



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**“Análisis de influencia y robustez en redes sociales  
multiplex”**

**TESIS**

*Que presenta:*

**M. en O. Edwin Montes Orozco**

Matricula: 2181801401

*Para obtener el grado de:*

***Doctor en Ciencias y Tecnologías de la Información***

*Asesores:*

**Dr. Sergio Gerardo de los Cobos Silva**

**Dr. Roman Anselmo Mora Gutiérrez**

*Jurado:*

**Dr. Carlos Avilés Cruz**

**Dr. Abel García Nájera**

**Dra. María Elena Lárraga Ramírez**

**Dr. Antonio Daniel Rivera López**

Iztapalapa, Ciudad de México, 24 de Enero 2022



## Declaración

Yo, M. en O. Edwin Montes Orozco, declaro que este trabajo titulado «Análisis de influencia y robustez en redes sociales multiplex», es de mi autoría. Yo confirmo que:

- Este trabajo fue realizado en su totalidad para la obtención de grado en esta Universidad.
- Ninguna parte de esta tesis ha sido previamente sometida a un examen de grado o cualquier otra titulación en esta universidad o cualquier otra institución.
- Donde he consultado la obra publicada de los demás, esto se atribuye siempre con claridad.
- Donde he citado del trabajo de los demás, se da siempre la fuente. Con la excepción de estas citas, esta tesis es enteramente mi propio trabajo.

Firma:

---

Fecha:

---



## *Resumen*

En los últimos años, se han aplicado diversos análisis y estudios de la ciencia de redes a un número creciente de ramas de estudio, como redes sociales, de comunicación, biológicas, de transporte, económicas, entre otras, de los cuáles se han logrado grandes avances teóricos interesantes. Sin embargo, las principales aplicaciones de la ciencia de redes a menudo se limitan a resultados de redes de una sola capa, donde las redes empleadas representan un solo tipo de relación entre los nodos.

Por lo cual, un número cada vez mayor de investigaciones en el área de la ciencia de redes se centra en el estudio de redes multicapa y redes multiplex, donde los mismos nodos tienen diferentes tipos de vínculos entre ellos y se reconoce y estudia su respectiva interdependencia. Como consecuencia, algunos de los conceptos de red monocapa se han generalizado a redes multicapa, mejorando el análisis previo al agregar la posibilidad de estudiar diferentes tipos de relaciones.

En el presente trabajo se proponen dos metodologías (una para redes monocapa y otra para redes multiplex) que se basan en la resolución del problema del conjunto separador de vértices (VSP), con el fin de encontrar el conjunto de nodos que la eliminación de sus enlaces provocan la ruptura del componente gigante (GC) para redes monocapa y la ruptura del componente gigante mutuamente conectado (MCGC) y el componente viable más grande (LVC) para el caso de las redes multiplex.

Además, se presentan dos metodologías para la identificación y cuantificación de nodos influyentes en redes sociales de una sola capa y de redes sociales multiplex de dos, tres y cinco capas. Estas metodologías se basan en la resolución de un modelo de programación matemática inspirado en la dinámica de partículas, las leyes del movimiento de Newton y la ley de la gravitación universal.

Todas las metodologías fueron probadas en un conjunto de redes de referencia y, como casos de estudio se presentan diversos análisis utilizando un conjunto de redes sociales multiplex modeladas con información sobre las principales características de las mejores universidades del mundo, las universidades de México y la enfermedad conocida como COVID-19 provocada por el virus SARS-CoV2.

Los resultados muestran que las metodologías propuestas en este trabajo son capaces de clasificar y cuantificar la robustez y la influencia de los nodos mejor que otras metodologías presentadas en la literatura específica, tanto para redes monocapa como redes multiplex de hasta 5 capas con distintos modelos topológicos de redes complejas. Además, se puede observar que estas metodologías pueden ser adaptadas o utilizadas para diversos problemas del mundo real, ya que los casos de estudio mostrados pertenecen a distintas ramas de estudio.



## *Abstract*

In recent years, several analysis and studies related to network science have been applied to a growing number of disciplines, such as sociology, biology, communication, transportation, economy, among others, where, great interesting theoretical advances have been obtained. However, the main applications are often limited to single-layer network results, where the networks represent a single type of relationship between nodes.

Therefore, an increasing number of works in the network science focuses on the study of multilayer and multiplex networks, where the same nodes have different types of links between them and their respective interdependence is recognized and studied. As a consequence, some of the monolayer network concepts have been generalized to multilayer networks, improving the previous analysis by adding the possibility of studying different types of relationships.

The present work is based on the proposal of new methodologies for the characterization and analysis of single layer social networks and multiplex social networks of two and three layers, since, we propose several methodologies in order to analyze and quantify the importance of the nodes, as well as the robustness of the entire network.

Specifically, we propose two methodologies (one for monolayer networks and the other for multiplex networks) that are based on the resolution of the Vertex Separator Problem (VSP), in order to find the set of nodes that the elimination of their links causes the rupture of the Giant Component (GC) for monolayer networks and the rupture of the Mutually Connected Giant Component (MCGC) and the Largest Viable Component (LVC) for the case of multiplex networks.

In addition, we present two methodologies for the identification and quantification of influential nodes in single-layer social networks and for two, three and five layer multiplex social networks. These methodologies are based on the resolution of an adapted mathematical programming model inspired by particle dynamics, Newton's laws of motion and the Newton's law of universal gravitation.

For all methodologies, we test them using a set of reference networks and as case studies we present several analysis using a set of multiplex social networks modeled with information on the main characteristics of the best universities in the world, the mexican universities and the disease known as COVID-19.

The results show that the methodologies proposed in this work are capable of classifying and quantifying the robustness and influence of the nodes better than other methodologies presented in the specific literature, both for monolayer networks and up to five-layers multiplex networks with different topologic models. In addition, we can see that these methodologies can be adapted or used for several kinds of problems in the real world, since the case studies presented in this work belong to different areas of study.



## *Agradecimientos y dedicatoria*

Agradezco y dedico principalmente este trabajo al CONACyT por el apoyo económico otorgado y por la oportunidad de realizar mis estudios de maestría y doctorado.

Al Dr. Roman Anselmo Mora Gutiérrez por el apoyo, las ideas, los conocimientos compartidos, la guía para la realización de esta investigación y por supuesto, por su gran amistad.

Al Dr. Sergio de los Cobos Silva por su dirección, amistad, apoyo, confianza, motivación e ideas para la realización de esta investigación.

A mi esposa Damariz, por ser mi mejor regalo, por ser mi motivación, mi alegría y por estar siempre al pie conmigo, por apoyarme cuando las cosas se ponen difíciles y sobre todo, por demostrar día a día todo el amor que tiene para mí.

A mis padres Susana y Norberto y a mi hermano Bryan, porque siempre creyeron en mis sueños, por hacerme creer en mí mismo, por su amor, por ser parte de mi motivación, por sus consejos y en especial, porque siempre me apoyaron y sé que seguirán haciéndolo.

A mi abuelita Bertha (hasta el cielo) y mi abuelo Norberto, por sus consejos dados, su crianza y su enseñanza desde los primeros días de mi vida, hasta hoy en día.

Al Posgrado en Ciencias y Tecnologías de la Información de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa y al cuerpo académico que lo conforma, por la formación profesional dada.

A la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana unidades Azcapotzalco e Iztapalapa, por darme el **todo** de mi formación académica.

A la Dra. Bibiana Obregón Quintana, por sus aportaciones y puntuales correcciones a este trabajo y en gran manera por todo su apoyo, amistad y motivación brindados.

Al Dr. Eric Rincón García, por las buenas charlas, por sus ideas y sobre todo, por su gran apoyo durante la realización de este trabajo. Al Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade y al Dr. Pedro Lara Velázquez por sus buenos consejos.

A los Dres. Maria Elena Lárraga Ramírez, Carlos Avilés Cruz, Daniel Rivera López y Abel García Nájera por aceptar revisar este trabajo y por sus valiosas correcciones y consejos.

Y sin restar importancia, a mis amigos *nerds* que comparten esta pasión por la optimización y la computación, los M. en O.: Miguel Fenández, David Téllez, Gilberto Torres y Lizbeth Noguez; a quienes les agradezco las charlas tan divertidas y ñoñas que tenemos.



# Índice general

<b>Declaración</b>	3
<b>Resumen</b>	5
<b>1. Introducción y conceptos básicos</b>	17
1.1.- Redes, sistemas complejos, multiplicidad y redes sociales	17
1.1.1.- Sistemas complejos como redes	17
1.1.2.- Modelos de redes sociales	22
1.2.- Problema de investigación	24
1.2.1.- Planteamiento del problema	24
1.2.2.- Justificación	25
1.3.- Objetivos	26
1.3.1.- Objetivo general	26
1.3.2.- Objetivos particulares	26
1.4.- Productividad	26
<b>2. Antecedentes y estado del arte</b>	29
2.1.- Teoría de gráficas	29
2.2.- La nueva ciencia de las redes (desarrollo histórico)	29
2.3.- Robustez en redes	31
2.4.- Nodos influyentes	32
2.5.- Robustez, influencia y redes multiplex	33
2.5.1.- Formalización de las redes multiplex	34
2.5.2.- Análisis de redes multiplex	37
2.6.- Técnicas metaheurísticas	39
2.6.1.- Recocido simulado	39
2.6.2.- Evolución diferencial	40
<b>3. Metodología para cuantificar la robustez en redes monocapa</b>	43
3.1.- Construcción de las redes	43
3.1.1.- Construcción de las redes de referencia	43
3.1.2.- Construcción de las redes del caso de estudio (SESM)	44
3.2.- Desarrollo de la metodología	50
3.3.- Resultados	51
3.3.1.- Cuantificación de robustez en las redes de referencia	51
3.3.2.- Cuantificación de robustez para las redes del caso de estudio (SESM)	53

<b>4. Metodología para identificar nodos influyentes en redes monocapa</b>	<b>57</b>
4.1.- Construcción de las redes	57
4.1.1.- Construcción de las redes de referencia	57
4.1.2.- Construcción de las redes del caso de estudio (SESM y QSRanking)	59
4.2.- Desarrollo de la metodología	60
4.3.- Resultados	62
4.3.1.- Identificación y cuantificación de nodos influyentes en las redes de referencia	62
4.3.2.- Identificación y cuantificación de nodos influyentes en las redes del caso de estudio (SESM y QSRanking)	67
<b>5. Metodología para cuantificar la robustez e identificar los nodos influyentes en redes multiplex</b>	<b>71</b>
5.1.- Cuantificación de robustez en redes multiplex	72
5.1.1.- Construcción de las redes	72
5.1.1.1.- Construcción de las redes multiplex de referencia	72
5.1.1.2.- Construcción de las redes multiplex del caso de estudio (SESM y QSRanking)	73
5.1.2.- Desarrollo de la metodología	77
5.1.3.- Resultados	78
5.1.3.1.- Cuantificación de robustez en las redes de referencia	78
5.1.3.2.- Cuantificación de robustez las redes multiplex del caso de estudio (SESM y QSRanking)	79
5.2.- Identificación de nodos influyentes en redes multiplex	83
5.2.1.- Construcción de las redes multiplex del caso de estudio (COVID-19)	83
5.2.2.- Desarrollo de la metodología	85
5.2.3.- Resultados	85
5.2.3.1.- Análisis de las métricas estructurales de las redes del caso de estudio (COVID-19)	85
5.2.3.2.- Cuantificación de la influencia de nodos en las redes multiplex del caso de estudio (COVID-19)	86
<b>6. Conclusiones</b>	<b>93</b>
6.1.- Discusión y limitantes del estudio	93
6.2.- Conclusiones	94
6.3.- Trabajo futuro	95
<b>A. Identificadores para los nodos en los casos de estudio</b>	<b>97</b>
<b>B. Disponibilidad de datos</b>	<b>105</b>
B.1.-Repositorio de la información	105
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>

# Índice de figuras

1.1. Ejemplo de red multicapa [17].	21
1.2. Ejemplo de red multiplex [55].	22
2.1. Ejemplo de una matriz de supra-adyacencia [32].	37
3.1. Gráfica de la red del año 2015 con datos desglosados no normalizados (considerando a la UNAM).	46
3.2. Elementos con alto ranking de la red del año 2015 con datos desglosados no normalizados (considerando a la UNAM).	47
3.3. Elementos con bajo ranking de la red del año 2015 con datos desglosados no normalizados (considerando a la UNAM).	47
3.4. Gráfica de la red Dolphins sin el conjunto separador $C$ .	52
3.5. Componentes conectados formados por la eliminación del conjunto separador en la red 1.1 (considerando a la UNAM).	54
3.6. Componentes conectados formados por la eliminación del conjunto separador en la red 1.1 (sin considerar a la UNAM).	54
4.1. Simulaciones de robustez para la red Freeman.	65
4.2. Simulaciones de robustez para la red USAir97.	65
4.3. Simulaciones de eficiencia para la red Freeman.	66
4.4. Simulaciones de eficiencia para la red USAir97.	66
5.1. Gráfica de la red SESM con datos desglosados para los años 2013 y 2014.	75
5.2. Gráfica de la red SESM con datos desglosados no normalizados para los años 2015, 2016 y 2017.	76
5.3. Gráfica de la red multiplex de infección.	84
5.4. Gráfica de la red múltiplex PIB.	84
5.5. Gráfica de los conjuntos de países después de la ruptura del MCGC (red de infecciones).	87
5.6. Gráfica de los conjuntos de países tras la ruptura del MCGC (red del PIB).	89



# Índice de tablas

1.1. Comparativa de características entre modelos de redes complejas.	23
3.1. Número de nodos y enlaces en redes de referencia.	44
3.2. Métricas estructurales para redes de referencia.	44
3.3. Cálculos estructurales de redes del SESM construidas con los datos desglosados.	48
3.4. Cálculos estructurales para las redes del SESM construidas con los datos totales.	49
3.5. Resultados de la metodología aplicada en las redes de referencia.	52
3.6. Resultados del VSP para las redes construidas con los datos desglosados.	53
3.7. Métricas estructurales para redes del SESM separadas.	55
4.1. Número de nodos y enlaces en redes de referencia.	58
4.2. Métricas estructurales para redes de referencia.	58
4.3. Valores numéricos para las métricas estructurales de redes del SESM y QSRanking.	59
4.4. Diez nodos más influyentes en redes de referencia.	63
4.5. Simulación de robustez con ataques aleatorios y epidémicos.	64
4.6. Diez nodos más influyentes en las redes SESM (1).	67
4.7. Diez nodos más influyentes en las redes del SESM (2).	68
4.8. Diez nodos más influyentes en las redes QSRanking.	69
5.1. Características principales de las redes multiplex de referencia.	72
5.2. Características estructurales de las redes de prueba.	73
5.3. Características principales de las redes del SESM y QSRanking.	75
5.4. Valores numéricos para métricas estructurales en redes monoplex QSRanking SESM.	77
5.5. Resultados numéricos para la cuantificación de la robustez en redes de referencia (MCGC).	79
5.6. Resultados numéricos para la cuantificación de la robustez en redes de referencia (LVC).	79
5.7. Resultados numéricos para m-VSP para redes del QSRanking y del SESM (MCGC).	80
5.8. Tamaño de LVC para cada red del SESM y del QSRanking.	81
5.9. Resultados numéricos para m-VSP para redes del QSRanking y del SESM (LVC).	81
5.10. Porcentaje de universidades en rangos de 100 universidades (QSRanking).	82
5.11. Porcentaje de universidades con valor de clasificación alto, medio y bajo (SESM).	82
5.12. Métricas estructurales para cada capa.	86
5.13. Cardinalidad de los componentes $A$ , $B$ y $C$ .	87
5.14. Conjuntos de países después de la ruptura de la MCGC (red de infecciones).	88

5.15. Conjuntos de países tras la ruptura del MCGC (PIB y salud).	90
A.1. Identificadores numéricos para universidades en redes del SESM.	97
A.2. Identificadores numéricos para universidades en redes modeladas con información sobre la influencia en redes sociales.	98
A.3. Identificadores numéricos para redes de uso de TIC.	99
A.4. Identificadores numéricos de universidades para redes modeladas con información sobre la perspectiva de la sociedad hacia las universidades.	99
A.5. Identificadores de los países utilizados en las redes de análisis socio-cultural y económico para identificar difusores de COVID-19.	100
A.6. Identificadores de las universidades pertenecientes al RankingQS (1).	101
A.7. Identificadores de las universidades pertenecientes al RankingQS (2).	102
A.8. Identificadores de las universidades pertenecientes al RankingQS (3).	103
A.9. Identificadores de las universidades pertenecientes al RankingQS (4).	104

# Capítulo 1

## Introducción y conceptos básicos

En los últimos años, hemos sido testigos de un aumento en el uso y análisis de diversas aplicaciones de la ciencia de redes en diferentes ramas de estudio, como: redes sociales, redes de transporte, redes biológicas o incluso en aplicaciones de estudios económicos, financieros y empresariales, entre otros.

Aquellos usos van desde la topología de redes específicas, ya sea en el nivel micro de interacciones sociales entre individuos, hasta en un nivel macro de la economía mundial, los cuales ayudan a identificar nuevos fenómenos y aclarar cómo se difunden y distribuyen [40].

Sin embargo, las principales aplicaciones de la ciencia de redes a menudo se limitan a resultados de redes de una sola capa, donde las redes empleadas representan un solo tipo de relación entre los nodos.

Por lo cual, la investigación presentada en este trabajo de tesis, se basa en el desarrollo de nuevas metodologías para la caracterización y análisis de redes sociales de una sola capa y de redes sociales multiplex de dos y tres capas, es decir, que sean capaces de analizar y cuantificar la importancia de los nodos, así como la robustez de la red entera.

En específico, en este capítulo se presenta la base teórica de la ciencia de redes, así como la motivación y justificación para la presente investigación.

### 1.1.- Redes, sistemas complejos, multiplicidad y redes sociales

Las redes están en todos lados, desde el Internet (en la WWW), hasta redes de transmisión de enfermedades o algunas redes de ataques terroristas.

Con el paso de los años, un diverso grupo de científicos incluyendo matemáticos, físicos, científicos de la computación, sociólogos y biólogos, han estado estudiando lo que es una red, sus tipos y la manera en que estas afectan la forma en que se desarrollan los eventos, surgiendo así la ciencia de las redes [10].

#### 1.1.1.- Sistemas complejos como redes

Las redes son consideradas como objetos estocásticos, en lugar de considerarse puramente deterministas, y; por lo tanto, se puede pensar en las propiedades de las redes en términos de distribuciones de probabilidad y enfoques que se han desarrollado en los últimos años [41, 119] (redes complejas, sistemas complejos, etc.).

En los sistemas complejos y en específico en sistemas de redes sociales, el comportamiento de los elementos y su influencia hacia los demás es de importancia para la robustez de la red y para caracterizar, analizar y describir la dinámica del sistema.

Se dice que un **sistema es complejo** si está formado por varios entes independientes que se interrelacionan de una o varias maneras, surgiendo de ello un comportamiento en común [9]. Sin embargo, en la literatura no existe un consenso sobre el concepto de sistemas complejos [4], por ello, generalmente se recurre a describir las principales características de dichos sistemas, las cuales se enuncian a continuación [11]:

- El adjetivo “complejo” no significa sólo que el sistema sea complicado, sino que está compuesto de muchas partes, que interactúan de alguna forma.
- Cada parte posee una propia estructura interna que está encargada de realizar una o varias funciones específicas (auto-organización).
- Si algo ocurre a alguna parte del sistema, afecta de manera no lineal<sup>1</sup> a todo el sistema.
- En estos sistemas se presenta un comportamiento emergente, por lo cual el sistema es más que la suma de sus partes.
- No existe una medida de organización establecida, es decir, el sistema se organiza y adapta conforme se modifican sus condiciones iniciales.

Entonces, el análisis de **sistemas complejos** con el enfoque de *redes complejas* surge desde las primeras décadas del siglo XX con los trabajos de Moreno [91, 90] y de Erdős y Rényi [41]. Sin embargo, las mayores aportaciones en este campo se generaron a partir de las últimas dos décadas para representaciones de sistemas reales (sociológicos, físicos, biológicos y tecnológicos, etc.), donde los componentes o partes son representados por nodos, mientras que las relaciones entre ellos por enlaces [11, 21, 26, 38, 97, 96].

El interés en este paradigma se debe a que se pueden estudiar las propiedades de una gran cantidad de sistemas, que ha generado un amplio desarrollo en la información. La investigación sobre redes complejas comenzó con el esfuerzo por definir nuevos conceptos y métricas para su estudio y análisis, que ha llevado esta línea de investigación a la identificación de una serie de principios unificadores y propiedades estadísticas comunes [11, 21, 97, 99]. A través de la ciencia de las redes se ha promovido el análisis, descripción, y un mejor entendimiento de los sistemas complejos.

Una **red compleja** es una representación de los componentes de un sistema y sus relaciones (donde cada relación o enlace puede o no, tener cierto peso) a través de las características topológicas de esta representación, como la distribución de grado, el coeficiente de agrupamiento, la ruta más corta entre dos nodos, la distancia media de la red, etc.

Con base en lo anterior, se puede ver que una red compleja es una red que posee ciertas propiedades topológicas y estadísticas no triviales, como los comportamientos emergentes, así como los conjuntos de elementos que interactúan de alguna forma u otra, las cuales no ocurren en redes simples. Ahora, se introducen las definiciones de las métricas más importantes utilizadas en este trabajo:

- **Grado medio** [42]. El grado de un nodo es el número de enlaces conectados a él. Entonces, se calcula el grado medio con los grados de todos los nodos de la red. Por lo tanto, se considera un grado medio bajo cuando el valor es  $\leq 0.3$  y alto cuando el valor es  $\geq 0.7$ .
- **Componente gigante**. Un **componente conectado** es un conjunto de nodos de la red donde existe un camino entre cada par de nodos que lo conforman. Por lo tanto, el *componente*

<sup>1</sup>Si un sistema es afectado de manera lineal, no se considera sistema complejo.

*gigante*, es el componente conectado más grande, es decir, contiene la fracción más grande de los nodos de la red entera.

- **Centralidad.** Cuantifica la importancia de los nodos que se encuentran en un sistema representado como red. Actualmente, existe una gran variedad de medidas matemáticas para cuantificar la centralidad de los nodos, donde las más clásicas son:
  - **Centralidad de grado.** El grado de un nodo puede considerarse como la medida inicial para determinar su importancia. Sin embargo, no necesariamente un nodo es importante por tener mayor cantidad de enlaces.
  - **Grado de cercanía.** Este determina el nodo más central por su cercanía hacia los demás, es decir, mide la distancia media desde un nodo hacia los demás.

$$C_i = \frac{1}{l_i}$$

Donde,  $l_{ij}$  es la suma de la matriz de distancias de la red, es decir, la matriz cuyos elementos  $(i, j)$  corresponden a las rutas desde el nodo  $i$  hasta el nodo  $j$ ,

Que puede ser normalizada como:

$$\frac{n}{\sum_j d_{ij}}$$

Donde,  $n$  es el número total de nodos y,  $d_{ij}$  es la longitud de la ruta de  $i$  a  $j$ , es decir, la longitud de la sucesión de nodos y enlaces que empieza en el nodo  $i$  y termina en el nodo  $j$ , tal que cada nodo es incidente con los enlaces que le siguen y le preceden en la secuencia.

- **Centralidad intermedia.** Un nodo es importante si está en la ruta entre otros nodos.

$$C_B(i) = \sum_{j,k \neq i} \frac{d_{jk}(i)}{d_{jk}}$$

Donde,  $d_{jk}(i)$  es la longitud de las rutas que conectan al nodo  $j$  y al nodo  $k$ , que pasan a través del nodo  $i$  y  $d_{jk}$  = ruta entre los nodos  $j$  y  $k$ .

- **Resiliencia.** Es la capacidad del sistema para reponerse después de una perturbación [72].
- **Robustez.** Es la capacidad de la red de mantener el componente gigante después de una perturbación [33]. En otras palabras, la robustez es una medida de la habilidad de los sistemas complejos ante determinados eventos externos (ataque deliberado a un conjunto de nodos proveniente de un ente externo al sistema) o internos (falla aleatoria de un conjunto de nodos) de conservar un comportamiento relativamente normal.

Además, es necesario definir percolación y asortatividad, ya que son dos conceptos importantes en el análisis de la robustez de las redes complejas.

La **percolación** es el umbral cuando el conjunto de nodos aislados (componentes) forman un componente gigante [121].

La formación o disolución de un componente gigante es una transición de percolación, es decir, si una red contiene un componente gigante, se dice que la red percola (ocurre la transición de percolación) en el momento en el que el componente gigante se forma y la transición de percolación ocurre después de alcanzar el umbral de percolación.

Por otro lado, la **asortatividad** es la correlación entre nodos con características similares, en este caso, con grado similar.

En general, el estudio de las redes complejas puede dividirse en dos campos distintos y a su vez complementarios: *estructura y dinámica*. El entender la topología de una red compleja es la clave para comprender los sistemas complejos subyacentes; por lo tanto, es necesario establecer la relación entre la topología de la red y la dinámica del sistema. En el campo de la *topología de la red*, se busca determinar las propiedades topológicas de la red, es decir, el estudio de cómo están conectados los nodos unos con otros. Algunas propiedades importantes que determinan la estructura de una red son las siguientes [21]:

- **Distribución de grado.** Es la probabilidad,  $P(k)$ , de que un nodo escogido al azar tenga  $k$  vecinos.
- **Coefficiente de agrupamiento (clustering)** [131]. Es una medida del grado en el que los nodos en la red tienden a agruparse y, para redes no dirigidas, se calcula de la siguiente manera:

$$C_i = \frac{2|\{e_{ab}\}|}{k_i(k_i - 1)} : v_a, v_b \in N_i, e_{ab} \in E$$

Donde,  $k_i$  es el grado del nodo  $v_i$ ,  $v_a$  y  $v_b$  pertenece al vecindario para el nodo  $v_i$  ( $N_i=k_i$ ) y;  $e_{ab}$  es un subconjunto del número total de enlaces ( $E$ ) que conectan cualquier par de nodos  $v_a, v_b$ .

Además, es fundamental mencionar que a mayor número de triángulos, mayor es el valor del coeficiente de agrupamiento. Este se considera bajo cuando el coeficiente calculado es  $\leq 0.3$  y se considera alto cuando el coeficiente calculado es  $\geq 0.7$ .

- **Ruta más corta entre dos nodos.** Es el número mínimo de enlaces por los que se tienen en la sucesión entre un nodo y otro.
- **Longitud media de ruta** [1]. Define el número medio de pasos que se deben recorrer a través de la ruta más corta para todos los posibles pares de nodos.
- **Diámetro de la red** [2]. Está dado por la ruta más larga, de todas las rutas más cortas entre cualquier par de nodos. Además, se considera un valor de diámetro bajo si el valor es  $\leq 3$  y alto si es  $\geq 5$ .
- **Densidad** [54]. Describe la parte de los enlaces potenciales en una red de todos los enlaces que son reales. Un vínculo potencial es aquel que podría existir entre dos nodos. En resumen, la densidad mide la conectividad de la red a nivel global. Por lo cual, un valor bajo es  $\leq 0.3$  y un valor alto es  $\geq 0.7$ .
- **Modularidad** [98]. Mide la fuerza de la división de una red en módulos o comunidades. Las redes con alta modularidad tienen enlaces densos entre nodos dentro del mismo módulo, pero enlaces dispersos entre nodos de diferentes módulos. Sin embargo, se ha demostrado que la modularidad no puede detectar comunidades pequeñas, así, un valor bajo de modularidad es  $\leq 0.3$  y un valor alto es  $\geq 0.5$ .

Por otro lado, para el estudio de las *propiedades dinámicas* de la red, es necesario saber cómo interactúan los nodos [21]. Por lo tanto, a continuación se presentan algunas características importantes:

- **Sincronización:** Se refiere al fenómeno colectivo en el que dos o más elementos de la red tienen comportamientos dinámicos coordinados en el tiempo. La sincronización de los elementos de una red se da dependiendo de la dinámica. La sincronización puede favorecer algunas veces a los elementos, y otras puede desfavorecerlos, en este caso, ayudando o no en su funcionamiento.
- **Transición de fase:** Es la transformación que experimenta el sistema o red con una variación en la topología de la misma. Es decir, cómo cambia la red al presentarse una perturbación en ella.
- **Aprendizaje:** Es la capacidad de la red para adaptarse o realizar alguna acción dependiendo de las circunstancias o perturbaciones que existan en esta.

En los últimos años, se han analizado problemas diversos sistemas del mundo real que consideran explícitamente las variables temporales y las **redes multicapa**, es decir, redes con más de una relación de enlace diferentes, donde se han abarcado diversas cuestiones pertinentes, desde una redefinición completa de las medidas estructurales básicas, hasta la comprensión de cómo la naturaleza multicapa de la red afecta a los procesos y a la dinámica [22]. .

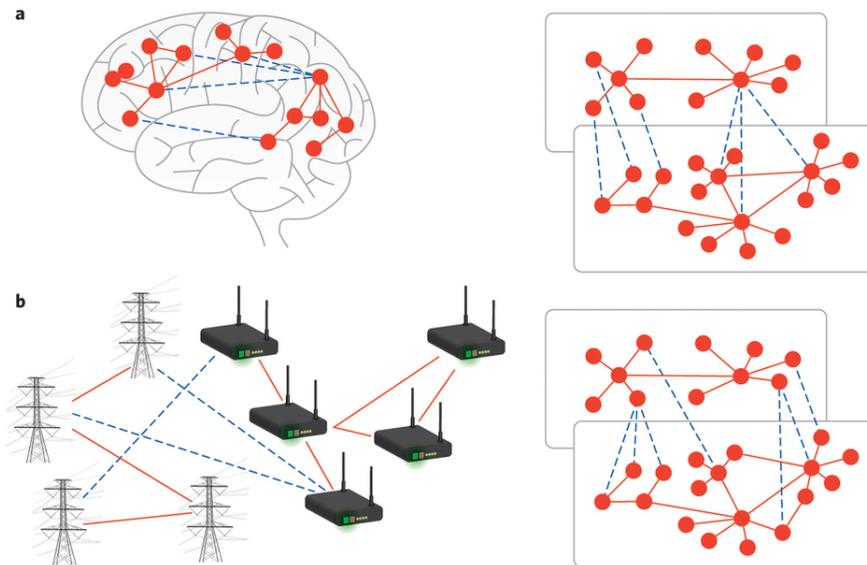


FIGURA 1.1: Ejemplo de red multicapa [17].

La Figura 1.1 presenta un ejemplo de red multicapa, donde se puede ver que los enlaces intercapa e intracapa pueden ser entre cualquier par de nodos, como se observa en la Figura. Además, en específico para este ejemplo en la Figura 1.1(b), si se desconectan los enlaces intercapa (líneas punteadas), se obtienen dos redes desconectadas. La primera para las torres proveedoras de telefonía e internet y la segunda para los módems. Por lo tanto, no existiría conexión a internet o telefonía en la red de los módems.

Por otro lado, las **redes multiplex** son una clase de redes multicapa, las cuales fueron introducidas para modelar de mejor forma a los sistemas complejos del mundo real [74, 93] y se caracterizan por poseer un conjunto de nodos que se encuentran conectados a través de más de un tipo de enlaces. En otras palabras, en una red multiplex todos los nodos se encuentran en cada capa (en las cuales tienen distintos enlaces intracapa) y cada uno, se enlaza con su réplica en las demás capas.

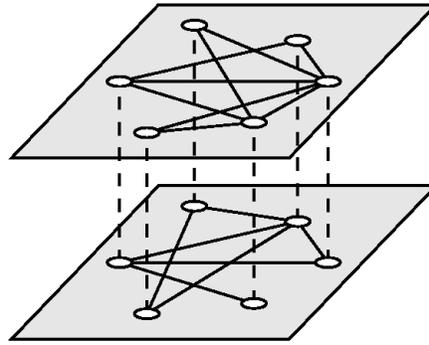


FIGURA 1.2: Ejemplo de red multiplex [55].

Con el objetivo de ver de manera gráfica esta definición, la Figura 1.2 presenta un ejemplo de red multiplex de dos capas, donde, los nodos de cada capa son réplica, es decir, se tiene un nodo y su réplica unidos para denotar la relación de identidad. Así, la introducción de múltiples capas en las redes multiplex requiere de nuevos desarrollos conceptuales y computacionales más allá del marco teórico estándar de una sola red (red monocapa) [74, 97].

### 1.1.2.- Modelos de redes sociales

Otros conceptos importantes para el correcto desarrollo de la investigación presentada en este trabajo de tesis son el análisis de las redes y en específico, el análisis de las redes sociales, los cuales describen a continuación.

- **Análisis de redes:** Es el estudio de las relaciones y flujos entre actores tales como personas, grupos, organizaciones u otras entidades procesadoras de información o conocimiento [56].
- **Análisis de redes sociales:** Provee un análisis matemático y visual de sistemas humanos complejos. El análisis de redes sociales tiene múltiples aplicaciones en diversos campos, donde destacan: mejorar la eficiencia de la estructura organizacional de las empresas, el desarrollo exitoso de nuevos productos, análisis de transmisión de enfermedades, propagación de virus informáticos, análisis del comportamiento de comunidades, estudio del capital social, entre otros.

Entonces, como se puede ver con las definiciones anteriores, el *análisis de redes sociales* ayuda a caracterizar los sistemas donde sus elementos discretos son representaciones de personas u organizaciones y sus relaciones describen cualquier fenómeno social.

Los objetivos generales del análisis de redes sociales se basan en obtener una representación visual de la estructura de la red, y así poder concluir respecto al ámbito social. La idea se basa en estudiar, por ejemplo, el impacto de dicha estructura en el funcionamiento del sistema, la influencia que ejerce esta estructura sobre los distintos elementos, o la evolución del sistema en el tiempo.

Para esto, el análisis de redes sociales utiliza algunas de las métricas y propiedades utilizados en el análisis de redes complejas (descritos en la subsección 1) como: la densidad de la red, modularidad, coeficiente de clustering y algunas medidas de centralidad de los elementos.

<sup>2</sup>En el capítulo 2 se define de manera formal el concepto de red multiplex, así como sus principales características.

Así, con base en las principales métricas del análisis de redes sociales, se ha comprobado que la mayoría de este tipo de redes sigue un modelo de *mundo pequeño*. Por lo tanto, a continuación se presentan las principales características del **modelo de mundo pequeño**.

Fue introducido por Watts y Strogatz [131] como un modelo simple de redes sociales. Este modelo ha demostrado ser apto para el tratamiento usando una variedad de técnicas de física estadística, incluyendo la simulación de Monte Carlo, métodos de escalamiento y renormalización de grupos, entre otras. [12], [101].

Por otro lado, este modelo se caracteriza por las siguientes dos propiedades:

1. El efecto de mundo pequeño, lo que significa que la mayoría de los pares de nodos están conectados por una ruta corta a través de la red. En los últimos años, el término efecto “mundo pequeño” ha llegado a significar específicamente que la distancia nodo-nodo media en la red (sin contar los pares de nodos que no están conectados en absoluto) aumenta logarítmicamente (o más lentamente) con el número total de nodos en la red.
2. Alto “agrupamiento” o “transitividad”, lo que significa que hay una mayor probabilidad de que dos nodos se conecten directamente entre sí, si tienen otro nodo en común. Lo anterior, en el lenguaje de las redes sociales se puede ver como la existencia de una probabilidad grande de que dos personas se conozcan, si tienen otro conocido en común.

Por lo tanto, Watts y Strogatz [131] definen una red como una *red de mundo pequeño* si muestra las dos propiedades descritas anteriormente, es decir, si la distancia nodo-nodo media  $l$  es comparable con la de una red aleatoria, y el coeficiente de agrupamiento es mucho mayor que eso para una red aleatoria.

Finalmente, con el objetivo de diferenciar a las redes que siguen un modelo de mundo pequeño, con las redes que siguen otro tipo de modelos, la Tabla 1.1 presenta una comparativa entre algunas características de los modelos de redes complejas.

TABLA 1.1: Comparativa de características entre modelos de redes complejas.

Propiedad/Modelo	Características de las redes complejas		
	Redes aleatorias	Redes de mundo pequeño	Redes libres de escala
<b>Distribución de grado</b>	Sigue una distribución de Poisson.	Para $N$ grande sigue una distribución de Poisson.	Sigue una distribución de ley de potencia.
<b>Distancia media entre nodos</b>	Baja distancia media: $l \sim \log N / \log k$ , donde $k$ es el grado promedio y $N$ el número de nodos.	Baja distancia media: $l \sim \log N / \log k$ , donde $k$ es el grado promedio y $N$ el número de nodos.	Distancia ultrabaja $l \sim \log(N)$ .
<b>Clustering</b>	Bajo	Alto	Alto
<b>Probabilidad de conexión</b>	Variante. Si es alta se forma componente gigante, y si es baja forma clusters aislados.	Se basa en el coeficiente de clustering y la distancia media entre nodos.	Pocos nodos son altamente conectados y muchos nodos tienen pocos enlaces.
<b>Comportamiento de mundo pequeño presente</b>	No.	Si.	Si.

Con base en la información presentada en la Tabla 1.1, se puede ver que cada uno de los modelos de redes complejas tiene características diferentes. Sin embargo, donde se tiene una mayor diferencia es en la distribución de grado y en la probabilidad de conexión.

Una vez que se tiene la base teórica sobre sistemas complejos, redes complejas, redes multiplex y el análisis de redes sociales, las siguientes secciones presentan las principales características, justificación y los objetivos para el problema de investigación descrito en este trabajo de tesis.

## 1.2.- Problema de investigación

En esta sección se presenta el planteamiento del problema y la justificación para la realización de esta investigación.

### 1.2.1.- Planteamiento del problema

Una gran cantidad de estudios recientes en el campo de redes complejas se ha enfocado en el análisis de la capacidad del sistema de reaccionar ante eventos no esperados, como puede ser una falla interna o un ataque externo (propiedad de robustez). La robustez, indica la tolerancia estática a los errores (o fallos aleatorios) y la capacidad del sistema para mantener su comportamiento relativamente normal después de la supresión aleatoria de una fracción de sus nodos y enlaces.

Por otro lado, la identificación de nodos influyentes en las redes es de suma importancia para el funcionamiento de los sistemas y el correcto flujo de información entre los elementos que lo componen. Además, se ha mostrado que al eliminar los nodos influyentes en una red, esta puede ser desconectada; por lo tanto, la identificación de los nodos influyentes puede ayudar a cuantificar la robustez.

Adicionalmente, al retomar la pregunta abierta de Bianconi en [17] “¿cómo se pueden diseñar redes robustas multicapa con enlaces confiables?” lo primero que se debe pensar antes de contestar esta pregunta, es ¿cómo determinar la robustez de redes multicapa? En el mismo trabajo Bianconi menciona que la robustez de una red se relaciona con las propiedades de percolación y asortatividad descritas anteriormente.

Cabe mencionar que en [5] se propone una medida para determinar que una red multicapa es robusta. Por otro lado, en [105] se propone una alternativa para determinar la robustez en redes multiplex basada en un modelo de percolación. Aunque ambos trabajos se han encaminado a responder la pregunta de Bianconi, debe recalarse que en en cada uno se abordan casos particulares de redes complejas y se establece que aún falta realizar una mayor investigación.

Respecto a las redes sociales, es de gran importancia encontrar los nodos que hacen robusta a la red, ya que en la literatura se ha encontrado que existen conjuntos de nodos que son influyentes o importantes para el comportamiento del sistema y, si se logra identificarlos, estos pueden ser protegidos y evitar que sean atacados para conservar la dinámica del sistema. Además, al identificar este conjunto de nodos, se puede realizar un estudio sobre las características que los hacen ser importantes.

Se debe hacer notar que, en los estudios realizados se ha encontrado que las redes interdependientes son más difíciles de proteger en comparación con las redes de una sola capa. Aún así, ya se han identificado algunas formas en que podrían protegerse este tipo de redes como es, determinando, mediante la centralidad intermedia, los nodos más importantes de la red y buscando proteger dichos nodos para que la red pueda fortalecerse [113, 36].

Entonces, se propone como línea de investigación el diseño, desarrollo y análisis de al menos una metodología para la cuantificación de robustez de redes sociales monocapa y multiplex de 2 y 3 capas con propiedades de mundo pequeño, así como de sus nodos influyentes, utilizando redes modeladas a partir de:

- Las características de las principales universidades en México y el mundo, y el impacto social que estas tienen en redes sociales y redes educativas.
- La robustez e influencia de los elementos (universidades) pertenecientes a los sistemas educativos superiores (SES) (mundial y nacional), así como el uso de tecnologías de la información y comunicación (TIC) para redes educativas y aprendizaje electrónico.
- Las principales características socio-culturales y de salud de 196 países, con el objetivo de identificar aquellos países difusores del virus de la COVID-19.
- Redes de prueba para verificar el correcto funcionamiento de nuestras metodologías.

Para esto, los análisis se llevan a cabo mediante el uso de diversas técnicas de optimización aplicables, por ejemplo: identificación de nodos influyentes, relaciones sociales en redes (relaciones triádicas, diádicas, clanes, etc.) y análisis de la robustez.

Por lo tanto, la motivación principal para esta investigación se basa en responder a la pregunta realizada por Bianconi, utilizando redes multiplex de 2 y 3 capas con propiedades de mundo pequeño.

### 1.2.2.- Justificación

En la investigación presentada en este trabajo de tesis, se busca unir el uso de métricas de redes complejas con técnicas de optimización para el estudio de redes sociales multiplex, debido a que la mayoría de las investigaciones en este campo se basa solo en las métricas. Como casos específicos, se analizarán:

- El sistema educativo superior en México en el periodo 2013 a la actualidad, debido a que el representar este sistema como una red, ayuda a caracterizar algunas propiedades y funciones que tienen las diversas universidades pertenecientes al sistema, así como la dinámica del todo al modificar el comportamiento de cierto conjunto de elementos.
- Las características socio-culturales y de salud para 196 países, con el objetivo de identificar los países más difusores de la COVID-19, así como cuáles son las causas de dicho comportamiento.

Por otro lado, es posible que al emplear técnicas de optimización se puedan realizar de manera más eficiente y efectiva los cálculos de diversas métricas importantes en el estudio de las redes. Por ejemplo, encontrar los nodos influyentes en la red, predecir enlaces futuros entre los nodos, encontrar el mínimo conjunto de nodos que desconecte la red, caracterizar propiedades sociales como comunidades, clanes, etc., ya que, en general, estas técnicas no necesitan calcular todas las propiedades topológicas de la red para realizar dichas caracterizaciones.

En los últimos años, diversas problemáticas como la influencia de los nodos, la robustez y la formación de comunidades en diversos tipos de redes, se han vuelto de interés debido a que tienen diversas aplicaciones interdisciplinarias en marketing, comunicaciones, difusión, etc. En esta investigación, dichas problemáticas se abordan mediante métricas de redes complejas y técnicas de optimización para el efecto de las TIC y las redes sociales en la forma de compartir

conocimiento, para el desarrollo y crecimiento del sistema educativo y para la clasificación de las universidades pertenecientes al sistema educativo superior de México.

Por lo tanto, además de contribuir con la unión de redes complejas con técnicas de optimización, en esta investigación se analiza el sistema de universidades en México y las propiedades socio-culturales de los países con el enfoque de redes multiplex, ya que, como se menciona en [32], la generalización de conceptos y métricas de redes complejas monocapa para otros modelos no es trivial, por lo cual, haciendo uso de las técnicas de optimización, es posible realizar dicha generalización con mayor eficiencia.

### 1.3.- Objetivos

Con base en la propuesta de investigación y la justificación de la misma, en esta sección se muestran los objetivos planteados para la investigación presentada en este trabajo de tesis.

#### 1.3.1.- Objetivo general

Desarrollar y evaluar al menos una metodología para el análisis de robustez e influencia de nodos en redes sociales multiplex basada en métricas de redes complejas y técnicas de optimización.

#### 1.3.2.- Objetivos particulares

1. Revisar, comparar y analizar la literatura específica para construir el estado del arte del análisis de redes sociales y la aplicación de técnicas computacionales, redes complejas y optimización.
2. Diseñar una metodología para el análisis de las características de los elementos pertenecientes a los sistemas y construir las redes.
3. Proponer, desarrollar, analizar y comparar al menos un método para encontrar los nodos influyentes en redes sociales monocapa y multiplex de dos y tres capas, utilizando técnicas de optimización y métricas de redes complejas.
4. Proponer, desarrollar, analizar y comparar al menos un método de medición para la robustez en redes sociales monocapa y multiplex de dos y tres capas, que relacione las propiedades de asortatividad y percolación con al menos un problema de optimización.
5. Analizar la relación existente entre la robustez de las redes y la influencia de los nodos.

### 1.4.- Productividad

1. Publicaciones en revistas indizadas (JCR)
  - a) Publicación de un artículo de investigación con los resultados del análisis de robustez en redes de referencia y en las redes del SESM (Computing, Springer) [88].
  - b) Publicación de un artículo de investigación con los resultados del análisis de identificación de nodos super-difusores de la COVID-19 en redes multiplex de 5 capas (Access, IEEE) [86].

- c) Publicación de un artículo de investigación con los resultados del análisis de robustez en redes multiplex de 2 y 3 capas (Complexity, Hindawi) [87].
- d) Elaboración de un artículo de investigación (aceptado para publicación) con los resultados del método de identificación de nodos influyentes en distintos modelos de redes monocapa (Soft Computing, Springer).
- e) Elaboración de un artículo de investigación (aceptado para publicación) con los resultados del método de identificación de nodos difusores en México para la COVID-19 (Complexity, Hindawi).

## 2. Presentaciones en congresos especializados.

- a) Presentación del trabajo titulado: "Classification Of Universities Through The Maximum Clique Problem" en el XX Congreso de la "International Association for FUZZY-SET Management and Economy" (SIGEF) en 2019 (Nápoles, Italia).
- b) Presentación del trabajo titulado: "Optimization Model For The Determination Of Essential Nodes In Networks" en el XX Congreso de la "International Association for FUZZY-SET Management and Economy" (SIGEF) en 2019 (Nápoles, Italia).
- c) Presentación del trabajo titulado: "Robustness In Social Networks Using The Vertex Separator Problem" en el XX Congreso de la "International Association for FUZZY-SET Management and Economy" (SIGEF) en 2019 (Nápoles, Italia).

## 3. Publicaciones en capítulos de libro

- a) Publicación de un capítulo de libro tratando el ranking de universidades en México mediante el uso del problema de clique máximo, en específico para el análisis social y educativo (Lecture Notes in Social Networks, Springer) [89].

El resto de este trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se presenta una revisión del estado del arte y se describen los antecedentes de este trabajo de tesis.

En el capítulo 3 se presenta la metodología para cuantificar la robustez en redes, la cual está basada en la adaptación del problema del conjunto separador de vértices (VSP).

En el capítulo 4 se presenta la metodología para identificar nodos influyentes en redes, la cual está basada en la resolución de un modelo matemático que hace analogía de las leyes de gravitación y de movimiento de Newton.

En el capítulo 5 se presenta la metodología para cuantificar la robustez e identificar nodos influyentes en redes multiplex, la cual está basada en la modificación de la adaptación del problema del Conjunto Separador de Vértices (VSP) denotado ahora como m-VSP.

En el capítulo 6, se presentan las conclusiones y discusión sobre las ventajas y limitantes de las metodologías presentadas en los capítulos 3, 4 y 5.

En el Anexo A se muestran los identificadores para cada uno de los nodos pertenecientes a las redes de los casos de estudio presentados en los capítulos 3, 4 y 5.

Finalmente, en el Anexo B se presentan los vínculos web para cada una de las bases de datos utilizadas para los análisis mostrados en este trabajo.



## Capítulo 2

# Antecedentes y estado del arte

Como se describió anteriormente, el estudio de las redes ha tenido una gran impacto en matemáticas, física y ciencias de la computación. Por lo cual, a continuación se presentan los antecedentes y el estado del arte relacionados a este trabajo, comenzando con la historia de la nueva ciencia de redes hasta llegar al área de reciente surgimiento: las redes complejas con múltiples tipos de relaciones o enlaces (redes multicapa).

### 2.1.- Teoría de gráficas

El surgimiento de la teoría de gráficas se dio desde el año 1736 [43] cuando el gran matemático Euler comenzó a interesarse en el enigma matemático de los puentes de Königsberg (7 puentes que dividían la región en 4 zonas, el problema es encontrar una ruta que comience y termine en la misma zona y que pase por los 7 puentes sin tomarlos más de una vez).

Desde el punto de vista de la teoría de graficas [20], una red es un conjunto de elementos discretos (vertices) y un conjunto de conexiones (aristas) que unen a los elementos, típicamente como parejas. Los elementos y sus conexiones pueden representar casi todo, desde personas y amistades, computadoras y líneas de comunicación, química y reacciones, artículos científicos y citas, etc.

Esto es, debido a que al abstraer los detalles de un problema, la teoría de gráficas es capaz de describir la importancia de las características topológicas con una claridad que sería imposible si se conservaran todos los detalles.

Además, muchos de los terminos del análisis de las redes sociales, actores centrales, longitudes de caminos, cliques, componentes conectados, etc., los cuales fueron directamente prestados de la teoría de gráficas o se adaptaron para las redes sociales.

Así, las propiedades estructurales de las redes, especialmente su conectividad, se vincularon con características de comportamiento como el tamaño esperado de una epidemia o la posibilidad de transmisión de información global. Asociado con esta tendencia, las redes son consideradas como objetos estocásticos, en lugar de considerarse puramente deterministas, y, por lo tanto, se puede pensar en las propiedades de las redes en términos de distribuciones de probabilidad y enfoques que se han desarrollado en los últimos años [41, 119] (redes complejas, sistemas complejos, etc.).

### 2.2.- La nueva ciencia de las redes (desarrollo histórico)

La ciencia de las redes ha ido tomando forma en los últimos años y, esta se distingue del trabajo precedente en la teoría de gráficas en tres aspectos importantes [96].

1. Al centrarse en las propiedades de las redes del mundo real, se ocupa de cuestiones empíricas y teóricas.
2. Con frecuencia considera que las redes no son estáticas, sino que evolucionan en el tiempo de acuerdo con varias reglas dinámicas.
3. Apunta a entender las redes no solo como objetos topológicos, sino también como los marcos sobre los cuales se construyen los sistemas dinámicos distribuidos.

La primera diferencia entre la vieja ciencia de redes y la nueva es que, dejando a un lado el análisis de redes sociales, las teorías tradicionales de las redes no se han preocupado demasiado por la estructura de la red que se produce naturalmente.

La teoría de gráficas es elegante y profunda, pero no es especialmente relevante en redes que surgen del mundo real. La teoría de gráficas aplicada, como su nombre lo indica, está más preocupada por los problemas de red del mundo real, pero su enfoque está orientado hacia el diseño y la ingeniería.

Por otro lado, muchas redes son el producto de procesos dinámicos que añaden o eliminan nodos o enlaces. Por ejemplo, una red social de amistades cambia a medida que los individuos hacen y rompen vínculos con otros individuos<sup>1</sup>, ya que los lazos que las personas hacen, afectan la forma de la red y la forma de la red afecta los lazos que la gente hace.

Un objetivo principal de la nueva ciencia de las redes, es comprender cómo la estructura a escala global depende de procesos dinámicos que operan a escala local.

La primera vez que surgió la idea que ahora se conoce como “comportamiento de mundo pequeño” fue en la caricatura literaria “Cadenas”, en [66] escribió que cualquier individuo del planeta está conectado con otro en una red de al menos 5 conocidos de distancia.

El interés científico en la estructura de las redes comenzó a desarrollarse en los años cuarenta y cincuenta. Quizás el pensador más profundo en el campo durante este período fue Anatol Rapoport, quien desarrolló visiones sorprendentes y premonitorias sobre muchos temas que caen en el área de los sistemas complejos.

Al inicio de la década de los años 50, se presenta el primer estudio sistemático de lo que se puede llamar red aleatoria [119]. Este artículo es importante debido a que introduce las redes aleatorias y demuestra una de las propiedades más cruciales del modelo: *A medida que aumenta la relación entre el número de enlaces y los nodos en la red, la red alcanza un punto en el que sufre un cambio abrupto de una colección de nodos desconectados a un estado conectado en el que, en lenguaje moderno, el gráfico contiene un componente gigante.*

A pesar de las primeras contribuciones presentadas en [119], la teoría de redes aleatorias realmente no despegó hasta finales de la década de 1950 y principios de la década de 1960, cuando varios documentos importantes sobre el tema aparecieron casi simultáneamente. Entre ellos, el más influyente y el más relevante para el trabajo actual, fueron los trabajos de Erdos y Rényi [41], que son considerados los padres de la teoría moderna de las redes aleatorias.

Entre 1959 y 1968 Erdos y Rényi publicaron ocho artículos sobre redes aleatorias que marcaron la pauta para la investigación en redes durante muchas décadas, ya que se trata de la evolución de la estructura de las redes aleatorias a medida que aumenta el grado medio.

<sup>1</sup>Un individuo con muchos conocidos podría, en virtud de estar mejor conectado o ser más conocido, ser más propenso a hacer nuevos amigos que otra persona que está menos conectada. O las personas que buscan amigos pueden tener más probabilidades de conocer personas con las que comparten un conocido común

Un área de estudio estrechamente relacionada con redes aleatorias es la teoría de la percolación, la cual ha sido objeto de atención dentro de la comunidad física desde la introducción en 1950 del modelo original de percolación [57].

En los finales de la década de 1970, se publicó un artículo que estuvo circulando durante casi 20 años en forma de preimpresión [118]; el cual fue la inspiración para, entre otras cosas, los famosos experimentos de “mundo pequeño” conducidos en 1960 por Stanley Milgram [52].

Este artículo discute por primera vez el fenómeno del que se conoce como efecto de “mundo pequeño”, iniciando con la suposición de que cada persona tiene alrededor de 1000 conocidos, ellos predicen que muchos pares de personas en la tierra pueden estar conectados vía un camino que va entre justo dos conocidos intermedios. Ellos también consideran la posibilidad que los grupos comunitarios y la estratificación social dentro de la red puede afectar sus conclusiones, pero, después de muchos cálculos, concluyen, para su propia sorpresa, que los estratos sociales tienen solo un pequeño efecto en la distancia promedio entre individuos.

Entre 1967 y 1969 se llevó a cabo el famoso experimento de “mundo pequeño” [84]. Este experimento comenzó por la selección de un individuo objetivo y un grupo de individuos iniciales. Entonces, se envió un paquete por correo a cada uno de los principiantes que contenía un pequeño libro en el que se pedía a los participantes que registraran cierta información sobre ellos mismos.

Después, los participantes debían tratar de pasar su libro a la persona objetivo especificada mediante otras personas quienes creían conocer el objetivo o podrían conocer a alguien que lo hiciera. Después se pidió a los conocidos que hicieran lo mismo, repitiendo el proceso hasta que, con suerte, el libro alcanzara el objetivo designado. En cada paso, a los participantes también se les pidió que enviaran una tarjeta postal a Travers y Milgram (los investigadores que desarrollaron el experimento), lo que les permitió reconstruir el camino tomado por el libro en caso de que se perdiera en el camino.

Al final, 64 de las 296 cadenas alcanzaron el objetivo, el 29% de las que comenzaron. El número de conocidos intermedios entre el origen y el objetivo varió de 1 a 11, la mediana de fue de 5.2. Entonces, cinco conocidos intermedios significa que hubo seis pasos a lo largo de la cadena, un resultado que ha pasado al mito popular en la frase “seis grados de separación”.

Por otro lado, en [133] los autores calcularon una corrección de los resultados y descubrió que el cambio en las cifras no era grande: la corrección aumenta la separación promedio de 6 a 8. Pero hay otros efectos que actúan en la dirección opuesta, potencialmente haciendo que la separación media sea más corta que seis. En particular, no hay ninguna garantía de que los individuos de Travers y Milgram hayan encontrado el camino más corto a través de la red hacia la persona objetivo.

El interés sobre las redes complejas disminuyó con el paso de los años, hasta que en 1998 creció nuevamente gracias al modelo de *redes de mundo pequeño* [131]. Después, en algunas investigaciones [3, 9], se modelaron las *redes libres de escala*, encontrando la existencia de pocos nodos con un alto número de enlaces (denominados centros o hubs) que coexisten con muchos nodos con pocos enlaces, los cuales no se encuentran en las redes aleatorias ni en las redes de mundo pequeño.

## 2.3.- Robustez en redes

Una problemática importante a estudiar en las redes complejas es la vulnerabilidad o robustez y, a pesar de no existir una definición formal, existen diversos trabajos en los cuales se analizan estos conceptos [95, 104]. Principalmente, en este trabajo, se lleva a cabo el análisis

simulando una perturbación, ya sea eliminando o modificando las condiciones de ciertos nodos. Por otra parte, en sistemas reales, se han estudiado perturbaciones como apagones, ataques terroristas, manifestaciones y desastres naturales, haciendo énfasis sobre la vulnerabilidad o robustez dentro de las redes complejas [26, 96]. Cabe mencionar que en [72] definen una medida de eficiencia de red, que identifica los elementos más vulnerables y estiman la importancia de una perturbación o falla a esta, como la caída relativa en el desempeño de la red según su eficiencia.

En [141], se muestra una revisión de diversas estrategias que se han utilizado para el problema de vulnerabilidad y análisis de riesgos, se hacen reflexiones sobre las complejidades de diversos sistemas y se argumenta que la complejidad de estos sistemas es un desafío característico, lo que requiere la integración de diferentes perspectivas de análisis.

Por otro lado, la primera propuesta para una métrica que evalúa la robustez de la red se presentó en [112], donde los autores denotan lo siguiente: dada una red con  $N$  nodos, la robustez se define como  $R = \frac{1}{N} \sum_{Q=1}^N s(Q)$ , donde  $s(Q)$  es el tamaño del componente gigante después de eliminar  $Q$  nodos. El valor de  $R$  depende significativamente del orden en el que se producen las eliminaciones de los nodos.

Además, en [136] estudian la noción de robustez presentada en [112] para modelos de redes aleatorias; demuestran que las propiedades de robustez y conectividad comparten la misma función de umbral en las redes de Erdős-Rényi, y que determinar si una red dada es robusta es un problema  $\mathcal{NP}$ -Completo. También, en [62] se presenta un enfoque para mejorar la eficiencia del cálculo de  $R$  propuesto en [112], en el que se introduce una medida de robustez  $R'$  computacionalmente eficiente cuando la fracción de nodos fallidos alcanza un umbral crítico.

Por otro lado, en [129] proponen una estimación rápida de robustez, llevada a cabo en tiempo sub-cuadrático. Los experimentos los realizaron en doce redes del mundo real que muestran que su método estima la robustez mejor que la basada en la centralidad de intermediación. En [114], se describe que, en el mundo real, los ataques están localizados hacia un grupo de nodos vecinos ocasionando fallas.

Por último, en [135] los autores denotan que las redes son “robustas pero frágiles”, lo que significa que las redes son robustas contra fallas aleatorias, pero frágiles bajo ataques maliciosos y proponen una estrategia de 3 pasos para mejorar la robustez de una red, al mismo tiempo que conserva su estructura de comunidad y también su distribución de grado.

Además, en [50] se presenta un conjunto de herramientas analíticas con las que identifican los parámetros de control y estado naturales de un sistema complejo multidimensional, obteniendo dinámicas unidimensionales efectivas que predicen con precisión la capacidad de recuperación del sistema.

## 2.4.- Nodos influyentes

Dado que las redes del mundo real contienen nodos que desempeñan roles diferentes, tanto en estructura como en la función de estas, la tarea de identificar aquellos nodos vitales o influyentes es muy importante para la robustez de la red.

En la literatura específica, se han presentado diferentes propuestas para atacar este problema, basadas en encontrar conjuntos de nodos que presenten ciertas características. Por ejemplo, el problema de la maximización de la influencia (IMP) [25] se basa en cómo identificar un conjunto de nodos que maximice el efecto de influencia en la red bajo un modelo de difusión específico. Por otro lado, el problema de cobertura (CP) [15] trata de encontrar un conjunto de nodos clave que tengan un tamaño mínimo que puede influir en un porcentaje dado de los nodos en la totalidad red.

Generalmente, los métodos conocidos para identificar nodos influyentes en las redes hacen uso de la información estructural, lo que permite aplicaciones independientes de los procesos dinámicos específicos considerados. Por ejemplo, en [140] proponen un índice para calcular la influencia de un nodo contando el número de comunidades con las que se conecta.

Por otro lado, en [45] los autores calculan las diferentes métricas de las redes sociales y con base en estas calculan los valores que determinan el nodo más influyente. Por último, en [29] se estudian las redes sociales y sus nodos influyentes en el tiempo.

Además, existen algunos trabajos donde se obtiene la información estructural mediante procesos dinámicos (por ejemplo, caminata aleatoria) y se utilizan métodos de refinamiento iterativos para explorar las propiedades estructurales. Por ejemplo, en [78] denotan un método para predecir enlaces a través de la centralidad de vector propio y ayudar al filtrado de información de interés.

Otra rama de aplicación del estudio de nodos influyentes es aquella que se centra en redes dirigidas donde se apoyan en las características estructurales de la red [132] y de las conexiones topológicas entre los vecinos de un nodo [107]. Otros estudios se apoyan en análisis estadísticos para medir la influencia de ciertos nodos cuantificando su reputación (en específico en redes científicas) [49].

Por otro lado, existen trabajos basados en la identificación de un conjunto de nodos vitales, enfatizando los métodos basados en la física como la teoría de paso de mensajes, el modelo de percolación [69] y, específicamente, en el problema de maximización de la influencia (IMP) [92, 137], donde se argumenta que, para encontrar nodos súper propagadores en un modelo de expansión o para inmunizar efectivamente una red contra epidemias, se pueden mapear en la percolación óptima.

Como algunos problemas típicos de maximización de la información son del tipo  $\mathcal{NP}$ -Duro [37], los trabajos más conocidos intentan encontrar soluciones aproximadas en lugar de la solución exacta. Las técnicas heurísticas son las más comunes para clasificar todos los nodos según su grado u otra medida de centralidad.

En este campo, destaca [59] donde se propone un método para encontrar a los principales nodos influyentes ubicados en diferentes comunidades. Con la consideración similar a los métodos basados en la comunidad, en [139], los autores dividen la red en varios conjuntos independientes, donde cualquier par de nodos pertenecientes a distintos conjuntos no estén adyacentes entre sí; esta tarea se denomina coloración de gráficas [23], donde a cada nodo se le asigna un color y dos nodos vecinos no pueden compartir el mismo color [58, 79, 109].

Por otro lado, en [34] presentan un modelo inspirado en física y un algoritmo eficiente para inferir clasificaciones jerárquicas de nodos en redes dirigidas. Asignan rangos de valor real a los nodos en lugar de a los rangos ordinales, y formalizan el supuesto de que es más probable que ocurran interacciones entre individuos con rangos similares.

Además, utilizando algunos métodos clásicos, en [76] se presenta un algoritmo iterativo para mejorar la validez al aumentar la influencia de usuarios prestigiosos en redes bipartitas dirigidas. Por último, en [75] se mide qué tan bueno es un artículo, como la calidad de un producto o la influencia de un artículo científico considerando redes bipartitas dirigidas.

## 2.5.- Robustez, influencia y redes multiplex

Respecto a las redes multicapa, en [115] se presenta una revisión del marco de referencia desarrollado en los últimos años para el estudio de la vulnerabilidad y recuperación de redes compuestas por redes interdependientes, en específico, de las consecuencias que se dan cuando

se sufre alguna perturbación o ataque en una red. Este es también el caso cuando el ataque se da algunos nodos que juegan un papel en dos redes, como en las redes multiplex, ya que, las relaciones de dependencia pueden actuar recursivamente y pueden conducir a fallas en cascada que concluyen en la fragmentación repentina del sistema.

En la literatura, existen algunos trabajos respecto a las fallas en cascada en redes multicapa [36, 70, 112]; sin embargo, solo se enfocan en ataques dirigidos y no en fallas del sistema.

En [36], se muestra una revisión de diversas estrategias que se han utilizado para el problema de vulnerabilidad y análisis de riesgos. Además, los autores hacen reflexiones sobre las complejidades de diversos sistemas y argumentan que la complejidad de estos sistemas es un desafío característico, lo que requiere la integración de diferentes perspectivas de análisis.

También, en [70] se describe cómo un ataque puede traer fallas en cascada dentro de las redes multicapa. Por otro lado, en [36] se describe un marco matemático que permite calcular la centralidad en las redes multicapa y clasificar los nodos y así, encontrar los nodos centrales. En el estudio desarrollado en [112], se describe la forma en que los ataques a un nodo perteneciente a cierta capa, afectan a los nodos conectados a este en las demás capas, para lo cual se determina la protección de los nodos altamente conectados (nodos centrales).

### 2.5.1.- Formalización de las redes multiplex

En la década de los años 2010, se comienza a trabajar de manera formal el concepto de redes multiplex. Es decir, se presenta la manera de representar un sistema en el que existen diferentes tipos de relaciones o interacciones entre los componentes en una red (generalmente multiplex). Entonces, con base en [31], una red multiplex se define como:

Sea  $L = \{1, \dots, m\}$  el conjunto de capas. Una *capa* es un índice que representa un tipo particular de interacción o relación y  $|L| = m$ , el número de capas en la red multiplex. Además, se considera un conjunto de nodos  $V$ , donde los nodos representan los componentes del sistema y  $G_P = (V, L, P)$  una relación binaria donde,  $P \subseteq V \times L$ .

Así, el estado  $(u, \alpha) \in P$ , con  $u \in V$ , y  $\alpha \in L$  significa que  $u$  se relaciona (conecta) en la capa  $\alpha$ , llamando par ordenado  $(u, \alpha) \in P$  a la pareja de nodo y capa que representa la pertenencia del nodo  $u$  en la capa  $\alpha$ ; por lo tanto,  $P$  es el conjunto de parejas **nodo-capas**.

En otras palabras,  $G_P = (V, L, P)$  se puede interpretar como una red bipartita donde  $P$  es el conjunto de enlaces.  $|P| = N$  es el número de pares nodo-capas, mientras que  $|V| = n$  es la cantidad de nodos. Si cada nodo  $u \in V$  tiene un representante en cada capa, es decir,  $P = V \times L$ , se denota la red como multiplex alineada a nodos y se tiene  $|P| = m \cdot n$ .

De aquí surge la idea de que las redes multiplex ocasionan que los cálculos y análisis son más simples con la conexión de los nodos réplica; es decir, cada nodo está alineado consigo mismo en las demás capas.

Así, la definición de cada sistema monocapa, con relaciones o interacciones de diferente tipo está naturalmente representado por una red  $G_\beta(V_\beta, E_\beta)$  [31], donde  $V_\beta = \{(u, \alpha) \in P \mid \alpha = \beta\}$ , es decir,  $V_\beta$  es un subconjunto de  $P$  compuesto por todos los pares nodo-capas que tienen el índice particular  $\beta$  como segundo elemento. En otras palabras, representa al conjunto de nodos en una capa en particular.

Por otro lado, el conjunto de enlaces  $E_\beta \subseteq V_\beta \times V_\beta$  representa las interacciones o relaciones de un tipo particular entre los componentes del sistema. Así, se llama a  $G_\beta(V_\beta, E_\beta)$  una red de capas y se puede considerar el conjunto de todas las redes de capas:

$$M = G_\alpha, \text{ con } \alpha \in L \cdot |V_\beta|$$

Además,  $|V_\beta| = n_\beta$  es el número de pares de nodo-capa en la capa  $\beta$  y, para las redes multiplex alineadas por nodos, siguiendo con la idea de conexión entre nodos réplica, se tiene:

$$n \cdot \alpha = n, \forall \alpha \in L.$$

Por último, se considera la red  $G_C$  en  $P$  [31] en la que hay un enlace entre dos pares nodo-capa  $(u, \alpha)$  y  $(v, \beta)$  si y solo si  $u = v$ , es decir, cuando los dos enlaces de la red  $G_P$  inciden en el mismo nodo  $u \in V$ , lo que significa que los dos pares nodo-capa representan el mismo nodo en capas diferentes, así,  $G_C = (P, E_C)$  es la red de acoplamiento y  $E_C$  representa a los enlaces intercapa para el mismo nodo.

Con base en lo anterior, es fácil notar que la red de acoplamiento está formada por  $n = |P|$  componentes desconectados que son redes completas o nodos aislados, en otras palabras, se tiene que cada red de acoplamiento representa a cada una de las parejas nodo-capa si consideramos sus conexiones intracapa. Por lo tanto, cada componente está formado por todos los representantes de un nodo en diferentes capas, y se llama a los componentes de  $G_C$  como supra-nodos.

Entonces, una red multiplex está representada por la tupla  $\mathcal{M} = (V, L, P, M)$ , en donde :

- $V$ , es el conjunto de nodos que representa los componentes del sistema.
- $L$ , es el conjunto de capas que representa diferentes tipos de relaciones o interacciones en el sistema.
- $G_P \in P$ , es la red que muestra qué nodo está en un tipo particular de relación y define el representante de cada uno en cada tipo de relación, es decir,  $G_P$  aquí describe las parejas nodo-capa.
- $M$ , es el conjunto de las redes de cada sistema monocapa (redes de interacciones de un tipo particular entre los nodos).

Con esto se puede decir que, un nodo corresponde a un “objeto del sistema”, mientras que los pares nodo-capa son instancias diferentes del mismo objeto. Por ejemplo, un nodo podría representar una estación de transporte, mientras que la pareja nodo-capa representa los tipos de transporte que parten de ella.

Como se denotó con anterioridad, las redes multiplex son redes donde se representa el mismo conjunto de nodos en cada capa. Sin embargo, la interacción entre los nodos puede ser diferente en cada uno. Por ejemplo, dos nodos podrían estar conectados en una capa y no en otra.

Además, como los nodos de este tipo de redes se caracterizan por vectores en lugar de escalares (debido a que cada nodo existe en todas las capas), se necesita el desarrollo de nuevas herramientas para simplificar su descripción. Por ejemplo, se puede cuantificar la distribución del grado de un nodo entre las diversas capas utilizando la **entropía o interdependencia del grado multiplex** [13]; donde, la interdependencia del nodo  $i$  se define como  $\lambda_i = \sum_{i \neq j} \frac{d_{\alpha ij}}{d_{ij}}$ , donde  $d_{ij}$  es el número total de rutas más cortas entre los nodos  $i$  y  $j$  utilizando solamente enlaces que están en la misma capa y  $d_{\alpha ij}$  es el número de rutas más cortas entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  que hace uso de enlaces disponibles en dos o más capas, es decir, la ruta de  $i$  a  $j$  utiliza enlaces de distintas capas. Por lo tanto, mide que tan dependiente es un nodo en la estructura multiplex en términos de accesibilidad.

De forma equivalente, es posible ampliar esta definición de nodos a capas, para tener en cuenta la importancia de una capa determinada en todo el sistema [5].

Además, las medidas estructurales más interesantes de las redes multiplex son las relacionadas con el concepto de **centralidad multiplex**, la cual, en este contexto, se refiere a la importancia

de un nodo en la red, aunque debido a la existencia de distintas relaciones o sistemas (capas), la definición de importancia puede variar de un sistema a otro. Por lo tanto, en redes multiplex:

- El grado en sí mismo puede considerarse como una medida de centralidad.
- Otra idea de centralidad implica el vector propio, que se obtiene a partir del valor propio más grande de la matriz de adyacencia (que es una matriz cuadrada que se utiliza como una forma de representar relaciones binarias entre dos nodos).
- Por último, la medida de centralidad intermedia que se define como la fracción cuyo numerador es el número de rutas más cortas entre cualquier par de nodos  $s$  y  $t$  que pasan a través del nodo  $i$ , y cuyo denominador es el número total de rutas más cortas entre  $s$  y  $t$ .

Es decir que no solo los nodos de manera individual son importantes, sino que también es posible encontrar grupos de nodos que comparten propiedades comunes. Si los nodos de una clase determinada tienden a conectarse solamente con nodos que pertenecen a la misma clase, se dice que la red es selectiva y tiende a una alta modularidad.

Existen varios métodos para la detección de comunidades; sin embargo, los más populares son aquellos que se basan en maximizar la **modularidad de la red multiplex**, que en su forma más general, se puede ver como un nodo  $u$  en la capa  $\alpha$  que se puede conectar a cualquier nodo  $v$  en cualquier capa  $\beta$ .

Es importante mencionar que la robustez en una red se puede cuantificar encontrando los nodos que causan la ruptura del GC (proceso de percolación inversa). En redes multiplex, se puede identificar el GC como MCGC o LVC, que se definen como [19]:

1. Componente gigante mutuamente conectado (MCGC por sus siglas en inglés): Cada nodo  $i$  está en el MCGC si tiene al menos un vecino  $j$  que pertenece al MCGC y si todos sus nodos réplica en cada red interdependiente (capa) también están en el MCGC.

A partir de esta definición, Bianconi et al. [19] deducen que si un nodo  $i$  en una determinada capa de una red de redes conectadas está en el MCGC, entonces todos sus nodos *replica* también están en MCGC.

2. Clúster Viable más Grande (LVC por sus siglas en inglés): La viabilidad puede verse como la existencia de varias rutas, conectando cualquier par de nodos en cada una de las capas de toda la red. Por definición, un LVC es un conjunto de tamaño máximo de nodos interconectados entre sí al mismo tiempo en todas las capas individuales [14, 122].

Esto hace que un LVC tenga como tamaño máximo, al tamaño de la intersección del conjunto de nodos conectados en cada una de las capas que conforman la red multiplex.

Una forma habitual de representar o manejar una red es utilizando la matriz de adyacencia. Sin embargo, las matrices de supra-adyacencia pueden explicar algunas de mejor forma la dinámica de las redes multiplex [6].

Entonces, para poder entender la matriz de supra-adyacencia, se necesita la definición de una supra-red. Para esto, hay que considerar la red  $G_C$  definida anteriormente, en la que existe un enlace entre dos pares *nodo – capa*  $(u, \alpha)$  y  $(v, \beta)$  si y solo si  $u = v$ .

Es fácil darse cuenta de que la red  $G_C$  está formada por  $n = |P|$  componentes desconectados, las cuales son redes completas o nodos aislados. Cada componente está formado por todos los representantes de un nodo en diferentes capas, y se denotan como *supra – nodos*  $(S_{i,\alpha})$ . Así, al considerar la unión de todas las sub-redes de una sola capa, se obtiene  $G_l = \alpha G_\alpha$ , que se denomina red intracapa.

Finalmente, se puede definir la red  $G_M = G_l \cup G_C$ , denominada supra-red. Además,  $G_M$  es una representación sintética de una red multiplex, donde, todos los supra-nodos son un clique de  $G_M$ .

Por lo tanto, la matriz de *supra-adyacencia* es la matriz de adyacencia de la supra-red  $G_M$  que a su vez es una representación sintética de toda la red multiplex. Por definición, se puede obtener a partir de las matrices de adyacencia de las redes monocapa y la matriz de la red  $G_C$  de la siguiente manera [32]:

$$\bar{A} = \bigoplus_{\alpha} A^{\alpha} + C \quad (2.1)$$

Donde  $\bigoplus$  representa la suma directa.

La Figura 2.1 muestra la matriz de supra-adyacencia, la matriz de adyacencia intracapa y la matriz de acoplamiento ( $G_C$ ) de una red multiplex [32].

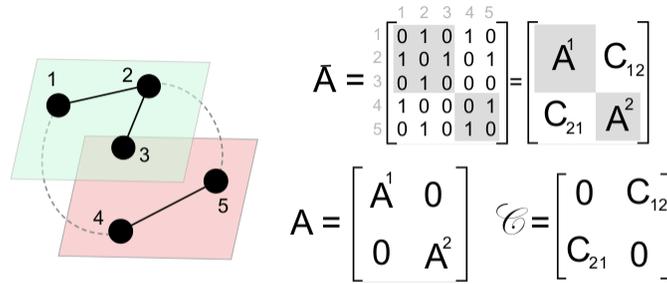


FIGURA 2.1: Ejemplo de una matriz de supra-adyacencia [32].

Con base en la Figura 2.1 se puede ver que, con base en las definiciones previas, el nodo 4 puede ser visto como el nodo-capa (1,2) y que el nodo 5 como el nodo-capa (2,2). Por otro lado, se observa que  $\bar{A}$  adopta una forma muy simple en el caso de redes múltiplex alineadas por nodos, es decir

$$\bar{A} = A + K_m \otimes Y_n$$

Donde  $\otimes$  representa el producto de Kronecker [63],  $K_m$  es la matriz de adyacencia de una red completa en  $m$  nodos, e  $I_n$  es la matriz identidad  $n \times n$ .

### 2.5.2.- Análisis de redes multiplex

Por lo tanto, en cuanto a las redes multiplex, el estudio se ha enfocado en los enlaces [93], así como en la representación de sistemas de mundo real utilizando esta topología de red [18, 24, 74] y en [102], se introducen medidas y modelados para las correlaciones en las redes multiplex, analizando redes del mundo real.

En [17], se dejó abierta la pregunta de cómo diseñar redes multicapa que sean robustas, por lo cual, en diversos trabajos se ha buscado encontrar una medida para responder a esta cuestión [5]; sin embargo, la pregunta sigue abierta dado que no siempre se toman en cuenta las propiedades de percolación y asortatividad dados en [17].

Con base en lo anterior, en [128] se estudia la propagación de ataques localizados en redes multiplex, donde se realizan experimentos utilizando diversos valores para el índice de asortatividad y para el umbral de percolación. Por otro lado, en [70], los autores describen que cuando

es mayor la correlación entre los enlaces, se minimiza la vulnerabilidad de las redes multiplex contra ataques dirigidos.

Además, en [32], los autores analizan las relaciones triádicas para la generalización de la transitividad y la importancia de tener cuidado al realizar dicha generalización, y muestran cómo la estructura de las redes multiplex añade un nuevo parámetro fundamental en la transitividad. Dicho análisis ilustra que las redes sociales tienen una fuerte tendencia a promover la redundancia al cerrar las triadas en cada capa.

En [117] estudian las relaciones sociales en primates y su interacción a través del tiempo con el enfoque de redes multiplex. Los autores resaltan que al modelar las redes multiplex no se pierde información primordial para el análisis como en las redes monocapa o de capas agregadas y, mejora los métodos anteriores al conservar los tipos y patrones de interacción entre los individuos.

En [110] estudian la influencia y comportamientos de individuos en una red social para evitar la transmisión de VIH. El análisis se realiza con el enfoque de redes multiplex, donde se trabajan redes de “relaciones sexuales entre individuos” y de “individuos que consumen drogas”; concluyendo que, las personas que consumen drogas se encuentran más relacionadas y tienen mayor probabilidad de tener el virus de VIH. El enfoque multiplex ayuda a los autores a tener una mejor perspectiva sobre las relaciones que pueden existir entre ambos factores y la influencia para contraer enfermedades.

En [102] muestran que en las redes multiplex, las interacciones entre los sistemas elementales pueden ser cualitativamente diferentes. En particular, introducen diversas medidas para correlacionar las actividades de los nodos en diferentes niveles de actividades.

En [19] presentan el marco matemático exacto capaz de describir la transición de integración de sitios en redes multiplex reales, en específico redes sociales, biológicas y de transporte, donde consideran que el umbral de percolación promedio es válido en un número infinito de configuraciones aleatorias, donde los nodos están presentes en el sistema con una probabilidad dada. Los resultados de este trabajo confirman que la conectividad promedio del sistema no afecta el cambio, ya que sus componentes individuales se destruyen aleatoriamente.

Por otro lado, en [77] se estudia el mecanismo de propagación de fallas de nodo a enlace y establecen una interdependencia “débil” a través de un parámetro de tolerancia, que cuantifica la probabilidad de que un nodo sobreviva cuando uno de sus vecinos interdependientes falla. Los resultados analíticos y numéricos muestran que la débil interdependencia produce un fenómeno sorprendente: capas en diferentes posiciones dentro del sistema multicapa experimentan distintas transiciones de percolación.

Además, en [105] denotan que en el análisis de la robustez de las redes multiplex, generalmente se supone que los nodos interdependientes funcionan simultáneamente y describen que parece poco realista que un sistema real evolucionara, a través del desarrollo de múltiples capas de interacciones, hacia una estructura frágil.

Por último, en [138] estudian la identificación de nodos vitales en redes multiplex, centrándose en los nodos vitales por capa para inmunización o ataque. Aquí, los autores presentan un modelo de integración en el que la condición que hace que un nodo sea funcional es que el nodo esté funcionando al menos en dos de las capas de la red. Sin embargo, para un mayor número de capas, el modelo describe un escenario en el que las capas aumentan la robustez del sistema al crear interdependencias redundantes entre estas. Los autores demuestran este hecho gracias al desarrollo de una teoría de paso de mensajes.

## 2.6.- Técnicas metaheurísticas

Las metodologías presentadas en los siguientes capítulos, se basan en la resolución de diferentes problemas de optimización pertenecientes a las clases  $\mathcal{NP}$  – completos y  $\mathcal{NP}$  – duros.

Debido a la dificultad que se presenta para resolver problemas  $\mathcal{NP}$  – duros, se han diseñado métodos que dan como resultado buenas soluciones en tiempo computacional aceptable. Estos métodos son denominados heurísticas, los cuales, a menudo se basan en el sentido común, que se supone ofrecerán una buena solución a problemas difíciles.

Con la finalidad de buscar soluciones a problemas  $\mathcal{NP}$  – duros, en tiempos de cómputo reducidos, han surgido una serie de métodos bajo el nombre de metaheurísticas, con el propósito de obtener mejores resultados que los alcanzados por las técnicas heurísticas tradicionales

Las metaheurísticas se desarrollan a partir de los años 90 y se caracterizan porque realizan un procedimiento de búsqueda para encontrar soluciones de aceptable calidad. Dentro de estas se encuentran: recocido simulado, redes neuronales, búsqueda tabú, algoritmos genéticos, algoritmos de hormigas, búsqueda de vecindades variables, entre otras.

A continuación, se muestran las principales características de las metaheurísticas utilizadas en este trabajo.

### 2.6.1.- Recocido simulado

Recocido simulado es una técnica propuesta por Kirkpatrick et al. en 1983 [67] que hace una analogía sobre el recocido del acero y cerámicas.

El recocido del acero y cerámicas consiste de dos fases: la primera consiste en elevar la temperatura del material por encima del punto de fusión, a fin de volverlo líquido, por lo que se pierde toda su estructura anterior y se aumenta la movilidad de sus partículas, mientras que en la segunda fase, se deja enfriar el material muy lentamente, con el objetivo de dar oportunidad a que las partículas vuelvan a configurarse de manera ordenada (cristalización), antes de perder totalmente su movilidad.

De manera análoga, en los problemas de optimización, con la temperatura alta se realiza el proceso de diversificación del espacio de soluciones, mientras que, el enfriamiento lento, brinda una probabilidad mayor de obtener soluciones con mejor valor que la inicial (simulando la cristalización).

Recocido simulado parte de una solución inicial y continua hasta un máximo de pasos definido o hasta que se encuentra un estado con energía menor o igual que el inicial. Después, se genera aleatoriamente un vecino de esa solución y, con base en el criterio de Metropolis [83] se elige o no a la nueva solución como actual.

Con base en lo anterior, se puede ver que la base fundamental de esta técnica es que al principio de la ejecución se aceptan soluciones “malas”, lo cual permite explorar una buena parte del espacio de soluciones. Además, se pueden manipular los diferentes parámetros.

Por tal motivo, resulta crucial para la implementación de recocido simulado, el diseño correcto de los criterios que determinan los valores de estos parámetros:

1. Espacio de soluciones: con el objetivo de que la técnica regrese una solución de buena calidad, el espacio de soluciones debe ser determinado de manera adecuada, es decir, debe dar una buena representación del problema a tratar.
2. Función objetivo: esta sirve para evaluar qué tan buena es una solución, con esta función se comparan dos soluciones y se decide cuál es la mejor. Además, es importante que la

función objetivo sea fácil de calcular, ya que una función objetivo complicada, conduce a un mayor tiempo computacional.

3. Criterio de generación de soluciones vecinas: el mecanismo de generación permite seleccionar de manera aleatoria, una solución vecina del entorno de la solución actual. Por lo general, el criterio para generar las soluciones, se basa en permutar las posiciones de un conjunto de elementos que forman a la solución actual, donde, dependiendo de la cantidad de permutaciones, se denomina el vecindario al que pertenece la solución modificada.
4. Temperatura inicial: al igual que para el procedimiento de recocido de metales y cerámicas, la estrategia es tomar una temperatura inicial lo suficientemente grande, de modo que, en las primeras iteraciones se acepten la mayoría de las soluciones generadas.
5. Criterio de paro: la condición escogida para esta técnica, consiste en detenerlo si no ha cambiado la solución actual en cierta cantidad de iteraciones sucesivas o cuando se alcanza un número determinado de iteraciones totales.
6. Condición de equilibrio: este punto es donde la temperatura permanece constante, esta condición es la que determina la forma de cómo se explora el espacio de soluciones. Es importante tener en cuenta que, la idea es que la técnica explore una buena parte de este espacio y al mismo tiempo evite que la búsqueda se vuelva ineficiente. Además, se debe considerar que, si con una temperatura determinada se consigue un porcentaje de soluciones que mejoran la solución actual es conveniente pasar a otra temperatura para acelerar el proceso de búsqueda.
7. Actualización de la temperatura: este paso es importante en el sentido que afecta la propiedad del algoritmo para analizar todo el espacio de soluciones. Lo anterior debido a que, mientras la temperatura sea alta, habrá más probabilidad de escoger malas soluciones y cuando sea baja, se intensifica sobre el vecindario de la solución actual. De manera general, se recomienda que el enfriamiento o actualización de temperatura se lleve a cabo multiplicando la temperatura actual por un factor  $\alpha$  cercano a 1.

Por lo tanto, como se puede ver, recocido simulado necesita de una correcta especificación numérica de los parámetros con el objetivo de obtener buenas soluciones.

### 2.6.2.- Evolución diferencial

Evolución Diferencial (DE) es una técnica perteneciente a los algoritmos evolutivos y recibe como entrada la información como un vector. La longitud de cada uno de estos vectores es igual al número de datos más un espacio reservado para el valor de la aptitud, donde la población está compuesta de  $NP$  (Número de padres) vectores. En esta técnica, un vector se define como  $x_p^g, \forall p = 1, 2, \dots, NP$  y  $g$  es la generación correspondiente.

Además, se necesita que el dominio de cada uno de los datos del problema esté restringido entre valores mínimo y máximo  $x_m^{min}$  y  $x_m^{max}$  con  $m = 1, 2, \dots, N$ . El algoritmo de *DE* se compone de 4 pasos [123], los cuales se muestran a continuación:

1. Inicialización. La población se inicia de manera aleatoria, considerando los valores mínimos y máximos de cada variable de la siguiente manera:

$$x_{p,m}^1 = x_m^{min} + aleatorio(0, 1) \cdot (x_m^{max} - x_m^{min})$$

Donde  $p = 1, \dots, NP$ ,  $m = 1, \dots, n$ , y  $\text{aleatorio}(0, 1)$  es un número aleatorio en el rango  $[0,1]$ .

2. Mutación. Esta fase consiste en la construcción de NP vectores aleatorios ruidosos, los cuales se crean mediante la elección aleatoria de tres individuos, llamados vectores objetivo:  $x_a, x_b, x_c$ . Donde, los vectores aleatorios ruidosos ( $n_p^g$ ) son obtenidos de la siguiente manera:

$$n_p^g = x_c + F \cdot (x_a - x_b)$$

Donde  $a, b$  y  $c$  son números aleatorios distintos entre sí,  $p = 1, \dots, NP$  y  $F$  es un parámetro que controla la modificación de cada elemento del vector ruidoso.

3. Recombinación (cruza). Esta fase se lleva a cabo comparando los vectores aleatorios ruidosos con los vectores originales  $x_p^g$  elegidos de manera aleatoria. Por lo tanto, se obtienen los vectores de prueba  $t_m^g$  de la siguiente manera:

$$t_{p,m}^g = \begin{cases} n_{p,m}^g & \text{si } \text{aleatorio}(0, 1) < GR \\ x_{p,m}^g & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde  $p = 1, \dots, NP$ ,  $m = 1, \dots, n$  y GR controla la tasa de recombinación.

Es importante mencionar que la comparación se hace variable a variable; por lo tanto, el vector de prueba será una mezcla de los vectores aleatorios ruidosos y original.

4. Selección. La última fase se realiza comparando los vectores de prueba con los originales, de manera que, el vector de la generación siguiente es aquel que tenga el mejor valor de función de desempeño (función fitness):

$$x_p^{g+1} = \begin{cases} t_p^g & \text{si } \text{fitness}(t_p^g) < \text{fitness}(x_p^g) \\ x_p^g & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde, la inicialización se lleva a cabo en la primer generación del algoritmo y los procesos de mutación-recombinación-selección se realizan para cada generación, hasta que se llegue al número máximo de generaciones. En la literatura, algunos autores recomiendan utilizar, los siguientes valores:

- Factor de cruza: 0.5.
- Factor de mutación: 0.5.
- Número de Generaciones: 10.

Sin embargo, al igual que para recocido simulado, es importante realizar la especificación correcta de los parámetros para obtener las mejores soluciones.

Con base en los trabajos presentados durante este capítulo, se puede ver que la presente investigación se relaciona con el campo de la cuantificación de robustez en redes multicapa, ya que, principalmente, la investigación se basa en el análisis y desarrollo de metodologías basadas en las características estructurales y problemas de optimización, para poder cuantificar la robustez e identificar a los nodos influyentes en redes multiplex de 2, 3 y 5 capas.

Por otro lado, debido a que existen pocas redes multiplex de referencia para poder comparar los resultados, esta investigación presenta una nueva base de datos con redes multiplex de diferentes características estructurales y modelos de redes, que pueden funcionar como conjunto de referencia.

Por lo tanto, se puede ver que el trabajo desarrollado durante esta investigación, es de gran aportación al estado del arte de las redes multiplex y la cuantificación de su robustez, debido a que no existe una manera adecuada para obtenerla. Además, gracias a que es un área de reciente creación, la generación de nuevos bancos de datos es importante para que diversas investigaciones puedan probar y comprobar sus productos.

## Capítulo 3

# Metodología para cuantificar la robustez en redes monocapa

En este capítulo se presenta el desarrollo conceptual y el proceso de construcción de las redes utilizadas para probar el funcionamiento de la metodología para cuantificar la robustez en redes complejas propuesta en esta investigación.

Dicha metodología se basa en la adaptación y la resolución del modelo matemático del problema del conjunto separador de vértices (VSP) [7] con el fin de encontrar el conjunto de nodos que al eliminar sus enlaces de la red, provoquen la ruptura del *componente gigante* de la red entera.

Además, esta metodología fue probada en un conjunto de redes de referencia ampliamente utilizadas en la literatura asociada con la ciencia de redes y, como caso de estudio se probó en un conjunto de redes sociales construidas con la información sobre las principales características de las universidades pertenecientes al Sistema de Educación Superior en México (SESM) para el período 2013-2017.

Finalmente, con base en los experimentos realizados se demuestra que la metodología propuesta es capaz de cuantificar la robustez en varios tipos de modelos de redes complejas sin utilizar medidas de centralidad o alguna otra métrica estructural.

### 3.1.- Construcción de las redes

La construcción de las redes y el análisis de sus principales características estructurales son de gran importancia para el desarrollo y prueba de la metodología propuesta. Por lo tanto, a continuación se presentan el proceso de construcción y el análisis de las características estructurales para las redes de referencia y del SESM.

#### 3.1.1.- Construcción de las redes de referencia

Con el objetivo de verificar el funcionamiento de la metodología propuesta, se utilizaron algunas redes de referencia que se han utilizado en varios trabajos [16, 46, 85, 130], cuyas principales características son:

TABLA 3.1: Número de nodos y enlaces en redes de referencia.

Red	Nodos	Enlaces
Freeman's [47]	32	695
Jazz musicians [53]	198	2,742
USAir97 [28]	322	2,126
Dolphins [80]	62	159
US power grid [131]	4,941	6,594

Con base en la información presentada en la Tabla 3.1 se puede ver que las redes de referencia son de diferentes tamaños, desde 32 nodos con 696 enlaces, hasta 4,941 nodos con 6,594 enlaces. Entonces, para verificar si las redes de prueba tienen las características de los distintos modelos de redes, se presenta la Tabla 3.2 que muestra los resultados numéricos para las principales métricas estructurales.

TABLA 3.2: Métricas estructurales para redes de referencia.

Red	Grado	G. c/pesos	Diam.	Den.	Mod.	Comp. Con.	C. Clustering	L. ruta
USAir97	6.404	12.808	6	0.038	0.194	1	0.620	2.564
Dolphins	5.119	5.119	8	0.084	0.526	1	0.303	3.357
Freeman	14.375	28.750	2	0.740	0.078	1	0.733	1.260
Power grid	2.669	2.669	46	0.001	0.933	1	0.080	18.980
Jazz musicians	27.691	55.394	6	0.14	0.440	1	0.610	2.235

Por ejemplo, para las redes Freeman y US Power Grid, el grado promedio es 14.375 y 2.6691, respectivamente. Respecto al coeficiente de agrupamiento, los valores en las redes Freeman y Jazz Musician son altos (alrededor de 0.7), mientras que para la red Dolphins, es pequeño (0.25).

Por lo tanto, la longitud de la ruta para las redes que tienen un coeficiente de agrupamiento alto es corta, mientras que para las redes con un coeficiente de agrupamiento bajo, es más extensa.

Entonces, se puede observar que las redes de referencia tienen características de diferentes modelos de red, como: Mundo pequeño [131] (Freeman, Jazz Musicians, Dolphins), libre de escala [10] (US Power Grid, USAir97), entre otros y, así se puede ver que al utilizar este conjunto de redes, se puede probar si la metodología propuesta es capaz de trabajar en diferentes tamaños de redes que tienen las características de los diferentes modelos descritos en el capítulo 1.

### 3.1.2.- Construcción de las redes del caso de estudio (SESM)

Como se mencionó anteriormente, el caso de estudio para esta metodología se basa en el análisis de las redes del Sistema Educativo Superior en México (SESM). Por lo tanto, a continuación se muestra el proceso de construcción para las redes utilizadas para el análisis de la robustez, así como el análisis de sus métricas estructurales, con el objetivo de clasificarlas en algún modelo de redes complejas.

En específico, la construcción de las redes del SESM se realizó con la información de algunas características de las 60 principales universidades del país, la cual está disponible en el repositorio ExECUM [127] de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), como:

- Número de profesores con reconocimiento del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).
- Número de profesores con grado de maestría o doctorado.
- Número de estudiantes matriculados.
- Número de programas académicos acreditados por alguna organización de régimen especializado.
- Cantidad de artículos publicados en revistas en SCOPUS.
- Cantidad de artículos publicados en revistas indexadas en JCR.
- Programas de posgrado incorporados al Padrón Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del CONACYT, entre otros.

Dadas las características anteriores, se puede decir que el SESM es un sistema complejo, ya que está compuesto por diversos tipos de entidades y relaciones interdependientes y diferentes.

Con base en la información disponible en el repositorio ExECUM, se construyeron 20 redes de una sola capa (monocapa), de las cuales 10 se construyeron mediante la aplicación de una prueba paramétrica (datos normalizados) conocida como T-student [44] y las 10 redes restantes, se construyeron utilizando una prueba no paramétrica (datos no normalizados) conocida como Wilcoxon [61], ambas con un nivel de significancia del 5% y aplicadas a dos conjuntos de datos:

1. Datos desglosados: Donde se considera el valor individual de cada sub-característica.
2. Datos totales: se considera como un valor único la suma de todas las características de un determinado tipo.

Donde ambos conjuntos, se formaron con la información perteneciente a las principales características de las universidades en México.

Además, se considera que si las características para la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima universidades son estadísticamente similares para el  $k$ -ésimo año, se se añade un vínculo entre ellas.

Es importante mencionar que, después de realizar el análisis estructural de las redes del SESM, se generaron 20 redes más eliminando a la UNAM, lo anterior, debido a que en la mayoría de las redes, el nodo que representa a esta universidad se desempeña como un componente aislado y, al no contemplarla para la construcción de las redes, los enlaces de las demás universidades cambian. Por lo tanto, al final se tienen 40 redes donde: 20 son contemplando a la UNAM y 20 sin esta universidad.

Ahora, para entender mejor los resultados mostrados en las siguientes secciones, se muestran los identificadores empleados para cada red del SESM:

- Las redes 1 y 2 corresponden al año 2013.
- Las redes 3 y 4 corresponden al año 2014.
- Las redes 5 y 6 corresponden al año 2015.

- Las redes 7 y 8 corresponden al año 2016.
- Las redes 9 y 10 corresponden al año 2017.

Donde, los identificadores impares corresponden a los datos desglosados y los identificadores pares a los datos totales. Además, en todas las redes, el subíndice .1 corresponde a la primera técnica que considera datos normalizados (prueba T-student), mientras que .2 identifica la segunda técnica que considera datos no normalizados (prueba de Wilcoxon). Por ejemplo, la red 1.1 con UNAM pertenece a la información del año 2013 considerando los datos desglosados normalizados y contemplando el nodo que representa a la UNAM.

Ahora, con el objetivo de representar de manera visual lo que ocurre con las redes, a continuación se muestra la gráfica de la red correspondiente al año 2015 con los datos desglosados asumiendo que los datos no son normalizados.

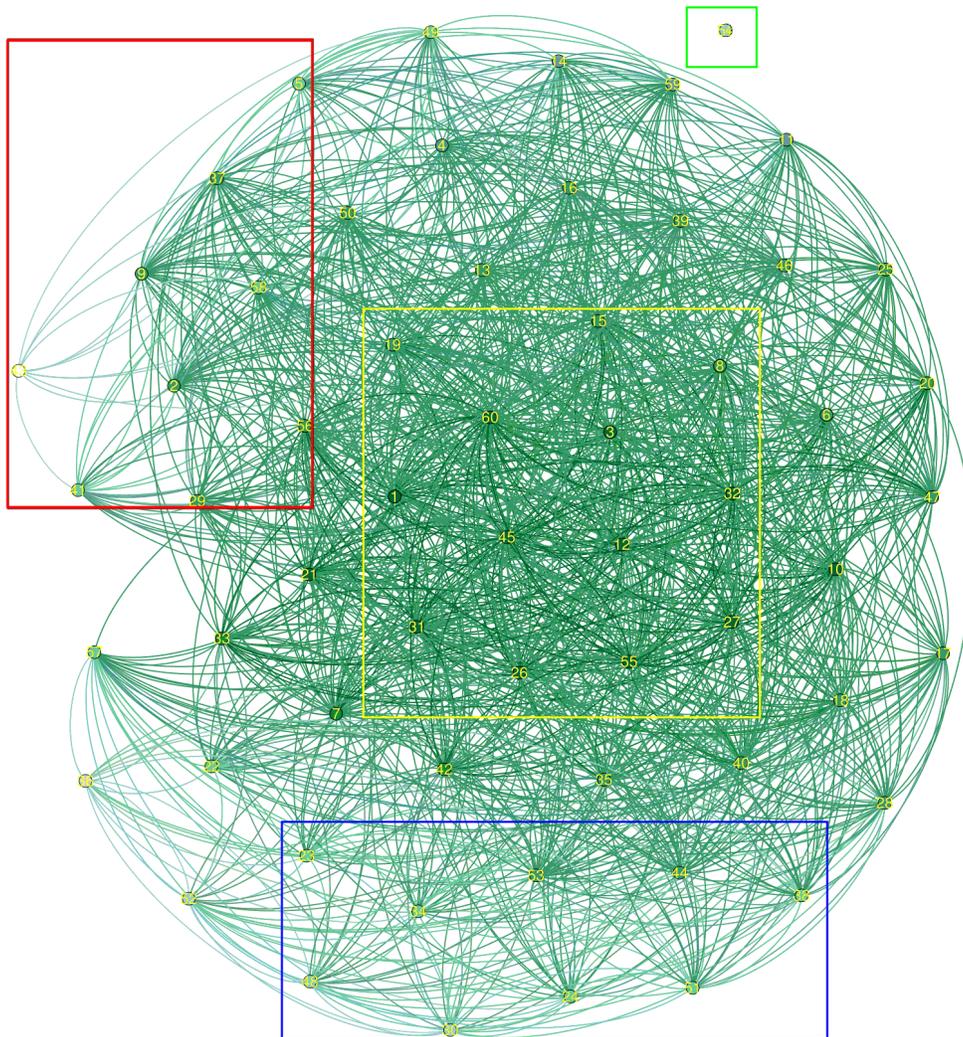


FIGURA 3.1: Gráfica de la red del año 2015 con datos desglosados no normalizados (considerando a la UNAM).

En la Figura 3.1 se observa que la mayoría de los nodos tiene grado alto y que se forman dos componentes conectados, donde el primero contiene un solo nodo (perteneciente a la UNAM),

mientras que el otro tiene los 59 nodos restantes. Además, se puede verificar que las universidades con alto ranking (recuadro rojo) se encuentran enlazadas entre sí, al igual que las universidades que obtienen los peores puntajes en los rankings (recuadro azul).

Para una mejor visualización, los segmentos de la red que corresponden a las universidades con alto y bajo ranking se muestran en las Figuras 3.2 y 3.3<sup>1</sup>. Por lo tanto, se observa que las universidades que se consideran punteras en los rankings tienden a estar agrupadas o a estar mayormente enlazadas entre sí, respecto a las demás universidades, así como las universidades que figuran dentro del grupo que obtiene los peores puntajes en los rankings.

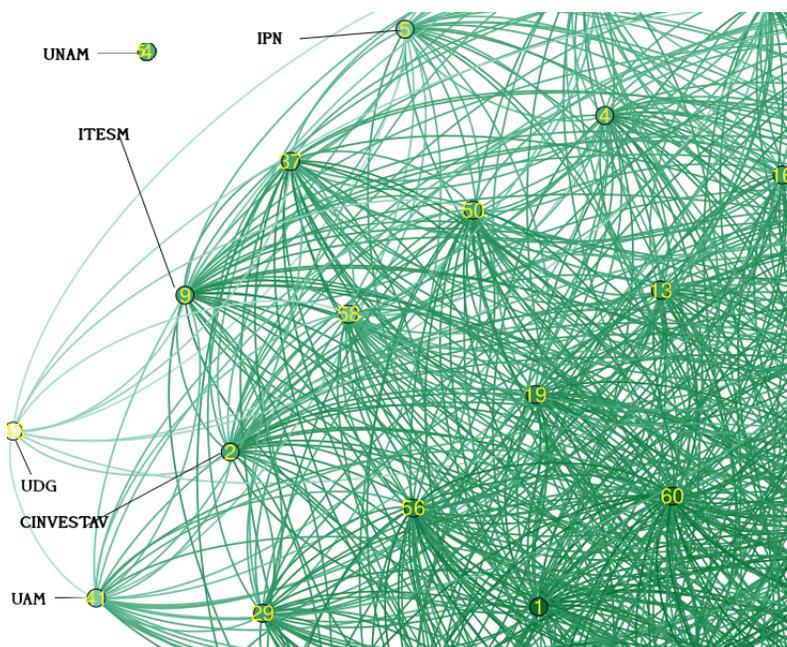


FIGURA 3.2: Elementos con alto ranking de la red del año 2015 con datos desglosados no normalizados (considerando a la UNAM).

Los elementos mostrados en la Figura 3.2 se encuentran en la parte superior izquierda de la Figura 3.1 y representan a las universidades que obtienen los mejores valores de ranking en México, por ejemplo: el Instituto Politécnico Nacional (IPN), la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), etc.

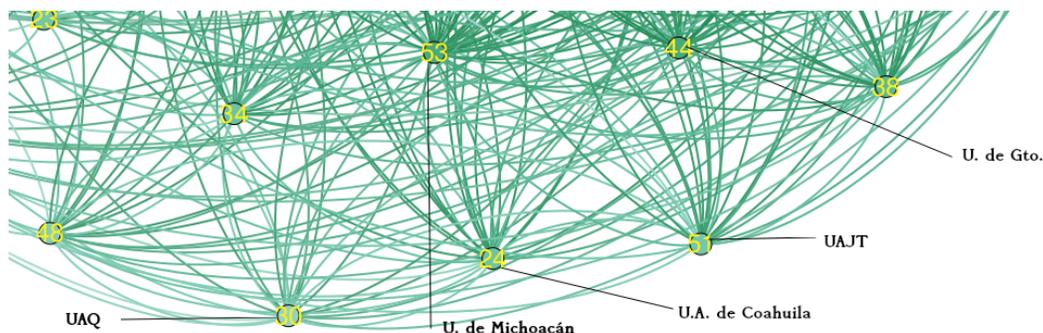


FIGURA 3.3: Elementos con bajo ranking de la red del año 2015 con datos desglosados no normalizados (considerando a la UNAM).

<sup>1</sup>En el anexo A se muestra el identificador para cada una de las universidades.

Los elementos mostrados en la Figura 3.3 se encuentran en la parte inferior derecha de la Figura 3.1 y representan a las universidades que obtienen los valores más bajos de ranking en México, por ejemplo Universidad de Michoacán, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), Universidad de Guanajuato, etc.

A continuación, se presentan los resultados numéricos para los cálculos de las principales métricas estructurales. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, las redes del SESM se construyeron utilizando dos tipos de datos (datos desglosados y totales), entonces la Tabla 3.3 muestra los resultados numéricos de las redes construidas con los datos desglosados.

TABLA 3.3: Cálculos estructurales de redes del SESM construidas con los datos desglosados.

ID	Grado	Grado c/ pesos.	Diam.	Den.	Mod.	C. Agrupamiento	L. ruta
1.1 con UNAM	37.119	74.238	4	0.640	0.214	0.851	1.410
1.1 sin UNAM	35.492	70.984	4	0.612	0.201	0.838	1.484
1.2 con UNAM	35.695	71.390	3	0.615	0.247	0.852	1.444
1.2 sin UNAM	35.017	70.034	5	0.604	0.227	0.840	1.508
3.1 con UNAM	37.567	75.134	5	0.637	0.202	0.854	1.445
3.1 sin UNAM	34.068	68.136	5	0.587	0.210	0.841	1.546
3.2 con UNAM	37.000	74.000	5	0.627	0.203	0.848	1.462
3.2 sin UNAM	33.356	66.712	4	0.575	0.241	0.837	1.546
5.1 con UNAM	41.119	82.238	3	0.709	0.171	0.866	1.310
5.1 sin UNAM	33.356	66.712	4	0.575	0.241	0.837	1.546
5.2 con UNAM	41.220	82.440	3	0.711	0.168	0.869	1.308
5.2 sin UNAM	33.186	66.372	4	0.572	0.270	0.839	1.540
7.1 con UNAM	34.300	68.600	4	0.581	0.256	0.844	1.521
7.1 sin UNAM	35.898	71.797	4	0.619	0.222	0.849	1.448
7.2 con UNAM	38.333	76.600	3	0.649	0.226	0.859	1.396
7.2 sin UNAM	36.000	72.000	4	0.621	0.219	0.848	1.448
9.1 con UNAM	34.867	69.733	4	0.591	0.255	0.853	1.503
9.1 sin UNAM	34.407	68.814	5	0.593	0.238	0.862	1.513
9.2 con UNAM	35.000	70.000	4	0.593	0.244	0.861	1.504
9.2 sin UNAM	35.051	70.102	5	0.604	0.229	0.871	1.493

De acuerdo con la información que se muestra en la Tabla 3.3 se puede ver que el grado promedio es grande para la mayoría de las redes (un porcentaje alto del número de posibles conexiones), mientras que el diámetro es pequeño (entre 3 y 4). Por lo tanto, el coeficiente de agrupamiento es alto (entre 0.8 y 0.9) y tiene una longitud de ruta promedio pequeña (entre 1.2 y 1.5).

Ahora, la Tabla 3.4 muestra los resultados numéricos para las redes construidas usando los datos totales, donde se puede observar que el grado promedio para todas las redes contiene

aproximadamente al 80 % del total de nodos de la red, de modo que son redes con alta densidad y coeficiente de agrupamiento, presentando una longitud de ruta promedio muy pequeña.

TABLA 3.4: Cálculos estructurales para las redes del SESM construidas con los datos totales.

ID	Grado.	Grado c/pesos	Diam.	Den.	Mod.	C. Agrupamiento	L. ruta
<b>2.1 con UNAM</b>	52.933	105.867	3	0.897	0.046	0.941	1.104
<b>2.1 sin UNAM</b>	52.000	104.000	2	0.897	0.048	0.939	1.103
<b>2.2 con UNAM</b>	46.867	93.733	3	0.794	0.094	0.896	1.218
<b>2.2 sin UNAM</b>	48.203	96.407	3	0.831	0.076	0.915	1.172
<b>4.1 con UNAM</b>	51.633	103.267	2	0.875	0.062	0.928	1.125
<b>4.1 sin UNAM</b>	50.847	101.695	3	0.877	0.053	0.935	1.126
<b>4.2 con UNAM</b>	52.467	104.933	3	0.889	0.053	0.936	1.112
<b>4.2 sin UNAM</b>	50.136	100.271	3	0.864	0.067	0.923	1.137
<b>6.1 con UNAM</b>	46.9333	93.867	2	0.795	0.118	0.897	1.205
<b>6.1 sin UNAM</b>	42.441	84.881	3	0.732	0.129	0.888	1.303
<b>6.2 con UNAM</b>	53.900	107.800	2	0.914	0.037	0.945	1.086
<b>6.2 sin UNAM</b>	39.932	79.864	3	0.688	0.144	0.860	1.342
<b>8.1 con UNAM</b>	47.700	95.400	3	0.808	0.088	0.911	1.200
<b>8.1 sin UNAM</b>	48.305	96.610	3	0.833	0.078	0.919	1.171
<b>8.2 con UNAM</b>	47.560	95.133	3	0.806	0.09	0.911	1.199
<b>8.2 sin UNAM</b>	51.322	102.644	3	0.885	0.043	0.940	1.117
<b>10.1 con UNAM</b>	50.400	100.800	3	0.853	0.074	0.920	1.147
<b>10.1 sin UNAM</b>	49.356	98.712	2	0.851	0.077	0.916	1.149
<b>10.2 con UNAM</b>	50.333	100.667	3	0.853	0.074	0.920	0.926
<b>10.2 sin UNAM</b>	51.559	103.119	2	0.889	0.053	0.934	1.111

Por lo tanto, se puede afirmar que el grado promedio en las redes del SESM construidas con datos totales es mayor que el grado promedio de las redes construidas con los datos desglosados, por ejemplo: Las redes 1.1 y 2.1, ambas con UNAM, tienen un grado promedio de 37.119 y 52.993, respectivamente.

Por esta razón, el valor de diámetro para las redes construidas con los datos desglosados es mayor que el valor para las redes construidas con datos totales, por ejemplo: Las redes 1.1 y 2.1, ambas con UNAM, tienen un valor de diámetro de 4 y 3, respectivamente.

Es importante destacar que el coeficiente de agrupamiento en todas las redes está por encima de 0.8 (considerablemente alto [131]), siendo aún mayor en las redes del SESM construidas con los datos totales.

En cuanto al coeficiente de agrupamiento para las redes 3.2 y 4.2, ambas sin UNAM, presentan valores de 0.837 y 0.936, respectivamente. A su vez, al comparar los valores obtenidos para la densidad, es fácil notar que las redes construidas con datos totales tienen valores de densidad altos en comparación con las redes construidas con los datos desglosados.

Por otro lado, cabe mencionar que los resultados presentados en las Tablas 3.3 y 3.4 muestran que existe una diferencia en el comportamiento de las redes pertenecientes al año 2015 respecto a la redes de los otros años, ya que en ambos tipos de redes (datos desglosados y totales), la eliminación del nodo que representa a la UNAM tiene un mayor efecto en la manera en que se enlazan las demás universidades.

Lo anterior da pauta para decir que la UNAM juega un papel importante en la construcción de las redes, ya que su eliminación resulta en cambios drásticos en los enlaces.

Finalmente, después de analizar las principales métricas estructurales, se puede afirmar que todas las redes del SESM siguen el modelo de *mundo pequeño* propuesto por Watts y Strogatz [131] y descrito en el capítulo 1 debido a que presentan un alto coeficiente de clustering y un diámetro pequeño. Por lo tanto, cumplen con las principales características de las *redes sociales* (SN).

## 3.2.- Desarrollo de la metodología

Como se mencionó en el capítulo 1, la robustez en redes es la capacidad de mantener la mayoría de los nodos conectados (componente gigante); por lo tanto, se puede ver que una manera de cuantificar la robustez de la red, puede ser encontrando el conjunto de nodos que provocan la ruptura del componente gigante.

Para esto, existe un problema de optimización conocido como el Problema del Conjunto Separador de Vértices (VSP), cuyo objetivo [7] es encontrar el conjunto mínimo de nodos  $C$  que, cuando sus enlaces son eliminados, causan la ruptura de la gráfica. Por lo tanto, se puede observar que, existe una analogía con la robustez de la red ya que, si se encuentra el mínimo conjunto de nodos que, al ser eliminados dividan el componente gigante en al menos dos componentes aislados, se puede cuantificar la robustez.

Por lo tanto, esta metodología se basa en la adaptación del VSP, donde además de encontrar el conjunto de nodos  $C$  que causen la ruptura del componente gigante en al menos dos componentes ( $A$  y  $B$ ) se contempla la propiedad de asortatividad.

Formalmente, el VSP modificado, se puede modelar como:

- **Instancia:** Una red  $G(V, E)$ , con  $|V| = n$  y un grado  $k_i$  asociado con cada nodo  $i \in V$ .
- **Problema:** Encontrar una partición de  $V$  descrita como  $(C)$ , que su eliminación provoque la formación de los conjuntos disjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , tal que:
  1.  $E$  no contenga los enlaces  $(i, j)$ , con  $i \in A, j \in B$ .
  2.  $\max\{|A|, |B|\}$
  3.  $\sum k_{a_1} - k_{a_2}$  con  $a_1$  y  $a_2 \in A$  y  $\sum k_{b_1} - k_{b_2}$  con  $b_1$  y  $b_2 \in B$  sean minimizadas.

Lo anterior, ayuda a que se elimine el mínimo conjunto de nodos pero que, a su vez ocasione que los tres conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  sean lo más asortativos posibles, es decir, que los nodos que se encuentren en cada uno, tengan características similares.

Es importante mencionar que, dado que el VSP es un problema  $\mathcal{NP} - Duro$ , la modificación de este añadiendo la propiedad de asortatividad, sigue siendo  $\mathcal{NP} - Duro$ . Por lo tanto, se justifica el uso de técnicas heurísticas para su resolución.

En específico, para este trabajo, la metodología propuesta se resolvió mediante el algoritmo de recocido simulado (SA) (para más información sobre la técnica, ver capítulo 2 y [68]). La técnica de SA es un algoritmo de búsqueda local que requiere 4 parámetros de control, los cuales

a su vez, fueron calibrados mediante el algoritmo de evolución diferencial (DE) [123], donde se obtuvieron los siguientes valores:

- Temperatura inicial  $T_i = 100$ ,
- Temperatura final  $T_f = 0.0001$ ,
- Programa de enfriamiento  $T_k \times \alpha$ , con  $\alpha = 0.95$ ,
- Número de veces que se genera un vecino nuevo  $L_k=10$ .

Otra consideración importante sobre *SA* es que al ser una técnica basada en búsqueda local, es necesario establecer la estructura de los vecindarios, es decir, como se modificarán las soluciones para obtener soluciones parecidas a estas (vecinas). Por lo tanto, en este trabajo, se utilizan dos vecindarios: distancia de Hamming 1 y distancia de Hamming 2 que definen la forma en que un nodo se agrega o elimina de la solución actual<sup>2</sup>. Por ejemplo, para la distancia de Hamming 1, se tiene que:

1. Se genera un número *aleatorio* entre 0 y 1.
2. Si *aleatorio*  $\leq 0.5$  se elimina un nodo, de lo contrario, se agrega un nodo.
3. Para eliminar un elemento, se elige aleatoriamente dando la misma probabilidad a cada elemento que pertenezca a la solución actual.
4. Para agregar un elemento, se elige aleatoriamente dando la misma probabilidad a cada elemento que no pertenezca a la solución actual.

Para el segundo vecindario se agregan o eliminan dos nodos, y si es el caso que no se pueden eliminar o agregar dos nodos, se elimina uno y se agrega un nodo diferente. El algoritmo finaliza cuando la mejor solución no se actualiza cuando han transcurrido 50 actualizaciones de temperatura o  $T_k = T_f$ .

Entonces, una vez que el algoritmo termina, devuelve al menor conjunto de elementos que, además de romper el componente gigante de la red, ocasione que los nodos de los componentes formados, presenten las mismas características.

### 3.3.- Resultados

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos al aplicar la metodología presentada en la sección 3 a las redes de referencia y a las redes del SESM.

#### 3.3.1.- Cuantificación de robustez en las redes de referencia

Con el objetivo de verificar si la metodología propuesta funciona en diferentes tipos de redes, se realizaron 20 ejecuciones de la técnica *SA* para resolver el VSP modificado. Por lo cual, se presenta la Tabla 3.5 que contiene los mejores valores numéricos obtenidos para los conjuntos disjuntos *A*, *B* y *C*.

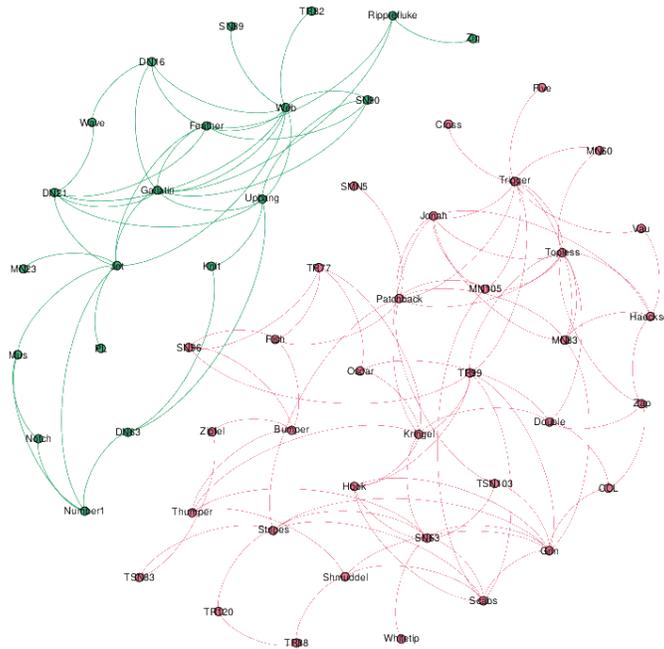
<sup>2</sup>La distancia de Hamming se define como el número de elementos que deben cambiarse para transformar una solución en otra solución válida.

TABLA 3.5: Resultados de la metodología aplicada en las redes de referencia.

Red	Tamaño (número de nodos)	Cardinalidad de $C$	Tamaño $A$ y $B$	% de nodos en $C$
Freeman's	32	20	4 y 8	62.50 %
Dolphins	64	9	35 y 20	14.00 %
Jazz musicians	198	20	167 y 2	10.00 %
USAir97	322	3	54 y 16 (249 nodos aislados)	1.00 %
US Power Grid	4941	19	4902 y 12 (8 nodos aislados)	0.30 %

Con base en la información presentada en la Tabla 3.5, se puede ver que la mayoría de las redes de referencia no son robustas, ya que los conjuntos de separadores  $C$  son aproximadamente el 1 % y el 14 % del total de nodos y que solo una red es robusta.

Por ejemplo: US Power Grid tiene 4941 nodos; sin embargo, sólo 19 nodos (alrededor del 0,3 %) son necesarios para provocar la ruptura del componente gigante. Por otro lado, la red Freeman tiene solo 32 nodos y es robusta, ya que son necesarios 20 nodos (más del 62 %) para provocar la ruptura del componente gigante. La Figura 3.4 muestra un ejemplo gráfico de la red Dolphins, en la cual, se eliminan de la red a los enlaces y nodos pertenecientes al conjunto  $C$ .

FIGURA 3.4: Gráfica de la red Dolphins sin el conjunto separador  $C$ .

En la Figura 3.4 se puede ver que la metodología propuesta hace que la red se divida en dos componentes conectados (conjuntos disjuntos  $A$  y  $B$ ).

Por lo tanto, se puede observar que la metodología sirve de manera adecuada para cuantificar la robustez en redes que tienen características de distintos modelos como: redes de mundo pequeño, redes libres de escala y redes regulares y que además, tienen distintos tamaños.

### 3.3.2.- Cuantificación de robustez para las redes del caso de estudio (SESM)

Una vez que se verificó que la metodología propuesta, trabaja de manera adecuada para redes con características de los diferentes modelos de redes complejas. Con el objetivo de cuantificar la robustez de las redes del SESM, se realizaron 20 corridas de la metodología y se guardaron los mejores resultados obtenidos.

La Tabla 3.6 muestra los valores numéricos de las redes construidas con los datos desglosados.

TABLA 3.6: Resultados del VSP para las redes construidas con los datos desglosados.

Red	Tamaño (número de nodos)	Cardinalidad del componente $C$	Cardinalidad del componente $A$ y $B$	% de nodos en $C$
1.1 con UNAM	60	34	14,11	56.6 %
1.1 sin UNAM	59	41	7,11	69.4 %
1.2 con UNAM	60	37	11,12	61.6 %
1.2 sin UNAM	59	44	9,6	74.5 %
3.1 con UNAM	60	37/37	9,14/9,14	61.6 %
3.1 sin UNAM	59	38	9,12	64.5 %
3.2 con UNAM	60	46	7,7	76.6 %
3.2 sin UNAM	59	36	11,12	61.0 %
5.1 con UNAM	60	48	4,8	80.0 %
5.1 sin UNAM	59	24	11,14	40.6 %
5.2 con UNAM	60	38	8,13	63.3 %
5.2 sin UNAM	59	25	11,13	42.3 %
7.1 con UNAM	60	36	12,12	60.0 %
7.1 sin UNAM	59	38	11,10	64.5 %
7.2 con UNAM	60	42	9,9	70.0 %
7.2 sin UNAM	59	38	12,9	64.5 %
9.1 con UNAM	60	35	13,12	58.3 %
9.1 sin UNAM	59	37	12,10	62.7 %
9.2 con UNAM	60	38	11,10	63.3 %
9.2 sin UNAM	59	39	11,9	66.1 %

Con base en la información presentada en la Tabla 3.6 se puede ver que en algunos casos (redes 1.1, 5.2 y 9.2 con UNAM) la suma de los nodos pertenecientes al conjunto separador ( $C$ ) y los dos componentes restantes ( $A$  y  $B$ ) no da el número total de nodos que pertenecen a la red. Este hecho se debe a que en estas redes, la UNAM permanece como un componente conectado de un solo nodo (nodo aislado).

Adicionalmente, los componentes conectados generados por la eliminación del conjunto separador tienen una cardinalidad pequeña respecto al conjunto separador; por lo tanto, se puede afirmar que las redes del SESM son robustas.

Para poder ver de forma gráfica lo que sucede con la eliminación del conjunto separador  $C$ , se presentan las Figuras 3.5 y 3.6 que contienen las gráficas de la red 1.1 luego de aplicar la metodología propuesta a las redes del SESM construidas con y sin la UNAM, respectivamente.

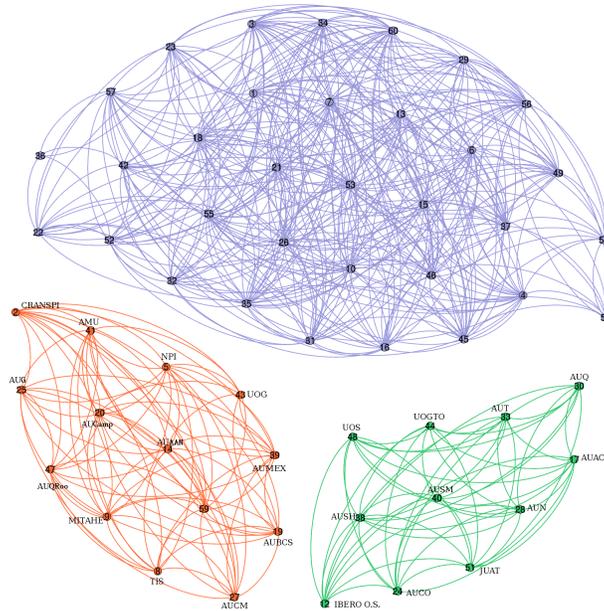


FIGURA 3.5: Componentes conectados formados por la eliminación del conjunto separador en la red 1.1 (considerando a la UNAM).

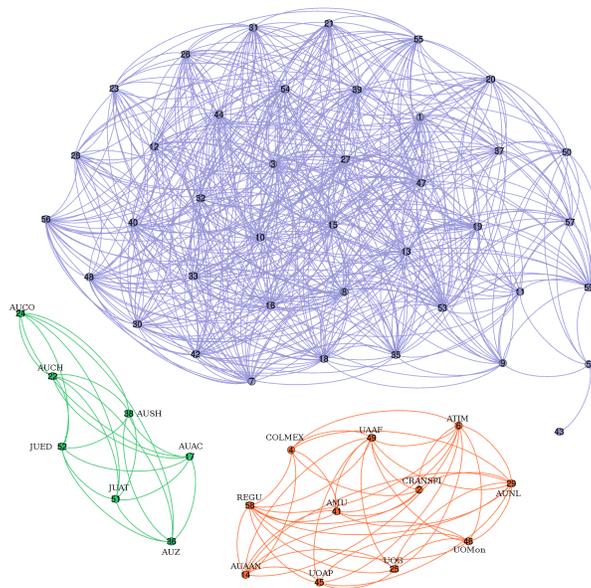


FIGURA 3.6: Componentes conectados formados por la eliminación del conjunto separador en la red 1.1 (sin considerar a la UNAM).

En la Figura [3.5](#) se puede ver que, el conjunto de nodos que provoca la ruptura de la red tiene una cardinalidad alta (más del 70 % de los nodos) (aproximadamente dos tercios del número total de nodos en la red) y, que las universidades que pertenecen a cada uno de los componentes ( $A$  o  $B$ ) presentan características similares entre sí.

En la Figura 3.6 se puede ver que, en las redes sin UNAM, la cardinalidad del conjunto separador es mayor que para las redes con UNAM. Como se mencionó anteriormente, este hecho se justifica en que la UNAM juega un papel importante en la construcción de las redes, ya que siendo el nodo que obtiene los valores más altos para cada característica, cambia considerablemente los límites tomados para la generación de cada red.

Por lo tanto, con base en las Figuras 3.5 y 3.6, se puede notar que las redes sin la UNAM son más robustas; sin embargo, para ambos casos, la eliminación de los enlaces entre el conjunto separador con el resto de los nodos, ocasiona que la red se divida en al menos dos grupos de universidades<sup>3</sup> (consideradas de alto y bajo ranking).

Ahora, se presenta la Tabla 3.7 que contiene los valores numéricos de cada métrica estructural para las redes del SESM luego de aplicar el VSP.

TABLA 3.7: Métricas estructurales para redes del SESM separadas.

ID	Grado	G. c/pesos	Diam.	Den.	Mod.	Comp.C. Con.	Agrupamiento.	L. ruta
1.1 con UNAM	18.690	37.379	4	0.328	0.417	3	0.930	1.231
1.1 sin UNAM	21.586	43.172	4	0.379	0.255	3	0.896	1.347
1.2 con UNAM	19.333	37.167	3	0.328	0.413	3	0.913	1.282
1.2 sin UNAM	19.964	39.929	5	0.363	0.263	3	0.894	1.497
3.1.1 con UNAM	20.133	40.267	3	0.341	0.308	3	0.912	1.266
3.1.2 con UNAM	20.133	40.267	3	0.341	0.337	3	0.912	1.266
3.1 sin UNAM	18.8475	37.695	2	0.074	0.282	3	0.935	1.842
3.2 con UNAM	25.831	51.661	4	0.445	0.200	3	0.897	1.288
3.2 sin UNAM	22.542	39.22	2	0.389	0.323	3	0.921	1.126
5.1 con UNAM	27.517	55.034	3	0.483	0.186	3	0.903	1.272
5.1 sin UNAM	17.356	34.712	3	0.229	0.448	3	0.908	1.310
5.2 con UNAM	22.847	45.695	3	0.394	0.275	3	0.944	1.184
5.2 sin UNAM	16.169	32.339	4	0.279	0.513	3	0.900	1.423
6.1 sin UNAM	31.172	62.345	3	0.547	0.139	3	0.915	1.234
7.1 con UNAM	24.54	49.08	3	0.327	0.415	3	0.863	1.232
7.1 sin UNAM	25.63	51.26	4	0.384	0.265	3	0.892	1.346
7.2 con UNAM	25.14	50.28	3	0.326	0.402	3	0.842	1.453
7.2 sin UNAM	27.93	55.86	3	0.298	0.495	3	0.903	1.274
9.1 con UNAM	19.453	38.906	4	0.425	0.224	3	0.893	1.300
9.1 sin UNAM	20.321	40.642	3	0.292	0.485	3	0.853	1.278
9.2 con UNAM	21.343	42.686	4	0.471	0.274	3	0.856	1.263
9.2 sin UNAM	21.956	43.912	3	0.351	0.317	3	0.921	1.235

Con base en la información de la Tabla 3.7, se puede notar que la mayoría de las redes tienen un coeficiente de agrupamiento mayor a 0.9. Por ejemplo: las redes 5.2 y 9.2, ambas sin UNAM,

<sup>3</sup>En el Anexo A, se presentan los identificadores numéricos de cada Universidad.

tienen un valor de coeficiente de agrupamiento de 0.9 y 0.921, respectivamente. Además, se puede observar que el grado promedio en todas las redes es aproximadamente una tercera parte del número total de nodos.

Por otro lado, al ser disjuntos el conjunto separador  $C$  y los dos componentes restantes  $A$  y  $B$ , el grado para cada nodo disminuye considerablemente respecto a las redes originales.

Por ejemplo: las redes 3.1 y 9.1 ambas con UNAM tienen un valor de grado promedio de 20.133 y 20.321, respectivamente.

En cuanto a la densidad, en comparación con los valores obtenidos para las redes construidas con los datos desglosados, los valores para las redes separadas disminuyen mientras aumenta la modularidad. Esto se debe a que, para cada red, los componentes conectados son de baja cardinalidad y, a su vez, estas redes tienen una gran cantidad de enlaces entre nodos pertenecientes a la misma comunidad, pero baja entre nodos de diferentes comunidades.

Por lo tanto, dado que la eliminación de los enlaces pertenecientes a los elementos que se encuentran en el conjunto separador provoca la formación de dos componentes conectados, se decidió realizar el análisis social para las redes del SESM utilizando el enfoque diádico y triádico.

Finalmente, es importante enfatizar que, debido a que las redes del SESM tienen vínculos entre la mayoría de sus elementos, existen altas relaciones. Por tanto, se puede concluir que, a través del análisis de las relaciones sociales, el sistema educativo es robusto y propenso a generar comunidades entre universidades con características homólogas.

## Capítulo 4

# Metodología para identificar nodos influyentes en redes monocapa

En este capítulo se presentan las características y desarrollo de la metodología para la identificación y cuantificación de nodos influyentes en redes complejas, así como la construcción de las redes utilizadas para complementar el caso de estudio.

Dicha metodología, se basa en la resolución de un modelo de programación matemática inspirado en la dinámica de partículas, las leyes del movimiento de Newton y la ley de la gravitación universal.

Con el objetivo de verificar si la metodología propuesta funciona para redes que tienen las características de los principales modelos descritos en el capítulo 1, esta se probó con 7 redes de referencia y 13 redes construidas utilizando la información de universidades mexicanas (SESM) y las 500 mejores universidades del mundo (QSranking).

Finalmente, con base en los resultados obtenidos por los experimentos, se puede confirmar que la metodología propuesta es capaz de clasificar los nodos influyentes mejor que otras metodologías presentadas en la literatura específica, ya que el impacto que genera la eliminación de los nodos influyentes encontrados por esta para la robustez y eficiencia de la red es mayor.

### 4.1.- Construcción de las redes

La construcción de las redes y el análisis de sus principales características estructurales son de gran importancia para el desarrollo y prueba de la metodología propuesta. Por lo tanto, a continuación se presentan el proceso de construcción y el análisis de las características estructurales para las redes de referencia, las redes del SESM y las redes del QSranking.

#### 4.1.1.- Construcción de las redes de referencia

Con el objetivo de verificar el funcionamiento de la metodología propuesta, se utilizaron algunas redes de referencia que se han utilizado en varios trabajos [16, 46, 85, 130], cuyas principales características son:

TABLA 4.1: Número de nodos y enlaces en redes de referencia.

Red	Nodos	Enlaces
Freeman's [47]	32	695
Jazz musicians [53]	198	2,742
USAir97 [28]	322	2,126
E-mail [100]	1,133	3,323
G-road [65]	1,168	2,486
US power grid [131]	4,941	6,594
Scientist [100]	16,726	47,594

Es importante mencionar que con el objetivo de tomar distintas redes de referencia a las utilizadas en el capítulo 3, la Tabla 4.1 contiene información sobre los enlaces y número de nodos para las redes Freeman's, Jazz musicians, US Power Grid y de manera adicional a la información mostrada en la Tabla 3.1 del capítulo 3, se muestran las características para las redes: USAir97, e-mail, G-road y Scientist.

Así, con base en la información mostrada en la Tabla 4.1, se puede ver que las redes de referencia son de diferentes tamaños: desde 32 nodos con 696 enlaces, hasta 16,726 nodos con 47,594 enlaces. Entonces, para verificar si las redes de prueba tienen las características de los distintos modelos de redes, se presenta la Tabla 4.2 que muestra los resultados numéricos para las principales métricas estructurales.

TABLA 4.2: Métricas estructurales para redes de referencia.

Red	Grado medio	G. máximo	C. agrupamiento	L. Ruta
Freeman's	14.375	31	0.733	1.2
Jazz Musicians	27.690	100	0.617	2.220
USAir97	12.81	139	0.312	2.780
e-mail	9.62	71	0.220	3.710
G-road	1.06	12	0.001	19.400
US power grid	2.67	19	0.103	20.090
Scientist	5.69	107	0.004	6.421

En la Tabla 4.2, se puede ver que las redes G-road, US Power Grid y Scientist tienen un grado medio bajo (alrededor del 1% a 2% de los nodos de la red).

Sin embargo, para la red de Freeman, el grado promedio es de alrededor de la mitad de los nodos y hay al menos un nodo que está conectado a todos los demás.

Los valores del coeficiente de agrupamiento para las redes G-road, US Power Grid y Scientist son bajos (entre 0 y 0.1), mientras que para las redes Freeman y Jazz Musicians son altas (alrededor de 0.7).

Por otro lado, los valores de longitud de ruta promedio son bajos para las redes que tienen un coeficiente de agrupamiento alto, mientras que para las redes con un coeficiente de agrupamiento bajo, es mayor.

Es fundamental mencionar que en base a los principales resultados estructurales, estas redes de referencia tienen características de diferentes modelos de red, tales como: Mundo pequeño [131] (Freeman y Jazz Musicians), libres de escala [10] (e-mail, G-road, US Power Grid y Scientist), entre otros.

Por lo tanto, se puede ver que al utilizar este conjunto de redes, se puede probar si la metodología propuesta es capaz de trabajar en diferentes tamaños de redes que tienen las características de los diferentes modelos descritos en el capítulo [1].

#### 4.1.2.- Construcción de las redes del caso de estudio (SESM y QSRanking)

El caso de estudio para esta metodología se basa en el análisis de las redes del SESM y del QSRanking [1] porque sus elementos y conexiones satisfacen las principales características de los sistemas complejos: Autoorganización, emergencia e interdependencia [116].

Como se describió en el capítulo [3], para construir las redes del SESM, se utilizó la información disponible en el repositorio EXECUM. Sin embargo, en este caso de estudio se tomó en cuenta la información para los años 2014, 2015, 2016, 2017 y 2018. Por otro lado, las redes QSRanking se construyeron utilizando la información disponible en QS Intelligence Unit [126].

Es importante mencionar que, ambos tipos de redes se construyeron mediante el proceso descrito en el capítulo [3]. Por lo tanto, Ahora, para comprender mejor los resultados que se muestran en las siguientes secciones, los identificadores utilizados para cada red del SESM y QSRanking son:

- Cada red QSRanking y SESM representa un año diferente, donde las redes QSRanking tienen un índice \*.QS.
- Para las redes del SESM, se utiliza un índice \*.1 para representar las redes que se generan usando datos desglosados y para las redes generadas con los datos totales, se utiliza un índice \*.2.

Por ejemplo, los identificadores 2014.1 y 2014.2 pertenecen a las redes que representan la relación entre las universidades mexicanas en el año 2014, según los datos desglosados y totales, respectivamente; mientras que el identificador 2018.QS pertenece a la red que contiene las relaciones entre las universidades del mundo para el año 2018

Ahora, en la Tabla [4.3] se presentan los valores numéricos de las principales métricas estructurales de las redes del SESM y QSRanking.

TABLA 4.3: Valores numéricos para las métricas estructurales de redes del SESM y QSRanking.

Red	Grado medio	C. Clustering	L. ruta
2014.1	18.276	0.632	1.882
2015.1	18.508	0.611	1.885
2016.1	18.400	0.688	1.874
2017.1	16.103	0.574	1.966
2018.1	16.237	0.574	2.113
2014.2	15.733	0.618	2.106
2015.2	14.533	0.629	2.325
2016.2	14.678	0.634	2.635
2017.2	5.786	0.716	3.757
2018.2	15.017	0.722	2.560
2018.QS	91.358	0.858	1.13
2019.QS	93.357	0.863	1.28
2020.QS	96.108	0.865	1.26

<sup>1</sup>En el anexo [A] se muestra el identificador para cada una de las universidades.

Según la información que se muestra en la Tabla 4.3 se puede ver que todas las redes tienen un alto coeficiente de agrupamiento (alrededor de 0.6 y 0.7) y un valor pequeño para longitud de ruta promedio (alrededor de 1 o 3). Por tanto, se puede deducir que las redes del SESM y QSRanking tienen las características del modelo de mundo pequeño [131], lo que implica que cumplen con las principales características de las *redes sociales* (SN).

## 4.2.- Desarrollo de la metodología

Debido a que las medidas de centralidad existentes se enfocan solo en ciertos aspectos (por ejemplo, la centralidad de grado se enfoca solo en la información local de los nodos e ignora la información global), se presenta una metodología que es capaz de encontrar y cuantificar los nodos influyentes en varios modelos y tamaños de redes complejas.

Aunque ya se han propuesto en la literatura algunos métodos que describen varias analogías, la técnica propuesta en este trabajo identifica la influencia de cada nodo en función de la suma de la fuerza de atracción hacia cualquier otro.

En específico, para esta metodología, cada nodo representa una partícula. Por lo tanto, para lograr el objetivo, se calcula la influencia (fuerza) de cada nodo resolviendo un modelo de programación matemática que se basa en la minimización de la energía cinética del sistema ( $E_k$ ).

Se debe tener en cuenta que las fuerzas que actúan sobre una partícula modifican su energía cinética  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  y, dado que el objetivo de esta metodología es lograr el estado de equilibrio del sistema, se tiene como objetivo la minimización de la diferencia entre la energía cinética final ( $f_n$ ) y la energía cinética inicial ( $i_n$ ) del sistema en el tiempo  $T$  y  $T + 1$ , que es equivalente al escalar suma de las energías cinéticas individuales. Entonces, el objetivo es:

$$\text{mín } z = \frac{1}{2}M_{cm} + (V_{cm,f_n}^2 V_{cm,i_n}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i (v_{i,f_n}^2 + v_{i,i_n}^2)$$

Donde  $M_{cm} = \sum_{i=1}^N m_i$ , y  $V_{cm} = \sum_{i=1}^N v_i$  son la masa y la velocidad del centro de masa, respectivamente,  $N$  es el total de partículas en un sistema y  $v_i$  es la velocidad de cada partícula.

Para esto, el momento lineal  $P_{cm} = \sum_{i=1}^N m_i v_i$  del centro de masa debe ser igual a la suma de los movimientos de todo el centro de masa. Por lo tanto, se deben considerar las restricciones:

$$\begin{aligned} M_{cm} V_{cm,f_n} - \sum_{i=1}^N m_i v_{i,f_n} &= 0 \text{ y} \\ M_{cm} V_{cm,i_n} - \sum_{j=i}^N m_i v_{i,i_n} &= 0. \end{aligned}$$

Dado que la velocidad se descompone como la suma de la velocidad del centro de masa ( $V_{cm}$ ) y la velocidad relativa inicial y final de cada partícula respecto al centro de masa se definen como:  $v'_{i,i_n}$  y  $v'_{i,f_n}$  respectivamente, se debe tener en cuenta las restricciones:

$$\begin{aligned} v_{i,f_n} &= V_{cm,f_n} + v'_{i,f_n}, \forall i = 1, \dots, N \text{ y} \\ v_{i,i_n} &= V_{cm,i_n} + v'_{i,i_n}, \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Las cuales aseguran que se mantiene el equilibrio del sistema.

Por otro lado, dado que en un centro de masa, cada partícula  $i$  recibe fuerzas de otras partículas. Entonces, la fuerza total asociada a una partícula  $i$ , se describe como:

$$F_i = \sum_{k=1, k \neq i}^N f_{k,i}, \forall i = 1, \dots, N$$

Donde  $f_{k,i}$  es la fuerza desde la partícula  $k$  hacia la partícula  $i$ .

Ahora, para garantizar el equilibrio dinámico del sistema (tercera ley de Newton), se presentan las restricciones:

$$m_i a_i - \left( \sum_{k=1, k \neq i}^N f_{k,i} \right) = 0, \forall i = 1, \dots, N.$$

Con base en la ley de la gravitación universal, se sabe que  $f_{k,i} = G \frac{m_k m_i}{r_{\min(k,i)}^2}$ , donde  $r_{\min(k,i)}^2$  es la longitud del camino entre los nodos  $k$  e  $i$  y,  $G$  es la constante gravitacional universal; por lo tanto, para asegurar que la fuerza ejercida y recibida sobre cualquier partícula esté equilibrada con la fuerza gravitacional del sistema, se presenta la desigualdad:

$$f_{k,i} - G \left( \frac{m_k m_i}{r_{\min(k,i)}^2} \right) \leq 0, \forall \text{ par } k, i$$

Finalmente, para evitar soluciones infactibles, cada variable debe ser no negativa:

$$v'_{i,fn} > 0 \text{ y } v'_{i,in} > 0, \forall i = 1, \dots, N$$

Entonces, el modelo matemático se denota como:

$$\text{mín } z = \frac{1}{2} M_{cm} + (V_{cm,fn}^2 V_{cm,in}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i (v_{i,fn}^2 + v_{i,in}^2) \quad (4.1)$$

Sujeto a:

$$M_{cm} V_{cm,fn} - \sum_{i=1}^N m_i v_{i,fn} = 0 \quad (4.2)$$

$$M_{cm} V_{cm,in} - \sum_{j=i}^N m_j v_{j,in} = 0 \quad (4.3)$$

$$v_{i,fn} = V_{cm,fn} + v'_{i,fn}, \forall i = 1, \dots, N \quad (4.4)$$

$$v_{i,in} = V_{cm,in} + v'_{i,in}, \forall i = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

$$m_i a_i - \left( \sum_{k=1, k \neq i}^N f_{k,i} \right) = 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (4.6)$$

$$f_{k,i} - G \left( \frac{m_k m_i}{r_{\min(k,i)}^2} \right) \leq 0, \forall \text{ par } k, i \quad (4.7)$$

$$v'_{i,fn} > 0 \text{ y } v'_{i,in} > 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

Donde la ecuación (4.1) denota que la diferencia en la energía cinética de las partículas debe ser mínima. Las ecuaciones (4.2) y (4.3) restringen que la dinámica del centro de masa sea igual a la suma de los movimientos de todo el centro de masa. Las ecuaciones (4.4) y (4.5) aseguran que la velocidad de la partícula sea similar a la cantidad de su velocidad relativa y la velocidad del centro de masa. La ecuación (4.6) asegura que se mantenga el equilibrio dinámico del sistema. La ecuación (4.7) asegura que la fuerza ejercida y recibida sobre cualquier partícula esté equilibrada con la fuerza gravitacional del sistema. Finalmente, la ecuación (4.8) asegura que se respeten los límites de cada variable.

Entonces, la metodología propuesta se basa en la resolución del modelo de programación matemática presentado en las ecuaciones (4.1) a (4.8), donde para redes pequeñas (menos de 200

nodos) se utiliza el optimizador Gurobi [103], mientras que para las redes grandes, se utiliza un algoritmo de evolución diferencial (DE), donde, de manera específica, para resolver este modelo se utiliza:

- Factor de mutación (F) de 0.65,
- Factor de cruce (Cr) de 0.85,
- 100 generaciones y
- 30 individuos.

### 4.3.- Resultados

En esta sección, se muestran los resultados obtenidos por la metodología desarrollada para la identificación de nodos influyentes para las redes de prueba y las rees del caso de estudio (redes del SESM y QSRanking). Además, se presenta la comparación con las centralidades clásicas como centralidad de grado (DC), centralidad de intermediación (BC) y centralidad de cercanía (CC), y con las metodologías presentadas en el trabajo de Wang et al. [130] denotado como EffCm y en el trabajo de Fei et al. [46] denotado como ISL (para obtener más información sobre estos trabajos, consultar el capítulo 2).

Para esta comparación, se eligieron los trabajos denotados como: EffCm e ISL debido a que ambas son técnicas relativamente nuevas que se comparan con otras metodologías clásicas y novedosas descritas en la literatura específica. Además, es importante mencionar que EffCm e ISL se prueban en diferentes tipos de modelos de redes; por lo tanto, hay un buen punto de comparación para la metodología propuesta en esta investigación.

#### 4.3.1.- Identificación y cuantificación de nodos influyentes en las redes de referencia

Con el objetivo de verificar si la metodología propuesta funciona en diferentes tipos de redes, se realizaron 20 ejecuciones de evolución diferencial (redes grandes) o 20 ejecuciones del optimizador Gurobi (redes pequeñas) para resolver el modelo matemático propuesto en las redes de referencia. Por lo cual, en la Tabla 4.4, se presentan los identificadores de los diez nodos más influyentes encontrados al aplicar la metodología propuesta (descrita en Tabla como INILN), EffCm e ISL.

Es importante mencionar que se optó por ejecutar el análisis con la eliminación de los 10 nodos más influyentes de la red porque en varios trabajos como EffCm e ISL, los autores eliminan los 10 nodos más influyentes encontrados por las diferentes metodologías.

TABLA 4.4: Diez nodos más influyentes en redes de referencia.

Posición	DC	BC	CC	EffCm	ISL	INILN	Posición	DC	BC	CC	EffCm	ISL	INILN
<b>Freeman</b>							<b>USAir97</b>						
1	1	8	5	1	–	1	1	119	8	172	118	118	118
2	29	11	24	29	–	29	2	261	118	182	47	261	8
3	8	24	8	31	–	8	3	248	261	198	65	255	261
4	2	32	30	2	–	2	4	67	47	216	144	182	47
5	31	31	32	8	–	31	5	255	313	166	33	152	67
6	32	29	4	11	–	27	6	47	201	206	147	230	182
7	11	2	6	24	–	32	7	166	13	225	162	166	313
8	24	18	18	32	–	4	8	201	67	133	311	67	255
9	10	25	17	27	–	10	9	182	182	140	219	112	166
10	27	10	9	10	–	9	10	147	255	181	177	147	147
<b>Scientist</b>							<b>E-mail</b>						
1	693	219	698	543	–	543	1	755	36	–	755	–	4474
2	403	543	219	393	–	693	2	1846	1267	–	4474	–	755
3	300	698	450	850	–	763	3	80	213	–	1846	–	80
4	217	693	565	853	–	373	4	1842	1295	–	7315	–	2084
5	373	758	331	219	–	210	5	1530	755	–	4034	–	4034
6	410	403	763	861	–	258	6	1529	4474	–	5489	–	1846
7	758	763	267	531	–	267	7	208	4034	–	311	–	1842
8	207	565	663	889	–	219	8	311	2084	–	80	–	311
9	219	886	729	909	–	512	9	1714	52	–	1842	–	642
10	331	373	347	511	–	382	10	1713	406	–	7314	–	4034
<b>Jazz Musicians</b>							<b>US Power grid</b>						
1	136	136	136	–	136	60	Posición	DC	BC	CC	ISL	INILN	
2	60	60	60	–	60	136	1	2847	651	1378	2847	2847	
3	132	153	168	–	132	132	2	602	2824	1678	602	602	
4	168	5	70	–	168	70	3	4436	559	2944	558	2685	
5	70	149	83	–	70	83	4	3411	2685	1377	2865	558	
6	108	189	132	–	108	168	5	932	83	2781	4436	1378	
7	99	167	194	–	99	194	6	3930	145	1365	2783	556	
8	158	96	122	–	83	5	7	2926	139	1368	2525	3411	
9	83	115	174	–	158	149	8	2865	199	1380	2926	1377	
10	7	83	158	–	194	7	9	2287	1378	2685	556	559	
							10	558	2781	2795	2543	2783	

Con base en la información mostrada en la Tabla 4.4, se puede ver que el conjunto de nodos influyentes generado por la metodología propuesta es similar a los conjuntos reportados por BC, EffCm e ISL.

Por ejemplo: Para la red Freeman, la metodología propuesta clasifica 8 nodos que también se clasifican con DC, 6 con BC, 4 con CC y 7 con EffCm, mientras que en la red Scientist, la metodología propuesta clasifica 4 nodos que también se clasifican con DC, 5 con BC y 8 con EffCm. Por otro lado, para los músicos de Jazz la red la metodología propuesta clasifica 7 nodos que también se clasifican con DC, 6 con BC, 6 con CC y 7 con ISL, mientras que para la red

eléctrica estadounidense clasifica 7 nodos que también se clasifican con DC, 3 con BC, 3 con CC y 6 con ISL.

Es importante mencionar que, en el trabajo de Wang et al. [130], los autores describen que es probable que diferentes métodos encuentren los mismos nodos influyentes. Con base en los resultados mostrados en la Tabla 4.4, se puede ver que no es posible determinar una mejora con los resultados obtenidos aplicando la metodología propuesta. Por esta razón, una buena métrica es el comparar la robustez y la eficiencia de las redes cuando se eliminan los enlaces de los diez nodos más influyentes encontrados por cada método.

Es importante mencionar que gracias a su gran interfaz y desarrolló, en este trabajo se utiliza el Simulador de Robustez de Redes (NRS) [82] para determinar la influencia de los nodos. Por lo tanto, en la Tabla 4.5, se muestran los resultados numéricos de robustez, ejecutando simulaciones de ataques aleatorios y epidémicos, donde, se puede observar que en la mayoría de los casos como en las redes USAir, Freeman, Jazz y Scientist, la metodología propuesta hace que la robustez de las redes de referencia disminuya (marcadas en negrita).

TABLA 4.5: Simulación de robustez con ataques aleatorios y epidémicos.

Red	Aleatoria	Epidémica
USAir ISL	0.76	0.54
USAir EffCm	0.74	0.51
<b>USAir la metodología propuesta</b>	<b>0.70</b>	<b>0.44</b>
PowerGrid ISL	0.49	<b>0.89</b>
<b>PowerGrid la metodología propuesta</b>	<b>0.46</b>	0.92
Freeman EffCm	0.82	0.64
<b>Freeman la metodología propuesta</b>	<b>0.78</b>	<b>0.53</b>
Jazz ISL	0.57	0.62
<b>Jazz la metodología propuesta</b>	<b>0.49</b>	<b>0.60</b>
Scientist EffCm	0.63	0.73
<b>Scientist la metodología propuesta</b>	<b>0.55</b>	<b>0.71</b>
E-mail ISL	0.64	<b>0.85</b>
<b>E-mail la metodología propuesta</b>	<b>0.63</b>	0.86

Para analizar el impacto de los diez nodos más influyentes encontrados por PCM, EffC e ISL, se presentan las Figuras 4.1 y 4.2, que muestran las gráficas de las simulaciones de robustez y eficiencia obtenidas con 25 ataques aleatorios y epidémicos (se ejecutaron 25 simulaciones debido al comportamiento estocástico de NRS) en 30 nodos para las redes Freeman y USAir97 sin los diez nodos más influyentes, respectivamente.

Es importante mencionar que, mientras el color de toda la gráfica sea más cercano al rojo (o menos verde), significa que la red es menos robusta o menos eficiente (dependiendo el caso).

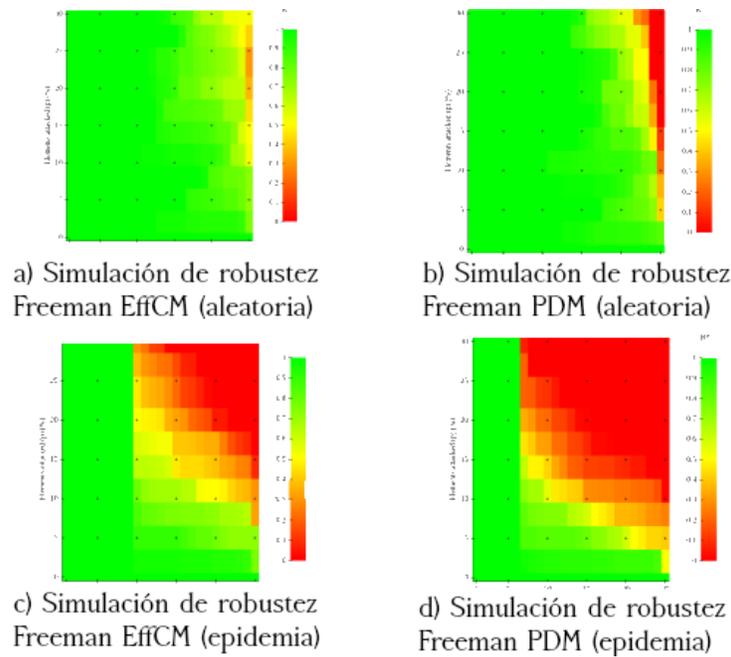


FIGURA 4.1: Simulaciones de robustez para la red Freeman.

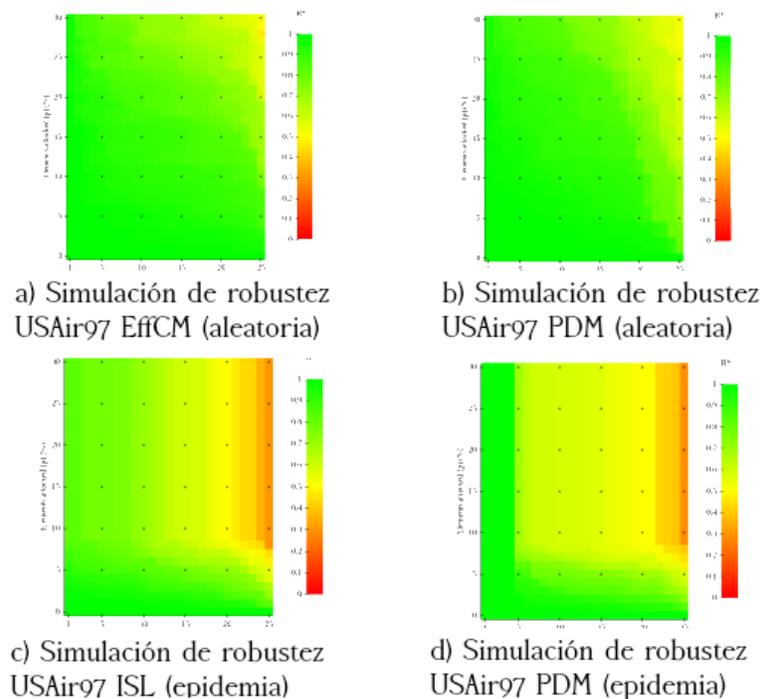


FIGURA 4.2: Simulaciones de robustez para la red USAir97.

Con base en la información presentada en la Figura 4.1, se puede ver que, en la red Freeman, la eliminación de los diez nodos más influyentes encontrados por la metodología propuesta tiene un impacto significativo en su robustez, ya que en las simulaciones la red es menos robusta. Por otro lado, según la Figura 4.2, se observa que la eliminación de los diez nodos más influyentes clasificados por la metodología propuesta provoca que la robustez de la red disminuya más que con la eliminación de los diez nodos más influyentes clasificados por ISL.

Como en el caso de la robustez, en la Figuras 4.3 y 4.4, se presentan las gráficas de los resultados de eficiencia obtenidos con 25 simulaciones de ataques aleatorios y epidémicos en 30 nodos, para las redes Freeman y USAir97 sin los diez nodos más influyentes.

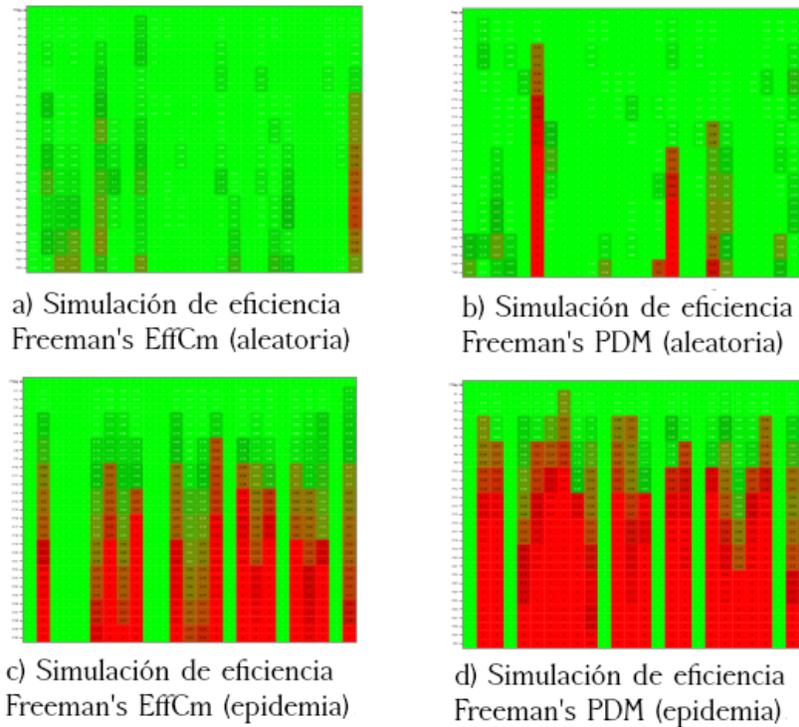


FIGURA 4.3: Simulaciones de eficiencia para la red Freeman.

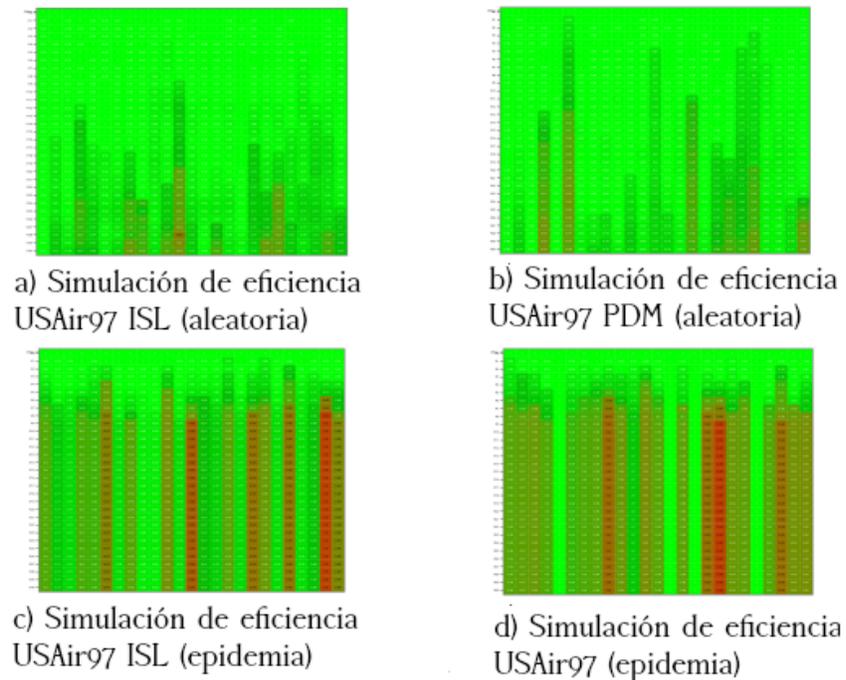


FIGURA 4.4: Simulaciones de eficiencia para la red USAir97.

Con base en la información presentada en la Figura 4.3, se puede ver que en ambos tipos de simulación (ataques aleatorios y epidémicos), los nodos influyentes encontrados por la metodología propuesta hacen que la eficiencia disminuya considerablemente. Por otro lado, la Figura 4.4, muestra que al igual que en el caso anterior, la eficiencia de la red se ve más afectada con la eliminación de los diez nodos más influyentes clasificados por la metodología propuesta .

Por lo tanto, en la Tabla 4.5 y las Figuras 4.1 y 4.4, se puede ver que la metodología propuesta es capaz de clasificar mejor los nodos influyentes y que la eliminación de los diez nodos más influyentes encontrados por la metodología propuesta ocasionan que la red sea menos robusta y menos eficiente en comparación con los nodos clasificados mediante EffCm e ISL.

#### 4.3.2.- Identificación y cuantificación de nodos influyentes en las redes del caso de estudio (SESM y QSRanking)

En esta subsección se muestran los resultados numéricos en las redes del SESM y QSRanking aplicando la metodología la metodología propuesta . Adicionalmente, se incluyen las Tablas 4.6 y 4.7 que muestran la clasificación de los diez nodos más influyentes encontrados por la metodología propuesta y las medidas de centralidad DC, BC y CC.

TABLA 4.6: Diez nodos más influyentes en las redes SESM (1).

Posición	DC	BC	CC	INILN	Posición	DC	BC	CC	INILN
<b>2014.1</b>					<b>2015.1</b>				
1	11	4	49	6	1	2	54	46	6
2	46	54	11	12	2	11	9	2	9
3	49	38	46	15	3	19	41	57	11
4	50	12	50	50	4	25	57	43	15
5	6	60	15	3	5	56	15	39	43
6	57	50	6	46	6	46	3	19	25
7	13	45	13	38	7	58	6	54	39
8	15	7	16	57	8	59	43	15	46
9	16	47	58	11	9	7	21	25	54
10	19	13	3	47	10	28	16	11	57
<b>2016.1</b>					<b>2017.1</b>				
1	13	9	36	7	1	4	60	23	6
2	58	41	40	9	2	43	35	40	13
3	7	6	55	21	3	35	43	43	19
4	11	27	30	25	4	6	13	4	32
5	20	45	33	27	5	19	29	6	38
6	21	34	13	34	6	37	32	35	58
7	25	13	58	41	7	50	22	3	43
8	49	3	9	54	8	57	17	37	37
9	59	5	45	32	9	58	38	19	12
10	9	54	25	2	10	5	1	13	4

De acuerdo con la información mostrada en la Tabla 4.6, se puede ver que la metodología propuesta clasifica, en la mayoría de los casos, los mismos diez nodos influyentes que se clasifican mediante CC.

Por ejemplo: En la red 2014.1 hay 6 nodos que también se clasifican con DC, 4 con BC y 6 con CC, mientras que en la red 2017.1 la metodología propuesta clasifica 6 nodos que también se clasifican con DC, 4 con BC y 6 con CC.

TABLA 4.7: Diez nodos más influyentes en las redes del SESM (2).

Posición	DC	BC	CC	INILN	Posición	DC	BC	CC	INILN
<b>2018.1</b>					<b>2014.2</b>				
1	35	60	35	6	1	37	54	56	41
2	49	35	43	16	2	56	4	37	1
3	20	18	6	4	3	13	2	15	4
4	6	32	4	35	4	7	1	49	7
5	16	29	47	55	5	15	7	58	19
6	55	49	49	14	6	49	49	13	11
7	14	34	3	49	7	58	56	6	49
8	43	43	55	41	8	6	37	11	56
9	4	40	16	43	9	11	19	46	37
10	46	55	50	54	10	16	41	59	54
<b>2015.2</b>					<b>2016.2</b>				
1	1	20	1	1	1	2	60	21	2
2	13	57	41	41	2	50	21	4	4
3	29	16	6	25	3	59	4	2	24
4	41	8	19	54	4	27	36	50	14
5	55	15	13	19	5	21	48	59	41
6	5	12	29	13	6	46	43	27	36
7	43	18	55	43	7	41	40	41	60
8	54	32	47	5	8	4	24	46	18
9	19	1	8	8	9	14	52	34	33
10	25	17	25	38	10	34	18	14	47
<b>2017.2</b>					<b>2018.2</b>				
1	6	60	8	4	1	19	60	6	3
2	29	12	16	6	2	6	6	4	4
3	43	48	24	8	3	4	4	18	6
4	1	55	32	9	4	18	29	60	10
5	2	31	58	28	5	54	43	44	58
6	3	35	60	32	6	58	18	19	45
7	9	44	12	24	7	3	44	3	41
8	19	4	48	39	8	45	12	54	54
9	28	53	6	53	9	55	19	58	55
10	39	6	29	48	10	10	48	55	58

En la Tabla 4.7 se puede ver que en la mayoría de los casos, la metodología propuesta clasifica los nodos de manera similar a DC y CC. Sin embargo, como se mostró anteriormente, se puede verificar que el impacto en la robustez y eficiencia de la red con la eliminación de los diez nodos más influyentes encontrados por la metodología propuesta es mayor.

Con base en los resultados obtenidos aplicando la metodología propuesta a las redes del SESM, se puede ver que para las redes del SESM, la UNAM, UAM, CINVESTAV e ITESM, son

universidades y centros de investigación que tienen altos valores en los rankings. Por otro lado, UACM, UDG e ITS son universidades que comparten características con universidades que obtienen valores medios y bajos en los rankings del país. Por lo tanto, una fracción de las universidades influyentes obtienen altos valores, otra fracción valores promedio y otra fracción los valores más bajos.

Por lo tanto, se puede afirmar que la metodología propuesta clasifica los nodos en las redes del SESM de manera que los más influyentes son aquellos que permiten relaciones entre universidades con diferentes valores de ranking.

TABLA 4.8: Diez nodos más influyentes en las redes QSRanking.

Posición	DC	BC	CC	INILN	Posición	DC	BC	CC	INILN
<b>2018.QS</b>					<b>2019.QS</b>				
1	9	9	9	179	1	72	9	72	72
2	179	189	189	238	2	92	36	92	92
3	189	243	243	314	3	359	216	359	359
4	238	295	295	9	4	9	262	9	348
5	243	315	315	189	5	36	304	36	9
6	295	179	179	243	6	216	374	216	36
7	314	238	238	295	7	262	348	262	216
8	315	314	314	315	8	304	8	304	262
9	159	39	159	159	9	348	100	374	304
10	248	74	248	248	10	374	230	348	374
<b>2020.QS</b>									
	Posición	DC	BC	CC	INILN				
	1	219	219	219	219				
	2	233	233	233	233				
	3	322	322	322	322				
	4	363	363	363	363				
	5	315	20	315	315				
	6	20	149	20	20				
	7	149	160	149	149				
	8	160	298	160	160				
	9	298	354	298	298				
	10	354	361	354	354				

La información presentada en la Tabla 4.8, muestra que la metodología propuesta clasifica los nodos de manera similar a DC y CC. Por otro lado, con base en las características de cada universidad perteneciente al conjunto influyente, se observa que las más influyentes se dividen en tres partes: la primera es la fracción que tienen valores altos, la segunda fracción con valores promedio y la tercera fracción, que tienen valores bajos en: reputación académica, reputación con los empleadores, número de profesores con publicaciones citadas en revistas internacionales, así como del número de estudiantes de movilidad internacional.

A pesar de que se puede pensar que las universidades con mejores valores de ranking son las más influyentes, en realidad, las más influyentes son las universidades que colaboran con universidades de todo tipo, ya que ayudan a crear lazos de colaboración y a su vez, esas colaboraciones ayudan a mejorar el desarrollo de todo el sistema educativo.

Por ejemplo, para las redes del QSRanking: Aston University, Cardiff University y Delft University of Technology, son universidades y centros de investigación que tienen altos valores en

los rankings mundiales.

Por otro lado, Technische Universität Berlin, Universität Hamburg y la University of Macao son universidades que comparten características con universidades que obtienen valores medios y bajos. Por tanto, como en el caso del ranking mexicano, las universidades influyentes tienen diferentes características que permiten el desarrollo del sistema educativo.

Finalmente, con base en los resultados numéricos, se puede ver que la eliminación de los nodos más influyentes encontrados por la metodología propuesta, provocan que la robustez y eficiencia disminuyan considerablemente. Además, los resultados para las redes del SESM y QSranking muestran que la metodología propuesta clasifica a las universidades influyentes en tres tipos: ranking alto, medio y bajo; por lo tanto, se puede afirmar que la metodología propuesta funciona en diferentes modelos de redes complejas y tiene un mejor comportamiento que las técnicas descritas en la literatura.

## Capítulo 5

# Metodología para cuantificar la robustez e identificar los nodos influyentes en redes multiplex

En la primera parte de este capítulo se presentan las características y desarrollo de la metodología para la cuantificación de robustez en redes multiplex.

Dicha metodología, se basa en la propiedad de *percolación* descrita en el capítulo 1. Específicamente, se presenta una versión modificada del modelo matemático para el problema del conjunto separador de vértices (VSP) presentado en el capítulo 3 y se denota como m-VSP.

Con el objetivo de verificar que la metodología propuesta (m-VSP) funciona con distintos modelos y tamaños de redes multiplex, se probó en un conjunto de redes de referencia con diferentes características estructurales y, como caso de estudio, se presenta un análisis utilizando un conjunto de redes sociales multiplex construidas con información sobre las principales características de las mejores universidades del mundo (QSranking) y las universidades de México (SESM).<sup>1</sup>

Entonces, con base en los experimentos desarrollados durante este capítulo, se puede ver que al resolver m-VSP, se puede encontrar el conjunto de nodos que causan la ruptura del Componente Gigante Mutuamente Conectado (MCGC) y el Clúster Viable más Grande (LVC) cuando sus enlaces se eliminan de la red.

Por otro lado, en la segunda parte de este capítulo, se presenta una manera diferente de analizar los resultados de la metodología propuesta en el capítulo 5, es decir, se presenta la manera de identificar nodos influyentes en redes multiplex.

En específico, para demostrar lo anterior, se identifican los países esparcidos de la COVID-19 mediante el análisis de la relación entre las características socioculturales y económicas con el número de infecciones y muertes causadas por la COVID-19 en diferentes países.

Para ello, se modeló otro tipo de redes con la información de cada país, específicamente analizando los países difusores en función del conjunto separador en redes multiplex de 5 capas.

Así, los resultados muestran que se puede obtener una clasificación de la influencia de los nodos utilizando m-VSP y, para el caso de estudio, la identificación de los países difusores de la COVID-19.

---

<sup>1</sup>Es importante mencionar que el proceso de construcción de las redes para este caso de estudio es distinto al presentado en los capítulos 3 y 4

## 5.1.- Cuantificación de robustez en redes multiplex

La robustez juega un papel importante dentro del análisis de redes complejas. Además, con base en la revisión descrita en el capítulo 2, la cuantificación de robustez en redes multiplex es un tema novedoso y poco trabajado. Por lo tanto, en esta sección se presenta el desarrollo de una nueva metodología para cuantificar la robustez en redes multiplex de 2 y 3 capas.

### 5.1.1.- Construcción de las redes

Debido a que la de construcción de las redes y el análisis de sus principales características estructurales son de gran importancia para el desarrollo y prueba de m-VSP, en esta sección se presentan las principales características del proceso de construcción y el análisis de las características estructurales de las redes de referencia y de las redes del SESM y del QSRanking.

#### 5.1.1.1.- Construcción de las redes multiplex de referencia

Antes de continuar con el desarrollo de esta subsección, es importante mencionar que debido a que la robustez en las redes multiplex es un tema novedoso, no existe un conjunto de redes de referencia para comparar los resultados. Por lo tanto, en este trabajo, con el objetivo de verificar si las metodologías propuestas para redes multiplex funcionan correctamente para varios modelos de red, se utilizaron cuatro redes multiplex de 3 capas con diferentes características, las cuales fueron tomadas del conjunto de referencia dado por DeDomenico et al. [35].

Las redes seleccionadas para este trabajo son: CKM Physicians Innovation Multiplex Social (CKM) [27], Hepatitis C Virus Multiplex Genetic (Hepatitis C) [120], Krackhardt High Tech Multiplex Social (Krackhardt) [71] y Lazega Law Firm Multiplex Social (Lazega) [73].

La Tabla 5.1 muestra el número de enlaces y nodos para cada capa en cada red de referencia, donde los identificadores son: l1 para la capa 1, l2 para la capa 2 y l3 para la capa 3.

TABLA 5.1: Características principales de las redes multiplex de referencia.

Red	Enlaces			Nodos
	l1	l2	l3	l1, l2 y l3
CKM	449	498	423	246
Hepatitis C	80	43	2	106
Krackhardt	145	79	20	21
Lazega	717	399	726	71

Es importante mencionar que si bien las redes de referencia tienen pocos enlaces, se utilizaron para verificar que nuestra metodología funciona en diferentes modelos de redes multiplex. Por tanto, se presentan los resultados numéricos de las principales métricas estructurales calculadas en todas las redes de referencia.

TABLA 5.2: Características estructurales de las redes de prueba.

Red	Componentes			Diámetro			L. Ruta			Tamaño de MCGC	Tamaño de LVC
	l1	l2	l3	l1	l2	l3	l1	l2	l3	l1, l2 y l3	l1, l2 y l3
CKM	35	19	22	7	9	14	3.1	3.4	3.9	105	104
Hepatitis C	25	62	103	4	4	2	2	2	1.3	80	80
Krackhardt	1	1	1	3	3	4	1.3	1.6	3	21	21
Lazega	1	3	1	3	5	4	1.8	2.2	1.7	71	53

Con base en la información presentada en la Tabla 5.2, se puede ver que las redes de prueba utilizadas para comprobar si la metodología propuesta, presentan características de los diversos modelos de redes presentados en el capítulo 1.

### 5.1.1.2.- Construcción de las redes multiplex del caso de estudio (SESM y QSRanking)

Como se mencionó anteriormente, uno de los casos de estudio de esta investigación es el de las redes multiplex relacionadas a los sistemas educativos: QSRanking y SESM. Para estas redes, cada capa representa un año diferente, donde un nodo representa a cada universidad y los enlaces entre los nodos se crean utilizando la siguiente estrategia basada en la distancia de Mahalanobis.

La distancia de Mahalanobis mide una forma de determinar la similitud entre dos variables. A diferencia de la distancia euclidiana, la distancia de Mahalanobis tiene en cuenta la correlación entre las variables aleatorias.

Formalmente, la distancia de Mahalanobis entre dos variables aleatorias con la misma distribución de probabilidad  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ , con matriz de covarianza  $\Sigma$  se define como:

$$d_m(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{y})} \quad (5.1)$$

En este caso, la distancia de Mahalanobis se puede considerar de la siguiente manera: en función de las diferentes características, se debe medir la similitud entre dos universidades y así relacionar las que son similares. Por ejemplo, considerando que para cada universidad solo se consideran 2 características (número de estudiantes y número de profesores), se puede construir un vector  $\vec{x}_i = (x_{1i}, x_{2i})^T$  para cada universidad  $i$ .

Si consideramos que la primera característica (alumnos) tiene valores entre 100 y 200 y que la segunda (profesores) está entre 15 y 25, utilizando la distancia euclidiana tendríamos:

$$d_e(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sqrt{(x_{11} - x_{12})^2 + (x_{21} - x_{22})^2} \quad (5.2)$$

Entonces, debido a que las diferencias en la primera característica son mayores que en la segunda, se le da menos importancia a la segunda característica. Por ello, se prefiere sumar las estadísticas de los datos a la medida de distancia, ponderando según su varianza: las variables con menor varianza tendrán más importancia que aquellas con mayor varianza. De esta forma, se pretende igualar la importancia de todas las características en el resultado final.

Por tanto, la expresión es la siguiente:

$$d_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sqrt{\left(\frac{(x_{11} - x_{12})}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{(x_{21} - x_{22})}{\sigma_2}\right)^2} \quad (5.3)$$

Donde:  $\sigma_i$  es la desviación estándar del componente  $ii$  de los vectores de medida.

O en notación vectorial:

$$d_e(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sqrt{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^T S^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \quad (5.4)$$

Donde,  $S$  es una matriz cuyos elementos en la diagonal son  $s_{ii} = \sigma_i^2$ .

Sin embargo, la expresión anterior tiene un problema, la mayoría de las características no son independientes, es decir, cada uno depende del otro, ya que es más probable que cuando una universidad tiene más estudiantes, tenga un mayor número de profesores. Entonces, para incorporar la dependencia entre las dos variables, se puede sustituir la matriz diagonal  $S$  por la matriz de covarianza  $\Sigma$ :

$$d_m(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sqrt{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^T \Sigma^{-1} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \quad (5.5)$$

que es la distancia de Mahalanobis.

Con base en lo anterior, se puede ver que las relaciones de las universidades vienen dadas por el número de características en las que estas son similares, y su cuantificación se obtiene de la siguiente manera:

1. Se calcula la distancia de Mahalanobis [81] entre cada par de universidades.
2. Se ordena el conjunto de distancias obtenidas en orden ascendente.
3. Con el objetivo de tener una red donde se le de prioridad para vincular a las universidades que tengan una menor distancia, se calcula la mediana de las distancias de Mahalanobis.
4. Así, para cada par de universidades con una distancia menor que la mediana, se agrega un enlace.

Es importante mencionar que la información que brinda EXECUM fue dividida en dos conjuntos: datos totales o datos desglosados. Entonces, con el objetivo de ayudar a comprender mejor los resultados que se muestran en las siguientes capítulos, se presentan los identificadores utilizados para cada red QSRanking y SESM:

1. Cada red monocapa del QSRanking y del SESM representa un año diferente, donde las redes QSRanking tienen un índice \*.QS.
2. Para las redes del SESM, se utiliza un índice .1 para representar las redes que se generaron con datos desglosados. Para las redes generadas con datos totales, usamos un índice .2. Por ejemplo, 2015.1 y 2015.2 son redes que representan la relación entre las universidades en 2015, según los datos desglosados y totales, respectivamente.
3. Las redes multiplex están formadas por un conjunto de redes monocapa. Por ejemplo, para las redes del SESM 2013.2-2015.2 es la red multiplex formada por las tres redes monocapa del SESM 2013.2, 2014.2 y 2015.2, mientras que la red 2018.QS-2020.QS es la red multiplex formada por las redes monocapa QSRanking 2018.QS, 2019.QS y 2020.QS.

Ahora, en la Tabla 5.3 se presentan el número de nodos y enlaces para cada capa.

TABLA 5.3: Características principales de las redes del SESM y QSranking.

Red	Enlaces			Nodos
	l1	l2	l3	l1, l2 y l3
2013.1-2014.1	1214	1144	–	60
2014.1-2015.1	1144	1210	–	60
2015.1-2016.1	1210	1036	–	60
2016.1-2017.1	1036	1018	–	60
2013.1-2015.1	1214	1022	1210	60
2014.1-2016.1	1144	1210	1036	60
2015.1-2017.1	1210	1036	1018	60
2013.2-2014.2	1130	1154	–	60
2014.2-2015.2	1154	1172	–	60
2015.2-2016.2	1172	920	–	60
2016.2-2017.2	920	1008	–	60
2013.2-2015.2	1130	1154	1172	60
2014.2-2016.2	1154	1172	920	60
2015.2-2017.2	1172	920	1008	60
2018.QS-2019.QS	9648	11426	–	377
2019.QS-2020.QS	11426	10668	–	377
2018.QS-2019.QS	9648	11426	10668	377

Como se mencionó anteriormente, las redes QSranking y SESM tienen una gran cantidad de enlaces en cada capa con respecto a la cantidad de nodos. Por tanto, estas redes pueden ayudarnos a comprobar la eficacia de nuestra metodología.

Para ver las relaciones entre universidades, se muestra en la Figura 5.1 la red multiplex de 2 capas construida con los datos desglosados para los años 2013 y 2014 y, la Figura 5.2 muestra la red de 3 capas construida con los datos totales de los años 2015, 2016 y 2017.

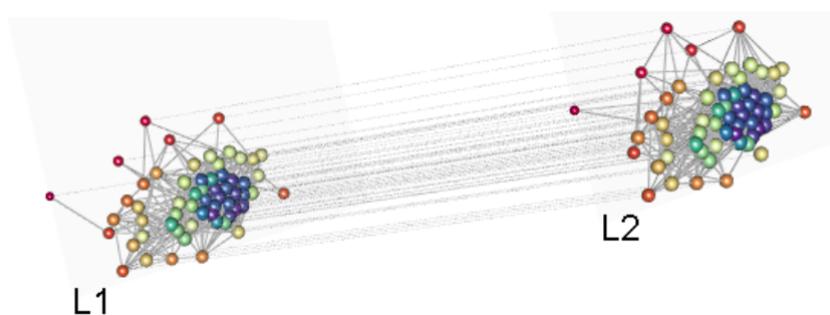


FIGURA 5.1: Gráfica de la red SESM con datos desglosados para los años 2013 y 2014.

Es importante mencionar que en cada red multiplex, los nodos representan a las universidades en el SESM, los enlaces intracapa representan sus relaciones para un año específico y los enlaces entre capas representan la conexión de nodos de réplica en diferentes años (mismos nodos en otras capas).

Por ejemplo, en Figura 5.2, los enlaces en capas  $L1$ ,  $L2$  y  $L3$  representan las relaciones de cada par de universidades en los años 2015, 2016 y 2017, respectivamente, mientras que los enlaces que unen  $L1$  con  $L2$  y  $L2$  con  $L3$  son las relaciones de identidad.

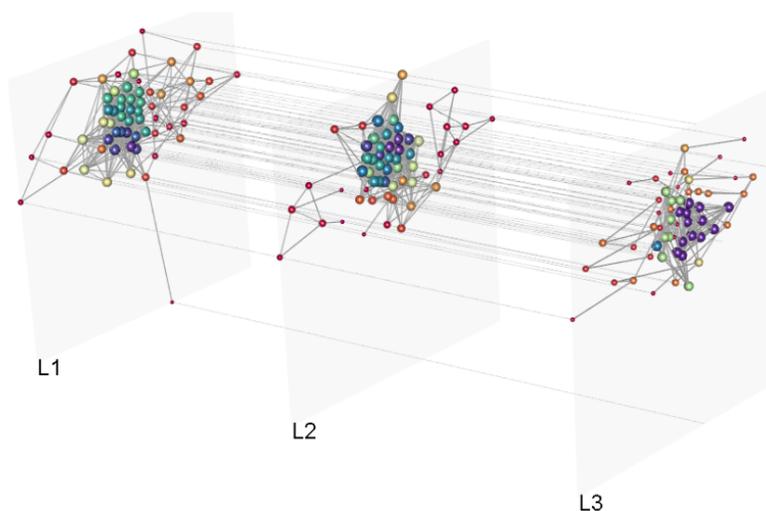


FIGURA 5.2: Gráfica de la red SESM con datos desglosados no normalizados para los años 2015, 2016 y 2017.

Dado que las mismas universidades en diferentes capas tienen diferentes relaciones, encontrar qué nodos son esenciales para que las redes multiplex sigan conectadas, no es un problema trivial.

Ahora, con el objetivo de clasificar las redes construidas con algún modelo de redes complejas, en la Tabla 5.4 se presentan los resultados numéricos para las métricas estructurales en las redes monoplex del SESM construidas usando los datos desglosados y totales y en las redes monoplex del QSRanking.

Por lo tanto, se puede ver que para las redes del QSRanking el grado promedio es representado por alrededor de una cuarta parte del número total de nodos, mientras que para el SESM, el valor de grado promedio para las redes construidas con datos totales es menor que para las redes construidas usando datos desglosados. Sin embargo, el grado máximo en la mayoría de las redes (excepto 2016.2) es alrededor de la mitad del total de nodos de la red.

TABLA 5.4: Valores numéricos para métricas estructurales en redes monoplex QS-Ranking SESM.

Red	Grado promedio	Grado Max.	C. Agrupamiento	L. ruta
2013.1	18.276	30	0.632	1.882
2014.1	18.508	30	0.611	1.885
2015.1	18.4	30	0.6888	1.874
2016.1	16.103	30	0.574	1.966
2017.1	16.237	30	0.574	2.113
2013.2	15.733	30	0.618	2.106
2014.2	14.533	30	0.629	2.325
2015.2	14.678	30	0.634	2.635
2016.2	5.786	13	0.716	3.757
2017.2	15.017	27	0.722	2.56
2018.QS	91.358	109	0.858	1.13
2019.QS	198.713	110	0.863	1.28
2020.QS	96.108	109	0.865	1.26

Entonces, con base en la información presentada en la Tabla 5.4, se puede ver que todas las redes tienen un coeficiente de agrupamiento alto (entre 0.6 y 0.9) y tienen una pequeña longitud de camino entre cualquier par de nodos (entre 2 y 3). Por lo tanto, se puede deducir que las redes del QS-Ranking y del SESM siguen el modelo de mundo pequeño [128], lo que implica que cumplen con las principales características de las redes sociales (SN) [73].

### 5.1.2.- Desarrollo de la metodología

Como se mencionó anteriormente, la robustez en una red se puede cuantificar encontrando los nodos que causan la ruptura del GC (proceso de percolación inversa). En redes multiplex, se puede identificar el GC como el componente gigante mutuamente conectado (MCGC) o el clúster viable más grande (LVC), cuyas definiciones pueden verse en el capítulo 1.

Al igual que para el caso monocapa, esta metodología se define como una adaptación de las metodologías presentadas en [87] y [86], la cual se basa en la resolución del Problema Separador de Vértices (VSP) [7] adaptada para redes multiplex (denotada como m-VSP). En concreto, esta metodología consiste en encontrar un conjunto mínimo de nodos  $C$  que, al ser eliminado de la red, produce una desconexión del MCGC o del LVC de la red multiplex en dos componentes conectados ( $A, B$ ), de tal manera que  $A$  y  $B$  se maximizan. Formalmente, el problema se puede resumir como:

- Instancia: Un MCGC o un LVC de una red multiplex.
- Problema: Encontrar una partición de MCGC o LVC que resulte en tres conjuntos disjuntos  $A, B$  y  $C$ ,  $A$  y  $B$  no vacío, tal que:

P1) No hay enlaces entre capas o intracapa entre los elementos que pertenecen a cada conjunto  $A, B$  o  $C$ .

P2)  $|A|$  y  $|B|$  son maximizados.

P3)  $|C|$  se minimiza.

Así, si se resuelve el problema en una red multiplex, se obtienen nodos que provocan la ruptura del MCGC o del LVC. Por tanto, se puede asegurar que la resolución del problema es un proceso de percolación inversa y encuentra el conjunto de nodos relevantes para la comunicación en red.

Es importante mencionar que se puede cuantificar la robustez de las redes analizando el porcentaje de nodos que pertenecen al conjunto separador  $C$  del MCGC y del LVC. Por ejemplo: para MCGC, un alto porcentaje (más del 70 % [88]) de nodos en  $C$ , indica que la red es robusta, mientras que un porcentaje bajo (menos de 30 % [88]) indica que la red no es muy robusta y para LVC, un alto porcentaje (más de 60 % [87]) de nodos en  $C$ , indica que la red es robusta, mientras que un porcentaje bajo (menos del 40 % [87]) indica que la red no es muy robusta.

Debido a que el VSP original se considera  $\mathcal{NP}$ -Duro [94, 108], la adaptación del problema para redes multiplex, es  $\mathcal{NP}$ -Duro también [39, 51]; por lo tanto, con el objetivo de obtener buenas soluciones en un tiempo razonable, es necesario resolver la adaptación de VSP mediante una técnica heurística.

Al igual que para las redes monocapa, se utilizó un algoritmo de recocido simulado (SA) [68] desarrollado en lenguaje C, utilizando los vecindarios descritos en la subsección 3. Como se vio anteriormente, SA requiere 4 parámetros de control y, para obtener un buen rendimiento, es importante encontrar los ajustes de parámetros efectivos para la técnica. Entonces, usando el algoritmo de evolución diferencial (DE), se obtuvieron los siguientes valores:

- Temperatura inicial  $T_i = 1500$ .
- Temperatura final  $T_f = 0.001$ .
- Programa de enfriamiento  $T_k \gamma$ , con  $\gamma = 0.95$ .
- Número de veces que se genera un vecino  $L_k = 20$ .

Y, el algoritmo finaliza cuando la mejor solución no se actualiza cuando han transcurrido 50 actualizaciones de temperatura o  $T_k = T_f$ .

Así, el algoritmo regresa como solución, al conjunto de nodos que si se eliminan sus conexiones (intercapa e intracapa) de la red, ocasionan la ruptura del LVC o el MCGC en al menos dos componentes.

Por lo tanto, en la siguiente sección, se presentan los resultados obtenidos después de resolver m-VSP sobre el LVC O el MCGC de las redes de referencia y las redes del SESM y QSRanking.

### 5.1.3.- Resultados

Con el objetivo de verificar si la metodología propuesta se puede aplicar en diferentes tipos y modelos de redes, en este apartado se presenta un análisis de cuantificación de robustez en diferentes redes multiplex de 3 capas y en las redes construidas con la información del SESM y del QSRanking.

#### 5.1.3.1.- Cuantificación de robustez en las redes de referencia

Es importante mencionar que el análisis de robustez en redes multiplex es un área de investigación emergente y no se encontró un conjunto de referencia apropiado en la literatura específica.

Por lo tanto, se decidió utilizar un conjunto de redes de referencia (Tabla 5.1) que se han utilizado para diferentes propósitos, como la identificación de comunidades y el análisis de sus propiedades estructurales [30, 60, 106].

Por ejemplo, algunas de las metodologías propuestas no realizan pruebas en redes de referencia, pero en sí en casos de estudio particulares [36, 70, 112, 115].

La Tabla 5.6 presenta los valores numéricos obtenidos aplicando la metodología desarrollada en este trabajo (denotada como m-VSP) al clúster viable más grande (LVC), mientras que, en la Tabla 5.5 se muestran los valores numéricos obtenidos aplicando el m-VSP al componente gigante mutuamente conectado (MCGC). Para ambas Tablas, en la primera columna se muestra el identificador de cada red, en la segunda columna los valores del conjunto  $C$ , en la tercera los valores de los conjuntos  $A$  y  $B$ , y en la cuarta el porcentaje de nodos en el MCGC que pertenecen a  $C$ .

Es importante recordar que si  $C$  tiene un valor superior al 70 % del total de nodos del MCGC o al 60 % del LVC, la red se considera robusta. Por otro lado, cuando  $C$  tiene un valor inferior al 30 % para MCGC o al 40 % para LVC, se puede afirmar que la red no es robusta.

TABLA 5.5: Resultados numéricos para la cuantificación de la robustez en redes de referencia (MCGC).

Red	$ C $	$ A $ y $ B $	% de nodos en MCGC en $C$
CKM	50	23 y 28	47.61 %
Hepatitis	1	–	1.25 %
Krackhardt	6	6 y 1	28.57 %
Lazega	39	21 y 2	54.92 %

Con base en la información de la Tabla 5.5, se puede ver que para las redes Krackhardt y Lazega, el porcentaje de nodos del LVC en el conjunto  $C$  hacen que las redes sean moderadamente robustas, ya que cada red tiene un porcentaje de nodos de MCGC en  $C$  de 28.57 % y 54,92 %, respectivamente.

En el caso específico de la red de Hepatitis, solo hay un nodo en el conjunto separador y los subconjuntos  $A$  y  $B$  no se pueden formar ya que cada nodo que pertenece a la red permanece como un componente aislado y es muy propensa a colapsar.

TABLA 5.6: Resultados numéricos para la cuantificación de la robustez en redes de referencia (LVC).

Red	$ C $	$ A $ y $ B $	% de nodos en LVC en $C$
CKM	19	19 y 17	18.26 %
Hepatitis	1	–	1.25 %
Krackhardt	6	6 y 1	28.57 %
Lazega	21	19 y 12 %	29.57 %

### 5.1.3.2.- Cuantificación de robustez las redes multiplex del caso de estudio (SESM y QSRanking)

Con base en los resultados de la subsección anterior, se puede ver que la metodología propuesta funciona para diferentes tipos de modelos de red (aplicados a su MCGC y LVC). Por ello,

a continuación se muestra el análisis de la cuantificación de la robustez en redes multiplex del SESM y QSRanking.

La Tabla 5.7 presenta el valor de cardinalidad para los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , así como el porcentaje de nodos de MCGC que pertenecen a  $C$ . Es importante mencionar que, en las redes del QSRanking y del SESM, el MCGC está formado por todos los nodos de las redes.

TABLA 5.7: Resultados numéricos para m-VSP para redes del QSRanking y del SESM (MCGC).

Red	$ C $	$ A $ y $ B $	% de nodos en el MCGC en $C$
2013.1-2014.1	14	28 y 18	23.3 %
2014.1-2015.1	13	24 y 23	21.7 %
2015.1-2016.1	15	27 y 18	25 %
2016.1-2017.1	19	25 y 16	31.7 %
2013.1-2015.1	24	18 y 18	40 %
2014.1-2016.1	27	21 y 12	45 %
2015.1-2017.1	24	19 y 17	40 %
2013.2-2014.2	18	27 y 15	30 %
2014.2-2015.2	14	27 y 19	33.3 %
2015.2-2016.2	15	25 y 20	25 %
2016.2-2017.2	19	29 y 16	31.7 %
2013.2-2015.2	26	19 y 15	43.3 %
2014.2-2016.2	24	20 y 16	40 %
2015.2-2017.2	26	18 y 16	43.3 %
2018.QS-2019.QS	112	137 y 128	34 %
2019.QS-2020.QS	133	137 y 107	35.3 %
2018.QS-2020.QS	174	108 y 95	46.1 %

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 5.7, se puede asegurar que las redes del QSRanking y del SESM son moderadamente robustas, ya que para todas las redes del QSRanking, el porcentaje de nodos en el MCGC en  $C$  está entre 34 % y 46 % y para todas las redes del SESM, el porcentaje de nodos en el MCGC en  $C$  está entre 20 % y 46 % del total de nodos pertenecientes al MCGC. Por ejemplo, para las redes 2013.1-2014.1 y 2018-2020.QS se tiene 23 % y 46 % de los nodos en el conjunto separador, respectivamente.

A continuación, se presentan los resultados numéricos obtenidos al resolver el m-VSP al LVC para cada red del QSRanking y del SESM, por lo tanto, la Tabla 5.8 muestra el valor de cardinalidad para los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y el porcentaje de nodos de LVC que pertenecen a  $C$ .

TABLA 5.8: Tamaño de LVC para cada red del SESM y del QSRanking.

Red	Tamaño del LVC	Red	Tamaño del LVC
2013.1-2014.1	53	2015.2-2016.2	49
2014.1-2015.1	47	2016.2-2017.2	50
2015.1-2016.1	49	2013.2-2015.2	51
2016.1-2017.1	51	2014.2-2016.2	46
2013.1-2015.1	53	2015.2-2017.2	52
2014.1-2016.1	47	2018.QS-2019.QS	319
2015.1-2017.1	49	2019.QS-2020.QS	324
2013.2-2014.2	51	2018.QS-2020.QS	328
2014.2-2015.2	47		

Con base en la información presentada en la Tabla 5.8, se puede ver que para las redes del SESM y del QSRanking, el LVC es más pequeño en comparación con el MCGC. Esto se debe a que el MCGC está compuesto por la unión y el LVC está compuesto como máximo por la unión de todos los componentes gigantes de cada capa.

TABLA 5.9: Resultados numéricos para m-VSP para redes del QSRanking y del SESM (LVC).

Red	C	A  y  B	% de nodos en LVC en C
2013.1-2014.1	9	26 y 25	16.9 %
2014.1-2015.1	11	26 y 23	23.4 %
2015.1-2016.1	12	28 y 20	24 %
2016.1-2017.1	16	23 y 21	31.3 %
2013.1-2015.1	18	22 y 20	33.9 %
2014.1-2016.1	12	25 y 23	25.5 %
2015.1-2017.1	18	22 y 20	36.7 %
2013.2-2014.2	17	23 y 20	33.3 %
2014.2-2015.2	13	27 y 19	27.6 %
2015.2-2016.2	12	25 y 23	24.4 %
2016.2-2017.2	13	29 y 18	26 %
2013.2-2015.2	18	22 y 20	35.3 %
2014.2-2016.2	16	22 y 22	34.8 %
2015.2-2017.2	16	23 y 21	30.7 %
2018.QS-2019.QS	108	142 y 127	33.8 %
2019.QS-2020.QS	114	137 y 126	35.2 %
2018.QS-2020.QS	92	149 y 136	28 %

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 5.9, se puede asegurar que las redes del QSRanking y del SESM no son robustas, ya que para todas las redes del QSRanking, C está entre 28 y 33.8 % y para todas las redes del SESM, C está entre 16.9 % y 36.7 % del total de nodos pertenecientes al LVC. Por ejemplo: Para las redes 2016.1-2017.1 y 2019-2020.QS, se tiene 31.3 % y 35.2 % de los nodos en el conjunto separador, respectivamente.

Además, se puede verificar que la metodología propuesta en este trabajo permite encontrar el conjunto de nodos que provocan la ruptura del MCGC y del LVC para diferentes modelos de redes multiplex de 2 y 3 capas, ya que la suma de A, B y C es equivalente al número total de nodos que pertenecen al MCGC o al LVC según el caso.

Es importante mencionar que, para las redes del SESM, no existe diferencia en las redes construidas con datos tanto desagregados como agregados, por lo que tienen los mismos resultados numéricos cuando se aplica m-VSP.

Lo anterior significa que ambos tipos de redes son equivalentes e implica que es posible utilizar un conjunto reducido de información para analizar el comportamiento del SESM; por lo tanto, se puede asegurar que las principales características del complejo sistema están debidamente estructuradas cuando se construyen las redes del QSRanking y del SESM.

Luego, se puede ver que la metodología propuesta en este trabajo puede encontrar el conjunto de nodos que provocan la ruptura del MCGC o del LVC para diferentes modelos de redes multiplex de 2 y 3 capas.

Para analizar los elementos que provocan la ruptura del MCGC y el LVC en las redes del QSRanking y del SESM, a partir de los resultados presentados en [125] y [89], en la Tabla 5.10 se muestra el porcentaje de universidades que en el ranking QS se ubican entre 1 y 100, 101 y 200, 201 y 300, 301 y 400 y, 401.

TABLA 5.10: Porcentaje de universidades en rangos de 100 universidades (QSRanking).

Red	1-100	101-200	201-300	301-400	401-500
2018-2019.QS	20.7 %	29.3 %	28.4 %	15.2	6.4 %
2019-2020.QS	18.4 %	29.3 %	28.7 %	17.5 %	6.1 %
2018-2020.QS	19.5 %	27.5 %	30 %	14 %	9 %

Con base en la información presentada en la Tabla 5.10, se puede ver que la mayoría de las universidades que causan la ruptura de la red están en el ranking 100-300 tienen como principales características el tener valores promedio en: reputación académica, reputación con los empleadores, número de citas y número de estudiantes internacionales.

Ahora, en la Tabla 5.11, se muestra el porcentaje de universidades con valores altos, medios y bajos en los rankings universitarios que provocan la desconexión del SESM.

TABLA 5.11: Porcentaje de universidades con valor de clasificación alto, medio y bajo (SESM).

Red	Alto ranking	Ranking promedio	Bajo ranking
2013.1-2014.1	35.7 %	28.6 %	35.7 %
2014.1-2015.1	30.4 %	23.3 %	46.3 %
2015.1-2016.1	40 %	33.3 %	26.6 %
2016.1-2017.1	36.6 %	26.6 %	36.6 %
2013.1-2015.1	33.3 %	29 %	37.5 %
2014.1-2016.1	29.6 %	40.7 %	29.6 %
2015.1-2017.1	33 %	25 %	41.6 %
2013.1-2014.2	33.3 %	22.2 %	44.4 %
2014.1-2015.2	35.7 %	28.6 %	35.7 %
2015.1-2016.2	40 %	33.3 %	26.7 %
2016.1-2017.2	42.1 %	26.3 %	31.6 %
2013.1-2015.2	34.6 %	30.7 %	34.6 %
2014.1-2016.2	33.3 %	29.1 %	34.6 %
2015.1-2017.2	38.4 %	30.8 %	30.8 %

Con base en los resultados de la Tabla 5.11, se puede ver que para todas las redes del SESM, el porcentaje de universidades con valores de clasificación altos, medios y bajos se divide en partes iguales, es decir, una cantidad similar de los tres tipos de universidades es necesaria para provocar la ruptura del LVC.

Desde la perspectiva de las redes sociales, se puede deducir que los vínculos entre los diferentes tipos de universidades son fundamentales para el correcto funcionamiento y desarrollo de las redes del QSRanking y del SESM.

Finalmente, es importante mencionar que la metodología propuesta obtiene un conjunto de nodos que provocan la ruptura del MCGC y el LVC sin utilizar información de red estructural o medidas de centralidad.

## 5.2.- Identificación de nodos influyentes en redes multiplex

Como se mencionó anteriormente, la identificación de nodos influyentes está ligado con la cuantificación de la robustez. Por otro lado, debido a la naturaleza de la metodología presentada en la sección 5, es importante destacar que es posible obtener una cuantificación sobre la influencia de cada uno de los nodos pertenecientes a la red multiplex. Por lo tanto, las siguientes subsecciones presentan la manera de analizar los resultados para la identificación y cuantificación de los nodos más influyentes en redes de 2, 3 y 5 capas.

### 5.2.1.- Construcción de las redes multiplex del caso de estudio (COVID-19)

En esta sección, se muestra la forma de construir las redes multiplex para analizar e identificar los países más esparcidos de la enfermedad conocida como COVID-19. En específico para este estudio, el proceso de construcción se realizó en dos fases, las cuales son:

1. Recolección de datos: En esta fase, se construyó el conjunto de datos a través de un análisis estadístico aplicado a la información obtenida del Fondo Monetario Internacional (FMI) [48], el Banco Mundial (BM) [8], la Organización Mundial de la Salud (OMS) [134], la Unión Europea (UE) [124] y de la Transparencia Internacional (TI) [64].
2. Construcción de redes: En esta fase, con base en la similitud de las características de cada país, se construyeron las redes monoplex y multiplex (siguiendo el proceso descrito en la sección 5).

Como se puede ver, para construir las redes utilizadas en esta sección, se utilizó la información sobre COVID-19 disponible en los sitios web de la UE y la OMS, mientras que para los datos socioculturales y económicos se utilizó la información disponible en los sitios web del BM, el FMI y TI.

La información de la COVID-19 (infecciones y muertes) incluye el período del 31/12/19 al 15/05/20 y los indicadores utilizados para definir las características socio-culturales-económicas, son: Producto Interno Bruto real proyectado (PIB) (2020), precios al consumidor proyectados (2020), derechos especiales de giro (millones), cuota (millones), índice de desarrollo humano (IDH) (2009-2018), índice de percepción de la corrupción (2018), ingreso nacional bruto (INB) per cápita, rango del INB per cápita menos rango del IDH, población del país (población/ $km^2$ ), densidad de población real (hectáreas por persona), coeficiente Gini, gasto sanitario corriente (porcentaje del PIB 2000-2016) y cantidad de viajes aéreos (2019-2020).

Específicamente, en este trabajo, se modelaron dos redes multiplex de 5 capas, donde cada capa representa la relación entre cada par de países  $v$  de la siguiente manera:

- Capa 1 (L1), para el índice de desarrollo humano y sus componentes.
- Capa 2 (L2), para las Tendencias del índice de desarrollo humano en el periodo 1990-2018.
- Capa 3 (L3), para el índice de desarrollo humano ajustado por desigualdad.
- Capa 4 (L4), para los viajes aéreos (entrantes y salientes) entre cada país.
- Capa 5 (L5), L5.1 para la red de número de infecciones y muertes y L5.2 para la red del uso del PIB en la salud.

Es fundamental enfatizar que si bien el PIB se usa frecuentemente para comparar economías internacionales o los viajes aéreos se usan para analizar el movimiento de la población, la idea de modelar cinco tipos de capas diferentes es poder realizar una clasificación basada en un análisis multicriterio que permita una valoración estable de los diferentes elementos incluidos, agilizando así el proceso de toma de decisiones.

Las Figuras 5.3 y 5.4 muestran las dos redes multiplex de 5 capas, indicadas como red de infecciones y PIB, respectivamente.

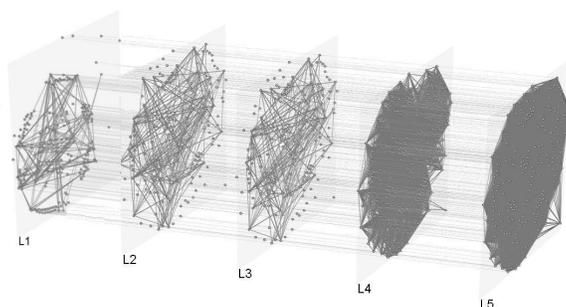


FIGURA 5.3: Gráfica de la red multiplex de infección.

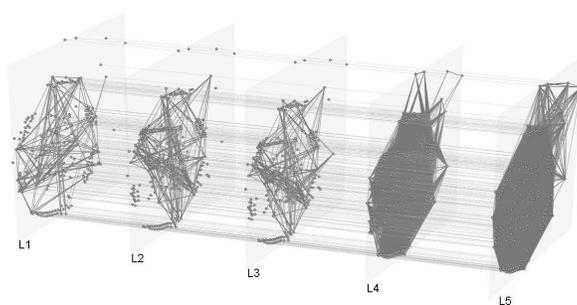


FIGURA 5.4: Gráfica de la red múltiplex PIB.

Con base en la información presentada en las Figuras 5.3 y 5.4 se puede ver de manera gráfica que en este estudio, cada nodo representa un país que a se encuentra en todas las capas de la red múltiplex, donde cada enlace entre capas indica que los dos países son similares en la mayoría de las características analizadas y los enlaces intracapa indican la relación de identidad (característica principal de redes multiplex).

### 5.2.2.- Desarrollo de la metodología

Para esta metodología, se utilizó el proceso del m-VSP presentado en la sección 5. Sin embargo, para estas redes (multiplex de 5 capas), los parámetros para la técnica de recocido simulado son:

- Temperatura inicial  $T_i = 1000$ .
- Temperatura final  $T_f = 0.0015$ .
- Programa de enfriamiento  $T_k \gamma$ , con  $\gamma = 0.9$ .
- Número de veces que se genera un vecino  $L_k = 15$ .

Además, es importante mencionar que se utilizaron los mismos dos vecindarios descritos anteriormente.

### 5.2.3.- Resultados

En esta sección, se presentan los resultados numéricos estructurales y el análisis sobre la identificación y cuantificación de los países que causan la propagación de la enfermedad conocida como COVID-19. Como se mencionó anteriormente, esto se lleva a cabo, mediante la adaptación y resolución del Problema del Conjunto Separador de Vértices (VSP) para redes multiplex.

#### 5.2.3.1.- Análisis de las métricas estructurales de las redes del caso de estudio (COVID-19)

Con el objetivo de analizar la cuantificación de los nodos influyentes y, en específico para este caso de estudio, la identificación de los países difusores de la COVID-19, en la Tabla 5.12 se presentan los valores numéricos para el promedio, la varianza y los límites bajo y alto para cada métrica estructural, así como las centralidades de cercanía e intermediación con un nivel de certeza del 95 % (para cada capa).

TABLA 5.12: Métricas estructurales para cada capa.

Red		Grado	C. Agrupamiento	Triángulos	C. cercanía	C. intermediación	Diam.	L. ruta
L1	Promedio	35.630	0.933	822.361	0.812	0.832	2	1.042
	Var.	421.636	0.012	335328.341	0.042	0.047		
	L. bajo	34.178	0.921	741.032	0.742	0.815		
	L. alto	40.083	0.945	921.225	0.842	0.845		
L2	Prom.	38.761	0.215	823.263	0.815	0.842	3	1.099
	Var.	422.462	0.092	383342.402	0.0624	0.049		
	L. bajo	33.712	0.159	729.631	0.763	0.832		
	L. alto	43.826	0.271	916.831	0.831	0.853		
L3	Prom.	37.405	0.946	837.774	0.824	0.856	4	1.322
	Var.	423.726	0.015	395358.351	0.064	0.051		
	L. bajo	34.515	0.929	749.520	0.789	0.824		
	L. alto	40.294	0.964	926.028	0.860	0.888		
L4	Prom.	190.342	0.992	20129.969	0.971	0.985	2	1.056
	Var.	4.841	0.001	4842.545	0.001	0.002		
	L. bajo	186.893	0.989	20120.201	0.970	0.984		
	L. alto	193.257	0.994	20139.736	0.973	0.986		
L5.1	Prom.	3.437	0.191	5.964	0.203	0.203	1	1.000
	Var.	10.066	0.145	217.914	0.029	0.029		
	L. bajo	2.991	0.138	3.892	0.146	0.146		
	L. alto	3.882	0.245	8.036	0.260	0.260		
L5.2	Prom.	54.869	0.654	1239.767	0.549	0.634	3	1.860
	Var.	883.359	0.022	883668.239	0.020	0.028		
	L. bajo	50.697	0.633	1107.825	0.529	0.610		
	L. alto	59.040	0.675	1371.709	0.569	0.657		

Con base en la información presentada en la Tabla 5.12, se puede ver que las capas L1 a L4 y L5.2, tienen características del modelo de mundo pequeño [131], mientras que la capa 5.1 tiene características del modelo libre de escala [10].

Por ejemplo, L3 tiene un coeficiente de agrupamiento de 0.952 y una longitud de trayecto media de 1.32, mientras que L5,1 tiene 0.191 y 1, respectivamente. Por otro lado, para las centralidades de cercanía e intermediación, L1 a L4 y L5.2 tienen valores altos, mientras que L5.1 tiene valores bajos.

### 5.2.3.2.- Cuantificación de la influencia de nodos en las redes multiplex del caso de estudio (COVID-19)

En la Tabla 5.13, se presentan los valores numéricos obtenidos al aplicar la adaptación de VSP al MCGC de la red de infecciones y a la red PIB y salud. En la primera columna, se muestra el identificador de cada red, en la segunda, se presenta el valor de la cardinalidad del componente  $C$ , y en la tercera columna, se muestran los valores de la cardinalidad de los conjuntos  $A$  y  $B$ .

Es fundamental mencionar que, en ambas redes, el MCGC es el total de los nodos (195 países). Por otro lado, se debe recordar que si  $|C|$  tiene un valor superior al 70 % del total de nodos del MCGC, se considera robusta (hay muchos nodos esparcidos). Por otro lado, cuando  $|C|$  tiene un valor inferior al 30 %, la red no es robusta (hay pocos nodos esparcidos).

TABLA 5.13: Cardinalidad de los componentes  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

Red	$ C $	$ A $ y $ B $	Componentes aislados
Infecciones	108	42 y 43	3
PIB y salud	111	36 y 26	12

De acuerdo con los resultados mostrados en la Tabla 5.13, se puede verificar que aplicando la adaptación de VSP se puede encontrar el conjunto de nodos que provocan la ruptura del MCGC para las redes multiplex de 5 capas, ya que la suma de  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $|C|$  y los componentes aislados (nodos sin conexiones a otros nodos) es igual al número total de nodos que pertenecen al MCGC.

Además, se puede asegurar que las redes no son robustas y que hay muchos nodos esparcidos; por lo tanto, se puede deducir que con la eliminación de los enlaces de los países que están en el conjunto separador, se puede controlar la pandemia causada por la COVID-19, ya que, en ambas redes,  $|C|$  es del 54 % y 56 % de los nodos pertenecientes al MCGC, respectivamente.

Entonces, para analizar los países que provocan la ruptura del MCGC en las redes, se realiza un análisis de los tipos de países que provocan la propagación de la COVID-19.

Ahora, se presenta la Tabla 5.14 y la Figura 5.5, que muestran los países que pertenecen a cada conjunto después de la ruptura del MCGC para la red de infección.

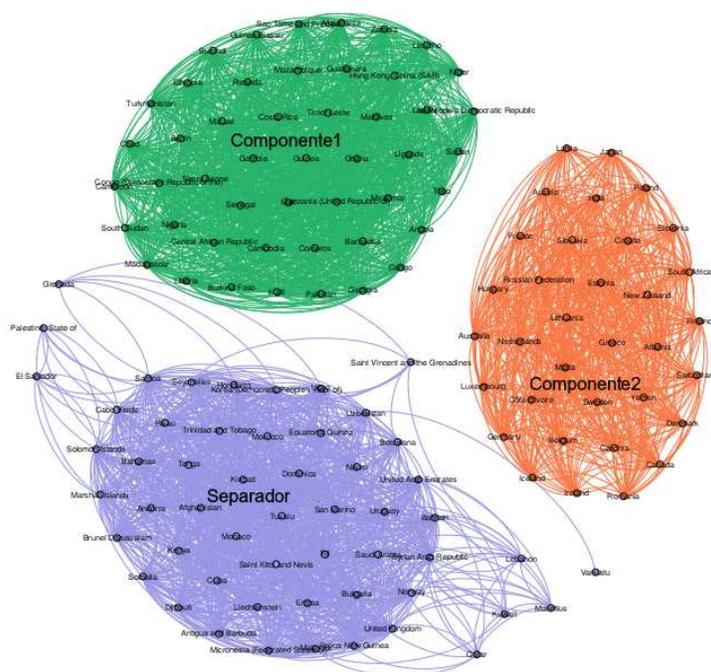


FIGURA 5.5: Gráfica de los conjuntos de países después de la ruptura del MCGC (red de infecciones).

Además, es importante mencionar que la Figura 5.5 presenta las conexiones que tienen los nodos pertenecientes a cada conjunto en las cinco capas.

TABLA 5.14: Conjuntos de países después de la ruptura de la MCGC (red de infecciones).

<b>Red de infección</b>	
<b>Conjunto separador</b>	Noruega, Irlanda, Hong Kong, Australia, Suecia, Singapur, Países Bajos, Dinamarca, Reino Unido, Liechestein, Austria, Luxemburgo, India, Israel, Francia, Lituania, Andorra, Qatar, Chile, Croacia, Argentina, Kazajstán, Rumania, Kuwait, Bahamas, Malasia, Serbia, Trinidad y Tobago, Irán, Mauricio, Panamá, Georgia, Sri Lanka, Cuba, Saint Kitts y Nevis, Antigua y Barbuda, México, Armenia, Argelia, Nicaragua, Macedonia del Norte, Perú, Túnez, Mongolia, Líbano , Jamaica, Venezuela, Surinam, Belice, Maldivas, Tonga, Turkmenistán, Uzbekistán, Libia, Samoa, Sudáfrica, Gabón, Egipto, Islas Marshall, Vietnam, Irak, Marruecos, Kirguistán, Mozambique, Tjikistán, Cabo Verde.
<b>Componente 1</b>	Brasil, Bangladesh, Colombia, Tailandia, Filipinas, Guyana, Indonesia, Uruguay, Dominica, Palau, Brunei Darussalam, Kribati, Botswana, Bahrein, Fiji, República Centroafricana, Emiratos Árabes Unidos, Honduras, Azerbaiyán, República Dominicana, Palestina, Moldavia, San Vicente y las Granadinas, Granada, Santa Lucía, Paraguay, Ecuador, Ucrania, El Salvador, Estados Unidos, Chipre, Bosnia y Herzegovina, España, Omán, Italia, Corea, China.
<b>Componente 2</b>	Congo, Ghana, Bielorrusia, Ruanda, Níger, Togo, Barbados, Senegal, Sudán, Malí, Nepal, Etiopía, Costa Rica, Bélgica, Alemania, Hungría, Nueva Zelanda, Federación de Rusia, Estonia, Suiza, Montenegro, Eslovaquia, Finlandia, Eslovenia , Malta, Letonia, Yemen, Macedonia del Norte, Argelia, Suecia, Albani, Chequia, Canadá.

Con base en la información presentada en la Figura 5.5 y la Tabla 5.14, se puede ver que en el Componente 1 hay países como Brasil, China e Italia, (entre otros), con un alto índice de desarrollo humano. Sin embargo, estos países presentan un alto porcentaje en contagio y muertes. Por otro lado, en el Componente 2 se encuentran países como Congo, Níger y Montenegro, entre otros, con un bajo porcentaje de contagio y bajo índice de desarrollo humano; por lo tanto, la característica que comparten ambos tipos de países es el bajo número de viajes aéreos.

Para el conjunto separador, hay países con diferentes valores de características<sup>2</sup>: el porcentaje de la población que se infecta o muere por día, el promedio del PIB real proyectado, índice de desarrollo humano, promedio del índice de percepción de la corrupción, gasto promedio en salud corriente (porcentaje del PIB), población promedio y número de viajes aéreos.

Por ejemplo, en las características socioeconómicas y poblacionales, Noruega, Irlanda, Hong Kong, Suecia, entre otros, tienen valores altos en índice de desarrollo humano (IDH), esperanza de vida al nacer, años esperados de escolaridad, porcentaje de infectados por día y la tasa de muertes por día, mientras que Irán, Mauricio, Panamá, Georgia, Sri Lanka, entre otros, tienen valores medios y Vietnam, Irak, Marruecos, Kirguistán, Tayikistán, Cabo Verde, entre otros, tienen valores bajos.

Entonces, con base en la información mostrada sobre el número de infecciones y muertes, se puede ver que algunos países como Estados Unidos, Italia y China, que son considerados los países con más enfermedades y muertes, no se encuentran en el conjunto de los que más

<sup>2</sup>Para más información, ver los vínculos web presentados en el Anexo B

contagian. Por otro lado, algunos países que se encuentran en el conjunto de esparcidos son: Noruega, Irlanda y Dinamarca que presentan un alto porcentaje de contagio, México, Venezuela y Egipto con un porcentaje promedio y, países como India, Nicaragua y Mozambique tienen un porcentaje bajo.

Ahora, para analizar la relación entre el PIB y la propagación de la COVID-19, se muestra la Figura 5.6 y la Tabla 5.15, que muestran los conjuntos de países después de la ruptura de la MCGC en el PIB y la red de salud.

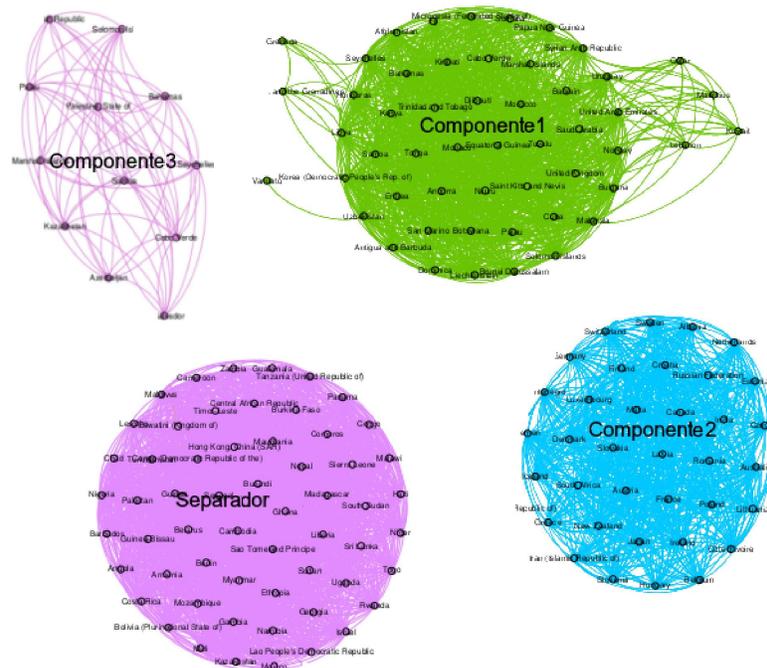


FIGURA 5.6: Gráfica de los conjuntos de países tras la ruptura del MCGC (red del PIB).

Es importante mencionar que la Figura 5.6 presenta las conexiones que tienen los nodos pertenecientes a cada conjunto en las 5 capas.

TABLA 5.15: Conjuntos de países tras la ruptura del MCGC (PIB y salud).

<b>PIB y salud</b>	
<b>Conjunto separador</b>	Noruega, Suiza, Irlanda, Alemania, Hong Kong, Islandia, Suecia, Finlandia, Nueva Zelanda, Estados Unidos, Bélgica, Liechtenstein, Austria, Luxemburgo, Israel, Corea, España, Malta, Italia, Chipre, Grecia, Polonia, Lituania, Estados Emiratos Árabes Unidos, Arabia Saudita, Eslovaquia, Bahrein, Croacia, Omán, Federación de Rusia, Bielorrusia, Kazahstán, Bulgaria, Kuwait, Bahamas, Seychelles, Serbia, Trinidad y Tobago, Mauricio, Albania, Costa Rica, Sri Lanka, Saint Kitts y Nevis, Antigua y Barbuda, Bosnia y Herzegovina, México, Colombia, Armenia, Argelia, Macedonia del Norte, China, Ecuador, Azerbaiyán, Ucrania, República Dominicana, Túnez, Mongolia, Líbano, Botswana, Jamaica, Venezuela, Dominica, Jordania, Tonga, Filipinas, Turkmenistán, Uzbekistán, ybia, Samoa, Islas Marshall, Palestina, Guyana, Tayikistán, Cabo Verde, Namibia, Timor-Leste, Honduras, Bután, Bangladesh, Micronesia, Santo Tomé y Príncipe, República Democrática Popular Lao, Vanuatu, Camboya, Kenia, Nepal, Pakistán, Nigeria, Benin, Les otho, Costa de Marfil, Togo, Haití, Afganistán, Djibouti, Gambia, Guinea, Liberia, Mozambique, Sierra Leona, Burkina Faso, Eritrea, Malí, Burundi, República Centroafricana, Níger, Mónaco, Nauru, San Marino, Somalia, Tuvalu.
<b>Componente 1</b>	Moldavia, Nicaragua, El Salvador, Palau, Brunei, Darussalam, Fiji, Malasia, Cuba, Nigeria, Papua Nueva Guinea, Tonga, Reino Unido, Uruguay, Ecuador, Guinea Ecuatorial, Qatar, República Popular Democrática de Corea, República Árabe Siria, Congo, Marruecos, Dinamarca, Canadá, Montenegro, Irán, Hungría, Japón, India, Rumania, Chequia, Eslovenia, Francia, Países Bajos, Yemen, Estonia, Sudáfrica, Letonia.
<b>Componente 2</b>	Ghana, República del Congo, Nepal, Uganda, Etiopía, Guatemala, Tanzania, Georgia, Malawi, Camerún, Sudán del Sur, Eswatini, Sudán, Angola, Ruanda, Senegal, Myanmar, Bolivia, Mauritania, Guinea-Bissau, Chad, Panamá, Madagascar, Maldivas, Barbados.
<b>Componente 3</b>	Perú, Gabón, Indonesia, Kirguistán, Egipto, Tailandia, Brasil, Belice, Irak, Zimbabwe, Paraguay, Viet Namd

Como en el caso anterior, en la Figura 5.6 y la Tabla 5.15 se puede ver que en cada conjunto (separador, componente 1, componente 2 y componente 3) hay países con diferentes valores en las características.

Por ejemplo, en los componentes 1, 2 y 3 hay países como Ghana, Nepal, Uganda, Egipto, entre otros, con bajo índice de desarrollo humano y alto porcentaje de contagios y muertes.

Para las características socioeconómicas, del PIB y de salud, en el conjunto separador (difusores) se encuentran países como Noruega, Suiza, Alemania, entre otros, que tienen valores altos en Índice de desarrollo Humano (IDH), esperanza de vida al nacer, años esperados de escolaridad, porcentaje de infectados y muertes por día, países como Costa Rica, México, Colombia, Armenia (entre otros) que tienen valores promedio y, países como Nauru, San Marino, Somalia, Tuvalu, entre otros, tienen valores bajos.

Así, con la información sobre el flujo en los viajes aéreos, se puede afirmar que los países del conjunto separador, tanto para las redes de infección como para el PIB, tienen un aumento en la

tasa de contagio, ya que además de ser aquellos países donde hay un mayor flujo viajes aéreos (entrantes y salientes), las economías se basan en negocios y transacciones con otros países (que se encuentran en la misma situación).

Finalmente, con base en los resultados que se muestran en las Tablas 5.14 y 5.15, se puede ver que para mitigar un segundo brote de la COVID-19 en el mundo, los países que se encuentran en la unión de ambos conjuntos separadores deben reforzar sus medidas sanitarias (en la zona). Por otro lado, los países que se encuentran en la intersección de los dos conjuntos separadores, además de fortalecer sus medidas sanitarias, deben regular el flujo aéreo para contener la propagación de la enfermedad.

Es importante mencionar que en este trabajo se cuantificó la dinámica de comportamiento de la COVID-19 con la información disponible hasta el 15 de mayo de 2020.

Por tanto, una limitación del estudio es que el cambio drástico de una o más variables hace que cambie la dinámica del sistema. Entonces, debido a que la información sobre la COVID-19 se actualiza todos los días, el conjunto de países esparcidos que se encontraron durante el desarrollo de esta investigación se puede mantener si se mantiene el comportamiento de las variables, de manera contraria, se deben remodelar las redes para realizar un nuevo análisis.

Si bien se esquematiza la dinámica del comportamiento de propagación de la COVID-19, el análisis es susceptible a la existencia de aquellos elementos que alteran drásticamente una o más capas de toda la red multiplex. Sin embargo, mientras se mantengan las tendencias de comportamiento (los valores dentro del nivel de certeza del 95 % se muestran en la Tabla 5.12), el conjunto de países esparcidos encontrados no cambiará.



## Capítulo 6

# Conclusiones

### 6.1.- Discusión y limitantes del estudio

Los análisis desarrollados en este trabajo se basan en la comparación de las metodologías propuestas con los resultados de diversos trabajos presentados en la literatura específica, donde, en las respectivas secciones, se puede ver que los resultados obtenidos en este trabajo son mejores a los obtenidos en otras investigaciones. Sin embargo, a continuación se describen algunas de las limitantes que se pueden tener.

Respecto a las redes del SESM y del QSRanking, la idea de modelar cuatro años diferentes es poder obtener una identificación de las universidades más influyentes, basadas en un análisis multicriterio que reduzca las desventajas de utilizar un solo tipo de información; así, nuestras técnicas son capaces de identificar aquellas universidades que, en función de diferentes características, son las más importantes.

Además, es importante mencionar que, con las metodologías propuestas en este trabajo, se puede cuantificar la dinámica de comportamiento de las universidades a lo sumo 4 años. Por lo tanto, una limitación del estudio es que el cambio drástico de una o más características hace que cambie la influencia de cada universidad.

Entonces, debido a que la información sobre las mejores universidades se actualiza cada año, el conjunto de universidades influyentes que encontramos puede contener a las mismas universidades, si se mantiene el comportamiento de las variables; de lo contrario, se deben remodelar las redes para realizar un nuevo análisis.

En torno a las metodologías para redes multiplex, el análisis desarrollado en este trabajo se basa en el análisis de la ruptura del MCGC o LVC perteneciente a cada red. La idea de usar las dos formas es porque el MCGC puede dar una idea de la red agregada; por otro lado, el LVC puede dar información sobre los nodos que son muy importantes en el comportamiento de cada capa.

La idea de modelar dos o tres tipos diferentes de capas para las redes SESM y QSRanking es poder obtener una identificación de las mejores universidades, a partir de un análisis multicriterio que reduzca las desventajas de utilizar un solo conjunto de nodos; así, la técnica es capaz de identificar aquellas universidades que, gracias a diferentes características, son las más importantes para el funcionamiento del sistema de educación superior mexicano e internacional.

Por lo tanto, al igual que para las metodologías propuestas para redes monocapa, una limitante del estudio es que un cambio drástico de una o más variables por año cambia la dinámica del sistema entero. Por lo tanto, se tiene que volver a aplicar la metodología para obtener una buena cuantificación.

Finalmente, en cuanto a las redes de difusión de COVID-19, el análisis desarrollado en este trabajo se basa en el modelado de dos redes multiplex, las cuales constan de 5 capas; donde cada capa muestra las similitudes de los países para los diferentes tipos de características.

La principal ventaja de este enfoque es que permite combinar información de diversos campos, como el económico, la salud y el transporte. Así, con este enfoque, se puede cuantificar la relación entre los diferentes países y modelar las redes que ayudan a comprender la dinámica del sistema a analizar (en este caso, la propagación de la COVID-19).

Sin embargo, es importante mencionar que en este trabajo, se cuantifica la dinámica de comportamiento de la COVID-19 con la información disponible hasta el 15 de mayo de 2020. Por lo tanto, una limitante del estudio se basa en que la información sobre la COVID-19 se actualiza todos los días, el conjunto de países esparcidos que se encontró al momento se puede mantener si se mantiene el comportamiento de las variables; de lo contrario, al igual que en los casos anteriores (SESM, QSRanking monocapa y multiplex), se deben remodelar las redes para realizar un nuevo análisis.

## 6.2.- Conclusiones

En este trabajo se presentan diversas metodologías basadas en el problema del separador de vértices (VSP), las leyes de movimiento y la ley de gravitación universal de Newton para cuantificar la robustez y la influencia de nodos en redes monocapa y multiplex de 2, 3 y 5 capas.

Para ello, se utilizó un conjunto de redes de referencia y un conjunto de redes modeladas con la información sobre las características de las universidades que pertenecen al Sistema de Educación Superior en México (SESM), los planes de estudio, el uso de las TICs para impartición de cursos, además de la información sobre las 500 mejores universidades del mundo (QSRanking) y sobre las principales características socioculturales, económicas y de conexiones, como: el PIB, la esperanza de vida, el número de viajes aéreos y el presupuesto para la salud, entre otros relacionados a la difusión de la COVID-19.

En específico, para la metodología de cuantificación de robustez en redes monocapa, los resultados muestran que la metodología es capaz de cuantificar la robustez en redes con características de diferentes modelos; tales como: redes de mundo pequeño, redes libres de escala, entre otras.

El análisis de las redes del SESM muestra que las redes modeladas con datos totales son más robustas que las redes modeladas con datos desglosados, ya que en la mayoría de las redes modeladas con datos totales, el componente gigante no se rompe. Entonces, dado que al aplicar VSP se forman dos componentes conectados, se ejecutó un análisis social utilizando el cálculo de relaciones diádicas y triádicas; donde, los resultados muestran que existe una gran comunicación e interdependencia de los elementos que comparten cierto tipo de características.

Además, es importante mencionar que con el enfoque VSP podemos identificar qué nodos son importantes e influyentes para el flujo de información entre universidades y saber cuáles mantienen el correcto funcionamiento del SESM.

Por lo tanto, se cumple con los objetivos particulares 1, 2, 3 y la primera parte del objetivo particular 4.

Respecto a la metodología que permite la identificación y cuantificación de los nodos más influyentes en varios tipos de redes complejas, se basa en la resolución de un método de programación matemática inspirado en las tres leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación universal y, debido a que esta metodología solo requiere el cálculo del grado de cada nodo y el camino más corto entre cualquier par de nodos, su adaptación a diferentes modelos y tamaños de red en comparación con los métodos tradicionales basados en medidas de centralidad (cercanía, grado, entre, entre otros) es fácil.

Una característica de la metodología propuesta es que se pueden utilizar otras definiciones para la distancia sin alterar su estructura. Por ejemplo: en una red de transporte, la distancia entre los nodos podría estar dada por el flujo entre ellos o en un sistema de publicaciones académicas, el cuartil al que pertenece la revista.

Entonces, como se mencionó anteriormente, para evaluar el comportamiento de la metodología propuesta se utilizó un conjunto de redes de referencia con diferentes características y diferente tipo de modelo. Los resultados numéricos muestran que la metodología clasifica los nodos más influyentes mejor que otras metodologías presentadas en la literatura específica, ya que cuando se retiran sus enlaces de la red, la robustez y eficiencia de la red disminuyen con respecto a los valores obtenidos con la eliminación de los nodos influyentes encontrados por las otras técnicas. Por lo tanto, se cumple con la segunda parte del objetivo particular 4.

Por otro lado, para el análisis del SESM y del QSRanking; los resultados muestran que las universidades influyentes son aquellas que permiten la comunicación entre universidades que obtienen diferentes valores en los rankings universitarios.

En torno a la metodología para identificación de nodos difusores de COVID-19, Los resultados muestran que la metodología, puede provocar la ruptura de la red multiplex de 5 capas, ayudar a identificar los países difusores y obtener una clasificación de los países en función de sus características, donde, en el conjunto de países difusores, los países tienen valores altos, medios o bajos en los diferentes aspectos socio-culturales y económicos; sin embargo, la característica que todos comparten es el alto valor de las conexiones aéreas.

Con base en la información recopilada y modelada (hasta el 15 de mayo de 2020), se puede afirmar que, al cambiar las relaciones de viajes aéreos, se puede minimizar el riesgo de un nuevo brote de COVID 19; sin embargo, no se puede cuantificar cuánto puede ayudar.

Respecto a la metodología para cuantificación de robustez en redes multiplex, se puede deducir que la principal ventaja de utilizar esta metodología es que no se necesitan cálculos estructurales ni métricas de centralidad. Los resultados numéricos muestran que la metodología presentada en este trabajo puede funcionar en diferentes tipos de redes multiplex y que m-VSP puede obtener un conjunto de nodos que provocan la ruptura del MCGC o del LVC.

Para las redes QSRanking, los resultados muestran que la mayoría de universidades que provocan la ruptura del LVC se encuentran entre las posiciones 101 y 300 en el ranking, y pocas universidades se encuentran entre las posiciones 0-100 o 401-500. Por otro lado, en el caso específico de las redes del SESM, los resultados muestran que la mayoría de universidades que provocan la ruptura del LVC se dividen en tres tipos: Universidades que obtienen valores altos, medios o bajos en los rankings universitarios.

Por lo tanto, se cumple con la tercera parte del objetivo particular 4, el objetivo particular 5 y del objetivo general de esta investigación.

### 6.3.- Trabajo futuro

Es fundamental enfatizar que la investigación presentada en este trabajo de tesis puede ser el punto de partida para colaboraciones interdisciplinarias (optimización, física y ciencia de redes).

Debido a que la ciencia de las redes complejas y en específico, el análisis de las redes multiplex es un área de investigación donde se pueden realizar diversos trabajos, como:

1. Probar en diferentes redes del mundo real con diversos tamaños y características estructurales, las metodologías presentadas en este trabajo.

2. Analizar la estructura y dinámica de las redes multiplex utilizando el conjunto de datos desarrollado durante esta investigación.
3. Caracterizar y generalizar la cuantificación de robustez en redes multiplex.
4. Caracterizar y generalizar la cuantificación de robustez en redes multicapa.
5. Generalizar diversos problemas de la teoría de gráficas para el funcionamiento en redes complejas (monocapa y multicapa).

Lo anterior, se puede lograr gracias a los avances obtenidos como resultados de la investigación presentada en este documento de tesis y en los artículos de investigación publicados como producto de esta (para más información, ver el capítulo [1](#)).

## Apéndice A

# Identificadores para los nodos en los casos de estudio

TABLA A.1: Identificadores numéricos para universidades en redes del SESM.

ID	UNIVERSIDAD	ID	UNIVERSIDAD
1	BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA (BUAP)	31	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI (UASLP)
2	CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN (CINVESTAV)	32	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SINALOA (UASIN)
3	COLEGIO DE POSGRADUADOS (COLPOS)	33	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE TAMAULIPAS (UAT)
4	EL COLEGIO DE MEXICO (COLMEX)	34	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE TLAXCALA (UATL)
5	INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL (IPN)	35	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE YUCATAN (UAY)
6	INSTITUTO TECNOLOGICO AUTONOMO DE MEXICO (ITAM)	36	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE ZACATECAS (UAZ)
7	INSTITUTO TECNOLOGICO DE SONORA (ITS)	37	UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL CARMEN (UADC)
8	INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE OCCIDENTE (ITESO)	38	UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE HIDALGO (UAEH)
9	INSTITUTO TECNOLOGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY (ITESM)	39	UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MEXICO (UAEMex)
10	SISTEMA UNIVERSIDAD ANAHUAC (S.L. ANAHUAC)	40	UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MORELOS (UAEM)
11	SISTEMA UNIVERSIDAD DEL VALLE DE MEXICO (UVM)	41	UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA (UAM)
12	SISTEMA UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA (S.L. IBERO)	42	UNIVERSIDAD DE COLIMA (UDC)
13	SISTEMA UNIVERSIDAD LA SALLE, AC (S.L. SALLE)	43	UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA (UDG)
14	UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO (UAAAN)	44	UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO (UdGto)
15	UNIVERSIDAD AUTONOMA BENITO JUAREZ DE OAXACA (UABJO)	45	UNIVERSIDAD DE LAS AMERICAS PUEBLA, AC (UDLAP)
16	UNIVERSIDAD AUTONOMA CHAPINGO (UACHapingo)	46	UNIVERSIDAD DE MONTERREY (UdMon)
17	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES	47	UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO (UAAgs)
18	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA (UABC)	48	UNIVERSIDAD DE SONORA (UdSon)
19	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA SUR (UABCS)	49	UNIVERSIDAD DEL EJERCITO Y FUERZA AEREA (UDEFA)
20	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CAMPECHE (UACamp)	50	UNIVERSIDAD INTERCONTINENTAL (UI)
21	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS (UACHi)	51	UNIVERSIDAD JUAREZ AUTONOMA DE TABASCO (UJAT)
22	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIHUAHUA (UACH)	52	UNIVERSIDAD JUAREZ DEL ESTADO DE DURANGO (UJED)
23	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CIUDAD JUAREZ (UACJ)	53	UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO (UMSNH)
24	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE COAHUILA (UACO)	54	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO (UNAM)
25	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA (UPG)	55	UNIVERSIDAD PANAMERICANA (UP)
26	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUERRERO (UAGuerrero)	56	UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL (UPN)
27	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE LA CIUDAD DE MEXICO (UACM)	57	UNIVERSIDAD POPULAR AUTONOMA DEL ESTADO DE PUEBLA (UPAEP)
28	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NAYARIT (UAN)	58	UNIVERSIDAD REGIONMONTANA, AC (UR)
29	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON (UANL)	59	UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE MEXICO (UNITEC)
30	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO (UAQ)	60	UNIVERSIDAD VERACRUZANA (UV)

TABLA A.2: Identificadores numéricos para universidades en redes modeladas con información sobre la influencia en redes sociales.

ID	UNIVERSIDAD	ID	UNIVERSIDAD
1	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO (UAEH)	27	CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS (CINVESTAV)
2	UNIVERSIDAD JESUITA DE GUADALAJARA (UJG)	28	UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL (UPN)
3	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATAN (UADY)	29	INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO (ITAM)
4	COLEGIO DE MÉXICO (COLMEX)	30	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS (UNACH)
5	UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA (UDG)	31	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE COAHUILA (UADEC)
6	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (UAM)	32	UNIVERSIDAD DE SONORA (UNISON)
7	U. LA SALLE (ULASALLE)	33	UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA (IBERO)
8	UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA (UDLAP)	34	UNIVERSIDAD AGRARIA ANTONIO NARRO (UAAAN)
9	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA (UACH)	35	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CAMPECHE (UACAM)
10	UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO (UNAD)	36	UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO (UGTO)
11	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES (UAA)	37	UNIVERSIDAD REGIONMONTANA (UERRE)
12	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO (UAGRO)	38	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO (UAEMEX)
13	UNIVERSIDAD ANAHUAC (ANAHUAC)	39	BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA (BUAP)
14	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN (UANL)	40	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO (UAGRO)
15	UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO (UQROO)	41	UNIVERSIDAD DE COLIMA (UCOL)
16	UNIVERSIDAD DE MONTERREY (UDEM)	42	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE MÉXICO (UNITEC)
17	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA SUR (UACBCS)	43	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE TLAXCALA (UATX)
18	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL CARMEN (UNACAR)	44	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA BENITO JUÁREZ DE OAXACA (UABJO)
19	UNIVERSIDAD VERACRUZANA (UV)	45	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ (UACJ)
20	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHAPINGO (CHAPINGO)	46	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM)
21	INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN)	47	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO (UAQ)
22	UNIVERSIDAD JUAREZ DEL ESTADO DE DURANGO (UJED)	48	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ (UASLP)
23	UNIVERSIDAD JUAREZ AUTÓNOMA DE TABASCO (UJAT)	49	INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SONORA (ITSON)
24	INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY (ITESM)	50	UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA DEL ESTADO DE PUEBLA (UPAEP)
25	COLEGIO DE POSGRADUADOS (COLPOS)	51	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MORELOS (UAEM)
26	UNIVERSIDAD DE MICHOACÁN (UMICH)	52	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA (UABC)

TABLA A.3: Identificadores numéricos para redes de uso de TIC.

ID	UNIVERSIDAD	ID	UNIVERSIDAD
1	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 1)	11	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (UAM 2)
2	INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO (ITAM 1)	12	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 4)
3	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO (UAEMEX 1)	13	INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY (ITESM 2)
4	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 2)	14	CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS (CINVESTAV 1)
5	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO (UAEMEX 2)	15	CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS (CINVESTAV 2)
6	INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN 1)	16	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN (UANL 1)
7	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (UAM 1)	17	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 5)
8	INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN 2)	18	INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN 3)
9	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 3)	19	INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO (ITAM 2)
10	INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY (ITESM 1)	20	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (UAM 3)

TABLA A.4: Identificadores numéricos de universidades para redes modeladas con información sobre la perspectiva de la sociedad hacia las universidades.

ID	UNIVERSIDAD	ID	UNIVERSIDAD
1	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (UAM 1)	12	UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA (UDG)
2	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 1)	13	INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO (ITAM 1)
3	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 2)	14	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO (UAEMEX 1)
4	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN (UANL)	15	INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN 1)
5	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MORELOS (UAEM)	16	INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO (ITAM 2)
6	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 3)	17	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO (UAEMEX 2)
7	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (UAM 2)	18	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM 4)
8	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (UAM 4)	19	INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY (ITESM 1)
9	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (UAM 3)	20	INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN 2)
10	CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS (CINVESTAV)	21	INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY (ITESM 2)
11	COLEGIO DE MÉXICO (COLMEX)	22	INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (IPN 3)

TABLA A.5: Identificadores de los países utilizados en las redes de análisis socio-cultural y económico para identificar difusores de COVID-19.

ID	PAÍS	ID	PAÍS	ID	PAÍS	ID	PAÍS
1	NORWAY	51	IRELAND	101	NAMIBIA	151	OMAN
2	UNITED KINGDOM	52	GERMANY	102	TIMOR-LESTE	152	SERBIA
3	LIECHTENSTEIN	53	AUSTRALIA	103	SAO TOME AND PRINCIPE	153	BOSNIA AND HERZEGOVINA
4	UNITED ARAB EMIRATES	54	ICELAND	104	CONGO	154	NORTH MACEDONIA
5	ANDORRA	55	SWEDEN	105	ESWATINI (KINGDOM OF)	155	CHINA
6	SAUDI ARABIA	56	NETHERLANDS	106	LAO PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC	156	PALESTINE, STATE OF
7	QATAR	57	DENMARK	107	GHANA	157	ARGENTINA
8	BRUNEI DARUSSALAM	58	FINLAND	108	ZAMBIA	158	PORTUGAL
9	BAHRAIN	59	CANADA	109	MYANMAR	159	TURKEY
10	BULGARIA	60	NEW ZEALAND	110	CAMBODIA	160	GRENADA
11	PALAU	61	BELGIUM	111	NEPAL	161	SAINT VINCENT AND THE GRENADINES
12	KUWAIT	62	JAPAN	112	ANGOLA	162	THAILAND
13	URUGUAY	63	AUSTRIA	113	CAMEROON	163	BRAZIL
14	BAHAMAS	64	LUXEMBOURG	114	PAKISTAN	164	COLOMBIA
15	MALAYSIA	65	SLOVENIA	115	COMOROS	165	GUYANA
16	SEYCHELLES	66	CZECHIA	116	RWANDA	166	EGYPT
17	TRINIDAD AND TOBAGO	67	FRANCE	117	NIGERIA	167	ALGERIA
18	MAURITIUS	68	MALTA	118	TANZANIA (UNITED REPUBLIC OF)	168	AZERBAIJAN
19	CUBA	69	ESTONIA	119	UGANDA	169	INDONESIA
20	SAINT KITTS AND NEVIS	70	GREECE	120	MAURITANIA	170	PERU
21	ANTIGUA AND BARBUDA	71	POLAND	121	MADAGASCAR	171	SAINT LUCIA
22	LEBANON	72	LITHUANIA	122	BENIN	172	BELIZE
23	BOTSWANA	73	SLOVAKIA	123	LESOTHO	173	KYRGYZSTAN
24	DOMINICA	74	LATVIA	124	SENEGAL	174	ECUADOR
25	FIJI	75	HUNGARY	125	TOGO	175	UKRAINE
26	TONGA	76	CROATIA	126	SUDAN	176	DOMINICAN REPUBLIC
27	UZBEKISTAN	77	RUSSIAN FEDERATION	127	HAITI	177	TUNISIA
28	LIBYA	78	MONTENEGRO	128	MALAWI	178	JAMAICA
29	SAMOA	79	ROMANIA	129	ETHIOPIA	179	VENEZUELA (BOLIVARIAN REPUBLIC OF)
30	MARSHALL ISLANDS	80	IRAN (ISLAMIC REPUBLIC OF)	130	GAMBIA	180	EL SALVADOR
31	MOROCCO	81	ALBANIA	131	GUINEA	181	NICARAGUA
32	CABO VERDE	82	SOUTH AFRICA	132	LIBERIA	182	SURINAME
33	HONDURAS	83	INDIA	133	GUINEA-BISSAU	183	GABON
34	KIRIBATI	84	CÔTE D'IVOIRE	134	CONGO (DEMOCRATIC REPUBLIC OF THE)	184	MONGOLIA
35	MICRONESIA (FEDERATED STATES OF)	85	YEMEN	135	MOZAMBIQUE	185	PHILIPPINES
36	EQUATORIAL GUINEA	86	HONG KONG, CHINA (SAR)	136	SIERRA LEONE	186	TAJIKISTAN
37	KENYA	87	ISRAEL	137	BURKINA FASO	187	BHUTAN
38	SOLOMON ISLANDS	88	BELARUS	138	MALI	188	BANGLADESH
39	SYRIAN ARAB REPUBLIC	89	KAZAKHSTAN	139	BURUNDI	189	PARAGUAY
40	PAPUA NEW GUINEA	90	BARBADOS	140	SOUTH SUDAN	190	VIET NAM
41	AFGHANISTAN	91	PANAMA	141	CHAD	191	ZIMBABWE
42	DJIBOUTI	92	COSTA RICA	142	CENTRAL AFRICAN REPUBLIC	192	JORDAN
43	ERITREA	93	GEORGIA	143	NIGER	193	MOLDOVA (REPUBLIC OF)
44	KOREA (DEMOCRATIC PEOPLE'S REP. OF)	94	SRI LANKA	144	SINGAPORE	194	VANUATU
45	MONACO	95	MEXICO	145	UNITED STATES	195	IRAQ
46	NAURU	96	ARMENIA	146	KOREA (REPUBLIC OF)		
47	SAN MARINO	97	MALDIVES	147	SPAIN		
48	SOMALIA	98	TURKMENISTAN	148	ITALY		
49	TUVALU	99	BOLIVIA (PLURINATIONAL STATE OF)	149	CYPRUS		
50	SWITZERLAND	100	GUATEMALA	150	CHILE		

TABLA A.6: Identificadores de las universidades pertenecientes al RankingQS (1).

ID	UNIVERSIDAD	ID	UNIVERSIDAD
1	AALBORG UNIVERSITY	51	FUDAN UNIVERSITY
2	AALTO UNIVERSITY	52	GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN
3	AARHUS UNIVERSITY	53	GEORGE WASHINGTON UNIVERSITY
4	AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY	54	GEORGETOWN UNIVERSITY
5	AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT (AUB)	55	GEORGIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY (GEORGIA TECH)
6	AMERICAN UNIVERSITY OF SHARJAH	56	GOLDSMITHS, UNIVERSITY OF LONDON
7	ARIZONA STATE UNIVERSITY	57	GRIFFITH UNIVERSITY
8	ASTON UNIVERSITY	58	GWANGJU INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY (GIST)
9	AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY (ANU)	59	HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
10	BANDUNG INSTITUTE OF TECHNOLOGY (ITB)	60	HARVARD UNIVERSITY
11	BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY	61	HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM
12	BEIJING NORMAL UNIVERSITY	62	HERIOT-WATT UNIVERSITY
13	BELARUS STATE UNIVERSITY	63	HIROSHIMA UNIVERSITY
14	BIRKBECK COLLEGE, UNIVERSITY OF LONDON	64	HOKKAIDO UNIVERSITY
15	BOSTON COLLEGE	65	HONG KONG BAPTIST UNIVERSITY (HKBU)
16	BOSTON UNIVERSITY	66	HUFS - HANKUK (KOREA) UNIVERSITY OF FOREIGN STUDIES
17	BROWN UNIVERSITY	67	HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
18	BRUNEL UNIVERSITY	68	IMPERIAL COLLEGE LONDON
19	CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY (CALTECH)	69	INDIAN INSTITUTE OF SCIENCE (IISC) BANGALORE
20	CARDIFF UNIVERSITY	70	INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY BOMBAY (IITB)
21	CARNEGIE MELLON UNIVERSITY	71	INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY DELHI (IITD)
22	CASE WESTERN RESERVE UNIVERSITY	72	INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY KANPUR (IITK)
23	CENTRALESUPÉLEC	73	INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY KHARAGPUR (IITKGP)
24	CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY	74	INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY MADRAS (IITM)
25	CHARLES UNIVERSITY	75	INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY ROORKEE (IITR)
26	CHULALONGKORN UNIVERSITY	76	INDIANA UNIVERSITY BLOOMINGTON
27	CHUNG-ANG UNIVERSITY	77	JAMES COOK UNIVERSITY (JCU)
28	CITY UNIVERSITY LONDON	78	JOHNS HOPKINS UNIVERSITY
29	CITY UNIVERSITY OF HONG KONG	79	KAIST - KOREA ADVANCED INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
30	COLUMBIA UNIVERSITY	80	KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN
31	CORNELL UNIVERSITY	81	KEIO UNIVERSITY
32	CURTIN UNIVERSITY	82	KHALIFA UNIVERSITY
33	DALHOUSIE UNIVERSITY	83	KING ABDUL AZIZ UNIVERSITY (KAU)
34	DARTMOUTH COLLEGE	84	KING FAHD UNIVERSITY OF PETROLEUM & MINERALS (KFUPM)
35	DEAKIN UNIVERSITY	85	KING SAUD UNIVERSITY (KSU)
36	DELFT UNIVERSITY OF TECHNOLOGY	86	KING'S COLLEGE LONDON (KCL)
37	DUKE UNIVERSITY	87	KIT, KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
38	DURHAM UNIVERSITY	88	KOBE UNIVERSITY
39	EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN	89	KOREA UNIVERSITY
40	ÉCOLE DES PONTS PARISTECH	90	KTH, ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
41	ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN	91	KYOTO UNIVERSITY
42	ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON	92	KYUNG HEE UNIVERSITY
43	ÉCOLE POLYTECHNIQUE	93	KYUSHU UNIVERSITY
44	ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE (EPFL)	94	LANCASTER UNIVERSITY
45	EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY	95	LEIDEN UNIVERSITY
46	EMORY UNIVERSITY	96	LINCOLN UNIVERSITY
47	ERASMUS UNIVERSITY ROTTERDAM	97	LINKÖPING UNIVERSITY
48	ETH ZÜRICH (SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY)	98	LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
49	EWHA WOMANS UNIVERSITY	99	LONDON SCHOOL OF ECONOMICS AND POLITICAL SCIENCE (LSE)
50	FREIE UNIVERSITÄT BERLIN	100	LOUGHBOROUGH UNIVERSITY

TABLA A.7: Identificadores de las universidades pertenecientes al RankingQS (2).

ID	UNIVERSIDAD	ID	UNIVERSIDAD
101	LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN	151	QUEENSLAND UNIVERSITY OF TECHNOLOGY (QUT)
102	LUND UNIVERSITY	152	RADBOUD UNIVERSITY NIJMEGEN
103	MAASTRICHT UNIVERSITY	153	RENSSELAER POLYTECHNIC INSTITUTE
104	MACQUARIE UNIVERSITY	154	RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
105	MAHIDOL UNIVERSITY	155	RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
106	MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY (MIT)	156	RICE UNIVERSITY
107	MASSEY UNIVERSITY	157	RMIT UNIVERSITY
108	MCGILL UNIVERSITY	158	ROYAL HOLLOWAY UNIVERSITY OF LONDON
109	MCMASTER UNIVERSITY	159	RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG
110	MICHIGAN STATE UNIVERSITY	160	RÜTGERS - THE STATE UNIVERSITY OF NEW JERSEY, NEW BRUNSWICK
111	MONASH UNIVERSITY	161	SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY
112	MOSCOW INSTITUTE OF PHYSICS AND TECHNOLOGY STATE UNIVERSITY	162	SAPIENZA - UNIVERSITÀ DI ROMA
113	MOSCOW STATE INSTITUTE OF INTERNATIONAL RELATIONS – MGIMO UNIVERSITY	163	SCIENCES PO PARIS
114	NAGOYA UNIVERSITY	164	SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
115	NANJING UNIVERSITY	165	SCUOLA SUPERIORE SANT'ANNA PISA
116	NANKAI UNIVERSITY	166	SEOUL NATIONAL UNIVERSITY (SNU)
117	NANYANG TECHNOLOGICAL UNIVERSITY (NTU)	167	SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY
118	NATIONAL CHENG KUNG UNIVERSITY	168	SIMON FRASER UNIVERSITY
119	NATIONAL CHIAO TUNG UNIVERSITY	169	SOAS - SCHOOL OF ORIENTAL AND AFRICAN STUDIES, UNIVERSITY OF LONDON
120	NATIONAL RESEARCH NUCLEAR UNIVERSITY "MEPHI"(MOSCOW ENGINEERING PHYSICS INSTITUTE)	170	STANFORD UNIVERSITY
121	NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY - HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS (HSE)	171	STOCKHOLM UNIVERSITY
122	NATIONAL TAIWAN NORMAL UNIVERSITY	172	STONY BROOK UNIVERSITY
123	NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY (NTU)	173	SUN YAT-SEN UNIVERSITY
124	NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY	174	SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY
125	NATIONAL TSING HUA UNIVERSITY	175	TAIPEI MEDICAL UNIVERSITY
126	NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND, GALWAY (NUIG)	176	TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
127	NATIONAL UNIVERSITY OF SINGAPORE (NUS)	177	TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK
128	NATIONAL YANG MING UNIVERSITY	178	TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
129	NEW YORK UNIVERSITY (NYU)	179	TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
130	NEWCASTLE UNIVERSITY	180	TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
131	NORTH CAROLINA STATE UNIVERSITY	181	TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
132	NORTHEASTERN UNIVERSITY	182	TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
133	NORTHWESTERN UNIVERSITY	183	TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
134	NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY	184	TECNOLÓGICO DE MONTERREY (ITESM)
135	NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY	185	TEL AVIV UNIVERSITY
136	OHIO STATE UNIVERSITY	186	TEXAS A&M UNIVERSITY
137	OSAKA UNIVERSITY	187	THE CHINESE UNIVERSITY OF HONG KONG (CUHK)
138	OXFORD BROOKES UNIVERSITY	188	THE HONG KONG POLYTECHNIC UNIVERSITY
139	PEKING UNIVERSITY	189	THE HONG KONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY (HKUST)
140	PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY	190	THE UNIVERSITY OF ADELAIDE
141	POHANG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY (POSTECH)	191	THE UNIVERSITY OF AUCKLAND
142	POLITECNICO DI MILANO	192	THE UNIVERSITY OF MANCHESTER
143	POLITECNICO DI TORINO	193	THE UNIVERSITY OF MELBOURNE
144	PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA SANTA MARÍA DE LOS BUENOS AIRES (UCA)	194	THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES (UNSW)
145	PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE	195	THE UNIVERSITY OF NOTTINGHAM
146	PURDUE UNIVERSITY	196	THE UNIVERSITY OF QUEENSLAND (UQ)
147	QATAR UNIVERSITY	197	THE UNIVERSITY OF SHEFFIELD
148	QUEEN MARY UNIVERSITY OF LONDON (QMUL)	198	THE UNIVERSITY OF SYDNEY
149	QUEEN'S UNIVERSITY	199	THE UNIVERSITY OF TOKYO
150	QUEEN'S UNIVERSITY OF BELFAST	200	THE UNIVERSITY OF WARWICK

TABLA A.8: Identificadores de las universidades pertenecientes al RankingQS (3).

ID	UNIVERSIDAD	ID	UNIVERSIDAD
201	THE UNIVERSITY OF WESTERN AUSTRALIA (UWA)	251	UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES (UGA)
202	TILBURG UNIVERSITY	252	UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES (ULB)
203	TOHOKU UNIVERSITY	253	UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON-SORBONNE
204	TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY	254	UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA (UKM)
205	TOKYO MEDICAL AND DENTAL UNIVERSITY	255	UNIVERSITI MALAYA (UM)
206	TOMSK POLYTECHNIC UNIVERSITY	256	UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA (UPM)
207	TOMSK STATE UNIVERSITY	257	UNIVERSITI SAINS MALAYSIA (USM)
208	TONGJI UNIVERSITY	258	UNIVERSITI TEKNOLOGI MALAYSIA (UTM)
209	TRINITY COLLEGE DUBLIN (TCD)	259	UNIVERSITY AT BUFFALO SUNY
210	TSINGHUA UNIVERSITY	260	UNIVERSITY COLLEGE CORK (UCC)
211	TUFTS UNIVERSITY	261	UNIVERSITY COLLEGE DUBLIN (UCD)
212	UCL (UNIVERSITY COLLEGE LONDON)	262	UNIVERSITY OF ABERDEEN
213	UMEÅ UNIVERSITY	263	UNIVERSITY OF ALBERTA
214	UNITED ARAB EMIRATES UNIVERSITY	264	UNIVERSITY OF AMSTERDAM
215	UNIVERSIDAD AUSTRAL	265	UNIVERSITY OF ANTWERP
216	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID	266	UNIVERSITY OF ARIZONA
217	UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID	267	UNIVERSITY OF BASEL
218	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID (UCM)	268	UNIVERSITY OF BATH
219	UNIVERSIDAD DE BELGRANO	269	UNIVERSITY OF BERGEN
220	UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES	270	UNIVERSITY OF BERN
221	UNIVERSIDAD DE CHILE	271	UNIVERSITY OF BIRMINGHAM
222	UNIVERSIDAD DE LOS ANDES COLOMBIA	272	UNIVERSITY OF BRISTOL
223	UNIVERSIDAD DE NAVARRA	273	UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
224	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM)	274	UNIVERSITY OF CALGARY
225	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA	275	UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY (UCB)
226	UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA	276	UNIVERSITY OF CALIFORNIA, DAVIS (UCD)
227	UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (USP)	277	UNIVERSITY OF CALIFORNIA, IRVINE (UCI)
228	UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS (UNICAMP)	278	UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ANGELES (UCLA)
229	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO	279	UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SAN DIEGO (UCSD)
230	UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO	280	UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA BARBARA (UCSB)
231	UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA (UNIPD)	281	UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA CRUZ (UCSC)
232	UNIVERSITÀ DI BOLOGNA (UNIBO)	282	UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
233	UNIVERSITAT AUTÓNOMA DE BARCELONA	283	UNIVERSITY OF CANTERBURY
234	UNIVERSITAT DE BARCELONA (UB)	284	UNIVERSITY OF CAPE TOWN
235	UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG	285	UNIVERSITY OF CHICAGO
236	UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN	286	UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER
237	UNIVERSITÄT FREIBURG	287	UNIVERSITY OF CONNECTICUT
238	UNIVERSITÄT HAMBURG	288	UNIVERSITY OF COPENHAGEN
239	UNIVERSITÄT INNSBRUCK	289	UNIVERSITY OF DUNDEE
240	UNIVERSITÄT JENA	290	UNIVERSITY OF EAST ANGLIA (UEA)
241	UNIVERSITÄT KÖLN	291	UNIVERSITY OF EDINBURGH
242	UNIVERSITÄT MANNHEIM	292	UNIVERSITY OF ESSEX
243	UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA	293	UNIVERSITY OF EXETER
244	UNIVERSITAT POMPEU FABRA	294	UNIVERSITY OF FLORIDA
245	UNIVERSITÄT STUTTGART	295	UNIVERSITY OF GENEVA
246	UNIVERSITÄT ULM	296	UNIVERSITY OF GHENT
247	UNIVERSITÄT WIEN	297	UNIVERSITY OF GLASGOW
248	UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN (UCL)	298	UNIVERSITY OF GOTHENBURG
249	UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL	299	UNIVERSITY OF GRONINGEN
250	UNIVERSITÉ DE STRASBOURG	300	UNIVERSITY OF HAWAII AT MANOA

TABLA A.9: Identificadores de las universidades pertenecientes al RankingQS (4).

ID	UNIVERSIDAD	ID	UNIVERSIDAD
301	UNIVERSITY OF HELSINKI	351	UNIVERSITY OF TWENTE
302	UNIVERSITY OF HONG KONG (HKU)	352	UNIVERSITY OF UTAH
303	UNIVERSITY OF ILLINOIS AT URBANA-CHAMPAIGN	353	UNIVERSITY OF VICTORIA
304	UNIVERSITY OF ILLINOIS, CHICAGO (UIC)	354	UNIVERSITY OF VIRGINIA
305	UNIVERSITY OF INDONESIA	355	UNIVERSITY OF WAIKATO
306	UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ	356	UNIVERSITY OF WASHINGTON
307	UNIVERSITY OF KANSAS	357	UNIVERSITY OF WATERLOO
308	UNIVERSITY OF KENT	358	UNIVERSITY OF WISCONSIN-MADISON
309	UNIVERSITY OF LAUSANNE	359	UNIVERSITY OF WOLLONGONG
310	UNIVERSITY OF LEEDS	360	UNIVERSITY OF YORK
311	UNIVERSITY OF LEICESTER	361	UNIVERSITY OF ZURICH
312	UNIVERSITY OF LIEGE	362	UPPSALA UNIVERSITY
313	UNIVERSITY OF LISBON	363	UTRECHT UNIVERSITY
314	UNIVERSITY OF LIVERPOOL	364	VANDERBILT UNIVERSITY
315	UNIVERSITY OF MARYLAND, COLLEGE PARK	365	VICTORIA UNIVERSITY OF WELLINGTON
316	UNIVERSITY OF MASSACHUSETTS, AMHERST	366	VIRGINIA POLYTECHNIC INSTITUTE (VIRGINIA TECH)
317	UNIVERSITY OF MIAMI	367	VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
318	UNIVERSITY OF MICHIGAN	368	VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL (VUB)
319	UNIVERSITY OF MINNESOTA	369	WAGENINGEN UNIVERSITY
320	UNIVERSITY OF NEWCASTLE	370	WASEDA UNIVERSITY
321	UNIVERSITY OF NORTH CAROLINA, CHAPEL HILL	371	WASHINGTON UNIVERSITY IN ST. LOUIS
322	UNIVERSITY OF NOTRE DAME	372	WESTERN UNIVERSITY
323	UNIVERSITY OF OSLO	373	WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER
324	UNIVERSITY OF OTAGO	374	XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
325	UNIVERSITY OF OTTAWA	375	YALE UNIVERSITY
326	UNIVERSITY OF OXFORD	376	YONSEI UNIVERSITY
327	UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA	377	ZHEJIANG UNIVERSITY
328	UNIVERSITY OF PITTSBURGH		
329	UNIVERSITY OF PORTO		
330	UNIVERSITY OF READING		
331	UNIVERSITY OF ROCHESTER		
332	UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA		
333	UNIVERSITY OF SOUTH AUSTRALIA (UNISA)		
334	UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON		
335	UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA		
336	UNIVERSITY OF SOUTHERN DENMARK		
337	UNIVERSITY OF ST ANDREWS		
338	UNIVERSITY OF ST GALLEN (HSG)		
339	UNIVERSITY OF STRATHCLYDE		
340	UNIVERSITY OF SURREY		
341	UNIVERSITY OF SUSSEX		
342	UNIVERSITY OF TARTU		
343	UNIVERSITY OF TASMANIA		
344	UNIVERSITY OF TECHNOLOGY SYDNEY (UTS)		
345	UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN		
346	UNIVERSITY OF THE PHILIPPINES		
347	UNIVERSITY OF TORONTO		
348	UNIVERSITY OF TROMSO		
349	UNIVERSITY OF TSUKUBA		
350	UNIVERSITY OF TURKU		

## Apéndice B

# Disponibilidad de datos

### B.1.-Repositorio de la información

Los datos utilizados para respaldar los resultados de este trabajo están disponibles en los siguientes vínculos:

- QSRanking 2018:  
<https://drive.google.com/file/d/1iM5FAQshckpxMc5FfL1xZ-wYTu9u-1N-/view?usp=sharing>.
- QSRanking 2019:  
<https://drive.google.com/file/d/1bbf4f2tQM-I9LiC5cbq7ju9ode5B2pYX/view?usp=sharing>.
- QSRanking 2020:  
<https://drive.google.com/file/d/1Z48xdwpsFyqPM20TdLJbHQansjx0ARDO/view?usp=sharing>.
- ExECUM 2013-2018:  
<https://drive.google.com/file/d/1D6mXNCDs32y2VTumis6UIWh1RFJJpm4C/view?usp=sharing>.
- Índice de Desarrollo Humano:  
<https://drive.google.com/file/d/136y0449h4sfM86Ye-qeOrL8xkx9ixFAE/view?usp=sharing>
- Muertes e infecciones:  
<https://drive.google.com/file/d/1PqwJB-F3Y9WWFhVRwBUDydOCkqvT7ECn/view?usp=sharing>
- Viajes aéreos:  
<https://drive.google.com/file/d/18PA8JMnzxueXLU1MzjkEya3htBe4hrBw/view?usp=sharing>
- Producto Interno Bruto:  
<https://drive.google.com/file/d/1HhAEpN-WzEBJXAzJeNbF5iSNm8S2xi1Q/view?usp=sharing>



# Bibliografía

- [1] Réka Albert y Albert-László Barabási. «Statistical mechanics of complex networks». En: *Reviews of modern physics* 74.1 (2002), pág. 47.
- [2] Réka Albert, Hawoong Jeong y Albert-László Barabási. «Error and attack tolerance of complex networks». En: *nature* 406.6794 (2000), pág. 378.
- [3] Réka Albert, Hawoong Jeong y Albert-László Barabási. «Internet: Diameter of the world-wide web». En: *nature* 401.6749 (1999), pág. 130.
- [4] Maximino Aldana. «Redes complejas». En: *Recuperado a partir de* <http://www.fis.unam.mx/max/English/notasredes.pdf> (2006).
- [5] Alberto Aleta, Sandro Meloni y Yamir Moreno. «A multilayer perspective for the analysis of urban transportation systems». En: *Scientific reports* 7 (2017), pág. 44359.
- [6] Alberto Aleta y Yamir Moreno. «Multilayer Networks in a Nutshell». En: *Annual Review of Condensed Matter Physics* 10.1 (2019), null.
- [7] Egon Balas y Cid C de Souza. «The vertex separator problem: a polyhedral investigation». En: *Mathematical Programming* 103.3 (2005), págs. 583-608.
- [8] World Bank. *World Bank Group and COVID-19 (coronavirus)*. <https://www.worldbank.org/en/who-we-are/news/coronavirus-covid19>. 2020.
- [9] Albert-László Barabási y Réka Albert. «Emergence of scaling in random networks». En: *science* 286.5439 (1999), págs. 509-512.
- [10] Albert-László Barabási y Eric Bonabeau. «Scale-free networks». En: *Scientific american* 288.5 (2003), págs. 60-69.
- [11] Alain Barrat, Marc Barthelemy y Alessandro Vespignani. *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge university press, 2008.
- [12] Marc Barthélémy y Luis A Nunes Amaral. «Small-world networks: Evidence for a crossover picture». En: *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton University Press, 2011, págs. 304-307.
- [13] Federico Battiston, Vincenzo Nicosia y Vito Latora. «Structural measures for multiplex networks». En: *Physical Review E* 89.3 (2014), pág. 032804.
- [14] Gareth J Baxter y col. «Weak percolation on multiplex networks». En: *Physical Review E* 89.4 (2014), pág. 042801.
- [15] John E Beasley y Paul C Chu. «A genetic algorithm for the set covering problem». En: *European journal of operational research* 94.2 (1996), págs. 392-404.
- [16] Tian Bian y Yong Deng. «Identifying influential nodes in complex networks: A node information dimension approach». En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28.4 (2018), pág. 043109.
- [17] Ginestra Bianconi. «Multilayer networks: Dangerous liaisons?» En: *Nature Physics* 10.10 (2014), pág. 712.

- [18] Ginestra Bianconi. «Statistical mechanics of multiplex networks: Entropy and overlap». En: *Physical Review E* 87.6 (2013), pág. 062806.
- [19] Ginestra Bianconi y Filippo Radicchi. «Percolation in real multiplex networks». En: *Physical Review E* 94.6 (2016), pág. 060301.
- [20] Norman Biggs, E Keith Lloyd y Robin J Wilson. *Graph Theory, 1736-1936*. Oxford University Press, 1986.
- [21] Stefano Boccaletti y col. «Complex networks: Structure and dynamics». En: *Physics reports* 424.4-5 (2006), págs. 175-308.
- [22] Stefano Boccaletti y col. «The structure and dynamics of multilayer networks». En: *Physics Reports* 544.1 (2014), págs. 1-122.
- [23] Béla Bollobás. «Modern graph theory (Graduate texts in mathematics)». En: (1998).
- [24] Charles D Brummitt, Raissa M D'Souza y Elizabeth A Leicht. «Suppressing cascades of load in interdependent networks». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 109.12 (2012), E680-E689.
- [25] Wei Chen, Yajun Wang y Siyu Yang. «Efficient influence maximization in social networks». En: *Proceedings of the 15th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. ACM. 2009, págs. 199-208.
- [26] Reuven Cohen y Shlomo Havlin. *Complex networks: structure, robustness and function*. Cambridge university press, 2010.
- [27] James Coleman, Elihu Katz y Herbert Menzel. «The diffusion of an innovation among physicians». En: *Sociometry* 20.4 (1957), págs. 253-270.
- [28] Vittoria Colizza, Romualdo Pastor-Satorras y Alessandro Vespignani. «Reaction–diffusion processes and metapopulation models in heterogeneous networks». En: *Nature Physics* 3.4 (2007), págs. 276-282.
- [29] Mário Cordeiro y col. «Evolving Networks and Social Network Analysis Methods and Techniques». En: *Social Media and Journalism-Trends, Connections, Implications*. IntechOpen, 2018.
- [30] Emanuele Cozzo y col. «Multilayer networks: metrics and spectral properties». En: *Interconnected Networks*. Springer, 2016, págs. 17-35.
- [31] Emanuele Cozzo y col. *Multiplex networks: basic formalism and structural properties*. Springer, 2018.
- [32] Emanuele Cozzo y col. «Structure of triadic relations in multiplex networks». En: *New Journal of Physics* 17.7 (2015), pág. 073029.
- [33] Gregorio D'Agostino y Antonio Scala. *Networks of networks: the last frontier of complexity*. Vol. 340. Springer, 2014.
- [34] Caterina De Bacco, Daniel B Larremore y Cristopher Moore. «A physical model for efficient ranking in networks». En: *Science advances* 4.7 (2018), eaar8260.
- [35] Manlio De Domenico, Mason A Porter y Alex Arenas. «MuxViz: a tool for multilayer analysis and visualization of networks». En: *Journal of Complex Networks* 3.2 (2015), págs. 159-176.
- [36] Manlio De Domenico y col. «Structural reducibility of multilayer networks». En: *Nature communications* 6 (2015), pág. 6864.
- [37] Pedro Domingos y Matt Richardson. «Mining the network value of customers». En: *Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. ACM. 2001, págs. 57-66.

- [38] Sergei N Dorogovtsev y José FF Mendes. *Evolution of networks: From biological nets to the Internet and WWW*. OUP Oxford, 2013.
- [39] Johann Dréo y col. *Metaheuristics for hard optimization: methods and case studies*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [40] David Easley, Jon Kleinberg y col. *Networks, crowds, and markets*. Vol. 8. Cambridge university press Cambridge, 2010.
- [41] P Erdos y A Rényi. «On random graphs I». En: *Publ. Math. Debrecen* 6 (1959), págs. 290-297.
- [42] Paul Erdos y Alfréd Rényi. «On the evolution of random graphs». En: *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci* 5.1 (1960), págs. 17-60.
- [43] Leonhard Euler. *Mechanica Sive Motus Scientia Analytice Exposita: Instar Supplementi Ad Commentar. Acad. Scient. Imper*. Vol. 2. Ex typographia academiae scientiarum, 1736.
- [44] Barbara Fadem. *High-yield behavioral science*. Lippincott Williams & Wilkins, 2012.
- [45] Aftab Farooq y col. «Detection of influential nodes using social networks analysis based on network metrics». En: *Computing, Mathematics and Engineering Technologies (iCoMET), 2018 International Conference on*. IEEE. 2018, págs. 1-6.
- [46] Liguó Fei, Qi Zhang y Yong Deng. «Identifying influential nodes in complex networks based on the inverse-square law». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 512 (2018), págs. 1044-1059.
- [47] Sue C Freeman y Linton C Freeman. *The networkers network: A study of the impact of a new communications medium on sociometric structure*. School of Social Sciences University of Calif., 1979.
- [48] International Monetary Fund. *International Monetary Fund Data*. <https://www.imf.org/en/Data>. 2020.
- [49] Jian Gao y col. «Group-based ranking method for online rating systems with spamming attacks». En: *EPL (europhysics letters)* 110.2 (2015), pág. 28003.
- [50] Jianxi Gao, Baruch Barzel y Albert-László Barabási. «Universal resilience patterns in complex networks». En: *Nature* 530.7590 (2016), pág. 307.
- [51] Michael R Garey, David S Johnson y Ravi Sethi. «The complexity of flowshop and jobshop scheduling». En: *Mathematics of operations research* 1.2 (1976), págs. 117-129.
- [52] JB Gibson y col. «Dynamics of radiation damage». En: *Physical Review* 120.4 (1960), pág. 1229.
- [53] Pablo M Gleiser y Leon Danon. «Community structure in jazz». En: *Advances in complex systems* 6.04 (2003), págs. 565-573.
- [54] Christine Gockel y Lioba Werth. «Measuring and modeling shared leadership». En: *Journal of Personnel Psychology* (2011).
- [55] Sergio Gomez y col. «Diffusion dynamics on multiplex networks». En: *Physical review letters* 110.2 (2013), pág. 028701.
- [56] Ulrike Gretzel. «Social network analysis: Introduction and resources». En: *Retrieved May 12* (2001), pág. 2009.
- [57] John Michael Hammersley. «Percolation processes: Lower bounds for the critical probability». En: *The Annals of Mathematical Statistics* 28.3 (1957), págs. 790-795.
- [58] William Hasenplaugh y col. «Ordering heuristics for parallel graph coloring». En: *Proceedings of the 26th ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures*. ACM. 2014, págs. 166-177.

- [59] Jia-Lin He, Yan Fu y Duan-Bing Chen. «A novel top-k strategy for influence maximization in complex networks with community structure». En: *PloS one* 10.12 (2015), e0145283.
- [60] Michael T Heaney. «Multiplex networks and interest group influence reputation: An exponential random graph model». En: *Social Networks* 36 (2014), págs. 66-81.
- [61] JL Hodges Jr, Philip H Ramsey y Sergio Wechsler. «Improved significance probabilities of the Wilcoxon test». En: *Journal of Educational Statistics* 15.3 (1990), págs. 249-265.
- [62] Chen Hong y col. «Efficient calculation of the robustness measure R for complex networks». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 478 (2017), págs. 63-68.
- [63] Roger A Horn, Roger A Horn y Charles R Johnson. *Topics in matrix analysis*. Cambridge university press, 1994.
- [64] Transparency International. *Transparency International (countries)*. <https://www.transparency.org/en/countries/>. 2020.
- [65] Marcus Kaiser y Claus C Hilgetag. «Spatial growth of real-world networks». En: *Physical Review E* 69.3 (2004), pág. 036103.
- [66] Frigyes Karinthy y col. «Chain-links». En: *The structure and dynamics of networks*. Princeton University Press, 2011, págs. 21-26.
- [67] Scott Kirkpatrick, C Daniel Gelatt y Mario P Vecchi. «Optimization by simulated annealing». En: *science* 220.4598 (1983), págs. 671-680.
- [68] Scott Kirkpatrick, C Daniel Gelatt y Mario P Vecchi. «Optimization by simulated annealing». En: *science* 220.4598 (1983), págs. 671-680.
- [69] Maksim Kitsak y col. «Identification of influential spreaders in complex networks». En: *Nature physics* 6.11 (2010), pág. 888.
- [70] Kaj-Kolja Kleineberg y col. «Geometric correlations mitigate the extreme vulnerability of multiplex networks against targeted attacks». En: *Physical review letters* 118.21 (2017), pág. 218301.
- [71] David Krackhardt. «Cognitive social structures». En: *Social networks* 9.2 (1987), págs. 109-134.
- [72] Vito Latora y Massimo Marchiori. «Vulnerability and protection of infrastructure networks». En: *Physical Review E* 71.1 (2005), pág. 015103.
- [73] Emmanuel Lazega y col. *The collegial phenomenon: The social mechanisms of cooperation among peers in a corporate law partnership*. Oxford University Press on Demand, 2001.
- [74] Kyu-Min Lee, Byungjoon Min y Kwang-Il Goh. «Towards real-world complexity: an introduction to multiplex networks». En: *The European Physical Journal B* 88.2 (2015), pág. 48.
- [75] Hao Liao y col. «Network-driven reputation in online scientific communities». En: *PloS one* 9.12 (2014), e112022.
- [76] Hao Liao y col. «Ranking reputation and quality in online rating systems». En: *PloS one* 9.5 (2014), e97146.
- [77] Run-Ran Liu y col. «The “weak” interdependence of infrastructure systems produces mixed percolation transitions in multilayer networks». En: *Scientific reports* 8.1 (2018), pág. 2111.
- [78] Linyuan Lü y col. «Toward link predictability of complex networks». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112.8 (2015), págs. 2325-2330.
- [79] Zhipeng Lü y Jin-Kao Hao. «A memetic algorithm for graph coloring». En: *European Journal of Operational Research* 203.1 (2010), págs. 241-250.

- [80] David Lusseau y col. «The bottlenose dolphin community of Doubtful Sound features a large proportion of long-lasting associations». En: *Behavioral Ecology and Sociobiology* 54.4 (2003), págs. 396-405.
- [81] Prasanta Chandra Mahalanobis. «On the generalized distance in statistics». En: National Institute of Science of India. 1936.
- [82] Jose L Marzo y col. «On selecting the relevant metrics of network robustness». En: *2018 10th International Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM)*. IEEE. 2018, págs. 1-7.
- [83] Nicholas Metropolis y col. «Equation of state calculations by fast computing machines». En: *The journal of chemical physics* 21.6 (1953), págs. 1087-1092.
- [84] Stanley Milgram. «The small world problem». En: *Psychology today* 2.1 (1967), págs. 60-67.
- [85] Hongming Mo y Yong Deng. «Identifying node importance based on evidence theory in complex networks». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* (2019), pág. 121538.
- [86] Edwin Montes-Orozco y col. «Identification of COVID-19 Spreaders Using Multiplex Networks Approach». En: *IEEE Access* 8 (2020), págs. 122874-122883.
- [87] Edwin Montes-Orozco y col. «Inverse Percolation to Quantify Robustness in Multiplex Networks». En: *Complexity* 2020 (2020).
- [88] Edwin Montes-Orozco y col. «Methodology to quantify robustness in networks: case study—Higher Education System in Mexico». En: *Computing* (2021), págs. 1-25.
- [89] Edwin Montes-Orozco y col. «Mexican University Ranking Based on Maximal Clique». En: *Educational Networking*. Springer, 2020, págs. 327-395.
- [90] Jacob Levy Moreno. «Who shall survive? Foundations of sociometry, group psychotherapy and socio-drama». En: (1953).
- [91] Jacob Levy Moreno, Helen Hall Jennings y col. «Who shall survive?» En: (1934).
- [92] Flaviano Morone y Hernán A Makse. «Influence maximization in complex networks through optimal percolation». En: *Nature* 524.7563 (2015), pág. 65.
- [93] Peter J Mucha y col. «Community structure in time-dependent, multiscale, and multiplex networks». En: *science* 328.5980 (2010), págs. 876-878.
- [94] Rudolf Müller y Dorothea Wagner. « $\alpha$ -vertex separator is NP-hard even for 3-regular graphs». En: *Computing* 46.4 (1991), págs. 343-353.
- [95] Anna Nagurney y Qiang Qiang. «Fragile networks: identifying vulnerabilities and synergies in an uncertain age». En: *International Transactions in Operational Research* 19.1-2 (2012), págs. 123-160.
- [96] M Newman, AL Barabási y D Watts. *The structure and dynamics of networks* Princeton University Press. 2006.
- [97] Mark Newman. *Networks*. Oxford university press, 2018.
- [98] Mark EJ Newman. «Modularity and community structure in networks». En: *Proceedings of the national academy of sciences* 103.23 (2006), págs. 8577-8582.
- [99] Mark EJ Newman. «The structure and function of complex networks». En: *SIAM review* 45.2 (2003), págs. 167-256.
- [100] Mark EJ Newman. «The structure of scientific collaboration networks». En: *Proceedings of the national academy of sciences* 98.2 (2001), págs. 404-409.

- [101] Mark EJ Newman y Duncan J Watts. «Renormalization group analysis of the small-world network model». En: *Physics Letters A* 263.4-6 (1999), págs. 341-346.
- [102] Vincenzo Nicosia y Vito Latora. «Measuring and modeling correlations in multiplex networks». En: *Physical Review E* 92.3 (2015), pág. 032805.
- [103] Gurobi Optimization. *Gurobi optimizer version 7.0. 2*. 2017.
- [104] Min Ouyang y col. «A methodological approach to analyze vulnerability of interdependent infrastructures». En: *Simulation Modelling Practice and Theory* 17.5 (2009), págs. 817-828.
- [105] Filippo Radicchi y Ginestra Bianconi. «Redundant interdependencies boost the robustness of multiplex networks». En: *Physical Review X* 7.1 (2017), pág. 011013.
- [106] Alexandre Reiffers-Masson y Vincent Labatut. «Opinion-based centrality in multiplex networks: A convex optimization approach». En: *arXiv preprint arXiv:1703.03741* (2017).
- [107] Jiadong Ren y col. «Identifying influential nodes in weighted network based on evidence theory and local structure». En: *Int. J. Innov. Comput. Inf. Control* 11.5 (2015), págs. 1765-1777.
- [108] Fanz Rendl y Renata Sotirov. «The min-cut and vertex separator problem». En: *Computational Optimization and Applications* 69.1 (2018), págs. 159-187.
- [109] Ryan A Rossi y Nesreen K Ahmed. «Coloring large complex networks». En: *Social Network Analysis and Mining* 4.1 (2014), pág. 228.
- [110] Abby E Rudolph y col. «Multiplex Relationships and HIV: Implications for Network-Based Interventions». En: *AIDS and Behavior* 21.4 (2017), págs. 1219-1227.
- [111] Hiroki Sayama. *Introduction to the modeling and analysis of complex systems*. Open SUNY Textbooks, 2015.
- [112] Christian M Schneider y col. «Mitigation of malicious attacks on networks». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108.10 (2011), págs. 3838-3841.
- [113] Christian M Schneider y col. «Towards designing robust coupled networks». En: *Scientific reports* 3 (2013), pág. 1969.
- [114] Shuai Shao y col. «Percolation of localized attack on complex networks». En: *New Journal of Physics* 17.2 (2015), pág. 023049.
- [115] Louis M Shekhtman, Michael M Danziger y Shlomo Havlin. «Recent advances on failure and recovery in networks of networks». En: *Chaos, Solitons & Fractals* 90 (2016), págs. 28-36.
- [116] K Alan Shore. «Complex networks: principles, methods and applications». En: *Contemporary Physics* 59 (2018), págs. 223-224.
- [117] Sandra E Smith-Aguilar y col. «Using multiplex networks to capture the multidimensional nature of social structure». En: *Primates* (2018), págs. 1-19.
- [118] Ithiel de Sola Pool y Manfred Kochen. «Contacts and influence». En: *Social networks* 1.1 (1978), págs. 5-51.
- [119] Ray Solomonoff y col. «Connectivity of random nets». En: *The structure and dynamics of networks*. Princeton University Press, 2011, págs. 27-37.
- [120] Chris Stark y col. «BioGRID: a general repository for interaction datasets». En: *Nucleic acids research* 34.suppl\_1 (2006), págs. D535-D539.
- [121] Dietrich Stauffer y Amnon Aharony. *Introduction to percolation theory: revised second edition*. CRC press, 2014.

- [122] M. Stella e Y. N. Kenett. «Viability in multiplex lexical networks and machine learning characterizes human creativity». En: *Big Data and Cognitive Computing*, 3 (2019), pág. 124382.
- [123] Rainer Storn y Kenneth Price. «Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces». En: *Journal of global optimization* 11.4 (1997), págs. 341-359.
- [124] European Union. *EU global response to COVID-19*. [https://ec.europa.eu/international-partnerships/topics/eu-global-response-covid-19\\_en](https://ec.europa.eu/international-partnerships/topics/eu-global-response-covid-19_en). 2020.
- [125] Q. I. Unit. «QS Intelligence Unit-International Indicators». En: *International Indicators*. Unit, Q. I., 2017, págs. 327-395.
- [126] QS Intelligence Unit. «QS University Rankings. International Indicators.» En: (2020).
- [127] UNAM ExECUM-Estudio Comparativo de Universidades. «Dirección General de Evaluación Institucional». En: <http://www.execum.unam.mx> (2019).
- [128] Dana Vaknin, Michael M Danziger y Shlomo Havlin. «Spreading of localized attacks in spatial multiplex networks». En: *New Journal of Physics* 19.7 (2017), pág. 073037.
- [129] Sebastian Wandelt y col. «QRE: quick robustness estimation for large complex networks». En: *Future Generation Computer Systems* 83 (2018), págs. 413-424.
- [130] Yunchuan Wang, Shasha Wang y Yong Deng. «A modified efficiency centrality to identify influential nodes in weighted networks». En: *Pramana* 92.4 (2019), pág. 68.
- [131] Duncan J Watts y Steven H Strogatz. «Collective dynamics of ‘small-world’ networks». En: *nature* 393.6684 (1998), pág. 440.
- [132] Bo Wei y col. «Weighted k-shell decomposition for complex networks based on potential edge weights». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 420 (2015), págs. 277-283.
- [133] Harrison C White. «Search parameters for the small world problem». En: *Social forces* 49.2 (1970), págs. 259-264.
- [134] WHO. *COVID-19 Dashboard*. <https://www.who.int/>. 2020.
- [135] Yang Yang y col. «Improving the robustness of complex networks with preserving community structure». En: *PloS one* 10.2 (2015), e0116551.
- [136] Haotian Zhang, Elaheh Fata y Shreyas Sundaram. «A notion of robustness in complex networks». En: *IEEE Transactions on Control of Network Systems* 2.3 (2015), págs. 310-320.
- [137] Jian-Xiong Zhang y col. «Identifying a set of influential spreaders in complex networks». En: *Scientific reports* 6 (2016), pág. 27823.
- [138] Dawei Zhao y col. «Vital layer nodes of multiplex networks for immunization and attack». En: *Chaos, Solitons & Fractals* 105 (2017), págs. 169-175.
- [139] Xiang-Yu Zhao y col. «Identifying effective multiple spreaders by coloring complex networks». En: *EPL (Europhysics Letters)* 108.6 (2015), pág. 68005.
- [140] ZY Zhao y col. «Identifying influential spreaders based on network community structure». En: *Chin. J. Comput* 37 (2014), págs. 753-766.
- [141] Enrico Zio. «Challenges in the vulnerability and risk analysis of critical infrastructures». En: *Reliability Engineering & System Safety* 152 (2016), págs. 137-150.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00017

Matrícula: 2181801401

Análisis de influencia y robustez en redes sociales multiplex



Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 10:00 horas del día 24 del mes de enero del año 2022 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. SERGIO GERARDO DE LOS COBOS SILVA  
DR. ABEL GARCIA NAJERA  
DRA. MARIA ELENA LARRAGA RAMIREZ  
DR. ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ  
DR. CARLOS AVILES CRUZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (CIENCIAS Y TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION)

DE: EDWIN MONTES OROZCO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

## Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. SERGIO GERARDO DE LOS COBOS  
SILVA

VOCAL

DR. ABEL GARCIA NAJERA

VOCAL

DRA. MARIA ELENA LARRAGA RAMIREZ

VOCAL

DR. ANTONIO DANIEL RIVERA LOPEZ

SECRETARIO

DR. CARLOS AVILES CRUZ

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella