



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

PRUEBAS BIETÁPICAS ÓPTIMAS
PARA EL PARÁMETRO DE LOCALIZACIÓN
DE UN PROCESO AR (1)

Tesis que presenta:
ROCIO MARIBEL GUTIÉRREZ FLORES

Para obtener el grado de:
MAESTRA EN CIENCIAS
(Matemáticas Aplicadas e Industriales)

Asesor de Tesis: DR. ANDREY NOVIKOV

Jurado Calificador:

Presidente: Dra. Blanca Rosa Pérez Salvador UAM-I

Secretario: Dr. Andrey Novikov UAM-I

Vocal: Dr. Héctor Jasso Fuentes CINVESTAV-IPN

México, D.F. Diciembre del 2012



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**PRUEBAS BIETÁPICAS ÓPTIMAS PARA EL PARÁMETRO DE
LOCALIZACIÓN DE UN PROCESO AR (1)**

Tesis que presenta:

ROCIO MARIBEL GUTIÉRREZ FLORES

Asesor de Tesis:

DR. Andrey Novikov

Sinodales:

Dra. Blanca Rosa Pérez Salvador

Dr. Héctor Jasso Fuentes

Diciembre del 2012

A mi esposo

Le doy gracias a la vida por encontrarte en mi camino, pero sobre todo por ser mi pilar en mi desarrollo personal así como académico, dedicándote finalmente este trabajo de tesis con el cuál culmino mis estudios de Maestría.

Gracias esposo por tu amor.

Agradecimientos

Deseo dar las gracias a mi asesor de tesis Dr. Andrey Novikov por su paciencia, comprensión y sobre todo su apoyo a lo largo de esta tesis, así como a mis sinodales.

Aprovecho para agradecer al apoyo económico recibido a través de la beca UAM.

Agradezco el gran apoyo recibido por mis padres y hermanos, a la familia Lee Guzmán por su apoyo incondicional, así como a mi mejor amigo Francisco Javier y, por supuesto, a mis amigos Johana Garzon, Ernesto Prieto, Paty, Minerva, Edgar Omar, Víctor García. Por último a Charly y Polka.

Índice general

Índice general	7
1. Introducción	9
1.1. Antecedentes	9
1.2. Conceptos Básicos y Planteamiento del Problema	11
2. Pruebas bietápicas óptimas	17
2.1. Estructura de pruebas bietápicas Bayesianas	17
2.2. Problema condicional para pruebas bietápicas	21
3. Pruebas bietápicas óptimas para un proceso de Markov	25
3.1. Pruebas óptimas para procesos de Markov	25
3.2. Procesos Autoregresivos	29
3.3. Pruebas Bietápicas óptimas para un proceso Autoregresivo Gaussiano	30
4. Resultados numéricos	39
5. Conclusiones	47

6. Apéndices	49
6.1. Apéndice 1	49
6.2. Apéndice 2	61
6.3. Apéndice 3	74
Bibliografía	95

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Este trabajo pertenece al área del análisis estadístico secuencial, en particular al diseño de pruebas de hipótesis secuenciales.

El análisis estadístico secuencial comienza con los trabajos de Abraham Wald ([10], [12], [13]). La técnica de este método estadístico, es permitir para cualquier procedimiento estadístico, un muestreo secuencial; es decir, formar una muestra tomando observaciones una a una, comenzando desde una sola observación ó en grupos. El total de observaciones se determina durante el muestreo mismo, dependiendo este de las condiciones en las que se generan los datos del muestreo.

El resultado más conocido del análisis secuencial es la prueba llamada Prueba Secuencial de Razón de Probabilidades (sequential probability ratio test, SPRT). Su procedimiento es óptimo con respecto al número promedio de observaciones (tanto bajo la hipótesis nula como bajo la hipótesis alternativa), comparando con todas las pruebas secuenciales que tengan probabilidades de error menores ó iguales a las de SPRT, en caso de hipótesis simples y observaciones independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) [12]. La ventaja de

la SPRT, es que en promedio, para lograr una calidad de inferencia dada (probabilidades de error del tipo I y II), se necesitan (en promedio) únicamente de una tercera a cuarta parte del número de observaciones que requieren los métodos estadísticos tradicionales (basados en una sola muestra).

A pesar de esto, la aceptación de los métodos secuenciales por los estadísticos operacionales no ha recibido muy buena acogida. Según N. Schmitz [7], una de las razones que provocan esta situación es la estructura de los costos que tiene la implementación de los procedimientos teóricos en la práctica. Por ejemplo: realizar un experimento con 10 observaciones normalmente va a costar menos, que 10 experimentos con una observación en cada uno. Sin embargo el esquema de Wald en donde se encontró el procedimiento óptimo, supone que usa el costo proporcional al número de observaciones. Si el costo tiene otra estructura más compleja, como en ([1], [6]).

Otra razón es que, aunque el *promedio* de observaciones que usa la SPRT, es mínimo, este número teóricamente no queda acotado (ver prefacio [6]), y sólo se resuelve la cuestión del número de observaciones a la hora de realizar el experimento. En esta dirección a unos cuantos años de los resultados de Wald, comenzarán intentos de “truncar” la prueba de Wald, con el objetivo de desarrollar un experimento con un máximo de observaciones que no sea mayor que un número dado (ver, por ejemplo, [9]).

Las pruebas secuencialmente planeadas de [1] y [6] estaban dirigidas a resolver el primero de los dos problemas descritos antes. El trabajo [1] y algunos otros relacionados tratan el caso de dos hipótesis simples con observaciones i.i.d.. En [6] se desarrolla una teoría de procedimientos secuencialmente planeados y haciendo uso de ella se tratan los problemas de pruebas de hipótesis para el caso de observaciones i.i.d., en un marco un poco más general que en [1], dejando abierta la opción de tratar los casos de observaciones con una estructura más general que la del caso i.i.d.. Sin embargo, los trabajos de [1] y [6] además de otros artículos relacionados no tratan el segundo de los problemas descritos antes, es decir, acotar el número máximo de observaciones en el experimento; esto se debe a que el tamaño de la muestra de cada etapa varían en función de las observaciones anteriores, y además el número de etapas por realizar tampoco queda acotado.

En el trabajo [3], se propone un análisis secuencial, basado en tan solo dos etapas en el

cuál se tenga un control sobre el número total de observaciones del experimento.

En esta tesis desarrollaremos estas mismas ideas, usando pruebas de dos etapas, con cada etapa teniendo una duración fija y definida antes de iniciar el experimento. En este enfoque, la duración de las etapas se considera como parámetros adicionales (variables) del procedimiento, permitiendo esto una optimización adicional, con tal de minimizar el número promedio muestral (ó de manera más general el costo) del experimento completo (de dos etapas). Estas pruebas bietápicas se mencionan, para fines ilustrativos, en [2], sin darle más desarrollo a los mismos. Una ventaja de los diseños que se proponen en [3], es que ellos encuentran una aplicación más directa a procesos estocásticos mucho más generales, que el caso i.i.d., permitiendo incluso la entrada a procesos con tiempo continuo [3]. Los resultados numéricos obtenidos en [3] muestran que las pruebas bietapicas proporcionan desempeño muy satisfactorio, pudiendo competir aún con procedimientos óptimos en caso i.i.d..

Para procesos que poseen cierta dependencia entre observaciones, la estructura de los procedimientos óptimos se complica considerablemente (ver, por ejemplo, [5]; el caso de observaciones que forman un proceso Markoviano fue visto en [8]), dando la idea de que en estos casos no se podrá encontrar explícitamente las pruebas óptimas, como la SPRT en el caso de observaciones i.i.d.. Mientras los diseños de dos etapas ó bietapicos dejan abiertas mucho más posibilidades para la construcción de las pruebas óptimas: algunos ejemplos están dados en [3] y [4]. En esta tesis desarrollaremos los métodos para construcción de pruebas óptimas bietapicas cuando los procesos observados son procesos estocásticos de Markov.

1.2. Conceptos Básicos y Planteamiento del Problema

Suponga que estamos interesados en estudiar alguna información de una cierta población, donde dicha información se concentra en su función de distribución, la cuál depende de

un cierto parámetro θ y en particular de las dos hipótesis simples:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta = \theta_1.$$

Para este fin diseñamos un experimento estadístico secuencial de máximo dos etapas con duraciones fijas; la primera etapa consistirá de la toma de una muestra de tamaño n_1 , la cuál estará determinada por los valores de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_{n_1} , las cuales están definidas en un espacio medible \mathcal{X} con sigma álgebra σ y medida μ . Definimos al vector aleatorio $X^{(n_1)}$ en la forma:

$$X^{(n_1)} = (X_1, \dots, X_{n_1}),$$

Para decidir sobre la necesidad de una segunda etapa y por lo tanto la toma de una segunda muestra ahora de tamaño n_2 en el experimento, se hace uso de una regla de continuación $\chi_{n_1}(x^{(n_1)}) : \mathcal{X}^{n_1} \rightarrow \{0, 1\}$, la cual se considera medible con la sigma álgebra y medida producto correspondiente, en este caso el valor cero corresponde a terminar el experimento en la primera etapa y el valor de uno equivale a pasar a una segunda etapa, en cuyo caso denotaremos a los valores acumulados durante la primera y segunda etapa de las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}$ por:

$$x^{(n_1+n_2)} = (x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}),$$

Cabe mencionar que denotaremos a la función de densidad de probabilidad del vector $X^{(n_1+n_2)}$ por $f_{\theta}^{(n_1, n_2)}(x^{(n_1)}, x^{(n_2)}) = f_{\theta}^{(n_1, n_2)}(x^{(n_1+n_2)})$, la cuál se considerará una función medible con respecto a la sigma álgebra producto de $\mathcal{X}^{n_1+n_2}$, también denotaremos por $f_{\theta}^{(n_1)}(x^{(n_1)})$ y $f_{\theta}^{(n_2)}(x^{(n_2)})$ a las funciones de densidad de probabilidad de $X^{(n_1)}$ y $X^{(n_2)}$, las cuales se supondrán medibles con respecto a las sigma álgebras producto correspondientes.

Por otra parte, con el objetivo de usar las muestras obtenidas en el experimento en la toma de decisión de las hipótesis H_0 o H_1 , hacemos uso de dos funciones de decisión terminal, $\varphi_{n_1}(x^{(n_1)})$ en caso de que el experimento conste de una sola etapa y $\varphi_{(n_1, n_2)}(x^{(n_1+n_2)})$ para el caso en que sean necesarias dos etapas, las cuales toman valores en $\{0, 1\}$ y donde los valores de uno o cero corresponden a rechazar o aceptar la hipótesis H_0 .

De esta forma, podemos definir una prueba bietápica para el experimento correspondiente como una terna de funciones:

$$(\varphi_{n_1}(x^{(n_1)}), \varphi_{(n_1, n_2)}(x^{(n_1+n_2)}), \chi_{n_1}(x^{(n_1)})),$$

tomando valores en $\{0, 1\}$ y en donde además todas las funciones se suponen funciones medibles de sus correspondientes argumentos. En particular denotaremos a las funciones de decisión en la forma:

$$\varphi = (\varphi_{n_1}(x^{(n_1)}), \varphi_{(n_1, n_2)}(x^{(n_1+n_2)}))$$

Una vez definido lo que entendemos por una prueba bietápica, pasemos a describir los criterios que utilizaremos para diseñar pruebas bietápicas óptimas. Comencemos por recordar que para una prueba de hipótesis se tienen dos tipos de errores, los cuales son el error de tipo I que consiste en rechazar la hipótesis H_0 cuando ésta es verdadera y el error de tipo II que equivale a aceptar la hipótesis H_0 cuando esta es falsa. Resulta claro que estos errores dependen de la prueba bietápica que se este usando, por lo cual denotaremos a los errores del tipo I y II por $\alpha(\varphi, \chi)$ y $\beta(\varphi, \chi)$ respectivamente. Desde esta perspectiva se tiene el primer problema de encontrar una prueba que minimize a los errores del tipo I y II.

Por otra lado, cuando consideramos el análisis del desempeño de la prueba, se sabe de antemano que viene a costa del número de observaciones; por lo que resulta claro que será necesario considerar el costo para llevarlas a cabo. De esta forma sean $c(n_1)$ el costo de las observaciones de la primera etapa, y $c(n_1) + c(n_2)$ el costo sumario de las observaciones de la primera y segunda etapa. Definamos el Costo Promedio de Experimentos con dos etapas dadas $C(\theta; \chi)$, de la siguiente manera:

$$C(\theta; \chi) = c(n_1)E_\theta(1 - \chi_{n_1}) + (c(n_1) + c(n_2))E_\theta(\chi_{n_1}).$$

En donde podemos interpretar a $E_\theta(1 - \chi_{n_1})$ como la probabilidad de parar en la primera etapa y al término $E_\theta(\chi_{n_1})$ como la probabilidad de continuar a una segunda etapa. De esta forma se tiene un segundo problema de minimizar la Costo Promedio de Experimentos con las dos etapas dadas, sujeta a las condiciones $\alpha(\varphi, \chi) \leq \alpha$ y $\beta(\varphi, \chi) \leq \beta$; donde $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ son algunos valores fijos, los cuales representan niveles de probabilidad que se consideran tolerables en cuanto al riesgo.

En resumen, optimizar recursos, minimizar costos y maximizar beneficios son cuestiones que siempre están presentes en el desarrollo de nuevas tecnologías. Se llaman problemas de

optimización aquellos en los que se busca determinar una solución óptima. La clasificación de los problemas de optimización puede ser muy amplia aunque nos limitaremos al caso en que la función a optimizar, llamada función objetivo sea lo suficientemente regular para usar el cálculo diferencial. En nuestro caso, se da un conjunto Ω y se desea determinar los puntos de Ω en los que la función objetivo alcanza su valor máximo o mínimo. Por lo general Ω está definido por un conjunto de restricciones expresadas en la forma de ecuaciones o de desigualdades. Cuando tanto la función objetivo como las restricciones son no lineales y éstas son ecuaciones se puede aplicar el Método de Multiplicadores de Lagrange.

De esta forma, minimizar el Costo Promedio de Experimentos con dos etapas dadas, sujeta a las condiciones $\alpha(\varphi, \chi) \leq \alpha$ y $\beta(\varphi, \chi) \leq \beta$, resulta equivalente a minimizar la función:

$$C(\theta; \chi) + \lambda_0 \alpha(\varphi, \chi) + \lambda_1 \beta(\varphi, \chi),$$

siendo $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$ constantes cualesquiera que toman el papel de los multiplicadores de Lagrange.

Cabe mencionar que en principio nos interesa minimizar el Costo Promedio de Experimentos con dos etapas dadas ya sea bajo la hipótesis nula ($\theta = \theta_0$), o bajo la hipótesis alternativa ($\theta = \theta_1$), o de ser posible las dos a la vez. Sin embargo existe el planteamiento de optimización en pruebas que no esta relacionado con restricciones sobre probabilidades de errores, esto es, el caso cuando existen las probabilidades apriori de la hipótesis nula y de la hipótesis alternativa, el cuál se conoce como el enfoque Bayesiano. Denotemos por π_0 y $\pi_1 = 1 - \pi_0$ las probabilidades apriori de la hipótesis nula y alternativa, respectivamente. Como anteriormente se mencionó, se puede minimizar el Costo Promedio ya sea bajo la hipótesis nula o bajo la hipótesis alternativa, pero si suponemos el conocimiento apriori de las probabilidades de las hipótesis, proponemos ponderar ambos criterios, lo cuál se convertirá en minimizar a la función:

$$c_0 \pi_0 C(\theta_0; \chi) + \pi_1 c_1 C(\theta_1; \chi) + \lambda_0 \pi_0 \alpha(\varphi, \chi) + \lambda_1 \pi_1 \beta(\varphi, \chi),$$

donde $c_0, c_1, \lambda_0, \lambda_1 \geq 0$ son algunas constantes. A esta última expresión se le conoce precisamente como el riesgo Bayesiano.

Una posible interpretación del riesgo Bayesiano se puede alcanzar mediante la llamada

función potencia, que se define como la probabilidad de rechazar la hipótesis H_0 dado algún valor de θ , es decir:

$$P(\theta; \varphi, \chi) = E_{\theta} [\varphi_{n_1}(1 - \chi_{n_1}) + \varphi_{(n_1, n_2)}\chi_{n_1}],$$

con esta función potencia, las probabilidades de los errores de tipo I y II vienen dadas por $\alpha(\varphi, \chi) = P(\theta_0; \varphi, \chi)$ y $\beta(\varphi, \chi) = 1 - P(\theta_1; \varphi, \chi)$. De esta forma, si en particular tomamos a $\lambda_0, \lambda_1 = 1$ obtenemos la que llamaremos pérdida total promedio o riesgo Bayesiano como:

$$R(\varphi, \chi) = \pi_0 P(\theta_0; \varphi, \chi) + \pi_1 (1 - P(\theta_1; \varphi, \chi)) + \pi_0 c_0 C(\theta_0; \chi) + \pi_1 c_1 C(\theta_1; \chi),$$

donde π_0 y π_1 son las probabilidades a priori de que ocurran H_0 o H_1 respectivamente, c_0 y c_1 son constantes de ponderación; note que en particular $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

Un primer objetivo de este trabajo es investigar la estructura de pruebas bietápicas que minimizan el riesgo $R(\varphi, \chi)$ (pruebas bietápicas bayesianas). Esto nos va ayudar en problemas de minimización del costo bajo restricciones

$$\alpha(\varphi, \chi) \leq \alpha, \quad \beta(\varphi, \chi) \leq \beta,$$

(de tipo Wald [12]), donde α y β son algunas constantes predeterminadas. Además se obtendrá la estructura y resultados numéricos para pruebas bietápicas óptimas para procesos que presentan una dependencia del tipo Markoviano.

La estructura de los resultados obtenidos en esta tesis serán los siguientes:

- En el capítulo dos se describe la estructura de pruebas bietápicas óptimas para procesos a tiempo discreto en general.
- En el capítulo tres se obtiene la estructura de pruebas bietápicas óptimas para procesos que presentan dependencia del tipo Markoviano.
- En el capítulo cuatro se obtienen resultados numéricos que permiten comparar la eficiencia de las pruebas bietápicas óptimas para procesos Markovianos con las pruebas de una sola etapa (Neyman-Pearson) y con la prueba secuencial de Wald.

- En los apéndices se muestran gráficas de los resultados del capítulo cuatro así como el programa que se desarrolló en Pascal para poder llevar a cabo los cálculos.

Capítulo 2

Pruebas bietápicas óptimas

2.1. Estructura de pruebas bietápicas Bayesianas

En este capítulo pretendemos encontrar la estructura de las pruebas bietápicas para procesos en general que optimizan el riesgo Bayesiano con parámetros n_1 y n_2 fijos.

Antes de encontrar las condiciones para una "prueba óptima", veamos algunos resultados técnicos.

Sea \mathcal{X} un cierto espacio con medida μ . Considere una función medible $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, ($k \in \mathbb{N}$) definimos su parte negativa como:

$$g^-(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } g(z) < 0; \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Lema 2.1. *Sea una función medible $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea el conjunto de funciones medibles $A = \{\varphi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]\}$; entonces se cumple que:*

$$\min \left\{ \int \varphi(z)g(z)d\mu(z) \mid \varphi \in A \right\} = \int g^-(z)d\mu(z)$$

y el minimo lo alcanza en la función:

$$\varphi(z) = 1_{G^-}(z) := \begin{cases} 1 & \text{si } z \in G^- \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

donde $G^- = \{z \in \mathcal{X} \mid g(z) < 0\}$.

Demostración. Notemos que podemos reescribir a la función $g^-(z)$ en la forma $g^-(z) = g(z)1_{G^-(z)}$, entonces:

$$\begin{aligned} \int \varphi(z)g(z)d\mu(z) - \int g^-(z)d\mu(z) &= \int \varphi(z)g(z)d\mu(z) - \int g(z)1_{G^-(z)}d\mu(z) \\ \int \varphi(z)g(z)d\mu(z) - \int g^-(z)d\mu(z) &= \int g(z) [\varphi(z) - 1_{G^-(z)}] d\mu(z) \end{aligned}$$

Notemos ahora los siguientes casos:

- Si $g(z) < 0$, como $0 \leq \varphi(z) \leq 1$ entonces $\varphi(z) - 1 \leq 0$ de lo cual se sigue que $g(z) [\varphi(z) - 1_{G^-(z)}] = g(z) [\varphi(z) - 1] \geq 0$.
- Si $g(z) > 0$, entonces $g(z) [\varphi(z) - 1_{G^-(z)}] = g(z) [\varphi(z) - 0] \geq 0$

De lo anterior podemos concluir que $g(z) [\varphi(z) - 1_{G^-(z)}] \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^k$. Se sigue que para cualquier $\varphi \in A$:

$$\begin{aligned} \int g(z) [\varphi(z) - 1_{G^-(z)}] d\mu(z) &\geq 0 \\ \int \varphi(z)g(z)d\mu(z) - \int g(z)1_{G^-(z)}d\mu(z) &\geq 0 \\ \int \varphi(z)g(z)d\mu(z) - \int g^-(z)d\mu(z) &\geq 0 \end{aligned}$$

Esto ultimo muestra que $\int g^-(z)d\mu(z) \leq \int \varphi(z)g(z)d\mu(z)$, lo cual significa que $\int g^-(z)d\mu(z)$ es una cota inferior del conjunto $\{\int \varphi(z)g(z)d\mu(z) | \varphi \in A\}$. Notemos que en particular si tomamos $\varphi(z) = 1_{\{z|g(z)<0\}} \in A$ entonces:

$$\int g(z)1_{\{z|g(z)<0\}}(z)dz = \int g^-(z)dz,$$

es decir para la función $\varphi(z) = 1_{\{z|g(z)<0\}}(z)$ se alcanza la cota inferior obtenida anteriormente, concluyendo que el minimo se alcanza precisamente en esta función. \square

Teorema 2.2. *El mínimo del Riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$ es igual a:*

$$\pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int \left[l_{n_1}^- + \left(\int l_{n_1, n_2}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- \right] d\mu^{n_1},$$

donde $l_{n_1} = \pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1)}$, $l_{(n_1, n_2)} = \pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)}$; además el mínimo es alcanzado con la prueba $(\varphi_{n_1}, \varphi_{(n_1, n_2)}, \chi_{n_1})$ dada por:

$$\begin{aligned}\varphi_{n_1} &= \mathbf{1}_{\{l_{n_1} < 0\}} \\ \varphi_{(n_1, n_2)} &= \mathbf{1}_{\{l_{(n_1, n_2)} < 0\}} \\ \chi_{n_1} &= \mathbf{1}_{\left\{ \int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} < 0 \right\}}\end{aligned}$$

Demostración.

Comencemos por notar que:

$$\begin{aligned}R(\varphi, \chi) - (\pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1)) &= \\ &= \pi_0 P(\theta_0) + \pi_1 (1 - P(\theta_1)) + \pi_0 c_0 C(\theta_0; \chi) + \pi_1 c_1 C(\theta_1; \chi) - [\pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1)] \\ &= \pi_0 P(\theta_0) - \pi_1 P(\theta_1) + \pi_0 c_0 C(\theta_0; \chi) + \pi_1 c_1 C(\theta_1; \chi) - c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) \\ &= \pi_0 E_{\theta_0} [\varphi_{n_1} (1 - \chi_{n_1}) + \varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1}] - \pi_1 E_{\theta_1} [\varphi_{n_1} (1 - \chi_{n_1}) + \varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1}] + \\ &\quad + \pi_0 c_0 (c(n_1) + c(n_2)) E_{\theta_0} \chi_{n_1} + \pi_1 c_1 (c(n_1) + c(n_2)) E_{\theta_1} \chi_{n_1} - c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) \\ &= \pi_0 E_{\theta_0} [\varphi_{n_1} (1 - \chi_{n_1})] + \pi_0 E_{\theta_0} [\varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1}] - \pi_1 E_{\theta_1} [\varphi_{n_1} (1 - \chi_{n_1})] - \pi_1 E_{\theta_1} [\varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1}] + \\ &\quad + \pi_0 c_0 c(n_2) E_{\theta_0} \chi_{n_1} + \pi_1 c_1 c(n_2) E_{\theta_1} \chi_{n_1} \\ &= \pi_0 \int \varphi_{n_1} (1 - \chi_{n_1}) f_{\theta_0}^{(n_1)} d\mu^{n_1} + \pi_0 \int \int \varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1} - \pi_1 \int \varphi_{n_1} (1 - \chi_{n_1}) f_{\theta_1}^{(n_1)} d\mu^{n_1} \\ &\quad - \pi_1 \int \int \varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1} + \pi_0 c_0 c(n_2) \int \chi_{n_1} f_{\theta_0}^{(n_1)} d\mu^{n_1} + \pi_1 c_1 c(n_2) \int \chi_{n_1} f_{\theta_1}^{(n_1)} d\mu^{n_1} \\ &= \int \left[\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \varphi_{n_1} (1 - \chi_{n_1}) d\mu^{n_1} + \int \int \left[\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)} \right] \varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1} + \\ &\quad \int \left[\pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} d\mu^{n_1} \\ &= \int l_{n_1} \varphi_{n_1} (1 - \chi_{n_1}) d\mu^{n_1} + \int \int l_{(n_1, n_2)} \varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1} + \\ &\quad \int \left[\pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} d\mu^{n_1}\end{aligned}$$

Usando el Lema anterior mostraremos ahora que cada uno de los términos anteriores es acotado.

Tomando $\varphi(x) = \varphi_{n_1}$ y $g(x) = l_{n_1} (1 - \chi_{n_1})$ así usando el Lema anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned}\text{mín} \left\{ \int \varphi_{n_1} [l_{n_1} (1 - \chi_{n_1})] d\mu^{n_1} \mid 0 \leq \varphi_{n_1} \leq 1 \right\} &= \int (l_{n_1} (1 - \chi_{n_1}))^- d\mu^{n_1} \\ &= \int l_{n_1} \mathbf{1}_{\{l_{n_1} < 0\}} (1 - \chi_{n_1}) d\mu^{n_1}\end{aligned}$$

De esta forma podemos concluir que para cualquier función φ_{n_1} se tiene que:

$$\int l_{n_1} \mathbf{1}_{\{l_{n_1} < 0\}} (1 - \chi_{n_1}) d\mu^{n_1} \leq \int \varphi_{n_1} [l_{n_1} (1 - \chi_{n_1})] d\mu^{n_1}$$

y además el mínimo lo alcanza en la función $\varphi_{n_1} = 1_{\{l_{n_1} < 0\}}$.

De manera análoga, usando el Lema anterior con $g(x) = l_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1}$ y $\varphi(x) = \varphi_{(n_1, n_2)}$ se sigue que:

$$\min \left\{ \int \int l_{(n_1, n_2)} \varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1} \mid 0 \leq \varphi_{(n_1, n_2)} \leq 1 \right\} = \int \int l_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} 1_{\{l_{(n_1, n_2)} < 0\}} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1}.$$

De lo anterior podemos concluir que para toda función $\varphi_{(n_1, n_2)}$ se tiene que:

$$\int \int l_{(n_1, n_2)} \varphi_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1} \geq \int \int l_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} 1_{\{l_{(n_1, n_2)} < 0\}} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1}$$

donde el mínimo se alcanza en la función $\varphi_{(n_1, n_2)} = 1_{\{l_{(n_1, n_2)} < 0\}}$.

De los calculos anteriores se sigue que:

$$\begin{aligned} R(\varphi, \chi) - (\pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1)) &\geq \\ &\int l_{n_1} 1_{\{l_{n_1} < 0\}} (1 - \chi_{n_1}) d\mu^{n_1} + \int \int l_{(n_1, n_2)} \chi_{n_1} 1_{\{l_{(n_1, n_2)} < 0\}} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1} + \\ &+ \int \left[\pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} d\mu^{n_1} \\ &= \int l_{n_1}^- (1 - \chi_{n_1}) d\mu^{n_1} + \int \int l_{(n_1, n_2)}^- \chi_{n_1} d\mu^{n_2} d\mu^{n_1} + \int \left[\pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} d\mu^{n_1} \\ &= \int \left[l_{n_1}^- (1 - \chi_{n_1}) + \int l_{(n_1, n_2)}^- \chi_{n_1} d\mu^{n_2} + \left[\pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} \right] d\mu^{n_1} \\ &= \int \left[l_{n_1}^- - l_{n_1}^- \chi_{n_1} + \chi_{n_1} \int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} + \left[\pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} \right] d\mu^{n_1} \\ &= \int l_{n_1}^- d\mu^{n_1} + \int \left[-l_{n_1}^- + \int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} d\mu^{n_1} \end{aligned}$$

Usando nuevamente el lema se sigue que:

$$\begin{aligned} \min \left\{ \int \left[-l_{n_1}^- + \int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} d\mu^{n_1} \mid 0 \leq \chi_{n_1} \leq 1 \right\} &= \\ &= \int \left(\int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- d\mu^{n_1} \end{aligned}$$

por lo que para cualquier función χ_{n_1} se sigue que:

$$\begin{aligned} &\int \left(\int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- d\mu^{n_1} \leq \\ &\leq \int \left[-l_{n_1}^- + \int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right] \chi_{n_1} d\mu^{n_1} \end{aligned}$$

y el mínimo lo alcanza en la función $\chi_{n_1} = 1_{\left\{ \int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} < 0 \right\}}$.

De todo lo anterior concluimos que:

$$R(\varphi, \chi) - (\pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1)) \geq \int l_{n_1}^- d\mu^{n_1} + \int \left(\int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- d\mu^{n_1}$$

concluyendo que:

$$\pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int \left[l_{n_1}^- + \left(\int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- \right] d\mu^{n_1} \leq R(\varphi, \chi)$$

Es decir, la cantidad

$$\pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int \left[l_{n_1}^- + \left(\int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- \right] d\mu^{n_1}$$

es una cota inferior de la $R(\varphi, \chi)$; como además este valor se alcanza con la prueba:

$$\begin{aligned} \varphi_{n_1} &= 1_{\{l_{n_1} < 0\}} \\ \varphi_{(n_1, n_2)} &= 1_{\{l_{(n_1, n_2)} < 0\}} \\ \chi_{n_1} &= 1_{\left\{ \int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} < 0 \right\}} \end{aligned}$$

entonces esta cota inferior es precisamente el valor mínimo, lo cual concluye la prueba. \square .

2.2. Problema condicional para pruebas bietápicas

Un objetivo importante que se pretende alcanzar con el diseño de pruebas de hipótesis bietápicas, es el de poder minimizar el número de muestras necesarias en la toma de decisiones. En este sentido definimos el número promedio muestral dado algún valor del parámetro θ en la forma:

$$N(\theta; \chi_{n_1}) = n_1(1 - E_\theta \chi_{n_1}) + (n_1 + n_2)E_\theta \chi_{n_1}.$$

En esta dirección se busca minimizar a $N(\theta_0; \chi_{n_1})$ y a $N(\theta_1; \chi_{n_1})$ sujeto a un cierto nivel de significación de la forma $\alpha(\varphi, \chi) \leq \alpha$ y $\beta(\varphi, \chi) \leq \beta$. La forma de resolver este problema es usar la técnica de multiplicadores de Lagrange, en el cual la función Lagrangiana está dada precisamente por la función de Riesgo Bayesiano:

$$R(\varphi, \chi) = c_0 \pi_0 C(\theta_0; \chi_{n_1}) + c_1 \pi_1 C(\theta_1; \chi_{n_1}) + \lambda_0 \pi_0 \alpha(\chi_{n_1}, \chi) + \lambda_1 \pi_1 \beta(\chi_{n_1}, \chi).$$

El siguiente lema indica que el minimizar a la función Lagrangiana minimiza también en cierto sentido a los costos del experimento además de a los errores del tipo I y II sujetos a cierto nivel de confianza.

Lema 2.3. *Supongamos que existe una prueba bietápica (φ^*, χ^*) con tamaños de la primera y segunda etapa dados por n_1^* y n_2^* respectivamente, tal que para cualquier otra prueba bietápica (φ, χ) con tamaños de la primera y segunda etapa dados por n_1 y n_2 se cumpla que:*

$$R(\varphi^*, \chi^*) \leq R(\chi, \varphi).$$

Entonces para cualquier prueba bietápica tal que:

$$\alpha(\varphi, \chi) \leq \alpha(\varphi^*, \chi^*)$$

y

$$\beta(\varphi, \chi) \leq \beta(\varphi^*, \chi^*)$$

se cumple que:

$$c_0\pi_0N(\theta_0; \varphi) + c_1\pi_1N(\theta_1; \varphi) \geq c_0\pi_0N(\theta_0; \varphi^*) + c_1\pi_1N(\theta_1; \varphi^*).$$

Demostración.

Bajo las condiciones del teorema se sigue que:

$$\begin{aligned} & c_0\pi_0C(\theta_0; \chi) + c_1\pi_1C(\theta_1; \chi) + \lambda_0\pi_0\alpha(\varphi^*, \chi^*) + \lambda_1\pi_1\beta(\varphi^*, \chi^*) \\ & \geq c_0\pi_0C(\theta_0; \chi) + c_1\pi_1C(\theta_1; \chi) + \lambda_0\pi_0\alpha(\varphi, \chi) + \lambda_1\pi_1\beta(\varphi, \chi), \\ & = R(\varphi, \chi), \\ & \geq R(\varphi^*, \chi^*), \\ & = c_0\pi_0C(\theta_0; \chi^*) + c_1\pi_1C(\theta_1; \chi^*) + \lambda_0\pi_0\alpha(\varphi^*, \chi^*) + \lambda_1\pi_1\beta(\varphi^*, \chi^*), \end{aligned}$$

De esto ultimo se sigue que:

$$c_0\pi_0C(\theta_0; \chi) + c_1\pi_1C(\theta_1; \chi) \geq c_0\pi_0C(\theta_0; \chi^*) + c_1\pi_1C(\theta_1; \chi^*).$$

Recordemos que:

$$C(\theta; \chi) = c(n_1)E_\theta(1 - \chi_{n_1}) + (c(n_1) + c(n_2))E_\theta(\chi_{n_1}),$$

por lo que tomando el caso particular en que $c(n_1) = n_1$ y $c(n_2) = n_2$ se obtiene que $C(\theta_0; \chi) = N(\theta_0; \chi)$ y $C(\theta_1; \chi) = N(\theta_1; \chi)$, concluyendo finalmente que:

$$c_0\pi_0N(\theta_0; \chi) + c_1\pi_1N(\theta_1; \chi) \geq c_0\pi_0N(\theta_0; \chi^*) + c_1\pi_1N(\theta_1; \chi^*).$$

Lo anterior concluye la prueba. \square

El teorema anterior muestra que el problema de minimización del número promedio muestral $N(\theta_0, \chi_{n_1})$ y $N(\theta_1, \chi_{n_1})$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi, \chi) &\leq \alpha \\ \beta(\varphi, \chi) &\leq \beta\end{aligned}$$

se reduce a resolver el problema Bayesiano de minimizar al riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$.

En el capítulo cuatro dejaremos fijos los tamaños de cada etapa, es decir a los parámetros n_1 y n_2 y usando el Teorema 2.2 construir la prueba óptima. Con esto obtenemos el valor óptimo de la función Lagrangiana (Riesgo Bayesiano) en términos de n_1 y n_2 es decir $R(n_1, n_2)$. A partir de este punto el problema se vuelve totalmente numérico, pues se transforma en encontrar el valor mínimo de $R(n_1, n_2)$ tomando como parámetros a n_1 y n_2 .

Capítulo 3

Pruebas bietápicas óptimas para un proceso de Markov

Por lo general, en el diseño de experimentos enfocado a resolver un problema con dos hipótesis simples, se supone que las observaciones del experimento satisfacen ser independientes e idénticamente distribuidas, sin embargo, las pruebas óptimas que propone el Teorema 2.2 no presuponen la condición de independencia, permitiendo estudiar casos en los que las muestras provengan de procesos con observaciones no independientes.

En este capítulo abordaremos el caso particular en que las observaciones del experimento forman una cadena de Markov, mostrando de esta forma una dependencia entre las distintas observaciones. Comencemos por describir algunos hechos conocidos.

3.1. Pruebas óptimas para procesos de Markov

Un proceso estocástico $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice de Markov, cuando dado un estado presente, los estados pasados no tienen influencia sobre el futuro. Matemáticamente esto se describe como:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

En particular, a la probabilidad condicional $P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)$ la llamaremos probabilidad de transición de la cadena. En este trabajo supondremos que las probabilidades de transición son estacionarias y que además dependen de un cierto parámetro θ , es decir, que la probabilidad para ir de un estado a otro en un paso es independiente del tiempo, denotando a la probabilidad de transición por:

$$f_\theta(x|y) = P(X_n = x|X_{n-1} = y).$$

Para el caso de procesos de Markov, la distribución de probabilidad conjunta puede encontrarse facilmente en términos de la función de transición y de la distribución inicial.

Teorema 3.1. *Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un proceso de Markov, f_θ la función de probabilidad de la variable aleatoria X_1 y $N \in \mathbb{N}$, entonces:*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_N = x_N) = f_\theta(x_1)f_\theta(x_2|x_1) \cdots f_\theta(x_N|x_{N-1}).$$

Demostración.

Se sigue de la definición de probabilidad condicional que:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1) = f_\theta(x_1)f_\theta(x_2|x_1).$$

Tambien es claro que:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)P(X_3 = x_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)P(X_3 = x_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2) \end{aligned}$$

Como $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un proceso de Markov, se sigue que:

$$P(X_3 = x_3|X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_3 = x_3|X_2 = x_2),$$

de lo cual se sigue finalmente que:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)P(X_3 = x_3|X_2 = x_2) = f_\theta(x_1)f_\theta(x_2|x_1)f_\theta(x_3|x_2).$$

Repitiendo el proceso anterior y usando un argumento inductivo se concluye la demostración. \square

Cabe mencionar, que para el caso continuo se puede mostrar que la densidad conjunta $f_\theta^n(x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1)f_\theta(x_2|x_1) \cdots f_\theta(x_n|x_{n-1})$.

Supongamos ahora que estamos diseñando pruebas bietápicas óptimas para un experimento en el cual las muestras se comportan como un proceso de Markov. Recordemos que el Teorema 2.2 asegura que las pruebas que minimizan el valor del riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$ es alcanzado con la prueba dada por:

$$\begin{aligned}\varphi_{n_1} &= \mathbf{1}_{\{l_{n_1} < 0\}}, \\ \varphi_{(n_1, n_2)} &= \mathbf{1}_{\{l_{(n_1, n_2)} < 0\}}, \\ \chi_{n_1} &= \mathbf{1}_{\left\{ \int l_{(n_1, n_2)}^- d\mu^{n_2 - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2)} f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} < 0 \right\}},\end{aligned}$$

donde $l_{n_1} = \pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1)}$ y $l_{(n_1, n_2)} = \pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)}$. El siguiente teorema muestra la forma que toman las pruebas óptimas para el caso de un proceso de Markov.

Teorema 3.2. *Suponiendo que el proceso $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un proceso de Markov, entonces las pruebas que minimizan el valor del riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$ esta dado por las pruebas:*

$$\begin{aligned}\varphi_{n_1} &= \left\{ \frac{\pi_0}{\pi_1} < Z_1 \right\} \\ \varphi_{(n_1, n_2)} &= \left\{ \frac{\pi_0}{\pi_1} < Z_2 \right\} \\ \chi_{n_1} &= \mathbf{1}_{\left\{ E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X^{(n_1)} = x^{(n_1)}] - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0 \right\}},\end{aligned}$$

en donde:

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{f_{\theta_1}^{(n_1)}}{f_{\theta_0}^{(n_1)}}, \\ Z_2 &= \frac{f_{\theta_1}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_1}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1})}{f_{\theta_0}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1})}.\end{aligned}$$

Demostración.

Del Teorema Teorema 3.1 se sigue que:

$$\begin{aligned}f_{\theta}^{(n_1)}(x^{(n_1)}) &= f_{\theta}(x_1) \prod_{i=2}^{n_1} f_{\theta}(x_i | x_{i-1}), \\ f_{\theta}^{(n_1, n_2)}(x^{(n_1+n_2)}) &= f_{\theta}(x_1) \prod_{i=2}^{n_1+n_2} f_{\theta}(x_i | x_{i-1})\end{aligned}$$

de lo cual se observa que las condiciones $\{l_{n_1} < 0\}$ y $\{l_{(n_1, n_2)} < 0\}$ son equivalente a

28CAPÍTULO 3. PRUEBAS BIETÁPICAS ÓPTIMAS PARA UN PROCESO DE MARKOV

$\left\{ \frac{\pi_0}{\pi_1} < Z_1 \right\}$ y $\left\{ \frac{\pi_0}{\pi_1} < Z_2 \right\}$, por los que las reglas de desición toman la forma:

$$\begin{aligned}\varphi_{n_1} &= \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\pi_0}{\pi_1} < Z_1 \right\}}, \\ \varphi_{(n_1, n_2)} &= \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\pi_0}{\pi_1} < Z_2 \right\}}.\end{aligned}$$

Además la condición de la regla de paro toma la forma:

$$\int \left(\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)} \right)^- d\mu^{n_2} - \left(\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} < 0,$$

dividiendo por el término no negativo $f_{\theta_0}^{(n_1)}$ obtenemos:

$$\int \left(\frac{\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)}}{f_{\theta_0}^{(n_1)}} \right)^- d\mu^{n_2} - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0,$$

Notando que:

$$\begin{aligned}& \frac{\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)}}{f_{\theta_0}^{(n_1)}} \\ &= \frac{\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)}}{f_{\theta_0}^{(n_1)}} - \frac{\pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)}}{f_{\theta_0}^{(n_1)}} \\ &= \frac{\pi_0 f_{\theta_0}(x_1) f_{\theta_0}(x_2|x_1) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1})}{f_{\theta_0}(x_1) f_{\theta_0}(x_2|x_1) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1}|x_{n_1-1})} - \frac{\pi_1 f_{\theta_1}(x_1) f_{\theta_1}(x_2|x_1) \cdots f_{\theta_1}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1})}{f_{\theta_0}(x_1) f_{\theta_0}(x_2|x_1) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1}|x_{n_1-1})} \\ &= \pi_0 f_{\theta_0}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1}) - \pi_1 Z_1 f_{\theta_1}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_1}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1})\end{aligned}$$

la condición de la regla de paro toma la forma:

$$\begin{aligned}\int (\pi_0 f_{\theta_0}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1}) - \pi_1 Z_1 f_{\theta_1}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_1}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1}))^- d\mu^{n_2} \\ - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0,\end{aligned}$$

es decir:

$$\int (\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- f_{\theta_0}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1}) d\mu^{n_2} - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0,$$

con lo que finalmente la condición que define a la regla de paro óptima es:

$$E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X_{(n_1)} = x_{(n_1)}] - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0,$$

con lo cual la regla de desición es:

$$\chi_{n_1} = \mathbf{1}_{\left\{ E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X_{(n_1)} = x_{(n_1)}] - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0 \right\}}.$$

□

El teorema anterior proporciona las pruebas óptimas con n_1 y n_2 dados para procesos Markovianos.

3.2. Procesos Autoregresivos

Comencemos con algunas definiciones básicas. Un proceso Autorregresivo Gaussiano de orden uno AR(1) está definido como una sucesión de variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n, \dots tales que:

$$Y_{n+1} = \alpha Y_n + \epsilon_n,$$

con $|\alpha| < 1$. Se supone además que las variables aleatorias $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son independientes e idénticamente distribuidas con densidad normal, en particular $\epsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En este trabajo supondremos que observamos un proceso de la forma:

$$X_n = Y_n + \theta, n = 1, 2, \dots$$

con lo cual obtenemos un proceso que satisface la condición:

$$X_i - \theta = \alpha(X_{i-1} - \theta) + \epsilon_n.$$

Notemos que para el caso de independencia, es decir cuando $\alpha = 0$ se tiene que $X_n - \theta = \epsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual conduce a un proceso estacionario.

Teorema 3.3. *Para el caso en que $\alpha \neq 0$ si $X_1 - \theta \sim N(0, \sigma_1^2)$ y $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$ entonces las variables aleatorias $\{Y_n = X_n - \theta\}_{n \in \mathbb{N}}$ forman un proceso estacionario.*

Demostración.

Como por hipótesis tenemos que $X_1 - \theta \sim N(0, \sigma_1^2)$, entonces la demostración se reduce a encontrar las condiciones sobre α de forma tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que:

$$E[X_n - \theta] = 0 \text{ y } Var[X_n - \theta] = \sigma^2.$$

Con este objetivo notemos que:

$$E[X_2 - \theta] = E[\alpha(X_1 - \theta) + \epsilon_2] = \alpha E[X_1 - \theta] + E[\epsilon_2] = 0.$$

Además se tiene que:

$$Var[X_2 - \theta] = Var[\alpha(X_1 - \theta) + \epsilon_2] = \alpha^2 Var[X_1 - \theta] + Var[\epsilon_2] = \alpha^2 \sigma_1^2 + \sigma^2.$$

se sigue entonces que para cumplir con la condición $Var [X_2 - \theta] = Var [X_1 - \theta]$ se debe tener que $\alpha^2\sigma_1^2 + \sigma^2 = \sigma_1^2$. Finalmente, mediante un argumento inductivo se muestra que $X_n - \theta \sim N(0, \sigma_1^2)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ si se cumple la condición:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}.$$

□

Bajo la condición anterior vemos que las variables $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots\}$ forman una sucesión estacionaria muy parecida a casos independientes en los cuales $\alpha = 0$.

3.3. Pruebas Bietápicas óptimas para un proceso Autoregresivo Gaussiano

En esta sección diseñaremos pruebas bietápicas óptimas para un parámetro de localización de un proceso Autorregresivo Gaussiano de orden uno que en lo que sigue lo denotaremos por AR(1). En particular supondremos que las muestras se comportan como un proceso de Markov y que la relación que guardan dos variables aleatorias consecutivas de la muestra forman un proceso AR(1). En particular estamos interesados en construir pruebas bietápicas óptimas para las hipótesis simples:

$$H_0 : \theta = \theta_0 = 0 \text{ vs } H_1 : \theta = \theta_1,$$

siendo α un valor conocido.

Teorema 3.4. *Sea $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un proceso autorregresivo gaussiano con $\sigma^2 = 1 - \alpha^2$, entonces la regla de continuación de la prueba bietápica óptima para la hipótesis simple:*

$$H_0 : \theta = \theta_0 = 0 \text{ vs } H_1 : \theta = \theta_1,$$

siendo α un valor conocido, esta dado por la condición de continuación:

$$H(x) < G(x),$$

3.3. PRUEBAS BIETÁPICAS ÓPTIMAS PARA UN PROCESO AUTOREGRESIVO GAUSSIANO 31

donde: $x = \ln \left(\frac{\pi_1}{\pi_0} Z_1 \right)$, $v^2 = \frac{n_2 \theta_1^2 (1-\alpha)^2}{\sigma^2}$, Φ es la función de densidad de distribución normal estandar, $H(x) = c_0 c(n_2) + c_1 c(n_2) e^x$ y

$$G(x) = \begin{cases} G_+(x) = \Phi \left(\frac{v}{2} - \frac{x}{v} \right) - e^x \Phi \left(-\frac{v}{2} - \frac{x}{v} \right) & \text{para } x \geq 0 \\ G_-(x) = e^x \Phi \left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v} \right) - \Phi \left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v} \right) & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Demostración.

Tomando las condiciones del Teorema 3.3, es decir $\sigma^2 = 1 - \alpha^2$ se sigue entonces que:

$$f_\theta(x_i | x_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_i - \theta - \alpha(x_{i-1} - \theta))^2}{2\sigma^2}},$$

de lo se obtiene que:

$$Z_2 = \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{f_\theta(x_i | x_{i-1})}{f_0(x_i | x_{i-1})} = e^{\left(\frac{\theta(1-\alpha)}{\sigma^2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_i - \alpha x_{i-1}) - \frac{n_2 \theta^2 (1-\alpha)^2}{2\sigma^2} \right)}.$$

Pero bajo la hipótesis H_0 las variables aleatorias $X_i - \alpha X_{i-1} = \epsilon_n$ resultan ser independientes e idénticamente distribuidas, de lo cual se sigue que:

$$\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_i - \alpha x_{i-1}) \sim N(0, n_2 \sigma^2),$$

por lo tanto $Z_2 = e^{\xi - \frac{v^2}{2}}$ en donde ξ es independiente de X_{n_1} , $\xi \sim N\left(0, n_2 \sigma^2 \frac{\theta^2 (1-\alpha)^2}{\sigma^4}\right) = N(0, v^2)$ y $v^2 = \frac{n_2 \theta^2 (1-\alpha)^2}{\sigma^2}$. Por los resultados de la sección anterior sabemos que la regla de paro o regla de continuación esta dada por la condición:

$$E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X_{(n_1)} = x_{(n_1)}] - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0,$$

por lo que en este caso:

$$\begin{aligned} E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X_{(n_1)} = x_{(n_1)}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{x^2}{2v^2}} \left(\pi_0 - \pi_1 Z_1 e^{x - \frac{v^2}{2}} \right)^- dx, \\ &= \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{x^2}{2v^2}} \left(\pi_0 - \pi_1 Z_1 e^{x - \frac{v^2}{2}} \right) dx, \\ &= \frac{\pi_0}{\sqrt{2\pi v}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2v^2}} dx - \frac{\pi_1 Z_1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{(x-v^2)^2}{2v^2}} dx \end{aligned}$$

32CAPÍTULO 3. PRUEBAS BIETÁPICAS ÓPTIMAS PARA UN PROCESO DE MARKOV

en donde x_0 es tal que satisface la ecuación $\pi_0 - \pi_1 Z_1 e^{x_0 - \frac{v^2}{2}} = 0$, es decir, $x_0 = \frac{v^2}{2} + \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1}\right)$.

Denotando por Φ a la función de distribución normal estandar, es decir:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

se sigue que mediante los cambios de variable $t = \frac{x}{v}$ y $t = \frac{x-v^2}{v}$, así como de las propiedades de Φ obtenemos:

$$\begin{aligned} E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X_{(n_1)} = x_{(n_1)}] &= \\ &= \pi_0 \left(1 - \Phi\left(\frac{x_0}{v}\right)\right) - \pi_1 Z_1 \left(1 - \Phi\left(\frac{x_0 - v^2}{v}\right)\right) \\ &= \pi_0 \left(1 - \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{1}{v} \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1}\right)\right)\right) - \pi_1 Z_1 \left(1 - \Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{1}{v} \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1}\right)\right)\right) \\ &= \pi_0 \Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1}\right)\right) - \pi_1 Z_1 \Phi\left(\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1}\right)\right). \end{aligned}$$

Con los resultados anteriores, la regla de continuación toma la forma:

$$\pi_0 \Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1}\right)\right) - \pi_1 Z_1 \Phi\left(\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1}\right)\right) - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0,$$

la cual queda como una desigualdad en términos de Z_1 . Para resolverla introducimos el cambio de variable $Z_1 = \frac{\pi_0}{\pi_1} e^x$, con lo cual obtenemos la condición:

$$\pi_0 \Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - \pi_0 e^x \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - (\pi_0 - \pi_0 e^x)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_0 c_1 c(n_2) e^x < 0,$$

la cual equivale a:

$$\Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - e^x \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - (1 - e^x)^- + c_0 c(n_2) + c_1 c(n_2) e^x < 0,$$

consideraremos dos casos:

- Caso en que $x \geq 0$. Bajo esta condición se tiene que $(1 - e^x)^- = 1 - e^x$, así que la desigualdad es:

$$\Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - e^x \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - (1 - e^x) + c_0 c(n_2) + c_1 c(n_2) e^x < 0,$$

es decir:

$$e^x \left[1 - \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right)\right] - \left[1 - \Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right)\right] + c_0 c(n_2) + c_1 c(n_2) e^x < 0,$$

la cual se convierte finalmente en:

$$c_0c(n_2) + c_1c(n_2)e^x < \Phi\left(\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right) - e^x\Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right).$$

Para $x \geq 0$ definimos a la función:

$$\begin{aligned} G_+(x) &= \Phi\left(\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right) - e^x\Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{v}{2} - \frac{x}{v}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{e^x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{v}{2} - \frac{x}{v}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \end{aligned}$$

y a la función:

$$H(x) = c_0c(n_2) + c_1c(n_2)e^x.$$

con lo cual la condición toma la forma:

$$H(x) < G_+(x).$$

- Caso en que $x < 0$. En esta situación la desigualdad es:

$$\Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - e^x\Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) + c_0c(n_2) + c_1c(n_2)e^x < 0,$$

la cual toma la forma:

$$c_0c(n_2) + c_1c(n_2)e^x < e^x\Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - \Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right).$$

Para $x < 0$ definimos a la función:

$$\begin{aligned} G_-(x) &= e^x\Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - \Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right), \\ &= e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{v}{2} + \frac{x}{v}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \end{aligned}$$

con lo cual la condición toma la forma:

$$H(x) < G_-(x).$$

□

Teorema 3.5. *Considere las cantidades $G(0) = \Phi(\frac{v}{2}) - \Phi(-\frac{v}{2})$ y $H(0) = c_0c(n_2) + c_1c(n_2)$ entonces la regla de continuación a una segunda etapa esta caracterizada por las condiciones:*

1. Si $G(0) < H(0)$ el experimento termina en la primera etapa.
2. Si $G(0) > H(0)$ entonces existen dos puntos $a < 0$ y $b > 0$ de forma tal que el experimento continúa a una segunda etapa si se cumple que $a < \ln\left(\frac{\pi_1 Z_1}{\pi_0}\right) < b$, donde a es la raíz de la ecuación:

$$\Phi\left(\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right) - e^x \Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right) = c_0c(n_2) + c_1c(n_2)e^x, \text{ con } x > 0$$

y b es raíz de la ecuación:

$$e^x \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - \Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) = c_0c(n_2) + c_1c(n_2)e^x, \text{ con } x < 0.$$

Demostración.

1. Para el caso en que $x \geq 0$ notemos que:

$$\begin{aligned} G'_+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-x}{v}\right)^2} \left(\frac{-1}{v}\right) - \frac{e^x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{v}{2}-\frac{x}{v}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - e^x \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{v}{2}-\frac{x}{v}\right)^2} \left(\frac{-1}{v}\right) \\ &= -\frac{1}{v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{8} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2v^2}} - e^x \Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{8} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2v^2} + x} \\ &= -e^x \Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right) \end{aligned}$$

y además:

$$H'(x) = c_1c(n_2)e^x,$$

de lo cual concluimos que $G'_+(x) < 0$ y $H'(x) > 0$ para todo $x \in [0, \infty)$, es decir, la función G es estrictamente creciente y H es estrictamente decreciente, por lo que suponiendo que $G_+(0) > H(0)$ concluimos que debe existir un único punto $b \in (0, \infty)$ de forma tal que el experimento continua a una segunda etapa si se cumple que $x \in [0, b)$. El teorema se sigue del hecho de que $Z_1 = \frac{\pi_0}{\pi_1} e^x$.

2. Para el caso que $x < 0$ notemos que

$$\begin{aligned} G'_-(x) &= e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{v}{2} + \frac{x}{v}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right)^2} \left(\frac{1}{v}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right)^2} \left(\frac{1}{v}\right) \\ &= e^x \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) + \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{8} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2v^2} + x} - \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{8} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2v^2} + x} \\ &= e^x \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right), \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que $G'_-(x) > 0$ y $H'_-(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$, por lo que las funciones G_- y H son estrictamente crecientes, además se cumple que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} G_-(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - \Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (c_0 c(n_2) + c_1 c(n_2) e^x) = c_0 c(n_2), \end{aligned}$$

por lo que suponiendo nuevamente que $G_-(0) > H(0)$ entonces existe un único punto $a \in (-\infty, 0)$ de forma tal que el experimento continua a una segunda etapa si se cumple que $x \in (a, 0)$. El teorema se sigue del hecho de que $Z_1 = \frac{\pi_0}{\pi_1} e^x$.

□

A continuación muestro un código desarrollado en el programa Wolfram Mathematica diseñado para calcular los valores de los parámetros a y b que definen a la regla de continuación.

```
(*Introducimos los parametros iniciales INPUTS*)
c0 = 0.004;
c1 = 0.002;
theta = 1;
alpha = 0.4;
sigma = Sqrt[1 - alpha^2];
nuno = 50;
ndos = 50;
v = Sqrt[ndos*theta^2*(1 - alpha)^2/sigma^2];
(*arrancamos programa*)
(*Comensamos por definir a las funciones H y G*)
```

36CAPÍTULO 3. PRUEBAS BIETÁPICAS ÓPTIMAS PARA UN PROCESO DE MARKOV

```

H[x_] = Piecewise[{{CDF[NormalDistribution[0, 1], (v/2) - (x/v)] -
  Exp[x]*CDF[NormalDistribution[0, 1], -(v/2) - (x/v)],
  x > 0}, {Exp[x]*CDF[NormalDistribution[0, 1], (v/2) + (x/v)] -
  CDF[NormalDistribution[0, 1], -(v/2) + (x/v)], x <= 0}}];
G[x_] = c0*ndos + c1*ndos*Exp[x];
H[0]
G[0]
(*Verificamos si se cumplen condiciones para la continuacion, en caso \
afirmativo calculamos el intervalo*)
If[G[0] <= H[0],
  a = x /. FindRoot[H[x] - G[x] == 0, {x, -1}];
  b = x /. FindRoot[H[x] - G[x] == 0, {x, 5}];
  Print["El intervalo para la continuacion es [a,b]=[", a, ", ", b,
  "]",
  Print["No existe intervalo de continuacion pues H(0)>G(0)"];
(*Graficamos las funciones*)
Plot[{H[x], G[x]}, {x, -3, 3}]

```

Algunos resultados usando el código anterior son los siguientes:

- Para los valores de $c_0 = 0.004$, $c_1 = 0.002$, $\theta = 1$, $\alpha = 0.4$, $n_1 = 50$ y $n_2 = 50$ se obtuvo el intervalo:
 $[a, b] = [-1.4573, 2.01171]$.
- Para los valores de $c_0 = 0.04$, $c_1 = 0.02$, $\theta = 1$, $\alpha = 0.4$, $n_1 = 50$ y $n_2 = 50$ no se logra regla de continuación debido a que $G(0) > H(0)$.

Las gráficas de las funciones H y G de los casos anteriores se muestran a continuación.

3.3. PRUEBAS BIETÁPICAS ÓPTIMAS PARA UN PROCESO AUTOREGRESIVO GAUSSIANO 37

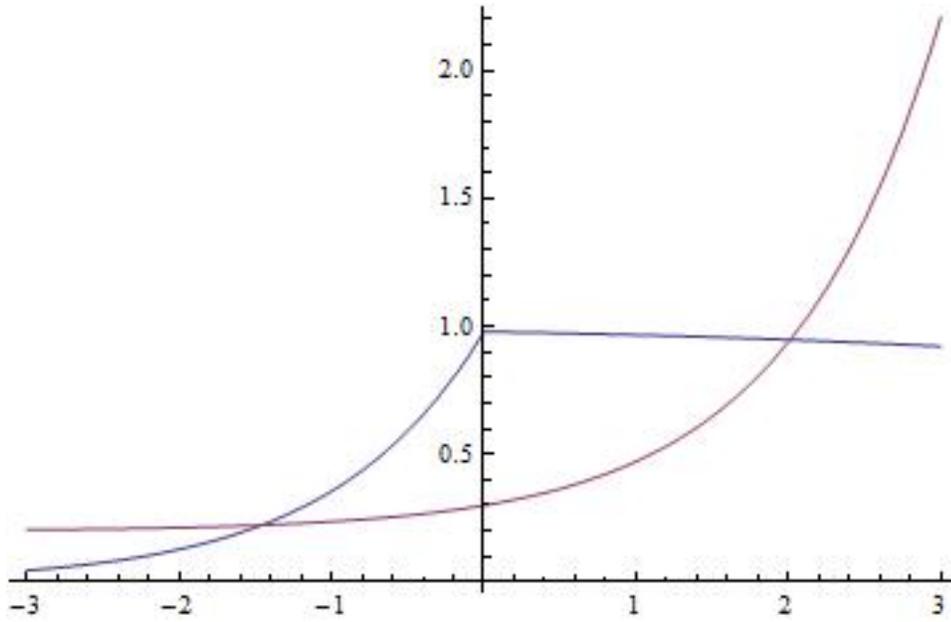


Figura 3.1: Gráfica de las funciones G y H con $c_0 = 0.004$, $c_1 = 0.002$, $\theta = 1$, $\alpha = 0.4$, $n_1 = 50$ y $n_2 = 50$

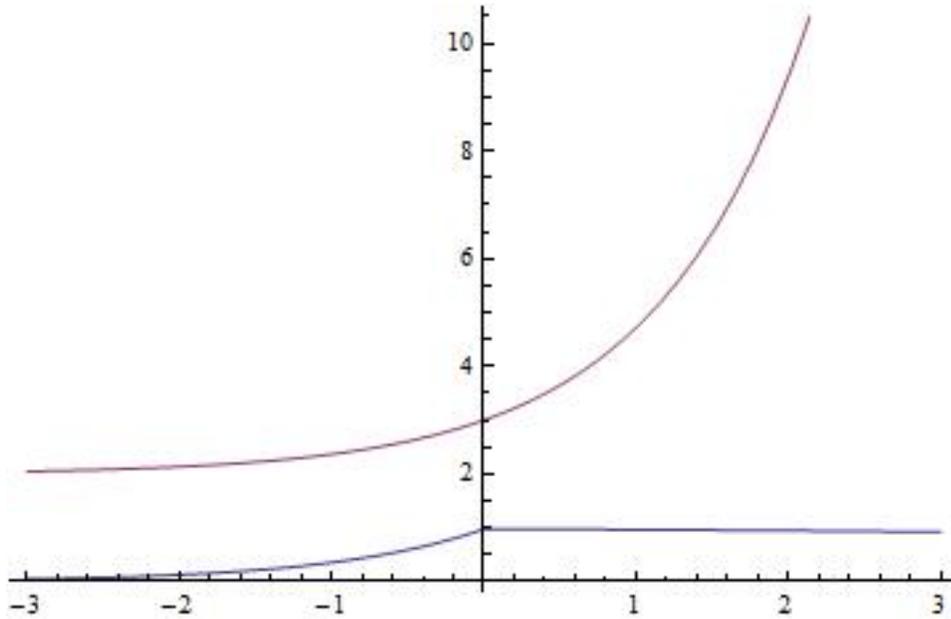


Figura 3.2: Gráfica de las funciones G y H con $c_0 = 0.04$, $c_1 = 0.02$, $\theta = 1$, $\alpha = 0.4$, $n_1 = 50$ y $n_2 = 50$

Capítulo 4

Resultados numéricos

En esta parte evaluamos la eficiencia de las pruebas bietápicas óptimas, con respecto a las pruebas con una sola etapa (Pruebas de Neyman-Pearson), contrastando el número promedio de observaciones para alcanzar los mismos niveles de α y β .

Se desarrollo un programa en Pascal que calcula el riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$ para todas las combinaciones de n_1 y n_2 acotados previamente. El programa contiene como entradas o datos iniciales a los parametros:

$$n_1, n_2, \pi_0, \pi_1, \alpha, \theta, c_0, c_1$$

además de algunos parametros tecnicos que se comentaran mas adelante.

Como salida del programa se obtiene el valor de n_1 y n_2 que alcanzan el mínimo del riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$, asi como el valor numérico de este mínimo.

El primer problema tecnico se presenta en encontrar las raices x_+ y x_- del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right) - e^x \Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{x}{v}\right) &= c_0 c(n_2) + c_1 c(n_2) e^x, \text{ con } x > 0 \\ e^x \Phi\left(\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) - \Phi\left(-\frac{v}{2} + \frac{x}{v}\right) &= c_0 c(n_2) + c_1 c(n_2) e^x, \text{ con } x < 0.\end{aligned}$$

Para encontrar estos valores se desarrollo un programa en Wolfram Mathematica.

Despues de esto, para poder calcular los diferentes valores del riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$ se necesita calcular una integral, la cual esta dada por el teorema 2.2, es decir:

$$\pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int \left[l_{n_1}^- + \left(\int l_{n_1, n_2}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- \right] d\mu^{n_1},$$

el siguiente teorema muestra la fórmulas necesarias para calcular esta integral y poder implementarlas en algun programa computacional.

Teorema 4.1. *Para un proceso autorregresivo Gaussiano, dados n_1 y n_2 fijos, el mínimo del riesgo Bayesiano esta dado por:*

$$\begin{aligned} \text{mín } R(\varphi, \chi) &= \pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \left[(\pi_0 - \pi_1 x)^- \right. \\ &\quad \left. + \left[\pi_0 \Phi \left(-\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln \left(\frac{\pi_0}{\pi_1 x} \right) \right) - \pi_1 x \Phi \left(\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln \left(\frac{\pi_0}{\pi_1 x} \right) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - (\pi_0 - \pi_1 x)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) x \right]^- dx, \end{aligned}$$

donde el mínimo se calcula con n_1 y n_2 fijos, además $\gamma^2 = \theta^2 \left[1 + \frac{(1-\alpha)^2}{\sigma^2} (n_1 - 1) \right]$.

Demostración

Por el Teorema 2.2 sabemos que el mínimo del riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$ es igual a:

$$\text{mín } R(\varphi, \chi) = \pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int \left[l_{n_1}^- + \left(\int l_{n_1, n_2}^- d\mu^{n_2} - l_{n_1}^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- \right] d\mu^{n_1},$$

donde $l_{n_1} = \pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1)}$, $l_{(n_1, n_2)} = \pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)}$; además el minimo es alcanzado con la prueba $(\varphi_{n_1}, \varphi_{(n_1, n_2)}, \chi_{n_1})$ dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_{n_1} &= \left\{ \frac{\pi_0}{\pi_1} < Z_1 \right\} \\ \varphi_{(n_1, n_2)} &= \left\{ \frac{\pi_0}{\pi_1} < Z_2 \right\} \\ \chi_{n_1} &= 1 \left\{ E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X^{(n_1)} = x^{(n_1)}] - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 < 0 \right\}, \end{aligned}$$

en donde:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{f_{\theta_1}^{(n_1)}}{f_{\theta_0}^{(n_1)}}, \\ Z_2 &= \frac{f_{\theta_1}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_1}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1})}{f_{\theta_0}(x_{n_1+1}|x_{n_1}) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1+n_2}|x_{n_1+n_2-1})}. \end{aligned}$$

Notemos entonces que para el caso de un proceso autorregresivo gaussiano se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{mín } R(\varphi, \chi) &= \pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \\ &+ \int \left[(\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1)})^- + \left(\int (\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)})^- d\mu^{n_2} - (\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1)})^- + \pi_0 c_0 c(n_2) f_{\theta_0}^{(n_1)} + \pi_1 c_1 c(n_2) f_{\theta_1}^{(n_1)} \right)^- \right] d\mu^{(n_1)} \\ &= \pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int \left[(\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \left(\int \left(\frac{\pi_0 f_{\theta_0}^{(n_1, n_2)} - \pi_1 f_{\theta_1}^{(n_1, n_2)}}{f_{\theta_0}^{(n_1)}} \right)^- d\mu^{n_2} - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 \right)^- \right] f_{\theta_0}^{(n_1)} d\mu^{(n_1)} \\ &= \pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int \left[(\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \left(E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X^{(n_1)}] - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 \right)^- \right] f_{\theta_0}^{(n_1)} d\mu^{(n_1)} \\ &= \pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + E_{\theta_0} \left[(\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \left(E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X^{(n_1)}] - (\pi_0 - \pi_1 Z_1)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) Z_1 \right)^- \right] \end{aligned}$$

Donde en particular:

$$E_{\theta_0} [(\pi_0 - \pi_1 Z_1 Z_2)^- | X^{(n_1)}] = \pi_0 \Phi \left(-\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln \left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1} \right) \right) - \pi_1 Z_1 \Phi \left(\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln \left(\frac{\pi_0}{\pi_1 Z_1} \right) \right)$$

y $v^2 = \frac{n_2\theta^2(1-\alpha)^2}{\sigma^2}$. Por otra parte, tenemos que:

$$Z_1 = \frac{f_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})}{f_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})} = \frac{f_{\theta_1}(x_1)f_{\theta_1}(x_2|x_1) \cdots f_{\theta_1}(x_{n_1}|x_{n_1-1})}{f_{\theta_0}(x_1)f_{\theta_0}(x_2|x_1) \cdots f_{\theta_0}(x_{n_1}|x_{n_1-1})}$$

Con la condición de estacionariedad se tiene que:

$$\begin{aligned} f_{\theta}(x_i|x_{i-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \theta - \alpha(x_{i-1} - \theta))^2}{2\sigma^2}}, \\ f_{\theta}(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2}, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que:

$$Z_1 = e^{\left(\theta x_1 + \frac{\theta(1-\alpha)}{\sigma^2} \sum_{k=2}^{n_1} (x_k - \alpha x_{k-1}) - \theta^2/2 - \frac{(n_1 - 1)\theta^2(1 - \alpha)^2}{2\sigma^2} \right)}$$

Se sigue que bajo la hipótesis nula y del hecho de que $Var[X_1] = \sigma_1 = 1$, la variable aleatoria

$$\eta = \theta x_1 + \frac{\theta(1-\alpha)}{\sigma^2} \sum_{k=2}^{n_1} (x_k - \alpha x_{k-1}) \sim N\left(0, \theta^2 + \frac{\theta^2(1-\alpha)^2}{\sigma^2}(n_1 - 1)\right) = N(0, \gamma^2),$$

donde $\gamma^2 = \theta^2 + \frac{\theta^2(1-\alpha)^2}{\sigma^2}(n_1 - 1)$. Se sigue entonces que $Z_1 = e^{\eta - \gamma^2/2}$, de lo cual se sigue que:

$$\begin{aligned} \text{mín } R(\varphi, \chi) &= \pi_1 + c(n_1)(\pi_0 c_0 + \pi_1 c_1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} [(\pi_0 - \pi_1 x)^- \\ &+ \left[\pi_0 \Phi\left(-\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 x}\right)\right) - \pi_1 x \Phi\left(\frac{v}{2} - \frac{1}{v} \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi_1 x}\right)\right) \right] \\ &- (\pi_0 - \pi_1 x)^- + \pi_0 c_0 c(n_2) + \pi_1 c_1 c(n_2) x]^- dx \end{aligned}$$

□

La finalidad del resto de este capítulo es mostrar cómo se pueden utilizar los resultados teóricos obtenidos arriba, para el diseño de pruebas óptimas en caso concreto de proceso Gaussiano autorregresivo de orden uno.

También evaluamos las características de pruebas óptimas, construidas para diferentes valores de parámetros del riesgo Bayesiano $(\pi_0, \pi_1, \mathbb{C}_0, \mathbb{C}_1)$, como son las probabilidades de error tipo uno y tipo dos, número promedio muestral bajo hipótesis nula y alternativa.

Para evaluar la ventaja que llevan las pruebas bietápicas sobre las pruebas (óptimas) de una sola etapa (pruebas Neyman-Pearson), también calculamos las características de éstas últimas, para contrastar con las pruebas bietápicas.

Aparte, contrastamos las pruebas bietápicas óptimas con la prueba secuencial de razón de probabilidades (prueba de Wald). Para ello consideramos un caso de proceso autor-regresivo gaussiano no estacionario, más específicamente, cuando Y_1 y $Y_n - \alpha Y_{n-1}$ para $n = 2, 3, \dots$ (ver Sección 3.2) son idénticamente distribuidas.

La base para los cálculos es el Teorema 4.1 que proporciona la estructura de prueba Bayesiana basada en dos etapas, de duración n_1 y n_2 , respectivamente. Para encontrar la prueba bietápica óptima, variamos n_1 y n_2 en Teorema 4.1 de tal manera que el riesgo Bayesiano $R(\varphi, \chi)$ sea mínimo, entre todas las pruebas bietápicas. Según el Lema 2.3, esto nos dará una solución al problema de minimización del número promedio muestral (de nivel alcanzado por la prueba Bayesiana).

Para los cálculos respectivos (ver la fórmula en el Teorema 4.1) hemos desarrollado un programa en el lenguaje de programación Pascal, el código fuente del cual se encuentra en el Apéndice 3, mientras los listados producidos por este programa, se encuentran en Apéndices 1 y 2. El programa puede ser ejecutado en los sistemas de programación Free Pascal (ver www.freepascal.org) o Borland Pascal.

Los cálculos respectivos, los realizamos con diferentes parámetros π_0, π_1 y c_0, c_1 , mismos que son exhibidos en el lado derecho de cada gráfica. El requerimiento $\pi_0 + \pi_1 = 1$ lo estamos omitiendo debido a que π_0 y π_1 siempre pueden ser normalizados, cambiando los valores de c_0 y c_1 de manera respectiva, de tal manera que π_0 y π_1 sumen 1. Obviamente, esto no afecta la prueba óptima que resulta de minimizar el riesgo Bayesiano respectivo. Entonces variamos π_0 y π_1 dentro del rango de 10 a 200. Siempre usamos $c_0 = 1$, por la misma razón, porque esto siempre se puede lograr normalizando la función del costo $c(n)$ (ver la fórmula en el Teorema 4.1). Para los cálculos en el programa estamos usando $c(n) \equiv n$, $n = 1, 2, \dots$, lo que corresponde al caso clásico usado, por ejemplo en [12]. Es fácil ver que otros casos (por ejemplo, el caso de importancia práctica $c(n) = c_0 + c_1 n$ (ver [1] o [6]), se puede incorporar fácilmente, modificando el programa - ver funciones `u0` y `u0nu` en las cuales se usa actualmente el valor de la variable `t` para calcular el costo de

la etapa de duración t).

Para los fines ilustrativos, la evaluación de características presentadas en los listados, se hace para hipótesis $H_0 : \theta = 0$ contra $H_1 : \theta = \theta_1$. El valor de θ_1 se puede variar en el programa asignando el valor requerido a la constante `theta` (ver el listado en Apéndice 3).

Tomando en cuenta que usualmente se supone que las pruebas desarrolladas para dos hipótesis simples (digamos $H_0 : \theta = \theta_0$ y $H_1 : \theta = \theta_1$) se pueden usar como pruebas para hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ contra hipótesis compuesta $H_1 : \theta > \theta_0$, implementamos las gráficas para representar no solo las probabilidades de error y el promedio del número de observaciones en puntos θ_0 y θ_1 , sino también la función de potencia (la probabilidad de rechazar H_0) y el número promedio muestral para cualquier valor del parámetro $\theta > 0$ (hasta el máximo especificado en la variable `thetamax` (ver el listado del programa)).

Para construcción de las gráficas usamos, aparte de la prueba óptima bietápica, la prueba de Neyman-Pearson (basada en una sola etapa) y la prueba de Wald. Para contrastar todas las pruebas, determinamos los parámetros de éstas de tal manera que sus *dos* características coincidan con las de la prueba bietápica óptima, más específicamente, que coincidan la probabilidad de error tipo 1 (el valor de la función de potencia en $\theta = \theta_0$) y el número promedio muestral bajo hipótesis nula ($\theta = \theta_0$). Con estos parámetros, construimos las gráficas de todas las funciones de potencia y del número promedio muestral, para las tres pruebas, en la misma gráfica.

De las gráficas se aprecia que las pruebas bietápicas, en general, son mucho más eficientes a comparación con las pruebas de una sola etapa: la probabilidad de error tipo 2 de la bietápica es varias veces menor que la de la prueba Neyman-Pearson, con el mismo número de observaciones y la misma probabilidad de error tipo I (de 3 a 10 veces menor para valores de α comúnmente utilizadas en la práctica (del orden de 1% a 10%)). Obviamente, la prueba más eficiente en este caso es la de Wald. Para las gráficas utilizamos las aproximaciones de Wald (ver [11], sección 3.2), así que no son valores exactos, a diferencia con las características de otras dos pruebas. Obviamente, se observa que la probabilidad de error tipo 2 (aproximada) de la prueba de Wald es aún varias veces mayor que la de la prueba bietápica óptima, bajo las mismas condiciones. Sin embargo también se aprecia

que ésta puede tener el número promedio de observaciones muy elevado (hasta por arriba del número *máximo* de observaciones tanto de la prueba Neyman-Pearson, como de la bietápica), en el caso cuando el valor de θ está dentro del intervalo (θ_0, θ_1) (aproximadamente en medio de éste). Así que el comportamiento de las pruebas bietápicas es bastante competitivo, aún a comparación con el caso de existencia de la prueba óptima.

Cabe resaltar que los ejemplos numéricos que calculamos son solo para un caso especial proceso de Markov *no estacionario* (justamente para poder comparar con la prueba de Wald). En caso general, no hay manera de realizar este tipo de comparación ya que no existen fórmulas (ni siquiera aproximadas) para las características de la prueba de Wald, debido a que las variables $X_1, X_n - \alpha X_{n-1}, n = 2, 3, \dots$, siendo todavía independientes, ya no son idénticamente distribuidas (ver Sección 3.2 de esta tesis).

Mientras el cálculo de parámetros de las pruebas bietápicas óptimas y evaluación de las características de éstas es completamente factible utilizando el programa que desarrollamos. Por otro lado, como ya mencionamos, el programa puede usarse para los casos de los costos de etapas *no proporcionales* al número de observaciones tomadas en éstas. En este caso, se sabe muy bien (ver [1] y artículos posteriores de estos autores) que la prueba de Wald, generalmente hablando, pierde su carácter óptimo. El cálculo de las pruebas óptimas, con el tamaño variable de las etapas, es un problema muy difícil, generalmente hablando (ver [1] y [6], por ejemplo), así que las pruebas biétápicas con tamaño de etapas fijos, representan una sencilla (y práctica) alternativa a las pruebas con tamaño de etapas variables de [1] y [6].

Se ve una clara posibilidad de aplicar las pruebas bietápicas a los casos más generales que los procesos autorregresivos gaussianos, y más generales que procesos autorregresivos. La teoría que presentamos en Sección 3.1 puede ser base para el diseño de pruebas bietápicas óptimas para procesos de Markov en general.

También es bastante fácil ver que tanto la teoría que como el programa desarrollados cubren el caso de procesos no estacionarios (por ejemplo, el proceso autorregresivo “explosivo”, cuando $Y_n = \alpha Y_{n-1} + \epsilon_n$ con $|\alpha| > 1$, mismo que puede ser de interés práctico, y últimamente atrae la atención de estadísticos).

Es notable que los procesos autorregresivos de orden mayor a 1 (que no son Markovianos,

generalmente hablando) se pueden tratar de una manera muy parecida a la presentada aquí, y el programa se puede adaptar fácilmente para el diseño óptimo de pruebas bietápicas en este caso también.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se desarrollaron los siguientes temas.

- Se estudió la estructura general de las pruebas bietápicas óptimas (Bayesianas) para procesos estocásticos a tiempo discreto.
- Se obtuvo la forma general de las pruebas bietápicas que minimizan el número promedio muestral dadas restricciones sobre las probabilidades de error tipo uno y dos.
- Se estudió de manera más detallada esta estructura en caso de procesos de Markov de forma general.
- Se obtuvieron las fórmulas para determinación de parámetros de las pruebas bietápicas óptimas en caso específico de proceso autorregresivo gaussiano.
- Se desarrolló un programa para computadora para determinación de los parámetros de las pruebas bietápicas óptimas en el caso de proceso autorregresivo gaussiano.
- Se analizó el comportamiento de las pruebas bietápicas óptimas en comparación con pruebas de una sola etapa (Neyman-Pearson) y con la prueba secuencial de razón de probabilidades (de Wald).

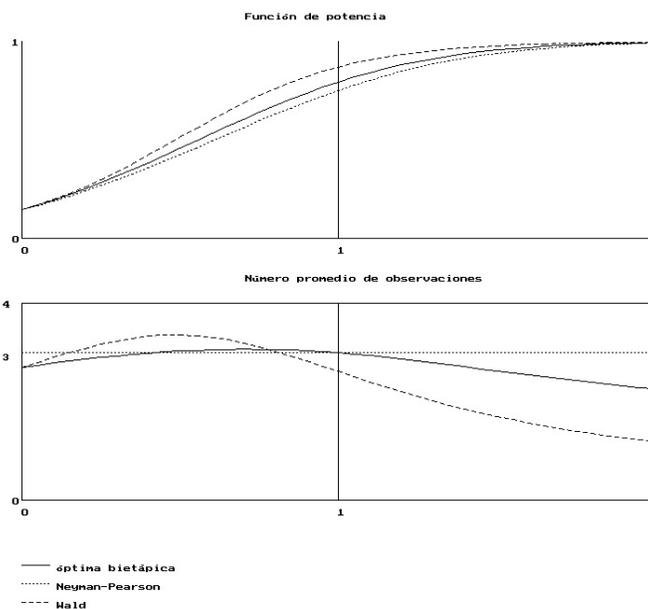
- Se concluyó que las pruebas bietápicas tienen, en general, características muy superiores a las de pruebas de Neyman-Pearson, y, en ciertos aspectos, pueden competir con la prueba de Wald.

Capítulo 6

Apéndices

6.1. Apéndice 1

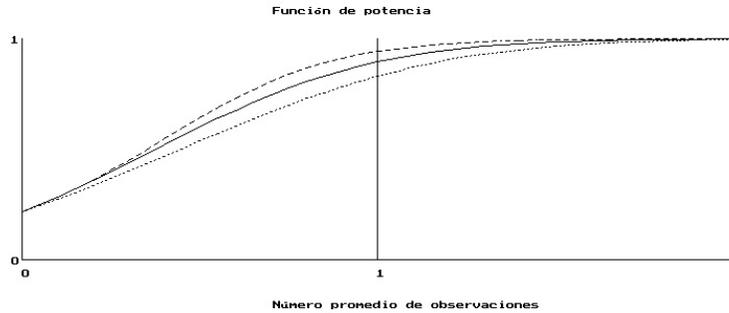
En este apéndice se muestran los resultados numéricos que se obtuvieron con el programa desarrollados en Pascal, con el valor del parámetro $c_1 = 0$ y $c_0 = 1$.



```
Prueba bietápica:  
pi0=10 pi1=10  
c0=1 c1=0  
n1=2 n2=2  
lnA=-0.61963 lnB= 1.43848  
lnC= 0.00000  
alfa=0.1460 beta=0.2064  
duracion med. (H0)= 2.703  
duracion med. (H1)= 2.991
```

```
Prueba Neyman-Pearson:  
n=3 alfa=0.1460 beta=0.2488
```

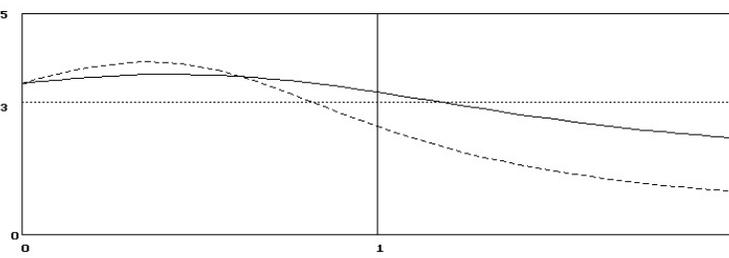
```
Prueba de Hald:  
lnA=-1.88091 lnB= 1.78472  
alfa=0.14599 beta= 0.13019  
Duración med. (H0)=2.69125  
Duración med. (H1)= 2.61495
```



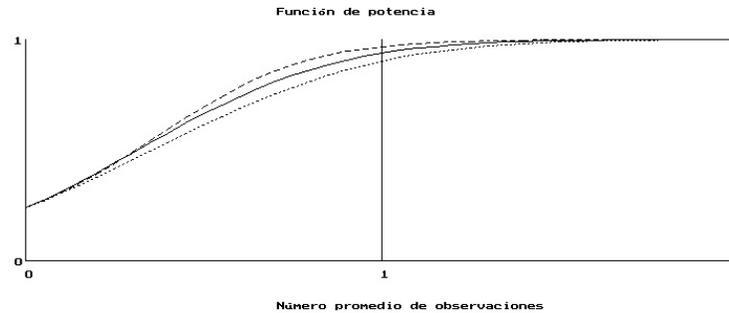
Prueba bietápica:
 $\pi_0=10$ $\pi_1=20$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=2$ $n_2=3$
 $\ln A=-1.21959$ $\ln B= 0.88012$
 $\ln C=-0.69315$
 $\alpha=0.2188$ $\beta=0.1040$
 duracion med.(H0)= 3.410
 duracion med.(H1)= 3.224

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=3$ $\alpha=0.2188$ $\beta=0.1696$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-2.60367$ $\ln B= 1.46004$
 $\alpha=0.21880$ $\beta= 0.05781$
 Duración med.(H0)=3.42827
 Duración med.(H1)= 2.45023



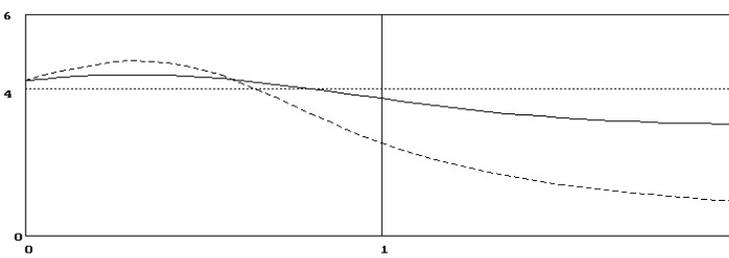
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - Wald



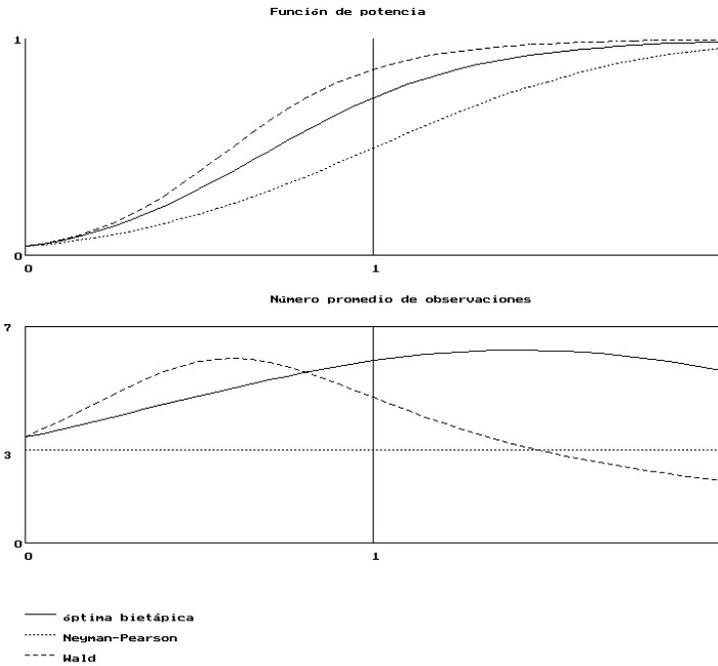
Prueba bietápica:
 $\pi_0=10$ $\pi_1=30$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=3$ $n_2=3$
 $\ln A=-1.62589$ $\ln B= 0.47407$
 $\ln C=-1.09861$
 $\alpha=0.2383$ $\beta=0.0616$
 duracion med.(H0)= 4.205
 duracion med.(H1)= 3.724

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=4$ $\alpha=0.2383$ $\beta=0.0988$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.20710$ $\ln B= 1.40285$
 $\alpha=0.23831$ $\beta= 0.03083$
 Duración med.(H0)=4.21627
 Duración med.(H1)= 2.52147



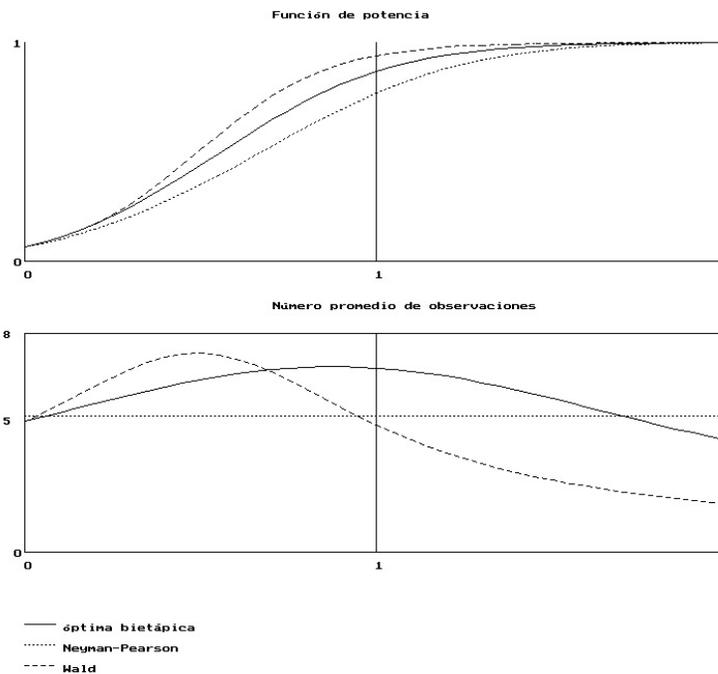
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - Wald



Prueba bietápica:
 $\pi_0=20$ $\pi_1=10$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=2$ $n_2=5$
 $\ln A=-0.19404$ $\ln B= 3.85468$
 $\ln C= 0.69315$
 $\alpha=0.0407$ $\beta=0.2718$
 duracion med. (H0)= 3.420
 duracion med. (H1)= 5.895

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=3$ $\alpha=0.0407$ $\beta=0.5042$

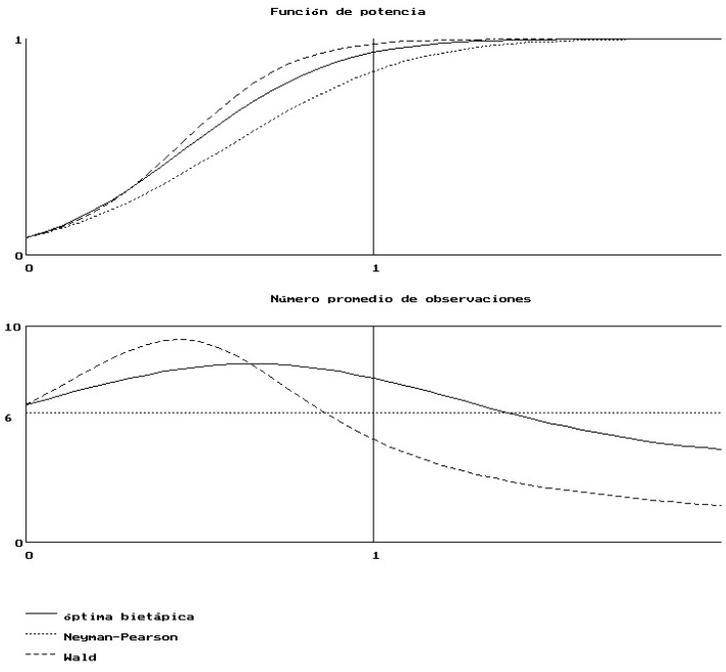
Prueba de Wald:
 $\ln A=-1.92313$ $\ln B= 3.05021$
 $\alpha=0.04071$ $\beta= 0.14020$
 Duración med. (H0)=3.44058
 Duración med. (H1)= 4.70591



Prueba bietápica:
 $\pi_0=20$ $\pi_1=20$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=3$ $n_2=5$
 $\ln A=-0.88721$ $\ln B= 3.15820$
 $\ln C= 0.00000$
 $\alpha=0.0664$ $\beta=0.1320$
 duracion med. (H0)= 4.791
 duracion med. (H1)= 6.734

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=5$ $\alpha=0.0664$ $\beta=0.2319$

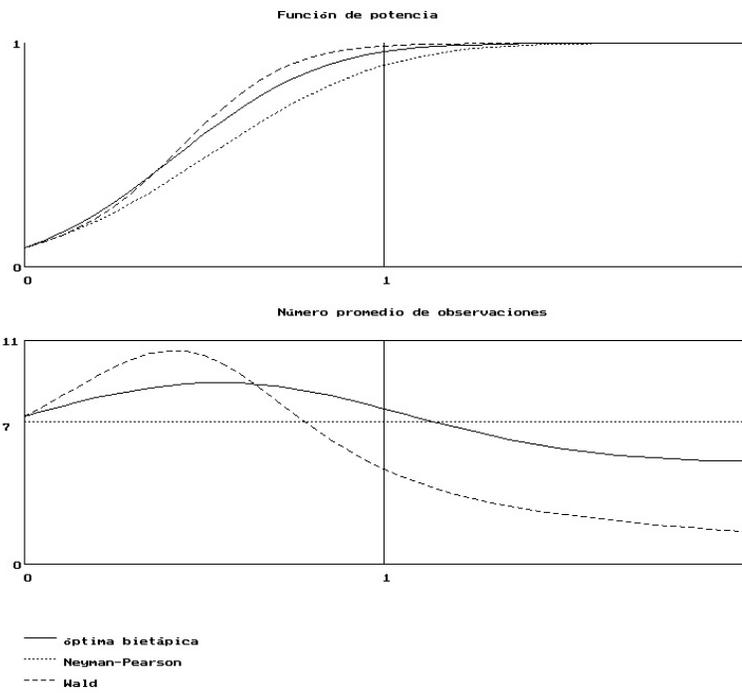
Prueba de Wald:
 $\ln A=-2.74194$ $\ln B= 2.65059$
 $\alpha=0.06636$ $\beta= 0.06017$
 Duración med. (H0)=4.76719
 Duración med. (H1)= 4.65226



Prueba bietápica:
 $\pi_0=20$ $\pi_1=40$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=4$ $n_2=6$
 $\ln A=-1.50865$ $\ln B= 2.70967$
 $\ln C=-0.69315$
 $\alpha=0.0782$ $\beta=0.0634$
 duracion med. (H0)= 6.362
 duracion med. (H1)= 7.594

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=6$ $\alpha=0.0782$ $\beta=0.1509$

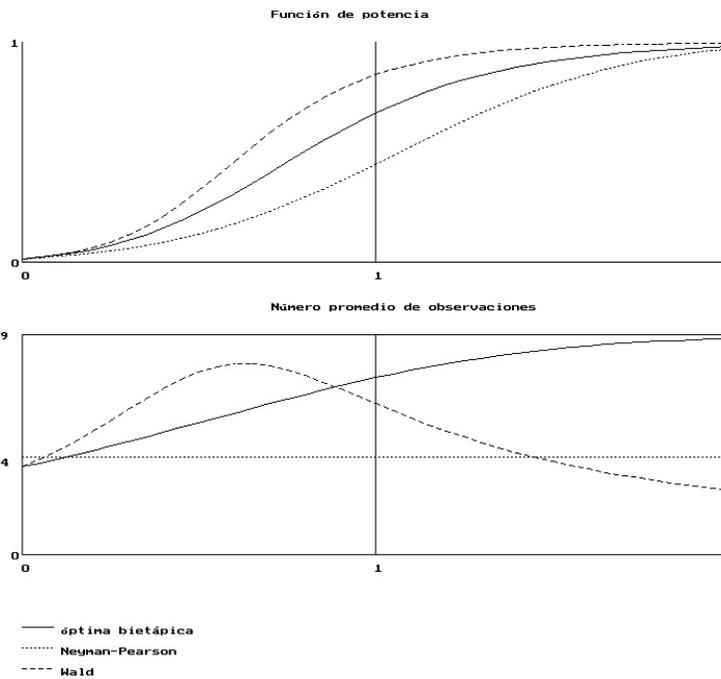
Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.67465$ $\ln B= 2.52423$
 $\alpha=0.07825$ $\beta= 0.02337$
 Duración med. (H0)=6.37909
 Duración med. (H1)= 4.75868



Prueba bietápica:
 $\pi_0=20$ $\pi_1=60$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=5$ $n_2=6$
 $\ln A=-1.91373$ $\ln B= 2.30556$
 $\ln C=-1.09861$
 $\alpha=0.0868$ $\beta=0.0397$
 duracion med. (H0)= 7.285
 duracion med. (H1)= 7.647

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=7$ $\alpha=0.0868$ $\beta=0.0994$

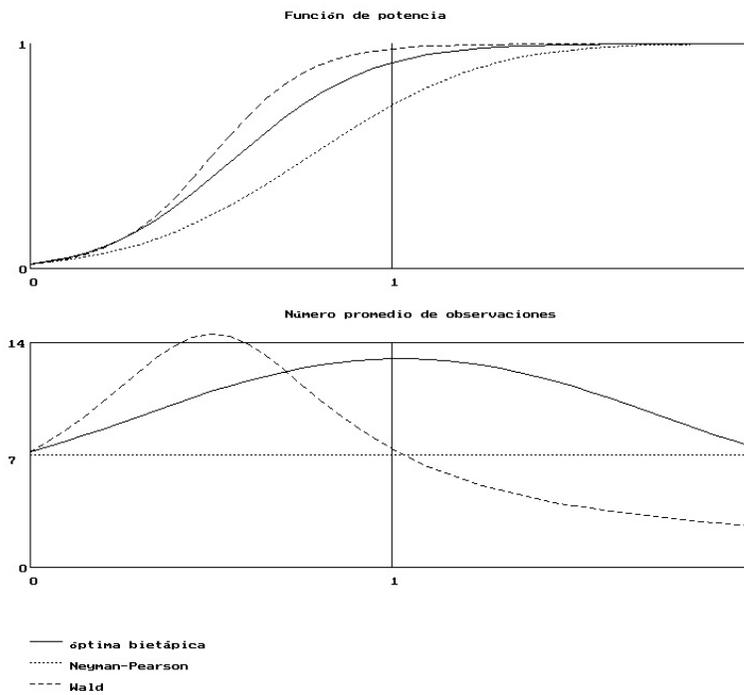
Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.21984$ $\ln B= 2.43031$
 $\alpha=0.08683$ $\beta= 0.01342$
 Duración med. (H0)=7.28466
 Duración med. (H1)= 4.68206



Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=10$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=2$ $n_2=7$
 $\ln A= 0.05140$ $\ln B= 6.52305$
 $\ln C= 1.38629$
 $\alpha=0.0163$ $\beta=0.3221$
 duración med.(H0)= 3.600
 duración med.(H1)= 7.241

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=4$ $\alpha=0.0163$ $\beta=0.5545$

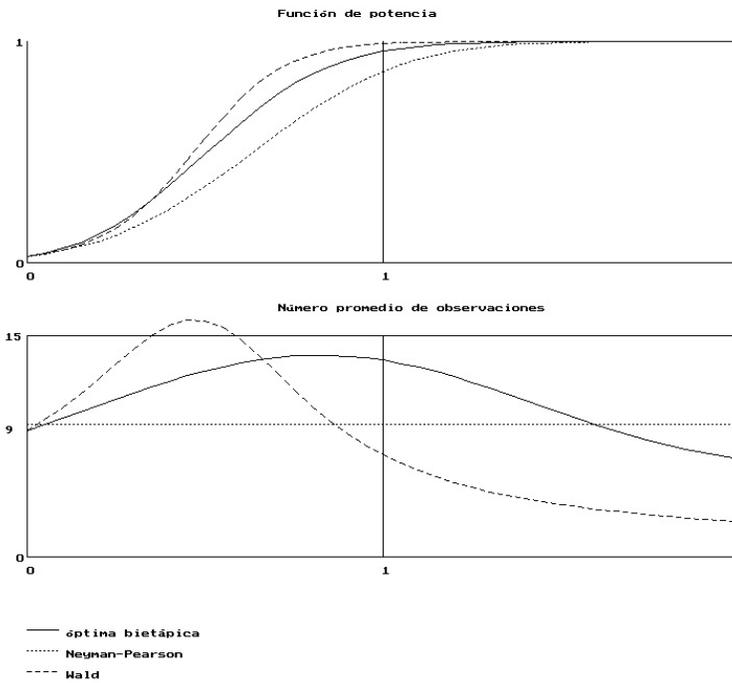
Prueba de Wald:
 $\ln A=-1.89219$ $\ln B= 3.95619$
 $\alpha=0.01630$ $\beta= 0.14828$
 Duración med.(H0)=3.59239
 Duración med.(H1)= 6.17793



Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=30$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=5$ $n_2=9$
 $\ln A=-0.93775$ $\ln B= 6.17735$
 $\ln C= 0.28768$
 $\alpha=0.0205$ $\beta=0.0843$
 duración med.(H0)= 7.181
 duración med.(H1)= 12.991

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=7$ $\alpha=0.0205$ $\beta=0.2732$

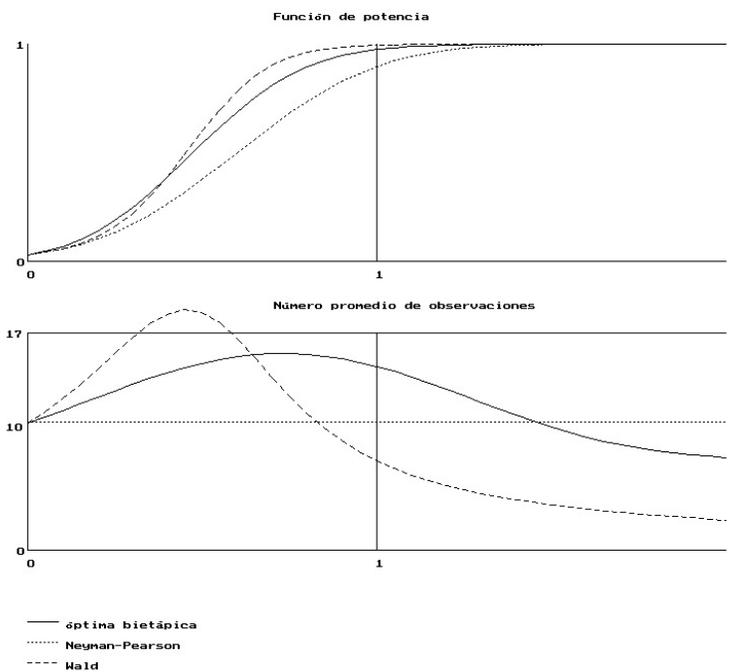
Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.76187$ $\ln B= 3.86202$
 $\alpha=0.02055$ $\beta= 0.02276$
 Duración med.(H0)=7.20942
 Duración med.(H1)= 7.37696



Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=60$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=6$ $n_2=9$
 $\ln A=-1.63095$ $\ln B= 5.48393$
 $\ln C=-0.40547$
 $\alpha=0.0287$ $\beta=0.0433$
 duración med.(H0)= 8.591
 duración med.(H1)= 13.338

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=9$ $\alpha=0.0287$ $\beta=0.1358$

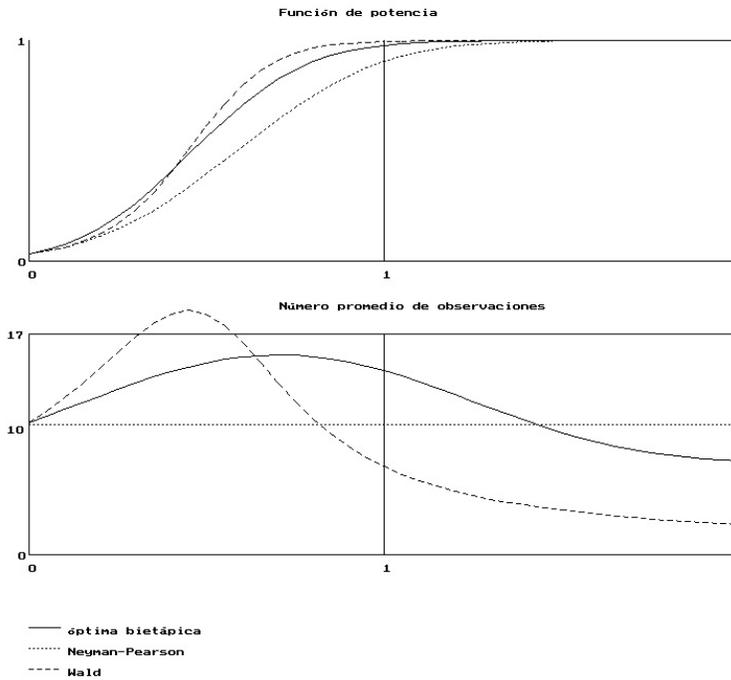
Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.51682$ $\ln B= 3.54141$
 $\alpha=0.02867$ $\beta= 0.01061$
 Duración med.(H0)=8.57143
 Duración med.(H1)= 6.91181



Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=100$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=7$ $n_2=10$
 $\ln A=-2.08634$ $\ln B= 5.32796$
 $\ln C=-0.91629$
 $\alpha=0.0288$ $\beta=0.0252$
 duración med.(H0)= 9.961
 duración med.(H1)= 14.378

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=10$ $\alpha=0.0288$ $\beta=0.1033$

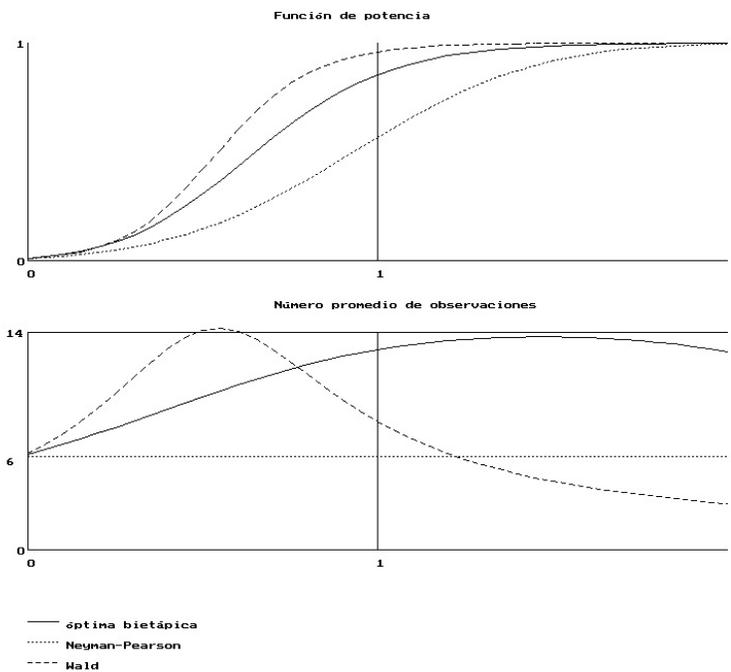
Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.24421$ $\ln B= 3.54378$
 $\alpha=0.02876$ $\beta= 0.00513$
 Duración med.(H0)=9.98212
 Duración med.(H1)= 6.99746



Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=120$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=7$ $n_2=10$
 $\ln A=-2.26655$ $\ln B= 5.14387$
 $\ln C=-1.09861$
 $\alpha=0.0321$ $\beta=0.0218$
 duración med.(H0)= 10.200
 duración med.(H1)= 14.182

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=10$ $\alpha=0.0321$ $\beta=0.0948$

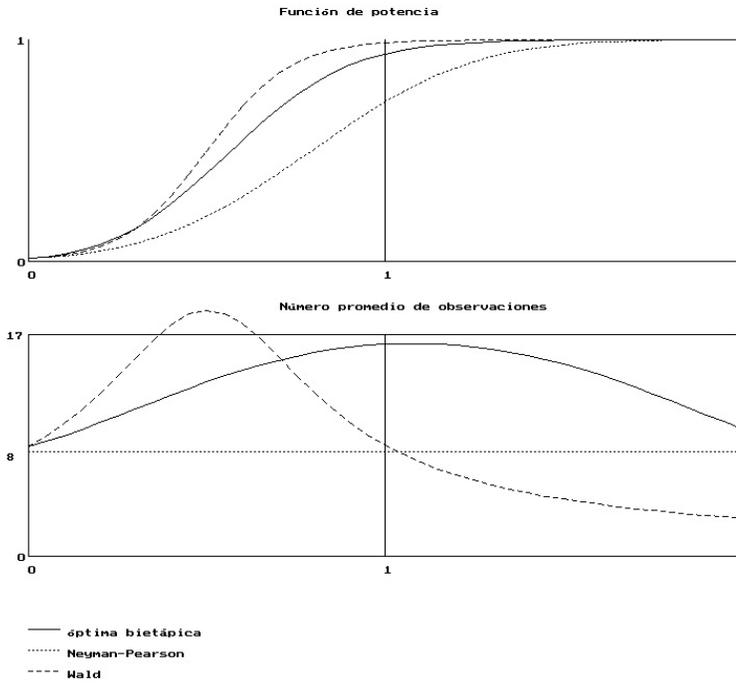
Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.39131$ $\ln B= 3.43347$
 $\alpha=0.03213$ $\beta= 0.00441$
 Duración med.(H0)=10.21465
 Duración med.(H1)= 6.78910



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=20$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=4$ $n_2=10$
 $\ln A=-0.43615$ $\ln B= 8.29783$
 $\ln C= 1.09861$
 $\alpha=0.0113$ $\beta=0.1442$
 duración med.(H0)= 6.171
 duración med.(H1)= 12.876

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=6$ $\alpha=0.0113$ $\beta=0.4327$

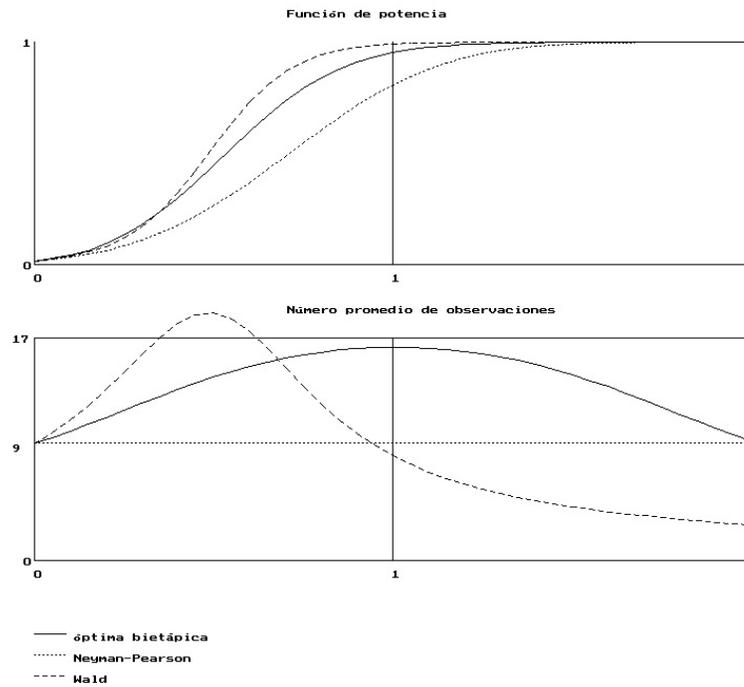
Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.18614$ $\ln B= 4.44062$
 $\alpha=0.01131$ $\beta= 0.04086$
 Duración med.(H0)=6.19849
 Duración med.(H1)= 8.25793



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=40$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=6$ $n_2=11$
 $\ln A=-1.07975$ $\ln B= 8.03060$
 $\ln C= 0.40547$
 $\alpha=0.0124$ $\beta=0.0636$
 duracion med. (H0)= 8.382
 duracion med. (H1)= 16.253

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=8$ $\alpha=0.0124$ $\beta=0.2798$

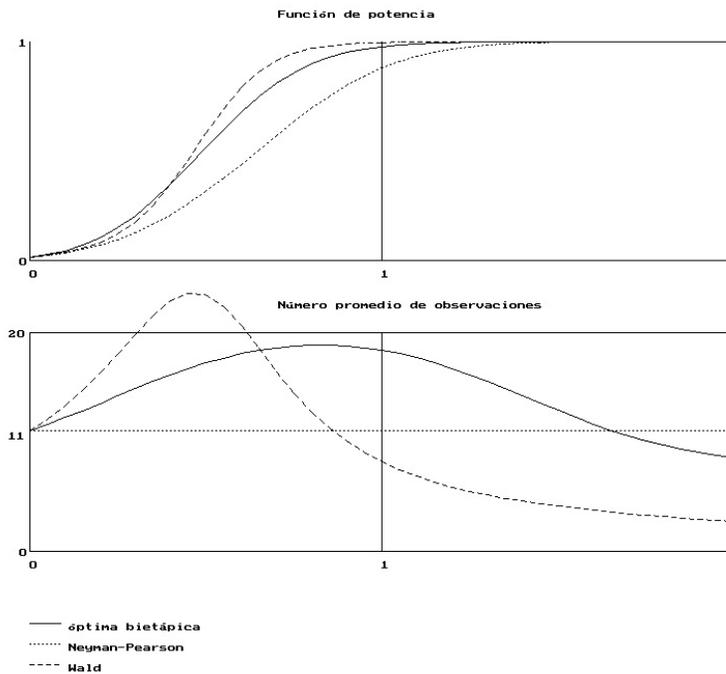
Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.31145$ $\ln B= 4.37812$
 $\alpha=0.01238$ $\beta= 0.01325$
 Duración med. (H0)=8.40670
 Duración med. (H1)= 8.52600



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=60$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=6$ $n_2=11$
 $\ln A=-1.48535$ $\ln B= 7.62109$
 $\ln C= 0.00000$
 $\alpha=0.0165$ $\beta=0.0469$
 duracion med. (H0)= 8.950
 duracion med. (H1)= 16.305

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=9$ $\alpha=0.0165$ $\beta=0.1928$

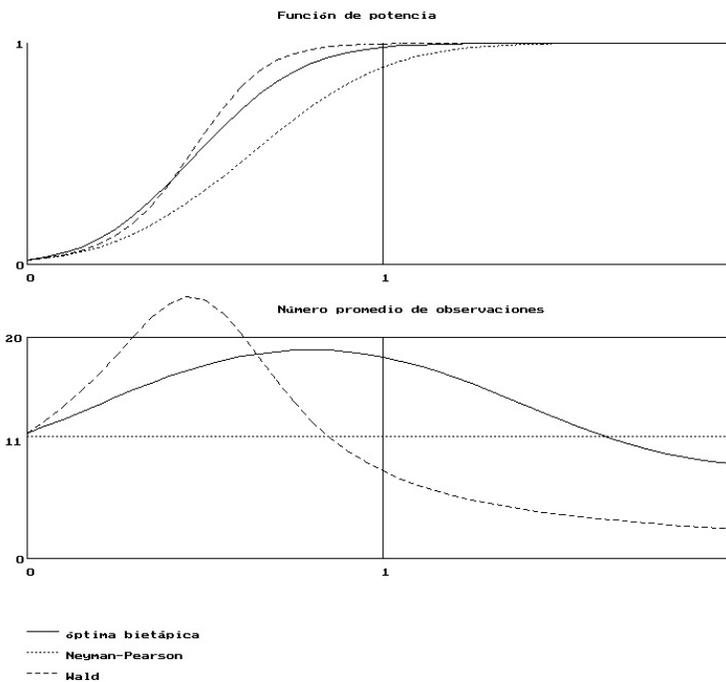
Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.61275$ $\ln B= 4.09541$
 $\alpha=0.01649$ $\beta= 0.00976$
 Duración med. (H0)=8.93826
 Duración med. (H1)= 8.02083



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=120$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=8$ $n_2=12$
 $\ln A=-2.12705$ $\ln B= 7.34207$
 $\ln C=-0.69315$
 $\alpha=0.0162$ $\beta=0.0211$
 duracion med.(H0)= 11.047
 duracion med.(H1)= 18.394

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=11$ $\alpha=0.0162$ $\beta=0.1196$

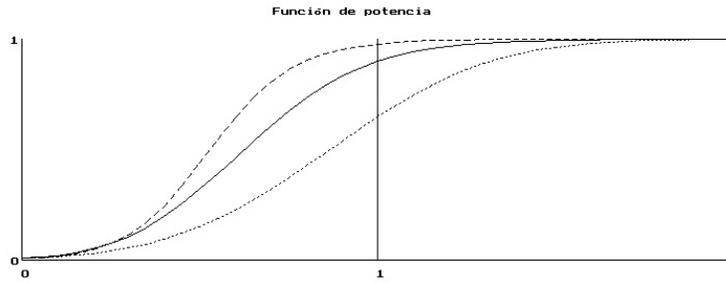
Prueba de Hald:
 $\ln A=-5.69189$ $\ln B= 4.11982$
 $\alpha=0.01619$ $\beta= 0.00332$
 Duración med.(H0)=11.06508
 Duración med.(H1)= 8.17452



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=150$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=8$ $n_2=12$
 $\ln A=-2.35088$ $\ln B= 7.11621$
 $\ln C=-0.91629$
 $\alpha=0.0186$ $\beta=0.0177$
 duracion med.(H0)= 11.359
 duracion med.(H1)= 18.228

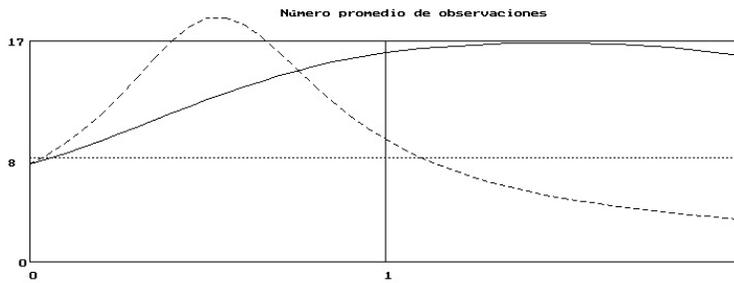
Prueba Neyman-Pearson:
 $n=11$ $\alpha=0.0186$ $\beta=0.1090$

Prueba de Hald:
 $\ln A=-5.86522$ $\ln B= 3.98415$
 $\alpha=0.01856$ $\beta= 0.00278$
 Duración med.(H0)=11.36444
 Duración med.(H1)= 7.91347



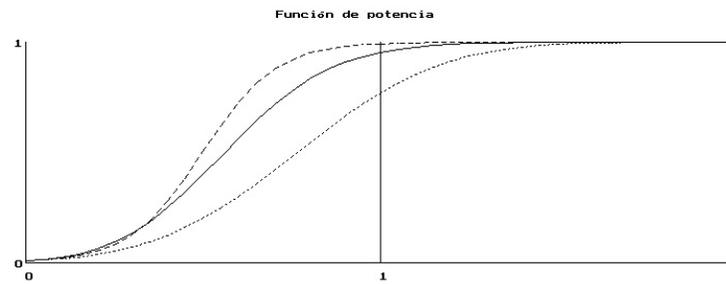
Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=30$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=5$ $n_2=12$
 $\ln A=-0.70029$ $\ln B=10.41645$
 $\ln C= 1.20397$
 $\alpha=0.0072$ $\beta=0.0999$
 duración med.(H0)= 7.525
 duración med.(H1)= 16.083

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=8$ $\alpha=0.0072$ $\beta=0.3511$



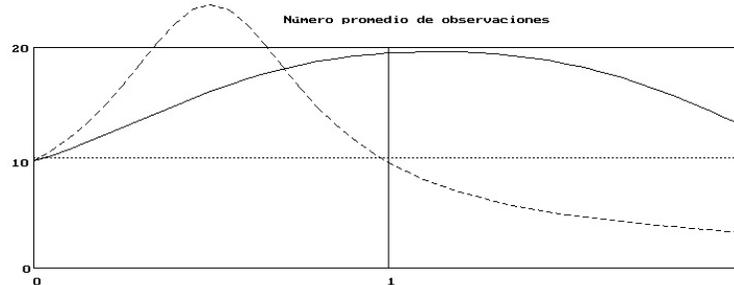
Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.81632$ $\ln B= 4.90851$
 $\alpha=0.00722$ $\beta= 0.02185$
 Duración med.(H0)=7.50547
 Duración med.(H1)= 9.43575

— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - - - Wald



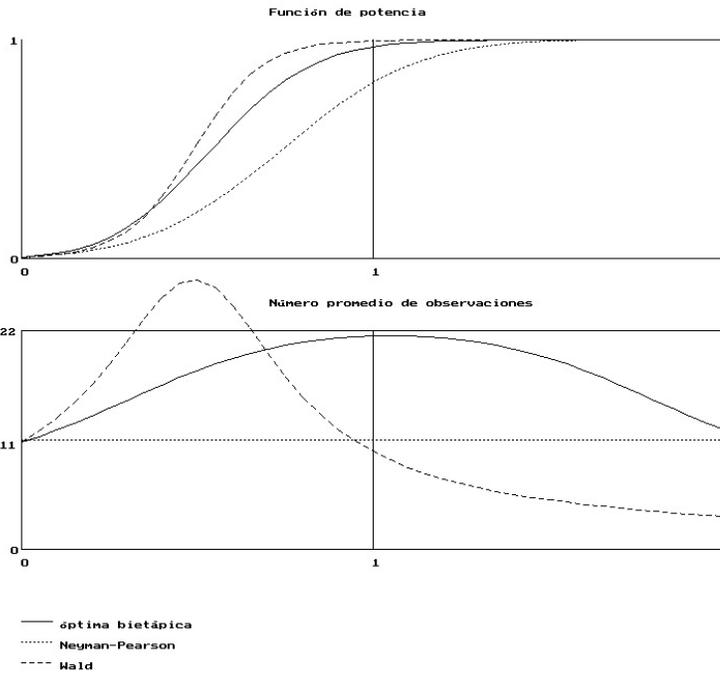
Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=60$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=7$ $n_2=13$
 $\ln A=-1.34900$ $\ln B=10.21638$
 $\ln C= 0.51083$
 $\alpha=0.0077$ $\beta=0.0448$
 duración med.(H0)= 9.705
 duración med.(H1)= 19.493

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=10$ $\alpha=0.0077$ $\beta=0.2292$



Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.92204$ $\ln B= 4.85325$
 $\alpha=0.00775$ $\beta= 0.00723$
 Duración med.(H0)=9.69162
 Duración med.(H1)= 9.56518

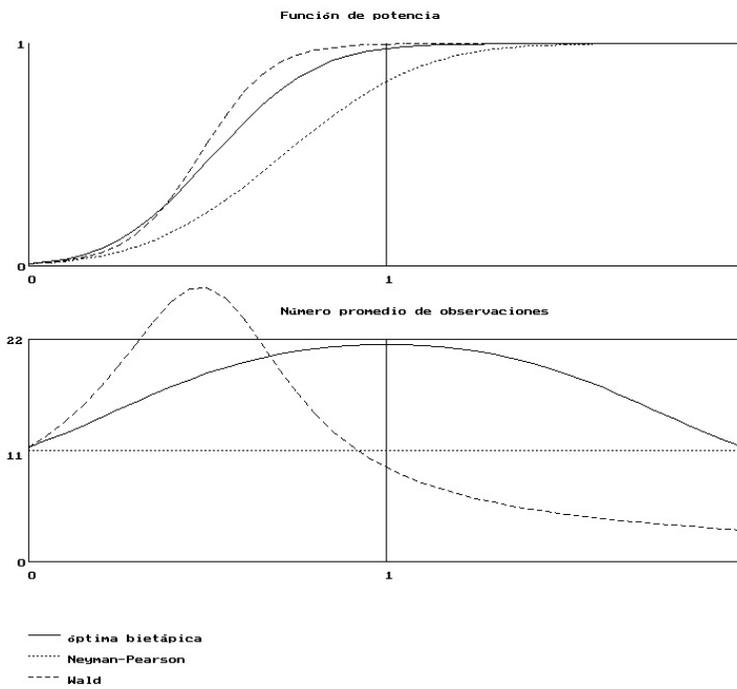
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - - - Wald



Prueba biométrica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=80$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=8$ $n_2=14$
 $\ln A=-1.59293$ $\ln B=10.39485$
 $\ln C=0.22314$
 $\alpha=0.0070$ $\beta=0.0314$
 duración med.(H0)= 10.763
 duración med.(H1)= 21.498

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=11$ $\alpha=0.0070$ $\beta=0.1956$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.46663$ $\ln B=4.96252$
 $\alpha=0.00697$ $\beta=0.00420$
 Duración med.(H0)=10.78721
 Duración med.(H1)= 9.83752

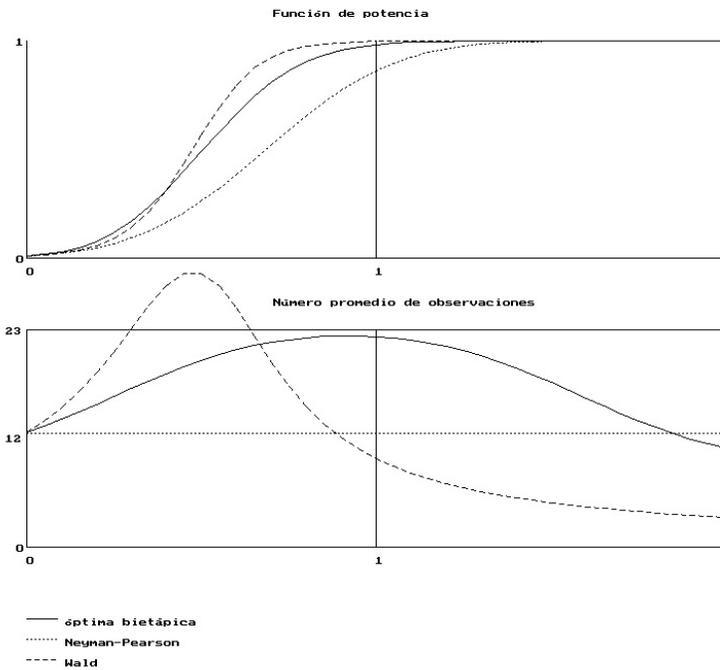


Prueba biométrica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=120$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=8$ $n_2=14$
 $\ln A=-1.99822$ $\ln B=9.99006$
 $\ln C=-0.18232$
 $\alpha=0.0091$ $\beta=0.0232$
 duración med.(H0)= 11.354
 duración med.(H1)= 21.523

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=11$ $\alpha=0.0091$ $\beta=0.1700$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.76686$ $\ln B=4.69887$
 $\alpha=0.00908$ $\beta=0.00310$
 Duración med.(H0)=11.34286
 Duración med.(H1)= 9.33282

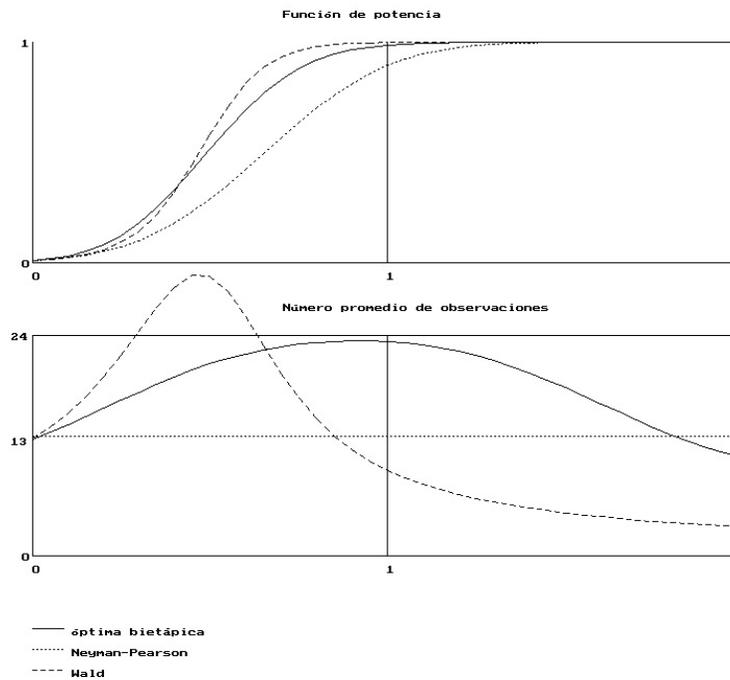
Graph window application



Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=150$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=9$ $n_2=14$
 $\ln A=-2.22088$ $\ln B= 9.77136$
 $\ln C=-0.40547$
 $\alpha=0.0090$ $\beta=0.0173$
 duración med.(H0)= 12.132
 duración med.(H1)= 22.272

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=12$ $\alpha=0.0090$ $\beta=0.1361$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-6.15335$ $\ln B= 4.70948$
 $\alpha=0.00899$ $\beta= 0.00211$
 Duración med.(H0)=12.11083
 Duración med.(H1)= 9.37317



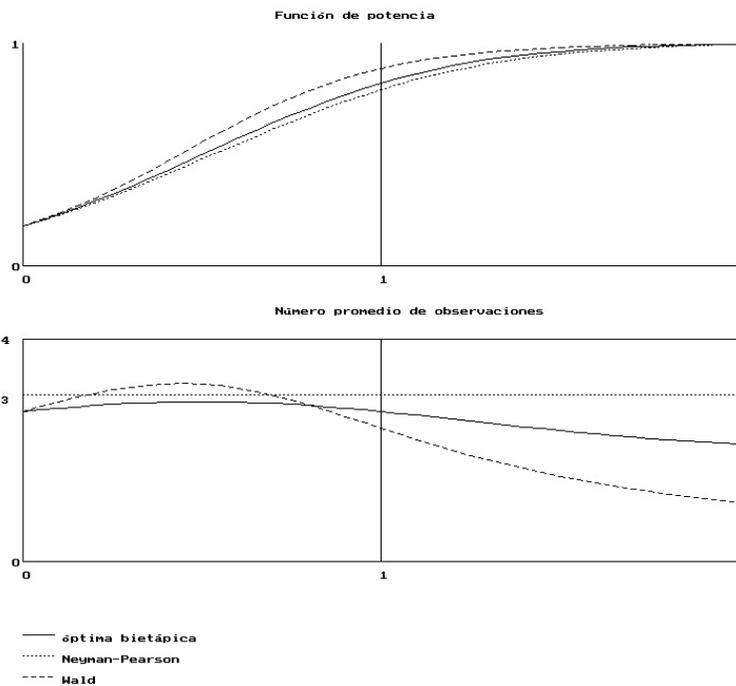
Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=200$
 $c_0=1$ $c_1=0$
 $n_1=9$ $n_2=15$
 $\ln A=-2.46609$ $\ln B= 9.94257$
 $\ln C=-0.69315$
 $\alpha=0.0092$ $\beta=0.0137$
 duración med.(H0)= 12.733
 duración med.(H1)= 23.326

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=13$ $\alpha=0.0092$ $\beta=0.1059$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-6.48804$ $\ln B= 4.68600$
 $\alpha=0.00921$ $\beta= 0.00151$
 Duración med.(H0)=12.76921
 Duración med.(H1)= 9.33831

6.2. Apéndice 2

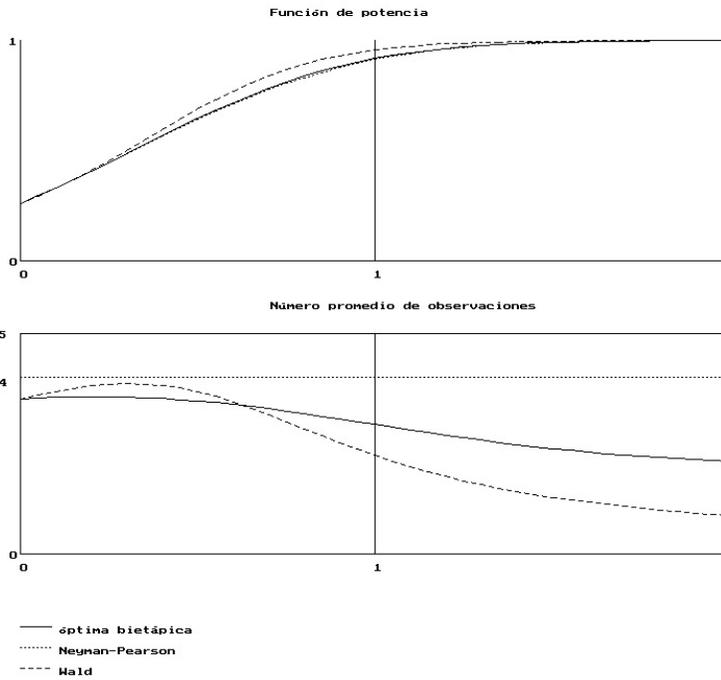
En este apéndice se muestran los resultados numéricos que se obtuvieron con el programa desarrollados en Pascal, con el valor del parámetro $c_1 = 1$ y $c_0 = 1$.



Prueba bietápica:
 $\pi_0=20$ $\pi_1=20$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=2$ $n_2=2$
 $\ln A = -0.81689$ $\ln B = 0.81689$
 $\ln C = 0.00000$
 $\alpha = 0.1792$ $\beta = 0.1792$
 duración med. (H0) = 2.698
 duración med. (H1) = 2.698

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=3$ $\alpha=0.1792$ $\beta=0.2080$

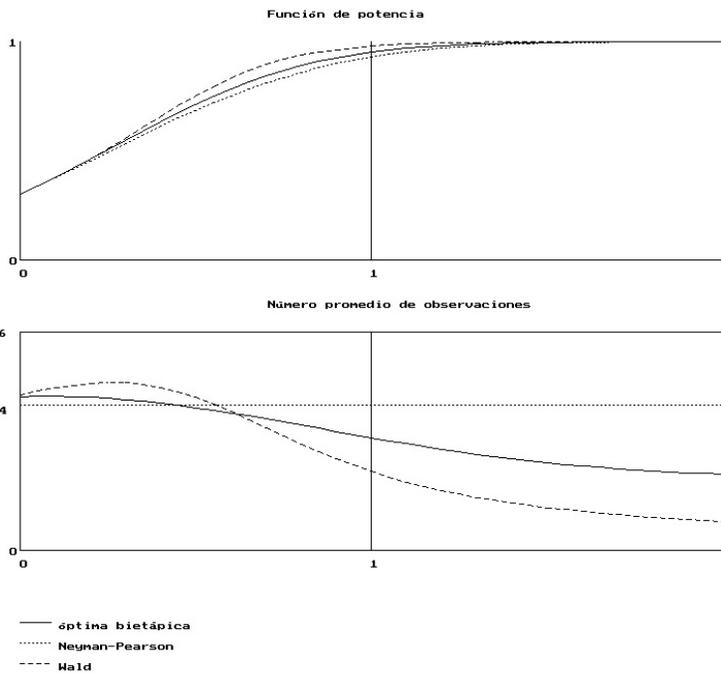
Prueba de Wald:
 $\ln A = -1.99274$ $\ln B = 1.60070$
 $\alpha = 0.17918$ $\beta = 0.11190$
 Duración med. (H0) = 2.69652
 Duración med. (H1) = 2.39722



Prueba bietápica:
 $\pi_0=20$ $\pi_1=40$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=2$ $n_2=3$
 $\ln A=-1.57247$ $\ln B= 0.44320$
 $\ln C=-0.69315$
 $\alpha=0.2618$ $\beta=0.0818$
 duración med. (H0)= 3.510
 duración med. (H1)= 2.937

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=4$ $\alpha=0.2618$ $\beta=0.0866$

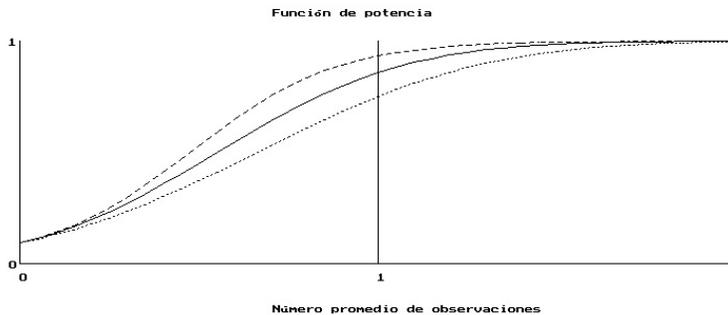
Prueba de Wald:
 $\ln A=-2.83910$ $\ln B= 1.29613$
 $\alpha=0.26178$ $\beta= 0.04317$
 Duración med. (H0)=3.51314
 Duración med. (H1)= 2.23523



Prueba bietápica:
 $\pi_0=20$ $\pi_1=60$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=2$ $n_2=4$
 $\ln A=-1.95247$ $\ln B= 0.22621$
 $\ln C=-1.09861$
 $\alpha=0.3021$ $\beta=0.0483$
 duración med. (H0)= 4.227
 duración med. (H1)= 3.095

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=4$ $\alpha=0.3021$ $\beta=0.0692$

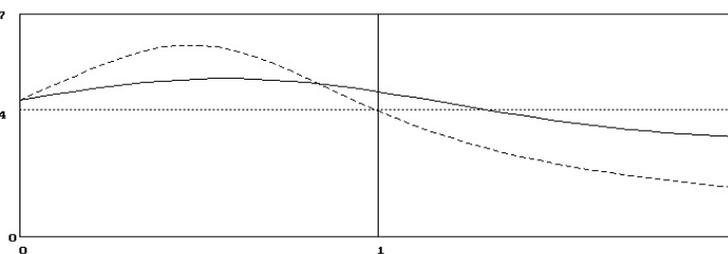
Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.57227$ $\ln B= 1.17727$
 $\alpha=0.30208$ $\beta= 0.01961$
 Duración med. (H0)=4.27486
 Duración med. (H1)= 2.16831



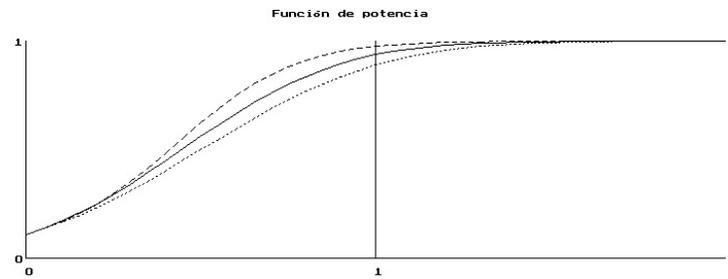
Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=30$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=3$ $n_2=4$
 $\ln A=-0.92769$ $\ln B= 1.37209$
 $\ln C= 0.28768$
 $\alpha=0.0926$ $\beta=0.1419$
 duración med.(H0)= 4.288
 duración med.(H1)= 4.560

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=4$ $\alpha=0.0926$ $\beta=0.2499$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-2.60599$ $\ln B= 2.31052$
 $\alpha=0.09256$ $\beta= 0.06700$
 Duración med.(H0)=4.30098
 Duración med.(H1)= 3.96227



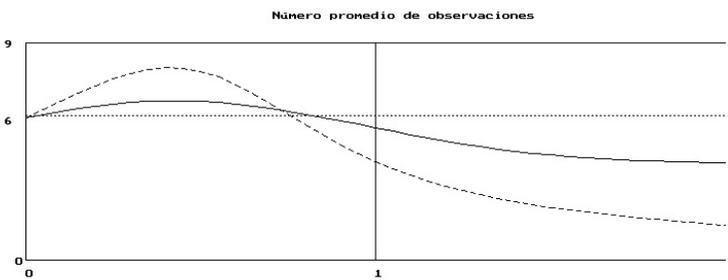
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - Wald



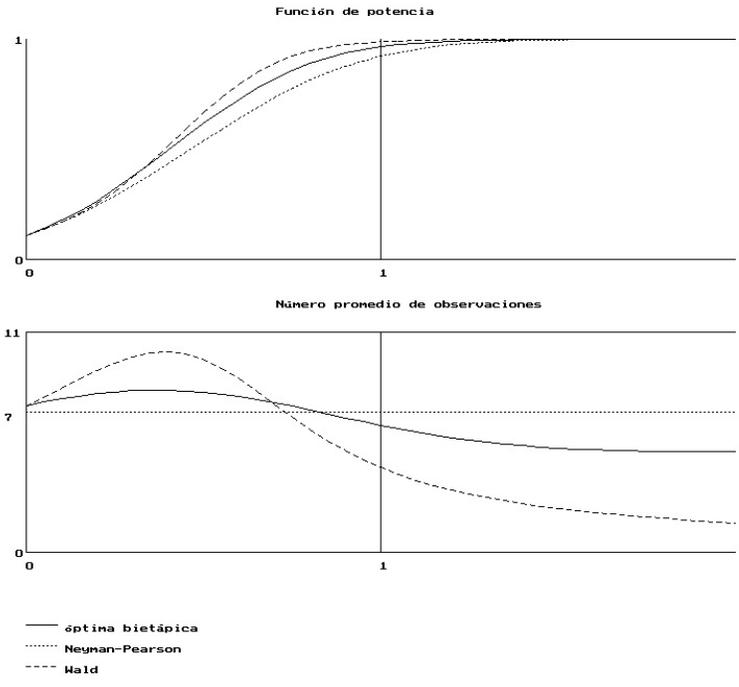
Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=60$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=4$ $n_2=5$
 $\ln A=-1.70258$ $\ln B= 1.11146$
 $\ln C=-0.40547$
 $\alpha=0.1100$ $\beta=0.0634$
 duración med.(H0)= 5.905
 duración med.(H1)= 5.482

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=6$ $\alpha=0.1100$ $\beta=0.1107$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.58519$ $\ln B= 2.18243$
 $\alpha=0.10998$ $\beta= 0.02468$
 Duración med.(H0)=5.90161
 Duración med.(H1)= 4.08015



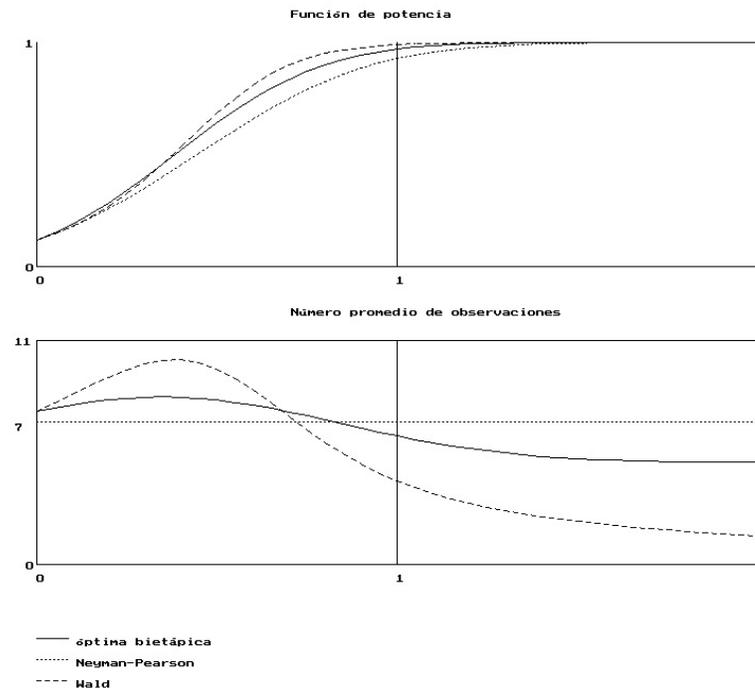
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - Wald



Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=100$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=5$ $n_2=6$
 $\ln A=-2.21657$ $\ln B= 0.92842$
 $\ln C=-0.91629$
 $\alpha=0.1104$ $\beta=0.0341$
 duracion med.(H0)= 7.322
 duracion med.(H1)= 6.342

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=7$ $\alpha=0.1104$ $\beta=0.0776$

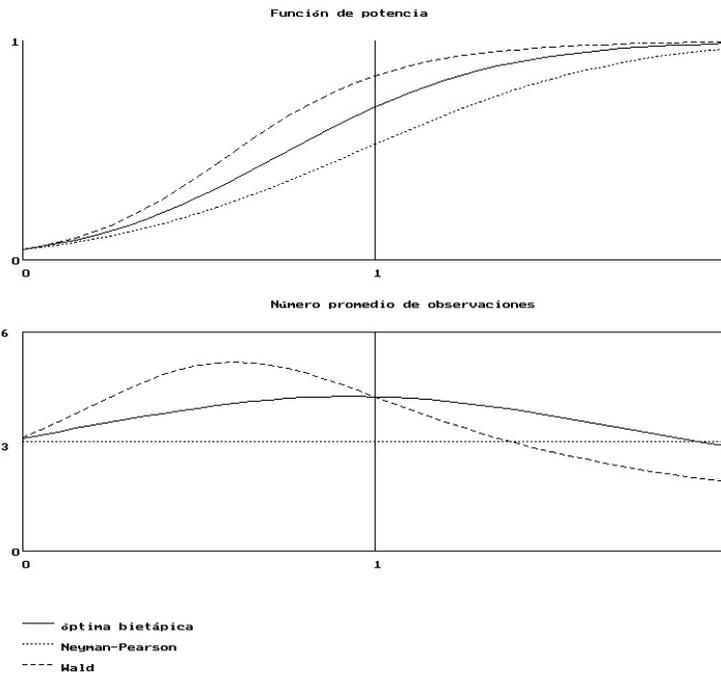
Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.39008$ $\ln B= 2.19290$
 $\alpha=0.11036$ $\beta= 0.01103$
 Duración med.(H0)=7.32670
 Duración med.(H1)= 4.24056



Prueba bietápica:
 $\pi_0=40$ $\pi_1=120$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=5$ $n_2=6$
 $\ln A=-2.41510$ $\ln B= 0.87550$
 $\ln C=-1.09861$
 $\alpha=0.1196$ $\beta=0.0292$
 duracion med.(H0)= 7.516
 duracion med.(H1)= 6.319

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=7$ $\alpha=0.1196$ $\beta=0.0710$

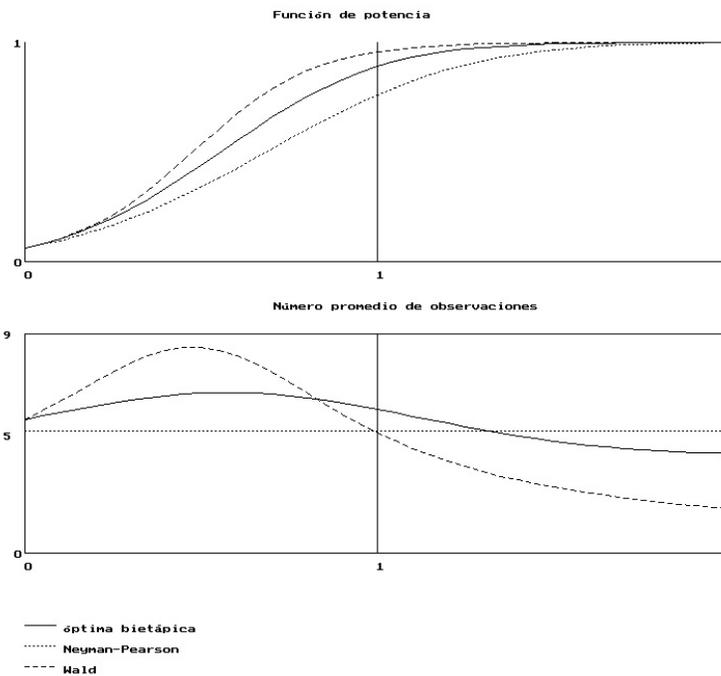
Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.54565$ $\ln B= 2.11450$
 $\alpha=0.11957$ $\beta= 0.00934$
 Duración med.(H0)=7.49768
 Duración med.(H1)= 4.10453



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=20$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=2$ $n_2=4$
 $\ln A=-0.22621$ $\ln B= 1.95247$
 $\ln C= 1.09861$
 $\alpha=0.0483$ $\beta=0.3021$
 duracion med. (H0)= 3.095
 duracion med. (H1)= 4.227

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=3$ $\alpha=0.0483$ $\beta=0.4719$

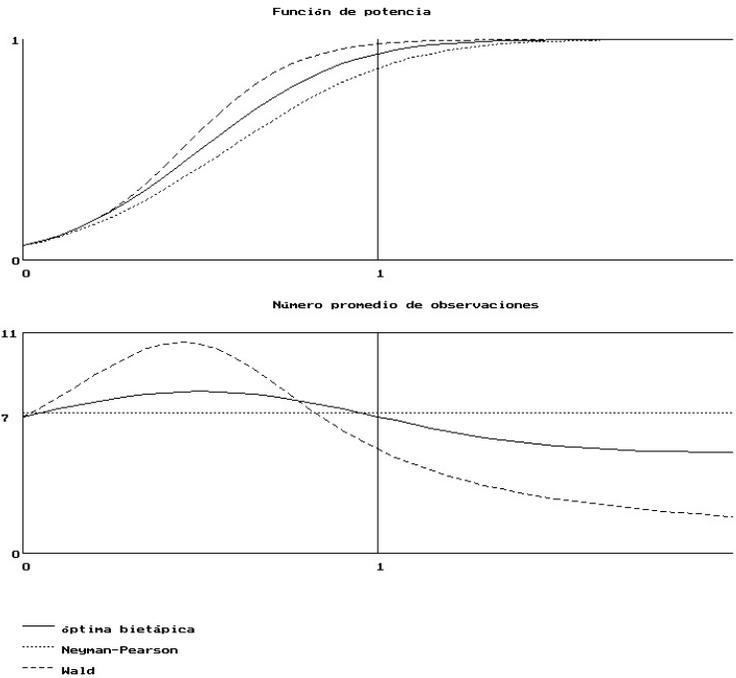
Prueba de Wald:
 $\ln A=-1.78289$ $\ln B= 2.85571$
 $\alpha=0.04831$ $\beta= 0.16003$
 Duración med. (H0)=3.11669
 Duración med. (H1)= 4.22681



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=40$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=4$ $n_2=5$
 $\ln A=-1.11146$ $\ln B= 1.70258$
 $\ln C= 0.40547$
 $\alpha=0.0634$ $\beta=0.1100$
 duracion med. (H0)= 5.482
 duracion med. (H1)= 5.905

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=5$ $\alpha=0.0634$ $\beta=0.2392$

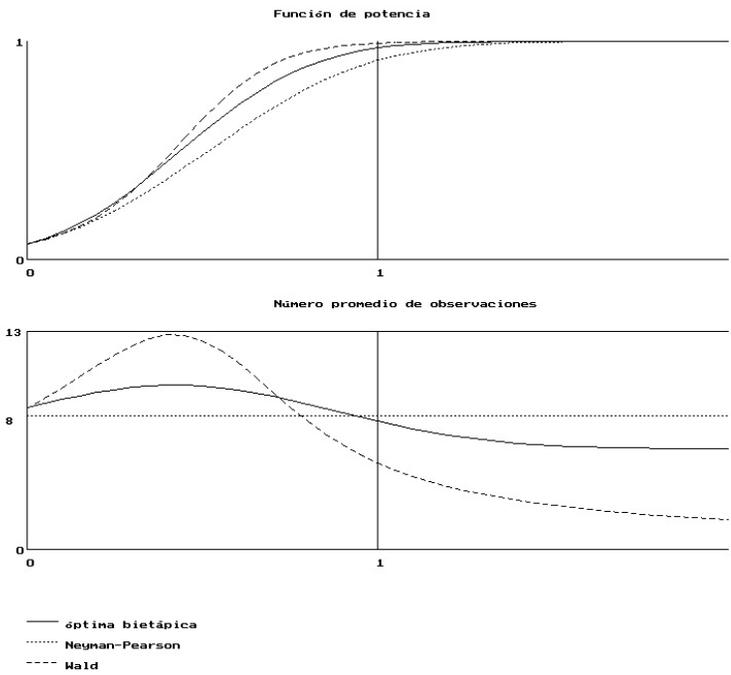
Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.10973$ $\ln B= 2.71621$
 $\alpha=0.06336$ $\beta= 0.04179$
 Duración med. (H0)=5.48018
 Duración med. (H1)= 4.94554



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=60$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=5$ $n_2=6$
 $\ln A=-1.55566$ $\ln B= 1.55566$
 $\ln C= 0.00000$
 $\alpha=0.0641$ $\beta=0.0641$
 duración med. (H0)= 6.809
 duración med. (H1)= 6.809

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=7$ $\alpha=0.0641$ $\beta=0.1304$

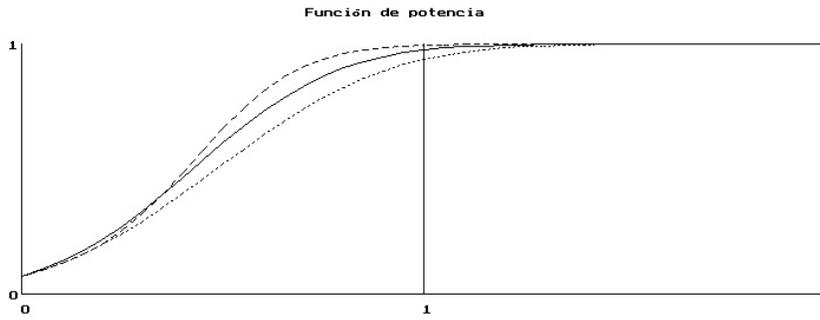
Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.82592$ $\ln B= 2.72688$
 $\alpha=0.06409$ $\beta= 0.02040$
 Duración med. (H0)=6.81154
 Duración med. (H1)= 5.18639



Prueba bietápica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=120$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=6$ $n_2=7$
 $\ln A=-2.28587$ $\ln B= 1.35433$
 $\ln C=-0.69315$
 $\alpha=0.0709$ $\beta=0.0305$
 duración med. (H0)= 8.433
 duración med. (H1)= 7.648

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=8$ $\alpha=0.0709$ $\beta=0.0870$

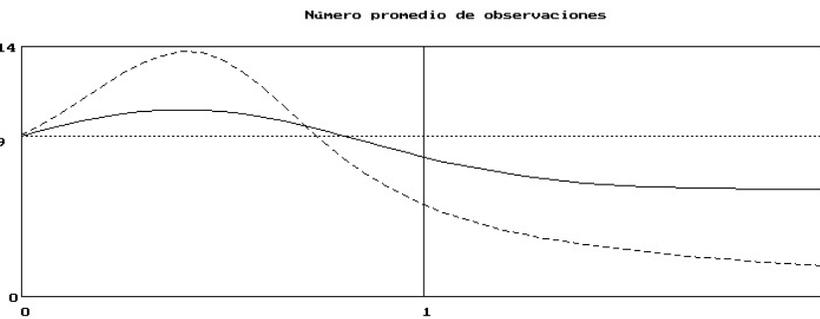
Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.72824$ $\ln B= 2.63791$
 $\alpha=0.07092$ $\beta= 0.00821$
 Duración med. (H0)=8.41096
 Duración med. (H1)= 5.15479



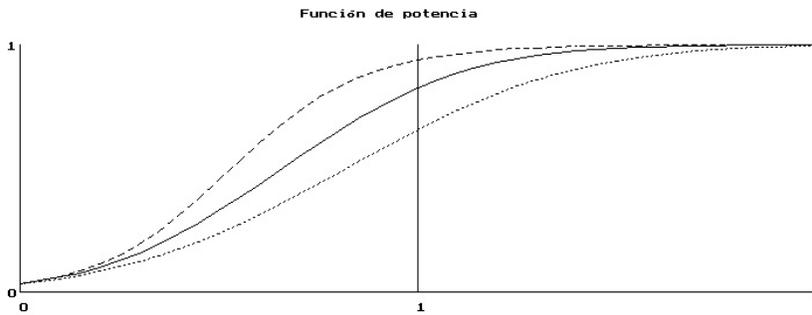
Prueba biométrica:
 $\pi_0=60$ $\pi_1=150$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=6$ $n_2=8$
 $\ln A=-2.47704$ $\ln B= 1.27591$
 $\ln C=-0.91629$
 $\alpha=0.0727$ $\beta=0.0241$
 duración med. (H0)= 9.000
 duración med. (H1)= 7.825

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=9$ $\alpha=0.0727$ $\beta=0.0613$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.06719$ $\ln B= 2.61570$
 $\alpha=0.07269$ $\beta= 0.00584$
 Duración med. (H0)=9.01743
 Duración med. (H1)= 5.14163



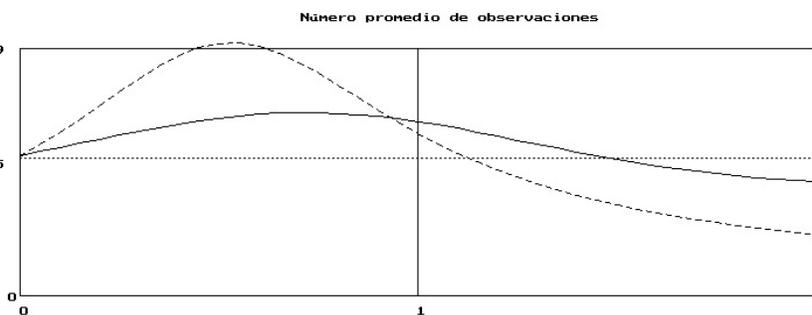
— óptima biométrica
 Neyman-Pearson
 - - - Wald



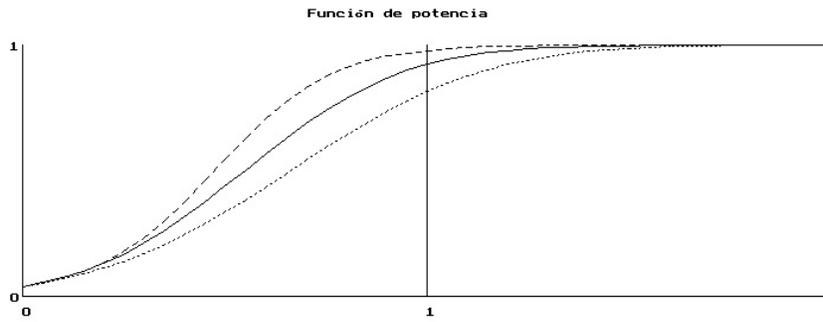
Prueba biométrica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=30$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=4$ $n_2=5$
 $\ln A=-0.57223$ $\ln B= 2.33877$
 $\ln C= 1.20397$
 $\alpha=0.0336$ $\beta=0.1742$
 duración med. (H0)= 5.113
 duración med. (H1)= 6.340

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=5$ $\alpha=0.0336$ $\beta=0.3426$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-2.75895$ $\ln B= 3.33094$
 $\alpha=0.03357$ $\beta= 0.06123$
 Duración med. (H0)=5.10844
 Duración med. (H1)= 5.91609



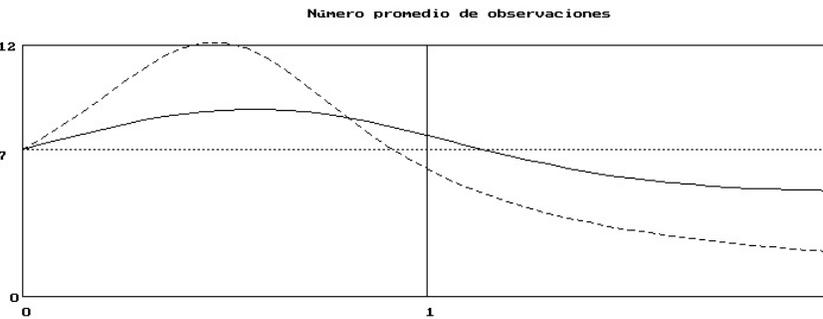
— óptima biométrica
 Neyman-Pearson
 - - - Wald



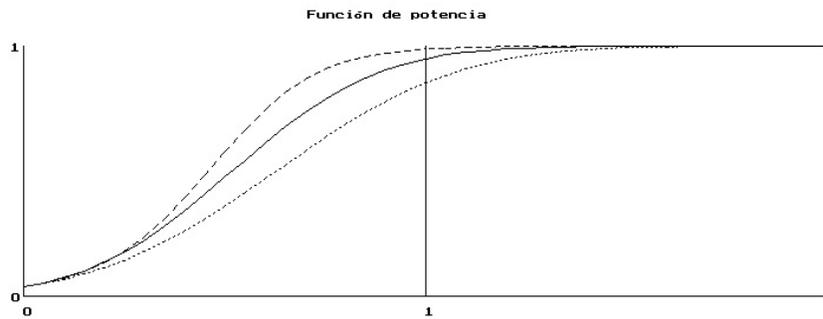
Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=60$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=5$ $n_2=7$
 $\ln A=-1.39804$ $\ln B= 2.08479$
 $\ln C= 0.51083$
 $\alpha=0.0400$ $\beta=0.0763$
 duración med.(H0)= 7.036
 duración med.(H1)= 7.700

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=7$ $\alpha=0.0400$ $\beta=0.1853$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.79672$ $\ln B= 3.19666$
 $\alpha=0.04002$ $\beta= 0.02155$
 Duración med.(H0)=7.03328
 Duración med.(H1)= 6.09196



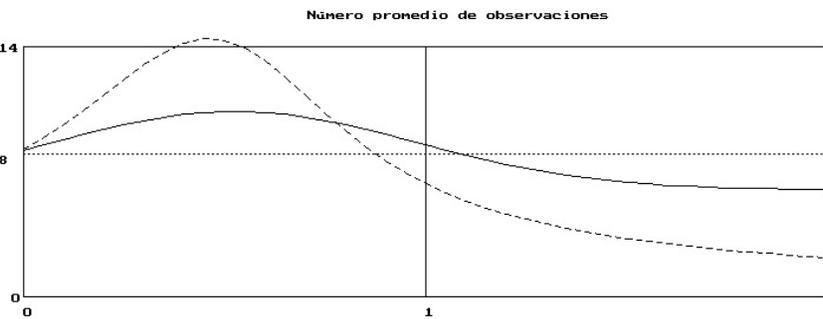
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - - - Wald



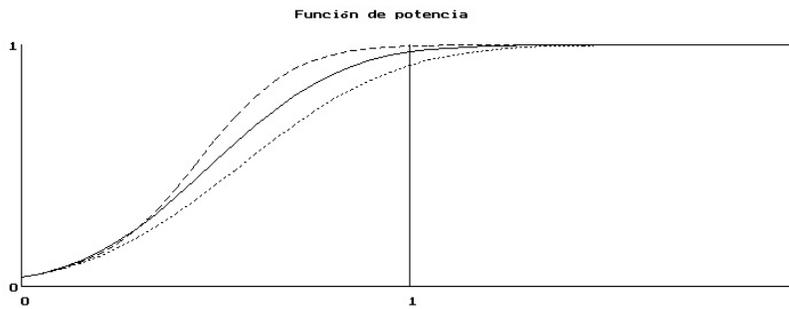
Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=80$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=6$ $n_2=8$
 $\ln A=-1.69497$ $\ln B= 1.98785$
 $\ln C= 0.22314$
 $\alpha=0.0380$ $\beta=0.0498$
 duración med.(H0)= 8.210
 duración med.(H1)= 8.497

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=8$ $\alpha=0.0380$ $\beta=0.1458$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.40484$ $\ln B= 3.25734$
 $\alpha=0.03804$ $\beta= 0.01175$
 Duración med.(H0)=8.22671
 Duración med.(H1)= 6.33458



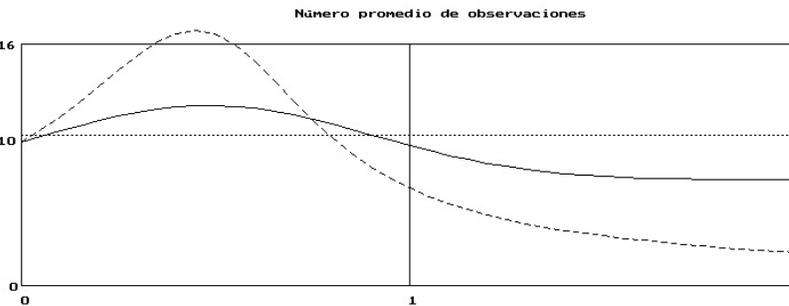
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - - - Wald



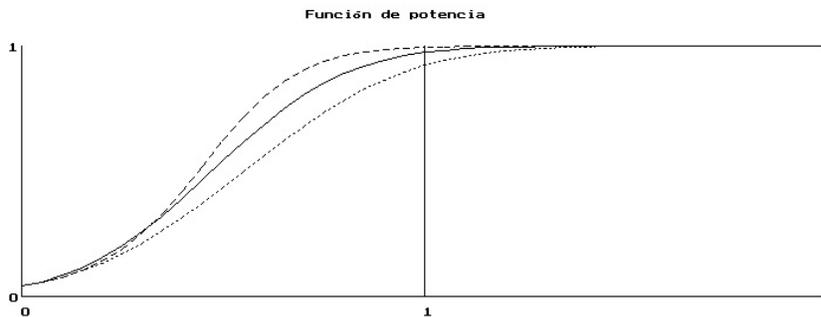
Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=120$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=7$ $n_2=9$
 $\ln A=-2.10984$ $\ln B= 1.87959$
 $\ln C=-0.18232$
 $\alpha=0.0372$ $\beta=0.0302$
 duracion med.(H0)= 9.508
 duracion med.(H1)= 9.278

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=10$ $\alpha=0.0372$ $\beta=0.0841$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.07263$ $\ln B= 3.28505$
 $\alpha=0.03721$ $\beta= 0.00603$
 Duración med.(H0)=9.52253
 Duración med.(H1)= 6.46925



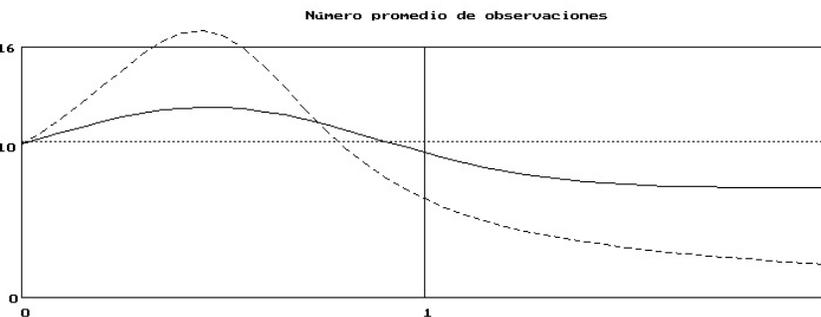
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - - - Wald



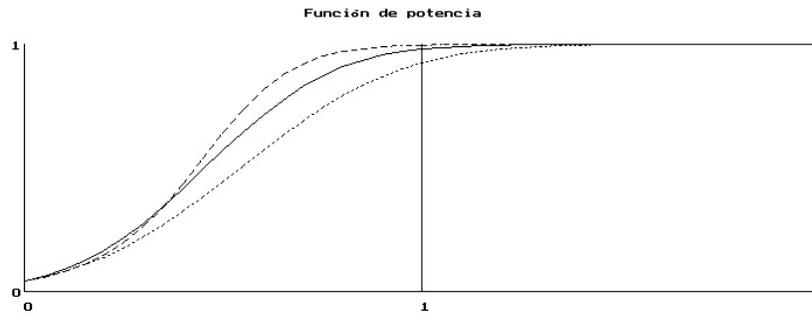
Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=150$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=7$ $n_2=9$
 $\ln A=-2.35517$ $\ln B= 1.84144$
 $\ln C=-0.40547$
 $\alpha=0.0407$ $\beta=0.0255$
 duracion med.(H0)= 9.798
 duracion med.(H1)= 9.267

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=10$ $\alpha=0.0407$ $\beta=0.0778$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.23561$ $\ln B= 3.19533$
 $\alpha=0.04074$ $\beta= 0.00511$
 Duración med.(H0)=9.78401
 Duración med.(H1)= 6.30455

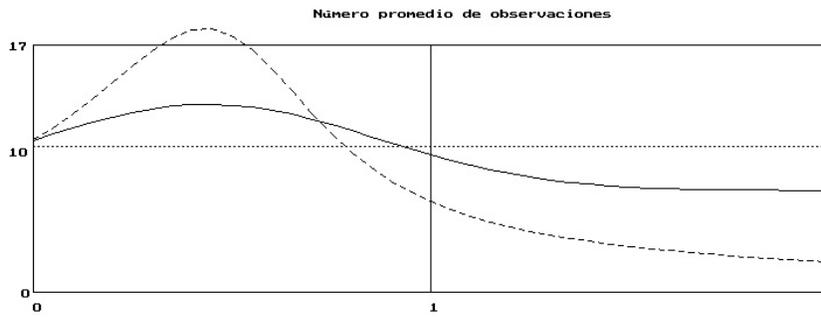


— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - - - Wald



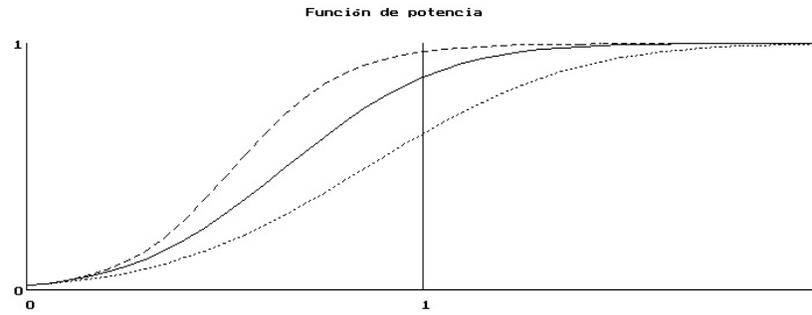
Prueba bietápica:
 $\pi_0=100$ $\pi_1=200$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=7$ $n_2=10$
 $\ln A=-2.61928$ $\ln B= 1.76198$
 $\ln C=-0.69315$
 $\alpha=0.0428$ $\beta=0.0193$
 duracion med.(H0)= 10.463
 duracion med.(H1)= 9.453

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=10$ $\alpha=0.0428$ $\beta=0.0744$



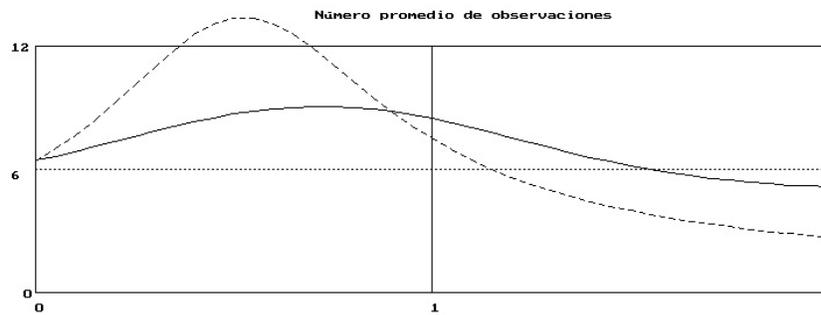
Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.61063$ $\ln B= 3.14661$
 $\alpha=0.04285$ $\beta= 0.00350$
 Duración med.(H0)=10.47005
 Duración med.(H1)= 6.23188

— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - - - Wald



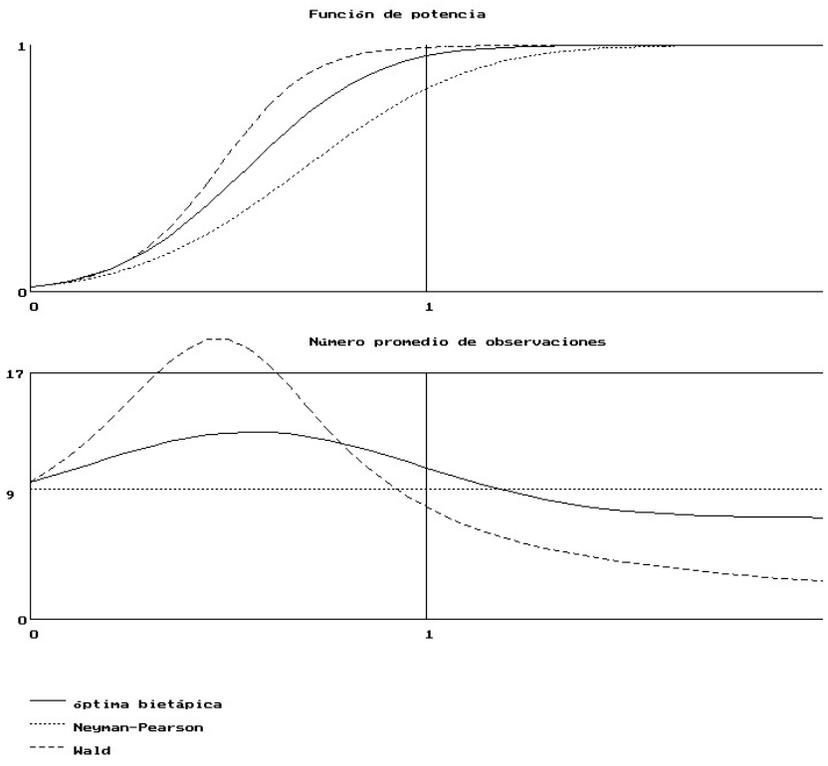
Prueba bietápica:
 $\pi_0=200$ $\pi_1=40$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=5$ $n_2=7$
 $\ln A=-0.71013$ $\ln B= 2.89951$
 $\ln C= 1.60944$
 $\alpha=0.0176$ $\beta=0.1371$
 duracion med.(H0)= 6.427
 duracion med.(H1)= 8.467

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=6$ $\alpha=0.0176$ $\beta=0.3658$



Prueba de Wald:
 $\ln A=-3.34136$ $\ln B= 4.00555$
 $\alpha=0.01758$ $\beta= 0.03477$
 Duración med.(H0)=6.42428
 Duración med.(H1)= 7.50024

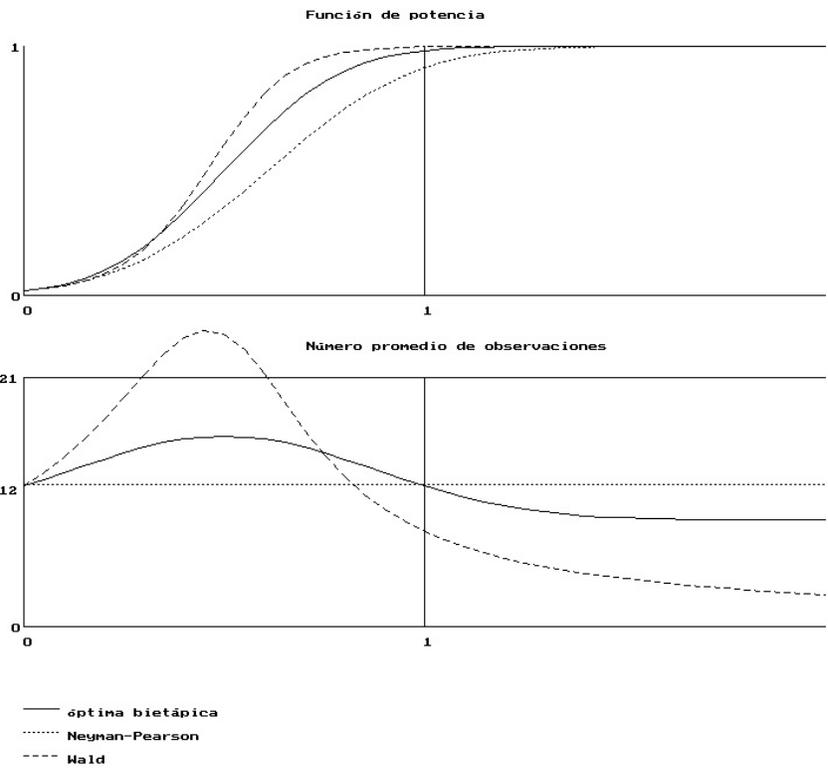
— óptima bietápica
 Neyman-Pearson
 - - - - - Wald



Prueba bietápica:
 $\pi_0=200$ $\pi_1=100$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=7$ $n_2=10$
 $\ln A=-1.76198$ $\ln B= 2.61928$
 $\ln C= 0.69315$
 $\alpha=0.0193$ $\beta=0.0428$
 duracion med.(H0)= 9.453
 duracion med.(H1)= 10.463

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=9$ $\alpha=0.0193$ $\beta=0.1758$

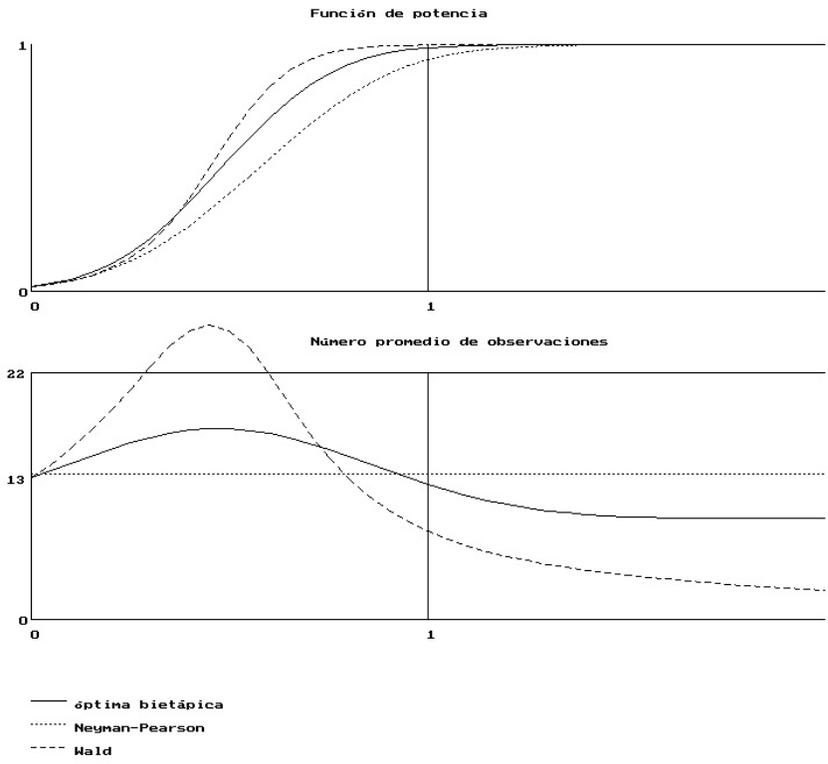
Prueba de Wald:
 $\ln A=-4.90037$ $\ln B= 3.94039$
 $\alpha=0.01930$ $\beta= 0.00730$
 Duración med.(H0)=9.45941
 Duración med.(H1)= 7.75169



Prueba bietápica:
 $\pi_0=200$ $\pi_1=200$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=9$ $n_2=12$
 $\ln A=-2.45947$ $\ln B= 2.45947$
 $\ln C= 0.00000$
 $\alpha=0.0177$ $\beta=0.0177$
 duracion med.(H0)= 11.856
 duracion med.(H1)= 11.856

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=12$ $\alpha=0.0177$ $\beta=0.0868$

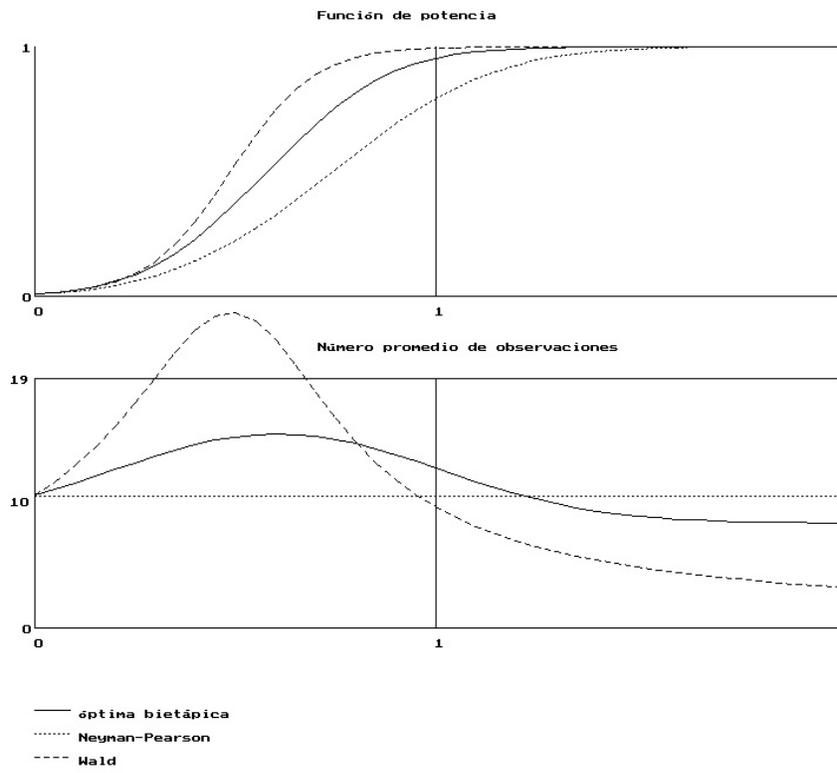
Prueba de Wald:
 $\ln A=-6.11644$ $\ln B= 4.03140$
 $\alpha=0.01771$ $\beta= 0.00217$
 Duración med.(H0)=11.87238
 Duración med.(H1)= 8.01882



Prueba bietápica:
 $\pi_0=200$ $\pi_1=300$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=9$ $n_2=13$
 $\ln A=-2.85051$ $\ln B= 2.37977$
 $\ln C=-0.40547$
 $\alpha=0.0194$ $\beta=0.0125$
 duracion med.(H0)= 12.644
 duracion med.(H1)= 12.025

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=13$ $\alpha=0.0194$ $\beta=0.0620$

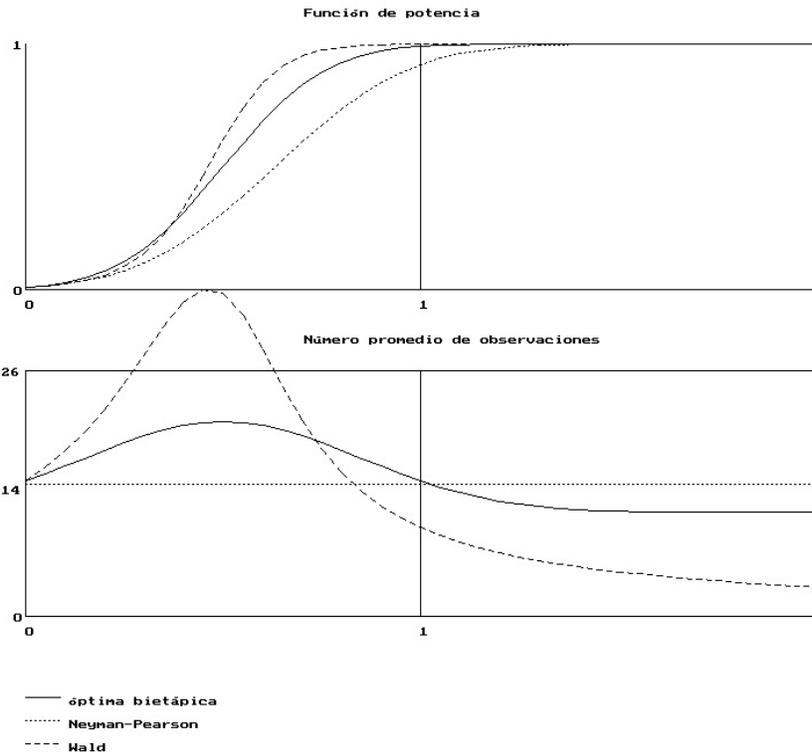
Prueba de Wald:
 $\ln A=-6.53351$ $\ln B= 3.94334$
 $\alpha=0.01936$ $\beta= 0.00143$
 Duración med.(H0)=12.66023
 Duración med.(H1)= 7.85681



Prueba bietápica:
 $\pi_0=400$ $\pi_1=100$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=8$ $n_2=11$
 $\ln A=-1.62549$ $\ln B= 3.30318$
 $\ln C= 1.38629$
 $\alpha=0.0095$ $\beta=0.0449$
 duracion med.(H0)= 10.152
 duracion med.(H1)= 12.173

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=10$ $\alpha=0.0095$ $\beta=0.2074$

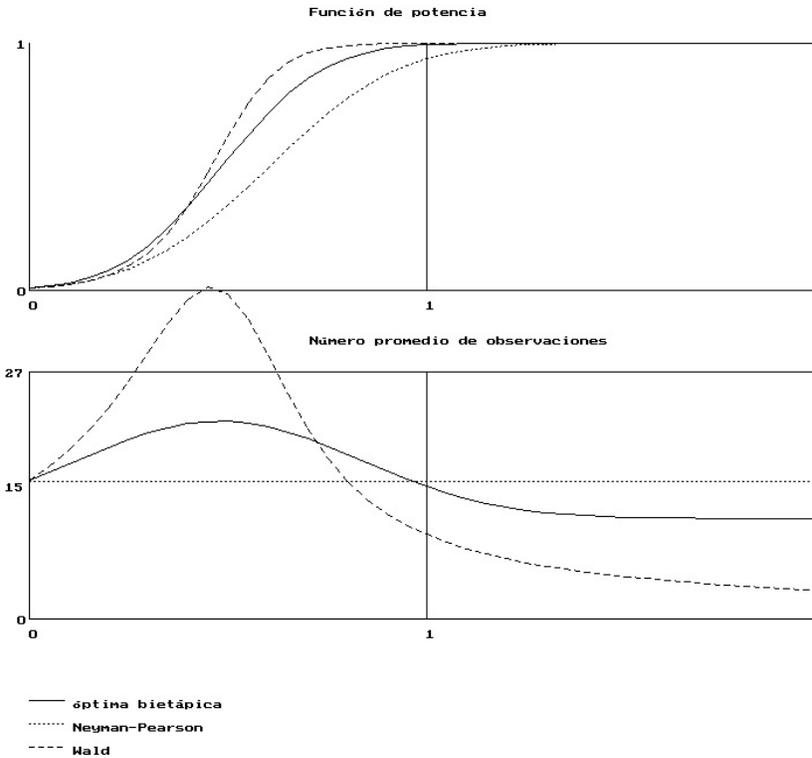
Prueba de Wald:
 $\ln A=-5.16467$ $\ln B= 4.65455$
 $\alpha=0.00946$ $\beta= 0.00566$
 Duración med.(H0)=10.14261
 Duración med.(H1)= 9.19794



Prueba bietápica:
 $\pi_0=400$ $\pi_1=400$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=11$ $n_2=15$
 $\ln A=-3.02148$ $\ln B= 3.02148$
 $\ln C= 0.00000$
 $\alpha=0.0091$ $\beta=0.0091$
 duracion med.(H0)= 14.335
 duracion med.(H1)= 14.335

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=14$ $\alpha=0.0091$ $\beta=0.0839$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-7.27142$ $\ln B= 4.70042$
 $\alpha=0.00909$ $\beta= 0.00069$
 Duración med.(H0)=14.32402
 Duración med.(H1)= 9.38435



Prueba bietápica:
 $\pi_0=400$ $\pi_1=600$
 $c_0=1$ $c_1=1$
 $n_1=11$ $n_2=16$
 $\ln A=-3.41203$ $\ln B= 2.95843$
 $\ln C=-0.40547$
 $\alpha=0.0098$ $\beta=0.0065$
 duracion med.(H0)= 15.146
 duracion med.(H1)= 14.490

Prueba Neyman-Pearson:
 $n=15$ $\alpha=0.0098$ $\beta=0.0618$

Prueba de Wald:
 $\ln A=-7.68252$ $\ln B= 4.62268$
 $\alpha=0.00982$ $\beta= 0.00046$
 Duración med.(H0)=15.12294
 Duración med.(H1)= 9.23413

6.3. Apéndice 3

En este apéndice mostramos el programa desarrollado en Pascal que lleva a cabo las simulaciones numéricas.

```

program main;
(*
program calculates the optimal stage durations for 2-stage sequential test
for the gaussian AR(1) process  $X_n - a = \gamma(X_{n-1} - a) + \epsilon_n$ ,
 $H_0: a=0$  vs.  $H_1: a=\theta$ ,  $\epsilon_n$  standard normal i.i.d.m  $\gamma$  known.
it is based on  $Y_n = X_n - \gamma X_{n-1}$  that has a gaussian distribution with
unitary variance and mean=0 under  $H_0$  and  $a(1-\gamma)=\theta$  under  $H_1$ .
The criterion of minimization is  $E_{\theta_0}\{\tau\} + cE_{\theta_1}\{\tau\}$ 
*)
uses
  graph, distr;

const np=20; theta=1; lambda0=20; lambda1=20; eps=0.001; c=1;
type TPart=array[-np..np] of real;
  TPartPtr=^TPart;
  TValFun=record l:TPart; rho:Tpart; end;

var

  w:real; rho0,rho1:TValFun;
  i:integer;

function phi(x:real;m,sigma:real):real;
var s,s0:real;
begin

```

```
s:=(x-m)/sigma;
phi:=0.398942280401432677939946059934382*exp(-0.5*s*s)/sigma;
end;
```

```
function invnorm(x:real):real;
var s,y,yn:real;
begin
yn:=0;
repeat
y:=yn;
yn:=y+(x-Normale(y,0,1))/(phi(y,0,1));
until (abs(y-yn)<0.000001*abs(yn) ) or (yn=0);
invnorm:=y
end;
```

```
function phi1(x:real):real;
var s,s0:real;
begin
phi1:=-0.398942280401432677939946059934382*x*exp(-0.5*x*x);
end;
```

```
function pow(x:real;n:real):real;
var s:real;
begin
if n=int(n) then
begin
if x=0 then
s:=0 else
s:=exp(n*ln(abs(x)));
if x<0 then
if int(n/2)=n/2 then pow:=s
```

```

    else pow:=-s
  else pow:=s;
end
else pow:=exp(n*ln(x));
end;

```

```

function lowPart(lA,lz,t,theta:real):real;
var s:real;
begin
  if t=0 then
    if lA<lz then lowPart:=0 else lowPart:=exp(lz)
  else
    begin
      s:=exp(lz)*Normale((lA-lz)/(theta*sqrt(t))-theta*sqrt(t)/2,0,1);
      LowPart:=s
    end
  end;
end;

```

```

function upPart(lB,lz,t,theta:real):real;
var s:real;
begin
  if t=0 then
    if lB<lz then upPart:=1 else upPart:=0
  else
    begin
      s:=1-Normale((lB-lz)/(theta*sqrt(t))+theta*sqrt(t)/2,0,1);
      upPart:=s;
    end
  end;
end;

```

```

function u1(l,t,theta:real):real;

```

```

begin
u1:=t*(1+c*exp(l))+lambda1*lowPart(w,l,t,theta)+lambda0*upPart(w,l,t,theta)
end;
function u1alpha(l,t,theta:real):real;
var s:real;
begin
if t=0 then
  if w<l then u1alpha:=1 else u1alpha:=0
else
begin
s:=uPPart(w,l,t,theta);
u1alpha:=s
end
end;
function u1beta(l,t,theta:real):real;
begin
if t=0 then
  if w<l then u1beta:=0 else u1beta:=1
else
u1beta:=lowPart(w,l,t,theta);
end;
function u1nu(l,t:real):real;
begin
u1nu:=t*(1+c);
end;

function u0(val:TValFun;l,t,theta:real):real;
var s,d0,d1,den:real;i:integer;
begin
s:=t*(1+c*exp(l))+lambda1*lowPart(val.l[-np],l,t,theta)+
lambda0*upPart(val.l[np],l,t,theta);

```

```

if val.l[-np]<val.l[np] then

for i:=-np to np-1 do
  begin
    d0:=(val.l[i]-1)/theta+theta*t/2;
    d1:=(val.l[i+1]-1)/theta+theta*t/2;
    s:=s+(val.rho[i]*exp(-d0*d0/(2*t))+val.rho[i+1]*exp(-d1*d1/(2*t)) )
      *(val.l[i+1]-val.l[i])/theta/(2*sqrt(2*pi*t ))
    end;
    u0:=s;
end;

function u0alpha(val:TValFun;l,t,theta:real):real;
var s,d0,d1,den:real;i:integer;
begin
s:=upPart(val.l[np],l,t,theta);
if val.l[-np]<val.l[np] then

for i:=-np to np-1 do
  begin
    d0:=(val.l[i]-1)/theta+theta*t/2;
    d1:=(val.l[i+1]-1)/theta+theta*t/2;
    s:=s+(val.rho[i]*exp(-d0*d0/(2*t))+val.rho[i+1]*exp(-d1*d1/(2*t)) )
      *(val.l[i+1]-val.l[i])/theta/(2*sqrt(2*pi*t ))
    end;
    u0alpha:=s;
end;

function u0beta(val:TValFun;l,t,theta:real):real;
var s,d0,d1,den:real;i:integer;
begin
s:=lowPart(val.l[-np],l,t,theta);

```

```

if val.l[-np]<val.l[np] then

for i:=-np to np-1 do
  begin
    d0:=(val.l[i]-l)/theta+theta*t/2;
    d1:=(val.l[i+1]-l)/theta+theta*t/2;
    s:=s+(val.rho[i]*exp(-d0*d0/(2*t))+val.rho[i+1]*exp(-d1*d1/(2*t)) )
      *(val.l[i+1]-val.l[i])/theta/(2*sqrt(2*pi*t ))
    end;
    u0beta:=s;
end;
function u0nu(val:TValFun;l,t,theta:real):real;
var s,d0,d1,den:real;i:integer;
begin
s:=t*(1+c*exp(1));
if val.l[-np]<val.l[np] then

for i:=-np to np-1 do
  begin
    d0:=(val.l[i]-l)/theta+theta*t/2;
    d1:=(val.l[i+1]-l)/theta+theta*t/2;
    s:=s+(val.rho[i]*exp(-d0*d0/(2*t))+val.rho[i+1]*exp(-d1*d1/(2*t)) )
      *(val.l[i+1]-val.l[i])/theta/(2*sqrt(2*pi*t ))
    end;
    u0nu:=s;
end;

procedure intcont(t2:real;var rho1:TValFun;theta:real);
var l,l0,l1:real;
begin
l:=w;

```

```

if u1(l,t2,theta)>=lambda0 then
  {intervalo de continuacion es nulo}
  begin
    for i:=-np to np do
      begin rho1.l[i]:=w; rho1.rho[i]:=lambda0 end
    end
else
  begin
    (*Inicio del bloque principal. Buscamos interseccion *)
    {biseccion por abajo de w
     empezamos con intervalo [-\infty,w]}
    l1:=w;l0:=0;
    repeat
      l0:=l0-1
    until u1(l0,t2,theta)>lambda1*exp(l0);
    repeat
      l:=(l0+l1)/2;
      if u1(l,t2,theta)<lambda1*exp(l) then
        begin
          l1:=l
        end
      else
        begin
          l0:=l
        end;
      { writeln(u1(l,t2),' ',lambda1*exp(l))
    }
    until abs(l1-l0)<eps*abs(l0);
    {se tiene determinado el extremo izquierdo del intervalo de continuacion}
    rho1.l[-np]:=l;rho1.rho[-np]:=lambda1*exp(rho1.l[-np]);
  {biseccion por arriba de w

```

```

    empezamos con intervalo [w,\infty]}
l0:=w;l1:=0;
repeat
l1:=l1+1
until u1(l1,t2,theta)>lambda0;
repeat
l:=(l0+l1)/2;
if u1(l,t2,theta)<lambda0 then
begin
l0:=l
end
else
begin
l1:=l
end;
{ writeln(u1(l,t2),' ',lambda0)
}
until abs(l1-l0)<eps*abs(l0);
{se tiene determinado el extremo derecho del intervalo de continuacion}
rho1.l[np]:=l;rho1.rho[np]:=lambda0;
for i:=-np+1 to np-1
do begin
rho1.l[i]:=rho1.l[-np]+(i+np)*(rho1.l[np]-rho1.l[-np])/(2*np);
rho1.rho[i]:=u1(rho1.l[i],t2,theta);
{
writeln(exp(rho1.l[i]),' ',rho1.rho[i]) }
end;
{se tiene calculado los puntos de particion
del intervalo de continuacion y los valor de la funcion
en los puntos}
{ writeln(exp(rho1.l[np]),' ',rho1.rho[np]) }
end;

```

```
end;
function betaWald(alpha,t:real):real;
function wald(alpha,beta:real):real;
begin
wald:=alpha*ln(alpha/(1-beta))+(1-alpha)*ln((1-alpha)/beta);
end;
var s,f,l,l0,l1:real;
begin
if t=0 then begin betaWald:=1-alpha; end
else
begin
s:=1-alpha;
repeat
s:=s/2;f:=wald(alpha,s);
until f>t/2;
l0:=s;l1:=1-alpha;
repeat
l:=(l0+l1)/2;
if wald(alpha,l)>t/2 then
begin
l0:=l
end
else
begin
l1:=l
end;
until abs(l1-l0)<eps*abs(l0);
betaWald:=l0;
end
end
```

```

end;

function Lag(t2:real;var rho1:TValFun;var t1:real;theta:real):real;
var l,l0,l1,x0,x1,x2,x3,f0,f1,f2,f3,v0,v1:real;
begin
intcont(t2,rho1,theta);
  {determinamos los valores de la funcion rho en puntos de
  particion del intervalo de continuacion}
  {ahora podemos calcular la nueva funcion u0}

  begin
    t1:=t2/2;
    v0:=u0(rho1,0,t1,theta);
    repeat
      t1:=t1*2;v1:=u0(rho1,0,t1,theta)
    until v1>v0;
    x3:=t1;f3:=v1;
    t1:=t2/2;v0:=u0(rho1,0,t1,theta);
    repeat
      t1:=t1/2;v1:=u0(rho1,0,t1,theta)
    until v1>v0;
    x0:=t1;f0:=v1;

    {seccion dorada para encontrar minimo}
    x1:=x0+0.382*(x3-x0);f1:=u0(rho1,0,x1,theta);
    x2:=x0+0.618*(x3-x0);f2:=u0(rho1,0,x2,theta);

    repeat
      if f1<f2 then
        begin

```

```

        x3:=x2;f3:=f2;x2:=x1;f2:=f1;
        x1:=x0+0.382*(x3-x0); f1:=u0(rho1,0,x1,theta)
    end    else
    begin
        x0:=x1;f0:=f1;x1:=x2;f1:=f2;
        x2:=x0+0.618*(x3-x0); f2:=u0(rho1,0,x2,theta)
    end
until abs(x3-x0)<=eps*abs(x1);
t1:=x0;
Lag:=u0(rho1,0,t1,theta);
end;
end;
function fpotencia(A,B,w,t1,t2,theta:real):real;
var s,tmp,tmp1,y,y1:real;i:integer;
begin
s:=1-Normale((B+t1/2-theta*t1)/sqrt(t1),0,1);
for i:=-np to np-1 do
    begin
        y:=A+(i+np)*(B-A)/2/np;
        y1:=A+(i+1+np)*(B-A)/2/np;
        tmp:=y+t1/2-theta*t1;
        tmp1:=y1+t1/2-theta*t1;
        s:=s+((1-Normale((w-y+t2/2-theta*t2)/sqrt(t2),0,1))
            *exp(-tmp*tmp/2/t1)+
            (1-Normale((w-y1+t2/2-theta*t2)/sqrt(t2),0,1))
            *exp(-tmp1*tmp1/2/t1))/2*(B-A)/2/np/sqrt(2*pi*t1);
    end;
fpotencia:=s
end;
function ASNfunc(A,B,w,t1,t2,theta:real):real;
var s,tmp,tmp1,y,y1:real;i:integer;

```

```

begin
s:=t1+t2*
(Normale((B+t1/2-theta*t1)/sqrt(t1),0,1)
-Normale((A+t1/2-theta*t1)/sqrt(t1),0,1));
ASNfunc:=s
end;

var l0,l1,l,t1,t2,v0,v1,x0,x1,x2,x3,f0,f1,f2,f3:real;
  grDriver: Integer;
  grMode: Integer;
  ErrCode: Integer;
  MX,MY:integer;
  rhoalpha,rhobeta,rhonu:TValFun; alpha,beta,nu:real;
  k,j,n1,n2, imin,jmin:integer;tmp,fmin,fminInit,thetac,thetamax:real;
  thetapt,fpot,fpot1,fASN,OC,Etau:TPart;
  MaxScreenX:real;MaxScreenY:real;
  ImgSizeX, ImgSizeY,LeftMargin,TopMargin:integer;
  ASN,cuant:real;A,B:real;betaSPRT:real;  st,outst:string;
begin
w:=ln(lambda0/lambda1);
t2:=ln(lambda0)+ln(lambda1);
v0:=Lag(t2,rho1,t1,theta);
  repeat
    t2:=t2*2;v1:=Lag(t2,rho1,t1,theta)
  until v1>v0;
x3:=t2;f3:=v1;
t2:=1;v0:=Lag(t2,rho1,t1,theta);
  repeat
    t2:=t2/2;v1:=Lag(t2,rho1,t1,theta)
  until v1>v0;
x0:=t2;f0:=v1;

```

```

{seccion dorada para encontrar minimo}
x1:=x0+0.382*(x3-x0);f1:=Lag(x1,rho1,t1,theta);
x2:=x0+0.618*(x3-x0);f2:=Lag(x2,rho1,t1,theta);

repeat
if f1<f2 then
begin
x3:=x2;f3:=f2;x2:=x1;f2:=f1;
x1:=x0+0.382*(x3-x0); f1:=Lag(x1,rho1,t1,theta)
end else
begin
x0:=x1;f0:=f1;x1:=x2;f1:=f2;
x2:=x0+0.618*(x3-x0); f2:=Lag(x2,rho1,t1,theta)
end
until abs(x3-x0)<=eps*abs(x1);
t2:=x0;

n1:=trunc(t1); n2:=trunc(t2); fmin:=lambda0;
if lambda1>lambda0 then fmin:=lambda1;
fminInit:=fmin;
for i:=n1-1 to n1+2 do
for j:=n2-1 to n2+2 do
begin
if (i>0) and (j>0) then
begin
for k:=-np to np do
begin
rho0.l[k]:=rho1.l[k];
rho0.rho[k]:=u1(rho1.l[k],j,theta);
end;

```

```

    tmp:=u0(rho0,0,i,theta);{writeln(tmp,' ',i,' ',j);}
  if tmp<fmin then
    begin
      fmin:=tmp;
      imin:=i; jmin:=j;
    end
  end
end;
n1:=imin;n2:=jmin;
writeln('t1=',t1:8:3,' t2=',t2:8:3,' f=',u0(rho1,0,t1,theta):8:5);
writeln('n1=',n1:8,' n2=',n2:8,' f=',fmin:8:5);
intcont(n2,rho1,theta);
for i:=-np to np do
  begin
    rhonu.l[i]:=rho1.l[i];
    rhonu.rho[i]:=u1nu(rho1.l[i],jmin);
    rhoalpha.l[i]:=rho1.l[i];
    rhoalpha.rho[i]:=u1alpha(rho1.l[i],n2,theta);
    rhobeta.l[i]:=rho1.l[i];
    rhobeta.rho[i]:=u1beta(rho1.l[i],n2,theta);
  end;
ASN:=ASNfunc(rho0.l[-np],rho0.l[np],w,n1,n2,0);
alpha:=u0alpha(rhoalpha,0,n1,theta) ;
beta:=u0beta(rhobeta,0,n1,theta) ;
betaSPRT:=betaWald(alpha,ASN);
writeln('ASN=',ASN:8:5,' alpha=',alpha:8:5,
' beta=',beta:8:5);
  A:=betaSPRT/(1-alpha); B:=(1-betaSPRT)/alpha;

write('ingrese theta max (para grafica) ');
readln(thetamax);cuant:=Invnorm(1-alpha);

```

```

for i:=-np to np do
  begin
    thetapt[i]:=(i+np)*thetamax/np/2;
    fpot[i]:=fpotencia(rho1.1[-np],rho1.1[np],w,n1,n2,thetapt[i]);
    fpot1[i]:=1-Normale(cuant-sqrt(round(ASN))*thetapt[i],0,1);
    fASN[i]:=ASNfunc(rho1.1[-np],rho1.1[np],w,n1,n2,thetapt[i]);
    if thetapt[i]=0.5 then
      begin
        OC[i]:=ln(B)/(ln(B)-ln(A));
        Etau[i]:=-ln(A)*ln(B);
      end
    else
      begin
        OC[i]:=(pow(B,1-2*thetapt[i])-1)
          /(pow(B,1-2*thetapt[i])-pow(A,1-2*thetapt[i]));
        Etau[i]:=(OC[i]*ln(A)+(1-OC[i])*ln(B))/(thetapt[i]-0.5);
      end
    end;
grDriver := Detect;
InitGraph(grDriver, grMode, '');
ErrCode := GraphResult;
if ErrCode = grOk then

  begin { Do graphics }
    MX:=GetMaxX;MY:=GetMaxY;
    MaxScreenX:=thetamax;
    MaxScreenY:=1;
    ImgSizeX:=round(MX*0.5);
    ImgSizeY:=round(MY*0.3);
    LeftMargin:=round(MX*0.1);
    TopMargin:=round(MY*0.1);
  end

```

```

MoveTo(Leftmargin+round(ImgSizeX/2)-100, TopMargin-30);
OutText('Funcin de potencia');
MoveTo(LeftMargin,TopMargin+ImgSizeY);
LineTo (LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+ImgSizeY);
Moveto (LeftMargin+round(ImgSizeX/MaxScreenX),
TopMargin+ImgSizeY);
Lineto (LeftMargin+round(ImgSizeX/MaxScreenX),
TopMargin);
MoveTo(LeftMargin+round(ImgSizeX/MaxScreenX),
TopMargin+ImgSizeY+10);
OutText ('1');
MoveTo(LeftMargin,TopMargin+ImgSizeY);
LineTo(LeftMargin,TopMargin);

MoveTo(LeftMargin-10,TopMargin+ImgSizeY-2);OutText('0');
MoveTo(LeftMargin-10,TopMargin-2);OutText('1');

for i:=-np to np-1 do
begin
MoveTo(LeftMargin+round(thetapts [i]*ImgSizeX/MaxscreenX),
TopMargin+ImgSizeY-round(fpot [i]*ImgSizeY/MaxScreenY));
LineTo(LeftMargin+round(thetapts [i+1]*ImgSizeX/MaxscreenX),
TopMargin+ImgSizeY-round(fpot [i+1]*ImgSizeY/MaxScreenY));
end;
SetLineStyle(DottedLn, 0, NormWidth);
for i:=-np to np-1 do
begin
MoveTo(LeftMargin+round(thetapts [i]*ImgSizeX/MaxscreenX),
TopMargin+ImgSizeY-round(fpot1 [i]*ImgSizeY/MaxScreenY));
LineTo(LeftMargin+round(thetapts [i+1]*ImgSizeX/MaxscreenX),
TopMargin+ImgSizeY-round(fpot1 [i+1]*ImgSizeY/MaxScreenY));

```

```

end;
SetLineStyle(DashedLn, 0, NormWidth);
for i:=-np to np-1 do
begin
MoveTo(LeftMargin+round(thetapts [i]*ImgSizeX/MaxscreenX),
TopMargin+ImgSizeY-round((1-OC[i])*ImgSizeY/MaxScreenY));
LineTo(LeftMargin+round(thetapts [i+1]*ImgSizeX/MaxscreenX),
TopMargin+ImgSizeY-round((1-OC[i+1])*ImgSizeY/MaxScreenY));
end;
MoveTo(LeftMargin,TopMargin+ImgSizeY+10);
OutText ('0');

SetLineStyle(SolidLn, 0, NormWidth);
MaxScreenY:=n1+n2;
MoveTo(Leftmargin+round(ImgSizeX/2)-100,
TopMargin*2+ImgSizeY-30);
OutText('Nmero promedio de observaciones');
MoveTo(LeftMargin,TopMargin*2+2*ImgSizeY);
LineTo (LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin*2+2*ImgSizeY);
Moveto(LeftMargin,Topmargin*2+2*ImgSizeY);
LineTo(LeftMargin,Topmargin*2+ImgSizeY);
MoveTo(LeftMargin,TopMargin*2+ImgSizeY);
LineTo (LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin*2+ImgSizeY);
Moveto (LeftMargin+round(ImgSizeX/MaxScreenX),
2*TopMargin+ImgSizeY);
Lineto (LeftMargin+round(ImgSizeX/MaxScreenX),
2*TopMargin+2*ImgSizeY);
MoveTo(LeftMargin,2*TopMargin+2*ImgSizeY+10);
OutText ('0');
MoveTo(LeftMargin+round(ImgSizeX/MaxScreenX),
2*TopMargin+2*ImgSizeY+10);

```

```

OutText ('1');
MoveTo(LeftMargin,TopMargin+ImgSizeY);
LineTo(LeftMargin,TopMargin);

MoveTo(LeftMargin-10,TopMargin*2+ImgSizeY*2-2);OutText('0');
Str(n1+n2,st);
MoveTo(LeftMargin-20,TopMargin*2+ImgSizeY-2);OutText(st);
MoveTo(LeftMargin,
      2*TopMargin+2*ImgSizeY-round(round(ASN)*ImgSizeY/MaxScreenY));
      Str(round(ASN),st);
MoveTo(LeftMargin-20,TopMargin*2+2*ImgSizeY
      -round(round(ASN)*ImgSizeY/MaxScreenY-2));OutText(st);
      for i:=-np to np-1 do
begin
MoveTo(LeftMargin+round(thetapts[i]*ImgSizeX/MaxscreenX),
      2*TopMargin+2*ImgSizeY-round(fASN[i]*ImgSizeY/MaxScreenY));
LineTo(LeftMargin+round(thetapts[i+1]*ImgSizeX/MaxscreenX),
      2*TopMargin+2*ImgSizeY-round(fASN[i+1]*ImgSizeY/MaxScreenY));
end;

SetLineStyle(DottedLn,0, NormWidth);
for i:=-np to np-1 do
begin
MoveTo(LeftMargin+round(thetapts[i]*ImgSizeX/MaxscreenX),
      2*TopMargin+2*ImgSizeY-round(round(ASN)*ImgSizeY/MaxScreenY));
LineTo(LeftMargin+round(thetapts[i+1]*ImgSizeX/MaxscreenX),
      2*TopMargin+2*ImgSizeY-round(round(ASN)*ImgSizeY/MaxScreenY));
end;

SetLineStyle(DashedLn,0, NormWidth);
      for i:=-np to np-1 do

```

```

begin
MoveTo(LeftMargin+round(thetapts[i]*ImgSizeX/MaxscreenX),
      2*TopMargin+2*ImgSizeY-round(Etau[i]*ImgSizeY/MaxScreenY));
LineTo(LeftMargin+round(thetapts[i+1]*ImgSizeX/MaxscreenX),
      2*TopMargin+2*ImgSizeY-round(Etau[i+1]*ImgSizeY/MaxScreenY));
end;
SetLineStyle(SolidLn,0,NormWidth);
Moveto(LeftMargin,3*TopMargin+2*ImgSizeY);
LineTo(LeftMargin+30,3*TopMargin+2*ImgSizeY);
OutText(' ptima bietpica');
SetLineStyle(DottedLn,0,NormWidth);
Moveto(LeftMargin,3*TopMargin+2*ImgSizeY+20);
LineTo(LeftMargin+30,3*TopMargin+2*ImgSizeY+20);
OutText(' Neyman-Pearson');
      SetLineStyle(DashedLn,0,NormWidth);
Moveto(LeftMargin,3*TopMargin+2*ImgSizeY+40);
LineTo(LeftMargin+30,3*TopMargin+2*ImgSizeY+40);
OutText(' Wald');

MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin-20);
OutText('Prueba bietpica:');
      outst:='pi0=';Str(lambda0,st);outst:=concat(outst,st);
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin);
outst:=outst+' pi1=';Str(lambda1,st);outst:=outst+st;
OutText(outst);
outst:='c0=1';
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+20);
outst:=outst+' c1=';Str(c,st);outst:=outst+st;
OutText(outst);
outst:='n1=';Str(n1,st);outst:=outst+st+' n2=';
Str(n2,st);outst:=outst+st;

```

```

MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+40);OutText(outst);
outst:='lnA=';Str(rho1.l[-np]:8:5,st);outst:=outst+st;
outst:=outst+' lnB=';Str(rho1.l[np]:8:5,st);outst:=outst+st;
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+60);
OutText(outst);

outst:='lnC='; Str(ln(lambda0/lambda1):8:5,st);
outst:=outst+st;
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+80);
OutText(outst);
  outst:='alfa=';Str(alpha:6:4,st);outst:=outst+st+' beta=';
Str(beta:6:4,st);outst:=outst+st;
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+100);OutText(outst);
outst:='duracion med. (H0)=';Str(fASN[-np]:8:3,st);
outst:=outst+st;
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+120);OutText(outst);
outst:='duracion med. (H1)=';
Str(ASNfunc(rho1.l[-np],rho1.l[np],w,n1,n2,1):8:3,st);
outst:=outst+st;
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+140);OutText(outst);
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+180);
OutText('Prueba Neyman-Pearson:');
outst:='n=';Str(round(ASN),st);outst:=outst+st+' alfa=';
str(alpha:6:4,st);outst:=outst+st+' beta=';
str(Normale(Invnorm(1-alpha)-sqrt(round(ASN)),0,1):6:4,st);
outst:=outst+st;
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+200);OutText(outst);
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+240);
OutText('Prueba de Wald:');
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+260);
outst:='lnA=';str(ln(A):8:5,st);outst:=outst+st+' lnB=';

```

```

str(ln(B):8:5,st);outst:=outst+st;
OutText(outst);
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+280);
outst:='alfa=';str(alpha:6:5,st);outst:=outst+st+' beta=';
str((1/B-1)/(1/B-1/A):8:5,st);outst:=outst+st;
OutText(outst);
outst:='Duracin med. (H0)=';str(ASN:6:5,st);outst:=outst+st;

MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+300);outText(outst);
outst:='Duracin med. (H1)=';
str(2*((1/B-1)/(1/B-1/A)*ln(A)+(1-1/A)/(1/B-1/A)*ln(B)):8:5,st);
outst:=outst+st;
MoveTo(2*LeftMargin+ImgSizeX,TopMargin+320);outText(outst);

readln;

CloseGraph
end
else
  Writeln('Graphics error:', GraphErrorMsg(ErrCode));
end.

```

Bibliografía

- [1] N. Cressie, P. B. Morgan, The VRPT: A sequential testing procedure dominating the SPRT, *Econometric Theory* 9 431-450 (1993).
- [2] M. Ghosh, N. Mukhopadhyay, and P.K. Sen, *Sequential Estimation*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Weinheim-Brisbane-Singapore-Toronto (1997).
- [3] Novikov, A., Optimality of Two-Stage Hypothesis Tests, In *COMPSTAT 2004 Proceedings in Computational Statistics*, J. Antoch, ed., pp. 1601-1608, Heidelberg: Physica-Verlag.
- [4] Novikov A., Locally most powerful two-stage tests, In: PRAGUE STOCHASTICS 2006. Proceedings of the joint session of 7th Prague Symposium on Asymptotic Statistics and 15th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, held in Prague from August 21 to 25, 2006. MAT-FYZPRESS by publishing house of the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, pp.554-567.
- [5] Novikov, A., Optimal Sequential Tests for Two Simple Hypotheses, *Sequential Analysis* 28, no. 2, 188-217 (2009b).
- [6] N. Schmitz, *Optimal Sequentially Planned Decision Procedures. Lecture Notes in Statistics: 79*. Springer-Verlag, New York (1993).
- [7] N. Schmitz, “Optimal” Adaptive Designs, Arbeitsgemeinschaft Multiple Methoden - Workshop Adaptive Designs, September 28-29 2006, Berlin

- (http://www.math.uni-magdeburg.de/institute/imst/ag_schwabe/flex06/presentations.html).
- [8] Schmitz, N. and Süselbeck, B., Sequential Probability Ratio Tests for Homogeneous Markov Chains, *Lecture Notes in Statistics* 20: 181-202 (1983).
- [9] Stockman, C. M.; Armitage, P., Some properties of closed sequential schemes. Suppl. J. Roy. Statist. Soc. 8, 104-112 (1946).
- [10] Wald, A., Sequential Tests of Statistical Hypotheses, *Annals of Mathematical Statistics* 16: 117-186 (1945).
- [11] Wald, A., *Sequential Analysis*, Courier Dover Publications (1947).
- [12] Wald, A. and Wolfowitz, J., Optimum Character of the Sequential Probability Ratio Test, *Annals of Mathematical Statistics* 19: 326-339 (1948).
- [13] Wald, A., *Statistical Decision Functions*, New York: Wiley (1950).



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – CUAPILAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

PRUEBAS BIÉLÁMPICAS ÓPTIMAS
PARA EL PARÁMETRO DE LOCALIZACIÓN
DE UN PROCESO AR (2)

Tesis que presenta:
RODOLFO MARIBEL ESTEBAN FLORES

Para obtener el grado de:
MAESTRÍA EN CIENCIAS
(Matemáticas Aplicadas e Industriales)

Aseor de Tesis: **DR. ANDREY NEVSKOV**

Jurado Calificador:

Presidenta:	Dra. Blanca Rosa Pérez Salvador	UNAM-I
Secretaría:	Dr. Andrey Nevskov	UNAM-I
Vocal:	Dr. Víctor Raúl Fuentes	UNAM-I

México, D.F. Diciembre del 2017

Flores