UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERIA
Departamento de Matemáticas

"El Método de Algebrización de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales"

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias (Matemáticas Aplicadas e Industriales)

PRESENTA:
Eleazar López Flores

ASESORES:
Dr. Baltazar Aguirre Hernández
UAM-I, Ciudad de México.
Dr. Martín Eduardo Frías Armenta
UNISON, Sonora, México

SINODALES:
Dr. José Hector Morales Bárcenas
UAM-I, Ciudad de México.
Dr. Elifalet López González
UACJ, Chihuahua, México.

Ciudad de México. 8 de enero de 2020

Encomienda al Señor tus obras,
y tus pensamientos serán afirmados.
Proverbios 16:3

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Jonás López y Constanza Flores por su ejemplo y apoyo, gracias a ustedes soy la persona que soy y tengo el deseo de superarme. Asimismo agradezco a mis hermanos.

Agradezco a doña Sofi y a su hijo Josué por su incondicional apoyo y consejo, quienes se han vuelto mi familia por amistad.

Agradezco a mis asesores, el Dr. Baltazar Aguirre Hernández por su apoyo más allá de lo que dicta el deber académico, por facilitar a una persona en mis circunstancias el concluir esta etapa de mi formación, y por su experiencia, conocimientos y apoyo personal, y al Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, por apoyarme en la determinación y culminación de este trabajo con sus conocimientos y experiencia, así como por atenderme durante mi estancia de movilidad del CONACYT.

Agradezco al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca que me otorgó y el apoyo de movilidad durante mi maestría, ya que gracias a su apoyo institucional personas como yo tenemos la oportunidad de profundizar nuestros conocimientos y aportar más a nuestro país. A mi *Alma Mater*, la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), agradezco el apoyo económico que me otorgó y llevo con orgullo la formación universitaria que me dio. A la Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales (MCMAI), agradezco el financiamiento otorgado y las facilidades brindadas para poder asistir a distintos congresos en el país, para profundizar mis conocimientos. Al coordinar de la MCMAI, Dr. Gabriel Nuñez, por su disponibilidad y paciencia con nosotros los alumnos de la Maestría. Todos estos apoyos contribuyeron para complementar mis conocimientos y finalizar este trabajo.

Agradezco a mis compañeros de la MCMAI por el apoyo que me brindaron en esos momentos díficiles, pero en especial quiero agradecer por su calidad humana y por sus buenos consejos a mis compañeros y amigos Judith Yareli Sánchez, Minerva Márquez y Ricardo López, porque con ellos compartí esta extraordinaria experiencia de formación que uno no puede completar solo, sino con el apoyo de otras personas.

Agradezco a los sinodales, los Dres. José Héctor Morales y Elifalet López, por la cuidadosa revisión de mi tesis, la cual refleja mi formación académica.

Índice general

Introducción

Muchos de los problemas físicos, matemáticos y fenómenos de la naturaleza se pueden representar o modelar mediante ecuaciones diferenciales, de ahí la importancia de resolver éstas mismas, a fin de predecir acontecimientos en el futuro, o bien, obtener una mejor comprensión de estos problemas. El estudio de las ecuaciones diferenciales tomó gran importancia a inicios del siglo XX con el problema 16 de Hilbert, que ha permitido un desarrollo considerable de la teoría aplicable en este tema. En la actualidad existe una gran cantidad de bibliografía explicando distintos métodos para la solución de ecuaciones diferenciales, sin embargo, sabemos que no hay un método que se pueda generalizar para encontrar la solución de éstas.

En este trabajo se analizará el método de algebrización de sistemas de ecuaciones diferenciales. Este método consiste en determinar si un sistema de ecuaciones diferenciales cumple con ciertas condiciones, de ser ese el caso entonces podemos decir que ese sistema es $\mathbb{A}$-algebrizable, además obtendremos una nueva ecuación con coeficientes sobre la álgebra $\mathbb{A}$ y si encontramos la solución correspondiente de esa ecuación, entonces, se podrá encontrar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales original.

Como hemos mencionado anteriormente, no hay un método que se pueda generalizar para la solución de ecuaciones diferenciales, por lo que se recurren a técnicas habituales lo que ocasiona solo encontrar soluciones parciales (ver [1], [21] y [34]). Es importante mencionar que la solución encontrada por el método de algebrización de ecuaciones diferenciales proporcionado en este trabajo, es una solución correcta para el sistema de ecuaciones.

A lo largo de este trabajo veremos dos tipos de ecuaciones diferenciales: las ecuaciones diferenciales autónomas, las cuales se representan por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{K}^n, t \in \mathbb{R};$$

y las ecuaciones no autónomas, las cuales se representan por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y).$$

Además, por lo general $\mathbb{K}$ representará un campo, ya sea campo de los números complejos $\mathbb{C}$ o el de los números reales $\mathbb{R}$.

En el capítulo 1 se dará una instrucción breve a los temas de grupos, anillos, módulos y álgebras con ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. En el capítulo 2 se estudiarán las álgebras de matrices y las cualidades que tienen con las matrices de Jordan, porque es importante que las algebras de matrices sean invertibles. Después se dará un breve repaso a las álgebras de Banach por su importancia para el método de algebrización de ecuaciones diferenciales. Se estudiará las ecuaciones de Cauchy-Riemann porque determinan la relación que hay con la matriz de la primera representación fundamental con las ecuaciones generalizadas de Cauchy-Riemann generalizadas. En el capítulo 3.3 se estudiarán otras álgebras y su isomorfismo con las ecuaciones de Cauchy-Riemman para poder determinar la relación que hay entre las matrices de Jordan y las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizas. En el capítulo 4 se estudiará el método de algebrización para ecuaciones diferenciales autónomas, y se propuso un ejemplo para verificar que el método sí funciona. En el capítulo 5 se estudiará el método de algebrización para ecuaciones diferenciales no autónomas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo abordaremos algunas definiciones de álgebras que son importantes para el método de algebrización de ecuaciones diferenciales, además daremos algunos ejemplos para un mejor entendimiento, y de esa manera poder hacer la algebrización. Si requiere saber más sobre álgebras ver [16] y [20] , ya que las definiciones que se darán a continuación son suficientes para el método que se propone en este trabajo.

1.1. Grupos y anillos

En primer lugar definiremos lo que es un grupo y un anillo.

Definición 1.1.1 *Un conjunto G no vacío se dice que forma un **grupo** si en G está definida una operación binaria denotada por $(*)$, tal que cumple las siguientes propiedades:*

1. *$a, b \in G$ implica que $a * b \in G$. (Se cumple la cerradura).*
2. *$a, b, c \in G$ implica que $a * (b * c) = (a * b) * c$. (Es asociativa).*
3. *Existe un elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$.(e es el neutro para la operación binaria).*
4. *Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. (El inverso de la operación).*

Definición 1.1.2 *Un grupo G se dice que es **abeliano (o conmutativo)** si para cualquier $a, b \in G$ y con la operación binaria $(*)$ se tiene que: $a * b = b * a$.*

Ejemplo 1.1.1 *El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ bajo la operación suma $(+)$ no es un grupo.*

Para verificar que no es un grupo es suficiente verificar que no se cumple alguna propiedad.

1. Sean $a, b \in \mathbb{I}$ donde $a = 5 - \pi$ y $b = 4 + \pi$ entonces $a + b = 9$ lo que implica que $a + b \notin \mathbb{I}$.

De aquí podemos concluir que los números irracionales $\mathbb{I}$ bajo la suma $(+)$ no es un grupo.

Ejemplo 1.1.2 *El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$ bajo el producto $(\cdot)$ es un grupo abeliano.*

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ por la propiedad de los números reales que al multiplicar dos números reales nos da otro real, lo que implica que $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ por la propiedad de los números reales, se cumple que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

3. Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}^+$, tal que se cumple $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

4. Para todo $a \in \mathbb{R}^+$ existe un elemento en $a^{-1}\mathbb{R}^+$, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, por la propiedad de los números reales se cumple $a \cdot b = b \cdot a$.

   Como se cumplen las 5 propiedades podemos concluir que los números reales positivos $\mathbb{R}^+$ bajo el producto $(\cdot)$ es un grupo abeliano.

Ejemplo 1.1.3 *El conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ bajo la suma $(+)$ es un grupo abeliano.*

1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, sabemos que por las propiedades de los enteros la suma de dos enteros da como resultado un entero, es decir que $a + b \in \mathbb{Z}$.

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ por las propiedades de los enteros se cumple $a + (b + c) = (a + b) + c$.

3. Existe un elemento $e = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$.

4. Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe un elemento $a^{-1} = -a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

5. $a, b \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a + b = b + a$ por las propiedades de los enteros.

Definición 1.1.3 *Sea R un conjunto no vacío y sean la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$ dos operaciones binarias en R; entonces definimos a R como un* ***anillo*** *si cumple las siguientes propiedades bajo las operaciones "+" y "·"*
Para la operacion suma:

1. *Para todo $a, b \in R$ se tiene que $a + b \in R$ es cerrada bajo la suma.*

2. *Para todo $a, b, c \in R$ se tiene que $(a + b) + c = a + (b + c)$ la suma es asociativa.*

3. *Para todo $a \in R$ existe un 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$, es decir que el 0 es el neutro aditivo en R.*

4. *Para todo $a \in R$ existe un $b \in R$, tal que $a + b = b + a = 0$, donde b es el inverso aditivo.*

5. *Para todo $a, b \in R$ se tiene que $a + b = b + a$, la suma es conmutativa.*

Para la operación producto:

6. *Para todo $a, b \in R$ se tiene que $a \cdot b \in R$ es cerrado bajo el producto.*

7. *Para todo $a, b, c \in R$ se cumple que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ el producto es asociativo.*

8. *El producto $(\cdot)$ es distributivo con la suma $(+)$:*

   (i) Para todo $a, b, c \in R$ se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

   (ii) Para todo $a, b, c \in R$ se cumple que $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Observación 1.1.1 *Un grupo G es un **anillo** si cumple con las propiedades 6), 7) y 8).*

Definición 1.1.4 *Un anillo R decimos que es un **anillo conmutativo** si para todo $a, b \in R$ se tiene que $a \cdot b = b \cdot a$, es decir que el producto es conmutativo.*

Definición 1.1.5 *Un anillo R decimos que es un **anillo con elemento unitario** si existe $1 \in R$, tal que para todo $a \in R$ se tiene que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.*

Ejemplo 1.1.4 *El conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo con unidad bajo las operaciones usuales de la suma y producto de los enteros.*

En el *ejemplo 1.1.3* vimos que $\mathbb{Z}$ es grupo abeliano bajo la suma, y por las propiedades de $\mathbb{Z}$ se cumple con las propiedades 6), 7), 8), por lo tanto $\mathbb{Z}$ es un anillo. Asimismo, por las propiedades del producto $(\cdot)$ de los enteros $\mathbb{Z}$ es conmutativo, así que $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo. El elemento unidad existe en $\mathbb{Z}$ y es el 1, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo con unidad.

Definición 1.1.6 *Sea R un anillo con elemento unitario, y si e es un elemento en R, decimos que es la unidad de R si tiene un inverso multiplicativo en R. Si todo elemento distinto de cero en R es una unidad, entonces R es un **semi campo** o **anillo con división**.*

Observación 1.1.2 *Un **campo** es un anillo conmutativo con división.*

Ejemplo 1.1.5 *El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ no es un campo, pues para todo $a \in \mathbb{Z}$ distinto de $+1, -1$ no tiene inverso multiplicativo, por lo que a no es unidad en $\mathbb{Z}$.*

Ejemplo 1.1.6 *Los números racionales $\mathbb{Q}$ y los reales $\mathbb{R}$ forman un campo respectivamente.*

1.2. Módulos

En esta sección daremos la definición y el significado de homomorfismos de módulos teniendo en cuenta que son importantes para el concepto de álgebra. A partir de esta sección en algunos casos se omitirá al símbolo de multiplicación $(\cdot)$ por comodidad de notación, es decir, que si a, b pertenecen a un anillo, a un campo o a una álgebra, entonces al producto de los dos elementos se escribirá como ab cuando nos refiramos a la multiplicación a por b.

Definición 1.2.1 *Sea R un anillo y M un grupo abeliano bajo la operación suma $+$, se dice que M es un R-**módulo** si para todo $a, b \in M$ y $r, s \in R$, y con el producto externo de M satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $(ra) \in M$.
2. $r(a + b) = ra + rb$.
3. $(r + s)a = ra + sa$.
4. $(rs)a = r(sa)$.

Observación 1.2.1 *Un R-módulo se parece mucho a un espacio vectorial, pero los escalares sólo necesitan formar un anillo.*

Definición 1.2.2 *Sea M un R-módulo y sea $1 \in R$ tal que $1m = m$, para todo $m \in M$, entonces M es un R-**módulo con unidad**.*

Ejemplo 1.2.1 *El conjunto $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ de las parejas ordenadas (a, b), donde a y b son múltiplos de n, sobre $\mathbb{Z}$, es un $\mathbb{Z}$-módulo, donde la suma de (a_1, b_1),$(a_2, b_2) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ y el producto por escalar $r \in n\mathbb{Z}$ se define:*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$r(a_1, b_1) = (r \cdot a_1, r \cdot b_1).$$

Por demostrar que este ejemplo es un $\mathbb{Z}$-módulo, primero verifirecamos que $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ es un grupo conmutativo bajo la suma, donde ésta es la suma usual de los números enteros, sean $r, s \in \mathbb{Z}$ y $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ entonces tenemos que:

1. $(a_1, b_1)+(a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$, como a_1 y a_2 son múltiplos de n, entonces su suma también es múltiplo de n, por lo que podemos concluir que $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2 \in n\mathbb{Z}$, entonces $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$.

2. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (b_2, a_2) + (a_1, b_1)$. Observamos que se cumple la conmutatividad.

3. $(a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) = ((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3)$. Podemos concluir que se cumple la asociatividad.

4. Como 0 es múltiplo de n para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces existe $(0, 0) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ tal que se cumple $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$, donde $(0, 0)$ es el neutro aditivo de $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$.

5. Existe $(-a, -b) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ tal que se cumple que $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$, donde $(-a, -b)$ es el inverso aditivo de $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$.

De lo anterior podemos concluir que $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ es un grupo conmutativo bajo la suma.

Ahora verificaremos las otras propiedades para poder concluir que este ejemplo es un $\mathbb{Z}$-módulo.
Sean $r, s \in \mathbb{Z}$ y (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$:

1. Verificando la primer propiedad, utilizando las operaciones usuales de los números enteros, sabemos que $(a_1, b_1) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$, lo que implica que a_1 y b_1 son múltiplos de n, entonces tenemos que:

$$r \cdot (a_1, b_1) = (r \cdot a_1, r \cdot b_1) = (a_2, b_2),$$

donde a_2 y b_2 son múltiplos de a_1 y b_1 respectivamente; por lo que podemos concluir que $(ra_1, rb_1) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$.

2. Ahora verificamos la segunda condición. Tenemos que:

$$\begin{aligned} r((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) &= r(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ &= (r(a_1 + a_2), r(b_1 + b_2)) \\ &= (r \cdot a_1 + r \cdot a_2, r \cdot b_1 + r \cdot b_2) \\ &= (r \cdot a_1, r \cdot b_1) + (r \cdot a_2, r \cdot b_2) \\ &= r(a_1, b_1) + r(a_2, b_2), \end{aligned}$$

observamos que se cumple la segunda condición.

3. Verificando la tercera condición. Partimos de

$$\begin{aligned}(r+s)(a_1,b_1) &= ((r+s)a_1,(r+s)b_1)\\ &= (r\cdot a_1 + s\cdot a_1, r\cdot b_1 + s\cdot b_1)\\ &= (r\cdot a_1, r\cdot b_1) + (s\cdot a_1, s\cdot b_1)\\ &= r(a_1,b_1) + s(a_1,b_1).\end{aligned}$$

   Por lo que observamos que también se cumple esta condición.

4. Por útimo, verificamos la cuarta condición, en donde tenemos que:

$$\begin{aligned}(rs)(a_1,b_1) &= ((rs)\cdot a_1,(rs)\cdot b_1)\\ &= (r\cdot s\cdot a_1, r\cdot s\cdot b_1)\\ &= r(s\cdot a_1, s\cdot b_1)\\ &= r(s(a_1,b_1)),\end{aligned}$$

   de aquí observamos que se cumple la igualdad, por lo que concluimos que se cumple esta condición.

En virtud de que se cumplieron todas las condiciones señaladas, entonces concluimos que el ejemplo 1.2.1 es un $\mathbb{Z}$-módulo, lo que se pretendiá demostrar.

Ejemplo 1.2.2 *El conjuntos de las matrices $M(m\times n,\mathbb{K})$ de m filas con n columnas con entradas en $\mathbb{K}$, es un $\mathbb{K}$-módulo con la operación adición de matrices y multiplicación por escalar de $\mathbb{K}$, definidas:*

1. Si A, $B\in M(n\times m,\mathbb{K})$, entonces la suma de matrices $(A+B)$ es la matriz cuya entradas i,j está dada por $[A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$.

2. Si $a\in\mathbb{K}$ y $A\in M(m\times n,\mathbb{K})$, entonces la multiplicación de matrices por escalares $([aA])$ es la matriz cuya entrada i,j está dada por $[aA]_{i,j} = a[A]_{i,j}$.

Definición 1.2.3 *Un **homomorfismo de módulos** es una función $f: M\to N$ entre los R-módulos M y N tal que si para todo $r\in R$ y $m,n\in M$, se cumple:*

1. *$f(m+n) = f(m)+f(n)$.*

2. *$f(rm) = rf(m)$.*

*Además, si f es inyectiva y suprayectiva decimos que f es un **isomorfismo de módulos**.*

Ejemplo 1.2.3 *Definamos la función $f: 2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}\to M(2,\mathbb{Z})$ como:*

$$f(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

Veremos que es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. Sean $r\in\mathbb{Z}$ y $(a,b),(c,d)\in 2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$:

1.

$$\begin{aligned}
f((a,b)+(c,d)) &= f((a+c,b+d)) \\
&= \begin{pmatrix} (a+c)+(b+d) & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b+d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\
&= f(a,b)+f(c,d).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
f(r(a,b)) &= f((ra,rb)) \\
&= \begin{pmatrix} ra+rb & 0 \\ 0 & rb \end{pmatrix} \\
&= r\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\
&= rf(a,b).
\end{aligned}$$

1.3. Álgebras

Una álgebra normalmente la denotaremos por $\mathbb{A}$, y es importante para este trabajo porque es lo que necesitaremos para realizar el método de algebrización de ecuaciones diferenciales, además daremos la definición de homomorfismos e isomorfismos de álgebras.

Definición 1.3.1 *Sea M un R-módulos, y supongamos que existe una operación binaria definida entre elementos de M, $(\cdot,\cdot) : M \times M \to M$, tal que es bilineal con respecto a la suma, es decir, que para todo $u, v, w \in M$, $\lambda \in R$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$.
2. $(v+w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u$.
3. $u \cdot (\lambda v) = (\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$.

entonces llamaremos a $\mathbb{A} = (M, \cdot)$ ***álgebra sobre** R **o** R**-álgebra**, donde $(\cdot)$ denota el producto de M.*

Ejemplo 1.3.1 *Veamos que $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \times)$ es una álgebra sobre $\mathbb{R}$, donde $\times$ denota el producto vectorial o producto cruz.*

Sabemos que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, es decir que $\mathbb{R}^3$ es un $\mathbb{R}$-módulo, tenemos que el producto vectorial es distributivo y bilineal, por lo tanto tenemos que $\mathbb{A}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra.

Como lo mencionamos al inicio de esta sección la álgebra que utilizaremos para el método de algebrización la daremos a continuación. Para profundizar en el estudio de estas álgebras ver [14].

Definición 1.3.2 *Una R**-álgebra** o álgebra sobre un anillo conmutativo con unidad R es un R-módulo $\mathbb{A}$ con un producto, el cual es una transformación bilineal $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ denotada por $(x, y) \to xy$, de tal manera que se tiene la asociatividad, conmutatividad y existe un elemento $e \in \mathbb{A}$ que satisface $ex = xe = x$, para todo $x \in \mathbb{A}$, donde e es la unidad de $\mathbb{A}$.*
La bilinealidad de $(x, y) \to xy$ implica que para todo $x, y, z \in \mathbb{A}$ y $\alpha \in R$, se tiene:

i) $x(y+z) = xy + xz$, $(x+y)z = xz + yz$.

ii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

La asociatividad implica que para todo $x, y, z \in \mathbb{A}$, se tiene:

iii) $x(yz) = (xy)z$.

La conmutatividad implica que para todo $x, y, z \in \mathbb{A}$, se tiene:

iv) $xy = yx$.

Observación 1.3.1 *En este trabajo a lo que nosotros llamaremos álgebra nos referimos a una álgebra asociativa, conmutativa con unidad.*

Observación 1.3.2 *Un elemento $a \in \mathbb{A}$ se llama **regular** si existe $a^{-1} \in \mathbb{A}$, tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$, donde e es la unidad de $\mathbb{A}$, a^{-1} se llama el inverso de a, al conjunto de los elementos regulares lo denotaremos por $G(\mathbb{A})$. Si $a \in \mathbb{A}$ no es regular, entonces a se llama **singular**.*

El conjunto $G(\mathbb{A})$ es un grupo con respecto al producto de la álgebra. Tenemos que el producto es asociativo, que la identidad e está en $G(\mathbb{A})$ y que existe el inverso, lo único que falta ver es que es cerrado.
Sean $u, v \in G(\mathbb{A})$, tenemos que $u^{-1}, v^{-1} \in G(\mathbb{A})$, además que $(uv)(v^{-1}u^{-1}) = e$, entonces $uv \in G(\mathbb{A})$. Por lo tanto tenemos que $G(\mathbb{A})$ es un grupo. Los siguientes ejemplos son interesantes, en especial el *ejemplo 1.3.4*, llamado álgebra de los complejos, veremos más adelante que se trata de una álgebra normal.

Ejemplo 1.3.2 *El $\mathbb{R}$-módulo $\mathbb{R}^2$ es una R-álgebra con el producto:*

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2),$$

veamos que es bilineal, asociativa, conmutativa y existe la unidad.

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ en $\mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

i) Verificando la primera condición de bilinealidad

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1(x_2 + x_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\
&= (x_1x_2 + x_1x_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\
&= (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\
&= (x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((x_1, y_1) + (x_2, y_2))(x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)(x_3, y_3) \\
&= ((x_1 + x_2)x_3, (y_1 + y_2)x_3 + (x_1 + x_2)y_3)y_3) \\
&= (x_1x_3 + x_2x_3, y_1x_3 + y_2x_3 + x_1y_3 + x_2y_3) \\
&= (x_1x_3, y_1x_3 + x_2y_3) + (x_2x_3, y_2x_3 + x_1y_3) \\
&= (x_1, y_1)(x_3, y_3) + (x_2, y_2)(x_3, y_3).
\end{aligned}$$

ii) Ahora verificamos que se cumple la segunda condición

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,y_1)(x_2,y_2)) &= \alpha(x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2)\\ &= (\alpha x_1x_2, \alpha(x_1y_2 + y_1x_2))\\ &= (\alpha x_1x_2, \alpha x_1y_2 + \alpha y_1x_2)\\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1)(x_2,y_2)\\ &= (\alpha(x_1,y_1))(x_2,y_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,y_1)(x_2,y_2)) &= \alpha(x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2)\\ &= (\alpha x_1x_2, \alpha(x_1y_2 + y_1x_2))\\ &= (\alpha x_1x_2, \alpha x_1y_2 + \alpha y_1x_2)\\ &= (x_1\alpha x_2, x_1\alpha y_2 + y_1\alpha x_2)\\ &= (x_1,y_1)(\alpha x_2, \alpha y_2)\\ &= (x_1,y_1)(\alpha(x_2,y_2)),\end{aligned}$$

de *i*) y *ii*) tenemos que el producto es bilineal.

iii) Verificando que el producto es asociativo

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)((x_2,y_2)(x_3,y_3)) &= (x_1,y_1)(x_2x_3, x_2y_3 + y_2x_3)\\ &= (x_1x_2x_3, x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1x_2x_3)\\ &= (x_1x_2x_3, x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)\\ &= (x_1x_2x_3, x_1x_2y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3)\\ &= (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2)(x_3,y_3)\\ &= ((x_1,y_1)(x_2,y_2))(x_3,y_3),\end{aligned}$$

podemos observar que el producto es asociativo.

iv) Ahora verificaremos que el producto es conmutativo.

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)(x_2,y_2) &= (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2)\\ &= (x_2x_1, x_2y_1 + y_2x_1)\\ &= (x_2,y_2)(x_1,y_1).\end{aligned}$$

v) Sabemos que la unidad de $\mathbb{R}^2$ es $e = (1,0)$

$$\begin{aligned}(1,0)\cdot(x,y) &= (1\cdot x, 1\cdot y + 0\cdot x)\\ &= (x,y).\\ (x,y)\cdot(1,0) &= (x\cdot 1, x\cdot 0 + y\cdot 1)\\ &= (x,y).\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.3 *El $\mathbb{R}$-módulo $\mathbb{R}^2$ es una $\mathbb{R}$-álgebra, con el producto:*

$$(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (\frac{3}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2), x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_1)),$$

donde la unidad es $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ejemplo 1.3.4 (Complejos) *El* $\mathbb{R}$*-módulo* $\mathbb{R}^2$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra, con el producto:*

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

donde la unidad de $\mathbb{R}^2$ *es* $e = (1, 0)$*. Denotaremos a esta álgebra como* $\mathbb{C}$*.*

El siguiente ejemplo es de gran interés, ya que en estas álgebras algebrizaremos sistemas de ecuaciones planares.

Ejemplo 1.3.5 *El* $\mathbb{R}$*-módulo* $\mathbb{R}^2$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra, con alguno de los siguientes productos:*

I)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$-be_1 + ae_2$

.

II)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	$-ae_1$	e_1
e_2	e_1	e_2

.

III)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	e_1	0
e_2	0	e_2

.

Ejemplo 1.3.6 $\mathbb{R}^3$ *es una álgebra* $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ *donde* $(\cdot)$ *es alguno de los siguientes tres productos:*

A)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	$-be_1 - de_2 - fe_3$
e_3	e_3	$-be_1 - de_2 - fe_3$	$-he_1 - je_2 - le_3$

.

B)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	e_1	$-be_1 - de_2 - fe_3$
e_2	e_1	e_2	e_3
e_3	$-be_1 - de_2 - fe_3$	e_3	$-he_1 - je_2 - le_3$

.

C)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	$-be_1 - de_2 - fe_3$	e_1
e_2	$-be_1 - de_2 - fe_3$	$-he_1 - je_2 - le_3$	e_2
e_3	e_1	e_2	e_3

.

Sabemos que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial, por verificar que $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ tiene la estructura de una álgebra con respecto al producto Tipo A). Tenemos que el producto entre elementos de $\mathbb{A}$ se define como $(x, y, z), (u, v, w) = (xu - ayv - byw - bzv - hzw, xv + yu - cyu - dyw - dzv - jzw, xw - eyv - fyw + zu - fzw - lzw)$, verificaremos que se cumple que es bilineal, asociativo y conmutativo.

i) Verificamos que es bilineal:
La primera condición

$$\begin{aligned}(x_1,y_1,z_1)((x_2,y_2,z_2)+(x_3,y_3,z_3)) &= (x_1,y_1,z_1)(x_2+x_3,y_2+y_3,z_1+z_3)\\ &\quad (x_1(x_2+x_3)-ay_1(y_2+y_3)-by_1(z_2+z_3)\\ &\quad -bz_1(y_2+y_3)-hz_1(z_2+z_3),\\ &\quad x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)-cy_1(y_2+y_3)\\ &\quad dy_1(z_2+z_3)-dz_1(y_2+y_3)-jz_1(z_2+z_3),\\ &\quad x_1(z_1+z_2)-ey_1(y_2+y_3)-fy_1(z_2+z_3)\\ &\quad +z_1(x_2+x_3)-fz_1(y_2+y_3)-lz_1(z_2+z_3))\\ &= (x_1x_2-ay_1y_2-by_1z_2-bz_1y_2-hz_1z_2,\\ &\quad x_1y_2+y_1x_2-cy_1y_2-dy_1z_1-dz_1y_2-jz_1z_2,\\ &\quad x_1z_2-ey_1y_2-fy_1z_2+z_1x_2-fz_1y_2-lz_1z_2)\\ &\quad +(x_1x_3-ay_1y_3-by_1z_3-bz_1y_3-hz_1z_3,\\ &\quad x_1y_3+y_1x_3-cy_1y_3-dy_1z_3-dz_1y_3-jz_1z_3,\\ &\quad x_1z_3-ey_1y_3-fy_1z_3+z_1x_3-fz_1y_3-lz_1z_3).\end{aligned}$$

la segunda condición

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)) &= \alpha(x_1x_2-ay_1y_2-by_1z_2-bz_1y_2-hz_1z_2,\\ &\quad x_1y_2+y_1x_2-cy_1y_2-dy_1z_2-dz_1y_2-jz_1z_2,\\ &\quad x_1z_2-ey_1y_2-fy_1z_2+z_1x_2-fz_1y_2-lz_1z_2)\\ &= (\alpha x_1x_2-a\alpha y_1y_2-b\alpha y_1z_2-b\alpha z_1y_2-h\alpha z_1z_2,\\ &\quad \alpha x_1y_2+\alpha y_1x_2-c\alpha y_1y_2-d\alpha y_1z_2-d\alpha z_1y_2-j\alpha z_1z_2,\\ &\quad \alpha x_1z_2-e\alpha y_1y_2-f\alpha y_1z_2+\alpha z_1x_2-f\alpha z_1y_2-l\alpha z_1z_2)\\ &= (\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)(x_2,y_2,z_2)=(\alpha(x_1,y_1,z_1))(x_2,y_2,z_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)) &= \alpha(x_1x_2-ay_1y_2-by_1z_2-bz_1y_2-hz_1z_2,\\ &\quad x_1y_2+y_1x_2-cy_1y_2-dy_1z_2-dz_1y_2-jz_1z_2,\\ &\quad x_1z_2-ey_1y_2-fy_1z_2+z_1x_2-fz_1y_2-lz_1z_2)\\ &= (\alpha x_1x_2-a\alpha y_1y_2-b\alpha y_1z_2-b\alpha z_1y_2-h\alpha z_1z_2,\\ &\quad \alpha x_1y_2+\alpha y_1x_2-c\alpha y_1y_2-d\alpha y_1z_2-d\alpha z_1y_2-j\alpha z_1z_2,\\ &\quad \alpha x_1z_2-e\alpha y_1y_2-f\alpha y_1z_2+\alpha z_1x_2-f\alpha z_1y_2-l\alpha z_1z_2)\\ &= (x_1,y_1,z_1)(\alpha x_2,\alpha y_2,\alpha z_2)=(x_1,y_1,z_1)(\alpha(x_2,y_2,z_2)).\end{aligned}$$

ii) Verificamos que es asociativo:

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1,z_1)((x_2,y_2,z_2)(x_3,y_3,z_3)) &= (x_1,y_1,z_1)(x_2x_3 - ay_2y_3 - by_2z_3 - bz_2y_3 - hz_2z_3,\\
&\quad x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3,\\
&\quad x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&= (x_1(x_2x_3 - ay_2y_3 - by_2z_3 - bz_2y_3 - hz_2z_3)\\
&\quad - ay_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&\quad - by_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&\quad - bz_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&\quad - hz_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3),\\
&\quad y_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&\quad + y_1(x_2x_3 - ay_2y_3 - by_2z_3 - bz_2y_3 - hz_2z_3)\\
&\quad - cy_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&\quad - dy_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&\quad - dz_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&\quad - jz_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3),\\
&\quad x_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&\quad - ey_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&\quad - fy_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&\quad + z_1(x_2x_3 - ay_2y_3 - by_2z_3 - bz_2y_3 - hz_2z_3)\\
&\quad - fz_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&\quad - lz_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3))\\
&= (x_1x_2 - ay_1y_2 - by_1z_2 - bz_1y_2 - hz_1z_2,\\
&\quad x_1y_2 + y_1x_2 - cy_1y_2 - dy_1z_2 - dz_1y_2 - jz_1z_2,\\
&\quad x_1z_2 - ey_1y_2 - fy_1z_2 + z_1x_2 - fz_1y_2 - lz_1z_2)\\
&\quad (x_3,y_3,z_3)\\
&= ((x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2))(x_3,y_3,z_3).
\end{aligned}$$

iii) Por último, confirmemos que es conmutativa

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2) &= (x_1x_2 - ay_1y_2 - by_1z_2 - bz_1y_2 - hz_1z_2,\\
&\quad x_1y_2 + y_1x_2 - cy_1y_2 - dy_1z_1 - dz_1y_2 - jz_1z_2,\\
&\quad x_1z_2 - ey_1y_2 - fy_1z_2 + z_1x_2 - fz_1y_2 - lz_1z_2)\\
&= (x_2x_1 - ay_2y_1 - by_2z_1 - bz_2y_1 - hz_2z_1,\\
&\quad x_2y_1 + y_2x_1 - cy_2y_1 - dy_2z_1 - dz_1y_1 - jz_2z_1,\\
&\quad x_2z_1 - ey_2y_1 - fy_2z_1 + z_2x_1 - fz_2y_1 - lz_2z_1)\\
&= (x_2,y_2,z_2)(x_1,y_1,z_1).
\end{aligned}$$

Definición 1.3.3 *Un* ***homomorfismo*** *de R-álgebras es una función* $\psi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ *entre las R-álgebras* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{A}'$*, si para todo* $a, b \in \mathbb{A}$ *y* $\lambda \in R$*, se cumple:*

i) $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$.

ii) $\psi(\lambda a) = \lambda\psi(a)$.

iii) $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$.

Si e y e' son las unidades de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ respectivamente, entonces:

iv) $\psi(e) = e'$.

*Además, si ψ es inyectiva y sobreyectiva, se dice que ψ es un **isomorfismo** de R-álgebras y que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ son R-álgebras isomorfas.*

Ejemplo 1.3.7 *Sea f una función que va de la álgebra que vimos en el Ejemplo 1.3.2 al álgebra de las matrices $M(2,\mathbb{R})$, que se define como:*

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

La función es un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, como verificaremos a continuación. Sea $r \in \mathbb{R}$ y $(x,y),(w,z) \in \mathbb{R}^2$:

i)

$$\begin{aligned} f((x,y)+(w,z)) &= f(x+w, y+z) \\ &= \begin{pmatrix} x+w & 0 \\ y+z & x+w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix} \\ &= f(x,y) + f(w,z). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(r(x,y)) &= f(rx, ry) \\ &= \begin{pmatrix} rx & 0 \\ ry & rx \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= rf(x,y). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} f((x,y)\cdot(w,z)) &= f(xw, xz+yw) \\ &= \begin{pmatrix} xw & 0 \\ xz+yw & xw \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix} \\ &= f(x,y)\cdot f(w,z). \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} f(e) &= f(0,1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e'. \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que sí se trata de un homomorfismo de álgebras.

En este capítulo solo dimos lo más básico de una álgebra, ya que nuestro tema de interés se vera en el siguiente capítulo, es decir que veremos con más detalle las álgebras que utilizaremos para la algebrización.

Capítulo 2
Teoría de álgebras

Como mencionamos anteriormente, en este capítulo daremos una definición de álgebras, así como ejemplos que son convenientes para comprender la algebrización. Si desea ahondar en el tema ver [14].

2.1. Álgebra en los números complejos $\mathbb{C}$

Definición 2.1.1 *Sea $V_{\mathbb{K}}$ un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, y supongamos que existe una operación binaria definida entre vectores:*

$$\cdot : V_{\mathbb{K}} \times V_{\mathbb{K}} \to V_{\mathbb{K}},$$

que es bilineal, es decir, que para todo $u, v, w \in V$ y con $\lambda \in \mathbb{K}$ cumple las siguientes propiedades:

1. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot v.$
2. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w.$
3. $u \cdot (\lambda v) = (\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v).$

Con esta operación definimos a $V_{\mathbb{K}}$ como una ***álgebra sobre*** *$\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es el campo base del álgebra $\mathbb{A}$.*

Ejemplo 2.1.1 *Consideremos el caso de los números complejos $\mathbb{C}$, $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ definimos a la suma de estos números como la usual de los números reales, es decir, componente a componente y el producto de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Ahora queremos verificar si $\mathbb{C}$ se comporta como una $\mathbb{R}$-álgebra.

Sean $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ por demostrar que los números complejos son un $\mathbb{R}$-álgebra.

1. Verifiquemos si cumple con la primera propiedad:

$$\begin{aligned}
\xi_1(\xi_2+\xi_3) &= (x_1+iy_1)((x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)) \\
&= (x_1+iy_1)(x_2+x_3+i(y_2+y_3)) \\
&= x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3)+i(x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)) \\
&= x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3+i(x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3) \\
&= x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)+x_1x_3-y_1y_3+i(x_1y_3+y_1x_3) \\
&= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)+(x_1+iy_1)(x_3+y_3) \\
&= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3.
\end{aligned}$$

   Podemos observar que sí se cumple la primera propiedad.

2. Verifiquemos si se cumple la segunda propiedad:

$$\begin{aligned}
(\xi_1+\xi_2)\xi_3 &= ((x_1+iy_1)+(x_2+iy_2))(x_3+iy_3) \\
&= (x_1+x_2+i(y_1+y_2))(x_3+iy_3) \\
&= (x_1+x_2)x_3-(y_1+y_2)y_3+i((x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3) \\
&= x_1x_3+x_2x_3-y_1y_3-y_2y_3+i(x_1y_3+x_2y_3+y_1x_3+y_2x_3) \\
&= x_1x_3-y_1y_3+i(x_1y_3+y_1x_3)+x_2x_3-y_2y_3+i(x_2y_3+y_2x_3) \\
&= \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3.
\end{aligned}$$

   Observamos que el producto se distribuye en la suma por la derecha, por lo que efectivamente se cumple la segunda propiedad.

3. Verifiquemos si se cumple para la tercera condición:
   Primer caso

$$\begin{aligned}
\xi_1(\lambda\xi_2) &= (x_1+iy_1)(\lambda(x_2+iy_2)) \\
&= (x_1+iy_1)(\lambda x_2+i\lambda y_2)) \\
&= x_1(\lambda x_2)-y_1(\lambda y_2)+i(x_1(\lambda y_2)+y_1(\lambda x_2)) \\
&= x_1(\lambda x_2)-y_1(\lambda y_2)+i(x_1(\lambda y_2)+y_1(\lambda x_2)) \\
&= (\lambda x_1)x_2-(\lambda y_1)y_2+i((\lambda x_1)y_2+(\lambda y_1)x_2) \\
&= (\lambda x_1+i\lambda y_1)(x_2+iy_2) \\
&= (\lambda(x_1+iy_1))(x_2+iy_2) \\
&= (\lambda\xi_1)\xi_2.
\end{aligned}$$

   Segundo caso

$$\begin{aligned}
(\lambda\xi_1)\xi_2 &= (\lambda(x_1+iy_1))(x_2+iy_2) \\
&= (\lambda x_1+i\lambda y_1)(x_2+iy_2) \\
&= (\lambda x_1)x_2-(\lambda y_1)y_2+i((\lambda x_1)y_2+(\lambda y_1)x_2) \\
&= \lambda(x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)) \\
&= \lambda((x_1+iy_1)(x_2+iy_2)) \\
&= \lambda(\xi_1\xi_2).
\end{aligned}$$

   De lo anterior vemos que la tercera condición se cumple.

De las tres condiciones anteriores, podemos concluir que $\mathbb{C}$ es una álgebra sobre $\mathbb{R}$, o bien, es una $\mathbb{R}$-álgebra.

2.2. Álgebra de matrices

En el ejemplo 2.1.1 realizamos las operaciones necesarias para verificar que $\mathbb{C}$ es una álgebra, pero la pregunta es: ¿Podremos hacer los cálculos en $\mathbb{R}^n$ pensando en las operaciones de una variable compleja?, es decir, ¿En un conjunto de n-variables se pueden hacer las mismas operaciones de una álgebra como se hizo con los números complejos?.

Para verificar que también se cumplen las álgebras con operaciones de n variables es necesario que verifiquemos las siguiente definiciones sobre algunas álgebras en matrices, ya que éstas no ayudaran a entender mejor este tipo de problemas.

Existen otras álgebras en $\mathbb{R}^2$ con cualidades que nos serviran para este tema. Ver para profundizar [17] y [18].

Ahora consideremos los tres pares de matrices:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \\
&\text{(II)} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\
&\text{(III)} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Para esta sección utilizaremos las operaciones de matrices que se escribiran en los siguentes lemas.

Lema 2.2.1 *Sea el par de matrices de tipo* (I)*, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones*

(1) $e_1e_1 = e_1$.

(2) $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$.

(3) $e_2e_2 = -e_1$.

Prueba.

(i) Para el caso (1) y (2) se cumplen porque e_1 es la identidad, sólo nos falta demostrar el caso (3).

(ii) Por demostrar que $e_2e_2 = -e_1$.

$$\begin{aligned}
e_2e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -e_1.
\end{aligned}$$

De lo anterior queda demostrado el lema. $\square$

Lema 2.2.2 *Sea el par de matrices de tipo* (II) *entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $e_1e_1 = e_1$.

(2) $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$.

(3) $e_2e_2 = e_0$,

donde e_0 *es la matriz cero de* $M(2, \mathbb{R})$.

Prueba.

(i) Para el caso (1) y (2) se cumplen porque e_1 es la identidad. Ahora sólo nos falta demostrar el caso (3).

(ii) Por demostrar que $e_2e_2 = e_0$

$$\begin{aligned} e_2e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e_0 \end{aligned}$$

Concluimos que el lema se cumple. $\square$

Lema 2.2.3 *Sea el par de matrices de tipo* (III), *entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $e_1e_1 = e_1$.

(2) $e_1e_2 = e_2e_1 = e_0$.

(3) $e_2e_2 = e_2$.

Prueba.

(i) Por demostrar que $e_1e_1 = e_1$,

$$\begin{aligned} e_1e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e_1. \end{aligned}$$

(ii) Por demostrar que $e_1e_2 = e_2e_1 = e_0$,

- Verificando que se cumple $e_1e_2 = e_0$,

$$\begin{aligned} e_1e_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e_0. \end{aligned}$$

- Verificando que se cumple $e_2e_1 = e_0$,

$$\begin{aligned} e_2e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0. \end{pmatrix} \\ &= e_0. \end{aligned}$$

De aquí podemos concluir que se cumple la igualdad $e_1e_2 = e_2e_1 = e_0$.

(iii) Demostraremos la última igualdad $e_2e_2 = e_2$,

$$\begin{aligned} e_2e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e_2. \end{aligned}$$

De lo anterior el lema es demostrado. □

Observación 2.2.1 *Los lemas demostrados anteriormente los utilizaremos en los siguientes ejemplos.*

Ejemplo 2.2.1 *Verificar que estos tres pares de matrices* (I), (II) *y* (III) *son una $\mathbb{A}$-álgebra.*

Definimos a $\xi = ae_1 + be_2$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y e_1, e_2 las matrices (I), (II) y (III).

1. Para el par de matrices de (I),

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y utilizando el lema 2.2.1 queremos ver si forman una $\mathbb{A}$-álgebra, sean ξ_1, ξ_2, ξ_3 y $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Por verificar que se cumple la propiedad distributiva por la izquierda. $\xi_1(\xi_2+\xi_3) = \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3$

$$\begin{aligned}
\xi_1(\xi_2+\xi_3) &= (a_1e_1+b_1e_2)((a_2e_1+b_2e_2)+(a_3e_1+b_3e_2)) \\
&= (a_1e_1+b_1e_2)((a_2+a_3)e_1+(b_2+b_3)e_2) \\
&= (a_1(a_2+a_3))e_1^2+b_1(a_2+a_3)e_2e_1+a_1(b_2+b_3)e_1e_2+b_1(b_2+b_3)e_2^2 \\
&= (a_1(a_2+a_3))e_1+b_1(a_2+a_3)e_2+a_1(b_2+b_3)e_2-b_1(b_2+b_3)e_1 \\
&= (a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)e_1+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)e_2 \\
&= ((a_1a_2-b_1b_2)e_1+(b_1a_2+a_1b_2)e_2)+((a_1a_3-b_1b_3)e_1+(b_1a_3+a_1b_3)e_2) \\
&= (a_1a_2e_1-b_1b_2e_1+b_1a_2e_2+a_1b_2e_2)+(a_1a_3e_1-b_1b_3e_1+b_1a_3e_2+a_1b_3e_2) \\
&= (a_1a_2e_1e_1+a_1b_2e_1e_2+b_1a_2e_2e_1-b_1b_2e_2e_2) \\
&\quad +(a_1a_3e_1e_1+a_1b_3e_1e_2+b_1a_3e_2e_1-b_1b_3e_2e_2) \\
&= (a_1e_1+b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2)+(a_1e_1+b_1e_2)(a_3e_1+b_3e_2) \\
&= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

de aquí concluimos que el producto sí se distribuye por la izquierda.

ii) Ahora verificaremos que el producto efectivamente se distribuye por la derecha. $(\xi_1+\xi_2)\xi_3 = \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$.

$$\begin{aligned}
(\xi_1+\xi_2)\xi_3 &= ((a_1e_1+b_1e_2)+(a_2e_1+b_2e_2))(a_3e_1+b_3e_2) \\
&= ((a_1+a_2)e_1+(b_1+b_2)e_2)(a_3e_1+b_3e_2) \\
&= (a_1+a_2)a_3e_1^2+(b_1+b_2)a_3e_2e_1+(a_1+a_2)b_3e_1e_2+(b_1+b_2)b_3e_2^2 \\
&= (a_1+a_2)a_3e_1+(b_1+b_2)a_3e_2+(a_1+a_2)b_3e_2-(b_1+b_2)b_3e_1 \\
&= a_1a_3e_1+a_2a_3e_1+b_1a_3e_2+b_2a_3e_2+a_1b_3e_2+a_2b_3e_2-b_1b_3e_1-b_2b_3e_1 \\
&= (a_1a_3e_1+b_1a_3e_2+a_1b_3e_2-b_1b_3e_1)+(a_2a_3e_1+b_2a_3e_2+a_2b_3e_2-b_2b_3e_1) \\
&= (a_1a_3e_1^2+b_1a_3e_2e_1+a_1b_3e_1e_2+b_1b_3e_2^2) \\
&\quad +(a_2a_3e_1^2+b_2a_3e_2e_1+a_2b_3e_1e_2+b_2b_3e_2^2) \\
&= (a_1e_1+b_1e_2)(a_3e_1+b_3e_2)+(a_2e_1+b_2e_2)(a_3e_1+b_3e_2) \\
&= \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3,
\end{aligned}$$

de aquí observamos que el producto distribuye por la derecha.

iii) Verifiquemos que se cumple la siguiente igualdad $\xi_1(\lambda\xi_2) = (\lambda\xi_1)\xi_2 = \lambda(\xi_1\xi_2)$.

$$\begin{aligned}
\xi_1(\lambda\xi_2) &= (a_1e_1+b_1e_2)(\lambda(a_2e_1+b_2e_2)) \\
&= (a_1e_1+b_1e_2)(\lambda a_2e_1+\lambda b_2e_2) \\
&= a_1(\lambda a_2)e_1^2+b_1(\lambda a_2)e_2e_1+a_1(\lambda b_2)e_1e_2+b_1(\lambda b_2)e_2^2 \\
&= a_1(\lambda a_2)e_1+b_1(\lambda a_2)e_2+a_1(\lambda b_2)e_2-b_1(\lambda b_2)e_1 \\
&= (a_1\lambda)a_2e_1+(b_1\lambda)a_2e_2+(a_1\lambda)b_2e_2-(b_1\lambda)b_2e_1 \\
&= (\lambda a_1)a_2e_1+(\lambda b_1)a_2e_2+(\lambda a_1)b_2e_2-(\lambda b_1)b_2e_1 \\
&= (\lambda a_1)a_2e_1^2+(\lambda b_1)a_2e_2e_1+(\lambda a_1)b_2e_1e_2+(\lambda b_1)b_2e_2^2 \\
&= (\lambda a_1e_1+\lambda b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2) \\
&= (\lambda(a_1e_1+b_1e_2))(a_2e_1+b_2e_2) \\
&= (\lambda\xi_1)\xi_2.
\end{aligned}$$

Ahora verificamos que también se cumple la otra parte de la igualdad.

$$\begin{aligned}
(\lambda\xi_1)\xi_2 &= (\lambda(a_1e_1+b_1e_2))(a_2e_1+b_2e_2)\\
&= (\lambda a_1e_1+\lambda b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2)\\
&= (\lambda a_1)a_2e_1^2+(\lambda b_1)a_2e_2e_1+(\lambda a_1)b_2e_1e_2+(\lambda b_1)b_2e_2^2\\
&= (\lambda a_1)a_2e_1+(\lambda b_1)a_2e_2+(\lambda a_1)b_2e_2-(\lambda b_1)b_2e_1\\
&= \lambda(a_1a_2)e_1+\lambda(b_1a_2)e_2+\lambda(a_1b_2)e_2-\lambda(b_1b_2)e_1\\
&= \lambda(a_1a_2e_1+b_1a_2e_2+a_1b_2e_2-b_1b_2e_1)\\
&= \lambda(a_1a_2e_1^2+b_1a_2e_2e_1+a_1b_2e_1e_2+b_1b_2e_2^2)\\
&= \lambda((a_1e_1+b_1e_2))(a_2e_1+b_2e_2))\\
&= \lambda(\xi_1\xi_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que la tercer condición también se cumple.

De los tres puntos anteriores decimos que las matrices de tipo (I) son una $\mathbb{A}$-álgebra.

2. Ahora hacemos lo mismo para el par de matrices de tipo (II).

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

y utilizando el lema 2.2.2 queremos ver si forman una $\mathbb{A}$-álgebra, sean ξ_1,ξ_2,ξ_3 y $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Por verificar que se cumple la propiedad distributiva por la izquierda $\xi_1(\xi_2+\xi_3)=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3$,

$$\begin{aligned}
\xi_1(\xi_2+\xi_3) &= (a_1e_1+b_1e_2)((a_2e_1+b_2e_2)+(a_3e_1+b_3e_2))\\
&= (a_1e_1+b_1e_2)((a_2+a_3)e_1+(b_2+b_3)e_2)\\
&= (a_1(a_2+a_3))e_1^2+b_1(a_2+a_3)e_2e_1+a_1(b_2+b_3)e_1e_2+b_1(b_2+b_3)e_2^2\\
&= (a_1(a_2+a_3))e_1+b_1(a_2+a_3)e_2+a_1(b_2+b_3)e_2\\
&= (a_1a_2+a_1a_3)e_1+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)e_2\\
&= (a_1a_2e_1+(b_1a_2+a_1b_2)e_2)+(a_1a_3e_1+(b_1a_3+a_1b_3)e_2)\\
&= (a_1a_2e_1+b_1a_2e_2+a_1b_2e_2)+(a_1a_3e_1-b_1b_3e_1+b_1a_3e_2+a_1b_3e_2)\\
&= (a_1a_2e_1e_1+b_1a_2e_2e_1+a_1b_2e_1e_2+b_1b_2e_2^2)\\
&\quad +(a_1a_3e_1e_1+b_1a_3e_2e_1+a_1b_3e_1e_2+b_1b_3e_2^2)\\
&= (a_1e_1+b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2)+(a_1e_1+b_1e_2)(a_3e_1+b_3e_2)\\
&= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos que el producto sí se distribuye por la izquierda.

ii) Ahora verificaremos que el producto se distribuye por la derecha $(\xi_1+\xi_2)\xi_3 = \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$.

$$\begin{aligned}
(\xi_1+\xi_2)\xi_3 &= ((a_1e_1+b_1e_2)+(a_2e_1+b_2e_2))(a_3e_1+b_3e_2)\\
&= ((a_1+a_2)e_1+(b_1+b_2)e_2)(a_3e_1+b_3e_2)\\
&= (a_1+a_2)a_3e_1^2+(b_1+b_2)a_3e_2e_1+(a_1+a_2)b_3e_1e_2+(b_1+b_2)b_3e_2^2\\
&= (a_1+a_2)a_3e_1+(b_1+b_2)a_3e_2+(a_1+a_2)b_3e_2\\
&= a_1a_3e_1+a_2a_3e_1+b_1a_3e_2+b_2a_3e_2+a_1b_3e_2+a_2b_3e_2\\
&= (a_1a_3e_1+b_1a_3e_2+a_1b_3e_2)+(a_2a_3e_1+b_2a_3e_2+a_2b_3e_2)\\
&= (a_1a_3e_1+b_1a_3e_2+a_1b_3e_2+b_1b_3e_2e_2)\\
&\quad +(a_2a_3e_1+b_2a_3e_2+a_2b_3e_2+b_2b_3e_2e_2)\\
&= (a_1e_1+b_1e_2)(a_3e_1+b_3e_2)+(a_2e_1+b_2e_2)(a_3e_1+b_3e_2)\\
&= \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3,
\end{aligned}$$

de aquí observamos que el producto efectivamente se distribuye por la derecha.

iii) Por demostrar que se cumple la siguiente igualdad $\xi_1(\lambda\xi_2) = (\lambda\xi_1)\xi_2 = \lambda(\xi_1\xi_2)$.

$$\begin{aligned}
\xi_1(\lambda\xi_2) &= (a_1e_1+b_1e_2)(\lambda(a_2e_1+b_2e_2))\\
&= (a_1e_1+b_1e_2)(\lambda a_2e_1+\lambda b_2e_2)\\
&= a_1(\lambda a_2)e_1^2+b_1(\lambda a_2)e_2e_1+a_1(\lambda b_2)e_1e_2+b_1(\lambda b_2)e_2^2\\
&= a_1(\lambda a_2)e_1+b_1(\lambda a_2)e_2+a_1(\lambda b_2)e_2\\
&= (a_1\lambda)a_2e_1+(b_1\lambda)a_2e_2+(a_1\lambda)b_2e_2\\
&= (\lambda a_1)a_2e_1+(\lambda b_1)a_2e_2+(\lambda a_1)b_2e_2\\
&= (\lambda a_1)a_2e_1^2+(\lambda b_1)a_2e_2e_1+(\lambda a_1)b_2e_1e_2+(\lambda b_1)b_2e_2^2\\
&= (\lambda a_1e_1+\lambda b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2)\\
&= (\lambda(a_1e_1+b_1e_2))(a_2e_1+b_2e_2)\\
&= (\lambda\xi_1)\xi_2,
\end{aligned}$$

ahora verificamos que también se cumple la otra parte de la igualdad.

$$\begin{aligned}
(\lambda\xi_1)\xi_2 &= (\lambda(a_1e_1+b_1e_2))(a_2e_1+b_2e_2)\\
&= (\lambda a_1e_1+\lambda b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2)\\
&= (\lambda a_1)a_2e_1^2+(\lambda b_1)a_2e_2e_1+(\lambda a_1)b_2e_1e_2+(\lambda b_1)b_2e_2^2\\
&= (\lambda a_1)a_2e_1+(\lambda b_1)a_2e_2+(\lambda a_1)b_2e_2\\
&= \lambda(a_1a_2)e_1+\lambda(b_1a_2)e_2+\lambda(a_1b_2)e_2\\
&= \lambda(a_1a_2e_1+b_1a_2e_2+a_1b_2e_2)\\
&= \lambda(a_1a_2e_1^2+b_1a_2e_2e_1+a_1b_2e_1e_2+b_1b_2e_2^2)\\
&= \lambda((a_1e_1+b_1e_2))(a_2e_1+b_2e_2))\\
&= \lambda(\xi_1\xi_2),
\end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos que la tercer condición también se cumple.

De los tres puntos anteriores, decimos que las matrices de tipo (II) son una $\mathbb{A}$-álgebra.

3. Ahora hacemos los mismos cálculos para el útimo par de matrices de tipo (III), tenemos que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y utilizando el lema 2.2.3 queremos ver si forman una $\mathbb{A}$-álgebra, sean ξ_1, ξ_2, ξ_3 y $\lambda \in \mathbb{R}$.

   i) Por demostrar que se cumple la propiedad distributiva del producto por la izquierda $\xi_1(\xi_2 + \xi_3) = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3$.

$$\begin{aligned}
\xi_1(\xi_2+\xi_3) &= (a_1e_1+b_1e_2)((a_2e_1+b_2e_2)+(a_3e_1+b_3e_2)) \\
&= (a_1e_1+b_1e_2)((a_2+a_3)e_1+(b_2+b_3)e_2) \\
&= (a_1(a_2+a_3))e_1^2+b_1(a_2+a_3)e_2e_1+a_1(b_2+b_3)e_1e_2+b_1(b_2+b_3)e_2^2 \\
&= (a_1(a_2+a_3))e_1+b_1(b_2+b_3)e_2 \\
&= (a_1a_2+a_1a_3)e_1+(b_1b_2+b_1b_3)e_2 \\
&= (a_1a_2e_1+b_1b_2e_2)+(a_1a_3e_1+b_1b_3e_2) \\
&= (a_1a_2e_1e_1+b_1b_2e_2e_2)+(a_1a_3e_1e_1+b_1b_3e_2e_2) \\
&= (a_1a_2e_1e_1+a_1b_2e_1e_2+b_1a_2e_2e_1+b_1b_2e_2e_2) \\
&\quad +(a_1a_3e_1e_1+a_1b_3e_1e_2+b_1a_3e_2e_1+b_1b_3e_2e_2) \\
&= (a_1e_1+b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2)+(a_1e_1+b_1e_2)(a_3e_1+b_3e_2) \\
&= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

   de aquí podemos decir que el producto sí se distribuye por la izquierda.

   ii) Ahora verificaremos que el producto se distribuye por la derecha $(\xi_1 + \xi_2)\xi_3 = \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3$.

$$\begin{aligned}
(\xi_1+\xi_2)\xi_3 &= ((a_1e_1+b_1e_2)+(a_2e_1+b_2e_2))(a_3e_1+b_3e_2) \\
&= ((a_1+a_2)e_1+(b_1+b_2)e_2)(a_3e_1+b_3e_2) \\
&= (a_1+a_2)a_3e_1^2+(b_1+b_2)a_3e_2e_1+(a_1+a_2)b_3e_1e_2+(b_1+b_2)b_3e_2^2 \\
&= (a_1+a_2)a_3e_1+(b_1+b_2)b_3e_2 \\
&= (a_1a_3e_1+a_2a_3e_1)+(b_1b_3e_1+b_2b_3e_2) \\
&= (a_1a_3e_1+b_1b_3e_2)+(a_2a_3e_1+b_2b_3e_2) \\
&= (a_1a_3e_1e_1+b_1b_3e_2e_2)+(a_2a_3e_1e_1+b_2b_3e_2e_2) \\
&= (a_1a_3e_1e_1+b_1a_3e_2e_1+a_1b_3e_1e_2+b_1b_3e_2e_2) \\
&\quad +(a_2a_3e_1e_1+b_2a_3e_2e_1+a_2b_3e_1e_2+b_2b_3e_2e_2) \\
&= (a_1e_1+b_1e_2)(a_3e_1+b_3e_2)+(a_2e_1+b_2e_2)(a_3e_1+b_3e_2) \\
&= \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3,
\end{aligned}$$

   de aquí observamos que el producto efectivamente se distribuye por la derecha.

iii) Verifiquemos que se cumple la siguiente igualdad $\xi_1(\lambda\xi_2) = (\lambda\xi_1)\xi_2 = \lambda(\xi_1\xi_2)$.

$$\begin{aligned}
\xi_1(\lambda\xi_2) &= (a_1e_1 + b_1e_2)(\lambda(a_2e_1 + b_2e_2)) \\
&= (a_1e_1 + b_1e_2)(\lambda a_2e_1 + \lambda b_2e_2) \\
&= a_1(\lambda a_2)e_1^2 + b_1(\lambda a_2)e_2e_1 + a_1(\lambda b_2)e_1e_2 + b_1(\lambda b_2)e_2^2 \\
&= a_1(\lambda a_2)e_1 + b_1(\lambda b_2)e_2 \\
&= (a_1\lambda)a_2e_1 + (b_1\lambda)b_2e_1 \\
&= (\lambda a_1)a_2e_1 + (\lambda b_1)b_2e_1 \\
&= (\lambda a_1)a_2e_1e_1 + (\lambda b_1)a_2e_2e_1 + (\lambda a_1)b_2e_1e_2 + (\lambda b_1)b_2e_2e_2 \\
&= (\lambda a_1e_1 + \lambda b_1e_2)(a_2e_1 + b_2e_2) \\
&= (\lambda(a_1e_1 + b_1e_2))(a_2e_1 + b_2e_2) \\
&= (\lambda\xi_1)\xi_2.
\end{aligned}$$

Ahora verificamos que también se cumple la otra parte de la igualdad.

$$\begin{aligned}
(\lambda\xi_1)\xi_2 &= (\lambda(a_1e_1 + b_1e_2))(a_2e_1 + b_2e_2) \\
&= (\lambda a_1e_1 + \lambda b_1e_2)(a_2e_1 + b_2e_2) \\
&= (\lambda a_1)a_2e_1^2 + (\lambda b_1)a_2e_2e_1 + (\lambda a_1)b_2e_1e_2 + (\lambda b_1)b_2e_2^2 \\
&= (\lambda a_1)a_2e_1 + (\lambda b_1)b_2e_1 \\
&= \lambda(a_1a_2)e_1 + \lambda(b_1b_2)e_1 \\
&= \lambda(a_1a_2e_1 + b_1b_2e_1) \\
&= \lambda(a_1a_2e_1e_1 + b_1a_2e_2e_1 + a_1b_2e_1e_2 + b_1b_2e_2e_2) \\
&= \lambda((a_1e_1 + b_1e_2))(a_2e_1 + b_2e_2)) \\
&= \lambda(\xi_1\xi_2),
\end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos que la tercer condición también se cumple.

De los tres puntos anteriores decimos que las matrices de tipo (III) son una $\mathbb{A}$-álgebra.

Las siguientes tablas tienen reglas de multiplicación respectivamente y la suma usual de los números reales:

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & -be_1 + ae_2 \end{array}.$$

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & -ae_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{array}.$$

$$\text{(III)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 \end{array}.$$

Ahora calcularemos la unidad de cada una de ellas.

Sea $\xi \in \mathbb{R}^2$ queremos ver que para cada una de las tablas existe un $\xi_{-1} \in \mathbb{R}^2$, de tal manera que se cumpla que $\xi\xi_{-1} = \xi$, donde $\xi = (x_1, x_2)$ y $\xi_{-1} = (u, v)$, es decir, tenemos que encontrar su neutro multiplicativo.

1. Queremos encontrar la unidad multiplicativa de la tabla de tipo (I), de tal manera que se cumpla $(x_1, x_2)(u, v) = (x_1, x_2)$. Hacemos primero los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2)(u, v) &= (x_1e_1 + x_2e_2)(ue_1 + ve_2) \\
&= x_1ue_1e_1 + x_2ue_2e_1 + x_1ve_1e_2 + x_2ve_2e_2 \\
&= x_1ue_1 + x_2ue_2 + x_1ve_2 + x_2v(-be_1 + ae_2) \\
&= (x_1u - bx_2v)e_1 + (x_2u + x_1v + x_2va)e_2 \\
&= x_1e_1 + x_2e_2.
\end{aligned}$$

De la igualdad tenemos que $(x_1u - bx_2v)e_1 + (x_2u + x_1v + x_2va)e_2 = x_1e_1 + x_2e_2$, entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1u - bx_2v = x_1 \\ x_2u + x_1v + x_2va = x_2 \end{cases},$$

multiplicando a las ecuaciones por x_2 y x_1 respectivamente, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1x_2u - bx_2^2v = x_1x_2 \\ x_1x_2u + (x_1 + x_2a)x_1v = x_1x_2 \end{cases}.$$

Restamos la segunda ecuación a la primera y tenemos que $(x_1 + ax_2 + bx_2)v = 0$, lo que implica que $v = 0$, de aquí obtenemos que $u = 1$, es decir, que $\xi_{-1} = (u, v) = (1, 0) = e_1$.

2. Ahora encontraremos la unidad multiplicativa de la tabla de tipo (II), de tal manera que se cumpla $(x_1, x_2)(u, v) = (x_1, x_2)$. Primero hacemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2)(u, v) &= (x_1e_1 + x_2e_2)(ue_1 + ve_2) \\
&= x_1ue_1e_1 + x_2ue_2e_1 + x_1ve_1e_2 + x_2ve_2e_2 \\
&= x_1u(-ae_1) + x_2ue_1 + x_1ve_1 + x_2ve_2 \\
&= (-ax_1u + x_2u + x_1v)e_1 + x_2ve_2 \\
&= x_1e_1 + x_2e_2.
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior tenemos que $(-ax_1u + x_2u + x_1v)e_1 + x_2ve_2 = x_1e_1 + x_2e_2$, de donde se desprende el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -ax_1u + x_2u + x_1v = x_1 \\ x_2v = x_2 \end{cases}.$$

Observamos en la segunda ecuación que existe la igualdad $x_2v = x_2$, lo que implica que $v = 1$. De aquí sustituimos este valor en la primera ecuación para obtener $(x_2 - ax_1)u = 0$, lo que conlleva a que el valor de $u = 0$, es decir, que $\xi_{-1} = (u, v) = (0, 1) = e_2$.

3. Por último encontraremos la unidad multiplicativa de la tabla de tipo (III), de tal manera que se cumpla $(x_1, x_2)(u, v) = (x_1, x_2)$.
Hacemos primero los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2)(u, v) &= (x_1e_1 + x_2e_2)(ue_1 + ve_2) \\
&= x_1ue_1e_1 + x_2ue_2e_1 + x_1ve_1e_2 + x_2ve_2e_2 \\
&= x_1ue_1 + x_2ve_2 \\
&= x_1e_1 + x_2e_2.
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior tenemos que $x_1ue_1 + x_2ve_2 = x_1e_1 + x_2e_2$, entonces se desprende que:

$$\begin{cases} x_1u = x_1 \\ x_2v = x_2 \end{cases}.$$

Observamos que de las dos ecuaciones tenemos que $x_1u = x_1$ y $x_2v = x_2$, lo que implica que $u = 1$ y $v = 1$, de aquí sustituimos este valor en la primera ecuación, es decir, que se obtiene $\xi_{-1} = (u, v) = (1, 1) = e_1 + e_2$.

Veremos otros ejemplos con las siguientes tablas.

Ejemplo 2.2.2 *Sean* (I)*,* (II) *y* (III) *tablas con reglas de multiplicar para elementos* $\xi \in \mathbb{R}^2$ *con la suma usual, donde* $\xi = xe_1 + ye_2$ *y* $a, b, x, y \in \mathbb{R}$*. Determinemos si las tablas de multiplicar forman una álgebra sobre* $\mathbb{R}$*:*

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & -be_1 + ae_2 \end{array}.$$

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & -ae_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{array}.$$

$$\text{(III)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 \end{array}.$$

1. Determinaremos si la tabla de tipo (I) con sus reglas de multiplicación forma una álgebra sobre $\mathbb{R}$, sean $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ y $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}^2$, donde e_1 es la unidad de la tabla y $\xi_i = x_ie_1 + y_ie_2$ con $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & -be_1 + ae_2 \end{array}.$$

   i) Por demostrar que se cumple la propiedad distributiva del producto por la izquierda $\xi_1(\xi_2+$

$\xi_3) = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3$.

$$\begin{aligned}
\xi_1(\xi_2+\xi_3) &= (x_1e_1+y_1e_2)((x_2e_1+y_2e_2)+(x_3e_1+y_3e_2)) \\
&= (x_1e_1+y_1e_2)((x_2+x_3)e_1+(y_2+y_3)e_2) \\
&= x_1(x_2+x_3)e_1^2+y_1(x_2+x_3)e_2e_1+x_1(y_2+y_3)e_1e_2 \\
&\quad +y_1(y_2+y_3)e_2^2 \\
&= x_1(x_2+x_3)e_1+y_1(x_2+x_3)e_2+x_1(y_2+y_3)e_2 \\
&\quad +y_1(y_2+y_3)(-be_1+ae_2) \\
&= (x_1x_2+x_1x_3)e_1+(y_1x_2+y_1x_3)e_2+(x_1y_2+x_1y_3)e_2 \\
&\quad +(y_1y_2+y_1y_3)(-be_1+ae_2) \\
&= (x_1x_2+x_1x_3)e_1+(y_1x_2+y_1x_3)e_2+(x_1y_2+x_1y_3)e_2 \\
&\quad -(y_1y_2b+y_1y_3b)e_1+(y_1y_2a+y_1y_3a)e_2 \\
&= (x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2b-y_1y_3b)e_1+(y_1x_2+y_1x_3 \\
&\quad +x_1y_2+x_1y_3+y_1y_2a+y_1y_3a)e_2 \\
&= ((x_1x_2-y_1y_2b)e_1+(y_1x_2+x_1y_2+y_1y_2a)e_2) \\
&\quad +((x_1x_3-y_1y_3b)e_1+(y_1x_3+x_1y_3+y_1y_3a)e_2) \\
&= ((x_1x_2-y_1y_2b)e_1+(y_1x_2+x_1y_2+y_1y_2a)e_2) \\
&\quad +((x_1x_3-y_1y_3b)e_1+(y_1x_3+x_1y_3+y_1y_3a)e_2) \\
&= (x_1x_2e_1-y_1y_2be_1+y_1x_2e_2+x_1y_2e_2+y_1y_2ae_2) \\
&\quad +(x_1x_3e_1-y_1y_3be_1+y_1x_3e_2+x_1y_3e_2+y_1y_3ae_2) \\
&= (x_1x_2e_1+y_1x_2e_2+x_1y_2e_2-y_1y_2be_1+y_1y_2ae_2) \\
&\quad +(x_1x_3e_1+y_1x_3e_2+x_1y_3e_2-y_1y_3be_1+y_1y_3ae_2) \\
&= (x_1x_2e_1+y_1x_2e_2+x_1y_2e_2+y_1y_2(-be_1+ae_2)) \\
&\quad +(x_1x_3e_1+y_1x_3e_2+x_1y_3e_2+y_1y_3(-be_1+ae_2)) \\
&= (x_1x_2e_1e_1+y_1x_2e_1e_2+x_1y_2e_2e_1+y_1y_2e_2e_2) \\
&\quad +(x_1x_3e_1e_1+y_1x_3e_1e_2+x_1y_3e_2e_1+y_1y_3e_2e_2) \\
&= ((x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2))+((x_1e_1+y_1e_2)(x_3e_1+y_3e_2)) \\
&= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

de aquí podemos decir que el producto sí se distribuye por la izquierda.

ii) Ahora verificaremos que el producto se distribuye por la derecha $(\xi_1+\xi_2)\xi_3 = \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$.

$$
\begin{aligned}
(\xi_1+\xi_2)\xi_3 &= ((x_1e_1+y_1e_2)+(x_2e_1+y_2e_2))(x_3e_1+y_3e_2)\\
&= ((x_1+x_2)e_1+(y_1+y_2)e_2)(x_3e_1+y_3e_2)\\
&= (x_1+x_2)x_3e_1^2+(y_1+y_2)x_3e_2e_1+(x_1+x_2)y_3e_1e_2+(y_1+y_2)y_3e_2^2\\
&= (x_1+x_2)x_3e_1+(y_1+y_2)x_3e_2+(x_1+x_2)y_3e_2\\
&\quad +(y_1+y_2)y_3(-be_1+ae_2)\\
&= (x_1x_3+x_2x_3)e_1+(y_1x_3+y_2x_3)e_2+(x_1y_3+x_2y_3)e_2\\
&\quad +(y_1y_3+y_2y_3)(-be_1+ae_2)\\
&= (x_1x_3+x_2x_3)e_1+(y_1x_3+y_2x_3)e_2+(x_1y_3+x_2y_3)e_2\\
&\quad -(y_1y_3b+y_2y_3b)e_1+(y_1y_3a+y_2y_3a)e_2\\
&= ((x_1x_3-y_1y_3b)e_1+(y_1x_3+x_1y_3+y_1y_3a)e_2)\\
&\quad +((x_2x_3-y_2y_3b)e_1+(y_2x_3+x_2y_3+y_2y_3a)e_2)\\
&= (x_1x_3e_1-y_1y_3be_1+y_1x_3e_2+x_1y_3e_2+y_1y_3ae_2)\\
&\quad +(x_2x_3e_1-y_2y_3be_1+y_2x_3e_2+x_2y_3e_2+y_2y_3ae_2)\\
&= (x_1x_3e_1+y_1x_3e_2+x_1y_3e_2+y_1y_3(-be_1+ae_2))\\
&\quad +(x_2x_3e_1+y_2x_3e_2+x_2y_3e_2+y_2y_3(-be_1+ae_2))\\
&= (x_1x_3e_1e_1+y_1x_3e_2e_1+x_1y_3e_1e_2+y_1y_3e_2e_2)\\
&\quad +(x_2x_3e_1e_1+y_2x_3e_2e_1+x_2y_3e_1e_2+y_2y_3e_2e_2)\\
&= ((x_1e_1+y_1e_2)(x_3e_1+y_3e_2))+((x_2e_1+y_2e_2)(x_3e_1+y_3e_2))\\
&= \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3,
\end{aligned}
$$

de aquí observamos que el producto efectivamente se distribuye por la derecha.

iii) Verifiquemos que se cumple la siguiente igualdad $\xi_1(\lambda\xi_2) = (\lambda\xi_1)\xi_2 = \lambda(\xi_1\xi_2)$.

$$
\begin{aligned}
\xi_1(\lambda\xi_2) &= (x_1e_1+y_1e_2)(\lambda(x_2e_1+y_2e_2))\\
&= (x_1e_1+y_1e_2)(\lambda x_2e_1+\lambda y_2e_2)\\
&= x_1(\lambda x_2)e_1^2+y_1(\lambda x_2)e_2e_1+x_1(\lambda y_2)e_1e_2+y_1(\lambda y_2)e_2^2\\
&= x_1(\lambda x_2)e_1+y_1(\lambda x_2)e_2+x_1(\lambda y_2)e_2+y_1(\lambda y_2)(-be_1+ae_2)\\
&= x_1(\lambda x_2)e_1+y_1(\lambda x_2)e_2+x_1(\lambda y_2)e_2+y_1(\lambda y_2)(-be_1+ae_2)\\
&= (x_1\lambda)x_2e_1+(y_1\lambda)x_2e_2+(x_1\lambda)y_2e_2+(y_1\lambda)y_2(-be_1+ae_2)\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1+(\lambda y_1)x_2e_2+(\lambda x_1)y_2e_2+(\lambda y_1)y_2(-be_1+ae_2)\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1e_1+(\lambda y_1)x_2e_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1e_2+(\lambda y_1)y_2e_2e_2\\
&= (\lambda x_1e_1+\lambda y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda(x_1e_1+y_1e_2))(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda\xi_1)\xi_2,
\end{aligned}
$$

ahora verificamos que también se cumple la otra parte de la igualdad.

$$\begin{aligned}
(\lambda\xi_1)\xi_2 &= \lambda(x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda a_1e_1+\lambda b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2)\\
&= (\lambda x_1e_1+\lambda y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1^2+(\lambda y_1)x_2e_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1e_2+(\lambda y_1)y_2e_2^2\\
&= \lambda(x_1x_2)e_1^2+\lambda(y_1x_2)e_2e_1+\lambda(x_1y_2)e_1e_2+\lambda(y_1y_2)e_2^2\\
&= \lambda(x_1x_2)e_1+\lambda(y_1x_2)e_2+\lambda(x_1y_2)e_2+\lambda(y_1y_2)(-be_1+ae_2)\\
&= \lambda(x_1x_2e_1+y_1x_2e_2+x_1y_2e_2+y_1y_2(-be_1+ae_2))\\
&= \lambda(x_1x_2e_1^2+y_1x_2e_2e_1+x_1y_2e_1e_2+y_1y_2e_2^2)\\
&= \lambda(x_1x_2e_1e_1+y_1x_2e_2e_1+x_1y_2e_1e_2+y_1y_2e_2e_2)\\
&= \lambda((x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2))\\
&= \lambda(\xi_1\xi_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que la tercer condición también se cumple y, además, decimos que la tabla de multiplicar es una álgebra sobre $\mathbb{R}$.

2. Determinaremos si la tabla de tipo (II) con sus reglas de multiplicación forma una álgebra sobre $\mathbb{R}$, sean $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ y $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}^2$, donde la unidad de la tabla es e_2 y $\xi_i = x_ie_1 + y_ie_2$ con $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{array}{c|cc}
\cdot & e_1 & e_2\\
\hline
e_1 & -ae_1 & e_1\\
e_2 & e_1 & e_2
\end{array}.$$

   i) Por demostrar que se cumple la propiedad distributiva del producto por la izquierda $\xi_1(\xi_2+$

$\xi_3) = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3$.

$$\begin{aligned}
\xi_1(\xi_2+\xi_3) &= (x_1e_1+y_1e_2)((x_2e_1+y_2e_2)+(x_3e_1+y_3e_2)) \\
&= (x_1e_1+y_1e_2)((x_2+x_3)e_1+(y_2+y_3)e_2) \\
&= x_1(x_2+x_3)e_1^2+y_1(x_2+x_3)e_2e_1+x_1(y_2+y_3)e_1e_2 \\
&\quad +y_1(y_2+y_3)e_2^2 \\
&= x_1(x_2+x_3)(-ae_1)+y_1(x_2+x_3)e_1+x_1(y_2+y_3)e_1 \\
&\quad +y_1(y_2+y_3)e_2 \\
&= (x_1x_2+x_1x_3)(-ae_1)+(y_1x_2+y_1x_3)e_1+(x_1y_2+x_1y_3)e_1 \\
&\quad +(y_1y_2+y_1y_3)e_2 \\
&= (-ax_1x_2-ax_1x_3+y_1x_2+y_1x_3+x_1y_2+x_1y_3)e_1 \\
&\quad +(y_1y_2+y_1y_3)e_2 \\
&= ((-ax_1x_2+y_1x_2+x_1y_2)e_1+y_1y_2e_2) \\
&\quad +((-ax_1x_3+y_1x_3+x_1y_3)e_1+y_1y_3e_2) \\
&= (-ax_1x_2e_1+y_1x_2e_1+x_1y_2e_1+y_1y_2e_2) \\
&\quad +(-ax_1x_3e_1+y_1x_3e_1+x_1y_3e_1+y_1y_3e_2) \\
&= (x_1x_2(-ae_1)+y_1x_2e_1+x_1y_2e_1+y_1y_2e_2) \\
&\quad +(x_1x_3(-ae_1)+y_1x_3e_1+x_1y_3e_1+y_1y_3e_2) \\
&= (x_1x_2e_1^2+y_1x_2e_2e_1+x_1y_2e_1e_2+y_1y_2e_2^2) \\
&\quad +(x_1x_3e_1^2+y_1x_3e_2e_1+x_1y_3e_1e_2+y_1y_3e_2^2) \\
&= ((x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2))+((x_1e_1+y_1e_2)(x_3e_1+y_1e_3)) \\
&= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

de aquí podemos decir que el producto sí se distribuye por la izquierda.

ii) Ahora verificaremos que el producto se distribuye por la derecha $(\xi_1+\xi_2)\xi_3=\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$.

$$\begin{aligned}
(\xi_1+\xi_2)\xi_3 &= ((x_1e_1+y_1e_2)+(x_2e_1+y_2e_2))(x_3e_1+y_3e_2)\\
&= ((x_1+x_2)e_1+(y_1+y_2)e_2)(x_3e_1+y_3e_2)\\
&= (x_1+x_2)x_3e_1^2+(y_1+y_2)x_3e_2e_1+(x_1+x_2)y_3e_1e_2+(y_1+y_2)y_3e_2^2\\
&= (x_1+x_2)x_3(-ae_1)+(y_1+y_2)x_3e_1+(x_1+x_2)y_3e_1+(y_1+y_2)y_3e_2\\
&= (-ax_1x_3-ax_2x_3)e_1+(y_1x_3+y_2x_3)e_1+(x_1y_3+x_2y_3)e_1\\
&\quad +(y_1y_3+y_2y_3)e_2\\
&= (-ax_1x_3-ax_2x_3+y_1x_3+y_2x_3+x_1y_3+x_2y_3)e_1\\
&\quad +(y_1y_3+y_2y_3)e_2\\
&= ((-ax_1x_3+y_1x_3+x_1y_3)e_1+y_1y_3e_2)\\
&\quad +((-ax_2x_3+y_2x_3+x_2y_3)e_1+y_2y_3e_2)\\
&= (-ax_1x_3e_1+y_1x_3e_1+x_1y_3e_1+y_1y_3e_2)\\
&\quad +(-ax_2x_3e_1+y_2x_3e_1+x_2y_3e_1+y_2y_3e_2)\\
&= (x_1x_3e_1^2+y_1x_3e_2e_1+x_1y_3e_1e_2+y_1y_3e_2^2)\\
&\quad +(x_2x_3e_1^2+y_2x_3e_2e_1+x_2y_3e_1e_2+y_2y_3e_2^2)\\
&= ((x_1e_1+y_1e_2)(x_3e_1+y_3e_2))+((x_2e_1+y_2e_2)(x_3e_1+y_3e_2))\\
&= \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3,
\end{aligned}$$

de aquí concluimos que el producto efectivamente se distribuye por la derecha.

iii) Verifiquemos que se cumple la siguiente igualdad $\xi_1(\lambda\xi_2)=(\lambda\xi_1)\xi_2=\lambda(\xi_1\xi_2)$.

$$\begin{aligned}
\xi_1(\lambda\xi_2) &= (x_1e_1+y_1e_2)(\lambda(x_2e_1+y_2e_2))\\
&= (x_1e_1+y_1e_2)(\lambda x_2e_1+\lambda y_2e_2)\\
&= x_1(\lambda x_2)e_1^2+y_1(\lambda x_2)e_2e_1+x_1(\lambda y_2)e_1e_2+y_1(\lambda y_2)e_2^2\\
&= x_1(\lambda x_2)(-ae_1)+y_1(\lambda x_2)e_1+x_1(\lambda y_2)e_1+y_1(\lambda y_2)e_2\\
&= (x_1\lambda)x_2(-ae_1)+(y_1\lambda)x_2e_1+(x_1\lambda)y_2e_1+(y_1\lambda)y_2e_2\\
&= (\lambda x_1)x_2(-ae_1)+(\lambda y_1)x_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1+(\lambda y_1)y_2e_2\\
&= (\lambda x_1)x_2(e_1e_1)+(\lambda y_1)x_2e_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1e_2+(\lambda y_1)y_2e_2e_2\\
&= (x_1\lambda)x_2e_1+(y_1\lambda)x_2e_2+(x_1\lambda)y_2e_2+(y_1\lambda)y_2(-be_1+ae_2)\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1+(\lambda y_1)x_2e_2+(\lambda x_1)y_2e_2+(\lambda y_1)y_2(-be_1+ae_2)\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1e_1+(\lambda y_1)x_2e_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1e_2+(\lambda y_1)y_2e_2e_2\\
&= (\lambda x_1e_1+\lambda y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda(x_1e_1+y_1e_2))(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda\xi_1)\xi_2,
\end{aligned}$$

ahora verificamos que también se cumple la otra parte de la igualdad

$$\begin{aligned}
(\lambda\xi_1)\xi_2 &= \lambda(x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda x_1e_1+\lambda y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1^2+(\lambda y_1)x_2e_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1e_2+(\lambda y_1)y_2e_2^2\\
&= (\lambda x_1)x_2(-a)e_1+(\lambda y_1)x_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1+(\lambda y_1)y_2e_2\\
&= \lambda(x_1x_2)(-a)e_1+\lambda(y_1x_2)e_1+\lambda(x_1y_2)e_1+\lambda(y_1y_2)e_2\\
&= \lambda((x_1x_2)(-a)e_1+(y_1x_2)e_1+(x_1y_2)e_1+(y_1y_2)e_2)\\
&= \lambda(x_1x_2e_1^2+y_1x_2e_2e_1+x_1y_2e_1e^2+y_1y_2e_2^2)\\
&= \lambda((x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2))\\
&= \lambda(\xi_1\xi_2),
\end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos que la tercer condición también se cumple y, además, decimos que la tabla de multiplicar es una álgebra sobre $\mathbb{R}$.

3. Determinaremos si las tabla de tipo (III) con reglas de multiplicar forman una álgebra sobre $\mathbb{R}$, sean $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ y $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}^2$, donde e_1 es la unidad de la tabla y $\xi_i = x_ie_1 + y_ie_2$ con $i = 1, 2, 3$.

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	e_1	0
e_2	0	e_2

i) Por demostrar que se cumple la propiedad distributiva del producto por la izquierda $\xi_1(\xi_2+\xi_3) = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3$,

$$\begin{aligned}
\xi_1(\xi_2+\xi_3) &= (x_1e_1+y_1e_2)((x_2e_1+y_2e_2)+(x_3e_1+y_3e_2))\\
&= (x_1e_1+y_1e_2)((x_2+x_3)e_1+(y_2+y_3)e_2)\\
&= x_1(x_2+x_3)e_1^2+y_1(x_2+x_3)e_2e_1+x_1(y_2+y_3)e_1e_2\\
&\quad +y_1(y_2+y_3)e_2^2\\
&= x_1(x_2+x_3)e_1+(y_1(y_2+y_3))e_2\\
&= (x_1x_2+x_1x_3)e_1+(y_1y_2+y_1y_3)e_2\\
&= (x_1x_2e_1+y_1y_2e_2)+(x_1x_3e_1+y_1y_3e_2)\\
&= (x_1x_2e_1+y_1y_2e_2)+(x_1x_3e_1+y_1y_3e_2)\\
&= (x_1x_2e_1e_1+y_1x_2e_1e_2+x_1y_2e_2e_1+y_1y_2e_2e_2)\\
&\quad +(x_1x_3e_1e_1+y_1x_3e_1e_2+x_1y_3e_2e_1+y_1y_3e_2e_2)\\
&= ((x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2))+((x_1e_1+y_1e_2)(x_1e_1+y_1e_2))\\
&= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

de aquí podemos decir que el producto sí se distribuye por la izquierda.

ii) Ahora verificaremos que el producto se distribuye por la derecha $(\xi_1+\xi_2)\xi_3 = \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$.

$$\begin{aligned}
(\xi_1+\xi_2)\xi_3 &= ((x_1e_1+y_1e_2)+(x_2e_1+y_2e_2))(x_3e_1+y_3e_2)\\
&= ((x_1+x_2)e_1+(y_1+y_2)e_2)(x_3e_1+y_3e_2)\\
&= (x_1+x_2)x_3e_1^2+(y_1+y_2)x_3e_2e_1+(x_1+x_2)y_3e_1e_2+(y_1+y_2)y_3e_2^2\\
&= (x_1+x_2)x_3e_1+(y_1+y_2)y_3e_2\\
&= (x_1x_3+x_2x_3)e_1+(y_1y_3+y_2y_3)e_2\\
&= (x_1x_3e_1+x_2x_3e_1)+(y_1y_3e_2+y_2y_3e_2)\\
&= (x_1x_3e_1e_1+y_1x_3e_2e_1+x_1y_3e_1e_2+y_1y_3e_2e_2)\\
&\quad +(x_2x_3e_1e_1+y_2x_3e_2e_1+x_2y_3e_1e_2+y_2y_3e_2e_2)\\
&= ((x_1e_1+y_1e_2)(x_3e_1+y_3e_2))+((x_2e_1+y_2e_2)(x_3e_1+y_3e_2))\\
&= \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3,
\end{aligned}$$

de aquí observamos que el producto efectivamente se distribuye por la derecha.

iii) Verifiquemos que se cumple la siguiente igualdad $\xi_1(\lambda\xi_2) = (\lambda\xi_1)\xi_2 = \lambda(\xi_1\xi_2)$.

$$\begin{aligned}
\xi_1(\lambda\xi_2) &= (x_1e_1+y_1e_2)(\lambda(x_2e_1+y_2e_2))\\
&= (x_1e_1+y_1e_2)(\lambda x_2e_1+\lambda y_2e_2)\\
&= x_1(\lambda x_2)e_1^2+y_1(\lambda x_2)e_2e_1+x_1(\lambda y_2)e_1e_2+y_1(\lambda y_2)e_2^2\\
&= x_1(\lambda x_2)e_1+y_1(\lambda y_2)e_2\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1+(\lambda y_1)y_2e_2\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1e_1+(\lambda y_1)x_2e_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1e_2+(\lambda y_1)y_2e_2e_2\\
&= (\lambda x_1e_1+\lambda y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda(x_1e_1+y_1e_2))(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda\xi_1)\xi_2,
\end{aligned}$$

ahora verificamos que también se cumple la otra parte de la igualdad.

$$\begin{aligned}
(\lambda\xi_1)\xi_2 &= \lambda(x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda a_1e_1+\lambda b_1e_2)(a_2e_1+b_2e_2)\\
&= (\lambda x_1e_1+\lambda y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2)\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1^2+(\lambda y_1)x_2e_2e_1+(\lambda x_1)y_2e_1e_2+(\lambda y_1)y_2e_2^2\\
&= (\lambda x_1)x_2e_1+(\lambda y_1)y_2e_2\\
&= \lambda(x_1x_2)e_1+\lambda(y_1y_2)e_2)\\
&= \lambda(x_1x_2e_1+y_1y_2e_2)\\
&= \lambda(x_1x_2e_1^2+y_1x_2e_2e_1+x_1y_2e_1e_2+y_1y_2e_2^2)\\
&= \lambda(x_1x_2e_1e_1+y_1x_2e_2e_1+x_1y_2e_1e_2+y_1y_2e_2e_2)\\
&= \lambda((x_1e_1+y_1e_2)(x_2e_1+y_2e_2))\\
&= \lambda(\xi_1\xi_2),
\end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos que la tercer condición también se cumple y, además, decimos que la tabla de multiplicar es una álgebra sobre $\mathbb{R}$.

2.3. Primera representación fundamental

Un isomorfismo de R-álgebras es la primera representación fundamental de una álgebra en un espacio de matrices, que se dará a conocer en la siguiente sección. Estas representaciones fundamentales nos ayudan a entender a las $\mathbb{K}$-álgebras, ya que mediante éstas el producto de álgebras corresponde a productos de matrices. También las representaciones fundamentales serán importantes para la algebrización de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.3.1 *Dada una base $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ de una álgebra $\mathbb{A}$ de dimensión m, el producto de dos elementos β_i y β_j pertenece a $\mathbb{A}$, por lo tanto se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de β, es decir,*

$$\beta_i\beta_j = \sum_{k=1}^{m} c_{ijk}\beta_k,$$

*a los escalares c_{ijk} se les llama constantes de estructuras asociadas a β, entonces se define a R_j como la **primera representación fundamental** de $\mathbb{A}$, con $1 \leq j \leq m$, y la matriz R_j es dada por:*

$$R_j = \begin{pmatrix} c_{j11} & \cdots & c_{jm1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j1m} & \cdots & c_{jmm} \end{pmatrix}.$$

Observación 2.3.1 *La primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ asociada a la base β es el **isomorfismo** de álgebras $R_\beta : \mathbb{A} \to M(m, \mathbb{K})$ definido por $R_\beta : \beta_j \to R_j$, para $1 \leq j \leq m$.*

Ejemplo 2.3.1 *Calculemos la primera representación fundamental R de la $\mathbb{R}$-álgebra dada en el Ejemplo 1.3.2, evaluada en los elementos de la base estándar,*

$$\begin{aligned}
(1,0)(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1), c_{111} = 1, c_{112} = 0, \\
(1,0)(0,1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1), c_{121} = 0, c_{122} = 1, \\
(0,1)(1,0) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1), c_{211} = 0, c_{212} = 1, \\
(0,1)(0,1) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1), c_{221} = 0, c_{222} = 0,
\end{aligned}$$

son las matrices:

$$\begin{aligned}
R(1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
R(0,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Así obtenemos la representación $R : \mathbb{A} \to M(2, \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ en las matrices de $M(2, \mathbb{R})$ con entradas reales, definida por

$$R(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el conjunto de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

es una $\mathbb{R}$-álgebra con respecto al producto usual de matrices, que es isomorfa a la $\mathbb{R}$-álgebra dada en el *Ejemplo 1.3.2*.

Ejemplo 2.3.2 *La imagen de la base estándar bajo la primera representación fundamental de la álgebra A dada en el Ejemplo 1.3.3, son las matices:*

$$R(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
$$R(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Lo que nos interesa es ver como cambia la primera representación fundamental de la álgebra cuando cambiamos de base; en el siguiente resultado mostramos como cambia la primera representación fundamental.

Proposición 2.3.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra, que es el espacio $\mathbb{K}^n$ con un producto, y R_β, R_γ las primeras representaciones fundamentales de $\mathbb{A}$ con respecto a las bases β, γ, respectivamente. Denotemos por $S_i = R_\beta(\beta_i)$ y $R_i = R_\gamma(\gamma_i)$ para $i = 1, \cdots, n$, y $S = (s_{ij})$ la matriz cambio de base. Bajo estas condiciones tenemos que*

$$S_j = S^{-1} \sum_{i=1}^{n} s_{ij} R_i S,$$

para $j = 1, \cdots, n$.

Prueba.
Tenemos que

$$\beta_i \beta_j = \sum_p D_{ijp} \beta_p, \tag{2.3.1}$$

sabemos que $\beta_i = \sum_j s_{ji}\gamma_j$, entonces del lado izquierdo de ec. (2.3.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_i \beta_j &= \left(\sum_l s_{li} \gamma_l \right) \left(\sum_m s_{mj} \gamma_m \right) \\ &= \sum_l \sum_m s_{li} s_{mj} \sum_k C_{lmk} \gamma_k \\ &= \sum_k \sum_l \sum_m s_{li} s_{mj} C_{lmk} \gamma_k. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Ahora del lado derecho de la ec. (2.3.1) tenemos

$$\sum_p D_{ijp} \beta_p = \sum_k \sum_p s_{kp} D_{ijp} \gamma_k, \tag{2.3.3}$$

de las tres ecuaciones tenemos que

$$\sum_l \sum_m s_{li} s_{mj} C_{lmk} = \sum_k \sum_p s_{kp} D_{ijp}, \tag{2.3.4}$$

entonces tenemos que

$$SS_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} R_i S,$$

que es lo que se quería demostrar. $\square$

Ejemplo 2.3.3 *Sea $\mathbb{A}$ la $\mathbb{R}$-álgebra del Ejemplo 2.3.1, sea $\gamma = e_1, e_2$ la base estándar de $\mathbb{R}^2$, y $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$, donde $\beta_1 = e_1 + e_2$ y $\beta_2 = e_1$.*

Tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_1\beta_1 &= 2\beta_1 - \beta_2 \\ \beta_1\beta_2 &= \beta_1 \\ \beta_2\beta_2 &= \beta_2, \end{aligned}$$

así que la primera representación fundamental con respecto a la base β

$$\begin{aligned} R(\beta_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ R(\beta_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En el *Ejemplo 2.3.1* calculamos $R(e_1)$ y $R(e_2)$. Vemos que se cumple la *proposición 2.3.1*

$$R(\beta_1) = S^{-1}R(e_1)S + S^{-1}R(e_2)SR(\beta_2) = S^{-1}R(e_1)S + 0 * S^{-1}R(e_2)S$$

donde

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4. Álgebras normales

Las álgebras normales son importantes debido a que están relacionadas con las formas canónicas de Jordan, además, las formas canónicas de Jordan son de gran importancia para la algebrización.

Teorema 2.4.1 *Para cada matriz $A \in M(n, \mathbb{R})$ existe una matriz $J \in M(n, \mathbb{R})$ llamada forma canónica de Jordan de A y una matriz invertible $B \in M(n, \mathbb{R})$, tal que $A = BJB^{-1}$.*

Para cada matriz J (forma canónica de Jordan), le asociaremos una $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{J}$ de dimensión n, donde ésta es una subálgebra de $M(n,\mathbb{R})$.
Cada forma canónica de Jordan $J \in M(n,\mathbb{R})$ es una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_l \end{pmatrix},$$

en donde los $B_i \in M_{k_i}(\mathbb{R})$ para $i = 1, 2, \ldots, l$ son bloques de Jordan de alguno de los siguientes tipos:

I) $$B_i = (\lambda),$$
llamado bloque real simple.

II) $$B_i = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$
llamado bloque complejo simple.

III) $$B_i = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix},$$
llamado bloque de Jordan real.

IV) $$B_i = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_2 & C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & C & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_2 & C \end{pmatrix},$$
llamado bloque de Jordan complejo, donde

$$C = \begin{pmatrix} \eta & -\nu \\ \nu & \eta \end{pmatrix}$$

y la matriz identidad $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto se tiene que $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_l$.
Sean $\sigma_i : M(k_i,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ las secciones que sustituyen en la matriz cero $M(n,\mathbb{R})$, a la matriz

$A \in M(k_i, \mathbb{R})$ en la posición del bloque B_i de la matriz J; para $i = 1, 2, \cdots, l$, es decir

$$\sigma_i(A) = \begin{pmatrix} 0_{k_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0_{k_{i-1}} & & & & \\ & & & A & & & \\ & & & & 0_{k_{i+1}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0_{k_l} \end{pmatrix},$$

donde 0_{k_i} es la matriz de ceros de dimensión k_i.

Ejemplo 2.4.1 *Consideremos la matriz en su forma canónica de Jordan J*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces:
$B_1 = (3)$, *es decir que es un bloque real simple y*
$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, *es un bloque complejo simple, de aquí definimos a σ_1 y σ_2 de la siguiente manera*
$\sigma_1 : M(1, \mathbb{R}) \to M(3, \mathbb{R})$,
$\sigma_2 : M(2, \mathbb{R}) \to M(3, \mathbb{R})$ *de aquí obtenemos las siguientes matrices respectivamente*

$$\begin{aligned} \sigma_1(3) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ \sigma_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.2 *Definimos a $\sigma_1 : M_1(\mathbb{R}) \to M_4(\mathbb{R})$ y $\sigma_2 : M_3(\mathbb{R}) \to M_4(\mathbb{R})$, entonces tenemos que*

$$\begin{aligned} \sigma_1(2) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sean las matrices $I_i, M_i, N_i \in M_{k_i}(\mathbb{R})$, donde

$$I_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

es la matriz identidad.

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

M_i cumple que $M_i^2 = -I_i$, y con i par.

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es la matriz nilpotente.

Definamos al conjunto de matrices $\beta = \{B_{i,j} : 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq k_i\}$ de la siguiente manera:

i) $B_{i,1} := \sigma_i(1)$ si B_i es el bloque real simple.

ii) $B_{i,1} := \sigma_i(I_i)$, $B_{i,2} := \sigma_i(M_i)$, si B_i es un bloque complejo simple.

iii) $B_{i,1} := \sigma_i(I_i)$ y $B_{i,j} := \sigma_i(N_i^{j-1})$ para $j = 2, \cdots, k_i$ si B_i es el bloque de Jordan real.

iv) $B_{i,1} := \sigma_i(I_i)$, $B_{i,2} := \sigma_i(M_i)$, $B_{i,2j+1} := \sigma_i(N_i^{2j})$ y $B_{i,2j+2} := B_{i,2}\sigma_i(N_i^{2j})$ para $j = 1, \ldots, \frac{k_i}{2} - 1$ si B_i es el bloque de Jordan complejo.

El espacio lineal generado por β es un $\mathbb{R}$-álgebra de matrices $\mathbb{J}$, tal que β es una base del espacio lineal y $\mathbb{J}$ contiene a la matriz J.

Veamos que es una $\mathbb{R}$-álgebra de matrices $\mathbb{J}$. Podemos ver que $B_{i,k}B_{j,l} = 0$ para todo $i \neq j$.

Ahora veamos que σ_i es un homomorfismo de álgebras. Sean $A, B \in M(k_i, \mathbb{R})$, entonces

$$
\begin{aligned}
\sigma_i(AB) &= \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & AB & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & A & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & B & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma_i(A)\sigma_i(B).
\end{aligned}
$$

De está propiedad podemos ver que si el bloque B_i es un bloque real simple, un bloque complejo simple o un bloque de Jordan real, entonces las $B_{i,j}$, $1 \leq j \leq k_i$, conmutan. Si B_i es un bloque de Jordan complejo, faltaría ver que $B_{i,2}$ conmuta con $B_{i,2j+1}$. Para esto solamente falta ver que N_i^2 conmuta con J_i,

$$N_i^2 J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= J_i N_i^2,$$

donde $I, J \in M(2, \mathbb{R})$. Por lo tanto tenemos que los elementos de β conmutan.

Definición 2.4.1 *Llamamos* ***álgebra normal de matrices*** *a la álgebra* $\mathbb{J}$ *generada por* $B_{i,j} : 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k_i$.

Ejemplo 2.4.3 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos que su polinomio característico es $P(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$, entonces la forma canónica de Jordan asociada a la matriz A, tenemos que es

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

y la matriz cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la base β de la $\mathbb{R}$-álgebra de matrices $\mathbb{J}$ asociada a la matriz J es:

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, que la álgebra de la matriz de cambio de base es

$$\mathbb{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & -z \\ 0 & z & y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejemplo 2.4.4 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{7}{2} & 1 & \frac{5}{2} & -2 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -5 & -4 & -4 & -3 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 2 & \frac{5}{2} & -2 & \frac{7}{2} & 1 & -3 & \frac{3}{2} & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 7 & \frac{17}{2} & 8 & \frac{19}{2} & -2 & 0 & \frac{17}{2} & 4 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & 2 & -1 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix},$$

tenemos que su polinomio característico es $P(\lambda) = (\lambda - 2)^4(\lambda^2 - 6\lambda + 25)^2$, entonces la forma canónica de Jordan asociada a la matriz A es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

y la matriz cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la base β de la $\mathbb{R}$-álgebra de matrices $\mathbb{J}$ asociada a la matriz J es:

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir que

$$\mathbb{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & -x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 & x_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_7 & -x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_8 & x_7 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{R} \right\},$$

Definición 2.4.2 *Diremos que dos $\mathbb{K}$-álgebras de matrices $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ en $M(n, \mathbb{K})$ son* ***semejantes*** *si existe una matriz invertible $P \in M(n, \mathbb{K})$, tal que $\mathbb{A} = P^{-1}\mathbb{B}P$.*

Definición 2.4.3 *Una $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{A}$ se llama* ***álgebra normal****, si $\mathbb{A}$ es el espacio lineal $\mathbb{R}^n$ y la imagen de su primer representación fundamental asociada a la base estándar, es una álgebra normal de matrices.*

El siguiente ejemplo es una álgebra normada.

Ejemplo 2.4.5 *La $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{R}^2$ del Ejemplo 1.3.1, es una álgebra normal, ya que su primera representación fundamental asociada a la base estándar es una álgebra normal de matrices, las que se calcularon en el Ejemplo 2.3.1, y son:*

$$B(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(0,1) \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5. $\mathbb{K}$-álgebra de Banach

Recordemos que un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$ es un espacio lineal $\mathbb{E}$ sobre $\mathbb{K}$ con una norma, la cual es una función $\|\cdot\| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, tal que:

i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{E}$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{E}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $xy \in \mathbb{E}$.

Observación 2.5.1 *Recordemos que un espacio de Banach sobre un campo $\mathbb{K}$ es un espacio normado en el cual toda sucesión de Cauchy converge.*

Definición 2.5.1 *Una* ***$\mathbb{K}$-álgebra normada o álgebra normada sobre*** *$\mathbb{K}$ es un espacio normado $\mathbb{A}$ sobre $\mathbb{K}$, el cual tiene estructura de una $\mathbb{K}$-álgebra. Además, la norma $\|\cdot\|$ satisface $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{A}$ y $\|e\| = 1$, donde $e \in \mathbb{A}$ es la unidad.*

Ejemplo 2.5.1 *Sea $\mathbb{J}$ una álgebra de matrices, donde los elementos de esta álgebra son de la siguiente forma*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix},$$

definimos la norma, $|\cdot| : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ como:

$$\left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{2x^2 + y^2}{2}},$$

Como e es la matriz I_2 entonces $|e| = 1$. Ahora veamos que si

$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} z & 0 \\ w & z \end{pmatrix}$,

entonces $|AB| \leq |A||B|$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2x^2z^2 + y^2w^2 + (xw - yz)^2 &\geq 0 \\ 2x^2z^2 + y^2w^2 + x^2w^2 - 2xwyz + y^2z^2 &\geq 0 \\ 4x^2z^2 + y^2w^2 + 2x^2w^2 + 2y^2z^2 &\geq 2x^2z^2 + y^2z^2 + x^2w^2 + 2xwyz \\ (2x^2 + y^2)(2z^2 + w^2) &\geq 2x^2z^2 + y^2z^2 + x^2w^2 + 2xwyz \\ |A||B| &\geq |AB|. \end{aligned}$$

Definición 2.5.2 *Una $\mathbb{K}$-álgebra de Banach o álgebra de Banach $\mathbb{A}$ sobre $\mathbb{K}$, es una $\mathbb{K}$-**álgebra normada** cuyo espacio normado es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$.*

Ejemplo 2.5.2 *Sea $\mathbb{C}$ una $\mathbb{R}$-álgebra normada con la norma euclidiana, entonces decimos que $\mathbb{C}$ es una álgebra de Banach.*

Ejemplo 2.5.3 *Definimos el conjunto $C([0,1], \mathbb{C})$ como el conjunto de funciones continuas y acotadas de $[0,1]$ a $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach, con la norma del supremo, $f \in C([0,1], \mathbb{C})$,*

$$|f| = max_{x \in [0,1]} \|f(x)\|.$$

Capítulo 3

Analiticidad de funciones

En este capítulo veremos la diferencial de Fréchet sobre espacios de Banach y algunos ejemplos sobre álgebras. Así como la introducción a las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas y la relación que existe con la primera representación fundamental, si quiere saber más del tema ver [14]. En un capítulo 2, se dió la definición de función analítica en álgebras asociativas lineales con una identidad. Con cada una de estas álgebras se asoció un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales denominadas ecuaciones diferenciales generalizadas de Cauchy-Riemann, que sirven como criterio para determinar si una función dada es analítica en esa álgebra. Wagner ha dado una simplificación para el caso conmutativo [7].

3.1. Diferencial de Fréchet

Definición 3.1.1 *Diremos que una función $f : U \subset \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$, definida en un subconjunto abierto U de un espacio de Banach $\mathbb{E}_1$ con valores en un espacio de Banach $\mathbb{E}_2$, es* ***diferenciable en el sentido de Fréchet*** *en un punto $x_0 \in U$ si existe un operador lineal acotado $L : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$, tal que se cumple el siguiente límite*

$$\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{E}_1} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\|_{\mathbb{E}_2}}{\|h\|_{\mathbb{E}_1}} = 0.$$

Cuando esto se verifique, denotaremos por $Df(x_0)$ al operador L y lo llamaremos diferencial de f en x_0. Diremos que f es diferenciable en U si f es **Fréchet diferenciable** para todo punto de U.

Observación 3.1.1 *Cuando $\mathbb{E}_1 = \mathbb{R}^m$ y $\mathbb{E}_2 = \mathbb{R}^n$, se sabe que si f es Fréchet diferenciable en un punto x_0, entonces las primeras derivadas parciales de los componentes existen y el diferencial $Df(x_0)$ está dado por la matriz jacobiana de f en x_0, con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$:*

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{|x_0},$$

en donde $|x_0$ significa que todas las derivadas parciales se evalúan en x_0. También se conoce que existen las primeras derivadas parciales de las componentes de f y son continuas en un conjunto abierto, entonces se asegura la diferenciabilidad de Fréchet en el abierto.

Observación 3.1.2 *Cuando* $\mathbb{E}_1 = \mathbb{C}^m$ *y* $\mathbb{E}_2 = \mathbb{C}^n$*, también se tiene que la diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas parciales complejas de las componentes, y el diferencial está dado por la matriz jacobiana compleja, ver [30].*

Los siguientes resultados se pueden ver en [24, 32].

Sean $f, g : U \subset \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$, funciones definidas en un subconjunto abierto de un espacio de Banach $\mathbb{E}_1$ sobre K y con qué espacio de Banach $\mathbb{E}_2$ sobre K. Entonces:

i) El producto de una función Fréchet diferenciable por una constante es Fréchet diferenciable y su diferencial en un punto $x_0 \in U$, que es un operador $\mathbb{K}$-lineal de $\mathbb{E}_1$ a $\mathbb{E}_2$, está dado por

$$D(cf)(x_0) = cDf(x_0).$$

ii) La suma $f + g$ de funciones Fréchet diferenciables es Fréchet diferenciable y su diferencial en un punto $x_0 \in U$, que es un operador $\mathbb{K}$-lineal de $\mathbb{E}_1$ a $\mathbb{E}_2$, está dado por

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0).$$

Teorema 3.1.1 ***(Regla de la cadena).*** *Sean* $f : U \subset \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ *y* $f : W \subset \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_3$ *funciones, donde* U *y* W *son conjuntos abiertos con* $f(U) \subset W$*, y* $\mathbb{E}_1$*,* $\mathbb{E}_2$ *y* $\mathbb{E}_3$ *son espacios de Banach sobre* $\mathbb{K}$*. Si* f *es Fréchet diferenciable en* x_0 *y* g *es Fréchet diferenciable en* $f(x_0)$*, entonces* $g \circ f$ *es Fréchet diferenciable en* x_0 *y se cumple la regla de la cadena*

$$D(g \circ f)(x_0) = [D(g(f(x_0)))] \circ D(f(x_0)),$$

es decir

$$D(g \circ f)(x_0)](v) = [D(g(f(x_0)))]([D(f(x_0))](v)),$$

para todo $v \in \mathbb{E}_1$*.*

Prueba.
Ver [14]

$\square$

Teorema 3.1.2 ***(Teorema de la función implícita).*** *Sean* $\mathbb{E}_1$*,* $\mathbb{E}_2$ *espacios de Banach sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensiones de* m *y* n*, respectivamente y* $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$*, donde* U *es abierto. Supongamos que* $f : U \subset \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ *es continuamente diferenciable en* U *y* $f(x_0, y_0) = 0$*. Sea* M *la matriz* $n \times n$*:*

$$M = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_{n+j}} x_0 \right), \ 1 \leq i, \ j \leq n.$$

Si $det(M) \neq 0$*, entonces existen abiertos* $V \subset \mathbb{E}_1$ *y* $W \subset \mathbb{E}_2$*, que contienen a* x_0 *y* y_0 *y una función diferenciable* $g : V \to W$*, tal que para todo* $x \in V$ $f(x, g(x)) = 0$*.*

Prueba.
Ver [14]

$\square$

Definición 3.1.2 *Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ y $\mathbb{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra, y $f, g : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ funciones. Definimos en la álgebra: la función producto $fg : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$.*
Y si la $Im\ g \subset G(\mathbb{A})$, definimos la función cociente $f/g : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$.

Proposición 3.1.1 ***(Regla del producto en álgebras).*** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach sobre el campo $\mathbb{K}$ y $\mathbb{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de Banach. Supongamos que $f, g : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ son funciones Fréchet diferenciables definidas en el abierto U, entonces el producto fg es Fréchet diferenciable y su diferencial está dada por:*

$$D(fg)(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0),$$

esto es

$$[D(fg)(x_0)]v = g(x_0)(Df(x_0)v) + f(x_0)(Dg(x_0)v),$$

para todo $v \in \mathbb{E}$, en donde $g(x_0)(Df(x_0)v)$ significa el producto en $\mathbb{A}$ de $g(x_0)$ por $[Df(x_0)]v$.

Prueba.
Ver [14]

□

Proposición 3.1.2 ***(Regla del cociente en álgebras).*** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach sobre un campo $\mathbb{K}$ y $\mathbb{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de Banach. Supongamos que $f, g : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ son funciones Fréchet diferenciable definidas en el abierto U, y $Im\ g \subset G(\mathbb{A})$, entonces el cociente f/g es Fréchet diferenciable, y su diferencial está dada por:*

$$D(f/g)(x_0) = \frac{g(x_0)Df(x_0) - f(x_0)Dg(x_0)}{g\left(x_0\right)^2},$$

esto es,

$$[D(f/g)(x_0)]v = \frac{g(x_0)([Df(x_0)]v) - f(x_0)([Dg(x_0)]v)}{g\left(x_0\right)^2},$$

para todo $v \in \mathbb{E}$, en donde $g(x_0)([Df(x_0)]v)$ significa el producto en $\mathbb{A}$ de $g(x_0)$ por $([Df(x_0)]v)$.

Prueba.
Ver [14]

□

3.2. Diferenciabilidad en álgebras de Banach

Como en este capítulo estamos utilizando álgebras de una sola variable, entonces la siguiente definición es importante para las siguientes secciones.

Definición 3.2.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra de Banach y $U \subset \mathbb{A}$ un subconjunto abierto. Decimos que una función $f : U \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es N**-diferenciable** en un punto $x_0 \in U$ si existe un elemento $a \in \mathbb{A}$, tal que el siguiente límite existe y se da la igualdad:*

$$\lim_{h \to 0,\ h \in G(\mathbb{A})} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Denotamos por $f'_N(x_0)$ a a, esto es, $f'_N(x_0) = a$ y lo llamamos N-derivada de f en x_0. Si f es N-diferenciable en todos los puntos de U, diremos que f es diferenciable sobre U.

Teorema 3.2.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra de Banach, U, $V \subset \mathbb{A}$ conjuntos abiertos y $f : U \to \mathbb{A}$, $f : V \to \mathbb{A}$ funciones N-diferenciables en x_0 y $f(x_0)$, respectivamente, con $f(U) \subset V$ y $f'_N(x_0)$ elemento regular en $\mathbb{A}$, entonces $h := g \circ f$ cumple la regla de la cadena para la N-derivada, es decir, h es N-diferenciable y su N-derivada está dada por*

$$h'_N(x_0) = g'_N(y_0) f'_N(x_0),$$

en donde $y_0 = f(x_0)$ y $g'_N(y_0)f'_N(x_0)$ representa el producto en $\mathbb{A}$ de $g'_N(y_0)$ y $f'_N(x_0)$.

Pueba. Ver [6]

□

La siguiente definición es importante porque cumple con ciertas propiedades de la diferenciabilidad de funciones de una variable (ver [13]), además la diferenciabilidad se puede relacionar con las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas.

Definición 3.2.2 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra de Banach y $U \subset \mathbb{A}$ un subconjunto abierto. Decimos que una función $f : U \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es* $\mathbb{A}$***-diferenciable o diferenciable en el sentido de Lorch*** *en un punto $x_0 \in U$ si f es diferenciable en el sentido de Fréchet en x_0 y existe un elemento $a \in \mathbb{A}$, tal que $df(x_0)v = av$ para todo $v \in \mathbb{A}$, en donde av denota al producto de a por v en $\mathbb{A}$.*
Por lo tanto, la $\mathbb{A}$-diferenciable de f en un punto x_0 equivale a la existencia de un elemento $a \in \mathbb{A}$, tal que se cumple el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0,\, h \in \mathbb{A}} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - ah\|_{\mathbb{A}}}{\|h\|_{\mathbb{A}}} = 0,$$

en donde ah denota al producto de a con h en $\mathbb{A}$.

3.3. Analiticidad de funciones

El propósito de esta sección es dar suficientes condiciones (Teorema 3.4.2) para que un conjunto de ecuaciones

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_{kij} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, (n^2 - n)), \tag{3.3.1}$$

determina una álgebra $\mathbb{A}$ conmutativa lineal asociativa sobre $\mathbb{K}$, para las cuales las ecuaciones (3.3.1) son las ecuaciones diferenciales generalizadas de Cauchy-Riemann, donde las d_{kij} son constantes en un campo $\mathbb{K}$. Esto nos permitirá encontrar soluciones de un conjunto de este tipo mediante series de potencias en la álgebra.
Sean $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ una base adecuada para una álgebra $\mathbb{A}$ conmutativa lineal asociativa con una identidad sobre el campo $\mathbb{K}$. La multiplicación se definirá por

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} \beta_k \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.3.2}$$

donde los c_{ijk} están en $\mathbb{K}$. Denotemos por R_i la matriz (c_{isr}) donde r es el índice de fila y s el índice de columna.

Lema 3.3.1 *Si $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_n\beta_n$ es cualquier elemento de $\mathbb{A}$, entonces $\alpha \leftrightarrow a_1R_1 + a_2R_2 + \cdots + a_nR_n$ es un isomorfismo conocido como la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ por matrices.*

Prueba.
Definimos a la siguiente función

$$
\begin{aligned}
H &: \mathbb{A} \mapsto M_{n\times n}, \\
H &: \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_i.
\end{aligned}
$$

Para demostrar que la función H es un isomorfismo:

1) Verifiquemos que H es un homomorfismo.

   i) Por demostrar que $H\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)e_i\right) = H\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) + H\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)$.

$$
\begin{aligned}
H\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)e_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)R_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)\begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \cdots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \cdots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \cdots & c_{inn} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \cdots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \cdots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \cdots & c_{inn} \end{pmatrix} + \beta_i\begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \cdots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \cdots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \cdots & c_{inn} \end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \cdots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \cdots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \cdots & c_{inn} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \cdots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \cdots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \cdots & c_{inn} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i R_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i R_i \\
&= H\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) + H\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right),
\end{aligned}
$$

   de aquí concluimos que se cumple la igualdad.

ii) Por demostrar que se cumple que $H\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)e_i\right) = \lambda H\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)$.

$$\begin{aligned} H\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)e_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)R_i \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i R_i \\ &= \lambda H\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right). \end{aligned}$$

iii) Demostraremos que $H\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i \gamma_i e_i\right) = H\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) H\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i e_i\right)$.

$$\begin{aligned} H\left(\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i e_i \gamma_j e_j\right) &= \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i e_i \gamma_j e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i \sum_{j=1}^{n}\gamma_j e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i R_i \sum_{j=1}^{n}\gamma_j R_j \\ &= H\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) H\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i e_i\right). \end{aligned}$$

iv) Por demostrar que si e_1 es la unidad de la álgebra $\mathbb{A}$, entonces la unidad de R es la matriz identidad, sea e_1 la identidad de la álgebra $\mathbb{A}$ y escogemos el $j-$ésimo elemento, entonces tenemos que el producto se escribe de la siguiente forma

$$e_1 \cdot e_j = e_j = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 1e_j + \cdots + 0e_n,$$

lo que implica que $c_{1j1} = 0, \ \ c_{1j2} = 0, \ldots, c_{1jj} = 1, \ldots, c_{1jn} = 0$, de aquí usamos la definición de la primera representación fundamental y obtenemos

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que se cumple $H(e_1) = I_{n\times n}$.

De lo anterior podemos concluir que H es un homomorfismo.

2) Ahora verifiquemos que H es inyectiva; supongamos que

$$H\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) = H\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right),$$

tal que $\exists \alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0}$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i R_i \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i R_i = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) R_i = 0 \\
&\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \cdots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \cdots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \cdots & c_{inn} \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

sea

$$(e_i e_1, e_i e_2, \ldots, e_i e_n) = \begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \cdots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \cdots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \cdots & c_{inn} \end{pmatrix},$$

entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \begin{pmatrix} c_{i11} & c_{i21} & \cdots & c_{in1} \\ c_{i12} & c_{i22} & \cdots & c_{in2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1n} & c_{i2n} & \cdots & c_{inn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \left(e_i e_1, e_i e_2, \ldots, e_i e_n\right),$$

lo que queremos demostrar es que $\alpha_i = \beta_i$, entonces de la igualdad sabemos que $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i) e_i e_j = 0$ con $j = 1, \ldots, n$, de aquí $e_j = 0$ o $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)e_i = 0$ pero $e_j \neq 0$ porque son elementos de una base; entonces tenemos que $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)e_i = 0$, pero como e_i es una base y, además, son linealmente independientes lo que implica que $\alpha_i = \beta_i$. Por lo tanto H es inyectiva.

3) Por definición de suprayectividad decimos que $\forall \sum_i = 1^n \alpha_i R_i \in M_{n\times n} \quad \exists \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \mathbb{A}$ tal que se cumple que $H\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_i$; por lo tanto H es suprayectiva.

De 1), 2) y 3) podemos concluir que H es un isomorfismo. $\square$

Ejemplo 3.3.1 *Determinaremos si los números complejos $\mathbb{C}$ forman un isomorfismo con la primera representación fundamental R de los números complejos, donde $R \in M_{2\times 2}$.*

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Para verificar que los números complejos forman un isomorfismo con la matriz R definimos a la función

$$H(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

sea $\alpha_1 = (a_1, a_2) = a_1e_1 + a_2e_2$ y $\beta_1 = (b_1, b_2) = b_1 + b_2$ dos elementos de los números complejos y R es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Queremos demostrar que H es un homomorfismo con R

   a) Verificaremos que se cumple la igualdad $H((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = H(a_1, a_2) + H(b_1, b_2)$,

$$\begin{aligned} H((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) &= H(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -(a_2 + b_2) \\ a_2 + b_2 & a_1 + b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \\ &= H(a_1, a_2) + H(b_1, b_2), \end{aligned}$$

   observamos que la igualdad sí se cumple.

   b) Por demostrar que la siguiente igualdad $H(\lambda(a_1, a_2)) = \lambda H(a_1, a_2)$ también se cumple,

$$\begin{aligned} H(\lambda(a_1, a_2)) &= H(\lambda a_1, \lambda a_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 & -\lambda a_2 \\ \lambda a_2 & \lambda a_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda H(a_1, a_2), \end{aligned}$$

   por lo que observamos que la igualdad también se cumple.

   c) Queremos verificar que la igualdad $H((a_1, a_2)(b_1, b_2)) = H(a_1, a_2)H(b_1, b_2)$,

$$\begin{aligned} H((a_1, a_2)(b_1, b_2)) &= H(a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1b_1 - a_2b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \\ &= H(a_1, a_2)H(b_1, b_2), \end{aligned}$$

   por lo tanto $H((a_1, a_2)(b_1, b_2)) = H(a_1, a_2)H(b_1, b_2)$.

   d) Por demostrar que la unidad de los números complejos es la matriz identidad

$$H(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   la igualdad se cumple por definición.

2) Por verificar que H es inyectiva, es decir, si $H(a_1, a_2) = H(b_1, b_2)$ entonces $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$,

$$\begin{aligned} H(a_1, a_2) = H(b_1, b_2) &\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (a_1, a_2) = (b_1, b_2), \end{aligned}$$

   la última implicación se da porque dos matrices son iguales si todos sus elementos son iguales.

3) Por demostrar que H es suprayectiva, pero esto se cumple porque cada elemento $R \in M(2,\mathbb{R})$ se puede expresar por la definición de H,

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = H(a_1, a_2),$$

por lo que concluimos que H es suprayectiva.

De lo anterior podemos concluir que en $\mathbb{C}$ hay un isomorfismo con R.

Supongamos que U denota un sistema de funciones $y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathbb{K}$, y sea y_i analítica en una región Ω simple en el espacio n. Entonces $\eta = \sum_{i=1}^{n} y_i\beta_i$ se llamará una función sobre $\mathbb{A}$ de la variable $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i$.
Como la álgebra es conmutativa, definida en Wagner ([27], pág. 456) que $\eta = \sum_{i=1}^{n} y_i\beta_i$ es una función analítica de ξ si y_i está en U y la matriz Jacobiana $(\partial y_r/\partial x_s,)$ está en $\mathbb{A}$, es decir, existen funciones $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tal que

$$\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_s}\right) = z_1R_1 + z_2R_2 + \cdots + z_nR_n. \tag{3.3.3}$$

Esto implica un conjunto de relaciones homogéneas entre $\partial y_r/\partial x_s$, llamadas ecuaciones diferenciales generalizadas de Cauchy-Riemann de la álgebra con base $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Ejemplo 3.3.2 *Sea $y(x_1, x_2) \in \mathbb{C}$ un número complejo donde, $y(x_1, x_2) = y_1(x_1, x_2) + y_2(x_1, x_2)i$ y la matriz Jacobiana correspondiente es*

$$J_{(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

ahora igualamos a la matriz Jacobiana $J_{(x_1,x_2)}$ con las matrices R_1 y R_2 que son la primera representación fundamental de los números complejos

$$\begin{aligned} J_{(x_1,x_2)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que implica las siguientes igualdades

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{aligned} \right. ,$$

de aquí observamos que el sistema de ecuaciones son las de Cauchy-Riemann.

Lema 3.3.2 *Si $\mathbb{A}$ es una álgebra conmutativa asociativa lineal de orden n con una identidad sobre $\mathbb{K}$, entonces una condición necesaria para que $\eta = \sum_{i=1}^{n} y_i\beta_i$, sea analítica es que las componentes de η satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales linealmente independientes*

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_{kij}\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, (n^2 - n)), \tag{3.3.4}$$

donde los d_{kij} son constantes en $\mathbb{K}$ dependiendo sólo de las constantes de multiplicación c_{ikj} de la álgebra, y tal que

$$c\sum_{i=1}^{n} d_{kii} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, (n^2 - n)). \tag{3.3.5}$$

Por la definición de derivada la ecuación matricial tenemos.

$$u_1 R_1 + u_2 R2 + \cdots + u_n R_n = \left(\frac{\partial y_r}{\partial x_s}\right), \tag{3.3.6}$$

dadas n^2 ecuaciones en las n incógnitas, con coeficientes entre el conjunto c_{ijk}. De cualquier n de las ecuaciones 3.3.6 para las cuales el determinante no es cero, podemos resolver los u_i, y la sustitución en las ecuaciones restantes lleva a $n^2 - n$ ecuaciones de la forma (3.3.4).

Ejemplo 3.3.3 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra conmutativa asociativa lineal de orden $n = 2$ con identidad e y una base $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$, por verificar que $\eta = \sum_{i=1}^{2} y_i\beta_i = 0$ es analítica.*
Sabemos que las componentes de $\sum_{i,j=1}^{n} d_{kij}\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0$ tiene que satisfacer las ecuaciones diferenciales linealmente independientes, entonces de la matriz Jacobiana tenemos que igualarla con las matrices de primera representación fundamental

$$\begin{aligned} J_{(x_1,x_2)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= u_1\begin{pmatrix} c_{111} & c_{121} \\ c_{112} & c_{122} \end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix} c_{211} & c_{221} \\ c_{212} & c_{222} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= u_1 c_{111} + u_2 c_{211} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= u_1 c_{121} + u_2 c_{221} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= u_1 c_{112} + u_2 c_{212} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= u_1 c_{122} + u_2 c_{222} \end{aligned} \right. , \tag{3.3.7}$$

de la primera ecuación de 3.3.7 despejamos a $u_1 = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - c_{211}u_2}{c_{111}}$ y la sustituimos en las 3 ecuaciones restantes obtenemos el nuevo conjunto de ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= \left(\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - c_{211}u_2}{c_{111}}\right) c_{121} + u_2 c_{221} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= \left(\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - c_{211}u_2}{c_{111}}\right) c_{112} + u_2 c_{212} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= \left(\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - c_{211}u_2}{c_{111}}\right) c_{122} + u_2 c_{222} \end{aligned} \right. , \tag{3.3.8}$$

hacemos lo mismo para este nuevo sistema de ecuaciones despejamos a u_2 *y la sustituimos en las ecuaciones restantes y obtenemos que* $u_2 = \frac{c_{111}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - c_{121}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}}{c_{111}c_{221} - c_{121}c_{211}}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & = & \left(\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - c_{211}\left(\frac{c_{111}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - c_{121}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}}{c_{111}c_{221} - c_{121}c_{211}}\right)}{c_{111}}\right) c_{112} + \left(\frac{c_{111}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - c_{121}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}}{c_{111}c_{221} - c_{121}c_{211}}\right) c_{212} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & = & \left(\frac{\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - c_{211}\left(\frac{c_{111}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - c_{121}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}}{c_{111}c_{221} - c_{121}c_{211}}\right)}{c_{111}}\right) c_{122} + \left(\frac{c_{111}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - c_{121}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}}{c_{111}c_{221} - c_{121}c_{211}}\right) c_{222} \end{array}\right. , \tag{3.3.9}$$

al hacer los cálculos correspondientes obtenemos los coeficientes de η*,*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{2} d_{kij}\frac{\partial y_i}{\partial x_j} &= \frac{c_{121}c_{211} - c_{111}c_{221}}{c_{121}c_{211} - c_{111}c_{221}}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ &\quad \frac{c_{121}c_{212} - c_{112}c_{221} - c_{122}c_{221} + c_{121}c_{222}}{c_{121}c_{211} - c_{111}c_{221}}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ &\quad + \frac{c_{112}c_{211} + c_{122}c_{211} - c_{111}c_{212} - c_{111}c_{222}}{c_{121}c_{211} - c_{111}c_{221}}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ &\quad + \frac{-c_{121}c_{211} + c_{111}c_{221}}{c_{121}c_{211} - c_{111}c_{221}}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

además observamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} d_{kii} &= \frac{c_{121}c_{211} - c_{111}c_{221}}{c_{121}c_{211} - c_{111}c_{221}} + \frac{-c_{121}c_{211} + c_{111}c_{221}}{c_{121}c_{211} - c_{111}c_{221}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que concluimos que η *es invariante.*

3.4. Cambio de base

Sea $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ y $\beta' = \{\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n\}$ dos bases en $\mathbb{K}$ entonces

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\beta'_j, \qquad t_{ij} \in \mathbb{K} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.4.1}$$

tenemos $x'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}x_i$ y $y'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}y_i$. Por lo tanto

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_{kij}\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \sum_{u,v=1}^{n} d'_{kuv}\frac{\partial y'_u}{\partial x'_v}.$$

Sea $D_k = (d_{krs})$ y $D'_k = (d'_{krs})$; entonces

$$D'_k = T^{-1}D_kT, \tag{3.4.2}$$

donde $T = (t_{rs})$. Dado que la traza de una matriz es invariante en la transformación de similitud, vemos que $\sum_{i=1}^{n} d_{kii}$ es invariante bajo cambio de base de la álgebra $\mathbb{A}$.

Wagner [27], demostró de la ec 3.3.3 que si β_i es la identidad, se pueden escribir las ecuaciones diferenciales generalizadas de Cauchy-Riemann.

$$-\frac{\partial y_r}{\partial x_s} + \sum_{i=1}^{n} c_{isr} \frac{\partial y_i}{\partial x_1} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.4.3}$$

Dado que β_i es la identidad, $c_{lsr} = \delta_{sr}$ (Kronecker δ). Para $s = 1$ obtenemos n ecuaciones

$$-\frac{\partial y_r}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{n} c_{11r} \frac{\partial y_i}{\partial x_1} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

que son idénticamente cero. Las $n^2 - n$ ecuaciones restantes están en la forma (3.3.4). Si, en (3.4.3), $r = s \neq 1$ obtenemos

$$-\frac{\partial y_s}{\partial x_s} + \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} c_{iss} \frac{\partial y_i}{\partial x_1},$$

porque $c_{1ss} = 1$, por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} d_{kii} = -1 + 1 = 0$. Si $r \neq s$, $s \neq 1$, $c_{1sr} = 0$ y las ecuaciones se reducen a

$$-\frac{\partial y_r}{\partial x_s} + \sum_{i=2}^{n} c_{isr} \frac{\partial y_i}{\partial x_1} = 0,$$

de modo que $d_{kii} = 0$ por cada i. De ahí que en cada caso tengamos

$$\sum_{i=1}^{n} d_{kii} = 0, \tag{3.4.4}$$

y el lema está probado.

Teorema 3.4.1 *Si $A_i = (a_{isr})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es un conjunto de matrices $M(n, \mathbb{K})$ tal que*

$$A_i A_j = A_j A_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.4.5}$$

y si hay una p tal que

$$a_{ipr} = \delta_{ir} \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.4.6}$$

entonces

$$A_i A_j = \sum_{t=1}^{n} a_{ijt} A_t \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.4.7}$$

y la A_i forma una base para una álgebra lineal, conmutativa, asociativa de orden n sobre $\mathbb{K}$ con un elemento de identidad.

Por (3.4.6) el elemento de la fila uth y la columna pth de A_iA_j es

$$\sum_{t=1}^{n} a_{itu}a_{jpt} = \sum_{t=1}^{n} a_{itu}\delta_{jt} = a_{iju}.$$

Por cambio de notación obtenemos el elemento de la fila uth y la columna pth de A_jA_i, para ser a_{jiu}. Así tenemos que

$$a_{iju} = a_{jiu} \qquad (i, j, u = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.4.8}$$

Otra forma de (3.4.5) es

$$\sum_{t=1}^{n} a_{itu}a_{jvt} = \sum_{t=1}^{n} a_{jtu}a_{ivt}. \tag{3.4.9}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} A_iA_j = \left(\sum_{t=1}^{n} a_{itr}a_{jst}\right) &= \left(\sum_{t=1}^{n} a_{jtr}a_{ist}\right) && (\text{por } (3.4.9)) \\ &= \left(\sum_{t=1}^{n} a_{jtr}a_{sit}\right) && (\text{por } (3.4.8)) \\ &= \left(\sum_{t=1}^{n} a_{str}a_{jit}\right) && (\text{por } (3.4.9)) \\ &= \left(\sum_{t=1}^{n} a_{tsr}a_{ijt}\right) && (\text{por } (3.4.8)) \\ &= \sum_{t=1}^{n} a_{ijt}A_t. \end{aligned}$$

De (3.4.6) vemos que A_i es linealmente independiente con respecto a $\mathbb{K}$. Las ecuaciones (3.4.6) y (3.4.8) muestran que $A_p = I$. Por lo tanto, A_i forma una base para una álgebra $\mathbb{A}$ cuyas constantes de multiplicación son $c_{ijk} = a_{ijk}$, por lo que $R_i = A_i$.

Sea

$$f_k \equiv \sum_{i,j=1}^{n} d_{kij}\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, (n^2 - n)), \tag{3.4.10}$$

de modo que los d_{kij} están en un campo $\mathbb{K}$ y los f_k son linealmente independientes con respecto a $\mathbb{K}$. Si hay un p tal que sea posible resolver para cada $\partial y_i/\partial x_j$ en el sistema

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_{kij}\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, (n^2 - n)), \tag{3.4.11}$$

como una función lineal de $\partial y_1/\partial x_p, \partial y_2/\partial x_p, \ldots, \partial y_n/\partial x_p$, entonces la ecuación 3.4.11 se puede reescribir en forma de matriz

$$\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_s}\right) = \left(\sum_{t=1}^{n} a_{tsr}\frac{\partial y_t}{\partial x_p}\right) = \sum_{t=1}^{n} (a_{tsr})\,\frac{\partial y_t}{\partial x_p} = \sum_{t=1}^{n} A_t\frac{\partial y_t}{\partial x_p}, \tag{3.4.12}$$

por adjunción de las n identidades tenemos

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_p} = \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Teorema 3.4.2 *Supongamos que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.4.11) tiene la propiedad de que para un entero fijo p, implica el conjunto (3.4.12). Supongamos además que las matrices $A_i = (a_{isr}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son conmutativas y*

$$\sum_{i=1}^{n} d_{kii} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, (n^2 - n)). \tag{3.4.13}$$

Entonces es una álgebra asociativa conmutativa, única y determinada, sobre $\mathbb{K}$, para la cual (3.4.11) es un conjunto de ecuaciones diferenciales generalizadas de Cauchy Riemann (en el sentido del lema).

Para $n = 2$ tenemos el

Corolario 3.4.1 *Una condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones linealmente independientes*

$$\sum_{i,j=1}^{2} d_{kij} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (k = 1, 2), \tag{3.4.14}$$

determinar una álgebra $\mathbb{A}$ para el cual (3.4.14) es un conjunto de ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann generalizadas es que

$$d_{k11} + d_{k22} = 0 \qquad (k = 1, 2), \tag{3.4.15}$$

La necesidad de (3.4.15) se desprende del lema.
Como (3.4.15) se mantiene y la matriz de los coeficientes de (3.4.14) es de rango 2, (3.4.14) puede ponerse en forma (3.4.12). Por lo tanto, $A_1 = I$ y además es conmutativo con A_2 o $A_2 = I$ y es conmutativo con A_1. En consecuencia, el corolario se desprende del teorema 3.4.2.
Ketchum ([25], pp. 646 y 653) demostró que cada solución $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de las ecuaciones diferenciales generalizadas de Cauchy-Riemann para una álgebra conmutativa se puede expresar en la forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_i = \sum_{j=0}^{n} a_j \xi^j,$$

donde $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i$. Por lo tanto, si las ecuaciones (3.3.1) determinan una álgebra, las soluciones de las ecuaciones se pueden obtener mediante el uso de series de potencias en la álgebra.

Capítulo 4

El método de algebrización para ecuaciones diferenciales autónomas

A lo largo de este capítulo, $\mathbb{K}$ representará un campo, generalmente el campo real $\mathbb{R}$ o el complejo $\mathbb{C}$. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria autónoma.

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{K}^n, t \in \mathbb{R}, \tag{4.0.1}$$

teniendo $f : \Omega \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ciertas condiciones de regularidad.

En este capítulo, como primer paso para obtener una solución para,(4.0.1), notamos que si a $\mathbb{K}^n$ se le puede dar la estructura determinada de una álgebra $\mathbb{A}$, es posible reducir este sistema a una sola ecuación diferencial autónoma

$$\frac{d\zeta}{dt} = \tilde{g}(\zeta), \quad \zeta \in \Omega' \subset \mathbb{A}, t \in \mathbb{R}, \tag{4.0.2}$$

siendo $\tilde{g}$ una función $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a la variable ζ en la álgebra $\mathbb{A}$.

Una vez hecho ésto, procedemos a mostrar que es posible resolver (4.0.2) extendiendo una técnica geométrica introducida en [2] y [3], en el contexto de campos de vectores analíticos complejos relacionados con campos de vectores de Newton, que se estudian por primera vez en [31]. Esta técnica se basa en la construcción de dos funciones, que son, respectivamente, constantes y lineales en las trayectorias que son las soluciones de (4.0.2).

El capítulo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 4.1 se presentan las álgebras en cuestión, en particular, introducimos la noción de álgebra $\mathbb{A}$ sobre $\mathbb{K}$ normada, asociativa y conmutativa, mostrando en la Sección 4.1.1 que éstas tienen una primera representación fundamental en la Álgebra de Matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, $M(n, \mathbb{K})$. Además, en la Sección 4.1.2 se definen las álgebras normales y se construyen sus correspondientes productos tensoriales. Este es un material estándar que se puede encontrar en [10], [12] y [35].

En la Sección 4.2 damos la definición de $\mathbb{A}$-diferenciabilidad, y procedemos a mostrar que si la familia de matrices $\{Jf(x) : x \in \Omega\}$ es linealmente equivalente a un subconjunto de una álgebra $\mathbb{B}$ en $M(n, \mathbb{K})$, es decir, la imagen de la primera representación fundamental de una álgebra $\mathbb{A}$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{K}^n$, es decir, $\mathbb{B} = R(\mathbb{A})$, entonces de hecho f es $\mathbb{A}$-diferenciable en Ω. El problema de determinar si un mapeo $f : \Omega \in \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es $\mathbb{A}$-diferenciable para algúna álgebra $\mathbb{A}$ se trata indirectamente en [18], donde las condiciones que se dan aseguran la existencia de una álgebra $\mathbb{A}$, de modo que el conjunto de relaciones son las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas para $\mathbb{A}$, (en [18], [27]) se muestra que estas ecuaciones dan un criterio para la diferenciabilidad de $\mathbb{A}$). Además [25] considera el caso cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donde demuestra que cada mapeo analítico f (en el sentido habitual) que es $\mathbb{A}$-diferenciable tiene una expansión en series de potencias (ver [25], pp. 646 y 653).

En la Sección 4.3 mostramos que para las álgebras normales es posible expresar la función $f(x)$ en términos de una sola variable ζ en la álgebra, y por lo tanto hay una función $\tilde{g}(\zeta)$ que representa $f(x)$. La analogía es el álgebra de los números complejos, donde $z = x + iy$ es la variable y las funciones $\mathbb{A}$-diferenciables son las funciones analíticas. También mostramos que hay un operador diferenciable $\partial/\partial\zeta$ que tiene la propiedad de que $\partial\tilde{g} = \tilde{g}'$, donde $\tilde{g}'$ es la derivada de Lorch de $\tilde{g}$ (ver [12]), por lo tanto, proporciona un marco para el cálculo habitual de una variable.

En la Sección 4.4, comenzamos mostrando que en este contexto la ecuación diferencial (4.0.1) toma la forma

$$\frac{d\zeta}{dt} = \tilde{g}(\zeta), \quad \zeta \in \Omega' \backslash \mathcal{S} \subset \mathbb{A}, t \in \mathbb{R}, \tag{4.0.3}$$

siendo $\tilde{g}$ una función $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a la variable ζ en la álgebra $\mathbb{A}$, y $\mathcal{S}$ es un determinado conjunto singular, donde las soluciones no están definidas.

Luego procedemos a mostrar que la técnica geométrica, introducida en [2] y [3], de encontrar dos funciones h_1 y h_2 que son constantes y lineales en las trayectorias $\zeta(t)$ que son soluciones de la ecuación diferencial, puede extenderse al caso de (4.0.3). Terminamos la sección y el capítulo con un ejemplo.

4.1. Álgebras

Introducimos $\mathbb{K}$-álgebra (ver por ejemplo [10]).

Definición 4.1.1 *Una $\mathbb{A}$-álgebra (o álgebras sobre $\mathbb{K}$) es un espacio $\mathbb{A}$ finito dimencional $\mathbb{K}$-lineal en el que se define un mapeo bilineal $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ que es asociativo y conmutativo, y hay un elemento unitario $e = e_{\mathbb{A}}$ en $\mathbb{A}$ que satisface $ex = xe = x$ para todo $\forall x \in \mathbb{A}$.*

Un elemento $a \in \mathbb{A}$ se llama regular si existe un elemento único en $\mathbb{A}$ denotado por $a^{-1} \in \mathbb{A}$ llamado inverso de a tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$. Un elemento $a \in \mathbb{A}$ que no es regular se llama singular. Si $a, b \in \mathbb{A}$ y b es regular, el cociente a/b significará ab^{-1}.

4.1.1. Álgebras y sus representaciones fundamentales

Definimos la primera representación fundamental. Si $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ es una base ordenada de una álgebra $\mathbb{A}$, el producto entre los elementos de $\mathcal{B}$ está dado por

$$\beta_i \beta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} \beta_k, \tag{4.1.1}$$

donde $c_{ijk} \in \mathbb{K}$ para $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se llaman las constantes de estructura de $\mathbb{A}$. La primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ asociada a $\mathcal{B}$ es el isomorfismo $R : \mathbb{A} \to M(n, \mathbb{K})$ definido por

$$R(x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n) = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \cdots + x_n R_n, \tag{4.1.2}$$

Donde R_i es la matriz cuya entrada (j,k) es c_{ijk} para $i = 1, 2, \ldots, n$. La conmutatividad y la asociatividad de $\mathbb{A}$ son equivalentes a las identidades

(1) $c_{ijk} = c_{jik}$, para todo $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y

(2) $\sum_l c_{ijl}c_{lks} = \sum_l c_{jkl}c_{ils}$, para todo $i, j, k, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

respectivamente.

Usando R asignamos a $\mathbb{A}$ la norma inducida por la norma del operador en $M(n, \mathbb{K})$ (ver [10]). De esta manera, cada álgebra es una álgebra normalizada, es decir, existe una norma $\|\cdot\| : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ que satisface $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{A}$ y $\|e\| = 1$.

Ejemplo Sea $\mathbb{A}$ el espacio lineal $\mathbb{R}^3$ con el producto entre los elementos de la base estándar $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ dada en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_2 & -2e_1 + 2e_2 + e_3 & -e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_1 + e_2 + e_3 & -e_1 + 2e_3 \end{array} \tag{4.1.3}$$

que se extiende al producto en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\begin{aligned} (x, y, z)(u, v, w) &= (e_1x, e_2y, e_3z)(e_1u, e_2v, e_3w) \\ &= xue_1e_1 + xve_1e_2 + xwe_1e_3 + yue_1e_2 + yve_2e_2 \\ &\quad + ywe_2e_3 + zue_1e_3 + zve_2e_3 + xwe_3e_3 \\ &= (xu - 2yv - yw - zv - zw)e_1 \\ &\quad + (xv - yu - zyv - yw + zv)e_2 \\ &\quad + (zw + zu + yv + yw + zv + zw)e_3. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

El producto entre los elementos de $\mathcal{B}$ define las constantes de estructura c_{ijk} para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Entonces, $\mathbb{R}^3$ con el producto dado es una álgebra $\mathbb{A}$.

4.1.2. Álgebras normales y sus productos tensoriales

Sean $B_1, B_2, \ldots, B_l$ matrices con $B_i \in M(k_i, \mathbb{K})$, cada B_i uno de los siguientes cuatro tipos:

$$(r), \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & s & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & s & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I_2 & C & 0 & & 0 \\ 0 & I_2 & C & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C \end{pmatrix}, \tag{4.1.5}$$

donde

$$c = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1.6}$$

$r, s, a, b, u, v \in \mathbb{K}$ y $k_1 + \cdots + k_l = n$. En este caso diremos que la matriz B dada por

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & B_l \end{pmatrix}, \tag{4.1.7}$$

está en su forma normal. Asociaremos a B una álgebra de matrices $M(n,\mathbb{K})$ que contiene B y usaremos la siguiente nomenclatura: El primer bloque se llamará bloque simple real, el segundo se llama bloque de Jordan real, el tercer bloque se conoce como complejo simple y el cuarto bloque recibe el nombre de Jordan complejo.

Para $i=1,2,\cdots,l$, sean $\sigma_i : M(k_i,\mathbb{K}) \to M(n,\mathbb{K})$ las secciones lineales definidas sustituyendo la matriz $M \in M(k_i,\mathbb{K})$ en el bloque B_i de la matriz B, y tomando las otras entradas como cero. El bloque de Jordan real se puede escribir de la siguiente manera $B_i = a_iD_i + N_i$, donde D_i es la identidad y N_i es una matriz nilpotente de orden k_i. El bloque complejo simple se puede escribir en la forma $B_i = a_iD_i + b_iJ_i$, donde D_i es una matriz diagonal y J_i es una matriz con $J_i^2 = -D_i$. Los bloques complejos de Jordan pueden escribirse en la forma $B_i = a_iD_i + b_jJ_i + N_i$, donde D_i es la identidad y J_i es una matriz con $J_i^2 = -D_i$ y N_i es una matriz nilpotente de orden $k_i/2$.

Definimos las matrices $\{\beta_{i,j} : 1 \leq i \leq l,\ \ 1 \leq j \leq k_i\}$ cuyas entradas están en el bloque B_i de la siguiente manera:

(i) Si B_i es un bloque simple real, $\beta_{i,1} := \sigma_i(1)$ en este caso $k_i = 1$.

(ii) Si B_i es un bloque de Jordan real, $\beta_{i,1} := \sigma_i(D_i)$ y $\beta_{i,j} := \sigma_i(N_i^{j-1})$ para $j = 2,\ldots,k_i$.

(iii) Si B_i es un bloque simple complejo, $\beta_{i,1} := \sigma_i(D_i)$ y $\beta_{i,2} := \sigma_i(J_i)$.

(iv) Si B_i es un bloque de Jordan complejo, $\beta_{i,1} := \sigma_i(D_i)$, $\beta_{i,2} := \sigma_i(J_i)$, $\beta_{i,2j-1} := \sigma_i(N_i^{2j-1})$, y $\beta_{i,2j} := \beta_{i,2}\sigma_i(N_i^{2j-1})$ para $j = 2,\ldots,k_i/2$.

Observe que el producto de las matrices β_{i_1,j_1} y β_{i_2,j_2} es la matriz cero si $i_1 \neq i_2$. Los productos de β_{i,j_1} y β_{i,j_2} para $i = 1,\ldots,l$ son los siguientes:

(i) Si β_i es un bloque simple real, $\beta_{i,1}\beta_{i,1} = \beta_{i,1}$.

(ii) Si β_i es un bloque de Jordan real, entonces

$$\begin{array}{c|cc} & \beta_{i,1} & \beta_{i,j_1} \\ \hline \beta_{i,1} & \beta_{i,1} & \beta_{i,j_1} \\ \beta_{i,j_2} & \beta_{i,j_1} & \beta_{i,j_1+j_2} \end{array} \tag{4.1.8}$$

para $2 \leq j_1,\, j_2 \leq k_i$, donde $\beta_{i,j_1} = 0$ con $j_1 \geq k_i + 1$.

(iii) Si B_i es un bloque simple complejo, entonces

$$\begin{array}{c|cc} & \beta_{i,1} & \beta_{i,2} \\ \hline \beta_{i,1} & \beta_{i,1} & \beta_{i,2} \\ \beta_{i,2} & \beta_{i,2} & -\beta_{i,1} \end{array} \tag{4.1.9}$$

((iv) Si B_i es un bloque de Jordan complejo, entonces

$$\begin{array}{c|cccc} & \beta_{i,1} & \beta_{i,2} & \beta_{i,2j_1-1} & \beta_{i,2j_1} \\ \hline \beta_{i,1} & \beta_{i,1} & \beta_{i,2} & \beta_{i,2j_1-1} & \beta_{i,2j_1} \\ \beta_{i,2} & \beta_{i,2} & -\beta_{i,1} & \beta_{i,2j_1} & -\beta_{i,2j_1-1} \\ \beta_{i,2j_2-1} & \beta_{i,2j_1-1} & \beta_{i,2j_2} & \beta_{i,2(j_1+j_2-1)-1} & \beta_{i,2(j-1+j_2-1)} \\ \beta_{i,2j_2} & \beta_{i,2j_1} & -\beta_{i,2j_2-1} & \beta_{i,2(j_1+j_2-1)} & -\beta_{i,2(j_1+j_2-1)-1} \end{array}, \tag{4.1.10}$$

para $2 \leq j_1,\, j_2 \leq k_i/2$, donde $\beta_{i,j} = 0$ con $j \geq 2k_i + 1$.

La conmutatividad de los elementos en el conjunto

$$\mathcal{B} = \{\beta_{1,1}, \ldots, \beta_{1,k_1}, \ldots, \beta_{l,1}, \ldots, \beta_{l,k_l}\}, \tag{4.1.11}$$

con respecto al producto de la matriz, se desprende del conocido resultado. Para una forma canónica de Jordan $D+N$, la matriz diagonal D conmuta con la matriz nilpotente N.

Además, el espacio $\mathbb{K}$-lineal abarcado por $\mathcal{B}$ es una $\mathbb{K}$-álgebra, como se afirma en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1 *El conjunto $\mathcal{B} = \{\beta_{1,1}, \ldots, \beta_{1,k_1}, \ldots, \beta_{l,1}, \ldots, \beta_{l,k_l}\}$ es una base para un espacio lineal n-dimensional que es una álgebra $\mathbb{A}$ con respecto al producto matricial, y su primera representación fundamental R con respecto a $\mathcal{B}$ es el isomorfismo de identidad.*

Prueba.
Sea R la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ asociada a $\mathbb{B}$. Como la álgebra $\mathbb{A}$ es generada por $\beta_{i,1}$, $\beta_{i,2}$ (considerado solo cuando esto existe, es decir, $k_i \geq 2$), y $\beta_{i,3}$ (considerado solo en el caso en que B_i es un bloque de Jordan complejo), para probar que R es la identidad, solo necesitamos probar que $R(\beta_{i,j}) = \beta_{i,j}$, pero para estos tres casos la igualdad es trivial. Entonces, R es la identidad isomorfismo. □

Definición 4.1.2 *Dada una matriz $B \in M(n, \mathbb{K})$ en su forma normal, a la álgebra en $M(n, \mathbb{K})$, como se construyó anteriormente, la llamaremos una álgebra $\mathbb{K}$-normal (que contiene B).*

Definición 4.1.3 *Dos álgebras matriciales $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ en $M(n, \mathbb{K})$ son linealmente equivalentes si existe una matriz invertible de $B \in M(n, \mathbb{K})$ tal que $\mathbb{A}_1 = \{BAB^{-1} : A \in \mathbb{A}_2\}$.*

Para la prueba del siguiente resultado, ver [29].

Proposición 4.1.2 *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras. Existe un producto en $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ satisfaciendo*

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2, \tag{4.1.12}$$

donde $a_1 a_2$ y $b_1 b_2$ denotan el producto en $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, respectivamente. El producto es asociativo y $e_{\mathbb{A}} \otimes e_{\mathbb{B}} = e_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}}$.
Por lo tanto, el producto tensorial finito de álgebras es una álgebra.

Definición 4.1.4 *La complejización de una $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{A}$ es la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$. Llamemos a una álgebra que es la complejización de una álgebra $\mathbb{R}$-normal a una $\mathbb{C}$-álgebra normal.*

Como de costumbre, si el contexto es claro, quitaremos el $\mathbb{C}$ del nombre y se referirá a la álgebra $\mathbb{C}$-normal simplemente como una álgebra normal. La siguiente proposición y su corolario se derivan de un cálculo directo.

Proposición 4.1.3 *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ álgebras matriciales p- y q-dimensionales en $M(n, \mathbb{K})$ y $M(m, \mathbb{K})$, respectivamente, y sea $P \in M(n, \mathbb{K})$ y $Q \in M(m, \mathbb{K})$ matrices invertibles. Entonces, se tiene*

$$P\mathbb{A}P^{-1} \otimes Q\mathbb{B}Q^{-1} = [P \otimes Q][\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}][P \otimes Q]^{-1} \tag{4.1.13}$$

Corolario 4.1.1 *El producto tensorial de las álgebras matriciales es linealmente equivalente a las álgebras normales, y son álgebras linealmente equivalentes al producto tensorial de las álgebras normales.*

Entonces, por el *Corolario 4.1.1*, las álgebras linealmente equivalentes al producto tensorial de las álgebras normales, son cerradas bajo el producto tensorial.

El siguiente resultado muestra que la primera representación fundamental, con respecto a una base apropiada de un producto tensorial de las álgebras normales, es la inclusión de la álgebra en el espacio de matriz correspondiente.

Proposición 4.1.4 *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ $\mathbb{K}$-álgebras p- y q-dimensionales, y sean $R_1 : \mathbb{A} \to M(p, \mathbb{K})$ y $R_2 : \mathbb{B} \to M(q, \mathbb{K})$ las primeras representaciones fundamentales asociadas a la base $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ y $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$, respectivamente. Entonces, $R : \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \to M(pq, \mathbb{K})$ definido por $R = R_1 \otimes \mathbb{R}_2$ es la primera representación fundamental de $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ asociada a la base $\{\alpha_i \otimes \beta_j : 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q\}$.*

Prueba.
Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ base de $\mathbb{A}$ y $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ base de $\mathbb{B}$. Usamos las notaciones C_i y G_j para las matrices $R_1(\alpha_i)$ y $R_2(\beta_j)$, respectivamente, para $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$. El conjunto

$$\{\alpha_i \otimes \beta_j : 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q\}, \tag{4.1.14}$$

es una base para $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ (ver [29]). Para encontrar las constantes de estructura de $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ tomamos los productos

$$\begin{aligned} [\alpha_i \otimes \beta_l][\alpha_j \otimes \beta_s] &= \alpha_i\alpha_j \otimes \beta_l\beta_s \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}\alpha_k\right) \otimes \left(\sum_{t=1}^{q} d_{lst}\beta_t\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{t=1}^{q} c_{ijk}d_{lst}(\alpha_k \otimes \beta_t), \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

de donde obtenemos una primera representación fundamental R de $A \otimes B$, donde $R(\alpha_i \otimes \beta_l)$ es la matriz H_{il}, cuya entrada (kl, js) viene dada por $h_{il,kt,js} := c_{ijk}d_{lst}$, donde c_{ijk} y d_{lst} son las entradas (k, j) y (t, s) de C_i y G_l para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq l \leq q$, respectivamente.
Por otro lado tenemos que $R_1(\alpha_i) \otimes R_2(\beta_l) = C_i \otimes Gl$. Además, el producto tensorial de C_i y G_l está dado por

$$C_i \otimes G_l = \begin{pmatrix} c_{i11}\begin{pmatrix} d_{i11} & d_{i21} & \cdots & d_{iq1} \\ \vdots & & & \\ d_{i1q} & d_{i2q} & \cdots & d_{iqq} \end{pmatrix} & \cdots & c_{ip1}\begin{pmatrix} d_{i11} & d_{i21} & \cdots & d_{iq1} \\ \vdots & & & \\ d_{i1q} & d_{i2q} & \cdots & d_{iqq} \end{pmatrix} \\ \vdots & & \\ c_{i1p}\begin{pmatrix} d_{i11} & d_{i21} & \cdots & d_{iq1} \\ \vdots & & & \\ d_{i1q} & d_{i2q} & \cdots & d_{iqq} \end{pmatrix} & \cdots & c_{ipp}\begin{pmatrix} d_{i11} & d_{i21} & \cdots & d_{iq1} \\ \vdots & & & \\ d_{i1q} & d_{i2q} & \cdots & d_{iqq} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.1.16}$$

de la que vemos que en la posición (kt, js) aparece el elemento $c_{ijk}d_{lst}$. En consecuencia, tenemos las igualdades de matrices $H_{il} = C_i \otimes G_l$, para $1 \leq i,\ l \leq n$. Por lo tanto, $R = R_1 \otimes R_2$. $\square$

Corolario 4.1.2 *Si $\mathbb{A}$ es una álgebra matricial en $M(n, \mathbb{K})$ que es un producto tensorial de álgebras $\mathbb{K}$-normales, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{A}$ en la cual la primera representación fundamental correspondiente $R : \mathbb{A} \to M(n, \mathbb{K})$ es el isomorfismo de identidad, es decir, $R(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{A}$.*

Prueba.
Tenemos que $\mathbb{A} = \mathbb{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}_m$, donde $\mathbb{B}_i$ es una álgebra $\mathbb{K}$-normal para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Obviamente, para cada $\{1, \ldots, m\}$ podemos considerar una base para $\mathbb{B}_i$ como la que se da en la *Proposición 4.1.1*, y al tomar los correspondientes productos tensoriales de estas bases obtenemos una base $\mathcal{B}$ para cada $\mathbb{A}$. Por las *Proposiciones 4.1.1 y 4.1.4* tenemos que la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ asociada a $\mathcal{B}$ es la identidad. $\square$

4.2. Diferenciabilidad en álgebras.

En un artículo publicado en 1893, Sheffers sentó las bases de una teoría de las funciones analíticas sobre álgebras, (ver [18], [25] y las referencias que contiene).

Diferenciabilidad en álgebras es un concepto más fuerte que la usual diferenciabilidad sobre $\mathbb{K}^n$. Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es un mapeo diferenciable en el conjunto abierto $\mathcal{U}$, denotado por $Jf(x)$ para la matriz Jacobiana en el punto x, en la base estándar de $\mathbb{K}^n$. También usamos la notación $J_{\mathcal{B}}f(x)$ para la matriz Jacobiana en el punto x de f con respecto a la base $\mathcal{B}$.

La siguiente definición fue introducida en [12].

Definición 4.2.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra y sea $f : \Omega \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un mapeo definido en el conjunto abierto Ω. Decimos que f es $\mathbb{A}$-diferenciable en $x_0 \in \mathbb{A}$ si existe un elemento $f'(x_0) \in \mathbb{A}$, la cual la llamaremos la $\mathbb{A}$-derivada de f en x_0, satisfaciendo*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{\|h\|} = 0, \tag{4.2.1}$$

donde $f'(x_0)h$ denota el producto en $\mathbb{A}$ de $f'(x_0)$ con h. Si f es $\mathbb{A}$-diferenciable en todos los puntos de Ω , decimos que f es $\mathbb{A}$-diferenciable en Ω y llamamos al mapeo f' asignando $f'(x)$ al punto $x \in \Omega$ la $\mathbb{A}$-derivada de f, o la derivada de Lorch de f.

De ello se deduce (ver, por ejemplo, [12] [18], [25] y [27]) que un mapeo $f : \Omega \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es $\mathbb{A}$-diferenciable en x_0 sí y solo si $J_{\mathcal{B}}f(x_0) \in R(\mathbb{A})$ y es continuo como una función de x_0, donde $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{A}$ y $R : \mathbb{A} \to M(n, \mathbb{K})$ es la primera representación fundamental de la álgebra $\mathbb{A}$ asociada a $\mathcal{B}$.

De hecho, en este caso, $J_{\mathcal{B}}f(x)$ es la imagen de $f'(x)$ bajo el mapeo R, es decir, si f es $\mathbb{A}$-diferenciable, entonces

$$J_{\mathcal{B}}f(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) R_i, \tag{4.2.2}$$

donde $R_i = R(e_i)$ y $u_i : \Omega \to \mathbb{A}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si $\Omega' := R(\Omega)$, $\mathbb{B} := R(\mathbb{A})$, y $g : \Omega' \subset \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ es definida por

$$g(y) = R \circ f \circ R^{-1}(y), \tag{4.2.3}$$

entonces g es $\mathbb{B}$-diferenciable y su diferencial en y es dado por $g' = \Sigma_{i=1}^n u_i(R^{-1}(y))R_i$, por lo tanto, la relación entre la matriz jacobiana de f y el $\mathbb{B}$-diferencial de g es $J_{\mathcal{B}}f(x) = g'(R(x))$. La ecuación matricial (4.2.2) es equivalente a las ecuaciones n^2

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{n} u_l c_{lji}, \tag{4.2.4}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Usando (4.2.4) y la asociatividad de la álgebra, podemos obtener

$$\sum_{i=1}^{n} c_{iks} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijs} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \tag{4.2.5}$$

apareciendo en ([25], p. 646).

Observación 4.2.1 *Cabe señalar que, en el contexto de las álgebras, las ecuaciones (4.2.5) desempeñan el mismo papel que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el caso de una variable compleja y, por lo tanto, sirven como criterio para el análisis, ver ([18], [23], [27], [28] y [30]).*

Supongamos que consideramos la base $\mathscr{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de $\mathbb{A}$, donde $\alpha_i = \sum_{j=1}^n s_{ji} e_j$ para $i = 1, \ldots, n$, $s_{ji} \in \mathbb{K}$, puede ser probado que $J_{\mathscr{A}} f = S^{-1}(Jf)S$, donde $S = (s_{ij}$, si denotamos por S_i la imagen de α_i bajo la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ asociada a $\mathscr{A}$, tenemos para $i =, \ldots, n$, que $S_i = S^{-1}(\sum_{j=1}^n s_{ji} R_j)S$.

Observación 4.2.2 *Para la diferenciación de álgebras, las propiedades usuales de la diferenciación de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ siguen siendo ciertas. Además, las reglas habituales de diferenciación de funciones de una variable se satisfacen en el caso de las álgebras, por lo tanto, las funciones polinomiales, las funciones racionales y las expresadas por medio de series de potencias convergentes como las funciones exponenciales, trigonométricas y otras funciones habituales son diferenciables en álgebras.*

El siguiente teorema da condiciones que aseguran la existencia de una álgebra $\mathbb{A}$ en el que f es $\mathbb{A}$-diferenciable.

Teorema 4.2.1 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un mapeo C^1 definido en el conjunto abierto Ω. f es $\mathbb{A}$-diferenciable para una álgebra $\mathbb{A}$ sí y solo si el conjunto de matrices*

$$\{Jf(x) : x \in \Omega\}, \tag{4.2.6}$$

es un subconjunto de una álgebra $\mathbb{B}$ que es linealmente equivalente a una álgebra $\mathbb{T}$ que es un producto de tensor finito de álgebras normales en $M(n, \mathbb{K})$. Además, $\mathbb{A}$ es un espacio $\mathbb{K}$-lineal $\mathbb{K}^n$ y tiene una base $\mathcal{B}$ tal que la imagen de la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ asociada a $\mathcal{B}$ es $R(\mathbb{A}) = \mathbb{T}$.

Prueba.
Sea $\mathscr{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base para $\mathbb{T}$ como se indica en el Corolario 4.1.2. Entonces $\mathscr{B} = B\alpha_1 B^{-1}, \ldots, B\alpha_n B^{-}$ es una base para $\mathbb{B}$, donde B es una matriz tal que $\mathbb{B} = B\mathbb{T}B^{-1}$. Debido a que $Jf(x) \in \mathbb{B}$ para cada $x \in \Omega$, tenemos $Jf(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)\beta_i$, donde $u_i : \Omega \to \mathbb{K}$ son funciones y $\beta_i = B\alpha_i B^{-1}$. Ahora

considere la base $\mathcal{G} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ definida por $\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j$, donde $B = (b_{ij})$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base estándar de $\mathbb{K}^n$. Entonces, tenemos que $J_{\mathcal{G}} f = B^{-1}(Jf)B$. Así,

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{G}} f(x) &= B^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\beta_i\right) B = B^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x)(B\alpha_i B^{-1})\right) B \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\alpha_i, \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

en otras palabras, $J_{\mathcal{G}} f(x) \in \mathbb{T}$, lo que significa que si definimos un producto entre los elementos de $\mathcal{G}$ utilizando las constantes de la estructura de los productos de los elementos de $\mathscr{H}$, tenemos que $\mathbb{K}^n$ es una álgebra $\mathbb{A}$ tal que su primera representación fundamental asociado a $\mathcal{G}$ es dado por $R(\gamma_i) = \alpha_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto f es $\mathbb{A}$-diferenciable. $\square$

4.3. Reducción a una variable en la álgebra

A veces, $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ puede expresarse como una función de una variable $\zeta = \sum_{i=i}^{n} x_i e_i$ de una álgebra $\mathbb{A}$, cuya imagen en la primera representación fundamental es el producto tensorial de las álgebras normales (como en las secciones anteriores). En esta sección mostramos algunas condiciones necesarias para que esto sea cierto y también permitimos la expresión de f en términos de ζ.

Proposición 4.3.1 *Con la misma hipótesis que el teorema 4.2.1, existe una base $\mathscr{D} = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ de elementos invertibles de la álgebra $\mathbb{A}$, de manera que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \Omega \subset \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^n \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ \Omega' \subset \mathbb{A} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{A} \end{array}, \tag{4.3.1}$$

donde A es la matriz asociada al cambio de base $\mathcal{E} \to \mathscr{D}$, donde $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

. Por un cambio de base se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \Omega \subset \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^n \\ {\scriptstyle B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B} \\ \Omega'' \subset \mathbb{A} & \xrightarrow{g} & \mathbb{A} \end{array}, \tag{4.3.2}$$

donde B es la matriz asociada al cambio de base de $\mathcal{E}$ a $\mathbb{B}$, que se utilizó en el teorema anterior, y $g = B \circ f \circ B^{-1}$. Ahora considere una base $\mathscr{D} = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ de elementos regulares de $\mathbb{A}$, donde sin pérdida de generalidad $\delta_1 = e$. Entonces, si A es la matriz asociada al cambio de base de $\mathcal{E}$ a $\mathscr{D}$, vamos a $\tilde{g} = A \circ f \circ A^{-1}$. Tenga en cuenta que el dominio de $\tilde{g}$ es $\Omega' = A(\Omega)$. $\square$

Teorema 4.3.1 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un mapeo $\mathbb{A}$-diferenciable sobre una álgebra $\mathbb{A}$ con primera representación fundamental $R(\mathbb{A})$, entonces $\tilde{g} = A \circ f \circ A^{-1}$ puede ser expresada en una sola variable $\zeta = \sum_{j=1}^{n} y_j \delta_j$, para alguna base regular $\mathscr{D} = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Además, hay un operador diferencial parcial $\partial/\partial\zeta$ tal que $\tilde{g}'(\zeta) = (\partial\tilde{g}/\partial\zeta)(\zeta)$.*

Prueba.
Por *Proposición 4.3.1* hay una base $\mathscr{D} = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ de elementos regulares en la álgebra $\mathbb{A}$, con $\delta_1 = e$, sin perdida de generalidad podemos asumir que $\|\delta_i\| = 1$. Introduciendo la variable ζen la base $\mathscr{D}$ como $\zeta = \sum_{i=1}^{n} y_i\delta_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, entonces tenemos $f(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{g}(\zeta)$, con $\tilde{g} = A \circ f \circ A^{-1}$, donde A es la matriz asociada al cambio de base $\mathcal{E}$ a $\mathscr{D}$.
denotada por $\overline{\zeta}_k$ el k-conjugado de ζ relacionado a $\mathscr{D}$, la cual es definida para $k = 2, \ldots, n$ por

$$\begin{aligned} \overline{\zeta_k} &= y_1\delta_1 - y_k\delta_k + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} y_i\delta_i \\ &= -y_k\delta_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} y_i\delta_i \\ &= \zeta - 2y_k\delta_k. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

entonces tenemos

$$y_k e = \frac{\zeta - \overline{\zeta_k}}{2}\delta_k^{-1}, \quad para \quad k = 2, \ldots, n, \tag{4.3.4}$$

y ya que

$$y_1\delta_1 = \zeta - \sum_{j=2}^{n} y_j\delta_j = \zeta - \sum_{j=2}^{n} \frac{\zeta - \overline{\zeta_j}}{2}, \tag{4.3.5}$$

entonces,

$$y_1 e = \frac{1}{2}\left((3-n)\zeta + \sum_{j=2}^{n} \overline{\zeta_j}\right)\delta_1^{-1}. \tag{4.3.6}$$

Además se pueden definir los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_k} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_j^{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}, \tag{4.3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta_k}} = \frac{1}{2}\left\{\delta_1^{-1}\frac{\partial}{\partial y_1} - \delta_k^{-1}\frac{\partial}{\partial y_k}\right\}, \quad para \quad k = 2, \ldots, n, \tag{4.3.8}$$

lo que satisface

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} = 1 \quad \frac{\partial \overline{\zeta_k}}{\partial \zeta} = \frac{n-2}{n} \quad para \quad k = 2, \ldots, n, \\ &\frac{\partial \overline{\zeta_k}}{\partial \overline{\zeta_k}} = 1 \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \overline{\zeta_k}} = \frac{\partial \overline{\zeta_j}}{\partial \overline{\zeta_k}} = 0 \quad para \quad k = 2, \ldots, n, \ k \neq j. \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Si f es $\mathbb{A}$-diferenciable, $\tilde{g}$ también es $\mathbb{A}$-diferenciable, por lo tanto

$$\tilde{g}'(\zeta) = \frac{d\tilde{g}}{dt}(\zeta + t\delta_k)\big|_{t=0} = \frac{d\tilde{g}}{dt}(\zeta + t\delta_j)\big|_{t=0}, \quad \forall j,\ k, \tag{4.3.10}$$

y ya que

$$\frac{d\tilde{g}}{dt}(\zeta + t\delta_k)\Big|_{t=0} = \delta_k^{-1}\frac{d\tilde{g}}{dy_k}(\zeta), \tag{4.3.11}$$

entonces para $k = 2, \ldots, n$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\zeta_k}(\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\delta_1^{-1}\frac{\partial g_i}{\partial y_1}(\zeta) - \delta_k^{-1}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\zeta)\right\}\delta_i = 0, \tag{4.3.12}$$

por lo que la expresión de la derecha de $\tilde{g}(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\zeta)\delta_i$ no depende de las variables conjugadas. De esta manera obtenemos una expresión $\tilde{g}(\zeta)$ que depende solo de ζ, y no de $\overline{\zeta}_k$ para $k = 2, \ldots, n$. Además, para (4.3.7), (4.3.10) y (4.3.11) tenemos que

$$\tilde{g}'(\zeta) = \frac{\partial\tilde{g}}{\partial y_1}(\zeta) = \frac{\partial\tilde{g}}{\partial\zeta}(\zeta). \tag{4.3.13}$$

□

En el siguiente ejemplo, mostramos cómo podemos reducir las variables de un mapeo sustituyendo las variables en una álgebra.

Ejemplo
Sea $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2 + 2x_1x_3)$. Entonces

$$Jf = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 2x_1 & 0 \\ 2x_3 & 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}, \tag{4.3.14}$$

El Jf está en forma normal, por lo tanto f es $\mathbb{A}$-diferenciable. Si

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3.15}$$

e I es la identidad, la multiplicación en la álgebra asociada $R(\mathbb{A})$ se da mediante la multiplicación de las matrices I, N y N^2 que representan, respectivamente, $R(e_1)$, $R(e_2)$ y $R(e_3)$ donde $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Es fácil ver que e_2 y e_3 no tienen inverso en la álgebra $\mathbb{A}$. Considerar la base de elementos regulares.

$$\mathscr{D} = \{\delta_1 = e_1, \delta_2 = e_1 + e_2, \delta_3 = e_1 + e_3\}, \tag{4.3.16}$$

Vemos que la matriz asociada al cambio de base de $\mathcal{E}$ a $\mathscr{D}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.3.17}$$

por lo que f se transforma en $\tilde{g} = A \circ f \circ A^{-1}$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(y_1\delta_1 + y_2\delta_2 + y_3\delta_3) = & \left(y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_2y_3 - y_3^2\right)\delta_1 \\ & + 2y_2(y_1 + y_2 + y_3)\delta_2 \\ & + \left(y_2^2 + 2y_3(y_1 + y_2 + y_3)\right)\delta_3. \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Así

$$\zeta = y_1\delta_1 + y_2\delta_2 + y_3\delta_3, \tag{4.3.19}$$

es la variable en la álgebra $\mathbb{A}$. Ahora consideremos los conjugados

$$\overline{\zeta_2} = y_1\delta_1 - y_2\delta_2 + y_3\delta_3, \quad \overline{\zeta_3} = y_1\delta_1 + y_2\delta_2 - y_3\delta_3. \tag{4.3.20}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_1 e &= \frac{1}{2}\left(\overline{\zeta_2} + \overline{\zeta_3}\right)\delta_1^{-1}, \\ y_2 e &= \frac{1}{2}\left(\zeta - \overline{\zeta_2}\right)\delta_2^{-1}, \\ y_3 e &= \frac{1}{2}\left(\zeta - \overline{\zeta_3}\right)\delta_3^{-1}. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Así que sustituyendo esto en $\tilde{g}$ y simplificando obtenemos

$$\tilde{g}(\zeta) = \zeta^2, \tag{4.3.22}$$

la función en la variable de la álgebra.

4.4. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la reducción a una variable en una álgebra

Al seguir [2] y [3], obtenemos, como corolarios directos del *Teorema 4.2.1, Proposición 4.3.1 y Teorema 4.3.1*, los siguientes resultados:

Corolario 4.4.1 *Sea*

$$\begin{aligned} f &: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \tilde{g} &: \Omega' \subset \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}, \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

como en el Teorema 4.3.1. Entonces existen $\Phi : \Omega' \in \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la cual es $\mathbb{A}$-diferenciable en $\Omega' \backslash \mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es un conjunto singular, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\zeta) &= -\frac{\Phi(\zeta)}{\Phi'(\zeta)}, \\ f(x) &= -\left[J\phi(x)\right]^{-1}\phi(x), \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

con $\phi(x) = (\Phi \circ A)(x)$.

Prueba.
Necesitamos demostrar que existe $\Phi : \Omega' \in \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que

$$\tilde{g}(\zeta) = -\frac{\Phi(\zeta)}{\Phi'(\zeta)}. \tag{4.4.3}$$

Notando que

$$\log(\Phi(\zeta))' = \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)} = -\frac{1}{\tilde{g}(\zeta)}, \tag{4.4.4}$$

y por *Observación 4.2.2*, se tiene que

$$\Phi(\zeta) = \exp\left[-\int^{\zeta} \frac{dz}{\tilde{g}(z)}\right], \tag{4.4.5}$$

para $\zeta \in \Omega' \backslash \mathcal{S}$, donde

$$\mathcal{S} = \{\zeta \in \Omega' : \tilde{g}(\zeta) \notin \mathbb{A}^*\}, \tag{4.4.6}$$

siendo $\mathbb{A}^*$ los elementos regulares de $\mathbb{A}$. $\square$

Observación 4.4.1 *Obsérvese que $\mathcal{S}$ puede ser igual a diferentes conjuntos. Por ejemplo, si $\tilde{g}(\zeta) = c\zeta$ con $c \notin \mathbb{A}^*$, entonces $\mathcal{S} = \mathbb{A}$. Por otro lado, si $\tilde{g}(\zeta)$ es la función polinomial $g(\zeta) = c_n\zeta^n + \cdots + c^1\zeta + c_0$ con c_n singular, $\tilde{g}(\zeta)$ puede ser regular para todo $\zeta \in \mathbb{A}$, (ver [12], p. 418), en cuyo caso $\mathcal{S} = \emptyset$.*

Observación 4.4.2 *Como un caso especial, se observa que si $\mathbb{A} = \mathbb{C}$ entonces $1/\tilde{g}$ será una función analítica compleja en $\Omega' \backslash \mathcal{S}$, por lo tanto $\mathcal{S}$ consiste en puntos aislados (las singularidades aisladas de $1/\tilde{g}$). Esto ha sido estudiado en [2] y [3].*

Observación 4.4.3 *En el caso de que $\mathcal{S} \neq \Omega'$, entonces $\Omega' \backslash \mathcal{S}$ es un conjunto denso abierto en Ω'. Esto es cierto ya que el conjunto $\mathbb{A}^*$ es un conjunto denso abierto en $\mathbb{A}$, por lo tanto, para una $\tilde{g}$ continua, se tiene que $\tilde{g}^{-1}(\mathbb{A}^*)$ es un subconjunto denso abierto de Ω'.*

Observación 4.4.4 *Por la observación anterior, en caso de que $\mathcal{S} \neq \Omega'$, entonces $\Phi(\zeta)$ existe para $\zeta \in \Omega' \backslash \mathcal{S}$ aunque sea una función multivalor definida en cada componente de $\zeta \in \Omega' \backslash \mathcal{S}$.*

Observación 4.4.5 *Otras caracterizaciones y propiedades de $\mathcal{S}$ serán estudiadas en otra parte. En lo que sigue suponemos que $\mathcal{S} \neq \Omega'$.*

Sea $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, entonces considere la proyección en $\mathcal{S}^{n-1}$

$$\prod(x) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{S}^{n-1}. \tag{4.4.7}$$

Corolario 4.4.2 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathbb{A}$-diferenciable en una álgebra con la primera representación fundamental $R(\mathbb{A})$. Entonces las soluciones a la ecuación diferencial,*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{4.4.8}$$

corresponden a las curvas de nivel de la función

$$\tilde{h_1}(x) = \prod(\phi(x)), \tag{4.4.9}$$

además, la función de valor real,

$$\tilde{h_2}(x) = \log\|\phi(x)\|, \tag{4.4.10}$$

Es una función lineal de t a lo largo de las soluciones $x(t)$ de (4.4.8).

Prueba.
Por el *Teorema 4.2.1*, la *Proposición 4.3.1* y el *Teorema 4.3.1*, las soluciones $x(t)$ de (4.4.8) están en correspondencia con las soluciones $\zeta(t)$ de

$$\frac{d\zeta}{dt} = \tilde{g}(\zeta). \tag{4.4.11}$$

Por otro lado, el *corolario 4.4.1* muestra que

$$\Phi(\zeta(t)) = \Phi(\zeta(t_0)) \exp[-t - t_0], \tag{4.4.12}$$

el resultado sigue inmediatamente aplicando $\Pi(\cdot)$ y $\log \|\cdot\|$ a (4.4.12). $\square$

Corolario 4.4.3 *En particular, para visualizar la trayectoria que pasa por el punto $x_0 \in \Omega \backslash A^{-1}(\mathcal{S})$ en el tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$, solo se necesita trazar la curva de nivel $\{x \in \Omega : \tilde{h}_1(x) = \tilde{h}_1(x_0)\}$. Además, uno puede encontrar explícitamente el punto $x(t_1)$, para $t_1 \in \mathbb{R}$, como la intersección de la curva de nivel $\tilde{h}_1(x) = \tilde{h}_1(x_0)$ y la hipersuperficie $\tilde{h}_2(x) = \tilde{h}_2(x_0) - t_1 + t_0$.*

Ejemplo
Considera la función

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)), \tag{4.4.13}$$

donde

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{6}\left(2 + 6x + \frac{-22 + 20x + 7y}{4 + 5x^2 + 8x(-1+y) + y(-4+5y)}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{5(2 + 4x + 5y)}{4 + 5x^2 + 8x(1+y) + y(-4+5y)}\right), \\ v(x,y) &= \frac{1}{6}\left(-4 + 6y - \frac{5(-4 + 5x + 4y)}{4 + 5x^2 + 8x(-1+y) + y(-4+5y)}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{4 - 7x - 20y}{4 + 5x^2 + 8x(1+y) + y(-4+5y)}\right). \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4.15}$$

y note que

$$A \cdot Jf\left(A^{-1}(x,y)\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ -b(x,y) & a(x,y) \end{pmatrix} \tag{4.4.16}$$

con

$$\begin{aligned} a(x,y) &= 1 - \frac{2}{x^2 + (-2+y)^2} + \frac{x(-6 + 4x + 3y)}{\left(x^2 + (-2+y)^2\right)^2} \\ &\quad + \frac{x(4x - 3(2+y))}{\left(x^2 + (-2+y)^2\right)^2} - \frac{2}{x^2 + (2+y)^2} \\ b(x,y) &= \frac{4y}{\left(x^4 + (-4+y^2)^2 + 2x^2(4+y^2)\right)^2} \\ &\quad \times \left[48 - 96x - 24x^2 - 16x^3 - 9x^4 + 2x^5 + 2(-3+2x)(4+x^2)y^2 + (3+2x)y^4\right]. \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Por lo tanto, $A \cdot Jf(A^{-1}(x,y)) \cdot A^{-1}$ pertenece a la álgebra normal $\mathbb{C}$, por lo que los resultados anteriores son válidos.
Así

$$\tilde{g}(x,y) = \left(A \circ f \circ A^{-1}\right)(x,y) = (u_1(x,y), v_1(x,y)), \tag{4.4.18}$$

con

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= -1 + x + \frac{6-4x-3y}{2\left(x^2+(-2+y)^2\right)} + \frac{6-4x-3y}{2\left(x^2+(2+y)^2\right)}, \\ v_1(x,y) &= \frac{x(-12+12x+x^3)y + 2(-2+x^2)y^3 + y^5}{x^4+(-4+y^2)^2+2x^2(4+y^2)}. \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

Es solo una función analítica (compleja), ya que

$$J\tilde{g}(x,y) = A \cdot Jf\left(A^{-1}(x,y)\right) \cdot A^{-1} \in R(\mathbb{C}), \tag{4.4.20}$$

Así que al dejar $z = x + iy$, tenemos

$$\tilde{g}(z) = u_1\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + iv_1\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) = \frac{2-z^2+z^3}{4+z^2}. \tag{4.4.21}$$

Por *Corolario 4.4.1* se tiene

$$\Phi(z) = \exp\left[-\int^z \frac{d\zeta}{\tilde{g}(\zeta)}\right], \tag{4.4.22}$$

así que

$$\Phi(z) = \left(\frac{z-1-i}{z-1+i}\right)^i (z+1)^{-1} = \frac{e^{2\arctan(1-z)}}{z+1}. \tag{4.4.23}$$

Hay que tener en cuenta que en $\mathbb{R}^2$ se tiene $\Pi(x,y) = exp[iArg(x,y)]$, por lo tanto, las curvas de nivel de $\Pi(\cdot)$ están en correspondencia con las curvas de nivel de $Arg(\cdot)$. Así que

$$\begin{aligned} h(z) = Arg(\Phi(z)) = -\arctan\left(\frac{y}{1+x}\right) \\ + \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{4y}{2+(-2+x)x+y(2+y)}\right), \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

es una constante de movimiento h asociada a $\tilde{g}(z)$ y la asociada a $f(x,y)$ es

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x,y) = (h \circ A)(x,y) = -\arctan\left(\frac{2x+y}{1+x+2y}\right) \\ + \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{4(2x+y)}{2+5x^2+y(-2+5y)+x(2+8y)}\right). \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

Así por el *Corolario 4.4.3* las trayectorias asociadas a

$$(x'(t), y'(t)) = f(x(t), y(t)), \tag{4.4.26}$$

Son las curvas de nivel de $\tilde{h}(x,y)$. Para parametrizar la solución necesitamos calcular $\tilde{h}_2(x,y)$ que resulta ser

$$\begin{aligned}\tilde{h_2}(x,y) = &- \arctan\left(\frac{-1+x+2y}{1-2x-y}\right) \\ &+ \arctan\left(\frac{1-x-2y}{1+2x+y}\right) \\ &- \frac{1}{2}\log\left((2x+y)^2+(1+x+2y)^2\right).\end{aligned} \tag{4.4.27}$$

De acuerdo con el *Corolario 4.4.3*, se procedió a calcular la intersección de las curvas de nivel $\tilde{h}(x,y) = -1.68195$ y $\tilde{h}_2(x,y) = 2.26841 - t$ para $t = 0,1,2,3,4$. Los resultados se muestran en la Tabla 4.1.

Tiempo(t)	$x_t = (x(t), y(t))$
0	$(0.863, -0.783)$
1	$(0.4808, -0.0710)$
2	$(0.2002, 0.2548)$
3	$(0.0678, 0.4654)$
4	$(91.1109, -52.307)$

Cuadro 4.1: Coordenadas de la intersección de la curvas de nivel $\tilde{h}(x,y) = -1.68195$ y $\tilde{h_2}(x,y) = 2.26841 - t$ para $t = 0,1,2,3,4$.

Capítulo 5

Algebrización de ecuaciones diferenciales no autónomas

La teoría de funciones analíticas en álgebras está basada en el análisis de Lorch; ver [9], [12], [17], [18] y [25]. Resulta de una función teórica clásica que ha sido extendidas a las álgebras finitas dimensionales, asociativas, conmutativas y unitarias:

(i) El teorema de la integral de Cauchy se cumple por funciones analíticas en las álgebras y la formula integral de Cauchy tiene una versión análoga en las álgebras.

(ii) Los teoremas clásicos en series de potencias de Taylor son establecidos fácilmente, y la expansión de Lauren puede ser definida en regiones disjuntas en cada una de las cuales puede definir una función analítica diferente.

(iii) La analiticidad de funciones de la álgebra es caracterizada por la ecuación generalizada de Cauchy-Riemann, la cual es una configuración de las ecuaciones diferenciales parciales lineales.

Esta teoría nos permite considerar ecuaciones diferenciales sobre álgebras, las cuales pueden ser usadas para resolver familias de sistemas planares teniendo la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,y), \\ \frac{dx}{dt} &= g(t,x,y). \end{aligned} \tag{5.0.1}$$

Para este capítulo, y de aquí en adelante, cualquier álgebra sera asumida como asociativa, conmutativa y unitaria con unidad e, y $\mathbb{A}$ denotará el espacio lineal $\mathbb{R}^2$ denotado con una estructura de álgebra. En este capítulo un vector planar del campo F se dice que debe ser $\mathbb{A}-$*algebrizable* o bien $\mathbb{A}-$*diferenciable* si existe una álgebra $\mathbb{A}$ para cualquier F es Lorch *diferenciable* (*ver sección para definiciones*). De la misma manera, decimos que un sistema autónomo planar de ecuaciones ordinarias diferenciales $d\omega/dt = F(\omega)$ es *algebrizable* si F es $\mathbb{A}-$*algebrizable*.

Definición 5.0.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra. Decimos que una función $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida en el conjunto abierto U tiene un $\mathscr{H}(\mathbb{A})-$*diferenciable *sobre $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si H es una función definida en un conjunto abierto Ω tal que: (i) el mapeo $H_1(\tau) = H(\tau, b)$ y $H_2(\xi) = H(a, \xi)$ son funciones* $\mathbb{A}-$diferenciable *con respecto a $\mathbb{A}$ para todo $(a,b) \in \Omega$, donde τ y ξ son variables en $\mathbb{A}$, (ii) $(te, x, y) \in \Omega$ para todo $(t,x,y) \in U$ y (iii) $F(t,x,y) = H(te,x,y)$ para todo $(t,x,y) \in U$.*

Una ecuación diferencial no autónoma sobre una álgebra $\mathbb{A}$ es denotada por

$$\frac{d\xi}{d\tau} = H(\tau, \xi), \tag{5.0.2}$$

donde $H : \Omega \subset \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una función definida en un conjunto abierto Ω. Para cada punto $(\tau_0, \xi_0) \in \Omega$, una solución para la ecuación a través de (τ_0, ξ_0) consiste en una función $\mathbb{A}-$*diferenciable* $\xi : N(\tau_0) \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ definida en una vecindad $N(\tau_0)$ de τ_0, con $\xi(\tau_0) = \xi_0$ y $\mathbb{A}-$*derivada* $d\xi/d\tau$ con respecto a $\mathbb{A}$ satisface $d\xi(\tau)/d\tau = H(\tau, \xi(\tau))$ para todo $\tau \in N(\tau_0)$.
Si $F(f, g)$ tiene una $\mathscr{H}(\mathbb{A})-$*diferenciable* sobre H, decimos que el sistema planar (5.0.1) es *algebrizable* y que (5.0.2) es una *algebrización* de (5.0.1). Un teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales sobre álgebras es probada en [11], y un método para visualización de soluciones es dada en [4].
En la clásica ecuación diferencial $d\omega/dt = \omega^2$ tiene soluciones $\omega(t) = -(t+c)^{-1}$. Algunos sistemas diferenciales de ecuaciones autónomas diferenciales pueden ser escritas de esta forma al usar variables en álgebras. Por Ejemplo, la algebrización del sistema diferencial planar.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x^2 + 2xy - y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 3y^2 + 2xy - x^2, \end{aligned} \tag{5.0.3}$$

es la ecuación diferencial de $d\xi/d\tau = \xi^2$ sobre la álgebra $\mathbb{A}$ definida por el espacio lineal $\mathbb{R}^2$ denotado con el producto

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)(x_2, y_2) :=& (3x_1x_2 + (x_1y_2 + y_1x_2 - y_1y_2), 3y_1y_2 \\ & + (x_1y_2 + y_1x_2 - x_1x_2)). \end{aligned} \tag{5.0.4}$$

Las soluciones ξ son dados por $\xi(\tau) = -(\tau + c)^{-1}$; por lo tanto la solución del sistema son dadas por $(x(t), y(t)) = \xi(te)$, donde e denota la unidad de $\mathbb{A}$. Usando la primer representación fundamental de $\mathbb{A}$ (ver Sección 2) la siguiente expresión para la solución $(x(t), y(t))$ del sistema obtenido es:

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= \left(\frac{-t - y_0}{4(2t + x_0 + y_0)^2}, \frac{-t - x_0}{4(2t + x_0 + y_0)^2} \right), \\ (x(0), y(0)) &= \frac{-(y_0, y_(0))}{4(x_0 + y_0)^2}. \end{aligned} \tag{5.0.5}$$

Consideremos el sistema diferencial no autónomo planar

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{t^3} - \frac{2x}{t} + tx^2 - ty^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{2y}{t} + 2txy + ty^2, \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

cuya algebrización es la ecuación diferencial de Riccati sobre $\mathbb{A}$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{1}{\tau^3} - \frac{2\xi}{\tau} + \tau\xi^2, \tag{5.0.7}$$

donde $\mathbb{A}$ es la álgebra definida sobre $\mathbb{R}^2$ y el producto $(u,v)(x,y) = (ux - vy, xy + vx + vy)$. Por el método clásico de Lie para resolver ecuaciones diferenciales (ver [8], [19] y [26]), la solución de la ecuación de Riccati tiene la forma

$$\xi(\tau) = \frac{C + \tau^2}{\tau^2(C - \tau^2)}, \quad C = (a,b). \tag{5.0.8}$$

Las funciones $(x(t), y(t)) = \xi(te)$, donde e es la unida de $\mathbb{A}$, son soluciones del sistema planar, que se pueden obtener a través de la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$:

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) = \Bigg(& \frac{b^2 + (a+b-t^2)(a+t^2)}{(a^2+ab+b^2)t^2 - (2a+b)t^4 + t^6} \\ & , \frac{-2b}{(a^2+ab+b^2) - (2a+b)t^2 + t^4}\Bigg).\end{aligned} \tag{5.0.9}$$

Consideremos que los sistemas diferenciales tienen la forma (5.0.1), donde $f, g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones C^1 definidas en un conjunto abierto U. El objetivo de este trabajo es dar una familia de funciones $F = (f, g)$ teniendo $\mathscr{H}(\mathbb{A})-$*diferenciable* en H sobre una álgebra $\mathbb{A}$. Cuando existen, las soluciones $\xi(\tau)$ de la ecuación diferencial $d\xi/d\tau = H(\tau, \xi)$ sobre $\mathbb{A}$ define soluciones $(x(t), y(t)) = \xi(te)$ del sistema (5.0.1), que se pueden obtener a través de la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$:
El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 5.1 se darán las definiciones de álgebras, *algebrizabilidad* de campos de vectores planares, y *diferenciabilidad* de módulos en álgebras, una caracterización de *algebrizabilidad* de campos de vectores planares y se dan la forma de todos los campos de vectores cuadráticos que son *algebrizables*. En la Sección 5.2 se presenta la definición de levantamientos *algebrizables* de funciones $p : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Se demuestra que la clase de todas estas funciones define una álgebra dimensional infinita y se da la forma de una familia de funciones p. En la Sección 5.3, se demuestra que las soluciones de sistemas planares (5.0.1) se pueden obtener a partir de las soluciones de su algebrización; un teorema que contiene condiciones bajo las cuales se da un sistema planar como (5.0.1) que es polinomial es algebrizable, y se muestra que la clase de todos los sistemas planares (5.0.1) que tienen una algebrización (5.0.2) define una álgebra dimensional infinita. En la Sección 5.4 se considera el caso de sistemas cuadráticos y se dan sus algebrizaciones, que son ecuaciones de Riccati sobre álgebras. Los resultados presentados en las Secciones 5.2, 5.3 y 5.4 son las principales contribuciones de este capítulo.

5.1. Álgebras y analiticidad de Lorch

5.1.1. Álgebras

Definición 5.1.1 *(ver [29]). Una álgebra* $\mathbb{A}$ *es un espacio* $\mathbb{R}-$*lineal denotado* $\mathbb{E}$ *con un producto bilineal* $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$*, denotado por* $(x, y) \mapsto xy$*, que es asociativo* $x(yz) = (xy)z$ *y conmutativo* $xy = yx$ *para todo* $x, y, z \in \mathbb{A}$*, y tiene una unidad* $e \in \mathbb{A}$ *que satisface* $ex = xe$ *para todo* $x \in \mathbb{A}$*.*

Un elemento $a \in \mathbb{A}$ se llama regular si existe $a^{-1} \in \mathbb{A}$ llamado inverso de a tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$. Si $a \in \mathbb{A}$ no es regular, entonces a se llama singular. Si $a, b \in \mathbb{A}$ y b es regular, el cociente a/b significa

que $a/b = ab^{-1}$.
En todas las álgebras consideradas en este escrito, será el caso que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, a menos que se indique lo contrario.
Consideremos una álgebra $\mathbb{A}$. Si $\beta = \{e_1, e_2\}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^2$, el producto entre los elementos de β es dado por $e_i e_j = \sum_{k=1}^{2} c_{ijk} e_k$, donde los coeficientes $c_{ijk} \in \mathbb{R}, i, j, k \in \{1, 2\}$ se denominan constantes estructurales de $\mathbb{A}$. La *primera representación fundamental* de $\mathbb{A}$ es el homomorfismo lineal inyectivo $R : \mathbb{A} \to M(2, \mathbb{R})$ definido por $R : e_i \mapsto R_i$, donde R_i es la matriz cuya entrada j, k es c_{ijk}, para $i = 1, 2$.

5.1.2. Diferenciabilidad en álgebras

En esta subsección la definición de diferenciabilidad de Lorch es renombrado en este articulo como $\mathbb{A}-$algebrabilidad o $\mathbb{A}-$diferenciabilidad para denotar la dependencia del diferencial de Lorch con respecto a una álgebra $\mathbb{A}$.
Sea $| \cdot |$ la norma en $\mathbb{A}$ definida por $| a |= max\{\|XR(a)\| : X \in \mathbb{R}^2\}$ (aquí el vector X es representado como una matriz de 1×2 para que el producto $XR(a)$ tenga sentido), donde $R : \mathbb{A} \to M(2, R)$ es la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ y $\| \cdot \|$ la norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$. Para esta norma tenemos $| ab |\leq| a || b |$ para todo $a, b \in M(2, \mathbb{R})$. Por lo que, en este trabajo consideramos que cada álgebra $\mathbb{A}$ es una álgebra de Banach bajo la norma $| \cdot |$.

Definición 5.1.2 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra y $F : V \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una función en un conjunto abierto V. Decimos que F es $\mathbb{A}-$algebrizable o $\mathbb{A}-$diferenciable en V si existe una función $F' : V \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, llamada $\mathbb{A}-$derivada de F en V, que satisface*

$$\lim_{h\to 0} \frac{| F(a + h) - F(a) - F'(a)h |}{| h |} = 0, \tag{5.1.1}$$

para todo $a \in V$, donde $F'(a)h$ denota el producto en $\mathbb{A}$ de $F'(a)$ con h.

Un campo vectorial $F : V \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es $\mathbb{A}-$algebrizable en V sí y solo si la matriz jacobiana de F está contenida en la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$; es decir, $JF(a) \in R(\mathbb{A})$ para todo $a \in V$; ver [17]. Se puede demostrar que la noción de $\mathbb{A}-$algebrizabilidad coincide con la holomorficidad cuando $\mathbb{A}$ es el campo complejo. Un método para determinar si un campo F vectorial planar dado es algebrizable es el siguiente: F es algebrizable si y solo si para algunos de los siguientes tres tipos de pares de matrices

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}. \\
&(\mathrm{II}) \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \\
&(\mathrm{III}) \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La condición $\langle B_i, \partial F(x, y)/\partial(x, y)\rangle = 0$ se cumple para $i = 1, 2$ y para todo (x, y) en el dominio de definición de F, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno habitual en $M(2, \mathbb{R})$. La álgebra para cada tipo de par de matrices se define mediante la siguiente tabla de productos correspondiente a los vectores de base estándar e_1, e_2 de $\mathbb{R}^2$:

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & -be_1 + ae_2 \end{array}.$$

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & -ae_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{array}.$$

$$\text{(III)} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 \end{array}.$$

Consideremos un sistema autónomo planar de ecuaciones diferenciales ordinarias cuadráticas con variables x y y. Si este sistema es algebrizable para una álgebra con producto Tipo (I), entonces se puede representar mediante ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_0 + (b_2 - ab_1)x - bb_1 y + \left(\frac{1}{2}b_4 - ab_3\right)x^2 - 2bb_3 xy - \frac{1}{2}bb_4 y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + \left(\frac{1}{2}ab_4 - bb_3\right)y^2, \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

para las constantes reales $a, b, a_0, b_0, b_1, \ldots, b_4$. En el caso de algebrizabilidad para una álgebra con producto Tipo (II), el sistema es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_0 + a_1 x + a_2 y - \frac{1}{2}aa_3 x^2 + a_3 xy + a_4 y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_0 + (a_1 + aa_2)y + \left(\frac{1}{2}a_3 + aa_4\right)y^2, \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

para las constantes reales $a, b_0, a_0, a_1, a_2, a_3$ y a_4. Para el producto Tipo (III), el sistema se puede representar mediante ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_0 + b_1 y + b_2 y^2, \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

para algunas constantes reales a_i, b_i, $i = 0, 1, 2$. Además, se pueden dar las condiciones sobre los componentes de los campos vectoriales F para construir las funciones escalares $\alpha(x, y)$, que llamamos factores algebrizantes, de modo que αF son campos vectoriales algebrizables. Los factores de integración inversa (ver [15] y [22]) se construyen para estos campos de vectores.

5.1.3. Diferenciabilidad en módulos de álgebras

En esta subsección damos la definición de $\mathbb{A}-$diferenciabilidad de funciones con dominio en $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ e imagen en $\mathbb{A}$.
El producto cartesiano $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ define un módulo $\mathbb{A}-$normado con respecto a la norma $\|\cdot\|:\mathbb{A}\times\mathbb{A}\to\mathbb{R}$, $\|(a_1,a_2)\|=\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}$. Esta norma satisface

(i) $\| X \|\geq 0$ para todo $X\in\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ y $\| X \|=0$ si y sólo si $X=(0,0)$,

(ii) $\| aX \|\leq| a |\| X \|$ para todo $a\in\mathbb{A}$ y $X\in\mathbb{A}\times\mathbb{A}$,

(iii) $\| X+Y \|\leq\| X \|+\| Y \|$ para todo $X\in\mathbb{A}\times\mathbb{A}$.

En la siguiente definición $\|\cdot\|$ denota la norma dada anteriormente en el $\mathbb{A}-$módulo $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$.

Definición 5.1.3 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra y $H:\Omega\subset\mathbb{A}\times\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ una función, donde Ω es un conjunto abierto. Decimos que es H $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable en $X_0\in\Omega$ si existe un homeomorfismo con el módulo $M:\mathbb{A}\times\mathbb{A}\to\mathbb{A}$, que llamamos el homomorfismo diferencial de H en X_0, que satisface la condición*

$$\lim_{X\to X_0}\frac{\|H(X)-H(X_0)-M(X-X_0)\|}{\|X-X_0\|}=0. \tag{5.1.5}$$

Denotamos M por $\mathscr{D}H(X_0)$. Decimos que H es $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable en Ω si H es $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable en todos los puntos de Ω.

Una función $H:\Omega\subset\mathbb{A}$ es $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable en X_0 si y sólo si la matriz Jacobiana de $H:\Omega\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ en X_0 satisface $JH(X_0)\in R(\mathbb{A})\times R(\mathbb{A})$. El homomorfismo diferencial $\mathscr{D}H(X_0)$ está representado por una matriz en $M(1\times 2,\mathbb{A})$ con respecto a la base estándar de $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$, donde $M(1\times 2,\mathbb{A})$ es el $\mathbb{A}$-módulo de todas las matrices de una fila y dos columnas con entradas en $\mathbb{A}$; ver [35].

5.2. Levantamientos de funciones algebrizables $p:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

En esta sección se consideramos las funciones $p:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definidas en intervalos I abiertos, y las condiciones para la existencia de las álgebras $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}$-algebrizables y las funciones P tal que $p(t)=P(te)$ serán determinadas, donde e es la unidad de $\mathbb{A}$.

Definición 5.2.1 *Sea $p:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ una función definida en un intervalo abierto I y $\mathbb{A}$ una álgebra con unidad e. Diremos que $P:V\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable de p si*
(a) V es un conjunto abierto en el que P es $\mathbb{A}$-algebrizable,
(b) $\{te:t\in I\}\subset V$, y
(c) $p(t)=P(te)$ para todo $t\in I$.

Como consecuencia de la siguiente proposición, la familia de todas las funciones $p:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ con levantamientos algebrizables es una álgebra de dimensión infinita.

Proposición 5.2.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra y sea $p, q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funciones, donde I es un intervalo.*

(a) Cada función constante $p(t) = c$ admite el levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable $P(\tau) = c$.

(b) $p(t) = te$ admite el levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable $P(\tau) = \tau$, donde e es la unidad y $e \in \mathbb{A}$.

(c) Si p y q admiten levantamientos $\mathbb{A}$-algebrizables P y Q con respecto a $\mathbb{A}$, respectivamente, y a, b son constantes en $\mathbb{A}$, entonces $ap + bq$ y pq (todos los productos con respecto a $\mathbb{A}$) admiten levantamientos algebrizables $aP + bQ$ y PQ, respectivamente.

(d) Si p tiene un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable P y Q es una función $\mathbb{A}$-algebrizable con $Im(P) \subset Dom(Q)$, entonces $Q \circ P$ es un levantamiento algebrizable de $Q \circ P$.

Prueba.
La identidad y las funciones constantes son $\mathbb{A}$-diferenciables para cualquier álgebra $\mathbb{A}$. Por lo tanto, (a) y (b) se mantienen. Sean p y q funciones con levantamientos $\mathbb{A}$-algebrizables Q siendo Q y $a, b \in \mathbb{A}$ constantes. Las funciones $S = aP + bQ$ y $T = PQ$ son $\mathbb{A}$-algebrizables y satisfacen:

$$\begin{aligned} S(te) &= aP(te) + bQ(te) = ap(t) + bq(t), \\ T(te) &= P(te)Q(te) = p(t)q(t). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Por lo tanto, S y T son levantamientos algebrizables de $ap + bq$ y pq, respectivamente. Si p tiene un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable P y Q es una función que se puede diferenciar con $Im(P) \subset Dom(Q)$, entonces $Q \circ P(te) = Q \circ p(t)$. Por lo tanto, $Q \circ P$ es un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable de $Q \circ P$.

□

Corolario 5.2.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra. Luego, las siguientes funciones admiten levantamientos $\mathbb{A}$-algebrizables: funciones polinomiales, funciones racionales, funciones trigonométricas, funciones exponenciales, y todas aquellas funciones que pueden definirse por combinaciones lineales, productos, cocientes y composiciones de funciones que admiten levantamientos algebrizables.*

Cada función $t \mapsto (h(t), k(t))$ con componentes polinomiales $h(t)$ y $k(t)$ tiene un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable. La siguiente proposición se dará una clase más amplia de estas funciones.

Proposición 5.2.2 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra y cualquier función $t \mapsto (h(t), k(t))$ con componentes de la forma:*

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{a_m}{t^m} + \frac{a_{m-1}}{t^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \\ k(t) &= \frac{b_m}{t^m} + \frac{b_{m-1}}{t^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{-1}}{t} + b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

$m, n \in \mathbb{N}$, tiene un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable, que es el siguiente

$$\tau \mapsto (a_m, b_m)\frac{1}{\tau^m} + \cdots + (a_{-1}, b_{-1})\frac{1}{\tau} + (a_0, b_0) + (a_1, b_1)\tau + \cdots + (a_n, b_n)\tau^n. \tag{5.2.3}$$

Prueba.
Cosideremos Q dado por la expresión anterior, entonces

$$(a_k, b_k)(te)^k = (a_k, b_k)t^k e = (a_k t^k, b_k t^k) \tag{5.2.4}$$

se cumple para $k = -m, \dots, n$ entonces $Q(te) = (h(t), q(t))$, donde e es la unidad de $\mathbb{A}$. Por lo tanto, Q es un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable de $t \mapsto (h(t), k(t))$.

□

En particular, cada función $p = (p_1, p_2) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con componentes cuadráticos $p_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y $p_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ admite el levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable $P(\tau) = (a_0, b_0) + (a_1, b_1)\tau + (a_2, b_2)\tau^2$.

5.3. Levantamientos algebrizables de sistemas planares

Las soluciones de cada sistema planar algebrizable se pueden encontrar resolviendo una algebrización del sistema, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 5.3.1 *Si (5.0.2) es una algebrización de (5.0.1) y $\xi(\tau)$ una solución de (5.0.2), entonces $(x(t), y(t)) = \xi(te)$ es una solución de (5.0.1), donde e denota la unidad de la álgebra correspondiente.*

Prueba.
Sea ξ una solución de (5.0.2). La derivada de $(x(t), y(t)) = \xi(te)$ con respecto a t está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt}\xi(te) = \left[\frac{d\xi(\tau,\xi)}{d\tau}\Big|_{\tau=(te)} \frac{d\tau}{dt}\right] \\
&= H(\tau, \xi(\tau))\Big|_{\tau=(te)} e = H(te, \xi(te)) \\
&= (f(t, x(t), y(t)), g(t, x(t), y(t))).
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Por lo tanto, $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema (5.0.1).

□

Como consecuencia de la siguiente proposición, la familia de todas las funciones $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con levantamiento algebrizables define una álgebra de dimensión infinita.

Proposición 5.3.2 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con unidad e. En las siguientes afirmaciones, F y G denotan funciones definidas en conjuntos abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y tienen valores en $\mathbb{R}^2$.*

(a) $F(t, x, y) = c$ admite el levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable $H(\tau, \xi) = c$.

(b) $F(t, x, y) = te$ admite el levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable $H(\tau, \xi) = \tau$.

(c) $F(t, x, y) = (x, y)$ admite el levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable $H(\tau, \xi) = \xi$.

(d) Si F y G admiten levantamientos $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciables con H_F y H_G respectivamente, además, a, b son constantes en $\mathbb{A}$, entonces $aH_F + bH_G$ y FG (todos los productos con respecto a $\mathbb{A}$) tienen levantamientos $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciables con $aH_F + bH_G$ y $H_F H_G$, respectivamente.

(e) Cada función E que tiene la forma $E(t,x,y) = F(t, G(t,x,y))$, donde F y G admiten levantamientos $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciables H_F y H_G, admite un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable H_E dado por $H_E(\tau,\xi) = H_F(\tau, H_G(\tau,\xi))$.

(f) Cada función E que tiene la forma $E(t,x,y) = F(t, P(x,y))$, donde F tiene un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable con H_F y P es una función $\mathbb{A}$-diferenciable, admite un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable $H_E(\tau,\xi) = H_F(\tau, P(\xi))$.

Prueba.
Las pruebas de (a), (b) y (c) son triviales. Sean H_F y H_G los levantamientos algebrizables de F y G y luego $H_F + H_G$, $H_F H_G$, y H_F/H_G son $\mathbb{A}$-algebrizable y

(i) $(aH_F + bH_G)(te,x,y) = aH_F(te,x,y) + bH_G(te,x,y) = aF(t,x,y) + bG(t,x,y)$,

(ii) $(H_F H_G)(te,x,y) = H_F(te,x,y)H_G(te,x,y) = F(t,x,y)G(t,x,y)$,

(iii) $H_E(te,x,y) = H_F(te, H_G(te,x,y)) = F(t, G(t,x,y))$,

(iv) $H_E(te,x,y) = H_F(te, P(e,y)) = F(t, P(x,y))$.

Así la prueba está completa.

□

Corolario 5.3.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra. Las siguientes funciones admiten levantamientos $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciables: funciones polinomiales, funciones racionales, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y todas aquellas funciones que pueden definirse mediante combinaciones lineales, productos, cocientes y composiciones de funciones que admiten $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-levantamientos diferenciables.*

Dada una función $F(t,x,y) = (f(t,x,y), g(t,x,y))$, donde f, g son funciones polinomiales de las variables x, y, el objetivo del escrito es determinar si F tiene un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable. Como consecuencia del siguiente teorema, cada función F que es polinomio de las variables t, x e y, tiene un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable cuando $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable para todo t.

Teorema 5.3.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con unidad e y $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F = (f,g)$, donde $f = \sum_{k=0}^m f_k$, $g = \sum_{k=0}^m g_k$, y $f_k(t,x,y)$, $g_k(t,x,y)$ son polinomios homogéneos de grado k en las variables x, y y $\Omega = I \times \mathbb{R}^2$ para un intervalo abierto I. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) F tiene un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable H.

(b) El mapeo $(x,y) \mapsto F(t,x,y)$ es $\mathbb{A}$-algebrizable para todo $t \in I$ y las funciones h_k dadas por $h_k(t) = (f_k(t,e), g_k(t,e))$ tienen levantamientos $\mathbb{A}$-algebrizables, para $k = 0, 1, \ldots, m$.

(c) $H(\tau,\xi) = \sum_{k=0}^m H_k(\tau)\xi^k$ es un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable de F, donde $H_k(\tau)$ son levantamientos $\mathbb{A}$-algebrizables de $h_k(t) = (f_k(t,e), g_k(t,e))$.

Prueba.
Obviamente (a) implica (b) y (c) implica (a). Ahora mostraremos que (b) implica (c). Supongamos que $f(t,x,y)$ y $g(t,x,y)$ son polinomios homogéneos $f(t,x,y) = \sum_{k=0}^n p_k(t)x^k y^{n-k}$ y $g(t,x,y) =$

$\sum_{k=0}^{n} q_k(t)x^k y^{n-k}$ de las variables x, y definidas en el conjunto $\Omega = I \times \mathbb{R}^2$ anteriormente. Tomando las derivadas parciales de F con respecto a x e y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(t,x,y)\\
&\qquad = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} kp_k(t)x^{k-1}y^{n-k} & \Sigma_{k=1}^{n}(n-k+1)p_{k-1}(t)x^{k-1}y^{n-k} \\ \Sigma_{k=1}^{n} kq_k(t)x^{k-1}y^{n-k} & \Sigma_{k=1}^{n}(n-k+1)q_{k-1}(t)x^{k-1}y^{n-k} \end{pmatrix}\\
&\qquad = \begin{pmatrix} \Sigma_{k=1}^{n} x^{k-1}y^{n-k}kp_k(t) & \Sigma_{k=1}^{n} x^{k-1}y^{n-k}(n-k+1)p_{k-1}(t) \\ \Sigma_{k=1}^{n} x^{k-1}y^{n-k}kq_k(t) & \Sigma_{k=1}^{n} x^{k-1}y^{n-k}(n-k+1)q_{k-1}(t) \end{pmatrix}\\
&\qquad = \Sigma_{k=1}^{n} x^{k-1}y^{n-k} \begin{pmatrix} kp_k(t) & (n-k+1)p_{k-1}(t) \\ kq_k(t) & (n-k+1)q_{k-1}(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Sea R la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$. Dado que $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable para todo $t \in I$, entonces $(\partial(f,g)/\partial(x,y))(t,x,y) \in R(\mathbb{A})$ para todo $(t,x,y) \in \Omega$. Así que

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(t,0,1) = \begin{pmatrix} p_1(t) & np_0(t) \\ q_1(t) & nq_0(t) \end{pmatrix} \in R(\mathbb{A}), \tag{5.3.3}$$

para todo $t \in I$ y luego

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(t,x,y) - y^{n-1} \begin{pmatrix} p_1(t) & np_0(t) \\ q_1(t) & nq_0(t) \end{pmatrix} = \Sigma_{k=2}^{n} x^{k-1}y^{n-k} \begin{pmatrix} kp_k(t) & (n-k+1)p_{k-1}(t) \\ kq_k(t) & (n-k+1)q_{k-1}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.3.4}$$

está en $R(\mathbb{A})$ para todo $(t,x,y) \in \Omega$. Si $x(s) = 1/S$ y $y(s) = \sqrt[(n-2)]{s}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} &\left[\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(t,x(s),y(s)) - [y(s)]^{n-1} \begin{pmatrix} p_1(t) & np_0(t) \\ q_1(t) & nq_0(t) \end{pmatrix} \right]\\
&= \begin{pmatrix} p_2(t) & (n-1)p_1(t) \\ q_2(t) & (n-1)q_1(t) \end{pmatrix} \in R(\mathbb{A}).
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Siguiendo la misma idea, para $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{pmatrix} kp_k(t) & (n-k+1)p_{k-1}(t) \\ kq_k(t) & (n-k+1)q_{k-1}(t) \end{pmatrix} \in R(\mathbb{A}). \tag{5.3.6}$$

Si $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable para una álgebra $\mathbb{A}$ con producto de Tipo (I) (dado en la Sección 2), entonces

$$\begin{aligned}
kp_k + akq_k - (n-k+1)q_{k-1} &= 0,\\
bkq_k + (n-k+1)p_{k-1} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

o equivalentemente

$$(q_{k-1}, p_{k-1}) = \left(\frac{kp_k + akq_k}{n-k+1}, -\frac{bkq_k}{n-k+1} \right), \tag{5.3.8}$$

para $k = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, las funciones p_k, q_k están determinadas por p_n, q_n para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Dado que $(f(t,1,0), g(t,1,0)) = (p_n(t), q_n(t))$, entonces $(f(t,x,y), g(t,x,y)) = (p_n(t), q_n(t))(x,y)^n$. Por lo tanto, F tiene un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable $H(\tau,\xi) = H_n(\tau)\xi^n$, donde $H_n(\tau)$ es un

levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable de $t \mapsto (p_n(t), q_n(t))$.
Si $(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable para una álgebra $\mathbb{A}$ con producto de Tipo (II) (dado en la Sección 2), entonces

$$\begin{aligned} kp_k + a(n-k+1)p_{k-1} - (n-k+1)q_{k-1} &= 0, \\ kq_k &= 0, \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

o equivalentemente

$$(p_k, q_k) = \left(-\frac{a(n-k+1)p_{k-1}}{k}, 0 \right), \tag{5.3.10}$$

para $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto, $q_k = 0$ y p_k es determinada por p_0, para $k = 1, \dots, n$. Dado que $(f(t, 0, 1), g(t, 0, 1)) = (p_0(t), q_0(t))$, entonces $(f(t, x, y), g(t, x, y)) = (p_0(t), q_0(t))(x, y)^n$. Por lo tanto, F tiene un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable $H(\tau, \xi) = H_n(\tau)\xi^n$, donde $H_n(\tau)$ es un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable de $t \mapsto (p_0(t), q_0(t))$.
Si $(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable para una álgebra $\mathbb{A}$ con producto de Tipo (III) (dado en la Sección 2), entonces $(n-k+1)p_{k-1} = 0$ y $kq_k = 0$; es decir, $p_{k-1} = 0$, $q_k = 0$, para $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto, $q_k = 0$ y p_k se determina por p_0, para $k = 1, \dots, n$. Dado que $(f(t, 0, 1), g(t, 0, 1)) = (p_n(t), q_0(t))$, entonces $(f(t, x, y), g(t, x, y)) = (p_n(t), q_0(t))(x, y)^n$.
Por lo tanto, F tiene un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable $H(\tau, \xi) = H_n(\tau)\xi^n$, donde $H_n(\tau)$ es un levantamiento $\mathbb{A}$-algebrizable de $t \mapsto (p_n(t), q_n(t))$. Por lo tanto, si f y g son polinomios homogéneos de grado n en las variables x e y, entonces $H(\tau, \xi) = H_n(\tau)\xi^n$ en cada uno de los casos de álgebras definidas por productos de Tipos (I), (II), y (III) dados en la Sección 2. Dado que una función polinomial $(t, x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ en las variables x e y pueden ser visto como la adición finita de polinomios homogéneos en las variables x e y, por (d) de la Proposición 5.3.2, (b) implica (c).

□

Ejemplo 5.3.1 *Consideremos el sistema planar (5.0.6) entonces*

$$F(t, x, y) = \left(-\frac{1}{t^3} - \frac{2x}{t} + tx^2 - ty^2, -\frac{2y}{t} + 2txy + ty^2 \right). \tag{5.3.11}$$

La Jacobiana $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}$ está dada por

$$\frac{\partial F(t, x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} + 2tx & -2ty \\ 2ty & -\frac{2}{t} + 2tx + 2ty \end{pmatrix}. \tag{5.3.12}$$

Por lo tanto, $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}$ es ortogonal a las matrices

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

para todos (x, y); es decir, $\langle \partial F/\partial(x, y), B_i \rangle = 0$ para $i = 1, 2$. El mapa $(x, y) \mapsto F(t, x, y)$ es $\mathbb{A}$-algebrizable para una álgebra de Tipo (I) con constantes $a = 1$ y $b = 1$; ver Sección 5.1. La función se puede escribir como

$$F(t, x, y) = \left(-\frac{1}{t^3}, 0 \right) + \left(-\frac{2}{t}x, -\frac{2}{t}y \right) + (tx^2 - ty^2, ty^2). \tag{5.3.14}$$

Por lo tanto, las funciones p_i y q_i del teorema (5.3.1) están dadas por $p_0(t,x,y) = -1/t^3$, $q_0(t,x,y) = 0$, $p_1(t,x,y) = -(2/t)x$, $q_1(t,x,y) = -(2/t)y$, $p_2(t,x,y) = tx^2 - ty^2$, y $q_2(t,x,y) = ty^2$.

La unidad e de $\mathbb{A}$ es $e = (1,0)$ y luego $h_0(t) = (-1/t^3, 0)$, $h_1(t) = (-2/t, 0)$, y $h_2(t) = (t,0)$ tienen levantamientos $\mathbb{A}$-algebrizables $H_0(\tau) = -1/\tau^3$, $H_1(\tau) = -2/\tau$ y $H_2(\tau) = \tau$, respectivamente.
La forma de $F(t,xe) = (-1/t^3 - (2/t)x - tx^2)e$, H debe ser

$$H(\tau,\xi) = -\frac{1}{\tau^3} - \frac{2}{\tau}\xi + \tau\xi^2. \tag{5.3.15}$$

5.4. El caso de los polinomios de segundo grado en las variables t, x y y

Si f y g en (5.0.1) son polinomios cuadráticos en tres variables t, x, y y, además, $\mathbb{A}$ es una álgebra con respecto al mapeo $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable, se mostrará que el levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable H de $F = (f,g)$ es un polinomio en dos variables de segundo grado. En estas condiciones (5.0.1) tiene una algebrización que es una ecuación de Riccati sobre $\mathbb{A}$ que tiene la forma

$$\frac{d\xi}{d\tau} = P(\tau) + Q(\tau)\xi + R(\tau)\xi^2, \tag{5.4.1}$$

Donde P, Q y R son polinomios en $\mathbb{A}$ de grado dos, uno y cero respectivamente.
Consideremos el sistema (5.0.1) donde $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ son polinomios de segundo grado con tres variables t, x y y es decir

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= a_0 + a_1 t + a_2 x + a_3 y + a_4 t^2 + a_5 tx + a_6 ty + a_7 x^2 + a_8 xy + a_9 y^2, \\ g(t,x,y) &= b_0 + b_1 t + b_2 x + b_3 y + b_4 t^2 + b_5 tx + b_6 ty + b_7 x^2 + b_8 xy + b_9 y^2, \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Todos los campos vectoriales cuadráticos que son algebrizables con respecto a la álgebra con producto Tipo (I) tienen la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_0 + (B_2 - aB_1)x - bB_1 y + \left(\frac{1}{2}B_4 - aB_3\right)x^2 - 2bB_3 xy - \frac{1}{2}bB_4 y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 x^2 + B_4 xy + \left(\frac{1}{2}aB_4 - bB_3\right)y^2, \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

donde a, b, A_0, B_0, $B_1, \ldots, B_5$ son constantes reales; ver la Sección 5.1.2. La algebrizabilidad de $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ con respecto a la álgebra con producto de Tipo (I) se puede verificar, considerando t como una constante. Los siguientes teoremas dan las condiciones que caracterizan la capacidad de algebrizabilidad de sistemas planares como (5.0.1) cuando f y g son polinomios cuadráticos. La algebrizabilidad de los sistemas cuadráticos no autónomos con respecto a la álgebra con producto de Tipo (I) se proporciona en el siguiente teorema.

Teorema 5.4.1 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con un producto de Tipo* (I) *definido por las constantes a y b y f, g los polinomios (5.4.2). Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) El mapeo $F : (x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable.

(2) Las funciones f y g tienen la forma

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= a_0 + a_1 t + (b_3 - ab_2)x - bb_2 y + a_4 t^2 + (b_6 - ab_5)tx - bb_5 ty \\ &\quad + \left(\frac{b_8}{2} - ab_7\right) x^2 - 2bb_7 xy - \frac{bb_8}{2} y^2, \\ g(t,x,y) &= b_0 + b_1 t + b_2 x + b_3 y + b_4 t^2 + b_5 tx + b_6 ty + b_7 x^2 + b_8 xy \\ &\quad + \left(\frac{ab_8}{2} - bb_7\right) y^2. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

(3) La función $H : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ de las variables $\tau = (t,s)$ y $\xi = (x,y)$ definida por

$$H(\tau,\xi) = A_0 + A_1\tau + A_2\xi + A_3\tau^2 + A_4\tau\xi + A_5\xi^2, \tag{5.4.5}$$

es un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable de F, donde

$$\begin{aligned} A_0 &= (a_0, b_0), \\ A_1 &= (a_1, b_1), \\ A_2 &= (b_3 - ab_2, b_2), \\ A_3 &= (a_4, b_4), \\ A_4 &= (b_6 - ab_5, b_5), \\ A_5 &= \left(\frac{b_8}{2} - ab_7, b_7\right). \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Prueba.
Escribimos $g(t,x,y) = B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 x^2 + B_4 xy + B_5 y^2$ con

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0 + b_1 t + b_4 t^2, \\ B_1 &= b_2 + b_5 t, \\ B_2 &= b_3 + b_6 t, \\ B_3 &= b_7, \\ B_4 &= b_8, \\ B_5 &= b_9. \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

La función $(x,y) \to (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable si y sólo si

$$f(t,x,y) = A_0 + (B_2 - aB_1)x - bB_1 y + \left(\frac{1}{2}B_4 - aB_3\right) x^2 - 2bB_3 xy - \frac{1}{2} bB_4 y^2, \tag{5.4.8}$$

donde $A_0 = a_0 + a_1 t + a_4 t^2$ y $b_9 = ab_8/2 - bb_7$. Por lo tanto, las afirmaciones (1) y (2) son equivalentes. La función H es polinomial en las variables τ y ξ de $\mathbb{A}$; por lo tanto, H es $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable. H satisface $H(te,x,y) = (f(t,x,y), g(t,x,y))$, donde e es la unidad de $\mathbb{A}$. Así que, H es un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable. Por lo tanto, la afirmación (2) implica la afirmación (3).
Como H es $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable y $F(t,x,y) = H(te,x,y)$, entonces $(x,y) \mapsto F(t,x,y)$ es $\mathbb{A}$-algebrizable para todo t. Por lo tanto, la afirmación (3) implica la afirmación (1).

$\square$

Todos los campos de vectores cuadráticos que son algebrizables con respecto a la álgebra con producto de Tipo (II) tienen la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0 + A_1 x + A_2 y - \frac{1}{2} a A_3 x^2 + A_3 xy + A_4 y^2,\\ \dot{y} &= B_0 + (A_1 + aA_2) y + \left(\frac{1}{2} A_3 + aA_4\right) y^2,\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

donde $a,\ A_0, \ldots, A_4,\ B_0$ son constantes reales; ver la Sección 5.1.2. La algebrizabilidad de $(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ con respecto a la álgebra con producto de Tipo (II) se puede verificar, considerando t como una constante.
La algebrizabilidad de los sistemas cuadráticos no autónomos con respecto a la álgebra con producto de Tipo (II) se da en el siguiente teorema.

Teorema 5.4.2 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con un producto de Tipo* (II) *definido por la constante a y sean f, g los polinomios (5.4.2). Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) El mapeo $F(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable.

(2) Las funciones f y g tienen la forma

$$\begin{aligned}f(t, x, y) &= a_0 + a_1 t + a_2 x + a_3 y + a_4 t^2 + a_5 tx + a_6 ty - \frac{1}{2} a a_8 xy + a_9 y^2,\\ g(t, x, y) &= b_0 + b_1 t + (a_2 + aa_3) y + b_4 t^2 + (a_5 + aa_6) ty + \left(\frac{a_8}{2} + aa_9\right) y^2.\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

(3) La función $H : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ de las variables $\tau = (t, s)$ y $\xi = (x, y)$ definida por

$$H(\tau, \xi) = A_0 + A_1 \tau + A_2 \xi + A_3 \tau^2 + A_4 \tau \xi + A_5 \xi^2, \tag{5.4.11}$$

es un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable de F, donde

$$\begin{aligned}A_0 &= (a_0, b_0),\\ A_1 &= (a_1, b_1),\\ A_2 &= (a_3, a_2 + aa_3),\\ A_3 &= (a_4, b_4),\\ A_4 &= (a_6, a_5 + aa_6),\\ A_5 &= \left(a_9, \frac{a_8}{2} + aa_9\right).\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

Prueba.
Escribimos $f(t, x, y) = A_0 + A_1 x + A_2 y - (1/2) a A_3 x^2 + A_3 xy + A_4 y^2$ con

$$\begin{aligned}A_0 &= a_0 + a_1 t + a_4 t^2,\\ A_1 &= a_2 + a_5 t,\\ A_2 &= a_3 + a_6 t,\\ A_3 &= a_8,\\ A_4 &= a_9.\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

y el mapeo $(x,y) \to (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable si y sólo si

$$g(t,x,y) = B_0 + (A_1 + aA_2)y + \left(\frac{1}{2}A_3 + aA_4\right) y^2, \tag{5.4.14}$$

donde $B_0 = b_0 + b_1 t + b_4 t^2$. Por lo que, las afirmaciones (1) y (2) son equivalentes. El resto de la prueba es similar a la del Teorema 5.4.1. Todos los campos de vectores cuadráticos que son diferenciables con respecto a la álgebra con producto de Tipo (III) tienen la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2, \\ \dot{y} &= B_0 + B_1 y + B_2 y^2, \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

donde A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2 son constantes reales; ver la Sección 5.1.2. La algebrizabilidad de $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ con respecto a la álgebra con producto de Tipo (III) se puede verificar, considerando t como una constante.
La algebrizabilidad de los sistemas cuadráticos no autónomos con respecto a la álgebra con producto de Tipo (III) se da en el siguiente teorema.

Teorema 5.4.3 *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con un producto de Tipo* (III) *definido por la constante a y sean f, g los polinomios (5.4.2). Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) El mapeo $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable.

(2) Las funciones f y g tienen la forma

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= a_0 + a_1 t + a_2 x + a_4 t^2 + a_5 tx + a_7 x^2, \\ g(t,x,y) &= b_0 + b_1 t + b_3 y + b_4 t^2 + b_6 ty + b_9 y^2. \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

(3) La función $H : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ de las variables $\tau = (t,s)$ y $\xi = (x,y)$ definida por

$$H(\tau,\xi) = A_0 + A_1\tau + A_2\xi + A_3\tau^2 + A_4\tau\xi + A_5\xi^2, \tag{5.4.17}$$

es un levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable de F, donde

$$\begin{aligned} A_0 &= (a_0, b_0), \\ A_1 &= (a_1, b_1), \\ A_2 &= (a_2, b_3), \\ A_3 &= (a_4, b_4), \\ A_4 &= (a_5, b_6), \\ A_5 &= (a_7, b_9). \end{aligned}$$

Prueba.
La función $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable si y sólo si

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= a_0 + a_1 t + a_2 x + a_4 t^2 + a_5 tx + a_7 x^2, \\ g(t,x,y) &= b_0 + b_1 t + b_3 y + b_4 t^2 + b_6 ty + b_9 y^2. \end{aligned} \tag{5.4.18}$$

Por lo tanto, la primer y segunda afirmación son equivalentes. La función H dada por $H(\tau,\xi) = A_0 + A_1\tau + A_2\xi + A_3\tau^2 + A_4\tau\xi + A_5\xi^2$, donde $A_0 = (a_0, b_0)$, $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_3)$, $A_3 = (a_4, b_4)$,

$A_4 = (a_5, b_6)$, $A_5 = (a_7, b_9)$, $\tau = (r, s)$ y $\xi = (x, y)$ satisface $H(te, x, y) = (f(t, x, y), g(t, x, y))$. Por lo tanto, la segunda y tercera afirmación son equivalentes.

□

Según los teoremas 5.4.1, 5.4.2 y 5.4.3, una algebrización de sistemas cuadráticos es una ecuación de Riccati sobre una álgebra $d\xi/d\tau = P(\tau) + Q(\tau)\xi + R(\tau)\xi^2$, donde $P(\tau) = A_0 + A_1\tau + A_3\tau^2$, $Q(\tau) = A_2 + A_4\tau$ y $R(\tau) = A_5$. En el siguiente ejemplo se da un sistema cuadrático no autónomo para el cual se encuentra una algebrización usando el Teorema 5.4.1.

Ejemplo 5.4.1 *Consideremos el sistema (5.0.1) dado por*

$$\begin{aligned} f(t, x, y) &= 1 + 7t - x - 3y + 5t^2 - tx - 3ty - 6xy - 6y^2, \\ g(t, x, y) &= 1 + t + x + y + t^2 + tx + ty + x^2 + 4xy + y^2. \end{aligned} \tag{5.4.19}$$

Las matrices

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.4.20}$$

satisface $\langle B_i, \partial(f, g)/\partial(x, y)\rangle = 0$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto, $F : (x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-algebrizable para una álgebra $\mathbb{A}$ con producto de Tipo (I) definido por las constantes $a = 2$ y $b = 3$. Se cumplen las condiciones del Teorema 5.4.1; entonces el levantamiento $\mathscr{H}(\mathbb{A})$-diferenciable H de F puede escribirse como

$$H(\tau, \xi) = A_0 + A_1\tau + A_2\xi + A_3\tau^2 + A_4\tau\xi + A_5\xi^2, \tag{5.4.21}$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= (1, 1), \\ A_1 &= (7, 1), \\ A_2 &= (-1, 1), \\ A_3 &= (5, 1), \\ A_4 &= (-1, 1), \\ A_5 &= (0, 1). \end{aligned}$$

Conclusiones

En este trabajo se analizaron los artículos de A. Alvarez-Parrilla [4] y de Alcorta-García [5] referentes a la A-algebrización, en los cuales propusieron el método de algebrización de ecuaciones diferenciales, el cual se utiliza para encontrar la solución de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales.

Gracias a las herramientas obtenidas en los artículos mencionados, se analizaron algunos sistemas de ecuaciones diferenciales y se lograron encontrar las soluciones para algunos sistemas y para otros no, pero de aquellas en que sí se logró, sí se obtuvieron todas las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

Siendo así, se concluye que este método propuesto por A. Alvarez-Parrilla y de Alcorta-García, no se puede generalizar para encontrar la solución de todos los sistemas de ecuaciones diferenciales por la complejidad de las mismas; sin embargo dada su gran efectividad para resolver algunos de los sistemas, es menester seguir en el estudio de este método, ya que dado que muchos de los problemas físicos, matemáticos y fenómenos naturales se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales, vale la pena seguir utilizando éste método para su solución, aunque no pueda resolver todos.

Como perspectiva se puede decir que se puede hacer un estudio sobre la utilización de este método en geometría diferencial. Asimismo, se puede explorar su utilidad en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

Bibliografía

[1] A. Garijo, A. Gasull and X. Jarque, *"Local and global phase portrait of equation $\dot{a} = f(z)$"*, Discrete and Continuous Dynamical Systems A, vol. 17, no. 2, pp. 309-329, 2007.

[2] A. Alvarez-Parrilla, A. Gómez-Arciga, and A. Riesgo-Tirado, *"Newton vector fields on the plane and on the torus"*, Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 54, no. 5, pp. 440-461, 2009.

[3] A. Alvarez-Parrilla, J. Mucino-Raymundo, S. Solorza-Calderon and C. Yee-Romero, *Complex Analytic Vector Fields: Geometry*, Dynamics and Visualization, 2009.

[4] A. Alvarez-Parrilla, M. E. Frías-Armenta, E. López-González, and C. Yee-Romero, *"On solving systems of autonomous ordinary differential equations by reduction to a variable of an algebra"*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 2012, Article ID 753916, 21 pages, 2012. View at Publisher. View at Google Scholar. View at Scopus.

[5] Alcorta-García, M. A.; Frías-Armenta, M. E.; Grimaldo-Reyna, M. E, and López-González, E., *"Algebrization of nonautonomous differential equation"*, 10 pages, DOI:10.1155/2015/632150 Journal of Applied Mathematics

[6] Ávila, F.; Loeza, L.; López, E., *"A New Approach to Find the Solution of Sistems of Differential Equation"*, *II* International Congress of Enginering a Technology, Ciudad Juárez, Chihuahua, México (2009), pp.255 – 262.

[7] C. C. MacDuffee, *Modules and ideals in a Frobenius algebra*, Monastshfte für Mathematik und Physik, Vol. 48(1939), pp. 293-313.

[8] E. J. Wilczynski, *"Review: Abraham Cohen, an introduction to the lie theory of one-parameter groups with applications to the solution of differential equations"*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 18, no. 10, pp. 514–515, 1912,

[9] E. K. Blum, *"A theory of analytic functions in Banach algebra"*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 78, no. 2, pp. 343-370, 1955.

[10] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[11] E. López-González, *"Differential equations over algebras"*, Advances and Applications in Mathematical Sciences, vol. 8, no. 2, pp. 189–214, 2011.

[12] E. R. Lorch, *"The theory of analytic functions in normed Abelian vector rings"*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 54, pp. 414-425, 1943.

[13] Elifalet López González, *"Differential Equations over Algebras"*, Advances and Applications in Mathematical Sciences, Vol. 8, Issue 2 (2011), pp. 189-214.

[14] Elifalet López - Luis Loeza, *Diferenciabilidad y ecuaciones diferenciales sobre álgebras*, Universidad Autónoma de Ciudad de Juarez, Instituto de Ingeniería y Tecnología, 2012.

[15] I. A. García and M. Grau, *"A Survey on the inverse integrating factor"*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, vol. 9, no. 1-2, pp. 115–166, 2010.

[16] I. N. Herstein, *ÁLGEBRA MODERNA*, trillas, México, 2a ed., 1990 (reimp. 2008).

[17] J. A. Ward, *"A theory of analytic functions in linear associative algebra"*, Duke Mathematical Journal, vol. 7, no. 1, pp. 233-248, 1940. View at Publisher. View at Google Scholar.

[18] J. A. Ward, *From generalized Cauchy-Riemann equations to linear algebra*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 4, no. 3, pp. 456-461, 1953. View at Publisher · View at Google Scholar.

[19] J. M. Page, *Ordinary Differential Equations with an Introduction to Liés Theory or the Group of One Parameter*, Macmillan Publishers, London, UK, 1897.

[20] John B. Fraileigh, *ALGEBRA ABSTRACTA*, ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA, S. A. de C. V., Wilmington, Delaware, E. U. A., 3a ed., 12 de abril de 1989.

[21] K. Hockett and S. Ramamurti, *"Dynamics near the essential singularity of a class of entire vector field"*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 345, no. 2, pp. 693-703, 1994.

[22] K. I. T. Al-Dosary, *"Inverse integrating factor for classes of planar differential systems"*, International Journal of Mathematical Analysis, vol. 4, no. 29–32, pp. 1433–1446, 2010.

[23] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 3rd edition, 1979.

[24] Marsden, J.; Hoffman, M., *"Análisis clásico elemental"*, Addison-Wesley, 2a. ed. (1998).

[25] P. W. Ketchum, *"Analytic functions of hypercomplex variables"*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 30, no. 4, pp. 641-641, 1928. View at Publisher · View at Google Scholar.

[26] R. A. Steinhour, *The truth about lie symmetries: solving differential equations with symmetry methods [Senior Independent Study Theses]*, 2013, http://openworks.wooster.edu/independentstudy/949.

[27] R. D. Wagner, *"The generalized Laplace equations in a function theory for commutative algebras"*, Duke Mathematical Journal, vol. 15, pp. 455-461, 1948.

[28] R. E. Greene and S. G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, vol. 40 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2nd edition, 2002.

[29] R. S. Pierce, *Associative Algebras*, Springer, Berlin, Germany, 1982.

[30] S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, 1992.

[31] S. Smale, *"A convergent process of price adjustment and global Newton methods"*, Journal of Mathematical Economics, vol. 3, no. 2, pp. 107-120, 1976.

[32] Spivack, M, *"Calculus on Manifolds"*, 5^{th} Edition, Westview Press, January 21, 1971.

[33] Stanley I. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, Interamericana Editores S. A. de C. V., 6a ed.,2007.

[34] T. Newton and T. Lofaro, *"On using flows to visualize functions of a complex variable"*, Mathematics Magazine, vol. 69, no. 1, pp. 28-34, 1996.

[35] W. C. Brown, *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, New York, NY, USA, 1993.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00196
Matrícula: 2173802378

El Método de Algebrización de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.

ELEAZAR LOPEZ FLORES
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:30 horas del día 8 del mes de enero del año 2020 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ
DR. MARTIN EDUARDO FRIAS ARMENTA
DR. ELIFALET LOPEZ GONZALEZ
DR. JOSE HECTOR MORALES BARCENAS

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: ELEAZAR LOPEZ FLORES

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

VOCAL

M. Eduardo Frías A.

DR. MARTIN EDUARDO FRIAS ARMENTA

VOCAL

Elifalet López Glz.

DR. ELIFALET LOPEZ GONZALEZ

SECRETARIO

DR. JOSE HECTOR MORALES BARCENAS