



Casa abierta al tiempo

Tesis
Sobre la Descripción de Agujeros Negros
en Gravedad Cuántica

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta

Hector Hugo Hernandez Hernandez

México D.F. Septiembre del 2004

Tesis

**Sobre la Descripción de Agujeros Negros
en Gravedad Cuántica**

Que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

presenta

Héctor Hugo Hernández Hernández

México D.F. Septiembre del 2004



Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Física

TESIS
Sobre la Descripción de
Agujeros Negros
en Gravedad Cuántica

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Física)
Presenta

Héctor Hugo Hernández Hernández



Asesor: Dr. Hugo A. Morales Técotl

México D.F.
Octubre del 2004

Índice general

1. Introducción.	3
1.1. Gravitación y mecánica cuántica.	3
1.2. Esquemas de gravedad cuántica.	6
1.3. Agujeros negros cuánticos.	10
1.3.1. Termodinámica y entropía de agujeros negros.	12
1.4. Plan.	16
2. Agujeros negros y modelos cosmológicos en propuestas de gravedad cuántica.	17
2.1. Sector gravitacional en teoría de cuerdas.	17
2.1.1. Preliminares.	17
2.1.2. Supergravedad, agujeros negros y entropía.	20
2.1.3. Modelos cosmológicos	29
2.2. Gravedad canónica en lazos.	32
2.2.1. Introducción.	32
2.2.2. Entropía de agujeros negros.	35
2.2.3. Modelos cosmológicos.	41
2.3. Resultados en ambos esquemas.	44
3. Supersimetría y supergravedad.	47
3.1. Introducción.	47
3.2. Motivación.	50
3.3. Encajamiento de $D = 4$ en $D = 11$	51
3.4. Determinación de soluciones.	53
3.5. Supersimetría y soluciones	57
3.6. Configuración de ondas planas paralelas.	61
3.7. Discusión.	64

4. Agujeros negros rotantes cargados.	65
4.1. Introducción.	65
4.2. Agujeros negros no extremales.	68
4.3. El modelo.	70
4.4. Agujero negro rotante como un sistema de branas.	73
4.5. Caso neutro	76
4.6. Caso cargado.	79
4.7. Discusión.	81
5. Conclusiones y perspectivas.	83
A.	87
A.1. Cargas y tensiones en teoría de cuerdas.	87
A.2. Reducción dimensional.	88
A.3. Supergravedad.	89
A.4. Dualidad AdS/CFT.	90

Resumen

El establecimiento de una teoría cuántica de la gravedad ha sido, tal vez, el reto más difícil de resolver de la física teórica. Prueba de ello es que a más de 80 años de la formulación de la relatividad general no se ha podido establecer de forma completa tal teoría. En buena medida su interés se basa en la hipótesis de que a la luz de una teoría de gravedad cuántica sería posible dar explicación a problemas que han surgido relacionados con la gravedad clásica, como son la existencia de singularidades en agujeros negros y la gran explosión del universo temprano. Por otro lado se ha considerado que posiblemente en base a tal teoría sea posible resolver las divergencias de las teorías cuánticas de campos.

Uno de los problemas fundamentales de cualquier teoría de gravedad cuántica es el de darle interpretación microscópica a la entropía de agujeros negros. De tal forma que el objetivo de la tesis es el de estudiar en teoría de cuerdas, o teoría M, algunos aspectos cuánticos de agujeros negros, en particular la determinación microscópica de su entropía.

En base a un modelo de branas y antibranas de Dirichlet introducido recientemente por Güijosa et al ([1]), y empleando la dualidad AdS/CFT hemos calculado una entropía microscópica. Esta resulta ser la misma que la que se calcula para el mismo sistema empleando la fórmula de Bekenstein-Hawking. Nuestros resultados se encuentran reportados en [2].

Tal determinación resulta ser innovadora ya que el sistema en cuestión se identifica con un agujero negro siete dimensional en un espacio tiempo diez dimensional, con características de extremalidad arbitraria¹. Posibles extensiones se pueden obtener al considerar agujeros negros de distintas dimensiones y/o el estudio de características distintas a la entropía, como factores de cuerpo gris entre otros.

Es claro que para estudiar agujeros negros en teoría de cuerdas hay que determinar cómo es que se obtienen los mismos. Con esto en mente, empleamos un método desarrollado por Cvetič y colaboradores ([3]) en el que se obtienen soluciones tipo agujero negro en teorías de supergravedad en distintas dimensiones. Tales teorías son el límite de bajas energías de las teorías de cuerdas.

Concretamente obtenemos un conjunto de soluciones de branas parcialmente

¹La extremalidad en un agujero negro está determinada por una relación entre sus parámetros de carga (Q) y masa (M). El extremal es el que cumple $Q = M$, en unidades adecuadas

supersimétricas y ondas planas gravitacionales en 4 y 11 dimensiones. Empleando la conjetura de Maldacena argumentamos que nuestras soluciones son duales a una mecánica cuántica supersimétrica. Esta discusión se encuentra en el capítulo 3 y en la referencia [4].

De los resultados obtenidos es posible extender el tratamiento a branas con características distintas, permitiendo que el contenido de campos sea mayor y, más aún, que las simetrías entre estos sean distintas (esto se logra permitiendo que los acoplamientos sean distintos en la norma impuesta).

Si bien el estudio que realizamos está enfocado en la teoría de cuerdas, que es uno de los candidatos para una teoría de gravedad cuántica, existen enfoques alternativos, como la gravedad canónica con lazos. Por completez se incluye una breve descripción de agujeros negros y modelos cosmológicos en ambos enfoques.

La tesis está estructurada de la siguiente forma: en el capítulo 1 damos una breve introducción acerca de los problemas y soluciones que plantea una teoría de gravedad cuántica. En el capítulo 2 bosquejamos el estudio de agujeros negros y modelos cosmológicos en teoría de cuerdas y gravedad cuántica de lazos. En el capítulo 3 discutimos el procedimiento de Cvetič et al y obtenemos soluciones de branas y ondas planas gravitacionales parcialmente supersimétricas.

En el capítulo 4 describimos microscópicamente un agujero negro siete dimensional como un sistema de branas-antibranas y calculamos su entropía. Finalmente, en el capítulo 5 presentamos nuestras conclusiones de este trabajo y posibles extensiones.

En esta tesis empleamos el término *p-brana* para objetos extendidos de distintas dimensiones p : una cero-brana es un punto, una 1-brana es una cuerda, etc.

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Gravitación y mecánica cuántica.

El objetivo de esta tesis es el de estudiar algunas características de agujeros negros en un esquema de gravedad cuántica: teoría de cuerdas. Pero antes de involucrarnos en tal empresa sería importante discutir por qué es interesante estudiar o formular tal teoría [5].

Algunas preguntas surgen a este respecto:

1. ¿Por qué es interesante establecer una teoría de gravedad cuántica?
2. ¿Cuáles y cuántas formas existen para tratar de construir una teoría de gravedad cuántica?
3. ¿Son compatibles, desde el punto de vista estructural, las teorías de relatividad general y la mecánica cuántica?

Es claro que estos no son los únicos aspectos relevantes para una teoría de gravedad cuántica; por ejemplo, es importante determinar técnicas de aproximación (como la perturbativa) en la teoría para darle fundamentación práctica al extraer información física. Además existe la cuestión de si la supersimetría juega un papel fundamental en la construcción mencionada. Debido a que una de las más ambiciosas propuestas de unificación es la presencia justamente de la supersimetría (ver figura 1.1) y a que esta se encuentra en al menos uno de los modelos de gravedad cuántica -teoría de cuerdas- viene una pregunta a la mente: ¿una teoría consistente de gravedad cuántica unificará todas las fuerzas o solo aspira a una teoría cuántica del campo gravitatorio? Trataremos de ampliar estos puntos y de justificar posibles propuestas de solución.

Tradicionalmente la característica que cuestiona de forma fundamental a la gravedad cuántica como una parte fundamental de la Física es la falta de evidencia observacional de fenómenos en el mundo real que se identifiquen como consecuencias de la existencia de una cuantización de la gravedad. Esto se puede ver rápidamente si consideramos la escala característica de la gravedad cuántica, la escala de Planck $\ell_P \sim 10^{-35}m \sim 10^{28}eV$, que está lejos por mucho de las energías que se manejan en los aceleradores de partículas existentes. Más aún, este régimen de energías es característico solo de la etapa post-Big Bang del Universo.

Recientemente se ha considerado que este panorama puede cambiar en base al estudio de ciertos fenómenos, como (i) ráfagas de rayos gama, y (ii) rayos cósmicos [6]. Tales estudios se enmarcan en la denominada “fenomenología de gravedad cuántica” [7]. En esta propuesta se buscan efectos de la escala de Planck que sean realizados por la energía típica del fenómeno y la escala de tiempo o longitud característica del mismo.

De acuerdo a lo que hemos expuesto anteriormente la gravedad cuántica no es un objeto de estudio “estándar”, debido a la falta de evidencia clara con la cual confrontar los resultados que de ella emanen. Sin embargo, esto no significa que no haya suficientes buenas razones para estudiarla, y por supuesto que algunas de las motivaciones se basan en posibles observaciones o experimentos, como en cosmología. Resulta útil en todo caso motivar tal

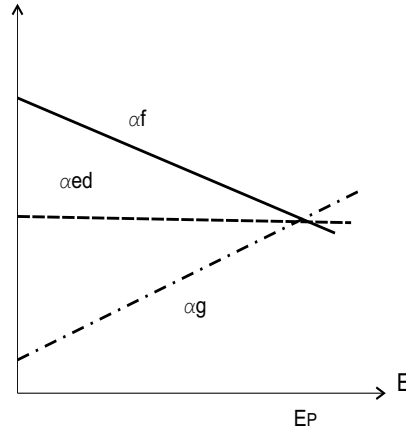


Figura 1.1: Constantes de acoplamiento fuerte, electrodébil y gravitacional como función de la energía, bajo la presencia de supersimetría. El punto de intersección corresponde a la energía de Planck E_P .

estudio desde el punto de vista de la Física de partículas y teoría cuántica o bien desde el de relatividad general.

■ **Física de partículas y campos.**

- La materia está conformada de partículas elementales descritas en términos cuánticos que además interactúan entre sí gravitacionalmente. Por ello es necesario estudiar las características cuánticas de la relatividad general.
- La teoría cuántica de campos relativista podría tener sentido estricto solo si se incluye a la gravedad en un enfoque global. De hecho, las divergencias de corta distancia que plagan a tales teorías podrían ser canceladas por un corte fundamental a la escala de Planck. La teoría de cuerdas y la gravedad cuántica con lazos implementan esta idea particularmente.
- Un argumento relacionado con el anterior es que la relatividad general es un ingrediente necesario en cualquier teoría consistente de unificación de las fuerzas no gravitacionales (la electromagnética, débil y fuerte). Argumentos en sentido opuesto, que una teoría consistente de gravedad cuántica necesariamente incluye a las otras fuerzas, son la diferencia más común de enfoques entre la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica canónica.

■ **Relatividad general.**

- Singularidades del espacio-tiempo se encuentran inevitablemente en la relatividad general si el tensor de energía momento satisface ciertas condiciones de positividad¹. Se ha creído por largo tiempo que la remoción de tal problema puede ser removido con la introducción de efectos cuánticos. Esto ha tomado forma especialmente en la gravedad cuántica con lazos [8].
- Desde el descubrimiento hecho por Hawking [9] de que un agujero negro radia por efectos cuánticos, una de las mayores razones de establecer una teoría cuántica de gravedad es el de comprender el estado final de materia que se halla en colapso gravitacional.

¹*Teorema de Penrose de singularidades.* Si se cumple la condición débil de energía ($T_{ab}u^a u^b \geq 0$, $u^a u_a = -1$) y existe una superficie atrapada S en un espacio-tiempo que admite una superficie de Cauchy no compacta, entonces este espacio no puede ser completo con respecto a geodésicas nulas.

- La gravedad cuántica debería jugar un papel fundamental en el Universo temprano. Posibles aplicaciones incluyen:
 1. Entender el principio del universo;
 2. Determinar una explicación de porqué el espacio-tiempo tiene una dimensión de 4;
 3. Proveer una explicación para el origen de la evolución inflacionaria.

1.2. Esquemas de gravedad cuántica.

Como hemos discutido, en la actualidad no existe un consenso generalizado en la comunidad científica acerca de cuáles deben ser las características básicas sobre las que se pueden construir o basar una teoría de gravedad cuántica. Incluso se ha llegado a considerar que tal vez no sea necesario el tener una teoría cuántica gravitatoria. Por ejemplo

1. Se ha considerado que, dado que la longitud de Planck es tan pequeña, tal vez no sea necesario el interesarse en la gravedad cuántica, excepto en el estudio del universo muy temprano, del orden de la escala de Planck: 10^{-42} s del Big Bang. Aunque
 - Tal aseveración solo tiene validez si existe una teoría completa en la cual se pueda desarrollar una expansión perturbativa en l/ℓ_P , donde l es la escala de prueba. Solo entonces se puede argumentar que los efectos cuánticos para $l/\ell_P \ll 1$ son despreciables.
 - El argumento relativo al tamaño de ℓ_P no considera la posibilidad de efectos no perturbativos.
2. Un punto de vista relacionado es que sea evidentemente erróneo intentar cuantizar el campo gravitacional de la manera tradicional, esto es, emplear un procedimiento donde se empieza con un sistema clásico y se le aplica un procedimiento de cuantización. Las razones que abogan por tal aseveración incluyen
 - La métrica no es un campo “fundamental” en Física sino una descripción fenomenológica de los efectos cuánticos aplicables solo en situaciones lejos de la escala de Planck.
 - El campo gravitacional está relacionado con la estructura del espacio y del tiempo, y estos son de naturaleza clásica.

3. Con esto también surge la pregunta de cómo la materia, siendo estudiada cuánticamente, puede ser incorporada en este esquema. El ejemplo clásico acerca de este argumento es considerar la ecuación “semiclásica” de Einstein

$$G_{mn}(g) = \langle \psi | T_{mn}(g, \hat{\phi}) | \psi \rangle \quad (1.1)$$

donde $|\psi\rangle$ es algún estado en el espacio de Hilbert de las variables cuantizadas de materia ϕ .

De esto se puede agregar que

- Para el electromagnetismo, en el análogo de la ecuación anterior se ha determinado que el campo electromagnético tiene que estar cuantizado para ser consistente con la naturaleza cuántica de la materia con la que se acopla. Aunque no se ha podido establecer un resultado similar para relatividad general.
- El miembro derecho de (1.1) exhibe por sí mismo ciertos problemas. Por ejemplo, el valor de expectación es divergente en el ultravioleta y los métodos de regularización dan una expresión no ambigua cuando la métrica g es estática o estacionaria, pero no hay razones para que una métrica semiclásica tenga también esta propiedad. Además existen algunos argumentos que implican que las soluciones de (1.1) sean inestables ante pequeñas perturbaciones.
- No es claro cómo elegir el estado $|\psi\rangle$. Más aún, por el carácter no lineal de la relatividad general, si $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ son asociados con un par de soluciones g_1, g_2 de (1.1), no hay relación entre g_1, g_2 y cualquier solución asociada con una combinación lineal de $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$.

De todo esto es claro que la obtención de respuestas y explicaciones a este tipo de interrogantes debería ser posible a la luz de una teoría consistente de gravedad cuántica. El contar con tal teoría nos permitiría describir fenómenos característicos de la misma y decidir si las suposiciones y problemas planteados arriba (todos a “priori”) tienen o no fundamento. Por ello la búsqueda de una teoría de gravedad cuántica está más que justificada.

Las cuatro categorías en las que se pueden clasificar los enfoques de gravedad cuántica son

1. *Cuantizar la relatividad general.* Se trata de construir un algoritmo para cuantizar activamente el tensor métrico considerado como un

tipo de campo. Las técnicas empleadas caen en dos categorías: (i) las basadas en un enfoque de espacio-tiempo a la teoría cuántica de campo, donde los operadores se definen en una variedad cuatro dimensional que representa el espacio-tiempo; (ii) los basados en un enfoque canónico, donde los operadores se definen en una variedad tres dimensional que representa el espacio físico.

2. *Relativizar la teoría cuántica.* Se trata de adaptar la teoría cuántica estándar a las necesidades de la relatividad general. La mayoría del trabajo en esta dirección se ha realizado en el contexto de cuantizar un campo de materia que se propaga en un espacio de fondo fijo $(\mathcal{M}, g)$, donde $\mathcal{M}$ es la variedad y g la métrica.
3. La relatividad general es el límite de bajas energías de una teoría cuántica de algo distinto. El ejemplo más notable es la teoría de cuerdas.
4. *Comenzar con una teoría radicalmente nueva.* Implica que tanto la relatividad general clásica y la teoría cuántica emergen de una teoría más profunda que involucra una concepción nueva o distinta de los conceptos de espacio, tiempo y sustancia.

Hasta el advenimiento de la teoría de cuerdas, la mayoría de la investigación en gravedad cuántica se basaba en el esquema número 1 de arriba. Sin embargo, este esquema se encuentra inevitablemente con el “problema del tiempo” que es parte fundamental de toda concepción de gravedad cuántica. ¿Qué significa esto?

La estructura causal del espacio-tiempo depende de la métrica g , así que si esta está sujeta a fluctuaciones cuánticas también lo estará la estructura causal. Esta situación posee problemas técnicos severos dado que la teoría cuántica de campos estándar presupone una estructura causal fija. Por ejemplo, un campo escalar cuántico $\phi(X)$ normalmente satisface las reglas de conmutación microcausales

$$[\phi(X), \phi(Y)] = 0,$$

siempre que los puntos X, Y se encuentren separados espacialmente. Sin embargo, esta condición carece de sentido si la métrica del espacio-tiempo está cuantizada; en esta situación generalmente el miembro derecho no se hace cero y con esto se elimina uno de los fundamentos de la teoría cuántica.

El reemplazar operadores por álgebras $\mathcal{C}^*$ no ayuda, ni siquiera el uso de integrales funcionales. Las técnicas que han sido usadas para estudiar el problema del tiempo yacen en alguna de las siguientes categorías

1. Utilizan una métrica de fondo fija η (usualmente Minkowski) para definir una estructura causal con respecto de la cual se pueden usar las técnicas de teoría cuántica de campos estándar. Cuando se aplica al campo gravitacional $g_{mn}(X)$ esto usualmente lleva a escribir

$$g_{mn}(X) = \eta_{mn} + \kappa h_{mn}(X), \quad (1.2)$$

considerando entonces a h como el campo gravitacional físico. Aquí $\kappa^2 = 8\pi G/c^2$, G es la constante de Newton. El uso de esta ecuación sugiere un enfoque perturbativo alrededor de la métrica fija. Los problemas que se obtienen son

- determinar un esquema matemático bien definido (las técnicas obvias dan una teoría no renormalizable);
 - saber manejar otros fondos que no sean Minkowski;
 - entender cómo los fondos posibles encajan todos en un solo esquema cuántico y en qué se transforma la noción de causalidad.
2. Empezar con un formalismo donde la métrica tiene una signatura Riemanniana y al final ocuparse de realizar una continuación analítica para volver al espacio tiempo físico. Generalmente tales aproximaciones se basan en técnicas de integrales de trayectoria.
 3. No considerar los métodos de espacio-tiempo y considerar el enfoque canónico sobre la relatividad general donde los ingredientes básicos son campos geométricos en una variedad tridimensional. El problema en este caso es el reconstruir algún tipo de enfoque espacio-temporal con el que se puedan realizar cálculos cuánticos.

En el caso 3 mencionado arriba se comienza con una foliación del espacio-tiempo que se usa para definir variables canónicas apropiadas. Históricamente primero se consideraron la métrica tridimensional γ_{ab} en una variedad espacial Σ , y una variable conjugada p_{ab} relacionada con la curvatura extrínseca de Σ encajada en una variedad cuatro dimensional. Estas variables satisfacen las constricciones

$$\mathcal{H}_a(x) = -2p_a^b{}_{,b}(x) = 0, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{H}_\perp(x) = \kappa^2 \mathcal{G}_{abcd}(x) p^{ab}(x) p^{cd}(x) - \frac{\sqrt{|\gamma(x)|}}{\kappa^2} R(x) = 0, \quad (1.4)$$

donde $R(x)$ es el escalar de curvatura de γ y la “supermétrica” de DeWitt está dada por

$$\mathcal{G}_{abcd}(x) = \frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}} (\gamma_{ac}\gamma_{bd} + \gamma_{cb}\gamma_{ad} - \gamma_{ab}\gamma_{cd}).$$

El álgebra de las constricciones $\mathcal{H}$ es justamente la del grupo de difeomorfismos proyectada sobre las hipersuperficies espaciales.

Las técnicas para cuantizar este sistema clásico incluyen: (i) imponer una norma para la invariancia asociada con el álgebra; (ii) resolver clásicamente las constricciones (1.3); y (iii) cuantizar el sistema canónico resultante en forma estándar. Las ecuaciones que se obtienen son intratables en cualquier forma que no sea perturbativa, en la cual inmediatamente son plagadas por divergencias ultravioletas.

La mayoría de los estudios en gravedad cuántica canónica no siguen estos procedimientos. En vez de ello, el conjunto de campos (γ, p) son cuantizados a través de las relaciones de conmutación

$$[\gamma_{ab}(x), \gamma_{cd}(x')] = [p_{ab}(x), p_{cd}(x')] = 0, \quad (1.5)$$

$$[\gamma_{ab}(x), p^{cd}(x')] = i\hbar \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(x, x'). \quad (1.6)$$

Estas constricciones son interpretadas en los estados permitidos Ψ , de tal forma que $\hat{\mathcal{H}}_a(x)\Psi = \hat{\mathcal{H}}_\perp \Psi = 0$. Esta última restricción se convierte en la famosa ecuación de Wheeler-DeWitt

$$-\hbar^2 \kappa^2 \mathcal{G}_{abcd}(x) \frac{\delta^2 \Psi[\gamma]}{\delta \gamma_{ab} \delta \gamma_{cd}} - \frac{\sqrt{|\gamma|}}{\kappa^2} R(x) \Psi[\gamma] = 0. \quad (1.7)$$

La manifestación más obvia del problema del tiempo es que la ecuación de Wheeler-DeWitt no hace referencia al tiempo y normalmente es la que se considera como la ecuación “dinámica” de la teoría. Esta situación usualmente se entiende como si el “tiempo” tiene que reintroducirse como el valor de cantidades físicas especiales en la teoría con las cuales los valores de otras cantidades físicas tienen que relacionarse. Si esto se puede hacer en forma exacta y cómo comparar resultados en dos posibles elecciones es un problema de capital importancia.

1.3. Agujeros negros cuánticos.

Las propuestas mayormente difundidas y estudiadas de gravitación cuántica son: **teoría de cuerdas**, **gravedad cuántica canónica** y **gravedad cuántica basada en integrales de trayectoria**. En el capítulo siguiente enunciaremos brevemente las características más importantes en los dos primeros esquemas y algunos resultados obtenidos en ellos.

Ahora, es importante resaltar algunos puntos relacionados con el uso de la noción de espacio-tiempo determinada por la relatividad general en

gravedad cuántica. Particularmente veamos qué tienen que decir los agujeros negros.

Desde el descubrimiento de Hawking de que los agujeros negros radian, ha sido fuente de investigación muy activa el ver cuál es la implicación que esto tiene en gravedad cuántica. Por ejemplo, es tentador especular que el espacio-tiempo a la escala de Planck tiene una estructura de “espuma” construida de agujeros negros virtuales. Esta idea tiene características atractivas y podría tener sentido en una aproximación semiclásica.

Otro hecho importante sujeto a mucho debate ha sido el estado final de un agujero negro en evaporación, particularmente el destino de la información de la cual se formó el mismo. Existen tres puntos de vista al respecto: (i) la información en realidad se pierde, apuntando a una pérdida fundamental de la conservación de la probabilidad; (ii) la información regresa en cierta forma en la radiación de Hawking; (iii) el agujero negro deja remanentes del tamaño de la masa de Planck con vida relativamente larga. Sin embargo, esto sigue siendo un problema abierto.

Ahora, ¿cuál es el efecto de los agujeros negros en la física cuántica en una región del espacio-tiempo? Cualquier intento de poner un ente de energía E en una región espacial con área de su frontera A , y tal que $E > A^{-1/2}$, formará un agujero negro; esto pone un límite superior natural al valor de la energía de la región. Consecuentemente en cualquier teoría de gravedad cuántica cuyos estados semiclásicos contengan algo como un agujero negro la física cuántica de la región involucra solo un espacio de Hilbert finito-dimensional. Esta posibilidad está relacionada con el denominado “principio holográfico” que argumenta que los estados físicos en una región acotada están descritos por una teoría cuántica de campos en la frontera de esa región.

Finalmente, otra pregunta es si la teoría cuántica actual cubre las demandas que le implica una teoría de gravedad cuántica. Algunos aspectos de esto son: problemas conceptuales asociados con la cosmología cuántica, la posibilidad de que el propio espacio-tiempo deba ser cuantizado en cierto sentido. Desde una perspectiva un poco más técnica, los modelos actuales de gravedad cuántica usan ideas estándar en teoría cuántica. En particular, trabajan con un punto de vista esencialmente clásico del espacio y tiempo: esto lleva a otra pregunta: ¿la teoría cuántica puede adaptarse para acomodar la idea de que el espacio-tiempo está sujeto a efectos cuánticos? Tal vez sea una de las preguntas más fundamentales de la gravedad cuántica.

Todo lo planteado anteriormente son aspectos generales de agujeros negros en los diferentes esquemas de gravedad cuántica. Si queremos ser más específicos sobre la información que los agujeros negros pueden aportar so-

bre el establecimiento de dicha teoría y como motivación de nuestro estudio podemos discutir lo relacionado a la entropía de los mismos.

1.3.1. Termodinámica y entropía de agujeros negros.

Para agujeros negros en relatividad general, cuya característica más relevante es la existencia de un horizonte de eventos, existe un teorema debido a Hawking de 1971 que demuestra que el área de este horizonte aislado solo puede permanecer igual o aumentar (ver más adelante). Esto permite realizar una analogía entre este comportamiento del área del horizonte y la segunda ley de la termodinámica que introduce el concepto de entropía, como veremos posteriormente. Ver por ejemplo [10, 11].

Consideremos la gravedad superficial en el horizonte de eventos² κ . Esta es constante en el mismo, lo cual recuerda a la ley cero de la termodinámica:

Ley cero. Si el tensor de energía-momento T_{ab} cumple la condición de energía dominante³ entonces la gravedad superficial, κ , es constante en el horizonte de eventos.

Por otro lado también se ha determinado la

Primera ley. Si un agujero negro estacionario de masa M , carga Q y momento angular J con gravedad superficial κ , potencial eléctrico en el horizonte ϕ_E y velocidad angular Ω_H es perturbado, de tal forma que se estabiliza en otro agujero negro con parámetros $(M + \delta M, Q + \delta Q, J + \delta J)$, entonces

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega_H \delta J + \phi_E \delta Q, \quad (1.8)$$

Si κ se comporta como la temperatura y A como la entropía, podríamos interpretar la ecuación anterior con la “primera ley de la termodinámica” (de agujeros negros, claro está).

Como mencionamos arriba, el comportamiento del área del horizonte de eventos recuerda a la segunda ley:

Segunda ley. Si el tensor de energía-momento T_{ab} satisface la condición de energía débil y es válida la hipótesis de censura cósmica⁴ entonces el área del horizonte de eventos de un espacio-tiempo asintóticamente plano es una función no decreciente del tiempo.

²Es la aceleración que habría que proporcionarle a una partícula para contrarrestar la que tendría en caída libre hacia el agujero: con esto permitimos que permanezca en el horizonte.

³ $u^a T_{ab}$ no es un vector tipo espacio, para $u_a u^a \leq 0$.

⁴El colapso gravitacional total de un cuerpo resulta siempre en un agujero negro y no en una singularidad desnuda.

La tercera ley quedaría de manifiesto si mencionamos que κ no puede hacerse cero en el horizonte de eventos “en un número finito de procesos reversibles”. Esto conforma las **leyes de la mecánica de agujeros negros**.

En la tabla (1.3.1) resumimos estas características.

LEY	TERMODINAMICA	AGUJEROS NEGROS
Cero	Temperatura T constante en un sistema en equilibrio	Gravedad superficial κ constante en el horizonte de eventos
Primera	$dE = TdS +$ términos de trabajo	$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA +$ términos de rotación y carga
Segunda	$\delta S \geq 0$ en cualquier proceso	$\delta A \geq 0$ en cualquier proceso
Tercera	Imposible alcanzar $T = 0$ por cualquier proceso físico	Imposible alcanzar $\kappa = 0$ por cualquier proceso físico

Sin embargo no podemos solo asignar una temperatura termodinámica a κ y una entropía proporcional al área del horizonte, dado que clásicamente el agujero negro no tiene radiación de cuerpo negro y solo se encuentra en equilibrio con un fondo de temperatura cero. Para darle vuelta a esta paradoja debemos olvidarnos de RG clásica y proceder semiclásicamente: introducir efectos cuánticos en el fondo de agujero negro.

Hawking, en [9], demostró que la creación de partículas cerca del horizonte de eventos conlleva a una emisión de partículas con espectro térmico desde el agujero que tiene una temperatura característica $T = \kappa/2\pi$ para el caso de un agujero de Schwarzschild, todo esto para un observador en infinito. También un observador acelerado resulta estar inmerso en un baño térmico de partículas con temperatura (temperatura de Unruh)

$$T_U = \frac{a}{2\pi}. \quad (1.9)$$

Veamos cómo se obtiene esto.

Se puede estudiar el comportamiento de una teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo tipo agujero negro utilizando integrales de trayectoria Euclidianas. Esto requiere fijar

$$t = i\tau. \quad (1.10)$$

Esto en el espacio-tiempo del agujero negro nos lleva, por ejemplo, de la métrica de Schwarzschild a la métrica de Schwarzschild Euclidiana

$$ds_E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.11)$$

Realicemos el siguiente cambio de variable

$$r - 2M = \frac{x^2}{8M} = \frac{x^2 \kappa}{2}$$

Cerca del horizonte ($r \approx 2M$, $x \approx 0$) esta métrica se convierte en

$$ds_E^2 \approx (\kappa x)^2 d\tau^2 + dx^2 + \frac{1}{4\kappa^2} d\Omega^2. \quad (1.12)$$

La parte no angular de esta métrica es el espacio de Rindler Euclidiano, que no es otra cosa que $\mathbb{R}^2$ si se hace la identificación periódica $\tau \sim \tau + 2\pi/\kappa$. Específicamente con el cambio de variable

$$u = -xe^{-i\kappa\tau}, \quad v = xe^{i\kappa\tau}, \quad u = T - X, \quad v = T + X,$$

se obtiene $ds^2 = dT^2 + dX^2$. De esto podemos ver que obtenemos el espacio plano Euclideano si identificamos $\tau \sim \tau + 2\pi/\kappa$.

Esto significa que las integrales funcionales se deben tomar sobre campos con este período. Esto es

$$Z = \int [\mathcal{D}\Phi] e^{-S_E[\Phi]}, \quad (1.13)$$

donde S_E es la acción Euclideana. Si la integral funcional se realiza sobre campos Φ periódicos en el tiempo imaginario con período $\hbar\beta$ entonces esta integral puede verse como

$$Z = \text{Tr } e^{-\beta H}, \quad (1.14)$$

que es la función de partición para un sistema cuántico con Hamiltoniano H a temperatura $T = (k_B\beta)^{-1}$, donde k_B es la constante de Boltzman. Pero hemos visto que $\hbar\beta = 2\pi/\kappa$ para Schwarzschild, así que se deduce que en la teoría cuántica de campos es posible obtener equilibrio de un agujero negro a la temperatura de Hawking

$$T_H = \frac{\kappa\hbar}{2\pi k_B} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (1.15)$$

en nuestra convención. Esto justifica nuestra identificación de temperatura con la gravedad superficial de un agujero negro.

Originalmente esto fué determinado para campos lineales libres propagándose en métricas de agujero negro, pero también es cierto para campos de espín arbitrario. Para calcular las expresiones exactas para las secciones eficaces de dispersión y los decaimientos del agujero negro se considera la ecuación de onda de radiación en el fondo de agujero.

Para la determinación de la entropía basta integrar la primera ley de la termodinámica (1.8) una vez que conocemos T_H . Por ejemplo, para el agujero de Schwarzschild y el de Reissner-Nordström se tiene

$$\begin{aligned} T_H S &= \frac{1}{8\pi M}, \\ T_H R_N &= \frac{2\sqrt{M^2 - Q^2}}{4\pi \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$T_H dS = dM \Rightarrow dS = (8\pi M)dM \Rightarrow S = 4\pi M^2 = \frac{A}{4}.$$

Generalizando este procedimiento a diversas configuraciones de agujeros negros se obtiene la ya conocida ley

$$S = \frac{A}{4}. \quad (1.17)$$

Con este resultado, de que los agujeros negros se comportan como objetos clásicos radiantes termodinámicos, a los cuales se les puede asociar una entropía (de Bekenstein-Hawking), surge una pregunta a la luz de la gravedad cuántica:

Si sabemos a partir de la mecánica estadística que en un sistema termodinámico su entropía está relacionada con la degeneración de estados cuánticos que conforman al mismo, entonces ¿cuáles son los estados cuánticos que conforman al agujero negro, responsables de su entropía?

Como podemos ver, esta interrogante, junto con la formación de estructura del Universo, se encuentran entre las razones prácticas más interesantes para el estudio de gravedad cuántica, o al menos escenarios donde las consecuencias de tal teoría pueden ser consideradas.

Hemos enunciado características importantes de lo que queremos decir con una teoría de gravedad cuántica, su uso e implicaciones, al menos en los fenómenos y preguntas que debiera ser capaz de explicar. En esta tesis trabajamos particularmente en el enfoque dado por la teoría de cuerdas.

1.4. Plan.

La tesis está distribuida como sigue.

En el capítulo 2 describimos los aspectos de teorías de cuerdas y gravedad cuántica en lazos más relevantes para nuestro estudio; discutimos en particular una descripción microscópica de la entropía de agujeros negros y modelos cosmológicos. Como el trabajo se centra en la obtención de la entropía microscópica de agujeros negros, revisamos el caso -para teoría de cuerdas- de agujeros negros extremales.

Por último, resumimos las ventajas y desventajas de los resultados y enfoques en la teoría de cuerdas y en la gravedad canónica con lazos.

En el capítulo 3 describimos cómo se obtienen soluciones supersimétricas tipo agujero negro en teoría de cuerdas y la relación que tienen las mismas en diversas dimensiones. Explicamos de qué manera estos objetos se pueden interpretar como distintas soluciones en la teoría a bajas energías de cuerdas, es decir, supergravedad, y que a partir de ellas se pueden obtener mas soluciones con distintas características.

En el capítulo 4 calculamos la entropía de un tipo de agujeros negros no extremales. En el espíritu del capítulo anterior, incluimos el análisis de agujeros negros cercanamente extremales. La parte central de este capítulo es mostrar que a partir de una solución de agujero negro 7-dimensional rotante con carga, arbitrariamente lejos de la extremalidad (una 3-membrana de Dirichlet) y de un modelo de branas-antibranas de Dirichlet en teoría de cuerdas, es posible determinar su entropía con una base microscópica, que resulta ser exactamente igual a la correspondiente de Bekenstein-Hawking.

Por último, presentamos nuestras conclusiones sobre el trabajo realizado, así como posibles extensiones del mismo.

Capítulo 2

Agujeros negros y modelos cosmológicos en propuestas de gravedad cuántica.

En este capítulo exponemos las características más importantes de agujeros negros y modelos cosmológicos en dos esquemas de gravedad cuántica: *la teoría de cuerdas y gravedad canónica en lazos*.

La idea de este capítulo es dar un panorama general de los avances y logros obtenidos en ambos esquemas. A pesar de que en esta tesis no analizamos modelos cosmológicos ni agujeros negros en gravedad de lazos consideramos importante incluir una breve descripción de los mismos debido a que constituyen los ejemplos más robustos de consecuencias físicas derivadas de estos esquemas.

Comenzaremos con la teoría de cuerdas y continuamos con la gravedad canónica en lazos. La última sección incluye posibles extensiones, como la considerada en esta tesis y que se desarrolla en el capítulo 4.

2.1. Sector gravitacional en teoría de cuerdas.

2.1.1. Preliminares.

En esta sección describimos brevemente las características más importantes de la teoría de cuerdas, haciendo énfasis en las acciones de supergravedad de ellas derivada (el sector bosónico) y sus respectivas ecuaciones de movimiento, así como el contenido de campos presente. Para mayores referencias ver, por ejemplo, [12, 13, 14].

La teoría de cuerdas surge al generalizar el estudio de partículas puntuales al de objetos extendidos unidimensionales o cuerdas. Veamos la acción de una partícula en un espacio D -dimensional

$$S_p = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\eta^{-1} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX_\mu}{d\tau} - \eta m^2 \right), \quad (2.1)$$

donde $\mu = 1, \dots, D-1$, $\gamma_{\tau\tau}(\tau)$ es la métrica en la línea de mundo y $\eta = \sqrt{-\gamma_{\tau\tau}(\tau)}$; esta acción determina la longitud de la línea de mundo de la partícula. Podemos generalizar este concepto y definir el “área” de la hoja de mundo de una cuerda que se mueve en el mismo espacio

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde el campo $X^\mu(\tau, \sigma)$ encaja la hoja de mundo barrida por la cuerda, parametrizada por (τ, σ) al espacio tiempo. γ^{ab} es la métrica inducida sobre la hoja de mundo, y α' es un parámetro con dimensiones de longitud al cuadrado denominado pendiente de Regge que proporciona la tensión de la cuerda a través de $T = (2\pi\alpha')^{-1}$.

Los límites de integración dependen de si se consideran cuerdas abiertas o cerradas. De esta acción podemos determinar las ecuaciones de movimiento:

$$(-\gamma)^{1/2} \nabla^2 X^\mu = 0. \quad (2.3)$$

No es difícil ver que las ecuaciones de movimiento escritas en (2.3) se satisfacen si imponemos condiciones de Neumann o Dirichlet para cuerdas abiertas y condiciones periódicas para cuerdas cerradas. También se observa que para el tensor de energía-momento T^{ab} , determinado al variar la acción con respecto de la métrica, se obtiene $T^{ab} = 0$.

La solución a las ecuaciones de movimiento dadas en (2.3) obtiene la forma simple (descomposición en modos)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i(2\alpha')^{1/2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (2.4)$$

para las cuerdas abiertas y similarmente para cuerdas cerradas¹. En esta expresión x^μ, p^μ son la posición y el momento del centro de masa de la cuerda, respectivamente.

¹De hecho, la descomposición es exactamente la misma, solo que se descompone en dos modos: uno izquierdo y otro derecho para traslaciones izquierdas y derechas sobre la cuerda.

La importancia de escribir la solución en modos de Fourier se debe a que de esta expresión se puede pasar directamente a la cuantización de la teoría, identificando a las α^μ como los operadores de creación y/o destrucción. De particular importancia es notar que al realizar el proceso de cuantización que para evitar una anomalía (conforme en este caso) es requisito que la dimensión del espacio-tiempo sea $D = 26$. Escribimos explícitamente las relaciones de conmutación para estos operadores en cuerdas cerradas

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \\ [x^\mu, p^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}, \\ [\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde los $\alpha_\mu, \tilde{\alpha}_\nu$ representan las oscilaciones a la derecha e izquierda, respectivamente.

Como es costumbre podemos obtener los estados de la teoría al actuar los operadores de creación sobre el estado de vacío $|0\rangle$. Sin embargo, el estado base para la cuerda abierta $|0, p\rangle$ es un estado con masa $M^2 = -1$ denominado taquión. La existencia de este estado en la teoría nos dice que algo anda mal y que, al menos, estamos utilizando un vacío inestable. Como veremos, la introducción de supersimetría en el modelo de la cuerda permite eliminar este estado del espectro.

La manera más directa de generalizar la acción de cuerda bosónica (2.1) es el agregar grados de libertad internos libres propagándose en la cuerda. Si se introduce un campo fermiónico $\psi(\tau, \sigma)$ libre (el “supercompañero” del campo X), resulta que una elección que lleva a una teoría interesante es el de un D-tuplete de fermiones de Majorana que transforman bajo el grupo de Lorentz $SO(D-1, 1)$. Esto nos conduce a la acción supersimétrica de la cuerda

$$S_{susy} = \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \left\{ \frac{1}{\alpha'} \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \partial_\alpha \sigma^\alpha \psi_\mu \right\}, \quad (2.6)$$

donde de nuevo las condiciones de frontera dependen del tipo de cuerda estudiada.

De aquí podemos determinar de nuevo las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera correspondientes, tal como en el caso puramente bosónico. No es difícil convencerse que el sector bosónico queda casi inalterado; ahora sucede algo extra debido al contenido fermiónico: en este caso existen dos posibilidades de condiciones de frontera para los fermiones. Básicamente para la cuerda cerrada podemos imponer que en los “extremos” de la cuerda los fermiones cumplan condiciones periódicas o antiperiódicas. La

primera condición se denomina de Ramond (R) y la segunda de Neveu-Schwartz (NS).

También los fermiones tienen una descomposición en modos, solo que esta depende del sector donde vivan los mismos; de allí que podemos denotar los cuatro sectores de acuerdo a su periodicidad: R-R, NS-NS, R-NS, NS-R. De nuevo, al realizar la cuantización del sistema y evitar anomalías resulta que la dimensión del espacio-tiempo donde la supercuerda es consistente es $D = 10$.

Finalmente, para asegurar supersimetría en el espacio tiempo (recordar que no basta con que existan fermiones) los estados obtenidos en el espectro son proyectados en estados con un número fermiónico par, para las teorías de cuerdas cerradas. A esto se le denomina la proyección Gliozzi-Scherk-Olive o “GSO”. Una consecuencia inmediata de esta proyección es que el primer estado presente en la teoría para la cuerda bosónica denominado el taquión (como describimos arriba) es proyectado fuera de la teoría supersimétrica, haciéndola estable.

2.1.2. Supergravedad, agujeros negros y entropía.

Ahora estudiamos agujeros negros en teoría de cuerdas cuyo límite de bajas energías son las distintas teorías de supergravedad. Además, resulta que si estos son supersimétricos se puede realizar un conteo de microestados a partir de ciertos objetos que los constituyen denominados D-branas², como veremos más adelante. Un análisis más detallado y extenso referente a esta sección se puede encontrar en [15].

¿Por qué estudiar agujeros negros en teoría de cuerdas o en supergravedad? Como mencionamos en la introducción, esta es hasta el momento el mejor candidato de unificación de todas las fuerzas existentes en la naturaleza, que incluye particularmente una propuesta de gravedad cuántica.

El punto específico que nos interesa aquí es el de dar una interpretación microscópica a la entropía de agujeros negros, determinada en la expresión de Bekenstein-Hawking $S = A/4$, donde A es el área del horizonte de eventos del agujero negro. Debido a que esta fórmula fué obtenida a partir de un análisis semiclásico, ya que se determina estudiando un sistema con campos cuánticos en un fondo gravitacional clásico, entonces una teoría de gravedad cuántica debería dar una explicación microscópica de la misma.

²En teoría de cuerdas existen objetos extendidos de distintas dimensiones. Para objetos de dimensión mayor que dos (los anteriores son partículas, cuerdas y membranas) los denominamos p -branas, donde p es la dimensión espacial de la misma.

Hemos visto en la sección (2.1.1) que existen dos tipos de proyecciones bajo GSO en la teoría, y hablando de cuerdas cerradas tenemos dos opciones para cada sector de cuerdas moviéndose a la derecha y a la izquierda. Si escogemos la misma proyección para ambos lados obtenemos la teoría IIB, y si tomamos proyecciones opuestas obtenemos la IIA.

El contenido de campos bosónico comprende dos sectores, el R-R y el NS-NS. Para el NS-NS en ambas teorías tenemos el mismo contenido (sector no masivo)

$$\phi, \quad G_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

que corresponden al dilatón, gravitón y tensor antisimétrico. De parte del sector R-R tenemos n -formas de rango par para el caso IIB e impar para el caso IIA. Además se tiene el sector fermiónico que son los compañeros supersimétricos de los bosones descritos arriba.

Como es común en estas teorías, siempre es posible truncar consistentemente el contenido de campos al sector no masivo tomando el límite de bajas energías $\alpha' \rightarrow 0$. Con este procedimiento obtenemos una teoría efectiva denominada de “supergravedad”³. Como nos interesa estudiar el sector gravitacional nos enfocamos en el sector bosónico y la revisión constará de agujeros negros en las tipo IIA y IIB (ver apéndice).

La idea básica para estudiar la entropía de agujeros negros a partir de D-branas es la siguiente:

1. Primero se reducen dimensionalmente soluciones de p -branas en supergravedad que corresponden a ciertos agujeros negros (esto automáticamente permite encajar estos agujeros negros en supergravedad 10 u 11 dimensional). Con esto se obtienen generalmente soluciones BPS que corresponden a agujeros negros extremales, y por medio de un procedimiento análogo se obtienen soluciones no BPS⁴ (no extremales).
2. Posteriormente se utiliza la descripción microscópica de estas p -branas en términos de D-branas.
3. Se realiza el conteo de degeneración de microestados y es posible calcular la entropía de forma estadística; con este procedimiento se han podido estudiar agujeros negros extremales y cercanamente extremales, siendo el caso arbitrariamente extremal aún no plenamente controlado.

³Se puede verificar en cada caso que el límite de bajas energías o teoría efectiva de las teorías de cuerdas corresponde justamente a las teorías de supergravedad como la IIA o IIB.

⁴Soluciones que saturan el límite Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield.

p -branas negras y D -branas.

Las p -branas son los “primos” en dimensiones mayores del agujero negro de Reissner-Nordström. Tales branas son soluciones supersimétricas (o parcialmente supersimétricas) de las ecuaciones de movimiento que se obtienen en supergravedad, que como ya hemos visto son el límite de bajas energías de teoría de cuerdas.

Las acciones de supergravedad en el sector NS-NS para las IIA y IIB coinciden, a saber

$$S_{NS-NS} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} e^{-2\phi} \left(R + 4[\nabla\phi]^2 - \frac{1}{12}H^2 \right), \quad (2.8)$$

donde $H = dB$. El valor de expectación del dilatón define la constante de acoplamiento de la cuerda $g_s = e^{\langle\phi\rangle}$.

Notar que esta acción no tiene la forma usual de Einstein-Hilbert multi-dimensional debido a la presencia del factor $e^{-2\phi}$; sin embargo, esto se puede arreglar pasando al “marco de Einstein”, redefiniendo la métrica

$$G_{MN} \rightarrow e^{-4\phi/(D-2)} G_{MN}.$$

Además de la acción para el sector NS-NS descrita arriba tenemos la parte correspondiente al sector R-R, cuya forma genérica es

$$S \simeq \int F \wedge {}^*F, \quad (2.9)$$

donde $F = dA$ son las intensidades de los campos de norma asociados y *F es el Hodge-dual de F . También existen términos de Chern-Simons, que para nuestro estudio no son relevantes ya que no consideramos cargas topológicas.

De estas expresiones para los campos R-R es posible distinguir una peculiaridad: al igual que en electrodinámica, una 1-forma (potencial de Maxwell) se acopla a una 0-brana (partícula puntual), es directo inferir que estas p -formas se acoplarán a $(p-1)$ -branas, genéricamente denominadas p -branas, que actúan como las fuentes de las cargas asociadas a los campos R-R. Estas cargas se determinan con la ley de Gauss en la forma usual; para una p -brana

$$Q \simeq \int_{D-p-2} {}^*F_{p+2}.$$

Por lo tanto, existen las NS-NS p -branas: la 1-brana eléctricas acopladas al campo $B_{\mu\nu}$ (cuerda fundamental) y también su dual magnética acoplada

al dual *B (la 5-brana), además las cargadas bajo los distintos campos R-R. Veamos un ejemplo sencillo de cómo se implementa esto.

Consideremos una p -brana que es un plano localizado en $x^i = 0, i = p + 1, \dots, 9$, y consideremos las dimensiones transversales a la brana en coordenadas esféricas $(r, \phi^1, \dots, \phi^{9-p-1})$. Las ecuaciones de Maxwell generalizadas son

$$\Delta^\perp A_{01\dots p}(r) \simeq \delta(r), \quad (2.10)$$

donde $\Delta^\perp$ es el laplaciano en coordenadas transversales. Sabemos por adelantado la dimensión y la forma de las soluciones para estas p -branas y podemos sugerir la forma de la métrica y de los campos de norma. Genéricamente escribimos

$$ds^2 = H_p^{-1/2}(x_i) \left(-dt^2 + \sum_{m=1}^p dy_m^2 \right) + H_p^{1/2}(x_i) \left(\sum_{i=1}^{D-p-1} dx_i^2 \right), \quad (2.11)$$

donde las coordenadas y_m son las coordenadas sobre la brana y las x_i son las coordenadas del espacio transversal. La función H es una función armónica en el espacio transversal, $\nabla_\perp^2 H(x_i) = 0$. El dilatón y los campos de norma son

$$e^{-2\phi} = H_p^{(p-3)/2}, \quad A_{01\dots p} = 1 - H_p^{-1}. \quad (2.12)$$

Es posible ver que estas branas saturan un límite de extremalidad⁵ como al agujero negro de Reissner-Nordström extremo, y son parcialmente supersimétricas, o estados BPS, hecho que resulta trascendente para su identificación con las branas de Dirichlet.

Ahora, en [16] se determinó que los constituyentes microscópicos de estas p -branas cargadas bajo los campos de R-R son justamente las denominadas branas de Dirichlet o D-branas.

Consideremos la teoría de cuerdas abiertas en (2.1, 2.6) y las ecuaciones de movimiento derivadas de (2.3). Además de estas ecuaciones necesitamos considerar condiciones de frontera, que pueden ser de Neumann $\partial_\sigma X^\mu|_{\partial\Sigma} = 0$ o condiciones de Dirichlet $\partial_0 X^\mu|_{\partial\Sigma} = 0$ que corresponde a extremos fijos. Bajo estas últimas condiciones las cuerdas están restringidas a terminar en un hiperplano determinado por las coordenadas en las que imponemos condiciones de Dirichlet: esta es la llamada D -brana.

Si imponemos condiciones de Neumann en el tiempo y p dimensiones espaciales y condiciones de Dirichlet en las demás coordenadas esto nos

⁵En unidades adecuadas, la extremalidad es $M = Q$.

describe una p -brana de Dirichlet o $D - p$ -brana. Los estados en esta teoría son los relacionados a las condiciones de Neumann (campo de norma p -dimensional) y a las de Dirichlet ($9-p-1$ escalares ϕ^m); estos últimos describen geoméricamente las oscilaciones transversales de la brana.

Si ahora consideramos N branas paralelas entonces tenemos más grados de libertad ya que ahora una cuerda puede terminar en cualquiera de estas branas. Cada brana porta una teoría de norma $U(1)$, pero al estar muy juntas se obtiene una teoría más general $U(N)$ que describe una teoría de norma sobre las N branas $U(N)$. Esta teoría se obtiene del espectro perturbativo en la teoría de cuerdas. Veamos cuál es la relación de estas D -branas con las p -branas con carga R-R.

Las cargas eléctrica Q_p y magnética $Q_{\tilde{p}}$ de las p -branas (2.11) cumplen una relación de cuantización de Dirac $Q_p Q_{\tilde{p}} \simeq n$, $n \in \mathbb{Z}$. Como el espectro de estas cargas es discreto se introduce unidades de carga fundamentales c_p :

$$Q_p = \hat{Q}_p c_p, \quad \hat{Q}_p \in \mathbb{Z}. \quad (2.13)$$

Las cargas R-R y las NS-NS están relacionadas a través de dualidades, de tal forma que las unidades de carga son fijas y dadas

$$c_p = g_S (\alpha')^{(7-p)/2} \frac{(2\pi)^{6-p}}{\omega_{6-p}}, \quad (2.14)$$

donde ω_v es el volumen de la esfera v -dimensional. El acoplamiento de A_{p+1} y la p -brana está dado por la carga $\tilde{Q}_p$, que a su vez son múltiplos enteros del acoplamiento fundamental μ_{Dp}

$$\mu_{Dp} = (2\pi)^{-p} (\alpha')^{-(1+p)/2}. \quad (2.15)$$

Su relación con la tensión de la brana es $T_p = \tilde{Q}_p g_S^{-1}$. Es importante notar que los acoplamientos de cuerda abierta y cerrada están relacionados por unitariedad

$$g_S = \text{const} \cdot g_O^2. \quad (2.16)$$

Entonces se interpreta a las p -branas con carga R-R como solitones de un sector de cuerdas abiertas de la teoría tipo II. Una forma natural de introducir cuerdas abiertas en esta teoría es el emplear D -branas: las $D - p$ -branas y las p -branas con carga R-R describen los mismos estados BPS.

Para comprobar esta idea se compara la fuerza ejercida entre un par de p -branas R-R y un par de $D - p$ -branas. Para estas últimas se considera en teoría de cuerdas perturbativa un diagrama de anillo con condiciones de Dirichlet en ambas fronteras (figura 2.1.2).

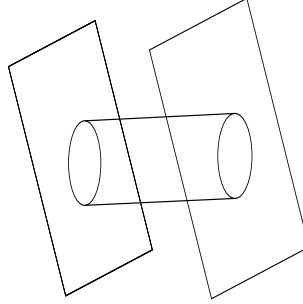


Figura 2.1: Diagrama de anillo para calcular la fuerza de repulsión entre dos Dp -branas.

La contribución del sector R-R da un potencial generalizado de Coulomb

$$V_{R-R}(r) = \frac{Q_{Dp}^2}{r^{7-p}}, \quad (2.17)$$

donde la carga Q_{Dp} de una D -brana es

$$Q_{Dp} = g_S(\alpha')^{(7-p)/2} \frac{(2\pi)^{6-p}}{\omega_{6-p}} = c_p. \quad (2.18)$$

Resulta entonces que una Dp -brana tiene precisamente una unidad de carga R-R. Esto nos muestra que una p -brana con carga Q_p está formada de $\hat{Q}_p$ Dp -branas. Mayor comprobación de este comportamiento se realiza al estudiar sistemas de p y p' branas, $p \neq p'$. De esta forma obtenemos una descripción perturbativa en teoría de cuerdas de solitones en supergravedad, las p -branas con carga R-R.

Como mencionamos anteriormente, con esta identificación de los componentes microscópicos de las p -branas, ahora procedemos a construir agujeros negros reduciendo dimensionalmente estas soluciones y después realizamos el conteo de microestados a partir de las D -branas correspondientes. No pretendemos ser exhaustivos y solo nos limitaremos al caso más simple: la construcción de un agujero negro extremal 5-dimensional⁶ análogo al de Reissner-Nordström obtenido en [17] (el caso cercanamente extremal se discutirá en el capítulo 4).

⁶Es posible ver que la extremalidad de un agujero negro o p -membrana negra es consecuencia de que sea parcialmente supersimétrico, o BPS.

Entropía macroscópica del agujero negro de Tangherlini en 5 dimensiones.

La forma de obtener la configuración que corresponda a este agujero negro es el superponer un sistema formado por D1 y D5 branas, con momento unidireccional sobre la D1-brana (izquierdo por ejemplo); esto en el esquema de supergravedad corresponde a superponer una onda gravitacional plana⁷, compactificadas en un 5-toro T^5 , como se muestra esquemáticamente en la figura 2.1.2. Es necesario que el momento sea en una sola dirección para que la solución sea parcialmente supersimétrica o BPS, como veremos más adelante.

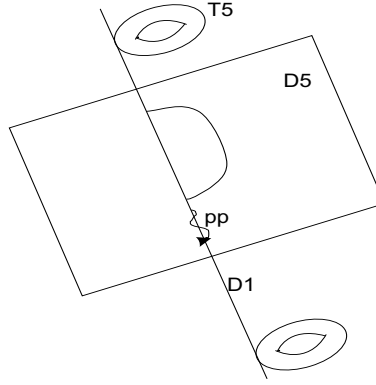


Figura 2.2: Configuración de D-branas que forman el agujero negro en 5 dimensiones. En cada punto transversal hay un 5-toro T^5 .

Escribimos la métrica del sistema D1-D5 con momento izquierdo sobre la D1-brana

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & (H_1 H_5)^{1/2} (dx_1^2 + \dots + dx_4^2) + \left(\frac{H_1}{H_5} \right)^{1/2} (dy_1^2 + \dots + dy_4^2) \\
 & + (H_1 H_5)^{-1/2} \left(-dt^2 + dy_5^2 + [H_p - 1] [dt - dy_5]^2 \right), \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

que una vez reducidos dimensionalmente en T^5 queda

$$ds^2 = - (H_1 H_5 H_p)^{2/3} dt^2 + (H_1 H_5 H_p)^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_3). \quad (2.20)$$

⁷Para ser más específicos se consideran ondas planas con rayos paralelos, o “pp waves”. Estas son soluciones gravitacionales de las ecuaciones de movimiento que no tienen cargas de los campos tensoriales. Portan momento derecho o izquierdo.

Las funciones armónicas son

$$H_i = 1 + \frac{Q_i}{r^2}, \quad i = 1, 5, p, \quad (2.21)$$

donde las Q_i son las cargas asociadas a los campos de R-R correspondientes, reducidos dimensionalmente.

Como podríamos esperar, es necesario ver qué le pasa al grado de supersimetría del sistema cuando se le agrega momento izquierdo a las D1-branas. De las ecuaciones de supersimetría (se pueden ver en el apéndice) quedan

$$\begin{aligned} \epsilon_R &= \Gamma^0 \Gamma^9 \epsilon_R, \\ \epsilon_L &= \Gamma^0 \Gamma^9 \epsilon_L. \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $\epsilon_{I,R}$ son parámetros espinoriales que determinan la supersimetría y las Γ son las matrices gama en 10 dimensiones. Las coordenadas sobre la D1-brana son las (0,9).

Como se puede ver de esta expresión, no todas las componentes de los espinores se trivializan, por lo que se preserva solo una parte de la supersimetría.

Finalmente, de (2.20) podemos calcular el área del horizonte y su entropía de Bekenstein-Hawking asociada

$$A = 8\pi \sqrt{Q_1 Q_5 Q_p} \Rightarrow S_{BH} = \frac{A}{4G_N^{(5)}} = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 Q_p} \quad (2.23)$$

Este es el resultado al que le queremos dar una interpretación mecánico-estadística por conteo de microestados. Esto se consigue en el siguiente apartado.

Entropía por conteo de microestados.

El conteo de la degeneración de estados en cuerdas es como sigue. El sistema de agujero negro se construyó a partir de una configuración de Q_5 D5-branas, Q_1 D1-branas y Q_{og} unidades de momento en forma de ondas gravitacionales sobre la D1-brana. Recordando que las branas están enrolladas en un 5 toro entonces la D1-brana se enrolla en un 1-toro (S^1) de radio, digamos, R . Entonces el momento sobre la D1-brana es momento de enrollamiento, cuyo valor es $P = 1/R$.

Este momento se distribuye entre las cuerdas abiertas que viven en el sistema. Dado que las cuerdas pueden empezar y terminar en cualquiera de

las branas, etiquetamos los extremos de las mismas con dos índices⁸: (i, f) que denotan en que membrana particular viven. Los estados que se generan (bosones y fermiones, ver el capítulo 1) son los modos no masivos de las cuerdas etiquetadas de esta forma. El conteo utiliza la siguiente simplificación

- La contribución mayor a la entropía del sistema está dada por las cuerdas que terminan en branas de distinto tipo, por ejemplo (1,5) o (5,1) (referir a fig 2.1.2).
- De los estados generados los que contribuyen más a la entropía son los que tienen enrollamientos que tienen una longitud efectiva dada por $R_{ef} = Q_1 Q_5 R$.

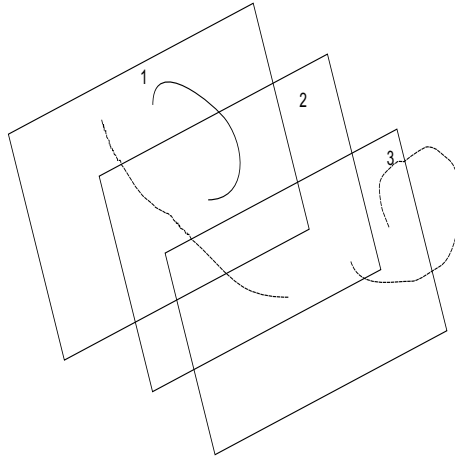


Figura 2.3: Cuerdas abiertas que terminan en distintas branas y se enrollan en ellas. Para el conteo de entropía las que terminan en branas de distintas dimensiones contribuyen de forma dominante.

Las cuerdas abiertas están ancladas en las branas con $1/R_{ef}$ unidades de momento. Todas estas simplificaciones son posibles si las cargas Q_i son grandes. Ahora se realiza la cuenta de los estados posibles para los tipos (i, j) .

Como las cuerdas son orientadas, el total de posibilidades es $(4Q_1 Q_5)$ para bosones y $(4Q_1 Q_5)$ para fermiones⁹. Con este conteo ahora tratamos el

⁸Índices de Chan-Paton.

⁹Para una determinación precisa de este número ver por ejemplo [17]

sistema de cuerdas como un gas ideal (sin interacciones), lo que nos permite utilizar la teoría cinética de los gases.

El gas tiene $(4Q_1Q_5)$ tipos de bosones y $(2 \times 4Q_1Q_5)$ de supercompañeros fermiones, donde el factor de 2 viene por los dos posibles valores del espín $(\pm 1/2)$. La energía total es Q_{og}/R y la “caja” en que vive el gas tiene un volumen $2\pi R$. Por lo tanto la entropía es

$$S = \sqrt{\frac{\pi}{6}(1+2)(4Q_1Q_5) \frac{Q_{og}}{R} (2\pi R)} = 2\pi \sqrt{Q_1Q_5Q_{og}}, \quad (2.24)$$

que no es otra cosa que la entropía de Bekenstein-Hawking calculada anteriormente.

El resultado final se condensa en

$$S_{\text{micro}} = S_{BH} \quad (2.25)$$

que nos dice que ¡la entropía en ambos esquemas coincide!

2.1.3. Modelos cosmológicos

Veamos brevemente algunos aspectos referentes a la cosmología en teoría de cuerdas.

Como hemos visto, la teoría de cuerdas tiene como límite de bajas energías a distintas supergravidades. También es posible a partir de las acciones de supergravedad obtener ecuaciones de movimiento para los distintos campos y en particular para la métrica las ecuaciones análogas de Einstein en dimensiones superiores.

La cosmología estudia la evolución del Universo desde su posible inicio hasta su forma presente. El objetivo de la cosmología de cuerdas es estudiar la dinámica del Universo através de las ecuaciones de movimiento de la teoría descritas antes y examinar cuestiones como posibles escenarios de evolución, si incluyen una gran explosión singular, si presentan un período inflacionario o cómo se formó la estructura conocida.

La aproximación estándar en cosmología de cuerdas es analizar soluciones dependientes del tiempo a las ecuaciones de supergravedad. Dada la escala de energías característica de la teoría de cuerdas las soluciones se obtienen a niveles energéticos por abajo de la escala de Planck pero suficientemente alta para que no haya rompimiento de simetrías, lo cual es válido si los campos evolucionan suficientemente lento como para ignorar los términos de derivadas de orden superior y, como es de esperarse, las soluciones que se puedan obtener en este contexto se consideran aproximaciones a las exactas pero que aún así exhiben características importantes.

Uno de los problemas fundamentales en la cosmología es el de la *inflación*, donde el universo tuvo una época de expansión acelerada. La concepción de la inflación ayuda a explicar ciertos aspectos del modelo del Big-Bang y también genera un espectro primordial de inhomogeneidades que es esencial para explicar la estructura del Universo a gran escala y las anisotropías de temperatura de la radiación de fondo de microondas. El mencionar el problema de la inflación estriba en que todo modelo realista del universo debe contener soluciones inflacionarias. Particularmente, a la luz de cosmología en teoría de cuerdas, se ha desarrollado hace algunos años un modelo inflacionario denominado de pre Big-Bang en donde la aceleración de la expansión está determinada por la energía cinética del dilatón que mencionamos anteriormente; y aunque este modelo tiene algunos problemas resulta ser una buena aproximación al estudio de la inflación en cosmología porque si bien no resuelve todas las interrogantes estructurales provee información que en principio se puede contrastar con evidencia observacional o resultados obtenidos en otras teorías.

Para dar una idea del análisis cosmológico en teoría de cuerdas esta sección la dedicaremos a expresar cómo se obtienen soluciones cosmológicas en teoría de cuerdas efectiva, o bien, en teoría M. Para ejemplificar la utilidad mencionaremos el modelo de pre Big-Bang y sus implicaciones. La literatura al respecto es extensa y crece día a día [18].

Soluciones cosmológicas y pre Big-Bang.

Como mencionamos previamente, en principio es posible obtener soluciones con dependencia temporal a las ecuaciones de movimiento de supergravedad en 10 u 11 dimensiones, e imponiendo ciertas restricciones, estas pueden considerarse como soluciones cosmológicas. Estas soluciones se pueden obtener en distintas dimensiones dependiendo de la compactificación impuesta y comprenden sectores homogéneos, isotrópicos, planos, inhomogéneos y anisotrópicos.

Particularmente discutiremos soluciones a cosmología 4 dimensional en el sector NS-NS y para cosmologías 4 dimensionales homogéneas podemos considerar la teoría $(4+d)$ dimensional compactificada en un d -toro isotrópico. Entonces, el espacio interno estará parametrizado por el parámetro β que no es otra cosa que su volumen, y desde el punto de vista de $(d+4)$ dimensiones es un campo módulo o “modo de respiración”¹⁰.

¹⁰‘Breathing mode’.

La forma de la métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j + e^{\sqrt{\frac{2}{d}}\beta} \delta_{ab} dX^a dX^b, \quad (2.26)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ representan las dimensiones internas y $a, b = 4, \dots, 9$ las transversales en el toro. Escribimos la acción de NS-NS

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} e^{-\phi} \left[R + (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\beta)^2 - \frac{1}{2}e^{2\phi}(\nabla\sigma)^2 \right], \quad (2.27)$$

donde ϕ es el dilatón y σ es el axión.

Hablando de cosmologías homogéneas e isotrópicas estas tienen la forma de FLRW

$$ds_4^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + d\Omega_\kappa^2), \quad (2.28)$$

donde a es el factor de escala del universo, η es el tiempo conforme y $d\Omega_\kappa^2$ es el elemento de línea del espacio 3-dimensional con curvatura constante $\kappa = 0, \pm 1$

$$d\Omega_\kappa^2 = d\psi^2 + \left(\frac{\sin \sqrt{\kappa}\psi}{\sqrt{\kappa}} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.29)$$

Para ser compatible con la homogeneidad e isotropía de la métrica todos los campos deben ser espacialmente homogéneos. En el marco de Einstein las soluciones con estas características se pueden interpretar como cosmologías FLRW para un fluido perfecto, donde la velocidad del sonido es igual a la de la luz. El factor de escala está dado por

$$\tilde{a} = \tilde{a}_* \sqrt{\frac{\tau}{1 + \kappa\tau^2}}, \quad \tilde{a} \equiv e^{-\varphi/2} a. \quad (2.30)$$

a_* es una constante y

$$\tau = \begin{cases} |\kappa|^{-1/2} |\tan |\kappa|^{1/2} \eta| & \kappa > 0, \\ |\eta| & \kappa = 0, \\ |\kappa|^{-1/2} |\tanh |\kappa|^{1/2} \eta| & \kappa < 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

En el marco de la cuerda tenemos la solución de radios rodantes o “rolling radii”

$$\begin{aligned} a &= a_* \sqrt{\frac{\tau^{1+\sqrt{3}\cos\xi_*}}{1 + \kappa\tau^2}}, \\ e^\varphi &= e^{\varphi_*} \tau^{\sqrt{3}\cos\xi_*}, \\ e^\beta &= e^{\beta_*} \tau^{\sqrt{3}\sin\xi_*}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde ξ_* es una constante de integración que determina el cambio del dilatón con respecto de β .

Estas soluciones presentan una dualidad del factor de escala que, cuando se implementa junto con inversión temporal, implica que el parámetro de expansión de Hubble $H = d(\ln a)/dt$ permanece invariante $H(-t) \rightarrow H(t)$ mientras que $\dot{H}(-t) \rightarrow -\dot{H}(t)$.

Una solución caracterizada por¹¹ $\dot{a} > 0$, $\ddot{a} < 0$, $\dot{H} < 0$ es asociada con una fase de expansión inflacionaria en el pre Big-Bang, ya que esto nos lleva a $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2 > 0$.

El radio de Hubble, H^{-1} , decrece conforme $t \rightarrow \infty$ y la expansión se llama super-inflacionaria. Así que la cosmología del pre Big-Bang es tal que tiene un período de super-inflación, determinado solo por la energía cinética del dilatón y de los campos escalares. Esta etapa está relacionada con la del post Big-Bang FLRW a través de dualidades. Estas dos fases están separadas por una singularidad original y, aunque no es claro cómo “saltarla”, existen algunas propuestas para entender este comportamiento (ver [18]).

A través de las soluciones (2.30,2.32) es posible determinar el comportamiento de la solución y comprobar que preserva características tipo FLRW: esto es precisamente lo que queríamos obtener en el modelo. Aspectos distintos de las soluciones que se pueden determinar como inhomogeneidades y anisotropías son posibles al utilizar dualidades de los campos, permitir un axión dependiente del tiempo, etc.

El análisis presentado en estas dos secciones evidencia que al menos dos aspectos gravitacionales en teoría de cuerdas se han estudiado profundamente: los agujeros negros y modelos cosmológicos. Aunque hay todavía mucho que decir y hacer para poder argumentar que se cuenta con una teoría de gravedad cuántica completa y consistente, el camino se ha trazado y los bosquejos de construcción y dominio se han empezado a dilucidar.

Ahora procedemos a realizar un breve recuento de estos dos mismos problemas en el otro esquema de gravedad cuántica: gravedad canónica en lazos. Posteriormente compararemos los esquemas.

2.2. Gravedad canónica en lazos.

2.2.1. Introducción.

Discutiremos brevemente las características más sobresalientes de la otra propuesta principal para ser una teoría de gravedad cuántica: la gravedad

¹¹Esto corresponde a una solución post Big-Bang.

canónica en lazos [19].

La idea fundamental de la gravedad cuántica canónica es cuantizar la relatividad general partiendo de la identificación de variables canónicas gravitacionales, de la cual la formulación de lazos es un caso particular.

Consideremos la acción de Einstein-Hilbert en 4 dimensiones

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4 x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^3 x \sqrt{q} K + S_{mat}, \quad (2.33)$$

donde M es la variedad del espacio-tiempo donde se define la teoría, q_{ij} es la métrica inducida en la frontera de M y K es la curvatura extrínseca en ∂M . Como ya sabemos, esta acción es invariante ante difeomorfismos.

Como variante a la acción escrita en términos de la métrica podemos describirla en función de una base ortonormal (o de tétradas) y de conexión de espín como variables independientes, a saber, $g^{\mu\nu} e_\mu^I e_\nu^J = \eta^{IJ}$ y conexión ω_μ^{IJ} con curvatura $R_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^{IJ} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{IJ}$. De esta forma la acción queda

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x |\det e| (e^{\mu I} e^{\nu J} R_{\mu\nu IJ} - 2\Lambda) + S_{mat}. \quad (2.34)$$

Además de invariancia ante difeomorfismos esta acción es invariante de Lorentz en el espacio tangente definido por la tétrada. Es directo determinar que, al extremizar esta acción, se obtienen las mismas ecuaciones de Einstein obtenidas de (2.33), siempre que no haya torsión.

Ahora, es posible introducir una formulación tipo ADM: se puede fijar la triada de tal forma que $e_I^0 = 0$, $I = 1, 2, 3$, y se define una “triada densitizada” y una conexión $SO(3)$ local

$$E_j^i = \sqrt{q} e_j^i, \quad A_i^I = \epsilon^{0IJK} A_{iJK}, \quad (2.35)$$

en una rebanada temporal Σ y la correspondiente curvatura F_{ij}^K asociada a A_i^K . En esta definición se tiene que

$$A_\mu^{IJ} = \frac{1}{2} \left(\omega_\mu^{IJ} - \frac{i}{2} \epsilon_{KL}^{IJ} \omega_\mu^{KL} \right) \quad (2.36)$$

es la conexión auto-dual definida por la conexión de espín.

Podemos escribir la acción (2.33) en términos de estas nuevas variables A_μ^I (con esto exhibimos las características de variables ADM)

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int dt \int_\Sigma d^3 x \left[i A_i^I \partial_t E_I^i - i A_{0I} G^I + i N^i \mathcal{V}_i - \frac{1}{2} \left(\frac{N}{\sqrt{q}} \right) \mathcal{S} \right] \quad (2.37)$$

donde las constricciones se leen

$$\begin{aligned} G^I &= D_j E^{jI}, \\ \mathcal{V}_i &= E^j_I F_{ij}^I, \\ \mathcal{S} &= \epsilon^{IJK} E_I^i E_J^j F_{ijK} - \frac{\Lambda}{6} \eta_{ijk} \epsilon^{IJK} E_i^I E_j^J E_k^K. \end{aligned} \quad (2.38)$$

D_i es la derivada covariante con respecto a la conexión A_i^J

De esta forma el espacio fase es el de una teoría de Yang-Mills (las A_i^J son los potenciales de norma y los E_i^J sus campos eléctricos conjugados) compleja con grupo de norma $SL(2, \mathbb{C})$ con constricciones adicionales. Particularmente la primera ecuación en (2.38) es la ley de Gauss.

Ahora, a pesar de que las constricciones son polinomios en “posiciones y momentos”, hemos tenido que complexificar los grados de libertad gravitacionales que en principio tienen que ser reales.

Una posibilidad de recuperar la teoría original real es implementar condiciones de realidad [20]. Alternativamente podemos mantener el uso de variables reales como sigue. La conexión (2.35, 2.36) puede escribirse alternativamente como

$$\omega_i^{0I} = e^{jI} K_{ij} = K_i^I, \quad \Gamma_i^I = \frac{1}{2} \epsilon^{0IJK} \omega_{iJK}. \quad (2.39)$$

donde K_{ij} es la curvatura extrínseca de Σ . De esta forma la conexión queda como $A_i^I = \Gamma_i^I + iK_i^I$.

Es posible usar una combinación lineal real¹²

$$A_i^{(\gamma)I} = \Gamma_i^I + \gamma K_i^I, \quad (2.40)$$

con γ un parámetro arbitrario llamado de Immirzi¹³ [22, 23].

La conexión (2.40) y su conjugado (2.35) llevan a la estructura simpléctica

$$\left\{ E_I^i, A_j^{(\gamma)J} \right\} = -8\pi\gamma G \delta_I^J \delta_i^j \delta^3(x - x'). \quad (2.41)$$

¹²Es conocido que la teoría de gravedad en su formulación compleja (como las variables de Ashtekar) es invariante bajo CP. Esto puede ser visto al escribir la acción que reproduce la relatividad general más términos de frontera con factores imaginarios ([21]). Sin embargo, el agregar estos mismos términos con parámetros reales (que correspondería al parámetro de Immirzi descrito aquí) rompe tal simetría. Sería interesante estudiar las implicaciones que este hecho acarrea.

¹³La gravedad cuántica en lazos se basa en la cuantización a la Dirac de las constricciones (2.38), que se simplifica si se usa una formulación real como se describió en el párrafo anterior.

Con estas expresiones clásicas se puede atacar el problema de la cuantización, empezando por ejemplo en la representación de conexiones, esto es, con un espacio de funcionales $\Psi[A]$ de la conexión. Tomando en cuenta (2.41) podría considerarse

$$\hat{E}_I^i = -8\pi\gamma G \frac{\delta}{\delta A_i^I}. \quad (2.42)$$

En la sección 2.2.3 describiremos algunos detalles de este análisis en el caso concreto de la cosmología cuántica con lazos.

Ahora, debido a que en la formulación canónica de la relatividad general la dinámica queda codificada en un conjunto de constricciones a nivel cuántico estas se implementan usando el método de Dirac. A saber, $\hat{C}\Psi_{fis} = 0$, donde $\hat{C}$ es una restricción que nos lleva a los estados físicos Ψ .

En general uno de los grandes logros de la gravedad en lazos es el darle sentido a expresiones del tipo (2.42) como operadores bien definidos en un espacio genuino de Hilbert. Esto se ha obtenido en base a las llamadas “redes de espín” que permiten definir funcionales de la conexión invariantes de norma. Además, se ha demostrado cómo definir un producto interno en este espacio y darle la estructura de espacio de Hilbert, cuya base son las redes de espín [24].

De esta forma se han podido definir otros operadores “geométricos” como el de área y volumen $\mathcal{A}, V$, para los cuales el espectro respectivo es discreto y depende del parámetro de Immirzi. Es decir, la geometría del espacio resulta tener carácter discreto.

Enseguida discutimos brevemente la aplicación de la cuantización canónica con lazos al caso de agujeros negros y cosmología cuántica.

2.2.2. Entropía de agujeros negros.

Revisemos ahora lo que se ha estudiado en gravedad cuántica en lazos respecto a la entropía de agujeros negros. Para más detalles ver [25].

Primero supondremos que la entropía del agujero negro está asociada, en el sentido clásico, con el horizonte de eventos del mismo. De esta forma, la filosofía del cálculo de entropía de agujeros negros en gravedad canónica en lazos es identificar los estados cuánticos que describen el horizonte y cuantificar la degeneración de los estados respectivos. Especifiquemos.

Hemos visto que en el espacio fase clásico, la variable de configuración básica es la conexión A_i^a de $SU(2)$, y su momento conjugado E_i^a es la triada densitizada¹⁴. Históricamente el primer paso fue construir variables de lazo

¹⁴El análogo del campo eléctrico en electrodinámica.

$SU(2)$ -invariantes; las variables de configuración son los lazos de Wilson: dado un lazo cerrado β en la variedad tridimensional Σ se define

$$T[\beta] = \frac{1}{2} \text{Tr} \exp \left(G \oint_{\beta} A_a dl^a \right), \quad (2.43)$$

donde G es la constante de Newton.

A pesar de no estar bien definido el concepto de operadores locales (tenemos una teoría invariante ante difeomorfismos), existen operadores no locales bien definidos como el de área de una superficie [26].

Las variables de configuración son una conexión de $SU(2)$, A_a^i en una variedad tridimensional Σ donde i es el índice interno del grupo. Su momento conjugado E_j^b tiene la interpretación geométrica de una triada ortonormal con peso uno, y estos generan la estructura simpléctica (2.41).

Así pues, observables geométricos (funcionales de la métrica tridimensional) pueden ser expresados en términos de E_j^b . Fijemos en la variedad cualquier superficie analítica y finita sin frontera S : su área A_S es una función real bien definida en el espacio fase completo de relatividad general (que depende solo de E_j^b). Se puede comprobar que la relación entre el área y la métrica es

$$A_S = \int_S dx^1 \wedge dx^2 (E_1^3 E^{3i})^{1/2} \quad (2.44)$$

donde por simplicidad se ha supuesto que las coordenadas que parametrizan a S son x^1, x^2 en $x^3 = 0$. La idea general para determinar el espectro del área cuántica es definir el operador correspondiente en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^0$ y determinar sus propiedades. Debido al carácter no local de los operadores que esperaríamos en el lado cuántico (como 2.42) es necesario implementar un esquema de regularización para definir correctamente los mismos.

El análisis se basa en la construcción previa de un espacio de Hilbert de la teoría (las funciones de onda). Como hemos visto, en la formulación de teoría de norma de la relatividad general, se puede considerar el espacio $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ de conexiones de $SU(2)$ módulo transformaciones de norma en una variedad tridimensional espacial Σ como el espacio de configuración clásico. Una extensión de este espacio, $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, es el dominio de las funciones de onda cuánticas. Los ingredientes para construir estos espacios son los siguientes.

Una *arista* es una sub-variedad orientada unidimensional de Σ con dos puntos frontera, denominados *vértices*, que es analítica en todos lados. Un *grafo* en Σ es una colección de aristas tales que la intersección de dos de ellas solo se da en sus vértices. De esta forma se puede construir el espacio de configuración asociado con el grafo γ : se tiene el espacio $\mathcal{A}_\gamma$, donde cada

elemento de este asigna a cada arista de γ un elemento de $SU(2)$ y el espacio $\mathcal{G}_\gamma$ que asigna vértices del grafo con elementos de $SU(2)$; formamos el espacio de configuración $\mathcal{A}_\gamma/\mathcal{G}_\gamma$.

El espacio de configuración cuántico (que es compacto) será una extensión del clásico así formado. Los estados cuánticos se expresan como funciones complejas de cuadrado integrable del espacio cuántico $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Un estado cuántico típico se puede visualizar de la siguiente forma. Fijemos un grafo γ con N aristas y consideremos funciones Ψ_γ de conexiones generalizadas de la forma $\Psi_\gamma(\bar{A}) = \Psi(\bar{A}(e_1), \dots, \bar{A}(e_N))$ para alguna función suave Ψ en $[SU(2)]^N$, donde los e son las aristas del grafo. Las funciones Ψ_γ saben de las conexiones solo a través de las curvas que constituyen las aristas del grafo (estos son los estados cuánticos de la “red” γ). Dado que cada uno de estos estados depende solo de un número finito de variables se denominan “funciones cilíndricas”, denotadas por Cyl.

La construcción del operador de área que corresponde a la superficie (ver [26]) se determina considerando grafos que intersecan la superficie: esto evidentemente queda codificado en el conjunto de aristas y vértices. La expresión es

$$\hat{A}_S \cdot \Psi_\gamma = \frac{\ell_P^2}{2} \sum_\alpha \left[\sum_{I_\alpha, J_\alpha} \kappa(I_\alpha, J_\alpha) X_{I_\alpha}^i X_{J_\alpha}^i \right]^{1/2} \cdot \Psi_\gamma. \quad (2.45)$$

La suma se realiza sobre todos los pares orientados (I, J) , I_α etiqueta las aristas de γ en el vértice v_α , α etiqueta los vértices en los que γ interseca a S . $\kappa(I, J) = \kappa_I \kappa_J$ es cero si cualquiera de las dos aristas e_I, e_J no interseca a S o está contenida completamente en S , vale 1 si se encuentran en el mismo lado de S y -1 si están en lados opuestos. X_I^i es un operador asignado al vértice v y a una arista e_I que interseca a v .

Se observa pues que el área de la superficie S está dada por la intersección del grafo con ella. Podemos identificar los grados de libertad del grafo en el grupo de norma como si llevara “color” en los vértices. Dada una superficie y un grafo, las únicas cantidades invariantes ante difeomorfismos son los vértices de intersección, por ello es que la información se encuentra en los índices de los mismo.

Con estos precedentes veamos un análisis heurístico de la entropía de un agujero negro. Un caso particular de superficie es una esférica, que si se identifica con la superficie del horizonte de eventos de un agujero negro nos provee una degeneración de los estados que la constituyen y permite entonces estimar su entropía. El espectro del operador de área para una

superficie esférica, cuando no hay vértices sobre la superficie es

$$A = \gamma \ell_P^2 \sum_{i=1}^n \sqrt{j_i(j_i + 1)}. \quad (2.46)$$

Cada valor semientero de momento angular (o espín) j_i

$$j_i = 1/2, 1, \dots, \quad (2.47)$$

se le asigna a cada uno de los n vértices que intersecan la superficie. Los valores de los momentos angulares están restringidos por

$$\sum_{i=1}^n j_i = m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.48)$$

A cada valor de espín $\mathbf{j}_i$ se le asocian $(2j_i + 1)$ proyecciones posibles, de $-j_i, \dots, j_i$. Además, de (2.46) se observa que los valores de la entropía, calculada a partir de esto, dependerán del parámetro de Immirzi γ ; de esta forma, al investigar los valores de la entropía del agujero negro, es posible determinar los valores del parámetro.

Se define la entropía de una superficie esférica S como el logaritmo del número de estados de la misma con (n, m) y m_i fijos, donde m_i es el número de aristas con j dada. Debido a la degeneración mencionada en el espín, se tiene

$$\begin{aligned} S &= \ln \left[\prod_j (2j + 1)^{m_j} \frac{m!}{\prod_k m_k!} \right] \\ &= \sum_j m_j \ln (2j + 1) + \ln \left(\sum_j m_j! \right) - \sum_j \ln m_j!, \end{aligned} \quad (2.49)$$

con restricciones

$$\sum_j m_j = m, \quad \sum_j j m_j = n. \quad (2.50)$$

Es razonable pensar que la entropía de un agujero negro en equilibrio es máxima. Con esto en mente se busca la distribución de los j_i en los lados de la gráfica que determine la entropía máxima para un $n = \sum j_i$ fijo.

Si todos los j_i son iguales a $1/2$ entonces $m_j = m \delta_{j,1/2}$, $m = 2n$ y

$$S = (2 \ln 2) n. \quad (2.51)$$

En este caso, para los valores de (j_i, m) dados, el área es

$$A = \gamma \ell_P^2 \sqrt{3} n,$$

y se determina que

$$\gamma = \frac{8 \ln 2}{\sqrt{3}}, \quad (2.52)$$

como se mencionó antes.

Se ha estudiado el caso en que todos los valores para j se permiten, obteniendo

$$S = -2 \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) n, \quad \gamma = 6,678. \quad (2.53)$$

De esta forma se puede estimar la entropía microscópica del agujero negro al realizar el conteo de la degeneración de asignación de espín en la configuración, se verifica la fórmula de Bekenstein-Hawking y al mismo tiempo se determina el valor del parámetro de Immirzi γ .

Sin embargo, bajo este esquema de cálculo podemos preguntarnos: ¿cómo sabemos que la superficie estudiada representa realmente un agujero negro? Es evidente del estudio descrito que nada nos dice cómo identificar el agujero negro aquí: ¡cualquier área tiene entropía!

Por esto, en [27] fue posible identificar los grados de libertad del horizonte del agujero negro y realizar un conteo de degeneración de estados que permite calcular su entropía. El espacio-tiempo clásico correspondiente al agujero negro se muestra en la figura (2.2.2).

Esto corresponde a un agujero negro aislado, sin carga y estático (Schwarzschild). Las condiciones que se imponen en el espacio fase clásico para obtener esta configuración se obtienen al agregar a la acción de Einstein-Hilbert un término de frontera, quedando

$$S = -\frac{i}{8\pi G} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}(\Sigma \wedge F) - \frac{i}{8\pi G} \frac{A_S}{4\pi} \int_{\Delta} \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad (2.54)$$

en las variables antes definidas, donde F es la curvatura de la conexión A . El término de superficie es del tipo Chern-Simons.

Como antes, es posible pasar de estas variables a variables de Ashtekar reales con el parámetro de Immirzi γ , obtener una estructura simpléctica y promover a operadores las variables clásicas que identifican la superficie para obtener la cuantización de la misma. Explícitamente se tiene

$$A_a = \Gamma_a - \gamma K_a \quad (2.55)$$

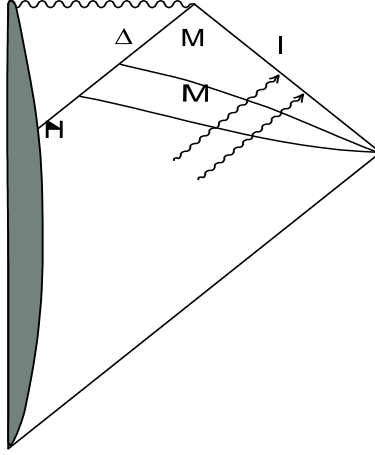


Figura 2.4: Diagrama de Carter-Penrose de un agujero negro aislado que posiblemente emitió radiación en su proceso de formación, [27].

donde Γ es la conexión de espín tridimensional compatible con la triada y K es la curvatura extrínseca en M .

Los estados presentes en el sistema son de dos clases: estados de “bulto” (o de volumen) y estados que identifican la superficie del horizonte (los correspondientes al segundo término del miembro derecho en (2.54)). Son estos últimos estados los que proporcionan la información para la entropía. A pesar de que clásicamente los grados de libertad de volumen y de superficie no son independientes, en la teoría cuántica estos se desacoplan de forma bien determinada [28]. Esto permite realizar el cálculo de forma más directa.

Como se discutió anteriormente, estos estados de superficie están determinados por las intersecciones de los grafos con la superficie en $(p_1, \dots, p_n)$ puntos y etiquetados por $(j_1, \dots, j_n)$ valores de espín. Entonces el espacio físico corresponde a estos estados de superficie “perforados” etiquetados por los espines j_l de una teoría de Chern-Simons $U(1)$.

Aunque formalmente el espacio completo está compuesto de estados de volumen y superficie, los primeros no cuentan para el agujero negro; por esto se construye una matriz de densidad ρ_{bh} , trazada sobre los estados de volumen, que describe una mezcla de entropía máxima de estados de área del horizonte. El cálculo de la degeneración de los estados de la superficie que describen el horizonte del agujero negro se obtiene de

$$S_{bh} = -\text{Tr} \rho_{bh} \ln \rho_{bh} = \ln N_{bh},$$

donde N_{bh} es el número de estados de superficie de Chern-Simons.

Finalmente la entropía queda (utilizando $j_l = 1/2$)

$$S_{bh} = \frac{\gamma_0}{4\ell_P^2 \gamma} A_S, \quad \gamma_0 = \frac{\ln 2}{\pi \sqrt{3}}, \quad (2.56)$$

como se había anticipado en (2.51).

2.2.3. Modelos cosmológicos.

¿Qué podemos decir acerca de la cosmología cuántica canónica? Básicamente la cosmología cuántica en lazos (lqc) estudia la geometría cuántica con ciertas restricciones de homogeneidad espacial impuestas que ha sido desarrollada exhaustivamente. Para una revisión más extensa consultar [8].

Para comenzar se necesita definir objetos básicos construidos a partir del potencial y su intensidad A, E como los definimos arriba en (2.40), en una variedad Σ . En lqc se usan holonomías $h_e(A) = \mathcal{P} \exp \int_e A_a^i \dot{e} \tau_i dt \in SU(2)$ y flujos $F_S(E) = \int_S E_i n_a \tau^i d^2 y$, donde τ_i son matrices de Pauli, $\dot{e}^a$ es el vector tangente a e y n_a es la co-normal a la superficie S .

Para que las holonomías y los flujos contengan la misma información que los campos originales (A, E) se requiere que todas las curvas e y superficies Σ sean permitidas en la integral respectiva. De esta forma los primeros representan el espacio fase de RG. Más aún, las holonomías y flujos son cerrados bajo los paréntesis de Poisson y además existe una representación de los paréntesis como un álgebra de operadores en un espacio de funciones, que es única.

Los operadores básicos son matrices de holonomías que actúan multiplicativamente en los estados y los flujos como operadores diferenciales. Los estados tienen una base dada por redes de espín que están asociadas con grafos en Σ , cuyas aristas están etiquetadas por representaciones irreducibles de $SU(2)$. Con esto tenemos las bases para construir una teoría cuántica de gravedad, en particular se pueden construir operadores compuestos a partir de las holonomías y flujos que además pueden tener una estructura más complicada.

Para estudiar modelos cosmológicos hay que imponer simetrías a los estados y/o operadores en que estamos trabajando. Para el caso de isotropía se tienen la triada isotrópica $E_a^i = p \Lambda_I^I X_I^a$ y conexión $A_a^i = c \Lambda_I^I \omega_a^I$, donde ω_I , X_I son 1-formas y campos vectoriales invariantes en $SU(2)$ y Λ es una matriz interna de $SO(3)$. De estos operadores las componentes físicas son (p, c) , cuya relación con el factor de escala es $|p| = a^2$, $c = (k - \gamma \dot{a})/2$. k etiqueta la curvatura del espacio.

Para la constricción Hamiltoniana se tiene

$$12\gamma^{-2} [c(c-k) + (1+\gamma^2)k^2/4] \sqrt{|p|} = 8\pi GH_{\text{materia}}(\phi), \quad (2.57)$$

donde ϕ representa los campos de materia presentes a través de su Hamiltoniano.

Los estados simétricos en lqc definidos en conexiones invariantes para definir las holonomías son

$$h_I = \exp \left(c\Lambda_I^i \tau_i \int \omega^I \right) = \cos c/2 + 2\tau_I \sin c/2. \quad (2.58)$$

Los estados isotrópicos invariantes de norma dependen de la conexión a través de las holonomías que sean de la forma $\psi(c) = \sum_{\mu} \psi_{\mu} e^{i\mu c/2}$. El análogo de la base de redes de espín está dada por

$$\langle c|n \rangle = \frac{\exp(inc/2)}{\sqrt{2} \sin(c/2)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.59)$$

Un análogo del operador de flujo está dado por la cuantización de la componente isotrópica de la triada p

$$\hat{p}|n \rangle = \frac{1}{6} \gamma \ell_P^2 n |n \rangle. \quad (2.60)$$

De esto se puede ver que p tiene un espectro discreto y por ello la geometría es discreta. Algo similar pasa para el factor de escala $\hat{a} = \sqrt{|\hat{p}|}$.

Estos hechos resultan tener consecuencias por demás interesantes:

■ Evolución discreta.

La cuantización de la constricción Hamiltoniana (2.57) resulta en una ecuación análoga a la de Friedman, que en el caso cuántico se convierte en una ecuación en diferencias. Para volumen pequeño¹⁵ se puede demostrar que no hay singularidad cosmológica.

Como ejemplo, la ecuación isotrópica

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi \gamma^3 G \ell_P^2 \hat{H}_{\text{mat}} \psi_n(\phi) &= (V_{n+3} - V_{n+5}) e^{ik} \psi_{n+4}(\phi) \\ &+ (2 + \gamma^2 k^2) (V_{n+1} - V_{n-1}) \psi_n(\phi) - (V_{n-3} - V_{n-5}) e^{-ik} \psi_{n-4}(\phi). \end{aligned} \quad (2.61)$$

no tiene problemas cuando se toma la singularidad $n = 0$. Esto permite evolucionar de n negativos a positivos. De esta forma la frase de ausencia de singularidad clásica está justificada.

¹⁵En este caso valores del volumen cercanos a cero corresponden a la singularidad clásica.

■ **Potencias inversas del operador de escala.**

Como se vió para la ausencia de singularidad, es necesario que el Hamiltoniano de materia cumpla $H_m(0) = 0$, por ejemplo para un campo escalar

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \widehat{a^{-3}} \otimes \hat{p}_\phi^2 + \hat{a}^3 \otimes W(\phi).$$

De tal forma que, al menos para este Hamiltoniano, se requiere una cuantización para a^{-3} . Sin embargo, si queremos utilizar potencias inversas de $\hat{p}$ tendríamos problemas ya que el espectro de este operador contiene a 0, lo que lo haría indefinido.

Existe una forma alterna para cuantizar este operador, que viene de la teoría completa (sin simetrizar): se escribe el operador como

$$a^{-3} = \left(3 [8\pi\gamma G \ell_P]^{-1} \left\{ c, |p|^l \right\} \right)^{3/(2-2l)},$$

donde no se necesita una potencia negativa si $0 < l < 1$. Al reescribir esta expresión en términos de holonomías se puede cuantizar utilizando los operadores de holonomía y flujo y promoviendo los paréntesis de Poisson a conmutadores.

El resultado de esto es un operador bien definido y finito que no muestra la divergencia clásica en $a = 0$. También en la expresión clásica para la ecuación de Friedman aparecen potencias de a^{-1} , así que por medio de un procedimiento análogo para a^{-3} se determina para este operador

$$a^{-1} = \left(\frac{1}{2\pi\gamma G} \left\{ c, |p|^{3/4} \right\} \right)^2. \quad (2.62)$$

Utilizando los operadores de holonomía y de volumen se obtiene un operador de nuevo bien definido con eigenestados $|n\rangle$ y eigenvalores dados por

$$\widehat{a^{-1}}|n\rangle = \frac{16}{\gamma^2 \ell_P^4} \left(\sqrt{V_{|n|/2}} - \sqrt{V_{|n|/2-1}} \right), \quad (2.63)$$

donde

$$V_{|n|/2-1} = (\gamma \ell_P^2 / 6)^{3/2} \sqrt{(|n|-1)|n|(|n|+1)}$$

son los eigenvalores del operador de volumen.

De esta forma se puede notar que los operadores cuánticos del factor de escala son finitos y bien definidos para volumen pequeño (singularidad clásica) y que en el límite clásico ($\ell_P \rightarrow 0$) el comportamiento clásico se recupera.

2.3. Resultados en ambos esquemas.

Como se puede ver en las secciones anteriores, en las dos propuestas más promisorias para una teoría de gravedad cuántica se tienen avances relevantes.

Tanto en teoría de cuerdas como en gravedad canónica en lazos se han podido estudiar ciertos aspectos como agujeros negros y modelos cosmológicos, y con esto se ha sido capaz de darle interpretación a problemas asociados con características de estos a nivel cuántico. Los logros y limitaciones en cada esquema pueden ser revisados, además de lo que hemos incluido en esta breve revisión, en la abrumadora literatura al respecto.

Particularmente en este capítulo hemos visto cómo se puede determinar la entropía asociada a ciertos tipos de agujero negro a partir de un conteo de grados de libertad microscópico (2.25, 2.56) que corresponde a la calculada por Bekenstein y Hawking (1.17). Por el lado de teoría de cuerdas la mayor limitación es que el tipo de agujeros negros para los cuales tal conteo se puede realizar y se tiene bajo control está (hasta ahora) limitado por características de supersimetría que debe preservar: esto se traduce en considerar agujeros negros extremales y cuasi-extremales. Por el lado de la gravedad cuántica en lazos el cálculo se puede realizar para un espectro más amplio de agujeros negros, pero tiene la seria limitación de que el valor preciso de la entropía depende de un parámetro que la teoría no puede fijar: parámetro de Immirzi.

Así mismo mostramos que en la cosmología cuántica también existen propuestas en ambos esquemas que permiten determinar propiedades cuánticas: modelos inflacionarios modulados por distintos campos escalares en teoría de cuerdas (sección 2.1.3) y un comportamiento finito y regular del operador de volumen en cosmología para tiempo cero en gravedad cuántica en lazos (sección 2.2.3).

Ambos modelos son susceptibles de modificaciones y mejoras para aumentar su grado de explicación de fenómenos y para ampliar el espectro de aquellos que pueden describir y estudiar. Sin embargo, mencionaremos algunos puntos que en general hacen diferentes a ambos enfoques¹⁶.

El mérito principal de la teoría de cuerdas es que contiene no solo una teoría de gravedad cuántica, sino que aspira a ser una teoría de unificación de todas las fuerzas de la naturaleza, además de tener una expansión perturbativa bien definida y finita a todo orden. Su mayor incompletez es que no se tiene una formulación independiente de un espacio de fondo, y los

¹⁶Esto permitiría a los interesados, tal vez, en decidir sobre cuál de los dos enfoques es el de su preferencia.

intentos por obtener una descripción no perturbativa (teoría M) son hasta la fecha poco entendidos. Si lo pensamos en esta forma, en realidad no se tiene absoluto control sobre procesos que existen a la escala de Planck, que es la región donde aplican fenómenos no perturbativos.

También existen 5 teorías consistentes de cuerdas, 4 de ellas para cuerdas cerradas (IIA,IIB,SO(32), $E8 \times E8$) y una para cuerdas abiertas (I). Sin embargo, con el descubrimiento de dualidades entre estas se piensa que ellas son un cierto límite de una sola teoría no perturbativa en 11 dimensiones¹⁷: teoría M (ver fig. 2.3).

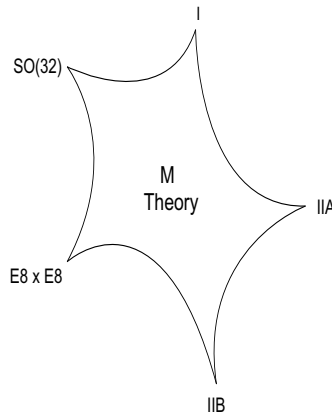


Figura 2.5: Relación entre las distintas teorías existentes de cuerdas como partes de la teoría M. La relación es debida a las dualidades.

Por otro lado, en gravedad canónica en lazos se tiene una formulación matemática rigurosa no perturbativa e independiente del fondo de la relatividad general en su régimen cuántico. Con esto se puede proveer explicaciones de fenómenos a la escala de Planck, sin necesidad de supersimetría por ejemplo. Sin embargo el mayor problema o limitación es que no tiene una forma única en la cual definir la dinámica¹⁸, y comparativamente con teoría de cuerdas no intenta formular una teoría de unificación.

Es claro que lo expresado no son todos los pros ni los contras de ambas propuestas sino solo ejemplos, y más bien el objetivo de estos comentarios

¹⁷M es por mágica, misteriosa e incluso matricial.

¹⁸Por ejemplo, la existencia del parámetro de Immirzi nos dice que es posible obtener, tal vez, los mismos resultados aún deduciéndolos a partir de fenómenos completamente incompatibles o distintos.

es el de enfatizar que hasta la fecha ambas propuestas son *tentativas*: de ninguna forma son teorías completas. Más aún, todavía hay mucho que decir del lado fenomenológico.

Pero nuestra intención es explotar las riquezas que se pueden extraer de ambas propuestas.

Capítulo 3

Supersimetría y supergravedad.

En este capítulo revisamos un método para obtener soluciones tipo agujero negro en 4 y más dimensiones. Este consiste en identificar el grado de supersimetría como una condición adicional a las ecuaciones de supergravedad.

La ventaja de este método con respecto a resolver directamente las ecuaciones de supergravedad es que las ecuaciones que determinan el grado de supersimetría son de primer orden (¡y más fáciles de resolver!).

Además, para el caso que estudiamos es posible obtener nuevas soluciones del tipo de onda plana a partir de las primeras al realizar un proceso de límite (límite de Penrose).

También empleamos la dualidad conjeturada AdS/CFT para determinar posibles teorías duales.

Ilustraremos el método mencionado arriba con el ejemplo de una solución de agujero negro debido a Romans [30].

Nuestros resultados originales presentados en este capítulo se encuentran reportados en [4].

3.1. Introducción.

Obtener soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein que representen configuraciones de agujeros negros o modelos cosmológicos ha sido motivo de investigación desde que se propuso la teoría de la relatividad general [32]. Hawking determinó, por medio de un cálculo semiclásico, que los agujeros negros radian con un espectro térmico (a esta radiación se le determina de

Hawking) [9].

Algunos agujeros negros, como el Reissner-Nordström extremal, pueden ser identificados como solitones [33].

Discutimos anteriormente cómo el sector bosónico de teorías de supergravedad se puede interpretar como una generalización multidimensional de la teoría de Einstein. De esta forma algunas de las soluciones que se determinan en estas teorías de supergravedad resultan ser agujeros negros multidimensionales. Si las soluciones que se obtengan de esta forma preservan cierto grado de supersimetría entonces serán estables ante perturbaciones, de la misma forma que el agujero de RN extremal [34, 35].

Generalmente las soluciones solitónicas en bajas dimensiones de teorías de cuerdas se obtienen al “enrollar” soluciones planas obtenidas en un espacio de más dimensiones sobre un espacio compacto; al realizar esto generalmente se rompe la supersimetría preservada originalmente y a estas soluciones parcialmente supersimétricas se les conoce como *torcidas*¹.

Por otro lado, además de la estabilidad que presentan los agujeros negros extendidos con cierto grado de supersimetría también muestran otro hecho interesante. Como hemos visto las teorías de supergravedad son el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas, así que las soluciones de supergravedad son soluciones de teoría de cuerdas. También es ampliamente aceptado, basado en una cantidad abrumadora de confirmaciones, que existe una dualidad entre teorías de campo superconformes con un número grande de grados de libertad y teorías de supergravedad débilmente acopladas en fondos tipo Anti-deSitter [31, 36, 37] y también con teorías no conformes [38].

Entonces, un campo fértil donde verificar o implementar la dualidad AdS/CFT es justamente en las soluciones de teorías de supergravedad que contengan factores AdS . Una forma de obtener estas últimas es tomar soluciones conocidas de branas BPS en 10 u 11 dimensiones y torcerlas o enrollarlas [39].

Podemos también tomar la teoría en 11 o 10 dimensiones, compactificarla y estudiar las ecuaciones de movimiento así obtenidas, o bien, las ecuaciones de transformación supersimétricas, que son ecuaciones lineales de primer orden, imponer condiciones de torcimiento y así obtener configuraciones de campos que correspondan a soluciones gravitacionales, con la ventaja de que de esta forma aseguramos la preservación de cierto grado de supersimetría.

¹Cuando se trata de definir espinores de Killing en espacios curvos, obtenidos al compactificar o enrollar soluciones de mayores dimensiones, hay que imponer proyecciones sobre estos para que en el espacio de menos dimensiones preserven la característica de Killing; de ahí es de donde viene el nombre [40, 41].

Finalmente, las soluciones obtenidas en dimensiones menores se pueden encajar en la teoría original en 10 u 11 dimensiones y así corresponden a soluciones de branas parcialmente torcidas de supergravedad en $D = 10, 11$ [3, 42, 43].

Con esto en mente, en este capítulo realizamos un encajamiento como el mencionado arriba para soluciones a la teoría de supergravedad de norma en $D = 4$ con $N = 4$ y grupo de norma $SO(4)$ en $D = 11$ y 32 supercargas [3]. Con la idea de aplicar la dualidad AdS/CFT utilizamos una propuesta de métrica cuatro dimensional de la forma $AdS_2 \times H_2$, donde H_2 corresponde a un espacio hiperbólico en dos dimensiones.

Comenzaremos determinando soluciones a la teoría de supergravedad en $D = 4$, para lo cual discutimos el procedimiento de Cvetič et al [3]. Realizamos una separación del grupo de norma $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$, de tal forma que el campo de norma original se descompone en un par de campos, transformando bajo cada $SU(2)$.

En el caso en que apagamos todos los campos de materia obtenemos como solución el espacio AdS_4 , que preserva las 32 supercargas (se dice que es maximalmente supersimétrico); interpretamos esta solución como asintótica debido a que la configuración de campos presenta ese comportamiento.

Si apagamos los campos escalares de materia (dilatón y axión) y permitimos que los dos acoplamientos de los $SU(2)$ sean iguales, obtenemos otra solución que corresponde a una métrica con un factor de AdS y que preserva $1/8$ de la supersimetría. Tal rompimiento de supersimetría puede deberse a la igualdad de las constantes de acoplamiento y la forma de enrollar esta solución con el espacio transversal [40, 41]. Esta solución admite una interpretación de horizonte cercano.

Por último obtenemos una solución que interpola entre estos dos regímenes.

Resulta ser que la solución de horizonte cercano en el límite infrarrojo es dual a una teoría superconforme de Yang Mills en 0+1 dimensiones, o bien, una mecánica cuántica superconforme que puede ser interpretada a partir de la M2-brana obtenida al encajar la solución en 11 dimensiones [44, 45, 46]. Análisis similares al nuestro se han desarrollado en otros trabajos (ver por ejemplo [47], [48], [49] y referencias allí citadas).

Finalmente, y en conexión con la obtención de soluciones, empleamos un procedimiento para obtener nuevas soluciones a partir de nuestras configuraciones, denominado límite de Penrose [50, 51, 52, 53, 54]. Además de realizar tal límite y verificar que lo obtenido es solución de la teoría en forma de ondas planas paralelas (pp-waves) determinamos que estas nuevas soluciones tienen un aumento en la supersimetría preservada, que parece ser una característica del procedimiento [53].

3.2. Motivación.

Al estudiar las soluciones que se obtienen en supergravedad y/o teoría de cuerdas, un papel muy importante en ellas juega el hecho de si son o no supersimétricas.

Una pregunta viene a colación: ¿cuál es la relación entre estas soluciones y la supersimetría (especialmente para las soluciones tipo agujero negro)? O bien, ¿qué nos motiva a determinar soluciones por medio de ecuaciones de supersimetría, si el interés son los agujeros negros?

Trataremos de responder estas preguntas por medio de un ejemplo estudiado en [30].

Repasemos la solución de Reissner-Nordström en la teoría de Einstein-Maxwell con constante cosmológica. El lagrangiano es

$$4e^{-1}L = -R + F_{mn}F^{mn} + 2\Lambda \quad (3.1)$$

donde e es el determinante de la métrica y F es la intensidad del campo de norma $\mathbf{A}$.

La solución que nos interesa se puede describir por una métrica estacionaria y esféricamente simétrica de la forma

$$ds^2 = -V dt^2 + \frac{dr^2}{V} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad V = V(r). \quad (3.2)$$

El potencial vectorial consistente con las simetrías impuestas tiene componentes

$$\mathbf{A} = \left(0, \frac{Q}{r^2}, 0, \frac{H}{r^2}\right).$$

La solución es

$$V(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Z^2}{r^2} - \frac{1}{3}\Lambda r^2, \quad Z^2 = Q^2 + H^2. \quad (3.3)$$

Ahora fijémonos en la teoría de supergravedad $N = 2$ en $D = 4$. El contenido de campos bosónicos de esta teoría son un gravitón y un campo de Maxwell A_m y los compañeros supersimétricos son los gravitinos ψ_m . El lagrangiano es

$$\begin{aligned} 4e^{-1}L &= -R + F_{mn}F^{mn} - 6g^2 + 2\bar{\psi}_m \gamma^{mnp} \mathcal{D}_n \psi_p \\ &- 2g\bar{\psi}_m \gamma^{mn} \psi_n + \frac{i}{2} \left(F + \hat{F}\right)^{mn} \bar{\psi}_p \gamma_{[m} \gamma^{pq} \gamma_{n]} \psi_q, \end{aligned} \quad (3.4)$$

con g la constante de acoplamiento.

Las derivadas covariantes son

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_m &= \nabla_m - igA_m, \\ \nabla_m &= \partial_m + \frac{1}{4}\omega_m^{ab}\gamma_{ab},\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde ω es la conexión de espín relacionada con la métrica. No es difícil convencerse que la acción (3.4) es invariante ante las transformaciones supersimétricas

$$\begin{aligned}\delta e_m^a &= \text{Re}(\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_m), \\ \delta\psi_m &= \hat{\nabla}_m\epsilon, \\ \delta A_m &= \text{Im}(\bar{\epsilon}\psi_m), \\ \hat{\nabla}_m &= \mathcal{D}_m + \frac{1}{2}g\gamma_m + \frac{i}{4}F_{ab}\gamma^{ab}\gamma_m,\end{aligned}$$

donde ϵ es un parámetro espinorial que identifica la supersimetría de la solución y γ^{ab} es el conmutador de las gamas.

Para ser compatible con (3.1) se determina que $\Lambda = -3g^2$. El carácter de la solución en el caso supersimétrico se obtiene al considerar fondos donde los espinores son nulos, quedando una ecuación de Killing espinorial

$$\hat{\nabla}_m\epsilon = 0,\tag{3.6}$$

cuya condición de integrabilidad es simplemente la trivialidad de la supercurvatura

$$\Omega_{mn}\epsilon = [\hat{\nabla}_m, \hat{\nabla}_n]\epsilon = 0.\tag{3.7}$$

Las ecuaciones que se desprenden de (3.6) son derivadas de primer orden, cuya solución se puede verificar al exigir (3.7). Para este caso, si utilizamos (3.2) encontramos justamente (3.3), para valores no triviales del parámetro espinorial ϵ .

Con esto podemos asegurar que el imponer el carácter supersimétrico en supergravedad nos lleva a obtener una solución tipo agujero negro que, además, es estable: Reissner-Nordström.

Habiendo expresado nuestro punto acerca de la motivación del trabajo, procedemos al desarrollo del mismo.

3.3. Encajamiento de $D = 4$ en $D = 11$.

Discutamos brevemente el procedimiento de Cvetič y colaboradores para encajar soluciones de supergravedad y la motivación del trabajo realizado.

La idea principal en [3] es determinar bajo qué características y restricciones de compactificación de las teorías de supergravedad en 10 u 11 dimensiones las soluciones originales en dimensiones mayores siguen siéndolo en la teoría reducida, o bien, si el proceso inverso (el de encajar de menos a mas) también preserva el carácter de solución. El caso en que esta consistencia se ha comprobado es en la reducción dimensional en esferas (S^7, S^4); así que en ese espíritu ellas proveen una compactificación particular como describimos a continuación.

Generalmente el procedimiento de verificar la consistencia de ciertos truncamientos a teorías de supergravedad consiste en reducir dimensionalmente la teoría compactificando en un espacio compacto y reducir el número de campos o componentes así obtenidos; la consistencia se determina, en este caso, si las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la teoría compactificada son equivalentes a las que se obtienen al realizar el desarrollo y truncamiento de las ecuaciones de la teoría completa, y similarmente para las cantidades geométricas como el escalar de curvatura o el tensor de Ricci o Riemann.

Tomando como referencia [55] se determina un truncamiento de la supergravedad con $N = 8$ en D=11 a la de $N = 4$ realizando identificaciones de campos y de constantes de los grupos de norma en la teoría completa. El resultado final es que el espacio se reduce a un espacio 4-dimensional enrollado en una especie de esfera 7-dimensional aplastada, y el contenido de campos de la supergravedad restante consistente con esta separación son dos campos escalares (dilatón y axión) y la métrica en 4 dimensiones, además de un par de campos de norma de $SU(2)$ que parametrizan la esfera transversal. Como siempre estos campos se obtienen al realizar la reducción dimensional en la esfera del campo de Yang-Mills en D=11 y de la métrica.

El ansatz de la reducción consistente con el truncamiento, de acuerdo a lo expresado anteriormente, es

$$\begin{aligned}
ds_{11}^2 = & \Delta^{2/3} \left\{ ds_4^2 + 2\alpha^{-2} d\xi^2 + \frac{1}{2}\alpha^{-2} \left[\frac{c^2}{c^2 X^2 + s^2} \sum_{i=1}^3 (h^i)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{s^2}{c^2 \tilde{X}^2 + s^2} \sum_{i=1}^3 (\tilde{h}^i)^2 \right] \right\}, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= X^{-1}q, & q^2 &= 1 + \chi^2 X^4, \\
\Delta^2 &= (c^2 X^2 + s^2) (s^2 \tilde{X}^2 + c^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \cos \xi, & s &= \sin \xi, \\ h^i &= \sigma^i - \alpha A^i, & \tilde{h}^i &= \tilde{\sigma}^i - \alpha \tilde{A}^i. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Las tres cantidades σ^i , $i = 1, 2, 3$, son 1-formas invariantes en $SU(2) \cong S^3$, que parametrizan la 3-esfera, y similarmente para las tildes. Los campos de norma $(A_i, \tilde{A}_i)$ determinan el grupo $SU(2) \times SU(2)$ como norma elegida para $SO(4)$ en D=4, cuyas constantes de acoplamiento se eligen iguales a $g = \tilde{g} = \alpha$.

Los campos (ϕ, χ) son el dilatón y el axión, donde el primero define el campo X a través de $X = e^{\phi/2}$. También se tiene la forma reducida para el campo de norma $F_{(4)}$ ([3]).

Para convencerse de que en la reducción dimensional de la métrica el espacio transversal corresponde a una esfera 7-dimensional basta ver la estructura de la misma en el caso “sin excitar”, es decir, cuando apagamos los campos escalares ($X = \tilde{X} = 1$). En esta situación y sin considerar el factor $(\alpha^{-2}/2)$ obtenemos para la parte transversal de la métrica

$$d\Omega_7^2 = d\xi^2 + \cos^2 \xi d\Omega_3^2 + \sin^2 \xi d\tilde{\Omega}_3^2 \quad (3.10)$$

que es justamente la métrica de S^7 .

Con la reducción obtenida, y el truncamiento realizado, podemos identificar la teoría en D=4 con aquella de [56], simplemente realizando una redefinición de campos. La identificación es importante ya que de allí se pueden obtener las ecuaciones de supersimetría que sirven para corroborar la consistencia del truncamiento.

Sin embargo, en [56] solo se considera el grupo $SO(4)$, que al ser separado en dos copias de $SU(2)$, las ecuaciones de movimiento y de supersimetría adquieren nuevos términos. Estos puntos son discutidos en [57].

En este último trabajo (Zwiebach et al) se obtienen las correcciones a las ecuaciones de supersimetría pero con constantes de acoplamiento independientes en cada $SU(2)$. Nosotros obtenemos las ecuaciones de supersimetría empleadas en nuestro trabajo al fijar $g = \tilde{g} = \alpha$ (ver sección 3.4).

De esta forma tenemos todos los ingredientes para poder intentar determinar soluciones a la teoría de supergravedad en D=4 así obtenida y estudiar sus características, como describimos en las secciones subsecuentes.

3.4. Determinación de soluciones.

Tomamos como punto de partida las ecuaciones de la teoría de supergravedad en cuatro dimensiones con grupo de norma $SO(4)$ y $N = 4$ [3].

Queremos determinar si las soluciones que determinemos son duales a alguna teoría superconforme de Yang Mills; para ello pedimos que nuestra solución contenga un factor de Anti-deSitter, así que proponemos una descomposición de la métrica de la forma siguiente

$$ds_4^2 = f(r)ds_{AdS_2}^2 + g(r)ds_{H_2}^2, \quad (3.11)$$

donde H_2 es un espacio hiperbólico bidimensional y r es la coordenada radial en el espacio de AdS .

En esta teoría tenemos como contenido de materia dos campos escalares (axión y dilatón) (χ, ϕ) , la métrica y un campo de norma de Yang Mills que transforma bajo $SO(4)$.

Realizamos una descomposición del grupo de norma $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ y con ello obtenemos dos campos de norma $(A, \tilde{A})$ con constantes de acoplamiento $g, \tilde{g}$.²

El lagrangiano bosónico de esta teoría es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & R - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}e^{2\phi}(\partial_\mu \chi)^2 + 2\alpha^2(4 + 2\cosh \phi + \chi^2 e^\phi) - \frac{1}{2}e^{-\phi}F^2 \\ & - \frac{e^\phi}{2(1 + \chi^2 e^{2\phi})}\tilde{F}^2 - \frac{\chi}{2}F \wedge F + \frac{\chi e^{2\phi}}{2(1 + \chi^2 e^{2\phi})}\tilde{F} \wedge \tilde{F}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde hemos elegido $g = \tilde{g} = \alpha$. Las intensidades de campo se calculan como $F^i = dA^i + \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^{ijk}A^jA^k$, $i, j, k = 1, 2, 3$, donde ε^{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de tres índices.

De aquí podemos determinar las ecuaciones de Einstein

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{e^{2\phi}}{2}\partial_\mu \chi \partial_\nu \chi + e^{-\phi} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{g_{\mu\nu}}{4} F^2 \right) \\ & + \frac{e^\phi}{1 + \chi^2 e^{2\phi}} \left(\tilde{F}_{\mu\alpha} \tilde{F}_\nu^\alpha - \frac{g_{\mu\nu}}{4} \tilde{F}^2 \right) - 6\alpha^2 g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ahora, si fijamos $A = \tilde{A}$ obtenemos las ecuaciones de Yang Mills correspondientes

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\sqrt{-g}e^{-\phi}F^{\mu\nu a} \right) = \left(e^{-\phi}A_\mu^b F^{\mu\nu c} - \frac{\chi}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\mu^b F_{\alpha\beta}^c \right) \varepsilon^{abc}. \quad (3.14)$$

La propuesta de solución consiste en apagar los campos escalares de materia $\phi = \chi = 0$ y tomar la métrica (3.11)

$$ds^2 = e^{2f(r)} (-dt^2 + dr^2) + \frac{e^{2h(r)}}{y^2} (dx^2 + dy^2), \quad (3.15)$$

²Cada campo y su constante de acoplamiento transforma en cada grupo $SU(2)$.

donde f, h son funciones por determinar.

Antes de determinar la solución gravitacional podemos resolver (3.14) directamente. Obtenemos³

$$A_x^3 = \tilde{A}_x^3 = \frac{k}{y} \Rightarrow F_{xy}^3 = \tilde{F}_{xy}^3 = \frac{k}{y^2}; \quad \phi = \chi = 0, \quad (3.16)$$

donde k es una constante por determinar.

A partir de aquí es directo ver que las componentes no nulas de las ecuaciones de Einstein son las que están en la diagonal; escribimos explícitamente las no triviales e independientes

$$R_{11} = f'' + 2f'h', \quad (3.17)$$

$$R_{22} = -f'' - 2(h')^2 - 2h'' + 2f'h', \quad (3.18)$$

$$R_{33} = R_{44} = -\frac{1}{y^2} \left(2e^{2(h-f)}(h')^2 + e^{2(h-f)}h'' + 1 \right). \quad (3.19)$$

Al revisar la propuesta de la métrica, queremos tener un factor de espacio hiperbólico H_2 , así que es fácil ver que una elección para el factor correspondiente de la métrica e^h es que sea constante, esto es, $h(r) = cte$. Con esto las ecuaciones de Einstein se simplifican y podemos resolverlas directamente

$$e^{-2h} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24(k\alpha)^2}}{2k^2}, \quad (3.20)$$

$$e^{2f(r)} = \frac{2}{F^2 + 12\alpha^2} \frac{1}{r^2}, \quad (3.21)$$

donde $F^2 = 2k^2e^{-4h}$.

Podemos ver de la solución anterior y de (3.15) que hemos obtenido una solución correspondiente a $AdS_2 \times H_2$. Además, ya que el horizonte de la solución se encuentra en $r = 0$ y tal región yace dentro de nuestra solución, a ésta se le nombrará la *solución de horizonte cercano*.

Podemos decir algo más notando lo siguiente: si apagamos todos los campos de materia (solución de vacío) $\phi = \chi = A = 0$, y realizamos el mismo procedimiento, obtenemos la siguiente solución

$$ds^2 = \frac{2}{\alpha^2 r^2} (-dt^2 + dr^2 + dx^2 + dy^2), \quad (3.22)$$

que es justamente el espacio AdS_4 . Como esta solución corresponde a realizar el límite $y \rightarrow \infty$ que corresponde a campos de materia nulos le nombraremos *asintótica*.

³Esto se puede demostrar por cálculo directo al sustituir estos campos en la ecuación de Yang Mills (3.14).

Recordemos que la teoría de supergravedad que estamos trabajando en cuatro dimensiones corresponde a una compactificación de supergravedad en once dimensiones como se describe en [3], así que es posible de esta forma “subir” esta solución a once dimensiones y obtener soluciones correspondientes a la teoría mayor. Aplicando el proceso inverso (encajamiento) a ambas soluciones (asintótica y de horizonte cercano) obtenemos

1. $AdS_4 \times S^7$:

$$ds_{11}^2 = \frac{2}{\alpha^2 r^2} (-dt^2 + dr^2 + dx^2 + dy^2) + \frac{2}{\alpha^2} d\xi^2 + \frac{1}{2\alpha^2} \left[\cos^2 \xi d\Omega_3 + \sin^2 \xi d\tilde{\Omega}_3 \right], \quad (3.23)$$

donde $(d\Omega_3, d\tilde{\Omega}_3)$ son métricas de esferas tridimensionales.

2. $AdS_2 \times H_2 \times \tilde{S}^7$ (la tilde significa un aplastamiento o deformación de S^7)

$$ds_{11}^2 = \frac{2}{F^2 + 12\alpha^2} \frac{1}{r^2} (-dt^2 + dr^2) + \frac{e^{2h}}{y^2} (dx^2 + dy^2) + \frac{2}{\alpha^2} d\xi^2 + \frac{1}{2\alpha^2} \left[\cos^2 \xi \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left[\sigma_3 - \frac{dx}{y} \right]^2 \right) + \sin^2 \xi (\sigma \leftrightarrow \tilde{\sigma}) \right] \quad (3.24)$$

En esta última ecuación σ^i son una formas invariantes de $SU(2) \simeq SO(3)$ ⁴.

Escribimos por completez los campos de norma y sus intensidades en cuatro y once dimensiones.

En $D = 4$:

$$A^i = \tilde{A}^i = \frac{k}{y} dx \delta_3^i, \quad (3.25)$$

$$F^i = \tilde{F}^i = \frac{k}{y^2} dx \wedge dy \delta_3^i. \quad (3.26)$$

4

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= d\rho + \cos \zeta d\tau, \\ \sigma^2 &= \cos \rho d\zeta + \sin \zeta \sin \rho d\tau, \\ \sigma^3 &= \sin \rho d\zeta - \sin \zeta \cos \rho d\tau. \end{aligned}$$

Como antes, seguimos el procedimiento de Cvetič et al para el encajamiento y tenemos

$$\begin{aligned} F_{(4)} &= -3\sqrt{2}\alpha\varepsilon_{(4)} + F'_{(4)}, \\ \sqrt{2}\alpha^2 F'_{(4)} &= \sin\xi^2 \cos\xi^2 d\xi \wedge (h^i \wedge F^i - \bar{h}^i \wedge \bar{F}^i) + \\ &\quad + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk} \left(\cos\xi^2 h^i \wedge h^j \wedge *F^k + \sin\xi^2 \bar{h}^i \wedge \bar{h}^j \wedge *\bar{F}^k \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde $h^i = \sigma^i - \alpha A^i$, y A^i está dada por (3.25). Similarmente para los campos con tilde.

Hemos obtenido un par de soluciones a la teoría de supergravedad en 4 y 11 dimensiones: una correspondiente al horizonte cercano y una asintótica. En 11 dimensiones esto corresponde a una M2-brana⁵.

A partir de esto es interesante tratar de obtener otra solución que conecte las dos regiones anteriores: ese es nuestro siguiente objetivo.

3.5. Supersimetría y soluciones

Para obtener las soluciones anteriores empleamos las ecuaciones de Einstein y una propuesta de métrica dada en (3.11). Afortunadamente, las simplificaciones empleadas nos llevaron a poder resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que en principio son no lineales. Ahora queremos determinar una solución “interpolante” de la cual, en principio, no sabemos el comportamiento ni característica alguna.

Además, como mencionamos en la introducción del presente capítulo y ejemplificamos en la motivación, para determinar si las soluciones obtenidas son estables y determinar si son duales a una teoría de campos es necesario determinar si estas preservan cierto grado de la supersimetría original. Por eso es que analizaremos este último punto, el de la supersimetría. Veremos que tal análisis nos permite determinar una nueva solución al emplear las *ecuaciones de supersimetría*, que son de primer orden y lineales, en vez de las de Einstein y todas las complejidades que ellas conllevan.

Es bien sabido que la solución de AdS es maximalmente supersimétrica (esto es, preserva todas las supersimetrías) [58], por lo tanto nuestro AdS_4 contiene 32 supercargas.

Dado que conocemos la teoría subyacente de supergravedad de las soluciones, nos fijamos en las ecuaciones de transformación supersimétricas y determinamos el grado de supersimetría.

⁵Las soluciones de branas en supergravedad 11-dimensional, por corresponder al límite de bajas energías de teoría M, se les conoce genéricamente como M -branas

Las ecuaciones para el gravitino y gaugino (los compañeros supersimétricos de los campos bosónicos) son, respectivamente [56, 57, 59, 60]

$$\delta\bar{\chi}^i = \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^{ijkl}\bar{\epsilon}^j\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^{kl} = 0, \quad (3.28)$$

$$\delta\bar{\psi}_\lambda^i = \bar{\epsilon}^i\overleftarrow{D}_\lambda - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^j\gamma_\lambda\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^{ij} - \alpha\bar{\epsilon}^i\gamma_\lambda = 0, \quad (3.29)$$

donde $D_\mu\psi_\nu^I = (\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}\sigma^{ab})\psi_\nu^I + 2\alpha A_\mu^{ij}\psi_\nu^j$ es la “super”-derivada covariante, y $\omega_{a\mu\nu}$ es la conexión de espín determinada a partir de la métrica.

Nuestras convenciones para las matrices gamma y los generadores de Lorentz son

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b], \quad \gamma^\mu = e_a^\mu\gamma^a, \quad (3.30)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = - \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Indices griegos son curvos y latinos son del espacio tangente.

Para el caso de la solución de horizonte cercano tenemos

$$\omega_{t\hat{t}\hat{r}} = \frac{1}{r}, \quad (3.32)$$

$$\omega_{x\hat{y}\hat{x}} = \frac{1}{y}. \quad (3.33)$$

Al sustituir los campos de norma (3.25) en la ecuación del gaugino (3.28) es fácil ver que de los cuatro parámetros espinoriales⁶ solo dos de ellos sobreviven, a saber

$$\epsilon^1 = \epsilon^4 = 0. \quad (3.34)$$

Escribamos las ecuaciones para el gravitino (3.28) en componentes

$$\bar{\epsilon}^2 \left(\overleftarrow{\partial}_t - \frac{1}{r}\sigma^{rt} + \alpha e^f \gamma^t \right) + \bar{\epsilon}^3 \left(k e^{f-2h} \gamma^t \sigma^{xy} \right) = 0, \quad (3.35)$$

$$\bar{\epsilon}^2 \left(\overleftarrow{\partial}_r - \alpha e^f \gamma^r \right) - \bar{\epsilon}^3 \left(k e^{f-2h} \gamma^r \sigma^{xy} \right) = 0, \quad (3.36)$$

$$\bar{\epsilon}^2 \left(\overleftarrow{\partial}_x + \frac{1}{y}\sigma^{yx} - \frac{\alpha e^h}{y}\gamma^x \right) + \bar{\epsilon}^3 \left(\frac{2\alpha k}{y} - \frac{k}{e^h y} \gamma^x \sigma^{xy} \right) = 0, \quad (3.37)$$

$$\bar{\epsilon}^2 \left(\overleftarrow{\partial}_y - \frac{\alpha e^h}{y}\gamma^y \right) - \bar{\epsilon}^3 \left(\frac{k}{e^h y} \gamma^y \sigma^{xy} \right) = 0, \quad (3.38)$$

⁶Para esta sección trabajamos en la representación del grupo $SO(4)$, de allí que todos los índices (planos) toman los valores 1, ... 4.

Impongamos que los espinores sean función de r solamente⁷, esto es $\epsilon^2, \epsilon^3 = f(r)$. Si vemos el último término de cada ecuación en (3.35-3.38) es directo imponer

$$\bar{\epsilon}^i \gamma^x \gamma^y = i \bar{\epsilon}^i, \quad (3.39)$$

$$\bar{\epsilon}^i \gamma^r = \bar{\epsilon}^i. \quad (3.40)$$

Sustituyendo todo esto en las ecuaciones de supersimetría obtenemos que

$$\bar{\epsilon}^2 = i \bar{\epsilon}^3, \quad (3.41)$$

$$\bar{\epsilon}^2(r) = \sqrt{r} \bar{\epsilon}_0, \quad (3.42)$$

que son solución de (3.28,3.29) con métrica (3.15) y (3.20,3.21).

Una vez determinada la solución podemos contar el número de componentes espinoriales no nulas: (3.34) nos da 1/2, y (3.41) reduce el número por 1/4, así que en total obtenemos una solución que preserva 1/8 de la supersimetría original. A este tipo de soluciones se les conoce como “torcidas” (3.39).

Dado que nuestra solución contiene factores del tipo AdS y que preserva una fracción de la supersimetría original, podemos emplear la conjetura de Maldacena para identificar cuál sería la teoría de campos superconforme dual a nuestra teoría de gravedad.

Tenemos una solución de supergravedad tipo $AdS_2 \times H_2$, (2+1) dimensional; si disminuimos la energía de los modos no masivos de la teoría aumentamos su longitud de onda característica (a través de la longitud de onda de deBroglie), y esta se vuelve mayor en comparación con el tamaño del espacio hiperbólico transversal (límite de infrarrojo). De esta forma la dependencia en esas coordenadas (las del espacio transversal) desaparece : efectivamente la teoría se convierte en una (0+1) dimensional.

Esto corresponde al límite de bajas energías en la dualidad AdS/CFT de Maldacena [31] (ver apéndice). Por lo tanto, nuestra solución es el dual gravitacional de una teoría superconforme de Yang Mills con cuatro supercargas, (0+1) dimensional, en el límite infrarrojo. La descripción de tal teoría corresponde a la M2-brana subyacente.

Empleemos las ecuaciones de supersimetría para determinar la solución interpolante.

Utilizamos de nuevo (3.15). Ahora, queremos que nuestra solución preserve cierto grado de supersimetría, así que la configuración de campos y la métrica debe satisfacer (3.28,3.29).

⁷Esta es una práctica común en la literatura, además de que queremos soluciones estáticas. Ver por ejemplo [49]

Calculamos la conexi3n de esp3n correspondiente

$$\omega_{t01} = f', \quad (3.43)$$

$$\omega_{x12} = \omega_{y13} = e^{h-f} \frac{h'}{y}, \quad (3.44)$$

$$\omega_{x23} = \frac{1}{y}, \quad (3.45)$$

donde la prima denota derivaci3n con respecto a r . Ahora, las ecuaciones de supersimetr3a en componentes se lee⁸

$$0 = \bar{\epsilon}^i \left(f' \sigma^{01} + \alpha e^f \gamma^0 \right) + \bar{\epsilon}^j \left(-\sigma^{23} \gamma^0 k e^{-2h+f} \right) M^{ij}, \quad (3.46)$$

$$0 = \bar{\epsilon}^i \left(e^{h-f} h' \sigma^{12} + \sigma^{23} - \alpha e^h \gamma^2 \right) + \bar{\epsilon}^j \left(2\alpha k + \sigma^{23} \gamma^2 k e^{-h} \right) M^{ij}, \quad (3.47)$$

$$0 = \bar{\epsilon}^i \left(e^{h-f} h' \sigma^{13} - \alpha e^h \gamma^3 \right) + \bar{\epsilon}^j \left(\sigma^{23} \gamma^3 k e^{-h} \right) M^{ij}, \quad (3.48)$$

m3s otra ecuaci3n que denota la dependencia radial de los espinores (notar que ahora no tenemos la condici3n (3.34)).

Imponemos la proyecci3n (o torcimiento)

$$\bar{\epsilon}^j \sigma^{23} M^{ij} = \bar{\epsilon}^i.$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones anteriores, y de la primera y tercera ecuaci3n encontramos que $h'(r) = f'(r)$.

Si hacemos $f = h$ y sustituimos en la segunda ecuaci3n encontramos que $\alpha \propto k$. Podemos as3 resolver para f

$$f(r) = h(r) = \ln \frac{\tanh(r + C_1)}{C_2 \alpha}. \quad (3.49)$$

Con esto encontramos una soluci3n interpolante parcialmente supersim3trica que corresponde de nuevo (se puede encajar esta soluci3n de nuevo en 11 dimensiones) a una M2-brana de teor3a M. En este caso ya no se tiene un factor AdS as3 que no podemos aplicar la correspondencia $AdS - CFT$.

Discutimos ahora otra forma de obtener soluciones supersim3tricas en supergravedad.

⁸Utilizamos $M^{ij} = \delta_2^{[i} \delta_3^{j]}$.

3.6. Configuración de ondas planas paralelas.

Las soluciones que hemos obtenido hasta el momento se han determinado de dos formas:

- resolviendo las ecuaciones de Einstein (con un poco de suerte y colmillo) y
- empleando las ecuaciones de superimetría.

En ambos casos con una propuesta de la métrica adecuada. Ahora mostramos como obtener nuevas soluciones a partir de las segundas que, además, asegura la preservación de supersimetría.

Este procedimiento se conoce como el límite de Penrose [53, 61, 62, 52]. La configuración que se obtiene se denomina de ondas planas paralelas (pp-waves). Como antes, también es posible encajar estas soluciones de 4 a 11 dimensiones.

1. Empezamos considerando la solución asintótica.

Si escribimos el espacio hiperbólico en coordenadas orográficas podemos expresar la métrica en la siguiente forma

$$ds^2 = e^{2f(r)} (-dt^2 + dr^2) + e^{2h} (d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2). \quad (3.50)$$

Las variables angulares parametrizan al H_2

Realizamos un cambio de coordenadas como sigue

$$t = (u - \Omega^2 v), \quad (3.51)$$

$$r = (u + \Omega^2 v), \quad (3.52)$$

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g_{\mu\nu}. \quad (3.53)$$

Este cambio es similar al que se encuentra en la literatura (ver por ejemplo [61]). De esta forma obtenemos la configuración de onda plana correspondiente al realizar el límite de Penrose, $\Omega \rightarrow 0$

$$d\bar{s}^2 = \frac{8}{\alpha^2 u^2} (dudv + dx^2 + dy^2). \quad (3.54)$$

Y podemos escribir el encajamiento en 11 dimensiones como sigue

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{8}{u^2} (dudv + dx^2 + dy^2) + 2d\xi^2 + \left(d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{\zeta}^2 + d\tilde{\tau}^2 + 2d\tilde{\zeta}d\tilde{\tau} \right) + \left(d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{\zeta}^2 + d\tilde{\tau}^2 + 2d\tilde{\zeta}d\tilde{\tau} \right) \right]. \quad (3.55)$$

Podemos ahora estudiar la preservación de supersimetría.

En forma directa se puede demostrar que esta solución sigue siendo maximalmente supersimétrica debido a que la configuración de la cual deriva lo era. Por lo tanto esta solución sigue conteniendo 32 supercargas.

2. Ahora trabajamos la solución de horizonte cercano.

Realizamos el siguiente cambio de variable

$$t = \frac{1}{2}\Omega(u - \Omega^2 v), \quad (3.56)$$

$$r = \frac{1}{2}\Omega(u + \Omega^2 v), \quad (3.57)$$

$$\theta = \Omega p + \sinh^{-1} 1, \quad (3.58)$$

$$\phi = \Omega q. \quad (3.59)$$

Esta reparametrización difiere un poco de las referencias citadas debido a que los factores de la métrica en (3.15,3.20,3.21) dependen de la constante de acoplamiento y esta se reparametriza también en nuestro caso.

Es necesario también redefinir los campos de materia, de tal forma que adquieran el mismo factor Ω como en las variables espacio-temporales. Para ello realizamos lo siguiente

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g_{\mu\nu}, \quad (3.60)$$

$$\bar{A} = \Omega^{-1} A, \quad (3.61)$$

$$\bar{\alpha} = \Omega \alpha. \quad (3.62)$$

Después de efectuar el mismo límite la configuración queda⁹

$$d\bar{s}^2 = 2k^2 \left[\frac{1}{u^2} (dudv) + (dp^2 + dq^2) \right], \quad (3.63)$$

$$\bar{A}^3 = \frac{k}{\sqrt{2}}(dp + dq), \quad (3.64)$$

$$\bar{F}^3 = 0. \quad (3.65)$$

Esta es justamente una onda plana en 4 dimensiones. Para poder realizar el encajamiento en 11 dimensiones es necesario redefinir las coordenadas de la 7 esfera deformada de la siguiente forma

$$\xi \rightarrow \Omega^2 \xi + \frac{\pi}{4}. \quad (3.66)$$

⁹El sustituir esta métrica y los campos en las ecuaciones de Einstein es directo.

Con esto, la forma de nuestra solución en 11 dimensiones queda como

$$d\bar{s}^2 = 2k^2 \left[\frac{1}{u^2} (dudv) + 2 (dp^2 + dq^2) \right] + \frac{1}{4\alpha^2} \left[2d\xi^2 + (d\rho^2 + d\zeta^2 + d\tau^2 + 2d\zeta d\tau) + (d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{\zeta}^2 + d\tilde{\tau}^2 + 2d\tilde{\zeta} d\tilde{\tau}) \right]. \quad (3.67)$$

En lo que respecta a la supersimetría notamos de nuevo que la condición (3.34) ya no aplica aquí. Escribimos en este caso la variación del gravitino (3.29)

$$\delta\bar{\psi}_\lambda^i = \bar{\epsilon}^i \overleftarrow{D}_\lambda - \alpha \bar{\epsilon}^i \gamma_\lambda = 0, \quad (3.68)$$

o bien

$$\bar{\epsilon}^i \left(\overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \sigma^{ab} - \alpha \gamma_\mu \right) + \bar{\epsilon}^j (2\alpha A_\mu^{ij}) = 0. \quad (3.69)$$

La conexión de espín ahora se lee

$$\omega_{u\hat{u}\hat{v}} = \frac{1}{2u}. \quad (3.70)$$

Se puede ver directamente de las componentes $i = 1, 4$ que la elección $\epsilon^1, \epsilon^4 \equiv \text{const}$ es siempre solución, de tal forma que se preserve al menos 1/2 de supersimetría.

Ahora escribimos para las otras dos componentes

$$\bar{\epsilon}^2 \left(\overleftarrow{\partial}_u + \frac{1}{2u} \sigma^{\hat{p}\hat{q}} - \alpha \gamma_u \right) = 0, \quad (3.71)$$

$$\bar{\epsilon}^2 \left(\overleftarrow{\partial}_v - \alpha \gamma_v \right) = 0, \quad (3.72)$$

$$\bar{\epsilon}^2 (\overleftarrow{\partial}_p - \alpha \gamma_p) + \sqrt{2} \alpha k \bar{\epsilon}^3 = 0, \quad (3.73)$$

$$\bar{\epsilon}^2 (\overleftarrow{\partial}_q - \alpha \gamma_q) + \sqrt{2} \alpha k \bar{\epsilon}^3 = 0, \quad (3.74)$$

y otro sistema similar para $\epsilon^2 \leftrightarrow \epsilon^3$. Finalmente, si permitimos que ambos espinores dependan solo de la variable u , siempre encontramos soluciones de (3.71-3.74). Por lo tanto demostramos que $\epsilon^2 \propto \epsilon^3$.

De la discusión de arriba podemos concluir que nuestra solución de onda plana en 4 u 11 dimensiones preserva 3/4 de la supersimetría original, aumentando la fracción original de la solución de la cual deriva. Esto también corresponde a un número de supersimetría no muy común en la literatura y tiene el nombre genérico de *supersimetría supernumeraria* (ver por ejemplo [40, 41, 63]).

Hemos visto cómo se pueden obtener nuevas soluciones supersimétricas de supergravedad tipo onda plana al realizar el límite de Penrose de la solución original. Más interesante aún es el hecho de que tal límite aumenta el número de supersimetrías preservadas, hecho que es común a este procedimiento.

3.7. Discusión.

Obtuvimos, por varios procedimientos, soluciones a una teoría de supergravedad en 4 y 11 dimensiones. En 4 dimensiones fuimos desde resolver las ecuaciones de Einstein-Yang Mills con una propuesta de la métrica y de los campos adecuada, hasta el utilizar las ecuaciones de variaciones supersimétricas.

Este último método resultó ser útil por su sencillez (en contraste con las ecuaciones de Einstein, las de supersimetría son lineales y de primer orden) y en que automáticamente las soluciones encontradas preservan al menos una fracción de la supersimetría original. Como se mencionó en el capítulo 2, las soluciones son branas BPS.

También en 4 dimensiones fuimos capaces de obtener nuevas configuraciones del tipo de ondas planas paralelas al realizar el límite de Penrose de lo ya obtenido. Notamos que la supersimetría preservada en estos casos aumentó, un hecho que ha sido reportado previamente en la literatura al respecto [61, 64].

Si el obtener soluciones a las ecuaciones gravitacionales por sí solo representa un hecho interesante, no solo realizamos esto en nuestro trabajo sino fuimos más allá: debido al tipo de métrica propuesta para nuestras soluciones (factores de AdS) determinamos que, a partir de la solución de membrana de horizonte cercano y de la conjetura de Maldacena, la teoría de supergravedad 11 dimensional a la mano es dual a una mecánica cuántica superconforme que vive en la frontera del espacio solución.

La interpretación de estas soluciones como M-branas proviene del encajamiento de las soluciones en supergravedad 11 dimensional a partir del procedimiento de Cvetič et al [3].

Capítulo 4

Agujeros negros rotantes cargados.

Continuando la línea de investigación planteada en los capítulos anteriores, en este capítulo calculamos la entropía microscópica y macroscópica (a través de la fórmula de Bekenstein-Hawking) de un tipo de agujero negro en dimensiones mayores.

Ya que el sistema que estudiamos corresponde a un agujero negro arbitrariamente no extremal, revisamos en forma breve algunos estudios hechos a sistemas similares, particularmente los agujeros negros cuasi-extremales.

Basados en un modelo de branas y antibranas de Dirichlet de la teoría de cuerdas tipo IIB para construir el agujero negro, realizamos un cálculo de la entropía desde el punto de vista de supergravedad y también, una vez determinado el modelo microscópico, a partir del conteo de microestados correspondiente.

Los resultados del presente trabajo se encuentran publicados en [2].

4.1. Introducción.

De los fenómenos que se estudian en relatividad general los agujeros negros juegan un papel muy importante, desde el punto de vista conceptual y técnico; hemos citado ejemplos de esto en el capítulo 2.

Se ha determinado con anterioridad a partir de un cálculo semiclásico que los agujeros negros radian con un espectro térmico (la denominada radiación de Hawking, ver [9] y sección 1.3).

Posteriormente a este descubrimiento, y con la deducción de las ahora llamadas leyes de la mecánica de los agujeros negros mencionadas en el

capítulo 1, fué posible determinar la entropía termodinámicamente asociada a esta radiación (entropía de Bekenstein-Hawking). Sin embargo, dado que este resultado se obtuvo a través de un cálculo semiclásico surge la interrogante de darle una interpretación mecánico-estadística a este sistema termodinámico y, en particular, a la entropía.

Con estas premisas, y tomando en cuenta la discusión que tuvimos en el capítulo 2, es claro que tal interpretación solo es posible si se tiene una teoría de gravedad cuántica. Pero dicha teoría, al menos a la fecha, no se ha podido establecer por completo.

Así que un aspecto crucial de toda teoría cuántica de la gravedad es el describir exactamente la entropía de Bekenstein-Hawking desde un enfoque mecánico-estadístico.

Al momento existen dos candidatos fuertes para ser una teoría de gravedad cuántica: teoría de cuerdas y gravedad canónica en lazos. En ambos esquemas se han determinado características que permiten vislumbrar que estos modelos podrían llegar a cumplir esta meta (ver por ejemplo [17, 25], [65, 66] y el capítulo 2).

En teoría de cuerdas el éxito obtenido hasta el momento ha sido que esta es una teoría cuántica que incluye a la gravedad, por lo tanto, es una teoría de gravedad cuántica. Justamente por este carácter de la teoría de cuerdas se han determinado soluciones a las ecuaciones de movimiento que se obtienen en la misma que corresponden a agujeros negros extendidos en dimensiones mayores conocidas como p -branas [67].

Además, la identificación hecha por Polchinski [16] de que las branas de Dirichlet (D-branas)¹ son los constituyentes microscópicos de estos agujeros negros, ha permitido realizar el conteo de los microestados correspondientes a las cuerdas abiertas, portadores de los grados de libertad de las D-branas, que permita realizar el cálculo de la entropía (como trabajo pionero en esta dirección ver por ejemplo [17]).

Sin embargo, la mayoría de los casos trabajados hasta el momento se han restringido a agujeros negros extremales o cercanamente extremales, básicamente considerando un gas de cuerdas abiertas viviendo en las D-branas que forman el agujero negro. El caso de los agujeros negros lejos de la extremalidad (como el de Schwarzschild) ha sido a este respecto mucho más complicado de estudiar.

Con el fin de estudiar este tipo de agujeros negros arbitrariamente ex-

¹Una membrana de Dirichlet es un hiperplano fijo en el espacio donde los extremos de las cuerdas abiertas pueden anclarse; este anclaje corresponde a fijar condiciones de frontera de Dirichlet en las coordenadas correspondientes de las cuerdas, ver sección 2.1.

tremales se han propuesto varios modelos: en términos de la cuerda fundamental altamente excitada ([68]) y en términos de teoría de matrices ([69],[70]). Ambos enfoques han permitido determinar la forma funcional de la entropía microscópica que corresponde con la de Bekenstein-Hawking, aunque no han aportado una descripción completa a la termodinámica del agujero negro. Relacionado con el último enfoque se han realizado mapeos y dualidades de comportamientos cercanamente extremales a los lejanamente extremales, aunque la validez de tales cálculos aún no es muy clara [71],[72].

Otra aproximación ha sido realizada a la luz de la conjetura de Maldacena o correspondencia AdS/CFT ([31, 73]), donde se relacionan ciertos agujeros negros no asintóticamente planos con la mecánica cuántica de D0-branas.

Recientemente se ha demostrado que las características termodinámicas de los agujeros negros no extremales pueden ser descritas en términos de un sistema de branas y antibranas de Dirichlet a temperatura finita² [1, 74]. Particularmente, en esos trabajos se pudo demostrar que la entropía de la 3-brana negra estática de supergravedad tipo IIB (que corresponde a un agujero negro en 7 dimensiones) y la M2 y M5 branas estáticas de supergravedad 11 dimensional arbitrariamente no extremales puede ser reproducida a través de un modelo microscópico de branas y antibranas de Dirichlet a temperatura finita.

El hecho de que este modelo no haya sido explotado tan extensivamente como para el caso de los agujeros negros extremales y cercanamente extremales es debido a que no se entendía por completo por qué se podía tener un sistema estable de este tipo a pesar de contener estados taquiónicos en el espectro del mismo³.

No fue sino recientemente que ha sido posible entender las características de sistemas taquiónicos y cómo es posible obtener un sistema estable a partir de estos [76]. A esto se le denomina “condensación” del taquión. Un resultado de este análisis es que el efecto de agregar temperatura al sistema permite que haya posibilidad de no aniquilación entre las branas.

Este modelo ha reproducido perfectamente la forma funcional microscópica de la entropía. Más aún, los valores de la entropía en supergravedad y en el modelo microscópico coinciden hasta un factor de $2^{3/4}$.

Con esto en mente fuimos capaces de extender este análisis a branas cargadas y rotantes para valores arbitrarios de carga y rotación, y determi-

²Una antibrana es una membrana con carga opuesta, o lo que es lo mismo, con orientación invertida.

³La presencia del taquión evidencia una inestabilidad en el sistema: si tenemos un par de brana-antibrana estas tiende a colapsarse debido a la atracción electrostática.

namos que los valor de la entropía desde el punto de vista macroscópico y microscópico concuerdan.

Estructuramos este capítulo como sigue: en la primera parte enunciamos las características de los cálculos hechos en teoría de cuerdas sobre el conteo de entropía para agujeros y p -branas negras cercanamente extremales.

Posteriormente, discutimos el modelo microscópico de branas-antibranas y argumentamos bajo qué hipótesis es posible aplicar los resultados de [1, 74] a nuestro caso. En particular aclaramos por qué se justifica el empleo de la dualidad AdS/CFT, y el por qué se obtiene estabilidad debido a la temperatura del sistema.

Acto seguido, realizamos el cálculo de la entropía microscópica para la D3-brana rotante y en la última parte extendemos el análisis para el caso con carga. En ambos casos comparamos los resultados con la entropía de Bekenstein-Hawking. Por último analizamos nuestros resultados y establecemos posibles extensiones del estudio.

4.2. Agujeros negros no extremales.

Discutamos brevemente estudios previos en la literatura acerca de agujeros negros no extremales [75].

La forma más directa de obtener una configuración no extremal es comenzar con el agujero negro de Reissner-Norsdtröm (otra vez) y realizar un empuje (boost) con parámetros α_p , $p = 1, 5$, donde p determina la dimensión de las branas que conforman el sistema. De acuerdo a la construcción que hicimos para el agujero negro de Tangherlini en el capítulo 2 necesitamos considerar intersecciones de D1 y D5 branas solamente.

Una vez que se realizan las transformaciones de empuje la métrica resultante para el agujero en 10 dimensiones es

$$ds_{10}^2 = (f_1 f_5)^{-1/2} (-dt^2 + dx_9^2) + \left(\frac{f_1}{f_5}\right)^{1/2} \sum_{i=5}^8 dx_i dx^i + (f_1 f_5)^{1/2} \sum_{i=1}^4 dx_i dx^i, \quad (4.1)$$

donde

$$f_p = 1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \sin^2 \alpha_p ,$$

y

$$r^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i dx^i$$

determina la posición del agujero visto desde el espacio transversal.

Al compactificar en un 5-toro (como es usual) para obtener el agujero negro en 5 dimensiones tenemos

$$\begin{aligned} ds_5^2 &= -F^{-1}Bdt^2 + F(B^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_3^2), \\ F &= (f_1f_5)^{1/3}, \\ B &= 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

De (4.2) es posible determinar el área y la entropía macroscópica

$$\begin{aligned} S_{\text{BH}} &= \frac{A}{4} = 4\pi C_5 (M_1 M_5)^{-1/2} \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_5, \\ M_1 &= \frac{R_9}{g}, \quad M_5 = \frac{V_5}{g}, \quad C_5 = \frac{r_0^2 V_5}{2g^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

con R_9, V_5 los volúmenes del espacio transversal donde enrrolla la brana respectiva. g es la constante de acoplamiento.

Es directo ver de la fórmula de la entropía (4.3) que la temperatura depende de los parámetros de empuje: $T \propto (\cosh \alpha_1 \cosh \alpha_5)^{-1}$, y por lo tanto el sistema tiene temperatura finita. El cálculo de la entropía microscópica es análogo al agujero negro extremal y es como sigue.

Si recordamos de la sección 2.1 para el caso extremal, agregar momento izquierdo a la D1-brana permite conservar el límite BPS; de tal forma que una configuración no extremal se obtiene al agregar una pequeña cantidad de momento derecho también: las cargas y “anticargas” se aniquilan y esto genera radiación de Hawking (temperatura finita): formalmente no agregamos carga pero la energía decrece. El cálculo funciona para configuraciones cercanamente extremas ya que esto permite despreocuparse de las interacciones entre el gas izquierdo y derecho y con ello sumar las entropías.

Sin embargo, el cálculo de la entropía es válido para momento (o cargas) suficientemente grande, así que requerimos para los momentos izquierdo y derecho $N_I \gg N_D \gg 1$, donde $Q_{\text{og}} = N_I - N_D$ es la carga total.

Sumando las entropías derecha e izquierda para esta configuración se obtiene

$$S = 2\pi\sqrt{Q_1 Q_5} \left(\sqrt{N_I} + \sqrt{N_D} \right), \quad (4.4)$$

que coincide con la ecuación de supergravedad (4.3) bajo la siguiente identificación

$$N_p = \frac{C_5}{M_p} \frac{e^{2\alpha_p}}{2}. \quad (4.5)$$

¡Éxito!

Con esta artillería teórica y matemática discutimos ahora un modelo que permite realizar el conteo de microestados para el caso arbitrariamente lejos de la extremalidad.

4.3. El modelo.

Como ya hemos apuntado, nuestro sistema está constituido por un sistema de branas y antibranas de Dirichlet a temperatura finita, así que discutiremos las características más importantes de estas [1].

Recordemos que, a través de ciertas configuraciones de D-branas, es posible construir agujeros negros de distintos tipos, en particular estacionarios (rotantes) y con carga y en diversas dimensiones. Así que las características del agujero negro en el sistema que construiremos no necesita mayor explicación en su obtención, sino más bien nos enfocaremos en la determinación microscópica de la entropía a través del conteo de degeneración de estados.

Como se ha hecho antes, pensemos en un par de brana y antibrana de Dirichlet 9-dimensionales (la extensión a sistemas con branas de distintas dimensiones, en particular de D3-branas se verá más adelante) de supergravedad IIB, cuyos grados de libertad están descritos en términos de las cuerdas abiertas que yacen en ellas.

Tomando las excitaciones no masivas del sistema tenemos, para el caso de las 9-9 y $\bar{9}-\bar{9}$, el sector gravitacional, los campos de norma asociados y los campos fermiónicos. Pero en el sector $9-\bar{9}$ se obtienen un campo taquiónico ϕ y más fermiones [12, 13]. Como dijimos antes, la existencia de tal campo se debe a que el sistema es inestable.

Para entender la inestabilidad del sistema veamos el potencial del taquión [76]

$$V(\phi) = 2\tau_9 \exp [-2|t(\phi)|^2], \quad (4.6)$$

donde

$$|t(\phi)| = \text{Erf}^{-1} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} |\phi| \right] \quad (4.7)$$

como se muestra en la figura (4.3).

La inestabilidad se puede ver directamente de la figura: en $\phi = 0$ (vacío de cuerdas abiertas) tenemos una inestabilidad debido a que es un punto crítico máximo del potencial. La explicación es que como las branas tienen carga de signos opuestos, estas tienden a aniquilarse debido a la atracción eléctrica.

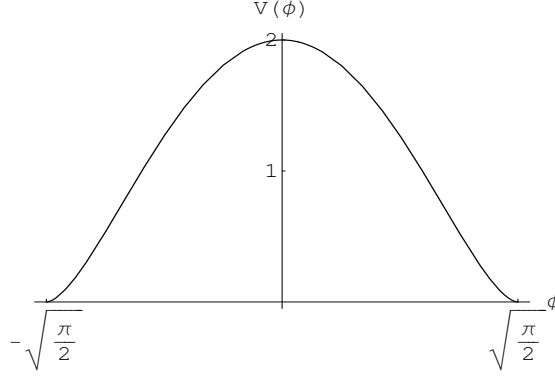


Figura 4.1: Potencial del taquión para $\tau_9 = 1$. El mínimo se encuentra en $\pm\sqrt{\pi/2}$.

La configuración estable se encuentra en $|\phi| = \sqrt{\pi/2}$ (vacío de cuerdas cerradas) donde solo quedan excitaciones de cuerdas cerradas. Esto corresponde al caso en que las branas se han aniquilado, dejando perturbaciones puramente gravitacionales, por eso el nombre de vacío de cuerdas cerradas. La remoción del taquión del espectro en este punto se puede ver de la masa del mismo en el mínimo: $m^2 \rightarrow \infty$.

Para poder tener un mínimo estable cerca de $\phi = 0$ (o al menos en un punto lejos del mínimo absoluto en $\sqrt{\pi/2}$) necesitamos agregar temperatura al sistema: esto permite que el mínimo del potencial efectivo se desplace hacia el origen y para una temperatura suficientemente alta esperamos que este se encuentre finalmente allí ⁴. Ver figura (4.3).

La configuración óptima corresponde a la que minimice la energía libre del sistema, que depende necesariamente de la temperatura.

Para ver esto escribimos la energía libre del sistema de branas + taquiones + gas de cuerdas a temperatura finita $T = \beta^{-1}$

$$F(\phi, \beta) = 2\tau_9 e^{-2|t|^2} + \frac{\Omega_8}{(2\pi)^9} \beta^{-10} \int_0^\infty dx x^8 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{x^2 + \beta^2 M^2} \right) \right], \quad (4.8)$$

donde Ω_8 es el volumen de la 8-esfera unitaria (el espacio transversal a la 9-brana) y M es la energía del gas.

Ahora, considerando que la temperatura es pequeña (menor que la temperatura de Hagedorn) $e^{\beta M} \gg 1$, es posible integrar la ecuación (4.8) y

⁴Moverse hacia $\phi = 0$ cuesta energía pero también reduce la masa del taquión y esto incrementa la entropía del gas de taquiones. Necesitamos ver cuál de estos procesos es el dominante.

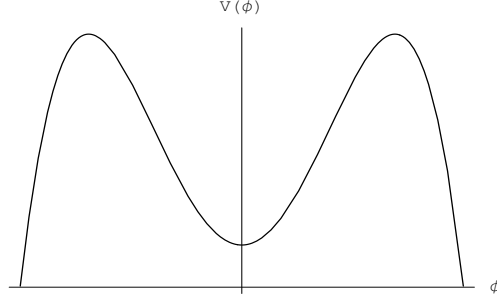


Figura 4.2: Modificación del potencial del taquión al agregar temperatura al sistema de brana-antibrana. Hemos eliminado las referencias en los ejes y fijado $\tau_9 = 1$.

determinar el valor de β y M que optimizan F .

No es difícil ver que bajo las condiciones citadas la masa M del gas de cuerdas abiertas es inversamente proporcional a la temperatura β y que con estas características (bajas temperaturas) los grados de libertad de cuerda abierta ya no son despreciables. De esta forma vemos que efectivamente, al agregar una temperatura permite tener un sistema con un mínimo que se ha recorrido del mínimo de cuerdas cerradas.

Por otro lado, si estudiamos un sistema de múltiples branas y antibranas, N por ejemplo, se puede realizar un análisis semejante al del de un solo par discutido hasta ahora. Es claro que en este caso la energía libre dada en (4.8) dependerá explícitamente de este parámetro. No es difícil convencerse de que básicamente el efecto neto de considerar N pares de branas es intercambiar g_s por Ng_s . Sin embargo, como veremos, las consecuencias en el comportamiento del sistema son más que interesantes.

Específicamente veamos este cálculo para un sistema de N ($D3 - \bar{D}3$) branas. Si empezamos en $\phi = 0$ y deslizamos sobre el potencial disminuimos la energía del sistema pero también damos masa a los campos de norma relativos a la configuración $3 - \bar{3}$. ¿Cuál efecto domina?

El sistema consiste de un sistema de N parejas de branas y antibranas, un condensado de taquiones y un gas de gluones. La energía libre, análoga a la ecuación (4.8) es

$$F(\phi, \beta) = 2\tau_3 \text{Tr} e^{-2|t|^2} + \frac{4\pi}{(2\pi)^3} cN^2 \beta^{-4} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[\frac{1 - \exp\left(-\sqrt{x^2 + \beta^2 m^2}\right)}{1 + \exp\left(-\sqrt{x^2 + \beta^2 m^2}\right)} \right], \quad (4.9)$$

donde ahora t es una matriz $N \times N$, $m \sim |\phi|$ es la masa adquirida por los gluones debido al mecanismo de Higgs y $c = 8$. Si empezamos en $\phi = 0$ y permitimos que un solo taquión se condense (un par se aniquile) por una cantidad $\delta\phi$ le damos masa δm a N de las N^2 partículas y (4.9) cambia por

$$\delta F = -4\tau_3(\delta\phi)^2 + \frac{1}{2}N\beta^{-2}(\delta m)^2, \quad (4.10)$$

que es positivo para temperaturas grandes. De esto se puede ver que si

$$T \geq \frac{T_H}{\sqrt{g_s N}}, \quad (4.11)$$

donde T_H es la temperatura de Hagedorn, el vacío de cuerdas abiertas (que era el punto inestable) ahora es un mínimo de la energía y el sistema no se aniquila. Entonces al agregar temperatura suficientemente alta (por debajo de la de Hagedorn) es posible tener un sistema estable de branas-antibranas.

El valor de N no es fijo, sino que debe ser determinado termodinámicamente. Es necesario determinar el valor de N , en función de la temperatura, que permita que la energía libre sea mínima., como lo vimos arriba. Esto es lo que realizamos en nuestro análisis.

Si recordamos que el sistema solo tiene acceso a temperaturas por debajo de la Hagedorn ($T < T_H$) y de la desigualdad de estabilidad (4.11) es directo ver que necesariamente estamos en el regimen $g_s N \gg 1$. Esto resulta ser crucial en la determinación de la entropía.

4.4. Agujero negro rotante como un sistema de branas.

Como hemos visto, se han obtenido soluciones de p -branas negras que se pueden interpretar como agujeros negros multidimensionales, y estos a su vez se pueden obtener a partir de configuraciones de D-branas. De esta forma estudiaremos un tipo de agujero negro arbitrariamente lejos de la extremalidad.

En lo que sigue tomamos la solución de 3-brana negra, que corresponde a un agujero negro 7-dimensional. Los parámetros de momento angular de este agujero negro están relacionados con 3 planos de rotación en 10 dimensiones. La D3-brana rotante obtenida en [77] contiene solo uno de los tres parámetros de momento angular distinto de cero (ver también [78]).

La forma de obtener esta solución de 3-brana negra se menciona en [79]: partiendo de un conjunto de M2 branas rotantes de supergravedad

11 dimensional y realizando una reducci3n dimensional en una direcci3n espacial se obtiene la D3-brana de supergravedad IIB 10 dimensional rotante con carga.

La forma de la m3trica es

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{f}}(-h dt^2 + d\vec{x}^2) + \sqrt{f} \left[\frac{dr^2}{\tilde{h}} - \frac{2lr_0^4 \cosh \alpha}{r^4 \Delta f} \sin^2 \theta \, dt d\phi \right. \\ \left. + r^2 (\Delta d\theta^2 + \tilde{\Delta} \sin^2 \theta \, d\phi^2 + \cos^2 \theta \, d\Omega_3^2) \right],$$

donde

$$\begin{aligned} f &= 1 + \frac{r_0^4 \sinh^2 \alpha}{r^4 \Delta}, \\ \Delta &= 1 + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{r^2}, \\ \tilde{\Delta} &= 1 + \frac{l^2}{r^2} + \frac{r_0^4 l^2 \sin^2 \theta}{r^6 \Delta f}, \\ h &= 1 - \frac{r_0^4}{r^4 \Delta}, \\ \tilde{h} &= \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{r_0^4}{r^4} \right). \end{aligned}$$

Como es usual, se pueden definir cantidades ADM para este agujero negro multidimensional. Particularmente para la masa

$$m_{\text{SG}} \equiv \frac{M_{\text{SG}}}{V} = \frac{\pi^3}{\kappa^2} r_0^4 \left(\cosh 2\alpha + \frac{3}{2} \right), \quad (4.12)$$

donde V es el volumen del espacio transversal tridimensional. El momento angular (el plano de rotaci3n es conjugado a la variable ϕ , como puede verse en 4.12) es

$$j_{\text{SG}} \equiv \frac{J_{\text{SG}}}{V} = \frac{\pi^3}{\kappa^2} l r_0^4 \cosh \alpha. \quad (4.13)$$

La etiqueta SG nos indica las caracter3sticas que se determinan a partir de supergravedad, en contraste con las que determinaremos microsc3picamente.

El c3lculo de los par3metros macrosc3picos, como masa, carga y momento angular se calcula a partir de la forma asint3tica de la m3trica N -dimensional como sigue [80].

Se considera que la m3trica es una peque1a perturbaci3n de la m3trica plana, para espacios asint3ticamente planos, esto es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (4.14)$$

Bajo la norma $(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\alpha_\alpha)_{,\nu} = 0$ las ecuaciones de Einstein, a orden dominante, se reducen a

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{N-1} \eta_{\mu\nu} T \right) \equiv -16\pi G \bar{T}_{\mu\nu}. \quad (4.15)$$

De la función de Green para el laplaciano podemos desarrollar la solución en la región asintótica

$$h_{\mu\nu}(x^i) = \frac{16\pi G}{A_{N-1}} \left(\frac{1}{(N-2)r^{N-2}} \int \bar{T}_{\mu\nu} d^N y + \frac{x^k}{r^N} \int y^k \bar{T}_{\mu\nu} d^N y + \dots \right). \quad (4.16)$$

Usando [81]

$$\begin{aligned} \int T_{00} d^N y &= M, \\ \int x^k T^{l0} d^N x &= \frac{1}{2} J^{kl}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

podemos determinar los valores para la masa (ADM) y el momento angular de la forma asintótica de la métrica:

$$\begin{aligned} h_{00} &\approx \frac{16\pi G}{(N-1)A_{N-1}} \frac{M}{r^{N-2}}, \\ h_{ij} &\approx \frac{16\pi G}{(N-1)(N-2)A_{N-1}} \frac{M}{r^{N-2}} \delta_{ij}, \\ h_{0i} &\approx \frac{-8\pi G}{A_{N-1}} \frac{x^k}{r^N} J^{ki}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

En (4.12) y (4.13) se han empleado estas definiciones.

Analizando la métrica (4.12) vemos que hay un horizonte en $\tilde{h} = 0$. A partir de ello podemos calcular el radio del mismo

$$r_H = \sqrt{\sqrt{r_0^4 + l^4/4} - l^2/2}. \quad (4.19)$$

Justamente esto es lo que le da el carácter de agujero negro.

Empleando el resultado para el cálculo de la entropía de Bekenstein-Hawking calculamos la entropía microscópica para este agujero rotante

$$S_{\text{SG}} \equiv \frac{A_H/4G_N}{V} = \frac{2\pi^2}{\kappa^2} r_0^4 \sqrt{\sqrt{r_0^4 + l^4/4} - l^2/2}. \quad (4.20)$$

Recordemos que en teoría de cuerdas IIB y IIA (de las cuales obtenemos la supergravedad correspondiente) además del campo gravitatorio existe un campo de norma NS-NS. De esta 5-forma NS-NS obtenemos la carga del agujero negro con la ley de Gauss

$$Q_{\text{SG}} = \frac{\pi^{5/2}}{\kappa} r_0^4 \sinh 2\alpha. \quad (4.21)$$

De estas fórmulas podemos estudiar dos casos interesantes: uno con carga y otro neutro.

4.5. Caso neutro

Podemos ver de (4.21) que la carga está relacionada con el parámetro α , así que el hacer $\alpha \rightarrow 0$ corresponde a considerar el caso neutro. La masa y el momento angular quedan como

$$m_{\text{SG}} = \frac{5\pi^3}{2\kappa^2} r_0^4, \quad j_{\text{SG}} = \frac{\pi^3}{\kappa^2} l r_0^4. \quad (4.22)$$

De esto podemos determinar la entropía (4.20) en términos de las variables de masa y momento angular

$$S_{\text{SG}} = \sqrt{\sqrt{2^9 5^{-5} \pi \kappa^2 m_{\text{SG}}^5 + 4\pi^4 j_{\text{SG}}^4} - 2\pi^2 j_{\text{SG}}^2}. \quad (4.23)$$

Para efectos de comparar los resultados obtenidos en supergravedad con los que se obtienen en el modelo microscópico más adelante escribimos el desarrollo de la entropía para valores pequeños de j_{SG} . De ello

$$\begin{aligned} S_{\text{SG}} = & 2^{9/4} 5^{-5/4} \pi^{1/4} \kappa^{1/2} m_{\text{SG}}^{5/4} \left[1 - 2^{-9/2} 5^{5/2} \pi^{3/2} \frac{j_{\text{SG}}^2}{\kappa m_{\text{SG}}^{5/2}} \right. \\ & \left. + 2^{-10} 5^5 \pi^3 \frac{j_{\text{SG}}^4}{\kappa^2 m_{\text{SG}}^5} + \mathcal{O}(j_{\text{SG}}^6) \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como mencionamos anteriormente, en [1] se demostró que la entropía correspondiente al caso estático (el primer término de la ecuación anterior) se reproduce a través de un modelo de N D3-branas y N antibranas. Allí se considera a los grados de libertad de las cuerdas abiertas que yacen en las branas como un “gas”, y el régimen de energía del mismo les da una interpretación en una teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$.

De tal forma, la energía e de los gases está determinada por

$$m_{\text{FT}} = 2N\tau_3 + e, \quad (4.25)$$

donde el miembro izquierdo es la masa del agujero negro y el primer miembro del lado derecho es la energía del conjunto de branas. $\tau_3 = \sqrt{\pi}/\kappa$ es la tensión de las mismas. La entropía en este caso corresponde completamente a los gases.

Como ya sabemos, nuestro cálculo se encuentra en la región correspondiente a $g_s N \gg 1$, pero es justamente en este caso cuando se puede utilizar la dualidad *AdS/CFT* [31] (ver el apéndice).

Utilizando resultados a la luz de *AdS/CFT* se ha podido determinar (ver por ejemplo [82, 83]) que la entropía en este caso es⁵

$$S_{\text{FT}} = 2^{9/4} 3^{-3/4} \pi^{1/2} (e/2)^{3/4} \sqrt{N} . \quad (4.26)$$

Si queremos reproducir el caso estático para nuestro sistema (tomar solo el primer término en (4.24)) necesitamos determinar la N que optimiza la entropía (valor de equilibrio) para una masa dada. Utilizando (4.26) y (4.25) tenemos

$$N = \frac{m_{\text{FT}}}{5\tau_3} \quad \Longleftrightarrow \quad e = \frac{3}{5} m_{\text{FT}} . \quad (4.27)$$

Con este valor podemos ver que la entropía macroscópica y la microscópica coinciden perfectamente. Todo esto nos motiva a tratar de probar si un análisis paralelo se puede realizar en nuestro caso no estático.

Como se menciona en [77] el momento angular macroscópico del agujero negro corresponde, en el lado microscópico, a una densidad de carga total de Ramond-Ramond de los gases de SYM, $j_{\text{FT}} = j_{\text{SG}}$. El argumento básicamente es que las rotaciones son generadas por el grupo de simetría $\text{SO}(3)$; el grupo correspondiente en el modelo microscópico genera una simetría (denominada simetría R) cuyas cargas conservadas son las mencionadas arriba.

De allí mismo podemos tomar la expresión para la entropía del gas fuertemente acoplado (ver también [78])

$$s(e, j, N) = \frac{2^{5/4} 3^{-3/4} \sqrt{\pi N} e^{3/4}}{\sqrt{\sqrt{1+\chi} + \sqrt{\chi}}} , \quad (4.28)$$

donde

$$\chi = \frac{27\pi^2 j^4}{8N^2 e^3} . \quad (4.29)$$

De nuevo, N es el número de branas, j es el momento angular y e es la energía del gas.

En nuestro caso tenemos un sistema de dos gases, uno para cada sistema de branas y antibranas. Análogamente al caso estudiado anteriormente podemos suponer (y comprobar más tarde) que cada gas tiene acceso al doble de la energía que le correspondería. Para obtener el caso neutro es fácil convencerse de que esto se logra si tomamos $N = \bar{N}$. Debido a esta simetría (el mismo número de branas y antibranas) también suponemos que la densidad de carga de cada gas es la mitad del total, $j = j_{\text{FT}}/2$.

⁵Aquí proponemos, como en [1], que la energía disponible para ambos gases es la misma.

Por lo tanto, la entropía del sistema es

$$S_{\text{FT}} = \frac{2^{9/4} 3^{-3/4} \sqrt{\pi N} e^{3/4}}{\sqrt{\sqrt{1+\chi} + \sqrt{\chi}}} , \quad \chi = \frac{27\pi^2 j_{\text{FT}}^4}{2^7 N^2 e^3} . \quad (4.30)$$

En principio podemos determinar el valor de equilibrio del sistema maximizando el valor de la entropía para N . Como primera aproximación tomamos una j_{SG} pequeña y desarrollamos (4.30) en potencias de esta

$$S_{\text{FT}} = 2^{9/4} 3^{-3/4} \sqrt{\pi N} e^{3/4} \left(1 - \frac{\sqrt{\chi}}{2} + \frac{\chi}{8} + \dots \right) , \quad (4.31)$$

A segundo orden realizamos $\partial S_{\text{FT}} / \partial N = 0$. Determinamos que $N = \frac{m_{\text{FT}}}{5\tau_3} \iff e = \frac{3}{5} m_{\text{FT}}$, ¡el mismo resultado que para el caso estático obtenido anteriormente en [1]!

Finalmente la entropía es

$$S_{\text{FT}} = 2^{9/4} 5^{-5/4} \pi^{1/4} \kappa^{1/2} m_{\text{FT}}^{5/4} \left[1 - 2^{-9/2} 5^{5/2} \pi^{3/2} \frac{j_{\text{FT}}^2}{\kappa m_{\text{FT}}^{5/2}} + 2^{-10} 5^5 \pi^3 \frac{j_{\text{FT}}^4}{\kappa^2 m_{\text{FT}}^5} + \mathcal{O}(j_{\text{FT}}^6) \right] , \quad (4.32)$$

que felizmente corresponde al valor de supergravedad, al orden que estamos trabajando (4.24).

Dada esta concordancia entre esquemas de cálculo de entropía realizamos el mismo estudio para momento angular j_{SG} arbitrario. De nuevo, y con el mismo procedimiento determinamos que $N = \frac{m_{\text{FT}}}{5\tau_3} \iff e = \frac{3}{5} m_{\text{FT}}$.

Escribiendo esto en (4.30) obtenemos

$$S_{\text{FT}} = \frac{2^4 5^{-5/4} \pi^{1/4} \kappa m_{\text{FT}}^{5/2}}{\sqrt{\sqrt{2^7 \kappa^2 m_{\text{FT}}^5 + 5^5 \pi^3 j_{\text{FT}}^4} + 5^{5/2} \pi^{3/2} j_{\text{FT}}^2}} . \quad (4.33)$$

Al multiplicar esta expresión por $\sqrt{\sqrt{2^7 \kappa^2 m_{\text{FT}}^5 + 5^5 \pi^3 j_{\text{FT}}^4} - 5^{5/2} \pi^{3/2} j_{\text{FT}}^2}$ en el numerador y denominador es fácil ver que este resultado y el de (4.23) ¡coinciden exactamente!

4.6. Caso cargado.

¿Es posible realizar el mismo análisis para el caso con carga?

Como antes, es directo ver que el caso cargado corresponde a considerar $\alpha \neq 0$.

Reescribimos la expresión para la entropía (4.20)

$$S_{\text{SG}} \equiv \frac{A_H/4G_N}{V} = \frac{2\pi^2}{\kappa^2} r_0^4 \sqrt{\sqrt{r_0^4 + l^4/4} - l^2/2} . \quad (4.34)$$

Para estudiar el modelo microscópico introducimos el nuevo parámetro de carga, que es solo la diferencia entre el número de branas y antibranas

$$Q_{\text{FT}} = N - \bar{N} \neq 0 . \quad (4.35)$$

Es claro que queremos realizar un análisis paralelo al caso neutro. Entonces, además de la carga hacemos una separación de los momentos angulares para cada sistema de branas

$$j_{\text{FT}} = j + \bar{j} . \quad (4.36)$$

Con esta información tenemos los siguientes ingredientes: un par de gases de SYM con densidad de carga $j, \bar{j}$ y energía e (la misma para ambos). Dado que ahora el sistema contiene un número de branas y antibranas diferente, la energía total del sistema la determinamos de la siguiente forma

$$m_{\text{FT}} = (N + \bar{N})\tau_3 + e . \quad (4.37)$$

Entonces, la entropía determinada a partir del modelo microscópico es la suma de las correspondientes a cada gas. Así que

$$S_{\text{FT}} = \frac{2^{5/4} 3^{-3/4} \sqrt{\pi N} e^{3/4}}{\sqrt{\sqrt{1+\chi} + \sqrt{\chi}}} + \frac{2^{5/4} 3^{-3/4} \sqrt{\pi \bar{N}} e^{3/4}}{\sqrt{\sqrt{1+\bar{\chi}} + \sqrt{\bar{\chi}}}} , \quad (4.38)$$

donde

$$\chi = \frac{27\pi^2 j^4}{8N^2 e^3} , \quad \bar{\chi} = \frac{27\pi^2 \bar{j}^4}{8\bar{N}^2 e^3} . \quad (4.39)$$

Podemos intentar determinar, como antes, el valor de los parámetros del sistema que nos den una configuración estable, esto es, $(N, \bar{N}, j, \bar{j})$. Sin embargo, dada la expresión tan complicada para la entropía (4.38) este cálculo ya no es trivial.

En vez de eso, y de acuerdo a la experiencia ganada con los casos anteriores propondremos (y de nuevo verificaremos más adelante) que los valores de estos parámetros son los mismos que los correspondientes de supergravedad. Con esto queremos decir que de las expresiones de momento angular total y carga de supergravedad (4.13) y (4.21), al ver la forma específica en que se forma la expresión al sumar dos cantidades (funciones hiperbólicas) proponemos que nuestras variables se comportan de esa misma forma.

De nuevo, del caso analizado en [1] para la configuración estática cargada y de (4.21), postulamos que los valores de equilibrio son

$$N = \frac{\pi^{5/2}}{2\kappa} r_0^4 e^{2\alpha}, \quad \bar{N} = \frac{\pi^{5/2}}{2\kappa} r_0^4 e^{-2\alpha}. \quad (4.40)$$

Con esto es directo ver que el valor de la energía correspondiente es

$$e = \frac{3\pi^3}{2\kappa^2} r_0^4, \quad (4.41)$$

y de nuevo postulamos que los gases tienen acceso al doble de la energía que les corresponde.

La manera de repartir la rotación (o la densidad de carga de los gases) en el sistema se puede inferir de (4.13), así que proponemos

$$j = \frac{\pi^3}{2\kappa^2} l r_0^4 e^\alpha, \quad \bar{j} = \frac{\pi^3}{2\kappa^2} l r_0^4 e^{-\alpha}. \quad (4.42)$$

Usando (4.40- 4.42), los coeficientes en (4.39) se reducen a

$$\chi = \frac{l^4}{4r_0^4} = \bar{\chi}. \quad (4.43)$$

Con esta información escribimos la entropía microscópica (4.38)

$$S_{\text{FT}} = \frac{2\pi^4 \kappa^{-2} r_0^6 \cosh \alpha}{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + l^4/4} + l^2/2}}. \quad (4.44)$$

De nuevo, multiplicando esta expresión por

$$\frac{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + l^4/4} - l^2/2}}{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + l^4/4} - l^2/2}}$$

obtenemos la misma expresión que en (4.20).

Esto nos permite ver que nuestra suposición de tomar los valores del caso estático para el caso rotante es correcta. Falta determinar que estos valores efectivamente proporcionan el estado de equilibrio.

Procedemos directamente de (4.38). Calculamos las variaciones de esta expresión con respecto a los parámetros: $\partial S_{\text{FT}}/\partial N = \partial S_{\text{FT}}/\partial \bar{N} = \partial S_{\text{FT}}/\partial \mathbf{J} = \partial S_{\text{FT}}/\partial \bar{\mathbf{J}} = 0$.

Originalmente resolver ese sistema de ecuaciones fue imposible y lo sigue siendo, así que lo que hicimos fué tomar los valores propuestos para los parámetros y sustituirlos en estas ecuaciones: ¡efectivamente son los valores de equilibrio!

Así que hemos determinado

- Una forma de calcular microscópicamente la entropía de un agujero negro rotante y cargado arbitrariamente lejos de la extremalidad.
- Habiendo obtenido la entropía a través de la fórmula de Bekenstein-Hawking, resulta que ambos cálculos coinciden exactamente.

4.7. Discusión.

En este capítulo de nuestro trabajo demostramos que el proponer como constituyentes microscópicos de un agujero negro multidimensional (la 3-brana negra rotante) un sistema de branas y antibranas a temperatura finita propuesto originalmente en [1] permite no solo obtener de manera relativamente simple la entropía microscópica del sistema, sino que la entropía microscópica y la macroscópica (Bekenstein-Hawking) coinciden exactamente.

Sin embargo, todavía existen algunos puntos por discutir. Primero, existe la justificación del porqué utilizamos la dualidad AdS/CFT en este caso: como se menciona en el artículo original de Maldacena [31], la aplicación de la dualidad se da justamente en el régimen de acoplamiento en el que se encuentra nuestro sistema, $g_s N \gg 1$.

La importancia de emplear dicha dualidad es evidente: la manera en que fué determinada la misma, y los casos en que ha sido empleada hasta ahora, ha sido para casos extremales y cercanamente extremales, cosa que en nuestro caso no aplica, ya que los valores del momento angular, la carga y la masa del agujero negro son arbitrarios. Además, el valor de N , que en el caso original pueden ser arbitrarios y está determinado solo por su relación con la

carga Q , en nuestro caso es determinado termodinámicamente al justificar la estabilidad de nuestro sistema.

Con todo esto, aún existe un punto por aclarar. En el trabajo precedente se observó que el hecho de que los cálculos macro y microscópicos de la entropía difieren por un factor numérico puede tener una posible explicación al considerar que los gases y “antigases” en el modelo tienen acceso al doble de la energía que les correspondería. En nuestro caso realizamos una hipótesis semejante para nuestros cálculos.

Como vimos, el emplear esto nos llevó a determinar que los resultados coinciden exactamente. Sin embargo, aunque en este trabajo no discutimos posibles soluciones o explicaciones a este hecho, posteriormente a la publicación de nuestro trabajo se han propuesto posibles argumentos que curen esta situación. Esto en si abre la posibilidad de continuar nuestro análisis con ese objetivo.

Y como siempre, en principio es posible extender nuestro análisis a efectos de poder comparar otras cantidades además de la entropía, o bien, el de determinar la misma para agujeros negros distintos al analizado aquí.

Hasta el momento de escribir esta tesis se han hecho extensiones de nuestro análisis para estudiar configuraciones de agujeros negros de distintas dimensiones, agujeros negros con cargas múltiples, el análogo del agujero de Schwarzschild. En todos ellos se obtienen resultados semejantes a los que obtuvimos nosotros en lo referente a la entropía de estos sistemas. Ver [85]

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas.

El objetivo de la presente tesis ha sido el de estudiar algunos aspectos gravitacionales en una teoría de gravedad cuántica: teoría de cuerdas. Particularmente estudiamos

- soluciones torcidas supersimétricas de supergravedad;
- dualidad existente entre una teoría de supergravedad y una mecánica cuántica supersimétrica a la luz de la conjetura de Maldacena;
- entropía microscópica de un agujero negro extendido en dimensiones mayores con características de no extremalidad.

Para redondear un poco nuestra idea original de estudiar los distintos modelos de gravedad cuántica (gravedad canónica en lazos) y no solo la teoría de cuerdas, expusimos al inicio un breve resumen de otros aspectos gravitacionales (modelos cosmológicos) estudiados, y algunos similares en otro contexto (entropía de agujeros negros en gravedad en lazos). Esto nos sirvió para ubicar nuestro trabajo entre la vasta bibliografía existente en la comunidad y en la línea de investigación más interesante en la actualidad.

Como comparación podemos decir que la mayor desventaja del estudio de agujeros negros en lazos es que existe una ambigüedad en la teoría. Esto evita determinar si cálculos realizados en distintos esquemas corresponden o no a situaciones físicamente equivalentes. Tal falta de predicción está codificada, al menos en lo referente a los agujeros negros, en el denominado parámetro de Immirzi. De hecho, tal vez debamos decir que es sorprendente que cálculos realizados en distintos enfoques *coincidan*.

Vimos también que existen resultados muy interesantes en lo que a modelos cosmológicos respecta, en ambas teorías. Considero que la mayor limitación de los resultados obtenidos en cuerdas es la falta de una manera

consistente de obtener la fenomenología del universo debido a la gran cantidad de posibilidades de compactificaciones y de campos que se obtienen en tal procedimiento, aunado a una falta de control de los fenómenos a la escala de Planck (particularmente la singularidad inicial). Aunque recordemos que la teoría de cuerdas no solo pretende determinar las características gravitatorias del universo temprano sino *unificar* todas las componentes del mismo, tanto gravedad como materia. Por ello podríamos decir que era de esperarse tal cantidad de sobre-información.

Por otro lado, la comología en lazos no utiliza propiedades adicionales de la gravedad o de la materia de las observadas (supersimetría por ejemplo) para determinar propiedades cuánticas del universo. Particularmente hemos visto que, además de trabajar con un espacio tiempo “discreto” (exhibiendo las características de la teoría) se han obtenido resultados que apuntan a que los operadores geométricos cuánticos de la teoría son finitos al evolucionarlos hacia $t = 0$, y esto hace que el modelo de cosmología cuántica presentado sea consistente. Todavía queda mucho por estudiar en lo que respecta a caracterizar la fenomenología deducida de la teoría.

Recordemos finalmente que la principal característica de la teoría de cuerdas es la *unificación*, mientras que la de la gravedad canónica en lazos es la de ser una formulación independiente de fondo y no perturbativa.

Lo anteriormente expresado nos motiva a una posibilidad de estudio posterior, que es el de trabajar un modelo cosmológico en gravedad en lazos con características anisotrópicas y estudiar las desviaciones del comportamiento de un modelo anisotrópico existente en la literatura [84]. Este tal vez sea el primer objetivo a seguir en el futuro.

Con respecto a nuestro trabajo [4], podemos resaltar algunos puntos. La motivación para obtener soluciones gravitatorias está por demás fundamentada (ver sección 3.1). La fundamentación de nuestra aportación es, primero, que la manera de obtener soluciones a teorías extendidas de gravedad (supergravedad) presentada aquí es mucho más eficiente y sencilla de realizar. El trabajar ecuaciones de supersimetría lineales y de primer orden permite no emplear las ecuaciones de Einstein-Yang Mills, que son de segundo orden y no lineales. La comprobación de que tal solución satisface las ecuaciones de Einstein es directa. Además, el empleo de tales ecuaciones asegura, si así se desea, la preservación de cierto grado de supersimetría que, como mostramos, es importante.

Nuestro tratamiento, aunque no es nuevo, si presenta características únicas:

1. Proporciona una nueva solución de supergravedad supersimétrica: una

M2 brana encajada a partir de 4 dimensiones parcialmente supersimétrica.

2. Exhibe que la teoría de supergravedad que estamos estudiando es dual gravitacional a una mecánica cuántica supersimétrica (que es la reducción dimensional de una teoría de Yang Mills supersimétrica en 0+1 dimensiones), donde esta última es un sistema que no involucra a la gravedad.
3. Finalmente, hasta la fecha existen pocos ejemplos, además del nuestro, de soluciones torcidas en supergravedad que tras obtener una configuración de ondas gravitacionales a través del límite de Penrose posean características de supersimetría supernumeraria.

Es evidente las posibles extensiones del trabajo realizado en esta tesis, que son el estudiar sistemas alternos con un mayor contenido de campos de materia y con menos simetrías que las presentadas. A este respecto una posible modificación a nuestro sistema es el de considerar que en la separación del grupo de norma $SO(4)$ en dos copias de $SU(2)$ podemos considerar las respectivas constantes de acoplamiento distintas $g = \tilde{g}$. Tal extensión se ha mencionado en el artículo original de Zwiebach [57].

Por último, pero no menos importante, es el hecho de haber podido extender un análisis hecho a través de un modelo microscópico en [1] basado en una colección de branas y antibranas de Dirichlet para calcular la entropía microscópica de un tipo de agujero negro no extremal en [2].

Tal vez sea este trabajo el que nos acerque un poco más a dar respuesta o interpretación a uno de los problemas fundamentales planteados a toda teoría de gravedad cuántica. No solo fuimos capaces de reproducir exactamente la entropía de Bekenstein-Hawking para un agujero negro a partir de un modelo cuántico (existen muchas reproducciones de este tipo en la literatura), sino que el tipo de agujero negro que estudiamos es más cercano a uno astrofísico: los parámetros de carga y rotación para el mismo son arbitrarios, es no extremal.

Esto nos acerca a estudiar agujeros negros físicamente más realistas e interesantes, como el de Schwarzschild o Kerr, que no tienen carga.

Incluso, en nuestro trabajo la relación entre las entropías calculadas a partir de la de Bekenstein-Hawking y la microscópica es que son exactamente iguales, un problema que se presentó en el trabajo original con la existencia de un factor numérico de $2^{3/4}$. Debido a esta coincidencia entre esquemas es que extensiones de nuestro trabajo se han desarrollado desde su publicación (ver [85]).

Motivados por la buena acogida de nuestra propuesta en la comunidad podemos citar posibles extensiones por demás interesantes, así como el estudio de algunos puntos aún no explicados

1. Explicar por qué es necesaria la hipótesis de que ambos sistemas de grados de libertad en las branas se comportan como si tuvieran acceso a toda la energía disponible. Ya sea obteniendo alguna explicación física o determinando alguna otra forma de obtener el mismo resultado que sea físicamente más razonable (tal vez la interpretación de que se tiene acceso a **toda** la energía sea incorrecta).
2. Obtener alguna reducción dimensional de nuestro sistema o estudiar un sistema con características similares en 4 dimensiones (y con esto obtener el agujero negro de Schwarzschild o de Kerr).

Concluyendo, nuestros resultados aportan más elementos en el entendimiento de posibles aspectos cuánticos de la gravedad. Notablemente las dos propuestas más difundidas, gravedad canónica de lazos y teoría de cuerdas, conducen a resultados consistentes con las características que presentan clásica o semiclásicamente ciertos fenómenos gravitacionales, a saber, la entropía de agujeros negros y modelos cosmológicos.

Apéndice A

A.1. Cargas y tensiones en teoría de cuerdas.

A efecto de mostrar las relaciones entre los distintos parámetros en la teoría de cuerdas y toda la D-brano-logía en la literatura, condensamos algunas de las más relevantes.

- La tensión de la cuerda fundamental:

$$\tau_1^F \equiv T = (2\pi\alpha')^{-1}. \quad (\text{A.1})$$

- Tensión y carga de la Dp-brana

$$\tau_p = \mu_p g_s^{-1} = (2\pi)^{-p} \alpha'^{-(p+1)/2} g_s^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

- Relación entre las tensiones de las branas

$$\tau_p = \tau_{p'} \left(2\pi\sqrt{\alpha'}\right)^{p'-p}. \quad (\text{A.3})$$

- Constante de acoplamiento de Yang-Mills en una brana

$$g_{YM,p}^2 = \tau_p^{-1} (2\pi\alpha')^{-2}. \quad (\text{A.4})$$

- La constante de Newton 10 dimensional

$$2\kappa^2 \equiv 2\kappa_0^2 g_s^2 = (16\pi G_N) = (2\pi)^7 \alpha'^4 g_s^2. \quad (\text{A.5})$$

- Tensiones de las M2 y M5 branas de supergravedad 11 dimensional

$$\tau_2^M = (2\pi)^{-2} \ell_p^{-3}, \quad \tau_5^M = (2\pi)^{-5} \ell_p^{-6}. \quad (\text{A.6})$$

- Longitud de Planck 11 dimensional

$$\ell_p = g_s^{1/3} \sqrt{\alpha'}. \quad (\text{A.7})$$

- Constante de Newton 10 dimensional

$$16\pi G_N^{11} = 2\kappa_{11}^2, \quad \kappa_{11}^2 = 2^7 \pi^8 \ell_p^9. \quad (\text{A.8})$$

A.2. Reducción dimensional.

Ilustramos con un caso sencillo el procedimiento de reducción dimensional. Ver también [86].

Tomamos la acción en D dimensiones para gravedad-dilatón

$$S = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-G} e^{-2\phi_D} \left(R + 4[\nabla\phi_D]^2 \right), \quad (\text{A.9})$$

y tomamos una dimensión compacta

$$x^M = (x^\mu, x), \quad x \simeq x + 2\pi R. \quad (\text{A.10})$$

También la métrica se descompone como

$$G^{MN} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} + e^{2\sigma} A^\mu A^\nu & e^{2\sigma} A^\mu \\ e^{2\sigma} A^\nu & e^{2\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

donde A_μ, σ son el campo de norma y el escalar de Kaluza-Klein respectivamente. También el dilatón se reduce como

$$\phi_{D-1} = \phi_D - \frac{\sigma}{2}. \quad (\text{A.12})$$

Ahora uno hace una descomposición en modos de Fourier de la acción D dimensional y truncamos a los modos no masivos, de esta forma obtenemos una acción $D - 1$ dimensional

$$S = \frac{1}{2\kappa_{D-1}^2} \int d^{D-1} x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(R + 4[\nabla\phi]^2 - [\nabla\sigma]^2 - \frac{1}{4} e^{2\sigma} F^2 \right), \quad (\text{A.13})$$

donde F es la intensidad derivada del campo A y $\kappa_D^2 = \sqrt{2\pi R} \kappa_{D-1}^2$.

Para reducir dimensionalmente las teorías IIA y IIB es necesario hacerlo para el campo de NS B_{MN} y los diferentes campos tensoriales.

A.3. Supergravedad.

Las teorías de supergravedad contienen campos escalares, campos de norma y campos fermiónicos, que no existen en Relatividad General, pero aparte de esto ambas teorías son muy similares. Supergravedad $N = 8$ tiene la misma solución de Reissner-Nordström que RG cuando se tiene solo un campo de norma.

Estas supergravedades pueden ser introducidas en la teoría de supercuerdas a través de la supersimetría. por ejemplo, la supergravedad $N = 8$, $D = 4$ es el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas tipo II cuando se compactifica en un 6-toro.

Las cuerdas y p-branas en cuerdas pueden ser negras, o sea, se presentan un horizonte de eventos. El punto importante en el contexto de los agujeros negros es que en supergravedad existen estados BPS que son estables. A partir de ellos se pueden calcular características como la entropía de un arreglo de D-branas (que son BPS también) en acoplamiento débil. Por ello, al darle el carácter de “super” a la gravedad ha sido fundamental para el cálculo de la entropía de agujeros negros extremales y cercanamente extremales y no solo para evitar en cuerdas los campos taquiónicos, por ejemplo.

En la práctica, obtener supergravedades a partir de supercuerdas se realiza al desarrollar las funciones β de cuerda cerrada y mantener los términos de orden más bajo en la escala de la cuerda α' (pendiente de Regge), de allí el nombre de teorías efectivas. Las supergravedades son no renormalizables pero aún así son mucho más fáciles de manejar que la teoría completa. Muchas de las propiedades de las teorías de supergravedad se obtienen directamente de la teoría de supercuerdas de la cual deriva, por ejemplo $IIA_c \rightarrow IIA_g$ y similarmente para las tipo IIB. La distinción entre las dos es a través del contenido de campos de las mismas: formas de norma de distintos rangos $H_{m_1, \dots, m_p}$.

Para ver cuáles campos son permitidos es mejor estudiar los operadores de vértice $V = S_{\text{izq}}^\alpha [CH_{m_1, \dots, m_{p+2}} \gamma^{m_1, \dots, m_{p+2}}]_{\alpha\beta} S_{\text{der}}^\beta$, donde S es un espinor de Ramond, H las p-formas de norma y $C\gamma^m C^{-1} = -(\gamma^m)^T$.

Junto con las condiciones de frontera para los espinores izquierdos y derechos [87]

$$S_R = \pm \Gamma^0 \dots \Gamma^p S_L, \quad (\text{A.14})$$

se sigue que la misma (opuesta) paridad para $\gamma^{m_1, \dots, m_{p+2}}$ implica rango impar (par) para H . Una relación similar se obtiene de esta condición para los parámetros de supersimetría

$$\epsilon_D = \Gamma^0 \dots \Gamma^p \epsilon_I. \quad (\text{A.15})$$

Estas son las condiciones que deben de cumplir los parámetros espinoriales para que se preserve cierto grado de supersimetría, como se discute en el texto.

A.4. Dualidad AdS/CFT.

Mostramos la dualidad gravedad/teoría de campos en su forma más simple. El ejemplo más directo es el de un sistema de $N = Q_3$ D3-branas [31, 38]. La observación fundamental sobre este sistema es que existe un régimen en el espacio de parámetros donde las descripciones de supergravedad y de las D-branas son válidas.

- **D-branas.** Consideremos un sistema de N D3-branas en la teoría de cuerdas. En este existen dos tipos de excitaciones: aquellas de cuerdas abiertas (que describen las excitaciones de las D-branas) y de cuerdas cerradas (excitaciones gravitacionales del espacio de “bulto”). La acción del sistema toma la forma

$$S = S_{bulto} + S_{brana} + S_{int}, \quad (\text{A.16})$$

donde S_{int} corresponde a los términos de interacción entre las diferentes excitaciones. Si se considera el sistema a bajas energías

$$\alpha' \rightarrow 0, \quad g_s N, \frac{R}{\alpha'} \text{ fijos}, \quad (\text{A.17})$$

con R la distancia típica de separación de las branas, obtenemos una teoría efectiva con solo los estados no masivos tomados en cuenta.

Los estados de cuerda cerrada corresponden a la supergravedad en 10 dimensiones, y los de cuerda abierta forman un súper-multiplete con $\mathcal{N} = 4$ en las branas (3+1 dimensional) que corresponden a una teoría $\mathcal{N} = 4$, $U(N)$ de super Yang-Mills.

Precisamente en el límite de bajas energías $\kappa \sim g_s \alpha' \rightarrow 0$ de tal forma que los términos de interacción desaparecen. De tal forma que en el límite de bajas energías el sistema de N D3-branas se desacopla en supergravedad en el bulto y una teoría de SYM en las branas.

- **Supergravedad.** Sabemos que las D3-branas son soluciones cargadas de la teoría de supergravedad. Típicamente la solución para la D3-brana es

$$ds^2 = f^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + f^{1/2} (dr^2 + r^2 D\Omega_5),$$

$$f = 1 + \frac{R^4}{r^4}. \quad (\text{A.18})$$

Se puede ver que para un observador en infinito, la energía tiene un corrimiento al rojo conforme $r \rightarrow 0$. Entonces, considerar en este sistema el límite de bajas energías corresponde a tener partículas no masivas en el bulto o excitaciones cerca del horizonte de la geometría descrita por (A.18). Pero justamente al considerar este límite los estados existentes se desacoplan entre si.

Por lo tanto, la teoría a bajas energías corresponde a un par de teorías desacopladas: una es supergravedad en el bulto y la otra es la teoría para el horizonte cercano en (A.18). En esta región la geometría se reduce a

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + R^2 \frac{dr^2}{r^2} + R^2 D\Omega_5 \quad (\text{A.19})$$

que es $AdS_5 \times S^5$, con R el radio de AdS .

Por lo tanto se concluye que en tal límite la teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$, $U(N)$ en 3+1 dimensiones (que dimensionalmente corresponde a la frontera de AdS_5) es equivalente a la teoría de cuerdas en $AdS_5 \times S^5$. Esta es la dualidad AdS/CFT .

Se ha podido determinar que esta dualidad sigue siendo válida para distintas dimensiones, todas en espacios tipo AdS .

Bibliografía

- [1] U. Danielsson, A. Güijosa, M. Kruczenski, *Brane-Antibrane systems at finite temperature and the entropy of black holes*, JHEP **0109** (2001)11, [hep-th/0106201].
- [2] A. Güijosa, H. Hernández, H. Morales-Técolt, *The entropy of the rotating charged black three brane from a brane-antibrane system*, JHEP0403(2004)069, [hep-th/0402158].
- [3] M. Cvetič, H. Lü, C.N. Pope, *Four dimensional $N = 4$, $SO(4)$ gauged supergravity from $D = 11$* , Nuc. Phys. B574(2000) 761, [hep-th/9910252].
- [4] H. Hernandez, H. Morales, *New solution of $D = 11$ supergravity on S^7 from $D = 4$* , JHEP09(2003)039, [hep-th/0307069].
- [5] C. Isham, *Structural issues in quantum gravity*, [gr-qc/9510063].
J. Butterfield, C. Isham, *Spacetime and the philosophical challenge of quantum gravity*, [gr-qc/9903072].
- [6] J. Alfaro, H. Morales-Técolt, L. Urrutia, *Quantum gravity corrections to neutrino propagation*, Phys.Rev.Lett. 84 (2000) 2318-2321 [gr-qc/9909079].
J. Alfaro, H. Morales-Técolt, L. Urrutia, *Loop quantum gravity and light propagation*, Phys.Rev. D65 (2002) 103509, [hep-th/0108061].
J. Alfaro, H.A. Morales-Tecotl, L.F. Urrutia, *Quantum gravity and spin 1/2 particles effective dynamics*, Phys.Rev. D66 (2002) 124006, [hep-th/0208192].
- [7] G. Amelino-Camelia, *Planck-Length Phenomenology*, Int.J.Mod.Phys. D10(2001)1, [gr-qc/0008010].

- G. Amelino-Camelia, *Phenomenological description of space-time foam*, [gr-qc/0104005].
- G. Amelino-Camelia, *A phenomenological description of quantum-gravity-induced space-time noise*, Nature 410(2001)1065, [gr-qc/0104086].
- G. Amelino-Camelia, *Quantum-gravity phenomenology with gamma rays and UHE cosmic rays*, [astro-ph/0201047].
- G. Amelino-Camelia, *Quantum-Gravity Phenomenology: Status and Prospects*, Mod.Phys.Lett. A17(2002)899, [gr-qc/0204051].
- [8] M. Bojowald, *Absence of singularity in loop quantum cosmology*, Phys.Rev.Lett.86(2001)5227, [gr-qc/0102069].
- A. Ashtekar, M. Bojowald, J. Lewandowski, *Mathematical structure of loop quantum cosmology*, Adv.Theor.Math.Phys.7(2003)233, [gr-qc/0304074].
- M. Bojowald, H. Morales, *Cosmological applications of loop quantum gravity*, [gr-qc/0306008].
- M. Bojowald, *Loop quantum cosmology: recent progress*, [gr-qc/0402053].
- [9] S. Hawking, *Black hole explosions*, Nature 248(1974)248.
- [10] S. Vongehr, *Black hole thermodynamics in semi-classical and superstring theory*, [hep-th/9709172].
- [11] P.K. Townsend, *Black holes: lecture notes*, [gr-qc/9707012].
- [12] J. Polchinski, *String theory*, Cambridge U. Press (1998).
- [13] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge U. Press (1987).
- [14] C. Johnson, *D Brane primer*, [hep-th/007071].
- [15] D. Youm, *Black holes and solitons in string theory*, Phys.Rept.316(1999)1, [hep-th/9710046].
- [16] J. Polchinski, *Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges*, Phys. Rev. Lett. 75(1995)4724, [hep-th/9510017].

- [17] A. Strominger, C. Vafa, *Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy*, Phys. Lett. B **379** (1996)99, [hep-th/9601029].
- C. G. Callan , J. M. Maldacena, *D-brane Approach to Black Hole Quantum Mechanics*, Nucl. Phys. B **472** (1996)591, [hep-th/9602043].
- G. T. Horowitz , A. Strominger, *Counting States of Near-Extremal Black Holes*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996)2368, [hep-th/9602051].
- A. Peet, *TASI lectures on black holes in string theory*, [hep-th/0008241].
- T. Mohaupt, *Black holes in supergravity and string theory*, Class.Quant.Grav.17(2000)3429, [hep-th/0004098].
- J. David, G. Mandal, S. Wadia, *Microscopic formulation of black holes in string theory*, Phys.Rept.369(2002)549, [hep-th/0203048].
- [18] S. Carroll, *TASI lectures: Cosmology for string theorists*, [hep-th/0011110].
- N. Mavromatos, *String cosmology*, Lect.Notes Phys.592(2002)392, [hep-th/0111275].
- E. Copeland, *String cosmology*, [hep-th/0202028].
- E. Papantonopoulos, *Brane cosmology*, Lect.Notes Phys.592(2002)458, [hep-th/0202044].
- F. Quevedo, *Lectures on string/brane cosmology*, Class.Quant.Grav.19(2002)5721, [hep-th/0210292].
- H. de Vega, *Early cosmology and fundamental physics*, [astro-ph/0307477].
- [19] C. Rovelli, *Loop quantum gravity*, Living Rev.Rel.1(1998)1, [gr-qc/9710008].
- S. Carlip, *Quantum gravity: a progress report*, Rept.Prog.Phys.64(2001)885, [gr-qc/0108040].
- T. Thiemann, *Introduction to modern canonical quantum general relativity*, [gr-qc/0110034].
- A. Ashtekar, *Quantum geometry and gravity: recent progress*, [gr-qc/0112038].
- L. Smolin, *How far are we from the quantum theory of gravity?*, [hep-th/0303185].

- [20] H. Morales-Técotl, L. Urrutia, D. Vergara, *Reality conditions for Ashtekar variables as Dirac constraints*, Class.Quant.Grav. 13(1996)2933, [gr-qc/9607044].
M. Montesinos, H. Morales-Técotl, L. Urrutia, D. Vergara, *Real sector of the nonminimally coupled scalar field to self-dual gravity*, J.Math.Phys. 40(1999)1504, [gr-qc/9903043].
- [21] E. Mielke, *Ashtekar's complex variables in general relativity and its teleparallelism equivalent*, Ann. Phys. 219(1992)78.
- [22] J. Fernando, G. Barbero, *Reality conditions and Ashtekar variables: a different perspective*, Phys. Rev. D51(1995)5498, [gr-qc/9410013].
- [23] G. Immirzi, *Regge calculus and Ashtekar variables*, Class.Quant.Grav 11(1994)1971, [gr-qc/9402004].
- [24] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao, T. Thiemann, *A manifestly gauge-invariant approach to quantum theories of gauge fields*, contribution to the Cambridge meeting proceedings, [hep-th/9408108].
A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao, T. Thiemann, *Coherent state transforms for spaces of connections*, J.Funct.Anal. 135(1996)519, [gr-qc/9412014].
A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao, T. Thiemann, *Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom*, J.Math.Phys. 36(1995)6456, [gr-qc/9504018].
- [25] C. Rovelli, *Black hole entropy from loop quantum gravity*, Phys.Rev.Lett.77:3288-3291,1996 [gr-qc/9603063].
A. Ashtekar, J. C. Baez , K. Krasnov, *Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy*, Adv. Theor. Math. Phys. 4, 1(2000), [gr-qc/0005126].
I. Khriplovich, *Entropy and area of black holes in loop quantum gravity*, Phys.Lett.B537:125-129,2002 [gr-qc/0109092].
A. Ashtekar , A. Corichi, *Non-minimal couplings, quantum geometry and black hole entropy*, Class. Quant. Grav. 20, 4473(2003), [gr-qc/0305082].
- [26] A. Ashtekar, J. Lewandowski, *Quantum theory of geometry: I. Area operators*, Class. Quant. Grav. 14(1997)A55, [gr-qc/].

- [27] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, K. Krasnov, *Quantum geometry and black hole entropy*, Phys. Rev. Lett. **80**, (1998)904, [gr-qc/9710007].
- [28] A. Ashtekar, J. Lewandowski in *Knots and quantum gravity*, Lett. Math. Phys. 31(1994)213.
- [29] L. Smolin, *Recent developments in nonperturbative quantum gravity*, [hep-th/9202022].
- [30] L. J. Romans, *Supersymmetric, cold and lukewarm black holes in cosmological Einstein-Maxwell theory*, Nucl.Phys.B383(1992)395-415, [hep-th/9203018].
- [31] J. Maldacena, *The large N -limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998)231, [hep-th/971120].
- [32] A. Einstein, *The field equations of gravitation*, Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.) (1915)844.
- [33] P. Hájíu aek, Nuc. Phys. B185(1981)254.
- [34] G. Gibbons, C. Hull, *A Bogomolny bound for general relativity and solitons in $N=2$ supergravity*, Phys.Lett.B109(1982)190.
- [35] G. Gibbons, C. Hull, *The stability of gauged supergravity*, Nucl.Phys.B218(1983)173.
- [36] S. S. Gubser, R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, Phys. Lett. B428 (1998)105, [hep-th/9802109].
- [37] E. Witten, *AdS space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys.2 (1998)253, [hep-th/9802150].
- [38] N. Itzhaki, J. Maldacena, J. Sonnenschein, S. Yankielowicz, *Supergravity and the large- N limit of theories with sixteen supercharges*, Phys. Rev. D58 (1998)46004, [hep-th/9802042].
- [39] J. Maldacena, C. Nuñez, *Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem*, Int. J. Mod. Phys. A16(2001)822, [hep-th/0007018].
- [40] M. Cvetič, H. Lü, C. Pope, *M theory PP waves, Penrose limits and supernumerary supersymmetries*, Nucl. Phys. B644(2002)65, [hep-th/0203229].

- [41] M. Cvetič, H. Lü, C. Pope, *Penrose limits, PPwaves and deformed M2 branes*, Phys.Rev.D69(2002)046003, [hep-th/0203082].
- [42] M. Cvetič, M. Duff, P. Hoxha, L. Liu, H. Lü, R. Acosta, C. Pope, H. Sati, T. Tran, *Embedding AdS black holes in ten and eleven dimensions*, Nucl. Phys. B558(1999)96, [hep-th/9903214].
- [43] M. Cvetič, H. Lü, C. Pope, *Consistent Kaluza-Klein sphere reductions*, Phys. Rev. D62(2000)064028, [hep-th/0003286].
- [44] J. Maldacena, J. Michelson, A. Strominger, *Anti-De Sitter fragmentation*, JHEP 9902(1999)011, [hep-th/9812073].
- [45] J. Michelson, A. Strominger, *The geometry of (super) conformal quantum mechanics*, Commun. Math. Phys. 213(2000)1, [hep-th/9907191].
- [46] J. Michelson, A. Strominger, *Superconformal multiblack hole quantum mechanics*, JHEP 9909(1999)005, [hep-th/9908044].
- [47] S. Cucu, H. Lu, J.F. Vazquez-Poritz, *A supersymmetric and smooth compactification of M-theory to AdS₅*, Phys. Lett. B568(2003)261, [hep-th/0303211].
- [48] S. Cucu, H. Lu, J.F. Vazquez-Poritz, *Interpolating from AdS_{D-2} × S² to AdS_D*, Nucl.Phys.B677(2004)181, [hep-th/0304022].
- [49] D. Klemm, W.A. Sabra, *Supersymmetry of black strings in D=5 gauged supergravities*, Phys.Rev. D62(2000)024003, [hep-th/0001131].
M. Schvellinger, T. Tran, *Supergravity duals of gauge field theories from SU(2)×U(1) gauged supergravity in five dimensions*, JHEP 0106(2001)25, [hep-th/0105019].
J. Maldacena, H. Nastase, *The supergravity dual of a theory with dynamical supersymmetry breaking*, JHEP 0109(2001)24, [hep-th/0105049].
J. P. Gauntlett, N. Kim, S. Pakis, D. Waldram, *Membranes wrapped on holomorphic curves*, Phys. Rev. D65(2002)26003, [hep-th/0105250].
F. Bigazzi, A. Cotrone, A. Zaffaroni, *N = 2 gauge theories from wrapped fivebranes*, Phys. Lett. B519(2001)269, [hep-th/0106160].
J. Gauntlett, N. Kim, *M-fivebranes wrapped in supersymmetric cycles*, Phys. Rev. D65(2002)86003 [hep-th/0012195].

- J. Gomis, J. Russo, $D = 2 + 1, N = 2$ Yang-Mills theory from wrapped branes, JHEP 0110(2001)028, [hep-th/0109177].
- J. Gauntlett, N. Kim, D. Martelli, D. Waldram, Fivebranes wrapped on SLAG three-cycles and related geometry, JHEP 0111(2001)18, [hep-th/0110034].
- [50] D. Berenstein, J. Maldacena, H. Nastase, *Strings in flat space and pp waves from $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills*, JHEP 0204 (2002)03, [hep-th/0202021].
- [51] R. Penrose in *Differential geometry and relativity*, ed. M. Cahen and M. Flato, Reidel, Netherlands 1976.
- [52] R. Güven, *Plane wave limits and T-duality*, Phys. Lett. B482(2000)255, [hep-th/0005061].
- [53] D.H. Correa, E.F. Moreno, S. Reuillon, F.A. Schaposnik, *PP-waves from BPS supergravity monopoles*, Phys. Lett. B552(2003)280, [hep-th/0211093].
- [54] C. Nuñez, I. Park, M. Schvellinger, T. Tran, *Supergravity duals of gauge theories from $F(4)$ gauged supergravity in six dimensions*, JHEP 04(2001)25, [hep-th/0103080].
- [55] B. de Wit, H. Nicolai, *The consistency of the S^7 truncation in $D=11$ supergravity*, Nuc. Phys. B281(1987)211.
- [56] A. Das, *$SO(4)$ -invariant extended supergravity*, Phys. Rev. D15(1977)2805.
- [57] S. Gates, B. Zwiebach, *Gauged $N = 4$ supergravity theory with a new scalar potential*, Phys. Lett. 123B(1983)200.
- [58] C. Burges, D. Freedman, S. Davis, W. Gibbons, *Supersymmetry in Anti-de Sitter space*, Ann. Phys. 167(1986)285.
- [59] A. Das, M. Fischler, *Super-Higgs effect in a new class of scalar models and a model of super QCD*, Phys. Rev. D16 (1977)3427.
- [60] J. Gates, B. Zwiebach, *Searching for all $N = 4$ supergravities with global $SO(4)$* , Nuc. Phys. B238(1984)99.
- [61] M. Blau, J. Figueroa-O'Farril, G. Papadopoulos, *Penrose limits and maximal supergravity*, Class. Quant. Grav. 19(2002)L87, [hep-th/0201081].

- [62] H. Fuji, K. Ito, Y. Sekino, *Penrose limit and string theories on various brane backgrounds*, JHEP 0211(2002)005, [hep-th/0209004].
- [63] J. Gauntlett, C. Hull, *PP-waves in 11 dimensions with extra supersymmetry*, JHEP 0206(2002)013, [hep-th/0203255].
- [64] M. Blau, *Killing spinors and SYM on curved spaces*, JHEP 0011(2000)023, [hep-th/0005098].
- [65] S. R. Das , S. D. Mathur, *The Quantum Physics Of Black Holes: Results From String Theory*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50** (2000)153, [gr-qc/0105063].
- [66] A. Ashtekar, *Classical and Quantum Physics Of Isolated Horizons: A Brief Overview*, Lect. Notes Phys. **541**, 50 (2000), [gr-qc/9910101].
- [67] G. Horowitz, A. Strominger, *Black strings and p-branes*, Nuc. Phys. B360(1991)97.
- [68] M. J. Bowick, L. Smolin , L. C. Wijewardhana, *Does String Theory Solve The Puzzles Of Black Hole Evaporation?*, Gen. Rel. Grav. **19** (1987)113.
E. Halyo, B. Kol, A. Rajaraman , L. Susskind, *Counting Schwarzschild and charged black holes*, Phys. Lett. B **401** (1997)15, [hep-th/9609075].
G. T. Horowitz , J. Polchinski, *Self gravitating fundamental strings*, Phys. Rev. D **57** (1998) 2557, [hep-th/9707170].
T. Damour, *Quantum strings and black holes*, [gr-qc/0104080].
A. J. M. Medved, *Asymptotically flat holography and strings on the horizon*, [hep-th/0202083].
- [69] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker , L. Susskind, *M theory as a matrix model: A conjecture*, Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997), [hep-th/9610043].
- [70] T. Banks, W. Fischler, I. R. Klebanov , L. Susskind, *Schwarzschild black holes from matrix theory*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998)226, [hep-th/9709091].
I. R. Klebanov , L. Susskind, *Schwarzschild black holes in various dimensions from matrix theory*, Phys. Lett. B **416** (1998)62, [hep-th/9709108].
G. T. Horowitz , E. J. Martinec, *Comments on black holes in matrix theory*, Phys. Rev. D **57** (1998)4935, [hep-th/9710217].

- T. Banks, W. Fischler , I. R. Klebanov, *Evaporation of Schwarzschild black holes in matrix theory*, Phys. Lett. B **423** (1998) 54, [hep-th/9712236].
- [71] S. R. Das, S. D. Mathur, S. Kalyana Rama , P. Ramadevi, *Boosts, Schwarzschild black holes and absorption cross-sections in M theory*, Nucl. Phys. B **527** (1998) 187, [hep-th/9711003].
- F. Englert , E. Rabinovici, *Statistical entropy of Schwarzschild black holes*, Phys. Lett. B **426** (1998)269, [hep-th/9801048].
- R. Argurio, F. Englert , L. Houart, *Statistical entropy of the four dimensional Schwarzschild black hole*, Phys. Lett. B **426** (1998)275, [hep-th/9801053].
- [72] A. Güijosa, *Is physics in the infinite momentum frame independent of the compactification radius?*, Nucl. Phys. B **533** (1998)406, [hep-th/9804034].
- [73] N. Itzhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein , S. Yankielowicz, *Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges*, Phys. Rev. D **58** (1998)46004, [hep-th/9802042].
- [74] U. H. Danielsson, A. Güijosa , M. Kruczenski, *Black brane entropy from brane-antibrane systems*, Rev. Mex. Fís. **49S2** (2003)61, [gr-qc/0204010].
- [75] M. Cvetič, A. Tseytlin, *Non-extreme black holes from non-extreme intersecting M-branes*, Nuc. Phys. B **478**(1996) 151, [hep-th/9603109].
- G. Mandal, *A review of the D1/D5 system and five dimensional black hole from supergravity and brane viewpoints*, [hep-th/0002184].
- [76] A. Sen, *Stable non-BPS bound states of BPS D-branes*, JHEP **9808** (1998)10, [hep-th/9805019].
- Tachyon condensation on the brane antibrane system*, JHEP **9808**, 012 (1998), [hep-th/9805170].
- Descent relations among bosonic D-branes*, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 4061 (1999), [hep-th/9902105].
- Universality of the tachyon potential*, JHEP **9912**, 027 (1999), [hep-th/9911116].
- [77] S. S. Gubser, *Thermodynamics of spinning D3-branes*, Nucl. Phys. B **551** (1999)667, [hep-th/9810225].

- [78] P. Kraus, F. Larsen , S. P. Trivedi, *The Coulomb branch of gauge theory from rotating branes*, JHEP **9903** (1999)3, [hep-th/9811120].
- [79] J. Russo, *New compactifications of supergravities and large N QCD*, Nucl.Phys. B543(1999)183, [hep-th/9808117].
- [80] R. Myers, J. Perry, *Black holes in higher dimensional space-times*, Ann. Phys.172(1986)304.
- [81] R. Wald, *General relativity*, Chicago Univ. Pr.(1984) 491p.
- [82] S. S. Gubser, I. R. Klebanov , A. W. Peet, *Entropy and Temperature of Black 3-Branes*, Phys. Rev. D **54** (1996) 3915, [hep-th/9602135].
- [83] S. S. Gubser, I. R. Klebanov , A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from non-critical string theory*, Phys. Lett. B **428** (1998)105, [hep-th/9802109].
S. S. Gubser, I. R. Klebanov , A. A. Tseytlin, *Coupling constant dependence in the thermodynamics of $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. B **534** (1998)202, [hep-th/9805156].
- [84] M. Bojowald, *Homogeneous loop quantum cosmology*, Class. Quant. Grav. 20(2003)2595, [gr-qc/0303073].
- [85] O. Saremi, A. Peet, *Brane-antibrane systems and the thermal life of neutral black holes*, [hep-th/0403170].
O. Bergman, G. Lifschytz, *Schwarzschild black branes from unstable D-branes*, JHEP 0404 (2004) 060, [hep-th/0403189].
K. Rama, *A Description of Schwarzschild Black Holes in terms of Intersecting M-branes and antibranes*, [hep-th/0404026].
K. Takahashi, *A Gravity Dual of Localized Tachyon Condensation in Intersecting Branes*, [hep-th/0404205].
G. Lifschytz, *Charged black holes from near extremal black holes*, [hep-th/0405042].
K. Rama, *A Description of multi Charged Black Holes in terms of Branes and Antibranes*, [hep-th/0405084].
- [86] J. Overduin, P. Wesson, *Kaluza-Klein gravity*, Phys.Rept.283(1997)303, [gr-qc/9805018].
- [87] J. Polchinski, S. Chaudhuri, C. Johnson, *Notes on D-branes*, [hep-th/9602052].