

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
POSGRADO EN FÍSICA

Modificaciones inducidas por la no-conmutatividad en la  
teoría de monopolos magnéticos

Tesis que presenta:

M. en C. Daniel Martínez Carbajal

Para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias (Física)



**Casa abierta al tiempo**

Asesor :

Dr. Marco A. Maceda Santamaría.

Sinodales:

Dr. Cryssomalis Chryssomalakos

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl

Dr. Juan Manuel Romero Sanpedro

Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos

Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría.

Fecha: 29 de Octubre del 2019

Salón: EP-001



## AGRADECIMIENTOS

Con especial gratitud al Doctor Marco Maceda en primera instancia por la oportunidad de trabajar junto a él para desarrollar este doctorado, por el tiempo dedicado a mi formación, a las múltiples discusiones, aportes, recomendaciones y por la excelente dirección de esta tesis. Sin menos protagonismo es importante destacar un factor importante durante estos años de formación que nos llevo a obtener un fructífero trabajo y es la gran calidad humana del Dr. Marco, muchas gracias por el apoyo académico y personal.

De esta forma quiero extender mi agradecimiento al Dr. Hugo Morales por el tiempo brindado, sus sugerencias y recomendaciones en este proceso de evaluación.

Sin exentar este agradecimiento a los doctores Juan Manuel Romero, Chryssomalis y Luis Fernando Urrutia por su tiempo en la revisión de esta tesis, los comentarios y consejos que sin duda han aportado en la mejora de esta tesis, les brindo mi respeto por su profesionalismo.

Gracias a mis amistades, compañeros, nuevos y de antaño. Por sus pláticas e interés en mis proyectos, el apoyo, compañía desinteresada, y para algunos en específico por sus discusiones y aportes.

Espero llenar de satisfacción y orgullo a mis padres Reginalda y Armando, gracias por su paciencia y confianza en mi persona.

Gracias a cada Actor, quizá sin percatarme en mí lapso formativo pudieron influir de manera positiva en la conclusión de esta tesis.



# Resumen

En este trabajo se analizan deformaciones no-conmutativas aplicadas a monopolos magnéticos en dos casos de relevancia física:

1. Condición de cuantización de Dirac en un espacio no-conmutativo
2. La dinámica de monopolos magnéticos a bajas energías en un espacio no-conmutativo.

En el primer problema analizaremos las consecuencias de la no-conmutatividad en el monopolo de Dirac. Para esto empezaremos por estudiar la deformación no-conmutativa en la electrodinámica de Maxwell con el fin de analizar la condición de cuantización de Dirac posteriormente, es decir, analizaremos bajo que condiciones la cuantización de la carga eléctrica es compatible con introducir no-conmutatividad en las coordenadas espaciales.

El segundo problema que abordaremos en esta tesis está relacionado con la dinámica de la interacción de monopolos magnéticos en teorías de norma no abelianas. El enfoque que seguiremos está basado en una versión no-conmutativa del análisis que utilizó Manton para describir la dinámica de las interacciones de algunas configuraciones de monopolos en el límite de bajas energías. Esta idea se basa en truncar el espacio de configuraciones, el cual es dimensionalmente infinito para el sistema Yang-Mills-Higgs, a un sistema dinámico con un Lagrangiano de dimensión finita. De este modo, la dinámica de un sistema de multi-monopolos con un número infinito de grados de libertad se puede reducir a la de unas pocas coordenadas colectivas de una configuración tipo solitón<sup>1</sup>, en un espacio auxiliar denominado espacio de parámetros (moduli space). Este espacio auxiliar está constituido de una variedad Riemanniana, además de esto una descripción general de la dinámica de baja energía de los monopolos BPS en el espacio de parámetros se obtiene por medio de la métrica de Atiyah-Hitchin, cuya forma asintótica es la métrica Taub-NUT. Por lo tanto, nos enfocaremos en implementar una deformación no conmutativa de la métrica de Atiyah-Hitchin que puede ser utilizada para analizar la dinámica de monopolos magnéticos en el límite de bajas energías en el contexto no conmutativo.

---

<sup>1</sup>La definición de solitones es muy variada, aquí entenderemos por solitones como las soluciones clásicas de las ecuaciones de campo no lineales que poseen energía finita.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I Introducción a las teorías no conmutativas</b>	<b>11</b>
<b>2. Introducción a las teorías no conmutativas</b>	<b>13</b>
2.1. Transformación de Weyl-Wigner . . . . .	13
2.2. Producto Groenewold-Moyal . . . . .	16
<b>3. Teoría de campo no conmutativa</b>	<b>17</b>
3.1. Teorías de norma no conmutativas . . . . .	18
3.2. El mapeo de Seiberg-Witten . . . . .	20
3.3. Soluciones al mapeo de Seiberg-Witten . . . . .	23
3.3.1. Solución a primer y segundo orden . . . . .	24
3.3.2. Solución a todos los órdenes . . . . .	27
3.3.3. El mapeo de Seiberg-Witten para los campos de materia . . . . .	28
3.3.4. Representación fundamental . . . . .	28
3.3.5. Representación adjunta . . . . .	31
<b>II El monopolos de Dirac</b>	<b>33</b>
<b>4. Monopolos Magnéticos</b>	<b>35</b>
4.1. Monopolos en electrodinámica clásica . . . . .	35
4.2. Monopolos en la teoría cuántica . . . . .	36
4.3. El monopolos de Dirac . . . . .	38
4.4. Transformaciones de la cuerda de Dirac . . . . .	40
4.5. Condición de cuantización de la carga . . . . .	42
4.6. El monopolos magnético abeliano de Wu-Yang . . . . .	44
4.7. Monopolos Magnético y el Momento Angular . . . . .	46
4.8. Condición de cuantización de Dirac para el caso de los dyones . . . . .	48
4.9. La condición de cuantización de Dirac en el enfoque de la integral de trayectoria de Feynman . . . . .	49

<b>5. Condición de cuantización de Dirac no conmutativa</b>	<b>53</b>
5.1. Deformación Moyal del potencial de Wu-Yang . . . . .	53
5.2. Las ecuaciones de Maxwell no conmutativas a primer y segundo orden . . . . .	56
5.3. Solución a las ecuaciones de Maxwell no conmutativas . . . . .	59
5.4. La cuantización de Dirac y el parámetro $\widehat{A} = \widehat{A}_\lambda(\lambda, A; \theta)$ no conmutativo . . . . .	63
5.5. Conclusiones . . . . .	65
<b>III Monopolos magnéticos en teorías de norma no abelianas</b>	<b>67</b>
<b>6. El Monopolo de 't Hooft-Polyakov</b>	<b>69</b>
6.1. El modelo de Georgi-Glashow $SU(2)$ . . . . .	69
6.1.1. El Monopolo Wu-Yang no Abelianano . . . . .	69
6.1.2. El modelo de Georgi-Glashow . . . . .	71
6.1.3. Clasificación topológica de las soluciones . . . . .	73
6.1.4. Definición de carga magnética . . . . .	75
6.1.5. El Ansatz de 't Hooft-Polyakov . . . . .	77
6.1.6. Dyones . . . . .	80
6.2. El límite de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield . . . . .	81
6.2.1. Norma de modo cero y la carga eléctrica del Dyon . . . . .	84
6.3. Interacción de monopolos magnéticos . . . . .	86
6.3.1. Monopolo en campo magnético externo . . . . .	86
6.3.2. La energía de interacción de los monopolos . . . . .	88
6.3.3. Interacción clásica de dos dyones ampliamente separados . . . . .	89
6.4. El espacio de parámetros y la dinámica multi-monopolos a bajas energías . . . . .	93
6.4.1. El Lagrangiano de modos cero . . . . .	93
6.4.2. La dinámica de un monopolo a bajas energías . . . . .	94
6.4.3. El espacio de parámetros y su métrica . . . . .	97
<b>7. El espacio de parámetros de los monopolos BPS</b>	<b>101</b>
7.1. La configuración de n-monopolos a bajas energías . . . . .	102
7.2. Propiedades generales del espacio de parámetros de los monopolos magnéticos . . . . .	102
7.2.1. La métrica en el espacio de parámetros . . . . .	104
7.3. El espacio de parámetros de monopolos bien separados . . . . .	107
7.4. El tensor métrico en el espacio $\mathcal{M}_2$ . . . . .	108
7.5. Dispersión a baja energía de dos monopolos . . . . .	111
<b>8. Deformación NC del potencial de Kähler</b>	<b>115</b>
8.1. Introducción . . . . .	115
8.2. Deformación Moyal de la primera ecuación de heavenly . . . . .	118
8.3. Sistemas Integrables . . . . .	120
8.3.1. Las ecuaciones auto-duales de Einstein en el vacío . . . . .	121
8.3.2. Propiedades del potencial de Kähler deformado $\widehat{\Omega}(\theta)$ . . . . .	123
8.4. Gravedad No-Conmutativa . . . . .	125
8.4.1. Campos de norma deformados . . . . .	125
8.5. El potencial de Kähler deformado . . . . .	127
8.5.1. Soluciones para el potencial de Kähler a primer orden . . . . .	129

8.6. Deformación de una métrica $\eta$ -auto-dual de Riemann . . . . .	131
8.6.1. Generalización de los resultados de Boyer-Finley . . . . .	132
8.6.2. Generalización al caso no-conmutativo . . . . .	133
8.6.3. El espacio-tiempo de Atiyah-Hitchin en coordenadas complejas . . . . .	134
8.7. Conclusiones . . . . .	136
<b>9. Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>137</b>
<b>A. El parámetro de norma <math>\widehat{\Lambda}_\lambda</math></b>	<b>143</b>
A.1. El parámetro de norma $\widehat{\Lambda}_\lambda$ para el monopolo magnético $U(1)_*$ . . . . .	143
<b>B. La ecuación de Schrödinger en campo electromagnético</b>	<b>148</b>
<b>C. Representaciones de <math>SU(2)</math></b>	<b>150</b>
<b>D. Cuaterniones</b>	<b>151</b>
<b>E. Geometría compleja</b>	<b>153</b>
E.1. Estructura compleja e integrabilidad . . . . .	153
E.2. Variedades Kähler e hiper-Kähler . . . . .	154
<b>IV Artículos Publicados</b>	<b>163</b>



# Capítulo 1

## Introducción

La no conmutatividad o geometría no conmutativa juega un papel importante en la física teórica moderna, es decir, sus aplicaciones van desde la mecánica cuántica hasta la relatividad general e incluso la mecánica clásica [1] puede ser reformulada en términos de álgebras no conmutativas.

El primer ejemplo de un espacio no conmutativo que fue claramente reconocido como tal está basado en la cuantización del espacio fase de la mecánica clásica no relativista. De hecho, en 1926, Dirac obtuvo en sus trabajos [2, 3] la estructura algebraica del espacio de fases cuántico, postulando una regla de cuantización para una teoría clásica, que consiste en la substitución del paréntesis de Poisson de dos observables clásicos por  $i\hbar$  veces el conmutador de los operadores cuánticos asociados. De esta manera, las coordenadas del espacio fase  $x$  y  $p$  se transforman en operadores hermíticos  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ , cumpliendo las relaciones de conmutación canónicas<sup>1 2</sup>:

$$\begin{aligned}[\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= i\hbar\delta^{ij}, \\[\hat{x}^i, \hat{x}^j] &= 0, \\[\hat{p}^i, \hat{p}^j] &= 0.\end{aligned}\tag{1.0.1}$$

Estas relaciones de conmutación implican una relación de incertidumbre entre los valores propios (autovalores) de los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  dando lugar a la relación de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta x^i \Delta p^i \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Este espacio fase cuántico se vuelve difuso y la noción de un punto en él es reemplazada por el de una *celda de Planck* de área  $\hbar/2$ .

Recientemente en la literatura se han hecho muchos trabajos intentando estudiar las consecuencias de cambiar o deformar el álgebra de Heisenberg (1.0.1), dando lugar a una amplia área de investigación conocida como geometría no conmutativa y en la cual existe una diversidad de enfoques que implican una modificación de esta álgebra (álgebra de Heisenberg). Esta álgebra de operadores

---

<sup>1</sup>En la mecánica cuántica, la no conmutatividad se define por el conmutador  $[\cdot, \cdot]$  ( corchete de Lie ) y el álgebra de conmutación que resulta de este. El conmutador de dos operadores se define de la siguiente manera:  $[A, B] = AB - BA$  y cualitativamente, es una medida de la compatibilidad de dos operadores. Si dos operadores no conmutan, entonces no comparten estados propios simultáneamente y se dice que estos son no diagonalizables simultáneamente.

<sup>2</sup>Estas relaciones de conmutación son conocidas como el álgebra de Heisenberg.

(1.0.1) fue la que inspiró la idea más radical de substituir las coordenadas espacio-temporales  $x^\mu$  por operadores no conmutativos  $\hat{x}^\mu$ .

De forma general, por espacio-tiempo no conmutativo se entiende el álgebra generada por operadores hermiticos de posición  $\hat{x}^\mu$  que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{1.0.2}$$

donde  $\theta^{\mu\nu}$  es una matriz antisimétrica que puede ser constante o una función de los operadores posición y que tiene dimensiones de longitud al cuadrado. De la misma manera como sucede en la mecánica cuántica, para  $\theta^{\mu\nu}$  constante, unas relaciones de conmutación del tipo (1.0.2) dan lugar a un principio de incertidumbre generalizado

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{|\theta^{\mu\nu}|}{2}.$$

De esta manera, la idea de punto del espacio tiempo es reemplazada por la de *celda de Planck* de área mínima  $|\theta^{\mu\nu}|/2$ , es decir el espacio-tiempo carece de puntos a pequeña escala. Entonces, se puede pensar que las coordenadas  $x^\mu$  que observamos corresponden a algún tipo de promedio sobre escalas del orden del área de Planck; de esta manera, el espacio-tiempo se vuelve así difuso.

Históricamente la idea de que las coordenadas espaciales no conmutativas se le puede atribuir a Heisenberg, quien escribió una carta a Peierls en la cual le sugirió que introducir un principio de incertidumbre de coordenadas podría mejorar el problema de las auto-energías infinitas. Peierls también le planteó esta sugerencia a Pauli, quien posteriormente se lo contó a Oppenheimer que a su vez se lo contó a Snyder, quien escribió el primer artículo sobre el tema, es decir, el primer trabajo en el cual se formuló matemáticamente un modelo de teoría de campos que introduce la no-conmutatividad de las coordenadas espacio-temporales fue en 1947 [4]. Su motivación no era entender la naturaleza del espacio-tiempo a distancias muy pequeñas, sino encontrar un argumento que justifique la introducción de una longitud mínima  $l$  en el espacio-tiempo que podría funcionar como un parámetro regulador de divergencias que plagaban las teorías de campo en aquel momento. De manera más precisa, el objetivo de Snyder era introducir un espacio-tiempo discreto con el objetivo de hacer finitas las integrales involucradas en procesos de dispersión de QED. Para esto es necesario truncar la integración en esta longitud mínima  $l$ , lo que introduce una escala externa en la teoría llamado cutoff ultravioleta.

Consideremos el ejemplo de la teoría  $\lambda\phi^4$  definida sobre un espacio-tiempo euclídeo. La predicción de magnitudes observables implica, al orden de un bucle (lazo), el cálculo de las contribuciones de los diagramas tipo renacuajo y tipo pez, las cuales son respectivamente

$$\begin{aligned} \text{---} \circ \text{---} & \propto \int d^4p \frac{1}{p^2 + m^2}, \\ \text{---} \circ \text{---} & \propto \int d^4p \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p - q)^2 + m^2}. \end{aligned} \tag{1.0.3}$$

Estas integrales sobre todo el espacio son ciertamente divergentes, debido al comportamiento de los integrandos para grandes valores del momento (región UV). Sin embargo, si la integración fuera limitada a la región  $p^2 < \Lambda^2 \sim l^{-2}$ , la integral resultará convergente.

Como fue sugerido por Snyder [4], la no conmutatividad implica necesariamente una escala por debajo de la cual no existe la noción de punto, y es posible que al introducirla en una teoría de campos proporcione un cutoff ultravioleta efectivo, es decir, una distancia mínima en el espacio tiempo a la que es sensible la teoría, eliminando así los infinitos.

Sin embargo, la idea de Snyder cayó en el olvido, principalmente debido al éxito que tuvo el programa de renormalización de la teoría cuántica de campos, el cual reveló ser apropiado para predecir valores numéricos finitos de manera muy precisa para las magnitudes observables en electrodinámica cuántica, sin recurrir a la no conmutatividad.

Como se mencionó anteriormente existen diversos enfoques que permiten implementar la idea de no conmutatividad. En 1927 Weyl [5] estudió el problema de la cuantización de una función clásica  $f$  que vive en el espacio fase usual, es decir, el problema consistía en asociar a observables clásicos un operador cuántico. Esto es, se desea asociar un operador cuántico  $Op(f)$  a una función  $f$  la cual depende de las coordenadas  $x$  y sus momentos canónicos conjugados  $p$  del espacio fase clásico. Además de esto introdujo una correspondencia entre una enorme clase de operadores en el espacio de Hilbert y una gran familia de funciones sobre el espacio fase. El problema fundamental lo constituía asignar un operador Hermitiano a expresiones clásicas del tipo  $p^2x$ , las cuales, en el contexto de la mecánica cuántica pueden corresponder a alguna de las siguientes expresiones  $\hat{p}^2\hat{x}$ ,  $\hat{x}\hat{p}^2$ ,  $\hat{p}\hat{x}\hat{p}$ , donde  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  son los operadores de posición y momento cuánticos que satisfacen la relación de conmutación (1.0.1). El resultado importante obtenido por Weyl fue que a una cantidad clásica

$$f(p, x) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{p\sigma + x\tau} \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

se le podía asociar un operador Hermitiano

$$F(\hat{p}, \hat{x}) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{\hat{p}\sigma + \hat{x}\tau} \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau.$$

Posteriormente, en 1932 Wigner dio una expresión para una función de distribución sobre el espacio fase, la cual se puede interpretar como el equivalente cuántico de una densidad de probabilidad en el espacio fase. Groenewold (1946) y Moyal (1949) [6, 7] inspeccionaron la analogía de la transformación de Weyl para la relación de conmutación (1.0.2), es decir, analizaron el operador de Weyl asociado al producto usual de funciones  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ , obteniendo como resultado

$$\hat{W}_f(\hat{x})\hat{W}_g(\hat{x}) = \hat{W}_{f*g}(\hat{x}),$$

donde  $\hat{W}_f(\hat{x})$  y  $\hat{W}_g(\hat{x})$  son los operadores asociados a las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  respectivamente. Entonces  $\hat{W}_{f*g}(\hat{x})$  es el operador asociado al producto de operadores  $\hat{W}_f(\hat{x})\hat{W}_g(\hat{x})$  donde

$$(f * g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})e^{Z(\mathbf{p}^{(x)}, \mathbf{p}^{(y)}, \mathbf{x}, \theta, \nabla\theta, \dots)} g(\mathbf{y})|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}}, \quad (1.0.4)$$

y  $Z$  es una función determinada por las relaciones de conmutación entre las coordenadas  $x^\mu$ . El efecto de introducir no-conmutatividad en las posiciones se ve reflejado así en la introducción de un nuevo producto- $*$  en las funciones con variables conmutativas  $f$  y  $g$ .

El primer tipo de producto- $*$  que se puede analizar es el denominado canónico, definido por la condición de que los parámetros no conmutativos  $\theta^{\mu\nu}$  sean constantes. Este caso fue discutido en los trabajos de Groenewold y Moyal [6, 7] en el contexto de la Mecánica Cuántica. Bajo la condición anterior, la función  $Z$  adquiere una expresión bastante simple

$$Z_{GM}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \theta) = \frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} p'_\nu.$$

En consecuencia el producto-\* (2.2.1) está dado por <sup>3</sup>

$$(f *_{GM} g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}} g(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}}. \quad (1.0.5)$$

Con el fin de ilustrar la idea de este nuevo producto Moyal  $*_{GM}$  inducido por la no conmutatividad entre los operadores de posición definamos el siguiente corchete

$$[x^\mu, x^\nu]_{*_{GM}} := x^\mu *_{GM} x^\nu - x^\nu *_{GM} x^\mu.$$

Usando la definición del producto Moyal  $*_{GM}$  (2.2.1) obtenemos

$$[x^\mu, x^\nu]_{*_{GM}} = x^\mu x^\nu + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} - x^\nu x^\mu - \frac{i}{2} \theta^{\nu\mu} = i\theta^{\mu\nu}.$$

Entonces tenemos que la relación de conmutación generalizada (1.0.2) se puede escribir como

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = [x^\mu, x^\nu]_{*_{GM}} = i\theta^{\mu\nu}.$$

Esto es, la no-conmutatividad de los operadores  $\hat{x}^\mu$  utilizando el producto usual es mapeada a variables conmutativas pero que se rigen por el producto  $*_{GM}$  para su multiplicación.

Posteriormente, el producto Moyal  $*_{GM}$  condujo el desarrollo del formalismo de cuantización por deformación. Esta nueva teoría, escrita en su forma final, fue introducida por Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz y Sternheimer como un procedimiento alternativo a la cuantización canónica y a la cuantización por medio de la integral de trayectoria en mecánica cuántica [8, 9]. De manera similar al formalismo de la integral de trayectoria, la cuantización por deformación usa la estructura algebraica de los sistemas clásicos en lugar de la teoría de operadores.

Las ideas de la geometría no conmutativa fueron revividas desde un punto de vista matemático por los matemáticos Connes en 1986 y Woronowicz en 1987, quienes generalizaron la noción de una estructura diferencial al caso no conmutativo, es decir a álgebras arbitrarias. Junto con la definición de una integración generalizada, esto llevó a la descripción algebraica del “espacio tiempo no conmutativo”, permitiendo definir en primera instancia teorías de campo en un espacio-tiempo no conmutativo. Por algún tiempo, las aplicaciones físicas de estas ideas se basaron en la interpretación geométrica del Modelo Estándar y sus múltiples campos y constantes de acoplamiento [10, 11, 12].

Por otra parte, en 1990, Filk comenzó a examinar el desarrollo perturbativo de un modelo de Teoría Cuántica de Campos (TCC) para un campo escalar autointeractuante sobre el plano no conmutativo. La formulación en este espacio está definida por la relación de conmutación entre los operadores (1.0.2), donde el parámetro no conmutativo  $\theta^{\mu\nu}$  es una constante. Filk encontró que en el espacio dual (en el sentido de Fourier) a las coordenadas  $x^\mu$ , el producto Moyal se reduce a la introducción de una fase  $e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu}$  en las reglas de Feynman para el vértice, donde  $p_\mu$  son los momentos asociados a las patas de dicho vértice. Como consecuencia, surgen a nivel diagramático dos tipos de diagramas: el de los diagramas planares y el de aquellos no-planares. Para los primeros, las fases ligadas a momentos internos se cancelan y la estructura de divergencias de la contribución es idéntica a la de los diagramas de la teoría conmutativa subyacente ( $\theta^{\mu\nu} = 0$ ). Los diagramas no planares muestran una estructura distinta.

<sup>3</sup>Para obtener este producto conocido como producto Moyal  $*_{GM}$  se usa la representación de Schrödinger para los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ , esto es,  $\hat{x} \rightarrow x^\mu$  y  $\hat{p} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ .

Para el caso de la teoría  $\lambda\phi_*^4$ , se tienen dos diagramas de autoenergía a un lazo, uno planar y uno no-planar. El primero contribuye en la forma

$$\Gamma_{1\text{planar}} \propto \int d^4p \frac{1}{p^2 + m^2},$$

correspondiente al primer diagrama de la ecuación (1.0.3). El diagrama no-planar, en cambio, posee una fase que alentadoramente lo vuelve más convergente

$$\Gamma_{1\text{no planar}} \propto \int d^4p \frac{1}{p^2 + m^2} e^{\frac{i}{2}p_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu}.$$

De hecho, el diagrama planar como el no-planar se pueden escribir explícitamente de la siguiente manera

$$\Gamma_{1\text{planar}} = \frac{-ig}{16\pi} \Lambda^2, \quad \Gamma_{1\text{no planar}} = -\frac{ig}{8\pi\tilde{p}} \Lambda J_1(\tilde{p}\Lambda),$$

donde se introdujo un UV-cutoff  $\Lambda$  en la integración,  $J_1(x)$  denota una función Bessel y se definió  $\tilde{p}^\mu := \theta^{\mu\nu} p_\nu$ . El diagrama no planar reproduce la divergencia cuadrática cuando  $\tilde{p} \rightarrow 0$  dado que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}$ .

Otra de las motivaciones de las teorías no conmutativas que se ha mantenido con cierta vigencia hasta ahora está relacionada con la idea de que en una teoría cuántica que incluya la gravedad, la naturaleza del espacio tiempo debe cambiar a distancias comparables con la longitud de Planck. Entonces, el momento y la energía requeridos para realizar una medida a estas escalas, modificaría por sí mismo la geometría del espacio-tiempo [13]. Una manera de formular matemáticamente esto es postular que, a escalas menores que la escala de Planck, el espacio-tiempo no sea una variedad diferenciable estándar, sino que tenga la estructura de un espacio-tiempo no conmutativo. Una teoría cuántica de la gravedad que incorpore coordenadas no conmutativas parece tener buenas posibilidades para estar regulada intrínsecamente a escalas de Planck.

Cualquier teoría de la gravedad cuántica no será local en un sentido convencional. La no localidad implica problemas prácticos y conceptuales que aún no han sido entendidos en su totalidad, por lo que las teorías no conmutativas proporcionan un laboratorio relativamente simple donde estudiarlos.

Un candidato para una teoría cuántica de la gravedad es la teoría de cuerdas, la cual no es local en ningún sentido preciso. De hecho hay más de un parámetro característico de esta no localidad, en general controlada por la mayor entre la longitud de Planck y la longitud  $l_s$  de las cuerdas fundamentales.

De acuerdo con la teoría de cuerdas, una cuerda abierta que se propaga en el espacio-tiempo describe una superficie que se denomina hoja de mundo (worldsheet). En esa superficie de dos dimensiones “vive” una teoría de campo conforme, de manera que para entender fenómenos básicos en la teoría de cuerdas, basta con estudiar esta teoría conforme en  $2d$  (bi dimensional).

Una de las primeras apariciones de la geometría no conmutativa en teoría de cuerdas surge con el trabajo de Edward Witten quien, en 1986, intentó interpretar las interacciones de cuerdas bosónicas abiertas, definiendo una álgebra no conmutativa y finalmente formulando la teoría clásica de campos no-lineal de tales cuerdas en el lenguaje de la geometría no-conmutativa.

En 1999 [14], Seiberg y Witten dieron un paso más al estudiar ( $Dp$ -branas de la teoría de cuerdas) en presencia de un campo tensorial anti simétrico de Neveu-Schwarz,  $B_{ij}$  constante. El campo tensorial  $B_{ij}$  es equivalente a un campo magnético constante en la brana. La acción asociada a la hoja de mundo (worldsheet) asociada a cuerdas abiertas en presencia de un campo magnético  $B$  está dada por

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} g_{ij} \partial_{\alpha} x^i \partial^{\alpha} x^j - \frac{i}{2} \int_{\partial\Sigma} B_{ij} x^i \partial_t x^j,$$

donde  $\Sigma$  es la hoja de mundo de la cuerda. A partir de esta acción, las ecuaciones de movimiento para las  $Dp$ -branas están dadas por

$$g_{ij} \partial_n x^j - 2\pi i \alpha' B_{ij} x^i \partial_t x^j \Big|_{\partial\Sigma} = 0. \quad (1.0.6)$$

Si  $B_{ij} \rightarrow \infty$ , o de manera equivalente  $g_{ij} \rightarrow 0$ , entonces para satisfacer la condición  $B_{ij} x^i \partial_t x^j \Big|_{\partial\Sigma} = 0$  se tienen que cumplir  $\partial_t x^j$ . Esto indica que las coordenadas de la cuerda sobre brana están fijas.

La teoría de las cuerdas abiertas pueden ser analizada determinando el propagador y calculando la función de correlación con estas condiciones de frontera; en el límite de interacción a corta distancia se tiene

$$\langle x^i(\tau), x^i(\tau') \rangle = -\alpha' G^{ij} \log(\tau - \tau')^2 + \frac{i}{2} \theta^{ij} \epsilon(\tau - \tau'),$$

donde  $G^{ij}$  es la métrica efectiva vista por la cuerda abierta. El coeficiente  $\theta^{ij}$  en el propagador tiene una interpretación sencilla, es decir, de acuerdo con la teoría conforme de campos se pueden calcular conmutadores de operadores a partir del comportamiento a pequeñas distancias del producto de operadores interpretando al ordenamiento temporal como el ordenamiento de operadores. Interpretando a  $\tau$  como el tiempo se obtiene que

$$[x^i(\tau), x^i(\tau')] = T (x^i(\tau) x^j(\tau^-) - x^i(\tau) x^i(\tau^-)) = i\theta^{ij}.$$

Esto significa que las coordenadas  $x^i$  sobre la  $Dp$ -brana no conmutan. Las cantidades  $\theta^{ij}$  dependen de  $B_{ij}$  y se anulan cuando este se anula.

De manera mas precisa, hacia fines de los '90, N. Seiberg y E. Witten [14] encontraron que existen límites de bajas energías de la teoría de cuerdas y de la denominada teoría M que llevan directamente a teorías de Yang-Mills no-conmutativas y que, siendo mucho más simples que la teoría de cuerdas original, preservan algo de su no localidad. Mostraron que las TCC NC son teorías efectivas de cuerdas en límites de bajas energías y que podrán ser utilizadas para estudiar (fenomenologicamente) la gravedad cuántica. A partir de este resultado, se generó una oleada de publicaciones sobre el tema; tan solo unos pocos meses después, apareció entre ellas una con un resultado sumamente desesperanzador: las TCC NC, en vez de curar las divergencias usuales, padecían de un nuevo inconveniente llamado mezcla ultravioleta-infrarroja (UV-IR). Los diagramas que muestran este comportamiento son divergentes UV en la teoría conmutativa, se vuelven convergentes UV en la teoría NC, pero su inclusión en diagramas de orden mayor genera divergencias IR que parecieran ser no renormalizables. Estos aspectos relacionados con la no-conmutatividad proporcionan nuevos resultados para un mejor entendimiento de sus consecuencias y como las teorías físicas se ven modificadas por ella.

Después de la generalización no-conmutativa de las teorías de norma han aparecido una enorme cantidad de artículos introduciendo nuevas aplicaciones a distintas situaciones físicas. Entre los ejemplos más conocidos en los que se ha observado que la no-conmutatividad entre las coordenadas surge como una descripción natural se presentan en ciertos sistemas de materia condensada. Un ejemplo clásico donde surge la no conmutatividad de manera natural es en el caso de la teoría de los electrones en presencia de un campo magnético intenso, el cual puede ser descrito de manera natural en términos de coordenadas de posición no conmutativas. Para ver esto, consideremos el

caso de una carga eléctrica la cual se mueve en un plano en presencia de un campo magnético  $B_z$  perpendicular a este plano. La ecuación de movimiento que describe a este sistema está dada por

$$m\dot{v} = \frac{e}{c}\varepsilon^{ij}v^j B_z + f^i(\vec{r}), \quad (1.0.7)$$

donde  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  es la velocidad y  $\vec{f}$  representa a otras fuerzas, las cuales pueden ser escritas como el gradiente de un potencial  $V : \vec{f} = -\nabla V$ .

En el caso de campos magnéticos muy intensos, la teoría cuántica da lugar a los niveles de Landau, los cuales están caracterizados por tener una separación que depende del cociente  $B_z/m$ . En el límite de campos magnéticos muy intensos,  $B_z/m \gg 1$ , aparecen los primeros niveles de Landau, lo que es equivalente a considerar pequeños valores para la masa de la partícula. Por lo tanto, poner la masa igual a cero en (1.0.7) deja una ecuación de primer orden

$$\dot{r}^i = \frac{e}{cB_z}\varepsilon^{ij}f^j(\vec{r}),$$

Por otro lado, recordemos que la evolución temporal de una variable  $f$  en una variedad simpléctica está dada por  $df/dt = (\partial f/\partial t - \{H, \cdot\})f$ . En este caso la evolución temporal  $r^i$  está determinada por el corchete de Poisson de las coordenadas  $r^i$  con el Hamiltoniano  $H = \frac{p^2}{2m} + V \approx V$ , por lo que

$$\frac{d}{dt}r^i = -\{H, r^i\} = -\{r^j, r^i\}\partial_j V = \frac{c}{eB_z}\varepsilon^{ij}f^j(\vec{r}).$$

Por lo tanto, se puede inferir de la expresión anterior que el corchete de Poisson describe un sistema con coordenadas no conmutativas

$$\{r^j, r^i\} = \frac{c}{eB_z}\varepsilon^{ij}.$$

Este resultado lo que nos dice es que el nivel de Landau más bajo puede ser tratado como una teoría no-conmutativa. Esta es la razón por la cual tales ideas son relevantes para el estudio del efecto Hall cuántico [15], y que han demostrado ser de gran utilidad en estos modelos [16].

Otro sistema, quizá menos conocido, en el que la no-conmutatividad aparece como una herramienta útil en la descripción y entendimiento de sistemas físicos es la interacción de monopolos magnéticos. El interés en una modificación no-conmutativa de estos modelos es que una estructura no-conmutativa aparece como una manera natural de crear potenciales de interacción entre partículas [17, 18], además de la eliminación de divergencias que pudiesen presentar estos modelos; el parámetro de deformación  $\theta$  sirve como una longitud de escala de regularización.

En esta tesis estamos interesados en estudiar monopolos magnéticos en el contexto de no-conmutatividad en dos casos de relevancia física. El primer problema a estudiar está relacionado con las consecuencias de la no-conmutatividad en el monopolo de Dirac. Para esto empezaremos por estudiar el monopolo magnético asociado a una teoría de norma abeliana con grupo de simetría  $U(1)$ . Hasta el día de hoy la cuantización de la carga eléctrica sigue siendo un problema fundamental en la física teórica. Como es bien sabido Dirac supuso la existencia de una carga magnética para poder explicar la cuantización de la carga eléctrica obteniendo lo que conocemos como la condición de cuantización de Dirac (CCD). Si bien la CCD se obtuvo para la teoría electromagnética que es una teoría de norma con grupo de simetría  $U(1)$  este resultado se puede extender a teorías de norma no-abelianas.

Para ello consideraremos introducir una deformación no-conmutativa a la teoría electromagnética o de manera más precisa a la ecuaciones de Maxwell y analizaremos implicaciones físicas de

suponer un espacio no-conmutativo. Esto implicaría tener deformaciones no-conmutativas de las fuentes asociadas a las ecuaciones de Maxwell. Por lo tanto, es natural preguntarse, ¿cuál es la forma de estas fuentes? y de existir, ¿cuál sería la relevancia de estas fuentes?. Aún más a nivel fundamental, ¿qué pasa con la condición de cuantización de Dirac?, es decir, ¿la no conmutatividad es compatible con la cuantización de la carga magnética?. El propósito de este trabajo es intentar dar una respuesta a todas estas cuestiones.

El segundo problema que abordaremos en esta tesis está relacionado con la dinámica de la interacción de monopolos magnéticos en teorías de norma no abelianas. En el contexto de monopolos magnéticos en teorías de norma con grupo de simetría  $U(N)$  estamos interesados en estudiar la dinámica de monopolos magnéticos en el formalismo no-conmutativo usando un enfoque distinto al introducido en [17, 18] que discutimos anteriormente.

El enfoque que seguiremos está basado en una versión no-conmutativa del análisis que utilizó Manton para describir la dinámica de las interacciones de algunas configuraciones de monopolos en el límite de bajas energías. La idea de Manton [19, 20] era que uno puede truncar el espacio de configuraciones, el cual es dimensionalmente infinito para el sistema Yang-Mills-Higgs, a un sistema dinámico con un Lagrangiano de dimensión finita. En otras palabras, la dinámica de un sistema de multi-monopolos con un número infinito de grados de libertad se puede reducir a la de unas pocas coordenadas colectivas de un solitón, en un espacio auxiliar denominado espacio de parámetros (moduli space). Este espacio auxiliar se puede ver como una variedad Riemanniana por lo que una descripción general de la dinámica de baja energía de los monopolos BPS en el espacio de parámetros (moduli space) puede ser descrita por la métrica Atiyah-Hitchin, cuya forma asintótica es la métrica Taub-NUT. Por lo tanto, la dinámica de monopolos magnéticos en el límite de bajas energías en el contexto de NC se reduce a implementar una deformación NC a la métrica de Atiyah-Hitchin.

Esta tesis está dividida en tres partes. En la parte I de esta tesis comenzaremos por estudiar brevemente la generalización no-conmutativa de la transformación de Weyl-Wigner, la cual asigna operadores a funciones clásicas del espacio fase. Adicionalmente usaremos este resultado para deducir un nuevo producto-\* asociado a las funciones del espacio-fase. Como caso particular definiremos el producto Moyal y finalmente analizaremos las propiedades del producto Moyal en el capítulo 2. Finalmente en el capítulo 3 estudiaremos un caso particular de la formulación de las teorías de campo de norma no conmutativas, es decir, la generalización no-conmutativa de la teoría de Yang-Mills a través del mapeo de Seiberg-Witten.

En la segunda parte de esta tesis analizaremos la condición de cuantización de Dirac (CCD) en un espacio no-conmutativo. Para esto, en el capítulo 4 partimos con la descripción que sugirió Dirac para explicar la cuantización de la carga eléctrica en la cual se introduce un potencial vectorial, el cual tiene una singularidad conocida como la cuerda de Dirac y que conduce a algunos problemas en la descripción del monopolo magnético. Posteriormente se analiza la CCD desde el enfoque Wu-Yang quienes propusieron un potencial vectorial el cual no tiene esta cuerda de Dirac.

El caso no-conmutativo lo discutimos en el capítulo 5. La forma como se procede en esta tesis es la siguiente: primero comenzamos por estudiar la deformación no-conmutativa de las ecuaciones de Maxwell magnéticas de manera perturbativa en el parámetro de no-conmutatividad  $\theta$ . Por otro lado usamos el mapeo de Seiberg-Witten para determinar las perturbaciones de los potenciales de norma  $\hat{A}_\mu(x; \theta)$  y del parámetro de norma no-conmutativo  $\hat{\Lambda}(x; \theta)$  en donde usaremos como potenciales semilla a los potenciales magnéticos introducidos por Wu y Yang. Finalmente analizamos la condición de cuantización de Dirac para el caso no-conmutativo y mostraremos que la cuantización de la carga es consistente con la deformación no-conmutativa inducida por el mapeo de Seiberg-

Witten.

En cuanto a la tercera parte de esta tesis analizaremos la interacción de monopolos magnéticos en teorías de norma no-abelianas en el contexto de no-conmutatividad. Comenzaremos por estudiar el monopolo de 't Hooft-Polyakov, el cual es una solución estática de energía finita de la teoría de Yang-Mills-Higgs en el capítulo 6. Debido a complejidad de la ecuaciones de movimiento de Yang-Mills-Higgs, estudiar la dinámica es aún más complicado. Sin embargo es posible estudiar la dinámica de monopolos que se mueven lentamente usando un espacio auxiliar denominado espacio de parámetros, el cual tiene la propiedad de ser una variedad diferenciable tipo-Kähler como lo discutiremos en detalle en el capítulo 7. Adicionalmente se estudiarán las soluciones de este espacio-tiempo asociado al espacio de parámetros, las cuales son soluciones a las ecuaciones de Einstein.

Finalmente, en lo que corresponde a la parte no conmutativa encontramos que la dinámica de los monopolos se reduce a conocer el movimiento geodésico de la métrica de Atiyah-Hitchin. Por lo tanto en el capítulo 8 nos dedicamos a discutir la deformación no-conmutativa del espacio-tiempo de Atiyah-Hitchin. Al final discutiremos los resultados obtenidos así como las líneas de investigación que pueden ser consideradas en el futuro.



## Parte I

# Introducción a las teorías no conmutativas



## Capítulo 2

# Introducción a las teorías no conmutativas

### 2.1. Transformación de Weyl-Wigner

En 1927 Weyl [5] estudió el problema de la cuantización de una función clásica  $f$  dependiente de las coordenadas  $q$  y sus momentos canónicos conjugados  $p$ . El problema fundamental lo constituían expresiones clásicas del tipo  $p^2q$ , las cuales, en el contexto de la mecánica cuántica, pueden corresponder a alguna de las siguientes expresiones  $P^2Q$ ,  $QP^2$ ,  $PQP$ , donde  $Q$  y  $P$  son los operadores de posición y momento cuánticos que satisfacen la relación de conmutación  $i(PQ - QP) = 1$ . El resultado obtenido por Weyl fue que a una cantidad clásica

$$f(p, q) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{p\sigma + q\tau} \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

se le podía asociar una forma Hermitiana

$$F(P, Q) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{P\sigma + Q\tau} \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau.$$

Consideremos variables no conmutativas que satisfacen  $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ . Los parámetros no conmutativos  $\theta^{\mu\nu}$  no son necesariamente constantes. El procedimiento indicado por Weyl es adecuado para asociar al álgebra  $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$  generada por estas variables no conmutativas, con el producto estándar de funciones, un álgebra de variables conmutativas pero con un producto deformado de funciones  $(\mathcal{A}, \star)$ . Para ello se define en primer lugar, la transformación de Weyl

$$\hat{W}_f(\hat{\mathbf{x}}) = W(f)(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{f}(\hat{\mathbf{x}}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} f(\mathbf{k}), \quad (2.1.1)$$

la cual asocia un operador  $\hat{W}_f$ , dependiente de operadores no conmutativos, a una función  $f$  dependiente de variables conmutativas. En esta expresión  $\mathbf{k} := (k^0, \dots, k^{n-1})$ ,  $d\mathbf{k} := d^n k = dk^0 \dots dk^{n-1}$ , y

$$f(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{x} e^{-ik_\mu x^\mu} f(\mathbf{x}), \quad (2.1.2)$$

es la transformada de Fourier usual de la función  $f(\mathbf{x}) = f(x^0, \dots, x^{n-1})$ , o equivalentemente

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik_\mu x^\mu} f(\mathbf{k}). \quad (2.1.3)$$

Es bueno notar la similitud entre (2.1.1) y (2.1.3). De manera más general se tiene que

$$\hat{W}_f^w(\hat{\mathbf{x}}) = W_w(f)(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{f}_w(\hat{\mathbf{x}}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} f(\mathbf{k}) w(\mathbf{k}). \quad (2.1.4)$$

En esta expresión  $w$  representa una función que determina el tipo de ordenamiento del operador: normal, estándar o simétrico.

En los cálculos que siguen consideraremos el ordenamiento simétrico,  $w(\mathbf{k}) = 1$ , dado originalmente por Weyl. Si ahora insertamos (2.1.2) en (2.1.1), tenemos que

$$\hat{W}_f(\hat{\mathbf{x}}) = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}), \quad \text{donde} \quad \Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\nu x^\nu}.$$

El mapeo  $\Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$  permite mezclar operadores y campos conmutativos. Asimismo es posible mostrar que

$$\Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \rightarrow \delta(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}),$$

en el límite conmutativo. Por otra parte, mediante la normalización  $\text{Tr} \Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = 1$ , se tiene que  $\text{Tr} \hat{W}_f(\hat{\mathbf{x}}) = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x})$ . Además,

$$\text{Tr} \Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.1.5)$$

Por medio de esta normalización y la fórmula BCH se tiene que, dado un operador de Weyl  $\hat{W}_f(\hat{\mathbf{x}})$ , es posible construir la función

$$f(\mathbf{x}) = \text{Tr} \hat{W}_f(\hat{\mathbf{x}}) \Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}),$$

utilizando el mapeo  $\Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ . Estas funciones reciben el nombre de distribuciones de Wigner en la literatura.

Con los elementos anteriores, es posible estudiar el producto de dos operadores de Weyl, lo que conducirá a la construcción de un producto  $\star$  en general. Esto puede hacerse utilizando el mapeo  $\Delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ , sin embargo el cálculo es más transparente si se utiliza (2.1.1) directamente. Procedamos entonces a calcular

$$\hat{W}_f(\hat{\mathbf{x}}) \hat{W}_g(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} f(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}').$$

Utilizando ahora la fórmula BCH podemos escribir el producto de las exponenciales como

$$\begin{aligned}
 e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} &= \exp \left[ \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{r_i+s_i, 1 \leq i \leq n} \frac{(ik_\mu \hat{x}^\mu)^{r_1} (ik'_\nu \hat{x}^\nu)^{s_1} \cdots (ik_\mu \hat{x}^\mu)^{r_n} (ik'_\nu \hat{x}^\nu)^{s_n}}{r_1! s_1! \cdots r_n! s_n!} \right] \\
 &= \exp \left[ ik_\mu \hat{x}^\mu + ik'_\nu \hat{x}^\nu + \frac{1}{2} [ik_\mu \hat{x}^\mu, ik'_\nu \hat{x}^\nu] + \frac{1}{12} [ik_\mu \hat{x}^\mu, [ik'_\nu \hat{x}^\nu, ik'_\sigma \hat{x}^\sigma]] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} [ik'_\mu \hat{x}^\mu, [ik_\nu \hat{x}^\nu, ik'_\sigma \hat{x}^\sigma]] + \dots \right] \\
 &= \exp \left[ ik_\mu \hat{x}^\mu + ik'_\nu \hat{x}^\nu - \frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} k'_\nu + \frac{1}{12} (k_\mu k_\nu - k'_\mu k'_\nu) k'_\sigma [\hat{x}^\mu, \theta^{\nu\sigma}] + \dots \right] \\
 &=: \exp [ik_\mu \hat{x}^\mu + ik'_\nu \hat{x}^\nu + Z(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\nabla} \boldsymbol{\theta}, \dots)], \tag{2.1.6}
 \end{aligned}$$

donde  $\hat{\nabla} := \partial / \partial \hat{\mathbf{x}}$ , y se ha usado (2.1.5). En consecuencia

$$\hat{W}_f(\hat{\mathbf{x}}) \hat{W}_g(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e^{i(k_\mu + k'_\mu) \hat{x}^\mu + Z(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\theta}, \hat{\nabla} \boldsymbol{\theta}, \dots)} f(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}'). \tag{2.1.7}$$

Si la función  $Z$  estuviera ausente en el integrando de esta expresión, la integral sería simplemente

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2\pi)^n} \iint d\mathbf{k} d\mathbf{k}' e^{i(k_\mu + k'_\mu) \hat{x}^\mu} f(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}') &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{k}' f(\mathbf{k}') g(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} (f * g)(\mathbf{k}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \widetilde{(fg)}(\mathbf{k}) \\
 &= \hat{W}_{fg}(\hat{\mathbf{x}}). \tag{2.1.8}
 \end{aligned}$$

donde  $*$  denota convolución de funciones. Se obtendría así el operador de Weyl asociado al producto usual de funciones  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ .

Vemos entonces que la presencia de la función  $Z$  tiene un efecto bastante importante, ya que el producto estándar de funciones es modificado. Recordando la relación funcional

$$ik_\mu \longleftrightarrow p_\mu,$$

y tomando en cuenta la relación entre (2.1.1) y (2.1.3), podemos escribir

$$\hat{W}_f(\hat{\mathbf{x}}) \hat{W}_g(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{W}_{f \star g}(\hat{\mathbf{x}}),$$

donde

$$(f \star g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) e^{Z(\mathbf{p}^{(x)}, \mathbf{p}^{(y)}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \nabla \boldsymbol{\theta}, \dots)} g(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}}. \tag{2.1.9}$$

En las secciones siguientes discutiremos casos particulares de este resultado. Antes de eso es necesario mencionar que este producto  $\star$  involucra un número infinito de derivadas, por lo que una teoría construida que involucre este producto es altamente no local. Diversas técnicas han sido desarrolladas para tratar esta dificultad, sin embargo, hasta el momento lo más empleado ha sido asumir que los parámetros de no conmutatividad son menores que uno,  $|\theta^{\mu\nu}| \ll 1$ , y realizar un tratamiento perturbativo.

## 2.2. Producto Groenewold-Moyal

El primer tipo de producto  $\star$  que se puede analizar es el denominado canónico, definido por la condición de que los parámetros no conmutativos  $\theta^{\mu\nu}$  sean constantes. Este caso fue discutido en los trabajos de Groenewold y Moyal [6, 7] en el contexto de la Mecánica Cuántica. Bajo la condición anterior, la función  $Z$  adquiere una expresión bastante simple

$$Z_{GM}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \boldsymbol{\theta}) = -\frac{i}{2} k_{\mu} \theta^{\mu\nu} k'_{\nu}.$$

En consecuencia el producto  $\star$  (2.1.9) está dado por

$$(f \star_{GM} g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^{\nu}}} g(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}}. \quad (2.2.1)$$

Como ejemplo de aplicación de esta expresión podemos calcular

$$[x^{\mu}, x^{\nu}]_{\star_{GM}} := x^{\mu} \star_{GM} x^{\nu} - x^{\nu} \star_{GM} x^{\mu} = x^{\mu} x^{\nu} + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} - x^{\nu} x^{\mu} - \frac{i}{2} \theta^{\nu\mu} = i\theta^{\mu\nu}.$$

Se tiene así

$$[x^{\mu}, x^{\nu}]_{\star_{GM}} = [\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu},$$

esto es, la no conmutatividad de los operadores  $\hat{x}^{\mu}$  utilizando el producto usual es mapeada a variables conmutativas pero que se rigen por el producto  $\star_{GM}$  para su multiplicación.

Entre las propiedades del producto (2.2.1) se encuentran las siguientes:

1. Asociatividad. En general un producto  $\star$  es no asociativo ya que es de la forma (2.1.9). Sin embargo existe una clase de productos  $\star$ , entre los que se encuentra (2.2.1), que si lo son y que constituyen uno de los temas principales de investigación en cuantización por deformación.
2. Cerradura bajo conjugación compleja. Esto significa que para dos funciones complejas  $f$  y  $g$ , la igualdad

$$\overline{(f \star_{GM} g)} = \bar{f} \star_{GM} \bar{g},$$

es válida. Aquí  $\bar{f}$  indica conjugación compleja.

3. Invariancia cíclica en la integración. Esta es una propiedad bastante importante del producto (2.2.1), cuyo origen radica en la relación

$$\int d\mathbf{x} (f_1 \star_{GM} \cdots \star_{GM} f_n)(\mathbf{x}) = \text{Tr}[\hat{W}_{f_1} \cdots \hat{W}_{f_n}].$$

En el caso particular del producto  $\star$  de dos funciones se obtiene

$$\int d\mathbf{x} (f \star_{GM} g)(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} (g \star_{GM} f)(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}). \quad (2.2.2)$$

## Capítulo 3

# Teoría de campo no conmutativa

En la física de partículas las teorías de norma juegan un papel muy importante debido a que las cuatro fuerzas fundamentales: gravedad, electromagnética, débil y fuerte, están descritas en términos de teorías de norma, esto significa que los campos que describen las fuerzas fundamentales exhiben alguna simetría interna abstracta conocida como invariancia de norma. La invariancia de norma significa que el Lagrangiano que describe el campo es invariante bajo la acción de un grupo de Lie que se aplica sobre las componentes de los campos.

De manera mas precisa una teoría de norma es un tipo de teoría cuántica de campos que son utilizadas en la descripción de partículas elementales y sus interacciones. Estas interacciones son debidas a la adición de un campo de Yang-Mills, el cual aparece como resultado de pedir que el Lagrangiano asociado a la teoría de norma sea invariante bajo transformaciones *locales* pertenecientes al grupo de simetría interna de la teoría de norma.

Por ejemplo la cromodinámica cuántica, la cual describe la interacción fuerte, es una teoría de norma que describe la interacción entre quarks y gluones. Los quarks son los fermiones de esta teoría y desempeñan un papel análogo a los electrones y neutrinos del modelo electrodébil, los gluones son los bosones de norma de la teoría, y desempeñan un papel análogo a los fotones en la QED. Los gluones son representados mediante un campo de Yang-Mills cuya simetría interna es el grupo  $SU(3)$ .

Como es bien sabido la representación del grupo de simetría juega una papel importante en la física de partículas, es decir, existen dos representaciones diferentes del mismo grupo de simetría pero que describen diferentes tipos de partículas. Estas representaciones son conocidas como la representación fundamental y la representación adjunta del grupo de Lie.

Por ejemplo, retomado el ejemplo de la interacción fuerte los quarks están descritos en la representación fundamental mientras que los gluones están descritos en la representación adjunta. Cuando hablamos de "*generadores*", generalmente nos referimos a una base del álgebra de Lie, en este caso denotada por  $\lambda^a$ ,  $a \in \{1, 2, \dots, 8\}$ . En términos de las matrices de Gell-Mann podemos escribir  $\lambda_{ij}^a$  con  $i, j = 1, 2, 3$ , donde  $\lambda_{ij}^a$  es la  $ij$ -ésima entrada del generador  $\lambda^a$  en la representación fundamental de  $SU(3)$  (es decir, en la representación de matrices de  $3 \times 3$ ).

La transformación de norma de los campos de los quarks viene dada por

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp[ig_s \alpha_a(x) \lambda^a] \psi(x),$$

donde  $g_s$  es la constante de acoplamiento de la interacción fuerte y  $\lambda^a$  son matrices hermíticas de

$3 \times 3$  de traza nula, generadores del álgebra del grupo  $SU(3)$  que satisfacen

$$[\lambda^a, \lambda^b] = f_c^{ab} \lambda^c \quad (3.0.1)$$

con  $f_c^{ab}$  las constantes de estructura del grupo.

El campo del quark  $\psi(x)$  contiene una triplete de campos y el campo antiquark  $\bar{\psi}(x)$  pertenece a la representación compleja conjugada (\*) y también contiene una triplete de campos denotados como

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \\ \psi_3^* \end{pmatrix}. \quad (3.0.2)$$

El campo de gluones transforma en la representación adjunta del grupo de norma, de manera mas precisa la representación adjunta se define por la acción del generador  $\lambda^a$  en cualquier otro generador  $\lambda^b$  como el conmutador  $[\lambda^a, \lambda^b]$ , es decir, el mapeo de la representación está dado por el corchete de Lie  $\lambda^a \mapsto \text{Ad } \lambda^a = [\lambda^a, -]$ . Dado que las constantes de estructura del álgebra de Lie se definen como  $[\lambda^a, \lambda^b] = f_c^{ab} \lambda^c$  (con la convención de suma para índices repetidos y  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 8\}$ ), entonces podemos escribir la acción de un generador  $\lambda^a$  en otro generador  $\lambda^b$  también como  $f_c^{ab} \lambda^c$  y así un "vector de gluones"  $A_a \lambda^a$  transforma en  $A_a f_c^{ab} \lambda^c$  cuando el generador  $\lambda^b$  actúa sobre el vector.

Las relaciones de conmutación de la ecuación (3.0.1) implican que la matriz  $n \times n$  correspondiente al generador  $\lambda^a$  del álgebra en la representación adjunta es  $(\text{Ad } \lambda^a)_c^b = f_c^{ab}$ .<sup>1</sup> Por lo tanto, este resultado nos dice que la representación adjunta del generador  $\lambda^a$  se puede escribir como una matriz de  $8 \times 8$  donde las componentes de esa matriz  $\text{Ad } \lambda^b$  son solo las constantes de estructura  $f_j^{ai}$ . El gluón contiene un octeto de campos similar a (3.0.2), los cuales pertenecen a la representación adjunta (matrices de  $8 \times 8$ ), y puede ser escrito usando las matrices de Gell-Mann como  $A_\mu^a \lambda_a$ .

### 3.1. Teorías de norma no conmutativas

Equipado con el producto Moyal-Weyl, ahora podemos dar un primer paso hacia la construcción de QFT en el espacio-tiempo no conmutativo, comenzando con QED.

Como se ha discutido anteriormente, la forma mas sencilla de introducir una estructura no conmutativa a un modelo clásico es reemplazando en la acción todos los productos ordinarios entre los campos por el producto Moyal-Weyl definido en (2.2.1). Por lo tanto la deformación natural para la acción usual de QED es:

$$S_{ncqed} = \int d^4x (\bar{\psi} * (i\mathcal{D}) * \psi - m\bar{\psi} * \psi - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}), \quad (3.1.1)$$

donde en este caso se tiene que la derivada covariante está dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu,$$

<sup>1</sup>El espacio subtendido (generado) por los generadores infinitesimales,  $L$ , forma un álgebra de Lie, es decir,  $L$  es cerrado bajo conmutación de operadores  $X, Y \in L \Rightarrow -i[X, Y] \in L$ , donde  $X = a_i X^i$  y  $Y = b_i X^i$ . Por lo tanto podemos escribir  $[X^i, X^j] = X^k$  con  $X = a_i X^i$  y  $X' = a'_k X^k$ . Explícitamente podemos escribir este conmutador en términos del generador  $X^k$ :  $[X^i, \delta_k^j X^k] a_j = a'_k X^k$ . En efecto buscamos la matriz para la representación adjunta de un generador  $\text{Ad } X^i = [X^i, -]$  tal que  $(\text{Ad } X^i)_k^j a_j = a'_k$ . Entonces, después de hacer la contracción del álgebra de los generadores (3.0.1) con  $a_j$  obtenemos  $[X^i, a_j X^j] = a_j f^{ij}_k X^k = a'_k X^k$ , esto implica que  $(\text{Ad } X^i)_k^j = f^{ij}_k$ .

y tensor de intensidad de campo

$$F_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu]_* = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[D_\mu, D_\nu]_*.$$

Ahora la acción no conmutativa de QED en (3.1.1) es invariante bajo un conjunto de transformaciones de norma no conmutativas, las cuales se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\psi \rightarrow \psi' = e_*^{i\lambda} \psi, \quad (3.1.2)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e_*^{-i\lambda}, \quad (3.1.3)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = e_*^{i\lambda} (A_\mu - i\partial_\mu) e_*^{-i\lambda}. \quad (3.1.4)$$

donde la estrella \* en las exponenciales indica una serie de potencias formal, donde en cada término, el producto ordinario se sustituye por el producto-\*

Recordando la propiedad de ciclicidad de \*, se tiene que el término de masa es el mismo que en la formulación clásica. La diferencia se centra entonces en el término cinético de  $\psi$ , en donde aparece el término de acoplamiento

$$\int d^4x \psi * \not{A} * \psi = \int d^4x \psi (\not{A} * \psi),$$

en donde se ha utilizado la propiedad (2.2.2) del producto \* en el integrando. El efecto de este término en la teoría se entiende mejor en el espacio de momentos, donde se tiene que

$$\begin{aligned} \not{A} * \psi &= \left( \int d^4k \tilde{\not{A}}(\mathbf{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha} \right) e^{\frac{i}{2} \tilde{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\nu} \left( \int d^4p \tilde{\psi}(\mathbf{p}) e^{ip_\beta y^\beta} \right) \Big|_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}}, \\ &= \int d^4k d^4p e^{i(k_\alpha + p_\alpha)x^\alpha} \tilde{\not{A}}(\mathbf{k}) e^{-\frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu} \tilde{\psi}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

En consecuencia

$$\int d^4x \psi * \not{A} * \psi = \int d^4x d^4k d^4p d^4q e^{i(k_\alpha + p_\alpha + q_\alpha)x^\alpha} \tilde{\psi}(\mathbf{q}) \tilde{\not{A}}(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}) e^{-\frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu}.$$

Se ve entonces que el producto \* introduce una fase dependiente de los momentos de las partículas. Algo similar ocurre con el término asociado al tensor  $F_{\mu\nu}$ , donde el conmutador  $[A_\mu, A_\nu]_*$  ya no es nulo y da lugar a interacciones entre tres fotones, un fenómeno prohibido en el modelo estándar de partículas. Es claro que el producto \* permite que una teoría abeliana clásica se vuelva no abeliana en este sentido.

Aunque esta forma de proceder en la construcción de teorías de norma no conmutativa parece adecuada, existen sin embargo problemas que impiden o limitan a ciertos escenarios su dominio de aplicabilidad. El primero de ellos está relacionado con la invariancia de la acción

$$S_F = -\frac{1}{4e^2} \int d^4x F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu},$$

bajo la transformación de norma no conmutativa

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U * A_\mu * U + iU * \partial_\mu U^{-1}.$$

Mientras  $S_F$  es invariante, el término de acoplamiento con la materia en (3.1.1) necesita que ésta este cuantizada con carga  $+1, -1$  ó  $0$  para ser compatible con esta transformación. Los valores de la carga están asociados con la representación fundamental, antifundamental y adjunta de  $\psi$  respectivamente:

La representación fundamental con carga  $Q = 1$ :

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = U * \psi, \\ D_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - i A_\mu * \psi,\end{aligned}$$

la representación antifundamental con carga  $Q = -1$ :

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = \psi * U^{-1}, \\ D_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - i \psi * A_\mu,\end{aligned}$$

la representación adjunta con carga  $Q = 0$ :

$$\begin{aligned}\chi &\rightarrow \chi' = U * \chi * U^{-1}, \\ D_\mu \chi &= \partial_\mu \chi - i [A_\mu, \chi]_*.\end{aligned}$$

El segundo problema es también importante y se presenta cuando se desea construir teorías no abelianas no conmutativas. Consideremos por ejemplo el conmutador

$$[A_\mu^a T^a, A_\nu^b T^b]_* = \frac{1}{2} \{A_\mu^a, A_\nu^b\}_* [T^a, T^b] + \frac{1}{2} [A_\mu^a, A_\nu^b]_* \{T^a, T^b\}, \quad (3.1.6)$$

donde los elementos  $\{T^a\}$  son los generadores del grupo de Lie a partir del cual se construye una acción similar a  $S_F$ . Ahora bien, el primer término del lado derecho de esta igualdad involucra al conmutador de dos generadores, el cual en el caso de un grupo de Lie, se escribirá como combinación lineal de los mismos por medio de las constantes de estructura correspondientes. El segundo término por otra parte es la raíz del problema, ya que en general el anticonmutador de dos generadores no será expresable como combinación lineal de los generadores del grupo y en principio posee tanto una parte simétrica como antisimétrica. De hecho el único grupo para el cual el anticonmutador de generadores se escribe como combinación lineal de ellos es  $U(n)$  donde

$$\{T^a, T^b\} = c_{abc} T^c.$$

Para el caso del grupo  $SU(N)$  en un espacio-tiempo no conmutativo, la relación de conmutación para los campos (3.1.6) no cierra, por lo tanto construir una teoría de norma en un espacio no conmutativo con grupo de simetría  $SU(N)$  no es posible siguiendo este enfoque.

## 3.2. El mapeo de Seiberg-Witten

Diversas propuestas para resolver los problemas mencionados anteriormente existen en la literatura, algunos de ellos necesitando la introducción de nuevos tipos de partículas. Desde un punto de vista formal, todas las soluciones pueden ser aceptables, sin embargo, tomando en cuenta que la descripción de un fenómeno físico debe ser lo más sencillo posible, el hecho de tener nuevas partículas no es del todo aceptable.

Tal vez la propuesta más simple es aquella basada en el uso del álgebra envolvente universal  $\mathcal{U}$  del grupo de norma que se este analizando. En general se define el álgebra envolvente universal  $\mathcal{U}(G)$  de un grupo  $G$  como el álgebra asociativa generada por la base  $T^a$  del álgebra de Lie de  $G$  con la relación  $T^a T^b - T^b T^a = C^{ab}{}_c T^c$ , donde  $C^{ab}{}_c$  son las constantes de estructura del álgebra de Lie de  $G$ . La base del álgebra envolvente se puede escribir como los producto simetrizados de los generadores del álgebra de Lie del grupo, i.e.

$$: T^a := T^a, \quad : T^a T^b := \frac{1}{2} \{T^a, T^b\} = \frac{1}{2} (T^a T^b + T^b T^a), \dots$$

y así sucesivamente. Obviamente en esta construcción se tiene una base infinita o equivalentemente, se tiene un número infinito de grados de libertad.

Consideremos entonces un grupo de norma  $G$ , con generadores  $\{T_i\}$  y fijemos una representación  $V$  del mismo. En el caso conmutativo tenemos que el campo de norma  $A$  con valores en el álgebra de Lie se escribe como

$$A_\mu = A_\mu^i T_i,$$

y una expresión análoga para el parámetro de norma  $\lambda$

$$\lambda = \lambda^i T_i.$$

El campo de materia lo denotamos por  $\psi$ . La idea ahora es utilizar objetos análogos pero no conmutativos definidos en el álgebra envolvente universal  $\mathcal{U}$  del grupo  $G$ , i.e.

$$\hat{\Psi} \in \mathcal{A} \otimes V, \quad \hat{A}_\mu, \hat{A}_\lambda \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{U}.$$

Por ejemplo, se tiene que

$$\hat{A}_\lambda = \lambda(x)\mathbb{1} + \lambda^i(x)T_i + \lambda^{ij}(x) : T_i T_j : + \dots \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{U}.$$

En estas expresiones  $\mathcal{A}$  es el álgebra de funciones equipada con el producto  $*$  y la notación  $\hat{\phantom{x}}$  sirve para indicar que estamos utilizando objetos no conmutativos definidos en términos de la base de  $\mathcal{U}$ .

Recordemos ahora que en el caso conmutativo se tienen las transformaciones de norma usual

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = e^{i\lambda}(A_\mu - i\partial_\mu)e^{-i\lambda}, \\ \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\lambda}\psi. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Es deseable que en el caso no conmutativo se tengan relaciones similares, tales como

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(A, \theta) &\rightarrow e_*^{i\hat{A}(\lambda, A, \theta)} [\hat{A}_\mu(A, \theta) - i\partial_\mu] e_*^{-i\hat{A}(\lambda, A, \theta)} = \hat{A}_\mu(A', \theta), \\ \hat{\Psi}(\psi, A, \theta) &\rightarrow e_*^{i\hat{A}(\lambda, A, \theta)} \hat{\Psi}(\psi, A, \theta) = \hat{\Psi}(\psi', A', \theta). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

En [14], Seiberg y Witten argumentaron que las teorías de norma no conmutativas son equivalentes a las teorías de norma conmutativas y que en particular existe un mapeo de un campo de norma conmutativo a uno no conmutativo:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ A_\mu \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{A}(\lambda, A, \theta) \\ \hat{A}_\mu(A, \theta) \\ \hat{\Psi}(\psi, A, \theta) \end{pmatrix},$$

de tal manera que la simetría de norma se preserve. A tal transformación se le conoce como el mapeo de Seiberg-Witten. Dado que debemos respetar las simetrías presentes a cada lado de la transformación, esto significa que para un cambio infinitesimal de gauge con parámetro  $\lambda$ , en la teoría conmutativa, debe existir un  $\hat{A}$ , en la teoría no conmutativa tal que en su versión infinitesimal el mapeo de Seiberg-Witten se escribe como

$$\hat{A}_\mu[A + \delta_\lambda A, \theta] = \hat{A}_\mu[A, \theta] + \hat{\delta}_{\hat{A}} \hat{A}_\mu[A, \theta] \quad (3.2.3)$$

$$\hat{\Psi}[\psi + \delta_\lambda \psi, A + \delta_\lambda A, \theta] = \hat{\Psi}[\psi, A, \theta] + \hat{\delta}_{\hat{A}} \hat{\Psi}[\psi, A, \theta]. \quad (3.2.4)$$

Es importante resaltar que esto no significa que exista un cambio de parámetros del tipo  $\hat{A} = \hat{A}[\lambda]$ , ya que si así fuera tendríamos un isomorfismo entre los grupos de norma de ambas teorías. Basta con recordar que en el caso  $U(1)$  la teoría no conmutativa es “no abeliana” (a diferencia de la conmutativa), para ver que tal isomorfismo es imposible. Entonces, lo más cercano que podemos escribir es una transformación de la forma  $\hat{A} = \hat{A}[\lambda, A_\mu]$ .

Ahora consideremos las variaciones no conmutativas  $\hat{\delta}_{\hat{A}}$  de los campos no conmutativos  $\hat{A}_\mu$  y  $\hat{\Psi}$  de las ecuaciones dadas en (3.2.4), es decir, estas variaciones las podemos escribir como

$$\hat{\delta}_{\hat{A}} \hat{A}_\mu[A, \theta] = \hat{A}_\mu[A + \delta_\lambda A, \theta] - \hat{A}_\mu[A, \theta] = \delta_\lambda \hat{A}_\mu[A, \theta] \quad (3.2.5)$$

$$\hat{\delta}_{\hat{A}} \hat{\Psi}[\psi, A, \theta] = \hat{\Psi}[\psi + \delta_\lambda \psi, A + \delta_\lambda A, \theta] - \hat{\Psi}[\psi, A, \theta] = \delta_\lambda \hat{\Psi}[\psi, A, \theta], \quad (3.2.6)$$

donde la parte derecha de estas ecuaciones se pueden escribir como la variaciones ordinarias  $\delta$  de los campos no conmutativos  $\hat{A}_\mu$  y  $\hat{\Psi}$ . Por lo tanto es posible escribir

$$\hat{\delta}_{\hat{A}} = \delta_\lambda = \delta.$$

La transformación de norma ordinaria  $\delta$  en el lado derecho de las ecuaciones (3.2.6) actúa en las componentes de  $\hat{A}_\mu$  y  $\hat{\Psi}$  cuando estas son expresadas en términos del parámetro no conmutativo  $\theta$  respectivamente.

De manera general las ecuaciones (3.2.4) deben ser resueltas orden por orden en el parámetro no conmutativo. La forma de obtenerlas es mediante la versión infinitesimal de una transformación de norma conmutativa (3.2.2)

$$\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda - i[A_\mu, \lambda], \quad \delta_\lambda \psi = i\lambda \psi.$$

y su contraparte no conmutativa

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu(A, \theta) = \partial_\mu \hat{A}(\lambda, A, \theta) - i[\hat{A}_\mu(A, \theta), \hat{A}(\lambda, A, \theta)]_*, \quad (3.2.7)$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{\Psi}(\psi, A, \theta) = i\hat{A}(\lambda, A, \theta) * \hat{\Psi}(\psi, A, \theta). \quad (3.2.8)$$

Las dos ecuaciones anteriores forman un sistema acoplado, en particular la ecuación para la variación del campo de norma debe ser resuelta simultáneamente para  $\hat{A}$  y  $\hat{\Psi}$ . En la práctica esto es bastante difícil pero es posible adaptar ideas del caso conmutativo para resolverlas. En particular existe una ecuación de consistencia de norma (cociclo) en el caso conmutativo

$$(\delta\lambda_1 \delta\lambda_2 - \delta\lambda_2 \delta\lambda_1)\psi = [\lambda_1, \lambda_2]\psi \equiv \delta_{-i[\lambda_1, \lambda_2]}\psi \equiv \delta_{\lambda_3}\psi,$$

donde  $\lambda_3 = -i[\lambda_1, \lambda_2]$ . Al igual que en el caso conmutativo, se impone la condición de cociclo en el caso no conmutativo en la forma

$$(\hat{\delta}\lambda_1\hat{\delta}\lambda_2 - \hat{\delta}\lambda_2\hat{\delta}\lambda_1)\hat{\Psi} = \hat{\delta}_{-i[\lambda_1, \lambda_2]}\hat{\Psi}, \quad (3.2.9)$$

la cual expresa que el álgebra de transformaciones de norma no conmutativas posee la propiedad de cerradura. Nótese que

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\lambda_1}\hat{\delta}_{\lambda_2}\hat{\Psi} &= \hat{\delta}_{\lambda_1}(i\hat{A}_2 * \hat{\Psi}) = (i\hat{\delta}_{\lambda_1}\hat{A}_2) * \hat{\Psi} + i\hat{A}_2 * \hat{\delta}_{\lambda_1}\hat{\Psi} \\ &= (i\hat{\delta}_{\lambda_1}\hat{A}_2) * \hat{\Psi} + i^2\hat{A}_2 * \hat{A}_1 * \hat{\Psi}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

donde hemos usado que la variación del campo de materia no conmutativo está dado por (3.2.8). Se tiene entonces que la condición de cociclo no conmutativa (3.2.9) se puede escribir como

$$i\delta_\alpha\hat{A}_\beta - i\delta_\beta\hat{A}_\alpha + [\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\beta]_* = i\hat{A}_{-i[\alpha, \beta]}. \quad (3.2.11)$$

Como se puede ver la ecuación (3.2.11) es una ecuación para el parámetro de norma  $\hat{A}_\alpha$ , la cual se tiene que resolver simultáneamente con (3.2.6).

En lo que sigue no se especificará el grupo de norma y por lo tanto todos los resultados obtenidos serán válidos para un grupo de norma no-abeliano arbitrario.

### 3.3. Soluciones al mapeo de Seiberg–Witten

Como se ha discutido anteriormente, el producto  $*$  involucra un número infinito de términos lo cual hace difícil el obtener una solución analítica exacta por lo que de manera usual se emplea un método perturbativo en el parámetro no conmutativo para resolver las ecuaciones. Consideremos entonces los siguientes desarrollos en serie

$$\begin{aligned} \hat{A}(\lambda, A, \theta) &= \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} A^n(\lambda, A, \theta), \\ \hat{A}_\mu(A, \theta) &= A_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} A_\mu^n(A, \theta), \\ \hat{\Psi}(\psi, A, \theta) &= \psi + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi^n(\psi, A, \theta), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

donde  $\lambda$ ,  $A_\mu$  y  $\psi$  son los términos de orden cero de  $\hat{A}$ ,  $\hat{A}_\mu$  y  $\hat{\Psi}$  respectivamente. El superíndice  $n$  denota el orden de  $\theta$  en la serie.

Se tiene entonces que la condición de cociclo (3.2.11) se escribe a orden  $n$  en  $\theta$  como

$$i\delta_\alpha A_\beta^n - i\delta_\beta A_\alpha^n + \sum_{p+q+r=n} [A_\alpha^p, A_\beta^q]_* = iA_{-i[\alpha, \beta]}^n. \quad (3.3.2)$$

y la condición de equivalencia de norma (3.2.7) a orden  $n$  en el parámetro  $\theta$  se puede escribir como

$$i\delta_\alpha A_\mu^n = \partial_\mu A_\alpha^n + i \sum_{p+q+r=n} [A_\mu^p, A_\alpha^q]_* \quad (3.3.3)$$

donde la suma es sobre todos los valores de  $p, q$  y  $r$  tales que  $p + q + r = n$  y  $*^r$  denota:

$$f(x) *^r g(x) = \frac{1}{r!} \left( \frac{i}{2} \right)^r \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_r \nu_r} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_r} g(x).$$

Las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3) las podemos reordenar para cualquier orden  $n$ , de tal manera que cada ecuación contenga solo componentes de orden  $n$  de sus respectivos campos:

$$\Delta A^n \equiv i\delta_\alpha A_\beta^n - i\delta_\beta A_\alpha^n + [\alpha, A_\beta^n] + [A_\alpha^n, \beta] - iA_{-i[\alpha, \beta]}^n = \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ p, q \neq n}} [A_\alpha^p, A_\beta^q] *^r \quad (3.3.4)$$

$$\Delta_\alpha A_\mu^n \equiv i\delta_\alpha A_\mu^n - i[\alpha, A_\mu^n] = \partial_\mu A_\alpha^n + i \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q \neq n}} [A_\alpha^p, A_\mu^q] *^r. \quad (3.3.5)$$

La forma de proceder para resolver este sistema de ecuaciones es la siguiente: primero se construye la solución  $A_\alpha^n$  de la ecuación (3.3.4) a cada orden, entonces se evalúa esta solución en la ecuación (3.3.5) con el fin de obtener la solución  $A_\mu^n$  orden por orden.

Sin embargo, para obtener la solución de orden  $n$ , las soluciones de orden menor deben insertarse en la parte izquierda de las ecuaciones (3.3.4), (3.3.5). Por lo tanto, el lado derecho de estas ecuaciones dependen explícitamente de  $\theta$ , es decir, las ecuaciones (3.3.4), (3.3.5) se pueden descomponer en una parte homogénea y una no homogénea. Ahora podemos extraer la parte homogénea de las ecuaciones (3.3.4), (3.3.5) definidas por:

$$\Delta \tilde{A}_\alpha^n \equiv i\delta_\alpha \tilde{A}_\beta^n - i\delta_\beta \tilde{A}_\alpha^n + [\alpha, \tilde{A}_\beta^n] + [\tilde{A}_\alpha^n, \beta] - i\tilde{A}_{-i[\alpha, \beta]}^n = 0, \quad (3.3.6)$$

$$\Delta_\alpha \tilde{A}_\mu^n \equiv i\delta_\alpha \tilde{A}_\mu^n - i[\alpha, \tilde{A}_\mu^n] = 0. \quad (3.3.7)$$

Es claro que se puede agregar cualquier solución homogénea  $\tilde{A}_\alpha^n, \tilde{A}_\mu^n$  a las soluciones no homogéneas  $A_\alpha^n, A_\mu^n$  con coeficientes arbitrarios[21]. Esta libertad en las soluciones se estudió por primera vez en [22] y a las combinaciones lineales de las soluciones homogéneas son conocidas como ambigüedades en el mapeo de Seiberg-Witten.

### 3.3.1. Solución a primer y segundo orden

Empezamos discutiendo la solución a primer orden la cual fue encontrada por N.Seiberg and E.Witten [14] para el parámetro de norma y el campo de norma. De acuerdo con esto, las soluciones a primer orden a las ecuaciones (3.3.2), (3.3.3) están dadas por

$$A^1(\lambda, A, \theta) = \theta^{\mu\nu} \frac{1}{4} \{ \partial_\mu \lambda, A_\nu \}, \quad (3.3.8)$$

$$A_\rho^1(A, \theta) = \theta^{\mu\nu} \frac{1}{4} \{ F_{\mu\rho} + \partial_\mu A_\rho, A_\nu \}, \quad (3.3.9)$$

donde

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu].$$

Sin embargo, estas no son las soluciones completas de las ecuaciones correspondientes. Para obtener la solución completa deben de agregarse las soluciones de la parte homogénea de las ecuaciones (3.3.6), (3.3.7).

Obtener estas soluciones junto con la solución homogénea no es un cálculo trivial. Para obtener la solución general comencemos por analizar la condición de cociclo (3.3.4) que a orden más bajo en  $\theta$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \delta_{\lambda_1} A^1(\lambda_2, A, \theta) - \delta_{\lambda_2} A^1(\lambda_1, A, \theta) - i[A^1(\lambda_1, A, \theta), \lambda_2]_* \\ & - i[\lambda_1, A^1(\lambda_2, A, \theta)]_* - A^1(-i[\lambda_1, \lambda_2], A, \theta) = -\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}[\partial_\mu\lambda_1, \partial_\nu\lambda_2], \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

donde la parte homogénea de la ecuación de cociclo a primer orden en  $\theta$  está definida como:

$$\begin{aligned} & \delta_{\lambda_1} A^1(\lambda_2, A, \theta) - \delta_{\lambda_2} A^1(\lambda_1, A, \theta) - i[A^1(\lambda_1, A, \theta), \lambda_2]_* \\ & - i[\lambda_1, A^1(\lambda_2, A, \theta)]_* - A^1(-i[\lambda_1, \lambda_2], A, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

En principio, una vez que una solución a esta ecuación ha sido determinada, ésta puede utilizarse para encontrar expresiones para el campo de materia  $\hat{\Psi}$  y el campo de norma  $\hat{A}$ . Ahora necesitamos dar un Ansatz para resolver esta ecuación. Para esto necesitamos construir todas las cantidades que involucren combinaciones del parámetro de norma  $\lambda$  y del potencial de norma  $A_\mu$  de tal manera que al contraerse con el parámetro antisimétrico  $\theta^{\mu\nu}$ , no aparezcan índices libres tales como:  $\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\lambda A_\nu$  y  $\theta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$ . Usando este razonamiento podemos proponer un Ansatz de la forma

$$A^1(\lambda, A, \theta) = \theta^{\mu\nu}(a\{\partial_\mu\lambda, A_\nu\} + b[\partial_\mu\lambda, A_\nu] + c\partial_\mu A_\nu),$$

para el parámetro de norma con coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  por determinar. La solución completa se obtiene al determinar los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ , esto es, al evaluar este Ansatz en la ecuación no homogénea (3.3.10) como la homogénea (3.3.11). Usando este Ansatz en la ecuación (3.3.10) obtenemos la solución para el parámetro de norma a primer orden dada por (3.3.8) y para la solución de la ecuación homogénea (3.3.11) obtenemos que la solución se puede escribir como

$$\Lambda_{c_\lambda}^1(\lambda, A, \theta) = ic_\lambda^{(1)}\theta^{\mu\nu}[\partial_\mu\lambda, A_\nu]. \quad (3.3.12)$$

Por lo tanto la solución general está dada por estas dos soluciones. Siguiendo un análisis similar al anterior podemos construir un Ansatz para el potencial de norma  $A_\rho^1$  a partir de contracciones con el parámetro  $\theta^{\mu\nu}$  de tal manera que aparezca un índice libre, donde las posibles combinaciones se pueden escribir como:  $\theta^{\mu\nu}F_{\mu\rho}A_\nu$ ,  $\theta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\rho A_\nu$ ,  $\theta^{\mu\nu}D_\rho A_\mu A_\nu$ ,  $\theta^{\mu\nu}D_\rho F_{\mu\nu}$ . Usando estas contracciones podemos proponer un Ansatz de la forma

$$\begin{aligned} A_\rho^1(A, \theta) &= \theta^{\mu\nu}(a'\{F_{\mu\rho}, A_\nu\} + b'[F_{\mu\rho}, A_\nu] + c'\{\partial_\mu A_\rho, A_\nu\} + d'[\partial_\mu A_\rho, A_\nu] \\ &+ e'\{D_\rho A_\mu, A_\nu\} + f'[D_\rho A_\mu, A_\nu] + g'D_\rho F_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

donde  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$  y  $f'$  son constantes por determinar.

La solución completa al mapeo de Seiberg-Witten a primer orden en  $\theta^{\mu\nu}$  se obtiene al evaluar los Ansatz para el parámetro  $\Lambda^1$  y el potencial de norma  $A_\rho^1$  de tal manera que satisfaga las ecuaciones no homogéneas así como las homogéneas. Por lo tanto la solución a la ecuación (3.3.6) esta dada por (3.3.9), mientras que para la solución a la ecuación homogénea (3.3.6) tiene dos contribuciones, donde la primera contribución es obtenida resolviendo la ecuación homogénea

considerando las contribuciones del parámetro de norma provenientes de su respectiva ecuación homogénea :  $\Lambda^{(1)} = \lambda + \Lambda^1$ . La solución general es de la forma

$$A_{c_A^{(1)\rho}}^1(A, \theta) = -2ic_A^{(1)}\theta^{\mu\nu}D_\rho F_{\mu\nu}. \quad (3.3.13)$$

La segunda contribución se obtiene de considerar las solución homogénea de parámetro de norma:  $\Lambda_{c_\lambda^{(1)}}^1$  obteniendo la siguiente contribución

$$A_{c_\lambda^{(1)\rho}}^1(A, \theta) = ic_\lambda^{(1)}\theta^{\mu\nu}[D_\rho A_\mu, A_\nu]. \quad (3.3.14)$$

Por lo tanto la solución general a primer orden es  $\hat{A}_\rho^{(1)} = A_\rho^0 + A_\rho^1 + A_{c_A^{(1)\rho}}^1 + A_{c_\lambda^{(1)\rho}}^1$ .

En estas expresiones  $c_\lambda^{(1)}$  y  $c_A^{(1)}$  representan constantes arbitrarias, las cuales están relacionadas con ambigüedades en el mapeo de Seiberg-Witten y caracterizan las soluciones homogéneas del mapeo. Físicamente las ambigüedades representan la posibilidad de una redefinición en los campos involucrados. Por lo tanto en lo que sigue de este trabajo sólo consideraremos las soluciones asociadas a la parte no homogénea.

Para el caso del tensor electromagnético  $\hat{F}_{\mu\nu}$ , la forma de encontrar la perturbaciones  $F_{\mu\nu}^n$  es usando el desarrollo perturbativo  $\hat{A}_\mu = A_\mu^0 + A_\mu^1 + \dots$  en el tensor

$$\hat{F}_{\mu\nu} := \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_*,$$

donde hemos reemplazado los productos ordinarios por el producto Moyal (\*). Para el caso de la perturbación a primer orden  $F_{\mu\nu}^1$  podemos escribir

$$F_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1 - i[A_\mu^1, A_\nu^0] - i[A_\mu^0, A_\nu^1] - i[A_\mu^0, A_\nu^0]_{*1}.$$

Usando las expresiones para el parámetro de norma  $\Lambda^1$  y el potencial de norma  $A_\mu^1$  la expresión anterior se escribe como

$$F_{\gamma\rho}^1 = -\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}(\{A_\mu^0, \partial_\nu F_{\gamma\rho}^0 + D_\nu F_{\gamma\rho}^0\} - 2\{F_{\gamma\mu}^0, F_{\rho\nu}^0\}). \quad (3.3.15)$$

Las correcciones de orden mayor en el parámetro no conmutativo para el mapeo de Seiberg-Witten pueden ser deducidas por el mismo procedimiento que se utilizó en el caso a primer orden. Por ejemplo, en [23] la solución a segundo orden para el parámetro de norma a segundo orden  $\Lambda^2$  tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Lambda^2 = & \frac{1}{32}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}(\{A_\mu, \{\partial_\nu A_\alpha, \partial_\beta \lambda\}\} + \{A_\mu, \{A_\alpha, \partial_\nu \partial_\beta \lambda\}\} + \{\{A_\mu, \partial_\nu A_\alpha\}, \partial_\beta \lambda\} \\ & - \{\{F_{\mu\alpha}, A_\nu\}, \partial_\beta \lambda\} - 2i[\partial_\mu A_\alpha, \partial_\nu \partial_\beta \lambda]). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Donde el campo de norma a segundo orden  $A_\mu^2$  está dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} A_\gamma^2 = & -\frac{1}{32}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}(\{\{A_\alpha, \partial_\beta A_\mu\}, \partial_\nu A_\gamma\} - \{\{F_{\alpha\mu}, A_\beta\}, \partial_\nu A_\gamma\} - 2i[\partial_\alpha A_\mu, \partial_\beta \partial_\nu A_\gamma]) \\ & - \{A_\mu, \{\partial_\nu F_{\alpha\gamma}, A_\beta\}\} - \{A_\mu, \{F_{\alpha\gamma}, \partial_\nu A_\beta\}\} + \{A_\mu, \{\partial_\nu A_\alpha, \partial_\beta A_\gamma\}\} \\ & + \{A_\mu, \{A_\alpha, \partial_\nu \partial_\beta A_\gamma\}\} - \{\{A_\alpha, \partial_\beta F_{\mu\gamma}\}, A_\nu\} + \{\{D_\alpha F_{\mu\gamma}, A_\beta\}, A_\nu\} \\ & + 2\{\{F_{\mu\alpha}, F_{\gamma\beta}\}, A_\nu\} + 2i[\partial_\alpha F_{\mu\gamma}, \partial_\beta A_\nu] - \{F_{\mu\gamma}, \{A_\alpha, \partial_\beta A_\nu\}\} + \{F_{\mu\gamma}, \{F_{\alpha\nu}, A_\beta\}\}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Ahora las ecuaciones (3.3.16), (3.3.17) se pueden escribir en términos de las soluciones de primer orden  $A_\mu^1$ ,  $A^1$ . Después de reorganizar los índices y reagrupar los términos relevantes se obtiene:

$$A_\lambda^2 = -\frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta} (\{A_\alpha^1, \partial_\beta \lambda\} + \{A_\alpha, \partial_\beta A^1\}) - \frac{i}{16}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}[\partial_\mu A_\alpha, \partial_\nu \partial_\beta \lambda] \quad (3.3.18)$$

$$A_\gamma^2 = -\frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta} (\{A_\alpha^1, \partial_\beta A_\gamma^0 + F_{\beta\gamma}^0\} + \{A_\alpha^0, \partial_\beta A_\gamma^1 + F_{\beta\gamma}^1\}) \quad (3.3.19)$$

$$- \frac{i}{16}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}[\partial_\mu A_\alpha, \partial_\nu(\partial_\beta A_\gamma + F_{\beta\gamma})].$$

El tensor de curvatura  $F_{\mu\nu}^2$  a segundo orden también se puede escribir en términos de soluciones de primer orden:

$$F_{\gamma\rho}^2 = -\frac{1}{8}\theta^{\mu\nu} (\{A_\mu^0, \partial_\nu F_{\gamma\rho}^1 + (D_\nu F_{\gamma\rho}^0)^1\} + \{A_\mu^1, \partial_\nu F_{\gamma\rho}^0 + D_\nu F_{\gamma\rho}^0\} - 2\{F_{\gamma\mu}^0, F_{\rho\nu}^1\}) \quad (3.3.20)$$

$$- 2\{F_{\gamma\mu}^1, F_{\rho\nu}^0\} - \frac{i}{16}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta} ([\partial_\mu A_\alpha, \partial_\nu(\partial_\beta F_{\gamma\rho} + D_\beta F_{\gamma\rho})] - [\partial_\mu F_{\gamma\alpha}, \partial_\nu F_{\rho\beta}]),$$

donde,  $(D_\nu F_{\gamma\rho}^0)^1$  denota

$$(D_\nu F_{\gamma\rho}^0)^1 = D_\nu F_{\gamma\rho}^1 - [A_\nu^1, F_{\gamma\rho}] + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\{\partial_\alpha A_\nu^0, \partial_{\alpha\beta} F_{\gamma\rho}^0\}.$$

Obviamente, cuando las soluciones se escriben en la forma anterior, es mucho más fácil ver como dependen de las soluciones de orden menor.

### 3.3.2. Solución a todos los órdenes

Es claro que las expresiones para ordenes superiores en  $\theta$  son más complicadas y no tan sencillas de obtener por un procedimiento de ensayo y error. Es por ello que hubo una intensa actividad en la búsqueda de un método sistemático a partir del cual una solución exacta al mapeo de Seiberg-Witten pudiese ser obtenida.

Cuando la estructura de las soluciones no homogéneas de las soluciones dadas en (3.3.8) y (3.3.9) se compara con las de segundo orden (3.3.18), (3.3.19), se ve inmediatamente que los términos lineales en  $\theta$  en (3.3.18), (3.3.19) provienen de una expansión donde el término de primer orden tiene una forma similar a (3.3.8) ó (3.3.9). Los términos cuadráticos en  $\theta$  están relacionados con la expansión del producto-\*. Por lo tanto, analizando las soluciones de dos primeros órdenes se puede conjeturar la siguiente estructura general:

$$A_\lambda^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu} \sum_{p+q+r=n} \{A_\mu^p, \partial_\nu A_\lambda^q\}_{*r}, \quad (3.3.21)$$

$$A_\gamma^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu} \sum_{p+q+r=n} \{A_\mu^p, \partial_\nu A_\gamma^q + F_{\nu\gamma}^q\}_{*r}. \quad (3.3.22)$$

Siguiendo un procedimiento similar podemos conjeturar que el término de  $n+1$ -ésimo orden del tensor de curvatura tiene la forma:

$$F_{\gamma\rho}^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu} \sum_{p+q+r=n} (\{A_\mu^p, \partial_\nu F_{\gamma\rho}^q + (D_\nu F_{\gamma\rho})^q\} - 2\{F_{\gamma\mu}^p, F_{\rho\nu}^q\}_{*r}), \quad (3.3.23)$$

donde

$$(D_\nu F_{\gamma\rho})^n = D_\nu F_{\gamma\rho}^n - i \sum_{p+q+r=n} [A_\nu^p, F_{\gamma\rho}^q]_{*r}.$$

Debemos mencionar que estas soluciones no son las soluciones más generales a segundo orden en  $\theta$ . Para obtener la solución más general también se deben incluir las soluciones debidas a la parte homogénea. Sin embargo, la inclusión de soluciones homogéneas con coeficientes arbitrarios hace difícil ver como escribir estas soluciones de forma recursiva y por lo tanto en este trabajo no consideraremos las soluciones debidas a la parte homogénea.

### 3.3.3. El mapeo de Seiberg–Witten para los campos de materia

El mapeo de SW de un campo de materia NC  $\hat{\Psi}$  que se acopla a un campo de norma  $\hat{A}$  en una teoría invariante norma se puede derivar de una relación de equivalencia de norma:

$$\hat{\delta}_\lambda \hat{\Psi}[\psi, A, \theta] = \delta_\lambda \hat{\Psi}[\psi, A, \theta], \quad (3.3.24)$$

de modo que el campo NC  $\hat{\Psi}$  también es funcional de su contraparte ordinaria  $\psi$  y del campo de norma  $A$ . Usando la expansión en serie de potencias del campo de materia NC  $\hat{\Psi}$  (3.3.1), es posible encontrar la solución a la ecuación (3.3.24) utilizando un procedimiento similar al usado en la Sección 3.3.

La relación de equivalencia (3.3.24) es válida tanto para campos bosónicos como fermiónicos, aunque obviamente sus correspondientes términos cinéticos y de interacción en una acción son diferentes. Por lo tanto, en las siguientes discusiones no distinguiremos la naturaleza del campo, ya que para ambos casos la estructura de la relación de equivalencia (3.3.24) y, la estructura de las soluciones son las mismas.

Por otro lado, la relación de equivalencia (3.3.24) es válida en el representación fundamental o en la representación adjunta de un grupo arbitrario de norma no abeliano. Obtendremos todas las soluciones recursivas de orden de (3.3.24) para ambos casos utilizando diferentes enfoques.

### 3.3.4. Representación fundamental

Cuando el campo ordinario está en la representación fundamental, la transformación de norma se lee como

$$\delta_\lambda \psi = i\lambda\psi.$$

La generalización NC de la transformación de norma de un campo NC  $\hat{\Psi}$  se define reemplazando el producto ordinario por un producto- $*$ :

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{\Psi} = i\hat{A}_\lambda * \hat{\Psi}. \quad (3.3.25)$$

Siguiendo la estrategia general presentada en la sección 3.3, podemos escribir la relación de equivalencia de norma (3.3.24) sustituyendo una serie de potencias en el parámetro  $\theta$  para el parámetro

de norma  $\hat{A}_\lambda$  y para el campo de materia  $\hat{\Psi}$  en (3.3.25). Por lo tanto, podemos escribir la relación de equivalencia de norma para el campo de materia como

$$\Delta_\alpha \Psi^n \equiv \delta_\alpha \Psi^n - i\alpha \Psi^n = i \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q \neq n}} A_\alpha^p *^r \Psi^q, \quad (3.3.26)$$

para todas las ordenes. Como se discutió anteriormente, la solución de esta ecuación no es única, es decir, uno tiene la libertad de agregar cualquier solución de la ecuación homogénea

$$\Delta_\alpha \tilde{\Psi}^n = i \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q \neq n}} \tilde{A}_\alpha^p *^r \tilde{\Psi}^q = 0 \quad (3.3.27)$$

a la solución  $\Psi^n$  de (3.3.26).

Una solución de la ecuación (3.3.26) a primer orden se puede obtener proponiendo un Ansatz, el cual incluya todas las combinaciones posibles entre el campo de materia estándar  $\psi$  y el potencial de norma  $A_\mu$  de tal manera que en la contracción con el parámetro  $\theta^{\mu\nu}$  no aparezca ningún índice libre. Posibles combinaciones son:  $\theta^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu \psi$ ,  $\theta^{\mu\nu} A_\mu D_\nu \psi$ ,  $\theta^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \psi$ ,  $\theta^{\mu\nu} [A_\mu, A_\nu] \psi$  y  $\theta^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi$ . Usando este razonamiento podemos escribir un Ansatz usando una combinación de los términos que son linealmente independientes:

$$\Psi^1(\psi, A, \theta) = \theta^{\mu\nu} (a A_\mu \partial_\nu \psi + b A_\mu D_\nu \psi + c [A_\mu, A_\nu] \psi + d F_{\mu\nu} \psi), \quad (3.3.28)$$

con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  constantes por determinar. Usando este Ansatz en la ecuación (3.3.26) obtenemos la solución a primer orden:

$$\Psi^1 = -\frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} A_\mu (\partial_\nu + D_\nu) \psi, \quad (3.3.29)$$

donde  $D_\mu$  es la derivada covariante:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i A_\mu \psi.$$

La solución general para el campo de materia se obtiene al considerar las soluciones de la parte homogénea (3.3.27). Para esto nuevamente consideramos un Ansatz de la forma (3.3.28) obteniendo la siguiente solución para la parte homogénea

$$\tilde{\Psi}_{c_\psi^1}^1 = \frac{1}{2} c_\psi^1 \theta^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi,$$

donde hemos usado la deformación del parámetro de norma hasta primer orden obtenida en (3.3.9):  $\tilde{A}_\lambda = \lambda + \theta^{\mu\nu} \frac{1}{4} \{\partial_\mu \lambda, A_\nu\}$ . Pero también podemos considerar el caso cuando el parámetro de norma  $\tilde{A}_\lambda$  proviene de su respectiva ecuación homogénea (3.3.11), cuya solución fue obtenida en (3.3.12) y tiene la siguiente forma:  $\tilde{A}_{c_\lambda^1}^1 = i c_\lambda^1 \theta^{\mu\nu} [\partial_\mu \lambda, A_\nu]$ . En este caso obtenemos que la solución a la ecuación (3.3.27) está dada por

$$\tilde{\Psi}_{c_\lambda^1}^1 = -\frac{i}{2} c_\lambda^1 \theta^{\mu\nu} [A_\mu, A_\nu] \psi. \quad (3.3.30)$$

En estas expresiones  $c_\lambda^{(1)}$  y  $c_\psi^{(1)}$  representan constantes arbitrarias, las cuales están relacionadas con ambigüedades en el mapeo de Seiberg-Witten y caracterizan las soluciones homogéneas del mapeo.

Como se había discutido anteriormente, las ambigüedades representan la posibilidad de una redefinición en los campos involucrados. Por lo tanto en este trabajo sólo consideraremos las soluciones asociadas a la parte no homogénea. Una suposición natural para encontrar la solución a segundo orden de (3.3.26) es escribir la solución a segundo orden de forma recursiva en términos de los campos ordinarios  $A_\mu$  y  $\psi$  y sus soluciones de primer orden  $A_\mu^1$  y  $\Psi^1$ . Sin embargo, para los campos de materia no es fácil ver esta estructura a primera vista.

Sin embargo, uno puede derivar la ecuación diferencial SW de la solución de primer orden y encontrar sus soluciones a todos los ordenes. Para este propósito, siguiendo [14], derivamos la ecuación diferencial (3.3.29) variando el parámetro de deformación infinitesimalmente  $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$ :

$$\delta\theta^{\mu\nu} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \theta^{\mu\nu}} = -\frac{1}{4} \delta\theta^{\alpha\beta} \hat{A}_\alpha * (\partial_\beta \hat{\Psi} + \hat{D}_\beta \hat{\Psi}), \quad (3.3.31)$$

donde el lado derecho de esta ecuación la podemos escribir como productos de cantidades antisimétricas:

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \theta^{\mu\nu}} = -\frac{1}{8} \hat{A}_\mu * (\partial_\nu \hat{\Psi} + \hat{D}_\nu \hat{\Psi}) + \frac{1}{8} \hat{A}_\nu * (\partial_\mu \hat{\Psi} + \hat{D}_\mu \hat{\Psi}), \quad (3.3.32)$$

donde la derivada covariante no conmutativa esta definida en la representación fundamental como:

$$\hat{D}_\mu \hat{\Psi} = \partial_\mu \hat{\Psi} - i \hat{A}_\mu * \hat{\Psi}.$$

La forma integral de la ecuación (3.3.32) está dada por

$$\hat{\Psi} = \psi - \frac{1}{8} \int d\theta^{\mu\nu} \left[ \hat{A}_\mu * (\partial_\nu \hat{\Psi} + \hat{D}_\nu \hat{\Psi}) - \hat{A}_\nu * (\partial_\mu \hat{\Psi} + \hat{D}_\mu \hat{\Psi}) \right]. \quad (3.3.33)$$

Usando un procedimiento similar al presentado en [24], asumiremos que el campo de materia no conmutativo  $\hat{\Psi}$  admite un desarrollo perturbativo en el parámetro  $\theta$ , el cual se puede escribir hasta orden  $n+1$  y lo denotamos como:

$$\hat{\Psi}^{(n+1)} = \psi + \Psi^1 + \dots + \Psi^n + \Psi^{n+1},$$

donde este desarrollo perturbativo esta definido formalmente, es decir, que el campo de materia no conmutativo  $\hat{\Psi}$  se puede expresar formalmente como una serie de Taylor:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \theta^{\mu_k \nu_k} \left( \frac{\partial^k}{\partial \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \partial \theta^{\mu_k \nu_k}} \hat{\Psi}^{(n+1)} \right)_{\theta=0} \\ &= \psi + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \theta^{\mu\nu} \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \theta^{\mu_k \nu_k} \left( \frac{\partial^{k-1}}{\partial \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \partial \theta^{\mu_k \nu_k}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta^{\mu\nu}} \hat{\Psi}^{(n+1)} \right) \right)_{\theta=0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando esta convención se puede inferir de la ecuación (3.3.32) que  $\frac{\partial \hat{\Psi}^{(n+1)}}{\partial \theta^{\mu\nu}}$  requiere conocer  $\hat{\Psi}^{(n)}$  y  $\hat{A}_\mu^{(n)}$ , es decir, que para determinar el campo de materia hasta orden  $\hat{\Psi}^{(n+1)}$  se requiere conocer los campos a un orden menor:  $\hat{\Psi}^{(n)}$  y  $\hat{A}_\mu^{(n)}$ . Usando este hecho podemos escribir la forma integral del campo de materia (3.3.33) como:

$$\hat{\Psi}^{(n+1)} = \psi - \frac{1}{8} \int d\theta^{\mu\nu} \left[ \hat{A}_\mu^{(n)} * (\partial_\nu \hat{\Psi}^{(n)} + \hat{D}_\nu \hat{\Psi}^{(n)}) - \hat{A}_\nu^{(n)} * (\partial_\mu \hat{\Psi}^{(n)} + \hat{D}_\mu \hat{\Psi}^{(n)}) \right]. \quad (3.3.34)$$

Recordemos que hemos asumido que el campo  $\hat{\Psi}^{(n+1)}$  admite un desarrollo en Taylor, por lo tanto, la expresión que se encuentra dentro del integrando se puede escribir como una serie de Taylor :

$$\hat{\Psi}^{(n+1)} = \psi - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \theta^{\mu\nu} \theta^{\mu_2\nu_2} \dots \theta^{\mu_k\nu_k} \left( \frac{\partial^{k-1}}{\partial \theta^{\mu_2\nu_2} \dots \partial \theta^{\mu_k\nu_k}} \hat{A}_\mu^{(n)} * \left( \partial_\nu \hat{\Psi}^{(n)} + (\hat{D}_\nu \hat{\Psi})^{(n)} \right) \right)_{\theta=0}. \quad (3.3.35)$$

donde

$$(\hat{D}_\mu \hat{\Psi})^{(n)} = \partial_\mu \hat{\Psi}^{(n)} - i \hat{A}_\mu^{(n)} * \hat{\Psi}^{(n)}.$$

Ahora consideremos la perturbación del campo de norma a orden  $n + 1$ , es decir,  $\hat{\Psi}^{n+1}$  la cual se puede leer de la  $n + 1$ -ésima componente de la serie de Taylor dada en (3.3.35):

$$\hat{\Psi}^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)!} \theta^{\mu\nu} \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_n\nu_n} \left( \frac{\partial^n}{\partial \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \partial \theta^{\mu_n\nu_n}} \hat{A}_\mu^{(n)} * \left( \partial_\nu \hat{\Psi}^{(n)} + (\hat{D}_\nu \hat{\Psi})^{(n)} \right) \right)_{\theta=0}$$

donde, por consistencia con la serie de Taylor, debemos considerar todas las combinaciones posibles de la función  $\hat{A}_\mu^{(n)} * \left( \partial_\nu \hat{\Psi}^{(n)} + (\hat{D}_\nu \hat{\Psi})^{(n)} \right)$  que sean consistentes con el orden del desarrollo, es decir, sólo debemos de considerar los términos que den origen a las contribuciones de orden  $n$  en el parámetro  $\theta$ :  $\sum_{p+q+r=n} \hat{A}_\mu^p *^r \left( \partial_\nu \hat{\Psi}^q + (\hat{D}_\nu \hat{\Psi})^q \right)$ . La ecuación anterior se puede escribir como:

$$\hat{\Psi}^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)!} \theta^{\mu\nu} \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_n\nu_n} \left( \frac{\partial^n}{\partial \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \partial \theta^{\mu_n\nu_n}} \sum_{p+q+r=n} \hat{A}_\mu^p *^r \left( \partial_\nu \hat{\Psi}^q + (\hat{D}_\nu \hat{\Psi})^q \right) \right),$$

donde

$$(D_\nu \Psi)^n = \partial_\nu \Psi^n - i \sum_{p+q+r=n} A_\mu^p *^r \Psi^q.$$

Después de tomar las derivadas con respecto del parámetro  $\theta$  obtenemos una solución recursiva para todos los ordenes de la relación de equivalencia de norma (3.3.26):

$$\hat{\Psi}^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)} \theta^{\mu\nu} \sum_{p+q+r=n} \hat{A}_\mu^p *^r \left( \partial_\nu \hat{\Psi}^q + (\hat{D}_\nu \hat{\Psi})^q \right), \quad (3.3.36)$$

donde es fácil notar que la solución a primer orden (3.3.29) se recupera si elegimos  $n = 0$ .

### 3.3.5. Representación adjunta

Cuando el campo ordinario está en la representación adjunta, la transformación de norma se puede escribir como

$$\delta_\lambda \psi = i[\lambda, \psi]. \quad (3.3.37)$$

Nuevamente la generalización NC de la transformación de norma (3.3.37) se obtiene reemplazando el producto ordinario por un producto- $*$ :

$$\hat{\delta}_\lambda \hat{\Psi} = i[\hat{A}_\lambda, \hat{\Psi}]_*. \quad (3.3.38)$$

Siguiendo la estrategia general, la relación de equivalencia de norma (3.3.24) se puede escribir como

$$\Delta_\alpha \Psi^{(n)} \equiv \delta_\alpha \Psi^{(n)} - i[\alpha, \Psi^{(n)}] = i \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q \neq n}} \Lambda_\alpha^{(p)} *^r \Psi^{(q)}, \quad (3.3.39)$$

para todas las ordenes. Como se discutió anteriormente, uno tiene la libertad de agregar cualquier solución homogénea  $\tilde{\Psi}^{(n)}$  de la ecuación

$$\Delta_\alpha \tilde{\Psi}^{(n)} = i \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q \neq n}} \Lambda_\alpha^{(p)} *^r \tilde{\Psi}^{(q)} = 0, \quad (3.3.40)$$

para todos los órdenes. Las soluciones de la ecuación (3.3.39) se pueden encontrar ya sea resolviendo directamente este orden de ecuación por orden o resolviendo la ecuación diferencial respectiva como se discutió en las sección anterior.

Una solución de la ecuación (3.3.39) a primer orden se puede encontrar haciendo un análisis similar al caso de la representación fundamental (3.3.28), es decir, construyendo un Ansatz similar al (3.3.28) en términos de conmutadores y anticonmutadores:

$$\begin{aligned} \Psi^1(\psi, A, \theta) = & \theta^{\mu\nu} (a\{A_\mu, \partial_\nu\}\psi + b[A_\mu, \partial_\nu]\psi + c\{A_\mu, D_\nu\}\psi \\ & + d[A_\mu, D_\nu]\psi + eF_{\mu\nu}\psi + f[A_\mu, A_\nu]\psi), \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

donde  $a, b, c, d, e$  y  $f$  son constantes por determinar. Usando este Ansatz en la ecuación (3.3.39) encontramos la siguiente solución

$$\Psi^1 = -\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{A_\mu, \partial_\nu + D_\nu\}\psi. \quad (3.3.42)$$

De manera análoga a la sección anterior, se puede derivar la ecuación diferencial SW a partir de la solución de primer orden y posteriormente encontrar sus soluciones a todos los ordenes:

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \theta^{\mu\nu}} = -\frac{1}{8}\{\hat{A}_\mu, \partial_\nu \hat{\Psi} + \hat{D}_\nu \hat{\Psi}\}_* + \frac{1}{8}\{\hat{A}_\nu, \partial_\mu \hat{\Psi} + \hat{D}_\mu \hat{\Psi}\}_*. \quad (3.3.43)$$

La solución recursiva para el campo de norma  $\Psi^{(n+1)}$  valida para todos los ordenes

$$\Psi^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu} \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q \neq n}} \left\{ A_\mu^{(p)}, \left( \partial_\nu \Psi^{(q)} + (D_\nu \Psi)^q \right) \right\}_{*^r}. \quad (3.3.44)$$

Dado que la estructura de las soluciones es la misma para los campos escalar y fermiónico, esta solución (3.3.44) también se puede usar para los campos fermiónicos. Después de introducir correctamente los anticonmutadores / conmutadores, la forma de la solución (3.3.44) es similar a la (3.3.36) dada en la sección anterior, excepto que la derivada covariante  $D_\mu$  en este caso es

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i[A_\mu, \psi].$$

y por lo tanto

$$(D_\nu \Psi)^n = \partial_\nu \Psi^n - i \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q \neq n}} [A_\mu^{(p)}, \Psi^{(q)}]_{*^r}.$$

## Parte II

# El monopolio de Dirac



# Capítulo 4

## Monopolos Magnéticos

### 4.1. Monopolos en electrodinámica clásica

La electrodinámica clásica se puede describir de una manera elegante mediante las cuatro ecuaciones de Maxwell sin fuentes, es decir, en ausencia de cargas eléctricas y magnéticas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (4.1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.1.4)$$

Si uno representa los campos eléctricos y magnéticos por líneas de campo, la divergencia distinta de cero indicaría que las líneas de campo salen o terminan en una región del espacio. Por lo tanto, las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.3) muestran que ni las líneas de campo eléctrico ni las líneas de campo magnético tienen puntos de inicio o fin.

Las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.4) muestran que los campos magnéticos dependientes del tiempo generan campos eléctricos, y viceversa. Estas ecuaciones tienen una simetría conocida como dualidad eléctrica-magnética: si reemplazamos los campos eléctricos y magnéticos como

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B} \quad \text{y} \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E}, \quad (4.1.5)$$

las ecuaciones permanecen sin cambios. Esto significa que los campos eléctricos y magnéticos se comportan de manera similar. De manera más precisa, el campo eléctrico alrededor de la carga eléctrica  $q$  tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (4.1.6)$$

y una carga eléctrica  $q$  que se mueve en un campo electromagnético a velocidad  $v$  experimenta la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (4.1.7)$$

Para mantener la dualidad electromagnética en el caso con fuentes se deben verificar las transformaciones en presencia de fuentes, en donde se puede observar que para los campos la dualidad es  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ , mientras que para las fuentes la dualidad  $(\rho_e, \vec{J}_e) \rightarrow (\rho_g, \vec{J}_g)$ ,  $(\rho_g, \vec{J}_g) \rightarrow -(\rho_e, \vec{J}_e)$ , deja sin cambios las siguientes ecuaciones de Maxwell con fuentes eléctricas y magnéticas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad (4.1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - 4\pi\vec{J}_g, \quad (4.1.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_g, \quad (4.1.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\vec{J}_e, \quad (4.1.11)$$

donde  $q$  y  $g$  son las carga eléctrica y magnética, mientras que las corrientes eléctricas y magnéticas son  $\vec{J}_e$  y  $\vec{J}_g$  respectivamente.

De acuerdo con la dualidad (4.1.5) esta sugiere que de existir las cargas magnéticas, el campo magnético alrededor de una carga magnética  $g$  sería el dual de la ecuación (4.1.6)

$$\vec{B}(\vec{r}) = g \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (4.1.12)$$

y la carga magnética  $g$  experimentara la fuerza

$$\vec{F} = g \left( \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E} \right).$$

Sin embargo, debido a que no se han encontrado cargas magnéticas, la simetría de dualidad parece romperse al considerar las fuentes. Esto significa que, de hecho, la única diferencia entre la electricidad y el magnetismo es que las cargas eléctricas aparecen en la naturaleza de manera aislada mientras que para las cargas magnéticas aún no hemos encontrado una de manera aislada.

Esto plantea la pregunta de por qué la naturaleza tiene esta asimetría. Desde el punto de vista de la electrodinámica clásica, no hay ninguna razón por la cual no podría haber cargas magnéticas. En otras palabras, la electrodinámica clásica es perfectamente compatible con la noción de monopolos magnéticos, y desde el punto de vista estético es extraño que los monopolos magnéticos parezcan no existir, porque su existencia haría la teoría electromagnética más simétrica.

## 4.2. Monopolos en la teoría cuántica

En la teoría cuántica, la pregunta sobre la posible existencia de monopolos magnéticos se vuelve más compleja pero también más intrigante. Esto es porque resulta que en la mecánica cuántica, las fuerzas electromagnéticas deben describirse en términos de los potenciales escalar y vectorial  $\phi$  y  $\vec{A}$ , en lugar de los campos eléctrico y magnético  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . Estos potenciales aparecen en la teoría como campos dependientes de posición, cuyas variaciones dan lugar a campos eléctricos y magnéticos a través de las relaciones.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi, \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

En la electrodinámica clásica, estos potenciales se utilizan como una herramienta muy conveniente para hacer cálculos, pero su uso es opcional y uno puede hacer cálculos en términos de los campos eléctricos y magnéticos sin tener que recurrir al potencial vectorial  $\vec{A}$  y escalar  $\phi$ .

La manera en como son introducidos los potenciales escalar y vectorial a través de la ecuación (4.2.1) rompe la simetría de la dualidad (4.1.5), pero uno debe notar que estos potenciales en sí mismos no son cantidades físicas, es decir, no son observables. Las cantidades observables son los campos eléctricos y magnéticos, de hecho, hay un número infinito de diferentes potenciales que dan lugar a los mismos campos eléctricos y magnéticos, donde, el cambio de una de estas configuraciones a otra físicamente equivalente se conoce como una transformación de norma:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda,$$

donde  $\lambda$  es una función arbitraria. Debido a que las cantidades físicas no cambian bajo tales transformaciones, decimos que la teoría tiene una simetría de norma. La simetría de norma de las ecuaciones de Maxwell se conoce matemáticamente como  $U(1)$ . Sin embargo, los potenciales (4.2.1) parecen prohibir la existencia de las cargas magnéticas de acuerdo con uno de los resultados básicos del análisis vectorial, es decir, la divergencia del rotacional de un campo vectorial siempre es cero, por lo que obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0. \quad (4.2.2)$$

Por lo tanto, si el campo magnético está representado por el potencial vectorial a través de la ecuación (4.2.1), entonces sus líneas de campo nunca podrán converger a un punto. Esto parece mostrar que no se pueden describir monopolos magnéticos utilizando el potencial vectorial  $\vec{A}$ .

Esta restricción se vuelve importante en la mecánica cuántica. Recordemos que en mecánica cuántica una partícula se describe en términos de su función de onda  $\psi$ , la cual es compleja. En general, la partícula no tiene una posición bien definida, pero la probabilidad de encontrar la partícula en una posición particular viene dada por el cuadrado del valor absoluto de la función de onda,  $|\psi|^2$ .

Cuando describimos partículas cargadas eléctricamente en presencia de un campo electromagnético externo en mecánica cuántica, la fase compleja de la función de onda depende del potencial vectorial  $\vec{A}$  asociado al campo externo, es decir, la fase de la función de onda se puede escribir explícitamente como

$$e^{ig(\vec{r})}, \quad \text{donde} \quad g(\vec{r}) \equiv \frac{e}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (4.2.3)$$

Los detalles se pueden ver en el apéndice B. De manera más precisa, cuando la función de onda se mueve en el espacio, la fase compleja  $e^{ig(\vec{r})}$  cambia conforme al cambio de la componente del potencial vectorial paralelo al movimiento. Esto es compatible con la simetría del norma, porque ni la fase compleja ni el potencial vectorial son cantidades directamente observables.

Sin embargo, esto muestra que si se quiere describir la interacción entre una carga eléctrica y un campo magnético se necesita usar el potencial vectorial en lugar del campo magnético en mecánica cuántica. Debido a que el potencial vectorial no puede describir un monopolo magnético, ¿significa esto que la mecánica cuántica prohíbe la existencia de cargas magnéticas?

### 4.3. El monopolo de Dirac

En las secciones previas se ha analizado la situación de los monopolos magnéticos en el contexto de la electrodinámica clásica y en el contexto mecánico cuántico. En el contexto clásico hemos considerado el movimiento clásico no relativista de una carga eléctrica  $e$  en un campo externo debido a un monopolo magnético. Es por eso que sería correcto definir una carga magnética  $g$  como fuente de un campo magnético estático tipo Coulomb (4.1.12).

La cuantización de la teoría requiere empezar por hacer una generalización de la descripción Lagrangiana estándar para un sistema de cargas interactuantes de dos tipos: eléctrica y magnética. A primera vista esta generalización parece ser trivial. Como en la electrodinámica convencional, la dinámica de una partícula clásica con carga  $e$  y masa  $m$  en un campo electromagnético externo está dada por la fuerza de Lorentz (4.1.7). Esta ecuación de movimiento se puede derivar de un Lagrangiano de la forma

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}, \quad (4.3.1)$$

donde el segundo término del Lagrangiano es el término de interacción entre cargas eléctricas y magnéticas. Sin embargo, de acuerdo con la definición estándar, el potencial vectorial del campo magnético  $\vec{B}$  debe satisfacer la relación

$$\vec{B} = q\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

y al mismo tiempo la ley de Gauss magnética demanda que la carga magnética sea la fuente de tal campo:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi g\delta^{(3)}(\vec{r})$ , lo que está en contradicción con la condición (4.2.2).

Podemos concluir que la electrodinámica clásica no impide la existencia de las cargas magnéticas mientras que la descripción mecánica cuántica requiere la existencia del potencial vectorial  $\vec{A}$  asociado al monopolo magnético, el cual parece ser imposible poderlo construir. Por lo tanto parece ser que la mecánica cuántica prohíbe la posibilidad de que existan las cargas magnéticas.

Dirac estudio este problema en 1931 e introdujo un potencial de tal manera que es posible evitar tal conclusión. Debido a que el campo magnético  $\vec{B}$  es esféricamente simétrico, el potencial vectorial correspondiente podría escribirse como

$$\vec{A}(\vec{r}) = A(\theta)\vec{\nabla}\varphi, \quad (4.3.2)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo azimutal en coordenadas esféricas y  $A(\theta)$  es una función que depende solamente del ángulo  $\theta$ . Se puede ver fácilmente que usando el hecho de que el gradiente de  $\varphi$  se puede escribir como  $\vec{\nabla}\varphi = (r\sin\theta)^{-1}\hat{e}_\varphi$  y tomando la elección  $A(\theta) = -g(1 + \cos\theta)$  se obtiene

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g(1 + \cos\theta)}{r\sin\theta} (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0),$$

donde se ha usado que en coordenadas esféricas  $\hat{e}_\varphi = -\hat{e}_x \sin\varphi + \hat{e}_y \cos\varphi$ . Finalmente se puede escribir el potencial vectorial en la forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{r} \frac{[\vec{r} \times \hat{\mathbf{n}}]}{r - (\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})}, \quad (4.3.3)$$

donde el vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$  se dirige a lo largo del eje  $z$ :  $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ . Este es el celebrado *potencial de Dirac* [25]. A primera vista, este parece ser el potencial que necesitamos para describir un monopolo,

porque después de un simple cálculo tenemos, por ejemplo,

$$B_x = -\partial_z A_y = \partial_z \left( \frac{gx}{r(r-z)} \right) = g \frac{x}{r^3}.$$

En consecuencia el rotacional del potencial  $\vec{A}$  es

$$\vec{B}(\vec{r}) = [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] = g \frac{\vec{r}}{r^3},$$

de modo que el potencial de Dirac obedece a forma de los campos de Coulomb, es decir, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r$ .

Sin embargo, uno debe tener cuidado con tal cálculo, porque el potencial vectorial de Dirac (4.3.3) presenta una singularidad adicional a largo de la línea  $\theta = 0$ , aunque es regular <sup>1</sup> a lo largo de la dirección  $\theta = \pi$ . Esto significa que el cálculo directo del campo magnético anterior no es correcto a lo largo de la línea de singularidad semiinfinita. En la vecindad de la singularidad tenemos  $\vec{A}(\vec{r}) \sim 2g\vec{\nabla}\varphi$ .

Notemos que tal potencial es el potencial típico para una cuerda singular de flujo magnético a lo largo del semieje positivo  $z$ . De hecho, en términos generales, el potencial (4.3.2) se puede escribir como

$$\vec{A}(\vec{r}) = -g(1 + \cos\theta)\vec{\nabla}\varphi = (1 + \cos\theta)\frac{i}{e}U^{-1}\vec{\nabla}U, \quad (4.3.4)$$

donde  $U = e^{-ieg\varphi}$ . De esta forma el potencial de Dirac es una transformación de norma pura, la cual es singular y está complementada por un factor dependiente del ángulo  $\varphi$ .

Es por eso debemos tener cuidado en utilizar el potencial (4.3.3) el cual es singular en el eje  $z$  positivo y en el origen. Así que es necesario estudiar una forma regularizada de este potencial. Por ejemplo en [26], se propone una regularización para el potencial de Dirac en donde la idea básica es desplazar la carga magnética a una distancia  $\varepsilon$  del origen de tal manera que se evite la singularidad a lo largo del eje positivo  $z$  y del origen. Esto es posible si hacemos el remplazo de  $r^2 \rightarrow r^2 + \varepsilon^2$  en los términos que no involucren algún tipo de dependencia en ángulo  $\theta$ , es decir, el potencial de Dirac (4.3.3) se puede regularizar como

$$\vec{A}_R(\vec{r}, \varepsilon) = \frac{g}{R} \frac{[\vec{r} \times \hat{\mathbf{n}}]}{R - (\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})}, \quad (4.3.5)$$

donde  $R = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \varepsilon^2}$ . Por lo tanto, el campo magnético regularizado es

$$\vec{B}_R(\vec{r}, \varepsilon) = g \frac{\vec{r}}{R^3} - g\varepsilon^2 \left( \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R^3 [R - (\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})]} + \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R^2 [R - (\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})]^2} \right). \quad (4.3.6)$$

que en el límite  $\varepsilon^2 \rightarrow 0$ , se reduce a

$$\vec{B}_R(\vec{r}, \varepsilon) \stackrel{\varepsilon^2 \rightarrow 0}{\sim} g \frac{\vec{r}}{R^3} - 2g\varepsilon^2 \hat{\mathbf{n}} \Theta(z) \left( \frac{1}{r^2 (x^2 + y^2 + \varepsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)^2} \right), \quad (4.3.7)$$

---

<sup>1</sup>La  $S^2$  esfera está parametrizada por dos ángulos de las coordenadas esféricas. Dado que el potencial (4.3.3) no tiene singularidades en su hemisferio sur, se puede introducir un índice adicional para etiquetarlo:  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}^S$ .

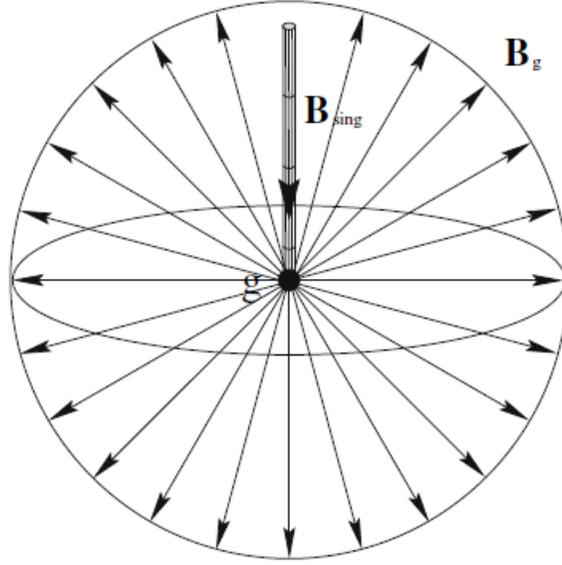


Figura 4.3.1: Campo magnético del potencial de Dirac.

donde  $\Theta(z)$  es la función de Heaviside. En esta ecuación se puede ver que los términos singulares difieren de cero solo en el semieje infinito positivo  $z$ . Para calcular el flujo del campo magnético en esa dirección, evaluamos la integral sobre el elemento infinitesimal de la superficie ortogonal a este eje. Entonces solo el segundo término entre paréntesis contribuye. Por lo tanto el campo magnético se puede escribir como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_g + \vec{B}_{sing} = g \frac{\vec{r}}{R^3} - 4\pi g \hat{n} \Theta(z) \delta(x) \delta(y). \quad (4.3.8)$$

Por lo tanto, además del campo de Coulomb esperado, obtenemos un campo magnético debido a la singularidad  $\vec{B}_{sing}$ , es decir, el potencial de Dirac no corresponde solo a un monopolo magnético, sino a un solenoide semiinfinito con un extremo en el origen e infinitamente delgado como se puede ver en la figura (4.3.1).

Si calculamos el flujo total de los campos a través de una superficie cerrada:

$$\begin{aligned} \Phi_{total} &= \oint d\sigma \vec{B} = g \left( \oint \frac{\vec{r}}{R^3} - 4\pi \oint g \hat{n} \Theta(z) \delta(x) \delta(y) \right) \\ &= 4g\pi - 4g\pi = 0, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

donde el flujo del campo de cuerda cancela exactamente la contribución de la parte de Coulomb.

#### 4.4. Transformaciones de la cuerda de Dirac

Como vimos en la sección anterior, el potencial singular (4.3.3) conduce a la aparición de un campo adicional debido a una cuerda de acuerdo con el segundo término en (4.3.8), dirigido a lo

largo de la singularidad, además del campo magnético de Coulomb esféricamente simétrico. Este campo adicional es un resultado que no se esperaba y que no es del todo consistente con las ecuaciones de Maxwell magnéticas, es decir, este campo adicional cancela a la contribución de la parte de Coulomb magnética. Para deshacernos de esta parte singular, se puede establecer una condición que la haga inobservable y, por lo tanto, no física. Un primer paso para asegurar esto a nivel clásico es exigir que todas las configuraciones posibles de cuerda y sus posiciones tengan que ser físicamente equivalentes. De hecho, debemos describir las transformaciones de la configuración de una cuerda a otra y analizar bajo qué condiciones son idénticas.

Recordemos que un potencial electromagnético se define hasta una transformación de norma  $U(1)$ ,  $U(\vec{r}) = \exp\{ie\lambda(\vec{r})\}$ :

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \frac{i}{e} U^{-1} \vec{\nabla} U = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda(\vec{r}). \quad (4.4.1)$$

Ambos potenciales  $\vec{A}$  y  $\vec{A}'$  corresponden al mismo campo magnético. Por otro lado, el gradiente de la función de norma  $\vec{\nabla} \lambda(\vec{r})$  tiene valores únicos casi en todas partes en el espacio, con la excepción de los puntos en donde se vuelve singular. Por lo tanto, tal función de norma es una fuente adicional de los términos singulares en el vector potencial transformado  $\vec{A}'$  así como en el campo correspondiente  $\vec{B}'$ . De hecho, consideremos cómo el flujo magnético a través de una superficie cerrada  $\sigma$  cambia bajo la transformación de norma (4.4.1)

$$\Delta \Phi = \int_{\sigma} d^2 S \hat{n}_S \cdot (\vec{B}' - \vec{B}) = \int_{\sigma} d^2 S \hat{n}_S \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \lambda)] = \oint d\vec{l} \cdot \vec{\nabla} \lambda.$$

Ciertamente, el flujo es constante solo si la función de norma satisface la condición  $\lambda(\varphi + 2\pi) = \lambda(\varphi)$ , de lo contrario,  $\Delta \Phi \neq 0$ .

Esta característica resulta ser un punto clave en el análisis del potencial del monopolo magnético. Ahora consideremos una transformación de norma singular  $U(\vec{r}) = \exp\{2ieg\varphi\}$ , la cual da como resultado la transformación<sup>2</sup> del potencial  $\vec{A}^S$  (4.3.3)

$$\begin{aligned} \vec{A}^S &\rightarrow \vec{A}^S - \frac{i}{e} e^{-2ieg\varphi} \vec{\nabla} e^{2ieg\varphi} = -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \hat{e}_{\varphi} + \frac{g}{r \sin \theta} \hat{e}_{\varphi}. \\ &= \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{e}_{\varphi} \equiv \vec{A}^N. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

La transformación de norma está dada por la función

$$\lambda(\vec{r}) = 2g\varphi = 2g \arctan(y/x).$$

Esto se traduce en la aparición de un campo magnético singular adicional  $\Phi_{cuerda} = 4\pi g$  a lo largo del eje  $z$ .

Ahora analicemos la transformación de potencial  $\vec{A}^S$  dada por la ecuación (4.4.2), es decir, esta transformación se puede entender como la adición un flujo extra, generado por la transformación de norma  $U(\vec{r}) = \exp\{2ieg\varphi\}$ , y el flujo del campo de la cuerda de un monopolo a lo largo del semieje positivo  $z$ . La suma es obviamente el campo de una cuerda semiinfinita a lo largo del semi-eje

<sup>2</sup>Tenga en cuenta que, estrictamente hablando, tales transformaciones deben definirse como distribuciones. Hay muchas paradojas y conclusiones incorrectas en la teoría monopolo que se originaron a partir de tratamientos ingeniosos de expresiones singulares como (1.54).

negativo  $z$  que corresponde a la singularidad del vector potencial transformado  $\vec{A}^N$ . De hecho, este potencial  $\vec{A}^N$  es singular a lo largo de la línea  $\theta = \pi$ , pero regular en la dirección opuesta  $\theta = 0$ .

Por lo tanto, la transformación de norma (4.4.2) actúa como una rotación de la línea de singularidad del monopolo en un ángulo  $\pi$ . De manera más general, esto significa que la posición de la cuerda se define hasta tal transformación. Por lo tanto, el campo debido a la cuerda no es físico.

## 4.5. Condición de cuantización de la carga

En la sección (4.4) ya hemos considerado algunas propiedades de las transformaciones de norma del vector potencial singular  $\vec{A}$ . Sin embargo, el potencial del campo electromagnético no solo define los campos sino que también da la forma de la interacción entre una carga eléctrica y el campo electromagnético. En mecánica cuántica, esta interacción se describe mediante la derivada covariante que actúa sobre la función de onda de una partícula:

$$D\psi(\vec{r}) \equiv [\vec{\nabla} - ie\vec{A}(r)]\psi(\vec{r}).$$

Recordemos que bajo transformaciones de norma del potencial (4.4.1), tanto la función de onda como la derivada covariante transforman de la misma manera:

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow U\psi(\vec{r}) = e^{ie\lambda(\vec{r})}\psi(\vec{r}), \quad D\psi(\vec{r}) \rightarrow UD\psi(\vec{r}) = e^{ie\lambda(\vec{r})}D\psi(\vec{r}),$$

donde la función de norma  $\lambda(\vec{r})$  puede ser, en principio, una función periódica. Sin embargo, hasta este punto los grados de libertad de norma no importan a nivel clásico: la ecuación de movimiento de una partícula cargada clásica en un campo electromagnético externo permanece invariante bajo la transformación (4.4.1). En mecánica cuántica la situación es diferente ya que la cantidad fundamental es ahora la acción del sistema y la integral de trayectoria correspondiente que define las amplitudes de transición y las variables canónicas. Por lo tanto, bajo las transformaciones de norma (4.4.1), el Lagrangiano (4.3.1) y la acción también cambian como

$$L \rightarrow L + e\vec{r}\vec{\nabla}\lambda(\vec{r}) = L + \frac{d}{dt}[e\lambda(\vec{r})],$$

$$S = \int_0^T dtL \rightarrow S + e\lambda(\vec{r})|_0^T.$$

Dado que la amplitud de transición  $\sim e^{iS}$  debe ser una cantidad invariante de norma, la función de norma  $\lambda(\vec{r})$  ya no es una función arbitraria de las coordenadas, porque cualquier cambio en la acción de la mecánica cuántica debe dejar la amplitud de transición sin cambios. Esto es posible si  $\delta S = e\delta\lambda(\vec{r}) = 2\pi n$ , donde,  $n \in \mathbb{Z}$ .

La consecuencia es la cuantización de los parámetros del sistema mecánico cuántico. Para verlo, consideremos el cambio de la acción bajo la transformación de norma (4.4.1) dado por  $U = \exp\{2ieg\varphi\}$  y supongamos que tenemos una trayectoria cerrada, es decir  $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ . Luego, el sistema vuelve a la posición inicial, pero la acción puede recoger un factor de fase adicional. De hecho, si establecemos  $\vec{r}(T) = \vec{r}(0)$ , el término de interacción se puede escribir como una integral a lo largo del contorno cerrado  $l$ :

$$S_{int} = e \int_0^T \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{r} dt = e \oint_l \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (4.5.1)$$

Bajo la transformación de norma (4.4.1) este término cambia a

$$\delta S_{int} = 2eg\delta\phi = 4\pi eg.$$

Por lo tanto la amplitud de transición mecánico-cuántica permanece invariante si  $\delta S_{int} = 4\pi eg = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , es decir, si se cumple la condición de cuantización de carga de Dirac:

$$eg = \frac{n}{2}. \quad (4.5.2)$$

La condición de cuantización de la carga se puede derivar de muchas maneras diferentes. Históricamente, la cuantización de la carga fue derivada a partir del análisis de la ecuación de Schrödinger que describe una partícula no relativista de masa  $m$  en un campo externo:

$$H\Psi(\vec{r}) = -\frac{1}{2m} \left( \vec{\nabla} - ie\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}),$$

donde, de acuerdo con el procedimiento de cuantización canónica, el momento  $\vec{P}$  en el Hamiltoniano clásico es reemplazado por el operador de la mecánica cuántica  $-i\vec{\nabla}$ . Entonces la derivada covariante es  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ .

Dirac notó [25] que el término de interacción de una partícula cargada y un campo electromagnético externo se puede escribir en la forma (4.5.1). Por lo tanto, la función de onda de esta partícula se puede representar como

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{ig(\vec{r})} \Psi_0(\vec{r}, t),$$

donde

$$g(\vec{r}) \equiv \frac{e}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}', \quad (4.5.3)$$

con  $\Psi_0(\vec{r}, t)$  una función de onda que satisface la ecuación de Schrödinger libre (ver apéndice B). El punto es que la función de onda debe ser una función continua de  $\vec{r}$ , pero la fase de  $\Psi$  puede ser discontinua en algún punto. Para evitar que esta posible discontinuidad se vea reflejada en la función de onda, la única condición es que el cambio del factor de fase  $\oint_l \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$  después de dar un giro a lo largo de la trayectoria cerrada  $l$  que rodea dicho punto debe ser un múltiplo de  $2\pi$ :

$$e \oint_l \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Como se discutió en las secciones previas esta fase se interpreta como el flujo de un campo magnético a través de la superficie  $\sigma$  delimitada por la frontera  $l$ . Si esta frontera rodea la línea de la singularidad podemos escribir

$$e \oint_l \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{x}' = e \int_\sigma \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{\sigma}' = 4\pi eg,$$

la cual es el flujo magnético a través una trayectoria cerrada y la función de onda tiene un solo valor si la condición de cuantización de carga (4.5.2) se satisface.

## 4.6. El monopolo magnético abeliano de Wu-Yang

Como se discutió en la sección 4.3 el potencial vectorial asociado a un monopolo magnético no está bien definido en todo el espacio. Al mismo tiempo, el tensor de la fuerza del campo electromagnético se define globalmente y podemos esperar que la singularidad del potencial vectorial no tenga significado físico<sup>3</sup>.

Existe otra posibilidad de construir una teoría no singular del monopolo abeliano, que fue descubierta por T.T. Wu y C.N. Yang en 1975 [27]. En esta sección discutiremos brevemente la descripción original del monopolo abeliano de Wu y Yang. La observación básica de Wu y Yang es que la dirección de la cuerda del monopolo se define hasta una transformación de norma, es decir, existe una ambigüedad en la localización de la cuerda de tal manera que el campo magnético del monopolo no se ve afectado. Entonces se puede construir una descripción libre de singularidades, si se deja de lado la parametrización tradicional del espacio  $R^3$  que rodea al monopolo, mediante un único conjunto de coordenadas. En su lugar, Wu y Yang dividieron  $\mathbb{R}^3/\{0\}$  en dos hemisferios ligeramente superpuestos, definidos como sigue

$$\begin{aligned} R^N & : 0 \leq \vartheta < \pi/2 + \varepsilon, \quad r > 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ R^S & : \pi/2 - \varepsilon < \vartheta \leq \pi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \end{aligned}$$

donde  $R^N$  y  $R^S$  son el hemisferio norte y el hemisferio sur. La intersección, es decir, el "ecuador", es la región  $R^N \cap R^S$  y ahora todo el espacio que rodea al monopolo consta de dos partes, cada una de estas partes o hemisferio está parametrizado por un conjunto de coordenadas independientes (véase la Fig. 4.6.1). Entonces, podemos asociarle un potencial a cada hemisferio, es decir,  $\vec{A}^N$  y  $\vec{A}^S$ , los cuales son libres de singularidades en los dominios donde están definidos. Explícitamente podemos escribirlos como

$$\begin{aligned} A_t^N = A_r^N = A_\theta^N = 0, \quad A_\phi^N &= \frac{g}{r \sin \vartheta} (1 - \cos \vartheta), \\ A_t^S = A_r^S = A_\theta^S = 0, \quad A_\phi^S &= -\frac{g}{r \sin \vartheta} (1 + \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Estos potenciales satisfacen las siguientes condiciones:

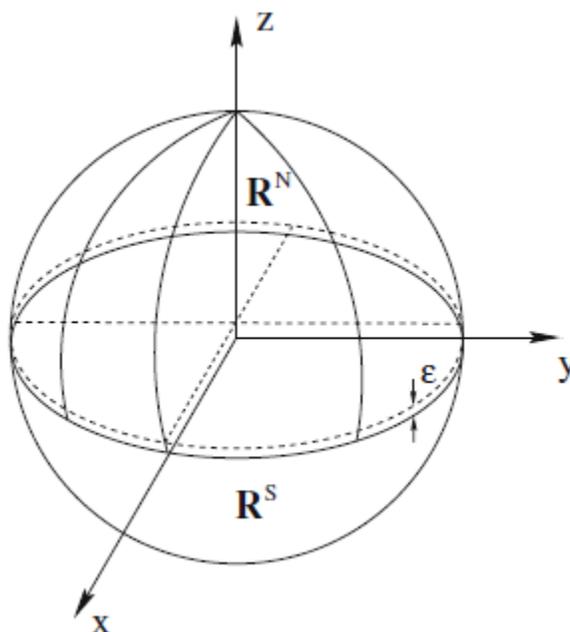
1. Los potenciales en los hemisferios están relacionados por una transformación de norma en la región de superposición;
2. El campo magnético se obtiene a partir del rotacional de los potenciales  $\vec{A}^N$  y  $\vec{A}^S$  en sus respectivas regiones de validez;
3. Ambos potenciales son libres de singularidades en sus respectivos dominios.

Los potenciales de norma (4.6.1) están relacionados por la transformación de norma.

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + ie^{2ige\phi} \partial_\mu e^{-2ige\phi}, \\ &= A_\mu + \partial_\mu \lambda(x), \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

---

<sup>3</sup>Sin embargo, obviamente hay una singularidad física en el origen  $\{0\}$ , donde se coloca el monopolo. En esta sección supondremos que este punto debe eliminarse, es decir, consideramos que el espacio  $\mathbb{R}^3$  sin el origen  $\{0\}$ :  $\mathbb{R}^3/\{0\}$ .


 Figura 4.6.1: Definición de los  $R^N$  y  $R^S$  sobre la esfera  $\mathbb{R}^3/\{0\}$ 

en la región de superposición  $R^N \cap R^S$  con la transformación de norma correspondiente

$$\lambda(x) = 2g\phi = 2g \arctan(y/x). \quad (4.6.3)$$

En particular, esta definición nos proporciona una derivación más elegante de la condición de cuantización de carga de Dirac. Consideremos una trayectoria cerrada  $l$  que se encuentra completamente en la región de superposición y ahora consideremos una partícula cargada que pasa a lo largo de esta trayectoria cerrada. Entonces, de acuerdo con el término de interacción carga-monopolo en el Lagrangiano (4.3.1), la función de onda correspondiente adquiere el siguiente factor de fase

$$e \int_0^T dt \vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = e \oint_l \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Esto es realmente una parte de la acción que describe la interacción entre una partícula de carga  $e$  y un campo magnético debido a un monopolo y esta interacción está descrita por el vector potencial  $\vec{A}$  el cual adquiere cualquier forma del potencial  $\vec{A}^N$  y  $\vec{A}^S$  de (4.6.1).

Sin embargo, parece que el efecto de la interacción es diferente para estos potenciales, ya que dentro de los dominios de su definición son regulares, y podemos aplicar el teorema de Stokes para

escribir

$$\begin{aligned}
 e \oint_l \vec{A}^N(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= e \int_{R^N} [\vec{\nabla} \times \vec{A}^N(\vec{r})] \cdot d\vec{s} = e \int_{R^N} d\vec{s} \cdot \vec{B}(\vec{r}), \\
 e \oint_l \vec{A}^S(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= -e \int_{R^S} [\vec{\nabla} \times \vec{A}^S(\vec{r})] \cdot d\vec{s} = -e \int_{R^S} d\vec{s} \cdot \vec{B}(\vec{r}),
 \end{aligned}$$

donde el signo menos se debe a las orientaciones opuestas de los elementos de superficie  $d\vec{s}$ . Por lo tanto, en la región de superposición, la acción se define hasta un término

$$\Delta S = e \int_{R^N \cup R^S} d\vec{s} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = e \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 4\pi eg.$$

Eso no debe afectar un observable físico de ningún tipo. Aquí aplicamos el teorema de Gauss para transformar la integral sobre la superficie  $R^N \cup R^S$  en una integral de volumen y finalmente se utiliza la ley de Gauss Magnética.

Recordemos que en la teoría cuántica, el Lagrangiano no puede ser invariante bajo la transformación de norma en general, a diferencia de la integral de camino correspondiente. En otras palabras, una amplitud física se define por el exponente de la acción  $\sim \exp\{iS\}$ , que permanece invariante si el cambio de la acción es un múltiplo de  $2\pi$ , es decir, volvemos a la condición de cuantización de carga (4.5.2):

$$\Delta S = 4\pi eg = 2\pi n, \quad eg = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, podemos llegar a la misma conclusión si observamos que la función de onda de una partícula en un campo debido a un monopolo depende de la norma. En la región de superposición  $R^N \cap R^S$ , ambas formas del potencial  $\vec{A}^N$  y  $\vec{A}^S$  son regulares y, por lo tanto, las funciones de onda correspondientes están conectadas allí a través de la transformación de norma (4.4.1)

$$\psi^S = U\psi^N = e^{2ige\phi}\psi^N.$$

Cada una de las funciones de onda  $\psi^N$  y  $\psi^S$  deben tener un solo valor en los hemisferios  $R^N$  y  $R^S$  respectivamente. Nuevamente consideremos una trayectoria cerrada  $l$  en la región de superposición. Entonces el ángulo azimutal  $\phi$  aumenta de 0 a  $2\pi$  y tenemos

$$\phi^S(0) = \phi^N(0), \quad \phi^S(2\pi) = e^{4\pi ig e} \phi^N(2\pi).$$

Por lo tanto, las funciones de onda son univaluadas si el factor de fase es un múltiplo de  $2\pi$ . Nuevamente llegamos a la condición de cuantización de Dirac (4.5.2).

## 4.7. Monopolo Magnético y el Momento Angular

Como se mencionó previamente, la condición de cuantización de Dirac puede ser derivada de diferentes maneras. En este caso haremos una discusión totalmente diferente a la de la sección previa, es decir, la cuantización de la carga eléctrica puede ser derivada de la cuantización del momento angular. Cuando introducimos la presencia de un monopolo magnético, el momento angular no es lo que usualmente se esperarías obtener. Para esto comencemos con la discusión clásica de la

interacción de una carga eléctrica  $e$  en presencia de una fuente debida a un monopolo magnético. La ecuación de movimiento para una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  y posición  $\vec{r}$ , moviéndose en el campo magnético  $\vec{B}$ , está dada por la fuerza de Lorentz

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\dot{\vec{r}} \times \vec{B},$$

donde  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$  es el momento de una partícula clásica. Ahora consideremos que el campo magnético es debido a un monopolo magnético, donde

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

El monopolo tiene simetría rotacional, por lo que podemos esperar que el momento angular,  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , se conserve; tenemos así que

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = e\dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}).$$

Usando la expresión del campo magnético del monopolo podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} &= \frac{eg}{4\pi r^3} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) \\ &= \frac{eg}{4\pi} \left( \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{eg}{4\pi} \hat{r} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos ver que en presencia de un monopolo magnético, el momento angular no se conserva. Sin embargo podemos escribir un nuevo momento angular modificado que sí se conserva, esto es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} - \frac{eg}{4\pi} \hat{r}. \quad (4.7.1)$$

El término adicional se puede considerar como el momento angular conservado almacenado en  $\vec{E} \times \vec{B}$ . Por lo tanto, se puede ver que la partícula tiene un momento angular incluso si no se mueve.

A partir de la expresión del momento angular (4.7.1) se puede ver que el ángulo que hace la partícula con este vector es

$$\vec{L} \cdot \vec{r} = -\frac{eg}{4\pi} = \text{constante},$$

esto significa que el movimiento de la partícula es sobre un cono, con eje  $\vec{L}$  y ángulo  $\cos \theta = -eg/4\pi L$ , como se ve en la figura .

Hasta aquí, nuestro análisis ha sido clásico. Ahora usemos la mecánica cuántica de Schrödinger, en la cual, el momento angular está cuantizado. En particular, el momento angular en la dirección- $z$  debe de ser  $L_z = \frac{1}{2}\hbar n$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$ . Usando este resultado, obtenemos

$$L_z = \frac{1}{2}\hbar n = -\frac{eg}{4\pi}, \quad \Rightarrow \quad eg = 2\pi\hbar n, \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto hemos obtenido nuevamente la condición de cuantización de Dirac a partir de la cuantización del momento angular.

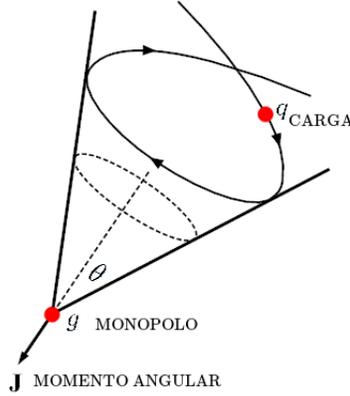


Figura 4.7.1: El movimiento de una carga eléctrica. La dinámica de una carga eléctrica en movimiento en el campo magnético debido a un monopolio satisface  $\vec{L} \cdot \vec{r} = \text{constante}$ . Esto significa que la carga se mueve en un cono respecto del eje  $\vec{L}$ , con un ángulo  $\theta = \cos^{-1}[-e g/4\pi L]$ .

## 4.8. Condición de cuantización de Dirac para el caso de los dyones

En la discusión anterior hemos considerado una partícula cargada eléctrica que se mueve en un campo externo producido por una partícula cargada magnética, obteniendo como resultado que la carga eléctrica está cuantizada. Es posible generalizar esta discusión para el caso de partículas que tienen cargas eléctricas y magnéticas ( $e, g$ ), las cuales son conocidas como dyones. Esta generalización es debida a Schwinger [39] y se construyó de tal manera que la cuantización de la carga para el caso de dyones preserve la invarianza bajo dualidad  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ .

El enfoque seguido por Schwinger es similar al de Fierz, pero ahora se aplica al caso de dyones. El enfoque considera la interacción de un dyon de masa  $m$  que lleva una carga eléctrica  $q_1$  y una carga magnética  $g_1$ , moviéndose con la velocidad en el campo de un dyon estacionario con carga eléctrica  $q_2$  y carga magnética  $g_2$  centrada en el origen, como se ve en la Figura 4.8.1. La fuerza de Lorentz debida al dyon en movimiento es construida de tal manera que es invariante bajo dualidad

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q_1 \left( \vec{E} + \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{B} \right) + g_1 \left( \vec{B} - \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{E} \right), \quad (4.8.1)$$

donde los campos magnéticos y eléctricos producidos por las cargas  $q_2$  y  $g_2$  del dyon estacionario son

$$\vec{E} = \frac{q_2}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{B} = \frac{g_2}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Por lo tanto, la ecuación (4.8.1) se puede escribir

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = (q_1 q_2 + g_1 g_2) \frac{\vec{r}}{r^2} + (q_1 g_2 - q_2 g_1) \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (4.8.2)$$

Para encontrar el momento angular conservado para el sistema, podemos tomar el producto cruz

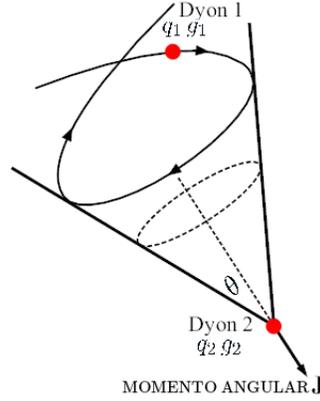


Figura 4.8.1: La dinámica de un dyon en un campo debido a otro dyon estático monopolo satisface  $\vec{L} \cdot \vec{r} = \text{constante}$ . Esto significa que el dyon se mueve en un cono respecto del eje  $\vec{L}$ , con un ángulo  $\theta = \cos^{-1} [q_1 g_2 - q_2 g_1 / 4\pi L]$ .

de la ecuación (4.8.2) con el vector de posición  $\vec{r}$

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = (q_1 g_2 - q_2 g_1) \frac{\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r})}{r^3}. \quad (4.8.3)$$

De manera similar al procedimiento de la sección anterior usamos  $\vec{r} \times (d\vec{p}/dt) = d(\vec{r} \times \vec{p})/dt$ , para escribir finalmente

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{(q_1 g_2 - q_2 g_1)}{c} \frac{d\hat{r}}{dt}, \quad (4.8.4)$$

donde hemos usado  $\frac{\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r})}{r^3} = \frac{d\hat{r}}{dt}$ . El momento angular conservado es entonces

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} - \frac{e g (q_1 g_2 - q_2 g_1)}{4\pi c} \hat{r},$$

por lo que la componente radial  $\vec{L} \cdot \hat{r}$  puede ser cuantizada. Tenemos que

$$L_r := \vec{L} \cdot \hat{r} = \frac{e g (q_1 g_2 - q_2 g_1)}{4\pi c} = \frac{1}{2} \hbar n,$$

obteniendo la condición de cuantización de Schwinger–Swanziger

$$q_1 g_2 - q_2 g_1 = \frac{1}{2} \hbar n.$$

## 4.9. La condición de cuantización de Dirac en el enfoque de la integral de trayectoria de Feynman

En esta sección discutiremos la condición de cuantización de Dirac usando un enfoque distinto al de las discusiones anteriores. En este caso usaremos el enfoque de la integral de trayectoria de

Feynman, el cual proporciona un procedimiento elegante para obtener la cuantización de la carga eléctrica.

Para esto comencemos por discutir de manera muy breve la esencia del enfoque de la integral de camino. Si nos preguntáramos sobre la probabilidad de encontrar a una partícula en una posición  $B$ , la cual inicialmente estaba localizada en  $A$ , podríamos responder usando la mecánica cuántica de Schrödinger, en la cual la función de onda de Schrödinger nos dice la probabilidad de que una partícula esté en un cierto punto en el tiempo, pero esta descripción mecánica-cuántica no nos dice la probabilidad de transición de que una partícula se encuentre entre dos puntos en instantes diferentes. Para poder hacer esta descripción, tenemos que introducir una cantidad que generalice el concepto de función de onda de tal manera que se puedan incluir las transiciones de probabilidades.

De acuerdo con el enfoque de Feynman se tiene que introducir el concepto de "amplitud de probabilidad de transición", la cual relaciona el estado de una función de onda desde la posición y tiempo inicial  $|\Psi(x_i, t_i)\rangle$  a su posición y tiempo final  $|\Psi(x_f, t_f)\rangle$ , y está definida por el producto interno  $K := \langle \Psi(x_f, t_f) | \Psi(x_i, t_i) \rangle$  en la notación de Dirac. De esto se infiere que la transición de probabilidad está definida por  $P = |K|^2$ . Dirac sugirió que la amplitud de probabilidad para una trayectoria (camino) debe de ser la exponencial de la acción clásica asociada a la trayectoria,  $e^{(i/\hbar)\mathcal{S}(x)}$ , donde  $\mathcal{S}(x) = \int L(x, \dot{x}) dt$  es la acción clásica y  $L$  el Lagrangiano, donde una partícula puede tomar cualquier trayectoria del punto inicial al punto final (no hay una razón por la cual la partícula deba tomar la trayectoria más corta). Con el fin de calcular la amplitud de probabilidad, Feynman propuso sumar sobre todas las infinitas trayectorias posibles que la partícula pueda seguir. De manera más precisa, la amplitud de transición de probabilidad  $K$  para que una partícula carga se propague de un punto inicial  $A$  a un punto  $B$  está dada por la integral sobre todas las posibles trayectorias

$$K = \int \mathcal{D}(x) e^{(i/\hbar)\mathcal{S}(x)},$$

donde  $\int \mathcal{D}(x)$  denota un producto de integrales realizadas en todas las trayectorias  $x(t)$  que van de  $A$  a  $B$  y  $\mathcal{S}(x)$  es la acción clásica asociada a cada trayectoria.

Para propósito de esta sección y como ejemplo ilustrativo consideremos dos trayectorias arbitrarias  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , cada una de estas comienza en el punto  $A$  y termina en el punto  $B$ . Entonces la amplitud de probabilidad está dada por

$$K = K_1 + K_2 = \int_{\gamma_1} \mathcal{D}(x) e^{(i/\hbar)\mathcal{S}^{(1)}(x)} + \int_{\gamma_2} \mathcal{D}(x) e^{(i/\hbar)\mathcal{S}^{(2)}(x)},$$

donde  $K_1$  es la amplitud asociada a la integración sobre todas las trayectorias a través de  $\gamma_1$  y  $K_2$  es la amplitud asociada a la integración en todas las rutas a través de  $\gamma_2$ . Consideremos primero la acción para la partícula libre  $\mathcal{S}_0 = \int m\dot{x}^2/2 dt$ . En este caso, no hay interacción con un campo externo y por lo tanto la probabilidad es simplemente  $P = |K_1 + K_2|^2$ . Ahora consideremos el caso donde la carga eléctrica siente la presencia del potencial debido a un monopolo magnético y la cuerda de Dirac. Además, supongamos que las trayectorias  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  pasan a cada lado de la cuerda de Dirac y forman una superficie  $S$  como se ve en la Figura 4.9.1.

El potencial vectorial externo  $A_L$  afectará el movimiento de la partícula debido a que la acción adquiere un término de interacción

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \frac{q}{c} \int A_L \cdot dl.$$

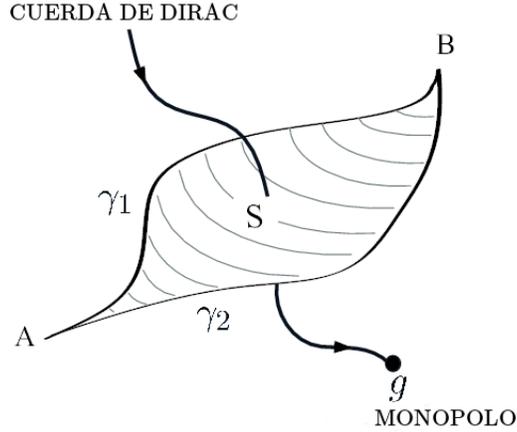


Figura 4.9.1: La cuerda de Dirac está rodeada por dos rutas genéricas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , las cuales inician en A y terminan en B de tal manera que delimitan a la superficie  $S$ .

Entonces la amplitud de transición se puede escribir

$$\begin{aligned} K &= \int_{\gamma_1} \mathcal{D}(x) e^{(i/\hbar)[S_0^{(1)} + (q/c) \int_{(1)} A_L \cdot dl]} + \int_{\gamma_2} \mathcal{D}(x) e^{(i/\hbar)[S_0^{(2)} + (q/c) \int_{(2)} A_L \cdot dl]} \\ &= \left( K_1 + e^{(iq/\hbar c) \int_C A_L \cdot dl} K_2 \right) e^{(iq/\hbar c) \int_{(1)} A_L \cdot dl}, \end{aligned}$$

donde hemos usado

$$\int_C A_L \cdot dl = \int_{(2)} A_L \cdot dl - \int_{(1)} A_L \cdot dl.$$

Las contribuciones de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  interfieren entre sí, dando el término de interferencia  $(iq/\hbar c) \int_C A_L \cdot dl$ . Usando el teorema de Stokes y la ecuación (- - -), podemos escribir la integral de este exponente como

$$\int_C A_L \cdot dl = \int_S \nabla \times A_L \cdot da = \int_S B_{mon} \cdot da + \int_S B_{string} \cdot da.$$

Entonces el término de interferencia se puede escribir como

$$e^{(iq/\hbar c) \int_C A_L \cdot dl} = e^{(iq/\hbar c) \int_S B_{mon} \cdot da} e^{(iq/\hbar c) \int_S B_{string} \cdot da}.$$

El término  $e^{(iq/\hbar c) \int_S B_{mon} \cdot da}$  es el debido a la interacción de la partícula con carga  $e$  que interactúa con el campo debido al monopolo magnético. El segundo término es el debido a la cuerda de Dirac, como se ha discutido previamente, el campo debido a esta cuerda no es un observable físico. Por lo tanto, tenemos que imponer  $e^{(iq/\hbar c) \int_S B_{string} \cdot da} = 1$ ; de no ser así, la cuerda de Dirac tendría que ser un observable. Por otro lado, de cálculos previos, el flujo a través de la cuerda es  $\int_S B_{string} \cdot da = 4\pi g$ , entonces las condición  $e^{iq4\pi g/\hbar c} = 1$  implica la condición de cuantización de Dirac  $eg = 2\pi\hbar n$ .



## Capítulo 5

# Condición de cuantización de Dirac no conmutativa

En este capítulo analizaremos la condición de cuantización de Dirac para monopolos magnéticos en un espacio-tiempo no conmutativo. Para esto usaremos el potencial de Wu y Yang para el monopolo magnético, cuya relevancia reside en que es un potencial libre de singularidades en su dominio de validez. Los efectos no conmutativos serán analizados usando el mapeo de Seiberg-Witten, es decir, usaremos un método perturbativo para el cual sólo necesitamos conocer explícitamente la forma del potencial vectorial a orden cero  $A_\mu^0(x)$  para determinar así las perturbaciones a todos los órdenes ( en el parámetro de no conmutatividad  $\theta$  ) del potencial de norma no conmutativo  $\hat{A}_\mu(x)$  como se discutió en la sección 3.3.2.

### 5.1. Deformación Moyal del potencial de Wu-Yang

En la formulación de Wu-Yang, se construye un potencial no singular dividiendo  $\mathbb{R}^3/\{0\}$  en dos hemisferios ligeramente superpuestos  $R^N$  y  $R^S$ . A cada hemisferio se le asocia un potencial  $\vec{A}^N$  y  $\vec{A}^S$ , los cuales son libres de singularidades en todos su dominio de definición. Por lo tanto estos potenciales describen al monopolo magnético en diferentes regiones del espacio, pero en la región de traslape (superposición) estos potenciales están relacionados por una transformación de norma:

$$A_\mu^{N/S}(x) \rightarrow A_\mu^{S/N}(x) = U A_\mu^{N/S}(x) U^{-1} + i U \partial_\mu U^{-1}, \quad (5.1.1)$$

donde  $U$  es un elemento del grupo abeliano  $U(1)$ . Ahora, el objetivo de esta sección es analizar la formulación de Wu-Yang para el monopolo magnético en un espacio no conmutativo. La manera más sencilla como se puede hacer una extensión no conmutativa a nivel de campos es la siguiente:

1. Todos los productos ordinarios se tienen que remplazar por el producto- $*$  (Producto Moyal ), el cual fue discutido en la sección 2.2):  $\cdot \rightarrow *$ .
2. Se tiene que asumir la existencia de unos nuevos campos no conmutativos que ahora dependen del parámetro de no conmutatividad  $\theta$ . En este caso, asumiremos esta dependencia en los potenciales vectoriales:  $\hat{A}_\mu^{N/S}(x; \theta)$ .

Ademas, la forma de estos nuevos potenciales debe ser tal que se satisfaga el siguiente límite conmutativo  $\hat{A}_\mu^{N/S}(x; \theta) \Big|_{\theta=0} = A_\mu^{N/S}(x)$ .

De acuerdo con el procedimiento de Wu-Yang discutido en la sección 4.6 y de acuerdo con lo dicho arriba, la manera natural (más simple/ estándar ) de extender el potencial Wu-Yang a un espacio-tiempo no conmutativo (Moyal) es reemplazando los productos ordinarios por el producto  $*$  y asumiendo la existencia de un potencial de norma no conmutativo  $\hat{A}_\mu^{N/S}(x; \theta)$  que debe de satisfacer las siguientes propiedades de acuerdo a la formulación de Wu-Yang:

1. Estos nuevos potenciales  $\hat{A}_\mu^{N/S}(x; \theta)$  deben estar relacionados por una transformación de norma en la región de traslape (superposición) similar a la del caso conmutativo (5.1.1). Por lo tanto la transformación de norma para el caso no conmutativo se tiene que escribir como

$$\hat{A}_\mu^{N/S}(x; \theta) \rightarrow \hat{A}_\mu^{S/N}(x; \theta) = U * \hat{A}_\mu^{N/S}(x; \theta) * U^{-1} + iU * \partial_\mu U^{-1},$$

donde  $U$  es un elemento del grupo no conmutativo  $U_*(1)$ <sup>1</sup>.

2. Las ecuaciones de Maxwell con fuentes para las cargas magnéticas se siguen satisfaciendo para estos potenciales  $\hat{A}_\mu^{N/S}$ .
3. La no conmutatividad no debe introducir nuevas singularidades, es decir, los potenciales  $\hat{A}_\mu^{N/S}$  deben permanecer libres de singularidades como en el caso clásico (no deformado).

Estas condiciones son similares a las discutidas en la sección 4.6 pero adaptadas a la presencia de no conmutatividad.

Siguiendo el tratamiento estándar para el potencial de norma no conmutativo, es decir, considerando un tratamiento perturbativo, el potencial de norma se puede escribir como

$$\hat{A}_\mu = A_\mu^0 + A_\mu^1 + A_\mu^2 + \mathcal{O}(\theta^3), \quad (5.1.2)$$

mientras que el parámetro de norma admite una estructura

$$\hat{\lambda} = \lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2 + \mathcal{O}(\theta^3), \quad (5.1.3)$$

donde  $A_\mu^0$  y  $\lambda^0$  son el potencial de norma y el parámetro de norma no deformados respectivamente:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \hat{A}_\mu = A_\mu^0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \hat{\lambda} = \lambda^0. \quad (5.1.4)$$

En lo que sigue analizaremos las perturbaciones del potencial  $\hat{A}_\mu(x; \theta)$  de tal manera que se satisfagan todas las propiedades que se requieren en el procedimiento de Wu-Yang.

## Transformación de norma no conmutativa

Ahora el primer paso es buscar una forma para las perturbaciones  $A_\mu^n$  de tal manera que sean compatibles con una transformación de norma no conmutativa de la forma

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \hat{A}'_\mu = U * \hat{A}_\mu * U^{-1} + iU * \partial_\mu U^{-1}, \quad (5.1.5)$$

<sup>1</sup>Bajo la extensión no conmutativa de la teoría de norma con grupo de simetría abeliana  $U(1)$  el nuevo grupo deformado  $U(1) \rightarrow U_*(1)$  ahora será no abeliano.

donde  $U \in U_*(1)$ ; los elementos de este grupo se pueden escribir como

$$U(x) = e_*^{i\lambda(x)} = 1 + i\lambda(x) + \frac{i^2}{2!}\lambda(x) * \lambda(x) + \dots \quad (5.1.6)$$

Existe una manera de construir una teoría de norma no conmutativa con grupo de simetría  $U_*(N)$ , el cual es conocido como el mapeo de SW, de tal manera que se puede obtener un Ansatz para las perturbaciones  $A_\mu^n$  a partir del potencial conmutativo  $A_\mu^0$ . En este trabajo usaremos el mapeo de SW el cual se discutió en la sección 3.3 y nos restringiremos al caso  $U_*(1)$ .

Usando la forma (5.1.6) para los elementos de grupo  $U_*(1)$  se pueden reescribir estos elementos del grupo hasta segundo orden en el parámetro  $\theta$ ; explícitamente tiene la forma [28, 29]

$$e_*^{i\lambda(x)} = e^{i\lambda(x)} + \frac{\theta^{pq}\theta^{kl}}{8} e^{i\lambda(x)} \partial_p \partial_k \lambda \left( \frac{1}{2} \partial_q \partial_l \lambda + \frac{i}{3} \partial_q \lambda \partial_l \lambda \right) + \mathcal{O}(\theta^3). \quad (5.1.7)$$

Usando el producto Moyal podemos desarrollar la transformación de norma (5.1.5) hasta segundo orden en el parámetro  $\theta$

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu &\rightarrow \hat{A}'_\mu = U \hat{A}_\mu U^{-1} + iU \partial_\mu U^{-1} \\ &+ \left( \frac{i}{2} \right) \theta^{pq} \left( \partial_p U \partial_q \hat{A}_\mu U^{-1} + U \partial_p \hat{A}_\mu \partial_q U^{-1} + i \partial_p U \partial_q \partial_\mu U^{-1} \right) \\ &+ \left( \frac{i}{2} \right)^2 \theta^{pq} \theta^{kl} \left( \partial_p \partial_k U \partial_q \partial_l \hat{A}_\mu U^{-1} + U \partial_p \partial_k \hat{A}_\mu \partial_q \partial_l U^{-1} + i \partial_p \partial_k U \partial_q \partial_l \partial_\mu U^{-1} \right) \\ &+ \mathcal{O}(\theta^3). \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Ahora usando la expresión a segundo orden  $\theta$  para  $U(x)$ , la cual esta dada por (5.1.7), en la transformación de norma no conmutativa (5.1.8) podemos obtener las siguientes expresiones hasta segundo orden

$$\begin{aligned} A_i^0 &\rightarrow A_i^0 + \partial_i \lambda(x), \\ A_i^1 &\rightarrow A_i^1 - \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^0 - \frac{1}{2} \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l \partial_i \lambda(x), \\ A_i^2 &\rightarrow A_i^2 - \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^1 + \frac{1}{2} \theta^{kl} \theta^{pq} \partial_p \lambda(x) \partial_q \left( \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^0 + \frac{1}{3} \partial_k \lambda(x) \partial_l \partial_i \lambda(x) \right), \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

donde se ha utilizado el mismo procedimiento dado en [28, 29]. De acuerdo con el primer requerimiento de la sección 5.1, las siguientes relaciones para los potenciales en la región de traslape se deben de satisfacer

$$\begin{aligned} A_i^{N_0} &\rightarrow A_i^{S_0} + \partial_i \lambda(x), \\ A_i^{N_1} &\rightarrow A_i^{S_1} - \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^{S_0} - \frac{1}{2} \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l \partial_i \lambda(x) \\ A_i^{N_2} &\rightarrow A_i^{S_2} - \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^{S_1} + \frac{1}{2} \theta^{kl} \theta^{pq} \partial_p \lambda(x) \partial_q \left( \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^{S_0} + \frac{1}{3} \partial_k \lambda(x) \partial_l \partial_i \lambda(x) \right). \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

$$(5.1.11)$$

## 5.2. Las ecuaciones de Maxwell no conmutativas a primer y segundo orden

En esta sección analizaremos el segundo requerimiento de la sección 5.1, es decir, los potenciales anteriores deben de satisfacer las ecuaciones de Maxwell. Para esto comenzaremos planteando la versión no conmutativa de las ecuaciones de Maxwell para un monopolo magnético estático. Tomando las ecuaciones de Maxwell clásicas y remplazando los productos ordinarios por el producto- $*$  obtenemos

$$D_\nu * \widehat{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \widehat{J}_e^\nu, \quad (5.2.1)$$

$$D_\mu * \widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = 4\pi \widehat{J}_g^\nu, \quad (5.2.2)$$

$$D_\mu * \widehat{J}^\mu = 0, \quad (5.2.3)$$

donde los campos  $\widehat{F}^{\mu\nu}(x; \theta)$ ,  $\widehat{J}_g^\nu(x; \theta)$  y  $\widehat{J}_e^\mu(x; \theta)$  son los campos no conmutativos para el tensor de intensidad electromagnética, la densidad de corriente magnética y la densidad de corriente eléctrica respectivamente. En estas ecuaciones tenemos que

$$D_\nu := \partial_\nu - ie[\widehat{A}_\mu, \cdot]_*, \quad (5.2.4)$$

$$\widehat{F}_{\mu\nu} := \partial_\mu \widehat{A}_\nu - \partial_\nu \widehat{A}_\mu - ie[\widehat{A}_\mu, \widehat{A}_\nu]_*, \quad (5.2.5)$$

son la derivada covariante no nonmutativa y el tensor de intensidad electromagnética (field strength) respectivamente. El tensor electromagnético dual esta definido como  $\widehat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} \widehat{F}_{\gamma\delta}$ . Las ecuaciones (5.2.1) y (5.2.2) son la ley de Ampère y la ley de Gauss no conmutativa respectivamente; estas son las leyes análogas a las expresiones estándar en electrodinámica clásica. Por lo tanto la ecuación (5.2.3) es el análogo de la ecuación de continuidad.

Dado que estamos considerando soluciones estáticas del monopolo magnético, tenemos que  $\widehat{J}_g^i = 0$  con  $i = 1, 2, 3$ , es decir, no estamos considerando corrientes magnéticas. Por lo tanto la única componente distinta de cero de la corriente no conmutativa  $\widehat{J}^\nu$  4- dimensional es la componente  $\widehat{J}_g^0$ , la cual se puede escribir de manera perturbativa como

$$\widehat{J}_g^0 \equiv \widehat{\rho}_g(r) = 4\pi g \delta(r) + \rho^1(r) + \rho^2(r) + \mathcal{O}(\theta^3)$$

la cual es la responsable de dar lugar a la carga magnética no conmutativa:

$$g_{NC} := \int \widehat{J}_g^0(x) d^3x. \quad (5.2.6)$$

Esta cantidad es un invariante de norma la cual se puede calcular de manera perturbativa; en el caso clásico esta cantidad tiene en valor de  $g$ . En el caso estático la ecuación de continuidad se satisface de la misma manera.

### Ley de Ampère no conmutativa

Hasta el momento hemos discutido la extensión no conmutativa de las ecuaciones de Maxwell magnéticas, en lo que sigue analizaremos de manera perturbativa estas ecuaciones y nos enfocaremos

en las perturbaciones de estas ecuaciones de Maxwell modificadas. Para soluciones estáticas, el campo eléctrico es cero  $E^i := F^{0i} = 0$  y la dependencia temporal no es considerada. De acuerdo con lo anterior, sólo nos enfocaremos en el término  $D_k * \widehat{F}^{ik}$ , donde  $i, j = 1, 2, 3$ . Usando la definición de derivada covariante (5.2.4) obtenemos:

$$D_k * \widehat{F}^{ik} = \partial_k \widehat{F}^{ik} - i[\widehat{A}_k, \widehat{F}^{ik}]_*$$

Después de realizar un desarrollo perturbativo para los campos y usando la definición del producto Moyal (producto-\*) la ecuación anterior se puede escribir a segundo orden en el parámetro  $\theta$ .

$$\begin{aligned} D_k * \widehat{F}^{ik} &= \partial_k (F_0^{ik} + F_1^{ik} + F_2^{ik}) - i[A_k^0 + A_k^1 + A_k^2, F_0^{ik} + F_1^{ik} + F_2^{ik}]_* \\ &= \partial_k F_0^{ik} + \partial_k F_1^{ik} + \partial_k F_2^{ik} + \theta^{pq} \partial_p A_k^0 (\partial_q F_0^{ik} + \partial_q F_1^{ik}) + \theta^{pq} \partial_p A_k^1 \partial_q F_0^{ik} + \mathcal{O}(\theta^3), \end{aligned} \quad 2.7$$

donde  $F_{jk}^0$ ,  $F_{jk}^1$  y  $F_{jk}^2$  son las componentes del tensor de intensidad electromagnética hasta segundo orden en el parámetro  $\theta$ . En la sección 3.3 discutimos el mapeo de SW, con el cual se puede obtener la forma explícita del tensor  $F_{jk}^n$  a todos los ordenes en términos de las perturbaciones del campo de norma  $\widehat{A}_k$ ; usando este mapeo podemos obtener

$$\begin{aligned} D_k * \widehat{F}^{ik} &= \partial_k (\partial^i A_0^k - \partial^k A_0^i) + \partial_k (\partial^i A_1^k - \partial^k A_1^i + \theta^{pq} \partial_p A_0^i \partial_q A_0^k) \\ &\quad + \partial_k (\partial^i A_2^k - \partial^k A_2^i + \theta^{pq} (\partial_p A_1^i \partial_q A_0^k + \partial_p A_0^i \partial_q A_1^k)) \\ &\quad + \theta^{pq} \partial_p A_k^0 \partial_q (\partial^i A_0^k - \partial^k A_0^i + \partial^i A_1^k - \partial^k A_1^i + \theta^{rs} \partial_r A_0^i \partial_s A_0^k) \\ &\quad + \theta^{pq} \partial_p A_k^1 \partial_q (\partial^i A_0^k - \partial^k A_0^i) + \mathcal{O}(\theta^3) \\ &= \epsilon^{ikl} \partial_k B_l^0 + \epsilon^{ikl} \partial_k B_l^1 + \epsilon^{ikl} \partial_k B_l^2 + \theta^{pq} (\partial_k (\partial_p A_0^i \partial_q A_0^k) + \partial_p A_k^0 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^0) \\ &\quad + \theta^{pq} (\partial_p A_k^1 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^0 + \partial_p A_k^0 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^1 + \partial_k (\partial_p A_1^i \partial_q A_0^k + \partial_p A_0^i \partial_q A_1^k)) \\ &\quad + \theta^{pq} \theta^{rs} \partial_p A_k^0 \partial_q (\partial_r A_0^i \partial_s A_0^k) + \mathcal{O}(\theta^3), \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

donde se ha definido  $\epsilon^{ikl} B_l^n := (\partial^i A_n^k - \partial^k A_n^i)$  en concordancia con nuestra elección de la signatura para el espacio-tiempo de Minkowski.

En el caso conmutativo, la ley de Ampère en su forma diferencial es usada para deducir el rotacional de un campo magnético inducido por una corriente eléctrica pero también se puede usar en la dirección opuesta, es decir, se puede inferir la corriente eléctrica asociada a un campo magnético dado. De acuerdo con esto, escribanos

$$D_k * \widehat{F}^{ik} = \frac{4\pi}{c} \widehat{J}_e^i, \quad (5.2.9)$$

donde  $\widehat{J}_e^i = J_{e0}^i + J_{e1}^i + J_{e2}^i + \mathcal{O}(\theta^3)$ . Notemos que no estamos considerando configuraciones de cargas eléctricas en las ecuaciones de Maxwell, pero si estamos permitiendo la presencia de corrientes eléctricas. Usando (5.2.8) la ley de Ampère en su forma diferencial se puede escribir orden por

orden como:

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \vec{B}^0)^i &= J_{e0}^i, \\
(\nabla \times \vec{B}^1)^i &= \theta^{pq} (\partial_k (\partial_p A_0^i \partial_q A_0^k) + \partial_p A_k \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^0) + J_{e1}^i, \\
(\nabla \times \vec{B}^2)^i &= \theta^{pq} (\partial_p A_k^1 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^0 + \partial_p A_k^0 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^1 + \partial_k (\partial_p A_1^i \partial_q A_0^k + \partial_p A_0^i \partial_q A_1^k) \\
&\quad + \theta^{rs} \partial_p A_k^0 \partial_q (\partial_r A_0^i \partial_s A_0^k)) + J_{e2}^i,
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

donde  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

## Ley de Gauss

Siguiendo el mismo procedimiento al de la ley de Ampère ahora lo aplicaremos a la ley de Gauss. Para esto empezaremos analizando el término  $D_i * \hat{\mathcal{F}}^{i0}$ , donde  $\hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} \hat{F}_{\gamma\delta}$  es el tensor electromagnético dual. Por lo tanto podemos escribir

$$D_i * \hat{\mathcal{F}}^{i0} = \frac{1}{2} \epsilon^{i0jk} D_i * \hat{F}_{jk} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} D_i * \hat{F}_{jk},$$

donde hemos usado la convención  $\epsilon^{i0jk} = -\epsilon^{ijk}$ . Nuevamente, usando la definición de la derivada covariante (5.2.4) y la expresión para el tensor electromagnético (5.2.5) obtenemos el siguiente desarrollo perturbativo hasta segundo orden en el parámetro  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
D_i * \hat{\mathcal{F}}^{i0} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_i (F_{jk}^0 + F_{jk}^1 + F_{jk}^2) - i[A_i^0 + A_i^1 + A_i^2, F_{jk}^0 + F_{jk}^1 + F_{jk}^2]_*) \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_i F_{jk}^0 + \partial_i F_{jk}^1 + \partial_i F_{jk}^2 + \theta^{pq} \partial_p A_i^0 (\partial_q F_{jk}^0 + \partial_q F_{jk}^1) + \theta^{pq} \partial_p A_i^1 \partial_q F_{jk}^0) \\
&\quad + \mathcal{O}(\theta^3).
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Usando las expresiones obtenidas para el tensor electromagnético a primer y segundo orden (3.3.15) y (3.3.20) dados por el mapeo de SW en la ecuación (5.2.11), podemos escribir la ley de Gauss como

$$\begin{aligned}
D_i * \hat{\mathcal{F}}^{i0} - \hat{j}_g^0 &= 0 = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{jkl} \partial_i B_0^l - 4\pi g \delta(r) \\
&\quad -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{jkl} \partial_i B_1^l - \rho^1(x) \\
&\quad -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{jkl} \partial_i B_2^l - \rho^2(x) \\
&\quad -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \theta^{pq} \theta^{rs} \partial_p A_i^0 \partial_q (\partial_r A_j^0 \partial_s A_k^0),
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

donde se ha usado las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ijk} \theta^{pq} \partial_p A_i^0 \partial_q F_{jk}^0 &= -\epsilon^{ijk} \theta^{pq} \partial_i (\partial_p A_j^0 \partial_q A_k^0), \\
\epsilon^{ijk} \theta^{pq} (\partial_p A_i^0 \partial_q F_{jk}^1 + \partial_p A_i^1 \partial_q F_{jk}^0) &= -2\epsilon^{ijk} \theta^{pq} \partial_i (\partial_p A_j^1 \partial_q A_k^0) + \epsilon^{ijk} \theta^{pq} \theta^{rs} \partial_p A_i^0 \partial_q (\partial_r A_j^0 \partial_s A_k^0),
\end{aligned}$$

junto con la expansión de la densidad de carga  $\hat{J}_g^0 = \hat{\rho}_g$ . También se puede observar que mediante una permutación de los índices, el último término de la ecuación (5.2.12) es cero. Dado que la divergencia de un campo  $\vec{B}^n$  se puede escribir como:  $\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{jkl}\partial_i B_n^l = \nabla \cdot \vec{B}^n$ , podemos obtener las siguientes expresiones para la ley de Gauss hasta segundo orden

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B}^0 &= -4\pi g\delta(r), \\ \nabla \cdot \vec{B}^1 &= -\rho^1(r), \\ \nabla \cdot \vec{B}^2 &= -\rho^2(r).\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

Estas ecuaciones son similares a las obtenidas en la ley de Ampère (5.2.10) en el sentido que todas estas ecuaciones nos permiten identificar las fuentes modificadas del campo del monopolo magnético.

Usando la identidad vectorial  $\nabla^2 \vec{B}_0 = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}_0) + \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_0)$  podemos también combinar los resultados obtenidos de la ley de Ampère (5.2.10) y de la ley de Gauss (5.2.13) de manera usual. Por lo tanto se puede obtener el siguiente resultado para la  $i$ -ésima componente

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 \vec{B}_0\right)^i &= [\nabla(\nabla \cdot \vec{B}_0) + \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_0)]^i \\ &= \epsilon^{ijk}\partial_j (\epsilon^{klm}\partial_l B_m^0 + \epsilon^{klm}\partial_l B_m^1 + \epsilon^{klm}\partial_l B_m^2 \\ &\quad + \theta^{pq} (\partial_l(\partial_p A_0^k \partial_q A_0^l) + \partial_p A_l^0 \epsilon^{klm} \partial_q B_m^0)).\end{aligned}\tag{5.2.14}$$

Por otro lado, es natural preguntarse cual es la forma de estas fuentes que se inducen usando el mapeo de SW y de existir tales fuentes inducidas, ¿cuál sería la relevancia de estas fuentes? aún más a nivel fundamental, ¿qué pasa con la condición de cuantización de Dirac?, es decir, ¿la no conmutatividad es compatible con la cuantización de la carga magnética?, el propósito de este trabajo es intentar dar una respuesta a todas estas cuestiones.

### 5.3. Solución a las ecuaciones de Maxwell no conmutativas

Hasta este momento hemos obtenido de manera perturbativa los análogos de las ecuaciones de Maxwell para cargas magnéticas en un espacio (espacio-tiempo) no conmutativo a cero, primer y segundo orden. Como se discutió antes, el introducir de manera perturbativa correcciones al tensor electromagnético  $\hat{F}_{\mu\nu}$  implicaría introducir correcciones a la 4 corriente  $\hat{J}^\nu$ . Por otro lado, las perturbaciones para el tensor  $\hat{F}_{\mu\nu}$  se obtienen usando el mapeo de SW, las cuales sólo dependen del campo de de norma  $A_\mu^0$ .

Ahora usamos el mapeo de SW para determinar las expresiones analíticas de los potenciales de norma  $A_\mu^N$  y  $A_\mu^S$  para todos los órdenes en el parámetro de norma  $\theta$ . Ambos potenciales satisfacen las ecuaciones de Maxwell con una apropiada fuente para la carga magnética. Por lo tanto, el criterio 2 de la sección 5.1 se satisface para nuestros potenciales. Entonces, sólo nos falta verificar el tercer criterio de la sección 5.1, es decir, los potenciales obtenidos por el mapeo de SW  $A_\mu^{(N/S)n}$  no deben introducir nuevas singularidades. Para esto necesitamos dar la forma explícita del potencial que usaremos a orden cero  $A_\mu^N$  y  $A_\mu^S$  asociado al monopolo magnético.

Comparando con resultados previos en la literatura, fijamos los valores del parámetro  $\theta^{\mu\nu}$  imponiendo  $\theta^{12} = -\theta^{21} = \theta \neq 0$ ; las demás componentes son cero y usamos los potenciales introducidos

por Wu y Yang (4.6.1), en coordenadas cartesianas. En lo que sigue  $A^{N_0}$  y  $A^{S_0}$  denotan los potenciales en el hemisferio norte y en el hemisferio sur respectivamente a orden cero en el parámetro  $\theta$  y  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Los potenciales a orden cero en coordenadas cartesianas se pueden escribir como

$$\begin{aligned} A_1^{N_0} &= -y \frac{(r-z)}{(x^2+y^2)r}, & A_2^{N_0} &= x \frac{(r-z)}{(x^2+y^2)r}, \\ A_1^{S_0} &= y \frac{(r+z)}{(x^2+y^2)r}, & A_2^{S_0} &= -x \frac{(r+z)}{(x^2+y^2)r}, \\ A_3^{N_0} &= A_3^{S_0} = A_3^{N_0} = A_0^{N_0} = A_0^{S_0} = 0. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Como se puede notar, estos potenciales presentan una simetría muy particular la cual proviene de que estamos considerando una solución esféricamente simétrica para el monopolo magnético y la cual juega un papel importante para los propósitos de este trabajo. Por lo tanto es importante investigar si los potenciales a ordenes superiores presentan alguna simetría adicional o preservan esta simetría, es decir, que las perturbaciones sean esféricamente simétricas.

Calculando explícitamente las perturbaciones para los primeros tres ordenes observamos que se pueden escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A_k^{(N/S)_0} &= -\epsilon_{ki} x^i f_0^{(N/S)}, \\ A_k^{(N/S)_1} &= -\epsilon_{ki} x^i f_1^{(N/S)}, \\ A_k^{(N/S)_2} &= -\epsilon_{ki} x^i f_2^{(N/S)}, \\ A_k^{(N/S)_3} &= -\epsilon_{ki} x^i f_3^{(N/S)}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

donde las funciones  $f_0^{(N/S)}, \dots, f_3^{(N/S)}$  tienen la siguiente dependencia  $f_k^{(N/S)} = f_k^{(N/S)}(x^2, y^2, z)$ . Por lo tanto este resultado nos dice que estas deformaciones no conmutativas para los potenciales  $\widehat{A}_\mu$  mantienen esta simetría, es decir, son esféricamente simétricas. Después de analizar los primeros tres ordenes de la solución, podemos conjeturar el siguiente Ansatz general

$$A_k^{(N/S)_n} = -\epsilon_{ki} x^i f_n^{(N/S)}, \quad (5.3.3)$$

donde  $\epsilon_{ij}$  es el pseudo tensor de Levi-Civita en dos dimensiones <sup>2</sup> con  $i, j = 1, 2$  y las funciones

---

<sup>2</sup>La convención en este trabajo para el pseudo tensor de Levi-Civita en dos dimensiones  $\epsilon_{ij}$ , para  $i, j = 1, 2$ , es que  $\epsilon_{12} = 1$  y donde identificamos las coordenadas como:  $1 \rightarrow x$  y  $2 \rightarrow y$ .

$f_0^{(N/S)}, \dots, f_3^{(N/S)}$  tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
f_0^{(N/S)} &= \pm \frac{(r \mp z)}{r\rho^2}, \\
f_1^{(N/S)} &= -\frac{\rho^4(r \mp 4z) + z^2\rho^2(5r \mp 6z) + 2z^4(r \mp z)}{2r^5\rho^4}, \\
f_2^{(N/S)} &= \pm \frac{\rho^8 + z\rho^6(19z \mp 8r) + z^3\rho^4(31z \mp 24r) + z^5\rho^2(17z \mp 15r) + 4z^7(z \mp r)}{2\rho^6r^8}, \\
f_3^{(N/S)} &= -\frac{13\rho^{10} + 8z\rho^8(40z \mp 13r) + 2z^3\rho^6(370z \mp 263r) + 3z^5\rho^4(203z \mp 162r)}{8\rho^8r^{10}} \\
&\quad - \frac{4z^7\rho^2(72z \mp 65r) + 56z^9(z \mp r)}{8\rho^8r^{10}}, \tag{5.3.4}
\end{aligned}$$

donde  $\rho^2 := x^2 + y^2 = r^2 - z^2$  y la convención del signo superior (inferior) en las expresiones anteriores hacen referencia al hemisferio norte (sur).

Como se había mencionado anteriormente un criterio importante que deben de satisfacer los potenciales en el procedimiento de Wu-Yang es que estos potenciales deben estar libres de singularidades en sus regiones de validez. Para esto es conveniente escribir las componentes del potencial en coordenadas esféricas  $(r, \vartheta, \phi)$ ; después de un calculo muy sencillo podemos escribir los potenciales  $A_\mu^N$  y  $A_\mu^S$  como

$$\begin{aligned}
A_t^{N^m} = A_r^{N^m} = A_\vartheta^{N^m} = 0, & \quad A_\phi^{N^m} = f_m^N \frac{y}{\sin \phi}, \\
A_t^{S^m} = A_r^{S^m} = A_\vartheta^{S^m} = 0, & \quad A_\phi^{S^m} = f_m^S \frac{y}{\sin \phi}, \tag{5.3.5}
\end{aligned}$$

donde  $m = 0, \dots, 3$  es el orden de la perturbación y las funciones  $f_m^{(N/S)}$  están dadas por (5.3.4). Por lo tanto las componentes se pueden escribir explícitamente en coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned}
A_\phi^{(N/S)_0} &= \pm \frac{(1 \mp \cos(\vartheta)) \csc(\vartheta)}{r}, \\
A_\phi^{(N/S)_1} &= -\frac{f_{N/S}(\vartheta) \csc^3(\vartheta)}{8r^3}, \\
A_\phi^{(N/S)_2} &= \pm \frac{g_{N/S}(\vartheta) \csc^5(\vartheta)}{128r^5}, \\
A_\phi^{(N/S)_3} &= -\frac{h_{N/S}(\vartheta) \csc^7(\vartheta)}{1024r^7}, \tag{5.3.6}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
f_{N/S}(\vartheta) &:= \mp 10 \cos(\vartheta) + 2 \cos(2\vartheta) \pm 2 \cos(3\vartheta) - \cos(4\vartheta) + 7, \\
g_{N/S}(\vartheta) &:= \mp 327 \cos(\vartheta) + 80 \cos(2\vartheta) \pm 75 \cos(3\vartheta) - 64 \cos(4\vartheta) \pm \cos(5\vartheta) \\
&\quad + 16 \cos(6\vartheta) \mp 5 \cos(7\vartheta) + 224, \\
h_{N/S}(\vartheta) &:= \mp 9112 \cos(\vartheta) + 2080 \cos(2\vartheta) \pm 2180 \cos(3\vartheta) - 1844 \cos(4\vartheta) \mp 36 \cos(5\vartheta) \\
&\quad + 686 \cos(6\vartheta) \mp 270 \cos(7\vartheta) - 65 \cos(8\vartheta) \pm 70 \cos(9\vartheta) - 14 \cos(10\vartheta) + 6325.
\end{aligned}$$

De estas expresiones se puede ver que en el límite donde el ángulo polar se hace cero,  $\vartheta \rightarrow 0$ , las componentes  $A_\phi^{N_m} \rightarrow 0$ , y cuando  $\vartheta \rightarrow \pi$  tenemos que  $A_\phi^{S_m} \rightarrow 0$ . Por lo tanto, ambos potenciales  $A_\phi^{N_m}$  y  $A_\phi^{S_m}$  son libres de singularidades en sus respectivas regiones de validez; la no conmutatividad en el espacio no introduce nuevas singularidades a los potenciales de norma hasta este orden y esperamos que esto sea una característica general a todos los ordenes.

En la sección 5.2 discutimos los análogos de las ecuaciones de Maxwell magnéticas en un espacio no conmutativo así como las ecuaciones de Maxwell magnéticas asociadas a las perturbaciones en el parámetro  $\theta$ . Por otro lado usamos el mapeo de SW, el cual nos da un Ansatz para encontrar explícitamente las expresiones del potencial de norma a todos los ordenes:  $A_\mu^{(N/S)_n}$ , de tal manera que estos potenciales son invariantes de norma bajo el producto-\*

Es decir, tenemos un sistema de ecuaciones análogas a las de Maxwell con fuentes en un espacio-tiempo no conmutativo y tenemos un conjunto de soluciones dadas por el mapeo de SW para este sistema de ecuaciones. Por lo tanto estas soluciones para los potenciales de norma  $A_\mu^{(N/S)_n}$  tienen la información de la fuente que las produce, es decir, si evaluamos estas soluciones en las ecuaciones de Maxwell modificadas podemos obtener a lo que nos referiremos como las fuentes inducidas por el mapeo de SW. Si usamos la ecuación (5.3.2) en las ecuaciones (5.2.10) y (5.2.13), encontramos que las fuentes están dadas por

$$\begin{aligned}
J_{e0}^{(N/S)i} &= 0, \\
J_{e1}^{(N/S)i} &= \theta \epsilon^{ij3} x^j g_1^{(N/S)}, \\
J_{e2}^{(N/S)i} &= \theta^2 \epsilon^{ij3} x^j g_2^{(N/S)},
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
g_1^{(N/S)} &:= \frac{3}{r^6}, \\
g_2^{(N/S)} &:= \pm \frac{3 [\mp 4z (2r \mp z) \rho^2 \pm z^3 (r \mp z) + 5\rho^4]}{r^{10} \rho^2}.
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Entonces las expresiones dadas en (5.3.7) son las corrientes eléctricas inducidas por el mapeo de SW. Por lo tanto podemos notar que aparecen contribuciones no nulas a las corrientes eléctricas debido a la no conmutatividad. Para la carga magnética tenemos una carga magnética efectiva dada por

$$4\pi g_{eff} = 4\pi + 2\pi \frac{\theta^2}{r^4},$$

hasta segundo orden en el parámetro de no conmutatividad. Este resultado puede ser obtenido calculando las integrales  $\int_{\Gamma} \vec{A}^{(N/S)1} \cdot \vec{ds}$  y  $\int_{\Gamma} \vec{A}^{(N/S)2} \cdot \vec{ds}$ , donde  $\Gamma$  es un circuito de radio  $r$  en el ecuador ( $\vartheta = \pi/2$ ) positivamente (negativamente) orientado hacia el hemisferio norte (sur). Es claro que en el límite  $\theta \rightarrow 0$  obtenemos  $g_{eff} \rightarrow 1$ .

#### 5.4. La cuantización de Dirac y el parámetro $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_{\lambda}(\lambda, A; \theta)$ no conmutativo

Por medio del mapeo de SW se ha encontrado un Ansatz general para las correcciones no conmutativas del potencial de norma asociado a un monopolo magnético. Ahora estamos en la condición de discutir la condición de cuantización de Dirac en el contexto no conmutativo.

Para esto seguiremos un procedimiento similar al discutido en la sección 4.6, es decir, consideremos la función de onda asociada al monopolo magnético no conmutativo  $\hat{\Psi}$ , la cual es solución a la ecuación de Schrödinger deformada que describe una partícula no relativista de masa  $m$  en un campo externo generado por  $\vec{A}(\vec{r})$ :

$$\begin{aligned} \hat{H} * \hat{\Psi}(\vec{r}) &= -\frac{1}{2m} \left( \vec{\nabla} - ie\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 * \hat{\Psi}(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{2m} \hat{D}^2 \hat{\Psi}(\vec{r}) \\ &= E \hat{\Psi}(\vec{r}). \end{aligned}$$

Recordemos que bajo transformaciones de norma del potencial (5.1.5), tanto la función de onda como la derivada covariante transforman de la misma manera:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) \rightarrow U * \hat{\Psi}(\vec{r}) = e^{ie\hat{\Lambda}(\vec{r})} * \hat{\Psi}(\vec{r}), \quad \hat{D}\hat{\Psi}(\vec{r}) \rightarrow U * \hat{D}\hat{\Psi}(\vec{r}) = e^{ie\hat{\Lambda}(\vec{r})} * \hat{D}\hat{\Psi}(\vec{r}).$$

Ahora observemos que la función de onda de una partícula en un campo debido a un monopolo depende de la norma, aún en el caso no conmutativo. En la región de superposición  $R^N \cap R^S$ , ambas formas del potenciales  $\hat{A}_{\mu}^N$  y  $\hat{A}_{\mu}^S$  son regulares<sup>3</sup>, por lo tanto, las funciones de onda correspondientes están relacionadas a través de la transformación de norma (5.1.5):

$$\hat{\Psi}^S = U * \hat{\Psi}^N = e^{ie\hat{\Lambda}} * \hat{\Psi}^N.$$

Cada una de las funciones de onda  $\hat{\Psi}^N$  y  $\hat{\Psi}^S$  deben tener un sólo valor en los hemisferios  $R^N$  y  $R^S$  respectivamente. Nuevamente consideremos una trayectoria cerrada  $l$  en la región de superposición. Entonces el ángulo azimutal  $\phi$  aumenta de 0 a  $2\pi$ :

$$\hat{\Psi}^S(0) = e^{ie\hat{\Lambda}(0)} * \hat{\Psi}^N(0), \quad \hat{\Psi}^S(2\pi) = e^{ie\hat{\Lambda}(2\pi)} * \hat{\Psi}^N(2\pi).$$

Por lo tanto, las funciones de onda son univaluadas si el factor de fase es un múltiplo de  $2\pi$ , es decir, son univaluadas si

$$\Delta S = e \left[ \hat{\Lambda}(2\pi) - \hat{\Lambda}(0) \right] = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5.4.1)$$

<sup>3</sup>En la sección 5.3 verificamos por lo menos hasta segundo orden en el parámetro  $\theta$ , la no conmutatividad no introduce nuevas singularidades. Además, asumiremos que esto sigue siendo válido para todos los órdenes en  $\theta$ .

donde esta condición es equivalente a la mencionada en la sección 4.6 . Es necesario analizar bajo que condiciones se satisface la relación (5.4.1). Para esto consideremos un desarrollo perturbativo del parámetro  $\hat{\Lambda}$ :

$$\hat{\Lambda}(\lambda, A, \theta) = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^{(n)}(\lambda, A, \theta),$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de norma en el caso conmutativo analizado en la sección 4.6 y el cual está dado por  $\lambda(x) = 2g\phi = 2g \arctan(y/x)$ . Por lo tanto la condición (5.3.7) se puede escribir

$$\Delta S = 4\pi e g \phi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Lambda^{(n)}(2\pi) - \Lambda^{(n)}(0) \right] = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En este caso la condición de cuantización de Dirac para el caso no conmutativo se preserva si y sólo si las contribuciones no conmutativas del parámetro de norma son nulas:  $\Lambda_{\lambda}^n = 0$ , para  $n \geq 1$  o de periodicidad  $2\pi$ .

Ahora bien, el punto principal aquí es analizar si las correcciones en  $\theta$  del parámetro de norma  $\hat{\Lambda}$  se pueden anular para los potenciales obtenidos del mapeo de SW, es decir para los potenciales dados en (5.3.2). En lo que sigue analizaremos orden por orden el parámetro de norma  $\hat{\Lambda}_{\lambda}$ . Empecemos con el caso de la corrección a primer orden para el parámetro no conmutativo  $\hat{\Lambda}_{\lambda}$ , el cual se puede obtener de (3.3.8) y usando el hecho que estamos estudiando el caso con grupo de norma abeliano se puede simplificar a

$$\Lambda^1 = -\frac{1}{2}\theta^{kl} A_k^0 \partial_l \lambda. \quad (5.4.2)$$

Las derivadas parciales del parámetro de norma estándar tiene una simetría particular la cual es de suma importancia en los siguientes cálculos; a partir de la ecuación (4.6.3) se puede ver fácilmente mediante un cálculo directo que la derivada del parámetro de norma se puede escribir como  $\partial_l \lambda = -\epsilon_{lj} x^j g$ , donde  $g := \frac{2z}{x^2 + y^2}$ , y por lo tanto, el potencial de norma  $A_k^0$  se puede escribir como  $A_k^0 = -\epsilon_{ki} x^i f_0$  como se señaló antes en (5.3.3). Usando estos dos resultados podemos calcular la corrección no conmutativa para el parámetro de norma a primer orden

$$\begin{aligned} \Lambda^1 &= -\frac{1}{2}\theta \epsilon^{kl} (-\epsilon_{ki} x^i f_0) (-\epsilon_{lj} x^j g) \\ &= -\frac{1}{2}\theta \epsilon^{kl} \epsilon_{ki} x^i f_0 \epsilon_{lj} x^j g \\ &= -\frac{1}{2}\theta \delta_i^l x^i \epsilon_{lj} x^j f_0 g = -\frac{1}{2}\theta \epsilon_{ij} x^i x^j f_0 g = 0, \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

donde se ha asumido que  $\theta^{12} = -\theta^{21} = \theta$  como la única componente distinta de cero y en consecuencia  $\theta^{kl} = \theta \epsilon^{kl}$ .

Por lo tanto, podemos ver que usando el mapeo de SW, la condición de cuantización de Dirac se preserva a primer orden. El siguiente paso es calcular la corrección a segundo orden  $\Lambda^2$  para el parámetro no conmutativo. A partir del mapeo de SW el parámetro de norma a segundo orden dado en (3.3.18) se puede escribir como

$$\Lambda^2 = -\frac{1}{4}\theta^{kl} (\{A_k^1, \partial_l \lambda\} + \{A_k^0, \partial_l \Lambda^1\}). \quad (5.4.4)$$

El segundo término de esta ecuación es cero, debido a que ya se mostró que  $\Lambda^1 = 0$ . Por lo tanto, sólo necesitamos calcular  $\theta^{kl}\{A_k^1, \partial_l \lambda\}$ . En la sección anterior se calcularon los potenciales de norma hasta segundo orden en  $\theta$  y esos potenciales se pueden escribir en forma general como  $A_k^1 = -\epsilon_{ki}x^i f_1$  donde  $f_1$  está dado en (5.3.4). Nuevamente usamos la simetría del potencial  $A_k^1$  y siguiendo un procedimiento similar al caso de  $\Lambda^1$ , es sencillo mostrar que el parámetro de norma a segundo orden también es nulo, es decir  $\Lambda^2 = 0$ .

Por lo tanto, hasta el momento se ha verificado que la condición de cuantización de Dirac es consistente con la extensión no conmutativa a segundo orden. Ahora consideremos el caso más general donde el parámetro de norma tiene la forma general:

$$\Lambda^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{kl} \sum_{p+q+r=n} \{A_k^p, \partial_l \Lambda^q\}_{*r}. \quad (5.4.5)$$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior se puede demostrar que el parámetro de norma es nulo a todos los órdenes:

$$\Lambda^{n+1} = 0 \quad , \text{para } n \in \mathbb{Z},$$

donde se asume el hecho de que los potenciales de norma se pueden escribir de manera general como  $A_k^n = -\epsilon_{ki}x^i f_n$ , donde  $f_n = f_n(x^2, y^2, z)$  y  $n$  es el orden de la perturbación. Los detalles de esta demostración se pueden ver en el apéndice A.

Usando este resultado obtenemos que el único elemento no nulo para el parámetro de norma es  $\widehat{\Lambda}_\lambda = \lambda$  y por lo tanto este resultado nos dice que la condición de cuantización de Dirac se preserva bajo correcciones no conmutativas del potencial de norma  $A_\mu^n$  obtenidas a partir del mapeo de SW.

## 5.5. Conclusiones

En este trabajo hemos investigado la validez de la Condición de cuantización de Dirac (CCD) en el marco de las teorías de norma no-conmutativa. Para hacer esto hemos utilizado el mapeo de Seiberg-Witten (SW) con el fin de encontrar los potenciales de norma no-conmutativos asociados a los potenciales de norma conmutativos; como potenciales semillas hemos hecho uso de los potenciales introducidos por Wu y Yang para el monopolo magnético.

Una vez obtenidas las perturbaciones no-conmutativas del potencial de norma  $\widehat{A}_\mu(x; \theta)$ , hemos logrado dos objetivos. Primero, hemos escrito las ecuaciones de Maxwell modificadas similares a las propuestas previamente en algunos trabajos [28, 29]; en estos enfoques, la estructura de las ecuaciones de Maxwell no incluyen fuentes para el campo eléctrico, por lo que los autores no consideran deformaciones no-conmutativas para las fuentes, es decir, cargas eléctricas y magnéticas. Sin embargo, diferimos de este procedimiento en que utilizamos las deformaciones de los potenciales de norma para deducir las fuentes, eléctricas y magnéticas, que deberían estar presentes en estas ecuaciones.

La principal diferencia que obtenemos en esta dirección es que en realidad existe una corriente eléctrica que contribuye al rotacional del campo magnético no-conmutativo; esto se ve claramente cuando se considera una expansión perturbativa en términos del parámetro de no conmutatividad y se calculan las correcciones al rotacional del campo magnético. Argumentos similares se aplican al caso de la divergencia del campo magnético donde obtenemos modificaciones de la carga magnética.

En segundo lugar, el mapeo de SW nos permite obtener expresiones explícitas para todos los órdenes en la teoría de perturbaciones para los potenciales de norma. En este trabajo calculamos

explícitamente el potencial de norma NC hasta tercer orden en el parámetro de no conmutatividad, en donde obtuvimos que las deformaciones no-conmutativas del potencial de norma  $A_\mu^n$  y el parámetro de norma  $\Lambda^n$  presentan una estructura funcional muy particular en coordenadas cartesianas. Esto es, obtuvimos que las deformaciones presentan una dependencia cuadrática en las coordenadas  $x$  y  $y$ , que nos dice que las deformaciones  $A_\mu^n$  y  $\Lambda^n$  son funciones homogéneas de segundo orden en las coordenadas  $x$  y  $y$ . Por lo tanto, este tipo de funciones tienen propiedades muy interesantes para los propósitos de este trabajo ya que encontramos que para un orden arbitrario en parámetro de no-conmutatividad  $\theta^n$ , el potencial de norma se puede escribir como  $A_\mu^n = A_\mu^n(x^2, y^2)$ . Adicionalmente verificamos para algunos ordenes que estas deformaciones no presentan singularidades adicionales en sus respectivos dominios. También usamos las perturbaciones de los potenciales de norma en las ecuaciones de Maxwell deformadas con el fin de obtener las fuentes asociadas a estas perturbaciones.

Es importante resaltar que esta deformación no-conmutativa a la teoría electromagnética sigue siendo una teoría de norma con grupo de simetría  $U_*(1)$  y parámetro de norma  $\hat{\Lambda}(x; \theta)$ . Usando este hecho analizamos la condición de cuantización de Dirac (CCD) en el contexto no-conmutativo. Para ellos consideramos una carga eléctrica, la cual se mueve en un circuito cerrado en una vecindad de un monopolo magnético. Por lo tanto, la función de onda asociada al monopolo magnético no-conmutativo  $\hat{\Psi}$ , es solución a la ecuación de Schrödinger deformada que describe una partícula no relativista de masa  $m$  en un campo externo generado por los potenciales  $\vec{A}^N(\vec{r}; \theta)$  y  $\vec{A}^S(\vec{r}; \theta)$ . En la región de superposición  $R^N \cap R^S$ , ambas expresiones de los potenciales  $\vec{A}_\mu^N$  y  $\vec{A}_\mu^S$  son regulares y además están relacionadas a través de una transformación de norma  $\hat{\Psi}^S = U * \hat{\Psi}^N = e^{ie\hat{\Lambda}} * \hat{\Psi}^N$ . Si ahora se considera una trayectoria cerrada  $l$  en la región de superposición obtenemos que las funciones de onda son univaluadas si el factor de fase es un múltiplo entero de  $2\pi$ , es decir

$$\Delta S = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto se puede concluir que la condición de cuantización de Dirac para el caso no-conmutativo se preserva si y sólo si las contribuciones no conmutativas del parámetro de norma son nulas:  $\Lambda_\lambda^{(n)} = 0$ , para  $n \geq 1$  o de periodicidad  $2\pi$ .

La importancia de esta parte del trabajo tesis radicó en mostrar que la no-conmutatividad en las coordenadas espaciales pueden incorporarse a la teoría electromagnética de Maxwell de tal manera que la condición de cuantización de Dirac se preserve, es decir, la cuantización de la carga eléctrica es compatible con la no-conmutatividad. Este resultado se obtuvo y fue consecuencia directa de los cálculos que se realizaron, por medio de los cuales mostramos que  $\Lambda_\lambda^{(n)} = 0$ , para  $n \geq 1$ .

## Parte III

# Monopolos magnéticos en teorías de norma no abelianas



## Capítulo 6

# El Monopolo de 't Hooft-Polyakov

### 6.1. El modelo de Georgi-Glashow $SU(2)$

#### 6.1.1. El Monopolo Wu-Yang no Abelian

Como hemos visto en los capítulos anteriores, un monopolo magnético puede introducirse en la electrodinámica abeliana a nivel clásico, es decir, la manera de incorporar el monopolo magnético es introduciendo un potencial vectorial, el cual no está definido globalmente (potencial de Wu-Yang) o introduciendo un potencial vectorial singular (potencial de Dirac). Por lo tanto las soluciones para monopolos magnéticos no aparecen de manera natural dentro de una teoría de norma abeliana.

La situación cambia drásticamente si tenemos en cuenta que la electrodinámica abeliana es parte de un modelo unificado, es decir, si el generador del subgrupo  $U(1)$  del electromagnetismo está embebido en un grupo de norma no-abeliano de mayor rango. De hecho, consideraremos el ejemplo más simple de dicha incrustación, es decir, el modelo  $SU(2)$  de Yang-Mills. Supongamos que el potencial de Dirac (4.3.3), el cual tiene una cuerda de Dirac dirigida a lo largo de la dirección positiva del eje  $z$ , está incrustado en una teoría de norma con grupo de simetría  $SU(2)$  como<sup>1</sup>  $A_\mu = A_\mu^{Dirac} \sigma_3/2$ . Por lo tanto, las componentes del potencial no-abeliano  $A_\mu = A_\mu^a \sigma^a$  son

$$A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \quad A_\varphi = A_\varphi^3 \sigma^3 = -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \sigma^3. \quad (6.1.1)$$

Es conveniente escribir este potencial en términos de componentes cartesianas, para esto podemos escribir  $A_\mu^3 = -g(1 + \cos \theta) \partial_\mu \varphi$ , donde el 4-vector

$$\partial_\mu \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} (0, -\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

es singular a lo largo de todo el eje  $z$ .

Recordemos que bajo transformaciones de norma el potencial vectorial no-abeliano transforma de la siguiente manera

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U \partial_\mu U^{-1}, \quad (6.1.2)$$

---

<sup>1</sup>Hemos adoptado una notación en la que siempre se debe entender que los índices griegos van del 1 al 4 y los índices latinos del 1 al 3.

donde la matriz de la transformación de norma  $SU(2)$  está definida por

$$U(\theta, \phi, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\alpha} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi+\alpha)} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\phi+\alpha)} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (6.1.3)$$

Los parámetros  $\theta$  y  $\varphi$  del grupo en la parametrización estándar se identifican con los ángulos polar y azimutal en la esfera  $S^2$ . El tercer parámetro, el ángulo  $\alpha$ , se define en la esfera  $S^3$ .

Supongamos que  $\alpha = 0$  y consideremos las transformaciones de norma cuyo efecto es girar el vector unitario en la esfera  $S^2$  al tercer eje en el isoespacio (isospace):

$$U(\theta, \phi) = e^{i\sigma_3 \frac{\varphi}{2}} e^{i\sigma_2 \frac{\varphi}{2}} e^{-i\sigma_3 \frac{\varphi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.1.4)$$

El rango del ángulo de rotación  $\varphi$  varía desde el valor  $4\pi$  para  $\theta = 0$  y  $0$  para  $\theta = \pi$ . Después de algunos cálculos simples, pero largos, la transformación de norma (6.1.2) se puede escribir como [30, 31, 32]

$$A'_\mu = A_\mu \frac{\sigma^a}{2} = \varepsilon_{amn} \frac{r_m \sigma^a}{r^2}. \quad (6.1.5)$$

Este potencial es regular en todas partes, con excepción del origen, es decir, la singularidad de la cuerda de Dirac de la expresión original (6.1.1) desaparece. Este resultado se puede entender teniendo en cuenta que la transformación de norma (6.1.4) es por si misma singular. De hecho, la tercer componente isotópica de la parte afín de la transformación de norma

$$\left[ -\frac{i}{e} U \partial_\mu U^{-1} \right]_3 = \frac{i}{e} (1 + \cos \theta) \partial_k \varphi$$

posee una singularidad del mismo tipo que la singularidad del potencial de Dirac incorporada en (6.1.1). Por lo tanto la cancelación exacta de ambas singularidades es posible si se cumple la condición de cuantización de carga (4.5.2).

La transformación de norma del potencial (6.1.1) nos lleva a la expresión (6.1.5), que es la solución clásica de la teoría de Yang-Mills  $SU(2)$ , la cual fue descubierta por Wu y Yang en 1969. Dicha solución está conectada con el monopolo magnético, debido a que después de la sustitución del potencial Wu-Yang (6.1.5) en la definición del tensor de campo electromagnético no-abeliano

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie [A_\nu, A_\mu] = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \sigma^a,$$

obtenemos la siguiente dependencia

$$F_{mn}^a = \varepsilon_{mnk} \frac{r^a r^k}{er^4} \sim \frac{1}{r^2}.$$

Este resultado sugiere que tal solución podría ser una fuente de un campo magnético de tipo-Coulomb en una teoría de norma no-abeliana. Sin embargo, si tratamos ingenuamente de calcular la carga magnética del color que corresponde a este campo, la integral sobre el campo magnético del color sobre la superficie de una esfera espacial infinita se anula

$$\int dS_k B_k^a = \int dS_k \frac{r^a r^k}{er^4} = 0.$$

Por otro lado, la singularidad en el origen del potencial de Wu-Yang conduce a algunos problemas con la definición de la energía de la configuración. Como veremos más adelante, podemos introducir un campo escalar, de tal manera que el acoplamiento del potencial de norma con el campo de Higgs junto con el mecanismo de ruptura espontanea de simetría resuelven ambos problemas.

### 6.1.2. El modelo de Georgi-Glashow

La era moderna de la teoría del monopolo magnético comenzó en 1974, cuando 't Hooft y Polyakov descubrieron de manera independiente soluciones de monopolos magnéticos del modelo  $SO(3)$  de Georgi-Glashow [33, 32]. La esencia de este avance radica en que, si bien un monopolo de Dirac puede incorporarse en una teoría de norma abeliana, en algunos modelos no-abelianos como el de Georgi y Glashow, las soluciones de monopolos magnéticos aparecen de manera natural.

Durante muchos años, a partir del trabajo pionero de Dirac, el argumento más serio para apoyar el concepto de monopolo fue la posible explicación de la cuantización de la carga eléctrica. Sin embargo, a medida que pasó el tiempo y que surgió la idea de una gran unificación, parecía que este último argumento había perdido algo de poder.

De hecho, el punto de vista moderno es que el operador de la carga eléctrica es el generador de un grupo  $U(1)$ . La condición de cuantización de la carga surge en modelos de unificación si el subgrupo electromagnético está incrustado en un grupo de norma no abeliano semi-simple de rango superior. En este caso, el generador de carga eléctrica forma relaciones de conmutación no triviales con todos los demás generadores del grupo de norma. Por lo tanto, la cuantización de la carga eléctrica en la actualidad se considera como un argumento en apoyo del enfoque de unificación.

Sin embargo, resulta que tanto las explicaciones "antiguas" como las "nuevas" de la cuantización de la carga eléctrica son solo dos lados del mismo problema, debido a que cualquier modelo de unificación con un subgrupo electromagnético  $U(1)$  incrustado en un grupo de norma semi-simple, que se rompe espontáneamente por el mecanismo de Higgs, posee soluciones tipo monopolo magnético!

Un ejemplo de tal modelo es el modelo de Georgi-Glashow [34], el cual describe una teoría de norma acoplada con campos de Higgs y está descrita por una densidad Lagrangiana clásica dada por

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2}\text{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{Tr}D_\mu\phi D^\mu\phi - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) - V(\phi), \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

donde  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$ ,  $\phi = \phi^a T^a$ , y la convención que usaremos aquí es que los índices griegos toman valores  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  además de usar la normalización estándar de los generadores Hermitianos del grupo de norma:  $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ ,  $a, b = 1, 2, 3$ , que en el caso del grupo  $SU(2)$  satisfacen el álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon_{abc}T^c.$$

Como se discutió en la sección 3.3, en teorías de norma hay dos representaciones del grupo de simetría que se suelen usar a menudo, es decir, los generadores pueden elegirse en la representación fundamental,  $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$  o en la representación adjunta,  $(T^a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}$ . En este trabajo usaremos la representación adjunta, pero en algunos casos es conveniente utilizar la representación fundamental. Recordemos que la derivada covariante se define como

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu,$$

la cual se puede escribir de las siguientes dos maneras

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ie[A_\mu, \phi], \quad \text{o} \quad D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a - e\varepsilon_{abc}A_\mu^b\phi^c, \quad (6.1.7)$$

que son la derivada covariante actuando sobre el campo  $\phi$  en la representación fundamental y adjunta respectivamente. El potencial de los campos escalares se considera de la siguiente manera

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2,$$

donde  $\lambda$  es la constante de acoplamiento del campo escalar. El tensor de campo electromagnético se puede escribir en la representación adjunta como

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e\varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (6.1.8)$$

o en su forma matricial dada por la representación fundamental

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] \equiv \frac{1}{ie}[D_\mu, D_\nu].$$

Las ecuaciones de movimiento (Euler-Lagrange) correspondientes al Lagrangiano (6.1.6) son

$$D_\nu F^{a\mu\nu} = -e\varepsilon_{abc} \phi^b D^\mu \phi^c, \quad D_\mu D^\mu \phi^a = -\lambda \phi^a (\phi^b \phi^b - v^2). \quad (6.1.9)$$

De manera análoga al caso electromagnético, las ecuaciones (6.1.9) corresponden a la mitad de las ecuaciones que describen al Lagrangiano (6.1.6). Para obtener el segundo par de ecuaciones de campo comencemos por definir el tensor de campo electromagnético dual no-abeliano como  $\tilde{F}_{\mu\nu}^a := \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta a}$  y a partir de las identidades de Bianchi  $D^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}^a \equiv 0$  para el tensor electromagnético dual no-abeliano  $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$  se puede obtener el segundo par de las ecuaciones de campo.

Por otro lado, el tensor de energía-momento simétrico  $T_{\mu\nu}$ , que se deriva a partir del Lagrangiano (6.1.6) y de las ecuaciones de campo (6.1.9), es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= F_{\mu\rho}^a F_\nu^{a\rho} + (D_\mu \phi^a)(D_\nu \phi^a) - g_{\mu\nu} L \\ &= F_{\mu\alpha}^a F^{\alpha\nu a} + D_\mu \phi^a D_\nu \phi^a - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_\alpha \phi^a D^\alpha \phi^a - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F^{\alpha\beta a} \\ &\quad - g_{\mu\nu} \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2). \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Este tensor se conserva por virtud de las ecuaciones de campo:  $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

A partir del tensor de energía-momento (6.1.10) podemos obtener fácilmente la expresión para el Hamiltoniano estático, el cual representa la energía total del sistema:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) + \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2 \right] \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [E_n^a E_n^a + B_n^a B_n^a + (D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a)] + V(\phi) \right\}, \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

donde  $E_n^a \equiv F_{0n}^a$  y  $B_n^a \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{nmk} F_{mk}^a$ , son los campos eléctricos y magnéticos de *color*. Usando esta forma para la energía del sistema se puede ver que las configuraciones de energía mínima se obtienen si se satisfacen las siguientes condiciones

$$\phi^a \phi^a = v^2, \quad F_{mn}^a = 0, \quad D_\mu \phi^a = 0. \quad (6.1.12)$$

Estas condiciones definen el vacío de Higgs del sistema y la constante  $v$  es el valor de expectación de vacío distinto de cero del campo escalar correspondiente al rompimiento de simetría del potencial de Higgs  $V(\phi)$ .

El espectro perturbativo del modelo se puede encontrar analizando pequeñas fluctuaciones alrededor del vacío. Supongamos que el sistema bajo consideración es estático, es decir, no hay campos eléctricos  $E_n^a = 0$ ; entonces la energía del vacío es igual a cero. Como vacío es usual elegir  $\phi_{vac} = (0, 0, v)$ ; entonces, ahora consideremos una fluctuación  $\chi$  del campo escalar  $\phi$  alrededor del vacío trivial  $|\phi_{vac}| = v$ , donde sólo la tercer componente isotópica del campo de Higgs no se anula

$$\phi = (0, 0, v + \chi). \quad (6.1.13)$$

Después de hacer una sustitución de esta expansión hasta términos de segundo orden en  $\chi$  tenemos que

$$(D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) \approx (\partial_\mu \chi^a)(\partial^\mu \chi^a) + e^2 v^2 [(A_n^1)^2 + (A_n^2)^2],$$

y la perturbación del potencial es

$$V(\phi) \approx \frac{\lambda}{2} v^2 \chi^2.$$

Por lo tanto, el promedio de vacío del campo escalar no desaparece y el modelo describe una ruptura espontánea de simetría de tal manera que el espectro perturbativo consiste en un fotón sin masa  $A_\mu^3$  correspondiente al subgrupo electromagnético  $U(1)$  no roto<sup>2</sup>, dos campos vectoriales masivos  $A_\mu^\pm = (1/\sqrt{2})(A_\mu^1 \pm A_\mu^2)$  con masa  $m_v = ev$  y escalares neutros que tienen una masa  $m_s = v\sqrt{2\lambda}$ .

Discutiremos algunas propiedades de tales fluctuaciones más adelante. Aquí solo notamos que la carga eléctrica de los bosones vectoriales masivos  $A^\pm$  está dada por el subgrupo  $U(1)$  no-roto. En general, este es un subgrupo  $H$  del grupo  $G$ , cuya acción deja invariante al vacío de Higgs. Obviamente, este es un pequeño grupo de rotación en el isospin sobre la dirección dada por el vector  $\phi^a$ . El generador de la misma  $(\phi^a T^a)/v$  debe identificarse con el operador de la carga eléctrica  $Q$ . Por lo tanto, la expresión de la derivada covariante (6.1.7) se puede escribir en la forma

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu^a T^a = \partial_\mu + iQA_\mu^{em}, \quad (6.1.14)$$

lo que nos permite definir la "proyección electromagnética" del potencial de norma

$$A_\mu^{em} = \frac{1}{v} A_\mu^a \phi_{vac}^a, \quad Q = \frac{e}{v} \phi_{vac}^a T^a. \quad (6.1.15)$$

Teniendo en cuenta la definición de los generadores  $T^a$  del grupo de norma, podemos ver fácilmente que los valores propios mínimos permitidos del operador de carga eléctrica son ahora  $q = \pm e/2$ .

### 6.1.3. Clasificación topológica de las soluciones

El espectro de las posibles soluciones del modelo Georgi-Glashow es mucho más interesante de lo que se puede esperar. Es decir, recordemos que la configuración estática de energía finita más simple es la configuración del vacío  $\phi_{vac} = (0, 0, v)$ . Además de estas soluciones estáticas a las ecuaciones de movimiento existen otras soluciones estáticas estables de tipo solitón del sistema de

<sup>2</sup>Después del rompimiento espontáneo de simetría el vacío se degenera, es decir, aparece una infinidad de posibles mínimos de energía, los cuales forman el grupo  $U(1)$ . A este grupo de simetría del vacío es al que nos referimos como el subgrupo electromagnético  $U(1)$  no roto.

ecuaciones de campo (6.1.9) y que tienen una densidad de energía finita en el límite asintótico espacial  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = (0, 0, v)$ .

De hecho, la misma definición (6.1.12) obliga a que se degeneren el vacío clásico del modelo de Georgi-Glashow. La condición  $V(\phi) = 0$  significa que  $|\phi_{vac}| = v$ , es decir, el conjunto de valores de vacío del campo de Higgs forma una  $S^2_{vac}$ -esfera de radio  $v$  en el espacio isotópico  $d = 3$ . Todos los puntos en esta esfera son equivalentes debido a que hay una transformación de norma  $SU(2)$  bien definida que los conecta.

Las soluciones de las ecuaciones clásicas del campo mapean el vacío de la variedad  $S^2_{vac}$  en la frontera del espacio tridimensional, que también es una  $S^2$ -esfera, es decir,  $\phi : S^2_{vac} \rightarrow S^2$ . Estos mapeos están caracterizados por un número de enrollamiento (winding number)

$$\text{Winding} = n = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \int d^2 S_i \phi^a \partial_j \phi^b \partial_k \phi^c, \quad (6.1.16)$$

donde  $n$  toma los valores  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . El número de enrollamiento indica el número de veces que la  $S^2_{vac}$ -esfera ha sido cubierta por una sola vuelta alrededor de la frontera espacial de la  $S^2$ -esfera.

El punto crucial es que las soluciones que tienen una energía finita en el límite asintótico espacial podrían separarse en diferentes clases de acuerdo con el comportamiento del campo  $\phi^a$ . El caso trivial es que la orientación isotópica de los campos no dependa de las coordenadas espaciales y que en la región asintótica espacial el campo escalar tienda al límite

$$\phi_{vac} = (0, 0, v). \quad (6.1.17)$$

Esta situación corresponde al número de enrollamiento (winding number)  $n = 0$ .

Para construir las soluciones correspondientes al mínimo no trivial de la energía funcional (6.1.11), consideramos nuevamente el campo escalar en el límite asintótico espacial  $r \rightarrow \infty$ , el cual toma valores en la variedad del vacío  $S^2_{vac}$ . Sin embargo, suponemos que el isovector del campo escalar ahora se dirige en la dirección del espacio isotópico a lo largo de la dirección del vector de radio en el espacio asintótico:<sup>3 4</sup>

$$\phi^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{vr^a}{r}. \quad (6.1.18)$$

Este comportamiento asintótico obviamente mezcla los índices espaciales e isotópicos y define un sólo mapeo del vacío  $\mathcal{M}$  en el límite asintótico espacial. Una sola vuelta alrededor de la frontera espacial  $S^2$  conduce a una única trayectoria cerrada en la  $S^2_{vac}$ -esfera y el número de enrollamiento (winding number) de dicha asignación es  $n = 1$ .

Como fue mencionado por 't Hooft [32], las configuraciones que se caracterizan por diferentes números de enrollamiento (winding number) no pueden ser continuamente deformadas entre sí. De hecho, hemos visto que la transformación de norma (6.1.4) de la forma  $U = e^{i(\sigma_k \phi_k)\theta/2}$  rota el isovector al tercer eje. Sin embargo, si tratamos de "Peinar el erizo", es decir, si tratamos de rotar el campo escalar en cualquier lugar del espacio en una dirección determinada (el denominado unitario o norma abeliana), la singularidad de la transformación del norma en el polo sur no nos permite hacerlo globalmente. Por lo tanto, no existe una transformación de norma bien definida que conecte las configuraciones (6.1.17) y (6.1.18); entonces esta singularidad resulta en la barrera infinita que los separa.

<sup>3</sup>Este tipo de solución satisface que en el límite asintótico espacial  $r \rightarrow \infty$ , el campo escalar toma el valor  $|\phi|^2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{v^2 r^a r^a}{r^2} = v^2$ ; el campo escalar en este límite toma la forma del vacío trivial (6.1.17).

<sup>4</sup>En el documento pionero de Polyakov [33] esta solución fue denominada "erizo".

### 6.1.4. Definición de carga magnética

Como se ha discutido anteriormente las configuraciones de energía mínima están regidas por las tres constricciones dadas en (6.1.12). En esta sección nos centraremos en analizar la condición de que la derivada covariante del campo escalar es nula y analizaremos esta condición en el límite asintótico espacial, es decir,  $\lim_{r \rightarrow \infty} D_\mu \phi^a = 0$ , junto con la elección de una configuración no trivial del hedgehog (erizo), es decir, elegiremos una configuración dada por (6.1.18). De acuerdo con lo anterior, en el límite  $r \rightarrow \infty$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} D_\mu \phi^a &= \lim_{r \rightarrow \infty} \partial_\mu \phi^a - e \varepsilon_{abc} A_\mu^b \phi^c = 0 \\ &= \partial_n \left( \frac{r^a}{r} \right) - e \varepsilon_{abc} A_n^b \frac{r^c}{r} = 0. \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

Podemos reescribir el primer término de la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\partial_n \left( \frac{r^a}{r} \right) = \frac{r^2 \delta_{an} - r_a r_n}{r^3} = \frac{1}{r} (\delta_{an} \delta_{cn} - \delta_{ac} \delta_{nc}) \frac{r_c r_n}{r^2} = -\varepsilon_{abc} \varepsilon_{bnk} \frac{r_c r_k}{r^2}.$$

Usando este resultado en (6.1.19) podemos encontrar la siguiente forma asintótica para el potencial de norma

$$A_k^a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \varepsilon_{ank} \frac{r_n}{r^2}. \quad (6.1.20)$$

Por lo tanto el campo magnético no-abeliano correspondiente se puede escribir en la región asintótica como

$$B_n^a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{r_a r_n}{e r^4}.$$

En consecuencia, las condiciones de contorno (6.1.18) y (6.1.20) son compatibles con la existencia de un campo norma de largo alcance asociado con un subgrupo abeliano  $U(1)$  el cual permanece intacto en el vacío después del rompimiento de simetría. Dado que este campo cae como  $1/r^2$ , es decir, tiene la característica de un campo tipo-Coulomb, y como las componentes correspondientes a campos eléctricos en el tensor (de intensidad) de campo electromagnético (6.1.8) se anulan, esta configuración de campo regular puede identificarse con un monopolo magnético.

Por otro lado, recordemos que el subgrupo  $U(1)$  electromagnético está asociado con rotaciones sobre la dirección del isovector  $\phi$ . Por lo tanto, sería bastante natural introducir el potencial electromagnético como una proyección del potencial de norma  $A_\mu^a$  asociado al grupo de norma  $SU(2)$  en esa dirección, como se definió en (6.1.15). Para analizar esto, tomemos en cuenta que una solución general de la ecuación  $D_\mu \phi^a = 0$ , con la restricción  $\phi^a \phi^a = v^2$ , se puede escribir de la siguiente manera [35]

$$A_\mu^a = \frac{1}{v^2 e} \varepsilon_{abc} \phi^b \partial_\mu \phi^c + \frac{1}{v} \phi^a \Lambda_\mu, \quad (6.1.21)$$

donde  $\Lambda_\mu$  es un 4-vector arbitrario que se puede identificar con el potencial electromagnético. Esto se puede ver, después de contraer la ecuación (6.1.21) con la componentes  $\phi^a/v$  del campo escalar y usando el hecho de que  $\phi^a \phi^a = v^2$  obtenemos

$$\frac{\phi^a}{v} A_\mu^a = \Lambda_\mu \equiv A_\mu^{em}.$$

Usando este resultado, ahora podemos insertar el potencial de norma (6.1.21) con  $A_\mu = A_\mu = A_\mu^{em}$  en el tensor de campo electromagnético (6.1.8) obteniendo

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{\phi^a}{v} F_{\mu\nu}, \quad \text{donde} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{v^3 e} \varepsilon_{abc} \phi^a \partial_\mu \phi^b \partial_\nu \phi^c, \quad (6.1.22)$$

donde hemos usado  $A_\mu^a = \frac{\phi^a}{v} A_\mu$ . Esta definición invariante de norma del tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  [36] está relacionada con la definición original del tensor de 't Hooft [32].<sup>5</sup>

Ahora consideremos el sector topológicamente trivial (6.1.17), para el cual el último término en (6.1.22) se anula. En ese caso obtenemos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

que es precisamente el caso de la electrodinámica estándar de Maxwell. Como es de esperarse, en este sector no hay lugar para un monopolo magnético, debido a que las identidades de Bianchi se satisfacen:  $\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv 0$ .

Sin embargo, para la configuración con condiciones de contorno no triviales (6.1.18) y (6.1.20), el campo de Higgs también da una contribución no nula en el tensor de fuerza del campo electromagnético (6.1.22). Entonces, el segundo par de ecuaciones de Maxwell se ve modificada de la siguiente manera

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = k_\nu,$$

donde  $k_\nu$  es la corriente asociada a la cual nos referimos como corriente topológica. Debemos de tener en cuenta que si el potencial electromagnético  $A_\mu^{em}$  es regular, entonces la corriente magnética o corriente topológica  $k_\mu$  se puede expresar sólo a través del campo escalar<sup>6</sup>

$$k_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \frac{1}{2v^3 e} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial^\nu [\phi^a \partial^\rho \phi^b \partial^\sigma \phi^c]. \quad (6.1.24)$$

A primera vista, esta corriente es independiente de cualquier propiedad del campo de norma y se conserva por su propia definición, es decir

$$\partial_\mu k^\mu \equiv 0,$$

a diferencia de una corriente de Noether que se conserva debido a cierta simetría del modelo.

De acuerdo con la definición de corriente topológica (6.1.24), la carga magnética está asociada a la componente  $k_0$ , es decir, la carga magnética está definida de la siguiente manera [30]

$$\begin{aligned} g &= \int d^3x k_0 = \frac{1}{2v^3 e} \int d^3x \varepsilon_{abc} \varepsilon_{mnk} \partial_m (\phi^a \partial_n \phi^b \partial_k \phi^c) \\ &= -\frac{1}{2v^3 e} \int d^2S_n \varepsilon_{abc} \varepsilon_{mnk} \phi^a \partial_n \phi^b \partial_k \phi^c, \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

<sup>5</sup>La definición original del tensor 't Hooft está dada por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \text{Tr} \left\{ \hat{\phi} F_{\mu\nu} - \frac{i}{2e} \hat{\phi} D_\mu \hat{\phi} D_\nu \hat{\phi} \right\} = \hat{\phi}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a D_\mu \hat{\phi}^b D_\nu \hat{\phi}^c, \quad (6.1.23)$$

donde  $\hat{\phi}^a = \phi^a / |\phi|$  es un campo de Higgs normalizado. Obviamente, ambas definiciones coinciden en la frontera espacial. La diferencia es que el tensor 't Hooft (6.1.23) es singular en los ceros del campo de Higgs, mientras que (6.1.22) es regular en todas partes. Estos ceros están asociados con las posiciones de los monopolos.

<sup>6</sup>La corriente topológica sólo depende del último término del tensor  $F_{\mu\nu}^a$  dado por (6.1.22), los primeros dos términos se anulan usando las identidades de Bianchi.

donde la última integral se toma sobre la superficie de la  $S^2$ -esfera en la región asintótica espacial, la cual puede ser parametrizada por coordenadas locales  $\xi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Entonces podemos escribir

$$\partial_n \phi^a = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial r^n} \frac{\partial \phi^a}{\partial \xi^\alpha}, \quad d^2 S_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnk} \frac{\partial r^m}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial r^k}{\partial \xi^\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} d^2 \xi.$$

Después de un álgebra simple llegamos a

$$g = \frac{1}{2v^3 e} \int d^2 \xi \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{abc} \phi^a \partial_\alpha \phi^b \partial_\beta \phi^c, \quad (6.1.26)$$

La carga magnética es proporcional a un entero  $n$ , al que los matemáticos se refieren como el grado de Brouwer<sup>7</sup>. La interpretación geométrica de este entero es clara: es el número de veces que el isovector  $\phi^a$  cubre la  $S_{vac}^2$ -esfera, mientras que  $r^a$  cubre la  $S^2$ -esfera en la región asintótica espacial una vez. Por lo tanto[30]:

$$g = \frac{4\pi n}{e}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.1.27)$$

donde el factor  $4\pi$  se debe a la integración sobre la esfera unitaria. Este es el análogo no-abeliano de la condición de cuantización de carga de Dirac (4.5.2).

### 6.1.5. El Ansatz de 't Hooft-Polyakov

Como se ha discutido en las secciones previas, en el límite asintótico, la configuración de campo de un monopolo debe cumplir las condiciones (6.1.18) y (6.1.20). Ahora, buscaremos soluciones esféricamente simétricas para el monopolo magnético del modelo de Georgi-Glashow  $SO(3)$ . Como es habitual, este problema se puede simplificar si tenemos en cuenta las restricciones que se siguen de las simetrías de la configuración.

La solución regular estática de las ecuaciones de campo correspondientes al monopolo magnético del modelo de Georgi-Glashow  $SO(3)$  se construyó empleando el Ansatz de 't Hooft-Polyakov [33, 32], en el que se consideró un Ansatz esféricamente simétrico para el campo de Higgs y el potencial de norma no-abeliano, respectivamente

$$\phi^a = \delta_m^a \frac{r^m}{er^2} H(\xi), \quad A_n^a = \delta_s^a \varepsilon_{smn} \frac{r^m}{er^2} [1 - K(\xi)], \quad A_0^n = 0, \quad (6.1.28)$$

donde  $H(\xi)$  y  $K(\xi)$  son funciones de la variable adimensional  $\xi = ver$ .

Las formas explícitas de la estructura de estas funciones para el campo escalar y potencial de norma se pueden encontrar a partir de las ecuaciones de campo. Sin embargo, es más conveniente utilizar la condición de que la solución para monopolos corresponde a un mínimo local de la funcional de la energía. Esto significa que una configuración de campo será una solución a las ecuaciones de movimiento clásicas si y sólo si la funcional de la energía es un extremal, es decir  $\delta E = 0$ . Para esto, comencemos por escribir la energía del sistema en términos de las funciones desconocidas  $K(\xi)$  y  $H(\xi)$ . Sustituyendo el Ansatz (6.1.28) en (6.1.11), tenemos

$$E = \frac{4\pi v}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \left[ \xi^2 \left( \frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \xi \frac{dH}{d\xi} - H \right)^2 + \frac{1}{2} (K^2 - 1)^2 + K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4e^2} (H^2 - \xi^2)^2 \right]. \quad (6.1.29)$$

<sup>7</sup>El número de enrollamiento (winding number) es un caso especial del grado de Brouwer.

Si tomamos variaciones de esta funcional con respecto a las funciones  $H$  y  $K$  obtenemos las condiciones de extremalidad

$$\frac{\partial E}{\partial K} \delta K = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial H} \delta H = 0,$$

donde las variaciones  $\delta K$  y  $\delta H$  son variaciones arbitrarias; por lo tanto las funciones  $K(\xi)$  y  $H(\xi)$  que minimizan la energía (6.1.29) satisfacen

$$\xi^2 \frac{d^2 K}{d\xi^2} = KH^2 + K(K^2 - 1), \quad \xi^2 \frac{d^2 H}{d\xi^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2). \quad (6.1.30)$$

Las funciones  $K$  y  $H$  deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} K(\xi) &\rightarrow 1, & H(\xi) &\rightarrow 0 & \text{como} & \xi \rightarrow 0, \\ K(\xi) &\rightarrow 0, & H(\xi) &\rightarrow \xi & \text{como} & \xi \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

las cuales corresponden a las configuraciones asintóticas (6.1.18) y (6.1.20). De hecho, después de hacer la sustitución del Ansatz (6.1.28) en las expresiones para la derivada covariante del campo escalar y en los campos magnéticos no-abelianos obtenemos

$$\begin{aligned} D_n \phi^a &= \frac{\delta_{an}}{er^2} KH + \frac{r^n r^a}{er^4} \left( \xi \frac{dH}{d\xi} - H - KH \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \\ B_n^a &= \frac{r^n r^a}{er^4} \left( 1 - K^2 + \xi \frac{dK}{d\xi} \right) - \frac{\delta_{an}}{er^2} \xi \frac{dK}{d\xi} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{r^n r^a}{er^4}. \end{aligned} \quad (6.1.32)$$

Evidentemente, en el vacío de Higgs, el potencial vectorial del campo de norma adopta la forma del potencial Wu-Yang (6.1.5). Sin embargo, a diferencia de este potencial, la configuración del monopolo 't Hooft-Polyakov (6.1.28) es regular en todas partes y corresponde a una configuración de energía finita tanto en el origen como en la frontera espacial.

Observemos que en el vacío de Higgs,  $D_n \phi^a = 0$  y el tensor intensidad del campo electromagnético es  $F_{\mu\nu} = \phi^a F_{\mu\nu}^a / v$ . Claramente, la carga magnética puede calcularse como una integral sobre la superficie de la  $S^2$ -esfera en el infinito espacial:

$$g = \frac{1}{v} \int d^2 S_n B_n = \frac{1}{v} \int d^2 S_n B_n^a \phi^a = \frac{1}{v} \int d^3 x B_n^a D_n \phi^a, \quad (6.1.33)$$

donde se ha usado la identidad de Bianchi para el tensor del campo magnético no-abeliano  $D_n B_n^a = 0$ . Sustituyendo el Ansatz (6.1.28), obtenemos

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \{ (K^2 - 1)(H - \xi H') - 2\xi K' KH \} \\ &= \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty d\xi \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{1 - K^2}{\xi} \right\} = \frac{4\pi}{e}. \end{aligned} \quad (6.1.34)$$

Este resultado lo podemos comparar con (6.1.27); entonces podemos concluir que las condiciones de frontera (6.1.31) corresponden a un monopolo de carga magnética unitaria.

Desafortunadamente, el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas no lineales (6.1.30) en general no tiene una solución analítica. La única excepción conocida es el caso especial  $\lambda = 0$  [37, 38, 39]. Este es el llamado *límite de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)*. Sin embargo,

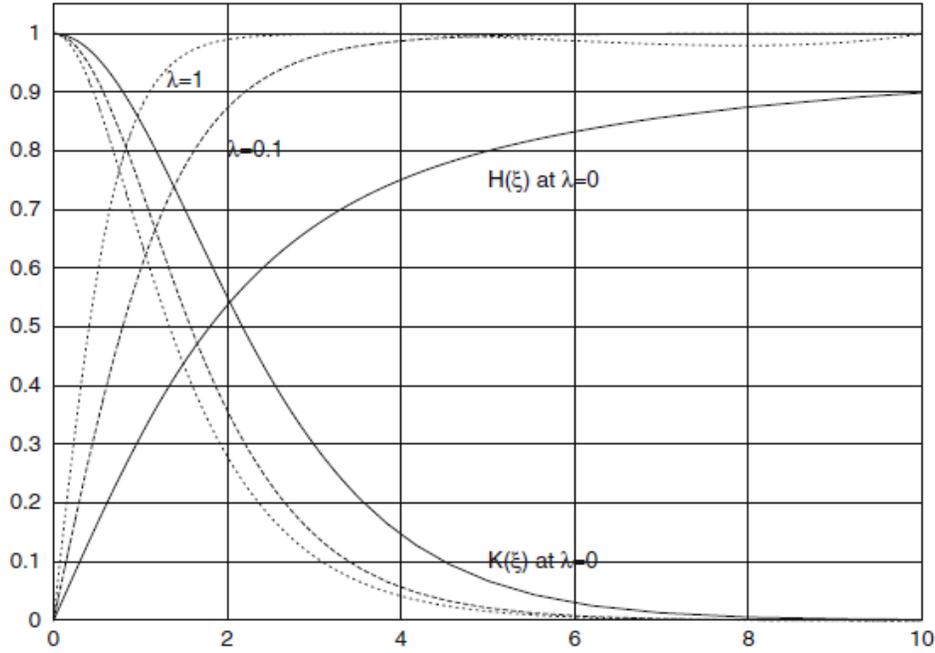


Figura 6.1.1: El perfil de la función  $H(\xi)$  y  $K(\xi)/\xi$  se muestran para el monopolo en  $\lambda = 0$ , (límite BPS)  $\lambda = 0.1$  y  $\lambda = 1$

antes de llegar a este límite, debemos describir las propiedades generales del monopolo no-abeliano.

Las soluciones numéricas del sistema (6.1.30) se discutieron en los trabajos [31, 40], donde las funciones de forma  $H(\xi)$  y  $K(\xi)$  se acercan bastante rápido a los valores asintóticos como se muestra en la figura 6.1.1. Por lo tanto, hay un vacío de Higgs fuera de alguna región del orden de la escala característica  $R_c$ , que se llama el núcleo del monopolo. Uno podría estimar este tamaño con argumentos simples[41]. La energía total de la configuración monopolo consta de dos componentes: la energía del campo magnético abeliano fuera del núcleo y la energía del campo escalar dentro del núcleo

$$E = E_{mag} + E_s \sim 4\pi g^2 R_c^{-1} + 4\pi v^2 R_c \sim \frac{4\pi}{e^2} (R_c^{-1} + m_v^2 R_c).$$

Esta suma es mínima si  $R_c \sim m_v^{-1}$ . En otras palabras, dentro del núcleo a distancias más cortas que la longitud de onda del vector bosón  $m_v^{-1} \sim (ve)^{-1}$ , se restablece la simetría  $SU(2)$  original. Sin embargo, fuera del núcleo, esta simetría se rompe espontáneamente en el subgrupo electromagnético abeliano  $U(1)$ . En este sentido, no hay diferencia entre el monopolo de 't Hooft-Polyakov y el monopolo de Dirac fuera del núcleo [36].

Los cálculos numéricos [31, 40] muestran que la masa del monopolo, que en el caso estático clásico es idéntica a su energía, depende de la constante de acoplamiento escalar  $\lambda$  de la siguiente manera

$$M = \frac{4\pi v}{e} f\left(\frac{\lambda}{e^2}\right),$$

donde la función  $f(\lambda/e^2)$  es una función monótonamente creciente, interpolando entre los límites [40]

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 1.787.$$

La razón por la cual la masa se vuelve independiente de los valores de la constante de acoplamiento  $\lambda$  para  $\lambda \gg 1$  es que en este límite el campo escalar se aproxima a la forma asintótica más rápido que el campo vectorial. La corrección de la masa monopolar conectada con el campo escalar es del orden  $\Delta E \sim M(m_v/m_s)$ , que es insignificante para valores grandes de  $m_s$ .

### 6.1.6. Dyones

Hasta el momento hemos discutido soluciones estáticas (independientes del tiempo) del modelo de Georgi-Glashow  $SO(3)$  mediante el Ansatz de 't Hooft-Polyakov (6.1.28). Debemos tener en cuenta que en este Ansatz se asume que la componente temporal del potencial de norma satisface la condición  $A_0^a = 0$ . Como una posible generalización del Ansatz de 't Hooft-Polyakov podemos considerar el caso donde la componente temporal del potencial de norma no es nulo y además es una función de las coordenadas espaciales[42]:

$$A_0^a = \frac{r^a}{er^2} J(r). \quad (6.1.35)$$

Esta configuración de campo corresponde al dyon no-abeliano, es decir, una configuración que tiene carga magnética y eléctrica. De hecho, por analogía con la carga magnética (6.1.33), la carga eléctrica del sistema de los campos se puede definir como

$$q \equiv \frac{1}{v} \int d^2 S_n E_n = \frac{1}{v} \int dS_n E_n^a \phi^a = \frac{1}{v} \int d^3 x E_n^a D_n \phi^a, \quad (6.1.36)$$

donde el campo eléctrico esta dado por  $E_n^a = F_{0n}^a$ . Aquí, usamos las ecuaciones de campo (6.1.9), según las cuales  $D_n E_n^a = 0$  y adicionalmente consideramos soluciones estáticas; obtenemos así la relación  $\varepsilon_{abc} \phi^b D_0 \phi^c = 0$  a partir de las ecuaciones de campo (6.1.9), que es válida para el Ansatz considerado. La carga magnética del dyon está dada por la fórmula (6.1.33).

Haciendo un análisis similar al de la sección 6.1.5, podemos encontrar la ecuación que satisface la función  $J(r)$ . Para esto, después de sustituir el Ansatz (6.1.28) junto con el Ansatz (6.1.35) en la ecuación (6.1.11) podemos escribir la ecuación para la energía de un dyon en términos de las funciones desconocidas  $K(\xi)$ ,  $H(\xi)$  y  $J(\xi)$

$$E = \frac{4\pi v}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \left[ \xi^2 \left( \frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \xi \frac{dH}{d\xi} - H \right)^2 + \frac{1}{2} (K^2 - 1)^2 + K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4e^2} (H^2 - \xi^2)^2 + \frac{1}{2} \left( \xi \frac{dJ}{d\xi} - J \right)^2 + K^2 J^2 \right]. \quad (6.1.37)$$

Tomamos variaciones de esta funcional con respecto a las funciones  $H$ ,  $K$  y  $J$ , es decir

$$\frac{\partial E}{\partial K} \delta K = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial H} \delta H = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial J} \delta J = 0,$$

donde las variaciones  $\delta K$ ,  $\delta H$  y  $\delta J$  son variaciones arbitrarias. Por lo tanto las funciones  $K(\xi)$  y  $H(\xi)$  y  $J(\xi)$  que minimizan la energía del dyon (6.2.9) están dadas por

$$\xi^2 \frac{d^2 K}{d\xi^2} = K(H^2 - J^2) + K(K^2 - 1), \quad (6.1.38)$$

$$\xi^2 \frac{d^2 H}{d\xi^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2), \quad (6.1.39)$$

$$\xi^2 \frac{d^2 J}{d\xi^2} = 2K^2 J. \quad (6.1.40)$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver numéricamente, donde el comportamiento asintótico de la función  $J(r)$  es muy similar al del campo escalar<sup>8</sup> dada en (6.1.31):

$$\begin{aligned} J(r) &\rightarrow 0, & \text{como } r &\rightarrow 0, \\ J(r) &\rightarrow Cr, & \text{como } r &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.1.41)$$

La constante arbitraria  $C$  está relacionada con la carga eléctrica del dyon (6.1.36) [42]; si la carga es nula entonces  $C = 0$ .

De hecho, sustituyendo el Ansatz (6.1.28) junto con (6.1.35) en la expresión para la carga eléctrica (6.1.36), y de manera análoga a la integral dada en (6.1.34) obtenemos

$$\begin{aligned} q &= \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \{2JHK^2 + \xi^2 J'H' + JH - \xi(J'H + H'J)\} \\ &= \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty d\xi \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi H \frac{d}{d\xi} \left( \frac{JH}{\xi} \right) \right\} = \frac{4\pi C}{e}. \end{aligned} \quad (6.1.42)$$

Este resultado lo podemos comparar con el de la carga magnética dada en (6.1.34); entonces la constante  $C$  está relacionada con las cargas como  $q = Cg$ , donde la carga magnética del dyon es  $g$  similar a la dada por la ecuación (6.1.33). Sin embargo, a nivel clásico no hay ninguna razón para que la carga eléctrica (6.1.36), a diferencia de la carga magnética, debe estar cuantizada y la constante  $C$  en (6.1.42) sigue siendo un parámetro arbitrario.

## 6.2. El límite de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield

Hasta el momento hemos estudiado configuraciones de energía finita, las cuales son soluciones para un monopolo magnético, así como su respectiva generalización al caso de un dyon. Ahora estamos interesados en buscar un límite inferior para la masa monopolo, es decir queremos buscar la configuración mínima de masa con carga eléctrica y magnética para la cual puede existir un dyon. A esta cuota mínima de masa cargada se le conoce como el límite de *Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)*.

Partimos de la energía asociada a la configuración de un monopolo estático (6.1.11), la cual se

---

<sup>8</sup>Al igual que en el caso del monopolo magnético buscamos soluciones para el dyon de tal manera que en la región asintótica espacial tengan la forma de (6.1.18)

puede escribir en una forma más general introduciendo un parámetro  $\alpha$  [36, 38]

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [E_n^a E_n^a + B_n^a B_n^a + (D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a)] + V(\phi) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x (E_n^a \mp D_n \phi^a \sin \alpha)^2 + \frac{1}{2} \int d^3x (B_n^a \mp D_n \phi^a \cos \alpha)^2 \\ &\quad \pm \sin \alpha \int d^3x E_n^a D_n \phi^a \pm \cos \alpha \int d^3x B_n^a D_n \phi^a + \int d^3x V(\phi), \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro arbitrario angular real.

Ahora consideramos la configuración de mínima energía para un sistema con energía (6.2.1). Como se discutió anteriormente, el mínimo de energía corresponde a la situación cuando el potencial del campo escalar es nulo, es decir cuando  $\phi^a \phi^a = v^2$ . Adicionalmente a esto obtenemos que la configuración de energía mínima se obtiene si las siguientes ecuaciones se satisfacen [37, 38, 39]:

$$E_n^a = \pm D_n \phi^a \sin \alpha, \quad B_n^a = \pm D_n \phi^a \cos \alpha, \quad D_0 \phi^a = 0. \quad (6.2.2)$$

Estas son las *ecuaciones de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)*. Por otro lado, recordemos que las cargas eléctricas y magnéticas de la configuración están dadas por (6.1.36) y (6.1.33), respectivamente. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (6.2.1) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^3x \left[ (E_n^a \mp D_n \phi^a \sin \alpha)^2 + (B_n^a \mp D_n \phi^a \cos \alpha)^2 \right] \\ &\quad \pm v q \sin \alpha \pm v g \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Los primeros dos términos cuadráticos dentro de la integral son mayores o igual a cero, por lo tanto podemos escribir la siguiente desigualdad

$$E = M \geq v (q \sin \alpha + g \cos \alpha), \quad (6.2.4)$$

la cual se satisface para cualquier elección de signo y del parámetro  $\alpha$ . La energía, en función del parámetro  $\alpha$ , tiene un mínimo en  $\tan \alpha = q/g$ , lo que nos proporciona un límite inferior en la masa del dyon

$$M \geq v \sqrt{q^2 + g^2} = v |q + ig|.$$

Este límite inferior se logra mediante configuraciones que obedecen a las ecuaciones de primer orden (6.2.2), las cuales se les conoce como soluciones BPS, y su energía es dada por la ecuación de la masa BPS, es decir,

$$M = v \sqrt{q^2 + g^2}.$$

Esta condición, conocida como el *límite de Bogomol'nyi*, será la clave de lo que sigue.

La situación es simple de analizar si la carga eléctrica  $q$  la anulamos. Si sustituimos el Ansatz de 't Hooft-Polyakov (6.1.28) en la ecuación BPS

$$B_n^a = \pm D_n \phi^a, \quad (6.2.5)$$

el resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden dadas por

$$\xi \frac{dK}{d\xi} = -KH, \quad \xi \frac{dH}{d\xi} = H + (1 - K^2), \quad (6.2.6)$$

que tienen una solución analítica en términos de funciones elementales:

$$K = \frac{\xi}{\sinh \xi}, \quad H = \xi \coth \xi - 1. \quad (6.2.7)$$

Notemos que la solución a la ecuación BPS de primer orden (6.2.5) satisface automáticamente el sistema de ecuaciones de campo de segundo orden (6.1.9). Por supuesto, las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.1.9) podrían tener otras soluciones que corresponden a algunos mínimos locales de la acción, pero el estado de vacío con energía mínima en el sector topológico dado debe ser simplemente el estado de Bogomol'nyi.

Como se mencionó en [43], la ecuación BPS junto con la identidad de Bianchi implican que  $D_n D_n \phi^a = 0$ , que corresponde exactamente al campo (6.1.9). Por lo tanto, la condición

$$D_n \phi^a D_n \phi^a = (\partial_n \phi^a) (\partial_n \phi^a) + \phi^a (\partial_n \partial_n \phi^a) = \frac{1}{2} \partial_n \partial_n (\phi^a \phi^a) \quad (6.2.8)$$

no se anula. La energía de la configuración del monopolo en el límite BPS es independiente de las propiedades del campo (potencial) de norma y está completamente definida sólo por el campo de Higgs [44, 43]

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_n \partial_n (\phi^a \phi^a) = \frac{4\pi v}{e} \int_0^\infty d\xi \frac{d}{d\xi} \left[ \xi H \frac{d}{d\xi} \left( \frac{H}{\xi} \right) \right] \\ &= \frac{4\pi v}{e} \left( \coth \xi - \frac{1}{\xi} \right) \left( 1 - \frac{\xi^2}{\sinh^2 \xi} \right) \Big|_0^\infty = \frac{4\pi v}{e}. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Haciendo uso de la correspondencia Julia-Zee, es fácil ver que en el límite de BPS, la solución de dyon podría construirse mediante una simple rotación de la solución monopolo puro (6.2.7) [36, 37, 39]:

$$H \rightarrow H = \frac{1}{\cos \alpha} (\xi \coth \xi - 1), \quad J = \tan \alpha (\xi \coth \xi - 1),$$

mientras que el perfil de la función del campo de norma permanece sin cambios

$$K = \frac{\xi}{\sinh \xi}.$$

Esta rotación afecta el valor de expectación de vacío del campo escalar como  $v \rightarrow v/\cos \alpha$ .

Claramente, el parámetro  $\alpha$  está relacionado con la carga eléctrica de un dyon. De hecho, de acuerdo con la definición del ángulo  $\alpha$  anterior, esta carga eléctrica es

$$q = g \tan \alpha.$$

Comparando esta ecuación con (6.1.42), podemos identificar la constante que aparece en la última relación como  $C = \tan \alpha$ . Recordemos que el estado con  $q = 0$  corresponde al mínimo absoluto de la energía. A continuación, discutiremos la conexión entre la generación de carga eléctrica de un dyon y la *norma de modo cero*.

En comparación con la solución 't Hooft-Polyakov, el comportamiento del campo de Higgs del monopolo en el límite BPS ha cambiado drásticamente. Como podemos ver de (6.2.7), junto con la

componente que disminuye exponencialmente se obtiene adicionalmente que a una distancia larga aparece un término tipo-Coulomb

$$\phi^a \rightarrow v\hat{r}^a - \frac{r^a}{er^2} \quad \text{como } r \rightarrow \infty.$$

La razón para esto es que en el límite  $V(\phi) = 0$ , el campo escalar queda sin masa. Debido a que una interacción, la cual se mide a través de un campo escalar sin masa, siempre conduce a una atracción. Por lo tanto, la interacción entre monopolos magnéticos es muy diferente en el límite de BPS, en comparación con la interacción electromagnética estándar (clásica, electrodinámica de Maxwell). Como veremos en 6.3, esta interacción monopolo-monopolo de largo alcance se compone de dos partes que se originan de la fuerza debida al campo escalar de largo alcance y de la interacción electromagnética estándar, que podría ser atractiva o repulsiva [45]. La compensación mutua de ambas contribuciones deja el par de monopolos BPS estáticos, pero el monopolo y el anti-monopolo interactuarían con estas dos fuerzas.

### 6.2.1. Norma de modo cero y la carga eléctrica del Dyon

En el límite BPS, las soluciones de los dyones tienen propiedades muy interesantes. Comencemos por notar que para el Ansatz estático del dyon (6.1.28), (6.1.35) y tomando la elección  $A_0 = 0$ , la energía cinética de la configuración está dada por

$$T = \int d^3x \text{Tr} (E_n E_n + D_0 \phi D_0 \phi), \quad (6.2.10)$$

la cual es igual a cero. Además, en este caso, la ley de Gauss

$$D_n E_n - ie [\phi, D_0 \phi] = 0, \quad (6.2.11)$$

se satisface trivialmente, es decir, si consideramos que el campo eléctrico es nulo  $E_n = D_0 \phi = 0$ .

Ahora consideremos los campos dependientes del tiempo  $A_n(\vec{r}, t)$ ,  $\phi^a(\vec{r}, t)$ ; adicionalmente supongamos que su dependencia temporal surge como resultado de una transformación de norma de la configuración estática original

$$A_n(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t) A_n(\vec{r}, 0) U^{-1}(\vec{r}, t) - \frac{i}{e} U(\vec{r}, t) \partial_n U^{-1}(\vec{r}, t), \quad (6.2.12)$$

donde  $U(\vec{r}, t) = e^{ie\omega t}$  y  $\omega(\vec{r})$  es el parámetro de la transformación. Si el intervalo de tiempo  $\delta t$  es muy pequeño, podemos hacer una expansión de la transformación de norma

$$U(\vec{r}, t) \approx 1 + i e \omega \delta t + \dots \quad (6.2.13)$$

Usando esta expansión en el potencial de norma  $A_n(\vec{r}, t)$  obtenemos que

$$A_n(\vec{r}, t) \approx A_n(\vec{r}) + (ie [\omega, A_n(\vec{r})] - \partial_n \omega) \delta t. \quad (6.2.14)$$

A partir de esta expresión obtenemos que la derivada temporal del potencial de norma es

$$\partial_0 A_n(\vec{r}, t) = ie [\omega, A_n(\vec{r})] - \partial_n \omega = -D_n \omega. \quad (6.2.15)$$

De la misma manera que el caso del potencial de norma, podemos considerar que para el caso del campo escalar  $\phi^a(\vec{r}, t)$  la dependencia temporal aparece mediante una transformación de norma

$$\phi(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, 0)U^{-1}(\vec{r}, t). \quad (6.2.16)$$

Usando la expansión de la transformación (6.2.13) en el potencial de norma  $\phi(\vec{r}, t)$  obtenemos que

$$\phi(\vec{r}, t) \approx \phi(\vec{r}) + ie[\omega, \phi(\vec{r})]\delta t. \quad (6.2.17)$$

A partir de esta expresión obtenemos que la derivada temporal del campo escalar está dada por

$$\partial_0\phi = ie[\omega, \phi(\vec{r})]. \quad (6.2.18)$$

Estas transformaciones de norma afectan simultáneamente a la componente temporal del potencial de norma  $A_0$ , que para la configuración del monopolo (6.1.28), (6.1.35) es una norma pura

$$A_0(\vec{r}, t) = -\frac{i}{e}U(\vec{r}, t)\partial_0U^{-1}(\vec{r}, t) = -\omega.$$

Como las transformaciones de norma (6.2.15) y (6.2.18) no cambian la energía potencial de la configuración, el parámetro  $\omega$  puede identificarse con el *modo cero de norma*. Esta es una de las cuatro coordenadas colectivas (también se les llaman parámetros) de la configuración de un monopolo [46]. Las otras tres coordenadas colectivas especifican la posición del monopolo en el espacio.

Sin embargo, definido de esta manera, el *modo cero de norma* no es físico, ya que las transformaciones del norma (6.2.15) y (6.2.18) no afectan el campo eléctrico no-abeliano

$$\begin{aligned} E_n^a &= \partial_0 A_n - D_n A_0 = -D_n \omega + D_n \omega \equiv 0, \\ D_0 \phi &= \partial_0 \phi + ie[A_0, \phi] = ie[\omega, \phi] - ie[\omega, \phi] \equiv 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como antes, la ley de Gauss se satisface trivialmente y la energía cinética del monopolo (6.2.10) sigue siendo igual a cero.

Por otro lado, supongamos que la dependencia temporal de los campos aparece nuevamente como resultado de la transformación de norma (6.2.15) y (6.2.18), de tal manera que los modos cero de norma correspondientes ( $\partial_0 A_n, \partial_0 \phi$ ) satisfacen la condición de norma de fondo

$$D_n(\partial_0 A_n) - ie[\phi, \partial_0 \phi] = 0, \quad (6.2.19)$$

la cual satisface la ley de Gauss (6.2.11). Ahora bien, si  $A_0 = 0$  entonces existe una solución no trivial de las ecuaciones (6.2.15), (6.2.18) y (6.2.19) [47], donde  $\omega$  es proporcional a  $\phi$ , la cual se puede escribir de la siguiente manera

$$\omega = \dot{Y}(t)\phi(\vec{r}),$$

que corresponde a la siguiente transformación de norma

$$U(\vec{r}, t) = \exp\{ieY(t)\phi(\vec{r})\} \approx 1 + ie\dot{Y}\phi\delta t + \dots, \quad (6.2.20)$$

donde  $Y(t)$  es una función arbitraria del tiempo. De hecho, en este caso tenemos que  $\partial_0 A_n = \dot{Y}D_n\phi$  y  $\partial_0 \phi = 0$ , y dado que en el límite de Bogomol'nyi se satisface  $D_n D_n \phi = 0$ , la condición de norma de fondo (6.2.19) es satisfecha por el Ansatz (6.2.20). Sin embargo, esta solución corresponde a la generación de un campo eléctrico no-abeliano

$$E_n = \partial_0 A_n = \dot{Y}(t)D_n\phi = \dot{Y}(t)B_n, \quad D_0\phi = 0.$$

Por lo tanto la energía cinética del monopolo (6.2.10) ya no es cero

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int d^3x \dot{A}_n \dot{A}_n \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathcal{Y}}^2 \int d^3x D_n \phi^a D_n \phi^a \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathcal{Y}}^2 \int d^3x B_n^a B_n^a = 2\pi v g \dot{\mathcal{Y}}^2 = \frac{1}{2} M \dot{\mathcal{Y}}^2, \quad (6.2.22)$$

donde hemos usado la definición de la carga magnética (6.1.34) y hemos tomando en cuenta que la masa del monopolo BPS es

$$M = \frac{4\pi v}{e}.$$

Dado que la energía potencial de la configuración es independiente del tiempo, las transformaciones de norma (6.2.15) y (6.2.18), complementadas con la condición  $A_0 = 0$ , definen una coordenada colectiva física  $\mathcal{Y}(t)$ , que es un modo cero de norma. Su excitación corresponde a la generación de una carga eléctrica  $Q = \dot{\mathcal{Y}}(t)g$ . Por lo tanto, tal dependencia temporal inducida mediante una transformación de norma en los campos transforma al monopolo magnético en un dyon.

Debemos de tener en cuenta que esta coordenada colectiva  $\mathcal{Y}$  es una variable angular, que se define en un círculo  $S^1$ . De hecho, los puntos  $\mathcal{Y} = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  corresponden a la misma transformación de norma  $U(\vec{r}, t)$ , que es la unidad en la región asintótica espacial [47]. Sin embargo, los puntos  $\mathcal{Y} = 0$  y, por ejemplo,  $\mathcal{Y} = 2\pi$ , corresponden a diferentes clases topológicas.

En resumen, la configuración de un-monopolo en el límite BPS puede ser caracterizada por cuatro modos cero que forman el llamado espacio de parámetros  $\mathcal{M}_1$ .

## 6.3. Interacción de monopolos magnéticos

### 6.3.1. Monopolo en campo magnético externo

Ahora consideremos el monopolo de 't Hooft-Polyakov interactuando con un campo magnético externo débil. Para esto consideraremos un monopolo inicialmente en reposo, es decir, las derivadas temporales de los campos son nulas. Podríamos esperar que el efecto principal, es decir, a primer orden, de esta interacción con el campo externo sea la de un monopolo inicialmente estático que comienza a moverse con una pequeña aceleración constante<sup>9</sup>  $w_k$ . Las correcciones de oscilación a segundo orden para la configuración (6.1.28) tienen una dependencia temporal de la forma [45]:

$$\begin{aligned} \phi^a(\vec{r}, t) &= \phi^a\left(\vec{r} - \vec{w} \frac{t^2}{2}\right) \approx \phi^a(\vec{r}) - \vec{w} \frac{t^2}{2} \vec{\nabla} \phi^a(\vec{r}), \\ A_k(\vec{r}, t) &= A_k^a\left(\vec{r} - \vec{w} \frac{t^2}{2}\right) T^a = A_k^a(\vec{r}) T^a - \frac{t^2}{2} (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) A_k^a(\vec{r}) T^a. \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

En el marco de reposo instantáneo, todavía tenemos una configuración inicial de 't Hooft-Polyakov (6.1.28), donde  $A_0(\vec{r}) = 0$ . El carácter no relativista del movimiento implica que en el marco no

<sup>9</sup>Uno puede tratar este movimiento como una excitación de los modos cero de traslación de los campos escalares y vectoriales del sistema .

acelerado aparece la componente  $A_0$  del potencial vectorial [45]

$$A_0(\vec{r}, t) = -w_k t A_k \left( \vec{r} - \vec{w} \frac{t^2}{2} \right),$$

el cual es el responsable de generar un campo eléctrico.

Ahora, tomando la derivada con respecto al tiempo de la configuración perturbada (6.3.1) obtenemos

$$\partial_0 \phi^a(\vec{r}, t) = -w_k t \partial_k \phi^a(\vec{r}), \quad \partial_0 A_k(\vec{r}, t) = -w_m t \partial_m A_k(\vec{r}), \quad (6.3.2)$$

lo que implica que el campo eléctrico no-abeliano generado por la perturbación es

$$\begin{aligned} F_{0k}^a(\vec{r}, t) &= \partial_0 A_k^a - \partial_k A_0^a - e \varepsilon_{abc} A_0^b A_k^c \\ &= -w_m t (\partial_m A_k^a - \partial_k A_m^a - e \varepsilon_{abc} A_m^b A_k^c) = -w_m t F_{mk}^a(\vec{r}). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Nuevamente tomamos la derivada temporal de esta expresión para obtener <sup>10</sup>:

$$D^0 F_{0k}^a(\vec{r}, t) = -w_m F_{mk}^a(\vec{r}). \quad (6.3.4)$$

Esto nos permite escribir la parte espacial de la primera ecuación de campo de Yang-Mills-Higgs (6.1.9) de la siguiente manera

$$(D_m - w_m) F_{mn}(\vec{r}) = -e \varepsilon_{abc} \phi^b D_n \phi^c(\vec{r}). \quad (6.3.5)$$

Ahora notemos que la primera de las relaciones (6.3.2) toma la forma

$$D_0 \phi^a(\vec{r}, t) = -w_k t D_k \phi^a(\vec{r}),$$

y después de derivar nuevamente con respecto al tiempo obtenemos  $D_0 D_0 \phi^a(\vec{r}, t) = -w_k D_k \phi^a(\vec{r})$ . Por lo tanto, esto permite escribir la segunda de las ecuaciones de campo (6.1.9) de la siguiente forma

$$D_m (D_m - w_m) \phi^a(\vec{r}) = -\lambda (\phi^2 - v^2) \phi^a(\vec{r}). \quad (6.3.6)$$

El sistema de ecuaciones dinámicas (6.3.5) y (6.3.6) que hemos obtenido describe la dinámica de un monopolo 't Hooft-Polyakov en un campo magnético homogéneo externo. Como hemos visto en secciones previas, el análisis de las propiedades del monopolo es muy simple en el límite BPS, por lo que la dinámica del monopolo también se simplifica debido a que se puede demostrar fácilmente que en el límite  $\lambda = 0$ , las ecuaciones de campo (6.3.5) y (6.3.6) se pueden resolver usando el siguiente Ansatz [45]

$$B_k^a(\vec{r}) = (D_k - w_k) \phi^a(\vec{r}), \quad (6.3.7)$$

el cual es una generalización bastante directa de la ecuación de Bogomol'nyi (6.2.5). Por otro lado, debemos de tener en cuenta que el campo escalar del monopolo se define como  $\phi^a = v h(r) \hat{r}^a$ , con el comportamiento asintótico de la función  $h(r) \rightarrow 1$  para  $r \rightarrow \infty$ ; entonces usando el Ansatz (6.3.7) podemos escribir el campo magnético del monopolo  $B_k = B_k^a \hat{\phi}^a$  de la siguiente manera

$$B_k = v \partial_k h(r) - v h(r) w_k.$$

<sup>10</sup>De acuerdo con la definición de la derivada covariante, la componente  $D_0 = \partial_0 + ieA_0(\vec{r})$  es justamente la derivada temporal  $D_0 = \partial_0$  debido a que inicialmente no consideramos campos eléctricos.

Ahora, si tomamos el límite asintótico espacial del campo  $B_k$ , podemos ver que el Ansatz (6.3.7) corresponde a la superposición del campo magnético de un monopolo y de un campo débil constante  $B_k^{ext} = v w_k$ . Además, la carga magnética y la masa del monopolo BPS son  $g = 4\pi/e$  y  $M = 4\pi v/e$ , respectivamente. Entonces, la fuerza externa en un monopolo está dada por la ley de fuerza de Newton estándar:  $F_k = -M w_k = -g B_k^{ext}$ .

Hay otra posible interpretación del sistema (6.3.5) y (6.3.6), es decir, se puede considerar como el sistema original Yang-Mills-Higgs (6.1.9), el cual se modificó debido a una perturbación externa causada por un campo magnético homogéneo. Esta interacción puede describirse por un término adicional de la forma

$$L_{int} = \frac{1}{2v} \varepsilon_{mnk} F_{mn}^a \phi^a B_k^{(ext)}, \quad (6.3.8)$$

el cual se añade al Lagrangiano del modelo Georgi-Glashow (6.1.6) [48]. En el límite BPS, las ecuaciones de movimiento resultantes de este Lagrangiano generalizado son idénticas al sistema (6.3.5) y (6.3.6).

Como se puede ver el Lagrangiano de interacción (6.3.8) es lineal en el campo escalar y además el efecto de este término de interacción es elevar la degeneración del vacío de Higgs. De hecho, se puede considerar como una corrección del potencial de Higgs

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 + \frac{1}{v} B_n^a \phi^a B_k^{(ext)}.$$

Por lo tanto, hay un mínimo único del potencial en el límite asintótico espacial en

$$\phi_{min}^a = v \hat{r}^a \left( 1 + e \frac{\hat{r}^a B_n^{(ext)}}{r^2 m_s^2 m_v^2} \right), \quad (6.3.9)$$

donde  $m_s^2 = 2\lambda v^2$ ,  $m_v^2 = e^2 v^2$  son las masas de las excitaciones escalar y vectorial respectivamente. El vacío verdadero es único, su ubicación está dada por la dirección del campo magnético externo.

### 6.3.2. La energía de interacción de los monopolos

Como se ha discutido en las secciones anteriores, no existe una solución analítica del sistema de ecuaciones de Yang-Mills-Higgs que corresponda a un sistema de un monopolo aislado, por lo tanto aún menos para el caso de dos monopolos de 't Hooft-Polyakov. En esta sección estamos interesados en discutir el sistema de interacción más simple que se puede estudiar, es decir, una configuración de dos monopolos en el límite BPS los cuales se encuentran ampliamente separados con respecto de su núcleos.

El enfoque más simple para estimar la energía de interacción es un cálculo directo de la diferencia entre el valor mínimo de la energía de todo el sistema de los campos y la suma de las masas de dos monopolos individuales idénticos:

$$E_{int} = \frac{1}{2} \int d^3x (B_k^a - D_k \phi^a)^2 + v \sum_{i=1,2} g_i + \int d^3x V(\phi) - 2M.$$

Los primeros tres términos de esta ecuación corresponden a la forma de la energía (6.2.1), donde hemos considerado solamente cargas magnéticas (hemos tomado  $\alpha = 0$ ).

Además, si consideramos que los monopolos están bien separados, es decir, si suponemos que los núcleos de los monopolos son mucho mas pequeños que la distancia entre los monopolos, el

problema se puede simplificar aún más. Entonces, fuera de este núcleo, las derivadas covariantes del campo escalar desaparecen y, por lo tanto, los campos de norma obedecen a las ecuaciones de Yang-Mills libres. Esta aproximación es una suposición estándar en el análisis de las interacciones entre monopolos.

Como ya hemos notado, existe una diferencia crucial entre el comportamiento asintótico del campo de Higgs en los casos BPS y no-BPS, es decir, podemos notar que aparece un término de largo alcance para el campo escalar (6.3.9) en el caso de la interacción con un campo externo en el límite BPS

$$\phi^a \rightarrow v\hat{r}^a - \frac{r^a}{er^2} \quad \text{como} \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.3.10)$$

El resultado es que el valor asintótico del campo de Higgs en la región fuera del núcleo del primer monopolo se distorsiona según (6.3.10) debido al campo escalar de largo alcance del otro monopolo: la masa del primer monopolo disminuirá y el tamaño de su núcleo aumentará. En otras palabras, la fuerza de largo alcance adicional aparece como resultado de la violación de la invarianza de escala original del modelo en el límite de BPS  $\lambda \rightarrow 0$ . Una partícula de Goldstone correspondiente (un dilatón) está conectada con pequeñas fluctuaciones del campo de Higgs

$$\phi^a = v\hat{r}^a e^D = v\hat{r}^a + v\hat{r}^a D + \dots, \quad (6.3.11)$$

donde  $D$  es el campo del dilatón. El término cinético correspondiente de la acción del dilatón  $L_D = -\frac{1}{2}v^2\partial_\mu D\partial^\mu D$  nos permite establecer una relación entre la carga de dilatón y la carga magnética de la configuración

$$Q_D = v \int dS_n \partial_n D = \frac{4\pi}{e} = g = \frac{M}{v}. \quad (6.3.12)$$

La masa de la configuración del monopolo se reduce  $\Delta M = \int d^3x L_D = -Q_D \phi$ .

Si la configuración además de tener carga magnética tiene también una carga eléctrica  $q$ , la carga de dilatón está definida por la combinación dual invariante [19, 49]

$$Q_D = \sqrt{g^2 + q^2}. \quad (6.3.13)$$

### 6.3.3. Interacción clásica de dos dyones ampliamente separados

Ahora podemos aplicar los resultados de la sección anterior al caso de la interacción clásica entre dos dyones que están separados por una distancia  $r$ , la cual es grande con respecto a los núcleos de los dyones. Para esto supongamos que los dyones tienen cargas magnéticas idénticas  $g$ , pero diferentes cargas eléctricas  $q_1$  y  $q_2$ . Este problema fue estudiado por Manton [19], en donde se consideró a cada dyon como una partícula clásica puntual. Debido a que en el límite BPS los dyones además de poseer ambas cargas, es decir, cargas eléctricas y magnéticas, poseen además la carga del dilatón (6.3.13), entonces la interacción total de dos dyones estáticos está compuesta de repulsión o atracción electromagnética, causada por las cargas eléctricas y magnéticas, y la atracción causada por las cargas del dilatón. Por lo tanto, la fuerza neta de Coulomb es

$$\vec{F}_{12} = \frac{\vec{r}}{r^3} \left( g^2 + q_1 q_2 - \sqrt{g^2 + q_1^2} \sqrt{g^2 + q_2^2} \right).$$

Nuevamente podemos hacer una simplificación adicional si asumimos que la carga eléctrica del dyon es mucho más pequeña que su carga magnética. Entonces, después de hacer una expansión en  $q^2/g^2$  obtenemos

$$\vec{F}_{12} \approx -\frac{1}{2} (q_1 - q_2)^2 \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Como se puede ver de esta expresión, no hay interacción entre dos dyones cuando las cargas eléctricas son idénticas. En general, sólo la carga eléctrica relativa del sistema  $Q := q_1 - q_2$  entra en la energía de interacción.

Ahora, consideremos un dyon que se mueve con una velocidad relativista  $v_1$  en un campo de fondo debido a otro dyon, que se coloca en reposo y está localizado en el origen [19]. Dado que la parte electromagnética de la interacción se describe mediante el potencial (4.3.3), el momento canónico del primer dyon, de acuerdo con el acoplamiento mínimo, se puede escribir como

$$\vec{P} = M\vec{v}_1 \rightarrow \vec{P} = M\vec{v}_1 + q_1\vec{A} + g\vec{\tilde{A}},$$

donde los potenciales electromagnéticos correspondientes a los campos de un dyon estático son

$$\vec{A} = g\vec{a}, \quad \vec{\tilde{A}} = -q_2\vec{a},$$

donde  $\vec{a} = (1 - \cos\theta)\vec{\nabla}\varphi$ . Los potenciales escalares que corresponden al dyon estático son simplemente

$$A_0 = \frac{q_2}{r}, \quad \tilde{A}_0 = \frac{g}{r}.$$

Además, debemos tener en cuenta el potencial escalar que está relacionado con la carga del dilatón del dyon en el límite BPS:  $\phi = \sqrt{g^2 + q_2^2}/r$ . Como ya hemos mencionado anteriormente, el efecto de este potencial es disminuir la masa del primer dyon como<sup>11</sup>

$$M \rightarrow M - Q_D\phi = M - \frac{1}{r}\sqrt{g^2 + q_1^2}\sqrt{g^2 + q_2^2},$$

donde la carga del dilatón está dada por  $Q_D = \sqrt{g^2 + q_1^2}$ .

Ahora consideremos que el primer dyon se mueve a una velocidad relativista  $v_1$ , para el cual se puede escribir el término cinético como  $-M\sqrt{1 - v_1^2}$ . Usando estos resultados, llegamos a que el Lagrangiano del movimiento relativista de un dyon con carga  $Q_D = \sqrt{g^2 + q_1^2}$  en un campo externo debido otro dyon estático con carga  $Q_{D_2} = \sqrt{g^2 + q_2^2}$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$L_1 = \left( -M + \phi\sqrt{g^2 + q_1^2} \right) \sqrt{1 - v_1^2} + \vec{v}_1 \cdot \left( q_1\vec{A} + g\vec{\tilde{A}} \right) - q_1A_0 - g\tilde{A}_0. \quad (6.3.14)$$

El siguiente paso es incorporar el efecto del movimiento de ambos dyones. Para esto recordemos que si el campo de fondo es generado por una fuente en movimiento, los campos correspondientes deben escribirse en forma de los potenciales de Lienard-Wiechert [50, 19, 51]:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= g\vec{a} + q_2 \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{r^2 - [\vec{r} \times \vec{v}_2]^2}}, & A_0 &= \frac{q_2}{\sqrt{r^2 - [\vec{r} \times \vec{v}_2]^2}} + g(\vec{a} \cdot \vec{v}_2), \\ \vec{\tilde{A}} &= -q_2\vec{a} + g \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{r^2 - [\vec{r} \times \vec{v}_2]^2}}, & \tilde{A}_0 &= \frac{g}{\sqrt{r^2 - [\vec{r} \times \vec{v}_2]^2}} - q_2(\vec{a} \cdot \vec{v}_2), \\ \phi &= \frac{g}{\sqrt{r^2 - [\vec{r} \times \vec{v}_2]^2}} \sqrt{1 - v_2^2}, \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

<sup>11</sup>Se debe tener en cuenta que un dyon es ligeramente más pesado que un monopolo:  $M = M_0\sqrt{1 + q^2/g^2}$ . Sin embargo, en el caso bajo consideración,  $q \ll g$ . Por lo tanto, la diferencia es de segundo orden y se puede despreciar.

con  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . Además, debido a que estamos considerando un par de dyones que están ampliamente separados y que además las velocidades de estos dyones son no relativistas, podemos hacer la aproximación  $\sqrt{r^2 - [r \times \vec{v}_2]^2} = r \left(1 - \frac{1}{2}[\hat{r} \times \vec{v}_2]^2\right) \approx r$  obteniendo

$$\begin{aligned} \vec{A} &= g\vec{a} + q_2 \frac{\vec{v}_2}{r}, & A_0 &= \frac{q_2}{r} + g(\vec{a} \cdot \vec{v}_2), \\ \vec{\tilde{A}} &= -q_2\vec{a} + g \frac{\vec{v}_2}{r}, & \tilde{A}_0 &= \frac{g}{r} - q_2(\vec{a} \cdot \vec{v}_2), \\ \phi &= \frac{g}{r} \left(1 - \frac{1}{2}v_2^2\right), \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

donde hemos usado la aproximación para velocidades bajas del término  $\sqrt{1 - v_2^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}v_2^2$ . Después de sustituir los potenciales (6.3.16) en Lagrangiano (6.3.14) obtenemos que el Lagrangiano se puede simplificar hasta términos del orden de  $q^2\vec{v}^2$  y  $\vec{v}^4$ ,

$$L_1 = -M' + \frac{1}{2}M_0\vec{v}_1^2 - \frac{g^2}{2r}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + g(q_1 - q_2)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{a} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{2r}, \quad (6.3.17)$$

donde  $M' = \sqrt{g^2 + q_1^2}$  y  $M_0 = |g|$  es la masa del monopolo. El término constante  $-M'$ , puede ser omitido, dado que un término constante en el Lagrangiano no tiene efecto alguno en la dinámica del sistema.

Notemos que los términos de interacción son simétricos en  $\vec{v}_1$ ,  $q_1$  y  $\vec{v}_2$ ,  $q_2$ . Si agregamos justamente el término cinético  $\frac{1}{2}M_0\vec{v}_2^2$ , el nuevo Lagrangiano  $L$  es adecuado para describir la dinámica de la interacción de dos dyones. Por lo tanto el Lagrangiano se puede simplificar como

$$L = \frac{1}{2}M_0(\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2) - \frac{g^2}{2r}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + Qg(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{a} + \frac{Q^2}{2r}, \quad (6.3.18)$$

donde  $Q = q_1 - q_2$  es la carga relativa. Como podemos ver en el segundo término de esta expresión, las interacciones escalares y magnéticas dependen de la velocidad relativa de los dyones de diferentes maneras. El tercer término describe la interacción mínima entre la carga relativa  $Q$  y la carga magnética  $g$ , mientras que el último término es la mitad de la energía estándar de Coulomb de una carga eléctrica  $Q$  (la otra mitad está asociada con el otro dyon).

Hasta el momento hemos construido un Lagrangiano, el cual describe la dinámica de la interacción dos dyones en movimiento y que además tiene la propiedad de ser simétrico bajo el cambio  $\vec{v}_1 \rightleftharpoons \vec{v}_2$ , y  $q_1 \rightleftharpoons q_2$ . Dadas la simetrías del Lagrangiano es posible estudiar la dinámica de esta interacción mediante las coordenadas del centro de masa. La velocidad del centro de masa para un sistema de dos partículas con masa igual es

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

La velocidad de las partículas 1 y 2 con respecto del centro de masa son

$$\vec{v}_{1cm} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{2}, \quad \vec{v}_{2cm} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} = -\frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{2}.$$

Usando las velocidades del centro de masa podemos obtener la velocidad relativa en términos de las velocidades del centro de masa  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{1cm} - \vec{v}_{2cm}$ , mientras que para el término cinético

$\propto (\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2)$ , lo podemos escribir en coordenadas del centro de masa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 &= \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\vec{v}_{1cm} - \vec{v}_{2cm})^2 + \vec{v}_{cm}^2.\end{aligned}$$

Ahora bien, usando este resultado podemos escribir el Lagrangiano (6.3.18) en coordenadas del centro de masa

$$L = \frac{1}{2}M_0\vec{v}_{cm}^2 + \left(\frac{M_0}{4} - \frac{g^2}{2r}\right)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + Qg(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{a} + \frac{Q^2}{2r}, \quad (6.3.19)$$

El Lagrangiano del movimiento relativo puede obtenerse omitiendo el término correspondiente al centro de masa  $\frac{1}{2}M_0\vec{v}_{cm}^2$  de (6.3.19) [19]

$$L = \left(\frac{M_0}{4} - \frac{g^2}{2r}\right)\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + Qg\dot{\vec{r}} \cdot \vec{a} + \frac{Q^2}{2r}, \quad (6.3.20)$$

donde  $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{1cm} - \vec{v}_{2cm}$  es la velocidad relativa de los dyones.

Las ecuaciones de movimiento asociadas al Lagrangiano (6.3.20) son

$$\left(\frac{M_0}{2} - \frac{g^2}{r}\right)\ddot{\vec{r}} = \frac{g^2}{r^3} \left\{ \frac{1}{2}\vec{r}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} \right\} + \frac{Qg}{r^3} [\dot{\vec{r}} \times \vec{r}] - \frac{Q^2}{2r^3}\vec{r}. \quad (6.3.21)$$

Notemos que la dinámica del sistema no cambia si transformamos el Lagrangiano del movimiento relativo (6.3.20) de la siguiente manera

$$L = \frac{1}{4} \left( M_0 - \frac{2g^2}{r} \right) \left( \vec{r} \cdot \vec{r} - \frac{Q^2}{g^2} \right) + Qg\dot{\vec{r}} \cdot \vec{a}, \quad (6.3.22)$$

donde hemos omitido el término constante  $M_0Q^2/4g^2$ .

Obviamente, para  $g = 0$ , el (6.3.21) es idéntico a la ecuación de movimiento estándar de una partícula cargada en un campo de Coulomb. En el caso general, (6.3.21) puede resolverse haciendo uso de las integrales de movimiento correspondientes. Por ejemplo, la energía se compone de tres términos: energía cinética normal, un término dependiente de la velocidad que se origina a partir de la diferencia entre la interacción dilatónica y magnética de los dyones, y la energía potencial estándar de interacción de las dos cargas:

$$E = \left(\frac{M_0}{2} - \frac{g^2}{r}\right)\dot{\vec{r}}^2 - \frac{Q^2}{r}.$$

La segunda integral del movimiento es el vector del momento angular

$$\vec{L} = \left(\frac{1}{2} - \frac{g^2}{M_0r}\right)\vec{\tilde{L}} - Qg\frac{\vec{r}}{r}, \quad (6.3.23)$$

donde  $\vec{\tilde{L}} = M_0[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}]$  es el momento angular orbital estándar.

En la sección 6.2.1 mencionamos que la carga eléctrica de un dyon estático está relacionada con su cuarta coordenada colectiva cíclica  $\mathcal{Y}$  como  $Q \sim \dot{\mathcal{Y}}$ . La excitación de esta coordenada colectiva se puede tratar como la aparición de la energía cinética (6.2.22).

Recordemos la carga eléctrica de un dyon estático está relacionada con su cuarta coordenada colectiva cíclica  $\mathcal{Y}$  como  $Q \sim \dot{\mathcal{Y}}$ .

Entonces podemos hacer la siguiente transformación de Legendre del Lagrangiano (6.3.22)

$$L(\vec{r}, \mathcal{Y}) = L(\vec{r}, Q) + gQ\dot{\mathcal{Y}},$$

donde

$$Q \equiv \frac{2g^3}{M_0 - \frac{2g^2}{r}} \left( \dot{\mathcal{Y}} + (\vec{r} \cdot \vec{a}) \right). \quad (6.3.24)$$

Entonces el Lagrangiano (6.3.22) puede escribirse de la siguiente manera

$$L = \frac{1}{4} \left( M_0 - \frac{2g^2}{r} \right) \vec{r} \cdot \vec{r} + \frac{g^4}{M_0 - \frac{2g^2}{r}} \left( \dot{\mathcal{Y}} + (\vec{a} \cdot \vec{r}) \right)^2, \quad (6.3.25)$$

que es la estructura del Lagrangiano de Kaluza-Klein, el cual describe el movimiento geodésico en el espacio de cuatro dimensiones  $\mathcal{M}_0$  con una variable compacta. Podemos ver que el Lagrangiano (6.3.25) no depende explícitamente de  $\mathcal{Y}$ , por lo tanto, la ecuación de movimiento correspondiente es la conservación de la carga eléctrica relativa  $Q$  (6.3.24).

En resumen, a partir del Lagrangiano (6.3.25) se tiene que el movimiento relativo de los dyones BPS bien separados puede ser descrito por un movimiento geodésico en el espacio  $\mathcal{M}_0$  gobernado por la métrica Taub-NUT:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2g^2}{M_0 r} \right) d\vec{r}^2 + \frac{\left( \frac{2g^2}{M_0} \right)^2}{1 - \frac{2g^2}{M_0 r}} (d\mathcal{Y} + \vec{a} \cdot d\vec{r})^2, \quad (6.3.26)$$

la cual es bien conocida en la Relatividad General y se obtuvo en 1951 [52]. La métrica Taub-NUT corresponde a la solución espacialmente homogénea de las ecuaciones de Einstein en el vacío, con parámetro de longitud  $2g^2/M_0$ .

Si el momento angular (6.3.23) es cuantizado en valores enteros, el grupo de rotación es  $SO(3)$ . Geométricamente, esta invarianza rotacional significa que el vector  $\vec{L}$  conservado implica un conjunto de campos vectoriales de Killing en el espacio  $\mathcal{M}_0$  que generan una simetría  $SO(3)$ , que es una isometría del espacio de parámetros (moduli space).

## 6.4. El espacio de parámetros y la dinámica multi-monopolos a bajas energías

### 6.4.1. El Lagrangiano de modos cero

Como se ha discutido en las secciones previas, la ecuación de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) describe una configuración estática del monopolo de 't Hooft y además su relevancia reside en la no trivial propiedad de integrabilidad que hace posible la construcción de la solución de multi-monopolos. Por otro lado, las ecuaciones de campo completas, es decir, las ecuaciones dependientes del tiempo del sistema Yang-Mills-Higgs, no son completamente integrables. Por lo tanto, parecería prácticamente imposible encontrar una solución completa que describa las propiedades dinámicas

de los monopolos. Sin embargo, este problema se puede analizar bajo una aproximación dada por Manton.

La idea de Manton [53, 20] era que uno puede truncar el espacio de configuraciones, el cual es dimensionalmente infinito para el sistema Yang-Mills-Higgs (6.1.6), a un sistema dinámico con un Lagrangiano de dimensión finita. En otras palabras, la dinámica de un sistema de multi-monopolos con un número infinito de grados de libertad se puede reducir a la de unas pocas coordenadas colectivas de un solitón, o sus modos cero, que incluyen coordenadas de posición y también algunas coordenadas internas. Esta descripción puede ser auto consistente sólo si consideramos la dinámica de bajas energías. De manera más precisa, para cualquier tiempo fijo una configuración de multi-monopolos puede considerarse de manera aproximada como una solución estática de una configuración de  $n$ -monopolos de la ecuación de Bogomol'ny. De esta manera el movimiento de los monopolos está determinado por la evolución temporal de sus coordenadas colectivas solamente. En tal caso, toda la información sobre la dinámica de los multi-monopolos a bajas energías está codificada en la parte cinética  $\mathcal{T}$  de la acción.

Ahora consideremos el Lagrangiano del sistema (6.1.6), el cual lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} L &= \mathcal{T} - \mathcal{V} \\ &= \int d^3x \text{Tr} (E_n E_n + D_0 \phi D_0 \phi) - \int d^3x \text{Tr} (B_n B_n + D_n \phi D_n \phi). \end{aligned}$$

Recordemos que en el límite de Bogomol'nyi, la energía potencial del sistema  $\mathcal{V}$  es constante

$$\mathcal{V} = \int d^3x \text{Tr} (B_n - D_n \phi)^2 + v \sum_i g_i = v \sum_i g_i.$$

Si elegimos la componente temporal del potencial de norma igual a cero,  $A_0 = 0$ , entonces la energía cinética es de la forma

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int d^3x (\dot{A}_n \dot{A}_n + \dot{\phi}^a \dot{\phi}^a).$$

Como lo discutimos en la sección 6.2.1, para una configuración estática se puede escribir la energía cinética en la forma

$$\mathcal{T}_{norma} = \frac{1}{2} M \dot{\mathcal{Y}}, \quad (6.4.1)$$

donde  $\mathcal{Y}$  es la coordenada colectiva cíclica de norma; la excitación de ésta corresponde a la generación de una carga eléctrica. Ahora, nos gustaría excitar otra coordenada colectiva espacial, de tal manera que el efecto de esta perturbación sea "empujar" al monopolo. Obviamente, la energía cinética del monopolo en movimiento será mayor que (6.4.1). Con el fin de estudiar la dinámica de una configuración de  $n$ -monopolos empezaremos por analizar la configuración más simple, esto es, la configuración de un monopolo.

### 6.4.2. La dinámica de un monopolo a bajas energías

Ahora consideremos la dinámica de un monopolo en  $\mathbb{R}^3$  a bajas energías. Para esto empezaremos por definir la corrección correspondiente a la energía cinética dada en (6.4.1), es decir, consideraremos primero pequeñas traslaciones del monopolo en  $\mathbb{R}^3$ . Para este propósito, introducimos tres

coordenadas colectivas  $X^k(t)$  y hacemos una expansión de los campos en estas perturbaciones:

$$\begin{aligned} A_n(X(t), x) &\approx A_n(x) + \delta_k A_n(x) X^k(t) \equiv A_n(x) + a_n^{(k)}(x) X^k(t), \\ \phi(X(t), x) &\approx \phi(x) + \delta_k \phi(x) X^k(t) \equiv \phi(x) + \chi^{(k)}(x) X^k(t). \end{aligned}$$

Aquí,  $\delta_k A_n(x) := a_n^{(k)}(x)$  y  $\delta_k \phi(x) := \chi^{(k)}(x)$  son los modos cero de traslación relevantes, es decir, son las excitaciones que corresponden a un pequeño desplazamiento del monopolo en la dirección  $X_k$ . A partir de las relaciones anteriores podemos escribir la derivada temporal de los campos  $A_n$  y  $\phi$  como

$$\dot{A}_n = \dot{X}_k a_n^{(k)}(x), \quad \dot{\phi} = \dot{X}_k \chi^{(k)}(x). \quad (6.4.2)$$

Entonces la energía cinética debida a la traslación del monopolo se puede escribir en términos de los modos cero  $a_n^{(k)}(x)$  y  $\chi^{(k)}(x)$  de las coordenadas colectivas  $X^k(t)$  como

$$\mathcal{T}_{\text{trans}} = \dot{X}_k^2 \int d^3x \text{Tr} \left[ a_n^{(k)} a_n^{(k)} + (\chi^{(k)})^2 \right], \text{ para un } k \text{ dado.} \quad (6.4.3)$$

La forma explícita de los modos cero de traslación se puede determinar por la condición de que la perturbación debe preservar el límite de Bogomol'nyi. En otras palabras, la configuración "desplazada"  $A_n^a + a_n^{a(l)}$ ,  $\phi^a + \chi^{a(l)}$  debe satisfacer la ecuación de Bogomol'nyi  $B_n^a = D_n \phi^a$ . Por lo tanto, los modos cero de traslación obedecen la siguiente ecuación linealizada [54, 55, 56, 57]

$$\varepsilon_{nmk} D_m a_k^{a(l)} = D_n \chi^{a(l)} - e \varepsilon_{abc} a_n^{b(l)} \phi^c. \quad (6.4.4)$$

Además, recordemos que la componente temporal del potencial de norma entra en la ley de Gauss  $D_n E_n - ie[\phi, D_0 \phi] = 0$ , es decir, que se impone como una restricción a los campos físicos independientes del tiempo. La expansión da, en la norma de Coulomb  $A_0 = 0$ , el resultado

$$D_n a_n^{a(l)} - e \varepsilon_{abc} \phi^b \chi^{c(l)} = 0. \quad (6.4.5)$$

En otras palabras, los modos cero satisfacen la condición de norma de fondo. En realidad, esta condición garantiza que los modos cero de traslación sean ortogonales a todos los modos obtenidos mediante la transformación de norma de la configuración monopolo con una función de norma que se anula en el infinito espacial.<sup>12</sup>

Por otro lado podemos escribir a  $\dot{A}_n$  y  $\dot{\phi}$  como

$$\dot{A}_n = \dot{X}_k \frac{\partial A_n}{\partial X_k} = \dot{X}_k \partial_k A_n, \quad \dot{\phi} = \dot{X}_k \partial_k \phi.$$

<sup>12</sup>Como se ha discutido en la sección 6.2.1 vamos a considerar que la dinámica de la configuración se incorpora por medio de una transformación de norma, es decir, las perturbaciones que son transformaciones de norma locales de la forma  $\delta A_n(x) = -D_n \Lambda$  y  $\delta \phi(x) = e[\phi, \Lambda]$ , o de manera equivalente  $\delta \phi^a(x) = e \varepsilon_{abc} \Lambda^b \phi^c$ . Ahora, estamos interesados en que estas perturbaciones sean ortogonales a tales transformaciones de norma, en el sentido de que  $\int d^3x [\delta \psi(x)]^\dagger \delta \psi(x) = 0$ , donde  $\delta \psi := \{\delta A_n(x), \delta \phi(x)\}$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x \left[ -(D_n \Lambda)^\dagger \delta A_n(x) + [\phi, \Lambda]^\dagger \delta \phi(x) \right] \\ &= - \int d^3x \Lambda^\dagger [D_n \delta A_n(x) - ie[\phi, \delta \phi(x)]] + \int d^2S \Lambda^\dagger \delta A_n(x). \end{aligned}$$

La última integral debe tomarse sobre una superficie en infinito espacial. Para las funciones de norma  $\Lambda(x)$  que caen lo suficientemente rápido como para que el término de la superficie se desvanezca, la ortogonalidad se garantiza al imponer la condición de norma de fondo  $D_n \delta A_n(x) + e \varepsilon_{abc} \Lambda^b \phi^c \delta \phi(x) = 0$ .

Entonces, después de comparar este resultado con la ecuación (6.4.2), los modos cero son  $a_n^{a(l)} = \partial_l A_n^a$  y  $\chi^{c(l)} = \partial_l \phi^a$ .

### Modos cero normalizables

Ahora estamos interesados en buscar todos los modos cero normalizables  $a_n^{a(l)}$  y  $\chi^{a(l)}$ , donde la condición de normalización significa que la traslación en la dirección correspondiente es posible. Recordemos que en la sección 6.2.1 vimos que la dinámica de una configuración de monopolos estáticos se puede incorporar mediante una transformación de norma; el resultado que obtuvimos es que la componente temporal del potencial de norma  $A_0$  se puede identificar con el parámetro de norma, es decir, tenemos la libertad de elegir el valor de este parámetro sin que las ecuaciones de movimiento se vean modificadas.

La ecuación (6.4.5) se obtuvo eligiendo la norma de Coulomb,  $A_0 = 0$ . Ahora consideremos el caso en el que la componente temporal del potencial de norma  $A_0$  no se anula, lo que equivale a decir que elegiremos otra norma. Nuevamente vamos a imponer que los modos cero normalizables satisfacen la condición de norma de fondo  $D_n E_n - ie[\phi, D_0 \phi] = 0$ , o de manera equivalente  $D_n E_n^a - e\varepsilon_{abc} \phi^b D_0 \phi^c = 0$ . En este caso el campo eléctrico  $E_n = \partial_0 A_n - D_n A_0$  y la derivada  $D_0 \phi = \partial_0 \phi + ie[A_0, \phi]$  se pueden escribir en términos de las coordenadas colectivas  $X_k(t)$  de la siguiente manera

$$E_n = \partial_0 A_n - D_n A_0 = \dot{X}_l \partial_l A_n - D_n A_0, \quad D_0 \phi = \partial_0 \phi + ie[A_0, \phi] = \dot{X}_l \partial_l \phi + ie[A_0, \phi].$$

Ahora elegiremos a  $A_0 = \dot{X}_l \epsilon_l$  proporcional a las velocidades de las coordenadas colectivas de tal manera que la condición de ortogonalidad no dependa de  $\dot{X}_l$  como en el caso (6.4.5). Por lo tanto el campo eléctrico y la derivada temporal del campo escalar son  $E_n^a = \dot{X}_l (\partial_l A_n^a - D_n \epsilon_l^a)$  y  $D_0 \phi^a = \dot{X}_l (\partial_l \phi^a + ie[\epsilon_l^a, \phi])$  respectivamente. Entonces la condición de norma de fondo se puede escribir como

$$D_n (\partial_l A_n - D_n \epsilon_l) - ie[\phi, \mathcal{D}_l \phi] = 0, \quad D_n (\partial_l A_n^a - D_n \epsilon_l^a) - e\varepsilon_{abc} \phi^b \mathcal{D}_l \phi^c = 0, \quad (6.4.6)$$

con  $\mathcal{D}_l \phi = \partial_l \phi + ie[\epsilon_l, \phi]$  y  $D_l \phi = \partial_l \phi + ie[A_l, \phi]$ . Comparando esta expresión con (6.4.5), podemos identificar a los nuevos modos cero normalizables

$$a_n^{a(l)} \rightarrow a_n^{a(l)} = \delta_l A_n^a(x) = \partial_l A_n^a - D_n \epsilon_l^a, \quad \chi^{a(l)} \rightarrow \chi^{a(l)} = \delta_l \phi^a(x) = \partial_l \phi^a - e\varepsilon_{abc} \epsilon_l^b \phi^c = D_l \phi^a. \quad (6.4.7)$$

A partir de este resultado, podemos ver que los modos cero normalizables se pueden escribir como

$$a_n^{a(l)} = \partial_l A_n^a - D_n A_l^a = F_{ln}^a, \quad \chi^{a(l)} = \partial_l \phi^a - e\varepsilon_{abc} A_l^b \phi^c = D_l \phi^a, \quad (6.4.8)$$

es decir, son las traslaciones infinitesimales estándar  $\partial_l A_n^a, \partial_l \phi^a$  en  $\mathbb{R}^3$ ; que están complementadas por una transformación de norma muy particular, donde se ha elegido que al parámetro  $\epsilon_l^a$  como el potencial de norma en sí  $A = \epsilon_l^a = A_l^a$  [56, 57]. Debemos de tener en cuenta que en el caso del monopolo de BPS, todos los modos cero son normalizables.

Ahora, si sustituimos los modos cero (6.4.8) en la definición de la energía cinética (6.4.3), obtenemos

$$\mathcal{T}_{\text{trans}} = \frac{\dot{X}_l^2}{2} \int d^3x (F_{ln}^a F_{ln}^a + D_l \phi^a D_l \phi^a) = \frac{1}{2} M \dot{X}_l^2,$$

y teniendo en cuenta la contribución del modo cero de norma (6.4.1), encontramos que la energía del monopolo en movimiento se puede escribir como

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}M \left( \dot{X}_l^2 + \dot{Y}^2 \right). \quad (6.4.9)$$

Por lo tanto este resultado puede entenderse como la energía cinética de una partícula clásica con una masa  $M$  que se mueve en el espacio 4-dimensional de parámetros  $\mathcal{M}_1 = \mathbb{R}^3 \times S^1$ . Aquí, la excitación de los modos cero de traslación en  $\mathbb{R}^3$  conduce a la aparición de un momento no-nulo del monopolo y el movimiento en  $S^1$  está relacionado con la generación de una carga eléctrica.

### 6.4.3. El espacio de parámetros y su métrica

Los resultados de la sección anterior pueden reformularse introduciendo el concepto de un espacio auxiliar conocido como el espacio de parámetros (moduli space). Si bien la ventaja de estos ejemplos relativamente simples puede parecer pequeña, este formalismo será de gran utilidad cuando recurramos a casos menos triviales.

Para motivar esto, consideremos primero una teoría que no es de norma y puramente bosónica cuyos campos, que suponemos que todos son masivos, se combinan en un solo campo  $\psi(\vec{x}, t)$ . Supongamos que existe una familia de soluciones estáticas degeneradas, parametrizadas por  $n$  coordenadas colectivas  $X_\alpha$  que denotamos por  $\psi_{cl}(\vec{x}, t)$ . Estas soluciones estáticas pueden ser vistas como una variedad (diferenciable), la cual es conocida como el espacio de parámetros (moduli space), y que está descrita por las coordenadas  $X_\alpha$  en esta variedad. Esta variedad es en sí misma un subespacio del espacio completo de las configuraciones de campo.

Una configuración arbitraria del campo se puede descomponer de la siguiente manera

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi^{cl}(\vec{x}; X_\alpha(t)) + \delta\psi(\vec{x}; X_\alpha(t), t), \quad (6.4.10)$$

donde se requiere que la variación  $\delta\psi$  sea ortogonal al movimiento en el espacio de parámetros (moduli space), en el sentido de que en cualquier instante de tiempo  $t$  se satisface

$$0 = \int d^3x \frac{\partial\psi^{cl}}{\partial X_\alpha} \delta\psi,$$

para todo  $r$ . Dicho de otra manera, si  $\psi$  se expande en términos de modos normales de oscilación alrededor de  $\psi^{cl}(\vec{x}; X(t))$ , solo los modos con frecuencia distinta de cero contribuyen a  $\delta\psi$ ; la contribución de modo cero se incluye permitiendo que  $X_\alpha$  sea dependiente del tiempo. Si la energía cinética es de la forma estándar, con  $\mathcal{L} = (1/2)\dot{\psi}^2 + \dots$ , entonces la sustitución de la ecuación (6.4.10) en el Lagrangiano lleva a

$$L = -E_{estática} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(X(t)) \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta + L_{quad} + \dots,$$

donde  $E_{estática}$  es la energía de la solución estática,  $L_{quad}$  es cuadrática en  $\delta\psi$  y los puntos suspensivos denota términos que son de orden cúbicos o más altos en  $\delta\psi$ . Los coeficientes  $g_{\alpha\beta}(X)$  están dados por

$$g_{\alpha\beta}(X) = \int d^3x \frac{\partial\psi^{cl}}{\partial X_\alpha} \frac{\partial\psi^{cl}}{\partial X_\beta},$$

que puede verse como la definición de una métrica en el espacio de parámetros (moduli space).

Ahora supongamos que las coordenadas colectivas varían lentamente y que la energía es pequeña en comparación con la frecuencia normal no nula más baja. Entonces las deformaciones de las soluciones correspondientes a la excitación de los modos con frecuencia distinta de cero son insignificantes, y la configuración de campo nunca se alejará del espacio de parámetros (moduli space). Una buena aproximación a la dinámica viene dada entonces por el Lagrangiano del espacio de parámetros [53]

$$L_{MS} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(X) \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta.$$

En esta aproximación, la dependencia temporal del campo viene solo a través de las coordenadas colectivas, es decir,

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi^{cl}(\vec{x}; X(t)), \quad (6.4.11)$$

con  $X(t)$  siendo una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange que vienen de  $L_{MS}$ .

Si  $g_{\alpha\beta}(X)$  se interpreta como una métrica, estas ecuaciones requieren que  $X(t)$  sea una geodésica en el espacio de parámetros (moduli space).

Ahora consideremos el caso de una teoría de norma; para esto consideremos el caso de la teoría de norma  $SU(2)$  en la cual estamos realmente interesados. Es conveniente adoptar una notación 4-dimensional euclidiana en la que  $A_j$  y  $\phi$  se combinan en un único campo  $A_{\mu'}$ , donde los índices griegos primados  $\mu'$  toman valores de 1 a 4. En esta notación  $D_{\mu'}$  y  $F_{\mu'\nu'}$  tienen sus significados habituales si  $\mu'$  y  $\nu'$  son 1, 2 o 3, mientras que

$$\begin{aligned} D_4 A_{\mu'} &= -ie [\phi, A_{\mu'}] \\ F_{\mu'4} &= -F_{4\mu'} = D_{\mu'} \phi. \end{aligned}$$

Debemos de tener en cuenta que  $A_{\mu'}$  no incluye  $A_0$ ; en esta notación, los subíndices cero en los campos y derivadas siempre se mostrarán explícitamente.

Esta teoría difiere del ejemplo anterior (teoría que no es de norma) en dos aspectos significativos. Primero, debido a que hay campos sin masa en la teoría, el espectro de frecuencias normales se extiende hasta cero. Por lo tanto, no existe un rango de energías que sea pequeño en comparación con todas estas frecuencias.

La segunda diferencia es el hecho de que estamos tratando con una teoría de norma, es decir, esto significa que hay una familia dimensionalmente infinita de soluciones estáticas. Por lo tanto, seleccionamos un conjunto dimensionalmente finito de configuraciones inequivalentes de norma  $A_{\mu'}^{cl}(x; X(t))$ . Ahora introducimos la dependencia temporal permitiendo que  $X_\alpha(t)$  varíe lentamente con el tiempo. Entonces la condición de norma de fondo  $D_n E_n - ie[\phi, D_0 \phi] = 0$  es precisamente la expresión (6.4.6) obtenida en la sección anterior, donde los modos cero de norma están relacionados con los campos  $E_n$ ,  $D_0 \phi$  de la siguiente manera

$$E_n^a = \dot{X}_l \delta_l A_n^a(x), \quad D_0 \phi^a = \dot{X}_l \delta_l \phi^a(x), \quad (6.4.12)$$

con

$$\delta_l A_n^a(x) = a_n^{a(l)} = \partial_l A_n^a - D_n \epsilon_l^a, \quad \delta_l \phi^a(x) = \chi^{a(l)} = \partial_l \phi^a - e \epsilon_{abc} \epsilon_l^b \phi^c, \quad (6.4.13)$$

donde el segundo término de las expresiones  $\delta_l A_n^a(x)$  y  $\delta_l \phi^a(x)$  proviene de una transformación de norma. Usando estos resultados podemos escribir de manera general la condición de norma de fondo en términos de los modos cero de traslación  $\delta_k A_n(x) = a_n^{(k)}(x)$ ,  $\delta_k \phi(x) = \chi_n^{(k)}(x)$  de la siguiente manera

$$D_n \delta_l A_n(x) - ie[\phi, \delta_l \phi(x)] = 0. \quad (6.4.14)$$

Usando la convención  $D_4\delta_1\phi = -ie[\phi, \delta_1\phi]$ , podemos escribir la condición de norma de fondo de manera simple

$$D_{\mu'}\delta_\alpha A^{\mu'} = 0. \quad (6.4.15)$$

El Lagrangiano del espacio de parámetros (moduli space) puede obtenerse sustituyendo la ecuación (6.4.12) en el Lagrangiano de la ecuación (6.1.6). La métrica resultante se puede escribir como

$$g_{\alpha\beta}(X) = 2 \int d^3x \text{Tr} (\delta_\alpha A_\mu \delta_\beta A_\mu).$$

En el caso de un único monopolo  $SU(2)$  hay cuatro modos cero, sin contar los modos locales de norma [56] y, por lo tanto, un espacio de parámetros (moduli space) tetradimensional cuyas coordenadas se pueden elegir de tal manera que tres de estas coordenadas son utilizadas para describir al monopolo en el centro de masa  $\vec{R}$  y una coordenada asociada a una fase  $U(1)$ .

Ahora estamos en posición de discutir una de las propiedades esenciales del espacio de parámetros asociado a un monopolo. Para esto es conveniente adoptar la siguiente notación  $\Psi := \{\delta A_n(x), \delta\phi(x)\}$ . Es posible escribir este vector  $\Psi$  en términos de una base cuaternionica, la cual es una base ortogonal como se discute en el apéndice D

$$\Psi = I\delta\phi(x) + i\sigma_j\delta A_j(x),$$

donde  $\sigma_j$  son las matrices de Pauli. Por otro lado, las ecuaciones (6.4.4) y (6.4.5) se pueden escribir como una ecuación tipo Dirac de la siguiente manera [58]

$$0 = (e\phi(x) - i\sigma_j D_j)\Psi := \mathcal{D}_f\Psi. \quad (6.4.16)$$

Si  $\Psi$  es una solución de la ecuación (6.4.16), entonces también lo es  $\Psi U$ , donde  $U$  es cualquier matriz unitaria  $2 \times 2$ . De esta forma, se puede construir una segunda solución linealmente independiente  $\Psi'$  a partir de la primera. Juntos, este doblete complejo de modos de Dirac implica un conjunto de cuatro modos cero bosónicos linealmente independientes.

Para hacer esto de manera explícita, usemos la convención utilizada en esta sección, donde  $\delta\phi := \delta A_4$ . Si  $\delta A_4$  es el modo cero bosónico correspondiente a la solución de Dirac  $\Psi$ , entonces el modo cero correspondiente a  $\Psi' = i\Psi\sigma_r$  tiene las siguientes componentes

$$(\delta A)_{\mu'}^{\prime} = -\bar{\eta}_{\mu'\nu'}^r \delta A_{\nu'}$$

donde la parte anti-auto-dual del tensor  $\bar{\eta}_{\mu'\nu'}^r$  y su contraparte auto-dual  $\eta_{\mu'\nu'}^r$  (con  $r = 1, 2, 3$ ) está definida de la siguiente manera:  $\eta_{ij}^r = \bar{\eta}_{ij}^r = \epsilon_{rij}$ ,  $\eta_{\mu'4}^r = -\bar{\eta}_{\mu'4}^r = \delta_{r\mu'}$ . Debido a la antisimetría del tensor  $\bar{\eta}_{\mu'\nu'}^r$ , entonces  $\delta A'$  es ortogonal a  $\delta A$  en cada punto del espacio.

Los modos cero forman una base para el espacio tangente a un punto dado en el espacio de parámetros. Entonces existen tres mapeos  $J^{(r)}$  de este espacio tangente en sí mismo, dado de la siguiente manera

$$J_{\mu'}^{(r)\alpha'} \delta_{\alpha'} A_{\nu'} = -\bar{\eta}_{\nu'\alpha'}^r \delta_{\mu'} A_{\alpha'}. \quad (6.4.17)$$

Estos mapeos  $J^{(r)}$  satisfacen la siguiente álgebra cuaternionica

$$J^{(r)}J^{(s)} = -\delta^{rs} + \epsilon^{rst}J^{(t)},$$

lo que define una estructura local cuaternionica en el espacio de parámetros. En el capítulo 7 se obtendrá un resultado aún más fuerte, que es que el espacio de parámetros es un espacio-tiempo hiper-Kähler.<sup>13</sup>

<sup>13</sup>En el Apéndice E se presenta una discusión de variedades cuaterniónicas e hiper-Kähler.



## Capítulo 7

# El espacio de parámetros de los monopolos BPS

Hasta este momento hemos considerado monopolos magnéticos y dyones como solitones clásicos de la teoría de Yang-Mills-Higgs, para los cuales sólo se conocen soluciones numéricas. Además, como lo discutimos anteriormente, las ecuaciones dependientes del tiempo del sistema Yang-Mills-Higgs no son completamente integrables lo que complicaría encontrar una solución que describa las propiedades dinámicas de los monopolos.

El problema se puede simplificar si consideramos configuraciones de monopolos en el límite BPS; en este caso es posible usar una herramienta importante para estudiar el comportamiento y la clasificación de monopolos y dyones la cual consiste en hacer una aproximación del espacio de parámetros (moduli space) a bajas energías[53]. En esta descripción, la mayoría de los grados de libertad teóricos de campo se ignoran, dejando solo un número finito de variables bosónicas y fermiónicas para cuantizar. En esta aproximación se ignoran las interacciones radiativas; solo se consideran interacciones en el límite de baja energía. Por ejemplo, aunque se puede estudiar la dispersión de monopolos dentro de este marco, el resultado es solo confiable si ninguno de los monopolos se mueve rápidamente o irradia mucha energía electromagnética. Esto puede garantizarse restringiendo la dinámica a velocidades bajas y trabajando en el régimen en el que la constante de acoplamiento de Yang-Mills es pequeña [59, 60].

Cuando incorporamos un campo de Higgs aparecen de manera natural soluciones de monopolos magnéticos fundamentales, como se discutió en el capítulo 6. Cada monopolo fundamental puede ser descrito en términos de cuatro coordenadas colectivas, y así surge un espacio de parámetros  $4n$ -dimensional como el entorno natural para describir  $n$ -monopolos que interactúan entre sí. En este capítulo estudiaremos algunos ejemplos explícitos de tales espacios de parámetros.

Comenzamos por describir algunas propiedades generales en el espacio de parámetros en la sección 7.2. Después, discutiremos brevemente las ideas básicas para poder determinar la métrica del espacio de parámetros en algunos casos especiales. En la sección 7.3, usamos las interacciones entre monopolos bien separados para inferir la métrica para las correspondientes regiones asintóticas del espacio de parámetros.

Luego, en la sección 7.4, mostramos cómo estos resultados asintóticos, junto con las restricciones matemáticas generales en el espacio de parámetros, determinan el espacio de parámetros de manera completa para el caso de dos monopolos fundamentales. Si los dos monopolos son de distintos tipos,

resulta que la forma asintótica de la métrica es en realidad la forma exacta de todo el espacio de parámetros. Finalmente, en la sección 7.5, ilustraremos el uso de la aproximación del espacio de parámetros utilizando las métricas que hemos obtenido para analizar la dispersión de dos monopolos.

## 7.1. La configuración de $n$ -monopolos a bajas energías

En el caso general, una configuración de  $n$ -monopolos se caracteriza por ser descrita por  $4n$  coordenadas colectivas [61, 46]. El espacio  $4n$ -dimensional de parámetros correspondiente  $\mathcal{M}_n$  se puede descomponer en un producto de  $n$  espacios de tipo  $\mathcal{M}_1$  en un régimen asintótico, es decir, los  $n$ -monopolos individuales se encuentran ampliamente separados entre sí. Sin embargo, en la región interior, la variedad  $\mathcal{M}_n$  no puede ser representada como una combinación de la configuración de los monopolos individuales. Esta es la razón del comportamiento no trivial de los monopolos en colisiones frontales [62].

La idea de Manton [53], la cual fue desarrollada en los trabajos [63, 64], está basada en la descripción de la dinámica clásica de una configuración de multi-monopolos, para los cuales la dinámica está restringida al caso de movimiento lento. Bajo estas consideraciones la dinámica de los monopolos se puede considerar como un movimiento geodésico en un espacio auxiliar conocido como *el espacio de parámetros* (moduli space).

Esta analogía también funciona en el caso de la dinámica de una configuración de multi-monopolos a bajas energías. La diferencia es que el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^4$  se reemplaza por un espacio de configuración infinitamente dimensional y la condición de que la energía sea mínima separa el espacio de parámetros  $\mathcal{M}_n$ . Este espacio tiene una métrica Riemanniana de manera natural, que asintóticamente debe ser plana como notamos en el caso de un monopolo individual. Otra restricción en la métrica en  $\mathcal{M}_n$  es que debe ser finita. Para una métrica en  $\mathcal{M}_1$ , esta condición se cumple: todos los modos cero son normalizables y no hay restricciones en el movimiento del monopolo.

## 7.2. Propiedades generales del espacio de parámetros de los monopolos magnéticos

Como lo hemos mencionado anteriormente, estamos interesados en estudiar la dinámica de una configuración de dos monopolos. Para esto es de gran utilidad analizar el caso más general, es decir, comencemos por hacer algunas observaciones sobre las propiedades más generales de la métrica en el espacio de parámetros para una configuración de multi-monopolos..

Existe una forma muy elegante de construir una métrica en  $\mathcal{M}_n$ . Para esto consideremos el espacio  $\mathcal{A}$  de todas las configuraciones de energía finita  $A_\mu = (A_n, \phi)^1$ . Aquí, adoptamos de nuevo una notación en la que el campo escalar se trata como la cuarta componente de una 4-conexión  $A = A_\mu dx^\mu$  en  $\mathbb{R}^4$ , que es invariante bajo traslaciones en la dirección del tiempo euclidiano<sup>2</sup>, es decir, se implementa la condición  $\partial_4 A_\mu = 0$ .

Dado que los campos se definen hasta la acción del grupo de norma  $G$ , el espacio de configuración del sistema está dado por el cociente  $\mathcal{A}/G$ . Entonces los vectores tangentes  $\delta_\alpha A_\mu$  definen al espacio

<sup>1</sup> Recordemos que estamos usando la convención de que los índices griegos tomen valores de 1 a 4, mientras que los índices latinos van de 1 a 3.

<sup>2</sup>Por tiempo euclideanos nos referimos a la nueva coordenada colectiva  $X_4$ , la cual esta asociada a una coordenada tipo-tiempo en el espacio de parámetros

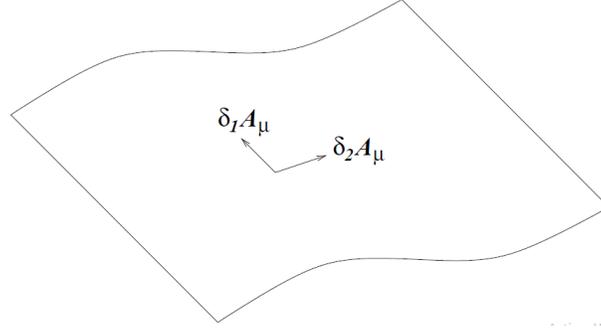


Figura 7.2.1: El espacio de parámetros es una variedad curva cuyos puntos corresponden a soluciones asociadas a configuraciones de monopolos. Entonces, los vectores tangentes en cualquier punto dado en el espacio de parámetros codifican las deformaciones infinitesimales de las soluciones de los monopolos de tal manera que preservan la condición BPS.

tangente  $T_{\mathcal{A}/G}$  y una métrica Riemanniana de manera natural en  $\mathcal{A}/G$ , como se ilustra en la figura 7.2.1. Esta métrica Riemanniana puede escribirse formalmente en términos de estos vectores tangentes como lo discutimos en la sección 6.4.3

$$g_{\alpha\beta} = \int d^3x \text{Tr} (\delta_\alpha A_\mu \delta_\beta A_\mu). \quad (7.2.1)$$

El espacio de parámetros para una configuración de  $n$ -monopolos  $\mathcal{M}_n$  es un subespacio del espacio de configuraciones  $\mathcal{A}/G$  y que además está parametrizado por las coordenadas colectivas  $X_\alpha$ . Sin embargo, existe una estrecha relación entre los modos cero y los vectores tangentes  $\delta_\alpha A_\mu$ . De hecho, un vector tangente arbitrario en  $\mathcal{M}_n$  se puede escribir como  $\dot{A}_\mu = \dot{X}^\alpha \delta_\alpha A_\mu$  y podemos escribir el Lagrangiano efectivo en términos del espacio de parámetros de la siguiente manera

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \quad (7.2.2)$$

como lo discutimos en la sección 6.4.3. Es importante destacar que este Lagrangiano efectivo tiene validez cuando incorporamos la dinámica de la interacción de monopolos BPS en la aproximación de energías bajas, donde los modos cero satisfacen la ecuación (6.4.4) y adicionalmente imponemos la condición de que los modos cero sean ortogonales al movimiento en el espacio de parámetros, la cual se puede escribir como la ley de Gauss (6.4.5). Ahora es el momento adecuado para hacer una observación importante sobre un espacio de parámetros arbitrario  $\mathcal{M}_n$ : los modos cero (6.4.4), junto con la ley de Gauss (6.4.5), tienen una estructura cuaterniónica para cualquier espacio de parámetros arbitrario  $\mathcal{M}_n$ .

De manera más precisa, se puede introducir como una base del espacio real de cuatro dimensiones a los cuaterniones  $\{e_\mu\} = (1, e_n)$ , como se discute en el Apéndice D. Entonces, un vector  $\delta_\alpha A = \delta_\alpha A_\mu e^\mu$ , que es tangente al espacio de parámetros, satisface la ecuación (D.0.2):

$$D^* \delta_\alpha A_\mu = 0,$$

que en la notación de componentes reproduce exactamente (6.4.5) y (6.4.4):

$$\begin{aligned} D_\mu \delta_\alpha A_\mu &= 0, \\ D_\mu \delta_\alpha A_\nu - D_\nu \delta_\alpha A_\mu - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D_\rho \delta_\alpha A_\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Claramente, la primera ecuación es la condición de ortogonalidad del vector tangente, mientras que la última es exactamente la ecuación de Bogomol'nyi linealizada para un modo cero. Por lo tanto, la métrica en el espacio de parámetros (moduli space)  $\mathcal{M}_n$  está dada por (7.2.1), la cual está restringida al subespacio de los modos cero. Como fue observado por Taubes [61], el espacio de parámetros (moduli space)  $\mathcal{M}_n$  es por definición una *variedad hiper-Kähler*. Esto significa que su *métrica Riemanniana es tipo-Kähler*<sup>3</sup> con respecto a tres estructuras cuasi-complejas  $J^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , que satisfacen el álgebra de los cuaterniones (ver Apéndice D). Las estructuras cuasi-complejas son covariantemente constantes y obedecen a las relaciones del álgebra cuaterniónica

$$J^{(m)} J^{(n)} = -\delta_{mn} + \varepsilon_{nmk} J^{(k)}. \quad (7.2.4)$$

En términos de las coordenadas colectivas  $X_\alpha$  en  $\mathcal{M}_n$  estas estructuras, se pueden representar como matrices  $(J^{(m)})_{\alpha\beta}$ , que satisfacen

$$-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left( J^{(m)} \right)_{\alpha\beta} \left( J^{(n)} \right)_{\gamma\delta} + \left( J^{(m)} \right)_{\alpha\gamma} \left( J^{(n)} \right)_{\delta\beta} + \left( J^{(m)} \right)_{\alpha\delta} \left( J^{(n)} \right)_{\beta\gamma}.$$

De hecho, la estructura cuaterniónica de las ecuaciones de modo cero (7.2.3) significa que hay tres tensores covariantemente constantes que actúan sobre el haz tangente

$$J_\alpha^{(m)\beta} \delta_\beta A = \delta_\alpha A e_m,$$

de modo que si  $\dot{A}_\mu$  es un vector tangente a  $\mathcal{M}_n$ , entonces  $J^{(m)} \dot{A}_\mu$  también es un vector del espacio tangente<sup>4</sup>.

En este trabajo no entraremos en detalle en estos temas. Aquí, solo notamos que hay una conexión notable entre las ecuaciones de los modos cero, las estructuras cuaterniónicas, que actúan sobre el haz tangente del espacio de parámetros y la propiedad del espacio de parámetros de una configuración de multi-monopolo que es una *variedad tipo hiper-Kähler*, la cual está caracterizada por tener una curvatura Riemann auto-dual [65].

### 7.2.1. La métrica en el espacio de parámetros

El cálculo de la métrica parece requerir que conozcamos a toda la familia de soluciones del monopolo BPS, lo cual sigue siendo una tarea muy difícil. Históricamente, se han encontrado métricas en el espacio de parámetros (moduli space) por varios métodos indirectos que invocan las simetrías de la teoría de norma subyacente y las propiedades del espacio de parámetros (moduli space) que se derivan de ellas.

Una propiedad esencial de un monopolo en el espacio de parámetros (moduli space) es que presentan una estructura hiper-Kähler. Entonces esto implica que existen tres estructuras complejas

<sup>3</sup>Recordemos que una variedad de Kähler es una variedad compleja equipada con una métrica no-singular Hermítica positiva, que puede escribirse localmente como una segunda derivada de alguna función escalar.

<sup>4</sup>En la sección 6.4.2 encontramos que en cada punto del espacio de parámetros hay tres estructuras complejas  $J^{(r)}$  que mapean el espacio tangente sobre sí mismo y que obedecen al álgebra cuaterniónica (D.0.1).

$I^{(r)}$  que mapean el espacio tangente sobre sí mismo de acuerdo con (6.4.17). Además, la variedad se llama hiper-Kähler si la variedad es Kähler con respecto a cada una de las estructuras complejas  $J^{(r)}$ , lo que equivale a decir que

$$\nabla J^{(s)} = 0,$$

con respecto a la conexión Levi-Civita de la métrica del espacio de parámetros (moduli space). Esto impone una restricción algebraica estricta al tensor de curvatura y, por lo tanto, la métrica en el espacio de parámetros presenta una restricción diferencial en la métrica del espacio de parámetros.<sup>5</sup>

Como se discute en la sección E.2 del Apéndice E, para probar que una variedad sea hiper-Kähler es suficiente mostrar que las tres 2-formas de Kähler  $\omega_{\alpha\beta}^{(s)} := -g_{\alpha\gamma} J_{\beta}^{(s)\gamma}$  son cerradas, es decir,  $d\omega^{(s)} = 0$ . Entonces basta con verificar que se satisface  $\epsilon_{\gamma\alpha\beta} \partial_{\gamma} \omega_{\alpha\beta}^{(s)} = 0$ .

Para esto, primero recordemos que la métrica asociada al espacio de parámetros está dada por (7.2.1). Usando esto junto con la acción de  $J^{(r)}$  sobre un vector en el espacio tangente obtenida en (6.4.17) podemos escribir las 2-formas de Kähler de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta}^{(s)} &= -g_{\alpha\gamma} J_{\beta}^{(s)\gamma} \\ &= 2 \int d^3 x \bar{\eta}_{\mu\nu}^s \text{Tr} \{ \delta_{\alpha} A_{\mu} \delta_{\beta} A_{\nu} \}. \end{aligned}$$

Por otro lado, comenzamos por escribir la ecuación para los modos cero (6.4.13) de la siguiente manera

$$\delta_{\mu} A_{\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - D_{\nu} \epsilon_{\mu}.$$

Con esto podemos definir la derivada covariante en este espacio de parámetros de la siguiente manera

$$\mathcal{D}_{\mu} := \partial_{\mu} + ie [\epsilon_{\mu}, ]. \quad (7.2.5)$$

Usando este resultado podemos definir el tensor de intensidad del campo  $\phi_{\mu\nu}$  como

$$\phi_{\mu\nu} := [\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}] = \partial_{\mu} \epsilon_{\nu} - \partial_{\nu} \epsilon_{\mu} + ie [\epsilon_{\mu}, \epsilon_{\nu}].$$

Ahora bien, usaremos este resultado para mostrar que las 2-formas de Kähler son cerradas, es decir, debemos evaluar<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \partial_{\gamma} \omega_{\alpha\beta}^{(s)} &= 2\epsilon_{\gamma\alpha\beta} \int d^3 x \bar{\eta}_{\mu\nu}^s \text{Tr} [\mathcal{D}_{\gamma} (\delta_{\alpha} A_{\mu} \delta_{\beta} A_{\nu})] \\ &= 4\epsilon_{\gamma\alpha\beta} \int d^3 x \bar{\eta}_{\mu\nu}^s \text{Tr} [(\mathcal{D}_{\gamma} \delta_{\alpha} A_{\mu}) \delta_{\beta} A_{\nu}], \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

donde hemos usado la anti-simetría del tensor  $\bar{\eta}_{\mu\nu}^s = -\bar{\eta}_{\nu\mu}^s$  y que  $\mathcal{D}_{\gamma}$  es la derivada covariante definida sobre el espacio de parámetros. Por otro lado, después de algunos cálculos, se puede mostrar que el término  $\mathcal{D}_{\gamma} \delta_{\alpha} A_{\mu}$  se puede escribir en términos de la derivada covariante  $D_{\gamma} = \partial_{\gamma} + ie [A_{\gamma}, ]$  y del tensor de intensidad  $\phi_{\mu\nu}$ . De manera más precisa se puede mostrar que

$$\epsilon_{\gamma\alpha\beta} (\mathcal{D}_{\gamma} \delta_{\alpha} A_{\mu}) = -2\epsilon_{\gamma\alpha\beta} (D_{\mu} \phi_{\gamma\alpha}).$$

<sup>5</sup>En el Apéndice E se presenta una discusión más detallada de las estructuras complejas, la integrabilidad y la geometría de Kähler e hiper-Kähler.

<sup>6</sup>Para obtener este resultado podemos usar las propiedades de la traza, obteniendo que  $\partial_p \text{Tr} [(\delta_q A_a \delta_r A_b)] = \text{Tr} [\mathcal{D}_p (\delta_q A_a) \delta_r A_b + \delta_q A_a \mathcal{D}_p (\delta_r A_b)]$ .

Nuevamente usando la ecuación (6.4.17) junto con la relación anterior podemos reescribir la ecuación (7.2.6) como

$$\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\partial_\gamma\omega_{\alpha\beta}^{(s)} = 2\epsilon_{\gamma\alpha\beta}J_\beta^{(s)\nu} \int d^3x \text{Tr} [(D_\mu\phi_{\gamma\alpha})\delta_\nu A_\mu].$$

Después de una integración por partes<sup>7</sup> podemos escribir esta ecuación en términos de dos integrales más simples:

$$\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\partial_\gamma\omega_{\alpha\beta}^{(s)} = 2\epsilon_{\gamma\alpha\beta}J_\beta^{(s)\nu} \left\{ - \int d^3x \text{Tr} [\phi_{\gamma\alpha} (D_\mu\delta_\nu A_\mu)] + \int d^3x \partial_\mu \text{Tr} [\phi_{\gamma\alpha}\delta_\nu A_\mu] \right\}.$$

El segundo término de esta ecuación se anula dado que es un término de frontera el cual es cero y para la primera integral podemos ver que la parte que está en el integrando es justamente la condición de norma de fondo (6.4.15), por lo tanto obtenemos

$$\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\partial_\gamma\omega_{\alpha\beta}^{(s)} = 0,$$

lo cual verifica que las tres estructuras de Kähler son cerradas, y que cualquier monopolo BPS en el espacio de parámetros es hiper-Kähler [63, 62, 66].

Por otro lado, también es importante poner atención a las isometrías del espacio de parámetros, las cuales reflejan las simetrías subyacentes de las soluciones de los monopolos BPS por sí mismas. Por ejemplo, dado que estamos analizando monopolos en un espacio  $\mathbb{R}^3$  con simetrías de rotación y traslación, el espacio de parámetros debería poseer las isometrías correspondientes. La isometría de traslación aparece de manera trivial en la parte del centro de la masa de las coordenadas colectivas y no entra la parte de interacción del espacio de parámetros.

La isometría de rotación  $SO(3)$  (que en general, puede elevarse a una isometría  $SU(2)$ ), resulta particularmente útil, ya que actúa sobre los vectores de posición relativa de los monopolos. La rotación espacial de una solución BPS siempre produce otra solución BPS. Esto lleva un punto en el espacio de parámetros a otro, y por lo tanto induce un mapeo en el espacio de parámetros en sí mismo. Debido a que la física es invariante bajo tales rotaciones espaciales, este mapeo deja invariante el Lagrangiano del espacio de parámetros, y por lo tanto a la métrica.

Los generadores infinitesimales de las isometrías son campos vectoriales en el espacio de parámetros. Denotaremos los tres generadores de la isometría rotacional por  $L^s$  con  $s = 1, 2, 3$ . La afirmación es que los  $L^s$  generan isometrías que se refleja en los campos vectoriales de Killing, cuyas componentes satisfacen

$$0 = (\mathcal{L}_{L^s}[g])_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu L_\nu^s + \nabla_\nu L_\mu^s,$$

donde  $\mathcal{L}_V$  denota la derivada de Lie con respecto al campo vectorial  $V$ . La estructura  $SU(2)$  está codificada en los conmutadores de estos campos vectoriales.

$$[L^s, L^t] = \epsilon^{stu} L^u,$$

donde el conmutador de dos campos vectoriales,  $X$  y  $Y$ , se define como  $[X, Y]^m \equiv X^n \partial_n Y^m - Y^n \partial_n X^m$ . Esta isometría  $SU(2)$  no deja las estructuras complejas,  $J^{(s)}$ , invariantes. En cambio, las estructuras complejas se transforman como un triplete:

$$\mathcal{L}_{L^s}[J^{(t)}] = \epsilon^{stu} J^{(u)}.$$

<sup>7</sup>Para hacer la integración por partes hemos usado nuevamente la propiedad de la traza, es decir, podemos usar  $\partial_\alpha \text{Tr} [\phi_{pq}\delta_n A_\alpha] = \text{Tr} [D_\alpha (\phi_{pq}\delta_n A_\alpha)] = \text{Tr} [(D_\alpha\phi_{pq})\delta_n A_\alpha] + \text{Tr} [\phi_{pq} (D_\alpha\delta_n A_\alpha)]$ .

De manera equivalente, las tres 2-formas de Kähler  $w^s$  transforman de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{L^s}[w^t] = \epsilon^{stu} w^u.$$

El hecho de que las  $J^{(s)}$  se transformen como un triplete rotacional se puede entender fácilmente recordando el resultado obtenido en la ecuación (6.4.17), es decir, que su acción se origina en la acción del tensor 't Hooft  $\eta_{\mu\nu}^s$  en los modos cero. Después de clasificar cuidadosamente cómo actúa la rotación espacial en  $\eta_{\mu\nu}^s$ , uno encuentra que los  $J^{(s)}$  forman un triplete.

En el caso de una configuración de  $r$  monopolos magnéticos BPS el grupo de norma no-rotó  $U(1)^r$ , también se puede usar para transformar una solución BPS; esto genera otro conjunto de isometrías del espacio de parámetros (hay como máximo  $r$  isometrías independientes de este tipo). Los modos cero asociados con estas isometrías de norma adoptan la siguiente forma

$$\delta_A A_s = D_s \Lambda_A, \quad \delta_A \phi = ie [\phi, \Lambda_A],$$

donde  $A = 1, 2, \dots, r$  etiquetan las posibles rotaciones de la norma. Las ecuaciones de modo cero se simplifican así a una ecuación de segundo orden,

$$D^2 \Lambda_A + e^2 [\phi, [\phi, \Lambda_A]] = 0.$$

A lo largo de esta sección, designaremos los campos vectoriales de Killing asociados con estas isometrías  $U(1)$  por  $K^A$ . Regresando a la ecuación (6.4.17), vemos que el efecto de una transformación de norma conmuta con los  $J^{(s)}$ . Por lo tanto, estas isometrías  $U(1)$  a diferencia de la isometría rotacional, conservan las estructuras complejas del espacio de parámetros,

$$\mathcal{L}_{K^A}[J^{(s)}] = 0,$$

y son así "triholomórficos".

En general, podemos considerar un sistema de coordenadas donde estos vectores de Killing se escriben como

$$K_A = \frac{\partial}{\partial \xi^A},$$

para algunas coordenadas angulares  $\xi^A$ . Por lo tanto el Lagrangiano no debe tener una dependencia explícita de  $\xi^A$ , salvo a través de sus velocidades. Entonces el Lagrangiano que describe una variedad hiper-Kähler junto con la isometría  $U(1)$  se puede escribir de manera más general como

$$L = \frac{1}{2} h_{pq}(y) \dot{y}^p \dot{y}^q + \frac{1}{2} k_{AB}(y) \left[ \dot{\xi}^A + \dot{y}^p w_p^A(y) \right] \left[ \dot{\xi}^B + \dot{y}^q w_q^B(y) \right],$$

donde  $y^p$  son las otras coordenadas. En otras palabras,  $\xi^A$  son todas las coordenadas cíclicas cuyos momentos conjugados son cantidades conservadas, como en el caso de los monopolos  $SU(2)$ .

### 7.3. El espacio de parámetros de monopolos bien separados

La métrica en el espacio de parámetros determina el movimiento de los dyones que se mueven lentamente. Por el contrario, la forma de la métrica en el espacio de parámetros se puede deducir del conocimiento de las interacciones entre los dyones. En general, ésta no es una tarea simple, ya que la interacción completa entre los dyones es más fácil de estudiar que las soluciones solitónicas

clásicas de Yang-Mills. Por otro lado, el problema se simplifica bastante cuando restringimos nuestra atención al caso en que los núcleos monopolos están separados por grandes distancias. En este límite, las únicas interacciones entre los monopolos se producen mediante el intercambio de campos sin masa, que son completamente abelianos [19, 67, 68]. En otras palabras, las interacciones involucradas son simplemente las fuerzas de Maxwell y su análogo escalar. Al estudiar estas interacciones, podemos obtener la forma asintótica de la métrica en el espacio de parámetros (moduli space) que corresponde a la interacción de monopolos a grandes distancias en el espacio físico.

## 7.4. El tensor métrico en el espacio $\mathcal{M}_2$

Hasta el momento redujimos el Lagrangiano original del sistema Yang-Mills-Higgs a (7.2.2), el cual es un Lagrangiano con un número finito de grados de libertad. Adicionalmente hemos introducido el espacio de parámetros para estudiar la interacción de una configuración de  $n$ -monopolos a grandes distancias con respecto a los núcleos de los monopolos obteniendo como resultado que el espacio de parámetros se puede escribir como la métrica de Taub-NUT en el caso de dos monopolos. Ahora el problema es encontrar la forma explícita de la métrica asociada al espacio de parámetros que describa la interacción de manera completa, es decir, que incluya la interacción cuando las distancias de interacción son comparables con los núcleos de los monopolos.

Recordemos que una configuración arbitraria de  $n$ -monopolos tiene  $4n$  parámetros los cuales se pueden separar de la siguiente manera: tres parámetros  $(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$ , corresponden a la posición del centro de la masa del sistema, un parámetro angular especifica el ángulo de fase  $U(1)$  global en  $S^1$ , de tal manera que la dependencia temporal determina la carga eléctrica total de todos los monopolos. Por lo tanto, el espacio de parámetros se puede factorizar como [65, 62, 63]

$$\mathcal{M}_n = \mathbb{R}^3 \times \frac{S^1 \times \mathcal{M}_n^0}{\mathbb{Z}_n}.$$

Aquí, el factor  $\mathbb{Z}_n$  refleja que los monopolos no se pueden distinguir. La métrica en  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  es, como antes, una métrica plana. Por lo tanto, toda la información no trivial acerca de la dinámica de bajas energías de los monopolos está codificada en la  $(4n - 4)$ -dimensional variedad curva  $\mathcal{M}_n^0$ . Además, dado que la métrica en  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  es plana y  $\mathcal{M}_n$  es una variedad hiper-Kähler, la métrica en  $\mathcal{M}_n^0$  también es hiper-Kähler.

Para un par de monopolos  $n = 2$ , el espacio  $\mathcal{M}_2^0$  es un espacio tetradimensional y el espacio de parámetros es de ocho dimensiones. De estas ocho dimensiones, tres codifican el movimiento del centro de masa del sistema de dos cuerpos y deben permanecer libres, mientras que al menos una corresponde a una rotación de la norma. Así, la parte no trivial del espacio de parámetros tiene como máximo cuatro dimensiones. Con las diversas restricciones en el espacio de parámetros, en particular su propiedad de ser una variedad hiper-Kähler y la isometría  $SO(3)$  de las rotaciones espaciales, no queda mucha elección. De hecho, es a través de estas consideraciones abstractas que Atiyah y Hitchin [63, 62, 66] fueron capaces de encontrar el espacio de parámetros exacto para dos monopolos idénticos. En esta sección, analizaremos el caso de un par de monopolos arbitrarios, idénticos o distintos así como sus respectivos espacios de parámetros.

La isometría de este espacio es  $SO(3)$ : solo quedan rotaciones del grupo de simetría completo del espacio euclidiano cuando separamos las traslaciones. Por lo tanto, una parametrización adecuada de  $\mathcal{M}_2^0$  puede ser dada por una coordenada radial  $r$  y tres ángulos de Euler  $\theta, \phi$  y  $\psi$  (ver ApéndiceC). El significado físico de estos parámetros es que la coordenada radial determina la separación entre

los dos monopolos, los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  dan la orientación del eje que une los monopolos y  $\psi$  es el ángulo de rotación alrededor de este eje [64]. Este ángulo está asociado con la carga eléctrica relativa de los monopolos.

Los requisitos de simetría en  $\mathcal{M}_2^0$  son bastante restrictivos [65]. En efecto, una métrica invariante bajo el grupo  $SO(3)$  en un espacio euclidiano auto-dual, el cual es una variedad hiper-Kähler 4-dimensional, tiene una forma única

$$ds^2 = f(r)^2 + \beta(r)^2 \sigma_x^2 + \gamma(r)^2 \sigma_y^2 + \delta(r)^2 \sigma_z^2, \quad (7.4.1)$$

donde  $f(r)$ ,  $\beta(r)$ ,  $\gamma(r)$  y  $\delta(r)$  son funciones de la coordenada radial  $r$  y las  $\sigma_i$  con  $i = x, y, z$ , son las uno-formas del grupo  $SO(3) = S^3/\mathbb{Z}_2$ , las cuales esta definidas como

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} (\sin \psi d\theta - \sin \theta \cos \psi d\phi), \\ \sigma_y &= \frac{1}{2} (\cos \psi d\theta + \sin \theta \sin \psi d\phi), \\ \sigma_z &= \frac{1}{2} (d\psi + \cos \theta d\phi). \end{aligned}$$

Además, la auto-dualidad de la métrica implica que las funciones  $f(r)$ ,  $\beta(r)$ ,  $\gamma(r)$  y  $\delta(r)$  obedecen un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden [67]

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma\delta}{f} \frac{d\beta}{dr} &= \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2 - 2\lambda\gamma\delta, \\ \frac{2\delta\beta}{f} \frac{d\gamma}{dr} &= \beta^2 + \delta^2 - \gamma^2 - 2\lambda\delta\beta, \\ \frac{2\beta\gamma}{f} \frac{d\delta}{dr} &= \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 - 2\lambda\beta\gamma, \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

donde  $\lambda = 1$  o  $\lambda = 0$ . El caso más simple, la solución para  $\lambda = 0$ , corresponde al caso de instantones gravitacionales de Eguchi-Hanson[69]. El análisis del sistema (7.4.2) para el caso  $\lambda = 1$  no es tan simple; en este caso hay sólo tres soluciones correspondientes a soluciones de variedades completas no singulares [65, 62]:

- $\beta = \gamma = \delta$  : Métrica plana en  $\mathbb{R}^4$ ,
- $\beta = \gamma \neq \delta$  : Espacio Taub-NUT,
- $\beta \neq \gamma \neq \delta$  : Métrica de Atiyah-Hitchin.

La primera situación es la trivial, es decir, es el caso en el que no hay interacción entre los monopolos. La situación es diferente para las dos posibilidades restantes. Primero, debemos de tener en cuenta que la función  $f(r)$  se define hasta una redefinición de la coordenada radial, es decir, puede elegirse arbitrariamente; por ejemplo, se puede elegir que  $f = \beta\gamma\delta$  [65, 62, 63]. La segunda solución corresponde a la situación cuando dos de las tres funciones  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  coinciden; por lo tanto, esta configuración tendrá una simetría  $SO(2)$  adicional. Este caso corresponde a la métrica Taub-NUT [52] la cual aparece en la dinámica de baja energía de una configuración de dos dyones como lo discutimos en la sección 6.3.3. Esta métrica es también el límite asintótico de la tercera solución,

es decir, la métrica de Atiyah-Hitchin que en la región asintótica se aproxima a la forma  $\beta \sim \gamma$ . La única diferencia es que en este último caso, la función  $\delta$  tiene signo opuesto en comparación con los signos de  $\beta$  y  $\gamma$ .

Una elección alternativa para la función  $f(r)$  de la métrica (7.4.1) es elegir  $f = -\gamma/r$  [64], junto con la parametrización  $r = 2K(\rho)$ , con  $\rho = \sin \frac{\vartheta}{2}$ , donde  $K$  es la integral elíptica

$$K(\rho) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - \rho^2 s^2}}. \quad (7.4.3)$$

Después de tomar esta parametrización es posible encontrar la solución al sistema (7.4.2)

$$\begin{aligned} \gamma\delta &= -r \sin \vartheta \frac{dr}{d\vartheta} + \frac{r^2}{2}(1 + \cos \vartheta), \\ \delta\beta &= -r \sin \vartheta \frac{dr}{d\vartheta}, \\ \beta\gamma &= -r \sin \vartheta \frac{dr}{d\vartheta} + \frac{r^2}{2}(1 - \cos \vartheta). \end{aligned}$$

El resultado de las soluciones numéricas de este conjunto de ecuaciones se puede encontrar en [65, 64]. Sin embargo, su comportamiento asintótico puede determinarse de manera analítica. Para una separación grande de los monopolos, es decir,  $r \rightarrow \infty$ , la variable  $\vartheta$  tiende a  $\pi$  y podemos hacer uso de la expansión asintótica de la integral elíptica (7.4.3). El resultado, hasta términos suprimidos exponencialmente, es [65, 64]

$$\beta(r) \approx \gamma(r) = r\sqrt{1 - \frac{2}{r}} + \mathcal{O}(e^{-r}), \quad \delta(r) = -2\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{r}}} + \mathcal{O}(e^{-2r}). \quad (7.4.4)$$

En el límite opuesto  $r \rightarrow \pi$  (que corresponde a  $\vartheta \rightarrow 0$ ), se puede usar la expansión aproximada de la integral elíptica  $K(\rho) = \pi(1/2 + \rho^2/8 + \dots)$ . Por lo tanto podemos escribir para este caso

$$\begin{aligned} \beta(r) &= 2(r - \pi) \left( 1 - \frac{1}{4\pi}(r - \pi) \right) + \dots, \\ \gamma(r) &= \pi \left( 1 + \frac{1}{2\pi}(r - \pi) \right) + \dots, \\ \delta(r) &= -\pi \left( 1 - \frac{1}{2\pi}(r - \pi) \right) + \dots \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Sustituyendo la solución asintótica (7.4.4) en la fórmula general (7.4.1), obtenemos la métrica en la región asintótica de  $\mathcal{M}_2^0$

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{4}{1 - \frac{2}{r}} (d\psi + \cos \theta d\phi)^2. \quad (7.4.6)$$

Después de hacer algunas redefiniciones obvias esta expresión se puede reconocer como la métrica Taub-NUT (6.3.26) que ya hemos encontrado anteriormente. Por lo tanto, en este límite, la geometría Atiyah-Hitchin describe dos monopolos esféricamente simétricos ampliamente separados, cuya estructura interna es despreciable; como consecuencia del límite asintótico  $\beta(r) \approx \gamma(r)$ , aparece una

simetría  $SO(2)$ . La relevancia física detrás de esta simetría es que la carga eléctrica relativa de los dyones bien separados se debe conservar, además de la carga eléctrica total.

Ahora consideremos el límite opuesto, es decir, cuando  $r \rightarrow \pi$ ; el rango de la variable  $r$  es  $\pi \leq r \leq \infty$ . Entonces la singularidad que exhibe la métrica (7.4.6) en  $r = 2$  se encuentra fuera del rango de  $r$ , lo que implica que esta singularidad no tiene ningún significado físico. Sin embargo, si  $r = \pi$  y usamos la expansión (7.4.5) podemos ver que en este límite  $\beta = 0$ . Esta es una singularidad de las coordenadas, que corresponde al colapso de las órbitas tridimensionales de  $SO(3)$  a una esfera bidimensional  $S^2$  [65, 64], la cual es conocida como "Bolt" en Relatividad General.

Para describir la geometría cercana al "Bolt", Gibbons y Manton [64] usan la forma general de la métrica de Atiyah-Hitchin (7.4.1), pero introducen un nuevo conjunto de coordenadas angulares  $\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}$  en  $SO(3)$  que parametrizan las matrices de rotación como

$$U(\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}) = U_1(\tilde{\phi})U_3(\tilde{\theta})U_1(\tilde{\psi}) = U(\varphi, \theta, \psi) = U_z(\phi)U_y(\theta)U_z(\psi). \quad (7.4.7)$$

En términos de las formas correctas del grupo  $SO(3)$ , que describimos en Apéndice (C), la métrica cercana al "Bolt" se puede escribir como

$$ds^2 = dr^2 + 4(r - \pi)^2 \left( d\tilde{\psi} + \cos \tilde{\theta} d\tilde{\phi} \right)^2 + \pi^2 \left( d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\phi}^2 \right). \quad (7.4.8)$$

Si introducimos la coordenada relativa  $\tilde{r} = r - \pi$ , podemos escribir de manera simple

$$ds^2 = d\tilde{r}^2 + 4\tilde{r}^2 d\tilde{\psi}^2 + ds_{Bolt}^2, \quad (7.4.9)$$

donde la métrica en el "Bolt" vive en la  $S^2$  esfera y está dada por

$$ds_{Bolt}^2 = \pi^2 \left( d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\phi}^2 \right).$$

## 7.5. Dispersión a baja energía de dos monopolos

La aplicación más interesante de la métrica Atiyah-Hitchin está relacionada con el problema de la dispersión geodésica de los monopolos a baja energía. Usando (6.4.9) y (7.4.1), podemos escribir el Lagrangiano completo de un sistema de dos monopolos en términos de ocho coordenadas colectivas. Este Lagrangiano es una suma de varios términos, cada uno proporcional al cuadrado de la velocidad en el espacio de configuración

$$L = M \left( \dot{X}_l^2 + \dot{Y}^2 \right) + \frac{M}{4} \left[ f(r)^2 \dot{r}^2 + \beta(r)^2 l_x^2 + \gamma(r)^2 l_y^2 + \delta(r)^2 l_z^2 \right], \quad (7.5.1)$$

donde  $M$  es la masa del monopolo. Las componentes del vector de velocidad angular  $l_n$  se definen mediante la rotación de la 1-forma  $R_n$  en  $SO(3)$  (Apéndice C)

$$\begin{aligned} l_x &= -\sin \psi \dot{\theta} + \cos \psi \sin \theta \dot{\phi}, \\ l_y &= \cos \psi \dot{\theta} + \sin \theta \sin \psi \dot{\phi}, \\ l_z &= \dot{\psi} + \cos \theta \dot{\phi}. \end{aligned}$$

Existe una analogía obvia entre el movimiento del monopolo y el problema de la rotación de un cuerpo rígido asimétrico clásico. La diferencia es que este "top" ya no es un sólido: en el caso en cuestión, el análogo del momento principal de inercia tiene las componentes

$$I_1 = \beta(r)^2 l_x^2, \quad I_2 = \gamma(r)^2 l_y^2, \quad I_3 = \delta(r)^2 l_z^2,$$

que varían con la separación  $r$  del monopolo, es decir, la "parte superior" del "top" parece una gelatina que cambia su forma en el camino. En el límite  $r \rightarrow \infty$ , el "top" es una varilla muy larga y delgada con los monopolos en los extremos.

De hecho, las ecuaciones de movimiento correspondientes al Lagrangiano (7.5.1) en la parte plana del espacio de parámetros  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  son triviales [64]

$$\ddot{X}_l = 0, \quad \ddot{Y} = 0,$$

lo que corresponde a la conservación del momento total  $P_l := \sqrt{2M}\dot{X}_l$  y la carga eléctrica total  $Q := \sqrt{2M}\dot{Y}$ . En cuanto al movimiento relativo en  $\mathcal{M}_n^0$ , tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\delta^2} \right) I_2 I_3, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \left( \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) I_3 I_1, \\ \frac{dI_3}{dt} &= \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) I_1 I_2, \\ f \frac{d}{dt} \left( f \frac{dr}{dt} \right) &= \frac{1}{\beta^3} \frac{d\beta}{dr} I_1^2 + \frac{1}{\gamma^3} \frac{d\gamma}{dr} I_2^2 + \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dr} I_3^2. \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

La última ecuación del conjunto (7.5.2) corresponde a la conservación de la energía del movimiento relativo. De hecho, su multiplicación por  $v = \dot{r}$  produce

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ f^2 \dot{r}^2 + \frac{I_1^2}{\beta^2} + \frac{I_2^2}{\gamma^2} + \frac{I_3^2}{\delta^2} \right] = 0. \quad (7.5.3)$$

De la misma manera, se puede probar que el vector de momento angular del movimiento relativo  $J_k^2 = M^2 (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)$  es otra integral de movimiento.

Vimos anteriormente que en las soluciones asintóticas (7.4.4) hay una simetría adicional  $SO(2)$  en el límite  $r \rightarrow \infty$ . Una analogía con la parte superior clásica en este caso corresponde a la rotación alrededor del eje de simetría. Entonces la proyección del momento angular sobre este eje es también una integral del movimiento. En nuestro caso, esta simetría adicional refleja la conservación de la componente del momento angular  $J_3 = MI_3$  [64, 19]. La integral de movimiento correspondiente se puede identificar con la carga eléctrica relativa de los monopolos, dado que en este límite, se conservan las cargas relativas, las cargas totales de los monopolos y la carga eléctrica individual de cada monopolo. Además, si se conserva la componente  $J_3$ , el cuadrado del momento angular orbital  $L_k^2 = M^2(I_1^2 + I_2^2)$  también es una integral de movimiento.

Existen otros casos interesantes de dispersión de monopolos, que son análogos a las rotaciones del cuerpo rígido en torno a un eje principal [65, 64]. En tal movimiento, solo uno de las tres componentes del vector del momento angular  $J_k$  no es nulo. Por ejemplo, si elegimos  $J_2 = J_3 = 0$ , entonces los monopolos no tienen carga eléctrica y la componente  $I_1 = \text{const}$ . Entonces, la conservación de la energía (7.5.3) implica que el movimiento radial se describe mediante la ecuación

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{f^2} \left( \frac{2E}{M} - \frac{I_1^2}{\beta^2} \right).$$

Recordemos que en  $r = \pi$ , la función  $\beta(r)$  tiene un cero, es decir, la componente radial de la velocidad relativa desaparece a cierta distancia  $r_0 > \pi$ . La interpretación física es que los monopolos

se acercan unos a otros a una distancia mínima  $r_0$  y luego se dispersan al infinito espacial. El ángulo de dispersión se puede encontrar a partir de la métrica alrededor del "Bolt" (7.4.8). Dado que elegimos  $J_2 = J_3 = 0$ , las variables angulares  $\tilde{\theta}$  y  $\tilde{\phi}$  son constantes y  $J_1 = M^2 \beta^2 d\tilde{\psi}/dt$ . Así, el ángulo de dispersión es

$$\Theta = \Delta\tilde{\psi}\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = I_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\beta(r)^2}.$$

Los cálculos numéricos muestran que a medida que el parámetro de impacto disminuye a cero, el ángulo de dispersión aumenta monótonamente hasta el valor límite  $\Theta_0 = \pi/2$  [65, 64].

En el caso de colisión frontal, tenemos  $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ . La ecuación de movimiento (7.5.2) muestra que en este caso todas las variables angulares permanecen constantes hasta que la variable radial alcanza el valor  $r = \pi$ . Proyectado en el plano  $\tilde{r}-\tilde{\psi}$ , este movimiento corresponde al paso del monopolo a través del origen, donde la derivada  $d\tilde{r}/dt$  cambia su signo. Dado que las integrales de movimiento no se modifican, eso significa que la variable angular  $\tilde{\psi}$  en el " Bolt" debe saltar en  $\pi/2$ . Por lo tanto, en colisiones frontales, los monopolos se dispersan a través de un ángulo recto en el plano perpendicular al eje 1 [65, 62, 63].



## Capítulo 8

# Deformación NC del potencial de Kähler

Como se ha discutido en los capítulos anteriores, el espacio-tiempo de Atiyah-Hitchin (A-H) se puede utilizar para describir la interacción entre monopolos magnéticos a velocidades muy pequeñas y que además provienen de teorías de norma. La idea de describir la interacción de monopolos a baja energías fue propuesta por Manton; en esta aproximación el movimiento se puede describir en términos de una métrica, la cual tiene la propiedad de corresponder a un espacio-tiempo hiper-Kähler. EL propósito de este capítulo es construir una versión no-conmutativa (NC) del espacio tiempo de A-H; como ya se discutió anteriormente este espacio-tiempo tiene la propiedad de ser una variedad de Kähler. Por lo tanto, de manera general en este capítulo nos concentraremos en construir una versión no conmutativa de una variedad Kähler de tal manera que el nuevo espacio-tiempo deformado preserve todas las propiedades de la variedad Kähler no-deformada, es decir, queremos construir una variedad NC que siga siendo Kähler después de tal deformación.

### 8.1. Introducción

Las variedades hiper-Kähler en cuatro dimensiones has sido estudiadas extensivamente en relatividad general, en conexión con la teoría de instantones gravitacionales [70, 71], y sus generalizaciones algebraicas a través de la teoría de Penrose no-lineal de la gravitación [72] y de las ecuaciones de heavenly [73]. También ha sido de interés primario en teorías de campo supersimétricas [74, 75], donde la presencia de una supersimetría extendida  $N = 4$  impone restricciones muy fuertes que explican varios teoremas de no renormalización y su finitud en el ultravioleta. Más recientemente se descubrió que los espacios de parámetros (moduli space) que surgen en las teorías topológicas de campos y otras áreas de la física matemática poseen estructuras hiper-Kähler, un ejemplo notable es el espacio de parámetros de los monopolos magnéticos en el límite BPS [65, 47]. Estructuras similares también se encuentran en la teoría de supercuerdas, y en muchos otros problemas que involucran espacios de parámetros (moduli-space) de interés físico en la gravedad cuántica.

La clasificación de todas las variedades completas, regulares e hiper-Kähler sigue siendo una pregunta abierta hasta la fecha, e incluso para algunos ejemplos conocidos, la forma explícita de la métrica ha sido difícil o imposible de determinar hasta ahora.

En [76], los autores consideraron la descripción algebraica de variedades hiper-Kähler no compactas 4-dimensionales que poseen al menos una isometría abeliana y abordan el problema de su clasificación, sin centrarse realmente en ninguna aplicación en particular. El carácter traslacional o rotacional de los correspondientes campos vectoriales de Killing es un factor decisivo en ese trabajo. Un campo vectorial de Killing  $K_\mu$  satisface por definición  $\nabla_{(\nu}K_{\mu)} = 0$ , mientras que la auto-dualidad de la parte anti-simétrica  $\nabla_{[\nu}K_{\mu]}$  proporciona una distinción relevante [77, 78]: el campo vectorial de Killing  $K_\mu$  será llamado traslacional si satisface la condición

$$K_{\alpha;\beta} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} K_{\mu;\nu}, \quad (8.1.1)$$

de lo contrario, se llamará campo vectorial de rotación de Killing. El signo  $\pm$  en (8.1.1) se elige de acuerdo con la naturaleza auto-dualidad o anti-auto-dualidad de la métrica 4-dimensional subyacente  $g_{\mu\nu}$ .

Hay algunos resultados dispersos en la literatura sobre soluciones auto-duales con simetrías de Killing rotacionales. Dos de estos ejemplos los proporcionan las métricas de Eguchi-Hanson y Taub-NUT, que admiten un grupo mucho más grande de isometrías, a saber  $SO(3) \times SO(2)$ . Para el primero,  $SO(3)$  actúa como una isometría traslacional en el sentido de la ecuación (8.1.1) y  $SO(2)$  como rotacional, mientras que la situación se invierte para el otro [79]. En cualquiera de los dos casos, existe una simetría traslacional que explica su presencia en la lista conocida de ALE (asintóticamente localmente euclidiano (ALE)) o ALF (localmente asintóticamente plano (ALF)), respectivamente. El único ejemplo conocido hasta la fecha en el caso puramente rotacional, sin exhibir ninguna isometría traslacional, es la métrica de Atiyah-Hitchin en el espacio de parámetros (moduli space)  $M_2^0$  de BPS  $SU(2)$  monopolos de carga magnética 2 [65, 47]. En este trabajo, el espacio-tiempo de Atiyah-Hitchin proporcionará la base para nuestra investigación.

El espacio-tiempo de Atiyah-Hitchin es una variedad tetra-dimensional hiper-Kähler con grupo de isometría  $SO(3)$  que se introdujo hace mucho tiempo para describir el espacio de parámetros (moduli space) de los monopolos BPS no-abelianos con grupo de norma  $SU(2)$  de carga magnética (topológica) 2 [65, 47]. En años más recientes, este espacio y varias generalizaciones de los mismos se identificaron con el espacio de parámetros cuántico completo de teorías de norma supersimétricas  $N = 4$  en tres dimensiones [80, 81].

La métrica Atiyah-Hitchin (A-H) fue obtenida en 1985 por MF Atiyah y NJ Hitchin en su estudio del espacio de configuración  $M_2^0$  de dos monopolos magnéticos  $SU(2)$  que interactúan con el centro fijo [62]. Es una métrica hyper-Kähler, o (que es lo mismo en cuatro dimensiones) una solución auto-dual de las ecuaciones de Einstein [82], con un grupo de isometrías  $SU(2)$  tal que ninguno de sus vectores de Killing tiene una derivada covariante auto-dual [79].

La importancia de la métrica Atiyah-Hitchin es que surge como una métrica natural en el espacio de parámetros de monopolos magnéticos no-abelianos de carga 2 con grupo de simetría  $SU(2)$  y sus geodésicas describen la dispersión de los monopolos a baja energía [65].

Por otro lado es bien sabido que la primera o de manera equivalente la segunda ecuación de heavenly describe la métrica general de un espacio auto-dual en el vacío [83] y además estas ecuaciones son integrables por el método de twistores [72, 84].

En 1976 Robinson et.al [85] escribieron las ecuaciones de Einstein en el vacío en términos de un espacio-tiempo complejo obteniendo como resultado una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden para una función bajo la única suposición de que la parte anti-auto-dual del tensor Weyl era algebraicamente especial. La ecuación obtenida se denomina ecuación hiper-heavenly; en cierto sentido, puede considerarse como una deformación de la segunda ecuación de heavenly.

Muchas soluciones interesantes de la ecuación hiper-heavenly son conocidas [86, 87] pero estamos lejos de comprender todo el misterio de la ecuación hiper-heavenly.

Por lo tanto, parece ser muy interesante considerar deformaciones integrables de la ecuación de heavenly. Ahora, como el álgebra de Moyal parece ser una deformación natural del álgebra  $sdiff(\mathcal{M}^2)$ , es casi obvio que uno está interesado en la deformación Moyal de la ecuación de heavenly. El caso de la primera ecuación de heavenly fue estudiado por Strachan [88] y [89].

En el trabajo de Strachan [90], se desarrolló una deformación de ecuaciones diferenciales basada en un producto-\* asociativo junto con sus aplicaciones a la teoría de sistemas integrables. En dos dimensiones los campos vectoriales del Hamiltoniano modelan el álgebra de un operador pseudo-diferencial, como el usado en sistemas integrables. En este trabajo se estudiaron varios ejemplos de sistemas integrables multidimensionales, por ejemplo, se estudió la deformación integrable de las ecuaciones anti-auto-duales en el vacío de Einstein, la jerarquía KP (the KP hierarchy) y la jerarquía de Toda (the Toda hierarchy). Todos estos sistemas pueden ser escritos en términos de una 2-forma  $\Omega$ , la cual satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} d\Omega &= 0, \\ \Omega \wedge \Omega &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones codifican las condiciones de integrabilidad de estos sistemas en una manera muy elegante. Como caso particular de un sistema integrable estamos interesados en el caso de una deformación integrable de las ecuaciones auto-duales en el vacío de Einstein.

La idea central de este trabajo es desarrollar una manera de encontrar una deformación del potencial de Kähler  $\hat{\Omega}$  basado en un producto-\* asociativo y sus aplicaciones a la teoría de sistemas integrables. El caso del potencial de Kähler no-deformado  $\Omega$  asociado a la métrica de Atiyah-Hitchin ha sido derivado por Olivier [91], quien siguió una simetría basada en los resultados de Boyer-Finley [78]. En este trabajo construiremos un potencial deformado  $\hat{\Omega}$  de tal manera que deberá compartir las mismas características y propiedades del caso no-deformado  $\Omega$ .

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: En la sección 8.2 analizaremos la deformación no conmutativa (NC) de la primera ecuación de heavenly. En la sección 8.2 reescribiremos esta deformación usando el producto Moyal. En la sección 8.3 estudiaremos las ecuaciones anti-auto-duales en el vacío de Einstein desde el punto de vista de la geometría de sistemas integrables y su contraparte no-conmutativa. Este espacio-tiempo está regido por el comportamiento de una métrica compleja 4-dimensional con signatura  $(+, +, +, +)$  y que tiene la propiedad de ser una variedad tipo-Kähler, es decir, tiene la propiedad de poder ser escrita en términos de una función escalar simple  $\Omega$  llamada potencial de Kähler. Las condiciones de curvatura y el potencial de Kähler están regidas por la primera ecuación de Plebanski también conocida como la primera ecuación de Heavenly. En esta sección revisaremos algunas propiedades de una variedad cuasi-compleja; adicionalmente impondremos las mismas propiedades para el espacio-tiempo tipo-Kähler deformado.

En la sección 8.4 se estudiará la deformación usual (la más simple, la estándar) para la gravedad de Einstein. Con esto podemos reescribir el potencial deformado  $\hat{\Omega}$  en términos de un sistema de campos locales, es decir, en términos del vierbein deformado  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$ .

En la sección 8.5 estudiaremos el caso de la variedad de Kähler deformada a primer orden en el parámetro de no-conmutatividad  $\theta$ , donde integraremos el tensor métrico deformado para obtener explícitamente el potencial de Kähler a primer orden.

En la sección 8.6.1 impondremos la simetría rotacional de Killing para el potencial deformado:  $\hat{\Omega} \equiv \hat{\Omega}(r, q, \bar{q})$  con  $r = p\bar{p}$ . La conexión con el espacio-tiempo de A-H en coordenadas complejas

se discutirá en la sub-sección 8.6.3. Finalmente terminaremos con nuestras conclusiones. En este capítulo se asumirá un espacio-tiempo complexificado 4-dimensional con signatura  $\{+, +, +, +\}$  a menos que se indique lo contrario. Adicionalmente  $\mathbb{C}^4$  estará parametrizado por la variables  $x^\mu = \{p, q, \bar{p}, \bar{q}\}$ .

## 8.2. Deformación Moyal de la primera ecuación de heavenly

Como es bien sabido la primera ecuación o de manera equivalente la segunda ecuación de heavenly describen de manera general a la métrica de un espacio-tiempo auto-dual en el vacío [83] y adicionalmente estas ecuaciones son integrables por métodos de twistores [72, 84]. Plebanski [83] mostró que métricas complejas con tensor de Riemann auto-dual, a las cuales nos referimos como métricas auto-duales, pueden ser descritas en términos de una función  $\Omega$  que es conocida como el potencial de Kähler y que además satisface la primera ecuación de Plebanski

$$\{\Omega_p, \Omega_q\}_{PB} = \Omega_{p\bar{p}}\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}\Omega_{q\bar{p}} = 1, \quad (8.2.1)$$

donde  $\Omega$  depende de las coordenadas espacio-temporales  $(p, q, \bar{p}, \bar{q})$ ; esta función da una expresión local de los espacios auto-duales en el vacío de Einstein.

Ahora bien, la manera en que procederemos para hacer la deformación no-conmutativa de la primera ecuación de heavenly es siguiendo la idea de Strachan, es decir, Strachan sugirió reemplazar el corchete de Poisson [88]

$$\{F, G\}_{PB} = \frac{\partial F}{\partial \bar{p}} \frac{\partial G}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} \frac{\partial G}{\partial \bar{p}}$$

por el corchete de Moyal. El corchete de Moyal lo denotaremos por  $\{\cdot, \cdot\}_{MB}$ , el cual está definido de la siguiente manera

$$\{F, G\}_{MB} := \frac{1}{i\theta} (F * G - G * F), \quad (8.2.2)$$

donde el producto-\* está definido por

$$f * g = f \exp\left(\frac{i\theta}{2} \overleftrightarrow{\mathcal{P}}\right) g, \quad (8.2.3)$$

con  $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}$  el operador de Poisson definido por

$$\overleftrightarrow{\mathcal{P}} := \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \bar{p}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \bar{q}} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \bar{q}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \bar{p}},$$

el cual actúa de acuerdo a la regla

$$f \overleftrightarrow{\mathcal{P}} g := \frac{\partial f}{\partial \bar{p}} \frac{\partial g}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} \frac{\partial g}{\partial \bar{p}} := \{f, g\}_{PB}.$$

De manera equivalente podemos escribir esta expresión como

$$f \overleftrightarrow{\mathcal{P}} g := \{f, g\}_{PB} = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x),$$

donde  $\epsilon^{\mu\nu} = \delta_{\bar{i}}^{\mu} \delta_{\bar{j}}^{\nu} \epsilon^{\bar{i}\bar{j}1}$  y los elementos distintos de cero del pseudotensor de Levi-Civita son  $\epsilon^{\bar{p}\bar{q}} = -\epsilon^{\bar{q}\bar{p}} = 1$ . Además, recordemos que el producto Moyal (8.2.3) tiene la propiedad

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} f \star g = f g,$$

es decir recuperamos el caso conmutativo cuando  $\theta \rightarrow 0$ . Usando la definición del producto- $\star$  (8.2.3) en la definición de corchete de Moyal podemos escribir el corchete de la siguiente manera

$$\{f, g\}_M := \frac{2}{\theta} f \sin\left(\frac{i\theta}{2} \overleftrightarrow{\mathcal{P}}\right) g. \quad (8.2.4)$$

Por lo tanto podemos inferir de esta expresión que en el límite  $\theta \rightarrow 0$  recuperamos el límite conmutativo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \{\cdot, \cdot\}_M = \{\cdot, \cdot\}_P,$$

es decir, obtenemos el corchete de Poisson. Entonces el álgebra de Moyal es una deformación del álgebra de Poisson. Por otro lado, usando la serie de Taylor del  $\sin \alpha$  podemos escribir la expresión (8.2.4) de la siguiente manera

$$\{F, G\}_M = \sum_s \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2s} (F \overleftrightarrow{\mathcal{P}}^{2s+1} G). \quad (8.2.5)$$

Ahora siguiendo los trabajos de Strachan [88] y Plebansky [92], presentaremos un método iterativo para construir un conjunto de ecuaciones diferenciales para deformación Moyal de la primera ecuación de heavenly.

En [88] se construyó una solución perturbativa en potencias del parámetro de no-conmutatividad  $\theta$  para el potencial deformado  $\widehat{\Omega}$ , el cual se puede escribir de la siguiente manera

$$\widehat{\Omega} = \Omega + \sum_{n=1}^{\infty} \Omega^{(n)} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{(n)} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8.2.6)$$

donde  $\Omega$  corresponde a la perturbación a orden cero, esto es  $\Omega = \Omega^{(0)}$ . Insertando esta expresión en una deformación integrable de la ecuación de Plebanski (primera ecuación de heavenly)

$$\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{MB} = 1, \quad (8.2.7)$$

y después de factorizar los términos que dependen de  $\frac{\theta}{2}$  obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{MB} = -2i \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2s+m+n} (\partial_p \Omega^{(m)} \star^{2s+1} \partial_q \Omega^{(n)}),$$

donde el producto  $\star^{2s+1}$  está dado por<sup>2</sup>

$$f(x) \star^r g(x) = \frac{1}{r!} \left(\frac{i}{2}\right)^r \epsilon^{\mu_1 \nu_1} \dots \epsilon^{\mu_r \nu_r} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_r} g(x), \quad (8.2.8)$$

<sup>1</sup>Recordemos que la convención que estamos usando es  $\mu, \nu = \bar{i}, j$ , donde denotamos por  $i, j = 1, 2$  las coordenadas holomorficas y las no-holomorficas por  $\bar{i}, \bar{j} = 1, 2$ .

<sup>2</sup> La convención que se está usando aquí para el producto- $\star$ , no depende del parámetro constante  $\theta$ .

donde los elementos distintos de cero del pseudotensor de Levi-Civita son  $\epsilon^{\bar{p}\bar{q}} = -\epsilon^{\bar{q}\bar{p}} = 1$  y  $\epsilon^{\mu\nu} = 0$  en cualquier otro caso.

$$\theta^{\mu\nu} = \theta\epsilon^{\mu\nu} = \theta\delta_i^\mu\delta_j^\nu\epsilon^{\bar{i}\bar{j}} = \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.2.9)$$

Ahora definimos  $2s+m+n =: r$ , es decir, estamos eligiendo (fijando) el orden en de la perturbación  $(\theta/2)^r$ . Por lo tanto podemos escribir el corchete  $\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{MB}$  de la siguiente manera

$$\{\Omega_p, \Omega_q\}_{MB} = - \sum_{r=0}^{\infty} 2i \left(\frac{\theta}{2}\right)^r \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{r-2s} \left( \partial_p \Omega^{(m)} \star^{2s+1} \partial_q \Omega^{(r-m-2s)} \right) = 1, \quad (8.2.10)$$

donde  $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  denota el entero más cercano a la fracción  $\frac{r}{2}$ . Por lo tanto para la perturbación a orden  $r = 0$  obtenemos

$$\Omega_{p\bar{p}}\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}\Omega_{q\bar{p}} = 1,$$

que corresponde a la primera ecuación de heavenly como era de esperarse<sup>3</sup>. De manera general podemos escribir la ecuación (8.2.10) para  $r \geq 1$  como

$$\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{r-2s} \left( \partial_p \Omega^{(m)} \star^{2s+1} \partial_q \Omega^{(r-m-2s)} \right) = 0. \quad (8.2.11)$$

Ahora consideremos el caso para el orden  $r = 1$  en la perturbación del parámetro  $\theta/2$

$$\Omega_{p\bar{p}}\Omega_{q\bar{q}}^{(1)} + \Omega_{p\bar{p}}^{(1)}\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}\Omega_{q\bar{p}}^{(1)} - \Omega_{p\bar{q}}^{(1)}\Omega_{q\bar{p}} = 0. \quad (8.2.12)$$

Por lo tanto, dada la perturbación a orden cero  $\Omega = \Omega^{(0)}$  la ecuación (8.2.12) es una ecuación diferencial parcial lineal en  $\Omega^{(1)}$ . Sin perdida de generalidad se puede obtener la expresión para cualquier orden en la perturbación asociada a la deformación NC de la primera de la ecuación de heavenly (8.2.7).

### 8.3. Sistemas Integrables

En el trabajo de Strachan [90], se estudiaron algunos casos de sistemas integrables multidimensionales en los cuales se asumió una variedad simpléctica con algún producto- $\star$  asociado. Todos estos sistemas tienen la característica de poder ser escritos en términos de una 2-forma  $\Omega$ , la cual satisface las siguientes ecuaciones

$$d\Omega = 0, \quad (8.3.1)$$

$$\Omega \wedge \Omega = 0. \quad (8.3.2)$$

<sup>3</sup> Se está usando la convención para denotar la perturbación a orden cero como  $\Omega = \Omega^{(0)}$

En estas ecuaciones se codifican las condiciones de integrabilidad de estos sistemas de una manera geométrica más elegante. Como caso particular de sistemas integrables en este trabajo nos enfocaremos en el caso de deformaciones de las ecuaciones auto-duales en el vacío de las ecuaciones de Einstein. Como lo discutimos anteriormente las ecuaciones auto-duales de Einstein en el vacío son equivalentes a un espacio-tiempo Kähler.

### 8.3.1. Las ecuaciones auto-duales de Einstein en el vacío

En esta sección discutiremos de manera muy breve las propiedades de las ecuaciones de Einstein auto-duales en el vacío y su relación con un espacio tiempo tipo-Kähler.

Para esto, consideremos una variedad  $(\mathcal{M}, g)$  4-dimensional con una métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\phi^\mu d\phi^\nu, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4,$$

equipada con una derivada covariante Levi-Civita sin torsión, es decir  $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ . Localmente es posible introducir coordenadas complejas

$$\phi^\mu = (\tau^i, \tau^{\bar{i}}), \quad i, \bar{i} = 1, 2,$$

de tal manera que la métrica se puede escribir de la siguiente manera <sup>4</sup>

$$ds^2 = g_{i\bar{j}} d\tau^i d\tau^{\bar{j}} + g_{\bar{i}j} d\tau^{\bar{i}} d\tau^j = 2g_{i\bar{j}} d\tau^i d\tau^{\bar{j}}. \quad (8.3.3)$$

Es importante notar que este elemento de línea es real en sus coordenadas originales, y como consecuencia

$$g_{i\bar{j}} = g_{j\bar{i}}^*, \quad g_{ij} = g_{\bar{j}\bar{i}}^*.$$

Por definición de una variedad de Kähler, existe una función llamada potencial de Kähler  $\Omega$  la cual está relacionada con el tensor métrico como  $g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \Omega = \partial_{i\bar{j}} \Omega = \Omega_{i\bar{j}}$ . La definición (8.3.3) implica que las componentes del tensor  $g_{ij}$  y sus complejas conjugas se anulan. Por lo tanto, usando estos resultados se puede inferir la siguiente relación entre el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y el potencial de Kähler  $\Omega$

$$g_{\mu\nu} = (\delta_\mu^i \delta_\nu^{\bar{j}} + \delta_\nu^{\bar{i}} \delta_\mu^j) \Omega_{i\bar{j}}, \quad (8.3.4)$$

o de manera equivalente, lo podemos escribir en términos de la siguiente matriz

$$g_{\mu\nu} = \delta_\mu^i \delta_\nu^{\bar{j}} \Omega_{i\bar{j}} + \delta_\nu^{\bar{i}} \delta_\mu^j \Omega_{j\bar{i}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{i\bar{j}} \\ \Omega_{j\bar{i}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Los índices  $i, \bar{i}$  son llamados holomorficos y no-holomorficos, además la convención es escribir el índice holomorfo primero.

Las ecuaciones del vacío anti-auto-dual están regidas por el comportamiento de una métrica compleja 4-dimensional con signatura  $(+, +, +, +)$  cuyo tensor de Ricci es cero y el tensor de Weyl es anti-auto-dual. Dado que estas condiciones de curvatura son invariantes bajo cambios de coordenadas existen muchas maneras de escribir estas ecuaciones. Una forma muy particular de escribir estas ecuaciones es usando el hecho de que tales métricas son automáticamente Kähler, es decir, pueden ser escritas en términos de una función escalar  $\Omega$  conocida como el potencial de

<sup>4</sup>La convención en el ordenamiento de los índices que primero los índices holomorficos y a la derecha los índices no-holomorficos

Kähler. Por lo tanto, la condición de curvatura conduce a una ecuación que está gobernada por el potencial de Kähler  $\Omega$  que es conocida como la primera ecuación de Plebanski, primera ecuación de heavenly o como la ecuación de Monge-Ampère [83]:

$$\Omega_{p\bar{p}}\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}\Omega_{q\bar{p}} = 1. \quad (8.3.5)$$

La correspondiente métrica anti-auto-dual en el vacío está dada por

$$ds^2 = 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^i \partial \bar{x}^j} dx^i d\bar{x}^j, \quad x^i = p, q, \quad x^{\bar{j}} = \bar{p}, \bar{q}.$$

En el trabajo de Strachan [90], se discute la deformación NC de las condiciones de integrabilidad (8.3.1), (8.3.2) para algunos sistemas integrables. En este trabajo se discute el caso particular de las ecuaciones auto-duales en el vacío de Einstein en donde se obtuvo que estas propiedades de integrabilidad se siguen satisfaciendo en el caso no-conmutativo, es decir, bajo el reemplazamiento del corchete de Poisson por el corchete de Moyal.

Sea  $\Omega$  la 2-forma deformada definida de la siguiente manera

$$\Omega := dp \wedge dq + \lambda(\widehat{\Omega}_{p\bar{p}} dp \wedge d\bar{p} + \widehat{\Omega}_{p\bar{q}} dp \wedge d\bar{q} + \widehat{\Omega}_{q\bar{p}} dq \wedge d\bar{p} + \widehat{\Omega}_{q\bar{q}} dq \wedge d\bar{q}) + \lambda^2 d\bar{p} \wedge d\bar{q}, \quad (8.3.6)$$

la cual satisface la condición  $d\Omega = 0$  si y sólo si

$$\partial_k \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \partial_i \widehat{\Omega}_{k\bar{j}}, \quad \partial_{\bar{k}} \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \partial_{\bar{j}} \widehat{\Omega}_{i\bar{k}}$$

y

$$\widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \widehat{\Omega}_{j\bar{i}}^\dagger, \quad \widehat{\Omega}_{i j} = \widehat{\Omega}_{i\bar{j}}^\dagger = 0,$$

es decir, es posible escribir  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \widehat{\Omega}$ , donde  $\widehat{\Omega}$  es el potencial de Kähler no-conmutativo. Adicionalmente, la segunda condición de integrabilidad podemos reescribirla de la siguiente manera

$$\Omega \wedge \Omega = \lambda^2 ([\widehat{\Omega}_p * \widehat{\Omega}_q - \widehat{\Omega}_q * \widehat{\Omega}_p] / \theta - 1) dp \wedge d\bar{p} \wedge dq \wedge d\bar{q},$$

donde el término entre corchetes es justamente la definición de corchete de Moyal dada en (8.2.2). Entonces podemos escribir esta ecuación de manera más simple

$$\begin{aligned} \Omega \wedge \Omega &= \lambda^2 (\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{*M} - 1) dp \wedge d\bar{p} \wedge dq \wedge d\bar{q} \\ &= 0, \end{aligned}$$

la cual se satisface debido a la virtud de la deformación empleada, es decir, esta ecuación se satisface si  $\Omega$  satisface la ecuación de Plebanski deformada (8.2.7). Este resultado implica que la deformación de Moyal aparece como una manera natural de hacer una deformación integrable de la primera ecuación de la ecuación de heavenly o primera ecuación de Plebanski. Entonces el par de Lax, y por lo tanto la integrabilidad de este sistema deformado está codificada en las ecuaciones (8.3.1), (8.3.2).

Como lo discutimos en la sección 8.2, estas condiciones de integrabilidad son compatibles con un desarrollo perturbativo en potencias del parámetro de no-conmutatividad  $\theta$

$$\widehat{\Omega} = \Omega + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \Omega^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \Omega^{(n)}, \quad (8.3.7)$$

donde la ecuación de Plebanski (8.2.1) se obtiene para la perturbación a orden cero denotada por  $\Omega = \Omega^{(0)}$  y una infinidad de ecuaciones lineales se obtienen para las perturbaciones  $\Omega^{(n)}$  con  $n > 0$  dadas en (8.2.11). Adicionalmente, sabemos que en el caso conmutativo existe una relación cercana entre el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y el potencial de Kähler  $\Omega$  dado por (8.3.4). Sin pérdida de generalidad este resultado se puede generalizar en el caso NC, es decir, las perturbaciones del tensor métrico  $g_{\mu\nu}^{(n)}$  se pueden escribir de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu}^{(n)} = (\delta_\mu^i \delta_\nu^{\bar{j}} + \delta_\nu^i \delta_\mu^{\bar{j}}) \Omega_{i\bar{j}}^{(n)}, \quad (8.3.8)$$

donde hemos usado que  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \widehat{\Omega}$  junto con el desarrollo perturbativo del potencial de Kähler (8.3.7).

### 8.3.2. Propiedades del potencial de Kähler deformado $\widehat{\Omega}(\theta)$

Como se había mencionado anteriormente, el propósito de este trabajo es construir una deformación NC de una variedad tipo Kähler. Este tipo de espacio-tiempo está caracterizado por tener una métrica que se puede derivar a partir de una función escalar  $\Omega$  conocida como el potencial de Kähler. En el contexto no-conmutativo hemos considerado la existencia de un potencial de Kähler deformado  $\widehat{\Omega}(\theta)$  el cual admite el desarrollo perturbativo (8.3.7). Este potencial deformado  $\widehat{\Omega}(\theta)$  debe compartir las mismas propiedades y características que las del sistema no-deformado:

1. Debe de existir una 2-forma  $\mathbf{K} := i\widehat{g}_{i\bar{j}} dx^i \wedge d\bar{x}^{\bar{j}}$  cerrada, es decir,  $d\mathbf{K} = 0$ . Esta condición implica que  $\widehat{g}_{i\bar{j}} := \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \widehat{\Omega}$ , donde  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = 0 = \widehat{\Omega}_{\bar{i}j}$ .
2. Los coeficientes métricos  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  deben de ser reales (hermitianos).
3. El determinante de la métrica debe de ser igual a uno, es decir,  $\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = 1$ .

La primera condición es equivalente a la 2-forma  $\Omega$  definida en (8.3.6), por lo tanto la condición  $d\mathbf{K} = 0$  se satisface siempre y cuando las perturbaciones satisfagan la siguientes condiciones

$$\partial_k \Omega_{i\bar{j}}^{(n)} = 0 = \partial_{\bar{k}} \Omega_{i\bar{j}}^{(n)}. \quad (8.3.9)$$

Esta restricción tiene consecuencias importantes en las ecuaciones deformadas para  $\Omega^{(n)}$  con  $n > 0$  dadas en (8.2.11) como lo discutiremos a continuación.

En la sección 8.2 obtuvimos de manera perturbativa una relación iterativa para las deformaciones de ecuación de Plebanski (8.2.11), la cual se debe de satisfacer para un potencial de Kähler. Adicionalmente tenemos que el potencial de Kähler a orden  $n$  debe satisfacer la condición  $\partial_\mu \Omega_{i\bar{j}}^{(m)} = 0$  para  $\mu = \{x^i, x^{\bar{j}}\}$ . Por lo tanto, tenemos que restringir la ecuación (8.2.11), la cual es compatible con (8.3.9) si fijamos el valor de  $s = 0$ :

$$\sum_{m=0}^r \left( \partial_p \Omega^{(m)} \star^1 \partial_q \Omega^{(r-m)} \right) = 0.$$

Usando la definición del producto- $\star$  (8.2.8), la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$\sum_{m=0}^r \epsilon^{\bar{i}j} \Omega_{p\bar{i}}^{(m)} \Omega_{q\bar{j}}^{(r-m)} = 0. \quad (8.3.10)$$

Este resultado se puede escribir en términos del corchete de Poisson como

$$\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{PB} = 1.$$

Es conveniente hacer notar que las propiedades de un espacio-tiempo tipo Kähler nos ha llevado a simplificar la condición de curvatura, esto es,  $\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{MB} \rightarrow \{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{PB} = 1$ .

La segunda condición implica que el potencial de Kähler debe de ser hermitiano, por lo tanto cada perturbación  $\Omega^{(n)}$  debe de ser hermitiana. Entonces la condición de hermiticidad implica

$$\Omega_{i\bar{j}}^{(n)} = \Omega_{j\bar{i}}^{\dagger(n)}, \quad \Omega_{ij}^{(n)} = \Omega_{\bar{i}\bar{j}}^{\dagger(n)} = 0,$$

debido a que se ha asumido que el potencial deformado es tipo Kähler.

La tercera propiedad se puede inferir de la condición de curvatura (8.2.1), donde la primera ecuación de heavenly deformada puede ser escrita como un simple determinante. En el caso no-deformado de una variedad de Kähler el determinante de la métrica es igual a uno. En el caso deformado el tensor métrico  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  debe de satisfacer las mismas propiedades que el caso no-deformado. Por definición el determinante del tensor métrico  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  se puede escribir como

$$\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} := \widehat{\Omega}_{p\bar{p}} \widehat{\Omega}_{q\bar{q}} - \widehat{\Omega}_{p\bar{q}} \widehat{\Omega}_{q\bar{p}} = 1,$$

donde esta ecuación se puede escribir por simplicidad como  $\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \epsilon^{\bar{k}\bar{l}} \widehat{\Omega}_{p\bar{k}} \widehat{\Omega}_{q\bar{l}}$ . Usando el desarrollo en serie (8.2.6) para el potencial  $\widehat{\Omega}$  obtenemos

$$\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \epsilon^{\bar{k}\bar{l}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \theta^{m+n} \Omega_{p\bar{k}}^{(m)} \Omega_{q\bar{l}}^{(n)}. \quad (8.3.11)$$

Ahora igualando los coeficientes de la misma potencia en  $\theta$  podemos obtener las contribuciones del  $\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  orden por orden

$$\left\{ \det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} \right\}^{(r)} = \epsilon^{\bar{k}\bar{l}} \theta^r \sum_{m=0}^r \Omega_{p\bar{k}}^{(m)} \Omega_{q\bar{l}}^{(r-m)}.$$

Usando este resultado es fácil mostrar que la expresión (8.3.11) se puede escribir

$$\det \widehat{\Omega}_{k\bar{l}} = \sum_{s=0}^r \sum_{m=0}^s \epsilon^{\bar{j}\bar{j}} \theta^s \Omega_{p\bar{i}}^{(m)} \Omega_{q\bar{j}}^{(s-m)} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,n=1 \\ m+n>r}}^r \epsilon^{\bar{j}\bar{j}} \theta^{m+n} \Omega_{p\bar{i}}^{(m)} \Omega_{q\bar{j}}^{(n)}, \quad (8.3.12)$$

donde hemos escrito el determinante en dos partes, en la primera parte escribimos todas las perturbaciones del determinante hasta orden  $r$  en el parámetro  $\theta$ ; en el segundo término están incluidos todas las contribuciones del determinante para ordenes mayores a  $r$ . Usando el resultado de la ecuación (8.2.7) es fácil mostrar que el  $\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  puede escribirse como

$$\det \widehat{\Omega}_{k\bar{l}} = \{\Omega_p, \Omega_q\}_{PB} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,n=1 \\ m+n>r}}^r \epsilon^{\bar{j}\bar{j}} \theta^{m+n} \Omega_{p\bar{i}}^{(m)} \Omega_{q\bar{j}}^{(n)}.$$

El primer término es la deformación de la primera ecuación de heavenly, la cual es igual a uno. Por lo tanto podemos concluir que el segundo término debe ser igual a cero

$$\sum_{\substack{m,n=1 \\ m+n>r}}^r \epsilon^{\bar{i}\bar{j}} \theta^{m+n} \Omega_{p\bar{i}}^{(m)} \Omega_{q\bar{j}}^{(n)} = 0. \quad (8.3.13)$$

En este término están codificadas todas las combinaciones del orden  $\theta^s$  de tal manera que  $s > r$ .

## 8.4. Gravedad No-Conmutativa

Hasta aquí hemos estudiado la deformación no-conmutativa del potencial de Kähler, donde hemos usado el producto Moyal para deformar la primera ecuación de heavenly, la cual es conocida como la condición de curvatura en este espacio-tiempo. La manera en como se realizó la deformación no-conmutativa (NC) es suponiendo la existencia de una potencial de Kähler deformado  $\hat{\Omega}$  de tal manera que se preservara el carácter de ser una variedad tipo Kähler después de la deformación. Para esto se procedió mediante un desarrollo perturbativo en el parámetro de no-conmutatividad  $\theta$  obteniendo que el tensor métrico asociado a la deformación NC está relacionado con las perturbaciones del potencial de Kähler  $\Omega_{i\bar{j}}^{(n)}$  de acuerdo con (8.3.8). Estas deformaciones  $\Omega_{i\bar{j}}^{(n)}$  son funciones desconocidas las cuales satisfacen sus respectivas ecuaciones diferenciales obtenidas en (8.2.11). El propósito de este trabajo es dar un Ansatz para el potencial de Kähler deformado (8.3.7). Como lo discutiremos en esta sección, las deformaciones de la métrica  $\Omega_{i\bar{j}}^{(n)}$  pueden ser escritas en términos de un sistema de campos locales o vierbein  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$  que después de hacer una serie de integraciones permite obtener la forma del potencial de Kähler deformado  $\hat{\Omega}$ .

### 8.4.1. Campos de norma deformados

La construcción de una deformación no-conmutativa coherente de la Relatividad General de Einstein ha sido objeto de interés desde hace algún tiempo. Siguiendo el procedimiento estándar para la construcción de deformaciones no-conmutativas de teorías escalares de norma [93, 94], una deformación no-conmutativa de la acción de Einstein–Hilbert ha sido obtenida reemplazando el producto ordinario por el producto Moyal no-conmutativo (8.2.3). En lo que sigue asumiremos entonces que la estructura no-conmutativa del espacio-tiempo está determinada por la condición

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu},$$

donde  $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$  son parámetros constantes.

Siguiendo el procedimiento estándar podemos introducir una métrica deformada en términos del sistema local de campos  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$  o vierbein de la siguiente manera

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\hat{e}_\mu^a * \hat{e}_\nu^b + \hat{e}_\nu^a * \hat{e}_\mu^b) \eta_{ab}, \quad (8.4.1)$$

donde  $\eta_{ab}$  es una métrica simétrica independiente de las coordenadas  $x^\mu$ . Este tensor métrico es simétrico por construcción y real dado que el vierbein deformado  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$  y el vierbein no-deformado  $e_\mu^a(x)$  son campos vectoriales reales<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Sin pérdida de generalidad este tensor métrico es real por construcción incluso cuando el vierbein deformado  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$  sea una cantidad compleja.

En el límite cuando  $\theta \rightarrow 0$  identificamos el tensor métrico (8.4.1) con la métrica usual, es decir, con la métrica no-deformada

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x, \theta)|_{\theta=0} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (8.4.2)$$

Para propósitos de este trabajo buscamos construir un espacio-tiempo deformado usando el producto Moyal, por lo tanto un vierbein deformado y la métrica deformada deben compartir las mismas propiedades que las del espacio-tiempo no-deformado como se discutió en la sub-sección 8.3.2.

Nuevamente consideremos un desarrollo perturbativo para el vierbein  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$  el cual está sujeto a las condiciones de realidad<sup>6</sup>

$$\hat{e}_\mu^b = e_\mu^b + \theta^{\kappa\lambda} e_{\mu\kappa\lambda}^b + \dots + \theta^{\kappa_1\lambda_1} \dots \theta^{\kappa_n\lambda_n} e_{\mu\kappa_1\lambda_1 \dots \kappa_n\lambda_n}^b. \quad (8.4.3)$$

Usando este desarrollo perturbativo en (8.4.1) junto con la definición del producto Moyal (8.2.3) podemos escribir el tensor métrico hasta primer orden de la siguiente manera

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \theta^{\kappa\lambda} g_{\mu\nu\kappa\lambda}^{(1)} + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (8.4.4)$$

Con el fin de hacer compatible la deformación no-conmutativa de la métrica tipo Kähler dada por (8.3.8) con la deformación (8.4.4), asumiremos la siguiente descomposición del vierbein a primer orden

$$\theta^{\kappa\lambda} e_{\mu\kappa\lambda}^b = \theta^{\kappa\lambda} \mathcal{P}_{\kappa\lambda} e_\mu^{(1)b},$$

donde  $\mathcal{P}_{\kappa\lambda}$  es un tensor antisimétrico que por el momento es una cantidad desconocida. Asumiendo una descomposición similar orden por orden podemos generalizar este resultado para el  $n$ -ésimo orden

$$\theta^{\kappa_1\lambda_1} \dots \theta^{\kappa_n\lambda_n} e_{\mu\kappa_1\lambda_1 \dots \kappa_n\lambda_n}^b = (\theta^{\kappa\lambda} \mathcal{P}_{\kappa\lambda})^n e_\mu^{(n)b}.$$

Elegiremos la forma de  $\mathcal{P}_{\kappa\lambda}$  de tal manera que el vierbein dado en (8.4.3) se pueda escribir de la siguiente manera

$$\hat{e}_\mu^b = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n e_\mu^{(n)b} = e_\mu^b + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n e_\mu^{(n)b}, \quad (8.4.5)$$

donde el orden cero del vierbein lo denotamos como  $e_\mu^{(0)b} = e_\mu^b$ . Este resultado implica que  $\theta^{\kappa\lambda} \mathcal{P}_{\kappa\lambda} = \theta$  y se satisface si definimos  $\mathcal{P}_{\kappa\lambda} := \partial_\kappa \Omega_p \partial_\lambda \Omega_q$ , donde  $\theta^{\kappa\lambda}$  está dado por (8.2.9). Usando esta forma para el vierbein el tensor métrico (8.4.4) se puede escribir de una forma muy simple

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n g_{\mu\nu}^{(n)} = g_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n g_{\mu\nu}^{(n)},$$

donde  $g_{\mu\nu}^{(n)}$  son campos vectoriales desconocidos para  $n > 0$  y el orden cero lo denotamos por  $g_{\mu\nu}^{(0)} = g_{\mu\nu}$ . Para hacer compatible esta deformación con una variedad deformada tipo-Kähler tenemos que imponer que  $\partial_\alpha g_{\mu\nu}^{(n)} = 0$ <sup>7</sup>. Por lo tanto, imponer esta condición sobre las perturbaciones  $g_{\mu\nu}^{(n)}$  implica

<sup>6</sup>En la sección 8.3.1se discuten las ecuaciones Einstein auto-duales en el vacío y sus relación con un espacio tiempo tipo-Kähler, en donde, se parte de un elemento de línea real, por lo tanto esto requiere que las perturbaciones del vierbein satisfagan las condición de hermiticidad  $e_{\mu\kappa_1\lambda_1 \dots \kappa_n\lambda_n}^b = \bar{e}_{\mu\kappa_1\lambda_1 \dots \kappa_n\lambda_n}^b$ .

<sup>7</sup>En la sección 8.3.2se discutió esta condición para deformación de un espacio-tiempo de Kähler, por lo tanto esto implica que no aparecerá explícitamente el producto-\* en la definición (8.4.1).

que el vierbein debe satisfacer  $\partial_\mu e_\nu^{(n)a} = 0$ , y la ecuación (8.4.1) se puede simplificar de la siguiente manera

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu^a \hat{e}_\nu^b \eta_{ab}. \quad (8.4.6)$$

Usando el desarrollo en serie de potencias  $\theta$  para el vierbein  $\hat{e}_\mu^a$  en (8.4.6) e igualando los coeficientes de la misma potencia de  $\theta$  obtenemos que las perturbaciones se pueden escribir en términos del vierbein  $e_\mu^{(n)a}$  de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu}^{(n)} = \theta^n \sum_{m=0}^n e_\mu^{(m)a} e_\nu^{(n-m)b} \eta_{ab}, \quad n = 0, 1, \dots$$

## 8.5. El potencial de Kähler deformado

De acuerdo con [83], la gravedad auto-dual de Einstein puede ser parametrizada en términos de cuatro coordenadas complejas  $x^\mu = \{p, q, \bar{p}, \bar{q}\}$ , asociadas a un espacio-tiempo que corresponde a una variedad de Kähler. La variedad tipo Kähler dada en (8.3.3) puede ser escrita en términos de un espacio-tiempo localmente plano  $\eta_{ab}$  y un vierbein  $e_\mu^a$  dado por

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_{p\bar{p}} & \Omega_{p\bar{q}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{q\bar{p}} & \Omega_{q\bar{q}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.5.1)$$

Como lo hemos discutido anteriormente, el propósito de esta sección es dar un procedimiento para construir un Ansatz para las deformaciones  $\Omega^{(n)}$  en términos del vierbein  $e_\mu^{(n)a}$  de tal manera que todas las propiedades dadas en la (sub)sección 8.3.2 se satisfagan. Las perturbaciones de la métrica deformada  $\Omega_{i\bar{j}}^{(n)}$  se pueden escribir en términos del vierbein deformado  $e_\mu^{(n)a}$  de acuerdo con

$$g_{\mu\nu}^{(n)} = \sum_{m=0}^n e_\mu^{(m)a} e_\nu^{(n-m)b} \eta_{ab} = (\delta_\mu^i \delta_\nu^{\bar{j}} + \delta_\nu^i \delta_\mu^{\bar{j}}) \Omega_{i\bar{j}}^{(n)}. \quad (8.5.2)$$

El Ansatz más simple para el vierbein  $e_\mu^{(n)a}$  que podemos construir de tal manera que el tensor métrico  $g_{\mu\nu}^{(n)}$  satisfaga las condiciones producto  $g_{i\bar{j}}^{(n)} = g_{\bar{i}j}^{(n)*} = 0$ , puede ser escrito de la siguiente manera

$$e_\mu^{(n)a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{\bar{p}}^{(n)1} & e_{\bar{q}}^{(n)1} \\ e_p^{(n)2} & e_q^{(n)2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{\bar{p}}^{(n)3} & e_{\bar{q}}^{(n)3} \\ e_p^{(n)4} & e_q^{(n)4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como se discutió previamente, el vierbein debe de satisfacer  $\partial_\mu e_\nu^{(n)a} = 0$ , por lo tanto asumiremos la siguiente dependencia para el vierbein

$$e_\mu^{(n+1)a} = e_\mu^{(n+1)a} \left( \alpha, \Omega_{p\bar{p}}^{(n)}, \Omega_{q\bar{q}}^{(n)}, \Omega_{p\bar{q}}^{(n)}, \Omega_{q\bar{p}}^{(n)} \right). \quad (8.5.3)$$

Es importante notar que la perturbación del potencial de Kähler deformado  $\Omega^{(n+1)}$  a orden  $n + 1$  dependerá explícitamente del vierbein a orden  $n$  y  $n + 1$ , es decir,  $e_\mu^{(n+1)a}$  y  $e_\mu^{(n)a}$ . Por lo tanto comenzaremos por analizar la deformación a primer orden. A partir de la ecuación (8.5.2) podemos escribir la siguiente ecuación para primer orden

$$\Omega_{i\bar{j}}^{(1)} = e_{(i}^{(1)a} e_{\bar{j})}^b \eta_{ab}. \quad (8.5.4)$$

Usando el Ansatz para el vierbein no-deformado  $e_\mu^a$  obtenido en (8.5.1) podemos escribir explícitamente la ecuación (8.5.4) como el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Omega_{q\bar{q}}^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)3} + e_q^{(1)2} \Omega_{p\bar{q}} + e_q^{(1)4} \Omega_{q\bar{q}}, \quad (8.5.5)$$

$$\Omega_{q\bar{p}}^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)3} + e_q^{(1)2} \Omega_{p\bar{p}} + e_q^{(1)4} \Omega_{q\bar{p}}, \quad (8.5.6)$$

$$\Omega_{p\bar{p}}^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)1} + e_p^{(1)2} \Omega_{p\bar{p}} + e_p^{(1)4} \Omega_{q\bar{p}}, \quad (8.5.7)$$

$$\Omega_{p\bar{q}}^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)1} + e_p^{(1)2} \Omega_{p\bar{q}} + e_p^{(1)4} \Omega_{q\bar{q}}. \quad (8.5.8)$$

Para obtener el potencial de Kähler a primer orden necesitamos resolver el sistema de ecuaciones (8.5.5)-(8.5.8). Para esto, comencemos por hacer una integración de las ecuaciones anteriores con respecto a las coordenadas anti-holomorficas  $x^{\bar{i}} = \{\bar{p}, \bar{q}\}$ , donde necesitaremos calcular un conjunto de integrales de la forma  $\int e_\alpha^{(1)A} \Omega_{\beta\mu} dx^\nu$ . Primero, podemos hacer una integración por partes con lo cual podemos obtener el siguiente resultado

$$\int e_\alpha^{(1)A} \Omega_{\beta\mu} dx^\nu = \begin{cases} \mu \neq \nu & e_\alpha^{(1)A} \Omega_{\beta\mu} x^\nu + C_i^{(1)} \\ \mu = \nu & e_\alpha^{(1)A} \Omega_\beta + C_i^{(1)} \end{cases}$$

donde hemos usado la propiedad del vierbein  $\partial_\mu e_\nu^{(1)a} = 0$  y del potencial de Kähler  $\partial_\alpha \Omega_{\mu\nu} = 0$ . Por lo tanto, después de hacer una integración por partes del sistema de ecuaciones (8.5.5)-(8.5.8) sobre las variables no-holomorficas  $x^{\bar{i}} = \{\bar{p}, \bar{q}\}$  podemos escribir

$$\Omega_q^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p + e_q^{(1)4} \Omega_q + C_1^{(1)}(p, q, \bar{p}) \quad (8.5.9)$$

$$\Omega_q^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p} + e_q^{(1)2} \Omega_p + e_q^{(1)4} \Omega_q + C_2^{(1)}(p, q, \bar{q}) \quad (8.5.10)$$

$$\Omega_p^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p} + e_p^{(1)2} \Omega_p + e_p^{(1)4} \Omega_q + C_3^{(1)}(p, q, \bar{q}) \quad (8.5.11)$$

$$\Omega_p^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q} + e_p^{(1)2} \Omega_p + e_p^{(1)4} \Omega_q + C_4^{(1)}(p, q, \bar{p}) \quad (8.5.12)$$

donde  $C_1^{(1)} = C_1^{(1)}(p, q, \bar{p})$ ,  $C_2^{(1)} = C_2^{(1)}(p, q, \bar{q})$ ,  $C_3^{(1)} = C_3^{(1)}(p, q, \bar{q})$  y  $C_4^{(1)} = C_4^{(1)}(p, q, \bar{p})$  son constantes de integración. Estas constantes de integración pueden ser determinadas si comparamos las ecuaciones (8.5.9)-(8.5.10) y (8.5.11)-(8.5.12), entonces podemos concluir que las constantes tienen la forma  $C_1^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p}$ ,  $C_2^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q}$ ,  $C_3^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q}$  y  $C_4^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p}$ . Por lo tanto, obtenemos solamente un sistema de dos ecuaciones diferenciales linealmente independientes

$$\Omega_q^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p + e_q^{(1)4} \Omega_q \quad (8.5.13)$$

$$\Omega_p^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q} + e_p^{(1)2} \Omega_p + e_p^{(1)4} \Omega_q. \quad (8.5.14)$$

Nuevamente hacemos una integración por partes del sistema de ecuaciones (8.5.13) y (8.5.14) pero ahora con respecto a las variables holomorficas  $p$  y  $q$  respectivamente obteniendo

$$\Omega^{(1)} = \left( e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p \right) q + e_q^{(1)4} \Omega + C_5^{(1)}(p, \bar{p}, \bar{q}) \quad (8.5.15)$$

$$\Omega^{(1)} = \left( e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q} + e_p^{(1)4} \Omega_q \right) p + e_p^{(1)2} \Omega + C_6^{(1)}(q, \bar{p}, \bar{q}). \quad (8.5.16)$$

Nuevamente comparando las ecuaciones (8.5.15) y (8.5.16) obtenemos que las constantes tienen la forma  $C_5^{(1)} = \left( e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q} + e_p^{(1)4} \Omega_q \right) p + e_p^{(1)2} \Omega$  y  $C_6^{(1)} = \left( e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p \right) q + e_q^{(1)4} \Omega$ . Por lo tanto, obtenemos que el potencial de Kähler a primer orden finalmente tiene la siguiente expresión

$$\Omega^{(1)} = \left( e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p \right) q + \left( e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q} + e_p^{(1)4} \Omega_q \right) p + \left( e_q^{(1)4} + e_p^{(1)2} \right) \Omega.$$

### 8.5.1. Soluciones para el potencial de Kähler a primer orden

Hasta el momento hemos obtenido la forma explícita de la perturbación a primer orden del potencial de Kähler, el cual depende explícitamente de las perturbaciones a primer orden del vierbein  $e_\alpha^{(1)A}$  las cuales siguen siendo incógnitas por determinar. En esta sección buscaremos algunas familias de soluciones para el vierbein que sean consistentes con las propiedades del potencial de Kähler.

Como caso particular, consideraremos el caso de la deformación del potencial de Kähler a primer orden. Como se discutió anteriormente, la condición de curvatura puede ser formulada como un simple determinante, es decir, el determinante de la nueva métrica (métrica efectiva, métrica deformada) debe de ser igual a uno, esto es

$$\det \hat{\Omega}_{i\bar{j}} = \hat{\Omega}_{p\bar{p}} \hat{\Omega}_{q\bar{q}} - \hat{\Omega}_{p\bar{q}} \hat{\Omega}_{q\bar{p}} = 1,$$

donde  $\hat{\Omega} = \Omega + \theta \Omega^{(1)}$ . Por lo tanto podemos obtener las siguientes tres ecuaciones

$$\Omega_{p\bar{p}} \Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}} \Omega_{q\bar{p}} = 1, \quad (8.5.17)$$

$$\Omega_{p\bar{p}} \Omega_{q\bar{q}}^{(1)} + \Omega_{p\bar{p}}^{(1)} \Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}} \Omega_{q\bar{p}}^{(1)} - \Omega_{p\bar{q}}^{(1)} \Omega_{q\bar{p}} = 0, \quad (8.5.18)$$

$$\Omega_{p\bar{p}}^{(1)} \Omega_{q\bar{q}}^{(1)} - \Omega_{p\bar{q}}^{(1)} \Omega_{q\bar{p}}^{(1)} = 0, \quad (8.5.19)$$

donde las ecuaciones (8.5.17) y (8.5.18) son la ecuación de Monge-Ampère a orden cero y a primer orden respectivamente. La tercera ecuación contiene términos de orden  $\theta^2$ , los cuales se deben de anular de acuerdo con (8.3.13).

Si sustituimos las componentes del tensor métrico (8.5.5)-(8.5.8) en la primera ecuación de heavenly a primer orden (8.5.18) obtenemos

$$e_q^{(1)4} + e_p^{(1)2} + e_{\bar{q}}^{(1)3} \Omega_{p\bar{p}} + e_{\bar{p}}^{(1)1} \Omega_{q\bar{q}} - e_{\bar{p}}^{(1)3} \Omega_{p\bar{q}} - e_{\bar{q}}^{(1)1} \Omega_{q\bar{p}} = 0. \quad (8.5.20)$$

Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar explícitamente la forma de vierbein  $e_\mu^{(1)a}$  de tal manera que la ecuación anterior se satisfaga sujeta a la restricción (8.5.19). Primero comencemos por buscar las posibles soluciones a la ecuación (8.5.19), para la cual es posible considerar dos casos, es decir, es fácil verificar que la ecuación se satisface si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones de proporcionalidad: Para el caso I

$$\Omega_{p\bar{p}}^{(1)} = C \Omega_{q\bar{p}}^{(1)}, \quad \Omega_{p\bar{q}}^{(1)} = C \Omega_{q\bar{q}}^{(1)}, \quad (8.5.21)$$

y para el caso II tenemos que

$$\Omega_{p\bar{p}}^{(1)} = C\Omega_{p\bar{q}}^{(1)}, \quad \Omega_{q\bar{p}}^{(1)} = C\Omega_{q\bar{q}}^{(1)}, \quad (8.5.22)$$

donde  $C$  es una constante de proporcionalidad arbitraria.

Ahora insertamos las ecuaciones (8.5.5)-(8.5.8) en las ecuaciones anteriores y obtenemos las siguientes relaciones entre el vierbein a primer orden  $e_\mu^{(1)a}$

$$\begin{aligned} Ce_q^{(1)4} &= e_p^{(1)4}, & Ce_q^{(1)2} &= e_p^{(1)2}, \\ Ce_{\bar{q}}^{(1)3} &= e_{\bar{q}}^{(1)1}, & Ce_{\bar{p}}^{(1)3} &= e_{\bar{p}}^{(1)1}, \end{aligned}$$

para el caso I. Mientras que para el caso II obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} e_{\bar{p}}^{(1)1} &= Ce_{\bar{q}}^{(1)1}, & e_{\bar{p}}^{(1)3} &= Ce_{\bar{q}}^{(1)3}, \\ e_p^{(1)4} &= \frac{A}{A'}e_q^{(1)4} = -A(\Omega_{q\bar{p}} - C\Omega_{q\bar{q}}), \\ e_p^{(1)2} &= \frac{A}{A'}e_q^{(1)2} = A(\Omega_{p\bar{p}} - C\Omega_{p\bar{q}}). \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de buscar una solución a la ecuación (8.5.20). Para esto, comencemos por evaluar las relaciones entre las componentes de vierbein en la ecuación (8.5.20) para los casos I, II. En el caso I, la ecuación de Monge-Ampère a primer orden después de algunas simplificaciones se puede escribir como

$$e_q^{(1)4} + e_p^{(1)2} + e_{\bar{q}}^{(1)3}(\Omega_{p\bar{p}} - \Omega_{q\bar{p}}) + e_{\bar{p}}^{(1)1}(\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}) = 0, \quad (8.5.23)$$

y para el caso II obtenemos

$$e_q^{(1)4} + e_p^{(1)2} + e_{\bar{q}}^{(1)3}(\Omega_{p\bar{p}} - \Omega_{p\bar{q}}) + e_{\bar{p}}^{(1)1}(\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{q\bar{p}}) = 0. \quad (8.5.24)$$

De acuerdo con las propiedades del vierbein (8.5.3), asumiremos que el vierbein a primer orden  $e_\mu^{(1)a}$  debe de tener la dependencia  $e_\mu^{(1)a} = e_\mu^{(1)a}(\alpha, \Omega_{p\bar{p}}, \Omega_{q\bar{q}}, \Omega_{p\bar{q}}, \Omega_{q\bar{p}})$ , donde  $\alpha$  es una constante y  $\Omega_{i\bar{j}}$  son los coeficientes métricos del tensor métrico no-deformado. Usando esta dependencia consideremos el siguiente Ansatz para las componentes de vierbein:

$$\begin{aligned} e_q^{(1)4} &= \alpha + \beta\Omega_{p\bar{p}} + \gamma\Omega_{q\bar{q}} + \delta\Omega_{p\bar{q}} + \sigma\Omega_{q\bar{p}}, \\ e_p^{(1)2} &= \alpha' + \beta'\Omega_{p\bar{p}} + \gamma'\Omega_{q\bar{q}} + \delta'\Omega_{p\bar{q}} + \sigma'\Omega_{q\bar{p}}, \\ e_{\bar{q}}^{(1)3} &= \alpha'' + \beta''\Omega_{p\bar{p}} + \gamma''\Omega_{q\bar{q}} + \delta''\Omega_{p\bar{q}} + \sigma''\Omega_{q\bar{p}}, \\ e_{\bar{p}}^{(1)1} &= \alpha''' + \beta'''\Omega_{p\bar{p}} + \gamma'''\Omega_{q\bar{q}} + \delta'''\Omega_{p\bar{q}} + \sigma'''\Omega_{q\bar{p}}. \end{aligned}$$

Si evaluamos este Ansatz en la ecuación de Monge-Ampère para el caso I (8.5.23), obtenemos las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + \gamma'' + C\beta''' &= 0, & \gamma'' &= \sigma''', \\ \beta + C\beta' + \alpha'' &= 0, & \delta'' &= \beta''', \\ \gamma + C\gamma' + C\alpha''' &= 0, & \gamma''' &= 0 = \delta''', \\ \delta + C\delta' - \alpha''' &= 0, & \sigma'' &= 0 = \beta'', \\ \sigma + C\sigma' - \alpha'' &= 0, \end{aligned}$$

donde  $C$  satisface la siguiente relación  $C = -\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\sigma+\alpha''-\alpha'''+\gamma''}{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'+\sigma'-\alpha''+\alpha'''+\delta''}$ .

Para el caso II consideremos el siguiente Ansatz para el vierbein  $e_\mu^{(1)a}$  :

$$\begin{aligned} e_{\bar{q}}^{(1)1} &= \alpha + \beta \Omega_{p\bar{p}} + \gamma \Omega_{q\bar{q}} + \delta \Omega_{p\bar{q}} + \sigma \Omega_{q\bar{p}}, \\ e_{\bar{q}}^{(1)1} &= \alpha' + \beta' \Omega_{p\bar{p}} + \gamma' \Omega_{q\bar{q}} + \delta' \Omega_{p\bar{q}} + \sigma' \Omega_{q\bar{p}}. \end{aligned}$$

Ahora usamos este Ansatz en la ecuación (8.5.24), entonces obtenemos las siguientes relaciones entre los coeficientes

$$\begin{aligned} \gamma' + C\beta &= 0, & \delta + C\sigma' &= 0, \\ \alpha' + A' &= 0, & \alpha + A &= 0, \\ \delta + \gamma' &= 0, & \beta + \sigma' &= 0, \\ \gamma = 0 &= \sigma, & \delta' = 0 &= \beta', \end{aligned}$$

donde la constante  $C$  está dada por  $C = -\frac{\gamma'}{\sigma'} = -\frac{\delta}{\beta}$ .

## 8.6. Deformación de una métrica $\eta$ -auto-dual de Riemann

En este trabajo consideraremos la descripción algebraica de una variedad no-compacta hiper-Kähler 4-dimensional, la cual posee al menos una isometría abeliana, es decir, tiene una simetría de traslación o de rotación de acuerdo con [78]. Nos restringiremos a considerar sólo el caso de la simetría de rotación. Por definición, un campo vectorial de Killing  $\xi_\mu$  satisface  $\nabla_{(\nu}\xi_{\mu)} = 0$ , mientras que la parte auto-dual de la parte antisimétrica  $\nabla_{[\nu}\xi_{\mu]}$  proporciona una distinción relevante del campo vectorial [77, 78]:  $\xi_\mu$  será llamado transaccional si satisface la siguiente condición

$$\xi_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}\eta\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\xi_{\mu;\nu}, \quad (8.6.1)$$

para  $\eta = 1$  y  $\xi_\mu$  será llamado anti-auto-dual si  $\eta = -1$ .

Sea  $g_{\alpha\beta}$  una  $\eta$ -auto-dual métrica Riemanniana 4-dimensional con signatura euclidiana. Sea  $\xi = \xi^\alpha\partial_\alpha = \partial/\partial\phi$  un vector de Killing del tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ , entonces localmente podemos escribir

$$ds^2 = \frac{1}{V} (d\phi + \omega_i dx^i)^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (8.6.2)$$

donde  $V$ ,  $\omega_i$  y  $\gamma_{ij}$  son funciones independientes de la coordenada  $\phi$ . Los índices griegos corren de 0 a 3 y los índices latinos corren de 1 a 3. Entonces, cuando existe un vector de Killing asociado al espacio-tiempo (8.6.2) la  $\eta$ -auto-dualidad del tensor de Riemann es equivalente a

$$R_{\alpha\beta} = 0, \quad (8.6.3)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^\delta = \frac{1}{2}\eta\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}R_{\mu\nu\gamma\delta}\xi^\delta. \quad (8.6.4)$$

Como cualquier vector de Killing satisface

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta\xi_\alpha = R_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^\delta,$$

entonces la ecuación (8.6.4) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\nabla_\gamma \left( \nabla_\beta \xi_\alpha - \frac{1}{2} \eta \epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \nabla_\nu \xi_\mu \right) = 0, \quad (8.6.5)$$

donde (8.6.4) es equivalente a la definición (8.6.1). Por lo tanto, este hecho implica que la ecuación (8.6.4) asume implícitamente la existencia en un campo vectorial de Killing  $\eta$ -auto-dual  $\xi_\mu$ .

### 8.6.1. Generalización de los resultados de Boyer-Finley

Boyer y Finley estudiaron los vectores de Killing en el espacios-tiempo de Einstein euclidianos usando el formalismo de  $\mathcal{H}$ -espacios complejos [78]. En este trabajo los autores mostraron que siempre se pueden elegir coordenadas complejas en este espacio de tal manera que

$$\xi = \partial_p + \partial_{\bar{p}} \quad \text{y} \quad \xi\Omega = 0.$$

Adicionalmente, también se puede elegir el vector de Killing como

$$\xi = i(p\partial_p + \bar{p}\partial_{\bar{p}}) \quad \text{and} \quad \xi\Omega = 0, \quad (8.6.6)$$

donde  $\Omega$  es el potencial de Kähler el cual satisface la ecuación de Monge-Ampère. La elección del vector de Killing depende de que la derivada covariante del vector de Killing  $\xi$  es anti-auto dual o no respectivamente. Además, se mostró que la ecuación para el potencial de Kähler  $\Omega$  se puede simplificar con la ayuda de una transformada de Legendre apropiada.

En este trabajo nos enfocaremos en el caso cuando existe un vector de Killing auto-dual, es decir existe un vector de Killing de la forma (8.6.6). Por lo tanto podemos introducir un par de coordenadas complejas  $x^i \equiv (q, p)$  de tal manera que la ecuación (8.6.6) se satisface, es decir, elegimos la coordenada  $p$  de la siguiente manera

$$p = \sqrt{r} e^{i\tilde{\theta}}.$$

Entonces podemos escribir el campo vectorial de Killing como  $\xi = \partial/\partial\tilde{\theta}$  y el potencial  $\Omega$  adquiere la siguiente dependencia

$$\Omega \equiv \Omega(r, q, \bar{q}). \quad (8.6.7)$$

Por definición del potencial de Kähler tenemos que

$$ds^2 = 2\Omega_{i\bar{j}} dx^i dx^{\bar{j}}, \quad (8.6.8)$$

donde  $\Omega$  satisface la ecuación de Monge-Ampère o la primera ecuación de heavenly <sup>8</sup>

$$\Omega_{p\bar{p}}\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}\Omega_{q\bar{p}} = 1. \quad (8.6.9)$$

De acuerdo con la dependencia del potencial de Kähler (8.6.7), la primera ecuación de heavenly (8.6.9) se puede escribir en las nuevas coordenadas de la siguiente manera

$$(r\Omega_r)_r \Omega_{q\bar{q}} - r\Omega_{rq}\Omega_{r\bar{q}} = 1. \quad (8.6.10)$$

<sup>8</sup>En el contexto de las ecuación anti-auto-duales de Einstein la ecuación de Monge-Ampère (8.3.5) es conocida como la primera ecuación de heavenly.

Ahora definimos una nueva coordenada como  $J = r\Omega_r$ . Entonces usaremos a las coordenadas  $(J, q, \bar{q})$  como una nueva elección de coordenadas independientes para reescribir el elemento de línea (8.6.8) y la condición de curvatura (8.6.10). Comencemos por escribir la ecuación (8.6.10) en estas nuevas coordenadas, la cual es conveniente escribirla de la siguiente manera

$$\Omega_{q\bar{q}} = r_J \left[ \frac{r_q r_{\bar{q}}}{r (r_J)^2} + 1 \right],$$

donde hemos usado que en las nuevas coordenadas podemos escribir  $\Omega_{r_q} = -r^{-1} r_J^{-1} r_q$ ,  $\Omega_{r_{\bar{q}}} = -r^{-1} r_J^{-1} r_{\bar{q}}$  y  $J_r = r_J^{-1}$ . Ahora procedemos a escribir el elemento de línea (8.6.8) en las nuevas coordenadas obteniendo después de varios cálculos

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{r}{r_J} \right) \left[ 2d\tilde{\theta} + \frac{i}{r} (r_q dq - r_{\bar{q}} d\bar{q}) \right]^2 + \left( \frac{r_J}{r} \right) (dJ^2 + 4rdq d\bar{q}) \right\}. \quad (8.6.11)$$

Por lo tanto hemos escrito el elemento de línea  $ds^2$ , el cual se asumió que es tipo Kähler, en un espacio-tiempo que es auto-dual (de Riemann) (8.6.2) (recordemos  $\xi = \partial/\partial\tilde{\theta}$ ).

En el caso de las métricas anti-auto-duales, D. Olivier [91] estudió la formulación de Geroch 3-dimensional de las ecuaciones de Einstein y uso el resultado de Boyer-Finley acerca de los vectores de Killing [78] (Falta explicar) para obtener la siguiente relación entre los espacios-tiempo dados en (8.6.11) y (8.6.2):

$$\begin{aligned} V &= \frac{r_J}{2r}, \\ d\phi + \omega_i dx^i &= d\tilde{\theta} + \frac{i}{2r} (r_q dq - r_{\bar{q}} d\bar{q}), \\ \gamma_{ij} dx^i dx^j &= dJ^2 + 4rdq d\bar{q}, \end{aligned} \quad (8.6.12)$$

### 8.6.2. Generalización al caso no-conmutativo

Como se discutió en secciones anteriores, hemos considerado una deformación del potencial de Kähler  $\widehat{\Omega}$  como una expansión dada en (8.2.6) de tal manera que se preserva el carácter de ser un espacio-tiempo tipo Kähler. Adicionalmente a esto estamos interesados que este espacio-tiempo deformado preserve el carácter de ser (anti) auto-dual. El carácter (anti) auto-dual está asociado con la simetría de rotación, por lo tanto en esta sección nos enfocaremos en incorporar (anti) auto-dual a la deformación no-conmutativa de un espacio-tiempo tipo Kähler. Siguiendo un procedimiento similar al de la sección anterior tenemos que imponer que el potencial de Kähler deformado  $\widehat{\Omega}$  dependa solamente de las nuevas coordenadas  $r, q, \bar{q}$  con el fin de que se preserve la simetría de rotación. Por lo tanto, la simetría rotacional de Killing se preserva, si y sólo si, cada perturbación  $\Omega^{(n)}$  depende sólo de las nuevas coordenadas:  $\Omega^{(n)} = \Omega^{(n)}(r, q, \bar{q})$ .

En la sección 8.3.2 discutimos la deformación no-conmutativa de la ecuación (8.6.9), donde obtuvimos que las ecuaciones diferenciales asociadas a las perturbaciones no-conmutativas están dadas por

$$\sum_{m=0}^r \Omega_{p\bar{p}}^{(m)} \Omega_{q\bar{q}}^{(r-m)} - \Omega_{p\bar{q}}^{(m)} \Omega_{q\bar{p}}^{(r-m)} = 0,$$

donde  $r > 1$ . Debido a la dependencia  $\Omega^{(n)} = \Omega^{(n)}(r, q, \bar{q})$  del potencial podemos escribir esta ecuación de la siguiente manera

$$\sum_{m=0}^r \left( r \Omega_r^{(m)} \right) \Omega_{q\bar{q}}^{(r-m)} - r \Omega_{r q}^{(m)} \Omega_{r\bar{q}}^{(r-m)} = 0. \quad (8.6.13)$$

De manera análoga a la sección anterior definiremos  $J^{(n)} := r \Omega_r^{(n)}$  para cada perturbación y eligiendo solamente al conjunto  $\{J, q, \bar{q}\}$  como las nuevas variables independientes, donde  $J = r \Omega_r^{(0)} = r \Omega_r$ . Entonces las componentes del tensor  $\Omega_{ij}^{(n)}$  en estas coordenadas se pueden escribir

$$\Omega_{r q}^{(n)} = -r^{-1} J_r^{(n)} r_q, \quad \Omega_{r \bar{q}}^{(n)} = -r^{-1} J_r^{(n)} r_{\bar{q}}.$$

Para obtener la componente  $\Omega_{q\bar{q}}^{(n)}$  usaremos explícitamente estas componentes en la ecuación (8.6.13) obteniendo la siguiente relación recursiva

$$\Omega_{q\bar{q}}^{(n)} = r_J J_r^{(n)} \left( \Omega_{q\bar{q}}^{(0)} - 2r_J \right) + \sum_{\substack{s+m=n \\ m \neq n, 0}} r_J J_r^{(s)} \left( J_r^{(m)} r^{-1} r_q r_{\bar{q}} - \Omega_{q\bar{q}}^{(m)} \right),$$

es decir, para conocer la perturbación  $\Omega_{q\bar{q}}^{(n)}$  necesitamos conocer los ordenes menores de las perturbaciones, adicionalmente esta ecuación es valida para  $n \geq 1$ .

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso no-deformado, podemos escribir el elemento de línea deformado  $d\widehat{S}^2 := 2\widehat{\Omega}_{i\bar{j}} dx^i dx^{\bar{j}}$  en términos de las coordenadas  $\{\theta, J, q, \bar{q}\}$ . Después de una serie de cálculos podemos escribir

$$d\widehat{S}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n J_r^{(n)} r_J ds^2 + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} -\theta^n 2r_J r_J J_r^{(n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \theta^n \sum_{m=1}^{n-1} r_J J_r^{(n-m)} \left( J_r^{(m)} r^{-1} r_q r_{\bar{q}} - \Omega_{q\bar{q}}^{(m)} \right) \right] dq d\bar{q}, \quad (8.6.14)$$

donde  $ds^2$  es el elemento de línea no-deformado dado por (8.6.11). Como se puede ver este elemento de línea (8.6.14) no depende explícitamente de la coordenada  $\theta$  al igual que el elemento de línea no-deformado  $ds^2$ , por lo tanto ambos elementos de línea comparten las mismas simetrías, es decir, comparten el mismo vector de Killing  $\xi = \partial/\partial\theta$ . Finalmente podemos escribir el espacio-tiempo deformado (8.6.14) en las coordenadas  $\{\phi, x^i\}$  usando las relaciones dadas en (8.6.12). De este modo obtenemos

$$d\widehat{S}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n J_r^{(n)} r_J ds^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \sum_{m=1}^{n-1} r_J J_r^{(n-m)} \left( J_r^{(m)} r^{-1} r_q r_{\bar{q}} + \Omega_{q\bar{q}}^{(m)} \right) \frac{1}{4} [\gamma_{ij} dx^i dx^j - dJ^2].$$

### 8.6.3. El espacio-tiempo de Atiyah-Hitchin en coordenadas complejas

Como hemos discutido anteriormente, el objetivo de este trabajo es construir una deformación no-conmutativa de la dinámica de monopolos magnético no abelianos  $SU(2)$ . En las secciones anteriores hemos mencionado que la dinámica de monopolos magnéticos puede ser estudiada mediante un espacio-tiempo de Einstein, el cual vive en un espacio auxiliar conocido como el espacio de parámetros. El espacio-tiempo de A-H describe la dinámica de un par de monopolos y es el espacio-tiempo que discutiremos a continuación.

El elemento de línea de Atiyah-Hitchin  $ds^2$  puede ser escrito de la siguiente manera [62]

$$ds^2 = \beta^2 \gamma^2 \delta^2 \frac{(dk^2)^2}{(4k^2 k'^2 K^2)^2} + \beta^2 \sigma_x^2 + \gamma^2 \sigma_y^2 + \delta^2 \sigma_z^2, \quad (8.6.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta\gamma &= -K^2 (k'^2 + u), \\ \gamma\delta &= K^2 (k'^2 - u), \\ \beta\delta &= -K^2 u, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} u &= \frac{G(k)}{K(k)}, \\ G(k) &= E(k) - k'^2 K(k), \\ k'^2 &= 1 - k^2. \end{aligned}$$

Elegiremos

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} (\sin \psi d\theta - \sin \theta \cos \psi d\phi), \\ \sigma_y &= -\frac{1}{2} (\cos \psi d\theta + \sin \theta \sin \psi d\phi), \\ \sigma_z &= \frac{1}{2} (d\psi + \cos \theta d\phi). \end{aligned}$$

Estas son 1-formas invariantes bajo el grupo  $SU(2)$  de supersimetría y el vector de Killing asociado con respecto de la diagonal  $U(1)$  es  $\xi = \partial/\partial\phi$ . Ahora buscamos escribir la métrica de A-H (8.6.15) en la forma de una métrica auto-dual (8.6.2). Para esto podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} &= \frac{1}{4} (\beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \gamma^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \delta^2 \cos^2 \theta), \\ \omega &= \frac{1}{V} ((\gamma^2 - \beta^2) \sin \psi \cos \psi \sin \theta d\theta + \delta^2 \cos \theta d\psi), \end{aligned}$$

y los coeficientes  $\gamma_{ij}$  están dados por

$$\begin{aligned} \gamma_{k^2 k^2} &= \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^2}{V (4k^2 k'^2 K^2)^2}, \\ \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1}{16} [\beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta + \delta^2 \cos^2 \theta (\beta^2 \sin^2 \psi + \gamma^2 \cos^2 \psi)], \\ \gamma_{\theta\psi} &= -\frac{1}{16} [\delta^2 (\gamma^2 - \beta^2) \cos \theta \sin \theta \cos \psi \sin \psi], \\ \gamma_{\psi\psi} &= \frac{1}{16} \delta^2 \sin^2 \theta (\beta^2 \cos^2 \psi + \gamma^2 \sin^2 \psi). \end{aligned}$$

En [91], D. Olivier uso estos resultados y eligió un conjunto de coordenadas complejas para la métrica de A-H con el fin de obtener el potencial de Kähler asociado a la métrica de A-H. Este potencial tiene una forma muy simple y es función de las variables  $\theta, \psi, k^2$ :

$$\Omega = \frac{\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta}{4} - J,$$

donde  $J$  está dada por la siguiente expresión

$$J = \frac{1}{8} [(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta) - \gamma\delta \sin^2 \theta \cos^2 \psi - \delta\beta \sin^2 \theta \sin^2 \psi - \beta\gamma \cos^2 \theta]. \quad (8.6.16)$$

## 8.7. Conclusiones

El espacio-tiempo de Atiyah-Hitchin es una variedad 4-dimensional hiper-Kähler con grupo de isometría  $SO(3)$ . Su importancia reside en que es una métrica que aparece de manera natural en el espacio de parámetros de dos monopolos magnéticos no-abelianos  $SU(2)$  interactuantes y sus geodésicas describen la dispersión de los monopolos a bajas energías [65].

Usando la deformación Moyal hemos desarrollado una propuesta para una versión no-conmutativa de una variedad de tipo-Kähler. Siguiendo [88], revisamos primero la deformación Moyal de la primera ecuación heavenly.

Una deformación del potencial de Kähler ha sido también construida en [88] como una solución perturbativa en potencias del parámetro  $\theta$  que está basada en criterios de integrabilidad. Usando este resultado, impusimos algunas condiciones en el potencial de Kähler deformado de tal manera que el espacio-tiempo deformado preserve las mismas propiedades de una variedad de Kähler.

Por otro lado, una deformación Moyal de la teoría de la gravedad puede ser escrita en términos del vierbein deformado  $\hat{e}_\mu^\alpha(x, \theta)$ . Usando este hecho, el potencial de Kähler deformado se escribió en términos del vierbein deformado. A manera de ejemplo, calculamos explícitamente el potencial de Kähler a primer orden.

Finalmente impusimos la simetría rotacional de Killing para el potencial deformado  $\hat{\Omega} \equiv \hat{\Omega}(r, q, \bar{q})$  con  $r = p\bar{p}$  y discutimos la conexión con el espacio-tiempo de A-H en coordenadas complejas.

## Capítulo 9

# Conclusiones y Perspectivas

En la física teórica los monopolos magnéticos han sido de gran interés hasta el día de hoy. Un monopolo magnético se define como una partícula estable que posee carga magnética. Este concepto surge a partir de la asimetría de las ecuaciones de Maxwell; de existir cargas magnéticas de manera aislada las ecuaciones de Maxwell deben de ser invariantes bajo una transformación de dualidad (rotación de dualidad) que intercambia los campos  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ , mientras que para las fuentes  $(\rho_e, \vec{J}_e) \rightarrow (\rho_g, \vec{J}_g)$ ,  $(\rho_g, \vec{J}_g) \rightarrow -(\rho_e, \vec{J}_e)$ .

Dirac demostró que la existencia de un monopolo magnético explicaría la naturaleza discreta de la carga eléctrica, pero en el camino se encontró con un problema muy serio ya que existe una singularidad en  $\theta = \{0, \pi\}$  para el potencial de norma  $A_\mu$  asociado con el monopolo; tal singularidad es conocida como la cuerda de Dirac. Por otro lado, se puede construir una descripción libre de singularidades, si se deja de lado la parametrización tradicional del espacio  $\mathbb{R}^3$  que rodea al monopolo, mediante un único conjunto de coordenadas. Para mostrar esto, Wu y Yang dividieron  $\mathbb{R}^3/\{0\}$  en dos hemisferios ligeramente superpuestos, definidos como sigue

$$\begin{aligned} R^N & : 0 \leq \vartheta < \pi/2 + \varepsilon, \quad r > 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ R^S & : \pi/2 - \varepsilon < \vartheta \leq \pi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \end{aligned}$$

donde  $R^N$  y  $R^S$  son el hemisferio norte y el hemisferio sur. Entonces, podemos asociarle un potencial a cada hemisferio,  $\vec{A}^N$  y  $\vec{A}^S$ , los cuales son libres de singularidades en los dominios donde están definidos mientras que en la región de traslape  $R^N \cap R^S$  están relacionados por una transformación de norma

$$A_\mu^{N/S}(x) \rightarrow A_\mu^{S/N}(x) = U A_\mu^{N/S}(x) U^{-1} + i U \partial_\mu U^{-1}. \quad (9.0.1)$$

Por otra parte los monopolos proporcionan un vínculo entre la física de partículas y la cosmología, pues a muy altas energías de manera general se puede decir que se restablece el grupo de unificación (unificación para las interacciones electromagnéticas y débiles), el cual fue espontáneamente roto. En esta teoría de unificación existe la posibilidad de tener partículas estables que llevan cargas magnéticas o monopolos magnéticos. La era moderna de la teoría del monopolo magnético comenzó en 1974, cuando 't Hooft y Polyakov descubrieron de manera independiente soluciones de monopolos magnéticos del modelo  $SO(3)$  de Georgi-Glashow. La esencia de este avance radica en que, si bien un monopolo de Dirac puede incorporarse en una teoría de norma abeliana (electromagnetismo), en algunos modelos no-abelianos como el de Georgi-Glashow, las soluciones de monopolos magnéticos aparecen de manera natural.

En esta tesis hemos analizado los efectos de la no-conmutatividad en las coordenadas espaciales en el contexto de monopolos magnéticos. El primer problema que hemos estudiado está relacionado con implementar la no-conmutatividad en la teoría electromagnética y estudiar el efecto que tiene en la condición de cuantización de Dirac, es decir analizamos la compatibilidad de la no-conmutatividad con la cuantización de la carga eléctrica. Para esto, procedimos de la siguiente manera: primero introducimos las ecuaciones de Maxwell modificadas

$$D_\mu * \widehat{F}^{i\mu} = \frac{4\pi}{c} \widehat{J}_e^i, \quad (9.0.2)$$

$$D_\mu * \widehat{\mathcal{F}}^{\mu 0} = 4\pi \widehat{J}_g^0, \quad (9.0.3)$$

donde  $\widehat{F}^{i\mu}(x; \theta)$ ,  $\widehat{\mathcal{F}}^{\mu 0}(x; \theta)$ ,  $\widehat{J}_e^i(x; \theta)$  y  $\widehat{J}_g^0(x; \theta)$  son funciones del parámetro  $\theta$  de no-conmutatividad y el producto- $*$  es el producto Moyal. La manera en la que estudiamos las soluciones a estas ecuaciones fue mediante un tratamiento perturbativo donde supusimos el siguiente desarrollo para los campos

$$\begin{aligned} \widehat{F}^{\mu\nu} &= F_0^{\mu\nu} + F_1^{\mu\nu} + F_2^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\theta^3), \\ \widehat{J}_g^0 &\equiv \widehat{\rho}_g(r) = g\delta(r) + \rho^1(r) + \rho^2(r) + \mathcal{O}(\theta^3), \end{aligned} \quad (9.0.4)$$

$$\widehat{J}_e^i(r) = J_{e0}^i + J_{e1}^i + J_{e2}^i + \mathcal{O}(\theta^3), \quad (9.0.5)$$

de tal manera que escribimos las ecuaciones de Maxwell deformadas para varios ordenes en el parámetro de no-conmutatividad  $\theta$ . Para poder resolver estas ecuaciones nos enfrentamos al problema de conocer explícitamente las deformaciones de las fuentes (9.0.4), (9.0.5) asociadas a las ecuaciones de Maxwell modificadas.

Este problema lo replanteamos de la siguiente manera: existe una aplicación conocida como la aplicación de Seiberg-Witten, la cual permite una generalización no-conmutativa de la teoría de Yang-Mills-Higgs. Seiberg y Witten argumentaron que estas teorías de norma no-conmutativas son equivalentes a las teorías de norma conmutativas y en particular mostraron que existe una aplicación de un campo de norma conmutativo a uno no-conmutativo de tal manera que la nueva teoría preserva el carácter de ser una teoría de norma bajo el producto- $*$ . De manera precisa esta aplicación nos dice que si conocemos los potenciales de norma conmutativo  $A_\mu(x)$  podemos determinar los potenciales perturbados  $A_\mu^{(n)}(x; \theta)$  a todos los ordenes en el parámetro de no-conmutatividad. Usando el procedimiento de Seiberg y Witten calculamos algunas perturbaciones para el potencial de norma  $\widehat{A}_\mu(x; \theta) = A_\mu + A_\mu^1 + A_\mu^2 + \mathcal{O}(\theta^3)$ , las cuales se encuentran explícitamente en la sección 5.3. Por medio de estas expresiones junto las ecuaciones de Maxwell (9.0.2) y (9.0.3) encontramos las perturbaciones asociadas a la densidad de carga magnética  $\widehat{\rho}_g$  y la densidad de corriente eléctrica  $\widehat{J}_e^i$ . En el caso de la ecuación de Ampère, las perturbaciones de la corriente eléctrica se pueden escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} J_{e0}^{(N/S)i} &= 0, \\ J_{e1}^{(N/S)i} &= \theta \epsilon^{ij3} x^j g_1^{(N/S)}, \\ J_{e2}^{(N/S)i} &= \theta^2 \epsilon^{ij3} x^j g_2^{(N/S)}, \end{aligned} \quad (9.0.6)$$

donde

$$g_1^{(N/S)} := \frac{3}{r^6}, \quad g_2^{(N/S)} := \pm \frac{3 [\mp 4z(2r \mp z)\rho^2 \pm z^3(r \mp z) + 5\rho^4]}{r^{10}\rho^2}.$$

Por otra parte, en el caso de la ley de Gauss es posible determinar las correcciones a la carga magnética a partir de las deformaciones del potencial de norma  $\hat{A}_\mu(x; \theta)$  sin tener que recurrir a las perturbaciones de la densidad de carga  $\hat{\rho}_g$ , es decir, podemos calcular el flujo magnético para obtener la carga efectiva  $g_{eff}$ . Para este caso tenemos una carga magnética efectiva dada por

$$4\pi g_{eff} = g \left( 4\pi + 2\pi \frac{\theta^2}{r^4} + \mathcal{O}(\theta^3) + \dots \right),$$

la cual calculamos hasta segundo orden en el parámetro de no conmutatividad. Este resultado puede se obtuvo calculando las integrales  $\int_\Gamma \vec{A}^{(N/S)1} \cdot d\vec{s}$  y  $\int_\Gamma \vec{A}^{(N/S)2} \cdot d\vec{s}$ , donde  $\Gamma$  es un circuito de radio  $r$  en el ecuador ( $\vartheta = \pi/2$ ) positivamente (negativamente) orientado hacia el hemisferio norte (sur). Es claro que en el límite  $\theta \rightarrow 0$  obtenemos  $g_{eff} \rightarrow g$ .

Es importante resaltar que esta deformación no-conmutativa a la teoría electromagnética sigue siendo una teoría de norma con grupo de simetría  $U_*(1)$  y parámetro de norma  $\hat{\Lambda}(x; \theta)$ . Usando este hecho analizamos la condición de cuantización de Dirac (CCD) en el contexto no-conmutativo. Para ellos consideramos una carga eléctrica, la cual se mueve en un circuito cerrado en una vecindad de un monopolo magnético. Por lo tanto, la función de onda asociada al monopolo magnético no-conmutativo  $\Psi$ , es solución a la ecuación de Schrödinger deformada que describe una partícula no relativista de masa  $m$  en un campo externo generado por los potenciales  $\vec{A}^N(\vec{r}; \theta)$  y  $\vec{A}^S(\vec{r}; \theta)$ . En la región de superposición  $R^N \cap R^S$ , ambas expresiones de los potenciales  $\hat{A}_\mu^N$  y  $\hat{A}_\mu^S$  son regulares y además están relacionadas a través de una transformación de norma. Si ahora se considera una trayectoria cerrada  $l$  en la región de superposición obtenemos que las funciones de onda son univaluadas si el factor de fase es un múltiplo de  $2\pi$ , es decir

$$\Delta S = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto se puede concluir que la condición de cuantización de Dirac para el caso no-conmutativo se preserva si y sólo si las contribuciones no conmutativas del parámetro de norma son nulas:  $\Lambda_\lambda^{(n)} = 0$ , para  $n \geq 1$  o de periodicidad  $2\pi$ .

La importancia de esta parte del trabajo tesis radicó en mostrar que la no-conmutatividad en las coordenadas espaciales pueden incorporarse a la teoría electromagnética de Maxwell de tal manera que la condición de cuantización de Dirac se preserve, es decir, la cuantización de la carga eléctrica es compatible con la no-conmutatividad. Este resultado se obtuvo y fue consecuencia directa de los cálculos que se realizaron, por medio de los cuales mostramos que  $\Lambda_\lambda^{(n)} = 0$ , para  $n \geq 1$ .

Con respecto a las contribuciones asociadas a las deformaciones de las fuentes no podemos decir mucho al respecto ya que solo calculamos algunas contribuciones debido a la complejidad de los cálculos. Para poder decir algo más acerca de las deformaciones de las fuentes tendríamos que calcular un número grande de contribuciones para así determinar que tipo de distribución de la carga magnética y de la corriente eléctrica se induce debido a la aplicación de Seiberg-Witten. Como trabajo a futuro en está dirección se pueden introducir fuentes magnéticas descritas por una distribución gaussiana pesada por el parámetro de no-conmutatividad de la siguiente manera

$$g\delta(\vec{x}) \rightarrow \rho_{mag}(\vec{x}) = \frac{g}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} \exp(-\vec{x}^2/4\theta). \quad (9.0.7)$$

Este tipo de distribuciones no-conmutativas han sido muy útiles en soluciones exactas de agujeros negros cargados y en teorías de norma no-conmutativas [95]. De la misma manera podríamos proponer como distribución de carga magnética a (9.0.7) y posteriormente buscar soluciones exactas a las ecuaciones de Maxwell no-conmutativas, sin tener que recurrir al tratamiento perturbativo que utilizamos aquí. Finalmente podríamos comparar con los resultados obtenidos en este trabajo.

Por otra parte, en lo que concierne a la dinámica de monopolos magnéticos, estudiamos la deformación no-conmutativa del espacio-tiempo de Atiyah-Hitchin la cual es una variedad 4-dimensional hiper-Kähler con grupo de isometría  $SO(3)$  y fue encontrado en 1991 [91]. La importancia de este espacio-tiempo reside en que es una métrica que aparece de manera natural en el espacio de parámetros de dos monopolos magnéticos no-abelianos  $SU(2)$  y sus geodésicas describen la dispersión de los monopolos a bajas energías [65].

Debido a que este espacio-tiempo es Kähler tiene la característica de ser una variedad cuasi-compleja que además tiene una función escalar llamada potencial de Kähler  $\Omega$ ; el potencial de Kähler está relacionado con el tensor métrico de acuerdo a

$$ds^2 = 2g_{i\bar{j}}d\tau^i d\tau^{\bar{j}}, \quad g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \Omega = \partial_{i\bar{j}} \Omega = \Omega_{i\bar{j}}, \quad (9.0.8)$$

donde  $\tau^i = p, q$ ,  $\tau^{\bar{j}} = \bar{p}, \bar{q}$  son las coordenadas holomorficas y no-holomorficas del espacio-tiempo de Kähler respectivamente. Adicionalmente las ecuaciones auto-duales en el vacío de Einstein satisfacen una condición de curvatura que se puede escribir en términos del potencial de Kähler  $\Omega$  que es conocida como la primera ecuación de Plebanski, primera ecuación de heavenly o como la ecuación de Monge-Ampère [83]

$$\Omega_{p\bar{p}}\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}\Omega_{q\bar{p}} = 1. \quad (9.0.9)$$

En esta tesis llevamos a cabo una deformación no-conmutativa al potencial de Kähler con el objetivo de preservar el carácter tipo-Kähler después de la deformación.

La manera como se procedió para hacer esta deformación está basada en el trabajo de Strachan [90], en el cual se desarrolla una deformación de ecuaciones diferenciales basada en un producto-\* asociativo junto con sus aplicaciones a la teoría de sistemas integrables. Todos los sistemas integrables pueden ser escritos en términos de una 2-forma  $\Omega$ , la cual satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} d\Omega &= 0, \\ \Omega \wedge \Omega &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones codifican las condiciones de integrabilidad (admiten una descomposición en pares de Lax) de estos sistemas en una manera muy elegante. Como caso particular de un sistema integrable estábamos interesados en el caso de una deformación integrable de las ecuaciones auto-duales en el vacío de Einstein que en cuatro dimensiones es una métrica hiper-Kähler. Para este análisis definimos la 2-forma  $\Omega$  deformada de la siguiente manera

$$\Omega := dp \wedge dq + \lambda(\widehat{\Omega}_{p\bar{p}} dp \wedge d\bar{p} + \widehat{\Omega}_{p\bar{q}} dp \wedge d\bar{q} + \widehat{\Omega}_{q\bar{p}} dq \wedge d\bar{p} + \widehat{\Omega}_{q\bar{q}} dq \wedge d\bar{q}) + \lambda^2 d\bar{p} \wedge d\bar{q}, \quad (9.0.10)$$

la cual satisface la condición  $d\Omega = 0$  si y sólo si  $\partial_{\bar{k}} \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = 0 = \partial_{\bar{k}} \widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$ . Adicionalmente, la segunda condición de integrabilidad podemos reescribirla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Omega \wedge \Omega &= \lambda^2 (\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{*M} - 1) dp \wedge d\bar{p} \wedge dq \wedge d\bar{q} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\{\cdot, \cdot\}_M$ , es el corchete de Moyal definido como  $\{F, G\}_{MB} := \frac{1}{i\theta} (F * G - G * F)$ . Por lo tanto una deformación basada en criterios de integrabilidad de las ecuaciones auto-duales en el vacío de Einstein signiere hacer una deformación en la condición de curvatura (9.0.9)

$$\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{*M} = 1. \quad (9.0.11)$$

En esta tesis usamos este resultado para hacer una deformación del espacio-tiempo Kähler, donde asumimos el siguiente desarrollo perturbativo en potencias del parámetro  $\theta$  de no-conmutatividad para el potencial de Kähler deformado

$$\widehat{\Omega} = \Omega + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \Omega^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \Omega^{(n)}, \quad (9.0.12)$$

donde las deformaciones  $\Omega^{(n)}$  son funciones desconocidas por determinar. Como objetivo principal de este problema, nos enfocamos a buscar un procedimiento para encontrar un Ansatz para las deformaciones  $\Omega^{(n)}$ . La manera en que procedimos fue la siguiente: usamos el formalismo estándar para estudiar deformaciones no-conmutativas para la gravedad de Einstein, es decir, escribimos las deformaciones de un tensor métrico deformado  $\hat{g}_{\mu\nu}(x; \theta)$  en términos de un sistema de campos locales que corresponden al deformado  $\hat{e}_\mu^a(x; \theta)$ . Usando esta idea fue posible escribir el potencial deformado  $\widehat{\Omega}$  en términos del vierbein  $\hat{e}_\mu^a(x; \theta)$  de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu}^{(n)} = \sum_{m=0}^n e_\mu^{(m)a} e_\nu^{(n-m)b} \eta_{ab} = (\delta_\mu^i \delta_\nu^{\bar{j}} + \delta_\nu^i \delta_\mu^{\bar{j}}) \Omega_{i\bar{j}}^{(n)}. \quad (9.0.13)$$

Finalmente el problema se redujo a dar un Ansatz para el vierbein  $\hat{e}_\mu^a(x; \theta)$  e integrar la ecuación anterior para obtener las deformaciones del potencial de Kähler. Como caso particular calculamos el potencial de Kähler a primer orden y obtuvimos el siguiente resultado

$$\Omega^{(1)} = (e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p) q + (e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q} + e_p^{(1)4} \Omega_q) p + (e_q^{(1)4} + e_p^{(1)2}) \Omega,$$

donde  $e_q^{(1)4}$ ,  $e_p^{(1)2}$ ,  $e_{\bar{q}}^{(1)3}$  y  $e_{\bar{p}}^{(1)3}$  son combinaciones lineales de las componentes de la métrica no-deformada, es decir,  $e_\mu^{(1)a} \propto \alpha + \beta \Omega_{p\bar{p}} + \gamma \Omega_{q\bar{q}} + \delta \Omega_{p\bar{q}} + \sigma \Omega_{q\bar{p}}$ .

Finalmente analizamos las deformaciones no-conmutativas a las soluciones auto-duales en el vacío de Einstein

$$d\widehat{S}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n J_r^{(n)} r_J ds^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \sum_{m=1}^{n-1} r_J J_r^{(n-m)} \left( J_r^{(m)} r^{-1} r_q r_{\bar{q}} + \Omega_{q\bar{q}}^{(m)} \right) \frac{1}{4} [\gamma_{ij} dx^i dx^j - dJ^2],$$

donde  $d\widehat{S}^2$  es el elemento de línea deformado y  $ds^2$  es el elemento de línea no-deformado dado por

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{r}{r_J} \right) \left[ 2d\tilde{\theta} + \frac{i}{r} (r_q dq - r_{\bar{q}} d\bar{q}) \right]^2 + \left( \frac{r_J}{r} \right) (dJ^2 + 4rdq d\bar{q}) \right\}, \quad (9.0.14)$$

y el cual está relacionado con (9.0.8) por una transformación de Legendre.

Finalmente como perspectivas en esta línea de investigación, podemos aplicar este resultado al caso de la métrica de Atiyah-Hitchin con el fin de estudiar los efectos no-conmutativos en la

dinámica de los monopolos magnéticos. Para conocer explícitamente la deformación no-conmutativa de la métrica de A-H es necesario conocer el potencial de Kähler asociado a la métrica de Atiyah-Hitchin. Una vez que se tiene la deformación de la métrica de A-H, el siguiente paso es utilizarla para analizar correcciones no-conmutativas en el cálculo de la dispersión frontal de dos monopolos. De manera más precisa en el capítulo 8 se analizó la dispersión frontal de dos monopolos clásicos interactuantes, en donde obtuvimos que

$$\Theta = \Delta \tilde{\psi} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = I_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\beta(r)^2},$$

donde  $\Theta$  es el ángulo de dispersión. El análogo de esta cantidad sería una dispersión NC que se debe de poder expresar como una serie de potencias del parámetro no-conmutativo  $\theta$  de la siguiente manera

$$\Theta_{NC} = \Theta + \theta^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu}^{(1)} + \dots,$$

donde las correcciones  $\Theta_{\mu\nu}^{(1)}$  deben estar asociadas a las contribuciones obtenidas por la deformación de la métrica de Atiyah-Hitchin. Estas correcciones deben tener efectos directos sobre la dispersión de monopolos.

## Apéndice A

# El parámetro de norma $\widehat{\Lambda}_\lambda$

### A.1. El parámetro de norma $\widehat{\Lambda}_\lambda$ para el monopolo magnético $U(1)_*$

El objetivo de esta esta sección es calcular las perturbaciones a todos los órdenes del parámetro de norma no conmutativo  $\widehat{\Lambda}_\lambda$  para el caso del monopo magnético con grupo de simetría  $U(1)$  usando el mapeo de SW y la formulación de Wu-Yang.

Consideremos la expresión general para el parámetro de norma a orden  $n + 1$   $\Lambda^{n+1}$ , el cual fue encontrado usando el mapeo de SW ( ver sección 3.3.2). Ahora consideremos el potencial de norma  $A_\mu$  asociado a un monopolo magnético con un grupo de simetría abeliano  $U(1)$  ( conmutativo ), entonces las correcciones no conmutativas para el parámetro de norma se puede escribir como:

$$\Lambda^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{kl} \sum_{p+q+r=n} \{A_k^p, \partial_l \Lambda^q\}_{*r}. \quad (\text{A.1.1})$$

Desarrollando la suma del anti conmutador podemos escribir

$$\begin{aligned} \Lambda^{n+1} = & -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu_1\nu_1} (\{A_{\mu_1}^n, \partial_{\nu_1} \lambda\} + \{A_{\mu_1}^{n-1}, \partial_{\nu_1} \Lambda^1\} + \dots + \{A_{\mu_1}^0, \partial_{\nu_1} \Lambda^n\} \\ & + \{A_{\mu_1}^{n-1}, \partial_{\nu_1} \lambda\}_{*1} + \dots + \{A_k^0, \partial_{\nu_1} \Lambda^{n-1}\}_{*1} \\ & \vdots \\ & + \{A_{\mu_1}^1, \partial_{\nu_1} \lambda\}_{*n-1} + \{A_k^0, \partial_{\nu_1} \Lambda^1\}_{*n-1} \\ & + \{A_{\mu_1}^0, \partial_{\nu_1} \lambda\}_{*n}), \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

donde en cada renglón se ha puesto las contribuciones del anti-conmutador  $\{, \}_{*r}$  que requieren una deformación Moyal a orden  $*^r$  para  $r = 0, \dots, n$ , es decir, en el primer renglón están todas las contribuciones del tipo  $\{, \}_{*r=0}$ , en el segundo renglón todas las contribuciones de tipo  $\{, \}_{*1}$ , y así sucesivamente hasta llegar al último renglón con las contribuciones del tipo  $\{, \}_{*n}$ .

Por otro lado, consideremos un conmutador del tipo  $\{A, B\}_{*k}$ , donde  $A$  y  $B$  son funciones de  $x^i$  y  $*^k$  es la contribución a orden  $k$  del producto Moyal definido por (2.2.1); se puede verificar fácilmente que este anti conmutador tiene la siguiente propiedad:

$$\{A, B\}_{*k} = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par} , \\ 2 A *^k B & \text{para } k \text{ impar} . \end{cases}$$

Ahora usaremos esta propiedad del anti-conmutador deformado  $\{, \}_{*k}$  para simplificar el cálculo del parámetro de norma  $\Lambda^{n+1}$ . Para esto, comencemos analizando los órdenes más bajos de parámetro  $\widehat{\Lambda}$ . En la sección 5.4 se calcularon las correcciones no conmutativas del parámetro  $\widehat{\Lambda}$  a primer y segundo orden, obteniendo  $\Lambda^1 = 0$  y  $\Lambda^2 = 0$ . Ahora asumiremos que esto es válido hasta el  $n$ -ésimo orden, es decir,  $\Lambda^k = 0$  con  $k = 1, \dots, n$ ; nos gustaría mostrar que esta hipótesis implica que la expresión

$$\Lambda^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu_1\nu_1} \left( \{A_{\mu_1}^n, \partial_{\nu_1}\lambda\} + \sum_{s=1}^n \{A_{\mu_1}^{n-s}, \partial_{\nu_1}\lambda\}_{*s} \right), \quad (\text{A.1.3})$$

también se anula para el  $(n+1)$ -ésimo orden. Para obtener la expresión (A.1.3) hemos asumido que  $\Lambda^k = 0$  para  $k \neq 0$  en la ecuación (A.1.2).

Por otro lado, en la sección 5.3 discutimos la forma explícita para las perturbaciones del potencial de norma  $\widehat{A}_\mu$  hasta cuarto orden, es decir, para  $A_k^n$  donde  $n = 1, \dots, 4$ . Además de esto, se observó que estos potenciales presentan una simetría muy particular y se conjeturó que esta simetría debe preservarse a todos los ordenes, entonces asumiremos que los potenciales se pueden escribir como:

$$A_k^n = -\epsilon_{ki}x^i f_n, \quad (\text{A.1.4})$$

donde  $f_n$  son funciones que tienen la siguiente dependencia  $f_n = f_n(x^2, y^2, z)$ . Este resultado es fundamental para los propósitos de este trabajo, es decir, sólo usaremos la forma de los potenciales  $A_k^n$  y la dependencia funcional de  $f_n$  sin tener la necesidad de conocer explícitamente la forma de estas funciones. Usando un procedimiento similar al empleado en (5.4.3), obtenemos que el primer término de la ecuación (A.1.3) es nulo:  $\theta^{\mu_1\nu_1}\{A_{\mu_1}^n, \partial_{\nu_1}\lambda\} = 0$ . Para el segundo término de (A.1.3) necesitamos calcular la expresión general  $\theta^{\mu_1\nu_1}\{A_{\mu_1}^{n-s}, \partial_{\nu_1}\lambda\}_{*s}$ . De acuerdo con la propiedad del anticonmutador  $\{, \}_{*s}$ , todas las contribuciones con  $s$  impar son nulas y las contribuciones para  $s$  par son:

$$\sum_{s=1}^n \theta^{\mu_1\nu_1} \{A_{\mu_1}^{n-s}, \partial_{\nu_1}\lambda\}_{*s} = 2 \sum_{s=1}^n \theta^{\mu_1\nu_1} A_{\mu_1}^{n-s} *^s \partial_{\nu_1}\lambda.$$

A continuación, calcularemos este anti-conmutador para el caso más general, teniendo en cuenta únicamente la dependencia en las coordenadas de los potenciales de norma y del parámetro de norma. Para esto usaremos por simplicidad la siguiente notación para los potenciales de norma  $A_{\mu_1}^{n-s} \rightarrow A_{\mu_1}$ . Por lo tanto sólo necesitamos enfocarnos en calcular el siguiente término

$$\theta^{\mu_1\nu_1} A_{\mu_1} *^n \partial_{\nu_1}\lambda = \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_{n+1}\nu_{n+1}} \partial_{\mu_{n+1}} \dots \partial_{\mu_2} A_{\mu_1} \partial_{\nu_{n+1}} \dots \partial_{\nu_2} \partial_{\nu_1}\lambda.$$

Ahora, usando la forma simetría del potencial y del parámetro de norma  $A_{\mu_1} = -\epsilon_{\mu_1 i} x^i f$  y  $\partial_{\nu_1}\lambda = -\epsilon_{\nu_1 j} x^j g$ , podemos calcular las derivadas del lado derecho de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\partial_{\mu_{n+1}} \cdots \partial_{\mu_2} A_{\mu_1} &= -\epsilon_{\mu_1 i} \left( \delta_{\mu_2}^i \partial_{\mu_3} \cdots \partial_{\mu_{n+1}} f + \cdots + \delta_{\mu_{n+1}}^i \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} f + x^i \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_{n+1}} f \right) \\ \partial_{\nu_{n+1}} \cdots \partial_{\nu_2} \partial_{\nu_1} \lambda &= -\epsilon_{\nu_1 j} \left( \delta_{\nu_2}^j \partial_{\nu_3} \cdots \partial_{\nu_{n+1}} g + \cdots + \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n} g + x^j \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_{n+1}} g \right).\end{aligned}$$

En consecuencia el producto  $\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1} *^n \partial_{\nu_1} \lambda$  se puede desarrollar como

$$\begin{aligned}\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1} *^n \partial_{\nu_1} \lambda &= \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta \theta^{\mu_2 \nu_2} \cdots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} \left[ \left( \delta_{\mu_2}^i \partial_{\mu_3} \cdots \partial_{\mu_{n+1}} f + \cdots + \delta_{\mu_{n+1}}^i \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} f \right) \right. \\ &\quad \times \epsilon_{ij} x^j \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_{n+1}} g + \epsilon_{ij} x^i \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_{n+1}} f \left( \delta_{\nu_2}^j \partial_{\nu_3} \cdots \partial_{\nu_{n+1}} g + \cdots + \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n} g \right) \\ &\quad + \epsilon_{ij} x^i x^j \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_{n+1}} g + \left( \delta_{\mu_2}^i \partial_{\mu_3} \cdots \partial_{\mu_{n+1}} f + \cdots + \delta_{\mu_{n+1}}^i \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} f \right) \\ &\quad \left. \times \epsilon_{ij} \left( \delta_{\nu_2}^j \partial_{\nu_3} \cdots \partial_{\nu_{n+1}} g + \cdots + \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n} g \right) \right],\end{aligned}\tag{A.1.5}$$

donde hemos usado  $\theta^{\mu_1 \nu_1} = \theta \epsilon^{\mu_1 \nu_1}$ . Los dos primeros términos de esta ecuación, los cuales se denotaran por  $S_n$ , se pueden escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta \theta^{\mu_2 \nu_2} \cdots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} \left( \epsilon_{\mu_2 j} x^j \partial_{\mu_3} \cdots \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_2} [\partial_{\nu_3} \cdots \partial_{\nu_{n+1}} g] + \cdots \right. \\ &\quad + \epsilon_{\mu_{n+1} j} x^j \partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} f [\partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n}] \partial_{\nu_{n+1}} g + \epsilon_{i \nu_2} x^j \partial_{\mu_2} [\partial_{\mu_3} \cdots \partial_{\mu_{n+1}} f] \partial_{\nu_3} \cdots \partial_{\nu_{n+1}} g + \cdots \\ &\quad \left. + \epsilon_{i \nu_{n+1}} x^i [\partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n}] \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n} g \right),\end{aligned}\tag{A.1.6}$$

o de manera equivalente, renombrando los índices mudos, podemos escribir esta expresión en términos de derivadas totales:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta \theta^{\mu_2 \nu_2} \cdots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} \left( \epsilon_{\mu_2 j} x^j \partial_{\nu_2} [\partial_{\mu_3} \cdots \partial_{\mu_n} f \partial_{\nu_3} \cdots \partial_{\nu_n} g] + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{\mu_{n+1} j} x^j \partial_{\nu_{n+1}} [\partial_{\mu_2} \cdots \partial_{\mu_n} f \partial_{\nu_2} \cdots \partial_{\nu_n} g] \right).\end{aligned}\tag{A.1.7}$$

Esta expresión se puede escribir en términos de productos Moyál, es decir:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n} \left( \frac{i}{2} \right) \theta \sum_{s=2}^{n+1} \theta^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s j} x^j \partial_{\nu_s} (f *^{n-1} g) \\ &= \frac{i}{2} \theta^2 x^j \partial_j (f *^{n-1} g).\end{aligned}\tag{A.1.8}$$

donde hemos usado  $\theta^{\mu\alpha} \epsilon_{\mu\beta} = \theta \delta_\beta^\alpha$  y  $\sum_{s=2}^{n+1} 1 = n$  para obtener este resultado.

El tercer término de (A.1.5) es claramente cero debido a que  $\epsilon_{ij}$  es un tensor antisimétrico y entonces  $\epsilon_{ij} x^i x^j = 0$ . Para el último término de la ecuación (A.1.5) se puede ver como un arreglo

matricial de  $n \times n$  si lo reescribimos como sigue

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} \epsilon_{ij} \\ & \times \left[ \delta_{\mu_2}^i \delta_{\nu_2}^j \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g + \dots + \delta_{\mu_2}^i \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g \right. \\ & \quad \vdots \quad \ddots \\ & \left. + \delta_{\mu_{n+1}}^i \delta_{\nu_2}^j \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g + \dots + \delta_{\mu_{n+1}}^i \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g \right], \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

donde los elementos de la diagonal dentro del paréntesis están dados por

$$\frac{1}{n} \left( \frac{i}{2} \right) \theta \sum_{s=2}^{n+1} \theta^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s \nu_s} f *^{n-1} g = i\theta^2 (f *^{n-1} g), \quad (\text{A.1.10})$$

donde hemos usado  $\theta^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s \nu_s} = \theta \epsilon^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s \nu_s} = 2\theta$  y  $\sum_{s=2}^{n+1} 1 = n$ . Para el resto de los elementos de la matriz obtenemos

$$\frac{1}{n} \left( \frac{i}{2} \right) \theta \sum_{r \neq s=2}^{n+1} \theta (f *^{n-1} g) = \frac{i\theta^2}{2n} (n^2 - n) (f *^{n-1} g), \quad (\text{A.1.11})$$

donde hemos usado  $\theta^{\mu_r \nu_r} \epsilon_{\mu_r \nu_r} = \theta \delta_{\nu_r}^{\nu_r}$  y la suma tiene el valor  $\sum_{r \neq s=2}^{n+1} 1 = n^2 - n$ .

Combinando las ecuaciones (A.1.8), (A.1.10) y (A.1.11), se puede derivar la siguiente fórmula recursiva para (A.1.5):

$$\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1} *^n \partial_{\nu_1} \lambda = \frac{i\theta^2}{2n} [(n^2 + n) f *^{n-1} g + n x^j \partial_j (f *^{n-1} g)], \quad (\text{A.1.12})$$

donde se ha asumido que  $n$  es par. Este resultado nos dice que para calcular el producto  $\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1} *^n \partial_{\nu_1} \lambda$  necesitamos conocer el producto  $f *^{n-1} g$ .

En la sección 5.3 vimos que las funciones  $f$  y  $g$  son funciones cuadráticas de las coordenadas cartesianas  $x$  y  $y$ ; en consecuencia las derivadas de estas funciones tienen una forma muy particular, es decir,  $\partial_i f = x^i F$  y  $\partial_i g = x^i G$ , para  $i = 1, 2$  donde estas funciones  $F$  y  $G$  nuevamente son funciones cuadráticas en  $x$  y  $y$ . Con estos elementos en la mano calculamos el producto Moyal entre las funciones  $f$  y  $g$  a un orden arbitrario:

$$f *^m g = \frac{1}{m!} \left( \frac{i}{2} \right)^m \theta^{\mu_m \nu_m} \dots \theta^{\mu_1 \nu_1} \partial_{\mu_m} \dots \partial_{\mu_2} (x_{\mu_1} F) \partial_{\nu_m} \dots \partial_{\nu_2} (x_{\nu_1} G).$$

Para esto, primero calculamos las derivadas de  $f$  y  $g$ :

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_m} \dots \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_1} f &= (\delta_{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_m} F + \dots + \delta_{\mu_1 \mu_m} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{m-1}} F + x_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_m} F), \\ \partial_{\nu_m} \dots \partial_{\nu_2} \partial_{\nu_1} g &= (\delta_{\nu_1 \nu_2} \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_m} G + \dots + \delta_{\nu_1 \nu_m} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_{m-1}} G + x_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_m} G). \end{aligned}$$

Por lo tanto el producto  $f *^m g$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 f *^m g &= \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{2}\right)^m \theta^{\mu_m \nu_m} \dots \theta^{\mu_1 \nu_1} [(\delta_{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_m} F + \dots + \delta_{\mu_1 \mu_m} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{m-1}} F) \\
 &\quad \times x^{\nu_1} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_m} G + (\delta_{\nu_1 \nu_2} \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_m} G + \dots + \delta_{\nu_1 \nu_m} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_{m-1}} G) x^{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_m} F \\
 &\quad + x^{\mu_1} x^{\nu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_m} F \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_m} G + (\delta_{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_m} F + \dots + \delta_{\mu_1 \mu_m} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{m-1}} F) \\
 &\quad \times (\delta_{\nu_1 \nu_2} \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{m-1}} G + \dots + \delta_{\nu_1 \nu_m} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} G)]. \tag{A.1.13}
 \end{aligned}$$

Siguiendo una manipulación algebraica similar a la empleada en la ecuación (A.1.5), se puede derivar la siguiente fórmula recursiva para  $f *^m g$

$$f *^m g = \frac{\theta^2}{m(m-1)} \left(\frac{i}{2}\right)^2 [(m^2 - m) F *^{m-2} G + (m-1) x^j \partial_j (F *^{m-2} G)], \tag{A.1.14}$$

de donde hemos obtenido que para calcular el producto  $f *^m g$  necesitamos calcular productos  $F *^{m-2} G *^{m-2}$ , es decir, productos de dos ordenes menor. Es importante notar que esta relación recursiva es válida para cualquiera funciones  $f, g, F$  y  $G$  tales que son funciones cuadráticas en  $x$  y  $y$ ; además están relacionadas de la siguiente manera:  $\partial_i f = x^i F$  y  $\partial_i g = x^i G$ , para  $i = 1, 2$ .

Ahora recordemos que en (A.1.12) necesitamos calcular el producto  $f *^{n-1} g$ , por lo tanto si elegimos  $m = n - 1$ , obtenemos

$$f *^{n-1} g = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)} \left(\frac{i}{2}\right)^2 [(n^2 - 3n + 2) F *^{n-3} G + (n-2) x^j \partial_j (F *^{n-3} G)]. \tag{A.1.15}$$

Este resultado nos dice que para calcular el producto de la forma  $f *^{n-1} g$  necesitamos conocer el valor de  $F *^{n-3} G$ . Por lo tanto, si usamos de manera reiterativa la ecuación (A.1.14) para calcular los productos que aparecen en (A.1.15), podemos concluir que sólo necesitamos conocer el producto a menor orden  $f' *^1 g'$  para poder determinar el producto a orden mayor  $f *^{n-1} g$ , donde hemos asumido que  $n$  es un entero par. Ahora si tomamos  $n = 2$  en la ecuación (A.1.15) obtenemos  $f *^1 g = 0$  y por lo tanto se deduce que  $f *^{n-1} g = 0$  para  $n$  par.

Usando este resultado en (A.1.12), obtenemos entonces que  $\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1} *^n \partial_{\nu_1} \lambda = 0$ ; esto a su vez implica que el segundo termino en (A.1.3) también se anula. Con esto hemos demostrado que el parámetro de norma a todos los ordenes  $\Lambda^{n+1} = 0$  y por lo tanto  $\widehat{\Lambda} = \lambda^0$ . Este resultado implica que la condición de cuantización de Dirac se satisface.

## Apéndice B

# La ecuación de Schrödinger en campo electromagnético

En la mecánica clásica, podemos describir el movimiento de una partícula usando una ley de fuerza de Lorentz, que contiene campos, o usando el formalismo canónico y la función de Hamilton, la cual se expresa en términos de potenciales. Pero si queremos describir la dinámica de la partícula en la mecánica cuántica, nos vemos obligados a utilizar el formalismo canónico porque la ecuación de Schrödinger contiene explícitamente la función de Hamilton. Para una partícula con carga  $e$  en presencia de un campo electromagnético el hamiltoniano es de una forma

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - e\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + e\phi(\vec{r}) + V(\vec{r}),$$

donde  $V$  representa un posible potencial no eléctrico. Si escribimos el momento en la forma  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$  y ponemos el Hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger, obtenemos

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + e\phi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (\text{B.0.1})$$

la cual describe la dinámica de la partícula cargada en el campo electromagnético.

Para propósitos de este trabajo consideremos el caso de una partícula cargada en las proximidades de un monopolo magnético con un campo magnético  $\vec{B}$ . Para resolver la ecuación de Schrödinger, primero debemos determinar los potenciales  $\vec{A}$  y  $\phi$ . Debido a que estamos considerando que el campo externo es debido a un monopolo magnético, el campo eléctrico es nulo  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = 0$ , entonces elegimos  $\phi = 0$ , que satisface la ecuación anterior. Por lo tanto podemos simplificar la ecuación (B.0.1) como

$$\frac{1}{2m} \left( i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (\text{B.0.2})$$

La incorporación hecha por Dirac de una interacción electromagnética mediante una fase  $e^{ig(\vec{r},t)}$  en la función de onda  $\Psi(\vec{r},t) = e^{ig(\vec{r},t)}\Psi'(\vec{r},t)$ , con  $g(\vec{r},t)$  real de tal forma que el módulo de  $e^{ig(\vec{r},t)}$  es uno. El factor de fase  $g(\vec{r},t)$  conocido como fase no integrable permite identificar el potencial vectorial  $\vec{A}(\vec{r}) = (\hbar/e)\vec{\nabla}g(\vec{r})$ . La única condición es que el cambio del factor de fase  $\oint \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

después de dar un giro a lo largo de la trayectoria cerrada  $l$  que rodea dicho punto debe ser un múltiplo de  $2\pi$ . Este cambio de fase se interpreta como el flujo de un campo magnético  $\Phi_m$  a través de la superficie  $\sigma$  delimitada por la frontera  $l$ , es decir, usando el teorema de Stokes podemos obtener

$$\oint_l \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{x} = \int_{\sigma} [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] \cdot d\vec{s} = \int_{\sigma} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{\sigma} = \Phi_m.$$

Ahora, usando la idea de Dirac de incorporar la interacción de un campo electromagnético mediante una fase en la función de onda de la ecuación de Schrodinger (B.0.1), es decir

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{ig(\vec{r})} \Psi'(\vec{r}, t),$$

donde

$$g(\vec{r}) \equiv \frac{e}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (\text{B.0.3})$$

El punto inicial de integración  $O$  se elige de forma arbitraria, lo que es consecuencia de la libertad de norma para potenciales electromagnéticos. En este punto, es crucial que el potencial  $\vec{A}$  sea irrotacional (el campo  $\vec{B}$  es cero), de lo contrario,  $g(\vec{r})$  dependerá de la ruta de integración en la ecuación (B.0.3), por lo que la fase (B.0.3) no será una función exclusiva de  $\vec{r}$ .

En términos de  $\Psi'$  el gradiente de  $\Psi$  es

$$\vec{\nabla} \Psi = e^{ig(\vec{r})} \vec{\nabla} (ig(\vec{r})) \Psi' + e^{ig(\vec{r})} (\vec{\nabla} \Psi').$$

Ya que  $\vec{\nabla} g(\vec{r}) = (e/\hbar) \vec{A}(\vec{r})$ ,

$$(i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r})) \Psi = i\hbar e^{ig(\vec{r})} \vec{\nabla} \Psi',$$

y además

$$(i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}))^2 \Psi = -\hbar^2 e^{ig(\vec{r})} \vec{\nabla}^2 \Psi'.$$

Poniendo este resultado en la ecuación (B.0.1) y cancelando el factor  $e^{ig(\vec{r})}$ , obtenemos

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}. \quad (\text{B.0.4})$$

De este resultado podemos que la función de onda  $\Psi'$  es una solución de la ecuación de Schrödinger en ausencia de potencial vectorial  $\vec{A}$ . Entonces, si podemos resolver la ecuación (B.0.4), la solución en presencia del campo vectorial  $\vec{A}$  es la misma función de onda, multiplicada por el factor de fase  $e^{ig(\vec{r})}$ .

## Apéndice C

# Representaciones de $SU(2)$

En este apéndice proporcionamos detalles de la parametrización del grupo  $SU(2)$  y formas diferenciales en el espacio de grupo. Una representación arbitraria del grupo  $SU(2)$  viene dada por el conjunto de tres generadores  $T_k$ , que satisfacen el álgebra de Lie

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k,$$

donde  $\varepsilon_{123} = 1$ . Los elementos del grupo están dados por la matriz  $U = \exp\{i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}\}$ , donde los elementos del grupo en la representación fundamental  $T_k = \frac{1}{2}\sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , donde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

son las matrices de Pauli estándar, las cuales satisfacen la relación

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k.$$

El vector  $\boldsymbol{\omega}$  tiene componentes  $\omega_k$  en un sistema de coordenadas dado.

Geoméricamente, las matrices  $U$  son generadores de las rotaciones de los espinores en un espacio de tres dimensiones  $\mathbb{R}^3$  y los parámetros  $\omega_k$  son los ángulos de rotación correspondientes. La parametrización de Euler de una matriz arbitraria de la transformación  $SU(2)$  se define en términos de tres ángulos  $\theta$ ,  $\varphi$  y  $\psi$  como

$$\begin{aligned} U(\varphi, \theta, \psi) &= U_z(\varphi)U_y(\theta)U_z(\alpha) = e^{i\sigma_3 \frac{\varphi}{2}} e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} e^{i\sigma_3 \frac{\psi}{2}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\psi+\varphi)} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\psi-\varphi)} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i(\psi-\varphi)} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\psi+\varphi)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C.0.1}$$

Por lo tanto, la variedad de grupo  $SU(2)$  es isomorfo a la tres esferas  $S^3$ . Los ángulos de Euler  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$  toman valores dentro de los intervalos  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  y  $0 \leq \alpha \leq 4\pi$ . Tenga en cuenta que la reducción al espacio paramétrico del grupo ortogonal  $SO(3)$  se puede obtener si fijamos el rango de valores del ángulo  $\alpha$ , el cual debe restringirse al intervalo  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  y hacer la identificación  $\alpha \sim \alpha + 2\pi$ .

## Apéndice D

# Cuaterniones

El espacio euclidiano tetradsimensional  $\mathbb{R}^4$  es un espacio bastante especial, ya que admite una estructura multiplicativa natural. Esto se vuelve muy importante para aclarar la descripción de los espacios de parámetros de los monopolos.

Consideremos un conjunto de matrices complejas de  $2 \times 2$  en  $\mathcal{R}^4$ , las cuales de cierran bajo la adición y multiplicación de la matrices por escalares reales y, por lo tanto, se puede considerar como un verdadero espacio vectorial. Las bases del espacio  $\mathcal{R}^4$  está dada por el conjunto de matrices

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_1, & e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2, \\ e_3 &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3, & e_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2, \end{aligned}$$

las cuales satisfacen el álgebra

$$e_4 e_\mu = e_\mu e_4 = e_\mu, \quad e_n e_m = -\delta_{nm} + \varepsilon_{nmk} e_k \quad (n, m, k = 1, 2, 3). \quad (\text{D.0.1})$$

La base  $\{e_\mu\}$  proporciona un isomorfismo natural de  $\mathcal{R}^4$  a  $\mathbb{R}^4$  dado por el mapeo

$$X = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 + e_4 x_4 \rightarrow x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Dado que la base  $\{e_\mu\}$  es ortonormal, este mapeo no cambia la norma  $\|X\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  y tal isomorfismo es una isometría. Tenga en cuenta que una matriz  $X$  del espacio  $\mathcal{R}^4$  se puede escribir como

$$X = \begin{pmatrix} x_1 - ix_4 & -ix_2 - x_3 \\ -ix_2 + x_3 & x_1 + ix_4 \end{pmatrix},$$

por lo tanto la norma se puede escribir  $\|X\|^2 = \det X$ .

Las relaciones de conmutación (D.0.1) es un caso particular de la bien conocida álgebra de cuaterniones. El espacio de los cuaterniones  $\mathcal{H}$  se puede escribir como el conjunto de matrices complejas  $\mathcal{R}^4$  equipado con un conjunto de operaciones matriciales estándares, o como el espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  con estructura multiplicativa.

Como  $e_4$  es una identidad multiplicativa, podemos escribir un cuaternario arbitrario como  $X = x_4 + x_n e_n$ . La operación de la conjugación cuaterniónica se define de la siguiente manera

$$X \rightarrow \bar{X} = x_\mu \bar{e}_\mu = x_4 - x_n e_n.$$

Por lo tanto, si un cuaternión  $X$  se considera como una matriz en  $\mathcal{R}^4$ , su conjugado  $\bar{X}$  es la matriz de transpuesta conjugada. El producto de dos cuaterniones se puede calcular utilizando las relaciones (D.0.1). En particular, tenemos  $\bar{X}X = X\bar{X} = \|X\|^2$ . Las partes real e imaginaria de un cuaternión son

$$\operatorname{Re}X = \frac{1}{2}(X + \bar{X}) = X_4, \quad \operatorname{Im}X = \frac{1}{2}(X - \bar{X}) = X_n e_n.$$

Los cuaterniones cuya parte imaginaria es igual a cero se llaman cuaterniones reales. Una unidad quaternion satisface la relación  $\|X\|^2 = 1$ . Claramente, estos cuaterniones corresponden a los elementos de  $\mathcal{R}^4$  con determinante de valor uno, es decir, el grupo cuaterniones unitarios es realmente el grupo  $SU(2)$ . Su espacio de grupo es una esfera  $S^3$  surge de manera natural como un subespacio de  $\mathbb{R}^4$ .

Las nociones cuaterniónicas hacen que muchas relaciones sean compactas y transparentes. Por ejemplo, las matrices euclidianas de Dirac  $\gamma_\mu$  simplemente se vuelven

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & e_\mu \\ \bar{e}_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Como el conjunto de cuaterniones unitarios forma el grupo  $SU(2)$ , las propiedades de transformación de vectores y espinores también se pueden escribir en notaciones cuaterniónicas. Recuerde que las transformaciones del grupo  $SU(2)$  se pueden descomponer en rotaciones izquierda y derecha como  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ . La unidad cuaternión  $X$  y  $Y$  se puede establecer en correspondencia con los elementos de estos subgrupos:  $X \rightarrow x \in SU(2)_L$ ,  $Y \rightarrow y \in SU(2)_R$ . Entonces un cuaternión vector se transforma como  $v \rightarrow X v \bar{Y}$ , mientras que los cuaterniones espinores  $s, c$ , que corresponde a las representaciones del grupo Lorentz  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$ , respectivamente, transforman como

$$s \rightarrow X s; \quad c \rightarrow Y c.$$

En esta notación, la ecuación de Dirac euclideana para un espinor sin masa se puede escribir

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ \bar{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

donde  $D \equiv e_\mu D_\mu$  es el operador de Dirac cuaterniónico y  $\bar{D} \equiv \bar{e}_\mu D_\mu$ . Este sistema se puede desacoplar en par de ecuaciones de Weyl que describe fermiones sin masa de una quiralidad dada:

$$Dc = 0, \quad \bar{D}s = 0.$$

El operador  $D\bar{D} = D_\mu D_\mu$  es el operador de Laplace usual.

Los cuaterniones (pseudo)-scalares y (pseudo)-tensor pueden construirse por multiplicación de los cuaterniones espinoriales y vectores. Tomemos, por ejemplo, dos vectores  $v = v_\mu e_\mu$  y  $w = w_\mu e_\mu$ . Uno encuentra fácilmente que las partes reales de los productos cuaterniónicos  $v\bar{w}$  y  $\bar{v}w$  se transforman como escalares mientras su parte imaginaria transforma como un auto-dual y anti-auto-dual tensor anti-simétrico de segundo rango, respectivamente. En particular, la ecuación cuaternionica

$$\bar{D}v = 0,$$

la cual define el vector tangente  $T_v$ , puede escribirse en notación de componentes como

$$D_\mu v_\mu = 0, \quad D_\mu v_\nu - D_\nu v_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D_\rho v_\sigma = 0. \quad (\text{D.0.2})$$

La segunda de estas ecuaciones es la ecuación auto-dual para el tensor  $F_{\mu\nu} = D_\mu v_\nu - D_\nu v_\mu$ .

# Apéndice E

## Geometría compleja

Mientras que el espacio de parámetros siempre viene con una métrica que define la conexión afín y el tensor de curvatura, los espacios de parámetros de los solitones a menudo están dotados de estructuras adicionales, tales como las estructuras Kähler e hiper-Kähler que son requeridas por las restricciones en la dinámica impuesta. En este apéndice, esbozamos algunos conceptos básicos e ideas en geometría compleja que son de cierta relevancia para el espacio parámetros asociado a los monopolos magnéticos.

### E.1. Estructura compleja e integrabilidad

Una variedad es "casi compleja" si hay un campo de tensor  $J_n^m$  que gira cualquier vector tangente 90 grados. Dado que girar 90 grados dos veces invierte la dirección, una forma invariante de expresar esta condición es

$$J_n^m J_k^m = -\delta_k^n.$$

Un ejemplo para ilustrar esto es el plano complejo, donde la acción de  $J$  es inducida por la multiplicación de un factor de  $i$  a números complejos. En términos de campos vectoriales holomórficos y antiholomórficos, la acción de  $J$  es diagonal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow -i \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &\rightarrow +i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Sin embargo, esta  $J$  en particular satisface muchas más propiedades que una "estructura casi completa" genérica.

La idea de una variedad compleja debería ser que podemos escribir la variedad localmente por  $\mathbb{C}^n$ , así como una variedad real es algo que es localmente  $\mathbb{R}^m$ . La razón por la que una variedad con  $J^2 = -1$ , se llama casi compleja es que, sin una condición de integrabilidad adicional en  $J$ , no hay garantía de que exista un sistema de coordenadas holomórficas  $z^k$  y que podamos escribir  $J$  en una forma simple como la anterior. Para que la variedad sea realmente compleja, una estructura casi compleja debe satisfacer la condición de integrabilidad

$$0 = J_n^m (\partial_m J_l^k - \partial_l J_m^k) - J_l^m (\partial_m J_n^k - \partial_n J_m^k).$$

La expresión del lado derecho es conocido como el tensor de Nijenhuis. Si se cumple esta condición, la variedad se puede equipar con coordenadas holomórficas y antiholomórficas en las que  $J$  actúa diagonalmente, como en el ejemplo del plano complejo. Tal tensor  $J$  se llama una estructura compleja.

El tensor de Nijenhuis se puede considerar como un mapeo  $N$  de un par de campos de vectores a un tercer campo vectorial,

$$\frac{1}{2}N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY].$$

Tenga en cuenta que si existe un sistema de coordenadas holomórficas, como se indicó anteriormente, podemos escribir cualquier campo vectorial  $X$  en términos de esta base de coordenadas para que pueda descomponerse en un campo vectorial tipo  $(1, 0)$  y en un campo vectorial tipo  $(0, 1)$ ,

$$X = x^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \bar{x}^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}.$$

Entonces es sencillo mostrar que el tensor de Nijenhuis que actúa sobre cualquier par de campos de vectores es cero, lo que muestra que la condición  $N \equiv 0$  es necesaria para la integrabilidad. Los únicos hechos que debemos usar para esto son que  $J$  actúa linealmente y eso

$$JX = -ix^k \frac{\partial}{\partial z^k} + i\bar{x}^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}.$$

De manera más abstracta, la integrabilidad  $N \equiv 0$  sigue si el conmutador de un par de campos vectoriales de  $(1, 0)$  tipo vuelve a ser de tipo  $(1, 0)$  y si la declaración correspondiente se cumple para campos vectoriales de tipo  $(0, 1)$ .

## E.2. Variedades Kähler e hiper-Kähler

Una variedad puede equiparse con una métrica, como en el caso del espacio de parámetros. Una estructura compleja se define sin referencia a la métrica, pero aún se puede preguntar si debería existir una condición de compatibilidad entre estas dos superestructuras. Una cosa obvia que se requiere es que una "rotación de 90 grados" generada por  $J$  es una simetría de la métrica. Es decir, debe dejar la métrica invariante, de modo que

$$g(X, Y) = g(JX, JY)$$

para cualquier par de vectores  $X$  y  $Y$ . Esto se llama condición de Hermiticidad. Además, cuando una variedad tiene una métrica, también hereda una conexión Levi-Civita que le permite a uno transportar tensores paralelamente. Entonces una condición natural compatible de cualquier superestructura en una variedad con métrica es que sea covariantemente constante. Una variedad compleja con una estructura compleja  $J$  y una métrica hermitiana  $g$  se llama Kähler si

$$\nabla J = 0.$$

Debemos de tener en cuenta que para que la variedad sea compleja,  $J$  debe satisfacer la condición de integrabilidad, lo que restringe al gradiente de  $J$ . Además, dado que las derivadas en la definición del tensor de Nijenhuis se promocionan a derivadas covariantes en una variedad con una métrica

hermitiana y con su conexión afín, algunos términos en  $\nabla J$  desaparecen si la variedad es compleja. Resulta que los términos restantes se pueden agrupar en otro tensor, que desaparece si y solo si la 2-forma de Kähler

$$w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu} = g_{\mu\gamma} J^{\gamma}{}_{\nu}$$

es cerrada, es decir, si tomamos la derivada exterior de la 2-forma  $w$  esta debe anularse

$$dw = 0.$$

Por el contrario, si  $\nabla J = 0$  y la métrica es hermitiana, el tensor Nijenhuis desaparece y la 2-forma de Kähler es cerrada. Tal variedad se llama Kähler. Una variedad se llama cuaterniónica si existen tres estructuras complejas tales que  $(J^{(s)})^m_n$  satisfacen la condición de integrabilidad y que adicionalmente obedecen la siguiente relación algebraica

$$\left(J^{(s)}\right)^{\mu}{}_{\gamma} \left(J^{(t)}\right)^{\gamma}{}_{\nu} = -\delta^{st} \delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{stu} \left(J^{(u)}\right)^{\mu}{}_{\nu}$$

en cada punto. La idea es, una vez más, que la variedad pueda equiparse con un sistema de coordenadas local que se modelan a continuación en el espacio cuaterniónico  $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{4n}$ .

Cuando una variedad cuaterniónica tiene una métrica, entonces, podemos requerir de manera similar que esta métrica sea hermitiana con respecto a las tres estructuras complejas y que, además, las tres 2-formas de Kähler

$$w_{\mu\nu}^{(s)} = g_{\mu\gamma} \left(J^{(s)}\right)^{\gamma}{}_{\nu}$$

sean cerradas

$$dw^{(s)} = 0.$$

Si una estructura cuaterniónica tiene estas propiedades, la variedad se llama hiper-Kähler. Debido a que hay tres estructuras complejas conservadas covariantemente, el tensor de curvatura está aún más restringido. Una variedad hiper-Kähler,  $4n$ -dimensional tiene una estructura simpléctica de grupo; es decir, el grupo de estructura de su haz tangente es  $Sp(2n)$ .

# Bibliografía

- [1] David Hestenes. *New Foundations for Classical Mechanics*. Springer Netherlands, 2nd edition edition, 1999.
- [2] Paul A. M. Dirac. The fundamental equations of quantum mechanics. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A109:642–653, 1925.
- [3] P. A. M. Dirac. On quantum algebra. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 23:412–418, 1926.
- [4] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, 1947.
- [5] H. Weyl. Quantenmechanik und Gruppentheorie. *Zeitschrift für Physik*, 46(1):1–46, Nov 1927.
- [6] H.J. Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, 12(7):405 – 460, 1946.
- [7] J. E. Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 45:99–124, 1949.
- [8] F Bayen, M Flato, C Fronsdal, A Lichnerowicz, and D Sternheimer. Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. *Annals of Physics*, 111(1):61 – 110, 1978.
- [9] F Bayen, M Flato, C Fronsdal, A Lichnerowicz, and D Sternheimer. Deformation theory and quantization. II. Physical applications. *Annals of Physics*, 111(1):111 – 151, 1978.
- [10] Alain Connes and John Lott. Particle models and noncommutative geometry. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 18(2):29 – 47, 1991.
- [11] Igor Pris and Thomas Schücker. Noncommutative geometry beyond the standard model. *Journal of Mathematical Physics*, 38(5):2255–2265, 1997.
- [12] C. P. Martin, Jose M. Gracia-Bondia, and Joseph C. Varilly. The Standard model as a non-commutative geometry: The Low-energy regime. *Phys. Rept.*, 294:363–406, 1998.
- [13] Bryce S. DeWitt. The Quantization of geometry. pages 266–381, 1962.
- [14] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, 09:032, 1999.
- [15] Prange, Richard E., Girvin, and Steven M. *The Quantum Hall Effect*. Springer-Verlag New York, 1990.

- [16] J. Bellissard, A. van Elst, and H. Schulz-Baldes. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. *Journal of Mathematical Physics*, 35(10):5373–5451, 1994.
- [17] Masashi Hamanaka. On reductions of noncommutative anti-self-dual Yang-Mills equations. *Phys. Lett.*, B625:324–332, 2005.
- [18] Kanehisa Takasaki. Anti-selfdual Yang-Mills equations on noncommutative space-time. *J. Geom. Phys.*, 37:291–306, 2001.
- [19] N.S. Manton. Monopole interactions at long range. *Physics Letters B*, 154(5):397 – 400, 1985.
- [20] N. S. Manton. Unstable Manifolds and Soliton Dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 60:1916–1919, May 1988.
- [21] Branislav Jurco, Lutz Moller, Stefan Schraml, Peter Schupp, and Julius Wess. Construction of nonAbelian gauge theories on noncommutative spaces. *Eur. Phys. J.*, C21:383–388, 2001.
- [22] Tsuguhiko Asakawa and Isao Kishimoto. Comments on gauge equivalence in noncommutative geometry. *JHEP*, 11:024, 1999.
- [23] Lutz Moller. Second order of the expansions of action functionals of the noncommutative standard model. *JHEP*, 10:063, 2004.
- [24] Andeas Bichl, Jesper Grimstrup, Harald Grosse, Lukas Popp, Manfred Schweda, and Raimar Wulkenhaar. Renormalization of the noncommutative photon selfenergy to all orders via Seiberg-Witten map. *JHEP*, 06:013, 2001.
- [25] Paul A. M. Dirac. Quantized Singularities in the Electromagnetic Field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A133:60–72, 1931.
- [26] David G. Boulware, Lowell S. Brown, Robert N. Cahn, S. D. Ellis, and Choonkyu Lee. Scattering on magnetic charge. *Phys. Rev. D*, 14:2708–2727, Nov 1976.
- [27] Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Phys. Rev. D*, 12:3845–3857, Dec 1975.
- [28] Miklos Langvik, Tapio Salminen, and Anca Tureanu. Magnetic Monopole in Noncommutative Space-Time and Wu-Yang Singularity-Free Gauge Transformations. *Phys. Rev.*, D83:085006, 2011.
- [29] Miklos Langvik and Tapio Salminen. Magnetic Monopoles in Noncommutative Space-Time: Second Order of Perturbation. *arXiv preprint arXiv:1104.1078*, 2011.
- [30] J. Arafune, P. G. O. Freund, and C. J. Goebel. Topology of Higgs fields. *Journal of Mathematical Physics*, 16(2):433–437, 1975.
- [31] F. A. Bais. SO(3) Monopoles and Dyons with Multiple Magnetic Charge. *Phys. Lett.*, 64B:465–468, 1976.
- [32] G.'t Hooft. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nuclear Physics B*, 79(2):276 – 284, 1974.

- [33] A. M. Polyakov. Particle spectrum in quantum field theory. *JETP LETTERS*, 20(6):194–95, 1974.
- [34] Howard Georgi and Sheldon L. Glashow. Gauge Theories Without Anomalies. *Phys. Rev. D*, 6:429–431, Jul 1972.
- [35] E. Corrigan, D.I. Olive, D.B. Fairlie, and J. Nuyts. Magnetic monopoles in SU(3) gauge theories. *Nuclear Physics B*, 106:475 – 492, 1976.
- [36] P Goddard and D I Olive. Magnetic monopoles in gauge field theories. *Reports on Progress in Physics*, 41(9):1357, 1978.
- [37] E. B. Bogomolny. Stability of Classical Solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 24:449, 1976. [*Yad. Fiz.*24,861(1976)].
- [38] Sidney Coleman, Stephen Parke, Andre Neveu, and Charles M. Sommerfield. Can one dent a dyon? *Phys. Rev. D*, 15:544–545, Jan 1977.
- [39] M. K. Prasad and Charles M. Sommerfield. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. *Phys. Rev. Lett.*, 35:760–762, Sep 1975.
- [40] Thomas W. Kirkman and Cosmas K. Zachos. Asymptotic analysis of the monopole structure. *Phys. Rev. D*, 24:999–1004, Aug 1981.
- [41] J Preskill. Magnetic Monopoles. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 34(1):461–530, 1984.
- [42] B. Julia and A. Zee. Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory. *Phys. Rev. D*, 11:2227–2232, Apr 1975.
- [43] R. S. Ward. A Yang-Mills-Higgs monopole of charge 2. *Comm. Math. Phys.*, 79(3):317–325, 1981.
- [44] Paul M. Sutcliffe. BPS monopoles. *Int. J. Mod. Phys.*, A12:4663–4706, 1997.
- [45] N. S. Manton. The Force Between 't Hooft-Polyakov Monopoles. *Nucl. Phys.*, B126:525–541, 1977.
- [46] Erick J. Weinberg. Parameter Counting for Multi-Monopole Solutions. *Phys. Rev.*, D20:936–944, 1979.
- [47] G.W. Gibbons and N.S. Manton. Classical and quantum dynamics of BPS monopoles. *Nuclear Physics B*, 274(1):183 – 224, 1986.
- [48] V. G. Kiselev and Ya. M. Shnir. Forced topological nontrivial field configurations. *Phys. Rev. D*, 57:5174–5183, Apr 1998.
- [49] C. Montonen and D. Olive. Magnetic monopoles as gauge particles? *Physics Letters B*, 72(1):117 – 120, 1977.
- [50] Dongsu Bak and Choon-kyu Lee. BPS dyon in a weak electromagnetic field: Equations of motion and radiation fields. *Nucl. Phys.*, B424:124–136, 1994.

- [51] E.A. Tolkachev V.I. Tereshenkov and L.M. Tomilchik. Lienard-Wiechert Potentials and Nons-tatic Monopole Type Solutions. 1989.
- [52] C.W. Misner and A.H. Taub. A Singularity-free Empty Universe. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 28:122, January 1969.
- [53] N.S. Manton. A remark on the scattering of BPS monopoles. *Physics Letters B*, 110(1):54 – 56, 1982.
- [54] Stephen L. Adler. Small deformations of the Prasad-Sommerfield solution. *Phys. Rev. D*, 19:2997–3007, May 1979.
- [55] Ratindranath Akhoury, Jung Hwan Jun, and Alfred S. Goldhaber. Linear deformations of the Prasad-Sommerfield monopole. *Phys. Rev. D*, 21:454–465, Jan 1980.
- [56] E. Mottola. Zero modes of the 't Hooft-Polyakov monopole. *Physics Letters B*, 79(3):242 – 244, 1978.
- [57] Emil Mottola. Normalizable solutions to the Dirac equation in the presence of a magnetic monopole. *Phys. Rev. D*, 19:3170–3172, May 1979.
- [58] Lowell S. Brown, Robert D. Carlitz, and Choonkyu Lee. Massless excitations in pseudoparticle fields. *Phys. Rev. D*, 16:417–422, Jul 1977.
- [59] N.S. Manton and T.M. Samols. Radiation from monopole scattering. *Physics Letters B*, 215(3):559 – 563, 1988.
- [60] D. Stuart. The geodesic approximation for the Yang-Mills-Higgs equations. *Communications in Mathematical Physics*, 166(1):149–190, Dec 1994.
- [61] Clifford Henry Taubes. Stability in Yang-Mills theories. *Comm. Math. Phys.*, 91(2):235–263, 1983.
- [62] M.F. Atiyah and N.J. Hitchin. Low energy scattering of non-Abelian monopoles. *Physics Letters A*, 107(1):21 – 25, 1985.
- [63] M. F. Atiyah and Nigel J. Hitchin. Low-energy scattering of nonAbelian magnetic monopoles. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A315:459–469, 1985. [547(1985)].
- [64] G. W. Gibbons and N. S. Manton. Classical and Quantum Dynamics of BPS Monopoles. *Nucl. Phys.*, B274:183–224, 1986.
- [65] M.F. Atiyah and N.J. Hitchin. *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles*. Princeton University Press, 1988.
- [66] Qaisar Shafi. *Theory and Detection of Magnetic Monopoles in Gauge Theories*, pages 327–377. WORLD SCIENTIFIC, 2013.
- [67] G. W. Gibbons and N. S. Manton. The Moduli space metric for well separated BPS monopoles. *Phys. Lett.*, B356:32–38, 1995.
- [68] Ki-Myeong Lee, Erick J. Weinberg, and Piljin Yi. The Moduli space of many BPS monopoles for arbitrary gauge groups. *Phys. Rev.*, D54:1633–1643, 1996.

- [69] Tohru Eguchi and Andrew J Hanson. Self-dual solutions to euclidean gravity. *Annals of Physics*, 120(1):82 – 106, 1979.
- [70] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Classification of gravitational instanton symmetries. *Comm. Math. Phys.*, 66(3):291–310, 1979.
- [71] Tohru Eguchi, Peter B. Gilkey, and Andrew J. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics Reports*, 66(6):213 – 393, 1980.
- [72] Roger Penrose. Nonlinear gravitons and curved twistor theory. *General Relativity and Gravitation*, 7(1):31–52, Jan 1976.
- [73] M. Ko, M. Ludvigsen, E.T. Newman, and K.P. Tod. The Theory of H-space. *Physics Reports*, 71(2):51 – 139, 1981.
- [74] Luis Alvarez-Gaume and Daniel Z. Freedman. Geometrical Structure and Ultraviolet Finiteness in the Supersymmetric Sigma Model. *Commun. Math. Phys.*, 80:443, 1981.
- [75] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstr/Åsöm, and M. Rocek. Hyper-K/Åshler metrics and supersymmetry. *Comm. Math. Phys.*, 108(4):535–589, 1987.
- [76] Ioannis Bakas and Konstadinos Sfetsos. Toda fields of SO(3) hyperKahler metrics and free field realizations. *Int. J. Mod. Phys.*, A12:2585–2612, 1997.
- [77] J. D. Gegenberg and A. Das. Stationary Riemannian space-times with self-dual curvature. *General Relativity and Gravitation*, 16(9):817–829, Sep 1984.
- [78] C. P. Boyer and J. D. Finley III. Killing vectors in self-dual, Euclidean Einstein spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 23(6):1126–1130, 1982.
- [79] G. W. Gibbons and P. J. Ruback. The hidden symmetries of multicentre metrics. *Comm. Math. Phys.*, 115(2):267–300, 1988.
- [80] N. Seiberg and E. Witten. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in  $N = 2$  supersymmetric QCD. *Nuclear Physics B*, 431(3):484 – 550, 1994.
- [81] N. Seiberg and E. Witten. Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in  $N=2$  supersymmetric Yang-Mills theory. *Nuclear Physics B*, 426(1):19 – 52, 1994.
- [82] and and. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 362(1711):425–461, 1978.
- [83] J. F. Plebanski. Some solutions of complex Einstein equations. *Journal of Mathematical Physics*, 16(12):2395–2402, 1975.
- [84] Charles P. Boyer and Jerzy F. Plebański. An infinite hierarchy of conservation laws and non-linear superposition principles for self-dual Einstein spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 26(2):229–234, 1985.
- [85] Jerzy F. Plebanski and Ivor Robinson. Left-Degenerate Vacuum Metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 37:493–495, Aug 1976.

- [86] A. García D. and J. F. Plebański. Seven parametric type-D solutions of einstein-maxwell equations in the basic left-degenerate representation. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 40(1):224–234, Jul 1977.
- [87] J. F. Plebański and G. F. Torres del Castillo. HH spaces with an algebraically degenerate right side. *Journal of Mathematical Physics*, 23(7):1349–1352, 1982.
- [88] I.A.B. Strachan. The Moyal algebra and integrable deformations of the self-dual Einstein equations. *Physics Letters B*, 283(1):63 – 66, 1992.
- [89] Kanehisa Takasaki. Dressing operator approach to Moyal algebraic deformation of selfdual gravity. *Journal of Geometry and Physics*, 14(2):111 – 120, 1994.
- [90] I. A. B. Strachan. A Geometry for multidimensional integrable systems. *J. Geom. Phys.*, 21:255–278, 1997.
- [91] D. Olivier. Complex coordinates and Kähler potential for the Atiyah-Hitchin metric. *General Relativity and Gravitation*, 23(12):1349–1362, Dec 1991.
- [92] J. F. Plebanski, M. Przanowski, B. Rajca, and J. Tosiek. The Moyal deformation of the second heavenly equation. *Acta Phys. Polon.*, B26:889–902, 1995.
- [93] Michael R. Douglas and Nikita A. Nekrasov. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, 73:977–1029, 2001.
- [94] Richard J. Szabo. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rept.*, 378:207–299, 2003.
- [95] Stefano Ansoldi, Piero Nicolini, Anaís Smailagic, and Euro Spallucci. Noncommutative geometry inspired charged black holes. *Phys. Lett.*, B645:261–266, 2007.



Parte IV

Artículos Publicados

PHYSICAL REVIEW D **94**, 105024 (2016)

## Noncommutative Dirac quantization condition using the Seiberg-Witten map

Marco Maceda<sup>\*</sup> and Daniel Martínez-Carbajal<sup>†</sup>

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,  
Avenida San Rafael Atlixco 186, A.P. 55-534, C.P. 09340, México D.F., Mexico*  
(Received 17 September 2016; published 28 November 2016)

The Dirac quantization condition (DQC) for magnetic monopoles in noncommutative space-time is analyzed. For this a noncommutative generalization of the method introduced by Wu and Yang is considered; the effects of noncommutativity are analyzed using the Seiberg-Witten map and the corresponding deformed Maxwell's equations are discussed. By using a perturbation expansion in the noncommutativity parameter  $\theta$ , we show first that the DQC remains unmodified up to the first and second order. This result is then generalized to all orders in the expansion parameter for a class of noncommutative electric currents induced by the Seiberg-Witten map; these currents reduce to the Dirac delta function in the commutative limit.

DOI: 10.1103/PhysRevD.94.105024

### I. INTRODUCTION

Magnetic monopoles were suggested originally as a source for symmetry between the electric and magnetic fields being at the same time compatible with quantum mechanics; they lead to the quantization condition of the electric charge in terms of the charge of a magnetic monopole now known as Dirac's quantization condition [1]. Several features of magnetic monopoles have been generalized to the context of non-Abelian gauge theories, where the 't Hooft-Polyakov monopole [2,3] gives a configuration that for long distances from the source reduces to Dirac's solution.

The analysis of magnetic monopoles has contributed to the development not only of mathematical tools, but also to the understanding of at first sight unrelated systems. More recently, monopolelike structures have appeared in different contexts such as superfluids and Bose-Einstein condensation; experimental work has permitted the building of systems with properties analogous to them.

In the formulation due to Dirac, a nodal singularity (Dirac's string) is present since the gauge potential of the electromagnetic field is ill defined along it; this can be reformulated as the condition that the wave function of a particle moving in this field should have a nonintegrable phase [1,4].

To avoid the presence of singularities, Wu and Yang [5] introduced two coordinates charts for the magnetic monopole and separated its gauge potential accordingly; the resulting gauge potentials are then regular in their respective domains and can be connected by a nonsingular gauge transformation in an overlapping region.

In [6,7] the extension of this construction to the noncommutative framework was considered. For this purpose noncommutative Maxwell's equations with group  $U_s(1)$  were written using a star product and the associated gauge potentials and electromagnetic fields were derived in a perturbative treatment in terms of powers of the noncommutative parameter. Dirac's quantization condition was shown to fail to second order in perturbation theory.

In this work we investigate the validity of Dirac's quantization condition using the Seiberg-Witten (SW) map [8]. As it is well known, this map allows a straightforward construction of a noncommutative gauge theory from a commutative one, the basic ingredients being the knowledge of the commutative gauge potentials, gauge parameter, and matter fields. Over the years a lot of effort has been put into obtaining closed expressions for the noncommutative fields at arbitrary order in the noncommutative parameter; fortunately enough, an iterative procedure that completely solves the SW map is known [9,10].

Starting from the gauge potential of Wu and Yang, the SW map will allow us to obtain explicit expressions for the noncommutative gauge potentials to arbitrary order on the noncommutative parameter. A general Ansatz for the gauge potentials of the noncommutative monopole field can be guessed; we exploit their symmetries to investigate the noncommutative corrections to the classical gauge parameter. It is important to mention that the potentials obtained by the SW map are nonsingular in their domains of definition. It turns out that the noncommutative corrections can be calculated explicitly by an iterative procedure and they can be shown to vanish. Dirac's quantization condition is then preserved in this scheme.

The knowledge of these potentials can be used in turn to write down modified Maxwell's equations and from them, by following a similar procedure as in [6,7], we obtain the

<sup>\*</sup>mmac@xanum.uam.mx  
<sup>†</sup>danielmc@xanum.uam.mx



noncommutative Ampère and Gauss laws. Once this is achieved, we use these equations to deduce possible sources for the electromagnetic field that may arise due to noncommutativity instead of imposing a structure on them from the very beginning. More specifically, we let open the possibility that an electric current may be present into the noncommutative Maxwell equations; its existence is a consequence of the fact that the DCQ is preserved using the SW map. Similar arguments have been considered previously in the literature in other contexts [11].

The paper is organized as follows: In Sec. II we review the construction of noncommutative gauge theories using the SW map. The general expressions for the noncommutative gauge fields to arbitrary order on the noncommutative parameter are then discussed in Sec. III. The classical DQC is then discussed in Sec. IV and in Sec. V noncommutative gauge transformations are analyzed. Modified Maxwell's equations are formulated in Sec. VI and the induced sources are identified. The solution to Maxwell's modified equations involving the noncommutative gauge potential and gauge parameter is then given in Sec. VII; there it is shown that the noncommutative corrections to the gauge parameter vanish and hence the DQC is preserved. We finally end with our conclusions.

We work in 4-dimensional Minkowski space-time with signature  $(-, +, +, +)$ ; we shall use units in which  $\hbar = c = g = e = 1$  throughout, unless otherwise stated.

## II. THE SEIBERG-WITTEN MAP

### A. Noncommutative gauge theories

Noncommutative gauge theories need noncommutative gauge fields to define covariant derivatives. If we have a matter field transforming as  $\delta_\lambda \Phi = i\lambda * \Phi$ , then

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - iA_\mu * \Phi \quad (1)$$

defines a covariant derivative if the gauge field  $A_\mu$  transforms according to the rule

$$\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + i[\lambda, A_\mu]_* \quad (2)$$

Here  $[A, B]_*$  denotes the Moyal-Groenewold bracket  $[A, B]_* := A * B - B * A$ . Similarly, we can define

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]_* \quad (3)$$

as the field strength with transformation law  $\delta_\lambda F_{\mu\nu} = i[\lambda, F_{\mu\nu}]_*$ . In this case the covariant derivative Eq. (1) is compatible with the gauge transformation

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U * A_\mu * U^{-1} + iU * \partial_\mu U^{-1}, \quad (4)$$

where  $U := e_*^{i\lambda(x)}$ . Therefore, from any commutative gauge theory as a starting point, we could construct a

noncommutative one by substitution of the usual product of functions by the Moyal product. The noncommutative invariant action for the gauge sector is then

$$S = \int d^4x F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu}. \quad (5)$$

However, for a Lie group  $G$ , with corresponding Lie algebra  $\mathcal{G}$  generated by  $n$  elements  $\{T_a\}$  satisfying  $[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$ , we have in general

$$\begin{aligned} [\lambda, A_\mu]_* &= (\lambda^a * F_{\mu\nu}^b - F_{\mu\nu}^a * \lambda^b) T_a T_b \\ &= \frac{1}{2} (\lambda^a * F_{\mu\nu}^b - F_{\mu\nu}^a * \lambda^b) [T_a, T_b] \\ &\quad + \frac{1}{2} (\lambda^a * F_{\mu\nu}^b - F_{\mu\nu}^a * \lambda^b) \{T_a, T_b\}, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $A_\mu = A_\mu^a T_a$  and  $\lambda = \lambda^a T_a$  with  $a = 1, \dots, n$ . These gauge transformations generate components in the enveloping algebra  $\mathcal{U}$  of  $\mathcal{G}$  obtained from all the products of  $\mathcal{G}$ . Since

$$T_a T_b = \frac{1}{2} [T_a, T_b] + \frac{1}{2} \{T_a, T_b\}, \quad (7)$$

the enveloping algebra can be obtained by repeatedly computing all commutators and anticommutators until it closes assuming that in general we can write

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad \{T_a, T_b\} = d_{ab}^c T_c. \quad (8)$$

An example of the above relations is given by the Lie algebras of the group  $U(n)$  where in the fundamental representation they coincide with their enveloping algebras. A Lie algebra coincides with its enveloping algebra since this depends on the representation. For instance, in the case of  $SU(2)$  in the fundamental representation, the generators are the Pauli matrices, satisfying  $[\sigma_a, \sigma_b] = i\epsilon_{abc} \sigma_c$ ,  $\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab} I$ . Thus, the enveloping algebra contains the unit matrix besides the Pauli matrices, i.e. it corresponds to  $U(2)$ . For the vector representation, the generators are  $(T_a)_b^c = i\epsilon_{abc}$ , and it can be shown that its enveloping algebra is given then by  $U(3)$ . This means that the number of degrees of freedom of a noncommutative theory is higher than that of a commutative one. Nevertheless, the number of gauge parameters will also increase, implying that some of the new degrees of freedom can be gauged away; the Seiberg-Witten map is such that the number of degrees of freedom is the same in both commutative and noncommutative gauge theories.

### B. The Seiberg-Witten map

String theory points to a relation between standard gauge theories and noncommutative ones in terms of a gauge equivalence relation dictated by the Seiberg-Witten map [8]



NONCOMMUTATIVE DIRAC QUANTIZATION CONDITION ...

PHYSICAL REVIEW D **94**, 105024 (2016)

$$\hat{A}_\mu(A + \delta_\lambda A; \theta) = \hat{A}_\mu(A; \theta) + \hat{\delta}_\lambda \hat{A}_\mu(A; \theta), \quad (9)$$

where  $A$  and  $\lambda$  are the standard gauge field and gauge parameter respectively; this is the analog of the ordinary gauge transformation

$$\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + i[\lambda, A_\mu] = D_\mu \lambda. \quad (10)$$

We can rewrite Eq. (9) as

$$\hat{\delta}_\lambda \hat{A}_\mu(A; \theta) = \hat{A}_\mu(A + \delta_\lambda A; \theta) - \hat{A}_\mu(A; \theta) = \delta_\lambda \hat{A}_\mu(A; \theta). \quad (11)$$

The ordinary gauge transformation on the right-hand side of Eq. (11) acts on the components of  $\hat{A}$  when it is expanded as a power series in  $\theta$  and the noncommutative (NC) gauge field  $\hat{A}$  and NC gauge parameter  $\hat{\lambda}$  are assumed to have the following functional dependence [8]:

$$\hat{\lambda}_\mu = \hat{\lambda}_\mu(A; \theta), \quad \hat{F}_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu}(A; \theta), \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_\lambda(\lambda, A; \theta). \quad (12)$$

It should be noted that Eq. (11) can be implemented for linear and adjoint representations.

The Seiberg-Witten map is a tool to construct noncommutative gauge theories having an explicit dependence on the commutative fields and their derivatives; it has the characteristic feature that the number of degrees of freedom of the original theory is preserved. For a noncommutative gauge theory constructed in this way we have

$$\delta_\lambda S = \hat{\delta}_\lambda S = 0. \quad (13)$$

This result implies invariance of the action; it can be understood either in terms of the noncommutative fields, with associated noncommutative gauge transformations Eq. (10), or directly in terms of transformations involving the commutative fields. It is known that the map can be written for any gauge group [12–16], and it can be solved iteratively [9,17]. The first step on the solution consists in writing the fields as a power series on the noncommutative parameters,

$$\hat{A}_\mu = A_\mu^0 + A_\mu^1 + A_\mu^2 + \dots \quad (14)$$

Equation (9) should then be solved simultaneously for  $\hat{A}_\mu$  and  $\hat{\lambda}_\lambda$  and this can be cumbersome especially when looking for higher order solutions in  $\theta$ . In general, the commutative parameters  $\lambda$  associated with a linear representation, where  $\delta_\lambda \Phi = i\lambda \Phi = i\lambda^a T_a \Phi$ , satisfy the following classical cocycle condition:

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] \Phi = -[\alpha, \beta] \Phi = \delta_{-i[\alpha, \beta]} \Phi, \quad (15)$$

or equivalently, the ordinary gauge consistency condition

$$\delta_\alpha \delta_\beta - \delta_\beta \delta_\alpha = \delta_{-i[\alpha, \beta]}. \quad (16)$$

The noncommutative parameters must depend on the commutative gauge fields,  $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_\lambda(\lambda, A; \theta)$  and in analogy with the commutative case we can write

$$\delta_\alpha \hat{\Phi} = i\Lambda_\alpha * \hat{\Phi}. \quad (17)$$

As a consequence we have

$$\begin{aligned} \delta_\alpha \delta_\beta \hat{\Phi} &= \delta_\alpha (\delta_\beta \hat{\Phi}) = i\delta_\alpha \hat{\Lambda}_\beta * \hat{\Phi} + i\hat{\Lambda}_\beta * \delta_\alpha \hat{\Phi}, \\ &= i\delta_\alpha \hat{\Lambda}_\beta * \hat{\Phi} - \hat{\Lambda}_\beta * \hat{\Lambda}_\alpha * \hat{\Phi}, \end{aligned} \quad (18)$$

or

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] \hat{\Phi} = (i\delta_\alpha \hat{\Lambda}_\beta - i\delta_\beta \hat{\Lambda}_\alpha + [\hat{\Lambda}_\alpha, \hat{\Lambda}_\beta]_*) * \hat{\Phi}. \quad (19)$$

Hence, we have the transformation law for the noncommutative parameters,

$$i\delta_\alpha \hat{\Lambda}_\beta - i\delta_\beta \hat{\Lambda}_\alpha + [\hat{\Lambda}_\alpha, \hat{\Lambda}_\beta]_* = i\hat{\Lambda}_{-i[\alpha, \beta]}. \quad (20)$$

In order to solve this equation, we write a series development

$$\hat{\Lambda}_\lambda = \lambda + \Lambda_\lambda^1 + \Lambda_\lambda^2 + \dots \quad (21)$$

The solution to first order  $\Lambda^1$  is [8]

$$\hat{\Lambda}(\lambda, A) = \lambda + \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \lambda, A_\nu \} + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (22)$$

Inserting this solution into Eq. (11) gives

$$\hat{A}_\xi(A) = A_\xi - \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \{ A_\mu, \partial_\nu A_\xi + F_{\nu\xi} \} + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (23)$$

and the associated field strength has the form

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\gamma\rho} &= F_{\gamma\rho} - \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \{ \{ A_\mu, \partial_\nu F_{\gamma\rho} + D_\nu F_{\gamma\rho} \} \\ &\quad - 2\{ F_{\gamma\mu}, F_{\rho\nu} \} \} + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \quad (24)$$

The solution for matter fields to first order is then

$$\hat{\Phi} = \Phi + \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \left( -A_\mu \partial_\nu \Phi + \frac{1}{2} A_\mu A_\nu \Phi \right) \quad (25)$$

in the fundamental representation. On the other hand, for the adjoint representation the equation to be solved is  $\delta_\lambda \Phi = i[\hat{\Lambda}, \hat{\Phi}]_*$ ; the solution is

MARCO MACEDA and DANIEL MARTÍNEZ-CARBAJAL

PHYSICAL REVIEW D **94**, 105024 (2016)

$$\hat{\Phi} = \Phi - \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{A_\mu, (D_\nu + \partial_\nu)\Phi\} + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (26)$$

Higher order terms can be obtained in the same way, or by use of the equation [8]

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\mu\nu}}\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_{\mu\nu}^1, \quad (27)$$

where  $\hat{\Phi}_{\mu\nu}^1$  is obtained from the first order term of the map by substituting the fields by their noncommutative counterparts, all of them multiplied by the Moyal product.

As mentioned before, the most general solution of the SW map has an infinite number of parameters. Depending on the problem at hand, some solutions may be better suited than others [12–16]. A nice feature of the above solutions is that corrections to the field strength vanish if the commutative field strength vanishes.

### III. SEIBERG-WITTEN MAPS TO ALL ORDERS

In this section we review the main features of the solutions to the SW equations.

#### A. First order solution

In [8] the first order solution was given as

$$\Lambda_\lambda^1 = \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{\partial_\mu\lambda, A_\nu^0\}, \quad (28)$$

$$A_\gamma^1 = -\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{A_\mu^0, \partial_\nu A_\gamma^0 + F_{\nu\gamma}^0\}. \quad (29)$$

The field strength is calculated as

$$F_{\gamma\rho}^1 = -\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{A_\mu^0, \partial_\nu F_{\gamma\rho}^0 + D_\nu F_{\gamma\rho}^0\} - 2\{F_{\gamma\mu}^0, F_{\rho\nu}^0\}. \quad (30)$$

We may rewrite this expression in terms of the first order potential  $A_\mu^1$  and the commutative potential  $A_\mu^0$ . After some simplifications we obtain

$$\partial_\gamma A_\rho^1 - \partial_\rho A_\gamma^1 = -\theta^{\mu\nu}(A_\mu^0 \partial_\nu F_{\gamma\rho}^0 + \partial_\mu A_\gamma^0 \partial_\nu A_\rho^0 - F_{\gamma\mu}^0 F_{\rho\nu}^0), \quad (31)$$

where  $F_{ik}^0 = \partial_i A_k^0 - \partial_k A_i^0$  is the field strength tensor at zero order. From this it follows that

$$F_{\gamma\rho}^1 = \partial_\gamma A_\rho^1 - \partial_\rho A_\gamma^1 + \theta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\gamma^0 \partial_\nu A_\rho^0, \quad (32)$$

This rewriting will be useful in later calculations.

#### B. Second order solution

The second order solution of the SW map was given in [18]; it can be recast as [9]

$$\Lambda_\lambda^2 = -\frac{1}{8}\theta^{\mu\nu}(\{A_\mu^1, \partial_\nu \lambda\} + \{A_\mu^0, \partial_\nu \Lambda^1\}), \quad (33)$$

$$A_\gamma^2 = -\frac{1}{8}\theta^{\mu\nu}(\{A_\mu^1, \partial_\nu A_\gamma^0 + F_{\nu\gamma}^0\} + \{A_\mu^0, \partial_\nu A_\gamma^1 + F_{\nu\gamma}^1\}). \quad (34)$$

In terms of first order solutions, the field strength at the second order [18] can also be written as

$$F_{\gamma\rho}^2 = -\frac{1}{8}\theta^{\mu\nu}(\{A_\mu^0, \partial_\nu F_{\gamma\rho}^1 + (D_\nu F_{\gamma\rho})^1\} + \{A_\mu^1, \partial_\nu F_{\gamma\rho}^0 + \partial_\nu F_{\gamma\rho}^0\} - 2\{F_{\gamma\mu}^0, F_{\rho\nu}^1\} - 2\{F_{\gamma\mu}^1, F_{\rho\nu}^0\}). \quad (35)$$

Here the covariant derivative  $(D_\nu F_{\gamma\rho})^1$  is given by

$$(D_\nu F_{\gamma\rho})^1 := \partial_\nu F_{\gamma\rho}^1 + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\{\partial_\alpha A_\nu^0, \partial_\beta F_{\gamma\rho}^0\}. \quad (36)$$

Using now Eq. (34), the expression  $\partial_\gamma A_\rho^2 - \partial_\rho A_\gamma^2$  is calculated after a lengthy but straightforward procedure; we have

$$\begin{aligned} \partial_\gamma A_\rho^2 - \partial_\rho A_\gamma^2 = & -\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}(A_\mu^0 \partial_\nu F_{\gamma\rho}^1 + A_\mu^1 \partial_\nu F_{\gamma\rho}^0 \\ & - F_{\gamma\mu}^0 F_{\nu\rho}^1 - F_{\gamma\mu}^1 F_{\rho\nu}^0 \\ & + \partial_\mu A_\gamma^1 \partial_\nu A_\rho^0 + \partial_\mu A_\gamma^0 \partial_\nu A_\rho^1). \end{aligned} \quad (37)$$

If we compare this equation with the field strength tensor given in Eq. (35), we get the following expression:

$$F_{\gamma\rho}^2 = \partial_\gamma A_\rho^2 - \partial_\rho A_\gamma^2 + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}[(\partial_\mu A_\gamma^1 \partial_\nu A_\rho^0 + \partial_\mu A_\gamma^0 \partial_\nu A_\rho^1) - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} A_\mu^0 \partial_\alpha A_\nu^0 \partial_\beta F_{\gamma\rho}^0], \quad (38)$$

which is very similar to Eq. (32) obtained previously to first order.

#### C. $n$ th order solutions

Based on the previous results for the first two order solutions derived from the SW map, the following general structure of the solutions can be proposed [9]:

$$\Lambda_\lambda^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu}\sum_{p+q+r=n}\{A_\mu^p, \partial_\nu \Lambda_\lambda^q\}_{*r}, \quad (39)$$

$$A_\gamma^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu}\sum_{p+q+r=n}\{A_\mu^p, \partial_\nu A_\gamma^q + F_{\nu\gamma}^q\}_{*r}. \quad (40)$$



They are recursive relations for the noncommutative fields and by doing calculations similar to the previous ones, we can rewrite the  $n$ th order term of the field strength as

$$F_{\gamma\rho}^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu} \sum_{p+q+r=n} (\{A_\mu^p, \partial_\nu F_{\gamma\rho}^q + (D_\nu F_{\gamma\rho})^q\} - 2\{F_{\gamma\mu}^p, F_{\rho\nu}^q\}_{*^r}), \quad (41)$$

where

$$(D_\nu F_{\gamma\rho})^n := \partial_\nu F_{\gamma\rho}^n - i \sum_{p+q+r=n} [A_\nu^p, F_{\gamma\rho}^q]_{*^r}. \quad (42)$$

Here the sum is over all the values of  $p$ ,  $q$ , and  $r$  such that  $p+q+r=n$ ; the subscript  $*^r$  in a commutator  $[f, g]_{*^r}$  means that we only consider the contributions of the form

$$f(x) *^r g(x) = \frac{1}{r!} \left(\frac{i}{2}\right)^r \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_r\nu_r} \times \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_r} g(x). \quad (43)$$

It is possible to find the same solution from a differential equation introduced in the original paper [8]. This equation is often called the SW-differential equation and is obtained by varying the deformation parameter infinitesimally  $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$ ; the solution of the SW differential equation to all orders has been considered previously in [19].

These solutions admit homogeneous contributions with arbitrary coefficients. This was noted previously by various authors in [16,18,20,21] because the second order fields admitted different solutions; more recently this has been discussed in [22,23]. Therefore, the most general solution should include these homogeneous terms; however, the main drawback in doing so is that recursive relations are more difficult to obtain to all orders.

#### IV. DQC IN THE WU-YANG APPROACH

In Dirac's original paper [1], a singular solution of Maxwell's equations represents a magnetic monopole and the Dirac string is defined as the line where the gauge potential  $A_\mu$  for the magnetic field becomes singular. The string is not observable since it can be rotated by a gauge transformation; this gauge transformation is also singular.

Dirac's solution has been generalized as the 't Hooft-Polyakov monopole, where the field is smooth gauge potentials. The question of having something similar for the Dirac string was analyzed in [5], where Wu and Yang found a smooth construction of Dirac's monopole by separating  $\mathbb{R}^3/\{0\}$  into two overlapping hemispheres defined as follows:

$$\begin{aligned} R^N: 0 \leq \theta < \pi/2 + \delta, & \quad r > 0, & \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ R^S: \pi/2 - \delta < \theta \leq \pi, & \quad r > 0, & \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

$R^N$  and  $R^S$  are the north and south hemispheres and in both hemispheres  $t \in (-\infty, \infty)$ ; we have thus an overlapping region  $R^N \cap R^S$ . Each hemisphere is parametrized by an independent set of coordinates; associated with them there are two potentials  $A_\mu^N(x)$  and  $A_\mu^S(x)$  that are singularity free everywhere in the domains of their definition. Explicitly we have

$$\begin{aligned} A_t^N = A_r^N = A_\theta^N = 0, & \quad A_\phi^N = \frac{g}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta), \\ A_t^S = A_r^S = A_\theta^S = 0, & \quad A_\phi^S = -\frac{g}{r \sin \theta} (1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (44)$$

These potentials are required to satisfy the following conditions:

- (1) They are related by a gauge transformation in the overlapping region.
- (2) The magnetic field is obtained from their curls.
- (3) In their respective domains, both potentials are free of singularities.

The gauge potentials in Eq. (44) are related by the gauge transformation

$$\begin{aligned} A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu + i e^{2ig\phi} \partial_\mu e^{-2ig\phi}, \\ &= A_\mu + \partial_\mu \lambda(x) \end{aligned} \quad (45)$$

in the overlapping region  $R^N \cap R^S$  with corresponding gauge transformation

$$\lambda(x) = 2g\phi = 2g \arctan(y/x). \quad (46)$$

It is a single-valued function only if

$$2ige = \text{integer} = N. \quad (47)$$

Equation (47) is known as Dirac's quantization condition (DQC) [1].

#### A. Wu-Yang procedure in Moyal space-time

The basic ideas for the generalization of the above result to noncommutative spacetime will be briefly discussed here. First, we look for noncommutative potentials  $A_\mu^N(x)$  and  $A_\mu^S(x)$ , such that the following happens:

- (1) The potentials in the overlapping region are related by the gauge transformation

$$\begin{aligned} A_\mu^{N/S}(x) \rightarrow A_\mu^{S/N}(x) &= U * A_\mu^{N/S}(x) * U^{-1} \\ &\quad + iU * \partial_\mu U^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

where  $U$  is an element of the noncommutative group  $U_*(1)$ .

- (2) Maxwell's equations with sources for the magnetic charges hold.
- (3) There are no singularities in the potentials due to noncommutativity; the potentials remain free of singularities as in the classical case.

The above conditions are similar to those mentioned in Sec. IV but adapted to the presence of noncommutativity. In particular, the second condition is imposed to find a relationship between the noncommutative gauge parameter and source terms. We will follow a perturbative treatment where the noncommutative gauge potential is written as

$$\hat{A}_\mu = A_\mu^0 + A_\mu^1 + A_\mu^2 + \mathcal{O}(\theta^3), \quad (49)$$

meanwhile the gauge parameter admits a similar writing

$$\hat{\lambda} = \lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2 + \mathcal{O}(\theta^3). \quad (50)$$

If the DQC is preserved then the noncommutative contributions to the gauge parameter should vanish.

## V. NONCOMMUTATIVE GAUGE TRANSFORMATIONS

The SW map is compatible with noncommutative gauge transformations of the form

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \hat{A}'_\mu = U * \hat{A}_\mu * U^{-1} + iU * \partial_\mu U^{-1}, \quad (51)$$

where  $U \in U_*(1)$ ; the elements in this group are written as

$$U(x) = e^{i\lambda(x)} = 1 + i\lambda(x) + \frac{i^2}{2!}\lambda(x) * \lambda(x) + \dots \quad (52)$$

The gauge group element up to second order in  $\theta$  can be determined using previous results in the literature [6,7]; its explicit form is

$$e_*^{i\lambda(x)} = e^{i\lambda(x)} + \frac{\theta^{pq}\theta^{kl}}{8} e^{i\lambda(x)} \partial_p \partial_k \lambda \times \left( \frac{1}{2} \partial_q \partial_l \lambda + \frac{i}{3} \partial_q \lambda \partial_l \lambda \right) + \mathcal{O}(\theta^3). \quad (53)$$

In the construction of the  $U_*(1)$  gauge theory [24–26], the  $\lambda$  function is independent of  $\theta$ . Nevertheless, the elements  $e_*^{i\lambda(x)}$  can be decomposed as  $e^{i\lambda'_0(x)} * e_*^{i\lambda'(x,\theta)}$  [24] where all the dependence on  $\theta$ , coming from the Moyal product, is contained in the function  $\lambda'(x, \theta)$ .

On the other hand, the noncommutative gauge transformation Eq. (51) up to second order is given by

$$\begin{aligned} A_i^0 &\rightarrow A_i^0 + \partial_i \lambda(x), \\ A_i^1 &\rightarrow A_i^1 - \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^0 - \frac{1}{2} \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l \partial_i \lambda(x), \\ A_i^2 &\rightarrow A_i^2 - \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^1 + \frac{1}{2} \theta^{kl} \theta^{pq} \partial_p \lambda(x) \\ &\quad \times \partial_q \left( \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^0 + \frac{1}{3} \partial_k \lambda(x) \partial_l \partial_i \lambda(x) \right), \end{aligned} \quad (54)$$

where we have used the same procedure given in [6,7]. To conclude, due to the first requirement in Sec. IV, we use Eqs. (54) to require that the following equations hold:

$$\begin{aligned} A_i^{N_0} &\rightarrow A_i^{S_0} + \partial_i \lambda(x), \\ A_i^{N_1} &\rightarrow A_i^{S_1} - \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^{S_0} - \frac{1}{2} \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l \partial_i \lambda(x), \\ A_i^{N_2} &\rightarrow A_i^{S_2} - \theta^{kl} \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^{S_1} + \frac{1}{2} \theta^{kl} \theta^{pq} \partial_p \lambda(x) \\ &\quad \times \partial_q \left( \partial_k \lambda(x) \partial_l A_i^{S_0} + \frac{1}{3} \partial_k \lambda(x) \partial_l \partial_i \lambda(x) \right). \end{aligned} \quad (55)$$

In the following section we analyze the second requirement of Sec. IV, i.e. that the gauge potentials should satisfy Maxwell's equations.

## VI. NONCOMMUTATIVE MAXWELL'S EQUATIONS IN FIRST AND SECOND ORDER

A set of noncommutative Maxwell's equations for a static monopole

$$D_\nu * \hat{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (56)$$

$$D_\mu * \hat{J}^{\mu\nu} = \hat{J}_\nu^{\nu}, \quad (57)$$

$$D_\mu * \hat{J}^\mu = 0 \quad (58)$$

was proposed in [7]. Here

$$\begin{aligned} D_\nu &:= \partial_\nu - ie[\hat{A}_\mu, \cdot]_*, \\ \hat{F}_{\mu\nu} &:= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ie[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_*, \end{aligned} \quad (59)$$

are the noncommutative covariant derivative and corresponding field strength tensor respectively. The dual field strength tensor is  $\hat{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} \hat{F}_{\gamma\delta}$ . Equations (56) and (57) are called Ampère's law and Gauss's law respectively; they are the analogs of the standard expressions in classical electrodynamics. Equation (58) is known as the continuity equation.

In contrast to [6,7], we do not consider the previous set of equations but a modification of it. Indeed, we first apply the SW map to the gauge potentials of the Wu-Yang approach to determine the corresponding noncommutative gauge potentials and, using them, we will verify if the DQC is

preserved order by order on the  $\theta$  parameter; after that electric and magnetic sources, if any, will then be deduced from the modified Maxwell's equations.

Since we are considering a static monopole solution, we have  $\hat{J}_g^i = 0$ , i.e. there is no magnetic current. Also,  $\hat{J}_g^0 \equiv \hat{\rho}(r) = 4\pi g\delta(r) + \rho^1(r) + \rho^2(r) + \mathcal{O}(\theta^3)$  is the only non-vanishing component of the 4-dimensional noncommutative current  $\hat{J}^\nu$ , giving rise to the total noncommutative magnetic charge

$$g_{NC} := \int \hat{J}_g^0(x) d^3x. \quad (60)$$

This is a gauge invariant that can be calculated perturbatively; in the classical case it has the value  $g$ . In the static case we also note that the continuity equation is satisfied identically. In the following we move along the lines of [7].

### A. Ampère's law

For a static solution, the electric field  $E^i := F^{0i} = 0$  vanishes, and all time dependence is suppressed. In consequence, only the spatial components of Ampère's law provide nontrivial information. Let us focus then on  $D_k * \hat{F}^{ik}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . We have

$$\begin{aligned} D_k * \hat{F}^{ik} &= \partial_k \hat{F}^{ik} - i[\hat{A}_k, \hat{F}^{ik}]_* \\ &= \partial_k (F_0^{ik} + F_1^{ik} + F_2^{ik}) \\ &\quad - i[A_k^0 + A_k^1 + A_k^2, F_0^{ik} + F_1^{ik} + F_2^{ik}]_* \\ &= \partial_k F_0^{ik} + \partial_k F_1^{ik} + \partial_k F_2^{ik} + \theta^{pq} \partial_p A_k^0 (\partial_q F_0^{ik} \\ &\quad + \partial_q F_1^{ik}) + \theta^{pq} \partial_p A_k^1 (\partial_q F_0^{ik} + \mathcal{O}(\theta^3)), \end{aligned} \quad (61)$$

where  $F_{jk}^0$ ,  $F_{jk}^1$ , and  $F_{jk}^2$  are the field strength tensor components up to second order on  $\theta$ . Their explicit expressions are known from the SW map; using them we obtain

$$\begin{aligned} D_k * F^{ik} &= \partial_k (\partial^j A_0^k - \partial^k A_0^j) + \partial_k (\partial^j A_1^k - \partial^k A_1^j + \theta^{pq} \partial_p A_0^i \partial_q A_0^k) + \partial_k (\partial^j A_2^k - \partial^k A_2^j + \theta^{pq} (\partial_p A_1^i \partial_q A_0^k + \partial_p A_0^i \partial_q A_1^k)) \\ &\quad + \theta^{pq} \partial_p A_k^0 \partial_q (\partial^i A_0^k - \partial^k A_0^i + \partial^i A_1^k - \partial^k A_1^i + \theta^{rs} \partial_r A_0^i \partial_s A_0^k) + \theta^{pq} \partial_p A_k^1 \partial_q (\partial^i A_0^k - \partial^k A_0^i) + \mathcal{O}(\theta^3) \\ &= \epsilon^{ikl} \partial_k B_l^0 + \epsilon^{ikl} \partial_k B_l^1 + \epsilon^{ikl} \partial_k B_l^2 + \theta^{pq} (\partial_k (\partial_p A_0^i \partial_q A_0^k) + \partial_p A_k^0 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^0) + \theta^{pq} (\partial_p A_k^1 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^1 + \partial_p A_k^0 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^1 \\ &\quad + \partial_k (\partial_p A_1^i \partial_q A_0^k + \partial_p A_0^i \partial_q A_1^k) + \theta^{rs} \partial_p A_k^0 \partial_q (\partial_r A_0^i \partial_s A_0^k)) + \mathcal{O}(\theta^3), \end{aligned} \quad (62)$$

where we have defined  $\epsilon^{ikl} B_l^n := (\partial^i A_n^k - \partial^k A_n^i)$  in accordance with our choice of signature for Minkowski space-time.

In the commutative case, Ampère's law in its differential form is normally used to deduce the rotational of the magnetic field induced by an electric current, but it can also be used in the opposite direction, namely, to infer the electric current associated with a given magnetic field. According to this, let us write

$$D_k * \hat{F}^{ik} = \frac{4\pi}{c} \hat{J}_e^i, \quad (63)$$

where  $\hat{J}_e^i = J_{e0}^i + J_{e1}^i + J_{e2}^i + \mathcal{O}(\theta^3)$ . Notice that we are thus allowing the presence of an electric current into Maxwell's equations. It follows from Eq. (62) that

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{B}^0)^i &= J_{e0}^i, \\ (\nabla \times \vec{B}^1)^i &= \theta^{pq} (\partial_k (\partial_p A_0^i \partial_q A_0^k) + \partial_p A_k^0 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^0) + J_{e1}^i, \\ (\nabla \times \vec{B}^2)^i &= \theta^{pq} (\partial_p A_k^1 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^1 + \partial_p A_k^0 \epsilon^{ikl} \partial_q B_l^1 \\ &\quad + \partial_k (\partial_p A_1^i \partial_q A_0^k + \partial_p A_0^i \partial_q A_1^k) \\ &\quad + \theta^{rs} \partial_p A_k^0 \partial_q (\partial_r A_0^i \partial_s A_0^k)) + J_{e2}^i, \end{aligned} \quad (64)$$

where  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

### B. Gauss's law

We now proceed in the same way for Gauss's law. We have first that

$$\begin{aligned} D_i * \hat{F}^{i0} &= \frac{1}{2} \epsilon^{i0jk} D_i * \hat{F}_{jk} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} D_i * \hat{F}_{jk} \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_i (F_{jk}^0 + F_{jk}^1 + F_{jk}^2) \\ &\quad - i[A_i^0 + A_i^1 + A_i^2, F_{jk}^0 + F_{jk}^1 + F_{jk}^2]_*) \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_i F_{jk}^0 + \partial_i F_{jk}^1 + \partial_i F_{jk}^2 \\ &\quad + \theta^{pq} \partial_p A_i^0 (\partial_q F_{jk}^0 + \partial_q F_{jk}^1) + \theta^{pq} \partial_p A_i^1 \partial_q F_{jk}^0) \\ &\quad + \mathcal{O}(\theta^3). \end{aligned} \quad (65)$$

Using Eqs. (30) and (35) into Eq. (65), we can write Gauss's law as

$$\begin{aligned} D_i * \mathcal{F}^{i0} - J^0 &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{jkl} \partial_i B_l^0 - 4\pi g\delta(r) - \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{jkl} \partial_i B_l^1 \\ &\quad - \rho^1(x) - \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{jkl} \partial_i B_l^2 - \rho^2(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \theta^{pq} \theta^{rs} \partial_p A_i^0 \partial_q (\partial_r A_j^0 \partial_s A_k^0), \end{aligned} \quad (66)$$

where we have used the fact that

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk}\theta^{pq}\partial_p A_i^0 \partial_q F_{jk}^0 &= -\epsilon^{ijk}\theta^{pq}\partial_i(\partial_p A_j^0 \partial_q A_k^0), \\ \epsilon^{ijk}\theta^{pq}(\partial_p A_i^0 \partial_q F_{jk}^1 + \partial_p A_i^1 \partial_q F_{jk}^0) \\ &= -2\epsilon^{ijk}\theta^{pq}\partial_i(\partial_p A_j^1 \partial_q A_k^0) \\ &\quad + \epsilon^{ijk}\theta^{pq}\theta^{rs}\partial_p A_i^0 \partial_q(\partial_r A_j^0 \partial_s A_k^0), \end{aligned} \quad (67)$$

together with the series expansion of  $\hat{J}_g^0$ . We further note that by a permutation of the indices, the last term in Eq. (66) vanishes. Since  $\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{jki}\partial_i B_n^l = \nabla \cdot \vec{B}^n$ , we find the simple result

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \vec{B}_0)^i &= [\nabla(\nabla \cdot \vec{B}_0) + \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_0)]^i \\ &= \epsilon^{ijk}\partial_j(\epsilon^{klm}\partial_l B_m^0 + \epsilon^{klm}\partial_l B_m^1 + \epsilon^{klm}\partial_l B_m^2) + \theta^{pq}(\partial_l(\partial_p A_0^k \partial_q A_l^0) + \partial_p A_l^0 \epsilon^{klm}\partial_q B_m^0) \\ &\quad + \theta^{pq}(\partial_p A_l^1 \epsilon^{klm}\partial_q B_m^0 + \partial_p A_l^0 \epsilon^{klm}\partial_q B_m^1 + \partial_l(\partial_p A_1^k \partial_q A_l^0 + \partial_p A_0^k \partial_q A_l^1) + \theta^{rs}\partial_p A_l^0 \partial_q(\partial_r A_0^k \partial_s A_l^0)) \\ &= (\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl})\partial_j \partial_l (B_m^0 + B_m^1 + B_m^2) + \theta^{pq}(\epsilon^{ijk}\partial_j \partial_l(\partial_p A_0^k \partial_q A_l^0) + (\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl})\partial_j(\partial_p A_l^0 \partial_q B_m^0)) \\ &\quad + \theta^{pq}((\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl})\partial_j(\partial_p A_l^1 \partial_q B_m^0 + \partial_p A_l^0 \partial_q B_m^1) + \epsilon^{ijk}\partial_j \partial_l(\partial_p A_1^k \partial_q A_l^0 + \partial_p A_0^k \partial_q A_l^1)) \\ &\quad + \epsilon^{ijk}\partial_j(\theta^{rs}\partial_p A_l^0 \partial_q(\partial_r A_0^k \partial_s A_l^0)). \end{aligned} \quad (69)$$

It is natural to ask whether Maxwell's equations and corresponding sources derived from the SW map are compatible with the perturbation expansion approach used in [7]. In this section we have calculated the equations of motion at zero, first, and second order given by Eqs. (64) and (68). It should be noted that the Maxwell equations derived here are compatible with the set of equations of motion given by Eqs. (28), (31), (32) and Eqs. (23), (26), (27) of Refs. [7,27] for the Ampère and Gauss laws, respectively. However, contrary to [7,27], we have not assumed that the electric current vanishes and indeed we have the result that the SW map induces a nonvanishing electric current  $\hat{J}_e$ .

## VII. SOLUTION OF THE NONCOMMUTATIVE MAXWELL'S EQUATIONS

We now use the SW map to determine the analytic expressions of the gauge potentials  $A_\mu^N$  and  $A_\mu^S$  to all orders in the noncommutative parameter  $\theta$ . Both potentials satisfy Maxwell's equations with an appropriate source for the magnetic charge. As a consequence, the criterion 2 in Sec. IV is satisfied for our potentials.

For comparison with previous results in the literature, we fix the values of  $\theta^{\mu\nu}$  by imposing  $\theta^{12} = -\theta^{21}$ ; all other components are set to zero. Furthermore, we use the original potentials of Wu and Yang, Eqs. (44), in Cartesian coordinates. In the following  $N^0$  and  $S^0$  denote

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B}^0 &= -4\pi g\delta(r), & \nabla \cdot \vec{B}^1 &= -\rho^1(r), \\ \nabla \cdot \vec{B}^2 &= -\rho^2(r). \end{aligned} \quad (68)$$

These equations are similar to Eqs. (64) in that they allow us now to identify the sources of the modified monopole field.

## C. Combining Ampère's and Gauss's laws

Using the identity  $\nabla^2 \vec{B}_0 = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}_0) + \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_0)$  we now combine Eq. (68) and (64) in the usual way. We obtain then for the  $i$  component

the zeroth order terms in  $\theta$  in the northern and southern hemispheres, respectively, and  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

The gauge potentials to zero order in Cartesian coordinates are

$$\begin{aligned} A_1^{N0} &= -y \frac{(r-z)}{(x^2+y^2)r}, & A_2^{N0} &= x \frac{(r-z)}{(x^2+y^2)r}, \\ A_1^{S0} &= y \frac{(r+z)}{(x^2+y^2)r}, & A_2^{S0} &= -x \frac{(r+z)}{(x^2+y^2)r}, \\ A_3^{N0} &= A_3^{S0} = A_3^0 = A_0^{N0} = A_0^{S0} = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

It is important to investigate the explicit form of the gauge potentials order by order to deduce a possible symmetry in the solution. For this purpose, we have calculated the spatial components of noncommutative gauge potential  $\hat{A}_\mu$  up to third order on perturbation theory explicitly and we have observed the following symmetry:

$$\begin{aligned} A_k^{(N/S)0} &= -\epsilon_{ki} x^i f_0^{(N/S)}, \\ A_k^{(N/S)1} &= -\epsilon_{ki} x^i f_1^{(N/S)}, \\ A_k^{(N/S)2} &= -\epsilon_{ki} x^i f_2^{(N/S)}, \\ A_k^{(N/S)3} &= -\epsilon_{ki} x^i f_3^{(N/S)}, \end{aligned} \quad (71)$$

where  $f_0^{(N/S)}, \dots, f_3^{(N/S)}$  are some functions having the general structure  $f_k^{(N/S)} = f_k^{(N/S)}(x^2, y^2, z)$ . Based on this analysis of the first three order solutions, we can conjecture the general Ansatz

$$A_k^{(N/S)_n} = -\epsilon_{ki} x^i f_n^{(N/S)}, \quad (72)$$

where  $\epsilon_{ij}$  is the 2-dimensional Levi-Civita tensor, completely antisymmetric on its indices. The functions  $f_0^{(N/S)}, \dots, f_3^{(N/S)}$  mentioned before have the following explicit expressions:

$$\begin{aligned} f_0^{(N/S)} &= \pm \frac{(r \mp z)}{r\rho^2}, \\ f_1^{(N/S)} &= -\frac{\rho^4(r \mp 4z) + z^2\rho^2(5r \mp 6z) + 2z^4(r \mp z)}{2r^5\rho^4}, \\ f_2^{(N/S)} &= \pm \frac{\rho^8 + z\rho^6(19z \mp 8r) + z^3\rho^4(31z \mp 24r) + z^5\rho^2(17z \mp 15r) + 4z^7(z \mp r)}{2\rho^6 r^8}, \\ f_3^{(N/S)} &= -\frac{13\rho^{10} + 8z\rho^8(40z \mp 13r) + 2z^3\rho^6(370z \mp 263r) + 3z^5\rho^4(203z \mp 162r) + 4z^7\rho^2(72z \mp 65r) + 56z^9(z \mp r)}{8\rho^8 r^{10}}, \end{aligned} \quad (73)$$

where  $\rho^2 := x^2 + y^2 = r^2 - z^2$  and the upper (lower) sign in the above expressions refers to the north (south) hemisphere.

An important criterion we should verify for the potentials is that they must be singularity free. For this purpose it is convenient to find the components of the potential in spherical coordinates  $(r, \vartheta, \phi)$ ; a straightforward calculation shows then that the potentials  $A_\mu^N$  and  $A_\mu^S$  are given by

$$\begin{aligned} A_r^N &= A_\vartheta^N = A_\phi^N = 0, & A_\phi^N &= f_m^N \frac{y}{\sin \phi}, \\ A_r^S &= A_\vartheta^S = A_\phi^S = 0, & A_\phi^S &= f_m^S \frac{y}{\sin \phi}, \end{aligned} \quad (74)$$

where  $m = 0, \dots, 3$  means the perturbation order; the nonzero components can be written explicitly as

$$\begin{aligned} A_\phi^{(N/S)_0} &= \pm \frac{(1 \mp \cos(\vartheta)) \csc(\vartheta)}{r}, \\ A_\phi^{(N/S)_1} &= -\frac{f_{N/S}(\vartheta) \csc^3(\vartheta)}{8r^3}, \\ A_\phi^{(N/S)_2} &= \pm \frac{g_{N/S}(\vartheta) \csc^5(\vartheta)}{128r^5}, \\ A_\phi^{(N/S)_3} &= -\frac{h_{N/S}(\vartheta) \csc^7(\vartheta)}{1024r^7}, \end{aligned} \quad (75)$$

where

$$\begin{aligned} f_{N/S}(\vartheta) &:= \mp 10 \cos(\vartheta) + 2 \cos(2\vartheta) \pm 2 \cos(3\vartheta) - \cos(4\vartheta) + 7, \\ g_{N/S}(\vartheta) &:= \mp 327 \cos(\vartheta) + 80 \cos(2\vartheta) \pm 75 \cos(3\vartheta) - 64 \cos(4\vartheta) \pm \cos(5\vartheta) + 16 \cos(6\vartheta) \mp 5 \cos(7\vartheta) + 224, \\ h_{N/S}(\vartheta) &:= \mp 9112 \cos(\vartheta) + 2080 \cos(2\vartheta) \pm 2180 \cos(3\vartheta) - 1844 \cos(4\vartheta) \mp 36 \cos(5\vartheta) + 686 \cos(6\vartheta) \\ &\quad \mp 270 \cos(7\vartheta) - 65 \cos(8\vartheta) \pm 70 \cos(9\vartheta) - 14 \cos(10\vartheta) + 6325. \end{aligned} \quad (76)$$

From these expressions it is seen that in the limit where the polar angle vanishes,  $\vartheta \rightarrow 0$ , the components  $A_\phi^N \rightarrow 0$ , and when  $\vartheta \rightarrow \pi$  we have  $A_\phi^S \rightarrow 0$ . Therefore, both potentials  $A_\phi^N$  and  $A_\phi^S$  are singularity-free in their respective regions of validity; noncommutativity does not add divergences to the gauge potentials up to this order and we expect this to be a general feature.

We now use Eq. (71) to find the sources associated with the Maxwell equations given in Sec. VI. If we insert

Eq. (71) into Eqs. (64) and (68), we find that the electric sources are given by

$$\begin{aligned} J_{e0}^{(N/S)i} &= 0, \\ J_{e1}^{(N/S)i} &= \theta e^{ij3} x^j g_1^{(N/S)}, \\ J_{e2}^{(N/S)i} &= \theta^2 e^{ij3} x^j g_2^{(N/S)}, \end{aligned} \quad (77)$$

where

$$g_1^{(N/S)} := \frac{3}{r^5},$$

$$g_2^{(N/S)} := \pm \frac{3[\mp 4z(2r \mp z)\rho^2 \pm z^3(r \mp z) + 5\rho^4]}{r^{10}\rho^2}. \quad (78)$$

We notice nonvanishing contributions to the electric current due to noncommutativity. As for the magnetic charge we have an effective magnetic charge given by

$$4\pi g_{\text{eff}} = 4\pi + 2\pi \frac{\theta^2}{r^4}, \quad (79)$$

up to second order on the noncommutative parameter. This result can be obtained by calculating the line integrals  $\int_{\Gamma} \vec{A}^{(N/S)1} \cdot d\vec{s}$  and  $\int_{\Gamma} \vec{A}^{(N/S)2} \cdot d\vec{s}$ ; here  $\Gamma$  is a circuit of radius  $r$  on the equator ( $\vartheta = \pi/2$ ) positively (negatively) oriented for the north (south) hemisphere. It is clear that as  $\theta \rightarrow 0$  then  $g_{\text{eff}} \rightarrow 1$ .

#### A. The noncommutative parameter $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_\lambda(\lambda, \mathbf{A}; \theta)$

Having arrived at a general Ansatz for the noncommutative corrections to the gauge potentials of the magnetic monopole, we now proceed to discuss the DQC. The main point to be analyzed here is if the  $\theta$  corrections to the standard gauge parameter  $\lambda$  can be made to vanish when the gauge potentials are obtained from the SW map. From Eq. (28) the noncommutative parameter  $\hat{\Lambda}_\lambda$  to first order is

$$\Lambda^1 = -\frac{1}{2}\theta^{kl}A_k^0\partial_l\lambda. \quad (80)$$

The partial derivatives of the standard gauge parameter have a particular symmetry that is of great importance for the calculations that follow; from Eq. (46) explicit calculation shows they can be written as  $\partial_l\lambda = -\epsilon_{ij}x^jg$ , where  $g := \frac{2z}{x^2+y^2}$  and furthermore, the corresponding potential is such that  $A_k^0 = -\epsilon_{ki}x^if_0$  as pointed out before in Eq. (72). Using these two facts we compute the noncommutative correction  $\Lambda^1$  to the gauge parameter as follows:

$$\begin{aligned} \Lambda^{n+1} &= -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu_1\nu_1}(\{A_{\mu_1}^n, \partial_{\nu_1}\lambda\} + \{A_{\mu_1}^{n-1}, \partial_{\nu_1}\Lambda^1\} + \dots + \{A_{\mu_1}^{n-s}, \partial_{\nu_1}\Lambda^s\} + \dots + \{A_{\mu_1}^0, \partial_{\nu_1}\Lambda^n\}) \\ &\quad - \frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu_1\nu_1}\{A_{\mu_1}^0, \partial_{\nu_1}\Lambda\}_{*n} \\ &= -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu_1\nu_1}(\{A_{\mu_1}^n, \partial_{\nu_1}\lambda\} + \{A_{\mu_1}^{n-1}, \partial_{\nu_1}\Lambda^1\} + \dots + \{A_{\mu_1}, \partial_{\nu_1}\Lambda^n\} + \{A_{\mu_1}^{n-1}, \partial_{\nu_1}\lambda\}_{*1} + \dots \\ &\quad + \{A_k^0, \partial_{\nu_1}\Lambda^{n-1}\}_{*1} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \{A_{\mu_1}^1, \partial_{\nu_1}\lambda\}_{*n-1} + \{A_k^0, \partial_{\nu_1}\Lambda^1\}_{*n-1} + \{A_{\mu_1}^0, \partial_{\nu_1}\lambda\}_{*n}). \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^1 &= -\frac{1}{2}\theta\epsilon^{kl}(-\epsilon_{ki}x^if_0)(-\epsilon_{lj}x^jg) \\ &= -\frac{1}{2}\theta\epsilon^{kl}\epsilon_{ki}x^if_0\epsilon_{lj}x^jg \\ &= -\frac{1}{2}\theta\delta_i^lx^i\epsilon_{ij}x^jf_0g = -\frac{1}{2}\theta\epsilon_{ij}x^ix^jf_0g = 0, \end{aligned} \quad (81)$$

where we have assumed  $\theta^{12} = -\theta^{21} = \theta$  as the only nonvanishing components and in consequence  $\theta^{kl} = \theta^{l2}\epsilon^{kl} = \theta\epsilon^{kl}$ . We see then that by using the SW map, the DQC is preserved to first order. The next step is to calculate the noncommutative second order correction  $\Lambda^2$ . From the explicit expression in Eq. (33), we can write

$$\Lambda^2 = -\frac{1}{4}\theta^{kl}(\{A_k^1, \partial_l\lambda\} + \{A_k^0, \partial_l\Lambda^1\}). \quad (82)$$

The second term of this equation is zero, because we have already shown that  $\Lambda^1 = 0$ . Therefore, we only need to calculate  $\theta^{kl}\{A_k^1, \partial_l\lambda\}$ . From the previous section we have already computed the gauge potentials up to second order on  $\theta$  and these can be written in general as  $A_k^1 = -\epsilon_{ki}x^if_1$  where  $f_1$  is given in Eq. (73). Taking this into account and following a procedure similar to the calculation of  $\Lambda^1$ , it is straightforward to show that the gauge parameter to second order also vanishes, i.e.  $\Lambda^2 = 0$ .

#### B. $n$ th order $\Lambda$

We now proceed to discuss the general case. First we recall the fact that the noncommutative corrections to the gauge parameter have the general form

$$\Lambda^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{kl}\sum_{p+q+r=n}\{A_k^p, \partial_l\Lambda^q\}_{*r}. \quad (83)$$

It is straightforward to see that the  $\mathcal{O}(\theta^r)$  contribution for the anticommutator  $\{A_k^p, \partial_l\Lambda^q\}_{*r}$ , for  $r$  an even number, vanishes; therefore, we can write

Nonvanishing contributions of the anticommutator  $\{A, B\}_{*k}$  exists for  $k$  even, where  $A$  and  $B$  are functions of  $x^i$ ; therefore  $\{A_{\mu_1}^{n-s}, \partial_{\nu_1} \lambda\}_{*s} = 0$  for  $s$  odd and  $\{A_{\mu_1}^{n-s}, \partial_{\nu_1} \lambda\}_{*s} = 2A_{\mu_1}^{n-s} *^s \partial_{\nu_1} \lambda$  for  $s$  even.

We have already seen that the noncommutative corrections  $\Lambda^1$  and  $\Lambda^2$  vanish. Let us now assume that this holds up to the  $n$ th order, i.e.  $\Lambda^n = 0$ ; we would like to show that this assumption implies that the expression

$$\Lambda^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)} \theta^{\mu_1 \nu_1} \times \left( \{A_{\mu_1}^n, \partial_{\nu_1} \lambda\} + \sum_{s=1}^n \{A_{\mu_1}^{n-s}, \partial_{\nu_1} \lambda\}_{*s} \right) \quad (85)$$

for the  $(n+1)$ th order also vanishes.

In the previous section we have conjectured the general Ansatz for the gauge potentials, namely  $A_{\mu_1}^n = -\epsilon_{\mu_1 i} x^i f_n$ , where  $f_n$  is some function. Assuming this and using a similar procedure as in Eq. (81), we obtain for the first term of Eq. (85) the result  $\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1}^n \partial_{\nu_1} \lambda = 0$ . For the second term we need to calculate the general expression  $\theta^{\mu_1 \nu_1} \{A_{\mu_1}^{n-s}, \partial_{\nu_1} \lambda\}_{*s}$  for  $s$  even only since, according to a previous remark, all the contributions with  $s$  odd vanish. In the following we calculate this quantity for the most general

case taking only into account the dependence on the coordinates of the gauge potentials and the gauge parameter.

We write then  $\partial_{\nu_1} \lambda = -\epsilon_{\nu_1 j} x^j g$  and  $A_{\mu_1} = -\epsilon_{\mu_1 i} x^i f$  together with  $\theta^{\mu_1 \nu_1} = \theta^{12} e^{\mu_1 \nu_1} = \theta e^{\mu_1 \nu_1}$ , we have

$$\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1} *^n \partial_{\nu_1} \lambda = \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} \times \partial_{\mu_{n+1}} \dots \partial_{\mu_2} A_{\mu_1} \partial_{\nu_{n+1}} \dots \partial_{\nu_2} \partial_{\nu_1} \lambda \quad (86)$$

where

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_{n+1}} \dots \partial_{\mu_2} A_{\mu_1} &= -\epsilon_{\mu_1 i} (\delta_{\mu_2}^i \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f + \dots \\ &\quad + \delta_{\mu_{n+1}}^i \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f + x^i \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f), \\ \partial_{\nu_{n+1}} \dots \partial_{\nu_2} \partial_{\nu_1} \lambda &= -\epsilon_{\nu_1 j} (\delta_{\nu_2}^j \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g + \dots \\ &\quad + \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g + x^j \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g). \end{aligned} \quad (87)$$

In consequence

$$\begin{aligned} \theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1} *^n \partial_{\nu_1} \lambda &= \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} [(\delta_{\mu_2}^i \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f + \dots + \delta_{\mu_{n+1}}^i \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f) \epsilon_{ij} x^j \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g \\ &\quad + \epsilon_{ij} x^i \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f (\delta_{\nu_2}^j \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g + \dots + \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g) + \epsilon_{ij} x^i x^j \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g \\ &\quad + (\delta_{\mu_2}^i \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f + \dots + \delta_{\mu_{n+1}}^i \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f) \epsilon_{ij} (\delta_{\nu_2}^j \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g + \dots + \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g)]. \end{aligned} \quad (88)$$

The first two terms of this equation, that we denote as  $S_n$ , can be written in the following form:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} (\epsilon_{\mu_2 j} x^j \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_2} [\partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g] + \dots + \epsilon_{\mu_{n+1} l} x^l \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f [\partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n}] \partial_{\nu_{n+1}} g \\ &\quad + \epsilon_{i \nu_2} x^i \partial_{\mu_2} [\partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f] \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g + \dots + \epsilon_{i \nu_{n+1}} x^i [\partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n}] \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g), \end{aligned} \quad (89)$$

or equivalently, by changing the dummy indices,

$$S_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \right)^n \theta \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} (\epsilon_{\mu_2 j} x^j \partial_{\nu_2} [\partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_n} f \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_n} g] + \dots + \epsilon_{\mu_{n+1} j} x^j \partial_{\nu_{n+1}} [\partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g]). \quad (90)$$

From this we deduce that

$$S_n = \frac{1}{n} \left( \frac{i}{2} \right) \theta \sum_{s=2}^{n+1} \theta^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s j} x^j \partial_{\nu_s} (f *^{n-1} g) = \frac{i}{2} \theta^2 x^j \partial_j (f *^{n-1} g). \quad (91)$$

Therefore we have  $n$  terms of the type  $x^{\mu_s} \partial_{\nu_s} (f *^{n-1} g)$ . The third term of (88) is clearly zero because  $\epsilon_{ij}$  is an antisymmetric tensor and hence  $\epsilon_{ij} x^i x^j = 0$ . The last term in Eq. (88) can be seen as a  $n \times n$  matrix where its elements can be written as

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \theta^{\mu_{n+1} \nu_{n+1}} \epsilon_{ij} \left( \delta_{\mu_2}^i \delta_{\nu_2}^j \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g + \dots + \delta_{\mu_2}^i \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_{n+1}} f \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g \right. \\ \vdots \\ \left. + \delta_{\mu_{n+1}}^i \delta_{\nu_2}^j \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{n+1}} g + \dots + \delta_{\mu_{n+1}}^i \delta_{\nu_{n+1}}^j \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} f \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} g \right). \quad (92)$$

The elements on the diagonal inside the parenthesis are given by

$$\frac{1}{n} \left(\frac{i}{2}\right) \theta \sum_{s=2}^{n+1} \theta^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s \nu_s} f^{*n-1} g = i\theta^2 (f^{*n-1} g), \quad (93)$$

where we have  $n$  terms of the type  $\theta^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s \nu_s} f^{*n-1} g$  and we have used the fact that  $\theta^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s \nu_s} = \theta \epsilon^{\mu_s \nu_s} \epsilon_{\mu_s \nu_s} = 2\theta$ . The rest of the elements of this matrix are

$$\frac{1}{n} \left(\frac{i}{2}\right) \theta \sum_{r \neq s=2}^{n+1} \theta (f^{*n-1} g) = \frac{i\theta^2}{2n} (n^2 - n) (f^{*n-1} g), \quad (94)$$

where we have used  $\theta^{\mu_r \nu_r} \epsilon_{\mu_r \nu_r} = \theta \delta_{\nu_r}^{\mu_r}$ ; therefore we have  $n^2 - n$  terms of the form  $\theta (f^{*n-1} g)$ . Combining Eqs. (91), (93) and (94), we derive the following recursive formula for Eq. (88)

$$\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1}^{*n} \partial_{\nu_1} \lambda \\ = \frac{i\theta^2}{2n} [(n^2 + n) f^{*n-1} g + n x^j \partial_j (f^{*n-1} g)]. \quad (95)$$

$$f^{*m} g = \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{2}\right)^m \theta^{\mu_m \nu_m} \dots \theta^{\mu_1 \nu_1} [(\delta_{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_m} F + \dots + \delta_{\mu_1 \mu_m} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{m-1}} F) x^{\nu_1} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_m} G \\ + (\delta_{\nu_1 \nu_2} \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_m} G + \dots + \delta_{\nu_1 \nu_m} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_{m-1}} G) x^{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_m} F + x^{\mu_1} x^{\nu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_m} F \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_m} G \\ + (\delta_{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_m} F + \dots + \delta_{\mu_1 \mu_m} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{m-1}} F) (\delta_{\nu_1 \nu_2} \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_{m-1}} G + \dots + \delta_{\nu_1 \nu_m} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} G)]. \quad (98)$$

Following a similar algebraic manipulation as that employed in Eq. (88), we can derive the following recursive formula for  $f^{*m} g$ :

$$f^{*m} g = \frac{\theta^2}{m(m-1)} \left(\frac{i}{2}\right)^2 [(m^2 - m) F^{*m-2} G \\ + (m-1) x^j \partial_j (F^{*m-2} G)]. \quad (99)$$

It is important to note that this recursive relation is valid for any functions  $f$ ,  $g$ ,  $F$ , and  $G$  that are quadratic functions in  $x$  and  $y$  and related by  $\partial_i f = x^i F$  and  $\partial_i g = x^i G$ ,  $i = 1, 2$ .

If in the previous expression we set  $m = n - 1$ , we obtain

Then, for a given  $n$  even, we have reduced the calculation of  $\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1}^{*n} \partial_{\nu_1} \lambda$  to that of  $(f^{*n-1} g)$ .

In Sec. VII we have seen that the functions  $f$  and  $g$  are quadratic functions of the Cartesian coordinates  $x$  and  $y$ ; as a consequence  $\partial_i f = x^i F$  and  $\partial_i g = x^i G$ ,  $i = 1, 2$  with  $F$  and  $G$  some quadratic functions on  $x$  and  $y$ . With these elements at hand we have

$$f^{*m} g = \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{2}\right)^m \theta^{\mu_m \nu_m} \dots \theta^{\mu_1 \nu_1} \\ \times \partial_{\mu_m} \dots \partial_{\mu_2} x_{\mu_1} F \partial_{\nu_m} \dots \partial_{\nu_2} x_{\nu_1} G. \quad (96)$$

Furthermore, we also have

$$\partial_{\mu_m} \dots \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_1} f = (\delta_{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_3} \dots \partial_{\mu_m} F + \dots \\ + \delta_{\mu_1 \mu_m} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_{m-1}} F + x_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_m} F), \\ \partial_{\nu_m} \dots \partial_{\nu_2} \partial_{\nu_1} g = (\delta_{\nu_1 \nu_2} \partial_{\nu_3} \dots \partial_{\nu_m} G + \dots \\ + \delta_{\nu_1 \nu_m} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_{m-1}} G + x_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_m} G). \quad (97)$$

Therefore

$$f^{*n-1} g = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)} \left(\frac{i}{2}\right)^2 [(n^2 - 3n + 2) \\ \times F^{*n-3} G + (n-2) x^j \partial_j (F^{*n-3} G)]. \quad (100)$$

The result we have just obtained tells us that all we need to know is the value of  $f^{*1} g$  in order to determine  $f^{*n-1} g$  for  $n$  even. If we put first  $n = 2$  into Eq. (100), we obtain the simple result  $f^{*1} g = 0$  and therefore we deduce that  $f^{*n-1} g = 0$  for  $n$  even. Using this fact in Eq. (95), we obtain then  $\theta^{\mu_1 \nu_1} A_{\mu_1}^{*n} \partial_{\nu_1} \lambda = 0$ ; this in turn implies that the second term in Eq. (85) also vanishes. As a consequence  $\Lambda^{n+1} = 0$  for all  $n$  and therefore  $\hat{\Lambda} = \lambda^0$ . The DQC is then preserved under noncommutative corrections coming from gauge potentials obtained via the SW map.

# A Kähler Compatible Moyal Deformation of the First Heavenly Equation

Marco MACEDA and Daniel MARTÍNEZ-CARBAJAL

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana, Av. San Rafael Atlixco 186,  
C.P. 03340, Deleg. Iztapalapa, Mexico City, México*

E-mail: [mmac@xanum.uam.mx](mailto:mmac@xanum.uam.mx), [danielmc@xanum.uam.mx](mailto:danielmc@xanum.uam.mx)

Received June 07, 2019, in final form September 08, 2019; Published online September 22, 2019

<https://doi.org/10.3842/SIGMA.2019.073>

**Abstract.** We construct a noncommutative Kähler manifold based on a non-linear perturbations of Moyal integrable deformations of  $D = 4$  self-dual gravity. The deformed Kähler manifold preserves all the properties of the commutative one, and we obtain the associated noncommutative Kähler potential using the Moyal deformed gravity approach. We apply this construction to the Atiyah–Hitchin metric and its Kähler potential, which is useful in the description of interactions among magnetic monopoles at low energies.

*Key words:* heavenly equations; Moyal deformation; Atiyah–Hitchin metric

*2010 Mathematics Subject Classification:* 37K10; 53C26; 53D55; 70H06; 83C20

## 1 Introduction

Several applications of hyper-Kähler manifolds in four dimensions involve gravitational instantons, non-linear graviton theory and the heavenly equations [12, 17, 25, 31, 32]; they have also been extensively used in supersymmetric field theories [2, 22]. Of particular interest is their appearance in topological field theories and string theory, where in some cases the moduli spaces have a hyper-Kähler structure. The existence of such a structure provides a more profound and alternative understanding of a physical system in general.

Even though hyper-Kähler manifolds have been analysed in great detail, there exist examples where the metric has proved to be difficult or impossible to calculate. Nevertheless, an algebraic description of four-dimensional non-compact hyper-Kähler manifolds possessing one abelian isometry was given in [7]. In that work, a self-duality condition for the Killing vector associated to the isometry plays a fundamental role in the analysis and classification manifolds; the translational or rotational character of the isometry translates into the existence of a translational or rotational Killing vector.

Two particular examples of self-dual manifolds with rotational Killing symmetries are the Eguchi–Hanson and the Taub–NUT metrics; both metrics share  $SO(3) \times SO(2)$  as a larger group of isometries, but these two group factors act differently on each spacetime.  $SO(3)$  is a translation symmetry for the Eguchi–Hanson metric with  $SO(2)$  acting as a rotational one; the situation is the opposite for the Taub–NUT spacetime. On the other hand, a relevant example of a spacetime admitting only a rotational isometry is the Atiyah–Hitchin (AH) metric that arises on the moduli space  $M_2^0$  of BPS  $SU(2)$  monopoles [4, 18].

As noted in a series of works [3, 4, 18], the AH spacetime is a useful tool in the description of interactions among magnetic monopoles. More specifically, the AH metric is the metric on the moduli space of charge-two non-abelian magnetic  $SU(2)$  monopole with a fixed centre. Its geodesics describe low-energy monopoles interacting through the exchange of massless photons and scalars [4]; at long distances, it reduces to the Taub–NUT space with negative mass parameter [21]. The structure of the AH metric is a four-dimensional hyper-Kähler manifold



with  $SO(3)$  isometry; the  $SO(3)$  group does not rotate the three Kähler forms, and it is the only specific example of a four-dimensional hyper-Kähler space without tri-holomorphic isometries. Furthermore, the AH spacetime is a self-dual solution to Einstein field equations [5] and all of its Killing vectors lack a self-dual covariant derivative [20]; the isometry group  $SU(2)$  is often identified with a supersymmetry group [19].

In general, the metric related to self-dual vacuum solutions to Einstein's field equations is a solution to the first, or the second, heavenly equations [34]. The original motivation for heavenly equations, heavenly metrics and heavenly spaces was the desire to obtain real solutions to Einstein's equations on real manifolds and spawned several papers on the subject and its generalisations [1, 8, 13, 14, 23]. Assuming that the anti-self-dual part of the Weyl tensor was algebraically special, the equivalence between the vacuum Einstein field equations in complex spacetime and the heavenly equation was established in [36]. The heavenly equations are also integrable using the twistor formalism [10, 31] and several examples are known [15, 37]; they are a constant source of research in mathematics and physics.

It is of interest to consider integrable generalisations of the heavenly equation due to its applications to physical systems; its modifications may allow a description of new phenomena or interactions not present in the standard description of a system. For instance, one of the possible generalisations that may be relevant is the one related to the Moyal  $\star$ -product. Within the context of particles and fields, the Moyal product provides a straightforward generalisation to noncommutative field theories and introduces, for example, new interactions in the Standard Model that may be probed in the laboratory. Several applications in quantum gravity also exist, in particular regarding the issue of the singularities and the thermodynamical properties of solutions in general relativity.

In the case of the first heavenly equation, a Moyal deformation of this equation has been done independently by Strachan [38] and Takasaki [43]. Furthermore, a suitable deformed differential calculus was introduced in [41] to deal with the deformation. When applied to integrable systems, the equations

$$d\widehat{\Omega} = 0, \quad \widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} = 0,$$

for a 2-form  $\widehat{\Omega}$  provide a concise writing of the integrability conditions for the deformed system.

We want to analyse the consequences of a noncommutative structure on the moduli space of interacting magnetic monopoles; we expect that such a deformation gives rise to interactions that may be identified with some already known or produces new ones. For the classical case, the Kähler potential for the AH metric was obtained by Olivier [28] following an approach based on the existence of a  $\eta$ -self-dual Killing vector in conjunction with previous results obtained by Boyer and Finley [9]. In our approach, we consider a Moyal deformation of this Kähler potential, and we require that the deformed potential  $\widehat{\Omega}$  must share the same features and properties of the classical one.

The plan of the present paper is as follows. In Section 2, we review the noncommutative deformation of the Monge–Ampère or first heavenly equation using the Moyal  $\star$ -product; in this section, we write the equation satisfied by the noncommutative contributions that preserve the first heavenly equation. In Section 3, we also recall the anti-self-dual vacuum Einstein equations that determine the structure of complex four-dimensional metrics of Euclidean signature. How integrability is preserved in the Moyal-deformed case for these spaces and the conditions under which we guarantee that the Moyal-deformed potential is Kähler are presented there.

Afterwards, in Section 4, we use the Moyal deformed gravity approach to rewrite the deformed Kähler potential  $\widehat{\Omega}$  in terms of local frame fields  $\widehat{e}_\mu^a(x, \theta)$ ; we also obtain general expressions for the corresponding deformed metric elements. We discuss the deformed Kähler potential up to first order on the noncommutative parameter  $\theta$  in greater detail in Section 5; through an integration procedure, we explicitly specify the first order modifications to the deformed metric

and vierbien. The results in Sections 4 and 5 are put together in Section 6 to analyse the case of the AH metric. There, we obtain the Moyal deformed AH metric as a function of the original AH metric, the corrections to the Kähler manifold and the complex coordinates used in the original formulation by Olivier. We finally end with our conclusions and some remarks on future work.

## 2 Moyal deformation of the first heavenly equation

It is well known that the first and second heavenly equations describe the general metric of a self-dual vacuum space-time [34] and that these equations are integrable by twistor methods [10, 31, 33]. Plebański [34] showed that complex metrics with a self-dual Riemann tensor, to be referred to as self-dual metrics, can be described in terms of one function  $\Omega$ , the Kähler potential, satisfying the first heavenly equation

$$\{\Omega_p, \Omega_q\}_{\text{PB}} = \Omega_{p\bar{p}}\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}\Omega_{q\bar{p}} = 1. \quad (2.1)$$

This equation is also called Plebański's first equation; it defines a completely multidimensional integrable system with an infinite number of conservation laws, hierarchy and Lax pair formulation [27, 29, 30, 39, 40]. The Kähler potential  $\Omega$  is an unknown function of suitable spacetime coordinates  $x^\mu := (p, q, \bar{p}, \bar{q})$ ; it gives a local expression of self-dual vacuum Einstein spaces.

In this section we outline the procedure in [38] to obtain the deformation of the first heavenly equation using Strachan's idea. The starting point is to replace the Poisson bracket

$$\{F, G\}_{\text{PB}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{p}} \frac{\partial G}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial F}{\partial \bar{q}} \frac{\partial G}{\partial \bar{p}},$$

by the Moyal bracket defined as [26]

$$\{F, G\}_{\text{MB}} := \frac{1}{i\theta} (F \star G - G \star F) = \frac{2}{\theta} F \sin \left[ \frac{\theta}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{p}}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{q}}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{q}}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{p}}} \right) \right] G,$$

with the  $\star$ -product defined as

$$f \star g := f \exp \left[ \frac{i\theta}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{p}}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{q}}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{q}}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{p}}} \right) \right] g.$$

Thus the Moyal algebra is a deformation of the Poisson algebra. Using the well-known Taylor expansion of the sine function we obtain

$$\{F, G\}_{\text{MB}} = \sum_s^{\infty} -2i\theta^{2s} (F \star^{2s+1} G),$$

where the product  $\star^{2s+1}$  has the generic form

$$f(x) \star^r g(x) = \frac{1}{r!} \left( \frac{i}{2} \right)^r \varepsilon^{\mu_1 \nu_1} \dots \varepsilon^{\mu_r \nu_r} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_r} g(x).$$

The above formulation can be also implemented by considering a noncommutative matrix

$$\theta^{\mu\nu} := \theta \varepsilon^{\mu\nu} = \theta \delta_i^\mu \delta_j^\nu \varepsilon^{\bar{i}\bar{j}} = \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

with the  $\star$ -product defined as

$$f \star g := f \exp \left( \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) g. \tag{2.3}$$

In the above,  $\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$  is an anti-symmetric object, and  $\varepsilon^{\bar{i}\bar{j}}$  is the standard Levi-Civita tensor in two dimensions. Following [38] and [35], we briefly review the iterative method for constructing a set of differential equations for the Moyal deformation of the first heavenly equation. For this purpose, we consider then a series development in powers of  $\theta$  for  $\widehat{\Omega}$

$$\widehat{\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \Omega^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.4}$$

Here  $\Omega^{(n)}$  are functions to be determined and  $\Omega^{(0)} =: \Omega$  is the classical Kähler potential. Plugging this expansion into the integrable deformation of Plebański's (first heavenly) equation

$$\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{\text{MB}} = 1,$$

we obtain the expression

$$\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{\text{MB}} = -2i \sum_{r=0}^{\infty} \theta^r \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{r-2s} (\partial_p \Omega^{(m)} \star^{2s+1} \partial_q \Omega^{(r-m-2s)}) = 1. \tag{2.5}$$

We compare now the coefficients of the same powers of  $\theta$  in both sides of this equation; for  $r = 0$  we find the first heavenly equation (2.1). For any  $r \geq 1$ , equation (2.5) gives the condition

$$\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{r-2s} (\partial_p \Omega^{(m)} \star^{2s+1} \partial_q \Omega^{(r-m-2s)}) = 0. \tag{2.6}$$

To analyse the lowest order modifications to the first heavenly equation, we set  $r = 1$  to obtain

$$\Omega_{p\bar{p}} \Omega_{q\bar{q}}^{(1)} + \Omega_{p\bar{p}}^{(1)} \Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}} \Omega_{q\bar{p}}^{(1)} - \Omega_{p\bar{q}}^{(1)} \Omega_{q\bar{p}} = 0. \tag{2.7}$$

Therefore, once  $\Omega$  is known, equation (2.7) becomes a linear partial differential equation for the first order corrections  $\Omega^{(1)}$ . The deformed potential  $\widehat{\Omega}$  defined as before is not necessarily Kähler-like, we need to impose additional conditions to guarantee that it will be; these conditions will be discussed in the next section.

### 3 Integrable systems

Several multidimensional integrable systems were discussed in [41] assuming a symplectic manifold with some associated  $\star$ -product. All these systems share the characteristic feature that they have associated a 2-form  $\widehat{\Omega}$  which satisfies the equations

$$d\widehat{\Omega} = 0, \tag{3.1}$$

$$\widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} = 0. \tag{3.2}$$

These equations contain the integrability conditions of the systems in a concise geometric way. In the following, we focus on the implications of these relations for the particular case of an integrable deformation of self-dual vacuum Einstein equations.

### 3.1 The self-dual vacuum Einstein equations

Consider a real manifold  $(\mathcal{M}, g)$  of dimension four and metric

$$ds^2 = g_{ab}d\phi^a d\phi^b, \quad a = 1, \dots, 4.$$

We assume that the associated Levi-Civita covariant derivative is torsionless, i.e.,  $D_k g_{ab} = 0$ . Locally it is possible to introduce complex coordinates  $\phi^a = (\tau^i, \tau^{\bar{i}})$ ,  $i, \bar{i} = 1, 2$ , such that the metric reads

$$ds^2 = g_{i\bar{j}}d\tau^i d\tau^{\bar{j}} + g_{\bar{i}j}d\tau^{\bar{i}} d\tau^j = 2g_{i\bar{j}}d\tau^i d\tau^{\bar{j}}. \quad (3.3)$$

Note that this metric is real since it was so in the original coordinates; as a consequence we have

$$g_{i\bar{j}} = g_{\bar{j}i}^*, \quad g_{ij} = g_{\bar{j}\bar{i}}^* = 0.$$

The indexes  $i$  and  $\bar{i}$  are called holomorphic and antiholomorphic respectively; the standard convention is to write the holomorphic index first.

Complex 4-metrics of Euclidean signature with vanishing Ricci tensor and anti-self-dual Weyl tensor correspond to anti-self-dual vacuum Einstein solutions. Using the fact that these metrics are Kähler, they may be written in terms of the Kähler potential  $\Omega$  as  $g_{i\bar{j}} := \Omega_{i\bar{j}} := \partial_i \partial_{\bar{j}} \Omega$ . It follows that

$$g_{\mu\nu} = (\delta_\mu^i \delta_\nu^{\bar{j}} + \delta_\nu^i \delta_\mu^{\bar{j}}) \Omega_{i\bar{j}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{i\bar{j}} \\ \Omega_{\bar{j}i} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

As mentioned before, a noncommutative deformation of the integrability conditions equations (3.1) and (3.2) was proposed in [41]. More specifically, it was noted that if  $\widehat{\Omega}$  is the deformed 2-form

$$\widehat{\Omega} = dp \wedge dq + \lambda(\widehat{\Omega}_{p\bar{p}} dp \wedge d\bar{p} + \widehat{\Omega}_{p\bar{q}} dp \wedge d\bar{q} + \widehat{\Omega}_{q\bar{p}} dq \wedge d\bar{p} + \widehat{\Omega}_{q\bar{q}} dq \wedge d\bar{q}) + \lambda^2 d\bar{p} \wedge d\bar{q}, \quad (3.5)$$

then it clearly satisfies the condition  $d\widehat{\Omega} = 0$ . Furthermore, it is straightforward to see that

$$\widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} = \lambda^2 (\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{\text{MB}} - 1) dp \wedge d\bar{p} \wedge dq \wedge d\bar{q}.$$

The right hand side of this equation vanishes if  $\widehat{\Omega}$  satisfies the deformed Plebański equation. This result means that a Moyal deformation of the first heavenly equation preserves its integrability. Furthermore, we have the important result that a perturbative solution equation (2.4) exists. This result implies that equation (3.4) generalises to

$$g_{\mu\nu}^{(n)} = (\delta_\mu^i \delta_\nu^{\bar{j}} + \delta_\nu^i \delta_\mu^{\bar{j}}) \Omega_{i\bar{j}}^{(n)}. \quad (3.6)$$

### 3.2 Deformed properties

As we previously mentioned, we want to construct a four-dimensional Moyal deformed integrable Kähler manifold. For this purpose, we impose that the deformed Kähler potential  $\widehat{\Omega}$  must share the same features and properties of the undeformed system; they are  $(\hat{g}_{i\bar{j}} := \partial_i \partial_{\bar{j}} \widehat{\Omega})$

- 1) the 2-form  $\widehat{\Omega} := \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} dx^i \wedge d\bar{x}^{\bar{j}} := 2i\hat{g}_{i\bar{j}} dx^i \wedge d\bar{x}^{\bar{j}}$  should be closed, i.e.,  $d\widehat{\Omega} = 0$ ,
- 2) the metric coefficients  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  should be real (hermitian property),
- 3) the determinant of  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  should be equal to one, i.e.,  $\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} := \widehat{\Omega}_{p\bar{p}} \star \widehat{\Omega}_{q\bar{q}} - \widehat{\Omega}_{p\bar{q}} \star \widehat{\Omega}_{q\bar{p}} = 1$ .



The first of the above conditions can be analysed by fixing for the 2-form  $\widehat{\Omega}$ , the same functional form as that of equation (3.5). This fact implies that the following condition must hold

$$\partial_k \Omega_{i\bar{j}}^{(n)} = 0 = \partial_{\bar{k}} \Omega_{i\bar{j}}^{(n)}, \quad k = p, q, \quad \bar{k} = \bar{p}, \bar{q}.$$

We now write equation (2.6) as

$$\sum_{m=0}^r (\partial_p \Omega^{(m)} *^1 \partial_q \Omega^{(r-m)}) + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{r-2s} (\partial_p \Omega^{(m)} *^{2s+1} \partial_q \Omega^{(r-m-2s)}) = 0.$$

The second sum vanishes because of the first property imposed on  $\Omega^{(n)}$ ; we have thus

$$\sum_{m=0}^r (\partial_p \Omega^{(m)} *^1 \partial_q \Omega^{(r-m)}) = \sum_{m=0}^r \epsilon^{\bar{i}\bar{j}} \Omega_{p\bar{i}}^{(m)} \Omega_{q\bar{j}}^{(r-m)} = 0. \quad (3.7)$$

Therefore, we can write equation (2.5) in terms of the Poisson bracket as

$$\{\widehat{\Omega}_p, \widehat{\Omega}_q\}_{\text{PB}} = 1.$$

The second condition implies that the corresponding metric coefficients are hermitian as in the commutative case; therefore, each perturbation  $\Omega^{(n)}$  is also hermitian. We have then

$$\Omega_{i\bar{j}}^{(n)} = \Omega_{j\bar{i}}^{(n)}, \quad \Omega_{ij}^{(n)} = \Omega_{\bar{i}\bar{j}}^{(n)} = 0,$$

where the last two conditions hold because we have a deformed Kähler manifold.

The third property can be imposed from the curvature condition equation (2.1) since the deformed first heavenly equation admits a rewriting as a simple determinant. We know that in the case of the non-deformed Kähler manifold, the determinant of the metric tensor is equal to one. In the case of the deformed case the deformed metric tensor  $\widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  should then satisfy the same property. We demand that by definition

$$\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} := \widehat{\Omega}_{pp} \widehat{\Omega}_{q\bar{q}} - \widehat{\Omega}_{p\bar{q}} \widehat{\Omega}_{q\bar{p}} = 1.$$

The above equation is equivalent to  $\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \epsilon^{\bar{k}\bar{l}} \widehat{\Omega}_{p\bar{k}} \widehat{\Omega}_{q\bar{l}} = 1$ . Using the power series expansion in equation (2.4) for  $\widehat{\Omega}$ , we get the different contributions to  $\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}}$  order by order on  $\theta$

$$\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \{\Omega_p, \Omega_q\}_{\text{PB}} + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n=r \geq 1}}^r \epsilon^{\bar{k}\bar{l}} \theta^{m+n} \Omega_{p\bar{k}}^{(m)} \Omega_{q\bar{l}}^{(n)}.$$

The first term in this expression is the Moyal deformation of the first heavenly equation; its value is equal to one. Therefore, we conclude that the second term should vanish, namely

$$\sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n=r \geq 1}}^r \epsilon^{\bar{k}\bar{l}} \theta^{m+n} \Omega_{p\bar{k}}^{(m)} \Omega_{q\bar{l}}^{(n)} = 0.$$

In this equation are encoded all the combinations of order  $\theta^j$  such that  $j > r$ .

## 4 Noncommutative gravity

In the previous section, we studied the noncommutative deformation of the Kähler potential using the Moyal deformation of the first heavenly equation. The deformation functions  $\Omega^{(n)}$  are unknown; each one of them satisfy their respective differential equations obtained from equation (2.6). In this section, we give an ansatz for the deformed Kähler potentials  $\Omega^{(n)}$  appearing in equation (3.7). As we will see later, the deformed functions  $\Omega^{(n)}$  can be expressed in terms of a deformed local frame or vierbein  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$ ; after an integration procedure, the deformed Kähler potential  $\widehat{\Omega}$  will be written in terms of the vierbein.



#### 4.1 Deformed gauge fields

For some time now, a subject of interest has been the construction of consistent noncommutative deformations of Einstein gravity. Following the standard procedure to construct noncommutative gauge and scalar field theories [11, 42], noncommutative versions of the Einstein-Hilbert action have been obtained by replacing the ordinary product by the noncommutative Moyal product in equation (2.3). The noncommutative structure of spacetime is then

$$[x^\mu, x^\nu]_\star = i\theta^{\mu\nu},$$

where the elements  $\theta^{\mu\nu}$  are constant (canonical) parameters and antisymmetric, i.e.,  $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$ .

In this approach, we can introduce a noncommutative metric as

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\hat{e}_\mu^a \star \hat{e}_\nu^b + \hat{e}_\nu^a \star \hat{e}_\mu^b)\eta_{ab}, \quad (4.1)$$

in terms of a vierbein  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$  and the Minkowski metric  $\eta_{ab}$ ; the vierbein  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$  reduces to the commutative one when  $\theta = 0$ . The metric  $\hat{g}_{\mu\nu}$  is symmetric by construction and real even if the deformed tetrad fields  $\hat{e}_\mu^a(x, \theta)$  are complex quantities. For  $\theta = 0$ , we identify this metric with the commutative metric field

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x, \theta)|_{\theta=0} = g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}.$$

We want now to construct a Moyal deformed spacetime with associated deformed vierbein and metric, sharing the same properties of the undeformed spacetime, and such that the deformed Kähler potential discussed in the Section 3.2 exists. For this purpose, we first introduce the vector fields  $\hat{e}_\mu^b$  as

$$\hat{e}_\mu^b = e_\mu^b + \theta^{k\lambda} e_{\mu k\lambda}^b + \dots + \theta^{k_1\lambda_1} \dots \theta^{k_n\lambda_n} e_{\mu k_1\lambda_1 \dots k_n\lambda_n}^b + \dots,$$

where the elements  $e_{\mu k_1\lambda_1 \dots k_n\lambda_n}^b$  are to be found. With this series expansion in powers of  $\theta$ , we write then the metric tensor as

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + i\theta^{k\lambda} g_{\mu\nu k\lambda}^{(1)} + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (4.2)$$

up to first order on  $\theta$ .

Since we are interested in making compatible the noncommutative deformation of the Kähler metric equation (3.6), with the deformation in equation (4.2), let us assume the following decomposition for the vierbein

$$\theta^{k\lambda} e_{\mu k\lambda}^b = \theta^{k\lambda} \mathcal{P}_{k\lambda} e_\mu^{(1)b},$$

to first order on  $\theta$ ; here  $\mathcal{P}_{k\lambda}$  and  $e_\mu^{(1)b}$  are unknown quantities. For the  $n$ -th order we generalize this ansatz to

$$\theta^{k_1\lambda_1} \dots \theta^{k_n\lambda_n} e_{\mu k_1\lambda_1 \dots k_n\lambda_n}^b = (\theta^{k\lambda} \mathcal{P}_{k\lambda})^n e_\mu^{(n)b}.$$

We now impose the condition

$$\hat{e}_\mu^b = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n e_\mu^{(n)b}, \quad e_\mu^{(0)b} := e_\mu^b, \quad (4.3)$$

implying  $\theta^{k\lambda} \mathcal{P}_{k\lambda} = \theta$ ; it is easy to show now that if we choose  $\mathcal{P}_{k\lambda} := \partial_k \Omega_p \partial_\lambda \Omega_q$  where  $\Omega$  is the undeformed Kähler potential, then equation (4.3) is satisfied, where  $\theta^{k\lambda}$  is given by



equation (2.2). In a similar way as for the vierbein, the tensor metric equation (4.2) takes the general form

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n g_{\mu\nu}^{(n)},$$

where the  $g_{\mu\nu}^{(n)}$ 's are tensor fields written in terms of the  $e_{\mu}^{(n)a}$ 's; we fix their form as follows: first, to make compatible this deformation with the structure of a Kähler manifold, we need to impose the constraint  $\partial_{\alpha} g_{\mu\nu}^{(n)} = 0$  with  $x^{\alpha} = (p, q, \bar{p}, \bar{q})$ . This condition implies the property  $\partial_{\mu} e_{\nu}^{(n)a} = 0$  for the vierbein; equation (4.1) simplifies then to

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{e}_{\mu}^a \hat{e}_{\nu}^b \eta_{ab}. \quad (4.4)$$

Using now the expansion of  $\hat{e}_{\mu}^a$  in powers of  $\theta$  into equation (4.4), and equating the coefficients of the same power of  $\theta$  in both sides of the equation, we obtain the  $n$ -th tensor field  $g_{\mu\nu}^{(n)}$  in terms of the deformed tetrad  $e_{\mu}^{(n)a}$  as

$$g_{\mu\nu}^{(n)} = \sum_{m=0}^n e_{\mu}^{(m)a} e_{\nu}^{(n-m)b} \eta_{ab}, \quad n = 0, 1, \dots$$

## 5 The deformed Kähler potential

According with [34], self-dual gravity can be parametrised in terms of the complex coordinates  $x^{\mu} = \{p, q, \bar{p}, \bar{q}\}$  and the resulting spacetime has the structure of a Kähler manifold. In our case, the Kähler spacetime given in equation (3.3) can be written in terms of the classical vierbein  $e_{\mu}^a$  and the local flat spacetime metric  $\eta_{ab}$  defined as

$$e_{\mu}^a := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_{p\bar{p}} & \Omega_{p\bar{q}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{q\bar{p}} & \Omega_{q\bar{q}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{ab} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

We now construct an ansatz for the deformed potentials  $\Omega^{(n)}$  in terms of the deformed vierbein  $e_{\mu}^{(n)a}$ . Since we want that all the properties listed in Section 3.2 hold, we write first

$$g_{\mu\nu}^{(n)} = \sum_{m=0}^n e_{\mu}^{(m)a} e_{\nu}^{(n-m)b} \eta_{ab} = (\delta_{\mu}^i \delta_{\nu}^{\bar{j}} + \delta_{\nu}^i \delta_{\mu}^{\bar{j}}) \Omega_{i\bar{j}}^{(n)}. \quad (5.2)$$

The simplest ansatz for the vierbein  $e_{\mu}^{(n)a}$  that satisfies  $g_{ij}^{(n)} = g_{\bar{i}\bar{j}}^{(n)*} = 0$ , is

$$e_{\mu}^{(n)a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{\bar{p}}^{(n)1} & e_{\bar{q}}^{(n)1} \\ e_p^{(n)2} & e_q^{(n)2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{\bar{p}}^{(n)3} & e_{\bar{q}}^{(n)3} \\ e_p^{(n)4} & e_q^{(n)4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As we discussed previously, the vierbein  $e_{\mu}^{(n)a}$  must have the property  $\partial_{\mu} e_{\nu}^{(n)a} = 0$ ,  $\mu = p, q, \bar{p}, \bar{q}$ . Therefore, we shall assume the following dependence

$$e_{\mu}^{(n+1)a} = e_{\mu}^{(n+1)a}(\Omega_{p\bar{p}}^{(n)}, \Omega_{q\bar{q}}^{(n)}, \Omega_{p\bar{q}}^{(n)}, \Omega_{q\bar{p}}^{(n)}). \quad (5.3)$$

The deformed Kähler potential  $\Omega^{(n+1)}$  to order  $n+1$  will depend explicitly on the vierbein to order  $n+1$  and  $n$ , i.e., on  $e_\mu^{(n+1)a}$  and  $e_\mu^{(n)a}$  respectively. We begin by analysing the deformation to first order: from equation (5.2) we obtain

$$\Omega_{ij}^{(1)} = e_{(i}^{(1)a} e_{j)}^b \eta_{ab}.$$

Using the undeformed vierbein  $e_\mu^a$  given in equation (5.1), we write explicitly

$$\Omega_{q\bar{q}}^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)3} + e_q^{(1)2} \Omega_{p\bar{q}} + e_q^{(1)4} \Omega_{q\bar{q}}, \quad (5.4)$$

$$\Omega_{q\bar{p}}^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)3} + e_q^{(1)2} \Omega_{p\bar{p}} + e_q^{(1)4} \Omega_{q\bar{p}}, \quad (5.5)$$

$$\Omega_{p\bar{p}}^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)1} + e_p^{(1)2} \Omega_{p\bar{p}} + e_p^{(1)4} \Omega_{q\bar{p}}, \quad (5.6)$$

$$\Omega_{p\bar{q}}^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)1} + e_p^{(1)2} \Omega_{p\bar{q}} + e_p^{(1)4} \Omega_{q\bar{q}}. \quad (5.7)$$

To obtain the Kähler potential up to first order, we need to solve equations (5.4)–(5.7). If we integrate first the above equations with respect to the anti-holomorphic variables  $x^{\bar{i}} = \{\bar{p}, \bar{q}\}$ , we need to calculate a set of integrals of the form  $\int e_\alpha^{(1)A} \Omega_{\beta\mu} dx^\nu$ . After an integration by parts, we see that

$$\int e_\alpha^{(1)A} \Omega_{\beta\mu} dx^\nu = \begin{cases} e_\alpha^{(1)A} \Omega_{\beta\mu} x^\nu + C_i^{(1)}, & \text{if } \mu \neq \nu, \\ e_\alpha^{(1)A} \Omega_\beta + C_i^{(1)}, & \text{if } \mu = \nu, \end{cases}$$

where we used the properties  $\partial_\mu e_\nu^{(1)a} = 0$ ,  $\partial_\alpha \Omega_{\mu\nu} = 0$  of the vierbein and the Kähler potential respectively. In consequence, we have

$$\Omega_q^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p + e_q^{(1)4} \Omega_q + C_1^{(1)}(p, q, \bar{p}), \quad (5.8)$$

$$\Omega_q^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p} + e_q^{(1)2} \Omega_p + e_q^{(1)4} \Omega_q + C_2^{(1)}(p, q, \bar{q}), \quad (5.9)$$

$$\Omega_p^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p} + e_p^{(1)2} \Omega_p + e_p^{(1)4} \Omega_q + C_3^{(1)}(p, q, \bar{q}), \quad (5.10)$$

$$\Omega_p^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q} + e_p^{(1)2} \Omega_p + e_p^{(1)4} \Omega_q + C_4^{(1)}(p, q, \bar{p}), \quad (5.11)$$

where  $C_1^{(1)} = C_1^{(1)}(p, q, \bar{p})$ ,  $C_2^{(1)} = C_2^{(1)}(p, q, \bar{q})$ ,  $C_3^{(1)} = C_3^{(1)}(p, q, \bar{q})$  and  $C_4^{(1)} = C_4^{(1)}(p, q, \bar{p})$  are functions of their arguments. We determine these functions by comparing equations (5.8)–(5.9) and (5.10)–(5.11); we conclude that  $C_1^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p}$ ,  $C_2^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q}$ ,  $C_3^{(1)} = e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q}$  and  $C_4^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p}$ . Therefore, we obtain the following two expressions

$$\Omega_q^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)3} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)3} \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p + e_q^{(1)4} \Omega_q, \quad (5.12)$$

$$\Omega_p^{(1)} = e_{\bar{p}}^{(1)1} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(1)1} \bar{q} + e_p^{(1)2} \Omega_p + e_p^{(1)4} \Omega_q. \quad (5.13)$$

Following the same procedure as before, after an integration by parts of equations (5.12) and (5.13) with respect to the holomorphic variables  $q$  and  $p$  respectively, the Kähler potential takes the unique form

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= (e_{\bar{p}}^{(1)1} p + e_{\bar{p}}^{(1)3} q) \bar{p} + (e_{\bar{q}}^{(1)1} p + e_{\bar{q}}^{(1)3} q) \bar{q} + e_q^{(1)2} \Omega_p q + e_p^{(1)4} \Omega_q p \\ &\quad + (e_p^{(1)2} + e_q^{(1)4}) \Omega. \end{aligned} \quad (5.14)$$

In general, a straightforward calculation shows that the Kähler potential up to the  $n$ -th order has the expression

$$\begin{aligned} \Omega^{(n)} &= (e_{\bar{p}}^{(n)1} p + e_{\bar{p}}^{(n)3} q) \bar{p} + (e_{\bar{q}}^{(n)1} p + e_{\bar{q}}^{(n)3} q) \bar{q} + e_q^{(n)2} \Omega_p q + e_p^{(n)4} \Omega_q p + (e_p^{(n)2} + e_q^{(n)4}) \Omega \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} (e_p^{(m)a} p + e_q^{(m)a} q) (e_{\bar{p}}^{(n-m)b} \bar{p} + e_{\bar{q}}^{(n-m)b} \bar{q}) \eta_{ab}. \end{aligned}$$

When  $n = 1$ , we recover equation (5.14).

### 5.1 Solutions for the Kähler potential to first order

As a particular example of the previous approach, we consider now in detail the deformation of the Kähler potential and the vierbein up to first order on the noncommutative parameter  $\theta$ . We recall that the curvature condition can be formulated as a simple determinant, that is

$$\det \widehat{\Omega}_{i\bar{j}} = \widehat{\Omega}_{p\bar{p}} \widehat{\Omega}_{q\bar{q}} - \widehat{\Omega}_{p\bar{q}} \widehat{\Omega}_{q\bar{p}} = 1,$$

where  $\widehat{\Omega} = \Omega + \theta \Omega^{(1)}$  up to first order. Substituting this expression in the determinant condition, we obtain the following equations

$$\Omega_{p\bar{p}} \Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}} \Omega_{q\bar{p}} = 1, \quad (5.15)$$

$$\Omega_{p\bar{p}} \Omega_{q\bar{q}}^{(1)} + \Omega_{p\bar{p}}^{(1)} \Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}} \Omega_{q\bar{p}}^{(1)} - \Omega_{p\bar{q}}^{(1)} \Omega_{q\bar{p}} = 0. \quad (5.16)$$

Equations (5.15) and (5.16) are the Monge–Ampère equations to zero and first order respectively. If we substitute now equations (5.4)–(5.7) into the heavenly equation to first order equation (5.16), we obtain

$$e_q^{(1)4} + e_p^{(1)2} + e_q^{(1)3} \Omega_{p\bar{p}} + e_p^{(1)1} \Omega_{q\bar{q}} - e_p^{(1)3} \Omega_{p\bar{q}} - e_q^{(1)1} \Omega_{q\bar{p}} = 0.$$

Therefore, we need to find a form for the vierbein  $e_\mu^{(1)a}$  such that the previous equation holds. We consider the following two possibilities

$$\Omega_{p\bar{p}}^{(1)} = C \Omega_{q\bar{p}}^{(1)}, \quad \Omega_{p\bar{q}}^{(1)} = C \Omega_{q\bar{q}}^{(1)},$$

for case I, and

$$\Omega_{p\bar{p}}^{(1)} = C \Omega_{p\bar{q}}^{(1)}, \quad \Omega_{q\bar{p}}^{(1)} = C \Omega_{q\bar{q}}^{(1)},$$

for case II. We use now equations (5.4)–(5.7) into the previous formulas to obtain, after some simplifications, the following relations among the components of the vierbein to first order

$$C e_q^{(1)4} = e_p^{(1)4}, \quad C e_q^{(1)2} = e_p^{(1)2}, \quad C e_q^{(1)3} = e_q^{(1)1}, \quad C e_p^{(1)3} = e_p^{(1)1},$$

for case I, and

$$e_p^{(1)1} = C e_q^{(1)1}, \quad e_p^{(1)3} = C e_q^{(1)3}, \quad e_p^{(1)4} = \frac{A}{A'} e_q^{(1)4} = A(\Omega_{q\bar{p}} - C \Omega_{q\bar{q}}),$$

$$e_p^{(1)2} = \frac{A}{A'} e_q^{(1)2} = A(\Omega_{p\bar{p}} - C \Omega_{p\bar{q}}),$$

for case II.  $A$ ,  $A'$  and  $C$  are arbitrary constants in the above expressions. After the respective simplifications, the Monge–Ampère equation becomes

$$e_q^{(1)4} + e_p^{(1)2} + e_q^{(1)3} (\Omega_{p\bar{p}} - C \Omega_{q\bar{p}}) + e_p^{(1)1} (C \Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}) = 0, \quad (5.17)$$

for case I and

$$e_q^{(1)4} + e_p^{(1)2} + e_q^{(1)3} (\Omega_{p\bar{p}} - C \Omega_{p\bar{q}}) + e_p^{(1)1} (C \Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{q\bar{p}}) = 0, \quad (5.18)$$

for case II.

To further proceed, we recall that according to equation (5.3) the vierbein  $e_\mu^{(1)a}$  should have the functional dependence

$$e_\mu^{(1)a} = e_\mu^{(1)a}(\Omega_{p\bar{p}}, \Omega_{q\bar{q}}, \Omega_{p\bar{q}}, \Omega_{q\bar{p}}),$$



where  $\Omega_{i\bar{j}}$ , with  $\{i, \bar{j}\} = \{p, q, \bar{p}, \bar{q}\}$ , are the metric coefficients of the undeformed metric tensor. For case I, we choose the following ansatz for the vierbein

$$\begin{aligned} e_q^{(1)4} &= \alpha + \beta\Omega_{p\bar{p}} + \gamma\Omega_{q\bar{q}} + \delta\Omega_{p\bar{q}} + \sigma\Omega_{q\bar{p}}, \\ e_{\bar{p}}^{(1)2} &= \alpha' + \beta'\Omega_{p\bar{p}} + \gamma'\Omega_{q\bar{q}} + \delta'\Omega_{p\bar{q}} + \sigma'\Omega_{q\bar{p}}, \\ e_{\bar{q}}^{(1)3} &= \alpha'' + \beta''\Omega_{p\bar{p}} + \gamma''\Omega_{q\bar{q}} + \delta''\Omega_{p\bar{q}} + \sigma''\Omega_{q\bar{p}}, \\ e_{\bar{p}}^{(1)3} &= \alpha''' + \beta'''\Omega_{p\bar{p}} + \gamma'''\Omega_{q\bar{q}} + \delta'''\Omega_{p\bar{q}} + \sigma'''\Omega_{q\bar{p}}, \end{aligned}$$

where  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \dots$  are arbitrary constants. If we substitute the above equations into equation (5.17), we obtain the following relationship between the coefficients

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + \gamma'' + C\beta''' &= 0, & \beta + \beta' + \alpha'' &= 0, & \gamma + \gamma' + C\alpha''' &= 0, \\ \delta + \delta' - \alpha''' &= 0, & \sigma + \sigma' - C\alpha'' &= 0. \end{aligned}$$

The solution to this system of coupled linear equations is

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \sigma''' = -\delta'' = -\beta''', & \gamma''' &= 0 = \delta''', & \sigma'' &= 0 = \beta'', \\ C &= -\frac{\alpha + \alpha' + \gamma + \gamma' + \gamma'' + \sigma + \sigma'}{\beta''' - \alpha'' + \alpha''}. \end{aligned}$$

For case II, we choose the following ansatz for the vierbein

$$\begin{aligned} e_{\bar{q}}^{(1)1} &= \alpha + \beta\Omega_{p\bar{p}} + \gamma\Omega_{q\bar{q}} + \delta\Omega_{p\bar{q}} + \sigma\Omega_{q\bar{p}}, \\ e_{\bar{q}}^{(1)3} &= \alpha' + \beta'\Omega_{p\bar{p}} + \gamma'\Omega_{q\bar{q}} + \delta'\Omega_{p\bar{q}} + \sigma'\Omega_{q\bar{p}}, \end{aligned}$$

where  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \dots$  are arbitrary constants. Substitution of these equations into equation (5.18) leads to

$$\begin{aligned} \gamma' + C\beta &= 0, & \alpha' + A' &= 0, & \alpha - A &= 0, \\ \delta - \gamma' &= 0, & \sigma' - \beta &= 0, & \delta + C\sigma' &= 0, \end{aligned}$$

with solution

$$\gamma = 0 = \sigma, \quad \delta' = 0 = \beta', \quad C = -\frac{\gamma'}{\sigma'} = -\frac{\delta}{\beta}.$$

The previous expressions determine the Kähler potential that is compatible with the Moyal deformation of the first heavenly equation. We have thus arrived to a multi-parameter family of solutions for the Moyal-deformed Kähler potential.

## 6 Deformed $\eta$ -self dual Riemman metric

Following [9], we consider the algebraic description of four dimensional non-compact hyper-Kähler manifolds that possess at least one abelian isometry, i.e., a translational or rotational symmetry. For this purpose, we start by recalling the rotational character of the corresponding Killing vector fields. By its own definition, a Killing vector field  $\xi_\mu$  satisfies  $\nabla_{(\nu}\xi_{\mu)} = 0$ , while the self-duality of the anti-symmetric part  $\nabla_{[\nu}\xi_{\mu]}$  provides the critical distinction between these two types of Killing vectors field [9, 16]:  $\xi_\mu$  is translational if it satisfies the condition

$$\xi_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}\eta\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\xi_{\mu;\nu}, \quad \text{with } \eta = \pm 1.$$

Otherwise, we say that  $\xi_\mu$  is rotational.



On the other hand, let  $g_{\alpha\beta}$  be a  $\eta$ -self dual Riemman 4-metric with Euclidean signature and let  $\xi = \xi^\alpha \partial_\alpha = \partial/\partial\phi$  be a Killing vector of  $g_{\alpha\beta}$ . Then, locally we may write

$$ds^2 = \frac{1}{V} (d\phi + \omega_i dx^i)^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.1)$$

with  $V$ ,  $\omega_i$  and  $\gamma_{ij}$  being all independent of  $\phi$ ; Greek indices run from 0 to 3 and Latin indices run from 1 to 3.

In [28], a set of complex coordinates for the Atiyah–Hitchin (AH) metric was found as an alternative procedure to the twistor formalism [6, 24]. In the analysis of magnetic monopoles interactions, the moduli space admits a metric formulation in the low-energy limit leading to the AH metric and scattering processes may be analysed in this way; the length element of the AH metric is [3]

$$ds^2 = \beta^2 \gamma^2 \delta^2 \frac{(dk)^2}{(4k^2 k'^2 K^2)^2} + \beta^2 \sigma_x^2 + \gamma^2 \sigma_y^2 + \delta^2 \sigma_z^2,$$

where

$$\beta\gamma = -K^2(k'^2 + u), \quad \gamma\delta = K^2(k'^2 - u), \quad \beta\delta = -K^2 u,$$

and

$$u = \frac{G(k)}{K(k)}, \quad G(k) = E(k) - k'^2 K(k), \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

The differential 1-forms  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  and  $\sigma_z$  in the metric are invariant under  $SU(2)$  [3, 4]; the Killing vector associated to the diagonal  $U(1)$  is  $\xi = \partial/\partial\phi$ . By casting the metric in the form equation (6.1), we establish the identifications

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} &= \frac{1}{4} (\beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \gamma^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \delta^2 \cos^2 \theta), \\ \omega &= \frac{1}{V} ((\gamma^2 - \beta^2) \sin \psi \cos \psi \sin \theta d\theta + \delta^2 \cos \theta d\psi), \end{aligned}$$

together with

$$\begin{aligned} \gamma_{k^2 k'^2} &= \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^2}{V (4k^2 k'^2 K^2)^2}, & \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1}{16} [\beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta + \delta^2 \cos^2 \theta (\beta^2 \sin^2 \psi + \gamma^2 \cos^2 \psi)], \\ \gamma_{\theta\psi} &= -\frac{1}{16} [\delta^2 (\gamma^2 - \beta^2) \cos \theta \sin \theta \cos \psi \sin \psi], \\ \gamma_{\psi\psi} &= \frac{1}{16} \delta^2 \sin^2 \theta (\beta^2 \cos^2 \psi + \gamma^2 \sin^2 \psi). \end{aligned}$$

The corresponding Kähler potential has a nice simple form as a function of  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $k^2$ , namely [28]

$$\Omega = \frac{\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta}{4} - J,$$

where

$$J := \frac{1}{8} [(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta) - \gamma\delta \sin^2 \theta \cos^2 \psi - \delta\beta \sin^2 \theta \sin^2 \psi - \beta\gamma \cos^2 \theta]. \quad (6.2)$$

On the other hand, Boyer and Finley [9] studied the Killing vectors in self dual Euclidean Einstein spaces using the formalism of complex  $\mathcal{H}$ -spaces. They proved that it is always possible to choose complex coordinates such that either

$$\xi = \partial_p + \partial_{\bar{p}} \quad \text{and} \quad \xi\Omega = 0, \quad \text{or} \quad \xi = i(p\partial_p - \bar{p}\partial_{\bar{p}}) \quad \text{and} \quad \xi\Omega = 0, \quad (6.3)$$



depending on whether the covariant derivative of the Killing vector  $\xi$  is purely self-dual or not. In the previous formulae,  $\Omega$  is a Kähler potential that satisfies the Monge–Ampère equation. Furthermore, they showed how to simplify the equation for  $\Omega$  with the help of an appropriate Legendre transformation in both cases. For this purpose, they introduced a pair of complex coordinates  $x^i \equiv (q, p)$  such that the second alternative in equation (6.3) is satisfied, and set

$$p = \sqrt{r} e^{i\tilde{\theta}}.$$

In consequence the Killing vector is  $\xi = \partial/\partial\tilde{\theta}$  and

$$\Omega \equiv \Omega(r, q, \bar{q}).$$

By definition of the Kähler potential, we have

$$ds^2 = 2\Omega_{i\bar{j}} dx^i dx^{\bar{j}}, \quad (6.4)$$

where  $\Omega$  satisfies the Monge–Ampère or first heavenly equation

$$\Omega_{pp}\Omega_{q\bar{q}} - \Omega_{p\bar{q}}\Omega_{q\bar{p}} = 1. \quad (6.5)$$

In terms of the variable  $r$ , the first heavenly equation (6.5) becomes

$$(r\Omega_r)_r \Omega_{q\bar{q}} - r\Omega_{rq}\Omega_{r\bar{q}} = 1. \quad (6.6)$$

Now, if  $J := r\Omega_r$  ( $J$  is conjugated to  $\ln r$  with respect to  $\Omega$ ), and use  $(J, q, \bar{q})$  as a new choice of independent variables to rewrite equations (6.4) and (6.6), we obtain

$$\Omega_{q\bar{q}} = rJ \left[ \frac{r_q r_{\bar{q}}}{r(rJ)^2} + 1 \right],$$

where we used  $\Omega_{rq} = -r^{-1}r_J^{-1}r_q$ ,  $\Omega_{r\bar{q}} = -r^{-1}r_J^{-1}r_{\bar{q}}$  and  $J_r = r_J^{-1}$ . Equation (6.4) becomes

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{r}{r_J} \right) \left[ 2d\tilde{\theta} + \frac{i}{r} (r_q dq - r_{\bar{q}} d\bar{q}) \right]^2 + \left( \frac{r_J}{r} \right) (dJ^2 + 4rdq d\bar{q}) \right\},$$

so that the line element  $ds^2$  has the same form as equation (6.1); this coordinate frame is referred as the Toda frame [6]. With  $J$  given by equation (6.2), it follows that we have the identifications

$$V = \frac{r_J}{2r}, \quad d\phi + \omega_i dx^i = d\tilde{\theta} + \frac{i}{2r} (r_q dq - r_{\bar{q}} d\bar{q}), \quad \gamma_{ij} dx^i dx^j = dJ^2 + 4rdq d\bar{q}. \quad (6.7)$$

According to Sections 2 and 3, a Moyal deformed Kähler potential  $\widehat{\Omega}$  could be given as a power series expansion on the noncommutative parameter. If we also impose the condition that the moduli space, which is the AH spacetime, preserves its (anti-)self-dual character under the deformation, we must demand that the rotational Killing symmetry be unchanged; this requirement happens if, and only if, each  $\Omega^{(n)}$  in the series expansion of the deformed Kähler potential is a function only of  $r, q, \bar{q}$ . Therefore, under the assumption  $\Omega^{(n)} \equiv \Omega^{(n)}(r, q, \bar{q})$ , the original first heavenly equation for the modified Kähler potentials  $\Omega^{(n)}$  becomes

$$\sum_{m=0}^s \{ (r\Omega_r^{(m)}) \Omega_{q\bar{q}}^{(s-m)} - r\Omega_{rq}^{(m)} \Omega_{r\bar{q}}^{(s-m)} \} = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Following the same procedure that for the undeformed case [28], we start by defining  $J^{(n)} := r\Omega_r^{(n)}$  and we use  $(J, q, \bar{q})$  as a new choice of independent variables to write  $\Omega_{rq}^{(n)} = -r^{-1}J_r^{(n)}r_q$

and  $\Omega_{r\bar{q}}^{(n)} = -r^{-1}J_r^{(n)}r_{\bar{q}}$ . Using this result and after a lengthy calculation, we obtain the following iterative expression for  $\Omega_{q\bar{q}}^{(n)}$

$$\Omega_{q\bar{q}}^{(n)} = r_J J_r^{(n)} (\Omega_{q\bar{q}}^{(0)} - 2r_J) + \sum_{\substack{s+m=n \\ m \neq n, 0}} r_J J_r^{(s)} (J_r^{(m)} r^{-1} r_q r_{\bar{q}} - \Omega_{q\bar{q}}^{(m)}),$$

where  $n \geq 1$ . The corresponding line element associated to the modified Kähler potential  $\widehat{\Omega}$  is then

$$\begin{aligned} d\widehat{S}^2 = & \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n J_r^{(n)} r_J ds^2 + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} -\theta^n 2r_J r_J J_r^{(n)} + \sum_{n=2}^{\infty} \theta^n \sum_{m=1}^{n-1} r_J J_r^{(n-m)} \right. \\ & \left. \times (J_r^{(m)} r^{-1} r_q r_{\bar{q}} - \Omega_{q\bar{q}}^{(m)}) \right] dq d\bar{q}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

It is important to stress that  $d\widehat{S}^2$  possesses the same symmetries as the line element  $ds^2$  of the undeformed Kähler potential, namely, they both share the same Killing vector  $\xi = \partial/\partial\theta$ . In terms of the coordinate pair  $(\phi, x^i)$ , we write equation (6.8) as

$$\begin{aligned} d\widehat{S}^2 = & \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n J_r^{(n)} r_J ds^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \sum_{m=1}^{n-1} r_J J_r^{(n-m)} (J_r^{(m)} r^{-1} r_q r_{\bar{q}} + \Omega_{q\bar{q}}^{(m)}) \\ & \times \frac{1}{4} [\gamma_{ij} dx^i dx^j - dJ^2]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

In equation (6.9), each one of the contributions  $J_r^{(n)}$  and  $\Omega_{q\bar{q}}^{(n)}$  must be expressed in terms of  $\phi = \bar{\theta}$  and  $x^i$ . The procedure is straightforward, and we outline it up to first order on  $\theta$ : first, since both the undeformed AH metric and its Kähler potential are known, the metric components  $\Omega_{i\bar{j}}$  are calculated. Then, the first order corrections  $\Omega^{(1)}$  and  $e^{(1)}$  to the Kähler potential and the vierbein are obtained; from them the elements  $J^{(1)}$  are also deduced. We obtain the final form by using the change of coordinates in equation (6.7).

## 7 Conclusions

We analysed the construction of a Moyal deformation of the first heavenly equation that preserves the integrability character of the corresponding Kähler potential, as it happens in the standard commutative scenario. For this purpose, we reviewed the Moyal deformation of the first heavenly equation, where the Moyal bracket replaces the standard Poisson bracket; accordingly, a modified potential replaces the commutative Kähler potential that satisfies the first heavenly equation. An expression for the modified potential as a series expansion on the noncommutative parameter exists, where each term in this expansion satisfies a partial differential equation [38].

In the standard commutative situation, the Kähler potential satisfying the first heavenly equation is integrable. We extended this property to the modified potential by demanding a set of conditions using the Moyal bracket; these conditions also helped to fix the form of the potential in such a way that it becomes Kähler.

We applied these results to the particular case of a Kähler potential associated to self-dual vacuum solutions to Einstein's equations, and we analysed the problem of determining each one of the contributions in the series expansion of the modified Kähler potential. We obtained then explicit expressions for the deformed vierbein up to first order on the noncommutative parameter. With this information, we obtained two multi-parameter solutions for the Kähler potential also to first order.



Finally, we applied this approach to the calculation of the modified Kähler potential associated with the AH spacetime, also up to first order on the noncommutative parameter. By extending the procedure of constructing complex coordinates for the AH metric [28], we obtained thus the modified AH metric in terms of the standard commutative one and the noncommutative contributions to the Kähler potential. Taking into account that the AH metric describes the moduli space of interacting magnetic monopoles at low energies, our results aim to incorporate noncommutative effects on these interactions. Furthermore, since the reduction of the AH to the Taub-NUT metric gives the dynamics of two well-separated interacting monopoles at low energies in a classical context, we expect that a deformation induced by noncommutativity would be relevant for this dynamics as well.

It would be interesting also to apply our construction to other spaces, such as the Eguchi-Hanson metric; due to its uncomplicated form, we may find a non-perturbative result for the deformed metric. Considering the unique properties of this metric as a gravitational instanton and its connection with orbifolds and D-branes in asymptotically locally Euclidean spaces, we may find interesting consequences in the context of string theory.

### Acknowledgements

The authors would like to thank the referees for their valuable remarks and suggestions to improve this work. D. Martínez-Carbajal acknowledges support from Universidad Autónoma Metropolitana (UAM, México).

### References

- [1] Alexandrov S., Pioline B., Vandoren S., Self-dual Einstein spaces, heavenly metrics, and twistors, *J. Math. Phys.* **51** (2010), 073510, 31 pages, [arXiv:0912.3406](https://arxiv.org/abs/0912.3406).
- [2] Alvarez-Gaumé L., Freedman D.Z., Geometrical structure and ultraviolet finiteness in the supersymmetric  $\sigma$ -model, *Comm. Math. Phys.* **80** (1981), 443–451.
- [3] Atiyah M.F., Hitchin N.J., Low energy scattering of nonabelian monopoles, *Phys. Lett. A* **107** (1985), 21–25.
- [4] Atiyah M.F., Hitchin N.J., The geometry and dynamics of magnetic monopoles, *M.B. Porter Lectures*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.
- [5] Atiyah M.F., Hitchin N.J., Singer I.M., Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **362** (1978), 425–461.
- [6] Bakas I., Remarks on the Atiyah-Hitchin metric, *Fortschr. Phys.* **48** (2000), 9–14, [arXiv:hep-th/9903256](https://arxiv.org/abs/hep-th/9903256).
- [7] Bakas I., Sftetos K., Toda fields of SO(3) hyper-Kähler metrics and free field realizations, *Internat. J. Modern Phys. A* **12** (1997), 2585–2611, [arXiv:hep-th/9604003](https://arxiv.org/abs/hep-th/9604003).
- [8] Boyer C.P., The geometry of complex self-dual Einstein spaces, in Nonlinear Phenomena (Oaxtepec, 1982), *Lecture Notes in Phys.*, Vol. 189, Springer, Berlin, 1983, 25–46.
- [9] Boyer C.P., Finley III J.D., Killing vectors in self-dual, Euclidean Einstein spaces, *J. Math. Phys.* **23** (1982), 1126–1130.
- [10] Boyer C.P., Plebański J.F., An infinite hierarchy of conservation laws and nonlinear superposition principles for self-dual Einstein spaces, *J. Math. Phys.* **26** (1985), 229–234.
- [11] Douglas M.R., Nekrasov N.A., Noncommutative field theory, *Rev. Modern Phys.* **73** (2001), 977–1029, [arXiv:hep-th/0106048](https://arxiv.org/abs/hep-th/0106048).
- [12] Eguchi T., Gilkey P.B., Hanson A.J., Gravitation, gauge theories and differential geometry, *Phys. Rep.* **66** (1980), 213–393.
- [13] Esposito G., From spinor geometry to complex general relativity, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **2** (2005), 675–731, [arXiv:hep-th/0504089](https://arxiv.org/abs/hep-th/0504089).
- [14] Finley III J.D., Plebański J.F., Further heavenly metrics and their symmetries, *J. Math. Phys.* **17** (1976), 585–596.

- [15] García D.A., Plebański J.F., Seven parametric type- $D$  solutions of Einstein–Maxwell equations in the basic left-degenerate representation, *Nuovo Cimento A* **40** (1977), 224–234.
- [16] Gegenberg J.D., Das A., Stationary Riemannian space-times with self-dual curvature, *Gen. Relativity Gravitation* **16** (1984), 817–829.
- [17] Gibbons G.W., Hawking S.W., Classification of gravitational instanton symmetries, *Comm. Math. Phys.* **66** (1979), 291–310.
- [18] Gibbons G.W., Manton N.S., Classical and quantum dynamics of BPS monopoles, *Nuclear Phys. B* **274** (1986), 183–224.
- [19] Gibbons G.W., Olivier D., Ruback P.J., Valent G., Multicentre metrics and harmonic superspace, *Nuclear Phys. B* **296** (1988), 679–696.
- [20] Gibbons G.W., Ruback P.J., The hidden symmetries of multi-centre metrics, *Comm. Math. Phys.* **115** (1988), 267–300.
- [21] Hanany A., Pioline B., (Anti-)instantons and the Atiyah–Hitchin manifold, *J. High Energy Phys.* **2000** (2000), no. 7, 001, 23 pages, [arXiv:hep-th/0005160](https://arxiv.org/abs/hep-th/0005160).
- [22] Hitchin N.J., Karlhede A., Lindström U., Roček M., Hyperkähler metrics and supersymmetry, *Comm. Math. Phys.* **108** (1987), 535–589.
- [23] Husain V., Self-dual gravity as a two-dimensional theory and conservation laws, *Classical Quantum Gravity* **11** (1994), 927–937, [arXiv:gr-qc/9310003](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9310003).
- [24] Jonas R.A., Elliptic constructions of hyperkähler metrics I: The Atiyah–Hitchin manifold, [arXiv:0712.3598](https://arxiv.org/abs/0712.3598).
- [25] Ko M., Ludvigsen M., Newman E.T., Tod K.P., The theory of  $\mathcal{H}$ -space, *Phys. Rep.* **71** (1981), 51–139.
- [26] Moyal J.E., Quantum mechanics as a statistical theory, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **45** (1949), 99–124.
- [27] Newman E.T., Porter J.R., Tod K.P., Twistor surfaces and right-flat spaces, *Gen. Relativity Gravitation* **9** (1978), 1129–1142.
- [28] Olivier D., Complex coordinates and Kähler potential for the Atiyah–Hitchin metric, *Gen. Relativity Gravitation* **23** (1991), 1349–1362.
- [29] Park Q.H., Self-dual gravity as a large- $N$  limit of the 2D non-linear sigma model, *Phys. Lett. B* **238** (1990), 287–290.
- [30] Park Q.H., 2D sigma model approach to 4D instantons, *Internat. J. Modern Phys. A* **7** (1992), 1415–1447.
- [31] Penrose R., Nonlinear gravitons and curved twistor theory, *Gen. Relativity Gravitation* **7** (1976), 31–52.
- [32] Penrose R., The nonlinear graviton, *Gen. Relativity Gravitation* **7** (1976), 171–176.
- [33] Penrose R., Ward R.S., Twistors for flat and curved space-time, in *General Relativity and Gravitation*, Vol. 2, Plenum, New York – London, 1980, 283–328.
- [34] Plebański J.F., Some solutions of complex Einstein equations, *J. Math. Phys.* **16** (1975), 2395–2402.
- [35] Plebański J.F., Przanowski M., Rajca B., Tosiek J., The Moyal deformation of the second heavenly equation, *Acta Phys. Polon. B* **26** (1995), 889–902.
- [36] Plebański J.F., Robinson I., Left-degenerate vacuum metrics, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976), 493–495.
- [37] Plebański J.F., Torres del Castillo G.F.,  $\mathcal{H}\mathcal{H}$  spaces with an algebraically degenerate right side, *J. Math. Phys.* **23** (1982), 1349–1352.
- [38] Strachan I.A.B., The Moyal algebra and integrable deformations of the self-dual Einstein equations, *Phys. Lett. B* **283** (1992), 63–66.
- [39] Strachan I.A.B., Hierarchy of conservation laws for self-dual gravity, *Classical Quantum Gravity* **10** (1993), 1417–1423.
- [40] Strachan I.A.B., The symmetry structure of the anti-self-dual Einstein hierarchy, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 3566–3573, [arXiv:hep-th/9410047](https://arxiv.org/abs/hep-th/9410047).
- [41] Strachan I.A.B., A geometry for multidimensional integrable systems, *J. Geom. Phys.* **21** (1997), 255–278, [arXiv:hep-th/9604142](https://arxiv.org/abs/hep-th/9604142).
- [42] Szabo R.J., Quantum field theory on noncommutative spaces, *Phys. Rep.* **378** (2003), 207–299, [arXiv:hep-th/0109162](https://arxiv.org/abs/hep-th/0109162).
- [43] Takasaki K., Dressing operator approach to Moyal algebraic deformation of selfdual gravity, *J. Geom. Phys.* **14** (1994), 111–120, [arXiv:hep-th/9212103](https://arxiv.org/abs/hep-th/9212103).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00050

Matrícula: 2112800087

MODIFICACIONES INDUCIDAS POR LA NO-COMUTATIVIDAD EN LA TEORIA DE MONOPOLOS MAGNÉTICOS.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 16:00 horas del día 29 del mes de octubre del año 2019 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS
- DR. JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO
- DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA
- DR. CRYSSOMALIS CHRYSOMALAKOS
- DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL



DANIEL MARTINEZ CARBAJAL  
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)  
DE: DANIEL MARTINEZ CARBAJAL

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALBA BERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS

VOCAL

DR. JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO

VOCAL

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

VOCAL

DR. CRYSSOMALIS CHRYSOMALAKOS

SECRETARIO

DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL