



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00047

Matrícula: 2143808611

SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL SISTEMA DE LA CUENTA EN UN ARO.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 17 del mes de marzo del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DRA. LIDIA GEORGINA JIMENEZ LARA
DR. ARTURO ZUNIGA SEGUNDO
DR. ROMAN LINARES ROMERO

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: JUAN CLAUDIO BENAVIDES DEL CARPIO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



JUAN CLAUDIO BENAVIDES DEL CARPIO

ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTA

DRA. LIDIA GEORGINA JIMENEZ LARA

VOCAL

DR. ARTURO ZUNIGA SEGUNDO

SECRETARIO

DR. ROMAN LINARES ROMERO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL SISTEMA DE LA CUENTA EN UN ARO.



Casa abierta al tiempo

TESIS PRESENTADA POR JUAN CLAUDIO BENAVIDES DEL CARPIO
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS

Asesor: Dr. Román Linares Romero

2017

Departamento de Física

Agradecimientos.

Ha sido un largo camino pero por fin puedo ver la conclusión de este importante escalón a mis metas. Quisiera agradecer a mi familia, sin su apoyo nunca hubiera podido llegar a este hermoso país y realizar mis estudios en México. También a mi amada Nath, quien desde el primer día mostró su apoyo y me motivó cuando llegué, me motiva aún al día de hoy a continuar con el esfuerzo y estoy seguro que motivará a seguir avanzando en el futuro.

Es menester también agradecer a CONACyT por el apoyo financiero de la beca que me dieron durante la maestría, es siempre importante contar con un apoyo de esa índole y más aún siendo extranjero. También a la UAMI que con sus instalaciones y todo el personal administrativo me ayudaron a avanzar con cualquier trámite que fuera requerido.

Quiero agradecer también a los docentes de quienes he aprendido tanto en estos años de aprendizaje, al Dr. José Luis Jiménez y al Dr. Marcos Maceda. También a los sinodales con cuyos comentarios y correcciones pude afinar y dejar lista esta tesis para su presentación, el Dr. Arturo Zuñiga y la Dra. Lidia Jiménez. También a mi asesor Dr. Román Linares Romero que me guió y acompañó durante la elaboración de todo este trabajo, los consejos y sus contribuciones fueron imprescindibles para concluir esta tesis.

Finalmente a mis compañeros con quienes siempre encontré valiosas opiniones y útil consejo, además de un desahogo en momentos de frustración. A todos de nuevo... muchas gracias.

Tempus Edax Rerum.

Índice general

Agradecimientos.	2
Resumen.	9
Introducción.	10
1. El Aro y la Cuenta con $\alpha = 0$.	14
1.1. Análisis del potencial y los puntos críticos.	16
1.2. Resolución analítica con $\alpha = 0$	18
1.3. Otros casos.	24
2. Caracterización del Potencial con $\alpha \neq 0$.	27
2.1. Análisis del potencial y los puntos críticos.	29
2.2. Ángulos de escape y ángulos internos.	37
3. Soluciones analíticas con $\alpha \neq 0$.	40
3.1. Ángulos de escape	47
3.2. Ángulos internos	49
3.3. Soluciones.	50
3.3.1. Casos oscilatorios.	50
3.3.2. Rotación libre y separatrices.	55
3.4. Otros casos.	61
4. Analogía con la Termodinámica.	64
Conclusiones y Perspectivas.	73

A. Funciones Elípticas de Jacobi.	76
A.1. Introducción.	76
A.2. Propiedades.	78
A.3. Doble Periodicidad	81
B. Integral elíptica de primera especie y transformación de Moebius.	85
C. Resolución de un polinomio cúbico.	90
D. Resolución de un polinomio cuártico.	94
Bibliografía	98

Índice de figuras

1.	Esquema del sistema de la cuenta en un aro con eje de rotación fuera del diámetro central.	11
1.1.	Esquema del sistema de una cuenta en un aro con $\alpha = 0$	15
1.2.	Potencial efectivo para diferentes valores de β	15
1.3.	Derivada del potencial efectivo para diferentes valores de β	16
1.4.	θ_m vs β . Se puede notar el cambio continuo del punto crítico cuando $\beta = 1$	17
1.5.	En el gráfico de la izquierda vemos a las raíces $\pm\tau_1$ y $\pm\tau_2$ vs τ_0 , mientras que en el gráfico de la derecha vemos a las mismas raíces pero vs el ángulo inicial θ_0 . En ambos casos el parámetro β es igual a 0,3.	21
1.6.	Raíces τ_1^2 y τ_2^2 vs θ_0 . Obtenidas directamente de la ecuación 1.16. . .	21
1.7.	Diagramas de fase para el sistema de la cuenta en el aro. Donde (a) es en el régimen donde $\beta \geq 1$ y (b) es en el régimen donde $\beta < 1$. [1] .	23
2.1.	Esquema del sistema del aro y la cuenta con eje de rotación fuera del diámetro central.	28
2.2.	Gráfica del potencial efectivo, en la izquierda apreciamos el potencial cuando el parámetro $\alpha = 1/8$ y para diferentes valores de β , mientras que en el gráfico de la derecha se fija a $\beta = 1/8$ para diferentes valores de α	29
2.3.	Gráfica de varios potenciales efectivos y sus derivadas tras la sustitución de Weierstrass, en la izquierda tenemos al potencial vs τ , mientras que en la derecha tenemos a su derivada vs τ	30

2.4.	Gráfica α vs β de las diferentes regiones del signo de Δ	33
2.5.	Gráfica e_1, e_2, e_3 vs β del polinomio cúbico de la ecuación (2.9). Por razones de completez se incluyeron valores negativos de β a pesar de no existir en nuestro problema.	34
2.6.	Gráfica de las raíces τ' vs β para $\alpha = 1/8$	36
2.7.	Gráfica de los puntos críticos vs β para $\alpha = 1/8$	36
2.8.	Gráfica de los puntos críticos vs α para $\beta = 0,5$. Podemos notar que para α con valores negativos las raíces cambian en cuanto a qué punto crítico son. Las raíces estan descritas con los mismos colores y se indica en la figura a que punto crítico corresponden ya sea para $\alpha > 0$ o para $\alpha < 0$	37
3.1.	Potencial vs θ para valores de $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,3$	43
3.2.	Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 , donde la línea roja es τ_1 , la línea verde es τ_3 , la línea amarilla es τ_4 y la línea azul es τ_2	44
3.3.	Raíces de $P(\tau)$ vs $k^2 = E/2mgR$	44
3.4.	Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 vs β , donde el plano rojo es τ_1 , el plano verde es τ_3 , el plano amarillo es τ_4 y el plano azul es τ_2 y con $\alpha = 1/8$	45
3.5.	Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 vs β separadas y con $\alpha = 1/8$	45
3.6.	Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 vs α , donde el plano rojo es τ_1 , el plano verde es τ_3 , el plano amarillo es τ_4 y el plano azul es τ_2 y con $\beta = 0,3$	46
3.7.	Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 vs β separadas y con $\beta = 0,3$	46
3.8.	Ángulos importantes en el potencial, θ_M y θ_{ML} son los ángulos donde tenemos los máximos (global y local respectivamente), θ_m y θ_{mL} son los ángulos donde tenemos los mínimos (global y local respectivamente), θ_{e+} y θ_{e-} son los ángulos de escape, que en este caso no son iguales, finalmente θ_{i1} y θ_{i2} son los ángulos “internos”.	51
3.9.	Diagrama de fase del sistema del aro y la cuenta para los valores de $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,3$	55
3.10.	Módulo r de las soluciones de las regiones II, III, IV y VII vs θ	60
3.11.	Módulo r_r de la solución para el caso de rotación libre vs $\dot{\theta}$	60
3.12.	Diagrama de fase para el caso con $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,9$	62
3.13.	Diagrama de fase para el caso con $\alpha = 1/8$ y $\beta = 2$	63

4.1. Gráficas comparativas. <i>a)</i> es lo obtenido por Fletcher para las variables β^{-1} vs θ para $\alpha = 0$. <i>b)</i> es la la temperatura T/T_c vs la magnetización M sin ningún campo magnético externo actuando en el ferromagneto. Finalmente <i>c)</i> es lo obtenido por nosotros con β vs θ_m donde las variables en θ son los puntos críticos del mínimo para cuando $\alpha = 0$	67
4.2. Puntos críticos vs β para un $\alpha = 1/8$. Podemos apreciar un cambio discontinuo en el número de puntos críticos para el valor de $\beta = 3\sqrt{3}/8$	68
4.3. Gráficas comparativas. <i>a)</i> es lo obtenido por Fletcher para las variables α vs θ para $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} > 1$. <i>b)</i> es el campo magnético B vs la magnetización M para $T < T_c$ y $T > T_c$. Finalmente <i>c)</i> es lo obtenido por nosotros con α vs θ donde las variables en θ son los puntos críticos máximo y mínimo para cuando $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} > 1$	69
4.4. Gráficas comparativas. <i>a)</i> es lo obtenido por Fletcher para las variables α vs θ para $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} < 1$. <i>b)</i> es el campo magnético B vs la magnetización M para $T < T_c$ donde se puede apreciar una histéresis. Finalmente <i>c)</i> es lo obtenido por nosotros con α vs θ donde las variables en θ son todos los puntos críticos para cuando $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} < 1$	70
4.5. Gráficas comparativas para los casos con β o α fijos. En <i>(a)</i> tenemos a los puntos críticos con respecto a β mientras que en <i>(b)</i> tenemos a los puntos críticos con respecto a α	71
4.6. Gráficas comparativas. <i>a)</i> es lo obtenido por Fletcher para las variables β^{-1} vs α . <i>b)</i> es la temperatura T vs el campo magnético B para un ferromagneto ideal y real. Finalmente <i>c)</i> es lo obtenido por nosotros con β vs α	72
A.1. Funciones snu , cnu y dnu . [1]	79
B.1. Proyección de la recta a una circunferencia y mapeo de las raíces del polinomio en dicha circunferencia.	86
B.2. Polinomio cuártico dividido en regiones, la línea azul corresponde a un $P(\tau)$ mientras que la línea naranja corresponde a $-P(\tau)$	86

Índice de cuadros

3.1. Regiones para la integración para los valores de $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,3$.	50
3.2. Soluciones para todas las regiones de integración en los casos oscilatorios. Definimos las constantes $g_s = (\tau_1 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_2)$, $\mathcal{A}' = \sqrt{(\tau_1 - \frac{\tau_c + \tau_{\bar{c}}}{2})^2 - \frac{(\tau_c - \tau_{\bar{c}})^2}{4}}$, $\mathcal{B}' = \sqrt{(\tau_3 - \frac{\tau_c + \tau_{\bar{c}}}{2})^2 - \frac{(\tau_c - \tau_{\bar{c}})^2}{4}}$ y $r'_c = \sqrt{\frac{(\tau_1 - \tau_3)^2 - (\mathcal{A}' - \mathcal{B}')^2}{4\mathcal{A}'\mathcal{B}'}}$. Las demás constantes ya fueron definidas con anterioridad al igual que el factor $2K$.	56
4.1. Analogías entre las cantidades físicas del problema mecánico de la cuenta en el aro con un ferromagneto sujeto a un campo magnético externo.	65
C.1. Raíces del polinomio cúbico reducido (C.2) para $g_2 > 0$	93
C.2. Raíces del polinomio cúbico reducido (C.2) para $g_2 < 0$	93
D.1. Naturaleza de las raíces del polinomio cuártico en base a los factores mencionados.	97

Resumen.

Describimos analíticamente el movimiento de una cuenta confinada a un aro circular, que oscila sin rozamiento mientras el aro gira a una velocidad angular ω constante. Donde además tomamos cualquier eje de rotación paralelo a la fuerza de gravedad g . Parametrizamos todo el problema bajo las constantes β y α las cuales traen la información de la velocidad del aro ω y la distancia del eje de rotación con respecto al centro. Se analiza tanto el caso para $\alpha = 0$ (Eje de rotación en el centro del aro) como para $\alpha \neq 0$. Realizamos una caracterización del potencial y los puntos críticos del sistema y se encontraron las soluciones analíticas para todas las regiones físicas del problema. Posteriormente se llevó a cabo una comparación del sistema mecánico con uno termodinámico, recordando analogías entre la teoría de Landau para un material ferromagnético con el problema de la cuenta en un aro. Concluimos el trabajo viendo las perspectivas de continuar esta línea de estudio y los aportes obtenidos.

Introducción.

El encontrar soluciones analíticas sigue siendo hoy en día algo muy requerido y lastimosamente no siempre algo trivial, la oportuna ayuda de las computadoras y los cálculos numéricos nos asistieron y asisten a seguir adelante en problemas cuya solución analítica es muy complicada de encontrar. Pero aún así considero que una solución analítica sigue siendo de suma relevancia pues nos lleva a afirmar sin lugar a dudas que por fin se tiene una solución total de un problema y es lo que nos proponemos con este trabajo.

En nuestro caso, trataremos un sistema algo familiar, el sistema de la cuenta en un aro, que consiste en una cuenta que sin rozamiento se desliza por un aro circular. En su forma más sencilla el problema se puede resolver analíticamente como ya ha sido reportado [1] hace no mucho tiempo. Cabe mencionar que aunque esta solución ya se manejaba de manera implícita en la literatura hace muchos años, es hace poco que se empieza a poner las soluciones de una manera más rigurosa, lo que nos llevó a buscar una solución analítica para un sistema más general.

Históricamente el problema del aro y la cuenta es muy citado en la literatura, principalmente como un sistema muy ilustrativo a la hora de la enseñanza de problemas de mecánica clásica [2], pero también es usado comúnmente como un problema análogo a otros más complejos [3]. Como por ejemplo en sistemas aproximados de superconductividad magnética [4], como un análogo a transiciones de fase de primer y segundo orden [5] en la teoría de Landau [6] [7] [8], el oscilador de Duffing [3], y un equivalente electromagnético de una partícula cargada moviéndose por un cable circular rotando y bajo un campo magnético uniforme [3] entre otros.

Su relevancia comenzó en el año 1788 con James Watt [9], quien introdujo un artefacto conocido como el regulador a sugerencia de su socio Matthew Boulton. El

donde se aprecia la energía cinética y la energía potencial $V(\theta) = -\frac{1}{2}m\omega^2(R \sin \theta + A)^2 + mgR(1 - \cos \theta)$.

Finalmente, definimos el potencial efectivo del sistema dividiendo al potencial entre $2mgR$ para adimensionalizarlo, y que resulta dependiente además de dos constantes de mucha utilidad en todo el trabajo, que se aprecia en la ecuación (2):

$$V_{eff} = \frac{V(\theta)}{2mgR} = -\frac{1}{4\beta}(\sin \theta + \alpha)^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta), \quad (2)$$

donde tenemos definidas las constantes $\alpha = A/R$ y $\beta = \omega_c^2/\omega^2$ con $\omega_c^2 = g/R$. De aquí en adelante la constante α se utilizará para representar la distancia del eje de rotación con respecto al eje central, y β para representar la velocidad de rotación del aro con respecto a la velocidad angular ω_c^2 que es denominada velocidad angular crítica.

Como se verá más adelante, este sistema se puede describir como un polinomio cuártico, el cual como ya fue demostrado [10] [11] es equivalente a una integral elíptica siempre y cuando el polinomio esté en el integrando. Por lo que siguiendo esa lógica podemos anticipar que las soluciones involucrarán funciones elípticas. Asegurada la existencia y la forma de estas soluciones, el presente trabajo buscará resolver analíticamente este sistema para todos sus casos, y consistirá en un capítulo enfocado en el sistema más simple [1] con su solución analítica, es decir cuando $\alpha = 0$, que nos llevarán a soluciones descritas en funciones elípticas de Jacobi las cuales se explican en el Apéndice A, también se llevará a cabo un análisis de los puntos críticos y el potencial, que resulta de mucha utilidad cuando se buscan las analogías con otros problemas.

Seguiremos con el segundo capítulo que tratará del problema generalizado, es decir con cualquier eje de rotación vertical ($\alpha \neq 0$), enfocándonos en el análisis del potencial efectivo y los puntos críticos del mismo.

En el tercer capítulo seguiremos con el sistema donde $\alpha \neq 0$ pero nos enfocaremos en buscar las soluciones analíticas. A diferencia del primer capítulo en este caso tendremos un polinomio cuártico completo, cuya factorización en sus raíces es mucho más complicada. Utilizaremos el método expuesto en los Apéndices C y D para llevar al polinomio a la forma de funciones elípticas de Jacobi como se aprecia en el Apéndice B. Finalmente mostraremos las soluciones analíticas para los casos más

característicos del problema.

En el cuarto capítulo expondremos uno de los casos donde el sistema de la cuenta en el aro es análogo a un problema físico distinto. En este caso mostraremos sin profundizar demasiado en el tema la analogía con las transiciones de fase de primer y segundo orden en termodinámica, en particular el caso de un material ferromagnético bajo la teoría de Landau. Finalizaremos el trabajo con las Conclusiones y las perspectivas de todo el estudio realizado.

En cuanto a los Apéndices, anexamos cuatro. En el apéndice A se expone una compacta pero necesaria explicación de lo que son las funciones elípticas de Jacobi, sus características y propiedades, además de su utilidad. En el apéndice B se hace un muy breve desarrollo de la transformación de Moebius y su utilidad para poder realizar la integración de un polinomio cuártico, que resulta en funciones elípticas de Jacobi inversas. Mientras que en los apéndices C y D se exponen los métodos utilizados para encontrar las raíces de los polinomios cúbico y cuártico respectivamente.

Finalmente se mencionan las referencias bajo las cuales está basado todo este trabajo en la Bibliografía.

Capítulo 1

El Aro y la Cuenta con $\alpha = 0$.

Comenzaremos el estudio con un caso particular de la ecuación (1), el caso en el que el eje de rotación se sitúa directamente sobre el diámetro central del aro, es decir cuando $\alpha = 0$, este sistema se puede apreciar en la figura (1.1).

Para la resolución analítica completa (no solo de este caso si no también del caso generalizado) vamos a considerar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , donde solo nos encontramos con una coordenada generalizada, la cual es el ángulo θ del sistema. Puesto que tanto el radio R como la velocidad angular $\dot{\phi}$ son parámetros constantes a lo largo del tiempo (debido a las condiciones de que el radio del aro sea constante $r = R$ y velocidad angular también $\omega = \dot{\phi}$). Por lo que el Lagrangiano \mathcal{L} del sistema con $\alpha = 0$ es:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta - mgR(1 - \cos\theta), \quad (1.1)$$

El potencial efectivo del sistema en este caso lo obtenemos igualando $\alpha = 0$ en la ecuación (2):

$$V_{eff} = -\frac{1}{4\beta}\sin^2\theta + \frac{1}{2}(1 - \cos\theta). \quad (1.2)$$

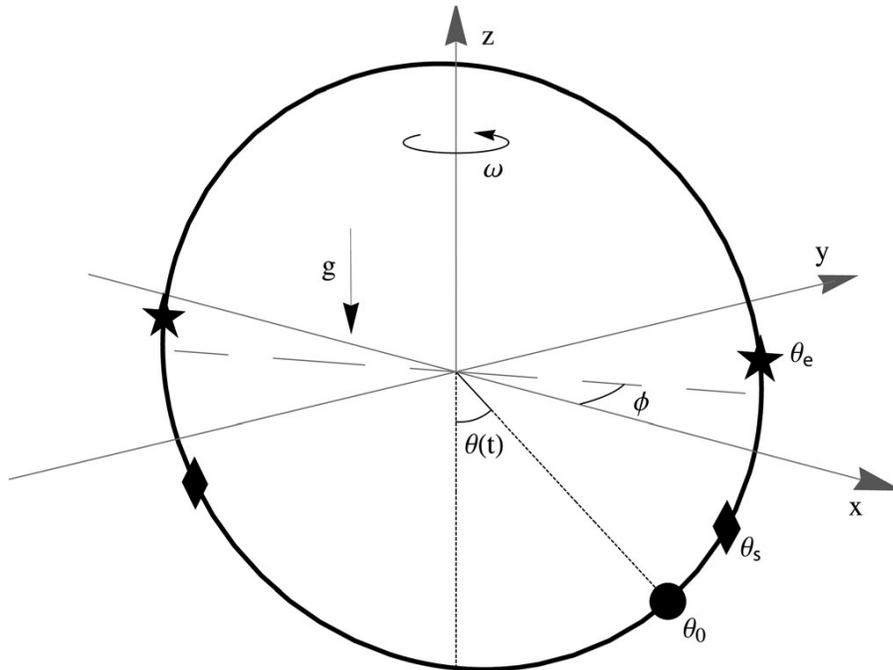


Figura 1.1: Esquema del sistema de una cuenta en un aro con $\alpha = 0$.

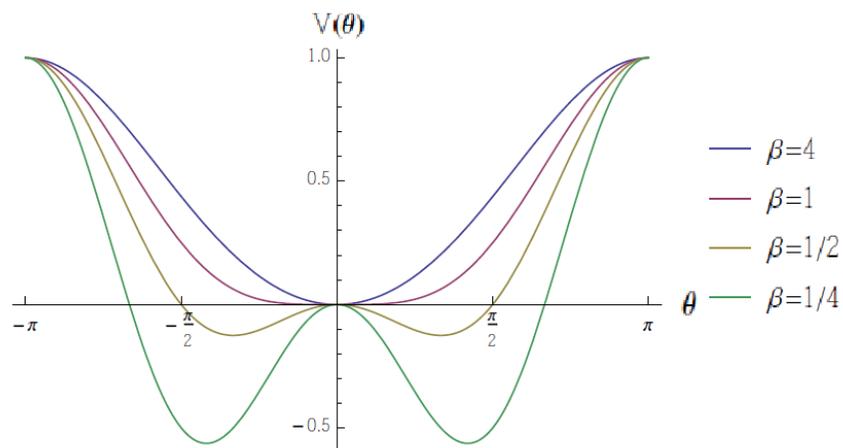
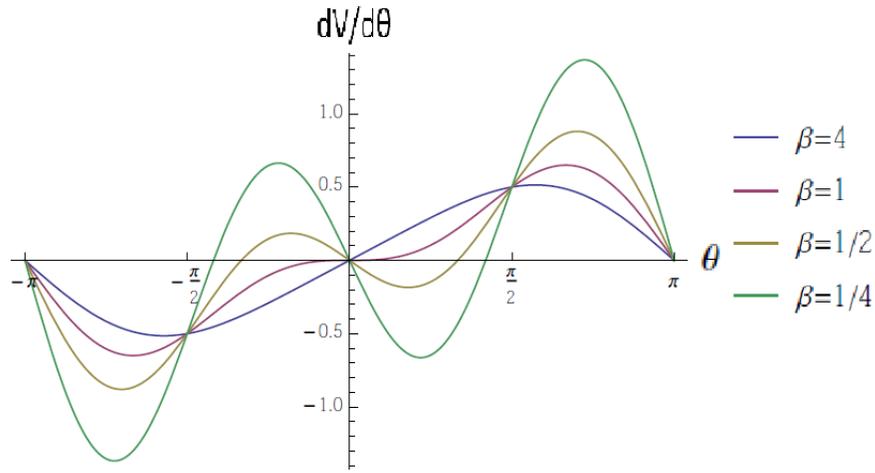


Figura 1.2: Potencial efectivo para diferentes valores de β .


 Figura 1.3: Derivada del potencial efectivo para diferentes valores de β .

1.1. Análisis del potencial y los puntos críticos.

Podemos ver la utilidad del potencial efectivo de la ecuación (1.2) al graficarlo en función del ángulo θ como se ve en la figura (1.2). Donde notamos que la forma de la función del potencial efectivo depende mucho del valor de la velocidad angular ω , y si esta velocidad es mayor o menor a una velocidad “crítica” ω_c . Si es mayor tenemos un potencial con dos puntos de equilibrio estables ($\theta = \pm\theta_s$) y uno inestable en $\theta = 0$, además estos dos “pozos” se encuentran en potenciales efectivos menores a cero. Este régimen nos recuerda al del potencial cuártico.

Mientras que si la velocidad angular es menor o igual a la velocidad crítica notamos un potencial muy similar al del péndulo simple, con un mínimo en el ángulo cero (también punto de equilibrio estable), y con todos los valores del potencial mayores a cero, ambos regímenes tienen un máximo en $\theta = \pm\pi$, es decir cuando $V_{eff} = 2mgR$.

Para encontrar los puntos críticos de este sistema también requeriremos la derivada del potencial efectivo, que resulta en la ecuación (1.3), y cuyo gráfico se aprecia en la figura (1.3).

$$\frac{dV}{d\theta} = -\frac{1}{2\beta} \sin\theta(\cos\theta - \beta) = 0 \Rightarrow \sin(\theta) = 0 \text{ y } \cos(\theta) = \beta. \quad (1.3)$$

De donde se obtienen inmediatamente los puntos críticos del potencial, de $\sin\theta =$

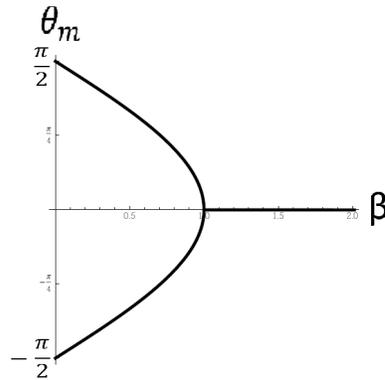


Figura 1.4: θ_m vs β . Se puede notar el cambio continuo del punto crítico cuando $\beta = 1$.

0 notamos que tenemos dos puntos críticos en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, mientras que el último punto crítico resulta $\theta = \pm \cos^{-1} \beta$.

Los valores del potencial para estos puntos críticos merecen ser puestos de forma explícita para compararse con los cambios que estos tienen cuando estudiemos el caso generalizado. Estos valores son para el punto crítico máximo $\theta = \pm\pi$, que es un punto de equilibrio inestable como $V(\pm\pi) = 1$, para el punto crítico $\theta = 0$ tenemos que es un punto de equilibrio estable cuando $\beta \geq 1$, y un punto de equilibrio inestable y un máximo local cuando $\beta < 1$ y el potencial es nulo para cualquiera de estos casos. Finalmente para los puntos críticos $\theta = \pm \cos^{-1} \beta = \theta_s$ que únicamente aparecen cuando $\beta < 1$. El potencial en estos puntos resulta como $V(\pm \cos^{-1} \beta) = -(1-\beta)^2/\beta$, donde notamos que mientras $\beta \rightarrow 0$, es decir $\omega \rightarrow \infty$ el potencial tienda a $-\infty$.

Podemos apreciar esta transición del mínimo global para los dos diferentes casos de β en la figura (1.4). Se suele encontrar analogías de esta transición con transiciones de fase de segundo orden en termodinámica [5] como veremos en el capítulo 4.

Es también esencial hallar otro ángulo importante, el denominado ángulo de escape θ_e . Cuando estamos en el caso donde $\beta < 1$ tenemos dos regiones de movimiento para la cuenta, una en la que ésta oscilará atrapada en uno de los dos pozos del potencial, la segunda cuando la partícula parte con mayor energía y oscile por sobre los dos pozos. Mientras que si soltamos a la cuenta exactamente en este ángulo θ_e le tomaría un tiempo infinito alcanzar el punto de equilibrio inestable en $\theta = 0$, esto se

profundizará más en la siguiente sección, pero este ángulo cumple con la propiedad de que se halla en el punto donde el potencial es igual a cero, tres ángulos cumplen esta propiedad, el punto crítico $\theta = 0$ y $\pm\theta_e$, entonces igualando la ecuación (1.2) a cero, obtenemos la expresión:

$$\theta_e = \pm \cos^{-1}(2\beta - 1). \quad (1.4)$$

1.2. Resolución analítica con $\alpha = 0$.

Analizados los puntos críticos y el potencial, podemos continuar ahora con la resolución analítica. Es importante mencionar que hay dos formas de llegar a la solución, que son muy similares pero la sutil diferencia radica en las constantes que definimos. La primera forma define constantes que dependen del ángulo y la velocidad inicial θ_0 y $\dot{\theta}_0$, mientras que la segunda forma define constantes dependientes únicamente de la energía. El resultado será el mismo solo que con constantes un poco diferentes pero equivalentes entre sí.

Para abarcar el problema usaremos ambas formas, en el caso $\alpha = 0$ definiremos las constantes dependientes del ángulo y la velocidad inicial, mientras que para $\alpha \neq 0$ utilizaremos ambas formas para diferentes casos.

Obtenemos la ecuación de movimiento del sistema con la coordenada generalizada $\theta(t)$ usando la ecuación de Euler-Lagrange, resultando:

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{2} \sin 2\theta - \omega_c^2 \sin \theta. \quad (1.5)$$

Para resolver esta ecuación diferencial de manera analítica, requeriremos de las funciones elípticas de Jacobi (véase Apéndice A), para lograrlo llevaremos la ecuación diferencial a la forma de una integral elíptica, multiplicando la ecuación (1.5) por $\dot{\theta}$ e integrando obtenemos:

$$\frac{\dot{\theta}^2(t)}{2} - \frac{\dot{\theta}_o^2(t)}{2} = -\frac{\omega^2}{4}(\cos 2\theta(t) - \cos 2\theta_o) + \omega^2\beta(\cos \theta(t) - \cos \theta_o), \quad (1.6)$$

donde, organizando los términos de una manera conveniente resulta:

$$\frac{\dot{\theta}^2(t)}{\omega^2} + \cos^2 \theta(t) - 2\beta \cos \theta(t) = \mathcal{C}. \quad (1.7)$$

La constante \mathcal{C} es la suma de las funciones que dependen de las condiciones iniciales del ángulo inicial θ_0 y la velocidad inicial $\dot{\theta}_0$:

$$\mathcal{C} = \cos^2 \theta_o - 2\beta \cos \theta_o + \left(\frac{\dot{\theta}_o}{\omega} \right)^2. \quad (1.8)$$

Ahora bien, para llegar a una expresión con una integral elíptica, utilizaremos un cambio de variable de mucha utilidad, llamado la sustitución de Weierstrass:

$$\tau = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}. \quad (1.9)$$

La cual, para los valores que utilizaremos en todo el trabajo resulta como:

$$\cos \theta = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad \sin \theta = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}, \quad d\theta = \frac{2d\tau}{1 + \tau^2}. \quad (1.10)$$

Con lo que la coordenada generalizada θ será:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \right), \quad \dot{\theta}^2 = \frac{4}{(1 + \tau^2)^2} \dot{\tau}^2. \quad (1.11)$$

Por lo que, organizando los términos, la ecuación (1.7) queda como:

$$\left(\frac{2d\tau}{\omega dt} \right)^2 = \tau^4 (\mathcal{C} - 1 - 2\beta) + 2\tau^2 (\mathcal{C} + 1) + (\mathcal{C} - 1 + 2\beta), \quad (1.12)$$

donde definiremos las constantes p_{\pm} como:

$$p_{\pm} = \mathcal{C} - 1 \pm 2\beta. \quad (1.13)$$

Por lo que, utilizando la constante p_{\pm} , integramos la ecuación (1.12) y despejando el tiempo resulta:

$$\int_{\tau_o}^{\tau(t)} \frac{2d\tau'}{\sqrt{p_- \tau'^4 + 2(\mathcal{C} + 1)\tau'^2 + p_+}} = \omega t. \quad (1.14)$$

En el denominador del integrando ya notamos un polinomio de orden cuatro

pero únicamente con potencias pares. Ahora buscamos factorizarlo de tal manera que quede como un producto de las raíces de dicho polinomio con una resta del factor τ'^2 , entonces dividiendo el polinomio entre p_- tenemos:

$$\tau'^4 + 2 \left(\frac{C+1}{p_-} \right) \tau'^2 + \left(\frac{p_+}{p_-} \right) = (\tau'^2 - \tau_1^2)(\tau'^2 - \tau_2^2), \quad (1.15)$$

y calculando las raíces τ_1^2 y τ_2^2 , vemos que pueden tomar dos valores:

$$\tau_1^2 = \frac{1 - \cos \theta_o}{1 + \cos \theta_o} = \tau_o^2, \quad \tau_2^2 = \frac{1 + \cos \theta_o - 2\beta}{1 - \cos \theta_o + 2\beta}. \quad (1.16)$$

Las raíces τ_1^2 y τ_2^2 son muy importantes, pues dependiendo del valor que tomen obtendremos diferentes soluciones para el sistema de la cuenta en un aro. Donde cada solución será quien nos describa el sistema en las diferentes regiones del potencial efectivo ya vistas.

La raíz τ_1^2 es siempre mayor o igual a cero, mientras que τ_2^2 si puede tomar cualquier valor real. Podemos apreciar mejor a las raíces τ_1^2 y τ_2^2 en las figuras (1.5) y (1.6). Por ejemplo, para el régimen donde $\beta \geq 1$ solo tendremos una región descrita por una solución en el intervalo donde $\theta_o \in [0, \pi]$, mientras que cuando nos encontramos en el régimen donde $\beta < 1$, tendremos dos intervalos divididos por el punto donde $\tau_2^2 = 0$ el cual ocurre cuando se cumple que la condición inicial para θ_o toma el valor de θ_e .

El ángulo θ_e es de mucha importancia en este régimen pues dependiendo de con que ángulo inicial soltemos a la cuenta, tendremos diferentes movimientos, ya sea que $\theta_o > \theta_e$, tendremos un movimiento a manera de un péndulo en una oscilación de un lado a otro del aro, o ya sea que $\theta_o < \theta_e$, tendremos un movimiento con una oscilación alrededor del ángulo θ_s atrapado en solo un lado (derecho o izquierdo) del aro.

Continuando con la resolución de la integral de la ecuación (1.14), vemos primero el régimen donde $\beta \geq 1$, en este régimen la raíz τ_2^2 es menor a cero, por lo que podemos decir que $|\tau_2^2| = -\tau_2^2$, dejando la ecuación (1.14) como:

$$\omega t = \int_{\sqrt{\tau_1^2}}^{\tau(t)} \frac{2d\tau}{\sqrt{p_-(\tau^2 - \tau_1^2)(\tau^2 + |\tau_2^2|)}}. \quad (1.17)$$

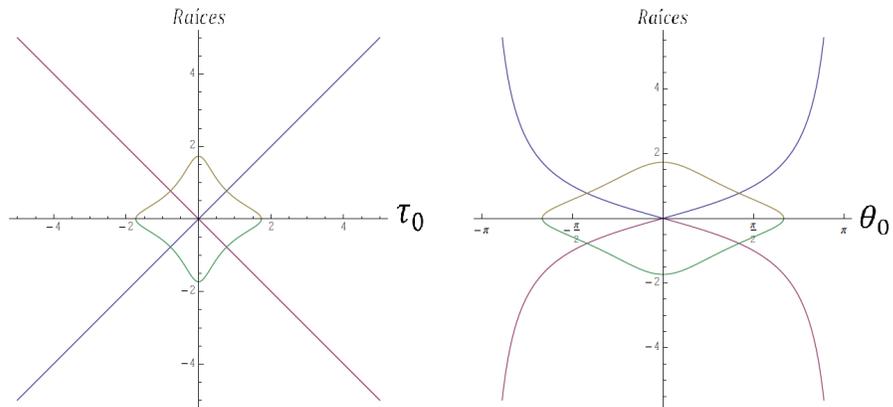


Figura 1.5: En el gráfico de la izquierda vemos a las raíces $\pm\tau_1$ y $\pm\tau_2$ vs τ_0 , mientras que en el gráfico de la derecha vemos a las mismas raíces pero vs el ángulo inicial θ_0 . En ambos casos el parámetro β es igual a 0,3.

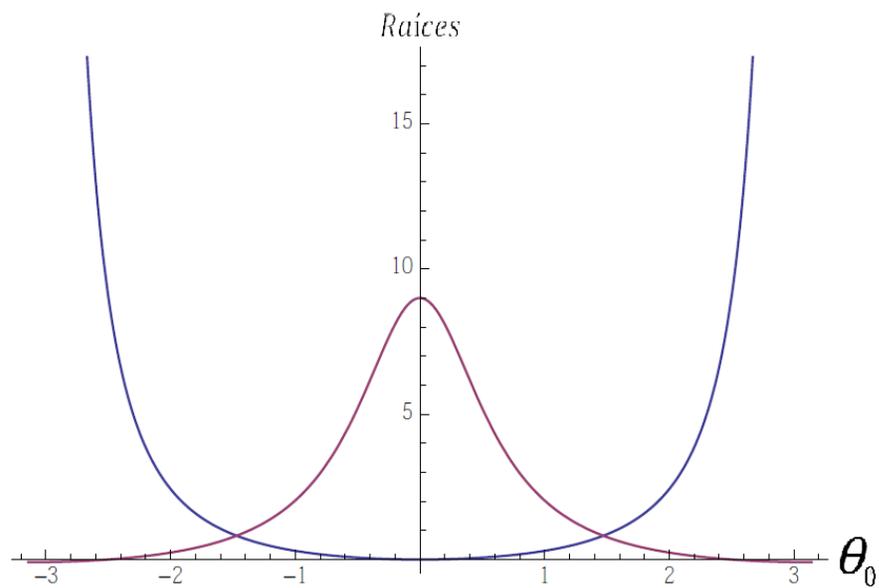


Figura 1.6: Raíces τ_1^2 y τ_2^2 vs θ_0 . Obtenidas directamente de la ecuación 1.16.

De (1.17) obtenemos directamente:

$$\sqrt{|p_-|} \frac{\omega t}{2} = \int_{\sqrt{\tau_1^2}}^{\tau(t)} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau_1^2 - \tau^2)(\tau^2 + |\tau_2^2|)}}. \quad (1.18)$$

La integral de (1.18) ya tiene una forma conocida, pues es de la forma de una integral elíptica de la función inversa elíptica de Jacobi cn , por lo que resulta:

$$\sqrt{|p_-|} \frac{\omega t}{2} = -\frac{1}{\sqrt{\tau_1^2 + |\tau_2^2|}} cn^{-1} \left(\frac{\tau(t)}{\sqrt{\tau_1^2}}, \frac{\sqrt{\tau_1^2}}{\sqrt{\tau_1^2 + |\tau_2^2|}} \right). \quad (1.19)$$

Por lo que reemplazando el valor de τ e invirtiendo la función cn obtenemos la solución para el régimen $\beta \geq 1$:

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\tau_1^2} cn \left(\frac{\omega t}{2} \sqrt{|p_-|(\tau_1^2 + |\tau_2^2|)}, \sqrt{\frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 + |\tau_2^2|}} \right) \right\}. \quad (1.20)$$

Aprovechamos también el hecho de que la función cn es una función par y le cambiamos el signo al primer módulo, es decir: $cn(u, k) = cn(-u, k)$.

Ahora bien, para el régimen donde $\beta < 1$ tenemos que tomar en consideración las diferentes posibilidades en los valores que puede tomar la raíz τ_2^2 . Tendremos tres casos; el primero es cuando la τ_2^2 es mayor a cero y además es mayor a la raíz τ_1^2 , el segundo es cuando τ_2^2 es mayor o igual a cero pero menor a la raíz τ_1^2 y el tercer caso es cuando τ_2^2 es menor o igual a cero.

Esta diferencia entre los valores de la raíz τ_2^2 es lo que nos llevará a diferentes funciones elípticas de Jacobi en las soluciones, siguiendo el mismo procedimiento que hicimos para llegar a (1.20) obtenemos las soluciones para el régimen $\beta < 1$:

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\tau_1^2} nd \left(\frac{\omega t}{2} \sqrt{|p_-| \tau_2^2}, \sqrt{\frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{\tau_2^2}} \right) \right\}, \text{ para } : 0 \leq \tau_1^2 < \tau_2^2, \theta_o \in [0, \theta_s], \quad (1.21)$$

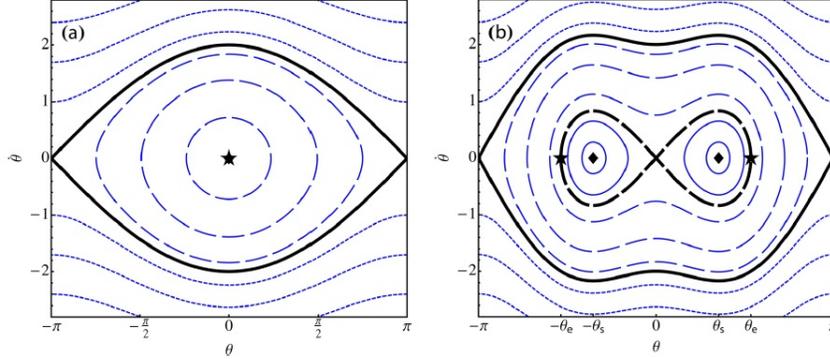


Figura 1.7: Diagramas de fase para el sistema de la cuenta en el aro. Donde (a) es en el régimen donde $\beta \geq 1$ y (b) es en el régimen donde $\beta < 1$. [1]

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\tau_1^2} \operatorname{dn} \left(\frac{\omega t}{2} \sqrt{|p_-| \tau_1^2}, \sqrt{\frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau_1^2}} \right) \right\}, \text{ para } : 0 \leq \tau_2^2 < \tau_1^2, \theta_o \in [\theta_s, \theta_e], \quad (1.22)$$

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\tau_1^2} \operatorname{cn} \left(\frac{\omega t}{2} \sqrt{|p_-| (\tau_1^2 + |\tau_2^2|)}, \sqrt{\frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 + |\tau_2^2|}} \right) \right\}, \text{ para } : \tau_2^2 \leq 0 < \tau_1^2, \theta_o \in [\theta_e, \pi]. \quad (1.23)$$

En la figura (1.7) podemos ver el diagrama de fase del sistema para los dos regímenes, donde la solución de la ecuación (1.20) nos describe los movimientos dentro de la separatriz del diagrama de la izquierda. Pero para el otro régimen tenemos algo un poco más complejo, pues notamos que existen dos separatrices, la primera con forma de lemniscata y la segunda con una forma ovalada similar a la de la separatriz del primer régimen (pero con una concavidad en las cercanías de $\theta = 0$). Las soluciones de las ecuaciones (1.21) y (1.22) nos describen el movimiento dentro de la primera separatriz, (1.21) si es que soltamos a la cuenta con un ángulo menor a θ_s , y (1.22) cuando soltamos a la cuenta con un ángulo mayor a θ_s , mientras que la solución de la ecuación (1.23) nos describe el movimiento que está entre las dos separatrices. Cabe recalcar que (1.23) y (1.20) tienen exactamente la misma forma, y esto es debido a que en ambos casos tenemos casi el mismo movimiento, la sutil

diferencia es que hay un ligero cambio en la velocidad cuando se pasa cerca del ángulo cero que se hace más notorio si la cuenta partió desde un ángulo cercano a θ_e .

1.3. Otros casos.

Ahora procedemos con los demás casos; para las separatrices, y para el caso donde la cuenta entra en rotación libre (afuera de toda separatriz).

Para la separatriz interna del régimen donde $\beta < 1$, podemos partir del hecho de que el sistema con las condiciones iniciales $\theta_o = \dot{\theta}_o = 0$ es un punto de dicha separatriz, por lo que ajustando la constante $\mathcal{C} = 1 - 2\beta$, ajustando la ecuación (1.7) a estas condiciones, notamos que cualquier otro punto de la separatriz cumple con la ecuación:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2} = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta - 2\beta). \quad (1.24)$$

Por lo tanto la separatriz tiene la forma de una lemniscata, para obtener la función $\theta(t)$ de esta separatriz partimos de (1.14) con las consideraciones ya mencionadas, y obtenemos para el caso más simple de $\theta_o = \theta_e$:

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1}{\beta} - 1} \operatorname{sech} \left(\omega c t \sqrt{\frac{1}{\beta} - 1} \right) \right]. \quad (1.25)$$

La segunda separatriz se obtiene de una manera similar, esta vez notamos que $\theta_o = \pi, \dot{\theta}_o = 0$ es un punto de esta separatriz, por lo que $\mathcal{C} = 1 + 2\beta$ lo que nos deja con que cualquier otro punto de la separatriz debe cumplir:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2} = (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta + 2\beta). \quad (1.26)$$

Que es la separatriz externa del régimen $\beta < 1$ y la única separatriz en el régimen $\beta \geq 1$, siguiendo el mismo procedimiento que para la primera separatriz, obtenemos de la integral de (1.14) la expresión:

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}} \sinh \left(\omega t \sqrt{1+\beta} + \sinh^{-1} \left(\tan \left(\frac{\theta_o}{2} \right) \sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}} \right) \right) \right]. \quad (1.27)$$

Salta a la vista que las separatrices no contienen funciones elípticas de Jacobi.

Finalmente buscamos la solución para la última región, que por fortuna tiene la misma forma para ambos regímenes, la de la rotación libre. En esta región tenemos movimientos donde la cuenta tiene una energía que es mayor que el potencial efectivo máximo, como por ejemplo cuando tenemos $\theta_o = \pi$ y $\dot{\theta}_o \neq 0$, donde claramente tenemos $E_{tot} > V_{eff}^{max}$. De manera análoga a lo hecho para las separatrices, empezamos desde la ecuación (1.7) con las condiciones iniciales ya mencionadas, para notar que $p_- = \dot{\theta}_o^2/\omega^2$, $p_+ = 4\beta + p_-$ y que $\tau_o \rightarrow \infty$. Las raíces van a verse modificadas, siendo las nuevas raíces:

$$\tau_{\pm}^2 = -2 \left[\left(\frac{\omega^2}{\dot{\theta}_o^2} \right) (1+\beta) + \frac{1}{2} \right] \pm 2 \sqrt{\left(\left(\frac{\omega^2}{\dot{\theta}_o^2} \right) (1+\beta) \right)^2 + \frac{\omega^2}{2\dot{\theta}_o} (1-\beta)}. \quad (1.28)$$

Ahora, resolviendo de manera análoga nuevamente la integral pero con las nuevas raíces y consideraciones la solución para el sistema del aro y la cuenta en rotación libre es:

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left[|\tau_-| cs \left(-\frac{1}{2} |\tau_- \dot{\theta}_o| t, \sqrt{\frac{|\tau_-^2| - |\tau_+^2|}{|\tau_-^2|}} \right) \right]. \quad (1.29)$$

Para concluir el análisis del problema, podemos estudiar qué pasa cuando la velocidad angular del aro es cero. Aquí hay dos maneras de proceder, primero es volver a la ecuación diferencial (1.5) y solucionar para $\omega = 0$ (donde vemos la ya familiar ecuación diferencial del péndulo simple) mediante el método usualmente visto en la literatura, donde se llegarán a soluciones expresadas también en funciones elípticas de Jacobi (con excepción de la separatriz). Pero para encontrar analogías con el método usado para este problema, tomamos el otro proceder, el cual es partir de la nueva ecuación diferencial de la ecuación (1.6), integrar una vez (de manera idéntica a lo hecho para este capítulo) para llegar a:

$$\dot{\theta}(t) - 2\omega_c^2 \cos \theta(t) = \mathcal{C} = \frac{\dot{\theta}_o^2}{2} - \omega_c^2 \cos \theta_o. \quad (1.30)$$

Desde donde seguiremos el mismo procedimiento (de (1.7) a (1.20)), tras la sustitución de Weierstrass para llegar a la solución:

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left\{ \tau_+ dn \left[\omega_c t \cos \left(\frac{\theta_o}{2} \right) |\tau_+|, \sqrt{\frac{\tau_+^2 - \tau_-^2}{\tau_+^2}} \right] \right\}. \quad (1.31)$$

Con las nuevas raíces:

$$\tau_+^2 = \frac{1 - \cos \theta_o}{1 + \cos \theta_o}, \tau_-^2 = -1. \quad (1.32)$$

Notamos que esta forma de solución es equivalente a la más familiar solución del péndulo simple mostrada en la literatura.

De manera similar, encontramos la ecuación para la separatriz:

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left\{ \sinh \left[\omega_c t + \sinh^{-1} \left(\tan \frac{\theta_o}{2} \right) \right] \right\}. \quad (1.33)$$

Finalmente, para la parte de la rotación libre resulta:

$$\theta(t) = 2 \tan^{-1} \left[|\tau_-| cs \left(-\frac{1}{2} |\tau_- \dot{\theta}_o| t, \sqrt{\frac{|\tau_-^2| - |\tau_+^2|}{|\tau_-^2|}} \right) \right]. \quad (1.34)$$

Pero con las nuevas raíces:

$$\tau_+^2 = -1, \tau_-^2 = \frac{\dot{\theta}_o^2 + 4\omega_c^2}{\dot{\theta}_o^2}. \quad (1.35)$$

Como se puede ver, todas las soluciones periódicas contienen funciones elípticas de Jacobi, además por el método utilizado ya se vislumbra la enorme dependencia de las diversas soluciones con las raíces del polinomio que resulta tras la sustitución de Weierstrass, y que las raíces son muy diferentes para los movimientos dentro de las separatrices que para los de rotación libre (fuera de las separatrices) [1].

Capítulo 2

Caracterización del Potencial con $\alpha \neq 0$.

Ya se ha resuelto analíticamente el sistema del aro y la cuenta para el caso $\alpha = 0$. Ahora continuamos el estudio quitando una simplificación que era justamente centrar el eje de rotación. Cuando el problema se generaliza a cualquier α la resolución se hace más complicada pero a pesar de lo trabajoso es posible llegar a una solución analítica.

Ahora trataremos el problema completo con $\alpha \neq 0$ como se muestra en la figura (2.1), lo que nos devuelve el lagrangiano que ya se adelantó en la introducción, es decir:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(R \sin \theta + A)^2 - mgR(1 - \cos \theta). \quad (2.1)$$

De la misma manera que para el sistema más simple nos convendrá definir un potencial efectivo, dado por:

$$V(\theta) = -\frac{1}{2}m\omega^2(R \sin \theta + A)^2 + mgR(1 - \cos \theta). \quad (2.2)$$

Donde resulta luego, el potencial efectivo adimensional:

$$V_{eff} = \frac{V(\theta)}{2mgR} = -\frac{1}{4\beta}(\sin \theta + \alpha)^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta). \quad (2.3)$$

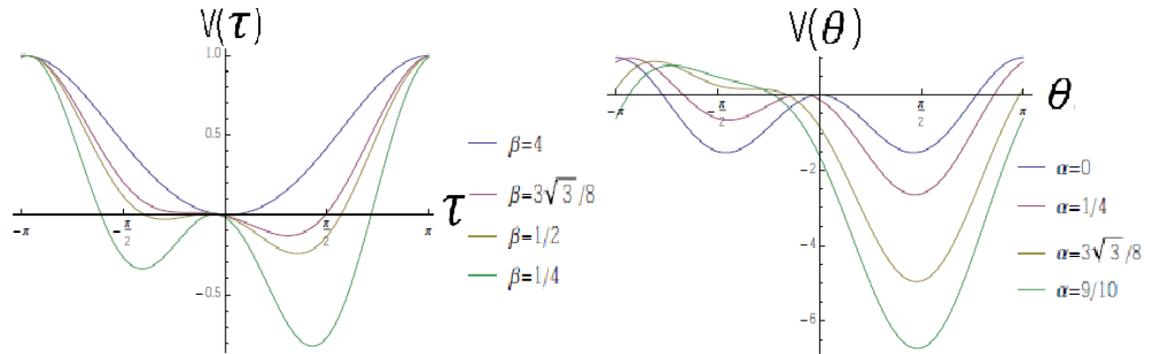


Figura 2.2: Gráfica del potencial efectivo, en la izquierda apreciamos el potencial cuando el parámetro $\alpha = 1/8$ y para diferentes valores de β , mientras que en el gráfico de la derecha se fija a $\beta = 1/8$ para diferentes valores de α .

2.1. Análisis del potencial y los puntos críticos.

Seguimos con el análisis del potencial y los puntos críticos del problema de la cuenta en el aro con $\alpha \neq 0$, donde a diferencia del anterior capítulo, aquí nos encontramos con dos parámetros y no solamente con β . Lo usual en este caso es fijar uno de los parámetros, variando al otro y posteriormente hacer lo opuesto. Proceder que puede apreciarse con mayor claridad en la figura (2.2)

Podemos notar que para ciertos casos tenemos todavía los dos pozos, solo que en este caso son asimétricos. También que el potencial ya no es simétrico con respecto al cero del eje x , y el máximo local ya no está centrado en el punto $(0, 0)$. Además veremos que también se cambiaron todos los demás puntos críticos del potencial.

Para obtener y analizar los puntos críticos del problema seguiremos otro camino. A diferencia del capítulo anterior donde los encontramos directamente de las expresiones trigonométricas, en este caso derivar el potencial e igualarlo a cero no nos permite continuar con un análisis sencillo como sucedió en el capítulo 1, debido a las propiedades periódicas de las funciones trigonométricas, i.e. las expresiones no se simplifican tras la derivación del potencial. Por lo que para $\alpha \neq 0$ se hace más sencillo trabajar desde la forma polinómica que resulta tras la sustitución de Weierstrass de las ecuaciones (1.9), (1.10) y (1.11).

El potencial resulta como:

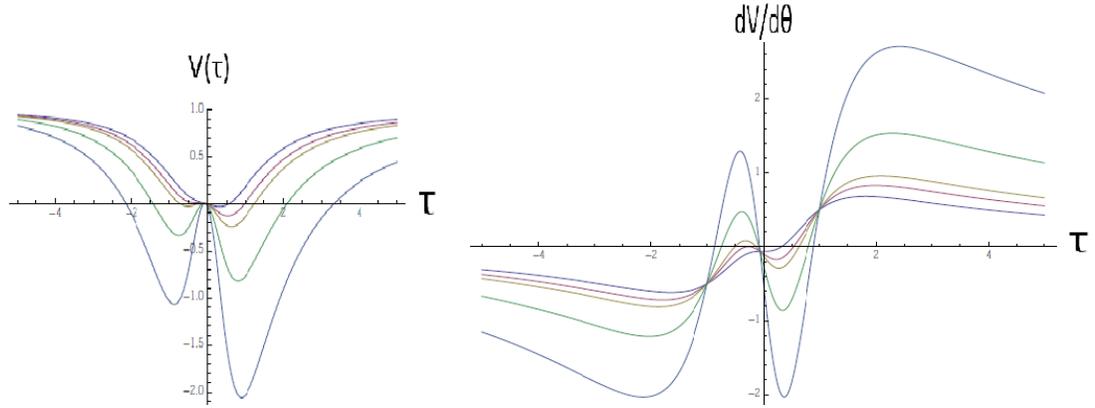


Figura 2.3: Gráfica de varios potenciales efectivos y sus derivadas tras la sustitución de Weierstrass, en la izquierda tenemos al potencial vs τ , mientras que en la derecha tenemos a su derivada vs τ .

$$V(\tau) = \frac{1}{\beta(1+\tau^2)^2} \left[\tau^4 \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4} \right) - \tau^3 \alpha + \tau^2 \left(\beta - \frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) - \tau \alpha - \frac{\alpha^2}{4} \right]. \quad (2.4)$$

Para la derivada, derivamos primero el potencial con respecto a θ y posteriormente realizamos la sustitución de Weierstrass, resultando:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\alpha}{2\beta(1+\tau^2)^2} \left[\tau^4 + \frac{2(1+\beta)}{\alpha} \tau^3 - \frac{2(1-\beta)}{\alpha} \tau - 1 \right]. \quad (2.5)$$

Que se pueden apreciar mejor en la figura (2.3).

Notamos de inmediato que al igualar la derivada del potencial a cero, el único factor que es de relevancia es el numerador de la ecuación (2.5), por lo que la ecuación a resolver es:

$$\tau^4 + \frac{2(1+\beta)}{\alpha} \tau^3 - \frac{2(1-\beta)}{\alpha} \tau - 1 = 0. \quad (2.6)$$

Para factorizar un polinomio cuártico completo usaremos el algoritmo del apéndice D, que a su vez usa el método de resolución de un polinomio cúbico completo del apéndice C.

Aplicando el cambio de variable $\tau = x - (1+\beta)/2\alpha$, obtenemos la ecuación:

$$x^4 + P_V x^2 + Q_V x + R_V = (x^2 + ux + v)(x^2 - ux + w) = 0. \quad (2.7)$$

Con las constantes P_V , Q_V y R_V definidas como:

$$P_V = -\frac{3}{2} \left(\frac{1+\beta}{\alpha} \right)^2, \quad Q_V = \left(\frac{1+\beta}{\alpha} \right)^3 + 2 \frac{\beta-1}{\alpha} \quad y \quad R_V = -\frac{3}{16} \left(\frac{1+\beta}{\alpha} \right)^4 + \frac{1-\beta^2}{\alpha^2} - 1. \quad (2.8)$$

Seguindo el método del apéndice D, esta nueva ecuación se resuelve encontrando únicamente el valor de u , procedimiento muy recurrente en todo este capítulo por lo que vale la pena remarcar la importancia de la constante u .

Hallar el valor de u se consigue asociándola al polinomio de orden seis de la ecuación (D.12), que a su vez redefiniendo a u como $u^2 = y - 2P_V/3$ nos lleva a un polinomio cúbico como en la ecuación (D.14), que como se aprecia en el apéndice C, se puede resolver mediante los invariantes g_2 y g_3 del polinomio:

$$y^3 - 4 \left(\frac{1-\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) y + 16 \frac{\beta}{\alpha^2} = 0, \quad (2.9)$$

donde los invariantes son:

$$-\frac{g_2}{4} = -4 \left(\frac{1-\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad y \quad -\frac{g_3}{4} = 16 \frac{\beta}{\alpha^2}. \quad (2.10)$$

Para ver la naturaleza de las raíces de este polinomio cúbico es muy importante calcular el discriminante del mismo, que en nuestro caso viene siendo:

$$\Delta = \frac{1}{16} (g_2^3 - 27g_3^2) = \frac{4^4}{\alpha^6} [(1 - \alpha^2 - \beta^2)^3 - 27\alpha^2\beta^2]. \quad (2.11)$$

Como se aprecia con mayor profundidad en el apéndice C, la naturaleza de las raíces del polinomio cúbico dependerá del signo que lleven los invariantes g_2 y g_3 y el discriminante Δ . Ahora notamos que Δ puede tener cualquier signo, nos enfocamos en el caso donde $\Delta = 0$ que solamente ocurre cuando $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} = 1$. Esta ecuación se puede resolver despejando α como función de β o viceversa debido a que Δ es simétrico al cambio de dichos parámetros (con la característica de que α puede tomar cualquier valor entre ± 1 mientras que $\beta \geq 0$). La solución de esa condición

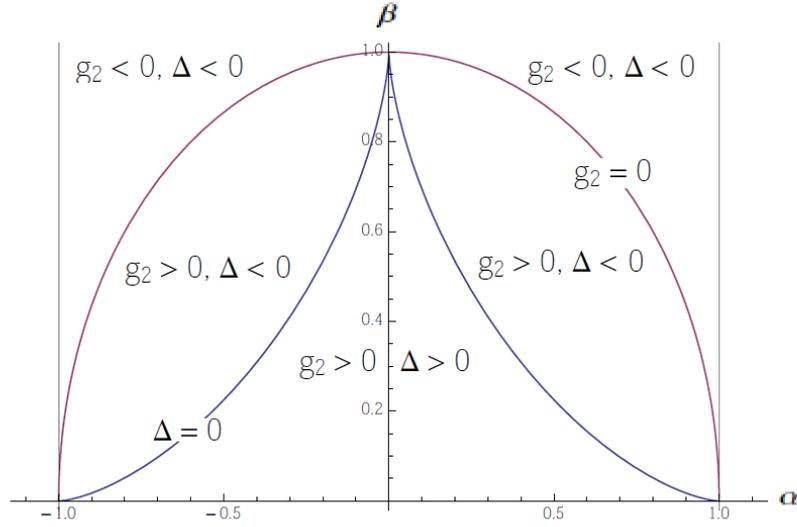
tiene 6 raíces, de las cuales 4 son complejas y no las tomamos en cuenta, mientras que las 2 restantes son reales y son las que consideramos, éstas resultan ser:

$$\beta^2 = 1 - \alpha^2 - 3\alpha^{2/3} + 3\alpha^{4/3} = (1 - \alpha^{2/3})^3, \quad \text{o} \quad \alpha^2 = (1 - \beta^{2/3})^3. \quad (2.12)$$

La relación entre α y β obtenida en la ecuación (2.12) es muy útil y se aprecia mejor en la figura (2.4). El caso donde $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} > 1$ corresponde a discriminantes negativos, es decir todos los valores arriba de la línea curvada azul. Mientras que el resto de los casos $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} < 1$ corresponden a un discriminante positivo, es decir la región debajo de la curva azul. Este resultado es muy importante pues nos muestra que mientras más alto sea el valor de α , i.e. mientras más grande sea la distancia del eje de rotación con respecto al centro del aro, menor será el valor de β para el cual tendremos un cambio en el comportamiento del potencial. E.g. para $\alpha = 0$ volvemos al caso del capítulo 1, donde el cambio de los regímenes se da cuando $\beta = 1$, o en términos de las velocidades angulares $\omega = \omega_c$. Pero para el ejemplo que usaremos de aquí en adelante, i.e. $\alpha = 1/8$, el cambio de comportamiento en el potencial (y en las raíces del polinomio) se dará para $\beta = 3\sqrt{3}/8$, o $\omega^2 = 8\omega_c^2/3\sqrt{3}$. Considerando ahora el signo del invariante g_2 , tenemos un equivalente de nuevo de 3 diferentes casos; $g_2 = 0$ cuando $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $g_2 > 0$ si $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ y $g_2 < 0$ si $\alpha^2 + \beta^2 > 1$. Todos los casos con $\Delta < 0$ resultan en dos raíces complejas conjugadas y una real, mientras que para $\Delta = 0$ tendremos una raíz doble y una raíz simple, todas reales. Finalmente para el caso de $\Delta > 0$ tendremos tres raíces reales diferentes.

Para continuar con la resolución del polinomio cúbico, consideramos primero el caso donde $g_2 > 0$, es decir debajo de la semicircunferencia de la figura (2.4). Siguiendo el método del apéndice C las raíces parametrizadas del polinomio cúbico resultan:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\alpha^2} - 1} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi - \pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi + \pi}{3}\right) \\ -\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{27}\alpha\beta}{(1 - \beta^2 - \alpha^2)^{3/2}} \right). \quad (2.13)$$


 Figura 2.4: Gráfica α vs β de las diferentes regiones del signo de Δ .

Mientras que para el caso donde $g_2 = 0$, justo sobre la línea de la semicircunferencia de la figura (2.4), la forma del polinomio cúbico y su raíz quedan como:

$$y^3 + 16\frac{\beta}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow y = -\left(16\frac{\beta}{\alpha^2}\right)^{1/3} = -\left(\frac{16\beta}{1-\beta^2}\right)^{1/3}. \quad (2.14)$$

Finalmente para el último caso, cuando $g_2 < 0$, la región afuera de la semicircunferencia la única raíz real es:

$$e_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{1-\beta^2}{\alpha^2}} \sinh\left(\frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(-\frac{\sqrt{27}\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)^{3/2}}\right)\right). \quad (2.15)$$

Se pueden apreciar todas las raíces del polinomio cúbico en la figura (2.5).

Con las raíces del polinomio cúbico encontradas, podemos ahora continuar y resolver el polinomio cuártico quitando los cambios de variable, resultando las cuatro raíces como:

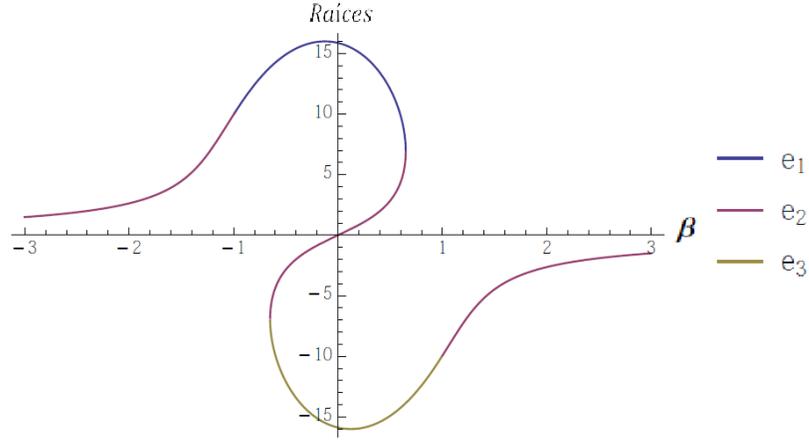


Figura 2.5: Gráfica e_1 , e_2 , e_3 vs β del polinomio cúbico de la ecuación (2.9). Por razones de completéz se incluyeron valores negativos de β a pesar de no existir en nuestro problema.

$$\tau'_{1,2} = -\frac{1+\beta}{2\alpha} - \frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{-u^2 - 2P_V + \frac{2Q_V}{u}}, \quad \tau'_{3,4} = -\frac{1+\beta}{2\alpha} + \frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{-u^2 - 2P_V - \frac{2Q_V}{u}}. \quad (2.16)$$

La u que consideraremos dependerá de con qué valor de g_2 nos encontremos, para $g_2 > 0$ usaremos e_3 puesto que es la única raíz real en todo el intervalo, resultando la u como:

$$u = \sqrt{\left(\frac{1+\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}} \cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{27}\alpha\beta}{(1-\beta^2-\alpha^2)^{3/2}}\right)\right)}. \quad (2.17)$$

Mientras que para $g_2 < 0$, tomaremos la raíz e_2 pues es la única real, resultando:

$$u = \sqrt{\left(\frac{1+\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2}} \sinh\left(\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(-\frac{\sqrt{27}\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2-1)^{3/2}}\right)\right)}. \quad (2.18)$$

Salta a la vista que ambas expresiones se igualan cuando $g_2 = 0$.

Con estos valores de u , las raíces siempre resultan ordenadas como:

$$\tau'_2 < \tau'_4 \leq \tau'_3 < \tau'_1. \quad (2.19)$$

De estas desigualdades se pueden asociar ya los puntos críticos del problema, τ'_2 está asociado al punto crítico correspondiente al máximo global, mientras que τ'_1 está asociado al punto crítico correspondiente al mínimo global. τ'_4 y τ'_3 están a su vez asociados al máximo y mínimo local del potencial, i.e. al punto de equilibrio inestable entre los dos pozos y a uno de los puntos de equilibrio estables, correspondiente al pozo menos profundo.

Definiendo la nomenclatura de los ángulos correspondientes a estos puntos críticos, definimos θ_M como el punto crítico del máximo global, θ_m al punto crítico del mínimo global, mientras que θ_{ML} y θ_{mL} a los puntos críticos del máximo y mínimo local respectivamente.

Quitando la sustitución de Weierstrass, obtenemos la relación entre los puntos críticos:

$$\theta_M < \theta_{mL} \leq \theta_{ML} < \theta_m. \quad (2.20)$$

Es importante también notar las siguientes desigualdades:

$$V(\theta_m) < V(\theta_{mL}) < 0 < V(\theta_{ML}) < V(\theta_M) < 1. \quad (2.21)$$

Que nos muestran ya resultados interesantes. Notamos que el punto máximo del potencial no se encuentra ya en 1, si no que es menor. Esto se debe a que al desplazar el eje de rotación, el punto de energía máxima se encuentra también desplazado en el aro.

Podemos apreciar las relaciones entre las raíces que representan a los puntos críticos para distintos valores de β (que es el parámetro relacionado con el invariante g_2) con un α fijo de $\alpha = 1/8$ en las figuras (2.6) y (2.7).

También podemos apreciar las relaciones entre las raíces que representan a los mismos puntos críticos pero para distintos valores de α . Con un β fijo en $\beta = 0,5$ en la figura (2.8). Notamos inmediatamente que para este caso si contamos con valores

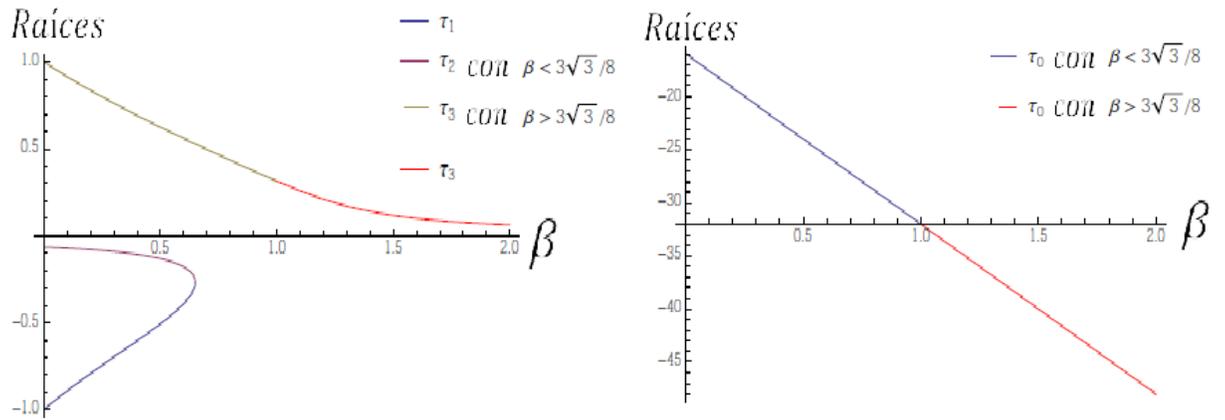


Figura 2.6: Gráfica de las raíces τ' vs β para $\alpha = 1/8$.

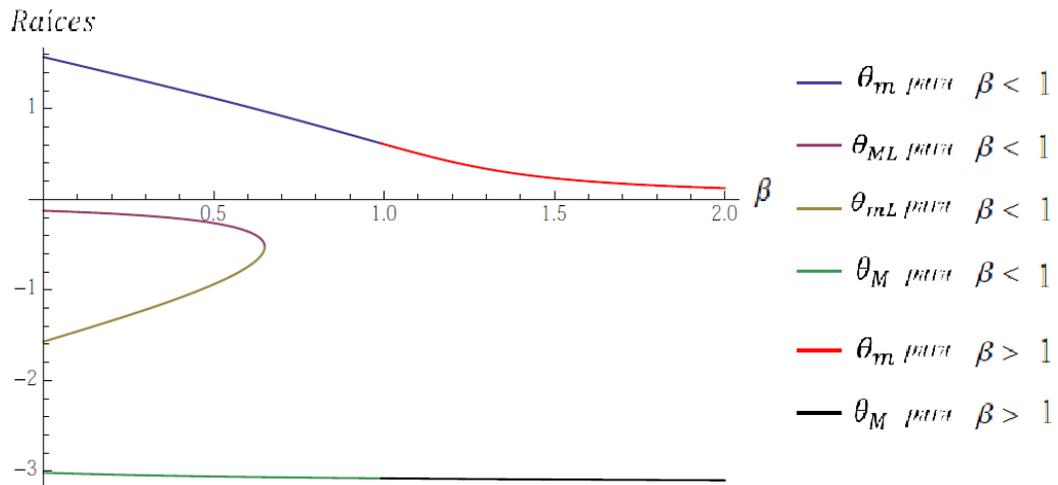


Figura 2.7: Gráfica de los puntos críticos vs β para $\alpha = 1/8$.

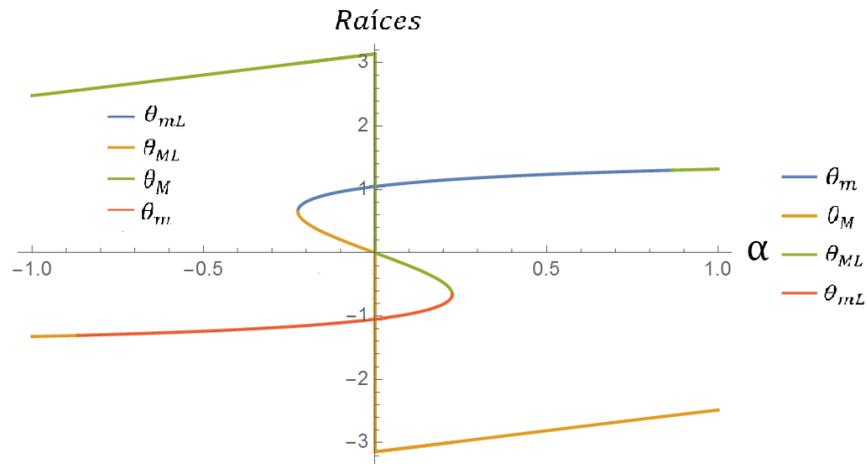


Figura 2.8: Gráfica de los puntos críticos vs α para $\beta = 0,5$. Podemos notar que para α con valores negativos las raíces cambian en cuanto a qué punto crítico son. Las raíces están descritas con los mismos colores y se indica en la figura a qué punto crítico corresponden ya sea para $\alpha > 0$ o para $\alpha < 0$.

positivos como negativos en el eje horizontal, además de que las raíces cambian con respecto a qué punto crítico representan dependiendo de si α es mayor o menor a cero. Notamos un cambio en el color de los puntos críticos para α cercanos a ± 1 , esto es debido a que g_2 empezó a tomar valores negativos como pasó en la figura (2.7), por lo que se toma otra e para solucionar el polinomio cuártico. Usamos un β mayor al que tomamos en los demás ejemplos con β fijo para la figura (2.8) con el motivo de que el cambio en el signo de g_2 pueda notarse en el gráfico, puesto que para β pequeños este cambio ocurre para α muy cercanos a $|1|$.

2.2. Ángulos de escape y ángulos internos.

Únicamente nos quedan dos ángulos de vital importancia por definir, los ángulos de escape y los ángulos “internos” cuya utilidad se verá a la hora de obtener las soluciones del problema.

Comenzamos con los ángulos de escape. El procedimiento es similar al caso del capítulo anterior, con la excepción de que en esta ocasión el potencial no es igual a cero en estos puntos. Por lo que definimos la constante \mathcal{C} igualando el potencial al

punto donde tenemos el máximo local, de la siguiente manera:

$$V(\theta_{ML}) = V(\theta) \Rightarrow -\frac{1}{4\beta}(\sin \theta_{ML} + \alpha)^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta_{ML}) = -\frac{1}{4\beta}(\sin \theta + \alpha)^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta). \quad (2.22)$$

Donde finalmente con algunas operaciones algebraicas resulta:

$$\sin^2 \theta_{ML} + 2\alpha \sin \theta_{ML} + 2\beta \cos \theta_{ML} = \sin^2 \theta + 2\alpha \sin \theta + 2\beta \cos \theta. \quad (2.23)$$

Volvemos a realizar la sustitución de Weierstrass para obtener nuevamente un polinomio cuártico de la forma:

$$\tau^4(\mathcal{C}_{ML} + 2\beta) - 4\alpha\tau^3 + \tau^2(2\mathcal{C}_{ML} - 4) - 4\alpha\tau + \mathcal{C}_{ML} - 2\beta = 0, \quad (2.24)$$

donde la constante \mathcal{C}_{ML} resulta como:

$$\mathcal{C}_{ML} = \sin^2 \theta_{ML} + 2\alpha \sin \theta_{ML} + 2\beta \cos \theta_{ML}. \quad (2.25)$$

Para encontrar los ángulos de escape ahora solo nos hace falta resolver el polinomio cuártico de la ecuación (2.24) aplicando nuevamente el método ya expuesto. En este caso tendremos dos raíces iguales ($e_1 = e_2$) y la tercera diferente, todas reales. Tomamos como la raíz correcta la diferente, es decir e_3 la cual nos lleva a la constante u :

$$u^2 = -\frac{8}{3} \sqrt{\frac{\mathcal{C}_{ML}^2 - \mathcal{C}_{ML} + 1 - 3(\alpha^2 + \beta^2)}{(\mathcal{C}_{ML} + 2\beta)^2}} - \frac{2}{3} \left(\frac{2(\mathcal{C}_{ML} - 2)}{\mathcal{C}_{ML} + 2\beta} - \frac{6\alpha^2}{(\mathcal{C}_{ML} + 2\beta)^2} \right). \quad (2.26)$$

Que en las raíces del polinomio cuártico nos deja con dos raíces iguales (que equivalen al punto θ_{ML}) y dos raíces diferentes, todas reales, las cuales son los ángulos de escape, que a diferencia del capítulo anterior, no son iguales así que las definimos como θ_{e+} y θ_{e-} y resultan como:

$$\tau_{e^-} = \frac{\alpha}{\mathcal{C}_{ML} + 2\beta} - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sqrt{-u^2 - 2P + \frac{2Q}{u}}, \quad \tau_{e^+} = \frac{\alpha}{\mathcal{C}_{ML} + 2\beta} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sqrt{-u^2 - 2P + \frac{2Q}{u}}, \quad (2.27)$$

donde P y Q quedan definidas como:

$$P = \frac{2(\mathcal{C}_{ML} - 2)(\mathcal{C}_{ML} + 2\beta) - 6\alpha^2}{\mathcal{C}_{ML} + 2\beta}, \quad Q = \frac{-4\alpha(\mathcal{C}_{ML} + 2\beta)^2 + 4\alpha(\mathcal{C}_{ML} - 2)(\mathcal{C}_{ML} + 2\beta) - 8\alpha^3}{(\mathcal{C}_{ML} + 2\beta)^3}. \quad (2.28)$$

Finalmente, los ángulos internos θ_{i1} y θ_{i2} , cuya relevancia se explicará en el siguiente capítulo, se encuentran con el mismo procedimiento. Pero en vez de usar el potencial en el ángulo θ_{ML} utilizaremos el potencial en el ángulo θ_{mL} , lo que nos dejará exactamente las mismas expresiones que para el ángulo de escape pero cambiando $\theta_{ML} \rightarrow \theta_{mL}$. También resultarán dos raíces iguales y una diferente en el polinomio cúbico, pero esta vez la raíz diferente es e_1 por lo que el u resultante tendrá un signo de diferencia:

$$u_i^2 = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\mathcal{C}_{mL}^2 - \mathcal{C}_{mL} + 1 - 3(\alpha^2 + \beta^2)}{(\mathcal{C}_{mL} + 2\beta)^2}} - \frac{2}{3}\left(\frac{2(\mathcal{C}_{mL} - 2)}{\mathcal{C}_{mL} + 2\beta} - \frac{6\alpha^2}{(\mathcal{C}_{mL} + 2\beta)^2}\right). \quad (2.29)$$

Resultando los ángulos internos como:

$$\tau_{i1} = \frac{\alpha}{\mathcal{C}_{mL} + 2\beta} - \frac{1}{2}u_i - \frac{1}{2}\sqrt{-u_i^2 - 2P + \frac{2Q}{u_i}}, \quad \tau_{i2} = \frac{\alpha}{\mathcal{C}_{mL} + 2\beta} - \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}\sqrt{-u_i^2 - 2P + \frac{2Q}{u_i}}, \quad (2.30)$$

Con P y Q iguales al caso de los ángulos de escape pero intercambiando $\theta_{ML} \rightarrow \theta_{mL}$.

Es importante señalar que existe otra forma de hallar estos ángulos que se mostrará en el capítulo 3.

Capítulo 3

Soluciones analíticas con $\alpha \neq 0$.

Ahora, para buscar la solución a este sistema, seguiremos un camino un poco diferente al caso donde $\alpha = 0$, pues aquí definiremos las constantes en base a la energía, mientras que para $\alpha = 0$ las constantes estaban definidas en base al ángulo y a la velocidad inicial ($\theta_0, \dot{\theta}_0$). Aunque la velocidad inicial no aparece explícitamente en la expresión de la energía, podemos asumir para un entendimiento más sencillo del sistema que partiremos con velocidades iniciales nulas $\dot{\theta}_0 = 0$ como condición inicial para cualquier ángulo inicial θ_0 al cual vendrá asociada una energía k^2 correspondiente. Para parametrizar el problema con respecto a la constante k^2 en lugar de la constante \mathcal{C} partimos de la ecuación:

$$k^2 = \frac{1}{4\beta} \frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2} - \frac{1}{4\beta} (\text{sen}\theta + \alpha)^2 + \frac{1}{2}(1 - \text{cos}\theta), \quad (3.1)$$

donde definimos a la energía adimensional como $k^2 = E/2mgR$. Volveremos a utilizar la sustitución de Weierstrass para llegar a la ecuación:

$$4 \frac{\dot{\tau}^2}{\omega^2} = \tau^4(4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2) + \tau^3 4\alpha + 2\tau^2(2 - 2\beta + 4\beta k^2 + \alpha^2) + \tau 4\alpha + 4\beta k^2 + \alpha^2. \quad (3.2)$$

Que nos lleva finalmente a la ecuación:

$$\omega \int dt = \frac{1}{\sqrt{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2}} \int \frac{2d\tau}{\sqrt{\tau^4 + \frac{4\alpha}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2} \tau^3 + \frac{2(2-2\beta+4\beta k^2 + \alpha^2)}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2} \tau^2 + \frac{4\alpha}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2} \tau + \frac{4\beta k^2 + \alpha^2}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2}}} \quad (3.3)$$

Para lograr resolverla, utilizaremos las identidades del Anexo D, por lo que buscaremos factorizar al polinomio en el denominador del integrando en (3.3) en la forma:

$$P(\tau) = (\tau_1 - \tau)(\tau_2 - \tau)(\tau_3 - \tau)(\tau_4 - \tau), \quad (3.4)$$

$$\text{donde } P(\tau) = \tau^4 + \frac{4\alpha}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2} \tau^3 + \frac{2(2-2\beta+4\beta k^2 + \alpha^2)}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2} \tau^2 + \frac{4\alpha}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2} \tau + \frac{4\beta k^2 + \alpha^2}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2}.$$

Para lograrlo debemos encontrar las raíces de la ecuación $P(\tau) = 0$, siguiendo el método expuesto en el Anexo D y realizando el cambio de variable $\tau = x - \frac{\alpha}{4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2}$ lo que nos lleva al polinomio cuártico reducido:

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0. \quad (3.5)$$

Las constantes P , Q y R resultan como:

$$P = 2 \frac{C_k k_E - 3\alpha^2}{(k_E)^2}, \quad (3.6)$$

$$Q = 4\alpha \frac{k_E^2 - C_k k_E + 2\alpha^2}{k_E^3}, \quad (3.7)$$

$$R = \frac{1}{k_E^2} \left((4\beta k^2 + \alpha^2)(k_E) - 4\alpha^2 + \frac{2\alpha^2 C_k}{k_E} - \frac{3\alpha^4}{k_E^2} \right). \quad (3.8)$$

Con las constantes k_E y C_k definidas como $k_E = 4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2$ y $C_k = 2 - 2\beta + 4\beta k^2 + \alpha^2$. Estas constantes son la sutil diferencia en cuanto a como resolvimos el sistema para $\alpha = 0$, donde las soluciones venían descritas con respecto a \mathcal{C} que depende de los valores θ_0 y $\dot{\theta}_0$. Mientras que en nuestro caso las soluciones quedarán descritas con respecto a k_E y C_k que dependen del valor de la energía k . Continuando

con el método ya antes expuesto para la resolución del polinomio cuártico obtenemos las raíces:

$$\tau_{1,2} = -\frac{\alpha}{k_E} - \frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{-u^2 - 2P + \frac{2Q}{u}}, \quad (3.9)$$

$$\tau_{3,4} = -\frac{\alpha}{k_E} + \frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{-u^2 - 2P - \frac{2Q}{u}}, \quad (3.10)$$

donde el valor de u esta definido por:

$$u = \sqrt{e - \frac{2P}{3}} = \sqrt{-2\sqrt{\frac{g_2}{12}} \cos \left[-\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{27}g_3}{(g_2)^{3/2}} \right) \right] - \frac{2P}{3}}. \quad (3.11)$$

Con e que es la raíz real del polinomio cúbico $y^3 - \frac{g_2}{4}y - \frac{g_3}{4} = 0$.

Como se vió en el caso de los puntos críticos del potencial, podemos usar la parametrización del polinomio cúbico como en el cuadro (C.1) para obtener el valor de e apropiado. Para nuestro polinomio, los valores de g_2 y g_3 son:

$$-\frac{g_2}{4} = \frac{16(3\alpha^2 - (\beta - 1 - 4\beta k^2 + \alpha^2) + 32\beta(4\beta k^2 + \alpha^2) + 16(4\beta k^2 + \alpha^2))}{3k_E^2}, \quad (3.12)$$

$$-\frac{g_3}{4} = \left(\frac{4\alpha}{k_E^2}\right)^2 \left(\frac{2(2 - k_E^2 + 2\beta)}{3k_E^2} - \frac{4\beta k^2 + \alpha^2}{k_E^2} - 1\right) + \left(\frac{2(2 - k_E^2 + 2\beta)}{k_E^2}\right) \left(\frac{8(4\beta k^2 + \alpha^2)}{3k_E^2} - \left(\frac{4(2 - k_E^2 + 2\beta)}{27k_E^2}\right)^2\right). \quad (3.13)$$

Utilizando estas constantes podemos obtener las raíces τ_i (donde $i = 1, 2, 3, 4$) para $P(\tau)$, debido a que las expresiones serían muy grandes, y requerimos saber que raíz es mayor o menor tomaremos valores característicos de α y β . Primero consideramos un valor donde tenemos dos pozos asimétricos, para ello tomamos los valores de $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,3$, cuyo potencial toma la forma de la figura (3.1).

Aterrizados en un ejemplo característico, ahora analizamos las raíces con respecto al ángulo inicial $\tau_0 = 2 \tan^{-1}(\theta_0)$, este ángulo está relacionado con la energía k^2 bajo

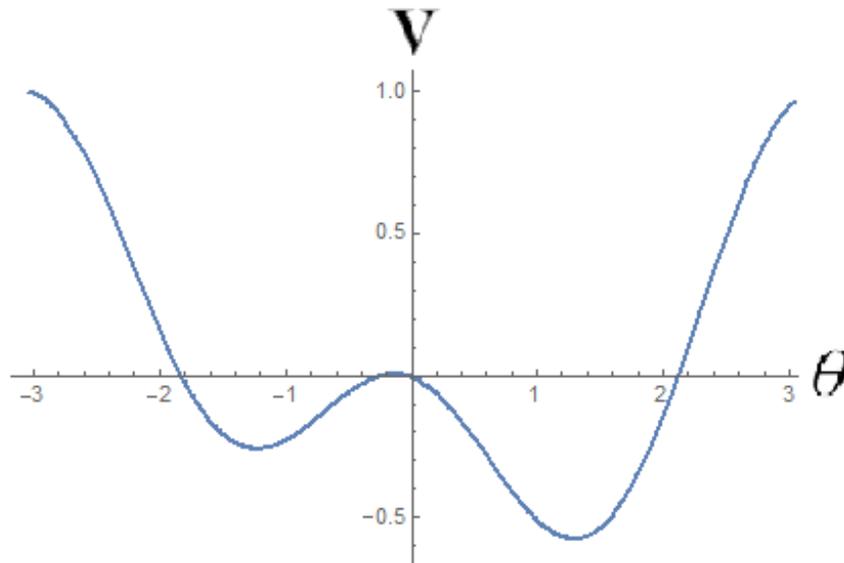


Figura 3.1: Potencial vs θ para valores de $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,3$

la siguiente ecuación:

$$k^2 = \frac{\tau_0^2}{\beta(1 + \tau_0^2)^2} \left(\beta - 1 - \frac{\alpha^2}{2} \tau_0^2 \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4} \right) \right) - \frac{\alpha}{\beta(1 + \tau_0^2)^2} \left(\tau_0^3 + \tau_0 + \frac{\alpha}{4} \right). \quad (3.14)$$

Con α y β fijos, podemos obtener las raíces del polinomio de las figuras (3.2) y (3.3).

Notamos inmediatamente que:

$$\tau_2 \leq \tau_4 \leq \tau_3 \leq \tau_1.$$

Podemos extender este estudio utilizando gráficos en tres dimensiones, primero fijamos el valor de $\alpha = 1/8$ y graficamos τ_0 vs β vs raíces, donde resulta lo mostrado en las figuras (3.4) y (3.5).

Posteriormente invertimos el análisis fijando $\beta = 0,3$ y graficando τ_0 vs α vs raíces, obteniendo lo de las figuras (3.6) y (3.7).

Notamos que las raíces se van juntando mientras aumentamos β para quedar con

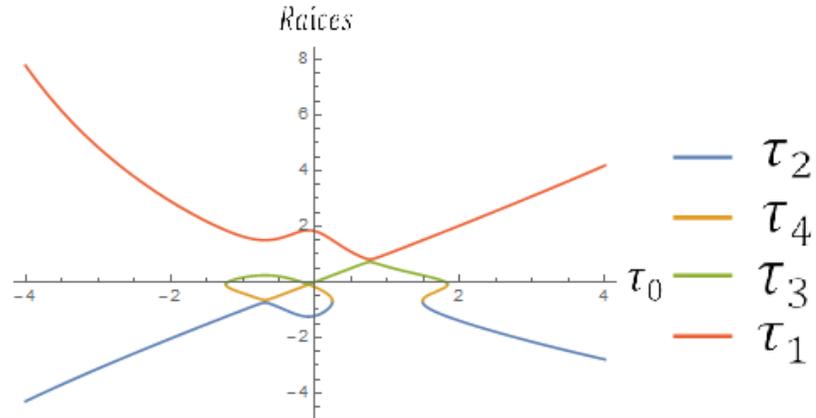


Figura 3.2: Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 , donde la línea roja es τ_1 , la línea verde es τ_3 , la línea amarilla es τ_4 y la línea azul es τ_2

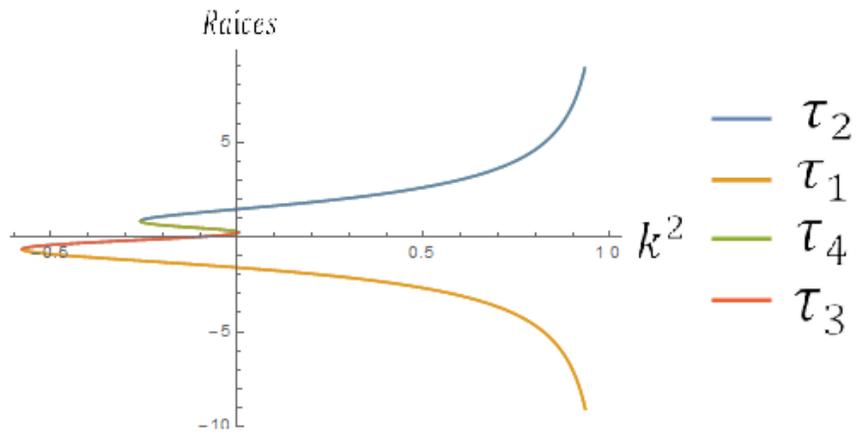


Figura 3.3: Raíces de $P(\tau)$ vs $k^2 = E/2mgR$

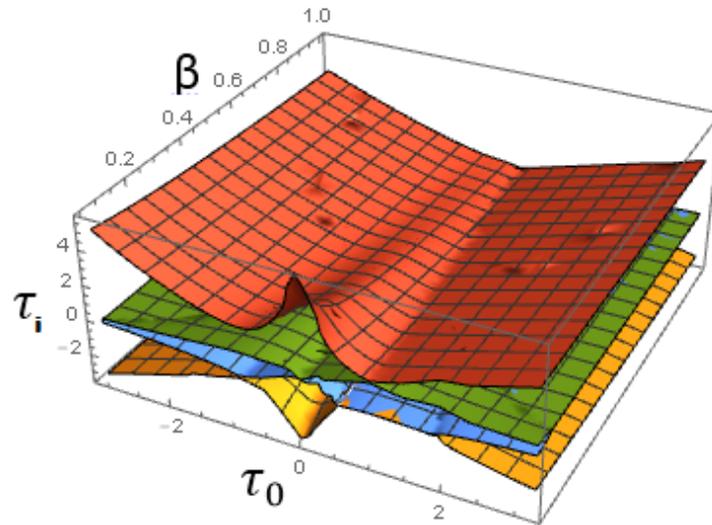


Figura 3.4: Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 vs β , donde el plano rojo es τ_1 , el plano verde es τ_3 , el plano amarillo es τ_4 y el plano azul es τ_2 y con $\alpha = 1/8$.

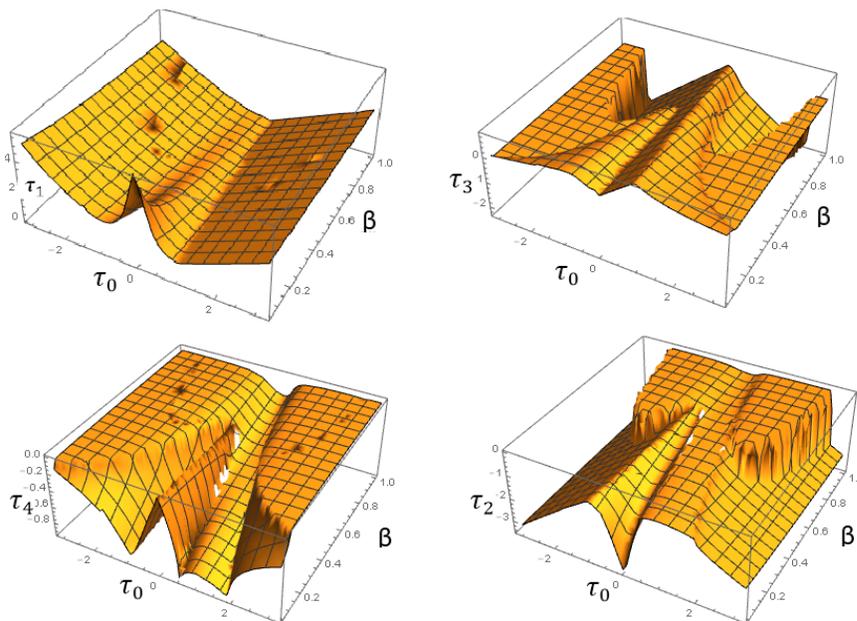


Figura 3.5: Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 vs β separadas y con $\alpha = 1/8$.

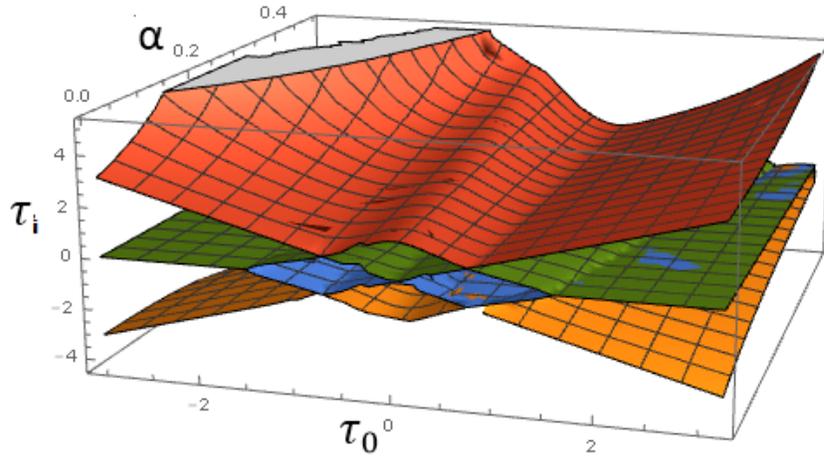


Figura 3.6: Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 vs α , donde el plano rojo es τ_1 , el plano verde es τ_3 , el plano amarillo es τ_4 y el plano azul es τ_2 y con $\beta = 0,3$.

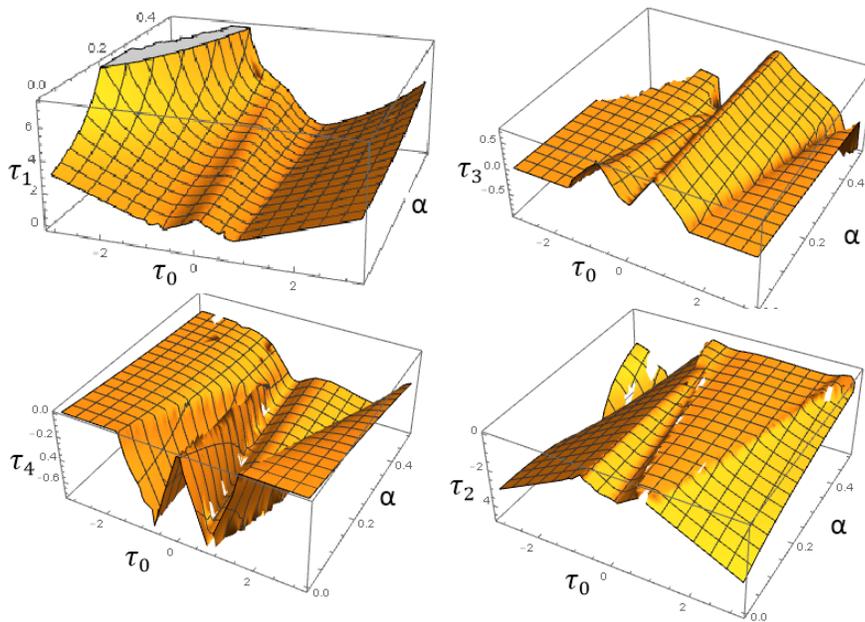


Figura 3.7: Raíces de $P(\tau)$ vs τ_0 vs β separadas y con $\beta = 0,3$.

únicamente dos como se vio en el estudio de los ángulos críticos. De la misma forma notamos que para $\alpha = 0$ partimos con la figura (1.5) y las raíces van cambiando pasando por la figura (3.2) y más casos.

Volviendo a nuestro caso con α y β fijos, podemos notar también que salta a la vista que una de las raíces es igual a τ_0 para diferentes intervalos, al igual que en el capítulo anterior, dependiendo de en que ángulo inicial empiece el movimiento. Notamos esta característica tanto en la figura (3.2) como en la figura (3.3).

Para entender mejor estos intervalos, debemos visualizarlos en el potencial que se aprecia en la figura (3.8), primeramente tenemos a θ_M en ambos extremos del potencial, son el ángulo máximo global del mismo, y como se vió en el capítulo 3, no es igual a $\pm\pi$. θ_{ML} es el ángulo máximo local, que no es igual a 0. θ_{mL} y θ_m son los ángulos mínimos de ambos pozos. Estos cuatro ángulos se obtienen inmediatamente de los puntos críticos encontrados en el capítulo anterior.

Los otros cuatro ángulos de la figura (3.8) son más complicados de encontrar. θ_{e+} y θ_{e-} son los ángulos de escape que ya se encontraron en el capítulo 3, que tampoco son iguales entre sí cuando $\alpha \neq 0$. Y θ_{i1} y θ_{i2} son los ángulos internos del segundo pozo, que son de importancia pues dividen las regiones donde tenemos dos raíces reales y dos complejas conjugadas en el segundo pozo, de las regiones donde tenemos cuatro raíces reales diferentes en el mismo pozo.

Estos cuatro ángulos ya fueron encontrados en el anterior capítulo pero como se adelantó, existe otra forma de encontrar dichos ángulos, que se expondrán a continuación tanto para los dos ángulos de escape (θ_{e+}, θ_{e-}) como para los dos ángulos internos (θ_{i1}, θ_{i2}).

3.1. Ángulos de escape

Notamos en las ecuaciones (3.9) y (3.10), y en el gráfico de la figura (3.2) que los puntos en los cuales se encuentran θ_{e+} y θ_{e-} cumplen con la condición:

$$\tau_3 = \tau_4.$$

Por lo que para que eso ocurra, la condición aplicada a la expresión de las raíces $\tau_{3,4}$ nos lleva a la siguiente ecuación:

$$u^2 + 2P + \frac{2Q}{u} = u^3 + 2Pu + 2Q = 0. \quad (3.15)$$

Que resulta en un polinomio cúbico, con coeficientes $g_2 = -8P$ y $g_3 = -8Q$. Puesto que tanto g_2 como g_3 son mayores a cero, y $\Delta = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = -4(8P^3 + 27Q^2)$ también es siempre mayor a cero, siempre tendremos tres raíces reales.

De los tres valores de u que cumplen con ser las raíces del polinomio (3.15) el valor correcto se muestra en la ecuación (3.16).

$$u_e = 2\sqrt{\frac{-8P}{12}} \cos \left[\frac{1}{3} \left(\cos^{-1} \left[\left(\frac{3}{-8P} \right)^{3/2} 8Q \right] + \pi \right) \right] \quad (3.16)$$

O bien:

$$u_e = \frac{4\sqrt{3\alpha^2 - C_k k_E}}{\sqrt{3}k_E} \cos \left[\frac{1}{3} \left(\cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{27}\alpha(k_E^2 - C_k k_E + 2\alpha^2)}{(3\alpha^2 - C_k k_E)^{3/2}} \right] + \pi \right) \right] \quad (3.17)$$

Que es el único que toma un valor significativo en nuestro sistema, pues al aplicarlo a la ecuación (3.10) resulta en el punto crítico del máximo local θ_{ML} , mientras las otras dos dan valores sin ninguna relevancia en el problema.

Aplicando el valor de u_e encontrado de la ecuación (3.17) a las ecuaciones de τ de (3.9) obtenemos los dos ángulos de escape requeridos.

$$\theta_{e+} = 2 \tan^{-1} \left[-\frac{\alpha}{k_E} - \frac{1}{2}u_e + \frac{1}{2}\sqrt{-u_e^2 - 2P + \frac{2Q}{u_e}} \right] \quad (3.18)$$

$$\theta_{e-} = 2 \tan^{-1} \left[-\frac{\alpha}{k_E} - \frac{1}{2}u_e - \frac{1}{2}\sqrt{-u_e^2 - 2P + \frac{2Q}{u_e}} \right] \quad (3.19)$$

Se puede notar que las expresiones difieren a las de la ecuación (2.27), pero numéricamente dan el mismo resultado. Las expresiones difieren en las constantes bajo las cuales están definidas, i.e. \mathcal{C}_{ML} o k_E y C_k además del método utilizado. En el caso de la ecuación (2.27) la expresión para el coseno se iguala a 1 en u de la ecuación (2.26) pero la expresión queda extensa de todas formas. Mientras que para el caso de la ecuación (3.17) u_e se simplifica en el factor que multiplica al coseno

pero dicho coseno no se iguala a uno por lo que la expresión queda extensa también.

3.2. Ángulos internos

Para encontrar los ángulos internos θ_{i1} y θ_{i2} seguimos el mismo método que para los ángulos de escape, solo que en este caso la condición que se cumple es:

$$\tau_4 = \tau_2.$$

Por lo que esta vez, esa igualdad entre esas dos raíces nos lleva a la ecuación:

$$\frac{1}{2} \sqrt{-u^2 - 2P + \frac{2Q}{u}} = \frac{1}{2} \sqrt{-u^2 - 2P - \frac{2Q}{u}} - u.$$

Que tras algunas operaciones resulta finalmente en el polinomio de la ecuación (3.20):

$$u^6 + Pu^4 + \frac{Q^2}{2} = 0. \quad (3.20)$$

Que puede ser llevado a un polinomio cúbico con el cambio de variable $u^2 = r$ (de manera similar a lo hecho para resolver el polinomio cuártico) y llegar a su vez a un polinomio cúbico reducido con coeficientes $g_2 = 4P^2/3$ y $g_3 = -8P^3/27 - 2Q^2$, donde tanto g_2 , g_3 como su correspondiente Δ son todos mayores a cero, por lo que nuevamente tendremos tres raíces reales como solución.

En este caso, de manera análoga al del ángulo de escape, solo una raíz es la correcta, y es la que al usarla en τ_4 o τ_2 nos resulta en el valor del punto crítico del mínimo local θ_{mL} , el cual es:

$$u_i = \sqrt{\frac{2P}{3} \cos \left[\frac{1}{3} \left(\cos^{-1} \left[1 + \frac{27Q^2}{4P^3} \right] + \pi \right) \right]} - \frac{P}{3} \quad (3.21)$$

O bien:

$$u_i = \sqrt{\frac{4(C_k k_E - 3\alpha^2)}{3k_E^2} \cos \left[\frac{1}{3} \left(\cos^{-1} \left[1 + \frac{27\alpha^2(k_E^2 - C_k k_E + 2\alpha^2)^2}{2(C_k k_E - e\alpha^2)^3} \right] + \pi \right) \right] - \frac{2(C_k k_E - 3\alpha^2)}{3k_E^2}} \quad (3.22)$$

Reemplazando u_i en τ_1 y τ_3 obtenemos los ángulos θ_{i1} y θ_{i2} respectivamente.

$$\theta_{i1} = 2 \tan^{-1} \left[-\frac{\alpha}{k_E} - \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}\sqrt{-u_i^2 - 2P + \frac{2Q}{u_i}} \right] \quad (3.23)$$

$$\theta_{i2} = 2 \tan^{-1} \left[-\frac{\alpha}{k_E} + \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}\sqrt{-u_i^2 - 2P - \frac{2Q}{u_i}} \right] \quad (3.24)$$

De igual manera al caso de los ángulos de escape, estas expresiones son diferentes a las de la ecuación (2.30) pero sus valores numéricos resultan lo mismo. Podemos notar las mismas características que ya se expusieron para los ángulos de escape, ambos métodos obtienen los ángulos requeridos pero consideramos que el método expuesto en el capítulo 2 es más sencillo y las expresiones son ligeramente menos extensas.

3.3. Soluciones.

3.3.1. Casos oscilatorios.

Región	ángulos	ángulos (en grados)	número de raíces reales
I	$[-\theta_M, \theta_{e-})$	$[-174,49, -102,60)$	2 raíces reales
II	$[\theta_{e-}, \theta_{mL})$	$[-102,60, -69,75)$	4 raíces reales
III	$[\theta_{mL}, \theta_{ML})$	$[-69,75, -10,36)$	4 raíces reales
IV	$[\theta_{ML}, \theta_{i1})$	$[-10,36, 26,93)$	4 raíces reales
V	$[\theta_{i1}, \theta_m)$	$[26,93, 74,60)$	2 raíces reales
VI	$[\theta_m, \theta_{i2})$	$[74,60, 112,57)$	2 raíces reales
VII	$[\theta_{i2}, \theta_{e+})$	$[112,57, 123,32)$	4 raíces reales
VIII	$[\theta_{e+}, \theta_M)$	$[123,32, 185,51)$	2 raíces reales

Cuadro 3.1: Regiones para la integración para los valores de $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,3$.

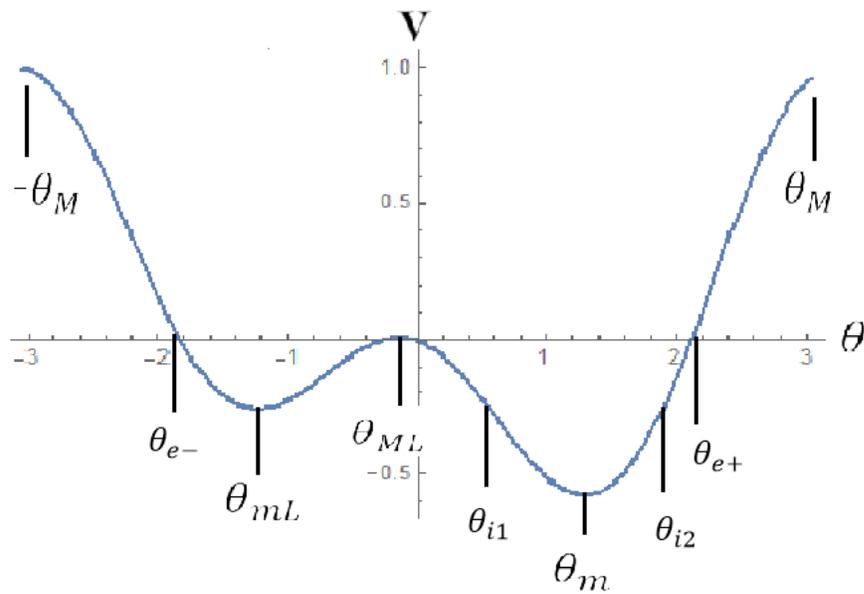


Figura 3.8: Ángulos importantes en el potencial, θ_M y θ_{ML} son los ángulos donde tenemos los máximos (global y local respectivamente), θ_m y θ_{mL} son los ángulos donde tenemos los mínimos (global y local respectivamente), θ_{e+} y θ_{e-} son los ángulos de escape, que en este caso no son iguales, finalmente θ_{i1} y θ_{i2} son los ángulos “internos”.

Una vez hallados todos los ángulos importantes podemos ahora continuar en la búsqueda de las soluciones al sistema.

Como se puede observar en el cuadro (3.1), ya tenemos los valores numéricos para todos estos ángulos, por lo que podemos continuar con el proceso de integrar el polinomio ya factorizado.

Notamos que solamente 4 regiones de integración tienen 4 raíces reales, mientras que las demás tienen 2 raíces reales y 2 raíces complejas conjugadas entre sí. Lo que nos lleva a utilizar dos integrales diferentes para estas regiones.

Para las regiones II, III, IV y VII usaremos las integrales de la página 275 de la referencia [12], pues estas integrales deben tener las cuatro raíces reales y diferentes.

Comenzamos con la región II, donde utilizaremos la integral:

$$\int_u^{\tau_4} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau_1 - \tau)(\tau_3 - \tau)(\tau_4 - \tau)(\tau - \tau_2)}} = \frac{2}{\sqrt{(\tau_1 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_2)}} \operatorname{sn}^{-1}(\sin\phi, r), \quad (3.25)$$

donde:

$$\tau_1 > \tau_3 > \tau_4 > u \geq \tau_2 = \tau_0,$$

y:

$$\phi = \operatorname{arcsin} \left(\sqrt{\frac{(\tau_3 - \tau_2)(\tau_4 - u)}{(\tau_4 - \tau_2)(\tau_3 - u)}} \right),$$

$$r = \sqrt{\frac{(\tau_1 - \tau_3)(\tau_4 - \tau_2)}{(\tau_1 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_2)}}.$$

Utilizando las identidades de (Byrd. Pag. 107 ecuación 253) [13] resulta:

$$\frac{(\tau_3 - \tau_0)(\tau_4 - \tau)}{(\tau_4 - \tau_0)(\tau_3 - \tau)} = \operatorname{sn}^2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{(\tau_1 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_0)} \sqrt{|(4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2)|}) \omega t, r \right]. \quad (3.26)$$

Despejando τ y quitando la sustitución de Weierstrass tenemos la solución para la región II:

$$\theta_{II} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\tau_3 s_{II} - \tau_4}{s_{II} - 1} \right], \quad (3.27)$$

donde definimos:

$$s_{II} = \left(\frac{(\tau_4 - \tau_0)}{(\tau_3 - \tau_0)} \right) sn^2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{(\tau_1 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_0)} | (4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2) |) \omega t, r \right]. \quad (3.28)$$

Para la región III se puede utilizar la misma integral solo que en esta ocasión $\tau_0 = \tau_4$, y se obtienen las soluciones de manera análoga con un pequeño detalle. La solución viene desviada por un pequeño desfase equivalente a $2K$, siendo la constante K la definida por la ecuación (A.16). K es un cuarto del periodo $4K$ de la función elíptica sn por lo que desplazando el argumento de la función sn por $2K$ (medio periodo) obtenemos la solución deseada.

Para la región IV utilizaremos la integral:

$$\int_{\tau_3}^u \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau_1 - \tau)(\tau_3 - \tau)(\tau - \tau_4)(\tau - \tau_2)}} = \frac{2}{\sqrt{(\tau_1 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_2)}} sn^{-1}(sn \phi', r), \quad (3.29)$$

donde:

$$\tau_1 \geq u > \tau_3 = \tau_0 > \tau_4 > \tau_2,$$

y:

$$\phi' = \arcsin \left(\sqrt{\frac{(\tau_1 - \tau_4)(u - \tau_0)}{(\tau_1 - \tau_0)(u - \tau_4)}} \right).$$

Mientras que r es la misma con la excepción de que $\tau_0 = \tau_3$ para la región IV y $\tau_0 = \tau_1$ para la región VII.

De manera análoga obtenemos la solución:

$$\theta_{IV} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\tau_4 s_{IV} - \tau_0}{s_{IV} - 1} \right]. \quad (3.30)$$

Con s_{IV} definida como:

$$s_{IV} = \left(\frac{(\tau_1 - \tau_0)}{(\tau_1 - \tau_4)} \right) sn^2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{(\tau_1 - \tau_4)(\tau_0 - \tau_2)} |4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2|) \omega t, r \right]. \quad (3.31)$$

Para la región VII se puede utilizar la misma integral solo que en esta ocasión $\tau_0 = \tau_1$, y se obtienen las soluciones de manera análoga. De nuevo las soluciones vendrán con un desfase de $2K$, por lo que nuevamente sumándole esta constante al argumento de la función sn obtendremos la solución deseada.

Para las regiones con dos raíces reales y dos raíces complejas conjugadas usaremos la integral 259 de la página 133 de [13], en el caso de la región I tenemos:

$$\int_{\tau_2}^u \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_c)(\tau - \tau_{\bar{c}})}} = \frac{1}{\mathcal{A}\mathcal{B}} cn^{-1}(\cos\phi_c, r_c). \quad (3.32)$$

Con $\tau_3 = \tau_c$ y $\tau_4 = \tau_{\bar{c}}$, siendo ambos números complejos conjugados uno del otro, y donde definimos:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(\tau_1 - \frac{\tau_c + \tau_{\bar{c}}}{2})^2 - \frac{(\tau_c - \tau_{\bar{c}})^2}{4}},$$

$$\mathcal{B} = \sqrt{(\tau_2 - \frac{\tau_c + \tau_{\bar{c}}}{2})^2 - \frac{(\tau_c - \tau_{\bar{c}})^2}{4}},$$

$$\phi_c = \text{Arcos} \left[\frac{(\tau_1 - u)\mathcal{B} - (u - \tau_2)\mathcal{A}}{(\tau_1 - u)\mathcal{B} + (u - \tau_2)\mathcal{A}} \right],$$

$$r_c = \sqrt{\frac{(\tau_1 - \tau_2)^2 - (\mathcal{A} - \mathcal{B})^2}{4\mathcal{A}\mathcal{B}}}.$$

Por lo que la solución para la región I queda como:

$$\theta_I = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\tau_1 \mathcal{B}(s_I - 1) - \tau_2 \mathcal{A}(s_I + 1)}{s_I(\mathcal{B} - \mathcal{A}) - \mathcal{A} - \mathcal{B}} \right], \quad (3.33)$$

donde definimos:

$$s_I = cn \left[\frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{B}} |k_E^2| \omega t, r_c \right] \quad (3.34)$$

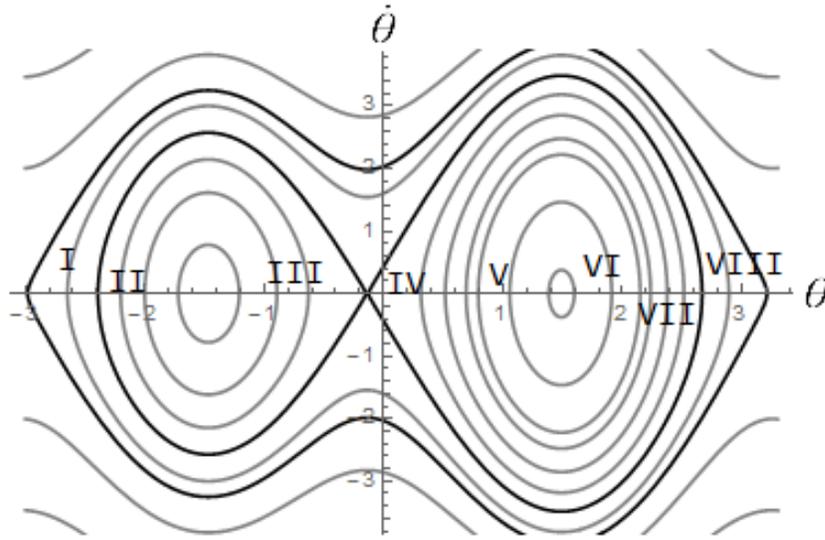


Figura 3.9: Diagrama de fase del sistema del aro y la cuenta para los valores de $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,3$.

Mientras que para la región VIII utilizamos la misma integral, la diferencia radica en que para la región I tenemos a $\tau_2 = \tau_0$ y en la región VIII tenemos que $\tau_1 = \tau_0$. Y nuevamente la solución vendrá con un desfase equivalente a $2K$, que como se explica en el Apéndice A es el mismo “medio” periodo de la función cn por lo que sumándole $2K$ obtenemos la solución deseada.

Finalmente nos quedan las regiones V y VI, las soluciones se encuentran con la misma integral que en la ecuación (3.32) pero cambiando $\tau_2 \rightarrow \tau_3$ y $\tau_3 \rightarrow \tau_2$, resultando ahora las raíces reales τ_1 y τ_3 mientras que $\tau_2 = \tau_c$ y $\tau_4 = \tau_{\bar{c}}$.

Tenemos así las soluciones para todas las regiones (I al VIII) del sistema que se pueden apreciar mucho mejor en el cuadro (3.2), que son todas las figuras internas a la separatriz externa del diagrama de fase de la figura (3.9).

3.3.2. Rotación libre y separatrices.

Aún falta por calcular otras regiones del problema, que son la región de rotación libre, es decir cuando tenemos energías mayores a la energía máxima permitida i.e. la región externa de la figura (3.9), y los casos de las separatrices, es decir cuando soltamos la partícula en los puntos críticos θ_M , θ_{ML} o en θ_{e+} y θ_{e-} .

Región	solución	parámetro s
I	$\theta_i = 2\tan^{-1} \left[\frac{\tau_1 \mathcal{B}(s_i-1) - \tau_0 \mathcal{A}(s_i+1)}{s_i(\mathcal{B}-\mathcal{A}) - \mathcal{A}-\mathcal{B}} \right]$	$s_i = cn \left[\frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{B}} k_E^2 \omega t, r_c \right]$
II	$\theta_{ii} = 2\tan^{-1} \left[\frac{\tau_3 s_{ii} - \tau_4}{s_{ii} - 1} \right]$	$s_{ii} = \left(\frac{\tau_4 - \tau_0}{\tau_3 - \tau_0} \right) sn^2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{g_s} k_E) \omega t, r \right]$
III	$\theta_{iii} = 2\tan^{-1} \left[\frac{\tau_3 s_{iii} - \tau_0}{s_{iii} - 1} \right]$	$s_{iii} = \left(\frac{\tau_0 - \tau_2}{\tau_3 - \tau_2} \right) sn^2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{g_s} k_E) \omega t + 2K, r \right]$
IV	$\theta_{iv} = 2\tan^{-1} \left[\frac{\tau_4 s_{iv} - \tau_0}{s_{iv} - 1} \right]$	$s_{iv} = \left(\frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1 - \tau_4} \right) sn^2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{g_s} k_E) \omega t, r \right]$
V	$\theta_v = 2\tan^{-1} \left[\frac{\tau_1 \mathcal{B}'(s_v-1) - \tau_0 \mathcal{A}'(s_v+1)}{s_v(\mathcal{B}'-\mathcal{A}') - \mathcal{A}'-\mathcal{B}'} \right]$	$s_v = cn \left[\frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{A}'\mathcal{B}'} k_E^2 \omega t, r'_c \right]$
VI	$\theta_{vi} = 2\tan^{-1} \left[\frac{\tau_0 \mathcal{B}'(s_{vi}-1) - \tau_2 \mathcal{A}'(s_{vi}+1)}{s_{vi}(\mathcal{B}'-\mathcal{A}') - \mathcal{A}'-\mathcal{B}'} \right]$	$s_{vi} = cn \left[\frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{A}'\mathcal{B}'} k_E^2 \omega t + 2K, r'_c \right]$
VII	$\theta_{vii} = 2\tan^{-1} \left[\frac{\tau_4 s_{vii} - \tau_3}{s_{vii} - 1} \right]$	$s_{vii} = \left(\frac{\tau_0 - \tau_3}{\tau_0 - \tau_4} \right) sn^2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{g_s} k_E) \omega t + 2K, r \right]$
VIII	$\theta_{viii} = 2\tan^{-1} \left[\frac{\tau_0 \mathcal{B}(s_{viii}-1) - \tau_2 \mathcal{A}(s_{viii}+1)}{s_{viii}(\mathcal{B}-\mathcal{A}) - \mathcal{A}-\mathcal{B}} \right]$	$s_{viii} = cn \left[\frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{B}} k_E^2 \omega t + 2K, r_c \right]$

Cuadro 3.2: Soluciones para todas las regiones de integración en los casos oscilatorios. Definimos las constantes $g_s = (\tau_1 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_2)$, $\mathcal{A}' = \sqrt{(\tau_1 - \frac{\tau_c + \tau_{\bar{c}}}{2})^2 - \frac{(\tau_c - \tau_{\bar{c}})^2}{4}}$, $\mathcal{B}' = \sqrt{(\tau_3 - \frac{\tau_c + \tau_{\bar{c}}}{2})^2 - \frac{(\tau_c - \tau_{\bar{c}})^2}{4}}$ y $r'_c = \sqrt{\frac{(\tau_1 - \tau_3)^2 - (\mathcal{A}' - \mathcal{B}')^2}{4\mathcal{A}'\mathcal{B}'}}$. Las demás constantes ya fueron definidas con anterioridad al igual que el factor $2K$.

Comenzamos con el caso de la rotación libre, es decir trayectorias externas de la figura (3.9). En este caso utilizaremos el otro camino expuesto anteriormente, es decir el mismo utilizado en el caso de $\alpha = 0$. Definiendo nuevamente una constante \mathcal{C} que depende de las condiciones iniciales θ_0 y $\dot{\theta}_0$. Así además mostramos las diferencias entre ambos caminos y las ventajas y desventajas de ambos procedimientos.

Definimos la constante \mathcal{C} de manera análoga a lo realizado en el capítulo 1 y muy similar a lo realizado en el análisis del potencial cuando encontramos los ángulos de escape:

$$-\frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2} + \sin^2 \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 + 2\alpha \sin \theta_0 = \mathcal{C}. \quad (3.35)$$

Que a su vez cumple con la ecuación:

$$\mathcal{C} = -\frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2} + \sin^2 \theta + 2\beta \cos \theta + 2\alpha \sin \theta. \quad (3.36)$$

La diferencia entre \mathcal{C}_{ML} y \mathcal{C}_{mL} con \mathcal{C} (del presente capítulo) es que \mathcal{C} incluye a la

velocidad inicial que es de vital importancia justamente en el caso de rotación libre y las separatrices, a diferencia de las constantes \mathcal{C}_k y k_E que no tienen una componente equivalente más que la energía.

Nuevamente utilizamos la sustitución de Weierstrass e integrando la ecuación (3.36), llegamos a la ecuación:

$$\sqrt{-\mathcal{C} - 2\beta} \frac{\omega t}{2} = \int \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^4 - \tau^3 \frac{4\alpha}{\mathcal{C}+2\beta} + \tau^2 \frac{2(\mathcal{C}-2)}{\mathcal{C}+2\beta} - \tau \frac{4\alpha}{\mathcal{C}+2\beta} + \frac{\mathcal{C}-2\beta}{\mathcal{C}+2\beta}}}, \quad (3.37)$$

donde nuevamente tenemos que obtener las raíces del polinomio dentro del denominador de la ecuación (3.37) con el mismo método expuesto en el apéndice D. Los resultados son iguales a los expuestos ya, puesto que ya sea que definamos a τ_i con respecto a k_E y \mathcal{C}_k o con respecto a \mathcal{C} , las soluciones son iguales y equivalentes.

En el caso de rotación libre definimos a la constante \mathcal{C} como:

$$\mathcal{C}_r = -\frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2} + \sin^2 \theta_M + 2\beta \cos \theta_M + 2\alpha \sin \theta_M. \quad (3.38)$$

Para el caso que nos concierne, es decir el caso de la rotación libre, es mucho más útil definir las raíces con respecto a \mathcal{C} , puesto que para definirnos cualquier solución en esta región de rotación libre soltaremos a la partícula en θ_M , pero con $\dot{\theta}_0 \neq 0$, lo que nos garantiza tener energías suficientes para estar en el régimen de rotación libre.

Con el ya conocido método obtenemos las raíces del polinomio, con las constantes (donde de ahora en adelante el subíndice r define el caso de rotación libre) P_r , Q_r y R_r definidas como:

$$P_r = \frac{2(\mathcal{C}_r - 2)(\mathcal{C}_r + 2\beta) - 6\alpha^2}{(\mathcal{C}_r + 2\beta)^2}, \quad (3.39)$$

$$Q_r = \frac{-8\alpha(\alpha^2 + (\mathcal{C}_r + 2\beta)(1 + \beta))}{(\mathcal{C}_r + 2\beta)^3}, \quad (3.40)$$

$$R_r = \frac{\mathcal{C}_r - 2\beta}{\mathcal{C}_r + 2\beta} - \frac{4\alpha^2}{(\mathcal{C}_r + 2\beta)^2} + \frac{2\alpha^2(\mathcal{C}_r - 2)}{(\mathcal{C}_r + 2\beta)^3} - \frac{3\alpha^4}{(\mathcal{C}_r + 2\beta)^4}. \quad (3.41)$$

Con lo cual, obtenemos las raíces:

$$\tau_{a,\bar{a}} = \frac{\alpha}{\mathcal{C}_r + 2\beta} - \frac{1}{2}u_r \pm \frac{1}{2}\sqrt{-u_r^2 - 2P_r + \frac{2Q_r}{u_r}}, \quad (3.42)$$

$$\tau_{c,\bar{c}} = \frac{\alpha}{\mathcal{C}_r + 2\beta} + \frac{1}{2}u_r \pm \frac{1}{2}\sqrt{-u_r^2 - 2P_r - \frac{2Q_r}{u_r}}. \quad (3.43)$$

Con la constante u_r dependiente únicamente de la raíz del polinomio cúbico asociado, que es:

$$u_r = \sqrt{e_3 - \frac{2P_r}{3}} = \sqrt{-2\sqrt{\frac{g_2}{12}} \cos \left[-\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{27}g_3}{(g_2)^{3/2}} \right) \right] - \frac{2P_r}{3}}, \quad (3.44)$$

donde los invariantes asociados g_2 y g_3 se obtienen con combinaciones de P_r , Q_r y R_r ya definidas en el apéndice D.

Notamos que para este caso, es decir todo $\theta = \theta_M$, y $\dot{\theta}_0 > 0$ el polinomio cuártico tiene 4 raíces complejas, compuestas en dos pares conjugados entre sí. Por lo que para resolver la integral en (3.37) utilizamos la integral 267 de la página 146 de la referencia [13]:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau - \tau_a)(\tau - \tau_{\bar{a}})(\tau - \tau_c)(\tau - \tau_{\bar{c}})}} = \frac{2}{\mathcal{A}_r + \mathcal{B}_r} \operatorname{tn}^{-1}(\tan \phi_r, r_r), \quad (3.45)$$

donde definimos las siguientes constantes:

$$\mathcal{A}_r = \sqrt{\left(\frac{\tau_a + \tau_{\bar{a}}}{2} - \frac{\tau_c + \tau_{\bar{c}}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\frac{(\tau_a - \tau_{\bar{a}})^2}{4}} + \sqrt{-\frac{(\tau_c - \tau_{\bar{c}})^2}{4}}\right)^2},$$

$$\mathcal{B}_r = \sqrt{\left(\frac{\tau_a + \tau_{\bar{a}}}{2} - \frac{\tau_c + \tau_{\bar{c}}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\frac{(\tau_a - \tau_{\bar{a}})^2}{4}} - \sqrt{-\frac{(\tau_c - \tau_{\bar{c}})^2}{4}}\right)^2},$$

$$g_r^2 = \frac{-(\tau_a - \tau_{\bar{a}})^2 - (\mathcal{A}_r - \mathcal{B}_r)^2}{(\mathcal{A}_r + \mathcal{B}_r)^2 + (\tau_a - \tau_{\bar{a}})^2},$$

$$\phi_r = \tan^{-1} \left[\frac{\tau - \frac{\tau_a + \tau_{\bar{a}}}{2} + \sqrt{-\frac{(\tau_a - \tau_{\bar{a}})^2}{4}} g_r}{\sqrt{-\frac{(\tau_a - \tau_{\bar{a}})^2}{4}} + \frac{\tau_a + \tau_{\bar{a}}}{2} g_r - g_r \tau} \right],$$

$$r_r^2 = \frac{4\mathcal{A}_r \mathcal{B}_r}{(\mathcal{A}_r + \mathcal{B}_r)^2}.$$

Por lo que la solución para el caso de rotación libre resulta como:

$$\theta_r = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\frac{\tau_a + \tau_{\bar{a}}}{2} - \sqrt{-\frac{(\tau_a - \tau_{\bar{a}})^2}{4}} g_r + \sqrt{-\frac{(\tau_a - \tau_{\bar{a}})^2}{4}} s_r + \frac{\tau_a + \tau_{\bar{a}}}{2} g_r s_r}{1 + g_r s_r} \right], \quad (3.46)$$

donde el parámetro s_r es:

$$s_r = \operatorname{tn} \left[\frac{(\mathcal{A}_r + \mathcal{B}_r)}{4} \sqrt{-\mathcal{C}_r - 2\beta\omega t}, r_r \right]. \quad (3.47)$$

Finalmente nos quedan las dos separatrices del diagrama de fase de la figura (3.9), que se pueden obtener de diversas maneras. Una consiste en igualar las raíces que se igualan en estos puntos en la figura (3.2), i.e. en la separatriz interna τ_3 y τ_4 , y buscar la integral correspondiente en las tablas de la literatura. O el método que utilizaremos aquí.

Aprovechando las propiedades de las funciones elípticas de Jacobi, que aparecen en las soluciones de todas las regiones obtenidas, podemos notar algunas características. El módulo r , r_c o r_r varía entre los valores de 0 y 1 en las diversas regiones ya estudiadas, y siempre tienden a 1 cuando nos acercamos a las separatrices como se puede apreciar en la figuras (3.10) y (3.11).

Por lo que para hallar las expresiones para las dos separatrices, basta con llevar los valores correspondientes a los límites correctos, para la separatriz interna (*si*) bastará con tomar alguna de las soluciones de las regiones II, III, IV o VII y llevar a $\tau_3 = \tau_4$, y a $r \rightarrow 1$, lo que nos lleva a la solución de la primera separatriz:

$$\theta_{si} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\tau_3 s_{si} - \tau_3}{s_{si} - 1} \right]. \quad (3.48)$$

Con:

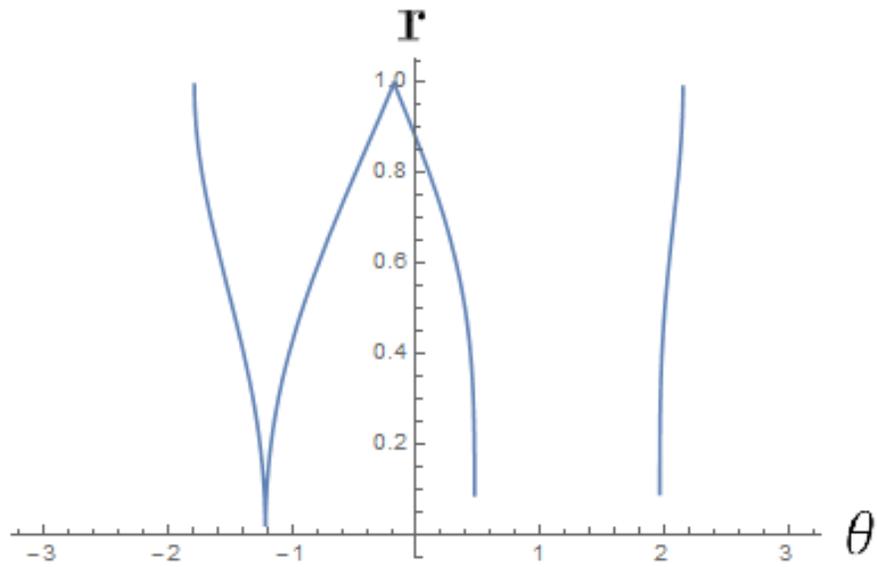


Figura 3.10: Módulo r de las soluciones de las regiones II, III, IV y VII vs θ .

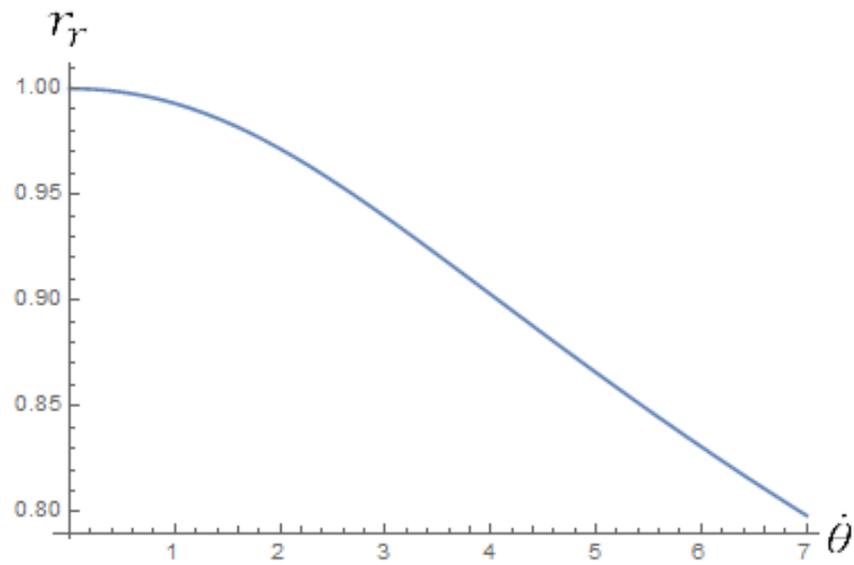


Figura 3.11: Módulo r_r de la solución para el caso de rotación libre vs $\dot{\theta}$

$$s_{si} = \tanh^2 \left[\frac{1}{2} (\sqrt{(\tau_1 - \tau_3)(\tau_3 - \tau_2)} |4\beta k^2 - 4\beta + \alpha^2|) \omega t \right] \quad (3.49)$$

Mientras que para la separatriz externa (*se*) bastará con tomar la solución de la región de rotación libre, y llevar a $r_r \rightarrow 1$ mientras que $\dot{\theta}_0 \rightarrow 0$ para obtener la misma solución que en la ecuación (3.46) pero con la constante:

$$s_{se} = \sinh \left[\frac{(\mathcal{A}_{se} + \mathcal{B}_{se})}{4} \sqrt{-\mathcal{C}_{se} - 2\beta\omega t} \right], \quad (3.50)$$

donde \mathcal{C}_{se} es \mathcal{C}_r , \mathcal{A}_{se} es \mathcal{A}_r y \mathcal{B}_{se} es \mathcal{B}_r con las consideraciones ya mencionadas.

3.4. Otros casos.

Finalmente, solo nos queda analizar otros posibles casos de α y β , el caso resuelto en la sección anterior, i.e. $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,3$ es uno muy característico para cualquier combinación de α y β debajo de la línea azul de la figura (2.4).

Pero podemos tener otros casos, sobre la línea azul e incluso sobre la línea de la semicircunferencia, como se puede apreciar en la figura (2.2), para casos sobre la línea azul de la figura (2.4) tenemos solamente un pozo pero tenemos en la curva donde antes estaba el otro pozo un punto de inflexión. Mientras que para los casos por sobre la semicircunferencia de la figura (2.4) tenemos ya situaciones similares a la del caso $\beta > 1$ del capítulo 1.

Notoriamente, a pesar de que en ambos sectores los potenciales se asemejan mucho a los casos para $\beta > 1$ del primer capítulo, no son exactamente iguales, puesto que los puntos máximo y mínimo si están desplazados. Por lo que aún tendremos un polinomio cuártico completo a la hora de la integración.

Lo que si se mantiene en ambos casos, es la característica de las raíces, siempre tendremos 2 raíces reales diferentes y 2 raíces complejas conjugadas entre sí. Lo que nos impide volver a la resolución del caso $\alpha = 0$ pero si nos permite obtener las soluciones de la misma manera que para las regiones I y VIII del sector (3.3.1). Utilizando las mismas integrales y resultando en las mismas expresiones para las raíces y las mismas soluciones del cuadro (3.2) para las regiones mencionadas.

De manera análoga, las soluciones para el caso de rotación libre y la única separa-

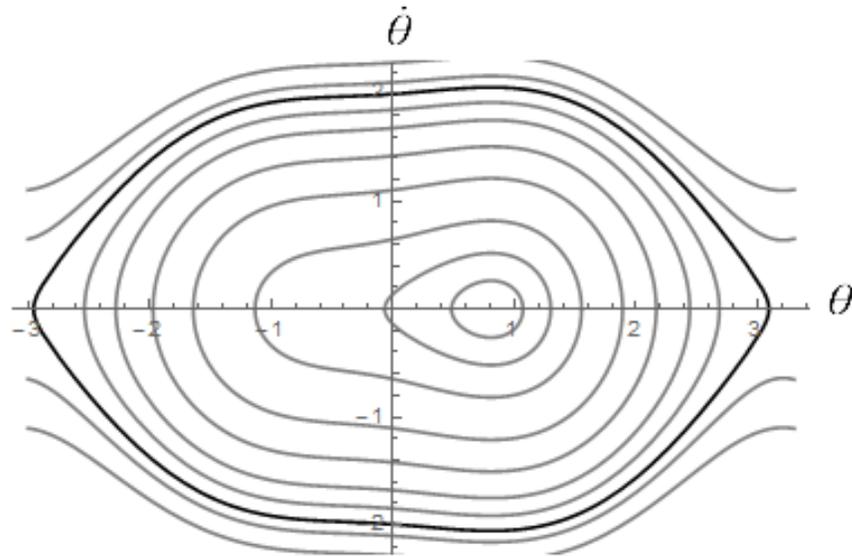


Figura 3.12: Diagrama de fase para el caso con $\alpha = 1/8$ y $\beta = 0,9$.

triz, se realizan de igual forma al caso anterior, resultando en las mismas soluciones que en las ecuaciones (3.46) y (3.50).

Podemos ver el diagrama de fase de estos casos en las figuras (3.12) y (3.13).

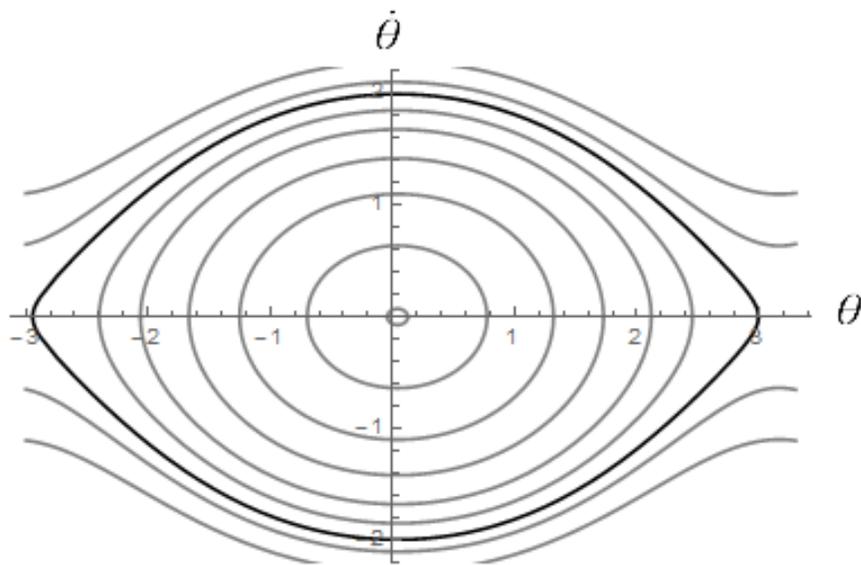


Figura 3.13: Diagrama de fase para el caso con $\alpha = 1/8$ y $\beta = 2$.

Capítulo 4

Analogía con la Termodinámica.

Como se mencionó en la introducción existen diversos ejemplos de analogías entre el sistema de la cuenta en el aro con otros problemas en varias áreas de la física. En este capítulo expondremos uno de ellos, analizando de manera sencilla y puntual algunas analogías entre las transiciones de fase de primer y segundo orden en la teoría de Landau para un ferromagneto sujeto a un campo magnético externo con el sistema de la cuenta en el aro [5].

Entendemos a las transiciones de fase como una transición en un sistema termodinámico de una fase a otra. En términos sencillos una transición de fase de primer orden es aquella cuyo cambio es discontinuo. Mientras que una transición de fase de segundo orden es aquella cuyo cambio se lleva a cabo de manera continua.

Para comenzar, estableceremos que variables son análogas entre los sistemas mencionados. La constante $\beta = \omega_c^2/\omega^2$ representa la velocidad con la que el aro está rotando, a menores β es mayor la velocidad, mientras que a mayores β el aro gira más lento. Esta constante será relacionada en el presente capítulo con la variable intensiva de Temperatura T .

La constante $\alpha = A/R$ representa la distancia del eje de rotación del aro con respecto al eje central, i.e. mientras mayor sea α mayor será la distancia del eje de rotación al centro del aro, y mientras más se aproxime a 0 el eje de rotación estará más centrado. α estará relacionada con el parámetro externo del campo magnético B .

Mientras que la variable de posición θ que nos dice en dónde se encuentra la

partícula, se encuentra relacionada con la magnetización M . Finalmente vemos a la energía potencial del sistema de la cuenta en el aro $V(\theta)$ equivalente a la energía libre \mathcal{F} del ferromagneto. Estas equivalencias se pueden encontrar descritas en el cuadro (4.1).

Teoría	Parámetro de Orden	Variable Intensiva	Parámetro Externo	Potencial
Cuenta en el Aro (Mecánica)	θ (posición de la masa)	ω (velocidad angular)	α (posición en el eje)	Energía Potencial $V(\theta)$
Material Ferromagnético	M (magnetización)	T (temperatura)	B (campo magnético)	Energía libre \mathcal{F}

Cuadro 4.1: Analogías entre las cantidades físicas del problema mecánico de la cuenta en el aro con un ferromagneto sujeto a un campo magnético externo.

Este tipo de analogías ya fueron observadas hace varios años [5], puesto que la teoría de Landau [8] aproxima las variables termodinámicas a un desarrollo de tipo polinomio. En el trabajo realizado por Fletcher [5], llevaron a cabo una aproximación para ángulos pequeños en el sistema de la cuenta en el aro, con el objetivo de obtener expresiones polinómicas del sistema. Nosotros por otro lado obtenemos las expresiones polinómicas por la sustitución de Weierstrass. Además de que resolvemos completamente el problema sin realizar ninguna aproximación. Es por ese motivo que consideramos necesario realizar esta comparación nuevamente.

A grandes rasgos, Landau consideró un desarrollo en la energía libre \mathcal{F} de un sistema en el parámetro de orden ϕ . En general este desarrollo se describe como $\mathcal{F} = a_1\phi + a_2\phi^2 + a_3\phi^3 + a_4\phi^4 + \dots$. Sin profundizar tanto en ello proseguimos con el análisis comparativo, donde compararemos no sólo las variables termodinámicas sino también las variables mecánicas del sistema de la cuenta en el aro expuestas por Fletcher [5]. Para así no sólo comparar con el desarrollo de Landau para un material ferromagnético si no también con los resultados obtenidos por Fletcher [5] para el sistema mecánico de la cuenta en el aro.

La primera comparación viene para β y θ (con un $\alpha = 0$), con M y T que podemos observar en la figura (4.1). Notamos inmediatamente la diferencia entre la constante β , nosotros quizá contraintuitivamente utilizamos un β que es inversamente proporcional a la velocidad angular ω . A diferencia del trabajo de Fletcher donde definen a β proporcional a la velocidad angular, siendo exactamente la inversa de

nuestra β . Como se ve en la figura (4.1) el considerar β como lo hicimos nosotros presenta una analogía más directa con el equivalente en la teoría de Landau.

Además se observa claramente lo mencionado en el capítulo 1, se puede notar cómo la variable θ_m varía de 0 para velocidades bajas para dividirse continuamente en dos valores simétricos con respecto a $\theta = 0$ para llegar finalmente a $\pm\pi/2$ cuando $\beta = 0$, es decir una velocidad ω infinita. Mostrándonos así la equivalencia con una transición de fase de segundo orden.

Mientras que para $\alpha \neq 0$, i.e. $\alpha = 1/8$, encontramos los resultados en la figura (4.2) que no fueron reportados en el trabajo de Fletcher. Notamos que si variamos desde velocidades ω pequeñas (i.e. $\beta > 1$) solamente contamos con dos puntos críticos (un máximo global θ_M y un mínimo global θ_m) descritos por las líneas roja y negra. Una vez β alcanza el valor de 1 el mínimo global θ_m comienza a tomar valores más y más alejados de 0 ahora descritos por la línea azul. Cuando β alcanza el valor de $3\sqrt{3}/8$ ocurre un equivalente a una transición de fase de primer orden, pues los dos puntos críticos pasan a ser tres de manera discontinua (el nuevo punto crítico luego se divide continuamente en dos dejándonos con 4 puntos críticos), donde aparecen los puntos críticos de máximo local θ_{ML} (línea morada) y mínimo local θ_{mL} (línea café).

Continuamos con la otra forma de fijar las constantes, es decir dejando a β fijo y variando a α con respecto a la posición θ . Esto se comparará con las variables termodinámicas de campo magnético B y nuevamente la magnetización M .

Se consideran dos casos, uno para el sistema con velocidades ω lo suficientemente altas para tener los dos pozos, y la otra cuando nos encontramos solamente con un pozo i.e. uno para $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} < 1$ y el otro para $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} > 1$. Cabe recalcar que no es el valor de $\beta = 1$ el que separa estos dos tipos de comportamientos en el sistema, como sí pasa cuando tenemos $\alpha = 0$. Como vimos en el capítulo 2 el cambio en el comportamiento del sistema ocurre para valores de β sobre la línea azul de la figura (2.4). Por lo tanto debemos considerar si $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3}$ es mayor o menor a 1 para dividir ambos comportamientos.

Para el caso con $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} > 1$, tenemos solamente un solo pozo en el potencial. Podemos ver los gráficos obtenidos en la figura (4.3). Notamos nuevamente las mismas similitudes en los gráficos en el trabajo de Fletcher como en el que

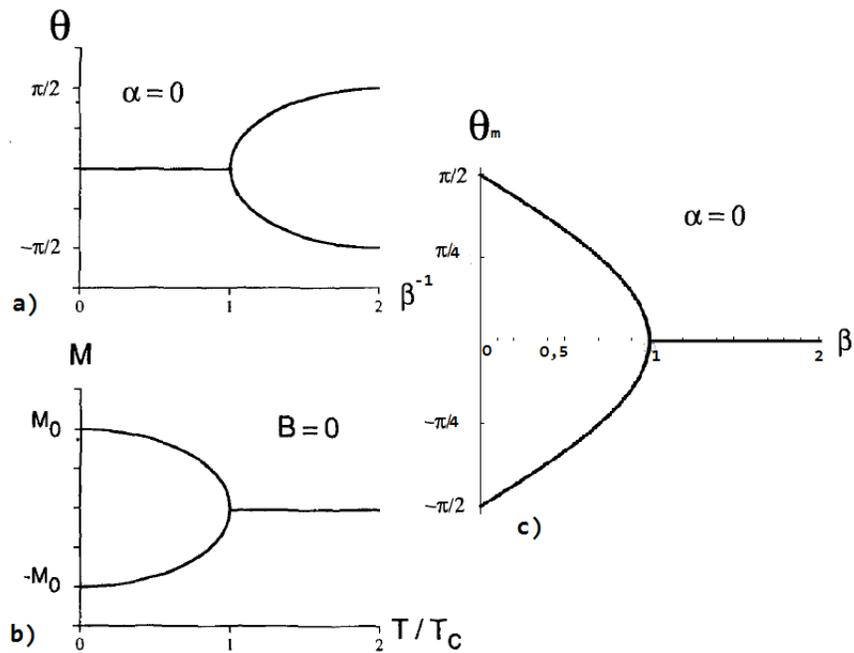


Figura 4.1: Gráficas comparativas. a) es lo obtenido por Fletcher para las variables β^{-1} vs θ para $\alpha = 0$. b) es la la temperatura T/T_c vs la magnetización M sin ningún campo magnético externo actuando en el ferromagneto. Finalmente c) es lo obtenido por nosotros con β vs θ_m donde las variables en θ son los puntos críticos del mínimo para cuando $\alpha = 0$.

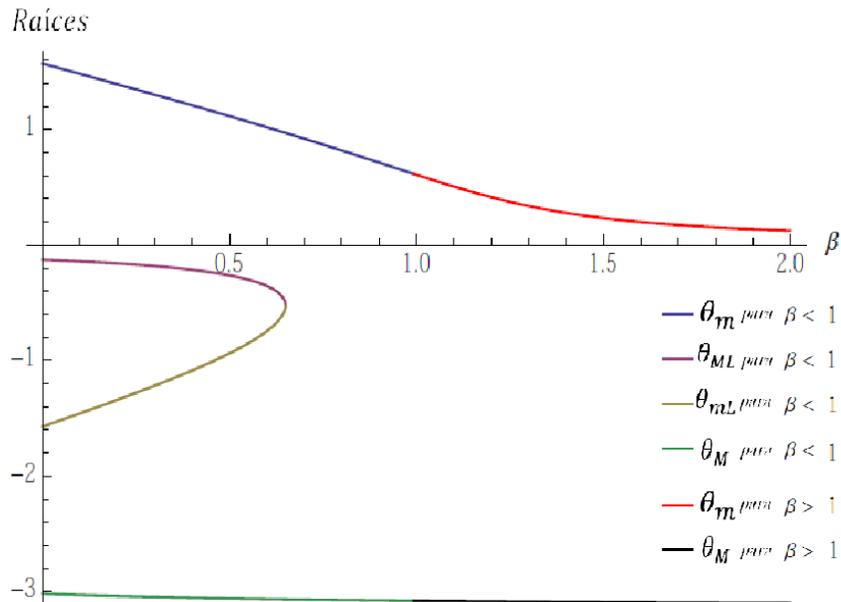


Figura 4.2: Puntos críticos vs β para un $\alpha = 1/8$. Podemos apreciar un cambio discontinuo en el número de puntos críticos para el valor de $\beta = 3\sqrt{3}/8$.

realizamos nosotros con la magnetización del ferromagneto vs el campo magnético para el caso con $T > T_c$. En el gráfico que nosotros obtuvimos se añadió también el punto crítico del máximo que son θ_M representadas por las líneas naranja y verde en la figura (4.1).

Ahora continuamos con el caso con $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} < 1$, es decir los casos donde tenemos suficiente velocidad ω para que el potencial tenga dos pozos. Podemos ver los gráficos obtenidos en la figura (4.4). Notamos algunas diferencias con el trabajo realizado por Fletcher, primeramente nosotros incluimos los puntos críticos máximos globales θ_M , en segundo lugar nuestro análisis obtuvo las raíces que en a) se muestran punteadas por Fletcher, en contraparte nosotros solo vislumbramos la histéresis en c) a diferencia de Fletcher. Aunque si se puede observar un cambio discontinuo en las líneas naranja y verde. De ambas maneras tenemos una analogía clara y directa con el caso termodinámico mostrado en b) que corresponde a una transición de fase de primer orden.

Podemos notar similitudes y diferencias para cuando variamos α cuando $\alpha^2 + \beta^2 +$

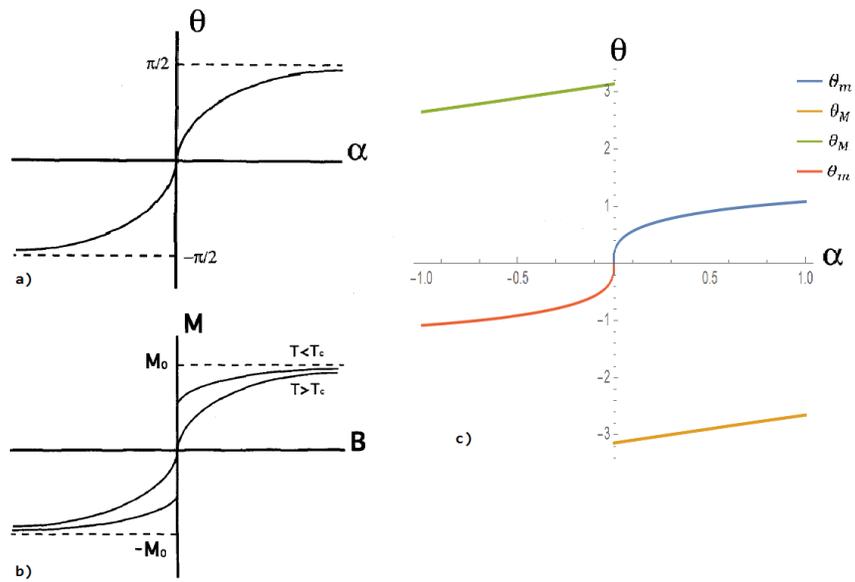


Figura 4.3: Gráficas comparativas. a) es lo obtenido por Fletcher para las variables α vs θ para $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} > 1$. b) es el campo magnético B vs la magnetización M para $T < T_c$ y $T > T_c$. Finalmente c) es lo obtenido por nosotros con α vs θ donde las variables en θ son los puntos críticos máximo y mínimo para cuando $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} > 1$.

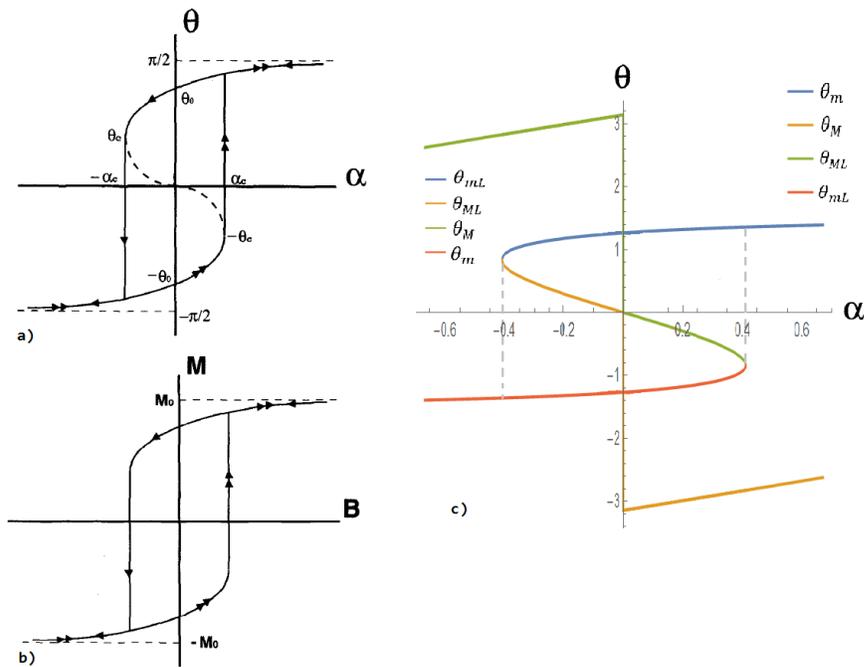


Figura 4.4: Gráficas comparativas. a) es lo obtenido por Fletcher para las variables α vs θ para $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} < 1$. b) es el campo magnético B vs la magnetización M para $T < T_c$ donde se puede apreciar una histéresis. Finalmente c) es lo obtenido por nosotros con α vs θ donde las variables en θ son todos los puntos críticos para cuando $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} < 1$.

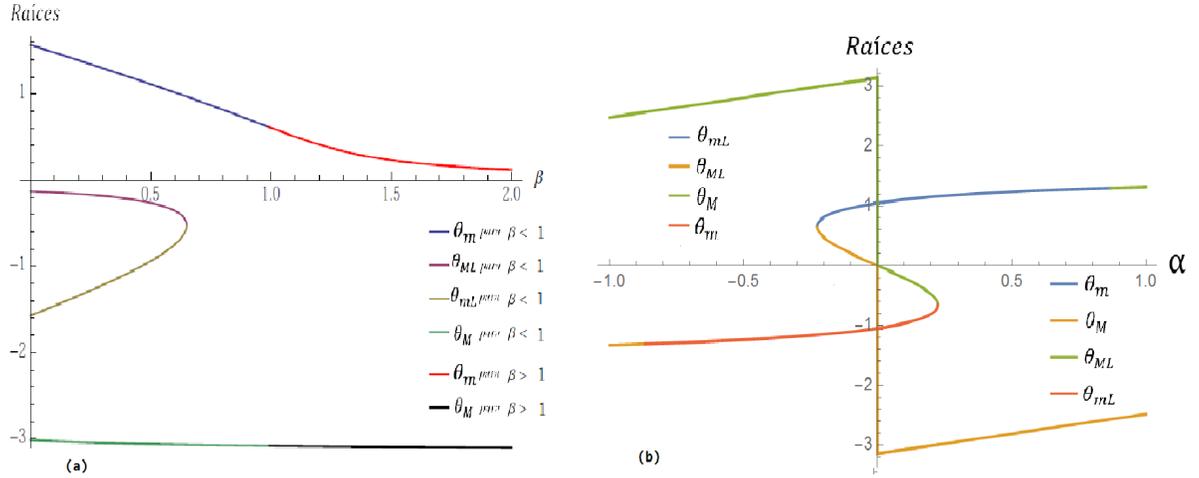


Figura 4.5: Gráficas comparativas para los casos con β o α fijos. En (a) tenemos a los puntos críticos con respecto a β mientras que en (b) tenemos a los puntos críticos con respecto a α .

$3(\alpha\beta)^{2/3} < 1$, con lo obtenido cuando variamos β para $\alpha \neq 0$. Esta comparación se muestra en la figura (4.5). Notamos primeramente que para el caso donde variamos α contamos con valores negativos pero la variable α está acotada a los valores $|\alpha| \leq 1$. Mientras que para el caso donde variamos β solo contamos con valores positivos pero pueden tomar cualquier valor entre $(0, \infty)$. El punto crítico θ_M no presenta alteraciones cuando variamos β pero sí lo hace cuando variamos α . En ambos casos encontramos equivalentes a transiciones de fase de segundo orden pues la aparición de más puntos críticos es discontinua.

Finalmente realizaremos una comparación más, la que resulta de variar α con respecto de β . Este caso ya fue descrito y explicado a profundidad en el capítulo 2 cuando se obtuvo la figura (2.4). Podemos ver los gráficos obtenidos en la figura (4.6). Notamos que nuestra decisión de tomar a β inversamente proporcional a la velocidad angular ω nos genera gráficos mucho más similares a los de las variables termodinámicas de la teoría de Landau.

Como se dijo, el sistema de la cuenta en el aro es muy similar al de un material ferromagnético en la teoría de Landau. El principal aporte de nuestro trabajo es el hecho de que trabajamos sin ninguna aproximación, por lo que el análisis realizado

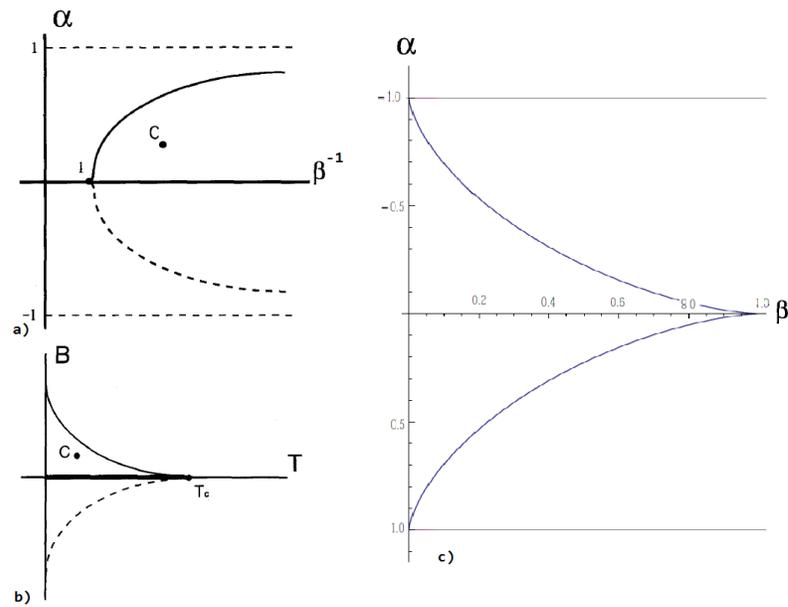


Figura 4.6: Gráficas comparativas. a) es lo obtenido por Fletcher para las variables β^{-1} vs α . b) es la temperatura T vs el campo magnético B para un ferromagneto ideal y real. Finalmente c) es lo obtenido por nosotros con β vs α .

para obtener las gráficas mostradas abarcan la totalidad del problema con certeza.

Conclusiones y Perspectivas.

Desde el punto de vista conceptual el trabajo es sencillo, pero desde el punto de vista analítico es tedioso, puesto que la resolución de un polinomio de cuarto orden es muy complejo, conlleva muchos cambios de variable, que nos llevan finalmente a un polinomio cúbico que también tiene sus propios retos. Donde al final si en las soluciones que obtuvimos (aunque las hemos expresado de la manera más simple que se nos hizo posible) uno va reemplazando cada valor, resultan expresiones muy extensas.

Y es que en la propia literatura uno encuentra que casi siempre la resolución de un polinomio de orden cuarto nos llevan a raíces de grandísimas expresiones que no se pueden reducir.

A pesar de ello, consideramos que si se pudo obtener una solución elegante del problema generalizado, que además pudimos comparar con un sistema de un área diferente de la física como lo es la teoría de Landau en la Termodinámica, sumado a varios detalles que consideramos nuevos o por lo menos no muy explícitos en la literatura actual, teniendo dos ejemplos claros de esto.

El primero es lo mostrado en la figura (2.4), donde podemos ver que para $\alpha \neq 0$ la relación entre el cambio de comportamiento del sistema, es decir ese repentino cambio en la simetría del mismo (que es lo que lleva al problema de la cuenta en el aro a ser un ejemplo tan usado en la literatura), no se da siempre cuando ω_c pasa de ser mayor a ser menor a ω (o viceversa). Sino que a mayores α , menores β son necesarios para el cambio de comportamiento, siguiendo la relación de la ecuación (2.12), donde la línea azul está expresada por la ecuación $\alpha^2 + \beta^2 + 3(\alpha\beta)^{2/3} = 1$.

El segundo ejemplo son los ángulos de escape, puesto que como en [1] y [4] se indica, ese ángulo no está expuesto de manera explícita en la literatura, así que sus

expresiones para el problema con $\alpha \neq 0$ son también un aporte al problema en sí. Y de mucha importancia a la hora de encontrar las soluciones, pues esos ángulos no sólo dividen las zonas con 4 raíces reales de las regiones con 2 raíces reales y 2 complejas, sino que también pueden llegar a ser muy útiles a la hora de calcular las expresiones para la separatriz interna. Algo también novedoso es el caso de los ángulos internos, que aunque no tienen mucha relevancia física si son muy importantes analíticamente puesto que dividen la forma de integración a la hora de buscar soluciones en el pozo más profundo.

Consideramos que podemos aprender otros aspectos físicos si introducimos algunas generalizaciones del problema como por ejemplo: podría ampliarse a casos con rozamiento, o con ω variable, o incluso llevar un análisis más profundo no únicamente de la parte real sino también de la parte compleja del sistema y sus raíces. El trabajo realizado aquí es un primer paso para continuar en la búsqueda de más soluciones analíticas, que aunque muy extensas en su expresión siguen siendo de utilidad. También es necesario mencionar la importancia del método para encontrar las raíces del polinomio cuártico en sí, nos sorprendió ver que aunque hace muchos años que ya se trataba con el problema de la cuenta en el aro con $\alpha \neq 0$, no encontramos un análisis así del problema. Lo que nos lleva a suponer que el propio espeso trabajo que nos propusimos sobrellevar aquí es lo que hace que la mayoría busque evitar este camino, que a fin de cuentas si nos lleva a las soluciones exactas del problema. Que de acuerdo a la demostración de Galois [14], únicamente se pueden encontrar las raíces de un polinomio por radicales hasta el orden cuatro. Por tanto el método expuesto es el más general posible en cuanto a orden de polinomios.

Además, existen también muchas posibilidades en usar el método aquí expuesto para encontrar soluciones analíticas de otros problemas que también se expresan en polinomios cuárticos, inclusive si a primera vista no se vean así como es el caso del sistema de la cuenta en el aro donde usando la sustitución de Weierstrass se pudo llevar el sistema a la forma polinómica. Seguramente existen muchos más sistemas que pueden ser llevados a polinomios cuárticos completos que con el debido trabajo se pueden resolver analíticamente de forma completa y exacta.

A fin de cuentas podemos decir que cumplimos con el objetivo planteado, el de encontrar las soluciones analíticas del problema del aro y la cuenta. Y que gracias a

la comprensión del método usado, se puede ver la muy amplia gama de problemas que es posible resolver usando las poderosas herramientas de las funciones elípticas de Jacobi y los métodos de hallar las raíces de un polinomio cuártico completo.

Apéndice A

Funciones Elípticas de Jacobi.

A.1. Introducción.

Ciertamente el estudio de las funciones elípticas de Jacobi y de las integrales elípticas no son algo muy novedoso, pues su descubrimiento y posterior estudio se remonta al siglo XIX. Aunque los primeros indicios de estas funciones se dieron en realidad en 1655 con John Wallis quien empezó a estudiar la longitud de arco de varios cicloides, relacionando todos con la longitud de arco de una elipse. Fue él y a su vez Sir Isaac Newton quienes publicaron un desarrollo infinito en series para la longitud de arco de la elipse.

Posteriormente Jacob Bernoulli tratando de resolver la forma que tomaría una cuerda elástica al ser comprimida por sus extremos, llega a una expresión que resulta en una integral que ahora llamaríamos una integral elíptica. Tanto Gauss como Legendre abordaron estas nuevas integrales ya en el siglo XVIII y XIX, siendo Legendre quien le dedicó cerca de 40 años de arduo estudio, logrando importantes avances pero ciertamente quienes más aportaron en este campo fueron dos jóvenes prodigios, Niels Henrik Abel y Carl Gustav Jacob Jacobi. Tanto Abel como Jacobi abordaron a las inversas de las integrales elípticas, es decir a las funciones elípticas y partiendo de allí fueron viendo sus propiedades y dejándonos la mayoría de lo que hoy en día manejamos sobre las funciones elípticas. Posteriormente fue Karl Weierstrass a finales del siglo XIX el encargado de dejarnos otro punto de vista y otro formalismo para las funciones elípticas, para muchos, más simple que el trabajo de Jacobi.

Aunque estas funciones nacieron del estudio de la longitud de arco de una elipse, para esta introducción abordaremos el enfoque que tomaron Abel y Jacobi, es decir como la integral con una función inversa.

La idea es similar a lo que realizamos con las funciones trigonométricas inversas:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Con las condiciones que x está en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ y que el denominador del integrando sea $\sqrt{1-t^2} \geq 0$, relaciones similares se aplican con las demás funciones trigonométricas inversas. Ahora bien, siguiendo el procedimiento que tomó Abel, definiremos una función para la integral mencionada:

$$\theta(x) = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

donde podremos obtener las funciones trigonométricas en base a la función ya definida $\sin \theta = x$. De manera análoga podemos definir más integrales relacionadas a las funciones inversas, y con funciones definidas a estas, llegar a las funciones trigonométricas ya conocidas.

Ahora bien, para el caso que nos compete, es decir las funciones elípticas, tomamos el trabajo realizado por Legendre, y definimos funciones (como el caso de θ para las trigonométricas) para integrales cuyos integrandos son reducidos de cualquier expresión polinomial de tercer o cuarto grado en el denominador, de la siguiente manera:

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'}}. \tag{A.1}$$

Continuando con el procedimiento que siguieron Abel y Jacobi, invertimos las integrales elípticas, y cambiamos la “F” para seguir la notación de Jacobi $u(\phi) = F(\phi, k)$, luego invertimos la integral de Legendre de (A.1) y obtenemos $\phi(u) = am u$ donde (am) es la amplitud de u . Invertiendo la integral de Jacobi resulta $u(x) = F(x, k)$. Esta inversión de las integrales elípticas nos lleva a definir la función elíptica

de Jacobi “*amplitud – seno*”, que siguiendo la notación de Glaisher (donde $x \in [-1, 1]$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$) resulta en:

$$sn(u, k) \equiv x = \sin \phi = \sin(am u). \quad (\text{A.2})$$

La razón por la cual se justifica el nombre de “*amplitud – seno*” se ve en las últimas dos igualdades de (A.2), donde se nota claramente que $sn(u, k)$ es el “seno” de la amplitud de u .

Uno ya podría adelantarse y suponer que el siguiente paso es, puesto que ya tenemos el seno de la amplitud, hallar el coseno de la misma. Y ciertamente bajo el mismo procedimiento, definimos el coseno de la amplitud u y definimos la función elíptica de Jacobi “*amplitud – coseno*” de la siguiente manera:

$$cn(u, k) \equiv \cos \phi = \cos(am u). \quad (\text{A.3})$$

Finalmente notamos que en la forma de Legendre de todas las integrales elípticas encontramos a $\Delta(\phi) \equiv \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$. Lo que nos conduce a definir la función elíptica de Jacobi “*amplitud – delta*”, la cual se escribe como la derivada de la amplitud:

$$dn(u, k) \equiv \sqrt{1 - k^2 sn^2 u} = \frac{d(am u)}{du}. \quad (\text{A.4})$$

También cabe recalcar que se suele simplificar la notación de Glaisher sobreentendiendo que todas las funciones elípticas de Jacobi tienen el mismo módulo k , dejando las funciones simplemente como $sn(u)$, $cn(u)$ y $dn(u)$. Como se puede apreciar en la figura (A.1) las funciones elípticas de Jacobi son periódicas y muy similares en su oscilación a las trigonométricas.

A.2. Propiedades.

Todo el desarrollo que se realizó en la sección anterior se llevó a cabo por Abel y Jacobi siguiendo la noción de que al usar funciones trigonométricas uno puede operar de manera muy variada y que tiene muchas más utilidades que sus funciones inversas. De la misma forma se buscó llegar a estas funciones amplitud y los resultados son

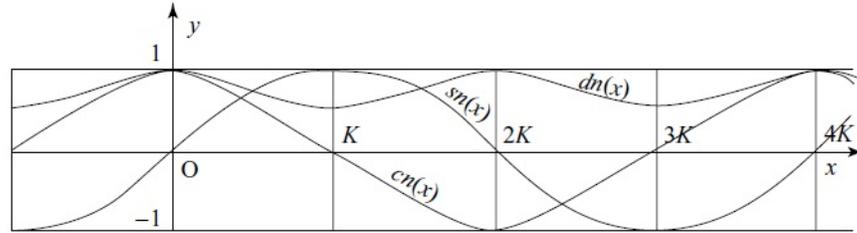


Figura A.1: Funciones snu , cnu y dnu . [1]

maravillosos.

Notamos que podemos definir a $cn u$ como $cn u \equiv \sqrt{1 - sn^2 u}$ ya que en la ecuación (A.2) $x \in [-1, 1]$.

De lo cual uno puede derivar las siguientes propiedades:

$$sn^2 u + cn^2 u = 1, \quad (A.5)$$

$$dn^2 u + k^2 sn^2 u = 1, \quad (A.6)$$

$$cn^2 u + (1 + k^2) sn^2 u = dn^2 u. \quad (A.7)$$

Otra propiedad interesante de las funciones elípticas de Jacobi es que en valores límites de k las mencionadas funciones se reducen a las funciones trigonométricas o a las funciones hiperbólicas. Cuando $k = 0$ las funciones elípticas resultan en $sn u = \sin u$, $cn u = \cos u$, $dn u = 1$, mientras que cuando $k = 1$ las funciones elípticas se reducen a $sn u = \tanh u$, $cn u = \operatorname{sech} u$, $dn u = \operatorname{sech} u$.

De la integral de (A.1) podemos notar que intercambiando $-t$ en lugar de t , es decir cambiando el signo de x , el signo de u también cambia. Por tanto $sn u$ es una función impar de u . Puesto que $sn(-u) = -sn u$, por (A.5) resulta que $cn(-u) = \pm cn u$. Pero por la teoría de la continuidad analítica sabemos que ya sea el signo superior como el signo inferior, una vez tomado uno, siempre deberá ser tomado el mismo para los demás valores, y ya que para el caso especial de $u = 0$ el signo superior $+$ debe ser tomado, este signo es el correcto [15], entonces resulta que

$cn(-u) = cn u$, y que por tanto $cn u$ es una función par de u [15]. Bajo el mismo procedimiento vemos que la función $dn u$ es una función par de u también.

Mientras que la derivada de la función $sn u$ es:

$$\frac{d}{du} sn u = cn u dn u. \quad (\text{A.8})$$

También notamos que diferenciando la ecuación (A.5) y usando la derivada ya mencionada resulta:

$$\frac{d}{du} cn u = -sn u dn u. \quad (\text{A.9})$$

Finalmente para la función $dn u$ tenemos:

$$\frac{d}{du} dn u = -k^2 sn u cn u. \quad (\text{A.10})$$

Ahora analicemos un poco el módulo k y el módulo complementario k' . El concepto nace de la condición de que si $k^2 + k'^2 = 1$ y $k' \rightarrow +1$ cuando $k \rightarrow 0$, decimos entonces que k' es el módulo complementario.

También cabe mencionar que las diversas combinaciones de cocientes se simplifican bastante usando la notación de Glaisher. Comenzamos con las funciones recíprocas de las funciones elípticas, las cuales se expresan invirtiendo el orden de la función original:

$$nsu = \frac{1}{sn u} \quad ncu = \frac{1}{cn u} \quad ndu = \frac{1}{dn u}.$$

Mientras que para los cocientes anotamos la función con las primeras letras de las funciones en el numerador y el denominador:

$$scu = tcu = \frac{sn u}{cn u} \quad sdu = tdu = \frac{sn u}{dn u} \quad cdu = tdu = \frac{cn u}{dn u},$$

$$csu = tsu = \frac{cn u}{sn u} \quad dsu = tdu = \frac{dn u}{sn u} \quad dcu = tdu = \frac{dn u}{cn u}.$$

Esta notación es muy simple y es la que utilizaremos a la hora de resolver el problema de la cuenta y el aro en todo el trabajo. También existen más propiedades,

como los teoremas de adición para $sn u$, y los teoremas de adición para $cn u$ y $dn u$, los cuales no abordaremos en profundidad y solamente los dejaremos expresadas directamente:

$$sn(u+v) = \frac{sn u cn v dn v + sn v cn u dn u}{1 - k^2 sn^2 u sn^2 v}, \quad (\text{A.11})$$

$$cn(u+v) = \frac{cn u cn v - sn u sn v dn u dn v}{1 - k^2 sn^2 u sn^2 v}, \quad (\text{A.12})$$

$$dn(u+v) = \frac{dn u dn v - k^2 sn u sn v cn u cn v}{1 - k^2 sn^2 u sn^2 v}. \quad (\text{A.13})$$

A.3. Doble Periodicidad

En las funciones trigonométricas vemos que $f(x + 2n\pi) = f(x)$, para todos los valores enteros de n . Y por esta propiedad es que las funciones trigonométricas son llamadas funciones periódicas con periodo de 2π .

Ahora definimos a dos numeros cualquiera (reales o complejos) ω_1, ω_2 cuyo cociente no es puramente real. Una función que satisfaga las ecuaciones:

$$f(x + 2\omega_1) = f(x) \quad f(x + 2\omega_2) = f(x), \quad (\text{A.14})$$

para todos los valores de x para los cuales $f(x)$ existe, es llamada una función con doble periodicidad de x , con los periodos $2\omega_1$ y $2\omega_2$.

Las funciones elípticas de Jacobi son funciones con doble periodicidad, y es justamente eso lo que estudiaremos en esta sección.

Comenzamos viendo la constante K , recordamos a la integral:

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

donde:

$$x = sn(u, k).$$

Si tomamos el límite superior de la integral como la unidad, es decir que el camino de integración sea una línea recta, definimos al valor de la integral por el símbolo K

tal que $sn(K, k) = 1$. Podemos notar que $cnK = 0$ y que $dnK = \pm k'$, el doble signo se remueve y resulta que solo queda siempre con el valor de $+k'$ [15] y por tanto dnK es una función continua de k , y su valor es siempre $+k'$.

Las funciones elípticas de K resultan entonces:

$$sn K = 1, cn K = 0, dn K = k'. \quad (\text{A.15})$$

Dejamos entonces a K definida por la integral:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (\text{A.16})$$

También se puede definir a K en términos de la segunda integral de (A.1), dejando el límite superior como $\pi/2$, y establecer la equivalencia entre ambas definiciones de K [15].

Buscamos definir la conexión de K con las propiedades periódicas de las funciones $sn u$, $cn u$ y $dn u$, por lo que requeriremos de la ecuación (A.11) y obtenemos:

$$sn(u+K) = \frac{sn u cn K dn K + sn K cn u dn u}{1 - k^2 sn^2 u sn^2 K}.$$

Lo que resulta en que $sn(u+K) = cd u$. Similarmente obtenemos que $cn(u+K) = -k' sd u$ y $dn(u+K) = k' nd u$.

Ahora vemos lo mismo pero con $2K$, por lo que $sn(u+2K) = \frac{cn(u+K)}{dn(u+K)} = -sn u$. De manera análoga resulta: $cn(u+2K) = -cn u$, $dn(u+2K) = dn u$.

Finalmente, para cuatro veces K resulta que: $sn(u+4K) = -sn(u+2K) = sn u$ y $cn(u+4K) = cn u$.

Por lo tanto concluimos que el periodo de las funciones $sn u$ y $cn u$ es $4K$, mientras que las funciones $dn u$ tienen un periodo menor de $2K$.

Ahora bien, para llegar a notar la propiedad de las funciones elípticas de Jacobi de la doble periodicidad, definimos primero la constante K' , la cual estará descrita por la integral:

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}. \quad (\text{A.17})$$

De tal manera que K' es la misma función de k'^2 como K lo es para k^2 . Ya está

demostrado [15] que si el plano complejo \mathbb{C} es cortado desde 0 hasta $-\infty$ y desde 1 hasta $+\infty$, entonces en el plano cortado, K' puede ser definido por la ecuación:

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - 1)(1 - k^2 s^2)}}.$$

Al momento de considerar el expandir los valores de k a valores complejos podemos llegar la ecuación:

$$\int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = K + i \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}}.$$

Lo que nos lleva inmediatamente, dada la definición de K' , a:

$$K + iK' = \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}},$$

por lo que es inmediato ver que:

$$sn(K + iK') = 1/k, dn(K + iK') = 0, cn(K + iK') = -ik'/k. \quad (\text{A.18})$$

Cabe recalcar que $cn(K + iK')$ es $\sqrt{1 - t^2}$ cuando t siguió el camino de integración predispuesto al punto $1/k$, y por tanto su valor final es $-ik'/k$ y no $+ik'/k$.

El resultado obtenido en la ecuación (A.18) es muy ilustrativo para ver las propiedades periódicas de las funciones elípticas, utilizando el teorema de adición de $sn u$ de la ecuación (1.14), llegamos a los siguientes resultados: $sn(u + K + iK') = \frac{dcu}{k}$, $cn(u + K + iK') = -\frac{ik'ncu}{k}$ y $dn(u + K + iK') = ik'scu$. Como en el caso anterior para K , repetimos la aplicación del procedimiento para obtener las relaciones de periodicidad de la función $sn u$ como: $sn(u + 2K + 2iK') = -sn u$ y $sn(u + 4K + 4iK') = sn u$, mientras que para la función $cn u$ resulta: $cn(u + 2K + 2iK') = cn u$ y $cn(u + 4K + 4iK') = cn u$, finalmente para la función $dn u$ tenemos: $dn(u + 2K + 2iK') = -dn u$ y $dn(u + 4K + 4iK') = dn u$.

De lo que concluimos que las funciones $sn u$ y $dn u$ tienen periodos de $4K + 4iK'$, mientras que la función $cn u$ tiene el periodo $2K + 2iK'$.

Finalmente vemos las propiedades periódicas con respecto a iK' de las funcio-

nes elípticas. Aplicando nuevamente el teorema de adición de la ecuación (A.11) obtenemos:

$$sn(u + iK') = \frac{nsu}{k}, \quad cn(u + iK') = -\frac{idsu}{k}, \quad dn(u + iK') = -icsu.$$

Al igual que para el caso de los periodos asociados a $K + iK'$ repetimos el procedimiento para obtener, primero en el caso de la función $sn u$ tenemos: $sn(u + 2iK') = sn u$ y $sn(u + 4iK') = sn u$, mientras que para la función $cn u$ resulta: $cn(u + 2iK') = -cn u$ y $cn(u + 4iK') = cn u$, finalmente para el caso de la función $dn u$ vemos que: $dn(u + 2iK') = -dn u$ y $dn(u + 4iK') = dn u$.

Por lo tanto, vemos que las funciones $cn u$ y $dn u$ tienen periodo de $4iK'$ mientras que la función $sn u$ tiene periodo de $2iK'$.

Añadimos a manera de conclusión que utilizando el concepto de las funciones elípticas de Jacobi inversas de manera análoga a lo visto al comienzo del presente apéndice, se puede llegar a resolver integrales como así lo hicimos en el trabajo a la hora de buscar las soluciones analíticas del problema de la cuenta en el aro [13].

Apéndice B

Integral elíptica de primera especie y transformación de Moebius.

Gracias a las integrales elípticas es que podemos resolver analíticamente un polinomio cuártico, en el presente apéndice veremos como resolver la integral de la forma:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_4)}} = \int \frac{d\tau}{\sqrt{P(\tau)}}, \quad (\text{B.1})$$

donde $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4$ y además $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \in \mathbb{R}$.

Para llegar a una integral elíptica de primera especie utilizaremos la transformación lineal de Moebius (y su transformación inversa) definidas como:

$$\tau = \frac{au^2 + b}{cu^2 + d}, \quad u^2 = \frac{b - d\tau}{c\tau - a}, \quad \text{donde : } ad \neq bc \quad (\text{B.2})$$

Esta transformación (en este caso) nos proyecta la recta $(-\infty, \infty)$ a una circunferencia como se aprecia en la figura (B.1).

Para lograr integrar el polinomio $P(\tau)$ necesitamos dividir al mismo en las regiones que se aprecian en la figura (B.2), donde utilizamos las raíces del polinomio para separar las regiones. Nótese que la región entre la raíz τ_1 y la raíz τ_4 (ambas hacia los infinitos) es una sola en la proyección de la circunferencia. Así que aunque I y V se vean como regiones diferentes serán la misma mientras usamos la transformación de Moebius.

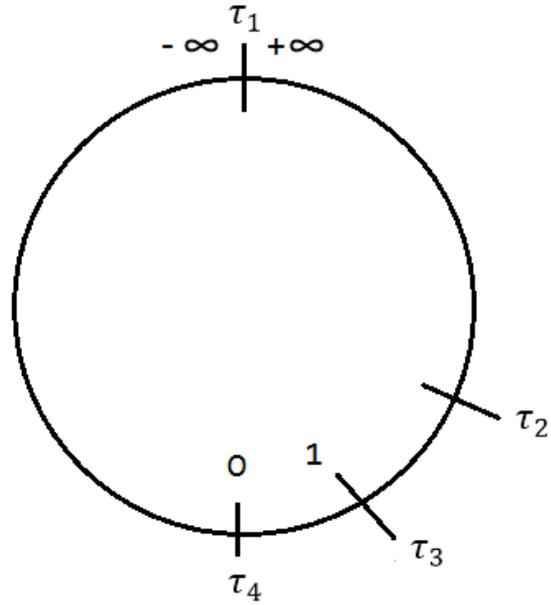


Figura B.1: Proyección de la recta a una circunferencia y mapeo de las raíces del polinomio en dicha circunferencia.

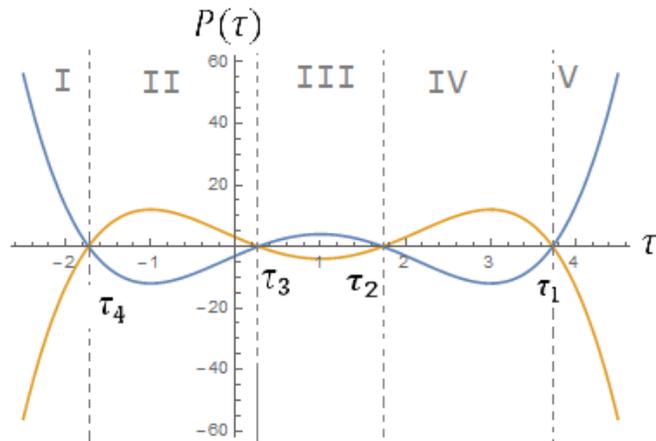


Figura B.2: Polinomio cuártico dividido en regiones, la línea azul corresponde a un $P(\tau)$ mientras que la línea naranja corresponde a $-P(\tau)$

Para facilitar aún más la integración mapearemos tres de las raíces a los valores de $0, 1, \infty$ para lograr integrar en el nuevo intervalo de $(0, 1]$, esto se busca para que los valores tras la transformación de Moebius nos lleven finalmente las integrales elípticas.

En la figura (B.1) podemos notar uno de estos mapeos, donde buscamos integrar en la región II y con la línea naranja de la figura (B.2), es decir debemos mapear las raíces de menor valor (τ_3 y τ_4) hacia 0 y 1 , mientras que llevamos la raíz τ_1 hacia el infinito. La raíz restante τ_2 quedará en un valor dado entre τ_1 y τ_3 que no es de relevancia para el resto del cálculo. Definimos la raíz que llevaremos a estos valores característicos como:

$$\tau^0 = \tau_i \rightarrow u^2 = 0, \quad \tau^1 = \tau_i \rightarrow u^2 = 1, \quad \tau^\infty = \tau_i \rightarrow u^2 = \infty, \quad \tau^c = \tau_i \rightarrow u^2 = \text{constante}.$$

Lo que nos deja con $\tau^0 = b/d$, $\tau^1 = (a+b)/(c+d)$ y $\tau^\infty = a/c$, con algunas operaciones algebraicas podemos llevar a las constantes a, b , y d en términos únicamente de c :

$$a = \tau^\infty c, \quad b = \frac{\tau^\infty - \tau^1}{\tau^1 - \tau^0} \tau^0 c, \quad d = \frac{\tau^\infty - \tau^1}{\tau^1 - \tau^0} c. \quad (\text{B.3})$$

Que también puede ser escrito en forma matricial como:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^\infty & \frac{\tau^\infty - \tau^1}{\tau^1 - \tau^0} \tau^0 \\ 1 & \frac{\tau^\infty - \tau^1}{\tau^1 - \tau^0} \end{pmatrix} c. \quad (\text{B.4})$$

Lo que nos deja a la transformación como:

$$\tau = \frac{\tau^\infty(\tau^1 - \tau^0)u^2 + \tau^0(\tau^\infty - \tau^1)}{(\tau^1 - \tau^0)u^2 + \tau^\infty - \tau^1}. \quad (\text{B.5})$$

Ahora podemos calcular el producto de las diferencias entre τ y sus raíces:

$$(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_4) = \frac{(\det M)^2}{(cu^2 + d)^4} (\tau^c - \tau^0)(\tau^\infty - \tau^1) u^2 (u^2 - 1) \left(1 - \frac{(\tau^\infty - \tau^c)(\tau^1 - \tau^0)}{(\tau^c - \tau^0)(\tau^\infty - \tau^1)} u^2 \right). \quad (\text{B.6})$$

Y puesto que:

$$d\tau = \frac{\det M}{(cu^2 - d)^2} 2udu, \quad (\text{B.7})$$

nos deja con la ecuación:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{P(\tau)}} = \int \frac{2udu}{\sqrt{(\tau^c - \tau^0)(\tau^\infty - \tau^1)u^2(u^2 - 1) \left(1 - \frac{(\tau^\infty - \tau^c)(\tau^1 - \tau^0)}{(\tau^c - \tau^0)(\tau^\infty - \tau^1)}u^2\right)}}, \quad (\text{B.8})$$

lo que nos lleva a la igualdad:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)(\tau_4 - \tau)}} = \frac{2}{\sqrt{(\tau^c - \tau^0)(\tau^\infty - \tau^1)}} \int_0^{\text{sen}\phi} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}, \quad (\text{B.9})$$

donde ya se aprecia la forma de una integral elíptica de primera especie y donde definimos las constantes:

$$k = \sqrt{\frac{(\tau^\infty - \tau^c)(\tau^1 - \tau^0)}{(\tau^c - \tau^0)(\tau^\infty - \tau^1)}}, \quad (\text{B.10})$$

$$\phi = \arcsen \left[\sqrt{\frac{(\tau^\infty - \tau^1)(\tau^0 - \tau)}{(\tau^1 - \tau^0)(\tau - \tau^\infty)}} \right]. \quad (\text{B.11})$$

Y así ya tenemos una forma elegante de resolver el polinomio cuártico planteado, es muy importante recordar algunos detalles a la hora de integrar, se puede integrar tanto de izquierda a derecha y viceversa en la figura (B.2), solamente hay que tener mucho cuidado a la hora de fijar que raíces tomarán el valor de τ^0 , τ^1 , τ^c y τ^∞ , las ecuaciones resultantes tendrán la misma forma pero con las raíces en diferente orden. También hay que tener cuidado de ordenar las raíces de mayor a menor en las restas de las constantes k y ϕ . Finalmente, es menester dejar en claro que el signo cambiado entre las ecuaciones (B.8) y (B.9) en $(u^2 - 1)$ se compensa invirtiendo uno de los cuatro productos en el denominador del integrando original, i.e. cambiando $(\tau - \tau_4)$ por $(\tau_4 - \tau)$.

De esta manera podemos reproducir las ocho integrales en [12] únicamente escogiendo en que región deseamos integrar, siendo los límites de esta región τ^0 y τ^1 y fijando el resto de las raíces como se expuso podemos reproducir las ocho integrales mencionadas.

Apéndice C

Resolución de un polinomio cúbico.

Buscamos encontrar las raíces de un polinomio de tercer orden completo dado por:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (\text{C.1})$$

Con los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Existen diversos métodos o algoritmos para obtener expresiones analíticas de las raíces de un polinomio cúbico, en nuestro caso seguiremos un camino particular que nos llevará a obtener las raíces en base a los coeficientes g_2 y g_3 que son llamados los "invariantes".

Para ello dividimos la ecuación (C.1) entre a y realizamos el cambio de variable $x = y - b/3a$ para obtener el polinomio cúbico reducido:

$$y^3 - (g_2/4)y - (g_3/4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4y^3 - g_2y - g_3 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3) = 0, \quad (\text{C.2})$$

donde las constantes g_2 y g_3 están dadas por los coeficientes originales de la ecuación (C.1) y definimos a e_1, e_2, e_3 como las raíces del polinomio cúbico reducido, los invariantes quedan como:

$$-\frac{g_2}{4} = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad \text{y} \quad -\frac{g_3}{4} = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}. \quad (\text{C.3})$$

Que en términos de las raíces del polinomio cúbico reducido son:

$$\frac{g_2}{2} = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2, \quad \frac{g_3}{4} = e_1 e_2 e_3, \quad \text{con} \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0. \quad (\text{C.4})$$

El definir al polinomio cúbico reducido en términos de los invariantes g_2 y g_3 es algo muy utilizado en otro tipo de funciones elípticas conocidas como las funciones de Weierstrass [16]. Es importante recalcar que el invariante g_2 nos determina ya algunas de las propiedades de las raíces. Si $g_2 = 0$ las raíces que tiene el polinomio son una real y dos complejas conjugadas. En el caso donde $g_2 < 0$ el polinomio nuevamente tendrá una raíz real y dos complejas conjugadas. Mientras que para el caso donde $g_2 > 0$ el polinomio puede tener cualquiera de las tres posibilidades para sus raíces, i.e. una raíz real y dos complejas conjugadas entre sí, tres raíces reales diferentes o una raíz real doble (repetida) y una raíz real simple (diferente).

Para resolver la ecuación cúbica (C.2) realizamos la denominada sustitución de Vieta, i.e. $y = s + g_2/(12s)$ lo cual nos lleva a la ecuación:

$$s^3 - \frac{1}{4}g_3 + \frac{g_2^3}{(12s)^3} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Multipicamos (C.5) por s^3 para obtener una ecuación muy bien conocida, una ecuación cuadrática para s^3 con soluciones:

$$s^6 - \frac{g_3}{4}s^3 + \frac{g_2^3}{(12)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 = \frac{g_3 \pm \sqrt{g_3^2 - g_2^3/27}}{8}. \quad (\text{C.6})$$

En la literatura uno puede encontrar muchas formas de definir al discriminante del polinomio cúbico, que difieren únicamente en cómo se multiplican entre sí los factores constantes del polinomio. En nuestro caso definiremos al discriminante como $\Delta = \frac{a^4}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$, que en términos de los coeficientes del polinomio completo original es $\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$. Como mencionamos hace poco, el signo o valor de g_2 nos define qué tipo de raíces obtendremos del polinomio cúbico pero no de manera completa al menos cuando $g_2 > 0$, por lo que el signo o valor de Δ junto al de g_2 nos definirán las características de las raíces del polinomio cúbico de forma completa. Para el caso donde requeriremos el valor de Δ , es decir cuando $g_2 > 0$, tenemos las siguientes posibilidades; si $\Delta < 0$ tendremos como raíces del polinomio cúbico a una raíz real y dos complejas conjugadas entre sí, si $\Delta = 0$ tendremos

una raíz doble y una raíz simple, finalmente si $\Delta > 0$ tendremos tres raíces reales y diferentes. Cabe notar que para los casos donde $g_2 < 0$ necesariamente $\Delta < 0$ y tendremos una raíz real y dos complejas conjugadas entre sí.

Es importante recalcar que como hay dos soluciones para s^3 en la ecuación (C.6) deberían existir seis raíces para s , pero se puede demostrar que estas seis raíces están relacionadas entre sí de tal manera que solo tres son independientes. Si s_1, s_2 y s_3 son las tres raíces entonces $e_i = s_i + g_2/12s_i$ con $i = 1, 2, 3$, donde e_i son las raíces del polinomio cúbico reducido. Para escribirlos de una manera más sencilla podemos describir las raíces en base a las raíces cúbicas de la unidad: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3}$ y $z_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i2\pi/3}$ resultando:

$$e_i = -\frac{1}{3a} \left(z_i C + \frac{\Delta_2}{z_i C} \right) \quad \text{donde} \quad C \equiv \sqrt[3]{\frac{\Delta_3 \pm \sqrt{\Delta_3^2 - 4\Delta_2^3}}{2}}, \quad (\text{C.7})$$

donde definimos a $\Delta_2 = b^2 - 3ac$ y $\Delta_3 = 2b^3 - 9abc + 27a^2d$. Siguiendo una de las diversas formas de escribir las raíces, en el caso de $g_2 > 0$ los invariantes g_2 y g_3 pueden ser reemplazados por los parámetros $\gamma^2 = \frac{g_2}{12}$ y $\varepsilon = \left(\frac{3}{g_2}\right)^{3/2} g_3$ y tomando la raíz positiva de la ecuación (C.7) las soluciones resultan como:

$$e_i = \gamma (z_i K + (z_i K)^{-1}) \quad \text{donde} \quad K \equiv \sqrt[3]{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \quad (\text{C.8})$$

donde el discriminante queda descrito por $\Delta = 108a^4\gamma^6(1 - \varepsilon^2)$. Puesto que ya fijamos a $g_2 > 0$ el signo de ε esta únicamente determinado por g_3 . Mientras que el signo de Δ esta determinado enteramente por el valor de ε , i.e. $\Delta > 0$ para $-1 < \varepsilon < 1$, $\Delta = 0$ para $\varepsilon^2 = 1$ y $\Delta < 0$ ya sea para $-\infty < \varepsilon < -1$ o para $1 < \varepsilon < \infty$.

Ahora procedemos a realizar una parametrización muy útil para escribir las raíces, dejando al parámetro ε en términos de funciones trigonométricas o hiperbólicas. Si $\Delta \geq 0$ la parametrización conveniente es $\varepsilon = -\cos \varphi$ con $\varphi \in [0, \pi]$. Mientras que para los valores de $\varepsilon \leq -1$, es conveniente tomar el parámetro $\varepsilon = -\cosh(\phi)$ y la fase como $\varphi \equiv -i\phi$ con $\phi \geq 0$. Finalmente para el último caso donde $\varepsilon \geq 1$ tomamos el parámetro $\varepsilon = \cosh(\phi)$ y la fase $\varphi \equiv \pi + i\phi$. Utilizando esta parametrización en (C.8) nos deja a las raíces en terminos de funciones conocidas que se pueden apreciar en el cuadro (C.1).

Raíz	$\varepsilon \leq -1$ ($\Delta \leq 0$)	$-1 \leq \varepsilon \leq 1$ ($\Delta \geq 0$)	$1 \leq \varepsilon$ ($\Delta \leq 0$)
e_1	$\gamma \cosh\left(\frac{\phi}{3}\right) - i\gamma\sqrt{3} \sinh\left(\frac{\phi}{3}\right)$	$2\gamma \cos\left(\frac{\varphi-\pi}{3}\right)$	$2\gamma \cosh\left(\frac{\phi}{3}\right)$
e_2	$\gamma \cosh\left(\frac{\phi}{3}\right) + i\gamma\sqrt{3} \sinh\left(\frac{\phi}{3}\right)$	$2\gamma \cos\left(\frac{\varphi+\pi}{3}\right)$	$-\gamma \cosh\left(\frac{\phi}{3}\right) - i\gamma\sqrt{3} \sinh\left(\frac{\phi}{3}\right)$
e_3	$-2\gamma \cosh\left(\frac{\phi}{3}\right)$	$-2\gamma \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$	$-\gamma \cosh\left(\frac{\phi}{3}\right) + i\gamma\sqrt{3} \sinh\left(\frac{\phi}{3}\right)$
	$\phi = \cosh^{-1}\left(-\left(3/g_2\right)^{3/2}g_3\right)$	$\varphi = \cos^{-1}\left(-\left(3/g_2\right)^{3/2}g_3\right)$	$\phi = \cosh^{-1}\left(\left(3/g_2\right)^{3/2}g_3\right)$

 Cuadro C.1: Raíces del polinomio cúbico reducido (C.2) para $g_2 > 0$

Solamente nos quedan analizar el caso restante de g_2 . Para el caso donde $g_2 < 0$ redefinimos a gamma como $\delta^2 = -\frac{g_2}{12}$ y $\epsilon = \left(-\frac{3}{g_2}\right)^{3/2} g_3$, resultando:

$$e_i = \delta \left(z_i L + (z_i L)^{-1}\right) \quad \text{donde} \quad L \equiv \sqrt[3]{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 1}}. \quad (\text{C.9})$$

Notamos que cuando $g_2 < 0$ el discriminante Δ siempre es negativo. Para encontrar las expresiones parametrizadas de las raíces como hicimos para $g_2 > 0$, parametrizaremos con respecto a funciones hiperbólicas, es conveniente usar la parametrización como $\epsilon = -\sinh(\psi)$ en el intervalo $\epsilon \leq -1$ y $\epsilon = \sinh(\psi)$ en el intervalo $\epsilon \geq 1$. Estas parametrizaciones se pueden obtener de manera directa desde las expresiones anteriores dadas para ε si tomamos las fases $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} + i\phi$ y $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} - i\phi$ respectivamente. Las raíces resultantes se pueden apreciar en el cuadro (C.2).

Raíz	$\epsilon \leq -1$ ($\Delta \leq 0$)	$1 \leq \epsilon$ ($\Delta \leq 0$)
e_1	$\delta \sinh\left(\frac{\psi}{3}\right) - i\delta\sqrt{3} \cosh\left(\frac{\psi}{3}\right)$	$-\delta \sinh\left(\frac{\psi}{3}\right) - i\delta\sqrt{3} \cosh\left(\frac{\psi}{3}\right)$
e_2	$-2\delta \sinh\left(\frac{\psi}{3}\right)$	$2\delta \sinh\left(\frac{\psi}{3}\right)$
e_3	$\delta \sinh\left(\frac{\psi}{3}\right) + i\delta\sqrt{3} \cosh\left(\frac{\psi}{3}\right)$	$-\delta \sinh\left(\frac{\psi}{3}\right) + i\delta\sqrt{3} \cosh\left(\frac{\psi}{3}\right)$
	$\psi = \sinh^{-1}\left(-\left(-3/g_2\right)^{3/2}g_3\right)$	$\psi = \sinh^{-1}\left(\left(-3/g_2\right)^{3/2}g_3\right)$

 Cuadro C.2: Raíces del polinomio cúbico reducido (C.2) para $g_2 < 0$

Por lo que finalmente podemos concluir que las raíces de un polinomio cúbico completo vienen dadas por:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \quad \text{Con las raíces: } x_i = e_i - b/3a. \quad (\text{C.10})$$

Apéndice D

Resolución de un polinomio cuártico.

Buscamos obtener las raíces de un polinomio de cuarto orden completo dado por:

$$A\tau^4 + B\tau^3 + C\tau^2 + D\tau + E = 0, \quad (\text{D.1})$$

donde nuevamente, los coeficientes del polinomio A, B, C, D y E son reales. Existen varios métodos para resolver el polinomio cuártico, el que desarrollaremos en el presente apéndice y usamos durante todo el trabajo consiste en reducir el polinomio para llevarlo a un polinomio cúbico llamado "resolvente", cuyas soluciones nos permiten factorizar al polinomio cuártico en dos ecuaciones cuadráticas reales, siendo estas soluciones las raíces del polinomio cuártico [17].

Primero dividimos a la ecuación (D.1) entre A , y realizamos el cambio de variable $\tau = \rho - B/4A$ obteniendo un polinomio reducido a:

$$\rho^4 + \rho^2 \left(\frac{C}{A} - \frac{3B^2}{8A^2} \right) + \rho \left(\frac{D}{A} - \frac{BC}{2A^2} + \frac{B^3}{8A^3} \right) + \frac{E}{A} - \frac{BD}{4A^2} + \frac{B^2C}{16A^3} - \frac{3B^4}{256A^4} = 0. \quad (\text{D.2})$$

O bien:

$$\rho^4 + \rho^2 P + \rho Q + R = 0, \quad (\text{D.3})$$

donde definimos las constantes:

$$P = \frac{C}{A} - \frac{3B^2}{8A^2}, \quad Q = \frac{D}{A} - \frac{BC}{2A^2} + \frac{B^3}{8A^3}, \quad R = \frac{E}{A} - \frac{BD}{4A^2} + \frac{B^2C}{16A^3} - \frac{3B^4}{256A^4}. \quad (\text{D.4})$$

El polinomio de la ecuación (D.3) se puede factorizar como el producto de polinomios cuadráticos de la forma:

$$\rho^4 + \rho^2 P + \rho Q + R = (\rho^2 + u\rho + v)(\rho^2 - u\rho + w) = \rho^4 + \rho^2(v + w - u^2) + \rho u(w - v) + vw = 0. \quad (\text{D.5})$$

Descrito por las tres ecuaciones:

$$P = v + w - u^2, \quad Q = u(w - v), \quad R = uv. \quad (\text{D.6})$$

Asumiendo que conocemos la forma de $u = u(P, Q, R)$, podemos calcular las otras dos constantes mediante las ecuaciones:

$$w = \frac{1}{2} \left(P + \frac{Q}{u} + u^2 \right), \quad v = \frac{1}{2} \left(P - \frac{Q}{u} + u^2 \right). \quad (\text{D.7})$$

Por lo que las raíces del polinomio cuártico reducido (D.2) se obtienen de las raíces de los dos polinomios cuadráticos de (D.7):

$$\rho_{1,2} = -\frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4v} = -\frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{-u^2 - 2P + \frac{2Q}{u}}, \quad (\text{D.8})$$

$$\rho_{3,4} = \frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4w} = \frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{-u^2 - 2P - \frac{2Q}{u}}, \quad (\text{D.9})$$

donde las raíces del polinomio cuártico original (D.1) resultan:

$$A\tau^4 + B\tau^3 + C\tau^2 + D\tau + E = A(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_4), \quad \text{con: } \tau_i = \rho_i - \frac{B}{4A}. \quad (\text{D.10})$$

Ahora bien, el único problema a resolver es obtener la expresión de $u = u(P, Q, R)$. Para ello elevamos al cuadrado la primera ecuación en (D.6) y dejando al lado derecho

en términos de P, Q y R usando las otras dos ecuaciones, es decir:

$$P^2 = (v+w-u^2)^2 = (w-v)^2 + 4vw + u^4 - 2u^2(v+w) = \frac{Q^2}{u^2} + 4R - u^4 - 2u^2P. \quad (\text{D.11})$$

O bien:

$$u^6 + 2Pu^4 + (P^2 - 4R)u^2 - Q^2 = 0. \quad (\text{D.12})$$

Notamos que podemos reescribir a la ecuación (D.12) como un polinomio cúbico (el denominado cúbico resolvente) con el cambio de variable $x = u^2$:

$$x^3 + 2Px^2 + (P^2 - 4R)x - Q^2 = 0. \quad (\text{D.13})$$

Ahora podemos notar la importancia de haber descrito con detalle la resolución de un polinomio cúbico en el apéndice C. Siguiendo ese proceder introducimos otro cambio de variable $x = y - 2P/3$ para obtener el polinomio cúbico reducido:

$$y^3 - \frac{1}{3}(P^2 + 12R)y - \frac{1}{27}(2P^3 - 72PR + 27Q^2) = 0, \quad (\text{D.14})$$

donde podemos apreciar ya los invariantes g_2 y g_3 , que en términos del polinomio cuártico original (D.1) son:

$$g_2 = \frac{4}{3}(P^2 + 12R) = \frac{4}{3A^2}(C^2 + 12AE - 3BD), \quad (\text{D.15})$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(2P^3 - 72PR + 27Q^2)$$

$$g_3 = \frac{4}{27A^3}(2C^3 - 9BCD + 27B^2E + 27AD^2 - 72ACE). \quad (\text{D.16})$$

El discriminante del polinomio cúbico reducido es:

$$\Delta = 16(P^2 - 4R)^2R - 4(P^2 - 36R)PQ^2 - 27Q^4. \quad (\text{D.17})$$

O en términos de los coeficientes del polinomio cuártico original de la ecuación (D.1) es:

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{1}{A^6} [& + (B^2C^2 - 4B^3D + 18ABCD - 4AC^3 - 27A^2D^2)D^2 \\ & + (16AC^3 - 4B^2C^2 + 18B^3D - 80ABCD + 144A^2D^2)CE \\ & + (144AB^2C - 6AB^2D^2 - 27B^4 - 128A^2C^2 - 192A^2BD + 256A^3E)E^2]. \end{aligned} \quad (D.18)$$

De manera similar al apéndice C, donde la naturaleza de las raíces del polinomio cúbico vienen descritas por los signos de g_2 y Δ , en el caso que nos concierne podemos ver la naturaleza de las raíces del polinomio (D.1) en base a ciertos parámetros. En la literatura se puede encontrar esto bajo varios parámetros, en nuestro caso escogeremos unos parámetros de alguna manera acordes con los del polinomio cúbico (D.13).

Necesitaremos observar los signos de g_2 y Δ nuevamente, que vienen descritos por las ecuaciones (D.15) y (D.17)-(D.18) respectivamente. Además requeriremos de otros parámetros extra, los cuales son P, Q (Definidos en (D.4)) y la cantidad $P^2 - 4R = \frac{1}{16A^4}(16A^2C^2 - 64EA^3 + 16BDA^2 - 16ACB^2 + 3B^4)$. La naturaleza de las raíces viene descrita en el cuadro (D.1).

Δ	P	$P^2 - 4R$	Condiciones Extra	Naturaleza de las raíces
> 0	< 0	< 0		Cuatro reales y diferentes.
> 0	> 0			Dos pares de raíces complejas conjugadas
> 0		> 0		Dos pares de raíces complejas conjugadas
$= 0$	< 0	< 0	$g_2 \neq 0$	Una real doble y dos reales simples
$= 0$		> 0		Una real doble y dos complejas conjugadas
$= 0$	> 0	$\neq 0$		Una real doble y dos complejas conjugadas
$= 0$	> 0		$Q \neq 0$	Una real doble y dos complejas conjugadas
$= 0$		$\neq 0$	$g_2 = 0$	Una real triple y una real simple
$= 0$	< 0	$= 0$		Dos reales dobles
$= 0$	> 0	$= 0$	$Q = 0$	Dos pares de raíces complejas conjugadas
$= 0$		$= 0$	$g_2 = 0$	Dos pares de raíces complejas conjugadas
< 0				Dos reales diferentes y dos complejas conjugadas

Cuadro D.1: Naturaleza de las raíces del polinomio cuártico en base a los factores mencionados.

Bibliografía

- [1] T. E. Baker and A. Bill., “Jacobi elliptic functions and the complete solution to the bead on the hoop problem.,” *American Journal of Physics*, vol. 80, pp. 506–513, 2012.
- [2] J. R. Taylor, *Classical Mechanics*. University Science, Sausalita., 2005.
- [3] S. Dutta and S. Ray., “Bead on a rotating circular hoop: a simple yet feature-rich dynamical system,” *Department of Physics, Jadavpur University, Calcutta 700 032, India.*, pp. 23–24, 2011.
- [4] T. E. Baker, “Superconducting-magnetic proximity systems and mathematical analogies to classical mechanics,” *Master’s thesis, California State University Long Beach*, 2012.
- [5] G. Fletcher, “A mechanical analog of first- and secon-order phase transitions,” *Am. J. Physics*, vol. 65, 1997.
- [6] J. Sivardiére, “A simple model exhibiting a spontaneous symmetry breaking.,” *American Journal of Physics*, vol. 51, p. 1016, 1983.
- [7] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of condensed matter physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [8] L. Landau and Lifschitz, *Statistical Physics*. Pergamon, London, 1959.
- [9] H. W. Dickinson, *James: Watt Craftsman & Engineer*. Augustus M. Kelley Publishers, New York, 1967.

-
- [10] J. Armitage and W. Eberlein, *Elliptic Functions*. Cambridge University Press., 2006.
- [11] D. F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*. Springer Verlag, 1989.
- [12] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press of Elsevier, USA. Seventh Edition., 2007.
- [13] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicist*. Springer - Verlag, Berlin Heidelberg GMBH. First Edition., 1954.
- [14] R. Gilmore., *Lie Groups, Physics, and Geometry*. Cambridge University Press., 2008.
- [15] E. Whittaker and G. Watson, *A course of Modern Analysis*. Cambridge at the University Press, 1920.
- [16] A. J. Brizard, “A primer on elliptic functions with applications in classical mechanics,” *European Journal of Physics*, vol. 30, p. 729, 2009.
- [17] S. Neumark, *Solutions of Cubic and Quartic Equations*. Pergamon Press, 1965.