

# Sobre la topología de las variedades integrales del problema espacial de los 3-cuerpos

Tesis que para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias (Matemáticas)  
del Posgrado en Matemáticas  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Autónoma Metropolitana  
Unidad Iztapalapa  
presenta  
Manuel Ceaca Cruz

---

Asesor: Dr. J. Guadalupe Reyes Victoria



# Índice general

Resumen . . . . .	1
Introducción . . . . .	3
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Elementos de la Topología Diferencial . . . . .	5
1.1.1. Variedades Diferenciables . . . . .	5
1.1.2. Puntos y valores regulares de aplicaciones suaves entre variedades . . . . .	11
1.1.3. Grupos de Lie y sus Álgebras de Lie . . . . .	16
1.1.4. Haces Fibrados . . . . .	20
1.2. Elementos de la Topología Algebraica . . . . .	21
1.2.1. Grupo Fundamental de una variedad topológica	21
1.2.2. Grupos de Homología de una variedad topológica	25
<b>2. Elementos del cálculo de variaciones</b>	<b>31</b>
2.1. Formulación Lagrangiana de las ecuaciones de movi- miento . . . . .	31
2.2. El problema de $n$ -cuerpos . . . . .	33
2.3. Variedades integrales de un problema de $n$ -cuerpos . .	35
<b>3. Soluciones especiales del problema de <math>n</math>-cuerpos</b>	<b>39</b>
3.1. Configuraciones Centrales . . . . .	39
3.1.1. El caso de una configuración de Euler . . . . .	41
3.2. Equilibrios relativos . . . . .	43

3.3. Soluciones homográficas . . . . .	46
<b>4. Problema de los <math>n</math>-cuerpos en el plano</b>	<b>51</b>
4.1. Teoremas y resultados para el espacio bidimensional . .	51
4.2. Variedades integrales en el problema de Kepler. . . . .	58
4.3. Variedades integrales en un problema del Cometa . . . .	62
<b>5. Variedades invariantes del problema de los <math>n</math>-cuerpos en el espacio</b>	<b>65</b>
5.1. El caso de energía negativa $c < 0$ y momento angular nulo $p = 0$ . . . . .	72
5.1.1. El caso del problema espacial de los 3-cuerpos.	79
5.2. El caso de energía positiva $c > 0$ y momento angular no nulo $p \neq 0$ . . . . .	81
<b>6. Conclusiones y Proyecciones</b>	<b>83</b>

# Resumen

El presente trabajo tiene como propósito realizar un estudio topológico de las llamadas variedades integrales en el problema de los 3-cuerpos en el espacio tridimensional; estudio que obtiene sus resultados en forma directa del análisis que en este mismo documento se realiza, sobre las variedades integrales en el problema de los  $n$ -cuerpos en el plano y en el espacio tridimensional.

Haciendo uso de herramientas de varias ramas de las matemáticas como el cálculo de variaciones, las geometrías diferencial y riemanniana y la topología algebraica, entre otras, se logra hacer una explicación de los métodos y relaciones utilizadas para establecer los resultados que son el centro de éste documento.

Un caso particular en el estudio general de este trabajo es cuando se analizan 3 cuerpos en el espacio tridimensional. Si consideramos entonces 3 números reales y positivos,  $m_1, m_2, m_3$ , que representan las masas de 3 partículas puntuales, el espacio de configuración del problema de los 3-cuerpos en el espacio tridimensional, con centro de masa en el origen, es el subconjunto  $M \setminus \Delta$  del espacio lineal

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^3)^3 \mid \sum_{i=0}^3 m_i x_i = 0\}$$

donde  $\Delta$ , estará definida por la ecuación (2.5). La energía total, el momento angular, la energía cinética y la energía potencial, se definen por medio de las expresiones (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9) respectivamente.

La energía cinética  $K(x, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i x_i v_i$  define una métrica riemanniana en el espacio  $M$ , y denotamos por  $S_k$  a la esfera unitaria en  $M$  respecto a la norma inducida.

El resultado principal que le da nombre al trabajo se establece de la siguiente manera (véase Teorema 5.4).

**TEOREMA 0.1.** *Para el problema de tres cuerpos en el espacio con masas arbitrarias, los grupos de homología del espacio  $S_k \setminus \Delta$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  son  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  en dimensiones 0, 2 y 4 respectivamente. Los otros grupos de homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  para este espacio son triviales.*

# Introducción

El problema de los  $n$ -cuerpos consiste en determinar la trayectoria de  $n$  partículas de masas puntuales y variables, sujetas únicamente a su mutua atracción gravitacional, dicho problema fue planteado por Isac Newton y a través de los siglos ha sido abordado por múltiples investigadores desde variados ángulos. Este trabajo presenta el análisis de uno de esos acercamientos, propuesto por S. Smale en [5] y [6], y también de las ideas de H. Cabral en [1]; describir la topología del espacio de las posibles soluciones al problema, es el ángulo de acercamiento.

El presente trabajo está organizado en 6 capítulos, el primero de los cuales es destinado a nombrar los preliminares necesarios para el estudio que se realiza en capítulos posteriores. En este capítulo se tratan temas como definiciones y ejemplos de variedades diferenciales, de aplicaciones suaves entre variedades, grupos de Lie y sus respectivas álgebras de Lie, haces fibrados, además de los conceptos de grupos de homología, que pertenecen al área de la topología algebraica.

El segundo capítulo se centra en elementos del cálculo de variaciones, donde se presenta el planteamiento de las ecuaciones de movimiento del problema de los  $n$  cuerpos, en un espacio euclidiano tridimensional, desde un punto de vista lagrangiano; también son definidas las variedades integrales, que son el objeto principal de estudio en el presente trabajo.

En el tercer capítulo nos enfocamos al análisis de soluciones especiales en el problema de los  $n$  cuerpos, tales soluciones especiales son, las configuraciones centrales, los equilibrios relativos y las llamadas soluciones homográficas.

En el cuarto capítulo se muestran las técnicas de S. Smale dadas en [6] y [5] para el estudio de las variedades integrales en el plano. Tales ideas, cristalizadas en dos Teoremas, serán de suma importancia para el estudio posterior realizado para el caso espacial.

El capítulo quinto tiene como objeto principal el desarrollo de las técnicas mostradas en el capítulo cuatro, extendiéndolas al caso del problema espacial. Posteriormente, se particulariza para el caso en que  $n = 3$ . Esto es, el estudio se restringe a únicamente tres cuerpos en el espacio tridimensional.

Finalmente, el capítulo 6 es destinado a las conclusiones y proyecciones del trabajo.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se establecen los elementos necesarios básicos para realizar el estudio de las *variedades integrales invariantes* del problema de tres cuerpos en un espacio euclidiano tridimensional. Las referencias básicas para profundizar en los elementos mencionados son [2] y [3].

### 1.1. Elementos de la Topología Diferencial

Mencionamos a continuación los elementos que ocuparemos de la rama de la Geometría, llamada la Topología Diferencial.

#### 1.1.1. Variedades Diferenciables

**DEFINICIÓN 1.1.** Un espacio topológico  $M$  es llamado una variedad topológica de dimensión  $n$ , si para cada punto  $p$  del espacio, existe un conjunto abierto  $U \subset M$  conteniendo al punto  $p$  (llamado también una vecindad del punto en la variedad), homeomorfo a un dominio  $V$  de un espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Esto es, si existe un homeomorfismo (aplicación continua con inversa continua)  $\varphi : U \rightarrow V$  entre tales conjuntos (Véase la figura 1.1).

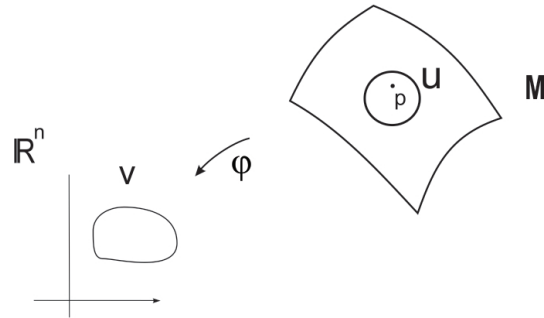


Figura 1.1: Variedad  $n$  dimensional

Consecuentemente, si  $M$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ , podemos encontrar un sistema de conjuntos abiertos  $\{U_i\}$ ,  $i \in I$  con  $U_i \subset M$  y un sistema de homeomorfismos  $\varphi_i : U_i \mapsto V_i \subset \mathbb{R}^n$  de tal forma que la colección  $\bigcup_{i \in I} \{U_i\}$  cubre a  $M$ . La pareja formada por  $(U_i, \varphi_i)$  es llamada una *carta* de la variedad  $M$  y al conjunto de cartas  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  que cubren a  $M$  se le llamará un *Atlas* para la variedad.

Si consideramos un sistema coordenado cartesiano  $(x_1, \dots, x_n)$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces para cualquier punto  $p \in U_i \subset M$ , las mismas coordenadas cartesianas del punto  $\varphi_i(p) \in V_i$  pueden ser consideradas como una parametrización de la vecindad del punto  $p$ . En otras palabras, dichas coordenadas son consideradas coordenadas locales alrededor del punto  $p$  en  $U_i$ .

**EJEMPLO 1.2.** Consideremos la esfera unitaria de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{S}^n$  definida como el conjunto de puntos en  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  que satisfacen la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1.$$

Los conjuntos,

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}$$

(véase la figura 1.2) que son conjuntos abiertos relativos en la esfera, la cubren, y definimos entonces los homomorfismos

$$\varphi_i^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = \varphi_i^-(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

los cuales son las proyecciones sobre la  $i$ -ésima coordenada.

Se puede comprobar mediante cálculos directos que  $(U_i, \varphi_i)$  es un atlas para la esfera unitaria, lo cual le hace una variedad topológica de dimensión  $n$ .

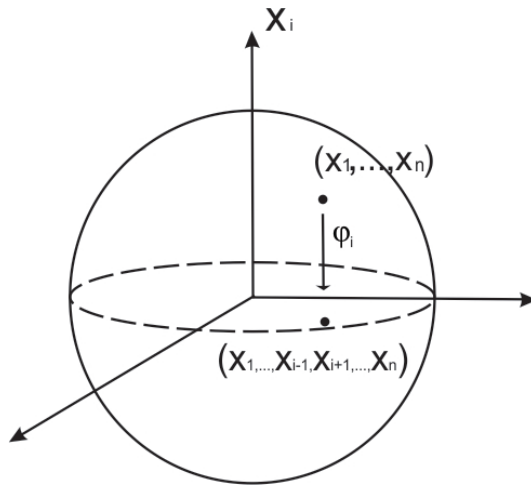


Figura 1.2:  $S^n$

**DEFINICIÓN 1.3.** Una variedad diferenciable, es una variedad topológica que además satisface la siguiente condición.

Para cualquier par de sistemas coordenados  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $(U_j, \varphi_j)$ , si el conjunto  $U_i \cap U_j$  es no vacío, es posible escribir en tal intersección un sistema coordenado en términos del otro de forma biyectiva y diferenciable mediante la aplicación

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \mapsto \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j),$$

la cual es llamada un cambio diferenciable de coordenadas en  $U_i \cap U_j$  (véase la figura 1.3).

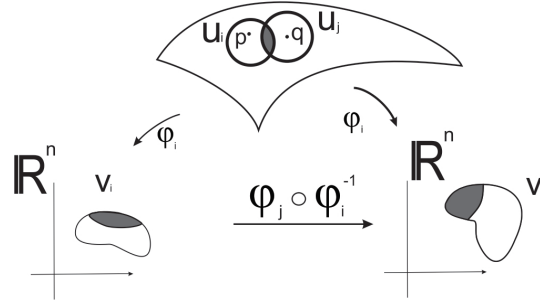


Figura 1.3: Variedad diferenciable

**EJEMPLO 1.4.** Sea  $\Omega$  una superficie de dimensión  $k$  en un espacio euclideo de dimensión  $n$ , definida mediante las siguientes  $n - k$  ecuaciones:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$$

donde  $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, n - k$  y que además, la matriz  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  tiene rango  $n - k$  en cada punto. Entonces, tal superficie es una variedad diferenciable.

*Demostración.* Sea  $p = (x_1, \dots, x_n)$  un punto sobre la superficie, por hipótesis  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$  tiene rango  $n - k$ . Sea  $J_{j_1 \dots j_{n-k}}$ , el menor formado por las columnas  $j_1 \dots j_{n-k}$ , cuyo determinante es distinto de cero, por el teorema de la función implícita existe un abierto  $U_{j_1 \dots j_{n-k}}$  alrededor del punto  $(y_1, \dots, y_k) = (x_1, \dots, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}, \dots, x_n)$ , donde los elementos con subíndice  $j_i$  para  $i = 1, \dots, n - k$  se omiten. Debido a que lo anterior se puede hacer para cada punto, concluimos que la superficie puede ser cubierta por abiertos de la forma  $U_{j_1 \dots j_{n-k}}$ , esto significa que la superficie  $\Omega$  es una variedad diferenciable.

□

**DEFINICIÓN 1.5.** Una subvariedad diferenciable  $N$  de una variedad diferenciable  $M$ , es un subconjunto de tal variedad, que bajo la topología inducida, es también una variedad diferenciable.

**EJEMPLO 1.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, entonces cualquier subconjunto abierto  $N \subset M$  es una subvariedad diferenciable de  $M$  de la misma dimensión.

**EJEMPLO 1.7.**  $M(n, \mathbb{R})$  el espacio vectorial de matrices de  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , forma una variedad diferenciable de dimensión  $n^2$ .

Debido a que la función determinante es diferenciable (por ser polinomial en las entradas de una matriz) y además como  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}$ , tenemos que

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} = \det^{-1}\{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

llamado el grupo (con la multiplicación matricial ordinaria) lineal general de matrices invertibles es un subconjunto abierto de  $M(n, \mathbb{R})$ , lo que le hace una subvariedad diferenciable de tal espacio, de dimensión  $n^2$ .

**EJEMPLO 1.8.** Consideremos los grupos de transformaciones (con la multiplicación matricial usual) siguientes:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\},$$

llamado el grupo lineal especial de matrices el cual tiene dimensión  $n^2 - 1$ .

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = I\},$$

llamado el grupo ortogonal de dimensión  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\},$$

llamado el grupo especial ortogonal cuya dimensión es  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Estos conjuntos constituyen ejemplos importantes de variedades diferenciables, con las dimensiones mencionadas, puesto que son superficies en un espacio euclidiano de la dimensión dada y que satisfacen las condiciones del Ejemplo 1.4.

Por ejemplo, tomemos a  $SL(n, \mathbb{R})$  y sea la función real suave

$$f : M(n, \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$$

definida por

$$f(A) = \det A - 1,$$

con  $A \in M(n, \mathbb{R})$  matriz arbitraria, con entradas reales  $a_{ij}$ .

Entonces,  $SL(n, \mathbb{R})$  es el conjunto cero de  $f$ , ya que

$$f(A) = 0 \iff A \in SL(n, \mathbb{R}).$$

Por otro lado, que la hipersuperficie  $SL(n, \mathbb{R})$  sea no singular, equivale a que en cada punto de la misma se cumple que  $\text{grad} f \neq 0$ . Pero  $\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}}$  es el cofactor de  $a_{ij}$  en la matriz  $A$ . Por lo que si el gradiente se anula en algún punto  $A$ , tal matriz no será invertible. Esto implica que los puntos de  $SL(n, \mathbb{R})$  forman una variedad diferenciable en  $M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ .

Análogamente, se puede comprobar que los otros subgrupos antes mencionados, son variedades diferenciables con la dimensión correspondiente dada.

Abusando de la notación escribiremos por comodidad para los subgrupos  $O(n, \mathbb{R}) = O(n)$  y  $SO(n, \mathbb{R}) = SO(n)$ .

### 1.1.2. Puntos y valores regulares de aplicaciones suaves entre variedades

**DEFINICIÓN 1.9.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Una función  $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$ , se llamará suave si tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

**DEFINICIÓN 1.10.** Dadas dos variedades  $M, N$ , una transformación  $f : M \mapsto N$  se llamará suave en el punto  $p$  si para cada pareja de cartas  $(U, \varphi)$  alrededor de  $p$  en  $M$  y  $(V, \psi)$  alrededor de  $f(p)$  en  $N$ , la transformación representante

$$\hat{f} : \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \mapsto \psi(V)$$

es suave como una aplicación entre espacios euclidianos. A una transformación  $f : M \mapsto N$  que es suave en cada punto simplemente se le llamará suave. No es difícil ver que la definición no depende de la elección de las cartas escogidas (véase [2]).

No es difícil probar que con la definición 1.10 las cartas de una variedad diferenciable  $M^n$  resultan por sí mismas funciones diferenciables de la variedad en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  que la parametriza.

**DEFINICIÓN 1.11.** Una transformación suave  $f : M \mapsto N$  entre variedades, se llama difeomorfismo, si dicha transformación es biyectiva, y su inversa es suave también.

**EJEMPLO 1.12.** Consideremos a la esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  y al elipsoide  $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ , donde  $a, b, c$  son constantes distintas de cero. Entonces la aplicación  $f : \mathbb{S}^2 \mapsto N$ , definida como  $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$  es un difeomorfismo.

Una manera más simple de estudiar a una variedad diferenciable es considerarla como un subconjunto encajado (sin autointersecciones) dentro de algún espacio euclidiano apropiado donde se puedan considerar objetos geométricos. El siguiente resultado nos dice que esto siempre es posible (véanse [2] y [4]).

**TEOREMA 1.13.** *(de encaje de Whitney) Toda variedad variedad diferenciable  $M^n$  puede ser encajada (mediante una aplicación inyectiva) en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

Utilizando este resultado se pueden definir objetos de una forma más simple.

**DEFINICIÓN 1.14.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^k$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  contenida en un espacio euclidiano de dimensión  $k$ , con  $n > k$  y sea un punto  $p \in M$ . El vector  $v$  será un vector tangente a la variedad  $M$  en el punto  $p$ , si existe una curva suave  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto M$ , que satisface  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ .

**DEFINICIÓN 1.15.** El conjunto de todos los vectores tangentes a una variedad diferenciable  $M$  en un punto  $p$ , es llamado el espacio (vectorial real) tangente de la variedad  $M$  en el punto  $x$  y es denotado mediante  $T_p(M)$ .

No es difícil ver que para cada  $p \in M$ , la dimensión de  $T_p(M)$  es  $n$ .

Ampliamos ahora el concepto de diferencial, al contexto de variedades diferenciables. Para ello, sea  $f : M \mapsto N$  una función diferenciable. Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $(U, \varphi)$  es una carta alrededor de  $p \in M$ , es decir,  $\varphi^{-1}(0) = p$ , podemos definir una función lineal  $d\varphi_0^{-1}$ , que aplica el espacio tangente  $T_p(M)$  en el espacio tangente  $T_{f(p)}(N)$ .

**DEFINICIÓN 1.16.** Sean  $M, N$  dos variedades diferenciables con cartas locales  $\varphi, \psi$  alrededor de  $p$  y  $f(p)$  respectivamente. Para una función suave  $f : M \mapsto N$  entre ellas, a la que asociamos la representante  $\hat{f}$  como en la definición 1.10. Se define la función lineal

$$df_p : T_p(M) \mapsto T_{f(p)}(N)$$

mediante la composición

$$df_p = d\psi_0^{-1} \circ d\hat{f}_0 \circ d\varphi_p^{-1}$$



No es difícil ver que esta definición no depende de la elección de las cartas (Véase [2]).

**DEFINICIÓN 1.17.** Para una función suave  $f : M \mapsto N$  entre variedades, un punto  $y \in N$  es un valor regular de  $f$ , si la diferencial  $df_p : T_p(M) \mapsto T_y(N)$  es suprayectiva en cada punto  $p$  donde  $f(p) = y$ .

Se define entonces el conjunto de *valores críticos* de la función  $f$  como el conjunto de valores no regulares de  $f$ .

**DEFINICIÓN 1.18.** Dada una función suave  $f : M \mapsto N$  entre variedades, denotamos por  $\Sigma(f)$ , al conjunto de bifurcación de  $f$ , donde  $y \notin \Sigma(f)$  significa que  $f^{-1}(y)$  es una variedad y existen un conjunto abierto  $U \subset N$  al rededor de  $y$  y una aplicación  $g : f^{-1}(U) \mapsto f^{-1}(y)$ , tal que la aplicación  $h : f^{-1}(U) \mapsto U \times f^{-1}(y)$ , definida por  $h(x) = (f(x), g(x))$ , es un difeomorfismo.

Si  $y \notin \Sigma(f)$  se dirá que  $f$  es localmente trivial en  $y$ . Es decir, el conjunto de bifurcación contiene a los puntos donde  $f$  no es localmente trivial.

Mostramos a continuación un criterio para obtener subvariedades diferenciables a partir de los valores regulares de una función suave entre dos variedades (véase [4]).

**TEOREMA 1.19** (De la imagen inversa). *Si  $y$  es un valor regular de  $f : M \mapsto N$ , entonces la imagen inversa  $f^{-1}(y)$  es una subvariedad de  $M$  con dimensión  $\dim f^{-1}(y) = \dim M - \dim N$*

**EJEMPLO 1.20.** Consideremos  $O(n, \mathbb{R})$  y también a  $S(n, \mathbb{R})$  definido como el conjunto de matrices simétricas de  $n \times n$ , la cual es una subvariedad de  $M(n, \mathbb{R})$  difeomorfa localmente a  $\mathbb{R}^k$ , donde  $k = \frac{n(n+1)}{2}$ . Sea  $f : M(n, \mathbb{R}) \mapsto S(n, \mathbb{R})$ , transformación suave definida mediante

$$f(A) = AA^T$$

Entonces,  $O(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(I)$ , por lo que para mostrar que  $O(n, \mathbb{R})$  es una variedad, se necesita mostrar que  $I$  es un valor regular de  $f$ .

Para ello, calculamos

$$\begin{aligned}
 df_A(B) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(A+sB) - f(A)}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A+sB)(A+sB)^T - AA^T}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} (BA^T + AB^T + sBB^T) \\
 &= BA^T + AB^T
 \end{aligned}$$

La matriz  $I$  es un valor regular de  $f$  si y sólo si  $df_A : T_A M(n, \mathbb{R}) \mapsto T_{f(A)} S(n, \mathbb{R})$  es suprayectiva para toda  $A \in O(n, \mathbb{R})$ . Bajo las identificaciones  $T_A M(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$  y  $T_{f(A)} S(n, \mathbb{R}) = S(n, \mathbb{R})$ , es necesario mostrar que, para cualquier matriz  $C \in S(n, \mathbb{R})$ , existe una matriz  $B \in M(n, \mathbb{R})$  que satisface la ecuación

$$df_A(B) = C$$

o equivalentemente,

$$BA^T + AB^T = C.$$

Puesto que  $C$  es simétrica, escribimos  $C = \frac{C+C^T}{2}$  y despejando a  $B$  obtenemos  $B = \frac{1}{2}CA$ , por lo que

$$\begin{aligned}
 df_A(B) &= \left( \frac{1}{2}CA \right) A^T + A \left( \frac{1}{2}CA \right)^T \\
 &= \frac{1}{2} (C(AA^T) + (AA^T)C^T) \\
 &= \frac{C + C^T}{2} \\
 &= C
 \end{aligned}$$

lo que indica que la matriz  $B$  es la que requeríamos. Esto es, se ha demostrado que  $I$  es un valor regular de  $f$ , lo que implica que  $O(n, \mathbb{R})$  es una subvariedad de  $M(n, \mathbb{R})$  de dimensión  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Un resultado sobre una propiedad genérica de los valores regulares de una función suave es el siguiente (véase [2]).

**TEOREMA 1.21** (Lema de Sard). *Si  $f : M \mapsto N$  es una transformación suave entre variedades, entonces casi todo punto (respecto a la medida de Lebesgue) de  $N$  es un valor regular de  $f$ . En otras palabras, el conjunto de los valores críticos de  $f$  tiene medida de Lebesgue cero en  $N$ .*

**DEFINICIÓN 1.22.** Dada una variedad diferenciable  $M$ , el haz tangente a dicha variedad, es la variedad diferenciable definida por

$$TM = \{(x, \xi) | x \in M, \quad \xi \in T_x(M)\}.$$

**EJEMPLO 1.23.** El haz tangente al espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  es el espacio lineal

$$T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

**DEFINICIÓN 1.24.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, una métrica Riemanniana es una aplicación que a cada punto  $p \in M$  asocia en el espacio  $T_p(M)$  una forma cuadrática  $(g_{i,j})$  positiva definida, la cual varía suavemente en cada punto.

**DEFINICIÓN 1.25.** Una variedad Riemanniana es una variedad diferenciable  $M$  en la que cada espacio tangente es equipado con una métrica riemanniana  $g = (g_{i,j})$ .

**EJEMPLO 1.26.** El espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  es una variedad Riemanniana, con la métrica usual  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

**EJEMPLO 1.27.** La esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ , centrada en el origen de  $\mathbb{R}^3$ , es una variedad Riemanniana, ya que, utilizando la parametrización con coordenadas cogeográficas  $(\varphi, \theta)$ , la métrica en éstas coordenadas es

$$g_{ij}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \text{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**DEFINICIÓN 1.28.** Dada una variedad Riemanniana  $M$  con métrica  $g$ , el haz tangente unitario a dicha variedad, es una nueva variedad diferenciable

$$S(M) = \{(x, \xi) \in T(M) \quad | \quad \|\xi\|_g = 1\}.$$

**EJEMPLO 1.29.** El haz tangente unitario a  $\mathbb{R}^n$  con la métrica euclidiana ordinaria es

$$S(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$$

### 1.1.3. Grupos de Lie y sus Álgebras de Lie

Dada una variedad diferenciable  $G$  que además tiene una estructura de grupo, ligamos a ella las siguientes aplicaciones

$$\varphi : G \mapsto G, \quad \varphi(g) = g^{-1}. \quad (1.1)$$

$$\psi : G \times G \mapsto G, \quad \psi(g, h) = gh. \quad (1.2)$$

**DEFINICIÓN 1.30.** Una variedad diferenciable  $G$  es llamada un *grupo de Lie*, si las funciones  $\varphi, \psi$  definidas como en (1.1) y (1.2) en términos de su estructura de grupo, son suaves.

**EJEMPLO 1.31.** Los siguientes grupos de transformaciones (ya mencionados en el ejemplo 1.7):

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$$

son grupos de Lie bajo la operación de producto matricial, dado que ésta satisface lo requerido por la definición 1.30.

**DEFINICIÓN 1.32.** Un espacio vectorial  $V$ , sobre un campo  $K$ , en el cual se ha definido una operación  $[\dots] : V \times V \mapsto V$  que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera vectores  $\xi, \eta, \zeta, \beta \in V$  y cualquier escalar  $\alpha \in K$ ,

1.

$$[\alpha\xi + \beta, \eta] = \alpha[\xi, \eta] + [\beta, \eta]$$

2.

$$[\xi, \alpha\eta + \beta] = \alpha[\xi, \eta] + [\xi, \beta]$$

3.

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$$

4.

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\zeta, [\xi, \eta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] = 0$$

es llamado una *Álgebra de Lie*. El corchete [...] que define la operación es llamado comunmente el conmutador de Lie.

**EJEMPLO 1.33.** Un álgebra  $V$  de operadores lineales puede ser transformado en un álgebra de Lie, definiendo el corchete de Lie mediante

$$[A, B] = AB - BA. \quad (1.3)$$

De ésta manera el espacio de matrices reales  $M(n, \mathbb{R})$ , forma una álgebra de Lie bajo el conmutador de matrices (1.3)

**EJEMPLO 1.34.** Se puede verificar directamente que el espacio de los campos vectoriales en  $\mathbb{R}^n$  es un álgebra de Lie, con respecto al conmutador

$$[\xi, \eta]_i = \xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}, \quad (1.4)$$

donde  $\xi = (\xi_i)$  y  $\eta = (\eta_j)$  son cualquier par de campos vectoriales.

**DEFINICIÓN 1.35.** Dado un grupo de Lie  $G$  con elemento neutro denotado por  $e$ , su espacio tangente en la identidad  $T_e(G)$ , es llamado el *álgebra de Lie de  $G$*  (Véase [2] parte II).

**EJEMPLO 1.36.** Como ejemplo de álgebras de Lie de un grupo de Lie, enlistamos:

$$sl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$$

el cual es el álgebra del Lie del grupo de Lie  $SL(n, \mathbb{R})$ . Igualmente,

$$so(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

es el álgebra de Lie del grupo de Lie  $SO(n, \mathbb{R})$  de las matrices ortogonales con determinante uno.

En cada álgebra de Lie, mencionada en éste ejemplo, el corchete es el conmutador de matrices (1.3).

Mostremos ésto para  $sl(n, \mathbb{R})$ , por lo cual consideramos una curva  $A(t)$  en  $SL(n, \mathbb{R})$  que satisface que  $A(0) = I$ , por lo que tenemos que

$$0 = \frac{d}{dt}(\det A(t))|_{t=0} = tr \left( \frac{d}{dt}(A(t))|_{t=0} \right)$$

ésto es, el vector tangente tiene traza cero. Inversamente, si  $Y$  es una matriz arbitraria de traza cero y si construimos la curva  $A(t) = I + tY$ , obtenemos:

$$\det A(t) = \det(I + tY) = I + t(tr(Y)) + o(t) = I + o(t).$$

Por lo que al tiempo cero el vector  $Y$  está en el espacio tangente a  $SL(n, \mathbb{R})$  en la identidad.

Diremos que el grupo de Lie  $G$  actúa sobre la variedad  $M$ , si existe una aplicación suave  $T : G \times M \mapsto M$ , que depende de  $g \in G$  y  $x \in M$ , definida mediante

$$(g, x) \mapsto T_g(x)$$

que asocia a cada elemento  $g \in G$  un difeomorfismo  $T_g$  de  $M$  en sí mismo y que además

$$T_{gh} = T_g T_h \quad \text{para cualquier pareja } g, h \in G$$

**EJEMPLO 1.37** (Flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo). Sean, un subconjunto abierto  $U$  de una variedad  $M$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  y

$$F = (f_1, \dots, f_n) : U \mapsto TM.$$

una aplicación suave (campo vectorial en  $M$ ). Escribimos la ecuación diferencial ordinaria asociada a  $F$  con condición inicial como (problema de Cauchy)

$$\dot{x} = F(x); \quad x(t_0) = x_0$$

Si se denota por  $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$  la solución que satisface  $\varphi(0, x) = x$ , la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \mapsto M$$

es llamada el flujo de la ecuación diferencial y satisface

$$\varphi_{t+r}(x) = \varphi_r \circ \varphi_t(x),$$

lo cual define la acción del grupo de Lie  $(\mathbb{R}, +)$  en la variedad  $M$ .

**EJEMPLO 1.38.** Una acción de  $SO(3, \mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^3$

$$T : SO(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

está determinada mediante la rotación propia del espacio,

$$(g, x) \mapsto gx.$$

Análogamente la acción de  $SO(2, \mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^2$

$$T : SO(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

estará determinada mediante,

$$(g, x) \mapsto gx$$

la cual representa rotaciones propias en los elementos de  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.1.4. Haces Fibrados

Damos la definición de uno de los objetos geométricos más importantes de este trabajo.

**DEFINICIÓN 1.39.** Un haz fibrado es un objeto formado por:

1. Una variedad diferenciable  $E$ , llamada el Espacio total
2. Una variedad diferenciable  $M$ , llamada el Espacio base
3. Una aplicación suave y suprayectiva  $p : E \mapsto M$ , llamada la Proyección del haz, cuyo diferencial debe tener rango máximo  $n = \dim M$  en cada punto.
4. Una variedad diferenciable  $F$  llamada *Fibra*.
5. Un grupo de Lie  $G$  de transformaciones suaves (difeomorfismos) de  $F$ . Dicho grupo es llamado la *estructura* del espacio fibrado.

Con la propiedad de que dado  $x \in M$ , existe una vecindad abierta  $U_\alpha \subset M$  y un difeomorfismo  $\varphi_\alpha : F \times U_\alpha \mapsto p^{-1}(U_\alpha)$  que satisface  $p\varphi_\alpha(y, x) = x$ , es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F \times U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & p^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow \text{Proy}_2 & \downarrow p \\ & & M \end{array}$$

con  $\text{Proy}_2(y, z) = z$ .



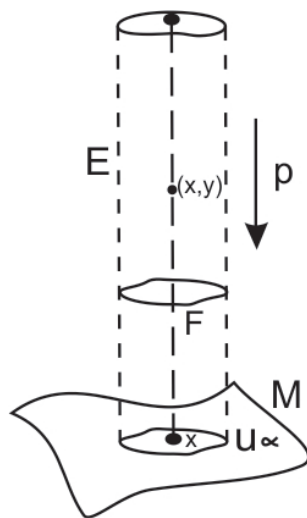


Figura 1.4: Haz fibrado

**EJEMPLO 1.40.** Una clase importante de haz fibrado, es un haz vectorial. En éste caso, la fibra es  $\mathbb{R}^n$  y el grupo  $G$  que actúa en cada fibra del haz es un subgrupo del grupo de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$ .

## 1.2. Elementos de la Topología Algebraica

En ésta sección introducimos los elementos de Topología algebraica, necesarios para el análisis topológico que haremos a las variedades integrales tratadas en el presente trabajo.

### 1.2.1. Grupo Fundamental de una variedad topológica

**DEFINICIÓN 1.41.** Una homotopía suave (suave a trozos, continua) de una aplicación  $f : N \mapsto M$  entre variedades, es una aplicación suave (suave a trozos, continua)

$$F : N \times I \mapsto M, \quad I = [0, 1]$$

con la propiedad de que  $F(x, 0) = f(x)$  para todo punto  $x \in N$ .

Se dice que cada una de las aplicaciones  $f_t(x) = F(x, t)$  es homotópica a la aplicación inicial  $f = f_0$ .

Dos funciones  $f, g$  estarán relacionadas homotópicamente si existe una homotopía entre ellas. Esta relación es de equivalencia, y las clases de dicha relación son llamadas *clases de homotopía*. En la figura 1.5 se muestra una homotopía de aplicaciones del círculo en un espacio de dimensión mayor a dos, es decir, una homotopía de curvas cerradas.

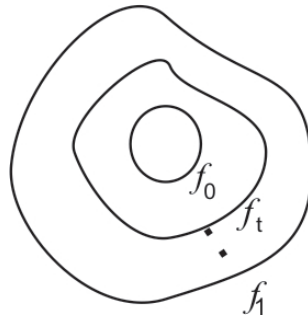


Figura 1.5: Curvas homotópicas.

**EJEMPLO 1.42.** Sean dos funciones,  $f_0, f_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  con reglas de correspondencia

$$f_0(x) = x.$$

$$f_1(x) = x^2.$$

Definimos entre ellas la siguiente aplicación, la cual se puede verificar directamente que es una homotopía

$$F : [0, 1] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

$$F(t, x) = (1 - t)x + tx^2.$$

En otras palabras, la función cuadrática y la identidad son homotópicas.

**DEFINICIÓN 1.43.** Dos variedades diferenciables  $M, N$  son homotópicas, o tienen el mismo tipo de homotopía si existen funciones

$$f : M \mapsto N$$

$$g : N \mapsto M$$

tales que las funciones compuestas  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son homotópicas a las funciones identidad correspondientes.

**EJEMPLO 1.44.** El conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{2 \text{ puntos}\}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $S^2 \vee S^2$ , que es el conjunto formado por dos esferas que se intersecan en un único punto y que es llamado, el ramillete de dos esferas.

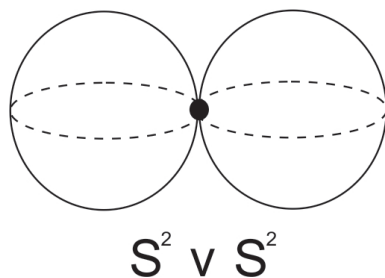


Figura 1.6: Ramillete de esferas de dimensión dos  $S^2 \vee S^2$

**DEFINICIÓN 1.45.** Una subvariedad diferenciable  $N$  de una variedad diferenciable  $M$  es llamada una retracción fuerte de  $M$  si existe una función suave  $F : M \times [0, 1] \mapsto M$ , tal que:

- $F(x, 0) = x$ , para todo  $x \in M$

- $F(x, 1) \in N$ , para todo  $x \in M$
- $F(a, t) = a$ , para todo  $a \in N$  y  $t \in [0, 1]$

Notemos que si existe una retracción fuerte entre dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$ , éstas tendrán el mismo tipo de homotopía.

**EJEMPLO 1.46.** El espacio  $\mathbb{S}^n$  es una retracción fuerte del conjunto  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Para mostrar eso consideremos la función  $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{S}^n$  definida mediante  $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ . A continuación consideramos la retracción

$$H : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0) \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},$$

$$H(x, t) = \frac{tx}{\|x\|} + (1-t)x,$$

la cual evidentemente satisface lo requerido.

**DEFINICIÓN 1.47.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y una aplicación suave  $f : \mathbb{S}^1 \mapsto M$ , con  $f(1) = x_0$ , donde  $x_0 \in M$ . Definimos *el grupo fundamental* de la variedad  $M$  respecto al punto base  $x_0$ , denotado por  $\pi_1(M, x_0)$ , como el grupo formado por las clases de homotopía de  $f$ .

Si podemos encontrar una trayectoria continua  $\gamma$  entre puntos arbitrarios  $x_0, x_1$  de una variedad diferenciable  $M$  (la cual se dirá conexa por trayectorias), entonces se induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales puntuales,

$$\gamma_* : \pi_1(M, x_0) \mapsto \pi_1(M, x_1)$$

(véase [2], parte II) Lo que nos dice que si  $M$  es una variedad diferenciable conexa por trayectorias, el grupo fundamental es independiente del punto base y es denotado simplemente por  $\pi_1(M)$ .

Un resultado inmediato nos dice que dos variedades topológicas conexas por trayectorias que son homeomorfas tiene el mismo grupo fundamental. Ciertamente el recíproco de esta afirmación no se cumple como lo muestra el siguiente Ejemplo.

**EJEMPLO 1.48.** El grupo fundamental de  $\mathbb{R}^n$  es  $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{1\}$  para cualquier entero positivo  $n$ , pero el espacio  $\mathbb{R}^k$  no es homeomorfo al espacio  $\mathbb{R}^l$  si  $k \neq l$ , debido al Teorema de invarianza de dominio.

**EJEMPLO 1.49.** El grupo fundamental de la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$  es  $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$

**EJEMPLO 1.50.** El grupo fundamental de  $\mathbb{T}^2$  es  $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$

Los ejemplos anteriores son extensamente tratados en [2] parte II.

Una de las características, más importantes y apreciadas del grupo fundamental es que se *comporta bien* respecto a las homotopías, esto es:

**TEOREMA 1.51.** *El grupo fundamental es invariante bajo homotopía. Esto es, si dos variedades tienen el mismo tipo homotópico, entonces tienen el mismo grupo fundamental (Véase [2], parte II).*

**EJEMPLO 1.52.**  $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$ , pues  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $\mathbb{S}^{n-1}$  tienen el mismo tipo de homotopía.

### 1.2.2. Grupos de Homología de una variedad topológica

Otro concepto topológico importante fuertemente ligado al de homotopía de una variedad topológica es el de las clases de homología de tal variedad. Mencionamos aquí apenas la homología simplicial, la cual para las características de nuestras variedades coincide con las homologías singular y celular estudiadas extensamente en el tomo III de [2].

**DEFINICIÓN 1.53.** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , la envoltura convexa de  $A$  es la intersección de todos los conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$ .

**DEFINICIÓN 1.54.** Un  $r$  – *simplejo*  $\Upsilon$  en  $\mathbb{R}^n$  es la envoltura convexa de una colección de  $r + 1$  puntos  $\{x_0, \dots, x_r\}$  en  $\mathbb{R}^n$ , tales que  $\{x_1 - x_0, \dots, x_r - x_0\}$  es un conjunto linealmente independiente.

**OBSERVACIÓN 1.55.** Nótese que el 1 – *simplejo* es un segmento de recta, el 2 – *simplejo* es un triángulo, etcétera.

**PROPOSICIÓN 1.56.** Si el  $r$  – *simplejo*  $\Upsilon$  es la envoltura convexa de  $\{x_0, \dots, x_r\}$ , entonces, todo punto de  $\Upsilon$ , tiene una única y distinta representación en la forma  $\sum_{i=0}^r t_i x_i$ , donde  $0 \leq t_i$  y  $\sum_{i=0}^r t_i = 1$ . Los puntos  $x_i$  son llamados los vértices de  $\Upsilon$  (véase [9]).

Si los vértices de  $\Upsilon$  tienen un orden específico, entonces  $\Upsilon$  es un simplejo ordenado. Sean,  $\Upsilon$  un  $r$  – *simplejo* ordenado con vértices  $\{x_0, \dots, x_r\}$  y  $\sigma_r = \{(t_0, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \sum_{i=0}^r t_i = 1, 0 \leq t_i\}$ .

Si definimos una función  $f : \sigma_r \mapsto \Upsilon$  mediante

$$f(t_0, \dots, t_r) = \sum_{i=0}^r t_i x_i$$

entonces  $f$  es un homeomorfismo.

De ésta manera, denotaremos en adelante al simplejo de dimensión  $r$  como  $\sigma_r$ .

**DEFINICIÓN 1.57.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un  $r$  – *simplejo singular* en  $M$  es un encaje continuo

$$\phi : \sigma_r \mapsto M$$

Es decir, el conjunto  $\phi = \phi(\sigma_r) \subset M$  es homeomorfo a  $\sigma_r$ .

**DEFINICIÓN 1.58.** Si  $\phi$  es un  $r$ -simplejo singular, e  $i$  es un entero tal que  $0 \leq i \leq r$ , definimos  $\partial_i(\phi)$  un  $(r-1)$ -simplejo singular en  $M$ , mediante

$$\partial_i\phi(t_0, \dots, t_{r-1}) = \phi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{r-1})$$

y  $\partial_i(\phi)$  es llamado la  $i$ -ésima cara del  $r$ -simplejo  $\phi$ .

**DEFINICIÓN 1.59.** Un grupo abeliano  $G$  es *libre* si existe un conjunto  $A \subset G$  tal que, cada  $g \in G$  tiene una única representación

$$g = \sum_{x \in A} n_x \cdot x$$

donde  $n_x$  es un entero igual a cero excepto para un número finito de  $x \in A$ .

El conjunto  $A$  es llamado una base para  $G$ .

**EJEMPLO 1.60.**  $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo abeliano libre, pues el conjunto  $\{1\}$  es una base.

Si  $M$  es una variedad diferenciable, se define el espacio  $S_r(M)$  como el grupo abeliano libre cuya base es el conjunto de todos los  $r$ -simplejos de  $M$ . Un elemento de  $S_r(M)$  es llamado una  $r$ -cadena singular de  $M$ , y tiene la forma

$$C_r = \sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi$$

donde  $n_{\phi}$  es un entero igual a cero excepto para un número finito de cadenas  $\phi$ .

**DEFINICIÓN 1.61.** Se define el operador frontera entre los grupos de cadenas  $S_r(M)$  y  $S_{r-1}(M)$

$$\partial : S_r(M) \mapsto S_{r-1}(M)$$

mediante la relación

$$\partial = \sum_{i=0}^r (-1)^i \partial_i$$

**DEFINICIÓN 1.62.** Para el operador  $\partial$  mencionado, el conjunto de los  $r$  – *ciclos* de  $S_r(M)$ , se define como

$$Z_r(M) = \{c \in S_r(M) \mid \partial(c) = 0\}$$

y a cada elemento de este conjunto se le llama también una cadena cerrada en  $M$ .

**DEFINICIÓN 1.63.** El conjunto de los elementos exactos de  $S_r(M)$ , se define como

$$B_r(M) = \{d \in S_r(M) \mid \exists e \in S_{r+1}(M) \text{ con } d = \partial(e)\}$$

Notemos que  $B_r(M)$  y  $Z_r(M)$  son subgrupos de  $S_r(M)$  (que es un grupo libre abeliano aditivo) pues

$$\partial(c + b) = \partial(c) + \partial(b)$$

para cualesquiera  $c, b \in S_r(M)$ , además de que se puede verificar directamente que  $B_r(M)$  es un subgrupo normal de  $Z_r(M)$ .

**DEFINICIÓN 1.64.** El cociente de los grupos

$$H_r(M) = \frac{Z_r(M)}{B_r(M)}$$

es llamado el  $r$  –ésimo grupo de homología de  $M$ , cuyos elementos son llamados clases de homología.

Es claro que dos ciclos son *homólogos*, si su diferencia es un elemento frontera, es decir una  $r$ -cadena exacta.



Ya que para  $r = 0$  no tiene sentido hablar de ciclos exactos, se define el grupo cero de homología de una variedad como su número de componentes conexas, es decir,

$$H_0(M) = \text{número de componentes conexas de } (M).$$

Ahora definiremos lo que es una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos, concepto que nos ayudará a calcular indirectamente los grupos de homología de las variedades integrales mencionadas.

**DEFINICIÓN 1.65.** Una sucesión (tripleta) de grupos abelianos y homomorfismos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se llamará exacta si el conjunto imagen de  $f$  coincide con el núcleo del homomorfismo  $g$ , esto es,

$$\text{Im}(f) = \ker(g)$$

**DEFINICIÓN 1.66.** Una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\dots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \dots$$

se llamará exacta si, cada tripleta es exacta.

**EJEMPLO 1.67.** Si la sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces  $f$  es un isomorfismo.

El siguiente teorema, enuncia una de las características más importantes de los grupos de homología, de espacios homotópicos

**TEOREMA 1.68.** *El  $r$ -ésimo grupo de homología de una variedad topológica se conserva bajo homotopía, es decir, si dos variedades tienen el mismo tipo de homotopía, entonces tienen el mismo  $r$ -ésimo grupo de homología.*

**EJEMPLO 1.69.** Debido a que  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $\mathbb{S}^{n-1}$  tienen el mismo tipo de homotopía, por el Teorema 1.68 se sigue que ambos espacios tienen los mismos grupos de homología, es decir,

$$H_r(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = H_r(\mathbb{S}^{n-1})$$

para todo entero positivo  $r$ .

**EJEMPLO 1.70.** Ya se mencionó en el Ejemplo 1.44 que los conjuntos  $\mathbb{R}^3 \setminus \{2 \text{ puntos}\}$  y  $S^2 \vee S^2$  formado por dos esferas que se intersecan en un único punto (ramillete de dos esferas) tienen el mismo tipo de homotopía. Consecuentemente, por el Teorema 1.68, se tiene que sus grupos de homología son isomorfos, es decir, para cualquier  $r$  entero no negativo se cumplen las igualdades

$$H_r(\mathbb{R}^3 \setminus \{2 \text{ puntos}\}) = H_r(S^2 \vee S^2).$$

# Capítulo 2

## Elementos del cálculo de variaciones

### 2.1. Formulación Lagrangiana de las ecuaciones de movimiento

Sean  $M$  una variedad y  $TM$  el haz tangente a dicha variedad; dados cualesquiera dos puntos  $p = (x_1^1, \dots, x_n^1)$  y  $q = (x_1^2, \dots, x_n^2)$  fijos en la variedad  $M$ , consideramos el conjunto de todos los arcos suaves

$$\gamma : x_i = x_i(t), \quad a \leq t \leq b$$

que unen a los dos puntos, es decir,  $x_i(a) = x_i^1$ ,  $x_i(b) = x_i^2$ .

Sea  $L : TM \mapsto \mathbb{R}$ , una aplicación suave. Para cada arco suave  $\gamma$  definimos

$$S[\gamma] = \int_p^q L(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (2.1)$$

una funcional que le asocia el número  $S[\gamma]$  y que es llamada la funcional de acción.

**TEOREMA 2.1** (véase [2]). *Sea  $S$  el funcional (2.1), si  $S$  alcanza un valor real mínimo sobre todos los arcos suaves que unen a dos puntos arbitrarios fijos  $p, q$ , en el arco  $\gamma_0 : x_i = x_i(t)$ . Entonces a lo largo del arco  $\gamma_0$ , se satisfacen las relaciones*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

llamadas las Ecuaciones de Euler-Lagrange, donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\dot{x}}$$

y

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \ddot{x}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial x_j} \dot{x}_j \Big|_{\xi=\dot{x}}$$

Las soluciones de las ecuaciones (2.2) son llamados los arcos extremales o simplemente los extremales de la funcional  $S$ .

**DEFINICIÓN 2.2.** La función  $L = L(x, \xi) = L(x, \dot{x})$  es llamada el Lagrangiano de la acción  $S$ .

Introducimos la terminología convencional:

- La energía del sistema denominada por  $E$  es definida mediante

$$E = L(x, \dot{x}) = E(x, \xi) = \xi_i \frac{\partial L}{\partial \xi_i} - L = \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

- El momento está determinado por las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$$

- La fuerza se define mediante

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

Consecuentemente, las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2) asociadas a las extremales se pueden escribir en la forma más simple

$$\dot{p}_i = f_i.$$

## 2.2. El problema de n-cuerpos

Después de la breve explicación sobre los elementos del cálculo de variaciones necesarios, comenzamos la formulación Lagrangiana del problema de los  $n$ -cuerpos con posiciones de las partículas puntuales en  $x_i \in \mathbb{R}^3$ , las cuales están moviéndose bajo la influencia de fuerzas gravitacionales newtonianas, considerando para ello el Lagrangiano

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \langle \dot{x}_i, \dot{x}_i \rangle - U(x),$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , representa el producto interno (métrica euclidiana) en  $\mathbb{R}^3$  y  $U(x)$  es la función potencial gravitacional. Tal campo escalar depende únicamente de la posición, y está definida mediante la relación

$$U(x) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i m_j}{\langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.3)$$

Habiendo definido de ese modo el Lagrangiano, obtenemos la fuerza del sistema mediante el sistema

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{m_i m_j}{\langle x_i - x_j, x_i - x_j \rangle^{\frac{1}{2}}} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|^3} (x_i - x_j) \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_k} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right).$$

Particularmente, para el caso  $k = i$  se tiene el sistema

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = f_i = \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|^3} (x_i - x_j)$$

que nos provee las ecuaciones de movimiento de  $n$ -partículas en el espacio moviéndose bajo la influencia del mencionado potencial (2.3).

Esto es, las ecuaciones de movimiento de Newton están dadas por el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|^3} (x_i - x_j). \quad (2.4)$$

Por otro lado, si consideremos la variación

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2m_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_i,$$

al tomar  $k = i$  obtenemos,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i$$

el cual es llamado el momento.

Dado que en un planteamiento Lagrangiano, la energía total del sistema está definida mediante

$$E = \dot{x}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

Obtenemos para este Lagrangiano, la siguiente expresión para la energía

$$E = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i \cdot \dot{x}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i \cdot \dot{x}_i - \sum_{i=1}^n \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|},$$

es decir,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i \cdot \dot{x}_i - \sum_{i=1}^n \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}.$$

### 2.3. Variedades integrales de un problema de $n$ -cuerpos

En el problema de los  $n$ -cuerpos, uno de los objetivos consiste en encontrar las soluciones planteadas por las ecuaciones de movimiento de Newton, de un sistema de  $n$  partículas puntuales, con masas no necesariamente iguales, que son afectadas únicamente por las fuerzas de atracción existentes entre ellas, es decir, describir el movimiento de dichas partículas.

Dados  $n$  números reales y positivos,  $m_1, \dots, m_n$ , que representan las masas de  $n$  partículas puntuales, consideramos el espacio de configuración del problema de los  $n$ -cuerpos en el espacio tridimensional, con centro de masa

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

en el origen de coordenadas, como el subconjunto  $M \setminus \Delta$  del espacio lineal

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \mid \sum_{i=0}^n m_i x_i = 0\},$$

donde

$$\Delta = \bigcup \Delta_{ij}, \quad i < j, \quad \Delta_{ij} = \{x \in M \mid x_i = x_j\} \quad (2.5)$$

es el conjunto singular (de colisiones) del problema.

La energía  $E$  y el momento angular  $J$  del sistema son entonces definidos en  $(M \setminus \Delta) \times M$  mediante:

$$E(x, v) = K(v) + V(x) \quad (2.6)$$

y

$$J(x, v) = \sum_{i=1}^n m_i x_i \wedge v_i, \quad (2.7)$$

donde,

$$K(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |v_i|^2 \quad (2.8)$$

y

$$V(x) = - \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} \quad (2.9)$$

son la energía cinética y potencial respectivamente del problema (véase [2]).

Una integral de movimiento, es una función real definida en el espacio de configuración que cuando se evalúa a lo largo de las curvas soluciones del problema (2.4) resultará constante. Ejemplo de ellas, son el momento angular, la energía y el centro de masa (véase [2]).

**DEFINICIÓN 2.3.** Para la aplicación

$$I = (E, J) : (M \setminus \Delta) \times M \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

definida mediante

$$I(x, v) = (E(x, v), J(x, v))$$

llamamos a los espacios

$$I_{cp} = I^{-1}(c, p) \quad (2.10)$$



contenidos en  $(M \setminus \Delta) \times M$  las variedades integrales invariantes del problema de los  $n$ -cuerpos en el nivel de energía fijo  $E = c$  y momento angular también fijo  $J = p$ .

Por el Teorema de Sard 1.21, para casi toda pareja de valores  $(c, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  (en el sentido de la medida de Lebesgue), el conjunto  $I_{c,p}$  definido en (2.10) es una variedad diferenciable de codimensión 4 en  $(M \setminus \Delta) \times M$ , es decir, es una subvariedad de dimensión  $2n - 4$  de tal espacio fase.

Un cálculo directo nos demuestra que las funciones (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9) son invariantes bajo el grupo de isometrías  $SO(3)$ , lo cual implica directamente que las variedades integrales  $I_{cp}$  también lo son. Este hecho puede ser usado para reducir el estudio del problema a dimensiones menores (véase [6]).



# Capítulo 3

## Soluciones especiales del problema de $n$ -cuerpos

Mostramos en este capítulo algunos tipos de soluciones del problema de  $n$ -cuerpos, las cuales aparecen de manera natural según las transformaciones conformes de la geometría (conforme) propia del espacio euclidiano.

En otras palabras, según el Teorema de Liouville (véase [2]) cada una de tales transformaciones es la composición de isometrías del espacio con homotecias e inversiones. Cada una de estas últimas transformaciones genera soluciones distinguidas del problema (2.4) las cuales tienen también un nombre distinguido en la literatura clásica.

### 3.1. Configuraciones Centrales

Comenzamos por mostrar las soluciones de (2.4) asociadas a las homotecias y llamadas configuraciones centrales.

Consideramos un punto  $z_0 \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ . Llamamos a  $z_0$  una *configuración central* del problema de los  $n$ -cuerpos, si existe una función

$r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , (con  $r(t) > 0$  para toda  $t$ ), tal que la función

$$z(t) = r(t)z_0$$

es también una solución del problema de los  $n$ -cuerpos, es decir, satisface la ecuación (2.4).

En virtud de que  $z(t)$  es una solución y utilizando la homogeneidad de grado  $-1$  del potencial obtenemos,

$$\ddot{r}mz_0 = \nabla V(rz_0) = \frac{\nabla V(z_0)}{r^2}.$$

Aquí,

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

es el vector gradiente y

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dots & & & m_n \end{bmatrix}$$

es la matriz diagonal de masas.

Usando nuevamente la homogeneidad del potencial y multiplicando por  $z_0^T$  obtenemos ahora

$$\ddot{r}z_0^T m z_0 = \frac{-V(z_0)}{r^2}.$$

Poniendo  $\lambda = \frac{V(z_0)}{2K(z_0)}$ , podemos escribir  $\ddot{r} = -\frac{\lambda}{r^2}$  de modo que reformulamos la ecuación de movimiento en la forma

$$m^{-1}\nabla V(z_0) + \lambda z_0 = 0. \quad (3.1)$$

### 3.1.1. El caso de una configuración de Euler

Las configuraciones centrales tienen la importancia de que nos permiten crear soluciones nuevas de manera explícita al problema de los  $n$ -cuerpos, pues es bien sabido que la ecuación (2.4) es de difícil solución. Para evidenciar esto, daremos una pequeña revisión al caso de una configuración de Euler.

Sea  $z_0 = (z_1, z_2, z_3)$ , donde las partículas están en orden sobre una línea, esto es, sin pérdida de generalidad,  $z_1 < z_2 < z_3$  en  $\mathbb{R}$ .

En este caso

$$V(z_0) = \frac{m_1 m_2}{|z_1 - z_2|} + \frac{m_1 m_3}{|z_1 - z_3|} + \frac{m_2 m_3}{|z_2 - z_3|},$$

entonces

$$\frac{\partial V(z_0)}{\partial z_1} = \frac{m_1 m_2}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{m_1 m_3}{|z_1 - z_3|^2},$$

$$\frac{\partial V(z_0)}{\partial z_2} = -\frac{m_1 m_2}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{m_2 m_3}{|z_2 - z_3|^2}$$

y

$$\frac{\partial V(z_0)}{\partial z_3} = -\frac{m_1 m_3}{|z_1 - z_3|^2} - \frac{m_2 m_3}{|z_2 - z_3|^2},$$

de modo que

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial V(z_0)}{\partial z_1} = \frac{m_2}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{m_3}{|z_1 - z_3|^2},$$

$$\frac{1}{m_2} \frac{\partial V(z_0)}{\partial z_2} = -\frac{m_1}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{m_3}{|z_2 - z_3|^2},$$

y

$$\frac{1}{m_3} \frac{\partial V(z_0)}{\partial z_3} = -\frac{m_1}{|z_1 - z_3|^2} - \frac{m_2}{|z_2 - z_3|^2}.$$

De la ecuación (3.1) deducimos que

$$\frac{m_2}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{m_3}{|z_1 - z_3|^2} + \lambda z_1 = 0,$$

$$-\frac{m_1}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{m_3}{|z_2 - z_3|^2} + \lambda z_2 = 0,$$

y

$$-\frac{m_1}{|z_1 - z_3|^2} - \frac{m_2}{|z_2 - z_3|^2} + \lambda z_3 = 0.$$

De lo cual se obtiene

$$0 = \lambda(z_2 - z_1) - \frac{m_1 + m_2}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{m_3}{|z_2 - z_3|^2} - \frac{m_3}{|z_1 - z_3|^2},$$

$$0 = \lambda(z_3 - z_1) - \frac{m_1 + m_3}{|z_1 - z_3|^2} - \frac{m_2}{|z_2 - z_3|^2} - \frac{m_2}{|z_1 - z_2|^2}.$$

(3.2)

Si hacemos  $x = z_2 - z_1$ ,  $y = z_3 - z_1$ , el sistema (3.2) toma la forma

$$\lambda x - \frac{m_1 + m_2}{|x|^2} + \frac{m_3}{|x - y|^2} - \frac{m_3}{|y|^2} = 0,$$

$$\lambda y - \frac{m_1 + m_3}{|y|^2} - \frac{m_2}{|x - y|^2} - \frac{m_2}{|x|^2} = 0.$$

(3.3)

Si eliminamos  $\lambda$  del sistema (3.3) y utilizamos la variable proyectiva  $w = \frac{y}{x}$  se obtiene la ecuación polinomial de quinto grado

$$(m_1 + m_2)w^5 + (3m_1 + 2m_2)z^4 + (3m_1 + m_2)z^3 - (3m_3 + m_2)z^2 - (3m_3 + 2m_2)z - (m_3 + m_2) = 0$$

(3.4)

Una solución positiva de la ecuación (3.4) determinará una configuración central de tres cuerpos colineal. Es posible mostrar mediante

métodos estándares que tal ecuación tiene únicamente una raíz real positiva  $\hat{w}$ . De hecho, si  $m_1 < m_3$ , entonces  $\hat{w} > 1$ , mientras que si  $m_1 > m_3$ , entonces  $\hat{w} < 1$ .

Éstas son de las primeras soluciones explícitas para el problema de 3 cuerpos.

### 3.2. Equilibrios relativos

El segundo ejemplo de soluciones naturales del problema (2.4) son aquellas que se obtienen de hacer actuar el grupo de transformaciones isométricas  $SO(3)$  dentro del espacio total de soluciones. Tal tipo de soluciones recibe el nombre distinguido de equilibrios relativos.

Una configuración  $z_0 \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$  es llamada un *equilibrio relativo* del problema de los  $n$ -cuerpos, si para un subgrupo a un parámetro  $A(t) \in SO(3)$  con  $A(0) = I$ , la función

$$z(t) = A(t)z_0$$

es una solución del problema (2.4).

Nótese que

$$Az_0 = \begin{bmatrix} Az_{01} \\ Az_{01} \\ \vdots \\ Az_{0n} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.5) en la ecuación (2.4) obtenemos

$$\ddot{A}mz_0 = A\nabla V(z_0)$$

o bien,

$$A^{-1}\ddot{A}mz_0 = \nabla V(z_0).$$

Consideremos la matriz  $W(t) = A^{-1}\dot{A}$ , la cual pertenece a  $so(3)$  (el álgebra de Lie del grupo  $SO(3)$  según el Ejemplo 1.36) debido a que  $\dot{A} \in so(3)$ .

Así, podemos escribir

$$W(t) = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix},$$

matriz a la que podemos asociar un vector  $w(t) = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  en virtud de que  $so(3) \cong \mathbb{R}^3$ , como álgebras de Lie. Tal isomorfismo de Álgebras de Lie es de modo que dado  $x \in \mathbb{R}^3$ , la asociación se realiza mediante la igualdad

$$Wx = w \wedge x.$$

El vector  $w(t)$  tiene entonces la interpretación de un vector de *velocidad angular*.

Calculamos

$$\dot{W} = A^{-1}\ddot{A} - (A^{-1}\dot{A}A^{-1})\dot{A} = A^{-1}\ddot{A} - W^2,$$

lo que implica que

$$A^{-1}\ddot{A} = \dot{W} + W^2$$

y dada la forma de  $W$  obtenemos que

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{bmatrix} -(w_2^2 + w_3^2) & -\dot{w}_3 + w_1w_2 & \dot{w}_2 + w_1w_3 \\ \dot{w}_3 + w_1w_2 & -(w_1^2 + w_3^2) & -\dot{w}_1 + w_2w_3 \\ -\dot{w}_2 + w_1w_3 & \dot{w}_1 + w_2w_3 & -(w_1^2 + w_2^2) \end{bmatrix}.$$

Se mostrará que  $w(t)$  es un vector constante, lo cual implicaría que  $A(t)$  es una rotación uniforme alrededor de un eje fijo.

Sabemos que

$$A^{-1}\ddot{A}z_{0i} = m^{-1}\nabla V(z_0) = \text{cte.}$$

Consideramos entonces tres casos.



1. Los vectores  $z_{01}, \dots, z_{0n}$  generan el espacio  $\mathbb{R}^3$ .
2. Los vectores  $z_{01}, \dots, z_{0n}$  generan el espacio  $\mathbb{R}^2$ .
3. Los vectores  $z_{01}, \dots, z_{0n}$  generan el espacio  $\mathbb{R}$ .

En el primero de esos casos,  $A^{-1}\ddot{A}$  es una matriz constante, puesto que es lineal y permanece fija para alguna base de  $\mathbb{R}^3$ . Supongamos ahora que los  $z_{0i}$  generan a  $\mathbb{R}^2$ , entonces, la matriz  $A^{-1}\ddot{A}$  es constante sobre  $\mathbb{R}^2$  y aplica a  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo, por lo que toma la forma

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & * \\ c_{21} & c_{22} & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Comparando con la fórmula (3.2) obtenemos los sistemas

$$\begin{aligned} w_2^2 + w_3^2 &= -c_{11}, & -\dot{w}_3 + w_1w_2 &= c_{12} \\ w_1^2 + w_3^2 &= -c_{22}, & \dot{w}_3 + w_1w_2 &= c_{21}. \end{aligned}$$

De lo cual se sigue que la matriz  $A^{-1}\ddot{A}$  tiene la forma

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} = \text{cte.}$$

Finalmente, si los vectores  $z_{0i} \in \mathbb{R}$  son colineales, podemos asumir  $w(0) = (w_{01}, 0, w_{03})$ , entonces, en virtud de que  $A(0) = I$ , las velocidades iniciales  $\dot{z}_i(0) = w(0) \wedge z_{0i}$ , están en  $\mathbb{R}^2$ , de modo que todo el movimiento se realiza en  $\mathbb{R}^2$  y se deduce entonces que  $w(t) = (0, 0, w_3(t))$ . Además, como  $A^{-1}\ddot{A}$  debe aplicar  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  concluimos que

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{bmatrix} -w_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -w_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{cte.}$$

Después de analizar los tres casos, podemos concluir que el vector  $w(t)$  es constante.

Como ya sabemos que  $w(t) = w_0 = \text{cte.}$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $w_0 = (0, 0, k)$ , y entonces, en todos los casos,

$$A^{-1}\ddot{A} = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{cte.}$$

De la ecuación (3.2), se sigue que las aceleraciones están en el plano y que el primer caso considerado es imposible. Ahora, dado que  $z_{0i} \in \mathbb{R}^2$ , reemplazamos a  $A^{-1}\ddot{A}$  por  $-k^2 I$  y mostramos que  $z_0$  satisface la relación

$$m^{-1}\nabla V(z_0) + \lambda z_0 = 0,$$

donde  $\lambda = k^2 > 0$ .

De este modo, hemos mostrado que un equilibrio relativo es una solución plana de (3.1).

Por otro lado, dado un equilibrio relativo, obtenemos una solución periódica del problema de los  $n$ - cuerpos, que rota de manera rígida alrededor del centro de masa con un periodo  $\frac{2\pi}{\lambda}$ . Para ejemplificar tenemos las configuraciones centrales colineales de Euler. Lagrange descubrió que los triángulos equiláteros son equilibrios relativos del problema de 3-cuerpos, para una elección arbitraria de las masas.

### 3.3. Soluciones homográficas

Combinando las soluciones de configuración central y de equilibrio relativo, podemos construir soluciones más generales, las cuales son

llamadas *soluciones homográficas* y tienen el tipo

$$z(t) = r(t)A(t)z_0 \quad (3.6)$$

donde  $r(t) > 0$  es una función real suave,  $A(t) \in SO(3)$  es una isometría y  $z_0 \in M$ .

Sustituyendo la relación (3.6) en la ecuación (2.4) obtenemos la relación de homografía para una solución, dada por

$$r^2(\ddot{r}I + 2\dot{r}W + rA^{-1}\ddot{A})z_0 = M^{-1}\nabla V(z_0) \quad (3.7)$$

donde  $W = A^{-1}\dot{A}$ .

Nótese que en las soluciones homográficas tenemos dos casos simples

- Si  $A(t) = I$ ,  $W(t) = 0$ , obtenemos una solución del tipo configuración central.
- Si  $r(t) = cte = 1$ , estamos en el caso de un equilibrio relativo.

Consideremos la matriz del lado izquierdo de la ecuación (3.7):

$$B(t) = r^2 \begin{bmatrix} \ddot{r} - r(w_2^2 + w_3^2) & -r\dot{w}_3 - 2\dot{r}w_3 + rw_1w_2 & r\dot{w}_2 + 2\dot{r}w_2 + rw_1w_3 \\ r\dot{w}_3 + 2\dot{r}w_3 + rw_1w_2 & \ddot{r} - r(w_1^2 + w_3^2) & -r\dot{w}_1 - 2\dot{r}w_1 + rw_2w_3 \\ -r\dot{w}_2 - 2\dot{r}w_2 + rw_1w_3 & r\dot{w}_1 + 2\dot{r}w_1 + rw_2w_3 & \ddot{r} - r(w_1^2 + w_2^2) \end{bmatrix}.$$

donde,  $w(t) = (w_1, w_2, w_3)$  es el vector de velocidad angular asociado a la matriz antisimétrica  $W(t)$ .

Suponiendo que los vectores  $z_{01}, \dots, z_{0n}$  generan  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ , la restricción de la matriz  $B$  a  $\mathbb{R}^2$ , tendría la forma

$$B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & * \\ c_{21} & c_{22} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

lo cual implica directamente que

$$\begin{aligned} c_{22} - c_{11} &= r^3 w_1^2 - r^3 w_2^2 \\ c_{12} + c_{21} &= 2r^3 w_1 w_2 \end{aligned}$$

de donde se sigue que los vectores  $r^{3/2}w_1$  y  $r^{3/2}w_2$  son constantes.

En el caso en que  $z_{01}, \dots, z_{0n}$  generan a  $\mathbb{R}^3$ , podemos asumir que  $w(0)_1 = 0 = w(0)_2$  y así  $r^{3/2}w(t)_i = 0 = r^{3/2}w(0)_i$ , para  $i = 1, 2$ . En el caso en que  $z_{01}, \dots, z_{0n}$  generan  $\mathbb{R}^2$ , las entradas  $B_{31}$  y  $B_{32}$  se anulan, dicha condición se puede reescribir matricialmente, usando el hecho de que  $r^{3/2}w_i$  es constante, de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{r} & rw_3 \\ rw_3 & -\frac{1}{2}\dot{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por esto se tiene que  $w_1 = 0 = w_2$  o bien  $\dot{r} = 0 = w_3$ . Observemos que en el último de estos dos casos tendríamos el comportamiento de un equilibrio relativo.

Hemos mostrado que  $w$  tiene la forma  $w(t) = (0, 0, w_3(t))$ , de donde se deduce que la matriz tiene la forma canónica

$$\begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y  $w_3(t) = \dot{\theta}(t)$ , lo que nos da una nueva expresión para la matriz  $B$  de tipo

$$B(t) = r^2 \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & -r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} & 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{r} \end{bmatrix}$$

Usando el momento angular, se puede mostrar que las entradas de la matriz  $B$ , son nulas fuera de la diagonal y que  $r^2\dot{\theta} = c = cte.$ ,

además, de la ecuación  $Bz_0 = m^{-1}\nabla V(z_0)$ , se sigue, en todos los casos, que la entrada  $B_{11}$  es constante, por lo que, existe un escalar  $\lambda$ , tal que

$$B(t) = r^2 \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

En el caso en que los vectores  $z_{0i}$  generen al espacio  $\mathbb{R}^3$ , la matriz  $B$  es constante y tenemos de (3.8) que

$$r^2\ddot{r} = c_{33} \quad \text{y} \quad r^3\dot{\theta}^2 = \widehat{c}$$

Ya que de hecho sabemos que  $r^2\dot{\theta} = \text{cte} = c$ , entonces tenemos dos posibilidades,

- $\widehat{c} = c = \dot{\theta} = 0$ ,
- $r(t) = \text{cte}$ .

El segundo caso implica que  $\ddot{r} = 0$ , lo que como consecuencia inmediata tiene que  $B_{33} = 0$  y así  $B$  aplicaría sobre  $\mathbb{R}^2$ . Por otro lado, de la relación  $Bz_0 = m^{-1}\nabla V(z_0)$  se deduce que la configuración  $z_0$  sería plana, lo que es una contradicción.

Consecuentemente, las únicas soluciones homográficas con configuraciones no planas, son las soluciones que colapsan homotéticamente a configuraciones centrales.



# Capítulo 4

## Problema de los $n$ -cuerpos en el plano

Ahora damos un esbozo del estudio topológico de las variedades integrales en el problema de los  $n$ -cuerpos en el plano realizada por Smale en [5] y [6]. Los teoremas y resultados aquí mencionados serán de vital importancia en el desarrollo del caso espacial en el presente trabajo.

### 4.1. Teoremas y resultados para el espacio bidimensional

Dados  $n$  números reales y positivos,  $m_1, \dots, m_n$ , que representan las masas de  $n$  partículas puntuales, consideramos el espacio de configuración del problema de los  $n$ -cuerpos en el espacio bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , con centro de masa en el origen, como el subconjunto  $M \setminus \Delta$  del espacio lineal

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid \sum_{i=0}^n m_i x_i = 0\}$$

## 52. TEOREMAS Y RESULTADOS PARA EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

donde  $\Delta$  está definido por la ecuación (2.5).

La energía  $E$  y el momento angular  $J$  son definidos en  $(M \setminus \Delta) \times M$  mediante las ecuaciones (2.6) y (2.7).

La energía cinética  $K(x, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i x_i v_i$  define una métrica riemanniana, y denotamos por  $S_k$  a la esfera unitaria en  $M$  respecto a la norma inducida, es decir,

$$\|x\|_k = \sqrt{K(x, x)}.$$

Consideramos la aplicación

$$I = (E, J) : (M \setminus \Delta) \times M \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

definida mediante

$$I(x, v) = (E(x, v), J(x, v))$$

y a los espacios  $I_{cp} = I^{-1}(c, p)$  como las variedades integrales del problema de los  $n$  cuerpos (véanse los Teoremas 1.21 y 1.19).

Denotamos también con  $E(S_k)$  al haz vectorial (véase el Ejemplo 1.40) sobre  $S_k$  con fibra  $E_z$ , donde para cada  $z \in S_k$ , tal fibra está definida mediante  $E_z = J_z^{-1}(0)$  y denotamos también por  $S(E(S_k))$  al haz unitario, como en la Definición 1.28.

Para el problema de los  $n$ -cuerpos en el espacio bidimensional con masas positivas arbitrarias  $m_1, \dots, m_n$ , se tiene el siguiente Teorema (véase [6]):

**TEOREMA 4.1.** *En el problema de los  $n$ -cuerpos, para una elección arbitraria de las masas, bajo el supuesto de que  $p = 0$ , se tiene,*

a) *Para cada  $c \geq 0$  existe una aplicación*

$$\varphi_c : I_{cp} \mapsto S(E(S_k \setminus \Delta)) \times \mathbb{R}^+$$

*que es un difeomorfismo entre tales espacios.*



b) Para cada  $c < 0$  existe una aplicación

$$\varphi_c : I_{cp} \mapsto E(S_k \setminus \Delta)$$

que es un difeomorfismo entre tales espacios.

Más aún, tal familia de difeomorfismos es suaves en el parámetro de energía  $c$

*Demostración.* Primero, haremos la sencilla pero muy útil identificación de  $M \setminus \{0\}$  con  $\mathbb{R}^+ \times S_k$  mediante el difeomorfismo

$$x \mapsto \left( |x|_k, \frac{x}{|x|_k} \right) \tag{4.1}$$

mismo que identifica a los espacios  $M \setminus \Delta$  con  $\mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta)$

Consideramos primeramente el caso cuando  $c \geq 0$ ,  $p = 0$ . Haciendo uso de tal identificación podemos escribir

$$I_{cp} = \{(t, z, v) \in \mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times M \mid v \in J_{tz}^{-1}(0), K(v) = c - V(tz)\}$$

donde  $K(v)$  y  $V(x)$ , la energía cinética y la potencial, están determinadas por las ecuaciones (2.8) y (2.9).

Así, definimos el difeomorfismo buscado

$$\varphi_c : I_{cp} \mapsto S(E(S_k \setminus \Delta)) \times \mathbb{R}^+$$

mediante

$$\varphi_c(t, z, v) = \left( \frac{v}{|v|_k}, t \right)$$

lo que prueba la parte a).

Si consideramos ahora  $c < 0$  y  $p = 0$  y definamos la aplicación

$$t_1 : (-\infty, 0) \times (S_k \setminus \Delta) \mapsto \mathbb{R}$$

**34.** TEOREMAS Y RESULTADOS PARA EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

implícitamente como

$$t_1(c, z) = V(cz)$$

quedando caracterizada por  $V(t_1(cz)z) = c$ , debido a que

$$V(t_1z) = \frac{V(z)}{t_1} = \frac{V(z)}{V(ca)} = \frac{V(z)}{\frac{V(z)}{c}} = c$$

y donde, por comodidad hemos escrito  $t_1 = t_1(c, z)$ . Por lo anterior reescribimos

$$I_{cp} = \{(t, z, v) | 0 < t \leq t_1(cz), v \in J_{tz}^{-1}(0), K(v) = c - V(tz)\}$$

y entonces, definimos finalmente el siguiente difeomorfismo

$$\varphi_c : I_{cp} \mapsto E(S_k \setminus \Delta)$$

mediante

$$\varphi_c(t, z, v) = v,$$

lo cual prueba la parte b) mencionada y concluye la prueba del Teorema.  $\square$

Otro resultado importante es el siguiente.

**TEOREMA 4.2.** *En el problema de los  $n$ -cuerpos en el plano, para una elección arbitraria de las masas, y bajo el supuesto de que  $c \geq 0$ ,  $p \neq 0$ , existen difeomorfismos (suaves en  $c, p$ )*

$$\varphi_{cp} : I_{cp} \mapsto E(S_k \setminus \Delta)$$

*Demostración.* Sea la aplicación

$$t_0 : \mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mapsto \mathbb{R}$$

definida implícitamente mediante

$$V_p(t_0(c, z, p), z) = c$$

Ésto es,

$$V_p(t_0z) = V(t_0z) + \frac{p^2}{4K(t_0z)} = \frac{V(z)}{t_0} + \frac{p^2}{4K(t_0z)} = c$$

lo cual implica que

$$t_0 = \frac{V(z) + \sqrt{V^2(z) + cp^2}}{2c}$$

para  $c > 0$  y

$$t_0 = \frac{-p^2}{4V(z)}$$

para  $c = 0$ .

Tales relaciones definen una función suave entre los puntos  $(c, z, p)$  y  $[0, \infty)$  (véase Definición 1.10).

Consecuentemente, podemos escribir a las variedades integrales como

$$I_{cp} = \{(t, z, v) \in \mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times M \mid t_0(c, z, p) \leq t < \infty, \\ v \in J_{tz}^{-1}(p), \quad K(v) = c - V(tz)\}.$$

Sean,  $D$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^+$  para el cual  $t_0(c, z, p) \leq t$  y una aplicación suave

$$\lambda : D \mapsto \mathbb{R}$$

con las siguientes propiedades.

- $\lambda$  es la identidad en alguna vecindad de la frontera de  $D$  (i.e  $t = t_0$ )

**36.** TEOREMAS Y RESULTADOS PARA EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

- $\lambda^2(c - V_p(tz))$  es una función monótona y estrictamente creciente de  $t$  que tiende a infinito cuando  $t$  tiende a infinito.
- $\lambda$  es  $SO(3)$ -invariante, donde tal grupo actúa sobre  $S_k \setminus \Delta$  en la manera usual (véase ejemplo 1.38) y trivial en otro caso.

Del trabajo de Smale [6] utilizamos el campo vectorial tangente y suave  $\alpha_p$  definido sobre  $M \setminus \Delta$  y caracterizado por

- $\alpha_p(x) \in J_x^{-1}(p)$
- $\alpha_p(x) \perp J_x^{-1}(0), \quad \forall x \in M \setminus \Delta.$

Utilizaremos el siguiente Lema para finalizar la prueba del Teorema 4.2.

**LEMA 4.3.** *Se cumple la relación*

$$K(\lambda(v - \alpha_p(tz))) = \lambda^2(c - V_p(tz))$$

*Demostración.* Primero consideremos la cadena de igualdades

$$\begin{aligned} J(tz, v - \alpha_p(tz)) &= \sum_{i=1}^n tz_i \wedge (v_i - (\alpha_p(tz))_i) \\ &= \sum_{i=1}^n tz_i \wedge v_i - \sum_{i=1}^n tz_i \wedge (\alpha_p(tz))_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

las cuales se siguen debido a que  $v, \alpha_p(tz) \in J_{tz}^{-1}(0)$ .

Tal cadena de igualdades implica que

$$v - \alpha_p(tz) \in J_{tz}^{-1}(0).$$

Por otro lado, se cumple la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} K(v - \alpha_p(tz)) &= K(v - \alpha_p(tz), v - \alpha_p(tz)) \\ &= K(v - \alpha_p(tz), v) - K(v - \alpha_p(tz), \alpha_p(tz)) \\ &= K(v) - K(\alpha_p(tz), v) \end{aligned}$$

debido a que  $\alpha_p(tz) \perp J_{tz}^{-1}(0)$  y  $v - \alpha_p(tz) \in J_{tz}^{-1}(0)$ .

Por otro lado, en virtud de que

$$K(v - \alpha_p(tz), \alpha_p(tz)) = K(v, \alpha_p(tz)) - K(\alpha_p(tz)) = 0,$$

obtenemos

$$K(v, \alpha_p(tz)) = K(\alpha_p(tz))$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} K(v - \alpha_p(tz)) &= K(v) - K(\alpha_p(tz)) \\ &= K(v) - \frac{p^2}{4K(tz)} \\ &= K(v) + V(tz) - V_p(tz) \\ &= c - V_p(tz). \end{aligned}$$

Por lo anterior y dado que  $K$  es homogénea de grado 2, se concluye la prueba del lema.  $\square$

Concluimos la demostración del Teorema 4.2, usando  $\alpha_p$  y  $\lambda$ , definiendo la aplicación  $\varphi_{cp} : I_{cp} \mapsto E(S_k \setminus \Delta)$  mediante

$$\varphi_{cp}(t, z, v) = \lambda(t, z, v)v - \alpha_p(tz)$$

que sustentada en las propiedades de  $\lambda$  y el Lema 4.3, satisface las propiedades requeridas.  $\square$

Para concluir la sección resumimos los resultados sobre la Topología de las variedades integrales del problema de  $n$ -cuerpos en el plano con el siguiente cuadro ilustrativo.

	$I_{cp} \approx$ (difeomorfo)	
	$c \geq 0$	$c < 0$
$p = 0$	$S(E(S_k \setminus \Delta)) \times \mathbb{R}$	$E(S_k \setminus \Delta)$
$p \neq 0$	$E(S_k \setminus \Delta)$	

El caso en que  $p \neq 0$  y  $c < 0$ , es tratado en [1], a donde el lector interesado puede dirigirse.

## 4.2. Variedades integrales en el problema de Kepler.

Dadas dos partículas puntuales, con masas  $m_1, m_2$ , en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , el espacio fase del problema de dos cuerpos en el plano bidimensional, con centro de masa en el origen, es el subconjunto  $M \setminus \Delta$  del espacio lineal

$$M = \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2)^2 \mid m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0\}$$

donde  $\Delta = \{(x_1, x_2) \in M \mid x_1 = x_2\} = \{0\}$ .

Como notación, usaremos  $x = (x_1, x_2)$ , para referirnos a una pareja que se encuentre en  $(\mathbb{R}^2)^2$

La energía  $E$  y el momento angular  $J$  del sistema, son definidos en  $M \setminus \Delta \times M$ , mediante,

$$E(x, v) = K(v) + V(x) \tag{4.2}$$

y

$$J(x, v) = m_1 x_1 \wedge v_1 + m_2 x_2 \wedge v_2 \tag{4.3}$$

respectivamente, donde,

$$K(v) = \frac{1}{2}(m_1|v_1|^2 + m_2|v_2|^2) \quad (4.4)$$

es la energía cinética y

$$V(x) = \frac{-m_1m_2}{|x_1 - x_2|} \quad (4.5)$$

el potencial del problema. Definimos

$$z \wedge y = z_1y_2 - z_2y_1,$$

para  $z, y \in \mathbb{R}^2$ .

Dada la aplicación

$$I = (E, J) : M \setminus \Delta \times M \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

definida mediante

$$I(x, v) = (E(x, v), J(x, v))$$

llamamos como antes, a las imágenes inversas

$$I^{-1}(c, p) = I_{cp}$$

las variedades integrales invariantes del problema de dos cuerpos en el plano, para niveles fijos de energía  $E = c$  y momento angular  $J = p$ . Para ejemplificar el uso de los teoremas 4.1 y 4.2, enunciamos sin demostración el siguiente

**TEOREMA 4.4** (Véase [5]). *En el problema de 2-cuerpos, para una elección arbitraria de las masas:*

a) Cuando  $p \neq 0$

▪ Si  $c \geq 0$ ,  
 entonces  $I_{cp} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ .

▪ Si  $\frac{-1}{2} < cp^2 < 0$ ,  
 entonces  $I_{cp} \simeq S^1 \times S^1$ .

▪ Si  $p^2c < \frac{-1}{2}$ ,  
 se tiene  $I_{cp} = \emptyset$ .

b) Cuando  $p = 0$

▪ Si  $c < 0$ ,  
 entonces  $I_{cp} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ .

▪ Si  $c \geq 0$ ,  
 se tiene  $I_{cp} \simeq S^1 \times S^0 \times \mathbb{R}$

Ahora verificaremos que las variedades integrales, son las que se enuncian en el Teorema 4.4, haciendo uso de los teoremas 4.1 y 4.2, comenzamos por caracterizar a los haces. Primero, dado que el conjunto singular es

$$\Delta = \{0\}$$

tenemos que

$$S_k = \left\{ (x_1, x_2) \in M \mid \frac{1}{2} (m_1|x_1|^2 + m_2|x_2|^2) = 1 \right\} = S_k \setminus \Delta$$

Notemos que

$$\frac{m_1}{m_2}x_1 = -x_2 \tag{4.6}$$

y

$$\frac{m_1}{m_2}v_1 = -v_2 \tag{4.7}$$



son relaciones entre las posiciones y velocidades, que son determinadas por el hecho de elegir el centro de masa situado en el origen.

Si  $(x_1, x_2) \in S_k$ , entonces  $\frac{1}{2}(m_1|x_1|^2 + m_2|x_2|^2) = 1$  y usando la ecuación (4.6), obtenemos

$$|x_1|^2 = \frac{2}{m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}}$$

lo que ubica a  $x_1$  en un círculo.

Al calcular,  $J(x, v)$  y usando las ecuaciones (4.6),(4.7), llegamos a la ecuación

$$J(x, v) = \left( \frac{m_2 + m_1}{m_2} \right) m_1 x_1 \wedge v_1.$$

Como deseamos caracterizar el haz vectorial  $E(S_k)$ , que tiene fibra  $E_z = J_z^{-1}(0)$ , para cada  $z \in S_k$ , igualamos  $J(x, v)$  con 0, es decir

$$\left( \frac{m_2 + m_1}{m_2} \right) m_1 x_1 \wedge v_1 = 0$$

y puesto que los elementos  $x_1$  están en un círculo, podemos hacer la identificación

$$E(S_k) = E(S_k \setminus \Delta) = S^1 \times \mathbb{R},$$

por lo que

$$S(E(S_k \setminus \Delta)) = S^1 \times S^0.$$

Consecuentemente hemos mostrado, según los teoremas 4.1 y 4.2 que

a) Para  $p \neq 0$

- Si  $c \geq 0$ , entonces  $I_{cp} \simeq E(S_k \setminus \Delta) = S^1 \times \mathbb{R}$ .

b) Para  $p = 0$

- Si  $c < 0$ ,  $I_{cp} \simeq E(s_k \setminus \Delta) = S^1 \times \mathbb{R}$ .
- Si  $c \geq 0$ ,  $I_{cp} \simeq S(E(s_k \setminus \Delta)) \times \mathbb{R} = S^1 \times S^0 \times \mathbb{R}$ .

que es lo que se postula en el Teorema 4.4, obtenido por Smale.

Nótese que en el caso de  $p \neq 0$ , son excluidos los casos que no son tratados en éste trabajo, pero el lector interesado, puede dirigirse a [5] y [6]

### 4.3. Variedades integrales en un problema del Cometa

Consideramos el problema de cuatro partículas en el plano euclidiano bidimensional, con masas  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $m_3 = \alpha$  y  $m_4 = \beta$  y cuyas posiciones en el plano son

$$\begin{aligned}
 X_1 &= (x_1, x_2) \\
 X_2 &= (-x_1, x_2) \\
 X_3 &= (0, x_3) \\
 X_4 &= (0, x_4).
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Éste es llamado, el problema del cometa con dos masas iguales a 1, dicho problema tiene momento angular cero, por lo que el estudio de las variedades integrales, se restringirá al caso en que el momento angular  $p$  es igual a cero.

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}x &= x_1. \\y &= x_3 - x_4. \\z &= x_3 - x_2.\end{aligned}$$

Bajo el cambio de coordenadas, el potencial y la energía cinética tienen respectivamente, las siguientes expresiones

$$-U(X) = \frac{1}{2x} + \frac{2\alpha}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{2\beta}{\sqrt{(z - y)^2 + x^2}} + \frac{\alpha\beta}{y}. \quad (4.9)$$

$$K(X) = \frac{\beta(2 + \alpha)y^2 - 4\beta\alpha zy + 2(\alpha + \beta)z^2}{2(\alpha + \beta + 2)} + x^2. \quad (4.10)$$

Y el espacio fase toma la forma

$$Q = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z \in \mathbb{R}\},$$

nótese que todas las colisiones han sido eliminadas del espacio.

La energía está definida del modo usual  $E(X, V) = K(V) + U(X)$ ; enunciamos ahora el siguiente resultado, que caracteriza la topología de las variedades integrales del problema del cometa que estamos tratando

**TEOREMA 4.5.** *En el problema del cometa con dos masas iguales a 1, las variedades integrales  $I_{c0}$  (superficies de energía), satisfacen*

a) Para  $c < 0$

$$I_{c0} \simeq \mathbb{R}^2 \times D^3$$

b) Para  $c \geq 0$

$$I_{c0} \simeq \mathbb{R}^3 \times S^2$$

### 644.3. VARIEDADES INTEGRALES EN UN PROBLEMA DEL COMETA

---

*Demostración.* Primero, si  $c < 0$ , entonces, para cada  $X$  que satisfaga que  $c \geq U(X)$ ,  $K(V) = E(X, V) - U(X)$  es una 2-esfera,  $S^2$ , por lo que  $I_{c0}$  es un haz pinchado  $S^2$  sobre  $\{X | c \geq U(X)\}$  y puesto que  $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$ , por el teorema de la función implícita, podemos parametrizar a  $x$ , en términos de  $y$  y de  $z$ , ésto es, el espacio de configuración es homeomorfo a un abierto simplemente conexo de  $\mathbb{R}^2$ , que es a su vez homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , por lo que  $I_{c0} \simeq \mathbb{R}^2 \times D^3$ .

Ahora, si  $c \geq 0$ , no existe ninguna restricción para  $X$ , por lo que  $I_{c0} \simeq \mathbb{R}^3 \times S^2$ . □

## Capítulo 5

# Variedades invariantes del problema de los $n$ -cuerpos en el espacio

Este capítulo contiene los *resultados principales* del trabajo pues en él se generalizan las técnicas presentadas en el capítulo anterior, para el estudio de la representación topológica de las variedades integrales cuando las masas están contenidas en un espacio euclideo tridimensional. Se presentan pues, el planteamiento del problema y los principales Teoremas, mismos que serán de vital importancia, en la subsección 5.1.1 donde se realiza la particularización al problema de los 3-cuerpos.

Consideramos nuevamente  $n$  números reales y positivos,  $m_1, \dots, m_n$ , para representar las masas de  $n$  partículas puntuales del problema Newtoniano (2.4) y definimos de manera análoga a la sección anterior, el espacio de configuración del problema de los  $n$ -cuerpos en el espacio tridimensional, con centro de masa en el origen, como el subconjunto

$M \setminus \Delta$  del espacio lineal

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \mid \sum_{i=0}^n m_i x_i = 0\}$$

donde  $\Delta$ , el conjunto de colisiones del problema, está definido por la ecuación (2.5).

La energía total  $E$  y el momento angular  $J$  son definidos sobre  $(M \setminus \Delta) \times M$  mediante las ecuaciones (2.6) y (2.7) respectivamente, mientras que las energías cinética  $K(x, v)$  y potencial  $V(x)$ , están determinadas por las ecuaciones (2.8) y (2.9).

Nuevamente, la energía cinética  $K(x, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i x_i v_i$ , define una métrica riemanniana para nuestro espacio y denotamos, como antes, por  $S_k$  a la esfera unitaria en  $M$  respecto a la norma inducida,  $\|x\|_k = \sqrt{K(x, x)}$ .

Consideramos la aplicación

$$I = (E, J) : (M \setminus \Delta) \times M \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

definida mediante la regla

$$I(x, v) = (E(x, v), J(x, v))$$

y llamamos, como en el capítulo anterior, a los espacios  $I_{cp} = I^{-1}(c, p)$  las *variedades integrales* del problema de los  $n$ -cuerpos en el espacio tridimensional.

Para el problema de los  $n$ -cuerpos en el espacio tridimensional con masas positivas arbitrarias  $m_1, \dots, m_n$ , se tiene el siguiente resultado (véase [1]):

**TEOREMA 5.1.** *Las aplicaciones*

$$\varphi : E^{-1}(\mathbb{R}^-) \mapsto \mathbb{R}^- \times (S_k \setminus \Delta) \times M,$$

definida por

$$\varphi(x, v) = \left( E(x, v), \frac{x}{|x|_k}, v \right),$$

y

$$\psi : E^{-1}(\mathbb{R}^+) \mapsto \mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times (M \setminus \{0\}),$$

definida mediante

$$\psi(x, v) = \left( E(x, v), \frac{x}{|x|_k}, |x|_k v \right)$$

son difeomorfismos entre los espacios correspondientes. Esto implica que,

- (a) El conjunto de bifurcación de la energía total es,  $\Sigma(E) = \{0\}$  (véase Definición 1.18).
- (b) Análogamente, el conjunto de bifurcación del momento angular (véase la Definición 1.18) es

$$\Sigma(J) = 0.$$

*Demostración.* Primero usamos el difeomorfismo (4.1) para identificar el espacio  $M \setminus \Delta$  con  $\mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta)$  (adaptando a  $M$  y  $\Delta$  correspondientemente) y escribimos  $(t, z, v)$  para los puntos de  $\mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times M$ .

Así, expresamos las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$  respectivamente, en la forma:

$$\varphi(t, z, v) = (E(tz, v), z, v)$$

$$\psi(t, z, v) = (E(tz, v), z, tv)$$

Puesto que  $E^{-1}(\mathbb{R}^-)$  y  $E^{-1}(\mathbb{R}^+)$  son subvariedades (véase definición 1.5) abiertas de  $\mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times M$ , y las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$  son suaves, construimos la aplicación

$$\phi : \mathbb{R}^- \times (S_k \setminus \Delta) \times M \mapsto E^{-1}(\mathbb{R}^-)$$

mediante la regla

$$\phi(c, z, v) = (t, z, v),$$

donde  $t$  es la solución de la ecuación  $E(tz, v) = c$ ; es decir  $t = \frac{V(z)}{c - K(v)}$ , y analizamos entonces las composiciones  $\varphi \circ \phi$  y  $\phi \circ \varphi$ .

Primeramente, sea  $(c, z, v) \in \mathbb{R}^- \times (S_k \setminus \Delta) \times M$ . Entonces se tendría

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \phi)(c, z, v) &= \varphi(\phi(c, z, v)) \\ &= \varphi\left(\frac{V(z)}{c - K(v)}, z, v\right) \\ &= \left(E\left(\frac{V(z)}{c - K(v)}z, v\right), z, v\right) \\ &= (c, z, v), \end{aligned}$$

debido a que

$$\begin{aligned} E\left(\frac{V(z)}{c - K(v)}z, v\right) &= K(v) + V\left(\frac{V(z)}{c - K(v)}z\right) \\ &= K(v) + \frac{c - K(v)}{V(z)}V(z) \\ &= c. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el caso  $(t, z, v) \in E^{-1}(\mathbb{R}^-)$  para el cual se tiene que

$$\begin{aligned} (\phi \circ \varphi)(t, z, v) &= \phi(\varphi(c, z, v)) \\ &= \phi(E(tz, v), z, v) \\ &= (\tilde{t}, z, v), \end{aligned}$$

donde  $E(\tilde{t}z, v) = E(tz, v)$ . Es decir,

$$K(v) + \frac{V(z)}{\tilde{t}} = K(v) + \frac{V(z)}{t}$$



o bien,

$$\tilde{t} = t.$$

de donde concluimos que  $\phi$  es la inversa de  $\varphi$ , es decir,  $\phi = \varphi^{-1}$ .

Construimos ahora la aplicación

$$\chi : \mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times (M \setminus \{0\}) \mapsto E^{-1}(\mathbb{R}^+)$$

mediante la regla

$$\chi(c, z, v) = \left( t, z, \frac{1}{t}v \right),$$

donde  $t$  es la solución positiva de la ecuación  $E\left(tz, \frac{1}{t}v\right) = c$ . Es decir,

$$t = \frac{1}{2c} \left( V(z) + \sqrt{V^2(z) + 4cK(v)} \right)$$

es una función de  $(c, z, v)$  en  $\mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times (M \setminus \{0\})$ , por lo que

$$\begin{aligned} (\chi \circ \psi)(t, z, v) &= \chi(\psi(t, z, v)) \\ &= \chi(E(tz, v), z, tv) \\ &= \left( \tau, z, \frac{1}{\tau}tv \right), \end{aligned}$$

siendo  $\tau$  la solución positiva de  $E(\tau z, \frac{1}{\tau}v) = E(tz, v)$ .

Vamos ahora a mostrar que  $\tau = t$ . Para  $(t, z, v)$  fijo, consideramos la función

$$g(s) = E\left(sz, \frac{1}{s}v\right) = \frac{1}{s^2}K(tv) + \frac{1}{s}V(z)$$

definida para  $s > 0$ , la cual es una función estrictamente decreciente en una región en la cual es positiva. Esto implica que  $g(\tau) = g(t) = E(tz, v) > 0$  con lo que se sigue que  $\tau = t$ .

Con lo anterior hemos demostrado que las aplicaciones  $\varphi$  y  $\phi$  son difeomorfismos ( véase definición 1.11).

La conclusión de que  $\sum(E) = 0$  se debe a que las aplicaciones construidas inducen difeomorfismos de  $E^{-1}(c)$  a  $(S_k \setminus \Delta) \times M$  para el caso  $c < 0$  y de  $E^{-1}(c)$  a  $(S_k \setminus \Delta) \times (M \setminus \{0\})$  para el caso  $c > 0$ , y estos espacios no son difeomorfos, lo que prueba el primer inciso.

Mostraremos ahora que  $J$  es localmente trivial (véase Definición (1.18)) en cada  $p \neq 0$ . Primero escogemos una vecindad abierta  $U$  de  $\frac{p}{|p|}$  en  $S^2$  y una aplicación suave  $\beta : U \mapsto SO(3)$  tal que

$$\beta(p') \cdot \frac{p}{|p|} = p'$$

Esto es, tomamos una sección local  $\beta$  en  $\frac{p}{|p|}$  de la aplicación

$$\alpha : SO(3) \mapsto S^2,$$

dada por

$$\alpha(g) = g \cdot \frac{p}{|p|}$$

Sea  $W \subset \mathbb{R}^3$  el subconjunto abierto definido mediante

$$W = \left\{ q \neq 0 \mid \frac{q}{|q|} \in U \right\},$$

y consideremos la función positiva real valuada

$$a : W \mapsto \mathbb{R}^+, \quad a(q) = \frac{|p|}{|q|}.$$

Observamos que  $a(SO(3) \cdot q) = a(q)$ .

Escribimos ahora

$$a(x, v) = a(J(x, v))$$

y

$$\beta(x, v) = \beta \left( \frac{J(x, v)}{|J(x, v)|} \right),$$

y construimos la siguiente aplicación suave

$$g : J^{-1}(W) \mapsto J^{-1}(p)$$

definida mediante la regla

$$g(x, v) = \beta(x, v)^{-1} \cdot (x, a(x, v)v)$$

la cual nos ayuda a definir la aplicación importante

$$h : J^{-1}(W) \mapsto W \times J^{-1}(p)$$

dada por

$$h(x, v) = (J(x, v), g(x, v)).$$

Demostraremos que dicha aplicación  $h$  es un difeomorfismo, para lo cual, consideremos la función

$$\varphi : W \times J^{-1}(p) \mapsto J^{-1}(W)$$

dada por

$$\varphi(s; x, v) = \beta \left( \frac{s}{|s|} \right) \cdot \left( x, \frac{1}{a(q)}v \right).$$

Sea un punto  $(x, v) \in J^{-1}(W)$  (llamaremos  $J(x, v) = q$ ), entonces, mediante un cálculo directo tenemos

$$\begin{aligned} (\varphi \circ h)(x, v) &= \varphi(J(x, v), g(x, v)) \\ &= \varphi(q, \beta \left( \frac{q}{|q|} \right)^{-1} (x, a(q)v)) \\ &= \beta \left( \frac{q}{|q|} \right) \cdot \beta \left( \frac{q}{|q|} \right)^{-1} (x, v) \\ &= (x, v). \end{aligned}$$

Sea ahora un elemento  $(r; x, v) \in W \times J^{-1}(p)$  y consideremos la composición

$$\begin{aligned}
 (h \circ \varphi)(r; x, v) &= h\left(\beta\left(\frac{r}{|r|}\right) \cdot \left(x, \frac{1}{a(r)}v\right)\right) \\
 &= \left(\beta\left(\frac{r}{|r|}\right) \frac{p}{a(r)}, x, \frac{a(r)}{a(r)}v\right) \\
 &= \left(\beta\left(\frac{r}{|r|}\right) \frac{p}{|p|}|r|, x, v\right) \\
 &= \left(\frac{r}{|r|}|r|; x, v\right) = (r; x, v),
 \end{aligned}$$

la cual prueba que

$$\varphi = h^{-1}.$$

Consecuentemente  $h$  es un difeomorfismo que se mantiene incluso en  $W \times (M \setminus \Delta) \times M$ , lo que implica que  $J$  es localmente trivial para todo  $p \neq 0$  y prueba la parte (b) del Teorema.  $\square$

Mostramos una tabla a manera de resumen para la topología de las variedades no singulares totales de la energía del sistema.

(Espacio)	$\approx$ (difeomorfo a)
$E^{-1}(\mathbb{R}^-)$	$\mathbb{R}^- \times (S_k \setminus \Delta) \times M$
$E^{-1}(\mathbb{R}^+)$	$\mathbb{R}^+ \times (S_k \setminus \Delta) \times (M \setminus \{0\})$ ,

Esta tabla define la estrategia a seguir para caracterizar topológicamente a las variedades invariantes integrales del sistema (2.4) cuando los valores son no singulares.

## 5.1. El caso de energía negativa $c < 0$ y momento angular nulo $p = 0$

Considerando la Tabla de arriba, iniciamos el estudio topológico de las variedades invariantes  $I_{cp}$  considerando inicialmente el caso cuando la energía total  $c$  del sistema es negativa y el momento angular  $p = 0$ .

**TEOREMA 5.2.** *Si la energía es negativa  $c < 0$ , entonces la variedad integral invariante  $I_{c0}$ , tiene el mismo tipo de homotopía (véase Definición 1.43) que el conjunto  $S_k \setminus \Delta$ . Además,  $S_k \setminus \Delta$  es difeomorfo a un haz fibrado  $Q(S^2)$  (véase Definición 1.39) sobre  $S^2$ , con fibra*

$$Q_{\eta_1} = \{y \in (\mathbb{R}^3 \setminus 0)^{n-2} \mid y \notin \Delta \quad y_i \neq \eta_1 \forall i\}$$

con  $\eta_1 \in S^2$ .

*Demostración.* (a) Notemos que la aplicación

$$\phi : E^{-1}(\mathbb{R}^-) \mapsto \mathbb{R}^- \times (S_k \setminus \Delta) \times M$$

definida mediante

$$\phi(x, v) = \left( E(x, v), \frac{x}{|x|}, v \right)$$

induce un homeomorfismo de  $I_{c0}$  en el espacio

$$J_0 = \{(z, v) \in (S_k \setminus \Delta) \times M \mid J(z, v) = 0\}$$

y  $J_0$  tiene a  $(S_k \setminus \Delta)$  como una retracción fuerte (véase la Definición 1.45). Esto, puesto que podemos considerar la aplicación

$$H : (S_k \setminus \Delta) \times M \times [0, 1] \mapsto (S_k \setminus \Delta) \times M$$

definida mediante

$$H(z, v, s) = (z, (1 - s)v)$$

la cual es continua y aplica el conjunto  $J_0 \times [0, 1]$  en  $J_0$  ya que

$$\begin{aligned} H(z, v, 0) &= (z, v) \\ H(z, v, 1) &= (z, 0) \\ H(z, 0, s) &= (z, 0) \end{aligned}$$

para toda  $s \in [0, 1]$ .

Se concluye que  $H$  es una retracción fuerte de  $J_0$  a  $(S_k \setminus \Delta) \times 0$ , espacio que puede ser identificado con  $(S_k \setminus \Delta)$ .

(b) Afirmamos que  $S_k \setminus \Delta$  es difeomorfo a un haz fibrado  $Q(S^2)$  (véase Definición 1.39) sobre  $S^2$ , con fibra

$$Q_{\eta_1} = \{y \in (\mathbb{R}^3 \setminus 0)^{n-2} \mid y \notin \Delta \quad y_i \neq \eta_1 \forall i\}$$

con  $\eta_1 \in S^2$ .

Para probar esto consideremos la aplicación

$$T : M \mapsto (\mathbb{R}^3)^{n-1}$$

definida por

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n).$$

Dado que  $\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0$ , se sigue que  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{m_n} x_i = x_n$  y entonces podemos reescribir a  $T$  como

$$T(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{m_n} x_i, \dots, x_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{m_n} x_i \right)$$

la cual tiene representación matricial no singular. En otras palabras,  $T$  es isomorfismo.

La transformación  $T$  induce una nueva aplicación

$$\tau : (S_k \setminus \Delta) \mapsto \{\xi \in (S^{3n-4} \setminus \Delta) \mid x_i \neq 0 \forall i\} = W$$

definida por

$$\tau(z) = \frac{T(z)}{|T(z)|}.$$

Sean  $u \in W$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tales que  $\lambda u \in T(S_k \setminus \Delta)$ , entonces, existe un único  $z \in (S_k \setminus \Delta)$  tal que  $T(z) = \lambda u$  con lo que  $z = \lambda T^{-1}(u) = \tau^{-1}(u)$ .

Hemos construido la inversa para  $\tau$  y por la suavidad de las funciones  $\tau$  es un difeomorfismo. Construimos un difeomorfismo

$$\rho : W \mapsto Q(S^2) = \{\eta \in S^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus 0)^{n-2} \mid \eta \notin \Delta\}$$

que definimos según la relación  $\rho(\xi) = \frac{\xi}{|\xi_1|}$  con  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ .

Así,  $Q(S^2)$  es un haz fibrado sobre  $S^2$  con la aplicación proyección  $\pi(\eta) = \eta_1$ , y fibra, el espacio  $Q_{\eta_1}$ , ya descrito. Mostraremos que  $\pi$  es localmente trivial, escogiendo para cada  $\eta_1 \in S^2$ , un subconjunto abierto  $U$  alrededor de  $\eta_1$  en  $S^2$  y una aplicación suave

$$\beta : U \mapsto SO(3)$$

tal que  $\beta(\eta'_1) \cdot \eta_1 = \eta'_1$  para  $\eta'_1 \in U$ .

Definimos entonces el difeomorfismo  $h : \pi^{-1}(U) \mapsto U \times Q_{\eta_1}$ , mediante

$$h(\eta'_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}) = (\eta'_1, \beta(\eta'_1)^{-1} \cdot \eta_2, \dots, \beta(\eta'_1)^{-1} \cdot \eta_{n-1}),$$

lo cual prueba el Teorema. □

Otro resultado más geométrico sobre la topología de  $I_{c0}$  para el caso considerado es el siguiente.

**TEOREMA 5.3.**  *$I_{c0}$ ,  $c < 0$ , tiene el mismo tipo topológico que el espacio  $F(S^2) \times \mathbb{R}^{n-1}$ , donde  $F(S^2)$  es un haz fibrado topológico sobre  $S^2$  con fibra*

$$F = \{(u, y, \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^{n-2} \times (\mathbb{R}^2)^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \mid \sum u_i \wedge y_i = 0 \text{ y se satisface la propiedad } \delta\}$$

donde la propiedad  $\delta$  establece que

$$\begin{aligned} u_i = u_j \quad \text{para } i \neq j &\Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \\ u_i = 0 &\Rightarrow \lambda_i \neq 0, 1. \end{aligned}$$

En particular, si  $n \geq 3$ ,  $I_{c0}$ ,  $c < 0$  no es una variedad. Si  $n = 2$ ,  $I_{c0}$  es difeomorfa a  $S^2 \times \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Además del difeomorfismo  $T : M \mapsto (\mathbb{R}^3)^{n-1}$  considerado en el Teorema 5.2, haremos uso de  $\Psi : M \mapsto (\mathbb{R}^3)^{n-1}$  que es definido mediante  $\Psi(v_1, \dots, v_n) = (m_1 v_1, \dots, m_{n-1} v_{n-1})$ . Definimos además,  $J_1(\eta, w) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \wedge w_i$  para  $\eta, w \in (\mathbb{R}^3)^{n-1}$  y calculamos

$$\begin{aligned} J_1(T(x), \Psi(v)) &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) \wedge m_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i \wedge v_i - \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_n \wedge v_i \\ &= J(x, v) - m_n x_n \wedge v_n - \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_n \wedge v_i \\ &= J(x, v) - x_n \wedge \sum_{i=1}^n m_i v_i. \end{aligned}$$

Con lo que hemos mostrado que  $J_1(T(x), \Psi(v)) = J(x, v)$ .

Construimos ahora un difeomorfismo

$$S_k \setminus \Delta \times M \mapsto \{(\eta, w) \in S^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^{n-2} \times (\mathbb{R}^3)^{n-1} \mid \eta \notin \Delta\}$$

definido como  $(z, v) = (\rho\tau(z), \Psi(v))$ , que aplica a

$$J_0 = \{(z, v) \in S_k \setminus \Delta \times M \mid J(z, v) = 0\}$$



en el espacio topológico

$$N = \{(\eta, w) \in (S^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^{n-2} \setminus \Delta) \times (\mathbb{R}^3)^{n-1} \mid J_1(\eta, w) = 0\}.$$

Descomponemos ahora a  $\eta_i$ , con  $i = 2, \dots, n-1$  y a  $w_j$  con  $j = 1, \dots, n-1$  a lo largo de  $\eta_1$  y de su complemento ortogonal  $\eta_1^\perp$ , y tenemos que

$$\begin{aligned} \eta_i &= \lambda_i \eta_1 + \eta'_i, & \lambda_i &= \eta_i \cdot \eta_1 \\ w_j &= \mu_j \eta_1 + w'_j, & \mu_j &= w_j \cdot \eta_1. \end{aligned}$$

Por un cálculo directo obtenemos

$$\begin{aligned} J_1(\eta, w) &= \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \wedge w_i \\ &= \eta_1 \wedge w'_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_i \eta_1 + \eta'_i) \wedge (\mu_i \eta_1 + w'_i) \\ &= \eta_1 \wedge w'_1 + \eta_1 \wedge \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_i w'_i - \mu_i \eta'_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \eta'_i \wedge w'_i \\ &= \eta_1 \wedge (w'_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_i w'_i - \mu_i \eta'_i)) + \sum_{i=2}^{n-1} \eta'_i \wedge w'_i. \end{aligned}$$

Notamos que la condición  $J_1(\eta, w) = 0$ , es equivalente a

$$\begin{aligned} w'_1 &= \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_i w'_i - \mu_i \eta'_i) \\ 0 &= \sum_{i=2}^{n-1} \eta'_i \wedge w'_i. \end{aligned} \tag{5.1}$$

La regla de correspondencia  $(\eta, w) = (\eta_1, \eta'_1, w'_1, \lambda_i, \mu_i)$ , define una aplicación suave  $f$  del espacio  $S^2 \times (\mathbb{R}^3)^{n-2} \times (\mathbb{R}^3)^{n-1}$  en  $S^2 \times (\mathbb{R}^3)^{n-2} \times$

$(\mathbb{R}^3)^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Por otro lado, dado un punto  $(\eta_1, \eta'_1, w'_1, \lambda_i, \mu_i)$  en el segundo producto, podemos tomar  $w'_1$  como en la ecuación (5.1) y usar la forma en que descompusimos  $\eta_i$  y  $w_j$ , para determinar un punto  $(\eta, w)$ , lo que definiría una función suave  $g$ , en sentido contrario a  $f$ .

Debido a la descomposición que hicimos de  $\eta$ , las condiciones  $\eta \notin \Delta$  y  $\eta_j \neq 0$  para toda  $j$ , son equivalentes a

$$\begin{aligned} \eta'_r = \eta'_s \quad \text{con} \quad r \neq s &\Rightarrow \lambda_r \neq \lambda_s \\ \eta'_r = 0 &\Rightarrow \lambda_r \neq 0 \quad y \quad 1. \end{aligned}$$

que es la propiedad  $\delta$ .

Tomemos ahora el espacio  $F(S^2) = \{(\eta_1, \eta', w', \lambda) \in S^2 \times (\mathbb{R}^3)^{n-2} \times (\mathbb{R}^3)^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \mid \eta'_i, w'_i \in \eta_1^\perp, \sum_{i=2}^{n-1} \eta'_i \wedge w'_i = 0 \text{ y se satisface } \delta\}$ .

Si restringimos a  $N$  y a  $F(S^2) \times \mathbb{R}^{n-1}$ , las aplicaciones  $f$  y  $g$ , resultan ser inversas, por lo que dichos espacios son homeomorfos. Esto significa que tanto  $J_0$ , como  $I_0$ , son homeomorfos al espacio  $F(S^2) \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Pero, si consideramos la aplicación proyección  $\Pi(\eta_1, \eta', w', \lambda) = \eta_1$ , nos daremos cuenta de que  $F(S^2) \times \mathbb{R}^{n-1}$ , es un haz fibrado sobre  $S^2$ , con fibra  $F = \{(u, y, \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^{n-2} \times (\mathbb{R}^2)^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \mid \sum u_i \wedge y_i = 0 \text{ y se satisface la propiedad } \delta\}$ , donde la propiedad  $\delta$  es respecto a  $u$  y  $\lambda$ , lo que concluye con la demostración de la primera parte del Teorema.

Supongamos ahora que  $n \geq 3$  y tomemos  $\lambda^0 \in \mathbb{R}^{n-2}$ , tal que  $1 < \lambda_1^0, \dots, \lambda_{n-2}^0$ . Entonces existe una bola abierta  $B$  en  $\mathbb{R}^{n-2}$ , centrada en  $\lambda^0$  y tal que  $1 < \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ , para toda  $\lambda \in B$ . Por lo tanto  $\{(u, y, \lambda) \in F \mid \lambda \in B\} = C \times B$ , donde  $C$  está definido como  $C = \{(u, y) \in (\mathbb{R}^2)^{n-2} \times (\mathbb{R}^2)^{n-2} \mid \sum u_i \wedge y_i = 0\}$ , lo cual implica que en algún punto, el espacio  $I_{c0}$ ,  $c < 0$  tiene la estructura topológica del espacio  $C \times \mathbb{R}^{2n-1}$  el cual no es una variedad diferenciable.

Por otro lado, para el caso  $n = 2$ , entonces  $N = \{(\eta, w) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \eta \wedge w = 0\}$ , que es difeomorfo a  $S^2 \times \mathbb{R}^2$ , lo cual se comprueba usando la aplicación  $(\eta, w) \mapsto (\eta, \eta \cdot w)$ , que es la trivialización del haz lineal  $N$  sobre la esfera de dimensión dos  $S^2$ .

□

### 5.1.1. El caso del problema espacial de los 3-cuerpos.

Un caso particular en el estudio anterior es aquel en que únicamente se analizan 3 cuerpos en el espacio tridimensional. Consideramos entonces 3 números reales y positivos,  $m_1, m_2, m_3$ , que representan las masas de 3 partículas puntuales, el espacio de configuración del problema de los 3-cuerpos en el espacio tridimensional, con centro de masa en el origen, es el subconjunto  $M \setminus \Delta$  del espacio lineal

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^3)^3 \mid \sum_{i=1}^3 m_i x_i = 0\}$$

donde  $\Delta$ , como en anteriores secciones, estará definida por la ecuación (2.5), análogamente la energía total, el momento angular, la energía cinética y la energía potencial, se definen por medio de las expresiones (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9) respectivamente.

El resultado fundamental de este trabajo, el cual es una consecuencia del Teorema 5.2 para este número de partículas, es el siguiente.

**TEOREMA 5.4.** *Para el problema de tres cuerpos en el espacio con masas arbitrarias, los grupos de homología del espacio  $S_k \setminus \Delta$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  son  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  en dimensiones 0, 2 y 4 respectivamente. Los otros grupos de homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  para este espacio son triviales (véase la Definición 1.64).*

*Demostración.* Para este caso  $n = 3$ , por el Teorema 5.2, la fibra es  $F = \mathbb{R}^3 \setminus \{2 \text{ puntos}\}$ , que tiene el mismo tipo de homotopía que el

espacio  $S^2 \vee S^2$  (véase el Ejemplo (1.44)), por lo que los grupos de homología de  $F$  son  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  en dimensiones 0 y 2 respectivamente, y en cualquier otro caso 0 (véase [2], parte III).

Para calcular entonces los grupos de homología del espacio  $S_k \setminus \Delta$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  consideramos la proyección  $p : E \mapsto \mathbb{S}^n$  del haz fibrado  $E$  sobre la esfera  $\mathbb{S}^n$  con fibra  $F$ .

Por el Teorema de Wang (véase [7]), existe una sucesión exacta (véase la Definición 1.66) de los grupos de homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ ,

$$\dots \longrightarrow H_q(F) \longrightarrow H_q(E) \longrightarrow H_{q-n}(F) \longrightarrow H_{q-1}(F) \longrightarrow \dots$$

Aplicando directamente este resultado a nuestro caso obtenemos la sucesión exacta

$$\longrightarrow H_l(Q) \longrightarrow H_{l-2}(F) \longrightarrow H_{l-1}(F) \longrightarrow H_{l-1}(Q) \longrightarrow H_{l-3}(F) \longrightarrow$$

donde  $Q = Q(S^2)$ .

Si consideramos  $l = 3$  obtenemos,

$$\longrightarrow H_l(Q) \longrightarrow H_{l-2}(F) \longrightarrow H_{l-1}(F) \longrightarrow H_{l-1}(Q) \longrightarrow H_{l-3}(F) \longrightarrow$$

o equivalentemente, la sucesión recortada

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(Q) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Puesto que  $\mathbb{Z}$  es un módulo libre, la sucesión exacta implica que  $H_2(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Si consideramos ahora  $l = 5$  obtenemos la sucesión exacta corta

$$\longrightarrow H_4(F) \longrightarrow H_4(Q) \longrightarrow H_2(F) \longrightarrow H_3(F)$$

o, sustituyendo los grupos respectivos,

$$0 \longrightarrow H_4(Q) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

de donde se infiere (véase el Ejemplo 1.67) que  $H_4(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Esto termina la prueba del Teorema. □

Mostramos el siguiente cuadro para ilustrar los grupos de homología de  $S_k \setminus \Delta$  obtenidos en el Teorema 5.4 para el caso del problema de 3-cuerpos en el espacio.

	Caso $n = 3$
Dimensión	Grupo de Homología de $S_k \setminus \Delta$
0	$\mathbb{Z}$
2	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
4	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
otro caso	0

## 5.2. El caso de energía positiva $c > 0$ y momento angular no nulo $p \neq 0$

Analizamos el caso simple de la topología de las variedades integrales  $I_{cp}$  cuando la energía  $c$  es positiva y el momento angular es no trivial  $p \neq 0$ .

**TEOREMA 5.5.** *La aplicación  $I = (E, J) : (M \setminus \Delta) \times M \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  es localmente trivial en la región 4-dimensional  $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ .*

*Demostración.* Consideremos la aplicación

$$id \times J : \mathbb{R} \times (M \setminus \Delta) \times M \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

dada por

$$(t, z, v) \mapsto (t, J(z, v)).$$

Entonces,  $I = (id \times J) \circ \psi$ , donde  $\psi$  es el difeomorfismo definido en el Teorema 5.2. Puesto que  $J$  es localmente trivial, para toda  $p \neq 0$ ,

tenemos que  $J$  es localmente trivial en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , por lo que  $id \times J$  es localmente trivial sobre  $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  y al ser  $\psi$  un difeomorfismo, se tiene que  $I$  es localmente trivial en  $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ , lo cual concluye directamente la demostración del Teorema. □

# Capítulo 6

## Conclusiones y Proyecciones

En este trabajo se realizó un análisis topológico de las variedades integrales en el problema de los  $n$  cuerpos, mostrando resultados expuestos en los teoremas 4.1, 4.2, para el caso plano y los Teoremas 5.2, 5.3 y 5.5, para el caso espacial y ciertos valores de la energía y momento angular. Además de la particularización hecha a cuando consideramos tres cuerpos unicamente, y de la cual se obtiene el Teorema 5.4.

De dichos resultados se puede concluir la estructura global de las variedades integrales del problema de los  $n$  cuerpos, en los casos plano, espacial y el particular al caso de tres cuerpos en el espacio, con algunas salvedades referentes a la energía y el momento angular.

En particular para las variedades integrales en el problema espacial de tres cuerpos, fue posible determinar su tipo homotópico, además de sus grupos de homología, gracias a la particularización de las técnicas y resultados para el caso general, dando así una descripción de su estructura que fue el objeto del presente trabajo.

Es importante recalcar que la conexión entre varias ramas de la matemática redundan en un mayor dominio y comprensión de un tema a tratar, además de la ventaja evidente que brinda el tener múltiples puntos de vista y opciones de análisis para un mismo problema, tenien-

do eso en mente estudiar el problema de caracterizar las variedades integrales en un espacio curvado, donde no está definido el centro de masa, parece lógico y desafiante como un proyecto a futuro.



# Bibliografía

- [1] Cabral, H., E., On the Integral Manifolds of the N-Body Problem , *Inventiones math.* 20, 59-72 (1973).
- [2] Dubrovine, B., Fomenko, A., Novikov, P., *Modern Geometry, Methods and Applications*, Vol. I, II and III, Springer-Verlag, 1984, 1990.
- [3] Do Carmo , M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, USA, 1976.
- [4] Guillemin, V., Pollack, A., *Topología diferencial, Aportaciones matemáticas*, Volumen 20, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2003.
- [5] Smale, S., *Topology and Mechanics. I*, *Inventiones math.* 10, 305-331 (1970).
- [6] Smale, S., *Topology and Mechanics. II*, *Inventiones math.* 11, 45-64 (1970).
- [7] Spanier, E., H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill 1971.
- [8] Stahl, S., *A Gateway to Modern Geometry (The Poincaré Half-Plane)*, Jones and Bartlett, 2008.
- [9] Vick, W., J., *Homology Theory. An introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1980.