las secciones anteriores es aplicable a ella si f puede extenderse a $[a,b]$ de manera que se cumplan las hipótesis consideradas. El caso interesante es entonces aquel en el que el rango de X es de la forma $(-\infty,\infty)$, $(-\infty,b]$, $[a,\infty)$, que es el que discutimos a continuación.

Supongamos que X es una variable aleatoria continua con rango

$(-\infty,\infty)$, f.d.p. f y F.d.a. F. Veamos qué repercusiones tiene restringir el rango de X a un intervalo $[a,b]$ en la estimación del r° momento de X mediante Correcciones de Sheppard.

Fijemos $a,b\in\mathbb{R}$ ($a<b$), $n\in\mathbb{N}$ y $h=(b-a)/n$. Cuando $f=0$ fuera de $[a,b]$, como en el lema 2.3.3, es necesario que f sea función de Sheppard de orden $2m-1$ sobre $[a,b]$ para que $f\in C^{2m-1}(\mathbb{R})$. En el caso que nos ocupa supondremos esto último directamente.

Lema 2.5.1. Sea X una variable aleatoria con rango $(-\infty,\infty)$ y f.d.p. f. Consideremos $n\in\mathbb{N}$, $a,b\in\mathbb{R}$ fijos, y $h=(b-a)/n$. Sea Y la discretización de norma h inducida por $X\big|_{X^{-1}([a,b])}$. Para $m\in\mathbb{N}$ fijo supongamos que $f\in C^{2m-1}(\mathbb{R})$. Entonces

$$(1/h)\int_a^b y_r(x)\,dx = \sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{1}{2j+1}\,((0.5)h)^{2j}\,\mu'_{r-2j} -$$

$$- \rho_1(a,b) - \rho_2(a,b) - \rho_3(a,b) - T(a,b),$$

donde μ'_k denota el k° momento de X,

$$\rho_1(a,b) = \frac{1}{r+1}\left\{ b^{r+1}\int_{b-(0.5)h}^{b+(0.5)h} f(u)\,du \;-\; a^{r+1}\int_{a-(0.5)h}^{a+(0.5)h} f(u)\,du \right\},$$

$$\rho_2(a,b) = -\frac{1}{r+1}\left\{ \int_a^{a+(0.5)h} (u-(0.5)h)^{r+1} f(u)\,du - \int_b^{b+(0.5)h} (u-(0.5)h)^{r+1} f(u)\,du \right\},$$

$$\rho_3(a,b) = -\frac{1}{r+1}\left\{\int_{a-(0.5)h}^{a}(u+(0.5)h)^{r+1}f(u)\,du - \int_{b-(0.5)h}^{b}(u+(0.5)h)^{r+1}f(u)\,du\right\},$$

$$T(a,b) = \sum_{j=0}^{[r/2]}\binom{r}{2j}\frac{1}{2j+1}((0.5)h)^{2j}\,\tau_j(a,b) \qquad , \text{ y}$$

$$\tau_j(a,b) = \int_{-\infty}^{a} u^{r-2j}\,f(u)\,du + \int_{b}^{\infty} u^{r-2j}\,f(u)\,du.$$

Demostración

Esta demostración es semejante a la del lema 2.3.3.

Denotemos $R=[a,b]\times[-(0.5)h,(0.5)h]$. Entonces

$$\int_a^b y_r(x)\,dx = \int_a^b x^r\int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(x+\xi)\,d\xi\,dx = \iint_R x^r\,f(x+\xi)\,d\xi\,dx. \qquad \ldots\ldots (2.5.1)$$

Para evaluar esta integral, hagamos el cambio de variable

$$G(x,\xi) = (u,\xi)$$

donde

$$u(x,\xi) = x+\xi.$$

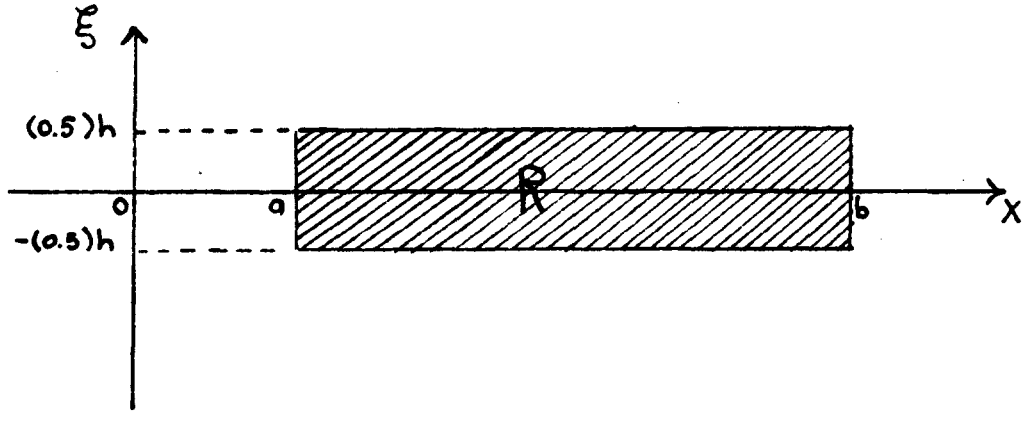


Fig. 2.5.3.a

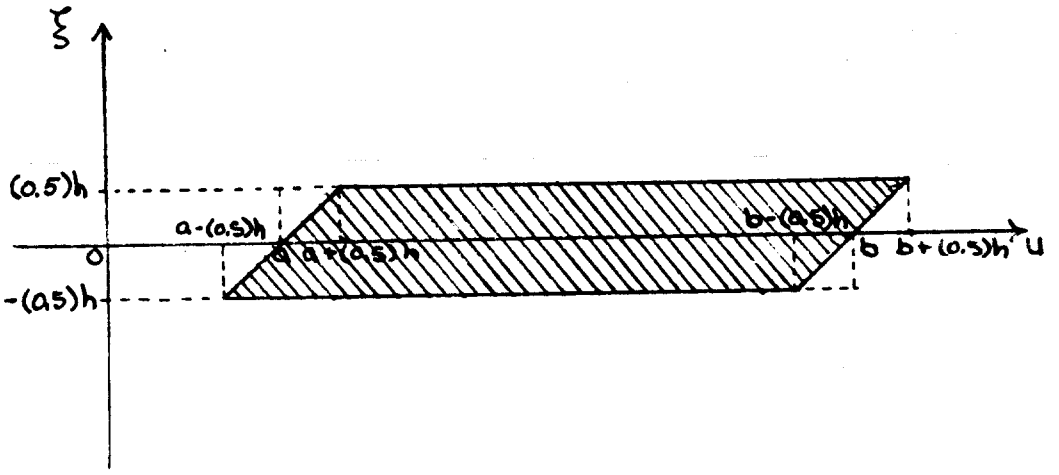


Fig. 2.5.3.b

Como el jacobiano de esta transformación es 1, de (2.5.1) se tiene

$$\int_a^b x^r \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(x+\xi)\, d\xi\, dx = \iint_{G(R)} (u-\xi)^r f(u)\, du\, d\xi =$$

$$= \int_a^b \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi\, du - \iint_{R_1} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi\, du +$$

$$+ \iint_{R_1} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi\, du + \iint_{R_3} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi\, du -$$

$$- \iint_{R_4} (u-\xi) f(u)\, d\xi\, du \qquad \ldots\ldots (2.5.4)$$

donde R_1, R_2, R_3, R_4 son como en la Fig. 2.5.5.

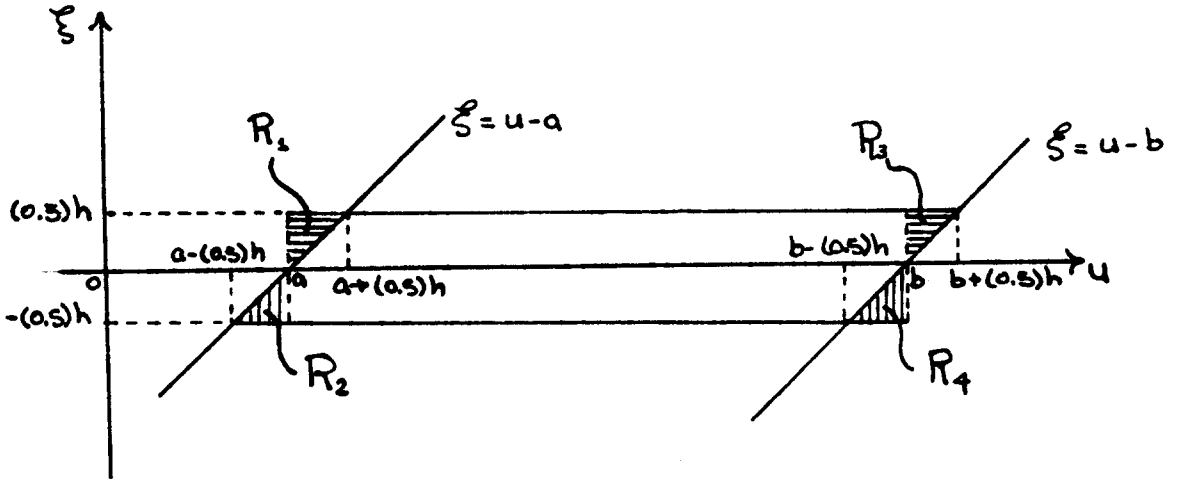


Fig. 2.5.5

Pero

$$\iint_{R_1} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi\, du = \int_{a}^{a+(0.5)h} \int_{u-a}^{(0.5)h} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi$$

$$= \frac{a^{r+1}}{r+1} \int_{a}^{a+(0.5)h} f(u)\, du \; - \; \frac{1}{r+1} \int_{a}^{a+(0.5)h} (u-(0.5)h)^{r+1} f(u)\, du.$$

. . . . . (2.5.6)

Análogamente se prueba que

$$\iint_{R_2} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi\, du =$$

$$= \frac{1}{r+1} \int_{a-(0.5)h}^{a} (u+(0.5)h)^{r+1} f(u)\, du \; - \; \frac{a^{r+1}}{r+1} \int_{a-(0.5)h}^{a} f(u)\, du \;,$$

. . . . . (2.5.7)

$$\iint_{R_3} (u-\xi)^r\, f(u)\, d\xi\, du =$$

$$= - \frac{1}{r+1} \int_{b}^{b+(0.5)h} (u-(0.5)h)^{r+1} f(u)\, du \; + \; \frac{b^{r+1}}{r+1} \int_{b}^{b+(0.5)h} f(u)\, du \quad ,$$

. . . . . (2.5.8)

y

$$\iint_{R_4} (u-\xi) f(u)\, d\xi\, du =$$

$$= \frac{1}{r+1} \int_{b-(0.5)h}^{b} (u+(0.5)h)^{r+1} f(u)\, du \; - \; \frac{b^{r+1}}{r+1} \int_{b-(0.5)h}^{b} f(u)\, du.$$

. . . . . (2.5.9)

Sustituyendo (2.5.6), (2.5.7), (2.5.8) y (2.5.9) en (2.5.4) y multiplicando todos lo términos por $1/h$, obtenemos

$$(1/h)\int_a^b x^r \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(x+\xi)\, d\xi\, dx =$$

$$(1/h)\int_a^b \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi\, du \; - \; \rho_1(a,b) - \rho_2(a,b) - \rho_3(a,b).$$

. . . . . (2.5.10)

Finalmente, procediendo de manera similar a la prueba del lema 2.3.3. (aplicando el lema 2.3.1), obtenemos

$$(1/h)\int_a^b \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} (u-\xi)^r f(u)\, d\xi\, du =$$

$$= \sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{1}{2j+1} ((0.5)h)^{2j} \left\{ \int_a^b u^{r-2j} f(u)\, du \right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{1}{2j+1} ((0.5)h)^{2j} \; \mu'_{r-2j} \; - T(a,b).$$

Sustituyendo esto en (2.5.10) se concluye lo deseado.

q.e.d.

Teorema 2.5.2. Sea X una variable aleatoria continua con rango $(-\infty,\infty)$, f.d.p. f y F.d.a. F. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ y $a,b, \in \mathbb{R}$ fijos; y $h=(b-a)/n$. Sea Y la discretización de norma h inducida por $X|_{X^{-1}([a,b])}$. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo supongamos que $f \in C^{2m-1}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{1}{2j+1} ((0.5)h)^{2j} \; \mu'_{r-2j} - \bar{\mu}'_r = - A_m - S_{2m} + \rho_1(a,b) +$$

$$+ \rho_2(a,b) + \rho_3(a,b) + T(a,b) \qquad \ldots\ldots (2.5.11)$$

donde μ'_k y $\bar{\mu}'_k$ son los k^{os} momentos de X y Y, respectivamente,

$$A_m = -\sum_{j=1}^{m} \frac{h^{2j-1}}{(2j)!} B_{2j}(0.5) \left[y_r^{(2j-1)}(x) \right]_a^b ,$$

$$y_r(x) = x^r \int_{-(0.5)h}^{(0.5)h} f(x+\xi)\, d\xi ,$$

$$B_{2j}(z) = (-1)^{m-1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2\cos(2\Pi rz)}{(2\Pi r)^{2j}} \qquad y$$

$$S_{2m} = \frac{nh^{2m}}{(2m)!} B_{2m}(0.5)\ y_r^{(2m)}(x_0) \quad \text{para algún } x_0 \epsilon (a,b) ,$$

y ρ_1, ρ_2, ρ_3, T son como en el lema anterior.

Demostración

Como $f \epsilon C^{2m-1}(\mathbb{R})$, se tiene que y_r es 2m veces derivable. Entonces es posible aplicar el teorema 2.3.4 a y_r en [a,b], dividiendo este intervalo en n subintervalos de igual longitud h. Se obtiene asi,

$$(1/h) \int_a^b y_r(x)\, dx = y_r(a+(0.5)h) + \ldots + y_r(b-(0.5)h) - A_m - S_{2m}$$

$$= \bar{\mu}'_r - A_m - S_{2m} .$$

Luego, usando el lema 2.5.1 se obtiene lo deseado.

q.e.d.

Comparando la ecuación (2.5.11) con la ecuación (2.4.1), vemos que ahora el error está dado por $-A_m$, ρ_1, ρ_2, ρ_3 y T, además de S_{2m}. Analicemos cada uno de estos términos.

Comencemos por A_m. Usando primero la definición de A_m y después la relación 2.4.6 y el lema 2.3.3, obtenemos

$$|A_m| \le \sum_{j=1}^{m} h^{2j-1} \frac{4}{(2\Pi)^{2j}} \left| \left[y_r^{(2j-1)}(x) \right]_a^b \right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{m} h^{2j-1} \frac{4}{(2\Pi)^{2j}} \left\{ \right.$$

$$\left\{ \sum_{s=0}^{\min(r,2j-1)} \binom{2j-1}{s} \frac{r!}{(r-s)!} |b|^{r-s} |f^{(2j-s-2)}(b+0.5)h) - \right.$$

$$- f^{(2j-s-2)}(b-(0.5)h)| -$$

$$- \sum_{s=0}^{\min(r,2j-1)} \binom{2j-1}{s} \frac{r!}{(r-s)!} |a|^{r-s} |f^{(2j-s-2)}(a+(0.5)h) -$$

$$\left. - f^{(2j-s-2)}(a-(0.5)h)| \right\}$$

. . . . . (2.5.12)

$$= \sum_{j=1}^{m} h^{2j-1} \frac{4}{(2\Pi)^{2j}} \left\{ \right.$$

$$\left\{ \sum_{s=0}^{\min(r,2j-1)} h \binom{2j-1}{s} \frac{r!}{(r-s)!} \left[\right. \right.$$

$$\left. \left[|b+h|^{r-s} |f^{(2j-s-1)}(\beta)| - |a-h|^{r-s} |f^{2j-s-1)}(\alpha)| \right] \right\}$$

para algún $\alpha\in(a-(0.5)h, a+(0.5)h)$ y algún $\beta\in(b-(0.5)h, b+(0.5)h)$.

Luego, si

$$|b+h|^{r-s}|f^{(2j-s-1)}(\beta)|$$

y

$$|a-h|^{r-s}|f^{(2j-s-1)}(\alpha)| \quad ,$$

$j=1,\ldots,m$ son pequeños, también A_m lo será. Así, para poder encontrar $a,b\in\mathbb{R}$ tale sque A_m sea pequeño, es necesario que

$$x^{r-s}f^{(2j-s-1)}(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \qquad ,j=1,\ldots,m \quad ,s=0,\ldots,\min\{r,2j-1\}$$

. . . . . (2.5.13)

De manera análoga, es fácil ver que para ρ_1, ρ_2, ρ_3 debemos pedir que

$$x^{r+1}f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \qquad \text{. . . . . (2.5.14)}$$

y para el error T deberemos requerir

$$x^{r-2j}f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \qquad ,j=0,1,\ldots,[r/2]. \qquad \text{. . . . . (2.5.15)}$$

Luego, si X es tal que $R_X=(-\infty,\infty)$, para poder encontrar $a,b\in\mathbb{R}$ tales que la ecuación (2.5.11) sea válida, y A_m, ρ_1, ρ_2, ρ_3 y T sean "pequeños", basta pedir que exista $m\in\mathbb{N}$ tal que

1) $f\in C^{2m-1}(\mathbb{R})$, y . . . . . (2.5.16)

2) $x^{r+2}\,f^{(i)}(x)$ sea acotada, $i=0,\ldots,2m-1$ . . . . . (2.5.17)

Cuando R_X es de la forma (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$ ó $(-\infty,b]$, las condiciones que se requieren son análogas a las anteriores y se derivan de (2.5.13), (2.5.14) y (2.5.15). Para el caso en que $R_X=(a,\infty)$ ó $[a,\infty)$ éstas son:

$f\in C^{2m-1}([a,\infty))$ para algún $m\in\mathbb{N}$ . . . . . (2.5.18)

$f^{(l)}(a)=0$, $l=0,\ldots,2m-1$ . . . . . (2.5.19)

$$x^{r-s} f^{(2i-s)}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad , \; i=1,\ldots,m;$$

$$s=0,\ldots,\min\{r,2i-1\}+1$$

. . . . . (2.5.20)

$$x^{r} f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \qquad \text{. . . . . (2.5.21)}$$

Notemos que, de (2.5.11) y dado que $y_r^{(2m)}$ es acotada,

$$\left| \sum_{j=0}^{[r/2]} \binom{r}{2j} \frac{1}{2j+1}((0.5)h)^{2j} \mu'_{r-2j} - \bar{\mu}'_r \right| \leq B + |S_{2m}| \leq B+Ch^{2m-1}$$

donde B y C son constantes que no dependen de h. Observemos también que, mientras más pequeño sea a y más grande b, menor será B. Sin embargo, ya que en la práctica lo que se hace es elegir un valor para a, otro para b y tomar $R_Y=[a,b]$, vemos que de esta discusión se sigue que, prácticamente el error en las Correcciones de Sheppard es de orden h^0.

Para dar por terminado esta capítulo, diremos que la demostración de las Correcciones de Sheppard dada en las secciones 2.3 y 2.4 completa, y mejora, la demostración esbozada por Kendall & Stuart([3], pp. 75-76) debido a que en ella $A_m \neq 0$ para el caso finito, mientras que en la demostración mostrada aquí, $A_m=0$.

También, queremos mencionar que lo desarrollado en la sección 2.5 de este trabajo, para variables aleatorias de rango infinito, es distinto de lo desarrollado por Cramér ([1], pp. 359-362). La diferencia principal estriba en que Cramér aplica dos versiones de la Fórmula para Sumas de Euler-MacLaurin distintas de la utilizada aquí

IZTAPALAPA
SERVICIOS DOCUMENTALES

(Teorema 2.3.7), cosa que le permite pasar al caso infinito con facilidad. Debemos mencionar también que en su demostración obtiene que el orden del error es de h^{2m}, si $f \in C^{2m}(\mathbb{R})$, y bajo condiciones análogas a las dadas en (2.5.15). Sin embargo, las condiciones que da para poder aplicar Correcciones de Sheppard a una variable aleatoria continua son únicamente para el caso en que $R_X=(-\infty,\infty)$, mientras que en este trabajo se establecen condiciones para caualquier variable aleatoria continua.

En las tres siguientes secciones se estudiarán las Correcciones de Sheppard en los casos especiales de las distribuciones Gamma, Normal y Lognormal.

2.6. Distribución Gamma.

En esta sección, X denotará una variable aleatoria con distribución Gamma de parámetros (λ,t) $(\lambda>0,\ t\in\mathbb{N})$, con f.d.p. f y F.d.a. F. Esto es,

$$f(x)= \frac{\lambda^t\, x^{t-1}\, e^{-\lambda x}}{(t-1)!} \quad , x\geq 0 \qquad \ldots\ldots (2.6.1)$$

y

$$F(x)= 1 - \sum_{k=0}^{t-1} \left\{ e^{-\lambda x}\, (\lambda x)^k/(k!) \right\}, \quad x\geq 0 \qquad \ldots\ldots (2.6.2).$$

Lema 2.6.1. Si f es la f.d.p. de X, para todo $l\in\mathbb{N}$ se tiene

(Teorema 2.3.7), cosa que le permite pasar al caso infinito con facilidad. Debemos mencionar también que en su demostración obtiene que el orden del error es de h^{2m}, si $f \in C^{2m}(\mathbb{R})$, y bajo condiciones análogas a las dadas en (2.5.15). Sin embargo, las condiciones que da para poder aplicar Correcciones de Sheppard a una variable aleatoria continua son únicamente para el caso en que $R_X=(-\infty,\infty)$, mientras que en este trabajo se establecen condiciones para caualquier variable aleatoria continua.

En las tres siguientes secciones se estudiarán las Correcciones de Sheppard en los casos especiales de las distribuciones Gamma, Normal y Lognormal.

2.6. Distribución Gamma.

En esta sección, X denotará una variable aleatoria con distribución Gamma de parámetros (λ,t) $(\lambda>0,\ t\in\mathbb{N})$, con f.d.p. f y F.d.a. F. Esto es,

$$f(x)= \frac{\lambda^t\, x^{t-1}\, e^{-\lambda x}}{(t-1)!} \quad , x\geq 0 \qquad \ldots\ldots (2.6.1)$$

y

$$F(x)= 1 - \sum_{k=0}^{t-1} \left\{ e^{-\lambda x}\, (\lambda x)^k/(k!) \right\} , \quad x\geq 0 \qquad \ldots\ldots (2.6.2).$$

Lema 2.6.1. Si f es la f.d.p. de X, para todo $l\in\mathbb{N}$ se tiene

(2.5.18), (2.5.19), (2.5.20) y (2.5.21) de la sección anterrior, lo cual haremos a continuación.

Condición (2.5.18). Claramente $f \in C^{\infty}([0,\infty))$ por ser el producto de funciones $C^{\infty}([0,\infty))$.

Condición (2.5.19). Del lema 2.6.1 tenemos

$$f^{(l)}(0) = G_l(0).$$

Luego,

$$f^{(l)}(0) = 0 \iff G_l(0) = 0. \qquad \ldots\ldots (2.6.3)$$

Ahora bien, en la demostración del lema 2.6.1 vemos que el polinomio $G_0(x)$ es de la forma Kx^{t-1} (K constante). Asi, por la Regla del Producto para Derivadas Sucesivas ([6] pag. 159), en el polinomio $G_l(x)$ aparecerán todas las derivadas de $G_0(x)$ hasta de orden l. Pero, la $(t-1)^a$ derivada de $G_0(x)$ es una constante, tal vez distinta de cero, y las derivadas de orden mayor ó igual que t de $G_0(x)$ son cero. Pro lo tanto, para asegurar que $G_l(0)=0$ es necesario poner la restricción de que $l \leq t-2$. Asi, $t \geq l+2$. Por lo tanto, de (2.6.3) obtenemos que

$$f^{(l)}(0) = 0 \quad , \; l=0,\ldots,t-2.$$

Asi pues, la m del teorema 2.5.2 es, en este caso, $[t/2]$.

Observemos también que, si t=1,2 entonces no es correcto aplicar las Correcciones de Sheppard bajo las suposiciones de los teoremas presentados. Una alternativa para discretizar esta distribución la veremos en el capítulo siguiente.

Condiciones (2.5.20) y (2.5.21). Sea $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por el lema 2.6.1,

$$f^{(l)}(x) = e^{-\lambda x} G_l(x).$$

Luego, si $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

079380

(2.5.18), (2.5.19), (2.5.20) y (2.5.21) de la sección anterior, lo cual haremos a continuación.

Condición (2.5.18). Claramente $f \in C^{\infty}([0,\infty))$ por ser el producto de funciones $C^{\infty}([0,\infty))$.

Condición (2.5.19). Del lema 2.6.1 tenemos

$$f^{(l)}(0) = G_l(0).$$

Luego,

$$f^{(l)}(0) = 0 \iff G_l(0) = 0. \qquad \ldots\ldots (2.6.3)$$

Ahora bien, en la demostración del lema 2.6.1 vemos que el polinomio $G_0(x)$ es de la forma Kx^{t-1} (K constante). Asi, por la Regla del Producto para Derivadas Sucesivas ([6] pag. 159), en el polinomio $G_l(x)$ aparecerán todas las derivadas de $G_0(x)$ hasta de orden l. Pero, la $(t-1)^a$ derivada de $G_0(x)$ es una constante, tal vez distinta de cero, y las derivadas de orden mayor ó igual que t de $G_0(x)$ son cero. Pro lo tanto, para asegurar que $G_l(0)=0$ es necesario poner la restricción de que $l \leq t-2$. Asi, $t \geq l+2$. Por lo tanto, de (2.6.3) obtenemos que

$$f^{(l)}(0) = 0 \quad , \; l=0,\ldots,t-2.$$

Asi pues, la m del teorema 2.5.2 es, en este caso, $[t/2]$.

Observemos también que, si $t=1,2$ entonces no es correcto aplicar las Correcciones de Sheppard bajo las suposiciones de los teoremas presentados. Una alternativa para discretizar esta distribución la veremos en el capítulo siguiente.

Condiciones (2.5.20) y (2.5.21). Sea $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por el lema 2.6.1,

$$f^{(l)}(x) = e^{-\lambda x} G_l(x).$$

Luego, si $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$= f(x)\,[(G_l G_1)(x) + G_l'(x)].$$

Como $G_l G_1$ es un polinomio de grado $(l+1)$ en x y $gr(G_l')=l-1$, $G_{l+1}=G_l G_1 + G_l'$ es un polinomio de grado $(l+1)$ en x. Esto prueba la proposición.

q.e.d.

A continuación veremos que es posible aplicar las Correcciones de Sheppard a una variable aleatoria normal X de parámetros (μ,σ^2).

Como el rango de X es $(-\infty,\infty)$, debemos ver si se verifican las condiciones (2.5.16) y (2.5.17) de la sección 2.5.

Condición (2.5.16). Como f(x) es la composición de funciones $C^\infty(\mathbb{R})$, también f lo es.

Condicion (2.5.17). Por el lema 2.7.1, si $k\in\mathbb{Z}$ tenemos que

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} x^k f^{(1)}(x) = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x)\,[x^k G_1(x)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\ \sigma} \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} e^{-(1/2\sigma)^2(x-\mu)^2}[x^k G_1(x)] = 0.$$

Concluimos entonces que las Correcciones de Sheppard son aplicableas a las distribuciones normales.

2.8. Distribución Lognormal.

En esta seccción, W denotará una variable aleatoria normal de parámetros (μ,σ^2) con f.d.p. f_W y F.d.a. F_W ; y X denotará la

$$= f(x)\ [(G_l G_l)(x) + G_l'(x)].$$

Como $G_l G_l$ es un polinomio de grado $(l+1)$ en x y $gr(G_l')=l-1$, $G_{l+1}=G_l G_l + G_l'$ es un polinomio de grado $(l+1)$ en x. Esto prueba la proposición.

q.e.d.

A continuación veremos que es posible aplicar las Correcciones de Sheppard a una variable aleatoria normal X de parámetros (μ,σ^2).

Como el rango de X es $(-\infty,\infty)$, debemos ver si se verifican las condiciones (2.5.16) y (2.5.17) de la sección 2.5.

Condición (2.5.16). Como f(x) es la composición de funciones $C^\infty(\mathbb{R})$, también f lo es.

Condicion (2.5.17). Por el lema 2.7.1, si $k\in\mathbb{Z}$ tenemos que

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} x^k f^{(l)}(x) = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x)\ [x^k G_l(x)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} e^{-(1/2\sigma)^2(x-\mu)^2}[x^k G_l(x)] = 0.$$

Concluimos entonces que las Correcciones de Sheppard son aplicableas a las distribuciones normales.

2.8. Distribución Lognormal.

En esta seccción, W denotará una variable aleatoria normal de parámetros (μ,σ^2) con f.d.p. f_W y F.d.a. F_W ; y X denotará la

variable aleatoria con distribución lognormal asociada a W (i.e., $X=e^W$). f_X y F_X denotarán la f.d.p. y la F.d.a. de X, respectivamente. Entonces,

$$f_X(x) = (1/x)\, f_W(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\, e^{-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad , x>0$$

. . . . . (2..8.1)

Por lo tanto, si $x\in R_X$ y $x = e^w$,

$$f_X(x) = \frac{1}{e^w}\, f_W(w) \qquad \text{. . . . . (2.8.2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(1/2\sigma)^2[(w-\mu)^2+2\sigma^2 w]} \qquad \text{. . . . . (2.8.3)}$$

Lema 2.8.1. Si $w = \ln x$,

i) $(f_X \circ x)^{(l)}(w) = \sum_{k=1}^{l} a_{k,l}\, e^{kw}\, f_X^{(k)}(x)$, $l=1,2,\ldots$

ii) $(f_X \circ x)^{(l)}(w) = \frac{1}{e^w} \sum_{k=0}^{l} b_{k,l}\, f_W^{(k)}(w)$, $l=0,1,2,\ldots$

iii) $f_X^{(l)}(x) = \frac{1}{e^{(l+1)w}} \sum_{k=0}^{l} c_{k,l}\, f_W^{(k)}(w)$. $l=0,1,2,\ldots$

donde $a_{k,l}$, $b_{k,l}$, $c_{k,l} \in R$ $(k=0,\ldots,l;\quad l\in N)$.

Demostración

Notemos primero que si $l=0$, por (2.8.2) se tiene

$$(f_X \circ x)(w) = \frac{f_W(w)}{e^w} \quad \ldots\ldots (2.8.4)$$

que cumple las relaciones de los incisos ii) y iii) en el caso en que $l=0$.

La demostración para $l=1,2,\ldots$ se hará simultáneamente para i), ii) y iii), por inducción sobre l.

Notemos que

$$(f_X \circ x)'(w) = f_X'(x)\, e^w. \quad \ldots\ldots (2.8.5)$$

que satisface el inciso i) cuando $l=1$.

También, si $l=1$, derivando (2.8.4) respecto a w se sigue que

$$(f_X \circ x)'(w) = \frac{f_W'(w) - f_W(w)}{e^w} \quad \ldots\ldots (2.8.6)$$

que cumple con el inciso ii) en el caso en que $l=1$.

Supongamos nuevamente que $l=1$. Despejando $f_X'(x)$ de (2.8.5) se obtiene

$$f_X'(x) = \frac{1}{e^w} (f_X \circ x)'(w)$$

y, sustituyendo (2.8.6) en esta relación se sigue que

$$f_X'(x) = \frac{1}{e^{2w}} \left[f_W'(w) + (-1)\, f_W(w)\right]$$

que satisface el inciso iii) para $l=1$.

Supongamos ahora ciertos los incisos i), ii) y iii) para todo r, $1 \leq r \leq l$. Entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$(f_X \circ x)^{(l)}(w) = \sum_{k=1}^{l} a_{k,l}\, e^{kw}\, f_X^{(k)}(x) \quad , \quad \ldots\ldots \quad (2.8.7)$$

$$(f_X \circ x)^{(l)}(w) = \frac{1}{e^w} \sum_{k=0}^{l} b_{k,l}\, f_W^{(k)}(w) \quad , \quad \ldots\ldots \quad (2.8.8)$$

$$f_X^{(r)}(x) = \frac{1}{e^{(r+1)w}} \sum_{k=0}^{r} c_{k,r}\, f_W^{(k)}(w) \quad , \quad \ldots\ldots \quad (2.8.9)$$

Se probarán enseguida las relaciones i), ii) y iii) para $l+1$.

Para i), derivando primero la relación (2.8.7) respecto a w y sustituyendo en lo obtenido $x'(w) = e^{kw}$ se sigue que

$$(f_X \circ x)^{(l+1)}(w) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} a_{k,l}\, e^{(k+1)w}\, f_X^{(k+1)}(x) + \sum_{k=1}^{l} k\, a_{k,l}\, e^{kw}\, f_X^{(k)}(x) \quad .$$

Asi, asociando términos lo anterior se expresa en la forma

$$(f_X \circ x)^{(l+1)}(w) = \sum_{k=1}^{l+1} a_{k,l+1}\, e^{kw}\, f_X^{(k)}(x) \quad \ldots\ldots \quad (2.8.11)$$

(Nótese que $a_{l+1,l+1} = a_{k,l} = a_{1,1} = 1$ por (2.8.5).) Vemos entonces que la relación i) se satisface para $l+1$.

Para la relación ii), derivando (2.8.8) respecto a w se sigue que

$$(f_X \circ x)^{(l+1)}(w) =$$

$$= \frac{e^w \left[\sum_{k=0} b_{k,l} \; f_W^{(k+1)}(w) \right] - e^w \left[\sum_{k=0} b_{k,l} \; f_W^{(k)}(w) \right]}{e^{2w}}$$

Por lo tanto, esto tiene la forma

$$(f_X \circ x)^{(l+1)}(w) = \frac{1}{e^w} \sum_{k=0}^{l+1} b_{k,l+1} \; f_W^{(k)}(w) \qquad \ldots\ldots (2.8.12).$$

Asi pues, también se satisface la igualdad ii) para $l+1$.

Probemos ahora que la relación iii) se satisface para $l+1$:

Despejando primero

$$a_{l+1,l+1} \; e^{(l+1)w} \; f_X^{(l+1)}(w)$$

de (2.8.11) obtenemos

$$a_{l+1,l+1} \; e^{(l+1)w} \; f_X^{(l+1)}(x)$$

$$= (f_X \circ x)^{(l+1)}(x)(w) - \sum_{k=1}^{l} a_{k,l+1} \; e^{kw} \; f_X^{(k)}(x).$$

Sustituyendo (2.8.12) en esta expresión tenemos

$$a_{l+1,l+1} \; e^{(l+1)w} \; f_X^{(l+1)}(x) =$$

$$= \frac{1}{e^w} \sum_{k=0}^{l+1} b_{k,l+1} \; f_W^{(k)}(w) - \sum_{k=1}^{l} a_{k,l+1} \; e^{kw} \; f_X^{(k)}(x).$$

Luego, sustituyendo (2.8.9) para cada $f_X^{(k)}(x)$ $(k=1,\ldots,l)$ en la igualdad anterior, se obtiene

$$a_{l+1,l+1}\, e^{(l+1)w}\, f_X^{(l+1)}(x) =$$

$$= \frac{1}{e^w} \sum_{k=0}^{l+1} b_{k,l+1}\, f_W^{(k)}(w) \; -$$

$$-\sum_{k=1}^{l} a_{k,l+1}\, e^{kw} \left\{ \frac{1}{e^{(k+1)w}} \sum_{s=0}^{k} c_{s,k}\, f_W^{(s)}(w) \right\}$$

$$= \frac{1}{e^w} \Big\{ b_{0,l+1}\, f_W^{(0)}(w) \; +$$

$$+\sum_{k=1}^{l} \left[b_{k,l+1} f_W^{(k)}(w) - \sum_{s=0}^{k} a_{k,l+1} c_{s,k} f_W^{(s)}(w) \right]$$

$$+ b_{l+1,l+1} f_W^{(l+1)}(w) \qquad \ldots\ldots \quad (2.8.13)$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{l} \left[b_{k,l+1}\, f_W^{(k)}(w) - \sum_{s=0}^{k} a_{k,l+1}\, c_{s,k}\, f_W^{(s)}(w) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} q_{k,l+1}\, f_W^{(k)}(w), \qquad q_{k,l+1} \in \mathbb{R}.$$

Asi, sustituyendo esto último en (2.8.13) se sigue que

$$a_{l+1,l+1}\, e^{(l+1)w}\, f_X^{(l+1)}(x) =$$

$$= \frac{1}{e^w}\left\{ b_{0,l+1}\, f_W^{(0)}(w) + \sum_{k=0}^{l}\left[q_{k,l+1}\, f_W^{(k)}(w)\right] + \right.$$

$$\left. + b_{l+1,l+1}\, f_W^{(l+1)}(w) \right\}$$

y, despejando $f_X^{(l+1)}(x)$ obtenemos

$$f_X^{(l+1)}(x) = \frac{1}{e^{(l+2)w}}\left\{ \frac{b_{0,l+1}}{a_{l+1,l+1}}\, f_W^{(0)}(w) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{l}\left[\frac{q_{k,l+1}}{a_{l+1,l+1}}\, f_W^{(k)}(w)\right] + \frac{b_{l+1,l+1}}{a_{l+1,l+1}}\, f_W^{(l+1)}(w) \right\}$$

Asi, finalmente vemos que podemos escribir

$$f_X^{(l+1)}(x) = \frac{1}{e^{(l+2)w}}\left\{ \sum_{k=0}^{l+1} c_{k,l+1}\, f_W^{(k)}(w) \right\}.$$

Esto muestra que la relación iii) también se satisface para l+1.

q.e.d.

Analizaremos enseguida si es factible aplicar las Correcciones de Sheppard a X.

Como el rango de X es el intervalo $(0,\infty)$, debemos verificar si se cumplen las condiciones (2.5.18), (2.5.19), (2.5.20) y (2.5.21) de la sección 2.5.

Condición (2.5.18). De la ecuación (2.8.1), vemos que $f \in C^{\infty}((0,\infty))$ por

ser composición de funciones $C^{\infty}((0,\infty))$.

Condición (2.5.19). Del lema 2.8.1 iii), sabemos que

$$f_X^{(l)}(x) = \frac{1}{e^{(l+1)w}} \sum_{k=0}^{l} c_{k,l} f_W^{(k)}(w) \qquad , \ l \in \mathbb{N}$$

Entonces, si G_l es como en el lema 2.7.1,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f_X^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{l} c_{k,l} \left\{ \lim_{w \longrightarrow -\infty} \frac{f_W(w)\, G_l(w)}{e^{(l+1)w}} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} (c_{k,l} / \sqrt{2\pi}\,\sigma) \left\{ \lim_{w \longrightarrow -\infty} G_l(w)\, e^{(1/2\sigma^2)[-w^2+w(2\mu-1-1)-\mu^2]} \right\} = 0$$

Condiciones (2.5.20) y (2.5.21). Sean $l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, aplicando el inciso iii) del lema 2.8.1, y sustituyendo x por e^w se tiene

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x^k f_X^{(l)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} c_{k,l} \lim_{w \longrightarrow \infty} e^{(k-l-1)w} f_W^{(k)}(w) \qquad \ldots\ldots (2.8.14)$$

y, por el lema 2.7.1,

$$= \sum_{k=0}^{l} c_{k,l} \lim_{w \longrightarrow \infty} e^{w(k-l-1)} f_W(w)\, G_k(w)$$

$$= \sum_{k=0}^{l} c_{k,l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \lim_{w \longrightarrow \infty} e^{-((w-\mu)^2/2\sigma^2)+w(k-l-1)} G_k(w) = 0.$$

Asi, se satisfacen las condiciones (2.5.20) y (2.5.21).

Esto muestra que las Correcciones de Sheppard son aplicables a las variables aleatorias de distribución lognormal.

CAPITULO 3
El Método de Holland

3.1. Introducción

Recientemente, en 1975, Burt S. Holland [2] introduce un nuevo método de construir discretizaciones y medir su bondad. Su trabajo, a diferencia del de Sheppard, es con variables aleatorias con rango infinito.

Sea X una variable aleatoria con rango infinito. El método de Holland supone que se conoce la forma general de la distribución de X, pero que se desconocen su esperanza y su varianza. Supone también que X puede medirse con una precisión $h=k\sigma$, donde $k>0$ y $\sigma=d.s.(X)$, dando así lugar a una discretización Y de X de norma h y rango

$$\{ nh : n\varepsilon Z \}$$

Este método mide la bondad de las discretizaaciones a través de los sesgos relativos

$$B_{\mu} = \frac{E(Y) - E(X)}{\sigma},$$

$$B_{\sigma^2} = \frac{V(Y) - V(X)}{\sigma^2}$$

y trabaja solamente con la esperanza y la varianza. (Recordemos que Sheppard da los sesgos absolutos de todos los momentos.)

En el articulo citado, Holland aplica su método a las distribuciones doble exponencial, normal, exponencial, triangular asimétrica hacia la derecha y p.s.r.t. ("positively skewed right

trinagular").

En este capítulo se estudiará el método de Holland en las distribuciones Gamma, Normal y Lognormal.

3.2. Generalidades.

Sea X una variable aleatoria continua de rango infinito con media μ, varianza σ^2, f.d.p. f, y F.d.a. F. Sea Y una discretización de X con

$$R_Y = \{ nh : n \in Z \} ,$$

donde $h=k\sigma$ y $k>0$. Entonces, por la discusión desarrollada en la sección 2.2 del Capítulo 2, la variable aleatoria discreta Y tiene función de probabilidad asociada

$$P(Y = nh) = \int_{(n-(0.5))h}^{(n+(0.5)h)} f(x)\, dx \qquad \ldots\ldots (3.2.1)$$

$$= F[(n+(0.5)h] - F[(n-(0.5)h] \qquad \ldots\ldots (3.2.2)$$

con $n \in Z$.

Definición 3.2.1. Definimos los sesgos relativos B_μ y B_{σ^2} por

$$B_m = \frac{E(Y) - E(X)}{\sigma} = \frac{E(Y) - \mu}{\sigma} \qquad \ldots (3.2.4)$$

$$B_{\sigma^2} = \frac{V(Y) - V(X)}{\sigma^2} = \frac{V(Y)}{\sigma^2} - 1 \qquad \ldots (3.2.5)$$

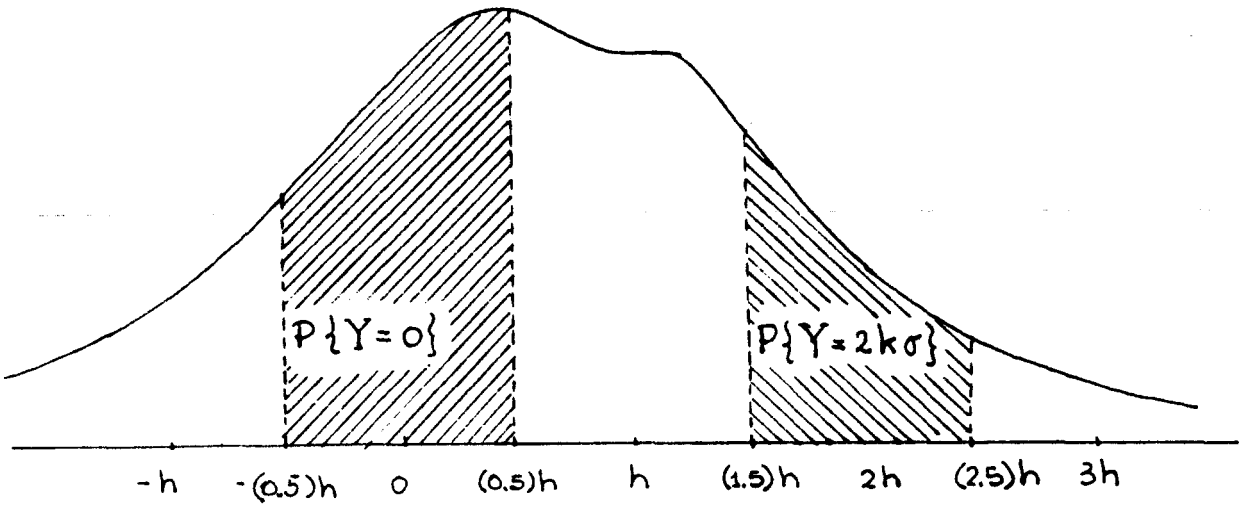


Fig. 3.2.3

Lema 3.2.2. Sea X una variable aleatoria continua de rango inifinito con 1^0 y 2^0 momentos, f.d.p. f y desviación estandar σ. Sea Y la discretización de X de norma $h=k\sigma$ $(k>0)$ con $R_Y=\{nh: n\in\mathbb{Z}\}$. Entonces E(Y) y $E(Y^2)$ existen.

Demostración

Probaremos primero que E(Y) existe. Para esto, demostraremos que converge la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nh|\ P(Y=nh) \quad .$$

Notemos que

$$\int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} ||nh|-|x||\ f(x)\ dx \le \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} |nh-x|\ f(x)\ dx = (0.5)h \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} f(x)\ dx.$$

Entonces,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} ||nh|-|x||\ f(x)\ dx \le (0.5)h \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} f(x)\ dx = (0.5)h$$

Esto implica que converge la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} (|nh| -|x|)\ f(x)\ dx$$

Luego, también converge la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nh|\ P(Y=nh) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} (|nh|-|x|)f(x)\ dx \ + \int_{-\infty}^{n+(0.5)h} |x|\ f(x)\ dx$$

puesto que E(X) existe. Esto prueba que E(Y) existe.

Probaremos ahora que $E(Y^2)$ también existe. Notemos que

$$\int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} |(nh)^2 - x^2|\ f(x)\ dx = \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} |nh-x|\ |nh+x|\ f(x)\ dx \le$$

$$\le (0.5)h \left\{ \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} |nh|\ f(x)\ dx \ + \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} |x|\ f(x)\ dx \right\}$$

Luego,

$$\sum_{n\in Z} \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} |(nh)^2 - x^2|\, f(x)\, dx \;\leq$$

$$= (0.5)h \left\{ \sum_{n\in Z} |nh|\, P(Y=nh) + \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx \right\} < \infty$$

debido a que E(X) y E(Y) existen. Entonces

$$\sum_{n\in Z} \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} ((nh)^2 - x^2)\, f(x)\, dx$$

converge. Por lo tanto, también converge

$$E(Y^2) = \sum_{n\in Z} (nh)^2 \int_{n-(0.5)h}^{(n+(0.5))h} f(x)\, dx$$

$$= \sum_{n\in Z} \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} ((nh)^2 - x^2)\, f(x)\, dx \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

$$= \sum_{n\in Z} \int_{n-(0.5)h}^{n+(0.5)h} ((nh)^2 - x^2)\, f(x)\, dx \;+\; E(X^2)$$

pues $E(X^2)$ existe. Esto prueba la existencia de $E(Y^2)$.

q.e.d.

IZTAPALAPA
SERVICIOS DOCUMENTALES

Lema 3.2.3. Sea X una variable aleatoria continua de rango infinito con F.d.a F y desviación estandar σ. Entonces, si h>0,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\Big\{ F[(-n-0.5)h] - F[(-n+0.5)h] + F[n+0.5)h] - F[(n-0.5)h]\Big\}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ 1 - F[(n-0.5)h] - F[(-n+0.5)h]\Big\}.$$

Demostración

Denotemos

$$A_n = F[(-n-0.5)h] - F[(-n+0.5)h] + F[n+0.5)h] - F[(n-0.5)h],\ n\in\mathbb{N}$$

(ver Fig. 3.2.11).

Entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n \Big\{ F[(-n-0.5)h] - F[(-n+0.5)h] + F[n+0.5)h] - F[(n-0.5)h] \Big\}$$

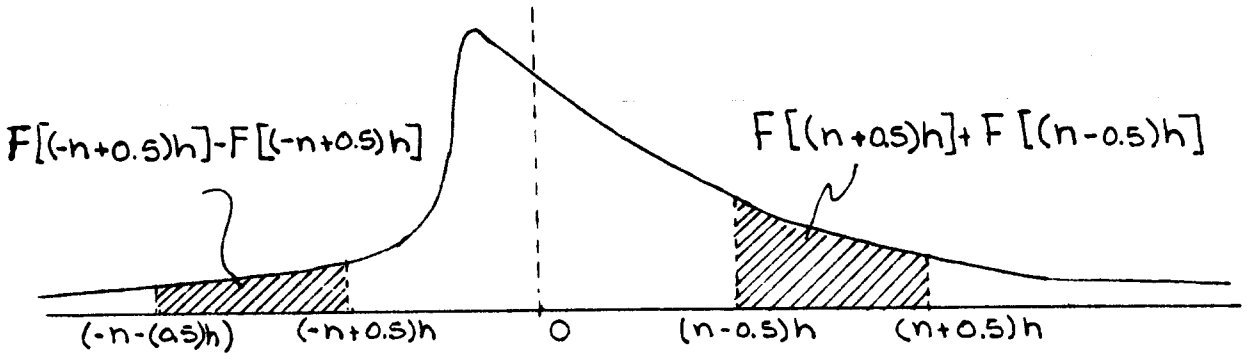
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\, A_n = (A_1+A_2+A_3+\ldots) + (A_2+A_3+\ldots) + (A_3+A_4+\ldots)+\ldots$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=m}^{\infty} A_n \qquad \ldots\ldots (3.2.12)$$

Pero, notemos que si $m\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=m}^{\infty} A_n = 1- F[(m-0.5)h] - F[(-m+0.5)h]$$

(ver Fig. 3.2.13). Luego, por la relación (3.2.12), tenemos


F[(-n+0.5)h]-F[(-n+0.5)h]
F[(n+0.5)h]+F[(n-0.5)h]
(-n-(0.5)h)
(-n+0.5)h
0
(n-0.5)h
(n+0.5)h

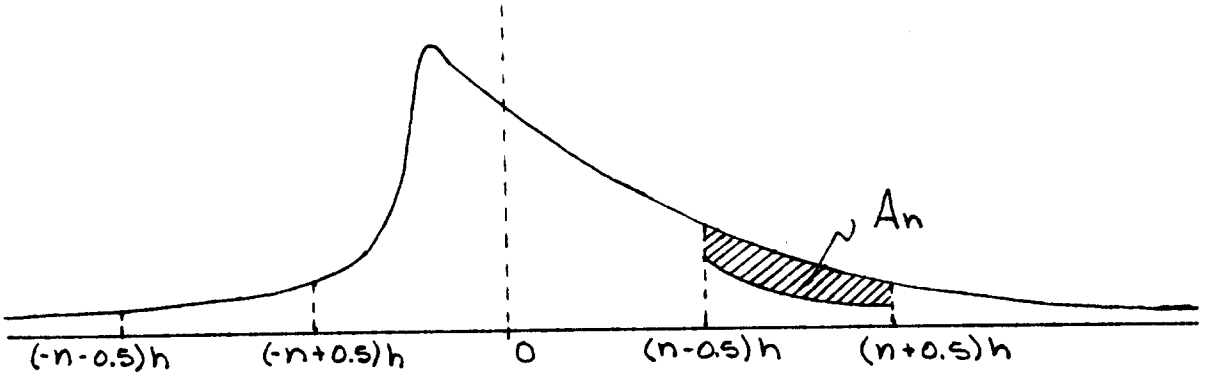

An
(-n-0.5)h
(-n+0.5)h
0
(n-0.5)h
(n+0.5)h

Fig. 3.2.11

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n \left\{ F[(-n-0.5)h] - F[(-n+0.5)h] + F[n+0.5)h] - F[(n-0.5)h] \right\}$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \left\{ 1 - F[(m-0.5)h] - F[(-m+0.5)h] \right\}.$$

q.e.d.

Lema 3.2.4. Sean X una variable aleatoria continua de rango infinito con desviación estándar σ y F.d.a F. Sea Y la discretización de X de norma $h=k\sigma$ $(k>0)$ con $R_Y=\{nh: n\in\mathbb{Z}\}$. Entonces

$$E(Y) = h \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 1 - F[(n-0.5)h] - F[(-n+0.5)h] \right\}$$

Demostración

Notemos que

$$E(Y) = h \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \left\{ F[n+0.5)h] - F[(n-0.5)h] \right\}$$

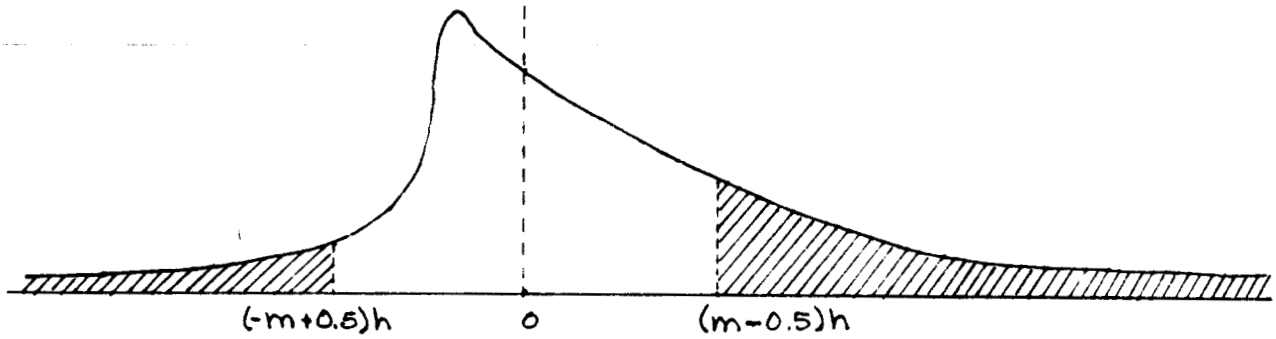
$$= h \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-n) \left[F[(-n+0.5)h] - F[(-n-0.5)h] \right] + \right.$$

$$\left. + n\left[F[n+0.5)h] - F[(n-0.5)h] \right] \right\}$$

$$= h \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 1 - F[(n-0.5)h] - F[(-n+0.5)h] \right\}$$

por el lema 3.2.3.

q.e.d.



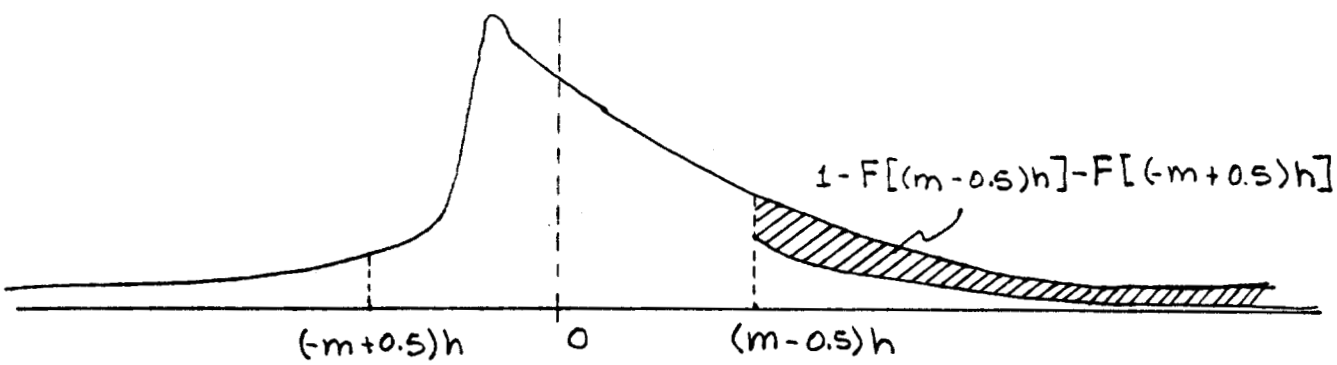


Fig. 3.2.13

Lema 3.2.5. Bajo las mismas hipótesis del lema 3.2.4, se tiene

$$E(Y^2) = h^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 \left\{ F[(-n+0.5)h] - F[(-n-0.5)h] + F[n+0.5)h] - F[(n-0.5)h] \right\}$$

Demostración

Análoga a la del Lema 3.2.4.

En las siguientes tres secciones calcularemos los sesgos relativos B_μ y B_{σ^2} para las distribuciones Gamma, Normal y Lognormal. Analizaremos, en una sección aparte, la distribución exponencial.

3.3 Distribución Gamma.

En esta sección, X denotará una variable aleatoria de distribución Gamma con parámetros (λ, t) ($\lambda>0$ y $t\in\mathbb{N}$), con función de densidad probabilística

$$f(x) = \frac{\lambda^t\, x^{t-1}\, e^{-\lambda t}}{(t-1)!}\ ,\ x\geq 0 \qquad \ldots\ldots (3.3.1)$$

y F. d. a.

$$F(x) = 1 - \sum_{r=0}^{t-1} \left\{ e^{-\lambda x}\, (\lambda x)^r / r! \right\}\ ,\ x\geq 0. \qquad \ldots\ldots (3.3.2)$$

Sabemos que

079380

$$\mu = E(X) = \frac{t}{\lambda} \qquad y \qquad \sigma^2 = V(X) = \frac{t}{\lambda^2}$$

. . . . . (3.3.3)

También en esta sección, Y denotará la discretización de X de norma $h=k\sigma$, $k>0$, y rango $\{nh: n\in\mathbb{Z}\}$; y c denotará el número real tal que $\mu=ch$ (entonces $\mu=ck\sigma$).

Observación. Sustituyendo en la expresión $\mu=ck\sigma$ los valores de μ y σ dados por (3.3.3), se sigue que

$$ck = \sqrt{t} \qquad . . . . . (3.3.4)$$

Por lo tanto, ya que $\lambda h=\lambda k\sigma$, de (3.3.3) y (3.3.4) obtenemos

$$\lambda h = ck^2 \qquad . . . . . (3.3.5).$$

Enseguida calcularemos B_μ y B_{σ^2} para X.

Cálculo de B_μ. Por el lema 3.2.4,

$$E(Y) = h \sum_{n\in\mathbb{N}} \{ 1- F[(n-0.5)h] - F[-n+0.5)h] \}$$

. . . . . (3.3.6)

Como $F(x)=0$ para $x\leq 0$, se tiene $F[-n+0.5)h]=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, aplicando primero esto y luego (3.3.2) a (3.3.6), tenemos

$$E(Y) = h \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{r=0}^{t-1} \left\{ e^{-\lambda(n-0.5)h} \, (\lambda \, (n-0.5)h)^r/r! \right\}$$

$$= h \, e^{\lambda h/2} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda n h} \sum_{r=0}^{t-1} (\lambda \, (n-0.5)h)^r/r! \Big\}$$

y, sustituyendo $h=k\sigma$ y $\lambda h=ck^2$ (expresión (3.3.5)), obtenemos

$$E(Y) = k\sigma \, e^{ck^2/2} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-ck^2 n} \sum_{r=0}^{t-1} ((n-0.5)ck^2)^r/r!$$

. . . . . (3.3.7)

Entonces, por (3.3.7) y (3.3.3), y como $\mu=ck\sigma$, tenemos

$$B_\mu = \frac{E(Y) - \mu}{\sigma} =$$

$$= k \, e^{ck^2 n} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ e^{-ck^2 n} \sum_{r=0}^{t-1} ((n-0.5)ck^2)^r/r! \right\} - ck$$

. . . . . (3.3.8)

Cálculo de $B_{\sigma 2}$. Por el lema 3.2.5, y procediendo como se hizo para el cálculo de B_μ tenemos

$$E(Y^2) = h^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 \left\{ F[(n+0.5)h] - F[(n-0.5)h] \right\}$$

$$= (k\sigma)^2 \sum_{n\in N} n^2 \sum_{r=0}^{t-1} \left\{ \left[e^{-(n-0.5)ck^2} ((n-0.5)ck^2)^r/r! \right] - \right.$$
$$\left. -\left[e^{-(n+0.5)ck^2} ((n+0.5)ck^2)^r/r! \right] \right\} \quad \ldots . \quad (3.3.9)$$

después de observar que $\lambda h = ck^2$ (por (3.3.5)).

Por lo tanto,

$$B_{\sigma^2} = \frac{V(Y)}{\sigma^2} - 1 = \frac{E(Y^2) - (E(Y))^2}{\sigma^2} - 1$$

donde $E(Y)$ es como en (3.3.7) y $E(Y^2)$ es como en (3.3.9). Obsérvese que al sustituir estas expresiones en B_{σ^2}, el parámetro σ^2 desaparece.

3.4. Distribución Exponencial.

Recordemos que en la sección 2.6 del Capítulo 2 concluímos que no es posible aplicar las Correcciones de Sheppard a la distribución exponencial. Sin embargo, sí es posible calcular los sesgos B_μ y B_{σ^2} para esta distribución. Esto es lo que haremos enseguida, utilizando los resultados de la sección anterior para el caso especial $t=1$.

Sea X una variable aleatoria exponencial de parámetro λ. Esto es, X es una variable aleatoria con distribución Gamma de parámetros $(\lambda, t=1)$. Entonces, la esperanza y la varianza de X son $1/\lambda$ y $1/\lambda^2$, respectivamente. Denotemos por Y a la discretización de X de norma $h=k\sigma$, $k>0$, tal que $0 \in R_Y$. Por (3.3.5), $\lambda h = ck^2$. Sustituyendo $h=k\sigma$ en

esta expresión y ya que $\sigma=1/\lambda$, obtenemos

$$c=1/k. \qquad \ldots\ldots (3.4.1)$$

Usando esto y (3.3.7) se tiene

$$E(Y) = k\sigma\, e^{k/2} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-kn} = \frac{k\sigma\, e^{-k/2}}{1-e^{-k}} - 1$$

De (3.3.8) y (3.4.1), se obtiene

$$B_{\mu} = k\, e^{-k/2}\, (1/(1-e^{-k})) - 1 \quad \ldots\ldots (3.4.3)$$

Por otro lado, de (3.3.9) y (3,4.1) tenemos

$$E(Y^2) = (k\sigma)^2\, (e^{k/2} - e^{-k/2}) \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\, e^{-nk}$$

$$\ldots\ldots (3.4.4)$$

Pero, ya que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\, e^{-nk} = \frac{e^{-k}(e^{-k} + 1)}{(1 - e^{-k})^3} \ ,$$

tenemos que (3.4.4) es igual a:

$$(k\sigma)^2\, \frac{(e^{-k/2} - e^{-3k/2})}{(1-e^{-k})^3}\ (e^{-k}+1)$$

$$= \frac{(k\sigma)^2\, e^{-k/2}(e^{-k}+1)}{(1- e^{-k})^2} \ .$$

De esto último y de (3.4.2) obtenemos

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{(k\sigma)^2\, e^{-k/2}\,(e^{-k}+1)}{(1-e^{-k})^2} - \left[\frac{k\sigma\, e^{-k/2}}{-k}\right]^2$$

Finalmente, de esto y (3.3.11) conluimos que

$$B_{\sigma^2} = \frac{k^2\,(e^{-3k/2} + e^{-k/2} - e^{k/2})}{(1-e^{-k})^2}\,.$$

3.5. Distribución Normal.

En esta sección, X denotará una variable aleatoria normal de varianza σ^2, media μ, f.d.p. f y F.d.a. F ; y Y denotará la discretiazación de X de norma $h=k\sigma$ $(k>0)$, tal que $0\in R_Y$. Φ denotará la F.d.a. de la variable aleatoria Normal Estándar. Asimismo, c denotará el número real tal que $\mu=ch$.

Enseguida calcularemos B_μ y B_{σ^2} para X.

Cálculo de B_μ . Por el lema 3.2.5,

$$E(Y) =$$

$$= h \sum_{n\in N} \left\{ 1 - \Phi\left[\frac{(n-0.5)h - \mu}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(-n+0.5)h - \mu}{\sigma}\right]\right\}$$

$$= k\sigma \sum_{n\in N} \left\{ (1- \Phi\,[-n+0.5-c)k] - \Phi\,[(n-0.5-c)k]\right\}$$

$$= k\sigma \sum_{n\in N} \left\{ P(Z\geq (-n+0.5-c)k) - \Phi\,[(n-0.5-c)k]\right\}$$

$$= k\sigma \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \Phi\ (-\ [-n+0.5-c)k]) - \Phi\ [(n-0.5-c)k] \right\}$$

$$= k\sigma \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \Phi\ [(n-0.5+c)k] - \Phi\ [(n-0.5-c)k] \right\} \quad . \ . \ . \quad (3.5.1)$$

Por lo tanto,

$$B_\mu = k \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \Phi\ [(n-0.5+c)k] - \Phi\ [(n-0.5-c)k] \right\} - ck\ ,$$

pues $\mu = ck\sigma$.

Cálculo de B_{σ^2} . Recordemos que

$$R_Y = \{\ nh\ :\ n\in\mathbb{Z}\ \}.$$

Entonces

$$R_{Y^2} = \{\ (nh)^2\ :\ n\in \mathbb{N}\ U\ \{0\}\ \}.$$

Luego,

$$E(Y^2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (nh)^2\ P(Y^2=(nh)^2) \quad . \ . \ . \ . \quad (3.5.2)$$

Pero si $n\in\mathbb{N}$, se tiene

$$P(Y^2=(nh)^2) = P(Y=nh \quad \acute{o} \quad Y=-nh).$$

Ahora bien,

$$P(Y=nh) = F[(n+0.5)h] - F[(n-0.5)h] =$$

$$= \Phi\ [(n+0.5-c)k] - \Phi\ [(n-0.5-c)k],$$

Análogamente,

$$P(Y=-nh) = \Phi\,[(-n+0.5-c)k] - \Phi\,[(-n-0.5-c)k].$$

Asi, si $n\in N$,

$$P(Y^2=(nk\sigma)^2) = \Phi\,[(n+0.5-c)k] - \Phi\,[(n-0.5-c)k] + \Phi\,[(-n+0.5-c)k] -$$

$$- \Phi\,[(-n-0.5-c)k].$$

Sustituyendo esta expresión en (3.5.2) obtenemos $E(Y^2)$. Esto, junto con la expresión dada anteriormente para $E(Y)$ nos permite calcular el sesgo $B_{\sigma 2}$ de X.

3.6. Distribución Lognormal.

En esta sección, W denotará una variable aleatoria normal de parámetros (μ,σ^2) con f.d.p. f_W y F.d.a. F_W ; y X denotará la variable aleatoria con distribución lognormal asociada a W (i.e., $X=e^W$). f_X y F_X denotarán la f.d.p. y la F.d.a. de X, respectivamente.

Por la ecuación (2.8.2) del Capítulo 2,

$$f_X(x) = (1/e^w)\, f_W(w) \quad , x\geq 0. \ldots\ldots (3.6.1)$$

donde $x=e^w$. Asimismo, sabemos ([4], pag. 191) que la esperanza y la varianza de X son

$$\tilde{\mu} \equiv E(X) = e^{\mu+(0.5)\sigma^2}, \qquad \ldots\ldots (3.6.2)$$

IZTAPALAPA
SERVICIOS DOCUMENTALES

y

$$\tilde{\sigma}^2 \equiv V(X) = (e^{\sigma^2} - 1)\, e^{2\mu+\sigma^2} \quad \ldots\ldots (3.6.3).$$

Lema 3.6.1. Sea W una variable aleatoria normal de parámetros (μ, σ^2), y $X = e^W$. Sean $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\sigma}^2$ la esperanza y la varianza de X, respectivamente. Esntonces si $\tilde{\mu}=ck\tilde{\sigma}$ se tiene

$$\sigma^2 = \ln\left[(1/c^2k^2) + 1\right]$$

Demostración

Tomando logaritmos en 3.6.2, y despejando después μ obtenemos

$$\mu = \ln(\tilde{\mu}) - (0.5)\sigma^2 \ldots\ldots (3.6.4)$$

Por otro lado, de (3.6.3) tenemos

$$\ln(\tilde{\sigma}^2) = \ln(e^{\sigma^2} - 1) + 2\mu + \sigma^2$$

luego, aplicando (3.6.4) a esta expresión y despejando después $\ln(e^{\sigma^2}-1)$ tenemos

$$\ln(e^{\sigma^2} - 1) = \ln\left[\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\mu}^2}\right]$$

Por lo tanto,

$$\sigma^2 = \ln\left[\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\mu}^2} + 1\right] = \ln\left[\frac{1}{c^2k^2} + 1\right]$$

pues $\tilde{\mu} = ck\tilde{\sigma}$.

q.e.d.

En lo que resta de esta sección, Y denotará la discretización de la variable aleatoria lognormal X, de norma $h=k\tilde{\sigma}$, $k>0$, y rango $\{ nh : n\in\mathbb{Z} \}$. También, c denotará el número real tal que $\tilde{\mu}=ck\tilde{\sigma}$.

Enseguida calcularemos $B_{\tilde{\mu}}$ y $B_{\tilde{\sigma}}$ para una variable aleatoria lognormal X de parámetros (μ,σ^2).

Cálculo de $B_{\tilde{\mu}}$. Por el lema 3.2.4,

$$E(Y) = h \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 1 - F[(n-0.5)h] - F[(-n+0.5)h] \right\}$$

$$= h \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 1 - F[(n-0.5)h] \right\}$$

y, como $F_X(x)=\Phi((\ln x-\mu)/\sigma)$,

$$= h \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\ln[(n-0.5)h] - \mu}{\sigma} \right] \right\} \quad \ldots\ldots (3.6.5)$$

Ahora bien, tomando logaritmos en (3.6.2) y notando que $\tilde{\mu}=ck\tilde{\sigma}$ se tiene

$$\mu=\ln(ck\tilde{\sigma}) - (0.5)\sigma^2 \quad \ldots\ldots (3.6.6)$$

Luego, de (3.6.5) obtenemos

$$E(Y) = k\tilde{\sigma} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\ln[(n-0.5)k\tilde{\sigma}] - \ln(ck\tilde{\sigma}) + (0.5)\sigma^2}{\sigma} \right] \right\}$$

$$= k\tilde{\sigma} \sum_{n\in N} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\ln[(n-0.5)/c]}{\sigma} + (0.5)\sigma \right] \right\} \quad \ldots\ldots \quad (3.6.7)$$

De esto, y del hecho de que $\mu = ck\tilde{\sigma}$, se obtiene

$$B_{\tilde{\mu}} = \frac{E(Y) - E(X)}{\tilde{\sigma}} = k \sum_{n\in N} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\ln[(n-0.5)/c]}{\sigma} + (0.5)\sigma \right] \right\} - ck$$

donde, por el lema 3.6.1,

$$\sigma = \left[\ln((-/c^2k^2) + 1 \right]^{1/2}$$

Cálculo de $B_{\tilde{\sigma}^2}$. Por el lema 3.2.4,

$$E(Y^2) = k^{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{n\in N} n^2 \left\{ F[(n+0.5)k\tilde{\sigma}] - F[(n-0.5)k\tilde{\sigma}] \right\}$$

$$= k^{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{n\in N} n^2 \left\{ \Phi \left[\frac{\ln[(n+0.5)k\tilde{\sigma}] - \mu}{\sigma} \right] - \right.$$

$$\left. - \Phi \left[\frac{\ln[(n-0.5)k\tilde{\sigma}] - \mu}{\sigma} \right] \right\}$$

y, aplicando (3.6.6), obtenemos entonces

$$E(Y^2) = k^{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{n\in N} n^2 \left\{ \Phi \left[\frac{\ln[(n+0.5)/c]}{\sigma} + (0.5)\sigma \right] - \right.$$

$$\left. - \Phi \left[\frac{\ln[[(n-0.5)/c]}{\sigma} + (0.5)\sigma \right] \right\}$$

$$\ldots\ldots \quad (3.6.8)$$

donde, por el lema 3.6.1,

$$\sigma = \left[\ln \left((1/c^2k^2) + 1 \right) \right]^{1/2}$$

Por lo tanto,

$$B_{\tilde{\sigma}^2} = \frac{V(Y)}{\tilde{\sigma}^2} - 1 = \frac{E(Y^2) - (E(Y))^2}{\tilde{\sigma}^2} - 1$$

donde E(Y) es como en (3.6.7) y $E(Y^2)$ es como en (3.6.6).

3.7. Aspectos Prácticos.

Esta sección tratará de la forma en que puede usarse en la práctica el Método de Holland para la estimación de la esperanza y la varianza de variables aleatorias continuas de rango infinito.

Supongamos que conocemos la forma general de una variablea aleatoria continua de rango infinito, pero desconocemos su esperanza y su varianza. Para estimar estos parámetros mediante el método de Holland, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Calcular teóricamente los sesgos B_μ y B_{σ^2} de X en función de k y c, donde: k es tal que h=k(d.s.(X)); c es tal que E(X)=ck(d.s.(X)) y h es la norma deseada para la discretización.
2. Elegimos un valor fijo para h. h será fijado de acuerdo a las necesidades del experimento ó de acuerdo a las restricciones propias de los instrumentos de medición.

3. De acuerdo a h, tomamos mediciones de la variable aleatoria X, lo cual generará una muestra.

4. A partir de la muestra construimos un histograma de frecuencias relativas.

5. Del histograma calculamos $\bar{y}$ y s, la media y desviación estándar de la muestra, respectivamente. Estos valores serán aproximaciones de la esperanza y la desviación estándar de la discretización Y de norma h y rango $\{nh: n\in Z\}$ de X.

6. Tomamos $\widehat{E(X)} = \bar{y}$ y $\widehat{V(X)} = s^2$.

7. Calculamos $\hat{k}$ y $\hat{c}$. Recordemos que k es tal que $h=k(d.s.(X))$, y c es tal que $E(X)=ck(d.s.(X))$; asi, usamos $\hat{k}=h/s$ y $\hat{c}=\bar{y}/h$.

8. Usando las fórmulas obtenidas en el paso 1 para B_μ y B_{σ^2} , calculamos numéricamente los sesgos $\widehat{B}_\mu$ y $\widehat{B}_{\sigma^2}$ para X, a partir de los valores para $\hat{k}$ y $\hat{c}$ obtenidos en el paso anterior. Si estos sesgos están expresados en forma de series, pueden hacerse aproximaciones de $\widehat{B}_\mu$ y $\widehat{B}_{\sigma^2}$ mediante computadora.

9. *a)* Si el experimentador considera que el valor numérico de los sesgos es pequeño, puede tomar $\widehat{E(X)}\approx \bar{y}$ y $\widehat{V(X)}\approx s^2$.

   b) Si el experimentador considera que $\widehat{B}_\mu$ y $\widehat{B}_{\sigma^2}$ son grandes, puede elegir una de las siguientes alternativas:

   i) Tomar un mayor número de mediciones de X, y repetir el proceso a partir del paso 4;

   ii) si es posible, hacer h más pequeño y repetir el proceso a partir del paso 2; ó

   *iii)*tomar

$$\widehat{E(X)} = \bar{y} - s\widehat{B}_\mu,$$

   y

$$\widehat{V(X)} = s^2 - s^2 \widehat{B}_{\sigma^2} = s^2(1 - \widehat{B}_{\sigma^2}).$$

corrigiendo de esta manera mediante

$$\widehat{B}_{\mu} \qquad \text{y} \qquad \widehat{B}_{\sigma^2}$$

CAPITULO 4

Conclusiones

4.2. Comparación entre las Correcciones de Sheppard y el Método de Holland.

Sea X una variable aleatoria continua de rango infinito a la cual son aplicables, tanto las Correcciones de Sheppard como el método de Holland. Sea Y una discretización de X de norma h(=k(d.s.(X)). A continuación se da una tabla que compara las propiedades principales de los métodos de Sheppard y Holland.

SHEPPARD	HOLLAND
No es aplicable a todas las distribuciones.	Es aplicable a todas las distribuciones.
Se tienen los mismos segos para todas las familias de distribuciones a las cuales las Correcciones de Sheppard son aplicables.	Las expresiones de los sesgos son distintas para cada familia de distribuciones.
Los sesgos son absolutos.	Los sesgos son relativos.
Se tienen sesgos para los momentos de todos los órdenes.	Los sesgos son únicamente para la esperanza y la varianza.
Los sesgos son de fácil calculo.	Los sesgos no siempre son sencillos de calclular.

Tabla 4.2.1

De la tabla anterior, puede verse que si lo que se desea es corregir la esperanza o la varianza de la discretización de una variable aleatoria continua a la cual pueden aplicarse tanto las Correcciones de Sheppard como el método de Holland, es preferible aplicar las primera. Si, por el contrario, las Correcciones de Sheppard no son aplicables a X, será necesario seguir los pasos indicados en la sección 3.7 del Capítulo 3 con el fin de corregir la

esperanza ó la varianza de la discretización de X mediante el método de Holland.

4.2. Relación entre las Correcciones de Sheppard y de Holland.

Sea X una variable aleatoria continua a la cual son aplicables las Correcciones de Sheppard y el método de Holland. Denotemos $\mu=E(X)$ y $\sigma=d.s.(X)$. Sea Y la discretización de X de norma $h=k\sigma$, $k>0$, y rango $R_Y=\{nh: n\in Z\}$. De las Correcciones de Sheppard (Corolario 2.4.3, Capítulo 2) tenemos

$$E(X) - E(Y) \approx E_1 \qquad \ldots\ldots (4.2.1)$$

y

$$E(X^2) - E(Y^2) \approx -(1/12)h^2 + E_2 \qquad \ldots (4.2.2)$$

donde E_1 y E_2 son como en la definición 2.4.2 del Capítulo 2. Entonces

$$\begin{aligned} V(X) - V(Y) &= [E(X^2) - (E(X))^2] - [V(Y^2) - (V(Y))^2] \\ &= [E(X^2) - V(Y^2)] - [(E(X))^2 - (E(Y))^2] \\ &\approx -(1/12)h^2 - 0 = -(1/12)h^2. \qquad \ldots\ldots (4.2.3) \end{aligned}$$

Ahora bien, de (4.2.1) se tiene

$$B_\mu = \frac{E(X) - E(Y)}{\sigma} \approx 0/\sigma = 0 \quad ;$$

y, de (4.2.3) y del hecho de que $h=k\sigma$, se obtiene

$$B_\mu = \frac{V(X) - V(Y)}{\sigma^2} \approx -\frac{h^2}{(12)\sigma^2} = -\frac{k^2\sigma^2}{(12)\sigma^2} = -(1/12)k^2.$$

Asi pues, si tanto las Correcciones de Sheppard como el método de Holland son aplicables a X se tiene

sesgo B_{μ} *de Holland* $\approx$ *sesgo del estimador* E(Y) *de* E(X) *de Sheppard*

y

sesgo B_{σ^2} *de Holland* $\approx (1/\sigma^2)$ (*sesgo del estimador* V(Y) *de* V(X) *de Sheppard*) $= -(1/12)k^2$.

Enseguida se darán seis tablas construidas de la manera siguiente: Para variables aleatorias normales de distintos parámetros μ, σ^2, se construyeron 500 muestras aleatorias de tamaño 20 y se redondearon los datos en base a distintos valores de h. Posteriormente, para cada una de las 500 muestras, se hicieron estimaciones de μ y σ^2 mediante los métodos de Holland, Sheppard y Máxima Verosimilitud. Finalmente, se calcularon sus errores cuadráticos medios.

Lo anterior se hace también para muestras de tamaños 30 y 40.

VARIABLE ALEATORIA NORMAL

ESPERANZA

Errores Cuadraticos Medios

en 500 muestras de tamaño 20

E(X)	V(X)	h	Holland	Sheppard	Max.Ver.
1	.25	.125	.01259610	.01113077	.01113077
		.25	.01365397	.01233062	.01233062
		.5	.01466107	.01300376	.01300376
		1.0	.02210687	.01710003	.01710003
1	1	.25	.05143396	.04960468	.04960468
		1.0	.06259180	.05113503	.05113503
		2.0	.07469464	.07126017	.07126017
1	9	.25	.47942084	.45276761	.45276761
		.5	.46289363	.46628621	.46628621
		1.0	.37428570	.43225510	.43225510
		3.0	.45169890	.47053040	.47053040
		4.5	.44713908	.49689987	.49689987
		6.0	.66590150	.56818040	.56818040

Tabla 4.1.2

VARIABLE ALEATORIA NORMAL

ESPERANZA

Errores Cuadráticos Medios

en 500 muestras de tamaño 30

E(X)	V(X)	h	Holland	Sheppard	Max.Ver.
1	.25	.125	.01005979	.00879739	.00879738
		.25	.01024501	.00880945	.00880945
		.5	.01047855	.00926834	.00926834
		1.0	.01421517	.01052888	.01052888
1	1.0	.25	.03519483	.03176441	.03176441
		1.0	.04556479	.03661780	.03661780
		2.0	.05085560	.04607999	.04607999
1	9.0	.25	.29549741	.29766661	.29766661
		.5	.31681355	.31165782	.31165782
		1.0	.26198500	.30094660	.30094660
		3.0	.32980350	.33737980	.33737980
		4.5	.29596061	.33896523	.33896523
		6.0	.42266410	.38688050	.38688950

Tabla 4.1.3

VARIABLE ALEATORIA NORMAL

ESPERANZA

Errores Cuadráticos Medios

en 500 muestras de tamaño 40

E(X)	V(X)	h	Holland	Sheppard	Max.Ver.
1	.25	.125	.00735412	.00619043	.00619043
		.25	.00815870	.00677851	.00677851
		.5	.00843679	.00693874	.00693874
		1.0	.01214670	.00850375	.00850375
1	1.0	.25	.02773172	.02423969	.02423969
		1.0	.03573669	.02760623	.02760623
		2.0	.03759490	.03208001	.03208001
1	9.0	.25	.22596389	.23850468	.23850467
		.5	.23161664	.23231128	.23231127
		1.0	.17327040	.21065371	.21065371
		3.0	.24279300	.23365390	.23365390
		4.5	.23979506	.27589622	.27589622
		6.0	.30584390	.29288520	.29288520

Tabla 4.1.4

VARIABLE ALEATORIA NORMAL

VARIANZA

Errores Cuadráticos Medios

en 500 muestras de tamaño 20

E(X)	V(X)	h	Holland	Sheppard	Max. Ver.
1	.25	.125	.02831650	.006276672	.00623697
		.25	.00701730	.00303527	.00298900
		.5	.01555480	.00386727	.00392121
		1.0	.00734160	.00567886	.01007545
1	1.0	.25	.10957680	.11809590	.11763760
		1.0	.14685650	.13478340	.13373300
		2.0	.17612120	.13076720	.29414930
1	9.0	.25	26.07983780	8.48027515	8.47635174
		.5	13.53484050	7.27895212	7.26774740
		1.0	10.87116000	8.21861500	8.16367100
		3.0	8.50143100	8.46468900	8.17798200
		4.5	9.04862404	11.22457790	12.40616417
		6.0	11.80502000	15.34430000	20.63857000

Tabla 4.1.5

VARIABLE ALEATORIA NORMAL

VARIANZA

Errores Cuadráticos Medios

en 500 muestras de tamaño 30

E(X)	V(X)	h	Holland	Sheppard	Max.Ver.
1	.25	.125	.01787540	.00416199	.00414566
		.25	.01071551	.00424369	.00419772
		.5	.01663616	.00472957	.00488089
		1.0	.01012620	.00811089	.01251832
1	1.0	.25	.06184236	.06526118	.06487764
		1.0	.08709878	.07605357	.07747279
		2.0	.13240180	.09099184	.18204960
1	9.0	.25	19.68673706	5.50389194	5.50056887
		.5	9.697824480	5.40269279	5.38982487
		1.0	6.865415000	5.42920800	5.39835100
		3.0	6.463273000	6.72230700	6.79644100
		4.5	5.905595300	5.90205300	7.05675793
		6.0	7.346294000	10.35690000	16.40203000

Tabla 4.1.6

VARIABLE ALEATORIA NORMAL

VARIANZA

Errores Cuadráticos Medios

en 500 muestras de tamaño 40

E(X)	V(X)	h	Holland	Sheppard	Max.Ver.
1	.25	.125	.01555207	.00326526	.00325569
		.25	.00701734	.00303527	.00298900
		.5	.01555489	.00386727	.00392121
		1.0	.00734163	.00567886	.01007545
1	1.0	.25	.04657104	.04768395	.04736451
		1.0	.06734241	.05559486	.05677437
		2.0	.10091790	.06652302	.17775860
1	9.0	.25	13.83674526	4.17899609	4.17649698
		.5	8.70475006	4.09357262	4.09046650
		1.0	5.39399700	4.00948500	3.98499300
		3.0	4.48139900	4.45642600	4.66027400
		4.5	5.18406963	5.44707012	7.74700832
		6.0	5.11453300	7.43209200	13.7267600

Tabla 4.1.7

Para muestras de tamaño 20, de la Tabla 4.1.2 vemos que en casi todos los casos el estimador por Máxima Verosimilitud (que es igual al dado por el Método de Sheppard), es mejor que el proporcionado por Holland. Los únicos casos en los que el Método de Holland da mejores estimadores, es cuando la varianza es 9, y h=0.5,1.0 y 3.0; sin embargo, la diferencia entre los errores cuadráticos medios de Holland y Máxima Verosimilitud en estos casos es muy pequeña (a lo más del orden de centésimas) por lo que, dado lo complicado de la obtención de los estimadores por el Método de Holland, es preferible, aún en estos casos, usar el método de Máxima Verosimilitud. De las tablas 4.1.3 y 4.1.4 vemos que lo anterior es aplicable también cunado se tienen muestras de tamaños 30 y 40.

Por otro lado, de las tablas 4.1.5, 4.1.6 y 4.1.7 puede verse que cuando h=2(d.s.(x)) y V(X) no es muy grande (V(X)=.25,1.0), el estimador de la varianza dado por Sheppard es sensiblemente mejor. En el caso en el que V(X) es grande (V(X)=9) y h=2(d.s.(X)), el Método de Holland proporciona un estimador mucho más exacto que el calculado por los otros dos métodos. En los casos restantes, el Método de Máxima Verosimilitud es satisfactorio.

En el caso de una variable aleatoria normal, podríamos entonces concluir que ninguno de los tres métodos utilizados en la construcción de las tablas es mejor que los otros dos. La bondad de cada uno de los estimadores depende de los valores de la varianza de la variable aleatoria continua y de h (la norma de la discretización).

BIBLIOGRAFIA

[1] CRAMER, H. (1971). "Corrections for grouping", Ch. 29, pp. 359-362 en *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[2] HOLLAND, B.S. , (1975). "*Some results on the discretization of continuos probability distributions*", Technometrics, Vol. 17, No. 3, pp. 333-339.

[3] KENDALL, M.G. & STUART, A., (1969). "Corrections for grouping (Sheppard's Corrections)", Cap. 3, pp.75-78 en *The Advanced Theory of Statistics*, Griffin, London.

[4] LINDGREN, B. W., (1976). "*Statistical Theory*", MacMillan, New York.

[5] SHEPPARD, W. F., (1898). "*On the calculation of the most probable values of frecuency-constants for data arranged according to equidistant divisions of a scale*", Proc. London Math. Soc., No. 29, pag. 353.

[6] SPIVAK, M., (1973). "*Calculus*", Benjamin, London.

[7] STUDENT, (1908). "*The Probable Error of a Mean*", Biometrika, 6, pp.1-25.