



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

TRANSICIÓN DE HAWKING- PAGE HOLOGRÁFICA

Tesis que presenta
Néstor de Jesús Gaspar Rodríguez
Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)


Asesor: Dr. Román Linares Romero

Jurado calificador:


Presidente: Alfredo Herrera Aguilar

Secretario: Román Linares Romero

Vocal: Erick Leonardo Patiño Jaidar



Román Linares Romero,



México, D.F. Enero de 2015

A quienes me han dado más de un voto de confianza, y me han ayudado tanto en este camino. Mis padres, Mario y Elda; y mis hermanas Karen y Tannia. ¡Gracias! Con todo mi agradecimiento y cariño. Sin ustedes esta tesis no habría llegado a ser.

A mis amigos, quienes estuvieron siempre para darme una mano cuando lo necesité: Sergio Lennin, Carlos Francisco, Némesis, Ángel, Jose Luis, Iván y en especial a Stephanie, gracias por tu compañía, cariño y apoyo. Sin ustedes este trabajo habría carecido de alegría.

Agradezco también a la UAM, así como a mi asesor, Román Linares. Y a mis compañeros de armas en esta institución, Sergio, Carlos, Daniel.

Resumen

En este trabajo hicimos una revisión de la transición de Hawking-Page en el contexto de la dualidad AdS/CFT. Comenzamos por un repaso de las características de esta dualidad o conjetura de Maldacena, mediante un repaso, por un lado de las propiedades del espacio de Anti de Sitter y, por otro, de las características de la teoría de campos conforme $\mathcal{N}=4$ supersimétrica de Yang Mills. En segundo lugar dimos como un ejemplos campos propagándose en el bulto en AdS para, finalmente, presentar una transición de primer orden en Anti de Sitter, donde presentamos un introducción de la termodinámica de agujeros negros para, acto seguido, presentar la transición de Hawking-Page, la cual nos dice que al introducir un baño térmico en nuestro espacio, existe la formación de un agujero negro a partir de una temperatura crítica T_c . Esta transición es holográfica en el sentido que en la teoría de campos en la frontera del espacio, se traduce en una transición entre fases de confinamiento y desconfinamiento, lo cual, pensamos, quizá pueda ayudar a entender el problema del confinamiento en QCD. Finalmente presentamos conclusiones y apéndices con algunos cálculos.

Índice

Introducción	v
1 Motivando la correspondencia AdS/CFT	1
1.1 Principio holográfico	1
1.2 Holografía y Espacio AdS	2
1.3 Conexión UV/IR	3
2 Correspondencia AdS/CFT	5
2.1 Espaciotiempos máximamente simétricos	5
2.1.1 Propiedades geométricas	6
2.2 Espacio Anti de Sitter	7
2.2.1 AdS en 4-d	7
2.2.2 AdS en d dimensiones	8
2.3 Teorías de campos conformes	11
2.3.1 Transformaciones conformes y grupo conforme	11
2.3.2 Simetría conforme	12
2.3.3 Supersimetría	15
2.3.4 Modelo sobre la capa de masa de Wess Zumino	16
2.3.5 Modelo fuera de la capa de masa de Wess-Zumino	18
2.3.6 Supersimetría en 4 dimensiones	19
2.4 $\mathcal{N} = 4$ SYM	20
2.4.1 Invarianza conforme y espacio curvo	21
2.5 La correspondencia AdS/CFT	22
3 Campos en la frontera de AdS	25
3.1 Campo escalar	25
3.2 Campo fermiónico	28
3.2.1 Preliminares de campo fermiónico	28
3.2.2 Vielbein	29

3.2.3	Conexión de Spin	29
3.2.4	El operador de Dirac en AdS	30
3.2.5	Campo de Fermi	30
3.3	p-formas en AdS	32
3.3.1	p -forma masiva en AdS	33
4	Agujeros negros y AdS/CFT	35
4.1	Termodinámica de agujeros negros	36
4.1.1	Ley cero	36
4.1.2	Primera Ley	37
4.1.3	Segunda Ley	37
4.2	AdS/CFT en equilibrio	38
4.3	Cantidades termodinámicas de SAdS	39
4.4	Transición de fase en AdS/CFT	41
4.4.1	Ejemplo de transición de primero orden	42
4.4.2	Transición de Hawking-Page	43
5	Una transición de confinamiento en CFT	51
5.1	El problema del confinamiento	51
5.2	El problema del confinamiento	52
5.3	confinamiento en AdS/CFT	55
5.4	Loops de Wilson	55
5.5	Loop de Wilson en AdS/CFT	56
5.6	Potencial Quark antiquark a temperatura finita	60
5.7	Potencial Quark-Antiquark en confinamiento	61
5.8	Conclusiones	63
	Apéndices	65
	Apéndices	65
	Simetrías y vectores de Killing	67
	Función de Partición del agujero negro de AdS	69
.0.1	Acción de bulto	69
.0.2	Acción de Gibbons-Hawking	70
.0.3	Acción de contratérminos	71
.0.4	Función de partición y cantidades termodinámicas	72

Reducción dimensional de $\mathcal{N} = 4$ SYM	75
.0.5 Reducción dimensional	75
.0.6 Reducción de la parte bosónica	76
.0.7 Reducción de la parte fermiónica	78
Solitón en AdS	81

Introducción

Este trabajo de revisión trata sobre una conjetura de equivalencia, planteada por Juan Maldacena en 1997, [13] que relaciona Teorías cuánticas de campos en d dimensiones con Teorías de Gravedad cuántica en $D > d$ dimensiones.

Esta equivalencia se conoce como correspondencia o dualidad norma/gravedad, holográfica, AdS/CFT, norma/cuerdas o de Maldacena. El concepto clave es el de *Dualidad*, que describe una relación de equivalencia entre dos teorías que en principio son radicalmente distintas.

Una forma muy común de ver esta situación es pensar que las dos teorías son lenguajes que hacen referencia a un mismo sistema físico, y es posible encontrar un traductor que nos lleve de los conceptos de una teoría a la otra.

Aunque la noción de dualidad no es nueva, pues hay varios ejemplos de dualidad entre teorías de campos o entre teorías de cuerdas, la propuesta de Maldacena es radicalmente distinta pues se trata de una dualidad entre una Teoría de Campos y una Teoría de Cuerdas.

¿Cuál es la relevancia de esta dualidad en particular? Hay bastantes razones: en primer lugar, porque teóricamente es interesante relacionar teorías que suceden a escalas de energía tan alejadas - pues se plantean una dualidad entre teorías cuánticas de campos, como QCD, con una teoría de Relatividad General, esto es, permite relacionar teorías con y sin gravedad; en segundo, es una aproximación a teorías de campos similares a QCD o a sistemas de materia condensada en la región de acoplamiento fuerte.

Hay que entender que acercarse a la dualidad AdS/CFT implica tener un vasto abanico de requerimientos teóricos, es decir, conocer, aún someramente, tópicos de Teoría de Cuerdas, Teoría Cuántica de Campos, propiedades geométricas del espacio de Anti de Sitter, etc. Por lo cual, por mor de una correcta articulación en la exposición, vamos a enfocarnos en algunos aspectos específicos, no en el panorama amplio de la correspondencia.

Esta tesis trata sobre un aspecto interesante de esta dualidad; la transición de fase de Hawking-Page, la cual es una transición de fase de primer orden de un sistema termodinámico, siendo este sistema termodinámico el espacio de AdS cuyas fases son un agujero negro y el espacio de AdS térmico.

Nuestra exposición se llevará a cabo en el siguiente orden:

En el primer capítulo vamos a dar una motivación para el estudio de la correspondencia AdS/CFT, esto es, partiendo del supuesto que hay una relación de dualidad entre la teoría de campos $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills y la frontera del espaciotiempo de Anti de Sitter en 5 dimensiones, vamos a explicar en que consiste esta dualidad y cuales son las cantidades físicas que permiten establecer la misma; asimismo, veremos en que consiste la llamada relación de diccionario o, mas apropiadamente, *traductor*.

El segundo capítulo versa acerca de las propiedades geométricas del espacio AdS y simetrías inherentes al mismo. En el tercer capítulo vamos a hacer el análisis de diversos campos en el bulto en AdS y su comportamiento en la frontera del mismo.

El capítulo 4 trata sobre el concepto de agujero negros y sus propiedades termodinámicas en relación con la correspondencia AdS/CFT.

En el capítulo 5 vamos a estudiar, ya con todos los elementos teóricos a la mano, la transición de fase de Hawking-Page y veremos como se relaciona una transición de fase en Relatividad General con una teoría de campos en la frontera del espaciotiempo. El capítulo 6 está centrado en el cálculo del potencial quark-antiquark, mediante lazos de Wilson, para ver como se relacionan estos resultados con los del capítulo anterior. Finalmente, se presentarán nuestras conclusiones y un apartado de apéndices.

Motivando la correspondencia AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT es un aspecto fascinante de la física teórica, la cual relaciona dos teorías que en principio pueden parecer incompatibles. Vamos a partir del siguiente supuesto: Una teoría de norma en 4-dimensiones, en la aproximación de N grande, es representada por un espaciotiempo curvo cinco-dimensional con invarianza conforme $SO(2,4)$. Lo anterior es una forma simple de enunciar la dualidad AdS/CFT. Para entender como es posible que una teoría cuántica se relacione con una teoría de gravedad, se requiere poner en contexto teórico al lector, por lo cual, en este primer capítulo vamos a ver someramente algunas nociones que nos ayuden a entender lo que viene.

1.1 Principio holográfico

La teoría cuántica de campos es una teoría con infinitos grados de libertad, lo cual es, en principio imposible de relacionar consistentemente con una teoría de gravedad.

Una forma de ayudarnos a hacer compatibles ambas teorías es mediante el principio holográfico, el cual nos ayuda a calcular los estados cuánticos de un sistema de la siguiente manera. Consideremos una región del espacio, Γ , la cual por simplicidad puede ser una esfera y consideremos como frontera de este espacio a $\partial\Gamma$ y denotemos el área de la frontera por A . Supongamos que tenemos un sistema termodinámico con entropía S dentro de este espacio. La masa total del sistema no puede exceder la de un agujero negro de área A . Ahora, si consideramos que el sistema colapsa en un agujero negro, tenemos que la entropía tiene la siguiente expresión: $S = A/4G$. En otras palabras, la entropía de una región del espacio es proporcional al área medida en unidades de Planck¹.

¹Recordemos que la entropía no es tanto una propiedad de un sistema, sino una medida de la información que tenemos sobre el sistema. La definimos partiendo de restricciones de lo que sabemos del sistema (energía, momento angular, etc.). La entropía es esencialmente el logaritmo del número de

Esta cota para la entropía nos dice que el máximo número de grados de libertad no redundantes es proporcional al área. Cuando tratamos con una región macroscópica grande, esto significa una reducción enorme en los grados de libertad requeridos, en efecto, si las dimensiones lineales del sistema son del orden de L , entonces el número de grados de libertad por unidad de volumen escala como $1/L$ en unidades de Planck; haciendo L muy grande, podremos espaciar arbitrariamente los grados de libertad. Podemos pensar los grados de libertad de Γ viviendo en $\partial\Gamma$ dentro de un área de densidad no mayor a ~ 1 grado de libertad por área de Planck. En esto reside la analogía holográfica: los sistemas en D dimensiones están descritos por un holograma $(D-1)$ -dimensional en su frontera.

1.2 Holografía y Espacio AdS

Nuestro como punto de partida será el espacio $AdS(5) \otimes S(5)$ como el espacio de bulto con frontera 4-dimensional. De acuerdo con el principio holográfico, podremos describir toda la física en el bulto mediante una teoría cuyos grados de libertad puedan ser identificados con la frontera.

El principio Holográfico requiere que la teoría en la frontera no tenga más de un grado de libertad por área de Planck, como veremos más adelante, la métrica que describe AdS diverge cerca de la frontera, por lo cual podemos asumir que el número de grados de libertad por unidad de área (en las coordenadas) es infinito, lo cual sugiere que la teoría de frontera es una teoría cuántica de campos.

Otra cosa que nos interesa para una descripción holográfica de la física en el bulto son las simetrías del espacio en su frontera; las cuales son, primero, las simetrías de Poincaré, la simetría de dilatación y las transformaciones conformales que preservan las direcciones tipo luz en la frontera. Como veremos en detalle en el capítulo siguiente, el grupo completo de simetrías de AdS en la frontera es el grupo conforme del espacio de Minkowski 4-dimensional. Esto es, la teoría holográfica en la frontera debe ser invariante bajo el grupo conforme, esto, aunado a que en la frontera tenemos una densidad infinita (en coordenadas) de grados de libertad, sugiere que la teoría holográfica es una Teoría Cuántica de Campos Conforme o CFT (por sus siglas en inglés).

$AdS(5) \otimes S(5)$ es, como sabemos una solución de la supergravedad 10-dimensional que describe una teoría de supercuerdas a bajas energías. Este espacio, aparte de las simetrías anteriormente mencionadas, tiene también las simetrías de $O(6)$ para la esfera 5-dimensional y una simetría adicional, la supersimetría $\mathcal{N} = 4$, lo cual debe ser tomado en cuenta en la

estados cuánticos que satisfacen esas restricciones. Por otro lado la *entropía máxima* sí es una propiedad del sistema y se expresa como el logaritmo del número total de estados o, de forma mas precisa, es proporcional al número de grados de libertad simples que se necesitan para describir al sistema.

descripción holográfica. Lo anterior nos lleva a la conclusión de que la gravedad cuántica en $AdS(5) \otimes S(5)$ debe ser descrita por una teoría cuántica de campos superconforme invariante de Lorentz, asociada con la frontera de AdS.

1.3 Conexión UV/IR

Uno de los pilares en la mecánica cuántica es el principio de incertidumbre, el cual nos dice que hay una relación inversa entre las escalas de momento/energía y distancia:

$$E_{\Delta x} \approx \frac{\hbar c}{\Delta x} \quad (1.1)$$

Se tiene la noción, que nos ha enseñado la física de partículas actual, que si colisionamos partículas cuya energía $E_{\Delta x}$ sea muy alta y de esta colisión observamos partículas de alta energía disparadas hacia todos lados, a partir del análisis de éstas podremos reconstruir eventos que suceden a distancias muy pequeñas.

El problema de este razonamiento es que para energías mucho mayores que la masa de Planck, la colisión crearía un agujero negro con masa del orden de $E_{\Delta x}$ de forma que los eventos que nos interesa ver a escalas de distancia muy pequeñas quedarían ocultos tras un horizonte de eventos de radio:

$$R_S \approx \frac{2G}{c^2} E_{\Delta x}, \quad (1.2)$$

más aún, el producto de la colisión sería radiación de Hawking, no las partículas esperadas.

La radiación de Hawking tiene una energía típica $\sim \frac{\hbar c}{R_S}$ que decrece con la energía incidente. De esta forma, un acelerador de partículas con energías del orden de Planck no nos dejaría ver escalas del orden de la escala de Planck l_P de hecho, la energía iría como:

$$\Delta x \sim \frac{2G E}{c^2 c^2} \quad (1.3)$$

que puede expresarse como una especie de principio de incertidumbre espaciotemporal:

$$\Delta x \Delta t \sim \frac{2G \hbar}{c^4} \approx l_P \quad (1.4)$$

Esta es una forma simple de ver la conexión UV/IR que relaciona la frecuencia con el tamaño espacial; frecuencias muy altas se relacionan con escalas de distancia grandes.

Correspondencia AdS/CFT

2.1 Espaciotiempos máximamente simétricos

En Relatividad General, las ecuaciones que describen la dinámica de un sistema vienen de un principio variacional. Partimos de la acción de Einstein-Hilbert en vacío:

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^d x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2k} (R - 2\Lambda) \right) \quad (2.1)$$

y con

$$\frac{\delta S[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

La variación nos da como resultado:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = 0$$

O, en la forma que conocemos:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Donde el tensor de Einstein está definido como:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.3)$$

Con $R_{\mu\nu}$ y R el tensor y escalar de Ricci, respectivamente.

Al estar en vacío, el tensor de energía momento de materia $T_{\mu\nu}^M$ se anula, de forma que uno puede ver estos spaciotiempos como soluciones de las ecuaciones de Einstein con un tensor de energía momento de vacío dado por:

$$T_{\mu\nu}^{vacío} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

De forma que la única componente no trivial de las ecuaciones de Einstein es:

$$R = \frac{2d}{d-2}\Lambda \quad (2.5)$$

2.1.1 Propiedades geométricas

Se dice que un espacio es homogéneo si es invariante ante cualquier traslación a lo largo de cualquier coordenada y que es isotrópico si es invariante bajo la rotación de una coordenada ante cualquier otra.

Los espacios con mayor grado de simetría son homogéneos e isotrópicos. La homogeneidad implica d familias uniparamétricas que son generadas por traslación a lo largo de cada coordenada y por cada coordenada hay $(d-1)$ otras coordenadas que pueden ser rotadas, sin embargo, para no contar doblemente las rotaciones son: $\frac{d(d-1)}{2}$. De forma que el número total de familias es:

$$d + \frac{d(d-1)}{2} = \frac{d(d+1)}{2}$$

Una variedad diferencial d -dimensional es máximamente simétrica si tiene $\frac{d(d+1)}{2}$ vectores de Killing linealmente independientes.

La existencia de simetrías impone restricciones sobre las cantidades que definimos en nuestro espacio, como la métrica g_{ij} y el tensor de curvatura de Riemann R^i_{jkl} . Un espacio máximamente simétrico es entonces posible solo para valores particulares de estas cantidades. De aquí que un espacio Riemanniano máximamente simétrico sea esencialmente único.

Para un espacio máximamente simétrico se cumple lo siguiente:

- El escalar de curvatura R es constante.
- El tensor de Ricci es proporcional al tensor métrico.

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{d}Rg_{\mu\nu}$$

- El tensor de curvatura de Riemann es

$$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \frac{R}{d(d-1)}(g_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})$$

Este tipo de espacios pueden ser clasificados por su escalar de Ricci, para los tres casos siguientes:

- $R = 0$ el espacio es llamado de Minkowski
- $R > 0$ Espacio de Sitter
- $R < 0$ espacio de Anti de Sitter

Veremos las propiedades de este espacio un poco más a detalle, pues gracias a las simetrías inherentes a este espacio es que toma sentido la correspondencia.

2.2 Espacio Anti de Sitter

El espacio de curvatura constante $R < 0$ es llamado *Espacio de Anti de Sitter*. Este espaciotiempo puede ser expresado en distintos sistemas de coordenadas y en diferentes dimensiones, vamos a dar un repaso de sus propiedades geométricas en d dimensiones y después veremos el caso que nos interesa en la dualidad, que es el AdS en 5-dimensiones. Lo interesante de este espacio es que para un cierto tipo de coordenadas, tiene una frontera que es el espaciotiempo de Minkowski hasta un factor conforme, lo cual es vital para la conjetura.

2.2.1 AdS en 4-d

El espaciotiempo de Anti de Sitter 5-Dimensional puede verse como un hipersuperficie incrustada en un espaciotiempo plano de seis dimensiones, con dos dimensiones temporales, digamos:

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Dentro de un espacio 5-dimensional R^5 con la métrica

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Uno puede hacer un cambio de coordenadas: $\{\tau, \rho, \theta, \phi\}$ de la siguiente manera:

$$u = a \sin(\tau) \cosh(\rho)$$

$$v = a \cos(\tau) \cosh(\rho)$$

$$x = a \sinh(\tau) \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = a \sinh(\tau) \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = a \sinh(\tau) \cos(\theta)$$

La métrica en este hiperboloide es:

$$ds^2 = a^2 (-\cosh^2(\rho)d\tau^2 - d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega^2)$$

Tomando $0 \leq \rho$ y $0 \leq \tau \leq 2\pi$ la solución anterior cubre el hiperboloide una sola vez. Por tanto, (τ, ρ, Ω) son llamadas coordenadas globales de *AdS*. Puesto que cerca de $\rho = 0$ la métrica se comporta como $ds^2 \simeq a^2(-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$ el hiperboloide tiene la topología $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbf{S}^1$ con S_1 representando curvas tipo tiempo cerradas en la dirección τ , pues $\tau + 2\pi t$ representan el mismo punto en el hiperboloide, esto puede parecer problemático, sin embargo, puesto que tal proviene de una elección particular de coordenadas, no es una propiedad intrínseca del espaciotiempo; por lo cual, lo que hacemos es desenrollar el círculo S_1 (esto, es, tomamos $-\infty < \tau < \infty$) de forma que obtenemos la cubierta universal del hiperboloide sin curvas tipo tiempo cerradas. Para fines de la dualidad AdS/CFT esta cubierta es suficiente.

2.2.2 AdS en d dimensiones

Vamos dar un somero repaso de las propiedades del espaciotiempo de AdS en d dimensiones, poniendo énfasis en el sistema de coordenadas de Poincaré, las cuales son de especial importancia ya que aquí se ve claramente que la frontera de este espacio tiene propiedades geométricas interesantes para nuestro estudio.

El espacio AdS puede ser obtenido incrustando la forma cuadrática:

$$\sum_{i=1}^{p+1} (x^i)^2 - (x^0)^2 - (x^{p+2})^2 = -L^2. \quad (2.6)$$

En un espacio $(d + 1)$ dimensional con métrica:

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + \dots + dX_{n-1}^2 - dU^2 - dV^2, \quad (2.7)$$

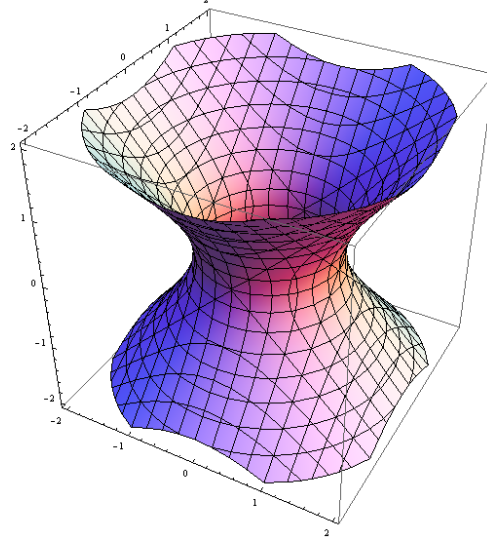
Notemos que el espacio que contiene a AdS tiene dos direcciones temporales, de forma que su métrica tiene signatura $(-, -, +, +, \dots, +)$.

Ahora, recordemos que, si definimos un subespacio en término de coordenadas embebidas, x^i especificando funciones $X^a(x^i)$, la métrica inducida g^{ij} en la superficie parametrizada por x^i puede ser calculada de la siguiente forma:

$$g_{ij} = G_{ab} \frac{\partial X^a}{\partial x^i} \frac{\partial X^b}{\partial x^j}. \quad (2.8)$$

Podríamos hacer un cálculo similar al de la sección anterior podemos llevar al sistema de coordenadas globales, la métrica inducida en tal caso del hiperboloide tiene signatura lorentziana y la topología de AdS es $\mathbb{R}^{n-1} \otimes \mathbf{S}^1$.

Este hiperboloide se ve como:



Por otro lado, el sistema de coordenadas de Poincaré o parche de Poincaré puede obtenerse merced de un cambio de coordenadas:

$$X^{p+2} + X^{p+1} = u \quad (2.9)$$

$$-X^{p+2} + X^{p+1} = v \quad (2.10)$$

$$X^\mu = \frac{ux^\mu}{L}. \quad (2.11)$$

Ahora, vamos a sustituir estas nuevas variables en la ecuación que nos define el espacio (2.6) para hallar la forma de v como:

$$v = -\frac{L^2}{u} - \frac{u}{L^2} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad (2.12)$$

podemos escribir explícitamente X^{p+2} y X^{p+1} en término de las otras coordenadas, de forma que queden como

$$X^{p+1} = \frac{1}{2} \left(u - \frac{L^2}{u} - \frac{u}{L^2} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \right) \quad X^{p+2} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{L^2}{u} + \frac{u}{L^2} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \right). \quad (2.13)$$

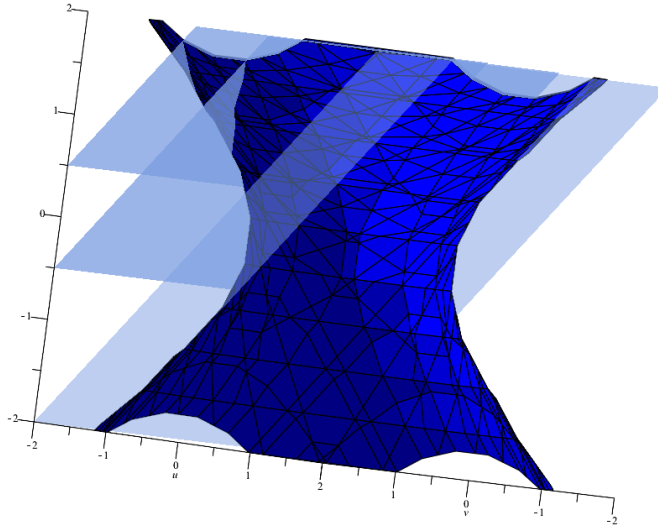
Si tomamos las parciales de las coordenadas escritas de la forma anterior, llegaremos al

siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{L^2}{u^2} du^2 + \frac{u^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.14)$$

Notemos que, dado que este sistema de coordenadas tiene la peculiaridad de que el vector de killing ∂_{x^0} se anula en $x = 0$, vemos que de hecho no podemos movernos hacia valores negativos de u , de forma que estamos confinados a la porción del hiperboloide en que $X^{p+2} + X^{p+1} > 0$, lo cual implica que este sistema solo cubra la mitad del hiperboloide.

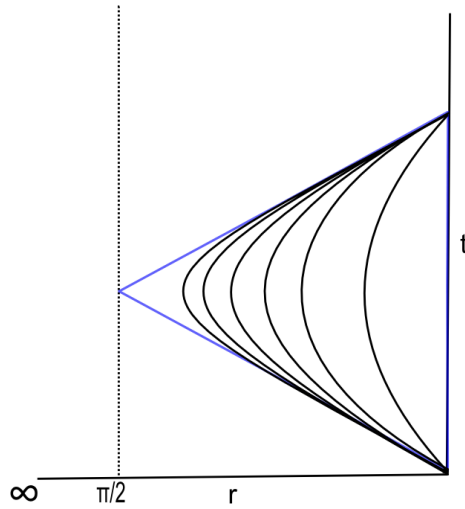
Si queremos ver esquemáticamente este sistema, las superficies con t (la coordenada temporal en la métrica de Minkowski) y u constantes corresponden a los planos en la siguiente imagen:



El plano que pasa por el origen es la superficie $t \rightarrow \infty$

Las superficies que resultan de fijar L o u son copias del espacio de Minkowski que difieren solo por un reescalamiento global. La superficie $u = 0$, que corresponde a $t \rightarrow \infty$ es la frontera conforme de AdS y uno se refiere usualmente a ella como *la frontera*

En estas coordenadas, el diagrama de Penrose de AdS es:



2.3 Teorías de campos conformes

2.3.1 Transformaciones conformes y grupo conforme

Consideramos una teoría cuántica de campos viviendo en un espaciotiempo plano. Las transformaciones conformes son generalizaciones de transformaciones de escala:

$$\hat{x}^\mu = \alpha x^\mu \rightarrow ds^2 = d\vec{x}^2 = \alpha^2 d\vec{x}^2, \quad (2.15)$$

Antes de definir una transformación conforme, vamos a decir unas cuantas cosas sobre transformaciones de escala.

El proceso de renormalización involucra un corte en la energía ϵ , la constante de acoplamiento de la teoría λ_0 y la masa m_0 , v.g., la regularización dimensional para una teoría con campo escalar $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \lambda\phi^4$:

$$\lambda_0 = \mu^\epsilon \left(\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{\epsilon^k} \right); \quad m_0^2 = m^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(\lambda)}{\epsilon^k} \right). \quad (2.16)$$

donde μ es la escala de renormalización, de la cual extraemos la constante de acoplamiento renormalizada $\lambda = \lambda(\mu, \epsilon; \lambda_0, m_0)$, que en general depende de la escala.

De esta forma, podemos definir la función β , la cual nos dice como cambia la constante de acoplamiento renormalizada:

$$\beta(\lambda, \epsilon) = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \Big|_{m_0, \lambda_0, \epsilon} \quad (2.17)$$

Una teoría invariante de escala (i.e., una teoría que no depende de α en (2.15)) debe entonces ser independiente de μ , y por tanto, tener función $\beta = 0$. Lo anterior puede suceder de dos formas:

- $\beta = 0$ en todo punto, que significa que todos los diagramas de Feynman se cancelan, lo que implica que no hay infinitos. O
- Se trata de una teoría de interacción no trivial: la función β es no trivial, pero tiene un cero lejos de $\lambda = 0$, en el cual emerge una teoría no perturbativa.

Si tenemos una teoría con invarianza de escala clásica, se espera que se cumpla también cuánticamente. Pero a priori, podría haber anomalías cuánticas (v.g., diagramas de Feynman que podrían romper la invarianza de escala). De manera se requiere la ausencia de estas anomalías para la consistencia de la teoría y la existencia de invarianza de Weyl, la cual da restricciones a la teoría.

La mayoría de las teorías que son cuánticamente invariantes de escala tiene una invarianza mayor: la invarianza conforme.

En espacio plano, se define la invarianza conforme mediante $x_\mu \rightarrow \acute{x}_\mu$, tal que

$$d\acute{x}_\mu d\acute{x}_\mu = [\Omega(x)]^{-2} dx_\mu dx_\mu \quad (2.18)$$

Puesto que la métrica se modifica de *plana* a *conformalmente plana*, estamos estudiando teorías en espacio plano. Es de esta manera que las transformaciones conformes son una generalización de transformaciones de escala mencionadas anteriormente.

2.3.2 Simetría conforme

El álgebra de vectores de Killing es el álgebra de Lie del grupo de isometrías de la métrica. Veamos como un primer ejemplo el álgebra del grupo que genera isometrías en el espacio de Minkowski.

Sabemos que para este espaciotiempo, el grupo de Poincaré es el generador de simetrías, si en coordenadas cartesianas las coordenadas son x^α , con la métrica η_{ab} , la ecuación de Killing es simplemente:

$$\partial_a V_b + \partial_b V_a = 0$$

Cuya solución es:

$$V^a = \omega_b^a x^b + \epsilon^a,$$

Donde ϵ^a son parámetros constantes y ω_b^a satisfacen $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$. Que son precisamente las transformaciones infinitesimales de Lorentz y las traslaciones del grupo de Poincaré.

Si escogemos como base la siguiente:

$$P_a = \partial_a \quad , \quad M_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a,$$

un vector de Killing general puede ser expandido como:

$$V = V^a \partial_a = \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} + \epsilon^a P_a \quad (2.19)$$

Cuya álgebra de Lie está dada por:

$$[P_a, P_b] = 0$$

$$[M_{ab}, P_c] = -\eta_{ac} P_b + \eta_{bc} P_a$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac}$$

Vectores de Killing conformes

Un caso de interés particular para nosotros es cuando trabajamos con una teoría cuya acción de materia mínimamente acoplada es invariante bajo reescalamientos de Weyl, esto es, reescalamientos de la métrica en la forma:

$$g_{\alpha\beta}(x) \rightarrow e^{2\omega(x)} g_{\alpha\beta}(x) \quad (2.20)$$

Por una función positiva definida $\omega(x)$, o, infinitesimalmente://

$$\delta_\omega g_{\alpha\beta}(x) = 2\omega(x) g_{\alpha\beta}(x),$$

lo que implica que el tensor de energía momento de la teoría se anula en su diagonal.

En estos casos, uno puede asociar corrientes conservadas no solo a vectores de Killing, sino también a vectores de Killing Conformales, que obedecen la ecuación:

$$\nabla_\mu C_\nu + \nabla_\nu C_\mu = 2\omega(x) g_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

para alguna función ω . Estos vectores de Killing C generan transformaciones de coordenadas que dejan invariante la métrica hasta un reescalamiento de Weyl.

Algebra y grupo conforme del espacio de Minkowski

Puesto que el espacio de Minkowski comparte el grupo de simetrías con el espacio de AdS, que es el que nos importa, veamos a detalle las simetrías del espacio de Minkowski conforme.

Recordemos que ya teníamos 10 vectores de Killing verdaderos, asociados al grupo de Poincaré, ahora, tenemos 5 vectores de Killing conformes, de la manera siguiente:

En primer lugar, el generador de Dilataciones:

$$D = x^a \partial_a : \quad \partial_a D_b + \partial_b D_a = 2\eta_{ab}$$

que genera:

$$x^a \rightarrow e^\lambda x^a \Rightarrow ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \rightarrow e^{2\lambda} ds^2$$

Los otros cuatro vectores de Killing conformes son:

$$C^{(m)} = (2x^m x^a - \eta^{ma} x^2) \partial_a \quad (2.22)$$

Los cuales satisfacen la ecuación:

$$\partial_a C_b^{(m)} + \partial_b C_a^{(m)} = 4x^m \eta_{ab}$$

y generan las transformaciones especiales conformes:

$$x^a \rightarrow \frac{x^a + c^a x^2}{1 + 2\eta_{ab} c^a x^b + c^2 x^2}$$

Las dilataciones y la transformaciones especiales conformes agrandan el grupo de simetría de Minkowski al grupo de simetrías cuya álgebra es el *álgebra conforme*

$$[P_a, P_b] = 0 \quad (2.23)$$

$$[M_{ab}, P_c] = -\eta_{ac} P_b + \eta_{bc} P_a \quad (2.24)$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac} \quad (2.25)$$

$$[D, P_a] = P_a \quad (2.26)$$

$$[M_{ab}, D] = 0 \quad (2.27)$$

$$[P_a, C_b] = 2\eta_{ab} D - 2M_{ab} \quad (2.28)$$

$$[M_{ab}, C_c] = -\eta_{ac} C_b + \eta_{bc} C_a \quad (2.29)$$

$$[D, C_a] = C_a \quad (2.30)$$

$$[C_a, C_b] = 0 \quad (2.31)$$

2.3.3 Supersimetría

A mediados del siglo pasado los teóricos se preguntaban por el tipo de simetrías posibles en la física de partículas. Se conoce la simetría de Poincaré, definida por los generadores de Lorentz J_{ab} del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ y los generadores de traslaciones en $3 + 1$ dimensiones, P_a .

Más aún, conocemos que existen simetrías internas, T_r , como el grupo de electromagnetismo $U(1)$, el grupo local $SU(3)$ de QCD o el global $SU(2)$ del isoespin. Estos generadores forman un álgebra de Lie.

$$[T_r, T_s] = f_{rs}^t T_t \quad (2.32)$$

Es natural preguntarse si puede existir una combinación de estas simetrías, tal que: $[T_r, P_a] \neq 0$, $[T_r, J_{ab}] \neq 0$, tal que un grupo de simetrías pudiera estar contenido en el otro o ambos grupos en uno mas grande. La respuesta a esta interrogante está en el teorema de Coleman-Mandula, que nos dice que si combinamos las simetrías de Poincaré con simetrías internas, las matrices S de todos los procesos serían cero; sin embargo, este teorema se sostiene de la suposición de que el álgebra final es un álgebra de Lie.

Una forma de evadir el teorema, entonces, es generalizando la noción de álgebra de Lie a *Álgebra de Lie graduada*. Un álgebra de este tipo es aquella cuyos generadores satisfacen reglas de anticonmutación.

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = \text{generadores} \quad (2.33)$$

De esta manera, los generadores del tipo P_a , J_{ab} , T_r son llamados generadores pares, mientras que aquellos que satisfacen reglas de anticonmutación son llamados generadores impares. Un álgebra de Lie graduada satisface entonces:

$$\{par, par\} = par; \{impar, impar\} = par; \{par, impar\} = impar \quad (2.34)$$

Así pues, una generalización de simetrías internas, más simetrías de Poincaré es posible, pero podemos preguntarnos, en este caso ¿qué tipo de simetrías describen los generadores Q_α^i ?

De la ecuación anterior

$$\{Q_\alpha^i, J_{ab}\} = (\dots)J_{cd}, \quad (2.35)$$

significa que Q_α^i debe estar en una representación de J_a , debido a la naturaleza anticonmutativa de Q_α^i , elegimos la representación espinorial. Pero campos espinoriales por campos bosónicos dan un campo espinorial; por lo tanto, Q_α^i (espinor) actuando sobre un campo bosónico nos da un espinor. De lo anterior, a partir de Q_α^i obtenemos una simetría entre

bosones y fermiones llamada *supersimetría*.

$$\delta \text{bosones} = \text{fermión}; \quad \delta \text{fermión} = \text{bosón}. \quad (2.36)$$

Nuestra relación de anticonmutación $\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\}$, es llamada álgebra de supersimetría, y el álgebra de Lie graduada es llamada *superálgebra*.

Puesto que Q_α^i es un espinor, el parámetro de la ley de transformación, ϵ_α^i es también un espinor.

Naturalmente, podemos preguntarnos con que tipo de espinor tratamos. A diferencia de física de partículas, donde tratamos con espinores de Weyl, que satisfacen $\gamma_5 \psi = \pm \psi$, en supersimetría se trabaja con espinores de Majorana, los cuales satisfacen la condición de realidad.

$$\chi^c = \chi^t C = \bar{\chi} \equiv \chi^\dagger i \gamma^0 \quad (2.37)$$

Donde C es la matriz de conjugación de carga, que relaciona γ_m con γ_m^T . En Minkowski, satisface:

$$C^T = -C; \quad C \gamma^m C^{-1} = -(\gamma^m)^T. \quad (2.38)$$

Usamos C para subir y bajar índices, puesto que es antisimétrica, debemos definir una convención de suma de índices, i.e. $\chi^a \psi_a = -\chi_a \psi^a$

El motivo por el cual usamos espinores de mayorana es por conveniencia, toda vez que algunas identidades supersimétricas son mas fáciles de demostrar.

2.3.4 Modelo sobre la capa de masa de Wess Zumino

Vamos a ver el modelo más simple de supersimetría, en dos dimensiones.

Un fermión de Dirac en d dimensiones tiene $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ componentes complejas. Por tanto, en 2 dimensiones tendrá 2 dimensiones complejas y un fermión de Majorana tendrá 2 componentes reales. Un fermión de Majorana on-shell (i.e., satisface la ecuación de Dirac) tendrá una sola componente (pues la ecuación de Dirac es una ecuación matricial que relaciona la mitad de las componentes con la otra mitad).

Puesto que tenemos simetría entre bosones y fermiones, el número de grados de libertad de los bosones debe ser igual al numero de grados de libertad de los fermiones. Esto puede ser de dos formas.

- on-shell, en cuyo caso tenemos supersimetría on-shell,
- off-shell en cuyo caso tenemos supersimetría off-shell

De esta forma, en el caso 2-dimensional, el modelo más simple tiene un fermión de Majorana ψ y un escalar real, ambos con un solo grado de libertad on-shell; de esta manera

tenemos supersimetría on-shell. Este modelo se conoce como el modelo de Wess-Zumino en dos dimensiones.

La acción para un bosón y un fermión en el espacio de Minkowski en 2-D

$$S = -\frac{1}{2} \int dx^2 [(\partial_\mu \phi)^2 + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi] \quad (2.39)$$

Esta es la acción del modelo de Wess-Zumino libre; podemos ver de la acción que, al ser ésta adimensional, la dimensión de masa del campo escalar $[\phi] = 0$ y la del fermión, $[\psi] = 1/2$.

Para ver la transformación de supersimetría entre el bosón y el fermión, vamos a escribir las variaciones de cada uno de ellos en términos del otro:

$$\delta \phi = \bar{\epsilon} \psi = \bar{\epsilon}_\alpha \psi^\alpha = \epsilon^\beta C_{\beta\alpha} \psi^\alpha \quad (2.40)$$

De las anteriores ecuaciones podemos ver, en primer lugar, que la dimensión de masa de $[\epsilon] = -1/2$; en segundo, que se definen las contracciones de índices: $\bar{\chi} \psi = \bar{\chi}_\alpha \psi^\alpha$, con $\bar{\chi}_\alpha = \chi^\beta C_{\beta\alpha}$. Por razones dimensionales, para la transformación inversa uno debe agregar un objeto con dimensión de masa igual a 1, en este caso, dicho objeto es $\not{\epsilon}$, de forma que:

$$\delta \psi = \not{\epsilon} \psi \epsilon \quad (2.41)$$

La acción (2.39) es invariante on-shell bajo estas transformaciones, por ejemplo, usando las identidades de espinores de Majorana (a continuación en 2-d y 4-d):

- $\bar{\epsilon} \chi = +\bar{\chi} \epsilon$,
- $\bar{\epsilon} \gamma_\mu \chi = -\bar{\chi} \gamma_\mu \epsilon$,
- $\bar{\epsilon} \gamma_5 \chi = +\bar{\chi} \gamma_5 \epsilon$,
- $\bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma_5 \chi = +\bar{\chi} \gamma_\mu \gamma_5 \epsilon$,
- $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$.

Así, la variación de la acción:

$$\delta S = - \int d^2 x \left[-\phi \partial_\mu \partial^\mu \delta \phi + \frac{1}{2} \delta \bar{\psi} \not{\epsilon} \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \not{\epsilon} \delta \psi \right] \quad (2.42)$$

Donde el término que contiene a ϕ ha sido integrado y la parte correspondiente a la frontera se ignora, sustituyendo las transformaciones antes mencionadas:

$$\delta S = - \int d^2 x \left[-\phi \partial_\mu \partial^\mu \bar{\epsilon} \psi + \bar{\psi} \not{\epsilon} \not{\epsilon} \phi \right] \quad (2.43)$$

ahora, puesto que $\not{\partial}\not{\partial} = \partial_\mu\partial_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu = \partial_\mu\partial_\nu g^{\mu\nu}$, efectivamente se cumple que $\delta S = 0$; lo que significa que la acción es invariante sin necesidad de ecuaciones de movimiento, lo cual en principio, es un indicio de supersimetría off-shell. Sin embargo, además de la invarianza de la acción, debemos probar también que las transformaciones de arriba cierran sobre los campos, es decir, que al aplicar dos veces la misma transformación en cada campo, y formando el álgebra de Lie de la simetría, obtenemos el mismo campo, u obtenemos una *representación del álgebra de Lie* sobre los campos.

El álgebra de Lie graduada de supersimetría es usualmente de la forma:

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = 2(C\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu\delta^{ij} + \dots \quad (2.44)$$

Para nuestro caso - una sola supersimetría - solo retenemos el primer término y el álgebra es completa. Para verlo en los campos, tomamos en cuenta que $P_\mu = \partial_\mu$ y $Q_\alpha = \delta_{\epsilon_\alpha}$ y, puesto que $\phi \rightarrow \delta_\epsilon\phi$ es un operador bosónico, tenemos un conmutador en lugar de un anticonmutador:

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \phi = 2\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1\partial_\mu\phi \quad (2.45)$$

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \psi = 2\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1\partial_\mu\psi \quad (2.46)$$

Obtenemos, para el campo escalar,

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \phi = 2\bar{\epsilon}_2\gamma^\rho\epsilon_1\partial_\rho\phi \quad (2.47)$$

pero, en el caso del fermión¹ :

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \psi = 2(\bar{\epsilon}_2\gamma^\rho\epsilon_1)\partial_\rho\psi - (\bar{\epsilon}_2\gamma^\rho\epsilon_1)\gamma_\rho\not{\partial}\psi \quad (2.48)$$

Como vemos, tenemos un término extra que se anula on-shell (esto es, cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento $\not{\partial}\psi = 0$). Por lo tanto, el álgebra on-shell se satisface y tenemos supersimetría on-shell.

2.3.5 Modelo fuera de la capa de masa de Wess-Zumino

En el modelo 2-dimensional off-shell, un fermión de Majorana tiene dos grados de libertad, mientras que el campo escalar tiene solo uno. Para cerrar el álgebra del modelo de Wess-Zumino off-shell, necesitamos un campo escalar extra F tal que on-shell regresemos al modelo anterior; por tanto, el campo escalar F debe ser auxiliar, i.e., no dinámico y sin

¹utilizando las identidades de Fierz $M_\chi(\bar{\psi}N\phi) = -\sum_j \frac{1}{2}MO_jN\phi(\bar{\psi}O_j\chi)$

grados de libertad que se propaguen, lo cual nos indica que su acción debe ser $\int F^2/2$. Nuestra acción total es:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2x [(\partial_\mu \phi)^2 + \bar{\psi} \not{\partial} \psi - F^2] \quad (2.49)$$

De esta acción, vemos que F tiene dimensión de masa $[F] = 1$, y F tiene ecuación de movimiento $F = 0$.

El álgebra del modelo de Wess-Zumino off-shell no cierra en ψ , por lo tanto debemos agregar un término a $\delta\psi$ proporcional a la ecuación de movimiento de F . Por análisis dimensional, el término con las dimensiones de masa correctas es $F\epsilon$. Ahora, puesto que F tiene una ecuación de movimiento bosónica, su variación, δF debe ser proporcional a la ecuación de movimiento fermiónica. Así pues, las leyes de transformación son:

$$\delta\phi = \bar{\epsilon}\psi \quad \delta\psi = \not{\partial}\phi\epsilon + F\epsilon \quad \delta F = \bar{\epsilon}\not{\partial}\psi \quad (2.50)$$

Mediante un cálculo análogo al de la sección anterior, podemos constatar que estas transformaciones efectivamente dejan invariante la acción y, más aún el álgebra off-shell cierra i.e., tenemos una representación off-shell de $\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = 2(C\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \delta^{ij}$ como:

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \phi = 2\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu \phi \quad (2.51)$$

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] F = 2\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu F \quad (2.52)$$

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \psi = 2\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu \psi \quad (2.53)$$

2.3.6 Supersimetría en 4 dimensiones

El caso 4-dimensional es análogo al anterior, en este caso, puesto que el fermión de Majorana tiene dos grados de libertad on-shell, necesitamos dos campos escalares reales, A y B. La acción que tenemos es la siguiente:

$$S_0 = -\frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu A)^2 + (\partial_\mu B)^2 + \bar{\psi} \not{\partial} \psi] \quad (2.54)$$

con leyes de transformación:

$$\delta A = \bar{\epsilon}\psi; \quad \delta B = \bar{\epsilon}i\gamma_5\psi; \quad \delta\psi = \not{\partial}(A + i\gamma_5 B)\epsilon \quad (2.55)$$

Nuevamente, el fermión de Majorana off-shell tiene 4 grados de libertad, de forma que hemos de introducir la siguiente acción auxiliar:

$$S = S_0 + \int d^4x \left[\frac{F^2}{2} + \frac{G^2}{2} \right]. \quad (2.56)$$

Con reglas de transformación, aunadas a (2.55) son:

$$\delta F = \bar{\epsilon} \not{\partial} \psi; \quad \delta G = \bar{\epsilon} i \gamma_5 \not{\partial} \psi \quad (2.57)$$

Uno siempre puede formar un campo complejo $\phi = A + iB$ y un campo auxiliar complejo $M = F + iG$, de forma que el multiplete de Wess-Zumino en 4 dimensiones sea (ϕ, ψ, M) . Finalmente, resta señalar que, si bien hemos escrito el modelo de W-Z en 2d y 4d, uno puede escribir interacciones entre ellos también, que preserven la supersimetría.

Estos ejemplos son acerca de la supersimetría $\mathcal{N} = 1$, esto es, solo hay un generador de supersimetrías Q_α . Los multipletes on-shell posibles para la supersimetría $\mathcal{N} = 1$ que tienen espines $l \leq 1$ son los siguientes:

- El multiplete de Wess-Zumino o quiral, (ϕ, ψ)
- El multiplete vector (λ^A, A_μ^A) , donde A es el índice adjunto.

para supersimetrías $\mathcal{N} = 2$ y $\mathcal{N} = 4$ hay otros multipletes, cosa que trataremos a continuación.

2.4 $\mathcal{N} = 4$ SYM

La teoría supersimétrica $\mathcal{N} = 4$ de Yangs Mills en cuatro dimensiones es una teoría cuántica de campos muy particular; su acción fue dada por primera vez en [4] y [6], en el contexto de compactificaciones toroidales de teorías de cuerdas. Esta teoría tiene el máximo número de simetrías para una teoría supersimétrica en cuatro dimensiones, i.e., existen dieciséis supercargas. Históricamente el interés hacia este modelo surgió por sus propiedades de finitud: su función β es cero perturbativamente y se piensa que esto se mantiene a nivel no perturbativo. Una consecuencia de ello es que la invarianza superconforme a nivel clásico se mantiene una vez cuantizada. Recientemente ha habido un renovado interés en esta teoría a raíz de la propuesta hecha por Maldacena, que relaciona esta teoría de campos con una de gravedad.

La acción de esta teoría en cuatro dimensiones es obtenida por el método de reducción

dimensional, que explicamos en el Apéndice correspondiente, es la siguiente:

$$S = \int d^4x Tr \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla^\mu S_i \nabla_\mu S_i + \frac{1}{2} \nabla^\mu P_j \nabla_\mu P_j + \frac{1}{2} i \bar{\lambda} \gamma^\mu \nabla_\mu \lambda \\ & - \frac{1}{2} e \bar{\lambda} [i \alpha^i S_i + i P^j P_j i \gamma_5, \lambda] - V(S, P) \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Donde $V(S, P) = \frac{e^2}{4} Tr ([S_i, S_j]^2 + [P_i, P_j]^2 + 2[S_i, P_j]^2)$. Así, el contenido de campos de esta teoría es:

- Campo de norma A_μ
- Seis campos escalares S_i, P_j
- Cuatro fermiones de Majorana, λ_I

La teoría no tiene parámetros dimensionales y es invariante de escala clásicamente. Esto puede ser visto de la forma siguiente: El campo de norma y el campo escalar tienen dimensión de masa 1 mientras que el fermión tiene $3/2$, de forma que todos los términos en la acción tienen dimensión de masa 4, lo que significa que todos los parámetros deben ser adimensionales.

$\mathcal{N} = 4$ SYM es invariante de escala también cuánticamente, aunque ahora no lo demostramos, la función β a un lazo, cuando hay fermiones y escalares adjuntos es:

$$\beta(g_{YM}) = -\frac{g_{YM}^3}{48\pi} N_c (11 - 2n_f - 1/2n_s) \quad (2.59)$$

donde n_f y n_s son el número de fermiones de Weyl y escalares, respectivamente, esta función β se anula para $n_f = 4$ y $n_s = 6$, que es nuestro caso.

2.4.1 Invarianza conforme y espacio curvo

Finalmente, vamos a considerar la forma en que la invarianza de escala 4-dimensional impone constricciones a un espaciotiempo curvo 5-dimensional.

$$ds_5^2 = \Omega(w)^2 (-dt^2 + d\vec{x}^2) + dw^2 \quad (2.60)$$

Bajo la transformación de escala $x^\mu \rightarrow ax^\mu$ esta métrica es invariante si $\Omega(w)$ transforma como:

$$\Omega(w)^2 \rightarrow a^{-2} \Omega(w)^2, \quad (2.61)$$

para que esto sea posible w debe transformar de una forma no trivial; sin embargo, el elemento de línea a lo largo de w es dw^2 , de forma que la única translación permitida

es sobre w misma. Puesto que w tiene dimensiones de distancia, podemos introducir un parámetro L que tiene también dimensión de distancia y escribir la traslación:

$$w \rightarrow w + L \ln a. \quad (2.62)$$

Bajo esta transformación, y la transformación de escala, $\Omega(w)$ debe transformar como (2.61), lo que determina de forma única la forma de Ω :

$$ds_5^2 = e^{-2w/L}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + dw^2 \quad (2.63)$$

$$= \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + d\vec{x}^2) + L^2 \frac{dw^2}{r^2} \quad (2.64)$$

Donde $r = Le^{-w/L}$. El cual no es otro que el espacio de Anti de Sitter en coordenadas de Poincaré; con L el radio de curvatura de AdS.

2.5 La correspondencia AdS/CFT

Tenemos entonces una correspondencia entre una teoría de gravedad (o su generalización en cuerdas) en $AdS(5) \otimes S(5)$ y la teoría de $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills en la frontera.

La correspondencia se puede enunciar simplemente como:

$$Z_{CFT} = Z_{AdS_5}. \quad (2.65)$$

Donde el lado izquierdo de la ecuación es la función de partición de la teoría de norma, mientras que del lado derecho tenemos la función de partición de AdS_5 . Esta ecuación se conoce como relación GKP-Witten.

En la descripción holográfica, existen cantidades y parámetros en ambas teorías que son relacionados; en el lado de gravedad, los parámetros tienen dimensiones propias, como la masa, la longitud y la temperatura, mientras que en SYM las cantidades son adimensionales. Para convertir estas últimas cantidades a variables del bulto, el factor de conversión es R (el radio de curvatura); de forma que si E_{SYM} y M son la energía en SYM y en el bulto, respectivamente, tenemos la relación

$$E_{SYM} = RM$$

Conviene decir un poco más sobre las cantidades en ambas teorías. En la teoría de bulto 10-dimensional existen dos parámetros adimensionales:

- El radio de curvatura de AdS medido en unidades de cuerdas: R/l_s , podemos medir también R en unidades de Planck, con lo cual tenemos la siguiente relación:

$$g^2 l_s^2 = l_p^8$$

- La constante de acoplamiento de la cuerda, g . Esta constante de acoplamiento y la escala de longitud se relacionan con la longitud de Planck y la constante de Newton como:

$$l_p^8 = g^2 l_s^8 = G$$

Del otro lado de la correspondencia tenemos dos constantes:

- El rango del grupo de gauge N
- El acoplamiento de gauge g_{ym}

Es de esperar que los dos parámetros del bulto R y g sean determinados por N y g_{ym} , lo cual está dado como:

$$\begin{aligned} \frac{R}{l_s} &= (N g_{ym}^2)^{\frac{1}{4}}, \\ g &= g_{ym}^2. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Podemos escribir también la constante de Newton 10-dimensional como

$$G = R^8 / N^2 \quad (2.67)$$

En la correspondencia hay dos límites interesantes, el que nos interesa es el límite de acoplamiento fuerte de 't Hooft, definido como:

$$\begin{aligned} g_{ym} &\rightarrow 0 \\ N &\rightarrow \infty \\ g_{ym}^2 N &= cte \end{aligned} \quad (2.68)$$

Desde el punto de vista del bulto, este límite es:

$$\begin{aligned} g &\rightarrow 0 \\ \frac{L}{l_s} N &= cte \end{aligned} \quad (2.69)$$

Por tanto, el límite de acoplamiento fuerte de 't Hooft es también el límite de la teoría clásica de cuerdas en un espacio de AdS fijo. Este límite es dominado por una teoría

clásica de supergravedad.

Finalmente, los parámetros en este acoplamiento quedan relacionados en lo que llamaremos el *traductor* de AdS/CFT:

$$N^2 = \frac{\pi L^3}{2 G_5} \quad y \quad \lambda = \left(\frac{L}{l_s}\right)^4 \quad (2.70)$$

Asimismo, en este límite es suficiente usar la teoría gravitacional clásica:

$$Z_{CFT} = e^{-\underline{S}_E} \quad (2.71)$$

Donde S_E es la acción euclideanizada y \underline{S}_E es la acción on shell, la cual es obtenida sustituyendo la solución clásica de la métrica en la acción.

Campos en la frontera de AdS

3.1 Campo escalar

Una vez analizado el espaciotiempo de Anti de Sitter, poniendo especial énfasis en lo que pasa en su frontera, nos interesa ver como se comporta un campo escalar real dentro de este espacio y el comportamiento asintótico del mismo en la frontera del espacio, pues, como veremos, los campos en AdS corresponden a fuentes de operadores en la teoría de campos.

Vamos a considerar el espacio AdS en d dimensiones y con signatura euclidea:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} [dz^2 + \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu]. \quad (3.1)$$

La acción que describe un campo escalar en AdS_d euclideo es

$$S = \int d^d x \sqrt{g} [g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + m^2 \phi^2], \quad (3.2)$$

del principio de mínima acción, la variación de la acción nos da las ecuaciones de movimiento del campo escalar; notando que en este caso los términos de frontera en la variación no serán nulos, las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_M (\sqrt{g} g^{MN} \partial_N \phi) - m^2 \phi = 0 \quad (3.3)$$

o explícitamente con la métrica del espacio Anti de Sitter:

$$z^{d+1} \partial_z (z^{d-1} \partial_z \phi) + z^2 \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 L^2 \phi = 0. \quad (3.4)$$

Para resolver esta ecuación vamos a hacer una descomposición en modos de Fourier, para lo cual tomamos la transformada de Fourier del campo ϕ :

$$\phi(z, x^\mu) = \int \frac{d^d x}{2\phi} e^{ikx} f_k(z), \quad (3.5)$$

con lo cual la ecuación de movimiento es:

$$z^{d+1} \partial_z (z^{d-1} \partial_z f_k) - z^2 k^2 f_k - m^2 L^2 f_k = 0. \quad (3.6)$$

Vamos a resolver la ecuación cerca de la frontera, i.e., cerca de $z = 0$, para lo cual proponemos una solución con $f_k \sim z^\beta$ para algún exponente β , con esto y quedándonos solo con los términos cercanos a $z = 0$, llegamos a la expresión:

$$\beta^2 - \beta d - m^2 L^2 = 0 \quad (3.7)$$

Con soluciones

$$\beta = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2} \quad (3.8)$$

Así pues, cerca de $z \sim 0$ la función $f_k(z)$ se comporta como:

$$f_k(z) \approx A(k) z^{d-\Delta} + B(k) z^\Delta \quad (3.9)$$

con

$$\Delta = \frac{d}{2} + \nu$$

y

$$\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}.$$

Ahora, podemos hacer la transformada inversa de Fourier para ver como es el comportamiento del campo en términos de las variables de configuración

$$\phi(z, x) = A(x) z^{d-\Delta} + B(x) z^\Delta, \quad (3.10)$$

Notemos que Δ es real si $\nu \in \Re$, lo cual sucede cuando la masa m satisface la cota de Breitenlohner-Freedman

$$m^2 \geq -\left(\frac{d}{2L}\right)^2,$$

lo cual significa que m^2 puede ser negativa (el campo puede ser taquiónico) pero debe satisfacer la cota BF. Suponiendo que el campo cumple dicha cota, notamos lo siguiente

$$\nu = 2\Delta - d \geq 0,$$

lo cual se cumple para masas arriba de la cota BF; así el término que se comporta como $z^{d-\Delta}$ es el que domina cuando nos aproximamos a la frontera de AdS. Haciendo $z = \epsilon$ y despreciando el término no dominante, tenemos que:

$$\phi(z = \epsilon, x) \approx \epsilon^{d-\Delta} A(x), \quad (3.11)$$

este campo diverge cuando tomamos el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Por otro lado, para hacer una identificación de la fuente $\varphi(x)$ en una QFT con alguna expresión del campo $\phi(z, x)$ en la frontera de nuestro espacio, tenemos que quitar de alguna forma las divergencias en éste; esto lo hacemos simplemente multiplicando el campo por algún factor, de forma que nuestra fuentes será, como veremos más adelante en detalle, solo el término $A(x)$, definimos pues:

$$\varphi(x) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} \phi(z, x) \quad (3.12)$$

Con esta definición, la fuente es claramente libre de divergencias. Para tener una mejor noción del significado de Δ , regresemos un momento a la acción del campo escalar en la frontera de nuestro espaciotiempo. Recordemos que en el proceso de hacer la variación de la acción, tenemos lo siguiente:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \int d^{d+1}x \sqrt{g} [E.deM.] + \partial_M (\sqrt{g} \phi \partial_N \phi) \delta \phi \quad (3.13)$$

Naturalmente, el primer integrando son las ecuaciones de movimiento del campo, mientras que el segundo término puede ser manipulado usando el teorema de la divergencia, de forma que nos quede solamente:

$$\frac{\delta S_{frontera}}{\delta \phi} = \int_{\partial M} d^d x \sqrt{\gamma} \phi \partial_N \phi \delta \phi \quad (3.14)$$

En términos del operador dual a ϕ , \mathcal{O} la acción en la frontera quedaría:

$$S_{frontera} \sim \int_{\partial M} d^d x \sqrt{\gamma} \phi(\epsilon, x) \mathcal{O}(\epsilon, x), \quad (3.15)$$

donde $\gamma = (\frac{L}{\epsilon})^{2d}$ es el determinante de la métrica inducida en $z = \epsilon$, con lo cual, escribiendo

en términos de la fuente, quedaría:

$$S_{frontera} \sim L^d \int_{\partial M} d^d x \varphi(x) \epsilon^\Delta \mathcal{O}(\epsilon, x), \quad (3.16)$$

Para hacer $S_{frontera}$ finita e independiente de ϵ , cuando $\epsilon \rightarrow 0$ requerimos:

$$\mathcal{O}(\epsilon, x) = \epsilon^\Delta \mathcal{O}(x), \quad (3.17)$$

pero, ir de $z = 0$ a $z = \epsilon$ es una transformación de escala en la QFT. Por tanto, Δ se interpreta como la dimensión de la escala de masa del operador dual \mathcal{O} . En otras palabras, el comportamiento de $\mathcal{O}(\epsilon, x) = \epsilon^\Delta \mathcal{O}(x)$ es la renormalización de la función de onda de \mathcal{O} conforme nos movemos dentro del bulto.

De la misma manera, de la relación $\phi(\epsilon, x) = \epsilon^{d-\Delta} \varphi(x)$ se sigue que $d - \delta$ es la dimension de escala de masa de la fuente φ

3.2 Campo fermiónico

3.2.1 Preliminares de campo fermiónico

A la hora de tratar con espinores en AdS, debemos tener una expresion válida para el operador de Dirac en este espacio, en $(d+1)$ dimensiones, para lo cual, hay tres cuestiones que hemos de resolver:

- Tenemos que hallar las matrices de Dirac en el espacio de Minkowski $d+1$ dimensional
- Hallar las matrices de Dirac en una geometría no Euclidea
- Hallar la derivada covariante de un espinor

Hemos de enfatizar el hecho de que la geometría Riemanniana no es suficiente para el estudio de espinores. En el caso de partículas y campos clásicos, la dinámica es descrita de forma suficiente por su posición y velocidad. Pero si movemos un spin a lo largo de una curva, tenemos que no solo cambia su vector tangente, i.e., su velocidad; sino que cambia también la dirección del spin.

En un espacio curvo, la dirección del vector tangente cambia cuando este es movido a lo largo de una curva cerrada, dicho cambio es medido por los símbolos de Christoffel. Si también cambia la dirección del spin, diremos que el espacio tiene torsión y el análogo de los Christoffeles es la conexión de spin. Por lo tanto, esperaremos que la derivada covariante tratada hasta ahora no sea suficiente para describir ecuaciones de onda que involucren

spinors. Un tratamiento de la geometría no euclídea análogo al basado en el uso de la métrica es aquel que involucra en el formalismo de "vielbein". Los vielbein en un punto P pueden ser vistos como un sistema coordinado en ese punto para un sistema en el cual el tensor métrico no es otro que el tensor de Minkowski. Estos vielbein contienen toda la información contenida en la métrica y más aún, en cada punto hay un número infinito de sistemas coordinados equivalentes, todos ellos relacionados mediante transformaciones de Lorentz. Estudiaremos esto con más detalle, puesto que los vielbein son necesarios para el análisis de la ecuación de Dirac en fondos curvos y nos ayudarán a encontrar expresiones plausibles para las matrices de Dirac.

3.2.2 Vielbein

Consideremos un espacio D -dimensional. Como mencionamos anteriormente, siempre es posible hallar un sistema de coordenadas en el cual el tensor métrico es en un cierto punto P la métrica de Minkowski. Sean ξ^α las coordenadas de este punto en ese marco de referencia, los vielbein es un conjunto de D vectores

$$v_\mu^\alpha = \partial_\mu \xi^\alpha. \quad (3.18)$$

Si las coordenadas del punto P están dadas por x^μ en el marco general con métrica $g_{\mu\nu}(x)$ se cumple la siguiente relación:

$$\eta_{\alpha\beta} v_\mu^\alpha v_\nu^\beta = g_{\mu\nu} \quad (3.19)$$

Definimos de una forma genérica:

$$\Gamma = v_\mu^\alpha \gamma^\alpha \quad (3.20)$$

Las matrices definidas de esta manera satisfacen la relación:

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\}_+ = 2g_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

Para un espacio AdS_D las coordenadas inerciales son $\xi^A = \frac{L}{z} x^A$, por lo tanto, tenemos que

$$v_M^A = \partial_M \frac{L}{z} x^A = \frac{L}{z} \delta_M^A \quad (3.22)$$

3.2.3 Conexión de Spin

La derivada covariante para un espinor tiene la siguiente expresión:

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \right) \psi \quad (3.23)$$

con $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$, siendo σ el generador de transformaciones de Lorentz de un espinor, mientras que la conexión de spin nos indica el comportamiento de los vielbein cuando aquel es transportado.

$$\omega_\mu^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(v_\nu^\alpha \partial_\mu g^{\nu\lambda} v_\lambda^\beta + v_\nu^\alpha g^{\sigma\lambda} v_\lambda^\beta \Gamma_{\sigma\mu}^\nu - (\alpha \leftrightarrow \beta) \right) \quad (3.24)$$

Para AdS esto se simplifica considerablemente y las únicas contribuciones no nulas son:

$$\omega_\mu^{0\alpha} = -\omega_\mu^{\alpha 0} = \frac{L}{z} \delta_\mu^\alpha \quad (3.25)$$

En esta última ecuación, notemos que el cero es la componente asociada a z , mientras que los índices griegos corren de 1 a d .

3.2.4 El operador de Dirac en AdS

Con los elementos ya vistos, podemos intentar escribir el operador de Dirac en AdS:

$$D_M = \partial_M + \frac{iL}{4z} (\Sigma_{0M} - \Sigma_{M0}) \quad (3.26)$$

Donde $\Sigma_{AB} = \frac{1}{2i}[\Gamma_A, \Gamma_B]$, de forma que:

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{L}{2z} \Gamma_\mu \Gamma_0 \quad (3.27)$$

$$D_0 = \partial_z \quad (3.28)$$

Así pues, el operador de Dirac es

$$i\tilde{\Gamma}^M D_{\dot{M}} - m_0 = \frac{i}{L} (z\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{d}{2}\Gamma_0 - z\Gamma_0 \partial_z) - m_0 \quad (3.29)$$

Donde hemos usado: $\tilde{\Gamma}^M = z\Gamma^M$, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, $\gamma_\mu \gamma^\mu = d + 1$.

3.2.5 Campo de Fermi

Con base en las anteriores secciones, vamos a plantear un campo de Fermi en AdS y resolver sus ecuaciones de movimiento para hallar la fuente asociada a este campo, comenzamos con la acción del campo de Fermi:

$$S = -i \int d^{d+1}x \sqrt{g} \bar{\Psi} (\not{\partial}_\mu - m) \Psi \quad (3.30)$$

Con ecuaciones de campo dadas por:

$$(\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 \quad (3.31)$$

y

$$\bar{\Psi}(\gamma^\mu D_\mu - m) = 0 \quad (3.32)$$

Estamos en el espacio de Anti de Sitter, descrito por la métrica (3.1), en la cual cada valor de z^2 es un espacio de Minkowski, con métrica $ds^2 = \eta_{ij}dx^i dx^j$. Si queremos acoplar espinores a este espacio, tenemos que elegir una base apropiada i.e., vielvein e_μ^a , $a = 0, 1 \dots d$ tal que $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$. Para nuestra métrica, solo tenemos:

$$e_a^\mu = (z)^{-1} \delta_a^\mu \quad y \quad e_\mu^a = (z) \delta_\mu^a. \quad (3.33)$$

Asimismo, nuestro operador de Dirac toma la siguiente forma:

$$D_i = \partial_i + \omega_i^{rj}.$$

En la base de los vielvein, la conexión de spin $\omega_i^{0j} = -\omega_i^{j0} = (z)^{-1} \delta_j^i$ y todas las demás son cero; así, la ecuación de Dirac puede ser escrita como:

$$\left(z\Gamma^\mu \partial_\mu - \frac{d}{2}\Gamma^z - m \right) \Psi = 0 \quad (3.34)$$

Vamos a trabajar, así como el caso del campo escalar, en modos de Fourier, por lo cual tomamos la transformada del campo

$$\Psi(z, x) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{ikx} \psi(z)$$

De forma que la ecuación de Dirac queda como:

$$\left(z\Gamma^z \partial_z + ikz\Gamma^x - \frac{d}{2}\Gamma^z - m \right) \psi = 0 \quad (3.35)$$

Vamos a dar una base explícita para las matrices γ

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} -\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^t = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^x = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Donde las σ_i son las matrices de Pauli estándar. Podemos definir unos proyectores con

ayuda de esta base de la siguiente manera:

$$\Gamma_+ \equiv \frac{1}{2}(1 + \Gamma^z) \quad \Gamma_- \equiv \frac{1}{2}(1 - \Gamma^z) \quad (3.36)$$

Expresando las ecuaciones de movimiento en términos de estos proyectores:

$$(z\partial_z - \frac{d}{2} - m)\psi_+ + kz\sigma_3\psi_- = 0, \quad (3.37)$$

$$(z\partial_z - \frac{d}{2} - m)\psi_- + kz\sigma_3\psi_+ = 0, \quad (3.38)$$

Las cuales pueden desacoplarse para darnos una ecuación de segundo orden:

$$\left(\partial_z^2 - \frac{d}{z}\partial_z + \frac{1}{z^2}\left(-m^2 \pm m + \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2}\right) - k^2\right)\psi_{\pm} = 0 \quad (3.39)$$

Ahora, vamos a resolver la ecuación para ψ_+ , proponemos, como en el caso del campo escalar, una forma del campo $\psi \sim z^\beta$ tal que al sustituir en la ecuación anterior, obtengamos

$$\partial_z^2 z^\beta - \frac{d}{z}\partial_z z^\beta + \frac{1}{z^2}\left(-m^2 \pm m + \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2}\right)z^\beta - k^2 z^\beta = 0 \quad (3.40)$$

Y al quedarnos con los términos relevantes, obtengamos que β toma los siguientes valores:

$$\beta = -\frac{d}{2} + m \quad (3.41)$$

3.3 p-formas en AdS

Un campo tensorial antisimétrico de rango $p+1$, $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ puede ser identificado con una $(p+1)$ -forma.

$$A_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+1}} \quad (3.42)$$

una $(p+1)$ -forma se acopla naturalmente a objetos geométricos Σ_{p+1} de dimension espaciotemporal $(p+1)$ porque una acción invariante ante difeomorfismos puede ser construida como sigue:

$$S_{p+1} = T_{p+1} \int_{\Sigma_{p+1}} A_{p+1} \quad (3.43)$$

La acción es invariante bajo transformaciones $\rho(x)$ de rango p

$$A_{p+1} \rightarrow A_{p+1} + d\rho_p \quad (3.44)$$

pues S_{p+1} transforma con una derivada total. EL campo A_{p+1} tiene un campo de esfuerzo invariante de norma F_{p+2} , que es una $p+2$ forma cuyo flujo se conserva. Existen soluciones de supergravedad con carga no trivial A_{p+1} llamadas p -*branas*, por la dimensión espacial de su geometría.

Cada campo de norma A_{p+1} tiene un *dual* magnético A_{D-3-p}^{mag} que es una forma diferencial de rango $D - 3 - p$ cuyo campo de esfuerzo se relaciona con A_{p+1} por la dualidad de Poincaré:

$$dA_{D-3-p}^{mag} \equiv \star A_{p+1} \quad (3.45)$$

De esta forma, cada p -brana tiene también un dual magnético, que es una $(D - 4 - p)$ brana acoplada al campo A_{D-3-p}^{mag} . Las branas posibles en supergravedad con $D = 11$ están muy restringidas por el único tensor completamente antisimétrico en la teoría es $A_{\mu\nu\rho}$ de rango 3.

Vamos a preentar ahora el caso de p -formas.

3.3.1 p -forma masiva en AdS

Consideramos ahora una p -forma masiva $\mathbf{A} = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} d^{x_{\mu_1}} \dots d^{x_{\mu_p}}$ en AdS_{d+1} la acción de \mathbf{A} está dada por:

$$S = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x (F \wedge \star F + m^2 A \wedge \star A) \quad (3.46)$$

Donde $F = dA$ es una $p+1$ forma. Haciendo la variación de esta acción, la ecuación de movimiento de la acción es:

$$(-1)^p d \star dA - m^2 \star A = 0 \quad (3.47)$$

y A también satisface la condición:

$$d \star A = 0 \quad (3.48)$$

Las ecuaciones de movimiento para esta forma, en la métrica de AdS son las siguientes:

$$[z^2 \partial_\mu^2 + (-1 - D + 2p)z \partial_z - (m^2 - D - 1 + 2p)] A_{zi_2 \dots i_p} = 0, \quad (3.49)$$

$$[z^2 \partial_\mu^2 + (-1 - D + 2p)z \partial_z - (m^2 - D - 1 + 2p)] A_{i_2 z \dots i_p} = 0, \quad (3.50)$$

...

$$[z^2 \partial_\mu^2 + (1 - D + 2p)z \partial_z - m^2] A_{i_2 \dots i_p} = 2z (\partial_{i_1} A_{zi_2 \dots i_p} + (-)^{p-1} \partial_{i_2} A_{zi_3 \dots i_p i_1} + \dots) \quad (3.51)$$

Vamos a reescribir estas ecuaciones de manera que absorbamos algunas constantes, para ello, redefinimos las componentes en término de los vielbein:

$$\hat{A}_{zi_2\dots i_p} = z^{p-1}A_{zi_2\dots i_p} \quad \hat{A}_{i_1\dots i_p} = z^p A_{i_1\dots i_p} \quad (3.52)$$

De forma que nuestras ecuaciones adquieren la siguiente forma:

$$\left[z^2 \partial_\mu^2 + (1-d)z\partial_z - (m^2 + p^2 - dp) \right] \hat{A}_{zi_2\dots i_p} = 0 \quad (3.53)$$

$$\left[z^2 \partial_\mu^2 + (1-d)z\partial_z - (m^2 + p^2 - dp) \right] \hat{A}_{i_2\dots i_p} = 2z(\partial_{i_1} \hat{A}_{zi_2\dots i_p}) \quad (3.54)$$

$$+ (-)^{p-1} \partial_{i_2} \hat{A}_{zi_3\dots i_p i_1} + \dots \quad (3.55)$$

Con condiciones de consistencia:

$$\partial_i A_{ii_2\dots i_{p-1}z} = 0 \quad y \quad \partial_i A_{ii_2\dots i_{p-1}z} + z\partial_z A_{zi_2\dots i_p} = (D-p)A_{zi_2\dots i_p} \quad (3.56)$$

Ahora, resolveremos la ecuación de movimiento de $A_{zi_2\dots i_p}$, para lo cual, proponemos una solución en potencias como $A_{zi_2\dots i_p} \sim z^\Delta$ cuando z se aproxima a cero; si sustituimos esta solución en (3.53), obtenemos la ecuación algebraica:

$$\Delta^2 + d\Delta - (m^2 + p^2 - dp) = 0. \quad (3.57)$$

La solución de esta cuadrática es simplemente $\Delta = \frac{d}{2} \pm \nu$, con

$$\nu = \sqrt{m^2 + \left(\frac{d}{2} - p\right)^2}, \quad (3.58)$$

Con lo cual, tenemos que cuando z se va a cero, las soluciones de la componente z de la p -forma tienen el siguiente comportamiento:

$$A_{zi_2\dots i_p} \sim z^{\frac{d}{2}} (A_- z^{-\nu} + A_+ z^\nu). \quad (3.59)$$

La solución de las ecuaciones no homogéneas son distintas, sin embargo, la Δ es la misma.

Agujeros negros y AdS/CFT

Nuestro objetivo en esta tesis es estudiar en detalle transición de Hawking-Page, una transición de fase de primer orden, en el contexto de la correspondencia AdS/CFT. Esta transición es conocida desde 1983, cuando fue estudiada por Hawking y Page [7]. Para estudiar esta transición es necesario revisar algunos concepto termodinámicos asociados al agujero negro de Schwarzschild, [23], [18], [10], como la energía libre y la temperatura, de forma que puedan éstos puedan ser traducidos de la teoría de gravedad a la teoría de norma dual.

Como sabemos, las ecuaciones de Einstein en vacío son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1)$$

La primera solución a estas fue el agujero negro de Schwarzschild, el cual es descrito por el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\Omega_d^2. \quad (4.2)$$

Donde $d\Omega^2$ es el elemento de línea de la esfera d -dimensional. Algunas de las propiedades de este agujero negro son las siguientes:

- La métrica de éste se aproxima a la del espacio plano cuando $r \rightarrow \infty$.
- M representa la masa del agujero negro.
- El horizonte se localiza en $r = 2MG$ donde $g_{00} = 0$
- La cantidad invariante, escalar de kretschmann,

$$R^{\mu\nu\sigma\rho}R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{48G^2M^2}{r^6}, \quad (4.3)$$

diverge en $r = 0$. Esto se llama singularidad espaciotemporal, donde la gravedad es infinitamente fuerte.

En el espacio de anti de Sitter pueden existir agujeros negros, lo cual, en el esquema de la correspondencia, lleva a conclusiones interesantes al plantearse sistemas duales de materia condensada y superconductividad [14], [10]; puesto que nuestro objetivo es estudiar transiciones de fase holográficas, vamos a exponer brevemente lo concerniente a termodinámica de agujeros negros en el contexto de la dualidad, para después poder abordar con elementos suficientes la transición de Hawking-Page.

4.1 Termodinámica de agujeros negros

Para el Agujero Negro de Schwarzschild, el radio del horizonte está dado como: $r_0 = 2GM/c^2$. Como sabemos, el radio del horizonte es proporcional a la masa del agujero negro, de forma que si entra masa en el agujero negro, el área del horizonte se incrementa:

$$A = 4\pi r_0^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}. \quad (4.4)$$

Por otro lado, nada puede escapar del agujero negro, de forma que el área es una cantidad que no disminuye nunca, lo cual trae viejas reminiscencias de la entropía termodinámica. De esta suerte, uno podría esperar que exista una cantidad como la entropía asociada a agujeros negros:

$$S \propto A \quad (4.5)$$

Llamaremos a esta cantidad *Entropía de Agujero Negro*

Más allá de la segunda ley de la termodinámica, se pueden asociar propiedades de los agujeros negros con las demás leyes de la termodinámica, sin embargo, ello va más allá de las fines de este trabajo, por lo cual solo vamos a mencionarlas, sin entrar en detalle.

4.1.1 Ley cero

En termodinámica, un sistema eventualmente llega a un estado de equilibrio térmico con su alrededor. Para un agujero negro, por otro lado, tenemos la propiedad de que, independientemente de asimetrías iniciales o de fluctuaciones, eventualmente llega a la simetría esférica, la cual implica que la gravedad superficial es constante sobre el horizonte. El teorema de no-pelo se puede enunciar en este caso de la forma siguiente: la gravedad sobre el horizonte eventualmente es una constante, aún si no lo era inicialmente. Esto es

similar a la Ley cero termodinámica, cuando la gravedad en el horizonte hace las veces de la temperatura.

4.1.2 Primera Ley

Si la masa del agujero negro se incrementa por un dM , el área del horizonte se incrementa un dA , de forma que tiene sentido la relación:

$$dM \propto dA \quad (4.6)$$

Uno puede checar que con las constantes adecuadas, esto se ve como:

$$GdM \cong \kappa dA \quad (4.7)$$

y, diferenciando 4.4,

$$GdM = \frac{\kappa}{8\pi} dA, \quad (4.8)$$

donde κ es la gravedad superficial del agujero negro. Esta es la primera ley de la termodinámica para agujeros negros.

4.1.3 Segunda Ley

Un problema que puede plantearse a la analogía entre agujeros negros y sistemas termodinámicos es que en principio nada escapa del agujero negro, sin embargo, para tener la noción de temperatura, un agujero negro debería tener radiación térmica.

Si consideramos que este objeto también está hecho de materia, y que habrían de considerarse efectos cuánticos, el agujero negro efectivamente emite radiación, llamada *Radiación de Hawking*, con temperatura dada por:

$$k_B T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c} \quad (4.9)$$

$$= \frac{\hbar c^3}{8\pi G M}, \quad (\text{Schwarzschild}) \quad (4.10)$$

Una vez que nos hemos hecho con una expresión para la temperatura, ya podremos hallar una ecuación que nos relacione la entropía del agujero negro y el área del horizonte. De esta forma, podemos reescribir la primera ley como:

$$d(Mc^2) = \frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA \quad (4.11)$$

$$= T \frac{k_B c^3}{4G\hbar} dA \quad (4.12)$$

Así, comparando con la primera ley de la termodinámica, tenemos una expresión para la entropía:

$$S = \frac{A}{4G\hbar} k_B c^3 = \frac{1}{4} \frac{A}{l_p} k_B \quad (4.13)$$

Conviene decir algunas cosas al respecto de esta cantidad. En primer lugar, la entropía es una medida de los grados de libertad del sistema, pero nosotros no hemos hecho una derivación mediante un conteo de grados de libertad, en este sentido, estamos asumiendo que las leyes clásicas de agujeros negros son en realidad cantidades termodinámicas. En segundo lugar:

- La entropía del agujero negro es proporcional al área de este.
- La entropía estadística es proporcional al volumen del sistema.

Esta diferencia es de gran importancia para la conjetura y nos da alguna pista acerca de la naturaleza de los estados microscópicos de un agujero negro. Por la diferencia en el comportamiento de las entropías de un agujero negro y un sistema estadístico, un agujero negro cuatro dimensional no puede corresponder en la conjetura a un sistema 4-dimensional; pero el área 5-dimensional corresponde al volumen 4-dimensional. Entonces, un agujero negro cinco-dimensional corresponde a un sistema estadístico cuatro-dimensional, en este sentido se dice que la correspondencia de Maldacena es holográfica. Podemos resumir las leyes de la termodinámica de agujeros negros de la siguiente forma:

	Termodinamica	Agujero negro
Ley cero	T constante	κ constante
Primera ley	$dE = TdS$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi G} dA$
Segunda Ley	$dS \geq 0$	$dA \geq 0$
Tercera ley	$S \rightarrow 0$ si $T \rightarrow 0$	$S \rightarrow 0$ si $T \rightarrow 0$?

4.2 AdS/CFT en equilibrio

El espacio de Anti de Sitter puede contener un agujero negro, de los cuales, el ejemplo más simple es el agujero negro de Schwarzschild-AdS, el cual puede plantearse bien con horizonte esférico o con horizonte plano. Por el momento vamos a considerar el segundo caso, la brana negra en AdS o $SAdS_5$.

$SAdS_5$ es una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, tal como el espacio AdS_5 , descrito por la siguiente métrica:

$$ds_5^2 = - \left(\frac{r}{L} \right)^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r}{L} \right)^2 f(r)} + \left(\frac{r}{L} \right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.14)$$

con

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \quad (4.15)$$

El horizonte está localizado en $r = r_0$. Cuando $r_0 = 0$, la métrica se reduce al espaciotiempo AdS_5 en coordenadas de Poincaré.

Las coordenadas (x, y, z) representan las coordenadas de \mathbb{R}^3 . En el agujero negro de Schwarzschild, esto era $r^2 d\Omega^2$, que representa el horizonte esférico, pero aquí el horizonte está en $r = r_0$, el cual se extiende indefinidamente en las direcciones (x, y, z) .

Notemos que el espaciotiempo AdS es invariante bajo los escalamientos $x^\mu \rightarrow ax^\mu$, $r \rightarrow r/a$; bajo este escalamiento la métrica de SAdS transforma como:

$$ds_5^2 \rightarrow -\left(\frac{r}{L}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{ar_0}{r}\right)^4\right\} + \dots, \quad (4.16)$$

de forma que uno siempre puede escalar el radio del horizonte, esto quiere decir, agujeros negros con horizontes de diferentes radios son equivalentes; como veremos, la temperatura del agujero negro está directamente relacionada con r_0 , lo que significa que uno puede cambiar la temperatura cambiando la escala. Esto significa que todas las temperaturas son equivalentes y la física es la misma (excepto a temperatura cero). De esta forma, no existe una temperatura característica como en una transición de fase, desde el punto de vista de la teoría de norma, esto es porque $\mathcal{N} = 4$ SYM es invariante de escala y no tiene cantidades dimensionales aparte de la temperatura.

4.3 Cantidades termodinámicas de SAdS

Vamos a calcular algunas cantidades termodinámicas del agujero negro $SAdS_5$. En la correspondencia AdS/CFT estas son interpretadas como cantidades termodinámicas del dual $\mathcal{N} = 4$ SYM en acoplamiento fuerte. Para escribir estas cantidades en términos de la teoría de norma, vamos a necesitar las relaciones que nos traducen una teoría en otra y que fueran dadas en el primer capítulo:

$$N_c^2 = \frac{\pi L^3}{2 G_5}, \quad \lambda = \left(\frac{L}{l_s}\right)^4. \quad (4.17)$$

Como vemos, estas ecuaciones relacionan parámetros de la teoría de norma (a la izquierda) con parámetros de gravedad a la derecha.

La temperatura de la brana negra puede calcularse como:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{f'(r_0)}{4\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi L^2} \left(2r + \frac{2r_0^4}{r^3} \right) \Big|_{r=r_0} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{r_0}{L^2}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Para este agujero negro, el horizonte tiene una extensión infinita, y la entropía diverge, así que es más apropiado usar la densidad de entropía s . Si hacemos un corte infrarojo para evitar expresiones divergentes, la extensión espacial del agujero negro va como $0 \leq x, y, z \leq L_x, L_y, L_z$. Las coordenadas de la teoría de norma son (x, y, z) de forma que el volumen de la teoría de norma es $V_3 := L_x L_y L_z$. mientras que el área del horizonte es $(r/L)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. De la ley de área de la entropía, tenemos

$$S = \frac{A}{4G_5} = \frac{1}{4G_5} \left(\frac{r_0}{L} \right)^3 V_3, \tag{4.19}$$

o

$$s = \frac{S}{V_3} = \frac{1}{4G_5} \left(\frac{r_0}{L} \right)^3. \tag{4.20}$$

Uno puede reescribir esta ley de área como

$$s = \frac{a}{4G_5},$$

donde $a := A/V_3$ es la densidad de área del horizonte. Usando la expresión para la temperatura y el traductor, obtenemos:

$$s = \frac{\pi^2}{2} N_c T^3. \tag{4.21}$$

El resto de las cantidades termodinámicas pueden ser determinadas a partir de esta relación. La primera ley $d\epsilon = Tds$ puede darnos la densidad de energía como:

$$\epsilon = \frac{3}{8} \pi^2 N_c^2 T^4 \tag{4.22}$$

Finalmente es de interés densidad de entropía del gas libre en $\mathcal{N} = 4$ SYM y compararlo con nuestro resultado. Esta densidad de entropía está dada por:

$$s_{gas} = \frac{2\pi^2}{45} T^3 N_{gdl} = \frac{2\pi^2}{3} (N^2 - 1) T^3. \tag{4.23}$$

Y en el límite de $N \rightarrow \infty$

$$s_{gas} = \frac{2\pi^2}{3} N^2 T^3. \quad (4.24)$$

Como vemos, comparando este resultado para la entropía del agujero negro:

$$s_{BH} = \frac{3}{4} s_{gas} \quad (4.25)$$

4.4 Transición de fase en AdS/CFT

Vamos a estudiar la transición holográfica de Hawking Page, la cual, como nos enseñó Witten, [23], relaciona un comportamiento de confinamiento-desconfinamiento a temperatura finita en una teoría conforme con la transición de un agujero negro a un espacio AdS compacto. Esto por si mismo es sorprendente y desconcertante; *grosso modo*, podemos verlo de la siguiente forma: la entropía asociada con el agujero negro escala como N^2 y esto nos ayuda a contar los grados de libertad desconfinados. Sin embargo, en el límite de temperatura cero de la teoría de campo, el agujero negro desaparece y nos quedamos con una geometría simple de AdS con entropía cero. Esto nos indica que la entropía es de orden N^0 , lo cual se espera de estados de confinamiento, donde N^2 quarks se combinan en un solo singulete de norma (barión).

La mayoría de las aplicaciones a materia condensada de la correspondencia tienen que ver con branas negras, que son un concepto distinto al de agujero negro, esto consiste en lo siguiente:

Dado que el espacio AdS tiene frontera, uno está obligado a dar la topología precisa de esta frontera, antes que uno pueda nombrar la “cosa” negra en el origen. La dirección del tiempo es usualmente elegida como un “ círculo Euclideo” S^1 . Para las direcciones espaciales, lo mas intuitivo es un espacio compacto con condiciones de frontera en infinito tales que la frontera forme una esfera, S^{d-1} en $d - 1$ dimensiones espaciales. A una temperatura de Hawking finita el horizonte del agujero negro puede hacerse coincidir con esta frontera, y al bajar la temperatura, este horizonte se encoge a lo largo de la dirección radial, de forma que eventualmente se convierta en un punto en que la temperatura va a cero: esto es el agujero negro usual; sin embargo, uno puede elegir que el espacio de frontera sea no compacto, con topología de frontera $S^1 \times R^{d-1}$. En este caso el horizonte del agujero negro no es cerrado, sino que se extiende infinitamente en todas direcciones, eso es precisamente una brana negra.

Vamos a estudiar el caso de la transición de Hawking-Page en el caso del agujero negro esférico de Schwarzschild a continuación, lo cual nos dará pie a un estudio sobre la misma transición en la brana negra.

Como hemos visto, la función de partición del agujero negro, en la aproximación de punto

silla es:

$$Z_{CFT} \simeq e^{-\underline{S}_E}, \quad (4.26)$$

Donde \underline{S}_E representa la acción on-shell, la cual es obtenida sustituyendo la solución clásica g en la acción. Como sabemos, la solución clásica podría no ser única, por ejemplo, si tenemos dos puntos silla, debemos sumarlos, de forma que:

$$Z_{CFT} \simeq e^{-\underline{S}_E} + e^{-\hat{S}_E}, \quad (4.27)$$

Donde $e^{-\underline{S}_E}$ y $e^{-\hat{S}_E}$ son ambas acciones on-shell obtenidas de soluciones g y \hat{g} , respectivamente. En este caso, la contribución dominante vendría de la solución que tiene menor energía libre.

Como un ejemplo simple consideremos $\mathcal{N} = 4$ SYM S_1 -compactificada, con periodicidad l . $\mathcal{N} = 4$ SYM en R^3 es invariante de escala y no tiene cantidades dimensionales excepto la temperatura. Uno puede cambiar la temperatura mediante un escalamiento, y todas las temperaturas son equivalentes. Introducir una escala l en la teoría de gauge cambia drásticamente la física; de forma que ya no se puede cambiar la temperatura mediante un reescalamiento y la teoría se parametriza por un parámetro adimensional lT . Como veremos, la teoría tiene una transición de fase de primer orden cuando $lT = 1$.

4.4.1 Ejemplo de transición de primero orden

Existen dos posibles geometrías duales que se aproximan a $\mathbb{R}^{1,2} \times S^1$ asintóticamente. El primero es el agujero negro de Schwarzschild- AdS_5 ($SAdS_5$):

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-f dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{fr^2} \quad (4.28)$$

con $f = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4$. La segunda es el solitón de AdS^1 :

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + fdz^2) + L^2 \frac{dr^2}{fr^2} \quad (4.29)$$

$$l = \frac{\pi L^2}{r_0} \quad (4.30)$$

El cual se obtiene del agujero negro mediante una doble rotación de Wick $\acute{z} = it$ y $\acute{t} = -iz$. Para temperaturas altas, el solitón sufre una transición de fase de primer orden a un agujero negro $SAdS$, tomando como parámetro de orden el radio del horizonte del

¹Ver Apéndice

agujero negro.

Vamos pues a evaluar la diferencia de energía libre entre SAdS y el solitón de AdS. Como vimos el capítulo anterior, la energía libre de SAdS es:

$$F_{BH} = -\frac{V_3}{16\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} = -\frac{V_3}{16\pi G_5} \pi^4 T^4. \quad (4.31)$$

El solitón tiene la misma geometría euclidea, así, su energía libre tiene la misma forma expresada en términos de r_0 , pero, puesto que en el caso del solitón la r_0 se relaciona no con la temperatura, sino con la periodicidad l de S^1 :

$$F_{soliton} = -\frac{V_3}{16\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} = -\frac{V_3}{16\pi G_5} \frac{\pi^4}{l^4}. \quad (4.32)$$

Así, la diferencia de energía libre es:

$$\Delta F = F_{BH} - F_{soliton} = -\frac{V_3}{16\pi G_5} \pi^4 \left(T^4 - \frac{1}{l^4} \right) \quad (4.33)$$

Podemos concluir, pues, lo siguiente:

- A baja temperaturas, $T < 1/l$ la solución estable es el solitón de AdS, que describe una fase de confinamiento, como veremos en la siguiente sección.
- Para temperaturas altas, $T > 1/l$, la solución estable es el agujero negro SAdS, el cual describe una fase desconfiada.

Puesto que el agujero negro es una configuración que posee entropía, mientras que el solitón no, vemos que la entropía es discontinua en $T = 1/l$, esto quiere decir, puesto que $S = \partial_t F$ es discontinua en $T = 1/l$, se trata de una transición de fase de primer orden.

4.4.2 Transición de Hawking-Page

Procedemos a estudiar esta transición de fase para el agujero negro de Schwarzschild, en este caso, la métrica:

$$ds_5^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.34)$$

En el límite asintótico $r \rightarrow \infty$, esta se reduce a:

$$ds_5^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.35)$$

que no es otra cosa que la métrica de AdS y cuya frontera está dada como:

$$ds_4^2 \sim \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + L^2 d\Omega^2) \quad (r \rightarrow \infty), \quad (4.36)$$

de manera que la teoría dual es $\mathcal{N} = 4$ SYM en S^3 de radio L . La métrica tiene una singularidad de curvatura en $r = 0$ y su horizonte está en $r = r_+$, que se obtiene para

$$\frac{r_+^2}{L^2} + 1 + \frac{r_0^4}{L^2 r^2} = 0 \quad (4.37)$$

de donde

$$r_0^4 = r_+^4 + L^2 r_+^2$$

Ahora, vamos a hacer un desarrollo de la métrica euclideanizada alrededor de r_+ , de forma que tenemos:

$$ds^2 \sim A(r - r_+) d\tau^2 + \frac{dr^2}{A(r - r_+)} + r^2 d\Omega_3^2, \quad (4.38)$$

con

$$A = \frac{4r_+^2 + 2L^2}{r_+ L^2}$$

Esta métrica tiene una singularidad de coordenadas removible si el tiempo euclideo tiene periodicidad β ; podemos ver esto de forma clara mediante el siguiente ejemplo:

Consideremos un espacio 2-dimensional con coordenadas polares ρ y θ , con la métrica

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (4.39)$$

para tener una geometría regular, el ángulo polar debe ser periódico con periodo 2π , de otra forma, en $\rho = 0$ existiría una singularidad cónica.

Definiendo $r = \frac{A\rho^2}{4} + r_+$, vemos que la métrica (4.38) se reduce a:

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(\frac{\rho A}{2}\right)^2 d\tau^2 + \rho^2 d\Omega_3^2. \quad (4.40)$$

Por tanto, para evitar la singularidad cónica en el horizonte, el tiempo τ debe tener un periodo:

$$\beta = \frac{4\pi}{A} = \frac{2\pi r_+ L^2}{2r_+^2 + L^2}. \quad (4.41)$$

Ahora, vamos a identificar este periodo con el inverso de la temperatura en la teoría de frontera, esto puede hacerse recordando que en mecánica estadística, para un sistema cuántico en el estado $|q\rangle$, la función de partición canónica con la inversa de la temperatura

β_{st} es:

$$Z = \sum_q \langle q | e^{-\beta_{st} H} | q \rangle, \quad (4.42)$$

Con H el hamiltoniano. En la aproximación de integral de trayectoria, uno puede derivar esta cantidad considerando sistemas en el estado $|q^i\rangle$ a tiempo t^i , la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado q^f a tiempo t^f es:

$$\langle q_{t^f}^f | q_{t^i}^i \rangle = \langle q^f | e^{-i(t_f - t_i)H} | q^i \rangle. \quad (4.43)$$

Identificando con la función de partición, uno tiene:

$$Z = \langle q^f | e^{-i(t_f - t_i)H} | q^i \rangle = \int Dq(t) e^{iS[q(t)]}, \quad (4.44)$$

lo cual se cumple para las siguientes condiciones

- $i(t_f - t_i) = \beta = \beta_{st}$ o $t_i = 0$, e $it_f = \beta = \beta_{sh}$, puesto que el tiempo inicial puede ser arbitrariamente escogido.
- $q^i = q^f = q$, tal que los estados inicial y final sean el mismo, el hecho de que ambos estados difieran por un tiempo euclídeo β , requiere que las configuraciones sean periódicas, i.e.:

$$q(\beta) = q(0),$$

en las integraciones funcionales. Por tanto, la periodicidad del tiempo euclideo del espaciotiempo es identificada con la inversa de la temperatura del sistema y la condición de equilibrio exige que la temperatura del agujero negro sea la misma que la inversa de beta. Por lo anterior, nuestra ecuación (4.41) puede escribirse como:

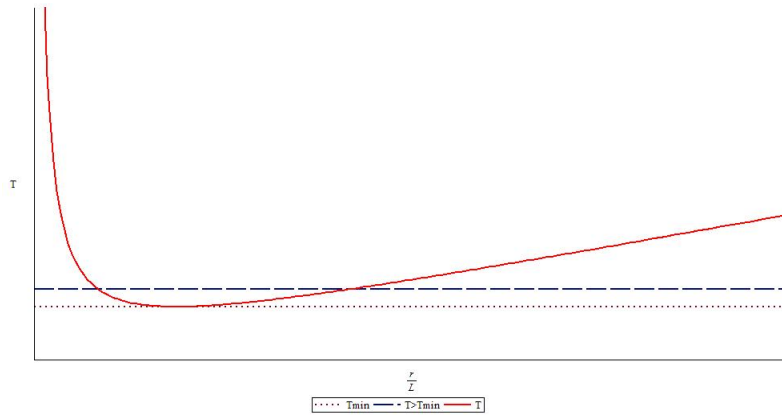
$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{2\pi r_+ L^2}{2r_+^2 + L^2}. \quad (4.45)$$

Si definimos la cantidad adimensional:

$$\bar{r} = \frac{r_+}{L}$$

podemos graficar la temperatura: Esta gráfica es interesante, porque nos permite ver claramente lo que pasa para diferentes valores de la temperatura. Como vemos, para una temperatura dada, existen dos valores de r_+ . La temperatura tiene un mínimo en $T_{min} = \sqrt{2}/\pi L$, donde $r_+ = L/\sqrt{2}$.

Tenemos entonces dos casos, si la solución es tal que $r_+ < L/\sqrt{2}$, es llamada “agujero negro pequeño”, el cual es pequeño comparado con la escala de AdS, L , y el efecto de la



constante cosmológica es despreciable. Por tanto, el comportamiento del agujero negro pequeño es similar al de agujero de Schwarzschild asintóticamente plano, notemos que para $r_+ \ll L$, la temperatura se aproxima a:

$$T \simeq \frac{1}{2\pi r_+},$$

que es el comportamiento de la solución 5-dimensional de Schwarzschild. Por otro lado, la solución con $r_+ > L/\sqrt{2}$ es llamada “agujero negro grande”. El comportamiento de esta solución es similar al de $SAdS_5$ con horizonte plano, de hecho, para $r_+ \gg L$,

$$T \simeq \frac{r_+}{\pi L^2}$$

Por lo tanto, en el espaciotiempo AdS no existe solución de agujero negro cuando $T < T_{min}$. En ese caso, la solución es el “espaciotiempo AdS térmico”, que no es otra cosa que el espaciotiempo AdS euclideo con periodicidad β_0 . Conforme incrementamos la temperatura, existe una transición de fase del espaciotiempo AdS térmico al agujero negro $SAdS_5$ (agujero negro grande, según lo visto arriba). De nuevo, esta es una transición de confinamiento/desconfinamiento en la teoría dual.

De la misma manera que en la sección anterior, vamos a evaluar la diferencia de energía entre AdS térmico y $SAdS_5$, lo cual se obtiene de forma análoga a lo hecho en el Apéndice 5.8. En este caso, para calcular la energía, solo es necesario evaluar la acción de bulto.

Al evaluar la acción on-shell de ambas soluciones, tenemos:

$$S_{SAdS} = \frac{1}{2\pi G_5 L^2} \int_0^\beta dt \int d\Omega_3 \int_{r_+}^r dr r^3 = \frac{\beta \Omega_3}{8\pi G_5 L^2} (r^4 - r_+^4)|_{r=\infty}. \quad (4.46)$$

$$S_{AdS} = \frac{1}{2\pi G_5 L^2} \int_0^{\beta_0} dt \int d\Omega_3 \int_0^r dr r^3 = \frac{\beta_0 \Omega_3}{8\pi G_5 L^2} (r^4)|_{r=\infty}. \quad (4.47)$$

Nos interesa la diferencia de energía, así, debemos tener una forma de relacionar ambas temperaturas. La temperatura de Hawking de $SAdS_5$ difiere de la temperatura propia $T(r)$ como:

$$T(r) = \frac{1}{\sqrt{|g_{00}(r)|}} T. \quad (4.48)$$

Para nuestro caso, la forma correcta es:

$$\beta f^{1/2} = \beta_0(r) f_0^{1/2} \quad (4.49)$$

donde las f y f_0 con la componente g_{00} de la métrica correspondiente. De esta forma, la diferencia de energía queda como:

$$\begin{aligned} \Delta F : &= \frac{1}{\beta} (S_{SAdS} - S_{AdS}) \\ &= \frac{\Omega_3}{8\pi G_5 L^2} \left\{ r^4 - r_+^4 - r^4 \sqrt{\frac{\left(\frac{r}{L}\right)^2 + 1 - \frac{r_0^4}{L^2 r^2}}{\left(\frac{r}{L}\right)^2 + 1}} \right\} \Big|_{r=\infty} \\ &\rightarrow r \rightarrow \infty \frac{\Omega_3}{8\pi G_5 L^2} \left\{ r^4 - r_+^4 - r^4 \left(1 - \frac{r_0^4}{2r^4}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Finalmente, la diferencia en energía libre es:

$$\Delta F = -\frac{\pi r_+^2}{8G_5 L^2} (r_+^2 - L^2). \quad (4.51)$$

De acuerdo a nuestro resultado, podemos concluir que $\Delta F < 0$ cuando $r_+ > L$, como sabemos, esta desigualdad no se cumple para el caso del agujero negro pequeño; de ahí que esta no sea una solución estable.

Podemos graficar nuestra energía libre:

Donde la línea punteada indica el comportamiento del agujero negro pequeño, el cual es una solución inestable. Podemos obtener las siguientes conclusiones:

- $T < T_{min}$ no puede existir una solución de agujero negro, la única solución estable es el espacio de AdS térmico.
- $T_{min} < T < T_c$ Puede existir un agujero negro, pero con $\Delta F > 0$, es una solución inestable que decae mediante radiación de Hawking al espaciotiempo de AdS térmico.
- $T > T_c$. Se forma un agujero negro grande, el cual tiene energía libre negativa. Hay un cambio discontinuo del espacio AdS térmico al agujero negro. La temperatura de transición es T_c .

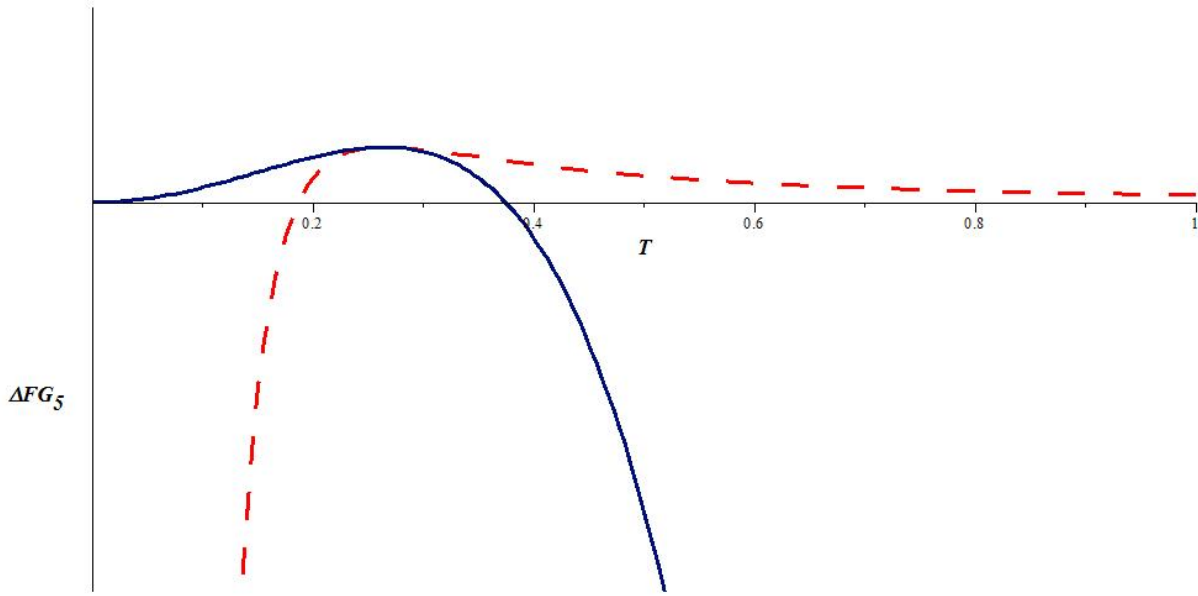


Figura 4.1: Energía libre como función de la temperatura

Puesto que tenemos la formación de un agujero negro en $T = T_c$, esta es una transición de fase de primer orden.

Cuando $T_{min} < T < T_c$ la pseudo energía libre desarrolla un punto silla de un estado meta estable que corresponde al agujero negro. Pero este no es un estado globalmente estable, de forma que decae al estado globalmente estable que es el AdS térmico.

De nuestra expresión de la energía libre podemos calcular otras cantidades termodinámicas:

$$S = \partial_T \Delta F = \frac{\pi^2 r_+^3}{2G_5} = \frac{\Omega_3 r_+}{4G_5} \quad (4.52)$$

$$E = \Delta F + TS = \frac{3\pi r_+^2 (r_+^2 + L^2)}{8G_5 L^2} = \frac{3\pi r_+^4}{8G_5 L^2} \quad (4.53)$$

El calor específico puede ser calculado mediante la relación:

$$C_p = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial E}{\partial r_+} \frac{\partial r_+}{\partial T} = \frac{3(L^2 + 2r_+^2)^3 r_+}{L^3 G_5 (L^2 - 2r_+^2)} \quad (4.54)$$

Vemos que el calor específico es positivo si $r_+ > \frac{L}{\sqrt{2}}$, de otra forma es negativo, por lo tanto, podemos concluir que la solución de agujero negro pequeño es inestable pues su calor específico es negativo.

Si repetimos los calculos hechos en el Apéndice 5.8, podemos obtener la energía libre del agujero negro:

$$F_{SAdS} = -\frac{\pi}{(G_5 L^2)} (r_+^4 - L^2 r_+^2 - \frac{3}{4} L^4). \quad (4.55)$$

De donde obtenemos:

$$S = \frac{\pi^2 r_+^3}{2G_5}, \quad E = \frac{3\pi r_0^4}{8G_5 L^2} + \frac{3\pi L^2}{32G_5} \quad (4.56)$$

Notemos que el último es un término constante, usando nuestro traductor, podemos expresarlo como:

$$E_0 = \frac{3N_c^2}{16L} \quad (4.57)$$

Este E_0 puede ser interpretado como la energía de Casimir desde el punto de vista de la teoría de frontera. Para campos libres en $S^3 \times R$ con radio L , la energía de Casimir tiene la expresión:

$$E_{Casimir} = \frac{1}{960L} (4n_0 + 17n_{1/2} + 88n_1) \quad (4.58)$$

donde los n_i representan los diferentes campos en la teoría de frontera. Para $\mathcal{N} = 4$ SYM,

- Escalares reales: $n_0 = 6(N_c^2 - 1)$
- fermiones de Weyl $n_{1/2} = 4(N_c^2 - 1)$
- Campos vectoriales: $n_1 = N_c^2 - 1$

Sustituyendo estas ecuaciones en (4.58), tenemos:

$$E_{Casimir} = \frac{3(N_c^2 - 1)}{16L}, \quad (4.59)$$

la cual, cuando tomamos el límite N grande concuerda perfectamente con (4.57).

En el contexto de la conjetura de Maldacena, esta transición de fase en la geometría de una teoría de gravedad debe corresponder a algo en la teoría de norma en la frontera. Como veremos en el siguiente capítulo, se trata de poner en correspondencia una transición de confinamiento/desconfinamiento en la teoría de norma dual. Como ya vimos en la sección anterior, las cantidades termodinámicas de SAdS solamente difieren del gas libre en $\mathcal{N} = 4$ SYM por un factor de $3/4$, podemos esperar que la fase de AdS térmico represente una fase confinada.

Una transición de confinamiento en CFT

5.1 El problema del confinamiento

Es muy desafortunado que a pesar del papel central que juega el modelo estándar en la física de partículas, no entendamos realmente como trabaja. El problema principal radica en el sector que describe la interacción de quarks y gluones, conocido como Cromodinámica Cuántica o QCD por sus siglas en inglés (Quantum Chromodynamics). Sucede que no sabemos con seguridad porque los campos fundamentales de la teoría, los cuales describen los quarks y gluones, no aparecen en el espectro de partículas de la teoría, asintóticamente, como estados de partícula. Existe un acuerdo casi general acerca de lo que sucede en colisiones de partículas a altas energías: la formación de tubos de flujo de color eléctrico entre quarks y anti-quarks, y la eventual fragmentación de estos tubos de flujo en mesones¹ y bariones², en vez de quarks y gluones libres. Sin embargo no existe un acuerdo general sobre la *causa* de estas características y esta limitación expone nuestra ignorancia en el régimen de distancias grandes sobre las teorías de norma no-abelinas en general y la QCD en particular.

Este problema es conocido como el problema de confinamiento; históricamente la palabra *confinamiento* en el contexto de la física hadrónica se refirió al hecho de que los quarks y gluones parecen estar atrapados dentro de los mesones y los bariones, de los cuales no podrían escapar. Actualmente existen otros significados que se le atribuyen al término, cosa que discutiremos un poco más adelante. A pesar de que el problema de confinamiento está lejos de ser entendido, se conocen muchas de las características

¹Un mesón es un bosón que responde a la interacción nuclear fuerte. En el modelo estándar aparecen como partículas compuestas en un estado quark-antiquark y son inestables. el pión fue el primer mesón en ser descubierto.

²Los bariones son fermiones afectados por la interacción nuclear fuerte y están formados por tres quarks. Los más representativos son el protón y el neutrón.

de la fuerza de confinamiento, y existen en la literatura un buen número de teorías de confinamiento que se encuentran bajo una fuerte actividad de investigación.

5.2 El problema del confinamiento

Una transición de fase de primer orden es aquella en donde el parámetro de orden (por ejemplo la magnetización en el modelo de Ising o el radio del horizonte del agujero negro en nuestro caso) es discontinuo. Esta discontinuidad en el parámetro de orden, en la teoría, se ve reflejado como un rompimiento de alguna simetría inherente a la misma. Ahora, hasta ahora hemos tratado con una teoría de norma, que hace gala de simetría $U(N)$; en estos casos contamos con el siguiente teorema:

Teorema de Elitzur: Una simetría de norma local no se puede romper espontáneamente. El valor de expectación de cualquier observable local no invariante de norma debe ser cero. Esto significa que para teoría de norma, no hay un análogo a la magnetización, sino que tenemos que buscar observables invariantes de norma, que no son afectados por transformaciones de norma. Un ejemplo de estos observables es el lazo de Wilson.

El teorema de Elitzur es muy claro respecto a cuando puede o no haber un rompimiento espontáneo de simetría en una teoría de norma, sin embargo, aún en el caso de estas teorías, es posible distinguir diferentes fases su comportamiento, lo cual sucede de acuerdo a los diferentes valores de expectación que puede tomar un lazo de Wilson grande; consideremos un lazo rectangular, $R \times T$, con $T \gg R$. Existen tres posibilidades:

- **Fase masiva:** El potencial es de tipo Yukawa

$$V(R) = -g^2 \frac{e^{-mR}}{R} + V_0 \quad (5.1)$$

Para un lazo plano genérico \mathcal{C} , no autointersectante, con extensión $\gg 1/m$,

$$W(C) \sim \exp[-V_0 P(C)] \quad (5.2)$$

Donde $P(C)$ es el perímetro del lazo.

- **Fase no masiva** Se caracteriza por un potencial del tipo

$$V(R) = -\frac{g^2}{R} + 2V_0 \quad (5.3)$$

El acoplamiento efectivo puede ir a una constante y, en el caso de teorías de norma, puede crecer o decrecer logarítmicamente. Para $R \gg V_0$ el lazo cae como una ley de perímetro.

- **Fase de desorden magnético** El potencial va como:

$$V(R) = \sigma R + 2V_0 \quad (5.4)$$

mas genéricamente, para un lazo plano no autointersectante, con área $A(C)$ y perímetro $P(C)$:

$$W(C) \sim \exp[-\sigma A(C) - V_0 P(C)]. \quad (5.5)$$

Notemos que este comportamiento es aquel que se espera en una fase de confinamiento para el potencial quark-antiquark, como veremos mas adelante.

En la sección anterior tratamos a detalle el caso en que un agujero negro radía térmicamente y, tomando como parámetro de orden el radio del horizonte, deviene en una transición de fase de primer orden. Esta transición a nivel gravitacional puede verse reflejada en la teoría de frontera como una transición de confinamiento-desconfinamiento. Antes de dar argumentos más fuertes, debemos entender que quiere decir confinamiento y la importancia del mismo en el contexto de la teoría de cuántica de campos.

La mayoría de los esfuerzos por entender esta cuestión se enfocan en mostrar que la energía potencial entre un quark y un antiquark crece linealmente con la distancia de separación entre los mismos. En otras palabras, puesto que un potencial lineal se asocia a una ley de área en el lazo de Wilson, el objetivo es mostrar que una teoría de norma $SU(3)$ en $D = 4$ está en la fase de desorden magnético. Pero, si por “confinamiento” entendemos un potencial de quarks estáticos que crece infinitamente con la distancia de separación, entonces QCD no confina, puesto que en esta teoría el potencial entre los quarks eventualmente tendrá un cambio de comportamiento, que se conoce como “rompimiento de la cuerda”.

Por otro lado, puesto que todos los hadrones conocidos son singuletes del grupo de color $SU(3)$, muchos prefieren definir el confinamiento mediante la ausencia de estados de partículas asintóticamente cargados de color, por lo cual se define el confinamiento como *confinamiento de color*.

Aunque esta forma de ver el problema parece ser adecuada, tiene también problemas por si misma. Si consideramos estados asintóticos de partículas en una teoría de norma-Higgs, donde todas las interacciones son tipo Yukawa y la dinámica es parecida a la interacción débil, estos estados son también singuletes de estados de color. ASÍ, si por confinamiento entendemos confinamiento de color, las teorías de tipo Higgs también confinan.

Como entender el confinamiento entonces?

Una forma de entenderlo es mediante la formación de un tubo de flujo de color eléctrico, esto puede verse pictóricamente de la siguiente forma: imaginemos que el campo de color eléctrico que corre entre un quark y un antiquark estáticos es, por alguna razón, com-

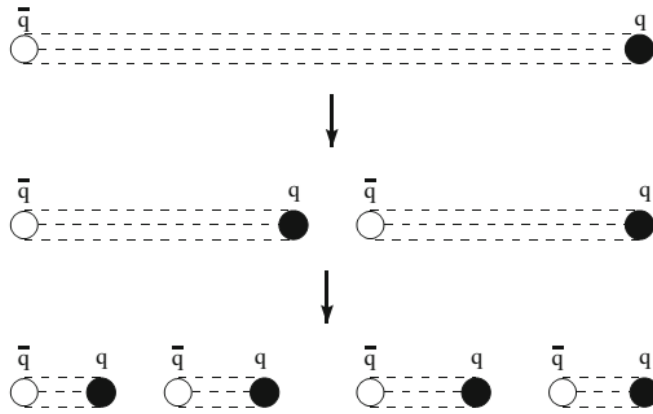
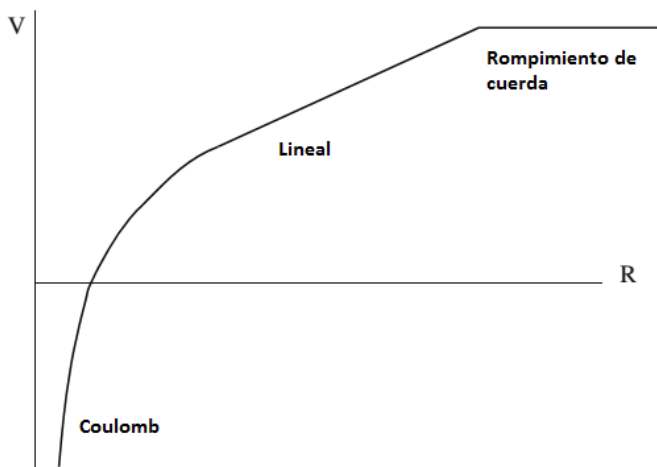


Figura 5.1: Rompimiento de cuerda y producción de par quark-antiquark

primido en una región cilíndrica, con área de sección transversal casi constante conforme la distancia de separación entre los quarks aumenta. En este caso, la energía almacenada en el campo de color eléctrico crecerá linealmente con la distancia de separación, lo que implica que se requiere una energía infinita para separar los quarks una distancia infinita. Sin embargo, eso no es precisamente lo que pasa en QCD, en la cual para una distancia de separación suficientemente grande, es energéticamente favorable la formación de pares de quarks, con masa m_q y por lo tanto el rompimiento del tubo de flujo (o “cuerda de QCD”) como se ve en la figura 5.1.

Así pues, el potencial de quarks estáticos se verá como el siguiente diagrama:



5.3 confinamiento en AdS/CFT

Vamos a estudiar ahora la cuestión de sistemas confinados y desconfiados en una teoría de norma, $\mathcal{N} = 4$ SYM, [10], [14], [17], específicamente, el potencial quark-antiquark, y veremos como se relaciona con el cálculo hecho para la termodinámica de agujeros negros. En QCD, los quarks pueden ser introducidos de dos formas:

- Quarks fundamentales: son quarks ligeros, que aparecen en la acción.
- Quarks externos, infinitamente pesados, se dicen externos porque no aparecen en la acción.

QCD es una teoría de confinamiento, esto es, los quarks ligeros no aparecen solos en el vacío, sino que aparecen a pares con un antiquark. De esta forma, aún si tratamos con quarks externos, no es de esperarse que podamos poner un quark solitario en el vacío, sino que tenemos que tratar con el par $q\bar{q}$, quark antiquark, respectivamente.

Puesto que los quarks externos son infinitamente pesados, el par permanece estático, esto es, la distancia que separa a los quarks es constante; nuestra tarea es entonces encontrar una expresión para el potencial de interacción entre ambos, $V_{q\bar{q}}(L)$. Se necesita definir un observable físico que mida tal interacción; este objeto físico, invariante de norma es el Loop (lazo) de Wilson.

5.4 Loops de Wilson

Un loop (lazo) de Wilson es un observable importante en una teoría de norma, que representa físicamente un potencial quark-antiquark. Si consideramos una carga moviendose a lo largo de una curva cerrada C en el espacio de QED, la acción para dicha carga es:

$$S_c = \oint_c A_\mu dx^\mu. \quad (5.6)$$

Si añadimos este término a la acción, es equivalente a insertar en la integral de línea la cantidad:

$$e^{iS_c} = e^{i \oint_c A_\mu dx^\mu} \equiv W(C), \quad (5.7)$$

con $W(C)$ el lazo de Wilson. El análogo no abeliano es la cantidad:

$$W(C) \equiv \text{Tr} \mathbf{P} \exp \left[i \oint_c A_\mu dx^\mu \right], \quad (5.8)$$

donde $A_\mu = A_\mu^a T^a$, Tr es la traza sobre el grupo de índices, \mathbf{P} es el operador de *path ordering*. Notemos que $\langle W(C) \rangle$ puede ser considerado la amplitud para la creación de un

par $q\bar{q}$ que se propaga y es aniquilado después.

Podemos tomar un loop de Wilson rectangular en espacio euclideo, con T y d los lados del rectángulo. En este caso el loop de Wilson es la amplitud de propagación de un par $q\bar{q}$ separados una distancia d , la cual puede ser calculada mediante un formalismo hamiltoniano. Cuando $T \rightarrow \infty$ uno tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W(C) \rangle \sim e^{-TE(d)}, \quad (5.9)$$

donde $E(d)$ es la energía del par $q\bar{q}$ separados una distancia d .

Para una teoría de confinamiento, como QCD, la energía crece linealmente con la distancia de separación, d ,

$$E(d) \approx \sigma d, \quad \sigma \rightarrow \text{constante}. \quad (5.10)$$

De esta forma, el loop de Wilson en una teoría de confinamiento satisface la ley de área:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W(C) \rangle \sim e^{-T\sigma d} \sim e^{-\sigma A} \quad (5.11)$$

5.5 Loop de Wilson en AdS/CFT

Con los elementos anteriores, vamos a hacer el cálculo del loop de Wilson para el espacio de AdS_5 puro.

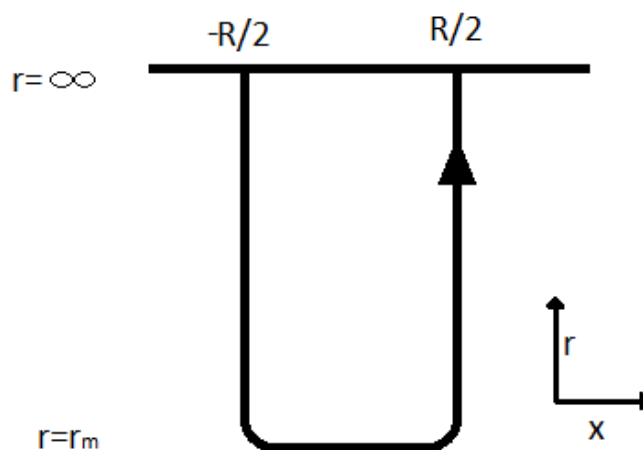


Figura 5.2: Configuración del Loop de Wilson

Para calcular el loop de Wilson, tomamos en cuenta que:

$$\langle W(C) \rangle = e^{-S(C)}, \quad (5.12)$$

donde $S(C)$ es la accion on shell de Nambu-Goto. El potencial $q\bar{q}$ está dado por la energía de la cuerda en AdS/CFT. Para hacer el cálculo, elegimos a la cuerda extendiéndose a lo largo de la dirección x en la teoría de frontera, y tomamos la parametrización $x = x(r)$, como se ve en el esquema del lazo (5.2). Así, la métrica inducida en el espaciotiempo es:

$$\begin{aligned} ds_5^2 &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \\ &= -\left(\frac{r}{L}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \\ &= \left(\frac{r}{L}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} \dot{x}^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2\right) dr^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Donde en el paso de la segunda línea a la tercera hemos tomado $t = it$ y con $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}$. El determinante la métrica inducida es:

$$-\sqrt{h_{ab}} = -\sqrt{1 + \dot{x}^2 \left(\frac{r}{L}\right)^4}. \quad (5.14)$$

De manera que la acción de Nambu Goto es:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi l_s^2} \int dt \int dr \sqrt{1 + \dot{x}^2 \left(\frac{r}{L}\right)^4} \\ &= \frac{T}{2\pi l_s^2} \int dr \sqrt{1 + \dot{x}^2 \left(\frac{r}{L}\right)^4}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como vemos, el lagrangiano no tiene dependencia explícita en x , de forma que existe una cantidad conservada P_x asociada a x :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = cte \quad (5.16)$$

$$\frac{\left(\frac{r}{L}\right)^4 \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 \left(\frac{r}{L}\right)^4}} = cte \quad (5.17)$$

Como vemos del diagrama del loop, la cuerda tiene un punto de retorno en

$$\partial_r x|_{r=r_m} = \infty \quad (5.18)$$

De forma que la constante está dada como:

$$cte = \frac{\left(\frac{r}{L}\right)^4 \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 \left(\frac{r}{L}\right)^4}} \Big|_{r=r_m} \quad (5.19)$$

$$\frac{\left(\frac{r}{L}\right)^4 \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 \left(\frac{r}{L}\right)^4}} \Big|_{r=r_m} = \left(\frac{r_m}{L}\right)^2. \quad (5.20)$$

de esta forma, ya tenemos una expresión para \dot{x}

$$\dot{x} = \left(\frac{r_m}{L}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 \left(\frac{r}{L}\right)^4}}. \quad (5.21)$$

Así, dado que $\dot{x} = \partial x / \partial r$, podemos integrar para hallar una expresión explícita de x .

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1}}. \quad (5.22)$$

Como podemos ver en el diagrama, cuando $r \rightarrow \infty$, $x \rightarrow R/2$ y en $r = r_m$, $x = 0$. De forma que nuestra integración queda:

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} &= \left(\frac{L}{r_m}\right)^2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1}} \\ &= \left(\frac{L}{r_m}\right)^2 \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^2 \sqrt{(y)^4 - 1}}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde en la segunda línea hemos usado $y = \frac{r}{r_m}$; con lo cual, ya tenemos una expresión que relacione nuestros parámetros de distancia R y r_m :

$$R = \frac{\sqrt{2} \left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2 L^2}{\sqrt{\pi} r_m}. \quad (5.24)$$

Esto es, $R \sim \frac{L^2}{r_m}$.

Ahora ya podemos calcular la acción de Nambu-Goto para calcular el potencial $q\bar{q}$:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T}{2\pi l_s^2} \int dr \sqrt{1 + \dot{x}^2 \left(\frac{r}{L}\right)^4} \\ &= -\frac{T}{2\pi l_s^2} \int dr \frac{\left(\frac{r}{r_m}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

La energía potencial es:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{2S}{T} \\ &= \frac{2}{2\pi l_s^2} \int_{r_m}^{\infty} dr \frac{\left(\frac{r}{r_m}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1}} \\ &= \frac{r_m}{\pi l_s^2} \int_1^{\infty} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y)^4 - 1}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Esta integral diverge, lo cual refleja el hecho de que el quark es infinitamente pesado. La contribución de masa del quark es:

$$S_0 = -\frac{T}{2\pi l_s} \int_0^{\infty} dr, \quad (5.27)$$

$$E_0 = \frac{1}{\pi l_s} \int_0^{\infty} dr. \quad (5.28)$$

Restando esta cantidad de la energía, tenemos la expresión:

$$E - E_0 = \frac{r_m}{\pi l_s^2} \left\{ \int_1^{\infty} \left(\frac{y^2}{\sqrt{y^4 - 1}} - 1 \right) dy - 1 \right\} \quad (5.29)$$

Podemos resolver esta integral, haciendo un cambio de variable $u = \frac{1}{y}$ y usando nuestros resultados para r_m y el traductor AdS/CFT el resultado nos queda como:

$$E - E_0 = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})^4} \frac{\lambda^{1/2}}{R} = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})^4} \frac{\sqrt{2g_{YM}^2 N}}{L} \quad (5.30)$$

El potencial es, como vemos de tipo Coulomb, esto es consecuencia de la invarianza conforme de la teoría (i.e. no hay ley de área), por otro lado, vemos también una dependencia $V_{q\bar{q}}(L) \propto \sqrt{2g_{YM}^2 N}$, puesto que el resultado a 1-loop es proporcional a $g_{YM}^2 N$, es claro que este es un resultado no perturbativo; lo cual significa que no puede ser obtenido a un

numero finito de loops.

A continuación vamos a estudiar el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita y el potencial de confinamiento, así como su dual en una teoría de gravedad. El primer caso es el de una cuerda colgando de la frontera del agujero negro de $SAdS_5$, mientras que el segundo caso es el solitón AdS, el cual es obtenido mediante una doble continuación analítica del primer caso.

5.6 Potencial Quark antiquark a temperatura finita

Supongamos ahora que ponemos nuestra teoría de norma en un baño térmico, a temperatura T . En la correspondencia AdS/CFT, un baño térmico es dual a una geometría de bulto con un horizonte de eventos, i.e., un agujero negro, con una identificación de la temperatura de Hawking con la temperatura del baño térmico. En particular, el dual de $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita es un agujero negro en AdS_5 cuya métrica euclídea es la siguiente:

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (f dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2 f} \quad (5.31)$$

Con $f = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4$ donde el parámetro r_0 corresponde a la posición del horizonte de eventos y se relaciona con la temperatura T como $T = 1/\pi r_0$, como vimos en el capítulo anterior.

Como en el caso anterior, vamos a calcular la acción de Nambu-Goto para la parametrización $x = x(r)$

La métrica inducida es simplemente:

$$ds^2 = f \left(\frac{r}{L}\right)^2 dt^2 + \left[\frac{1}{f} \left(\frac{L}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \dot{x}^2 \right] dr^2, \quad (5.32)$$

de forma que el determinante de la métrica inducida es

$$-h_{ab} = 1 + \left(\frac{r}{L}\right)^4 f \dot{x}^2. \quad (5.33)$$

Podemos ahora calcular la acción de Nambu-Goto:

$$S = -\frac{1}{2\pi l_s^2} \int d\sigma^2 \sqrt{-h_{ab}} = -\frac{T}{2\pi l_s^2} \int dr \sqrt{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^4 f \dot{x}^2} \quad (5.34)$$

De la misma manera que el caso anterior, vemos que existe una cantidad conservada, P_x

asociada a x , tal que:

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\left(\frac{r}{L}\right)^4 f \dot{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^4 f \dot{x}^2}} = cte \quad (5.35)$$

Determinamos la constante mediante la condición $\dot{x}|_{r=r_m} = \infty$

$$\left. \frac{\left(\frac{r}{L}\right)^4 f \dot{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^4 f \dot{x}^2}} \right|_{r=r_m} = \left(\frac{r_m}{L}\right)^2 \sqrt{f(r_m)} \quad (5.36)$$

Así, vemos que el \dot{x} tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \pm \frac{\sqrt{f(r_m)} \left(\frac{r_m}{r}\right)^2}{f(r)} \frac{1}{\sqrt{f(r)r^4 - f(r_m)r_m^4}} \\ &= \pm r_m^{-2} \sqrt{1 - \rho} L^2 \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - \rho\right] \left[\left(\frac{r}{r_m}\right)^4 - 1\right]}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Donde en la última ecuación hemos definido la cantidad constante $\rho = \frac{r_0}{r_m}$. Finalmente, tenemos la expresión de x como

$$x = \pm r_m^{-1} \sqrt{1 - \rho} L^2 \int_1^{\frac{r}{r_m}} \frac{dy}{\sqrt{(y^4 - \rho)(y^4 - 1)}}, \quad (5.38)$$

de forma que si la distancia entre los quarks es R cuando $r \rightarrow \infty$:

$$R = 2 \frac{L^2}{r_m} \sqrt{1 - \rho} \int_1^\infty \frac{dy}{\sqrt{(y^4 - \rho)(y^4 - 1)}}, \quad (5.39)$$

Notamos dos cosas, primero, que cuando en la métrica $r_0 = 0$, en nuestro resultado $\rho = 0$ y recuperamos el resultado obtenido para la temperatura cero; segundo, cuando $r_m \rightarrow r_0$, $\rho \rightarrow 1$ y la distancia R se hace cero; si uno varía ρ podemos ver que hay un máximo valor de d , a partir del cual el estado $q\bar{q}$ se vuelve un estado desconfinado debido a apantallamiento térmico, de acuerdo con lo que se espera que pase en la teoría normal dual.

5.7 Potencial Quark-Antiquark en confinamiento

Vamos ahora a hacer el análisis del caso de confinamiento; primero, hacemos una doble rotación de Wick al agujero negro y, mediante un cambio de coordenadas, obtenemos el

siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} \left[-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + f dw^2 + \frac{dr^2}{f} \right] \quad (5.40)$$

En este caso, el espacio termina de forma suave en $r = r_0$, lo cual puede ser pensado como una cota IR. En este caso, \hat{z} tiene una periodicidad dada por $l = \frac{\pi L^2}{r_0}$. Consideramos una cuerda en la versión euclidea de esta métrica y usando una parametrización (t, x) , tenemos:

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} \left[-d\tau^2 + \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{f}\right) dw^2 \right] \quad (5.41)$$

La acción de Nambu-Goto

$$S = \frac{TL^2}{2\pi l_s^2} \int \frac{dx}{r^2} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}^2}{f}}. \quad (5.42)$$

De la misma forma que los casos anteriores, existe una cantidad conservada asociada a \dot{r}

$$\frac{1}{r^2 \sqrt{f(r)}} \frac{\dot{r}}{\sqrt{f + \dot{r}^2}} = \frac{1}{r_m^2} \quad (5.43)$$

de donde obtenemos la expresión para \dot{r} :

$$\dot{r} = \pm \sqrt{f(r)} \frac{\sqrt{r_m^4 - r^4}}{r^2} \quad (5.44)$$

integrando, obtenemos una expresión para x :

$$x = \pm r_m \sqrt{\rho} \int_1^{\frac{r}{r_m}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^4)(\rho-y^4)}} \quad (5.45)$$

donde ρ está definido de la misma forma que en el caso anterior, así, la distancia entre los quarks es:

$$R = 2r_m \sqrt{\rho} \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^4)(\rho-y^4)}} \quad (5.46)$$

En este caso, d crece sin límite cuando $\rho \rightarrow 1$, i.e, $r_m \rightarrow r_0$. En el límite R grande, la cuerda se aproxima a un loop rectangular. De la misma forma que el primer caso, la parte vertical de la cuerda se identifica con la masa de los quarks estáticos, la cual se resta de la energía potencial. El potencial $q\bar{q}$ es entonces solo la parte horizontal de la cuerda; puesto que en este intervalo r es constante y aproximadamente igual a r_0 , la contribución de la acción euclidea es solo:

$$S_{horizontal} = \frac{TL^2}{2\pi l_s^2} \frac{d}{r_0^2} \quad (5.47)$$

Que corresponde a una ley de área (pues es proporcional a Td y, por tanto, tenemos un potencial de confinamiento de tipo

$$V = \sigma d \tag{5.48}$$

donde σ puede ser puesto en términos de las cantidades de la teoría de norma:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi r_0} \tag{5.49}$$

5.8 Conclusiones

Es indudable que la conjetura de Maldacena es uno de los desarrollos teóricos más interesantes en la Física en los últimos años, en parte gracias a la elegancia del desarrollo mismo del traductor, que de una forma muy simple relaciona cantidades que tienen que ver con una teoría de norma 4-dimensional, con una teoría de gravedad 5-dimensional; lo cual, por otro lado, abre la puerta a investigaciones de gravedad cuántica diferentes a las que se habían manejado antes. Más aún, la conjetura nos permite poner en relación objetos de la mencionada teoría de gravedad con sistemas de materia condensada, que es donde reside nuestro interés principal.

En este trabajo hemos hecho, en primer lugar, una presentación de la conjetura, apoyándonos en ejemplos sencillos como los campos escalares, fermiónicos y las p-formas. En segundo lugar, hicimos una revisión de la teoría de bulto 5-dimensional en el límite de supergravedad. Este bulto tiene dos configuraciones con la misma geometría asintótica, el primero es el agujero negro y el otro es el espacio AdS térmico, pudimos mostrar que el espacio AdS térmico existe a cualquier temperatura, mientras que la solución de agujero negro existe a partir de una temperatura crítica, a partir de la cual se desarrollan dos de estos objetos: el primero es el agujero negro grande, el cual tiene energía libre negativa, mientras que el pequeño tiene energía libre positiva y calor específico negativo, lo cual lo convierte en una solución inestable.

Como vimos, hasta una temperatura T_c , AdS es la configuración estable, a partir de la cual, el agujero negro grande tiene una energía libre menor que la de aquel, por lo cual, se convierte en la solución globalmente estable.

Consideramos después una teoría de norma $\mathcal{N} = 4$ SYM en la frontera del espacio en el límite $N \rightarrow \infty$, la cual a temperaturas bajas presenta una fase de confinamiento para mesones y *glueballs*, mientras que a altas temperaturas se presenta desconfinamiento; el parámetro que nos ayuda a estudiar la transición entre estas fases es el loop de Wilson, por lo cual lo calculamos en el bulto, el resultado fue que para el AdS térmico obtuvimos una ley de área para el potencial $q\bar{q}$, típica de los sistemas confinados, mientras que en

la geometría de agujero negro, en $r = r_+$ el círculo térmico se contrae a cero y por tanto hay un valor de expectación finito del lazo de Wilson. Esta discontinuidad en el valor de loop nos lleva a identificar las fases de espacio AdS térmico y agujero negro en el bulto con una transición de fase de confinamiento/desconfinamiento en la teoría de norma en la frontera, respectivamente. Por tanto, la transición de Hawking-Page en el bulto equivale a la transición de confinamiento/desconfinamiento en la teoría de frontera.

Debemos hacer notar que el problema del confinamiento no se ha resuelto aún, para empezar, la teoría analizada es $\mathcal{N} = 4$ SYM, no QCD; aunque es notable el comportamiento de la teoría cuando se introduce en un baio térmico, pues la supersimetría y la invarianza conforme se rompen para dar lugar a una teoría mas parecida a QCD, esto nos da esperanza para estudiar mas a fondo el problema del confinamiento, que es quiz el problema más difícil de explicar en teoría de partículas y que nos impide tener una noción clara de lo que pasa en el núcleo del átomo.

Finalmente, queda como trabajo a futuro el estudio de casos más generales de geometrías de agujeros negros en el bulto, lo cual sabemos que lleva a problemas por demás interesantes de materia condensada en la teoría de norma de frontera.

Queda tambien como perspectiva a futuro el estudio del problema del confinamiento, ámbito en el cual quizá la conjetura pueda dar alguna luz.

Apéndices

Simetrías y vectores de Killing

Nuestro interés es trabajar en un espaciotiempo específico, el espacio de Anti de Sitter, el cual, por sus propiedades topológicas, permite conjeturar una correspondencia entre una teoría de gravedad y una teoría cuántica. Se elige este espacio por las simetrías que le pertenecen, las cuales vamos a ver a continuación.

Entendemos por simetría de una métrica a la invarianza de ésta ante transformaciones de coordenadas, esto es, que bajo alguna transformación de una o varias de las coordenadas de la métrica, ciertas cantidades asociadas a ésta permanecen sin cambios; notemos que esta primera definición es muy vaga, por lo que habremos de precisarla.

Para una métrica $g_{\mu\nu}$, una forma de conocer sus simetrías es mediante la derivada de Lie a lo largo de un vector V , si es el caso que dicha derivada es cero, significa que el vector V genera una isometría en la métrica. La derivada de Lie de la métrica es:

$$L_V g_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu. \quad (50)$$

Una transformación infinitesimal de las coordenadas es una simetría de la métrica si $L_V = 0$, lo cual implica:

$$\nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu = 0, \quad (51)$$

que es la ecuación de Killing, y cuyas soluciones son los vectores V llamados *Vectores de Killing*.

Un hecho de importancia y que conviene resaltar de la derivada de Lie es que sus soluciones forman un álgebra de Lie, esto es, si V y W son vectores de Killing, entonces $[V, W]$ es también un vector de Killing

$$L_V g_{\mu\nu} = L_W g_{\mu\nu} = 0$$

implica que:

$$L_{[V,W]} g_{\mu\nu} = 0,$$

De hecho, uno tiene que:

$$L_{[V,W]} g_{\mu\nu} = L_V L_W g_{\mu\nu} - L_W L_V g_{\mu\nu} = 0.$$

Función de Partición del agujero negro de AdS

Vamos a evaluar la función de partición semiclásica para el agujero negro $SAdS_5$. Esta función nos va a dar cantidades termodinámicas.

De entrada, la acción gravitacional consta de los siguientes términos:

$$S_E = S_{bulto} + S_{GH} + S_{CT}, \quad (52)$$

Las cuales, respectivamente, denotan la acción del bulto, la acción de Gibbons-Hawking y la acción de contratérminos. Vamos a ver con cuidado cada una de estas cantidades, tomando en cuenta la siguiente métrica:

$$ds_5^2 = \frac{r}{L} (f dt^2 + d\mathbf{x}_3^2) + L^2 \frac{dr^2}{fr^2} \quad f = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \quad (53)$$

o, de forma equivalente:

$$ds_5^2 = \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \frac{1}{u^2} (f dt^2 + d\mathbf{x}_3^2) + L^2 \frac{du^2}{fu^2} \quad f = 1 - u^4 \quad (54)$$

Notese que estamos considerando acciones y espacio euclídeos. En coordenadas r , el horizonte del agujero negro está situado en $r = r_0$ y la frontera de AdS está situada en $r = \infty$. En la coordenada u , el horizonte está en $u = 1$ y la frontera en $u = 0$.

.0.1 Acción de bulto

La acción de bulto es la acción 5-dimensional. Para el Agujero Negro $SAdS_{p+2}$ es la acción de Einstein-Hilbert estándar:

$$S_{bulto} = \frac{1}{16\pi G_{p+2}} \int d^{p+2}x \sqrt{g} (R - 2\Lambda), \quad (55)$$

$2\Lambda = -\frac{p(p+1)}{L^2}$ El agujero negro $SAdS_5$ corresponde a $p = 3$. Las ecuaciones de Einstein son:

$$R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R + \Lambda g_{MN} = 0 \quad (56)$$

Contrayendo, tenemos una expresión para el escalar de curvatura como:

$$R = -\frac{(p+1)(p+2)}{L^2} \quad (57)$$

De forma que la acción de bulto *on shell* es:

$$S_{bulto} = \frac{p+1}{8\pi G_{p+2} L^2} \int d^{p+2}x \sqrt{g}, \quad (58)$$

i.e., es proporcional al volumen del espaciotiempo. Para el A-N $SAdS_5$

$$\begin{aligned} S_{bulto} &= \frac{1}{2\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^2} \int_0^\beta dt \int d\mathbf{x} \int_u^1 \frac{1}{u^5} \\ &\xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{\beta V_3}{8\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^2} \left(\frac{1}{u^4} - 1 \right) \Big|_{u=0} \\ &=: \frac{\beta V_3}{16\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^2} \hat{S}_{bulto}. \end{aligned} \quad (59)$$

Donde V_3 es el volumen en las coordenadas \mathbf{x} . El factor que va con \hat{S}_{bulto} es común con otras acciones on-shell, así que vamos a hacer $\beta = V_3 = r_0 = 16\pi G_5 = L = 1$. La acción de bulto diverge cuando $u \rightarrow 0$ porque es proporcional al volumen del espacio.

.0.2 Acción de Gibbons-Hawking

Es necesario introducir esta acción de contratérminos a la acción de Einstein-Hilbert con el fin de tener bien definido nuestro problema variacional:

$$S_{GH} = -\frac{2}{16\pi G_{p+2}} \int d^{p+1}x \sqrt{\gamma} K. \quad (60)$$

Donde $\gamma_{\mu\nu}$ es la métrica $(p+1)$ dimensional en la superficie y K es la traza de la curvatura extrínseca de la superficie. Este término se conoce como *Acción de Gibbons-Hawking*. Se trata de un término de frontera evaluado en $u = 0$.

Al ser un término de frontera, la acción de GH no afecta las ecuaciones de movimiento, pero si afecta el valor de la acción on shell; este término usualmente no es tomado en cuenta en situaciones de Relatividad General, pero en el caso termodinámico toma relevancia, pues nos interesa el valor total de la acción o shell en el formalismo euclideo. Mas aún, en algunas situaciones, este término es el único contribuye al valor de la acción on

shell. Para el agujero negro de Schwarzschild, $R = 0$, de forma que la acción del bulto no contribuye al valor on shell; la contribución a la acción on-shell viene completamente del término de GH.

Cosideremos la métrica de SAdS, la métrica $\gamma_{\mu\nu}$ (p+1)-dimensional se obtiene haciendo la descomposición ADM de la métrica como:

$$dp_{p+2}^2 = g_{uu}du^2 + \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (61)$$

El vector unitario normal a la superficie $u = cte$ está dado como:

$$g_{MN}n^M n^N = 1 \quad \rightarrow \quad n^u = -\frac{1}{\sqrt{g_{uu}}}. \quad (62)$$

En general, la curvatura extrínseca está dada como:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}n^u \partial_u \gamma_{\mu\nu} \quad (63)$$

Así, K tiene la siguiente expresión:

$$K = n^u \frac{\partial_u \gamma}{\sqrt{\gamma}} \quad (64)$$

En Relatividad General, uno considera la curvatura extrínseca de una superficie cuando se plantea esta superficie dentro de un espaciotiempo o cuando se discute el formalismo canónico (i.e. se folia el espaciotiempo en hypersuperficies tipo espacio). Para nuestro caso, hablamos de la curvatura extrínseca de la hypersuperficie 4-dimensional tipo tiempo en $u = 0$ del agujero negro de AdS 5-dimensional. Esta hypersuperficie es espaciotiempo donde vive la teoría de gauge de frontera. Para el $SAdS_5$, $n^u = -uh^{1/2}$ y $\sqrt{\gamma} = u^{-4}h^{1/2}$, por tanto:

$$S_{GH} = 2uh^{1/2} \partial [u^{-4}h^{1/2}] \Big|_{u=0} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \left(-\frac{8}{u^4} - 4 \right) \Big|_{u=0}. \quad (65)$$

Notemos que la acción de Gibbons-Hawking también diverge para $u \rightarrow 0$.

.0.3 Acción de contratérminos

Como hemos visto, la acción del bulto y la acción de GH divergen cuando $u \rightarrow 0$, por lo cual se añade un tercer término a la acción: la *Acción de contratérminos*.

En AdS/CFT, estas divergencias se interpretan como una divergencia en ultravioleta de la teoría de campo dual. En la teoría de campo, las divergencias pueden ser controladas

mediante un proceso de renormalización, i.e. la adición de un número finito de contratérminos locales a la acción. De acuerdo a esta prescripción, uno añade una acción de contratérminos de forma que tengamos una función de partición gravitacional finita. Este procedimiento se conoce como *Renormalización Holográfica*.

Tomando en cuenta lo anterior, se elige la acción de contratérminos de forma que:

- Se escriba solo en términos de cantidades de frontera ($\gamma_{\mu\nu}$ y cantidades asociadas a ésta, como el escalar de Ricci \mathcal{R})
- Consista solo de un número finito de términos
- Los coeficientes de estos términos se eligen con la única finalidad de cancelar las divergencias.

Para $p \leq 5$ la acción de contratérminos está dada por:

$$S_{CT} = \frac{1}{16\pi G_{p+2}} \int d^{p+1}x \sqrt{\gamma} \left\{ \frac{2p}{L} + \frac{L}{p-1} \mathcal{R} - \frac{L^3}{(p-3)(p-1)^2} \left(\mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{p-1}{4p} \mathcal{R}^2 \right) + \dots \right\}. \quad (66)$$

Estos términos son suficientes para cancelar las divergencias que van como potencias para $p \leq 5$, pero podría ser necesario introducir más términos para cancelar divergencias que van como logaritmos. Para Agujeros negros con horizontes planos, $\mathcal{R} = 0$, de forma que solo tenemos las siguientes contribuciones a las cantidades termodinámicas:

$$S_{CT} = 6 \frac{h^{1/2}}{u^4} \Big|_{u=0} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{6}{u^4} - 3 \Big|_{u=0} \quad (67)$$

.0.4 Función de partición y cantidades termodinámicas

Tenemos hasta ahora los siguientes resultados:

$$S_{bulto} = \frac{2}{u^4} - 2 \Big|_{u=0} \quad (68)$$

$$S_{GH} = -\frac{8}{u^4} + 4 \Big|_{u=0} \quad (69)$$

$$S_{CT} = -\frac{6}{u^4} - 3 \Big|_{u=0} \quad (70)$$

Combinando estos resultados tenemos $S_{bulto} + S_{GH} + S_{CT} = -1$, si queremos cantidades con dimensiones:

$$\frac{S_E}{16\pi G_5 L^5} = \frac{\beta V_3 r_0^4}{16\pi G_5 L^5} \quad (71)$$

La acción on shell está relacionada con la función de partición Z y con la energía libre F como:

$$Z = e^{-S_E}, \quad \underline{S_E} = \beta F \quad (72)$$

De esta manera, la energía libre resulta ser:

$$F = -\frac{V_3}{16\pi G_5} \frac{r_0^4}{L^5} = \frac{(\pi L T)^4 V_3}{16\pi G_5 L} = -\frac{1}{8}\pi^2 N_c^2 T^4 V_3. \quad (73)$$

Donde usamos $T = r_0/(\pi L^2)$. Las cantidades termodinámicas que pueden ser derivadas de a energía libre son:

$$s = -\frac{1}{V_3} \partial_T F = \frac{(\pi L T)^3}{4G_5} = \frac{1}{4G_5} \left(\frac{r_0}{L}\right)^3 = -\frac{1}{2}\pi^2 N_c^2 T^3. \quad (74)$$

$$P = -\partial_{V_3} F = \frac{(\pi L T)^4}{16\pi G_5 L} = \frac{1}{16\pi G_5 L} \left(\frac{r_0}{L}\right)^4 = \frac{1}{8}\pi^2 N_c^2 T^4. \quad (75)$$

$$\epsilon = \frac{F}{V_3} + T s = 3 \frac{(\pi L T)^4}{16\pi G_5 L} = \frac{3}{16\pi G_5 L} \left(\frac{r_0}{L}\right)^4 = \frac{3}{8}\pi^2 N_c^2 T^4. \quad (76)$$

Reducción dimensional de $\mathcal{N} = 4$ SYM

La teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en cuatro dimensiones fue obtenida por primera vez utilizando el método de reducción dimensional a $\mathcal{N} = 1$ SYM en diez dimensiones.

.0.5 Reducción dimensional

Comenzamos considerando una teoría de Yang Mills con partículas de spin $1/2$

$$S = \int d^{10}x \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} + \frac{i}{2} \bar{\lambda} \Gamma^{mn} \nabla_m \lambda \right) \quad (77)$$

donde

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m - ie[A_m, A_n] \quad (78)$$

$$\nabla_m \lambda = \partial_m \lambda - ie[A_m, \lambda] \quad (79)$$

Y con signatura: $\eta_{mn} = \text{diag}(+, -, \dots, -)$ Podemos preguntarnos en que número de dimensiones esta acción es supersimétrica, que, como sabemos, implica que el número de grados de libertad bosónicos sea igual al número de grados de libertad fermiónicos.

Notemos que en D dimensiones, el campo de norma A^m tiene $(D - 2)$ grados de libertad, mientras que en el espinor de Dirac tiene $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ grados de libertad.

Se puede reducir el número de grados de libertad de Fermi imponiendo condiciones adicionales a los espinores, como son:

- Condición de Majorana: $\lambda = C \bar{\lambda}^T \rightarrow D = 2, 4 \pmod{8}$
- Condición de Weyl: $\lambda = \mp \gamma_5 \lambda \rightarrow D \text{ par}$

Así, el número de grados de libertad al imponer estas condiciones, son $2^{\lfloor d/2 \rfloor - 1}$ y $2^{\lfloor d/2 \rfloor - 1}$ para Majorana o Weyl, respectivamente; y $2^{\lfloor d/2 \rfloor - 2}$ si un fermión cumple ambas condiciones simultáneamente.

Podemos resumir el conteo de grados de libertad para diferente número de dimensiones en la siguiente tabla:

D	A^m	Dirac	Majorana	Weyl	Majorana y Weyl
2	0	2	1	1	x
3	1	2	x	x	x
4	2	4	2	2	x
5	3	4	x	x	x
6	4	8	x	4	x
7	5	8	x	x	x
8	6	16	x	8	x
9	7	16	x	x	x
10	8	32	16	16	8

Para tener una acción supersimétrica, los campos A_m y λ deben pertenecer a la representación adjunta del grupo de color $SU(N)$. La acción es invariante bajo las transformaciones de supersimetría:

$$\delta A^m = i(\bar{\epsilon}\Gamma^m\lambda - \bar{\lambda}\Gamma^m\epsilon) \quad (80)$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}F_{mn}F^{mn}\epsilon \quad (81)$$

$$\delta\bar{\lambda} = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_{mn}F^{mn} \quad (82)$$

Donde ϵ es el parametro anticonmutativo de la transformación y $\Gamma^{mn} = \frac{1}{2}[\Gamma^m, \Gamma^n]$.

.0.6 Reducción de la parte bosónica

Vamos a hacer la reducción de esta teoría, lo que significa que los campos A^m y λ dependen solo de las coordenadas $x^\mu = x^0, \dots, x^3$, y son independientes de las demás coordenadas. Vamos de dividir el índice m en dos partes, μ e i , las cuales van respectivamente desde 0 a 3 y de 1 a 3. De esta forma, el campo va a tener la forma:

$$A_m = (A^\mu(x^\nu), S^i(x^\nu), P^i(x^\nu)) \quad (83)$$

Donde $S_i \equiv A^{3+i}$, $P_i \equiv A_{6+i}$ De esta forma, tenemos que el tensor F_{mn} se descompone

de forma siguiente:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu] \\
F_{\mu 3+i} &= \partial_\mu S_i - ie[A_\mu, S_i] = D_\mu S_i \\
F_{\mu 6+i} &= \partial_\mu P_i - ie[A_\mu, P_i] = D_\mu P_i \\
F_{3+i 3+j} &= -ie[S_i, S_j] \\
F_{6+i 6+j} &= -ie[P_i, P_j] \\
F_{3+i 6+j} &= -ie[S_i, P_j]
\end{aligned} \tag{84}$$

De esta manera, el factor bosónico en el lagrangiano:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\mu 3+i}F^{\mu 3+i} - \frac{1}{2}F_{\mu 6+i}F^{\mu 6+i} - \frac{1}{2}F_{3+i 3+j}F^{3+i 3+j} \\
&\quad - \frac{1}{2}F_{6+i 6+j}F^{6+i 6+j} \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu S_i D^\mu S^i + \frac{1}{2}D_\mu P_i D^\mu P^i + \frac{e^2}{4}[S_i, S_j]^2 + \\
&\quad \frac{e^2}{4}[P_i, P_j]^2 + \frac{e^2}{2}[S_i, P_j]^2
\end{aligned} \tag{85}$$

De esta manera,

$$-\frac{1}{4}Tr(F_{mn}F^{mn}) = Tr\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu S_i D^\mu S^i + \frac{1}{2}D_\mu P_i D^\mu P^i + V(S, P)\right), \tag{86}$$

donde $V(S, P) = \frac{e^2}{4}Tr([S_i, S_j]^2 + [P_i, P_j]^2 + 2[S_i, P_j]^2)$. Podemos tambien usar otra notación para expresar los campos escalares auxiliares, de la siguiente manera:

$$\varphi = S_I \quad I = 1, 2, 3 \tag{87}$$

$$= P_{I-3} \quad I = 4, 5, 6 \tag{88}$$

De forma que podemos expresar $V(S, P)$ como:

$$\frac{1}{2}Tr \sum_{I < J} [\varphi_I, \varphi_J]^2 \tag{89}$$

y la parte del lagrangiano correspondiente es:

$$-\frac{1}{4}Tr(F_{mn}F^{mn}) = Tr\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu \varphi_I D^\mu \varphi^I + \frac{e^2}{2} \sum_{I < J} [\varphi_I, \varphi_J]^2\right) \tag{90}$$

.0.7 Reducción de la parte fermiónica

En $D = 10$ las matrices de Dirac Γ^m que satisfacen el álgebra de Clifford. $\{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2\eta^{mn}$.

Con $\Gamma^{11} = \Gamma^1 \dots \Gamma^9$ y $(\Gamma^{11})^2 = I$

Ahora, λ es un espinor de Majorana-Weyl 10-dimensional, i.e. cumple simultáneamente:

$$\begin{aligned} (I + \Gamma_{11})\lambda &= 0 \quad (Weyl) \\ \bar{\lambda} \equiv \lambda^\dagger \Gamma_0 &= \lambda^T C \quad (Majorana) \end{aligned} \quad (91)$$

Y la matriz de conjugación de carga, C satisface:

$$C^T = -C \quad , \quad (\Gamma^m)^T = -C\Gamma^m C^{-1} \quad (92)$$

Una forma específica que pueden tomar estas matrices son:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes I \otimes \sigma_3 \quad (93)$$

y

$$\Gamma^{3+i} = I \otimes \alpha^i \otimes \sigma_1 \quad (94)$$

$$\Gamma^{6+i} = \gamma_5 \otimes \beta^i \otimes \sigma_3 \quad (95)$$

$$(96)$$

para $i = 1, 2, 3$. Donde las matrices σ no son otra cosa que las matrices de Pauli. Se puede demostrar que estas matrices cierran el álgebra de Clifford. Más aún, tenemos que la expresión para Γ^{11} es la siguiente:

$$\Gamma_{11} = I \otimes (-\alpha^3)^2 (-\beta^3)^2 \otimes \sigma_2 \quad (97)$$

Si $-\alpha^1 \alpha^2 = \alpha^3$ y $-\beta^1 \beta^2 = \beta^3$. De esta manera:

$$\Gamma_{11} = I \otimes I \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI_{16 \times 16} \\ iI_{16 \times 16} & 0 \end{pmatrix} \quad (98)$$

Así, ya podemos tener una expresión para el espinor λ , usando la condición de Weyl:

$$I + \Gamma_{11} = \begin{pmatrix} I_{16 \times 16} & -iI_{16 \times 16} \\ iI_{16 \times 16} & I_{16 \times 16} \end{pmatrix} \quad (99)$$

y

$$(I + \Gamma_{11})\lambda \rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} i\chi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi \\ -i\Psi \end{pmatrix} \quad (100)$$

De esta manera, el espinor de 32 componentes se descompone de la siguiente forma:

$$\lambda = \Psi \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (101)$$

Donde Ψ es un espinor de 16 componentes. Notemos que el vector incluye la descomposición de Weyl. Si ahora analizamos la condición de Majorana, $\bar{\lambda} = \lambda^\dagger \Gamma_0 = \lambda^T C$, tenemos que

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi \\ -i\Psi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_{\beta 1} \\ \Psi_{\beta 2} \\ \Psi_{\beta 3} \\ \Psi_{\beta 4} \\ -i\Psi_{\beta 1} \\ -i\Psi_{\beta 2} \\ -i\Psi_{\beta 3} \\ -i\Psi_{\beta 4} \end{pmatrix} \quad (102)$$

Así

$$\lambda^\dagger \Gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^\dagger, -i\Psi^\dagger) \Gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^\dagger, -i\Psi^\dagger) (\gamma^0 \otimes I \otimes \sigma_3) \quad (103)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1^\dagger \gamma^0, \Psi_2^\dagger \gamma^0, \Psi_3^\dagger \gamma^0, \Psi_4^\dagger \gamma^0, -i\Psi_1^\dagger \gamma^0, -i\Psi_2^\dagger \gamma^0, -i\Psi_3^\dagger \gamma^0, -i\Psi_4^\dagger \gamma^0) \quad (104)$$

por otro lado

$$\lambda^T C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^T, -i\Psi^T) C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^T, -i\Psi^T) (C \otimes I \otimes I) \quad (105)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1^T C, \Psi_2^T C, \Psi_3^T C, \Psi_4^T C, -i\Psi_1^T C, -i\Psi_2^T C, -i\Psi_3^T C, -i\Psi_4^T C) \quad (106)$$

Así, de la condición

$$\lambda^\dagger \Gamma_0 = \lambda^T C, \quad (107)$$

tenemos las condiciones para el espinor:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^\dagger \gamma_0 &= \Psi_1^T C \\
\Psi_2^\dagger \gamma_0 &= \Psi_2^T C \\
\Psi_3^\dagger \gamma_0 &= \Psi_3^T C \\
\Psi_4^\dagger \gamma_0 &= \Psi_4^T C
\end{aligned} \tag{108}$$

o:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_1 &= \Psi_1^T C \\
\bar{\Psi}_2 &= \Psi_2^T C \\
\bar{\Psi}_3 &= \Psi_3^T C \\
\bar{\Psi}_4 &= \Psi_4^T C
\end{aligned} \tag{109}$$

Éstos son espinores de Majorana en $D = 4$, con dos grados de libertad on-shell. Así, tenemos que si en $D = 10$ había un espinor de Majorana-Weyl con 8 grados de libertad, al hacer la reducción nos quedamos con 4 espinores de Majorana que tienen dos grados de libertad on-shell.

Finalmente, la densidad lagrangiana de teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills en 4-dimensiones es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = Tr \left\{ \right. & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla^\mu S_i \nabla_\mu S_i + \frac{1}{2} \nabla^\mu P_j \nabla_\mu P_j + \frac{1}{2} i \bar{\lambda} \gamma^\mu \nabla_\mu \lambda \\
& \left. - \frac{1}{2} e \bar{\lambda} [i \alpha^i S_i + i P^j P_j i \gamma_5, \lambda] - V(S, P) \right\} \tag{110}
\end{aligned}$$

Soliton en AdS

Veamos rápidamente el ejemplo del solitón. Comencemos por el agujero negro $SAdS_5$

$$ds_5^2 = \frac{r}{L} (f dt^2 + d\mathbf{x}_3^2) + L^2 \frac{dr^2}{fr^2} \quad f = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 \quad (111)$$

Ahora, hacemos la compactificación en la dirección z como: $0 \leq z < l$.

Sin embargo, el $SAdS_5$ compactificado no es la única solución cuya simetría asintótica es $\mathbb{R}^{1,2} \times S^1$. La doble rotación de Wick es $\hat{z} = it$ y $\hat{t} = -iz$. De forma que la métrica del agujero negro queda:

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-d\hat{t}^2 + dx^2 + dy^2 + f d\hat{z}^2) + L^2 \frac{dr^2}{fr^2}, \quad (112)$$

que tiene la misma estructura asintótica que $\mathbb{R}^{1,2} \times S^1$. Esta geometría es conocida como *Solitón de AdS*.

Como geometrías euclidianas son el mismo, pero tienen diferente interpretación lorentziana. El solitón no es un agujero negro, mas aún, dado el factor f que acompaña a $d\hat{z}^2$ el espacio-tiempo termina en $r = r_0$, tal como el agujero negro Euclideo. Esto describe una fase de confinamiento.

Para el agujero negro SAdS, la dirección imaginaria en el tiempo tiene periodicidad $\beta = \pi L^2 r_0$ para evitar una singularidad cónica, de forma similar, el solitón tiene periodicidad en l dada por:

$$l = \frac{\pi L^2}{r_0} \quad (113)$$

Bibliografia

- [1] Pio J. Arias, Lorenzo Leal, and Jean Carlos Perez-Mosquera. A Geometric approach to massive p form duality. *Phys.Rev.*, D67:025020, 2003.
- [2] Vijay Balasubramanian and Per Kraus. A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity. *Commun.Math.Phys.*, 208:413–428, 1999.
- [3] Carlos Alfonso Bayona and Nelson R.F. Braga. Anti-de Sitter boundary in Poincare coordinates. *Gen.Rel.Grav.*, 39:1367–1379, 2007.
- [4] Lars Brink, John H. Schwarz, and J. Scherk. Supersymmetric yang-mills theories. *Nuclear Physics B*, 121(1):77 – 92, 1977.
- [5] Eric D’Hoker and Daniel Z. Freedman. Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence. pages 3–158, 2002.
- [6] F. Gliozzi, Joel Scherk, and David I. Olive. Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model. *Nucl.Phys.*, B122:253–290, 1977.
- [7] S.W. Hawking and DonN. Page. Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, 87(4):577–588, 1983.
- [8] Marc Henneaux. Boundary terms in the AdS / CFT correspondence for spinor fields. 1998.
- [9] Mans Henningson and Konstadinos Sfetsos. Spinors and the AdS / CFT correspondence. *Phys.Lett.*, B431:63–68, 1998.
- [10] Christopher P. Herzog. A Holographic Prediction of the Deconfinement Temperature. *Phys.Rev.Lett.*, 98:091601, 2007.
- [11] S.I. Kruglov. ‘Square root’ of the Proca equation: Spin-3/2 field equation. *Int.J.Mod.Phys.*, A21:1143–1155, 2006.

- [12] W.S. P'Yi. Correlators of currents corresponding to the massive p form fields in AdS / CFT correspondence. *Phys.Lett.*, B448:218–226, 1999.
- [13] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int.J.Theor.Phys.*, 38:1113–1133, 1999.
- [14] John McGreevy. Holographic duality with a view toward many-body physics. *Adv.High Energy Phys.*, 2010:723105, 2010.
- [15] Wolfgang Mueck and K.S. Viswanathan. Conformal field theory correlators from classical field theory on anti-de Sitter space. 2. Vector and spinor fields. *Phys.Rev.*, D58:106006, 1998.
- [16] Wolfgang Mueck and K.S. Viswanathan. Conformal field theory correlators from classical scalar field theory on AdS(d+1). *Phys.Rev.*, D58:041901, 1998.
- [17] Horatiu Nastase. Introduction to AdS-CFT. 2007.
- [18] Makoto Natsuume. AdS/CFT Duality User Guide. 2014.
- [19] Jens Lyng Petersen. Introduction to the Maldacena conjecture on AdS / CFT. *Int.J.Mod.Phys.*, A14:3597–3672, 1999.
- [20] Joseph Polchinski. Introduction to Gauge/Gravity Duality. pages 3–46, 2010.
- [21] Alfonso V. Ramallo. Introduction to the AdS/CFT correspondence. 2013.
- [22] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv.Theor.Math.Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [23] Edward Witten. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv.Theor.Math.Phys.*, 2:505–532, 1998.