

**Universidad Autónoma Metropolitana**  
**unidad Iztapalapa**

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

*El problema restringido de 3 cuerpos  
sobre el círculo unitario.*

Tesis que presenta el alumno:

**Luis Franco Pérez**

para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas).

**Asesor: Dr. Ernesto Pérez Chavela**

Junio de 2010



# Agradecimientos.

A mis papás, a quienes les debo todo lo que he logrado hasta el día de hoy, gracias a su apoyo, presencia y ejemplo. A mi hermano (clon), por su apoyo incondicional estando cerca o lejos, en la salud y en la enfermedad. A mi abuelita, por su fuerza y motivación para hacer posible cada meta trazada. A toda mi familia, porque no hay mejor cobijo para crecer y vivir que una gran familia llena de valores, fuerza y alegría. Al Dr. Ernesto, mi asesor, por su enseñanza y guía a lo largo de más de 7 años. A mis amigos, por ser cómplices de éxitos, dificultades, aventuras, tropiezos, etc. Especialmente a Iris Nat por ser mi gran amiga a quien quiero profundamente, a Edgar por haber sido y volver a ser mi amigo aunque lo deje fuera de su casa, a Tats por estar conmigo hasta en la sala equivocada en el cine, a Marisol por su amistad incondicional y la comida tan deliciosa, a Verónica por apoyarme cada minuto y por cada café, a Iris Iddaly por que su amistad y esas jaleas de Durango son lo mejor, a Ismael por ser un buen matemático y diseñador y a Alex por regalarme una amistad increíble. A cada uno de los sinodales, Dr. Ernesto Lacomba, Dr. Jaime, Dr. Jesús, Dr. Edgardo y Dr. Florín, por sus valiosos comentarios y correcciones que ayudaron a mejorar esta tesis y de quienes aprendí un poco más sobre el quehacer matemático. A la UAM, mi casa de estudios. A CONACyT por el apoyo económico recibido a lo largo de los estudios de posgrado. A USTEDES, MUCHAS GRACIAS.

*Creo más en las virtudes firmes de los hombres,  
que en las mentiras escritas de los principios teóricos.  
(basado en *El Hombre Mediocre* de José Ingenieros).*



# Resumen.

Esta tesis es un estudio del problema restringido de 3 cuerpos constreñido al círculo unitario.

Se analiza el problema de 2 cuerpos constreñido al círculo unitario. Se muestran la dinámica global del problema y las soluciones explícitas determinadas para todo tiempo, después de haber regularizado simplécticamente las ecuaciones de movimiento respectivas. Se expone una forma general de regularizar todas las singularidades debidas a colisiones binarias en problemas restringidos de 3 cuerpos constreñidos a una recta o a un círculo. Esta regularización es simpléctica, aún cuando las singularidades no son fijas. Se divide el problema restringido de 3 cuerpos en el círculo unitario en cuatro casos, según las soluciones que sigan los cuerpos primarios en el problema respectivo de 2 cuerpos. Así se establecen los subproblemas elíptico, parabólico, hiperbólico restringido de 3 cuerpos en el círculo unitario y el caso de dos centros fijos. Se muestra la dinámica global para el subproblema de dos centros fijos, para cualquier valor de las masas en los cuerpos primarios. Se describe la dinámica global para los subproblemas elíptico e hiperbólico restringidos, para el caso particular en que los cuerpos primarios tienen la misma masa. Se describen soluciones periódicas para el subproblema elíptico restringido cuando los cuerpos primarios tienen la misma masa, indicando el período.



# Abstract.

This thesis talks about the restricted 3–body problem constrained to unit circle.

The 2–body problem constrained to unit circle is studied. By regularizing the respective equations of motion, the global dynamics is shown and the explicit solutions for all time are given. A general form of regularization for all singularities due to binary collisions in restricted 3–body problems, constrained to either a straight line or a circle, is shown. This regularization is symplectic, even though the singularities are not fixed. The restricted 3–body problem on the unit circle is divided in four cases, according to the motion of primary bodies in the respective problem of 2–bodies. Thus the elliptic, parabolic, hyperbolic restricted case and the one with two fixed centers are stated. The global dynamics for the case with two fixed centers is shown, for any value in the mass of primary bodies. The global dynamics for the elliptic and hyperbolic restricted case are depicted, when the value in the mass of primary bodies are the same. Periodic solutions for the elliptic restricted case are constructed, giving the period, when the value in the mass of primary bodies are the same.



# Introducción.

El marco del presente trabajo es *el problema de  $n$  cuerpos*. Esto es considerar  $n$  cuerpos puntuales ( $n \in \mathbb{N}$ ) en el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$  que se mueven bajo la ley de gravitación universal. Las ecuaciones de movimiento para los  $n$  cuerpos están dadas por la segunda ley de Newton como

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

La función  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza total ejercida sobre el  $i$ -ésimo cuerpo debido a los  $n - 1$  cuerpos restantes. La masa del  $i$ -ésimo cuerpo es  $m_i$  con posición  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$  en el tiempo  $t \in \mathbb{R}$ . La aceleración es  $\ddot{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^3$  y la constante de gravitación universal es  $G$ . La métrica  $\|\cdot\|$  es la euclidea. Una solución al problema de los  $n$  cuerpos sería  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) \in \mathbb{R}^{3n}$  tal que satisfaga el sistema (1).

El vector fuerza lo definimos como el negativo del gradiente de una función llamada *potencial*, es decir,  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . El potencial que corresponde al sistema (1) es

$$V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = -G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}. \quad (2)$$

El único problema de  $n$  cuerpos completamente resuelto es para  $n = 2$ : *el problema de 2 cuerpos*. Isaac Newton, en 1687, exhibió en su obra “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” que todas las soluciones corresponden a las cónicas. En esta obra, I. Newton abordó en el libro I, en la proposición 66, en sus 22 corolarios, el caso  $n = 3$ : *el problema de 3 cuerpos*. Este problema sigue abierto en la actualidad en el sentido de encontrar las soluciones explícitas a las respectivas ecuaciones (1) dadas cualesquier condiciones iniciales. La importancia de este problema no sólo radica en la simplicidad de su planteamiento y en la complejidad de su solución, sino que ha sido el motivo de gran desarrollo de nuevas teorías científicas a lo largo de más de 300 años, como es el caso de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Las soluciones explícitas más conocidas son las *homográficas*, aquellas que conservan la configuración inicial de los cuerpos salvo rotaciones y homotecias (si  $t_o$  es fijo, una solución homográfica está dada como  $\mathbf{x}_i(t) = p(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{x}_i(t_o)$  para  $i = 1, 2, 3$ , siendo  $p(t) \in \mathbb{R}$  una homotecia y  $\mathbf{R}(t) \in (\mathbb{R}^3)^3$  una rotación).

Debido a la dificultad para encontrar soluciones al problema de 3 cuerpos se han tratado modelos más sencillos, siendo uno de los más estudiados *el problema restringido de 3 cuerpos* descrito por primera vez por Euler en 1772 [31] (capítulo 1). Este problema

consiste en determinar el movimiento de un cuerpo con una masa muy pequeña respecto de las masas de los otros dos cuerpos, a los que llamamos *cuerpo secundario* y *cuerpos primarios* respectivamente; de esta manera los primarios siguen el problema de 2 cuerpos ya que no son afectados por la presencia del cuerpo secundario, mientras que el movimiento de éste se encuentra determinado por la atracción gravitacional que ejercen los primarios. En particular, Euler consideró que los primarios seguían órbitas circulares (como una solución al problema de 2 cuerpos) y que el cuerpo secundario se movía en el mismo plano que los primarios. Aún cuando este planteamiento es más sencillo, en la actualidad sólo se cuentan con algunas soluciones particulares y resultados parciales sobre la dinámica de este problema.

## Problema.

El objeto de estudio en este trabajo es el problema restringido de 3 cuerpos con la constricción de movimiento al círculo unitario, denotado por  $S^1$ . Reducir el movimiento al conjunto compacto  $S^1$  es resultado de una constricción holonómica al movimiento en el plano  $\mathbb{R}^2$ . A este planteamiento lo llamamos *problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$* .

**El objetivo es determinar la dinámica del cuerpo secundario en el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ .**

Para estudiar la dinámica del cuerpo secundario es necesario conocer la dinámica de los cuerpos primarios, por lo que el primer problema que abordamos en esta tesis es *el problema de 2 cuerpos en  $S^1$* .

## Motivación.

Las ecuaciones (1) describen bien el comportamiento de los cuerpos en el universo a escalas observables, es decir, a distancias en las que el universo es considerado como el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  o el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , aún cuando el espacio estuviera curvado.

La constricción de movimiento de los cuerpos a  $S^1$  no es una restricción artificial en el sentido de que representa un modelo básico para cierto tipo de configuraciones. Esto es que podemos considerar un cuerpo de masa grande al centro de  $S^1$  y cuerpos de masa mucho menor (del mismo orden) en  $S^1$ ; así la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por este cuerpo de masa grande es del mismo orden para todos los cuerpos que están en  $S^1$ . El cuerpo al centro de  $S^1$  mantiene a los demás cuerpos en  $S^1$  a través del tiempo y estos últimos no afectan la posición del primero, quedando por analizar la dinámica que surge de las fuerzas gravitacionales entre los cuerpos que se encuentran en  $S^1$ . Estudio de configuraciones centrales como propone D. Saari en [28] (pp. 130 - 136) y movimientos coorbitales de satélites pueden ser algunas de las aplicaciones de la presente investigación. También sería posible estudiar dinámicas de cuerpos que se encuentran cercanas a movimientos circulares en el universo, como menciona R. Broucke *et. al.* en [5, 6].

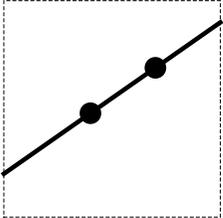
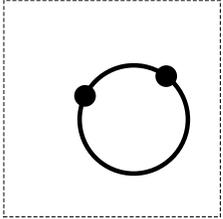
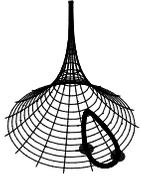
El planteamiento que hacemos en esta tesis es original en el sentido de que no existe publicación que contenga investigación acerca de éste.

## Trabajos relacionados.

Son tres los espacios de curvatura constante: la esfera  $\mathbb{S}^N$ , el espacio euclideo  $\mathbb{R}^N$  y la pseudoesfera  $\mathbb{H}^N$ , espacios de dimensión  $N$  de curvatura 1, 0 y  $-1$  respectivamente. Hay trabajos de investigación sobre problemas de  $n$  cuerpos dispuestos en espacios de curvatura constante, pero el planteamiento es diferente del que se presenta en esta tesis. Para entender la diferencia de planteamientos distinguimos dos casos.

- *Problema sin constricción*: se considera el problema de  $n$  cuerpos en espacios de curvatura constante con la ley gravitacional intrínseca al espacio.
- *Problema con constricción*: se considera el problema de  $n$  cuerpos en espacios de curvatura constante con la ley gravitacional intrínseca al espacio con la constricción de movimiento a  $S^1$ , siendo  $S^1$  el círculo de radio uno en cada uno de los espacios.

Mostramos esta clasificación en el cuadro 1 en la que consideramos espacios de dimensión dos, es decir,  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{H}^2$ .

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{H}^2$
sin constricción			
con constricción			

Cuadro 1: *Problema de 2 cuerpos en  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{H}^2$  con y sin constricción a  $S^1$ .*

En todos los casos del cuadro 1 representamos el problema de  $n$  cuerpos dispuesto sobre una curva, así:

- en el renglón “sin constricción”, el problema de  $n$  cuerpos está dispuesto en una geodésica del espacio correspondiente, es decir, en  $S^1$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^1$  respectivamente;

- en el renglón “con restricción”, el problema de  $n$  cuerpos está dispuesto en el espacio correspondiente con la restricción de movimiento a  $S^1$ , siendo  $S^1$  un subconjunto del espacio.

En lo que sigue analizamos brevemente cada caso.

## Problema sin restricción.

La ley de gravitación universal intrínseca a cada uno de los espacios mencionados se obtiene a partir de un potencial definido para una partícula en un campo de fuerza central (campo simétrico respecto de un punto fijo) en  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{H}^3$ , que cumple dos condiciones:

1. Es una función armónica, es decir, satisface la ecuación de Laplace  $\Delta V = 0$  (notación en el espacio euclideo).
2. Satisface el teorema de Bertrand: toda órbita acotada es cerrada ([1] pp. 112-116, [14] pp. 729-734).

Estas dos condiciones las satisface la función

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{\gamma}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

que es el potencial (2) para una partícula en un campo de fuerza central en  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\gamma > 0$  es una constante que depende de las masas de los cuerpos y de la constante de gravitación universal. Así, las funciones que cumplen las condiciones 1 y 2 en  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{H}^3$  se consideran la extensión de (3) a espacios de curvatura constante distinta de cero. Éstas son

$$V_1(\theta) = -\alpha \cot \theta, \quad \alpha > 0, \quad V_{-1}(\theta) = -\beta \coth \theta, \quad \beta > 0, \quad (4)$$

para  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{H}^3$  respectivamente. La variable  $\theta$  es la longitud de arco del centro de atracción a la partícula. Para los problemas situados en una y dos dimensiones se ocupan los mismos potenciales (3) y (4) reducidos a la dimensión necesaria. En [16, 14] está la deducción de los potenciales  $V_1$  y  $V_{-1}$  a partir de la ecuación de Laplace y del teorema de Bertrand. En el cuadro 2 relacionamos los potenciales a cada uno de los casos presentados.

El estudio de problemas de  $n$  cuerpos en espacios de curvatura constante se remonta a Nikolai Lobachevsky en 1835, quien trabajó en el espacio  $\mathbb{H}^3$ , [21]. De manera independiente y al mismo tiempo, János Bolyai hacía lo mismo, [3]. Por otra parte, Joseph Serret hizo lo propio para el espacio  $\mathbb{S}^2$  en el año de 1860, [29]. Para 1903, Liebmann demostró que  $V_{-1}$  y  $V_1$  son efectivamente una extensión del teorema de Bertrand para espacios de curvatura 1 y  $-1$  [20]. La mayor parte de la investigación se desarrolló para los espacios  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{H}^2$ , pudiéndose generalizar los resultados a mayores dimensiones. En [33], [10] y [4] podemos encontrar el desarrollo sobre este tipo de planteamientos, además de un detallado marco histórico. En particular, en [8] se dan las soluciones para el *problema de Kepler* (problema de 2 cuerpos con uno de los cuerpos fijo) en los espacios  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{H}^2$ .

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{H}^2$
sin constricción	$V_1(\theta) = -\alpha \cot \theta$	$V(x) = -\frac{\gamma}{ x }$	$V_{-1}(\theta) = -\beta \coth \theta$
con constricción		$V(x) = -\frac{\gamma}{x} - \frac{\gamma}{2\pi-x}$	

Cuadro 2: *Potenciales para el problema de fuerza central. Los casos que no han sido estudiados en la literatura los dejamos como espacios en blanco.*

Problemas restringidos de 3 cuerpos en  $\mathbb{R}$  se han considerado en muchas investigaciones, pero estos siguen siendo temas de investigación ya que tampoco han tenido una respuesta positiva en términos de obtener las soluciones explícitas a las respectivas ecuaciones. Los casos que más se asemejan a nuestro planteamiento son los subproblemas elípticos en  $\mathbb{R}$ , es decir, aquellos en los que los cuerpos primarios siguen trayectorias elípticas, porque son movimientos acotados respecto de la posición. Por ejemplo, en [22] se muestra que el problema no es integrable cuando las masas de los primarios son muy distintas entre sí. Otro caso elíptico en  $\mathbb{R}$  se encuentra en [17] y [15] donde se logra describir en términos generales la dinámica del problema después de haber realizado varios cambios de variables y dinámica simbólica.

### Problema con constricción.

Hasta donde sabemos, este caso no se encuentra reportado en la literatura como tal. El problema que nos ocupa es el subcaso particular “con constricción en  $\mathbb{R}^2$ ”. El potencial que consideramos es el dado en (3) con la constricción de movimiento a  $S^1$ , es decir,

$$V_{const}(x) = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos x}}, \quad \gamma > 0, \quad (5)$$

donde  $x \in [0, 2\pi]$  es el ángulo entre los cuerpos medido en el sentido de las manecillas del reloj.

El potencial (5) no es el que usamos a lo largo del presente trabajo, estudiamos el problema con la función

$$V(x) = -\frac{\gamma}{x} - \frac{\gamma}{2\pi-x}, \quad (6)$$

siendo  $x$  la longitud de arco del centro de atracción al cuerpo en el sentido de las manecillas del reloj. El potencial (6) está definido en  $(0, 2\pi)$ . A partir de que  $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi$ , identificamos los extremos del dominio de  $V$ . Las gráficas de los potenciales  $V_{const}$  y  $V$  se muestran en la figura 1 en la que podemos observar que ambas funciones son esencialmente las mismas cualitativamente hablando. De esta manera elegimos  $V$  para trabajar porque los cálculos algebraicos son más sencillos.

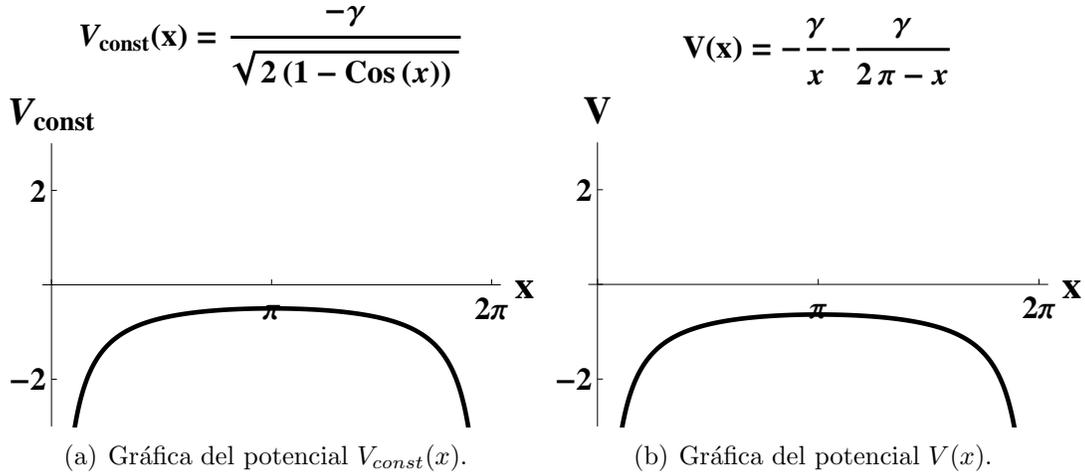


Figura 1: Gráficas de los potenciales  $V_{\text{const}}(x)$  y  $V(x)$ .

Además, decimos que el potencial (6) es una extensión natural del potencial (3) a  $S^1$  por la razón que en seguida explicamos. Si extendemos la definición del potencial (6) a los conjuntos de curvatura constante positiva (círculos de radio  $r > 0$ ,  $S_r^1$ ) tenemos

$$V_r(x) = -\frac{\gamma}{rx} - \frac{\gamma}{r(2\pi - x)}. \quad (7)$$

Por otro lado,  $S_r^1 = \{(u, w) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + w^2 = r^2, r > 0\}$ . Substituyendo en (7) la longitud de arco  $rx$  por el cálculo explícito sobre  $S_r^1$  obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{V}(u) &= -\frac{\gamma}{\int_0^u \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 - s^2}}\right)^2} ds} - \frac{\gamma}{2\pi r - \int_0^u \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\sqrt{r^2 - s^2}}\right)^2} ds} \\ &= -\frac{M}{r \arcsin \frac{u}{r}} - \frac{M}{2\pi r - r \arcsin \frac{u}{r}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Hacemos el límite  $r \rightarrow \infty$  sobre el potencial (8) y escribimos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{V}(u) = -\frac{M}{u}.$$

En el proceso límite, el conjunto  $S_r^1$  se transforma en una línea recta y el potencial  $\hat{V}$  en el potencial clásico de Newton. Es por esta razón que decimos que (6) es una extensión natural del potencial (3) definido sobre los conjuntos de una dimensión de curvatura constante positiva.

En el cuadro 3 mostramos las gráficas de los potenciales asociados a cada uno de los casos. Para todos estos potenciales observamos en común la singularidad en 0 (o en  $2\pi$ ) correspondiendo a colisiones entre los cuerpos. En particular ponemos atención en los casos “sin restricción en  $S^1$ ” y “con restricción en  $\mathbb{R}^2$ ”, el cuerpo libre se mueve  $S^1$  y en  $S^1$  respectivamente y la singularidad que existe en  $\pi$  para el primer caso hace que ambos problemas sean diferentes.

	$S^2$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{H}^2$
sin constricción	$V_1(\theta) = -\alpha \cot(\theta)$	$V_{-1}(\theta) = -\frac{\gamma}{x}$	$V_{-1}(\theta) = -\beta \coth(\theta)$
con constricción		$V(x) = -\frac{\gamma}{x} - \frac{\gamma}{2\pi - x}$	

Cuadro 3: Gráficas de los potenciales asociados al problema de fuerza central. Los casos que no han sido estudiados en la literatura los dejamos como espacios en blanco.

## Contenido.

- Capítulo 1:** introducimos aspectos generales que se manejan a lo largo del trabajo: sistemas hamiltonianos, transformaciones simplécticas, problema de  $n$  cuerpos, singularidades, colisiones y regularizaciones, problema de Kepler, problema restringido de 3 cuerpos, funciones elípticas de Jacobi, teoría de Floquet e hiperbolicidad de trayectorias.
- Capítulo 2:** presentamos el problema de dos cuerpos en  $S^1$ . Damos una clasificación de todos los tipos de movimientos para el potencial  $V(x)$ . Regularizamos la singularidad que presentan las ecuaciones de movimiento mediante un cambio simpléctico en las variables. Posteriormente mostramos el espacio fase definido para todo tiempo. Damos las soluciones explícitas al problema para todos los niveles de energía, distinguiendo tres grandes familias: *soluciones elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*, según el nivel de energía, además de una *posición de equilibrio*. Este problema, naturalmente integrable, lo comparamos con el péndulo simple en el plano al concluir el capítulo.
- Capítulo 3:** damos una técnica de regularización que se puede aplicar a todo problema restringido de 3 cuerpos en la recta  $\mathbb{R}$  o en el círculo  $S^1$  (del cuadro 1 el caso “sin constricción en  $\mathbb{R}^2$ ” y el caso “con constricción en  $\mathbb{R}^2$ ”). Esta regularización evita las singularidades debidas a colisiones dobles en las que participa el cuerpo secundario y lo hace a través de un cambio en las variables, conservando el carácter hamiltoniano de las ecuaciones. Así, aunque las colisiones no se den en puntos fijos, es decir, a pesar de que las singularidades dependen del tiempo, obtenemos un hamiltoniano regularizado en todas las singularidades debidas a las colisiones binarias y que sigue representando la energía total del sistema.

- **Capítulo 4:** presentamos el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ . Damos una clasificación de cuatro problemas, según las soluciones que sigan los primarios (obtenidas en el capítulo 2). De este modo contamos con los *problemas elíptico, parabólico e hiperbólico*, además del *problema con dos centro fijos*. Analizamos todas las posibles colisiones (dobles y triples) que pueden llevarse a cabo y regularizamos (usando las técnicas del capítulo 3) de manera global y simpléctica todas las singularidades debidas a colisiones dobles y dos singularidades debidas a colisiones triples de las ecuaciones de movimiento. Esto lo hacemos para cualquier subproblema del problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ , obteniendo un hamiltoniano que describe la dinámica de la partícula secundaria hasta el momento en que ocurra una colisión triple en particular aquélla en la que la masa secundaria se encuentra entre los primarios. Analizamos la presencia de soluciones lineales, mostrando su existencia únicamente para el caso simétrico en las masas, correspondiendo a una posición de equilibrio (solución denotada por  $\gamma(\tau)$ ). Concluimos el capítulo con la compactación del espacio fase extendido, correspondiente al campo determinado por las respectivas ecuaciones autónomas.
- **Capítulo 5:** abordamos el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  con dos centro fijos. Mostramos la integrabilidad de este problema y con ello la dinámica global del sistema. Este resultado es válido para cualquier valor de las masas en los cuerpos primarios.
- **Capítulo 6:** abordamos el caso particular de masas iguales en los primarios, esto es *el problema simétrico restringido de 3 cuerpos en  $S^1$* . Para los problemas respectivos *simétrico elíptico* y *simétrico hiperbólico* mostramos que la trayectoria  $\gamma(\tau)$  posee una dicotomía exponencial en el sistema linealizado en el campo vectorial. Con esto exhibimos la estructura hiperbólica de  $\gamma(\tau)$ , una trayectoria que comienza y termina en colisión triple en el espacio fase extendido compacto logrado en el capítulo 4. Como consecuencia mostramos la existencia de variedades bidimensionales estable e inestable que se intersectan transversalmente a lo largo de la trayectoria con estructura hiperbólica. Posteriormente analizamos el campo vectorial en el espacio compacto y junto con la regularización de las ecuaciones realizada en el capítulo cuarto, damos la dinámica global para estos problemas. También mostramos la existencia de soluciones periódicas para el subproblema simétrico elíptico, calculando el período correspondiente.
- **Capítulo 7:** terminamos con un capítulo que resume los resultados obtenidos a lo largo de la presente investigación y alguna líneas de investigación para el futuro que nos ayudarán a comprender mejor las distintas dinámicas que se presentan en este tipo de problemas.

# Índice general

<b>1. Preliminares.</b>	<b>21</b>
1.1. Sistemas hamiltonianos. . . . .	21
1.2. Transformaciones simplécticas. . . . .	23
1.3. Problema de $n$ cuerpos. . . . .	25
1.4. Singularidades, colisiones y regularizaciones. . . . .	26
1.5. Problema de Kepler. . . . .	28
1.6. Problema restringido de 3 cuerpos. . . . .	33
1.7. Funciones elípticas de Jacobi. . . . .	34
1.8. Teoría de Floquet. . . . .	37
1.9. Hiperbolicidad de trayectorias. . . . .	40
<b>2. Problema de 2 cuerpos en <math>S^1</math>.</b>	<b>43</b>
2.1. Planteamiento. . . . .	43
2.2. Análisis cualitativo del problema de Kepler en $S^1$ . . . . .	46
2.3. Regularización del problema de Kepler en $S^1$ . . . . .	47
2.4. Soluciones al problema de Kepler en $S^1$ regularizado. . . . .	50
2.5. Análisis cualitativo del problema de Kepler en $S^1$ regularizado. . . . .	54
2.6. Soluciones del problema de 2 cuerpos en $S^1$ regularizado y su dinámica cualitativa. . . . .	55
2.7. El péndulo simple en el plano. . . . .	57
<b>3. Regularización global y simpléctica en espacios unidimensionales de curvatura 0 ó 1.</b>	<b>60</b>
3.1. Problema restringido de 3 cuerpos en espacios de dimensión uno con curvatura 0 ó 1. . . . .	60
3.2. Regularización global y simpléctica. . . . .	62
<b>4. Problema restringido de 3 cuerpos en <math>S^1</math>.</b>	<b>69</b>
4.1. Planteamiento. . . . .	69
4.2. Colisiones regularizables. . . . .	72
4.3. Regularización. . . . .	74
4.4. Sobre la existencia de soluciones lineales. . . . .	78
4.5. Compactación del espacio fase. . . . .	80

<b>5. Problema restringido de 3 cuerpos en <math>S^1</math> con dos centros fijos.</b>	<b>85</b>
5.1. Planteamiento. . . . .	85
5.2. Puntos de equilibrio. . . . .	86
5.3. Orbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas. . . . .	87
5.4. Dinámica global. . . . .	89
<b>6. Problemas restringido simétrico hiperbólico y restringido simétrico elíptico de 3 cuerpos en <math>S^1</math>.</b>	<b>91</b>
6.1. Trayectoria con estructura hiperbólica. . . . .	91
6.2. Dinámica global. . . . .	96
6.3. Soluciones periódicas. . . . .	105
<b>7. Conclusiones y perspectivas.</b>	<b>107</b>

# Índice de figuras

1.	<i>Gráficas de los potenciales <math>V_{const}(x)</math> y <math>V(x)</math>.</i>	14
1.1.	<i>Espacio fase del problema de Kepler.</i>	31
1.2.	<i>Espacios fase regularizados del problema de Kepler.</i>	33
1.3.	<i>Gráficas de las funciones elípticas <math>sn</math>, <math>cn</math> y <math>dn</math> para varios valores del módulo <math>k</math>.</i>	36
2.1.	<i>Problema de 2 cuerpos en <math>S^1</math>.</i>	44
2.2.	<i>Retrato fase del problema de Kepler en <math>S^1</math>.</i>	46
2.3.	<i>Órbitas del problema de Kepler en <math>S^1</math> regularizado.</i>	54
2.4.	<i>Problema de 2 cuerpos en <math>S^1</math> regularizado con centro en el centro de masa (cm).</i>	56
2.5.	<i>El péndulo simple en el plano.</i>	57
3.1.	<i>Líneas de acción de las fuerzas para el problema de 3 cuerpos restringido en <math>\mathbb{R}</math> y en <math>S^1</math>.</i>	62
4.1.	<i>Problema restringido de 3 cuerpos en <math>S^1</math>.</i>	70
4.2.	<i>Problema restringido de 3 cuerpos en <math>S^1</math> con centro de masa (cm) fijo.</i>	71
4.3.	<i>Regiones del espacio fase compacto en el problema elíptico (para <math>\mu = 1/4</math>).</i>	83
4.4.	<i>Regiones del espacio fase compacto en el problema parabólico (para <math>\mu = 1/4</math>).</i>	83
4.5.	<i>Regiones del espacio fase compacto en el problema hiperbólico (para <math>\mu = 1/4</math>).</i>	84
5.1.	<i>Gráfica de la función <math>\mathcal{H}(q, \mu)</math>.</i>	86
5.2.	<i>Gráfica de la función <math>\mu_o(q_o)</math>.</i>	87
5.3.	<i>Espacio fase regularizado del problema de 3-cuerpos en <math>S^1</math> con dos centros fijos.</i>	89
6.1.	<i>Regiones compactas para los espacios fase (extendidos en el tiempo) para el problema restringido simétrico elíptico e hiperbólico de 3 cuerpos en <math>S^1</math>.</i>	97
6.2.	<i>Campo vectorial en la frontera y la trayectoria <math>\Gamma(s)</math>.</i>	99
6.3.	<i>Variedades estable e inestable a <math>\Gamma(s)</math> y los planos <math>X</math> y <math>V</math>.</i>	100



# Capítulo 1

## Preliminares.

El primer capítulo lo dedicamos a presentar los conceptos y las teorías que aplicamos en la presente investigación, así como la notación que utilizamos para ésta. Este primer capítulo lo dividimos en secciones que facilitarán la lectura de los siguientes capítulos.

Los problemas que abordamos en el presente trabajo pertenecen a una clase especial de sistemas de ecuaciones diferenciales, los *sistemas hamiltonianos*, alrededor de los cuales hay una gran teoría desarrollada. Aquí mostramos solamente los conceptos y resultados más conocidos que se utilizarán en lo que sigue. Presentamos una breve explicación sobre *transformaciones simplécticas* que serán de gran importancia en el análisis de los sistemas hamiltonianos. Explicamos brevemente el *problema de  $n$  cuerpos*, las colisiones entre partículas y las singularidades en las respectivas ecuaciones diferenciales. Una técnica empleada en esta investigación para el análisis de singularidades es la *regularización* de ecuaciones, la cual presentamos en este capítulo también. Planteamos y hacemos una revisión general del *problema de Kepler* y mostramos algunos resultados que nos ayudarán a comprender resultados posteriores. El planteamiento del *problema restringido de 3 cuerpos* lo incluimos en este capítulo de conceptos generales, siendo este problema definido en un espacio compacto el objeto principal de investigación. Hacemos una breve introducción a funciones elípticas y a los resultados que nos son de utilidad. Al final, explicamos brevemente la teoría de Floquet y una técnica para evidenciar la estructura hiperbólica de trayectorias dependientes del tiempo.

### 1.1. Sistemas hamiltonianos.

Un *sistema hamiltoniano* es un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{H}_{\mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\mathbf{H}_{\mathbf{q}},\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $\mathbf{q}, \mathbf{p}^1 \in \mathbb{R}^n$  y  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  es una función real derivable definida en un abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , conocida como función de Hamilton o hamiltoniano. Las expresiones

---

<sup>1</sup>Las variables en “negritas” se refieren a vectores, de lo contrario se refieren a escalares.

$\mathbf{H}_q$  y  $\mathbf{H}_p$  se refieren a  $\nabla_q H = (\partial H/\partial q_1, \dots, \partial H/\partial q_n)$  y  $\nabla_p H = (\partial H/\partial p_1, \dots, \partial H/\partial p_n)$ . El vector  $\mathbf{q}$  se llama *vector posición* y el vector  $\mathbf{p}$  se llama *vector momento*; ambos vectores se llaman *variables conjugadas*. La variable  $t$  se llama *tiempo* y el punto sobre las variables conjugadas en (1.1) indica la derivada respecto de  $t$ . Los vectores deben su nombre a la interpretación física en los problemas clásicos.

Un sistema escrito en *coordenadas generalizadas* es aquel que está definido en las coordenadas necesarias y suficientes para describir el sistema. Consideramos que el sistema (1.1) proviene de un sistema escrito en coordenadas generalizadas (forma Lagrangiana), correspondiendo éstas al vector posición; las ecuaciones (1.1) están escritas en forma hamiltoniana, siendo  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  las variables conjugadas y  $\mathbf{q}$  las coordenadas generalizadas. El número de coordenadas generalizadas es conocido como el número de *grados de libertad*, en otras palabras, el sistema (1.1) tiene  $n$  grados de libertad. El espacio de las coordenadas generalizadas es llamado *espacio de configuración* y lo denotamos por  $\mathcal{Q}$ . Por último, el espacio donde viven las variables conjugadas es el *espacio fase*.

Si renombramos  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  como un vector en  $\mathbb{R}^{2n}$  y nombramos por  $J$  la matriz  $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$ , siendo  $I_n$  la matriz identidad de tamaño  $n \times n$  y  $0_n$  la matriz nula del mismo tamaño, entonces las ecuaciones (1.1) se pueden reescribir en forma compacta como

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla_{\mathbf{z}}H(\mathbf{z}, t). \quad (1.2)$$

La matriz  $J$  es conocida como la *matriz canónica* y  $\nabla_{\mathbf{z}}H = (H_q, H_p)$ . Si  $H = H(\mathbf{z})$ , es decir, si la función de Hamilton no depende explícitamente de la variable tiempo, entonces se dice que los sistemas hamiltonianos son *autónomos*, de otra forma son llamados *no autónomos*.

**Definición 1.1** Si  $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que es constante a lo largo de las soluciones de (1.2), es decir,  $\frac{d}{dt}F(\mathbf{z}(t)) = 0$ , entonces se dice que  $F$  es una *primera integral*.

En otras palabras, si  $F$  es una primera integral, la solución  $\mathbf{z}(t)$  vive en una superficie de dimensión  $2n - 1$  para todo tiempo donde está definida y por lo tanto,  $F^{-1}(c)$  es un conjunto invariante para (1.2) para cada valor regular  $c$  de  $F$ . Así, sabemos que las soluciones se encuentran en un espacio de dimensión menor en donde están definidas las ecuaciones. Más aún, si existieran  $F_1, F_2, \dots, F_{2n-1}$  primeras integrales independientes, la intersección entre éstas definirían las soluciones de (1.2). En particular, si  $dH/dt \equiv 0$ , entonces el hamiltoniano es una primera integral.

Los sistemas de ecuaciones que se analizan en este trabajo pertenecen a aquellos que se rigen por la segunda ley de Newton (*sistemas mecánicos*). La fuerza sobre cada una de las partículas depende de su posición y en ciertos casos también depende del tiempo. Así, la ecuación de movimiento en forma vectorial que describe estos sistemas es

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = M\ddot{\mathbf{x}}. \quad (1.3)$$

En esta ecuación  $M$  es la matriz diagonal cuadrada de tamaño  $n$ , cuyas entradas corresponden a las masas de las partículas involucradas;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector posición de las partículas y  $\mathbf{F}$  es la función que representa la fuerza total del sistema, con dominio en  $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}$ . La igualdad (1.3) es un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden. Las fuerzas que rigen estos sistemas se derivan de una función  $V$  definida en el espacio  $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}$ . La relación entre la función  $V$ , llamada *función potencial* con la función  $\mathbf{F}$  es  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = -\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}, t)$ . Con esta relación y efectuando los cambios de variables  $\mathbf{x} = \mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\mathbf{p}$ , la ecuación (1.3) queda escrita como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= M^{-1}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}, t),\end{aligned}\tag{1.4}$$

un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden. Este sistema posee la estructura del sistema (1.1) y tiene como hamiltoniano la función

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}\mathbf{p} + V(\mathbf{q}, t).\tag{1.5}$$

Para los sistemas mecánicos, el hamiltoniano corresponde a la *energía total* del sistema, es decir, es la suma de *energía potencial*  $V(\mathbf{q}, t)$  y *energía cinética*  $T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}\mathbf{p}$ .

En el caso de que el hamiltoniano  $H$  no dependa explícitamente del tiempo, este es una primera integral, por tanto la energía es una primera integral o también llamada *constante de movimiento* ( $h = T + V$  es constante). Los sistemas cuya energía se conserva a través del tiempo se llaman *sistemas conservativos*, siendo sistemas hamiltonianos autónomos.

Para los sistemas autónomos, dado que  $T \geq 0$ , está definida para cada valor de la energía  $h$  la región dada por el conjunto  $\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n | h \geq V(\mathbf{q})\}$ , llamada *región de Hill*. Esta región determina el tipo de movimientos en el espacio de configuraciones, es decir, clasifica las soluciones en acotadas o no acotadas en el vector posición, según el nivel de energía que se fije. Al subconjunto de la región de Hill cuyos elementos satisfacen  $h = V(\mathbf{q})$  se le conoce como el *conjunto de velocidad cero*, ya que en estas posiciones la energía cinética es nula.

Por último, una propiedad de los sistemas hamiltonianos autónomos es la *reversibilidad*, es decir, que si  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  es una solución para (1.1), entonces  $(\mathbf{q}(-t), -\mathbf{p}(-t))$  también es solución del mismo sistema. En particular, para los sistemas mecánicos autónomos, si  $\mathbf{q}(t)$  intersecta al conjunto de velocidad cero en dos puntos distintos, resulta que  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  es una solución periódica para (1.4) por la propiedad de reversibilidad.

Una teoría más completa y detallada para esta sección se puede encontrar en [25] (pág. 1 - 32) y [32] (pp. 43 - 97).

## 1.2. Transformaciones simplécticas.

Un sistema hamiltoniano tiene una estructura muy especial y no todo cambio de coordenadas respeta esta estructura. Un tipo particular de transformaciones si preservan

el carácter hamiltoniano, éstas son las *transformaciones simplécticas* y a continuación las definimos. Comencemos por definir lo que es una matriz simpléctica, que sería el caso más sencillo, cuando el cambio de coordenadas es lineal.

**Definición 1.2** Una matriz constante  $B \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$  es simpléctica si  $B^T J B = J$ .

La matriz  $J$  es la matriz canónica que describimos en la sección anterior y el superíndice  $T$  indica la transposición de la matriz  $B$ .

Se puede mostrar que si  $B$  es simpléctica, entonces  $\det(B) = 1$ , lo que indica que la matriz simpléctica es invertible, preserva volumen y orientación. Pero los cambios de variables no son lineales necesariamente y pudieran ser dependientes del tiempo. La siguiente definición extiende la anterior para matrices cuyas entradas son funciones.

**Definición 1.3** Sea  $E : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , con  $\mathcal{O}$  abierto en  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ , una función derivable dada por  $E(\mathbf{z}, t) = \zeta$ . La transformación  $E$  es simpléctica si para cada  $(\mathbf{z}, t) \in \mathcal{O}$ , el jacobiano de  $E$  respecto de  $\mathbf{z}$  es una matriz simpléctica, es decir, si la derivada de  $E$  dada por

$$D_{\mathbf{z}}E = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial E_1}{\partial z_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial E_{2n}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial E_{2n}}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix},$$

cumple  $(D_{\mathbf{z}}E)^T J (D_{\mathbf{z}}E) = J, \forall (\mathbf{z}, t) \in \mathcal{O}$ .

Supongamos que  $E$  es simpléctica, entonces existe su inversa local ya que el jacobiano de  $E$  para cada punto en  $\mathcal{O}$  es una matriz simpléctica y por lo tanto invertible. La inversa de  $E$  la denotamos por  $Z$ , o sea  $E(Z(\zeta, t), t) = \zeta$ , la cual es una transformación simpléctica también. Se puede mostrar que la composición de transformaciones simplécticas también es simpléctica.

El cambio de coordenadas en el hamiltoniano original define la nueva función

$$\tilde{H}(\zeta, t) := H(Z(\zeta, t), t).$$

Por otro lado, derivando respecto del tiempo la transformación  $E$  obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + (D_{\mathbf{z}}E)\dot{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + (D_{\mathbf{z}}E)J\nabla_{\mathbf{z}}H(\mathbf{z}, t) \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + (D_{\mathbf{z}}E)J \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \\ &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) \Big|_{\mathbf{z}=Z(\zeta, t)} + J\nabla_{\zeta}\tilde{H}(\zeta, t), \end{aligned}$$

lo que nos dice que si  $E$  es independiente del tiempo, entonces el sistema hamiltoniano (1.2) se transforma en el nuevo sistema

$$\dot{\zeta} = J\nabla_{\zeta}\tilde{H}(\zeta, t), \tag{1.6}$$

con hamiltoniano  $\tilde{H}(\zeta, t) = H(Z(\zeta, t), t)$ .

En el caso que la transformación  $E$  dependiera del tiempo, se puede mostrar que si el conjunto  $\mathcal{O}_t = \{\zeta : (\zeta, t) \in \mathcal{O}\}$  es un bola abierta en  $\mathbb{R}^{2n}$ , entonces existe una función derivable  $R : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada *función resto*, tal que

$$\left. \frac{\partial E}{\partial t}(\zeta, t) \right|_{\mathbf{z}=Z(\zeta, t)} = J\nabla_{\zeta} R(\zeta, t).$$

Así tenemos un nuevo sistema hamiltoniano, donde la función de Hamilton respectiva está dada por

$$\tilde{H}(\zeta, t) = H(Z(\zeta, t), t) + R(\zeta, t).$$

**Teorema 1.1** *Toda transformación simpléctica convierte un sistema hamiltoniano en otro sistema hamiltoniano.*

Véase [25] (pp. 87 - 108) para un mejor entendimiento.

### 1.3. Problema de $n$ cuerpos.

Dentro de los sistemas mecánicos que se describen en la sección 1.1 se encuentran los conformados por  $n$  cuerpos en el espacio euclidiano ( $\mathbb{R}^3$ ) moviéndose debido únicamente a las fuerzas de atracción gravitacional existentes entre estos. Suponemos que el  $i$ -ésimo cuerpo tiene masa  $m_i$  concentrada en un sólo punto, en su centro de masa. El *problema de  $n$  cuerpos* consiste en describir la dinámica de cada una de las partículas puntuales.

La posición de la  $i$ -ésima partícula la denotamos por  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$  y a partir de la segunda ley de Newton dada por (1.3), la ecuación que dicta su movimiento es

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = F_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{Gm_i m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3}, \quad (1.7)$$

siendo  $F_i$  la fuerza total que recibe esta partícula <sup>2</sup> y  $\|\cdot\|$  indica la norma euclideana. El sistema (1.4) para la partícula  $i$ -ésima es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i &= \frac{1}{m_i} \mathbf{p}_i, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{Gm_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} = -\nabla_{\mathbf{q}_i} V(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

para el cual hemos definido el momento de la partícula  $i$ -ésima como  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ .

En notación corta, el vector posición del sistema es  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$  y definimos la función potencial como

$$V(\mathbf{x}) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}. \quad (1.9)$$

---

<sup>2</sup>“Algo ocurre como si la materia atrajera a la materia en dirección proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias”...Newton, *Principia*, 1687.

Así, la ecuación de movimiento  $M\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x})$  es la forma vectorial para el problema de  $n$  cuerpos y su forma hamiltoniana es

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= M^{-1}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla_{\mathbf{q}}V(\mathbf{q}),\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde  $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_n, m_n, m_n)$  y el vector momento del sistema es  $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$ . La función de Hamilton corresponde a

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}),\tag{1.11}$$

definiendo la energía cinética como  $T(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i}$ .

Como mencionamos en la sección 1.1, encontrar primeras integrales nos ayuda a reducir de dimensión los sistemas de ecuaciones y en algunas ocasiones hasta encontrar la solución. Bruns [7] demostró a finales del siglo XIX que el problema de  $n$  cuerpos posee 10 primeras integrales independientes entre sí y no más, teniendo como sistema de referencia el espacio euclídeo. Por esta razón, para el caso  $n = 2$  es posible encontrar la solución explícita del problema, como lo esbozamos en la sección 1.5, pero para  $n > 2$  el problema está abierto, en el sentido de encontrar las soluciones explícitas al problema, dada cualquier condición inicial.

En esta sección sólo mencionamos estas 10 constantes de movimiento, pero pueden consultarse [25] (pp. 17 - 19) y [2] (p. 177 - 191) para una mayor comprensión. Las primeras tres primeras integrales están determinadas por el momento lineal total definido como  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n$ , ya que a partir de (1.8), obtenemos que  $\dot{\mathbf{P}} = 0$ . De aquí, podemos determinar otras tres cantidades que se conservan, ya que si definimos el centro de masa del sistema como  $\mathbf{C} = (m_1\mathbf{q}_1 + \dots + m_n\mathbf{q}_n) / \sum_{i=1}^n m_i$ , entonces  $(\sum_{i=1}^n m_i)\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{P}$ . Esto quiere decir que el centro de masa tiene un movimiento uniforme rectilíneo. Otras tres constantes de movimiento son las que se obtienen al calcular el momento angular total, definido como  $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i$ . Por último, la energía total (el hamiltoniano  $H$ ) es la décima constante de movimiento.

## 1.4. Singularidades, colisiones y regularizaciones.

El espacio de configuración para el sistema (1.10) está en  $\mathbb{R}^{3n}$ , más no es este mismo espacio. De hecho, si algún denominador de la función potencial dada en (1.9) se hace cero, el teorema de existencia y unicidad de Cauchy<sup>3</sup> no se cumple y por lo tanto no podemos asegurar la existencia de soluciones para todo tiempo. Las siguientes definiciones fijan estas ideas.

**Definición 1.4** *Dada la ecuación  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , si para algún  $t_1$  no podemos asegurar la existencia de solución, entonces se dice que el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  presenta una singularidad en  $t_1$  y la ecuación diferencial es llamada singular.*

---

<sup>3</sup>**Teorema de existencia y unicidad de Cauchy:** si el campo vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  es continuo respecto de  $t$  y  $\mathbf{x}$  en un abierto  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}$  existe y es continua en  $\mathcal{O}$  y sea  $(t_o, \mathbf{x}_o) \in \mathcal{O}$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  y una única función definida en  $(t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon)$  tal que es solución al problema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  con valor inicial  $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$ .

El sistema (1.10) presenta varias posibles singularidades. Definimos los conjuntos

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n} | \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}$$

y la unión de todos éstos como

$$\Delta = \{\cup_{i < j} \Delta_{ij}\}.$$

A  $\Delta$  lo llamamos el *conjunto de singularidades* del sistema (1.10), ya que contiene todos aquellos puntos donde el potencial (1.9) no está definido y por tanto cumple la definición 1.4. De esta forma  $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ . Hacemos la notación de que  $\Delta$  no representa colisiones entre las partículas solamente, como explicamos a continuación.

Un estudio sistemático de las singularidades en el problema de  $n$  cuerpos comenzó con Painlevé a finales del siglo XIX. Él mostró en [26], que si  $\mathbf{r}(t)$  es una solución para el sistema (1.10) con una singularidad en  $t_1 \in \mathbb{R}$ , entonces  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \Delta$  cuando  $t \rightarrow t_1$ . Pero habrá que notar que pudieran ocurrir dos casos: por un lado podría suceder que  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{q}_o \in \Delta$  o podría ocurrir que el límite no exista. La siguiente definición introduce un nombre especial para el primer caso de singularidades.

**Definición 1.5** *Si para  $t \rightarrow t_1$  la posición de las  $n$  masas puntuales tienden a límites bien definidos en los cuales al menos dos son iguales, se dirá que hay una colisión en  $t_1$ . Es decir, habrá colisión si para algún tiempo al menos dos cuerpos se encuentran en la misma posición.*

Painlevé fue quien cuestionó por primera vez sobre si todas las singularidades en el problema de  $n$  cuerpos son debidas a colisiones. El mismo Painlevé mostró que para  $n = 3$  todas las singularidades corresponden a colisiones. Posteriormente se mostraron resultados parciales, tal como que el conjunto de condiciones iniciales que llevan a colisión en un tiempo finito tiene medida de Lebesgue cero, dado por Saari en [27]. También, el mismo autor mostró en [28] que todas las singularidades son debidas a colisiones si las  $n$  partículas consideradas se encuentran en una línea recta. Pero fue casi cien años después que Xia en [35] respondió a la pregunta de Painlevé, mostrando la existencia de una *pseudocolisión* (sugerencia de Poincaré seguida por Painlevé para nombrar las singularidades no debidas por colisión) en el caso  $n = 5$ . Este resultado se generalizó posteriormente para  $n > 5$ . Antes, para el caso  $n = 4$ , Mather y McGehee en [24] mostraron la existencia de pseudocolisiones, pero habiendo regularizado previamente una infinidad de colisiones binarias en un problema colineal de cuerpos.

La pregunta inmediata que surge es sobre la posibilidad de dar una extensión natural de las soluciones que acaban en una singularidad, mediante algún cambio de variables o algún otro recurso matemático y así extender el dominio de las soluciones.

**Definición 1.6** *Supongamos que se tiene la ecuación  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ . Se dice que es regular en el punto  $(\mathbf{x}_o, t_o)$  si  $\mathbf{f}$  y  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$  son funciones continuas y acotadas para todo punto  $(\mathbf{x}, t)$  contenido en un abierto donde se encuentre  $(\mathbf{x}_o, t_o)$ .*

**Definición 1.7** *El procedimiento de convertir en regular una ecuación diferencial singular se llama regularización.*

En [30] (pp. 6 - 35) y [31] (pp. 70 - 125) hay un gran desarrollo sobre regularizaciones referentes al problema de  $n$  cuerpos. Por otro lado, Marchal en [23] dio una clasificación de éstas, diciendo que en general pueden ser de dos tipos: tipo Siegel o analítica y tipo Easton o topológica. Este último tipo de regularización aprovecha la estructura del retrato fase, ya que se trata de dar una continuación siguiendo las soluciones regulares vecinas. En lo que sigue y en las secciones posteriores haremos uso de las regularizaciones tipo Siegel.

Debemos mencionar que no todas las singularidades son regularizables, pero aquellas debidas a *colisiones binarias* (colisión entre dos cuerpos) sí lo son, es decir, es posible continuar las soluciones de tal manera que las colisiones entre dos partículas deje de ser un punto singular para convertirse en un punto regular en las ecuaciones respectivas. Como afirma Szebehely en [31] (pág. 71), estas singularidades no son del tipo esencial por lo que pueden ser eliminadas con un cambio adecuado en las variables. Para los propósitos de este trabajo nos basta con entender este tipo de regularizaciones, ya que las ecuaciones que se considerarán posteriormente involucran problema de  $n$  cuerpos en espacios unidimensionales, donde todas las singularidades son debidas a colisiones entre los cuerpos.

En forma general, la regularización consiste de una transformación en el vector posición

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{w}) \tag{1.12}$$

y otra en la variable independiente tiempo

$$\frac{dt}{d\tau} = g(\mathbf{w}) \tag{1.13}$$

definiendo un nuevo sistema en términos del nuevo vector posición  $\mathbf{w}$  y del nuevo tiempo  $\tau$ . De la ecuación de la energía (1.11) entendemos la razón de ser del cambio en el tiempo. En otras palabras, si  $\mathbf{q} \rightarrow \Delta_{ij}$ , para alguna  $i$  y  $j$  distintas, entonces  $V(\mathbf{q}) \rightarrow -\infty$  y por lo tanto  $T(\mathbf{p}) \rightarrow \infty$ ; en particular  $\|\mathbf{p}\| \rightarrow \infty$ . Esto es, la velocidad entre las partículas que van a colisión crece indefinidamente y con la introducción del nuevo tiempo  $\tau$  lo que se logra es “frena” el movimiento de tal suerte que la velocidad en la colisión esté acotada.

Como se encuentra en la literatura, en este trabajo distinguimos entre *regularizaciones locales* y *regularizaciones globales*, siendo las primeras las que convierten una singularidad en un punto regular en las ecuaciones y las segundas las que convierten más de una singularidad en puntos regulares con el mismo cambio de variables. Aunque en ambas se aplican operaciones localmente, el termino “global” hace referencia a la utilización de una sola transformación para dos o más singularidades.

En capítulos posteriores se presenta una discusión sobre la relación que puede existir entre las funciones  $\mathbf{f}$  y  $g$ . Pero en la siguiente sección aplicamos un par de regularizaciones clásicas, con lo que ilustraremos el funcionamiento de (1.12) y (1.13).

## 1.5. Problema de Kepler.

Históricamente el primer caso del problema de  $n$  cuerpos que se estudió fue, naturalmente, para  $n = 2$ , *el problema de 2 cuerpos*, teniendo gran relevancia ya que es el único

caso del que se conocen todas las soluciones. Las ecuaciones de movimiento que describen el problema de 2 cuerpos están dadas por (1.7) y (1.8) y es un sistema hamiltoniano con 6 grados de libertad.

A partir de las 10 primeras integrales expuestas en la sección 1.3, este problema puede ser reducido a un problema de un grado de libertad, en donde finalmente por cuadraturas se puede resolver. Para los fines de este trabajo, en esta sección se desarrolla de manera muy breve esta reducción y nos enfocamos al caso colineal que posteriormente describimos. En [32] (pp. 244 - 289) y [2] (pp. 125 - 176) se desarrolla ampliamente el problema de 2 cuerpos.

Para conocer las soluciones al problema de 2 cuerpos basta con conocer las soluciones al correspondiente problema de fuerza central. En otras palabras, colocamos sobre uno de los dos cuerpos el origen de coordenadas y determinamos la dinámica del cuerpo que queda libre respecto del fijo. Esto se puede hacer ya que se puede reescribir el problema de 2 cuerpos en las coordenadas centro de masa y *vector relativo* (vector que une ambos cuerpos) y sabemos que el centro de masa del sistema es una constante de movimiento y de esta manera queda por resolver el sistema para el vector relativo, donde la fuerza parte de uno de los cuerpos. Este planteamiento se conoce como el *problema de Kepler*. Determinamos este problema por la ecuación de movimiento

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\gamma \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}, \quad (1.14)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  representa la posición de la partícula libre, el cuerpo fijo está en el origen y  $0 < \gamma \in \mathbb{R}$  es una constante que incluye la constante de gravitación universal y las masas de los dos cuerpos. El sistema (1.14) es de 3 grados de libertad, habiendo reducido en 3 los grados de libertad del problema original, gracias al vector centro de masa y por ende, al vector momento lineal total. Haciendo  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ , el hamiltoniano asociado a (1.14) es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{\gamma}{\|\mathbf{q}\|} = h, \quad (1.15)$$

que corresponde a la energía total del sistema y sabemos que es una constante de movimiento, como se explicó en la sección 1.3. También se mencionó que el momento angular se conserva, lo que significa que el vector  $\mathbf{q} \times \mathbf{p}$  es constante en todo momento, restringiendo a  $\mathbf{q}$  y a  $\mathbf{p}$  al mismo plano durante todo el movimiento. Nuevamente se ha reducido el número de grados de libertad, ya que de los 3 que se tenían, ahora estamos en un sistema hamiltoniano de 2 grados de libertad. Finalmente, utilizando a coordenadas polares, la ecuación (1.15) queda

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\gamma}{r} \\ &= \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\gamma^2 r^2} \right) - \frac{\gamma}{r} = h, \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde  $L$  es el momento angular. Ya que el momento angular es una constante, la ecuación anterior sólo depende de  $r$  y su respectiva velocidad, que nos ubica en un sistema de 1

grado de libertad. La función (1.16) no es hamiltoniana, pero sigue siendo una primera integral y por ello la seguimos nombrando como la ecuación de la energía.

Según el valor de  $L$  distinguimos dos casos:

1. Si  $L \neq 0$ , estamos en el llamado *problema de Kepler en el plano* y como se muestra en [32] (pp. 244 - 289), dependiendo del valor de la energía  $h$ , las soluciones corresponden a las cónicas según la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} h = -\frac{\gamma^4}{2L^2} &\longmapsto \text{círculo,} \\ -\frac{\gamma^4}{2L^2} < h < 0 &\longmapsto \text{elipse,} \\ h = 0 &\longmapsto \text{parábola,} \\ h > 0 &\longmapsto \text{hipérbola.} \end{aligned}$$

Para este caso, aunque  $\mathcal{H}$  presente una singularidad para  $r = 0$ , las soluciones están bien definidas para todo tiempo y para valores  $h \geq -\gamma^4/(2L^2)$ . En otras palabras, si el momento angular es diferente de cero, no hay colisión entre los cuerpos.

2. Si  $L = 0$ , estamos en el llamado *problema de Kepler colineal*, donde la ecuación de la energía respectiva es

$$\mathcal{H}(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{\gamma}{r} = h. \quad (1.17)$$

Como el momento angular es cero, el movimiento no sólo se lleva a cabo en un plano, sucede sobre una línea recta y por lo tanto, a diferencia del caso anterior, aquí todas las órbitas son de colisión. Es decir, la singularidad  $r = 0$  en (1.17) representa un problema para la determinación de las soluciones para todo tiempo. En este caso, la primera integral (1.17) sigue siendo una función de Hamilton para el sistema

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\gamma/q,$$

donde hicimos  $q = r$  y  $p = \dot{r}$ . Así, el hamiltoniano (1.17) queda

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{\gamma}{q} = h, \quad (1.18)$$

con una singularidad en  $q = 0$  ( $\Delta = \{q|q = 0\}$ ).

En la figura 1.1 mostramos el espacio fase a partir de (1.18) y podemos distinguir distintos tipos de órbitas según el nivel de energía. Siguiendo con la notación dada en el caso  $L \neq 0$  tenemos la siguiente clasificación:

$$\begin{aligned} h < 0 &\longmapsto \text{órbitas elípticas,} \\ h = 0 &\longmapsto \text{órbitas parabólicas,} \\ h > 0 &\longmapsto \text{órbitas hiperbólicas,} \end{aligned}$$

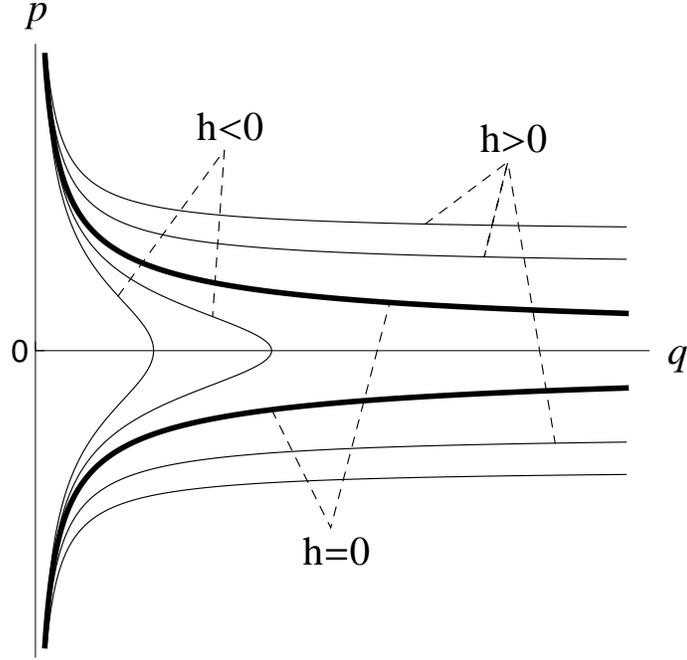


Figura 1.1: *Espacio fase del problema de Kepler.*

y para cualquier caso, mientras  $q \rightarrow 0$ , resulta que  $p \rightarrow \pm\infty$  cuando  $t \rightarrow t_1$ ,  $t_1 \in \mathbb{R}$  (tiempo de colisión).

Evidentemente, la singularidad  $q = 0$  corresponde a la colisión entre los dos cuerpos, por lo que es posible regularizar las ecuaciones y así continuar las soluciones para todo tiempo. Siguiendo los cambios (1.12) y (1.13), la nueva velocidad obtenida  $w' = dw/d\tau$  está relacionada con la original como

$$p = \frac{dq}{dt} = \frac{df}{dw} \frac{dw}{dt} = \frac{df}{dw} \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{df}{dw} \frac{1}{g(w)} w',$$

y de esta manera, el cambio de variables es

$$(q, p) = E(w, w') = \left( f(w), \frac{df}{dw} \frac{1}{g(w)} w' \right). \quad (1.19)$$

El hamiltoniano (1.18) lo escribimos en las nuevas variables, con  $h$  fijo y obtenemos la primera integral

$$\frac{1}{2} \left( \frac{df}{dw} \frac{1}{g(w)} w' \right)^2 - \frac{\gamma}{f(w)} = h. \quad (1.20)$$

Sólo basta elegir adecuadamente las funciones  $f$  y  $g$  para cambiar la singularidad en un punto regular. La elección de estas funciones depende del objetivo en las nuevas

soluciones. En esta sección mostramos dos de las regularizaciones más comunes para este tipo de problemas. Un estudio completo sobre regularizaciones y otras técnicas en el problema de Kepler está en [18] y en [31].

1. Sundman fue de los precursores en regularizaciones y el propuso en 1912 un cambio de variables dado como  $f(w) = w$  y  $g(w) = w$  para este problema. Así, la expresión (1.20) queda

$$\frac{1}{2} \left( \frac{w'}{w} \right)^2 - \frac{\gamma}{w} = h,$$

y multiplicando por el factor  $w^2$  esta última ecuación, obtenemos la constante de movimiento regularizada

$$\frac{1}{2} (w')^2 - \gamma w = hw^2. \quad (1.21)$$

2. Por otro lado, quizá la regularización más estudiada, el cambio de variables está dado por  $f(w) = w^2$  y  $g(w) = w^2$ , conocida como regularización de Levi-Civita (1906). La ecuación de la energía (1.20) queda

$$2 \left( \frac{w'}{w} \right)^2 - \frac{\gamma}{w^2} = h,$$

y multiplicando por el factor  $w^2$  se logra la primera integral regularizada

$$2(w')^2 - \gamma = hw^2. \quad (1.22)$$

En la figura 1.2 vemos los espacios fase obtenidos a partir de las ecuaciones (1.21) y (1.22). En ambos casos notamos que la singularidad  $q = 0$  en (1.18) se ha convertido en puntos regulares en (1.21) y (1.22). La primera diferencia que observamos entre estas regularizaciones es la velocidad de las partículas en la colisión; mientras la velocidad es cero para la regularización de Sundman, para la regularización de Levi-Civita la velocidad en la colisión es distinta de cero. Pero la diferencia más relevante está en el carácter simpléctico de una de las regularizaciones. Si redefinimos  $\hat{f}(w) = f(w)/2$  en la regularización de Levi-Civita, resulta que es una transformación simpléctica y esto, según vimos en la sección 1.2, preserva el carácter hamiltoniano de las ecuaciones y por lo tanto, la expresión (1.22) es el hamiltoniano regularizado del problema de Kepler.

Es posible encontrar una expresión analítica de las soluciones del problema regularizado a partir de (1.21) y de (1.22), pero en este escrito solamente nos enfocamos en sus características cualitativas. El punto regular que representa la colisión entre las partículas posibilita la continuación de manera natural de las órbitas en el espacio fase. Aprovechamos la ecuación de la energía respectiva y asociamos una órbita que va a colisión con una que viene de colisión en el mismo nivel de energía  $h$ , representando un rebote elástico en la colisión. De hecho, clasificamos

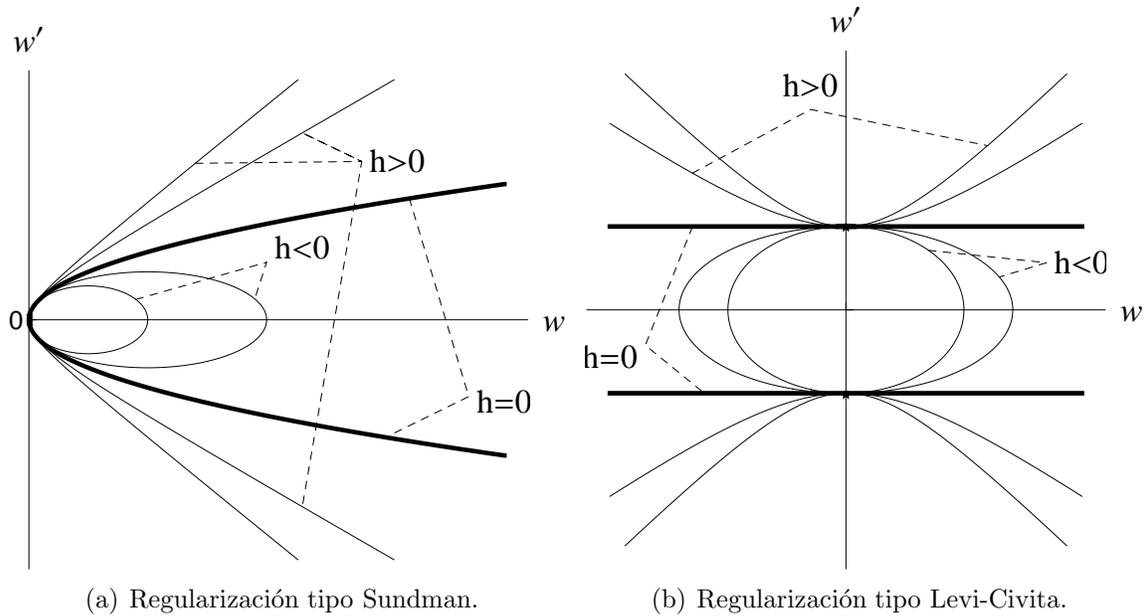


Figura 1.2: *Espacios fase regularizados del problema de Kepler.*

las soluciones obtenidas, como lo hicimos anteriormente. Las *soluciones parabólicas* (para  $h = 0$ ) y las *soluciones hiperbólicas* (para  $h > 0$ ) son no acotadas; estas soluciones representan para las partículas una sola colisión y tanto antes como después de este instante, las partículas no regresan, escapan. Por otra parte, las *soluciones elípticas* (para  $h < 0$ ) son periódicas y acotadas, es decir, las partículas colisionan periódicamente y no escapan.

El problema de Kepler no tiene soluciones de equilibrio y tanto para el caso planar como para el caso colineal el espacio de configuraciones  $\mathcal{Q}$  no está acotado para  $h \geq 0$ .

## 1.6. Problema restringido de 3 cuerpos.

Uno de los problemas más famosos en Matemáticas es sin duda el problema de 3 cuerpos, un problema abierto en el sentido de obtener soluciones explícitas dada cualquier condición inicial. Las ecuaciones que describen este problema están dadas por (1.7) y (1.8), siendo un sistema hamiltoniano de 9 grados de libertad. Dada la complejidad de este problema se consideran problemas reducidos, aunque no menos complicados de estudiar. El problema reducido “clásico” corresponde a un caso límite para tratar de obtener resultados que ayuden a mostrar la dinámica de 3 cuerpos bajo las fuerzas de gravitación newtonianas. Este caso considera una de las masas despreciable respecto de las otras dos, llamada *masa infinitesimal* o *cuerpo secundario*, de tal suerte que no interviene en la dinámica de las otras dos, denominadas como *masas* o *cuerpos primarios*, pero éstas si determinan la dinámica de la masa infinitesimal. En otras palabras, las masas primarias presentan la dinámica del problema de 2 cuerpos y el

objetivo es determinar la dinámica de la masa infinitesimal. Este planteamiento es el *problema restringido de 3 cuerpos*.

Dependiendo de la dinámica de las masas primarias se obtienen distintas clases de problemas restringidos de 3 cuerpos, siendo el caso más estudiado el propuesto hace más de 200 años por Euler (1772). Él consideró que las masas primarias se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de masa con velocidad angular constante y la masa infinitesimal confinada a moverse en el mismo plano determinado por las primarias. Este problema es conocido como el *problema restringido de 3 cuerpos*, aún cuando en realidad es el *caso circular del problema restringido de 3 cuerpos*.

Las ecuaciones de movimiento que rigen el problema restringido de 3 cuerpos provienen de las ecuaciones del problema de 3 cuerpos en las que hacemos el límite  $m_3 \rightarrow 0$ , donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los cuerpos primarios. Las posiciones  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  corresponden a los cuerpos primarios y la masa infinitesimal se denota por  $m$  con posición  $\mathbf{x}$ . Las ecuaciones de movimiento para el *problema restringido de 3 cuerpos* quedan de la siguiente manera:

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{m_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3}, \quad (1.23)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{m_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}, \quad (1.24)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{m_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|^3} + \frac{m_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}\|^3}. \quad (1.25)$$

Notemos que las ecuaciones (1.23) y (1.24) son las respectivas del problema de 2 cuerpos y queremos determinar las soluciones de (1.25) dada una solución de (1.23) y (1.24). En [31] se encuentra un desarrollo completo de este problema. Aquí sólo definimos y planteamos esta clase de problemas para entender la notación y la dificultad de los problemas que componen este trabajo, pero hay mucha investigación sobre este tema.

## 1.7. Funciones elípticas de Jacobi.

Hablar de sistema mecánicos es hablar de cierto tipo de funciones, cuyo origen está fuertemente ligado a este tipo de sistemas, en particular al péndulo simple. En el presente trabajo estas funciones aparecen de manera natural y dado que para los objetivos de la investigación las funciones elípticas sólo son una herramienta, en esta sección las definimos brevemente y presentamos algunos resultados que utilizamos en lo que sigue. Para más detalles sobre este tema recomendamos consultar [19].

Cualquier función definida en el campo de los complejos, que sea doblemente periódica de tal forma que la razón entre los períodos sea un número complejo y que sea regular (u holomorfa) excepto en un conjunto discreto donde presente polos es llamada *función elíptica*. De la misma manera en la que aparecen las funciones elípticas en el siguiente capítulo, así las definimos en esta sección. Para definir estas funciones restringimos el dominio al campo de los números reales, aprovechando la propiedad de que las funciones elípticas mandan reales a reales.

La función llamada *seno elíptico* es la inversa de la función en forma de integral dada por

$$\operatorname{sn}^{-1}(x, k) = u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt, \quad (1.26)$$

llamada *integral elíptica incompleta de primera especie*. Su inversa, la función seno elíptico, es  $\operatorname{sn}(u, k) = x$ . La función llamada *coseno elíptico* también está definida en términos de la inversa de una función en forma de integral, es decir,

$$\operatorname{cn}^{-1}(x, k) = u = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2t)}} dt, \quad (1.27)$$

y así, el coseno elíptico es  $\operatorname{cn}(u, k) = x$ . Tanto para (1.26) como para (1.27) tenemos funciones multivaluadas porque estamos hablando de funciones periódicas, entonces se considera  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq u \leq K$  (más adelante se entiende esta elección). El parámetro  $k$  es conocido como el *módulo* y  $k \in (0, 1)$ ; por otra parte  $k'^2 = 1 - k^2$  y es llamado el *módulo complementario* y por consecuencia  $k' \in (0, 1)$ . Otra forma común de definir las funciones elípticas es la dada por Legendre, que resulta del cambio de variable  $t = \operatorname{sen} \theta$  en (1.26) quedando

$$\operatorname{sn}^{-1}(\operatorname{sen} \phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}. \quad (1.28)$$

El período del seno elíptico sobre el campo de los reales es  $4K$  y del coseno elíptico es  $4K$  también. Ambas funciones no tienen polos para  $u \in \mathbb{R}$  y sus ceros son  $u = 2mK$  para el seno elíptico y  $u = (2m+1)K$  para el coseno elíptico. Ambas funciones satisfacen la identidad

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1 \quad (1.29)$$

y en particular se conocen los valores  $\operatorname{sn}(K, k) = 1$  y  $\operatorname{cn}(0, k) = 1$ . El valor  $K$  depende del valor del módulo y está dado por

$$K(k) = \operatorname{sn}^{-1}(1, k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}},$$

llamada *integral completa de primera especie*. Además se cumplen los límites

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{sn}(u, k) &= \operatorname{sen} u, & \lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{sn}(u, k) &= \tanh u, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{cn}(u, k) &= \cos u, & \lim_{k \rightarrow 1} \operatorname{cn}(u, k) &= \operatorname{sech} u, \end{aligned}$$

y ésta es una de las razones por las que se les denomina funciones elípticas, porque en cierto sentido conectan las funciones circulares (trigonométricas) con las funciones hiperbólicas. También cumplen las simetrías  $\operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn}(u+4K, k)$  y  $\operatorname{cn}(u, k) = \operatorname{cn}(u+4K, k)$ . En la figura 1.3 se grafican estas funciones para diferentes valores del módulo  $k$ .

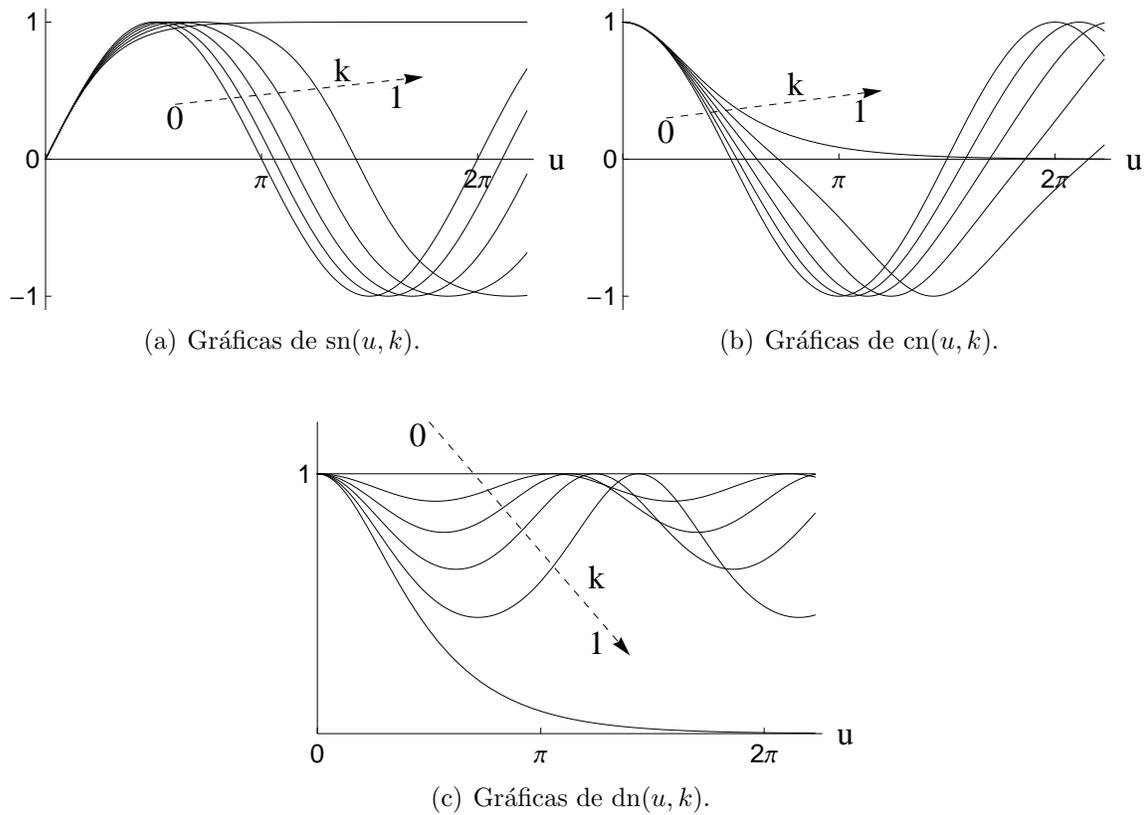


Figura 1.3: Gráficas de las funciones elípticas  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$  y  $\text{dn}$  para varios valores del módulo  $k$ .

Una tercera función elíptica de Jacobi básica es la definida como

$$\text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)}, \quad (1.30)$$

es decir, aquella que satisface la identidad

$$\text{dn}^2(u, k) + k^2 \text{sn}^2(u, k) = 1. \quad (1.31)$$

De hecho, a partir de la identidad (1.29) y de la anterior (1.31) sabemos que

$$\text{dn}^2(u, k) - k^2 \text{cn}^2(u, k) = k'^2. \quad (1.32)$$

A partir de estas identidades es fácil conocer las propiedades de la función  $\text{dn}$ . Tiene período  $2K$  ( $\text{dn}(u, k) = \text{dn}(u + 2K, k)$ ) sobre el campo de los reales, sus ceros son  $u = (2m + 1)K$  y satisface los límites

$$\lim_{k \rightarrow 0} \text{dn}(u, k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \text{dn}(u, k) = \text{sech } u.$$

En la figura 1.3 también se muestran las gráficas de  $\text{dn}$  para distintos valores del módulo  $k$ .

Las funciones que resultan de derivar e integrar las funciones elípticas antes definidas, las enlistamos a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\operatorname{sn}(u, k) &= \operatorname{cn}(u, k)\operatorname{dn}(u, k), \\
\int \operatorname{sn}(u, k)du &= \frac{1}{k} \ln(\operatorname{dn}(u, k) - k\operatorname{cn}(u, k)), \\
\frac{d}{du}\operatorname{cn}(u, k) &= -\operatorname{sn}(u, k)\operatorname{dn}(u, k), \\
\int \operatorname{cn}(u, k)du &= \frac{1}{k} \operatorname{arcsen}(k\operatorname{sn}(u, k)), \\
\frac{d}{du}\operatorname{dn}(u, k) &= -k^2\operatorname{sn}(u, k)\operatorname{cn}(u, k), \\
\int \operatorname{dn}(u, k)du &= \operatorname{arcsen}(\operatorname{sn}(u, k)).
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Por último, un resultado que nos será de mucha utilidad se refiere a la definición de las funciones elípticas en el caso en que el módulo es mayor que uno. En otras palabras, si  $k > 1$  se cumple la siguiente igualdad:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{k} \operatorname{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathcal{K} \operatorname{sn}\left(\frac{u}{\mathcal{K}}, \mathcal{K}\right), \tag{1.34}$$

donde hemos definido  $\mathcal{K} = 1/k$ .

## 1.8. Teoría de Floquet.

La Teoría de Floquet estudia sistemas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \tag{1.35}$$

siendo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $A(t)$  una matriz de tamaño  $n \times n$  cuyas entradas son funciones continuas de  $t$  y tal que  $A(t) = A(t + T)$  para alguna  $T > 0$ . Es decir, esta teoría trata sistemas lineales homogéneos no autónomos, periódicos en el tiempo. Para una mayor comprensión, sugerimos consultar [9] (pág. 145 - 224) y [11] (pág. 103 - 116). El resultado principal de la Teoría de Floquet habla sobre la forma canónica de la matriz fundamental de soluciones para sistemas de la forma dada en (1.35). Afirma que las soluciones son combinaciones lineales periódicas de soluciones de un sistema lineal autónomo. Para llegar a este resultado, primero revisemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.2** *Si  $C$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  y no es singular, entonces existe una matriz  $B$  (quizá compleja) de tamaño  $n \times n$  tal que  $e^B = C$ . Si  $C$  es una matriz real de tamaño  $n \times n$  y no es singular, entonces existe una matriz real  $B$  de tamaño  $n \times n$  tal que  $e^B = C^2$ .*

A partir de este teorema, se enuncia el teorema de Floquet.

**Teorema 1.3 (Teorema de Floquet)** Si  $X(t)$  es una matriz fundamental de soluciones para el sistema (1.35), entonces para toda  $t \in \mathbb{R}$

$$X(t+T) = X(t)X^{-1}(0)X(T).$$

Más aún, existe una matriz  $B$  (quizá compleja) tal que

$$e^{TB} = X^{-1}(0)X(T)$$

y una matriz  $P(t)$  dependiente de  $t$  (quizá compleja) periódica, de período  $T$ , tal que  $X(t) = P(t)e^{Bt}$ , para toda  $t \in \mathbb{R}$ . También, existe una matriz real  $R$  y una matriz real  $Q(t)$  dependiente de  $t$  periódica, de período  $2T$ , tal que  $X(t) = Q(t)e^{Rt}$ , para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

De esta manera, conocemos la forma de las soluciones al sistema (1.35). Pero podemos saber más sobre las soluciones a estas ecuaciones. Supongamos que  $X(t)$  es una matriz fundamental como se ha expuesto antes y sea  $v$  un vector en  $\mathbb{R}^n$ . La solución para (1.35) con condición inicial  $x(t_0) = v$  está dada por  $X(t)X^{-1}(t_0)v$ . Si este vector inicial lo movemos en tiempo un período, obtenemos otro vector dado por  $X(t_0+T)X^{-1}(t_0)v$ . De esta manera, estamos definiendo un operador

$$v \mapsto X(t_0+T)X^{-1}(t_0)v,$$

llamado el *operador de monodromía*. En particular, si  $t_0 = 0$ , el operador de monodromía es  $X(T)X^{-1}(0)v$ . Los valores propios del operador de monodromía se conocen como los *multiplicadores característicos* asociados al sistema (1.35). En el siguiente resultado se habla sobre la naturaleza de los multiplicadores característicos.

**Proposición 1.1** *Considérese el sistema (1.35), los siguientes enunciados son verdaderos.*

1. *Cada operador de monodromía es invertible.*
2. *Todos los operadores de monodromía tienen los mismos valores propios. En particular, hay  $n$  multiplicadores característicos, tomando en cuenta multiplicidad.*

La primera parte de la proposición 1.1 implica que ningún multiplicador puede ser cero y la segunda parte de ésta significa invarianza respecto de  $t_0$ .

Un número complejo  $\mu$  se llama *exponente característico* o *exponente de Floquet* del sistema (1.35) si  $e^{\mu T} = \rho$ , siendo  $\rho$  un multiplicador característico. Se hace la notación de que si  $\mu$  es un exponente característico, entonces  $\mu + 2\pi ik/T$  también lo es, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . En el siguiente resultado se muestra la relación entre los valores propios de una matriz y los valores propios de la exponencial de la misma matriz o alguna potencia de ella.

**Teorema 1.4** *Si  $A$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son sus valores propios (tomando multiplicidad), entonces  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$  son los valores propios de  $A^k$  y  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$  son los valores propios de  $e^A$ .*

Con este teorema en mente, el siguiente es un resultado muy importante, ya que relaciona los exponentes y multiplicadores característicos con las soluciones del sistema que nos interesa resolver.

**Lema 1.1** *Si  $\mu$  es un exponente característico para el sistema (1.35) y  $X(t)$  es una matriz fundamental de soluciones, entonces  $X(t) = P(t)e^{tB}$ , tal que  $\mu$  es un valor propio de  $B$ .*

Así, con el lema 1.1 ya tenemos una idea de como deben ser las soluciones respecto de los valores propios de la matriz  $B$ . De hecho, en el siguiente teorema se da la forma explícita de las soluciones, cuando se conocen los valores propios de dicha matriz.

**Teorema 1.5** *Si  $\lambda$  es un multiplicador característico del sistema (1.35) y  $e^{\mu T} = \lambda$ , entonces existe una solución no trivial (quizá compleja) de la forma*

$$x(t) = e^{\mu t}p(t),$$

donde  $p(t)$  es una función periódica, de período  $T$ . Más aún,  $x(t+T) = \lambda x(t)$ .

Finalmente, para poder crear una base de soluciones del sistema (1.35), necesitamos independencia lineal. Los multiplicadores característicos nos ayudarán para esto.

**Teorema 1.6** *Supongamos que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son multiplicadores característicos para el sistema (1.35) y que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son exponentes característicos, tales que  $\lambda_1 = e^{\mu_1 T}$  y  $\lambda_2 = e^{\mu_2 T}$ . Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces existen funciones periódicas  $p_1(t)$  y  $p_2(t)$ , de período  $T$ , tal que*

$$x_1(t) = e^{\mu_1 t}p_1(t) \quad y \quad x_2(t) = e^{\mu_2 t}p_2(t)$$

son soluciones linealmente independientes.

De esta forma, si logramos conocer los exponentes de Floquet asociados al sistema (1.35), prácticamente tenemos una buena idea sobre la estabilidad de dichas soluciones. Del teorema 1.3 sabemos que  $e^{TB} = X^{-1}(0)X(T)$  y eligiendo de manera conveniente  $X(0) = I$ , tenemos que  $e^{TB} = X(T)$ . Entonces, el problema de conocer la estabilidad de las soluciones se reduce a conocer los valores propios de la matriz  $X(T)$ , lo cual no es fácil, ya que no conocemos *a priori* la matriz fundamental de soluciones.

Otro resultado muy importante en la teoría de sistemas lineales homogéneos no autónomos periódicos es el conocido teorema de Liouville. Lo incluimos en esta sección aún cuando el teorema no necesita periodicidad en el sistema, es decir, es válido para sistemas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \tag{1.36}$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $A(t)$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  cuyas entradas son funciones continuas de  $t$ , pero que no son necesariamente periódicas.

**Teorema 1.7 (Teorema de Liouville)** Suponga que  $X(t)$  es una matriz fundamental para el sistema (1.36) en un intervalo abierto  $J$ . Si  $t_o \in J$ , entonces

$$\det(X(t)) = \det(X(t_o)) e^{\int_{t_o}^t \text{tr}(A(s)) ds}$$

donde  $\det(\cdot)$  es el determinante y  $\text{tr}(\cdot)$  es la traza.

Aplicando este teorema a sistemas de la forma dada en (1.35), obtenemos un par de resultados importantes sobre los multiplicadores y exponentes característicos asociados.

**Corolario 1.1** Consideremos el sistema (1.35) y supongamos que la matriz fundamental de soluciones está dada por  $P(t)e^{tB}$ , entonces

$$\sum_{k=0}^n \mu_k = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr}(A(t)) dt \quad \left( \prod_{k=0}^n \rho_k = e^{\int_0^T \text{tr}(A(t)) dt} \right),$$

donde  $\rho_k = e^{\mu_k T}$ .

## 1.9. Hiperbolicidad de trayectorias.

Dado el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , se dice que una solución de equilibrio  $\mathbf{x}_o$  (punto de equilibrio) es *hiperbólico* si ninguno de los valores propios de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_o)$  tiene parte real igual a cero. Esta idea es resultado del análisis del comportamiento del campo vectorial linealizado alrededor del punto de equilibrio. Es decir, es resultado del análisis de los valores propios y de los espacios propios que posee una matriz constante asociada al campo vectorial linealizado.

Lo que consideramos en esta sección es la determinación de la estructura hiperbólica para órbitas dependientes del tiempo y para esto sugerimos revisar [34] (pp. 52 - 59). Consideramos sistemas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{1.37}$$

donde  $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U$  es un conjunto abierto y  $t \in \mathbb{R}$ . Asumimos que  $\mathbf{f}$  es continua en  $t$ , para toda  $t \in \mathbb{R}$  y  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) en  $\mathbf{x}$ . Así, para la validez de los teoremas de existencia y unicidad a ecuaciones diferenciales ordinarias, todas las derivadas parciales de  $\mathbf{f}$  respecto de  $\mathbf{x}$  son continuas y acotadas uniformemente en  $K \times \mathbb{R}$ , donde  $K$  es un subconjunto compacto de  $U$ .

En caso de que el sistema lineal asociado a una trayectoria del sistema (1.37) sea dependiente del tiempo, la estabilidad local del sistema no se puede determinar a partir de los valores propios asociados. Una forma (la que presentamos en esta sección) es por medio de la determinación de una *dicotomía exponencial*.

**Definición 1.8** Consideramos la ecuación diferencial lineal dependiente del tiempo

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}, \tag{1.38}$$

con  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  y  $A(t)$  una matriz de tamaño  $n \times n$  continua en  $t \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $X(t)$  es la matriz fundamental de soluciones de (1.38) ( $X(0) = I$ ). Consideramos que  $\|\cdot\|$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que el sistema (1.38) posee una dicotomía exponencial si existe una proyección  $P$  ( $P^2 = P$ ) y constantes  $K_1, K_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ , tales que

$$\begin{aligned} \|X(t)PX^{-1}(t_1)\| &\leq K_1 e^{-\lambda_1(t-t_1)}, & t \geq t_1, \\ \|X(t)(I-P)X^{-1}(t_1)\| &\leq K_2 e^{\lambda_2(t-t_1)}, & t \leq t_1. \end{aligned}$$

Con el concepto de dicotomía exponencial podemos decir cuándo las trayectorias dependientes del tiempo presentan estructura hiperbólica.

**Definición 1.9** *Supongamos que  $\gamma(t)$  es una trayectoria para el sistema (1.37). Decimos que  $\gamma(t)$  es una trayectoria con estructura hiperbólica si el sistema lineal asociado*

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\gamma(t), t)\mathbf{y},$$

*posee una dicotomía exponencial.*

Si reescribimos el sistema (1.37) como un sistema autónomo y suponemos que  $\gamma(t)$  es un punto de equilibrio hiperbólico para este sistema, entonces  $\Gamma(t) = (\gamma(t), t)$  es una trayectoria con estructura hiperbólica para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \\ \dot{t} &= 1. \end{aligned} \tag{1.39}$$

La estructura hiperbólica de  $\Gamma(t)$  significa la presencia de espacios propios a esta trayectoria en el sistema linealizado. El siguiente teorema da información sobre la existencia de variedades invariantes para el sistema (1.39).

Definimos la sección transversal  $\Sigma_{t_o} \equiv \{(\mathbf{x}, t) \in U \times \mathbb{R} \mid t = t_o\}$  en el espacio fase extendido que corresponde al sistema (1.39). Así,  $\Gamma(t)$  intersecta a  $\Sigma_{t_o}$  en el punto  $(\gamma(t_o), t_o)$ . Posteriormente definimos una bola de radio  $\varepsilon$  centrada en  $\gamma(t_o)$ , como subconjunto de  $\Sigma_{t_o}$ , que denotamos como  $D_\varepsilon(t_o)$ . De esta manera,

$$\mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma(t)) \equiv \bigcup_{t_o \in \mathbb{R}} (D_\varepsilon(t_o), t_o)$$

es una vecindad de forma tubular de la trayectoria  $\Gamma(t)$  en el espacio fase extendido.

**Teorema 1.8** *Consideramos el sistema (1.39) y la órbita con estructura hiperbólica  $\Gamma(t)$  para el mismo sistema. Existe una variedad  $W_{loc}^s(\Gamma(t))$  (variedad local estable de  $\Gamma(t)$ )  $C^r$  de dimensión  $k+1$ , una variedad  $W_{loc}^u(\Gamma(t))$  (variedad local inestable de  $\Gamma(t)$ )  $C^r$  de dimensión  $n-k+1$  y un  $\varepsilon_o > 0$  suficientemente pequeño tal que para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_o)$ :*

1.  $W_{loc}^s(\Gamma(t))$  es invariante en el tiempo en sentido positivo y  $W_{loc}^u(\Gamma(t))$  es invariante en el tiempo en sentido negativo.

2.  $W_{loc}^u(\Gamma(t))$  y  $W_{loc}^s(\Gamma(t))$  se intersectan a lo largo de  $\Gamma(t)$  y el ángulo formado entre las variedades es distinto de cero y alejado de este valor de manera uniforme para toda  $t \in \mathbb{R}$ .
3. Cada trayectoria en  $W_{loc}^s(\Gamma(t))$  puede ser continuada hasta la frontera de  $\mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma(t))$  en tiempo negativo y cada trayectoria en  $W_{loc}^u(\Gamma(t))$  puede ser continuada hasta la frontera  $\mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma(t))$  en tiempo positivo.
4. Las trayectorias que comienzan en  $W_{loc}^s(\Gamma(t))$  en el instante  $t = t_o$ , tienden a  $\Gamma(t)$  en forma exponencial  $e^{-\lambda(t - t_o)}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y las trayectorias que comienzan en  $W_{loc}^u(\Gamma(t))$  en el instante  $t = t_o$ , tienden a  $\Gamma(t)$  en forma exponencial  $e^{-\lambda|t - t_o|}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , para alguna  $\lambda > 0$ .
5. Cualquier trayectoria en  $\mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma(t))$  que no esté en  $W_{loc}^s(\Gamma(t))$  ni en  $W_{loc}^u(\Gamma(t))$  dejará  $\mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma(t))$  en tiempo positivo y negativo.

Las variedades globales estable e inestable para el sistema (1.39), denotadas por  $W^s(\Gamma(t))$  y  $W^u(\Gamma(t))$  respectivamente, se obtienen dejando evolucionar el tiempo en las trayectorias en  $W_{loc}^s(\Gamma(t))$  en sentido negativo y en sentido positivo para las trayectorias en  $W_{loc}^u(\Gamma(t))$ .

# Capítulo 2

## Problema de 2 cuerpos en $S^1$ .

Planteamos el *problema de 2 cuerpos en  $S^1$*  y analizamos cualitativamente su dinámica. Las ecuaciones de movimiento respectivas presentan una singularidad, la cual evita tener soluciones bien definidas para todo tiempo. Con el fin de obtener éstas de manera explícita y definidas para todo tiempo, regularizamos el problema. La regularización que hacemos conserva el carácter hamiltoniano de las ecuaciones de movimiento, es decir, la regularización es simpléctica. De esta manera, presentamos la dinámica global del sistema y las soluciones explícitas, las cuales son necesarias para estudiar el *problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$*  en el siguiente capítulo.

Al final de este capítulo, discutimos sobre la relación que guardan las ecuaciones de movimiento del problema estudiado con las del *péndulo simple* en el plano.

### 2.1. Planteamiento.

Consideramos dos cuerpos de masa puntuales  $m_1$  y  $m_2$  en el plano, restringidos a moverse en el círculo de radio uno  $S^1$  bajo la ley de gravitación universal. Las fuerzas de atracción las consideramos en ambos sentidos de cada cuerpo y extendidas sobre  $S^1$ , como lo mostramos en la figura 2.1. Colocamos  $S^1$  en el centro del plano euclideo y siguiendo la segunda ley de Newton, escribimos las ecuaciones de movimiento para estos dos cuerpos en coordenadas polares para  $\mathbb{R}^2$  como

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \frac{m_2(\theta_2 - \theta_1)}{(\theta_2 - \theta_1)^3} - \frac{m_2[2\pi - (\theta_2 - \theta_1)]}{[2\pi - (\theta_2 - \theta_1)]^3}, \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{m_1(\theta_2 - \theta_1)}{(\theta_2 - \theta_1)^3} + \frac{m_1[2\pi - (\theta_2 - \theta_1)]}{[2\pi - (\theta_2 - \theta_1)]^3}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Las variables dependientes  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$  se miden en el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje  $y$  positivo y son las coordenadas de posición de los cuerpos con masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. La métrica que consideramos es la longitud de arco. Cada punto sobre las variables indica  $d/dt$ . Además, sin perder generalidad, suponemos que  $\theta_1 < \theta_2$  en todo momento (véase la figura 2.1). La constante de gravitación universal la consideramos igual a 1. Las ecuaciones (2.1) describen un sistema mecánico. El

subconjunto  $S^1$  de  $\mathbb{R}^2$  es homeomorfo al intervalo  $[0, 2\pi]$  con los extremos identificados ( $S^1 \cong [0, 2\pi]$ ).

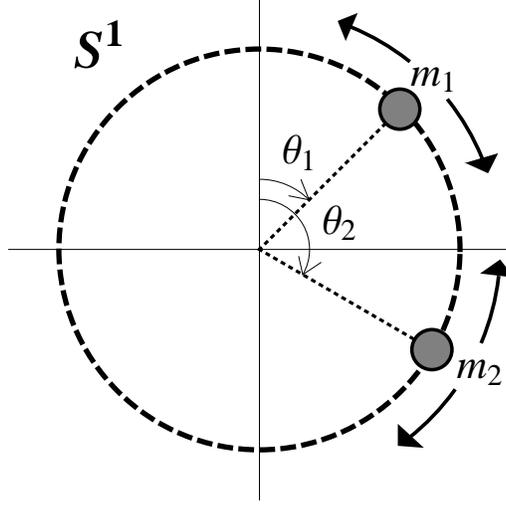


Figura 2.1: *Problema de 2 cuerpos en  $S^1$ .*

Convertimos el sistema (2.1) en uno que describe un problema de fuerza central. Para esto definimos la coordenada correspondiente al centro de masa como

$$\theta_{cm} = (m_1\theta_1 + m_2\theta_2)/M$$

y la coordenada relativa como

$$\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

El sistema (2.1) en estas nuevas coordenadas se simplifica al siguiente sistema:

$$\ddot{\theta}_{cm} = 0, \tag{2.2}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{M}{\theta^2} + \frac{M}{(2\pi - \theta)^2}, \tag{2.3}$$

con  $M = m_1 + m_2$ . La ecuación (2.2) indica que el centro de masa es una constante de movimiento. El problema de 2 cuerpos en  $S^1$  descrito por (2.1) se convirtió en un problema de fuerza central, al que llamamos de manera natural *el problema de Kepler en  $S^1$* . Éste describe un sistema constituido por un cuerpo fijo de masa  $M$  y un cuerpo libre. La ecuación (2.3) no está definida para  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ , que representan la misma posición para el cuerpo libre, por lo que el espacio de configuración  $\mathcal{Q}$  para el sistema (2.2)-(2.3) es  $[0, 2\pi] \setminus \Delta$ , donde  $\Delta = \{\theta \in [0, 2\pi] | \theta = 0, \theta = 2\pi\}$  es el conjunto de singularidades.

A partir de la naturaleza del conjunto  $S^1$  podemos definir de manera natural otro centro de masa, es decir,

$$\theta_{cmf} = [m_1(\theta_1 - 2\pi) + m_2\theta_2]/M \tag{2.4}$$

al que llamamos el *centro de masa ficticio*. De hecho,

$$\theta_{cmf} = \theta_{cm} - \frac{2\pi m_1}{M}, \quad (2.5)$$

por lo que basta considerar  $\theta_{cm}$  para el desarrollo posterior.

A partir de la ecuación (2.2) escribimos las ecuaciones de movimiento para los cuerpos de masa  $m_1$  y  $m_2$  en términos del ángulo relativo al centro de masa, es decir, definimos  $\theta_{cm_1} = \theta_1 - \theta_{cm}$  y  $\theta_{cm_2} = \theta_2 - \theta_{cm}$  y así, obtenemos las respectivas ecuaciones de movimiento con centro en el centro de masa,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{cm_1} &= \frac{m_2^3}{M^2(\theta_{cm_1})^2} - \frac{m_2^3}{M^2\left[\frac{2\pi m_2}{M} + \theta_{cm_1}\right]^2}, \\ \ddot{\theta}_{cm_2} &= -\frac{m_1^3}{M^2(\theta_{cm_2})^2} + \frac{m_1^3}{M^2\left[\frac{2\pi m_1}{M} + \theta_{cm_2}\right]^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Este sistema está definido para  $(\theta_{cm_1}, \theta_{cm_2}) \in (-2\pi\frac{m_2}{M}, 0) \times (0, 2\pi\frac{m_1}{M})$ .

Si realizamos los cambios de variables  $\theta_{cm_1} = -\frac{m_2}{M}\bar{x}$  y  $\theta_{cm_2} = \frac{m_1}{M}\bar{y}$  en el sistema (2.6), tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} &= -\frac{M}{\bar{x}^2} + \frac{M}{(2\pi - \bar{x})^2}, \\ \ddot{\bar{y}} &= -\frac{M}{\bar{y}^2} + \frac{M}{(2\pi - \bar{y})^2}, \end{aligned}$$

que son las mismas que la ecuación (2.3) del problema de Kepler en  $S^1$ . Por lo tanto en lo que sigue estudiamos la ecuación (2.3).

Como es usual, hacemos el cambio de variables  $\theta = x$  y  $\dot{\theta} = y$ , con el fin de reescribir la ecuación (2.3) como un sistema hamiltoniano de un grado de libertad

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{M}{x^2} + \frac{M}{(2\pi - x)^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Este sistema es autónomo y por tanto, la función de Hamilton, la energía total del sistema, es una primera integral dada por la función  $H : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{M}{x} - \frac{M}{2\pi - x}, \quad (2.8)$$

con dominio  $U = \mathcal{Q} \times \mathbb{R} = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ . La energía cinética y la energía potencial corresponden a las funciones  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $V : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como

$$T(y) = y^2/2 \quad \text{y} \quad V(x) = -\frac{M}{x} - \frac{M}{2\pi - x}.$$

En otras palabras,  $H(x, y) = T(y) + V(x) \equiv h$  es una constante de movimiento. Como todo sistema hamiltoniano autónomo, el sistema (2.7) es reversible, es decir, está en involución bajo la aplicación  $G(x, y) = (x, -y)$ .

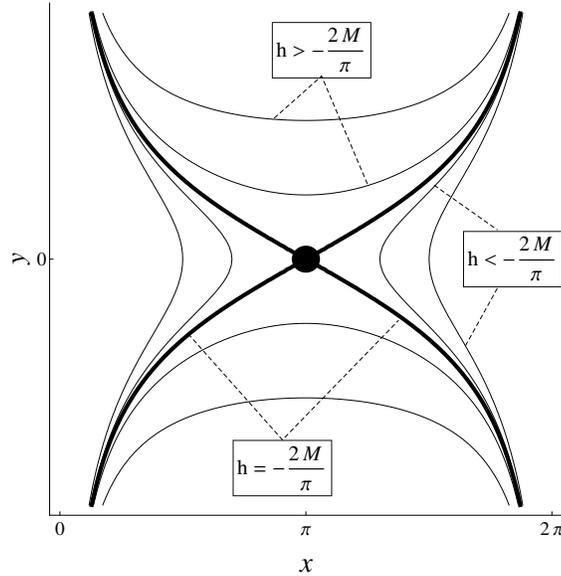


Figura 2.2: Retrato fase del problema de Kepler en  $S^1$ .

## 2.2. Análisis cualitativo del problema de Kepler en $S^1$ .

A partir de la ecuación (2.8) obtenemos el espacio fase que se muestra en la figura 2.2. La primera observación que hacemos es la existencia de soluciones para cualquier valor  $h \in \mathbb{R}$ , como ocurre en el problema de Kepler colineal (capítulo 1, sección 1.5). Estudiando el espacio fase, distinguimos tres grandes familias de órbitas según el nivel de energía y la existencia de un punto de equilibrio. Imitando la notación del problema de Kepler, nombramos a las órbitas como *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*, además del punto de equilibrio.

- Existe un sólo punto de equilibrio dado por  $(x_{eq}, y_{eq}) = (\pi, 0)$  en el nivel de energía  $h = -2M/\pi$ .
- Las órbitas *elípticas* están caracterizadas por la existencia de un único  $t_*$  en el intervalo en el que están definidas, tal que  $y(t_*) = 0$ , es decir, la velocidad es cero solamente en ese instante. Estas órbitas ocurren para  $h < -2M/\pi$ .
- Las órbitas *parabólicas* están caracterizadas por los límites  $(x(t), y(t)) \rightarrow (x_{eq}, y_{eq})$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , es decir, son asintóticas en el tiempo al punto de equilibrio. Estas órbitas suceden para  $h = -2M/\pi$ .
- Las órbitas *hiperbólicas* están caracterizadas por  $y(t) > 0$  ó  $y(t) < 0$  para todo tiempo  $t$  en el que están definidas, es decir, son crecientes o decrecientes en posición. Éstas órbitas ocurren para  $h > -2M/\pi$ .

Todas las órbitas, exceptuando el punto de equilibrio, no son acotadas en la coordenada velocidad, es decir, cuando  $x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 2\pi$ ), sucede que  $y \rightarrow \pm\infty$ . Este comportamiento obedece a que la ecuación (2.8) presenta la singularidad  $x = 0$  ( $x = 2\pi$ ) correspondiendo a la colisión del cuerpo libre con el cuerpo fijo de masa  $M$  por un lado ( $x \rightarrow 0$ ) y por el otro ( $x \rightarrow 2\pi$ ). La colisión siempre sucede en un tiempo  $t_c$  (*tiempo de colisión*) finito para cualquier valor de  $h$ , es decir, para cualquier tipo de órbita. La razón la exponemos en seguida. De la ecuación (2.8) tenemos que

$$y = \sqrt{2} \sqrt{h + \frac{M}{x} + \frac{M}{2\pi - x}}$$

y recordamos que  $y = dx/dt$ , por lo tanto integramos de ambos lados de la igualdad anterior para obtener

$$\int_{x_o}^x \frac{ds}{\sqrt{h + \frac{2\pi M}{2\pi s - s^2}}} = \int_{t_o}^t \sqrt{2} dr,$$

donde  $x(t_o) = x_o$ . Por otra parte, sabemos que  $\lim_{t \rightarrow t_c} x(t) = 0$  ( $\lim_{t \rightarrow t_c} x(t) = 2\pi$ ) para algún  $t_c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Aplicando estos límites a la igualdad anterior obtenemos

$$\infty > \lim_{x \rightarrow 0(x \rightarrow 2\pi)} \int_{x_o}^x \frac{ds}{\sqrt{h + \frac{2\pi M}{2\pi s - s^2}}} = \lim_{t \rightarrow t_c} \sqrt{2}(t - t_o) = \sqrt{2}(t_c - t_o).$$

Por tanto  $t_c \in \mathbb{R}$ , es decir, las soluciones  $(x(t), y(t))$  están definidas para intervalos máximos, subconjuntos estrictos de  $\mathbb{R}$ , para cualquier valor de  $h$ . Por eso decimos que las soluciones (del tipo elíptico, parabólico e hiperbólico) no se encuentran definidas para todo tiempo, tienden a la singularidad en un tiempo finito.

Con el fin de obtener soluciones bien definidas para todo tiempo hacemos un cambio de variables junto con un cambio en el tiempo, para regularizar el hamiltoniano (2.8).

### 2.3. Regularización del problema de Kepler en $S^1$ .

Notamos en la sección anterior que  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, \pm\infty)$  ( $(x(t), y(t)) \rightarrow (2\pi, \pm\infty)$ ) cuando  $t \rightarrow t_c \in \mathbb{R}$ , lo que significa que las soluciones sólo se encuentran definidas en un intervalo acotado de tiempo, recordando que el espacio de configuración  $\mathcal{Q}$  es acotado. La regularización nos permite continuar las soluciones, convirtiendo las singularidades de la ecuación (2.8) en puntos regulares. Más adelante interpretamos físicamente estos puntos regulares.

La regularización que hacemos a continuación, como explicamos en el capítulo 1 en la sección 1.4, controla la variable velocidad conforme  $t$  se aproxima a  $t_c$  (conforme los cuerpos se aproximan a colisión). Esto se logra mediante un cambio en las coordenadas posición y velocidad y un cambio en el tiempo. Siguiendo [31], el cambio de variables que hacemos tiene la forma

$$x = f(q), \quad \frac{dx}{d\tau} = g(q) \frac{dx}{dt},$$

con  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Este cambio incluye la reparametrización del tiempo, es decir,  $dt/d\tau = g(q)$ . Asumimos que las funciones  $f$  y  $g$  son al menos  $C^1$ . Así, el cambio de coordenadas está dado por la transformación  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{Q} \times \mathbb{R}$ ,

$$(x, y) = E(q, p) = \left( f(q), \frac{p}{g(q)} \frac{df}{dq} \right), \quad (2.9)$$

donde  $q$  es la nueva posición y  $p$  es la nueva velocidad. El nuevo tiempo  $\tau$  corresponde a la reparametrización de  $t$ . Este cambio de coordenadas  $E$  no necesariamente preserva la estructura hamiltoniana del sistema. Para que esto ocurra, las funciones  $f$  y  $g$  deben estar estrechamente relacionadas, como lo mostramos en el siguiente resultado.

**Lema 2.1** *La transformación  $E$  es una regularización simpléctica para el hamiltoniano (2.8) si las funciones  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathcal{Q}$  y  $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  están definidas como*

$$f(q) = \pi \operatorname{sen} q + \pi \quad y \quad g(q) = \pi^2(1 - \operatorname{sen}^2 q).$$

*Demostración.* Calculamos el jacobiano de  $E$ , obteniendo

$$D_{(q,p)}E = \begin{pmatrix} \frac{df}{dq} & 0 \\ \frac{d}{dq} \left( \frac{p}{g(q)} \frac{df}{dq} \right) & \frac{1}{g(q)} \frac{df}{dq} \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la definición 1.3, para que la transformación  $E$  sea simpléctica, debe cumplirse la igualdad  $(D_{(q,p)}E)^T J(D_{(q,p)}E) = J$  y como consecuencia debe satisfacerse la relación

$$\left( \frac{df}{dq} \right)^2 = g(q). \quad (2.10)$$

Por otra parte, tomamos un valor de la energía  $h$  fijo en (2.8). En este nivel de energía introducimos la transformación  $E$  e incluyendo la relación (2.10), logramos la nueva ecuación de la energía

$$H(E(q, p)) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{g(q)} - \frac{2\pi M}{f(q)(2\pi - f(q))} = h. \quad (2.11)$$

Ahora definimos la nueva relación

$$g(q) = f(q)(2\pi - f(q)). \quad (2.12)$$

Multiplicamos la expresión (2.11) por el factor  $g(q)$  (reparametrización del tiempo) para eliminar la singularidad y así obtenemos la ecuación de la energía (2.11) sin singularidad, es decir,

$$\frac{1}{2} p^2 - 2\pi M = h f(q)(2\pi - f(q)). \quad (2.13)$$

Ahora sustituimos  $g(q)$  dado en (2.12) en la ecuación diferencial (2.10) para obtener explícitamente la función  $f(q)$ , así

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dq}\right)^2 &= f(q)(2\pi - f(q)) \\ \Rightarrow \int \frac{df(q)}{\sqrt{f(q)(2\pi - f(q))}} &= q \\ &\Rightarrow -\arcsen\left(\frac{-2f(q) + 2\pi}{2\pi}\right) = q. \end{aligned}$$

Resulta la función  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathcal{Q}$  como está definida en el lema,  $f(q) = \pi \operatorname{sen} q + \pi$ . La función  $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, \pi^2]$  la obtenemos sustituyendo  $f(q)$  en (2.12), por lo tanto  $g(q) = \pi^2(1 - \operatorname{sen}^2 q)$ .

Sustituimos las funciones  $f(q)$  y  $g(q)$  en (2.13) para mostrar que hemos obtenido la nueva ecuación de la energía regularizada

$$\frac{1}{2}p^2 - 2\pi M = h\pi^2 \cos^2 q. \quad (2.14)$$

La relación (2.14) satisface  $p \rightarrow \pm 2\sqrt{M\pi}$  cuando  $x \rightarrow -\pi/2$  ( $x \rightarrow -\pi/2$ ) para todo valor de  $h \in \mathbb{R}$ . En otras palabras, la transformación  $E$  dada en (2.9), con las funciones  $f(q)$  y  $g(q)$  como se obtuvieron, es

$$E(q, p) = \left( \pi \operatorname{sen} q + \pi, \frac{p(\pi \cos q)}{\pi^2(1 - \operatorname{sen}^2 q)} \right) = \left( \pi \operatorname{sen} q + \pi, \frac{p}{\pi(1 - \cos q)} \right).$$

Esta transformación convierte la singularidad  $(0, \pm\infty) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$  (identificada con  $(2\pi, \pm\infty) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ ) en los puntos regulares  $(-\pi/2, \pm 2\sqrt{M\pi}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (identificados con  $(-\pi/2, \pm 2\sqrt{M\pi}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) para todo  $h \in \mathbb{R}$ .

□

Siguiendo el lema 2.1, el nuevo hamiltoniano que define el problema de Kepler en  $S^1$  regularizado, está dado por la función  $\hat{H} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} \rightarrow 0$ ,

$$\hat{H}_h(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - 2\pi M - h\pi^2 \cos^2 q \equiv 0. \quad (2.15)$$

Este es un nuevo hamiltoniano fijo en el nivel de energía cero para cada valor fijo  $h$  en la ecuación (2.8). El nuevo espacio de configuración  $\hat{\mathcal{Q}}$  es  $[-\pi/2, \pi/2]$ . El correspondiente espacio fase está en la figura 2.3, que explicamos en la sección 2.5. Lo que abordamos en la siguiente sección es la obtención de las soluciones explícitas para el problema descrito por (2.15).

## 2.4. Soluciones al problema de Kepler en $S^1$ regularizado.

Las soluciones de la ecuación diferencial (2.15) están en términos de funciones elípticas, cuya definición y breve explicación se encuentra en el capítulo 1 en la sección 1.8.

Para determinar las soluciones, aplicamos separación de variables a la ecuación (2.15) y obtenemos

$$p = \sqrt{2(2\pi M + h\pi^2 \cos^2 q)}.$$

Sabemos que  $p = dq/d\tau$ , por lo que la igualdad anterior la escribimos como

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{dq}{\sqrt{2(2\pi M + h\pi^2 \cos^2 q)}} \\ &= \frac{dq}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(2M + h\pi) \left(1 - \left(\frac{h\pi}{2M + h\pi}\right) \text{sen}^2 q\right)}} \end{aligned}$$

e integrando la última expresión obtenemos una integral elíptica incompleta de primera especie, dada por

$$\sqrt{2\pi} \sqrt{2M + h\pi} \tau = \int_0^q \frac{dr}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 r}},$$

con  $k^2 = h\pi/(2M + h\pi)$  y  $q(0) = 0$ . Para que la integral anterior tenga sentido es necesario que  $0 < k < 1$ , es decir, es necesario que  $h > 0$ . Si este es el caso, entonces

$$\text{sen} q = \text{sn}(\sqrt{2\pi} \sqrt{2M + h\pi} \tau, k). \quad (2.16)$$

Para los casos  $h \leq 0$  resulta que  $k \in (\mathbb{R} \setminus (0, 1))$  y por lo tanto, la integral elíptica incompleta de primera especie no está bien definida. Hacemos una traslación en la coordenada posición  $q + \frac{\pi}{2} = \tilde{q}^1$ . Aplicamos la traslación en (2.15) y obtenemos el nuevo hamiltoniano

$$\tilde{H}_h(\tilde{q}, p) := \frac{1}{2} p^2 - 2\pi M - h\pi^2 \text{sen}^2 \tilde{q} \equiv 0, \quad (2.17)$$

y de este modo el nuevo espacio de configuración  $\tilde{Q}$  es  $[0, \pi]$ . Nuevamente aplicamos separación de variables a la ecuación (2.17) y tenemos

$$p = \sqrt{2(2\pi M + h\pi^2 \text{sen}^2 \tilde{q})},$$

de donde obtenemos

$$d\tau = \frac{d\tilde{q}}{\sqrt{2(2\pi M + h\pi^2 \text{sen}^2 \tilde{q})}}.$$

Integramos la última expresión para conseguir

$$2\sqrt{\pi M} \tau = \int_0^{\tilde{q}} \frac{dr}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 r}}, \quad (2.18)$$

---

<sup>1</sup>Las traslaciones son transformaciones simplécticas.

con  $k^2 = -h\pi/2M$ . Así, las soluciones a (2.17) dependen de resolver la integral dada en (2.18), la cual es una integral elíptica incompleta de primera especie para  $0 < k < 1$ . Como  $k$  depende del parámetro  $h$ , dividimos en varios casos.

- Si  $h \in (-2M/\pi, 0)$ , entonces  $k \in (0, 1)$ , por lo que la solución a la ecuación (2.17) es

$$\text{sen}\tilde{q} = \text{sn}(2\sqrt{\pi M}\tau, k). \quad (2.19)$$

- Para  $h = 0$  resulta que  $k = 0$ , por lo que hacemos el límite sobre la función seno elíptico cuando el módulo tiende a cero, es decir, (2.18) es equivalente a

$$\text{sen}\tilde{q} = \text{sen}(2\sqrt{\pi M}\tau). \quad (2.20)$$

- Para el valor  $h = -2M/\pi$  resulta que  $k = 1$  y de la misma forma que en el caso anterior, hacemos el límite sobre la función seno elíptico cuando el módulo tiende a uno, obteniendo

$$\text{sen}\tilde{q} = \tanh(2\sqrt{\pi M}\tau). \quad (2.21)$$

En este mismo caso está la única solución de equilibrio, dada por  $\tilde{q}(\tau) \equiv \pi/2$ .

- Por último, si  $h \in < -2M/\pi$ , entonces  $k > 1$ . Utilizamos la transformación sobre el módulo  $\mathcal{K} = 1/k$  y así  $\mathcal{K} \in (0, 1)$  y a partir de la igualdad (1.34), obtenemos

$$\begin{aligned} \text{sen}\hat{q} &= \text{sn}(2\sqrt{\pi M}\tau, k) \\ &= \mathcal{K}\text{sn}\left(\frac{2\sqrt{\pi M}\tau}{\mathcal{K}}, \mathcal{K}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2M}{-h\pi}}\text{sn}\left(\pi\sqrt{-2h}\tau, \sqrt{\frac{2M}{-h\pi}}\right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como las funciones (2.15) y (2.17) son primeras integrales para el sistema, las cuales son equivalentes salvo la traslación  $q \mapsto \tilde{q} - \pi/2$ , encontramos las soluciones como funciones de  $\tau$ , para cada valor fijo de la energía  $h$ . Una vez que conseguimos las soluciones de la ecuación (2.17), las soluciones a la ecuación (2.15) están dadas por  $q(\tau) = \tilde{q}(\tau) - \frac{\pi}{2}$ .

Con las soluciones definidas en ciertos intervalos de tiempo podemos extender la dinámica para todo tiempo y esta extensión consiste en “pegar” soluciones: una solución que termina en el instante  $t_c$  con otra que empieza en  $t_c$ , en el mismo nivel de energía  $h$ . Sólo existen dos maneras de “pegar” las soluciones; la primera de éstas es imitando un rebote elástico para el cuerpo libre y la segunda es continuando el movimiento a través del cuerpo fijo, como si no existiera ningún impedimento para continuar su trayectoria.

Dependiendo del tipo de “pegado” que realicemos es la regularidad de la regularización. Si hacemos la continuación de las soluciones simulando un rebote elástico entre las masas

la regularización es de clase  $C^0$  solamente. Esto por que la solución es continua para todo tiempo respecto de la posición, pero su primera derivada no lo es justo en el “pegado” ya que, al representar un rebote, el signo de la velocidad del cuerpo en movimiento cambia instantáneamente. Por otra parte, si continuamos las soluciones como si atravesáramos el cuerpo fijo, la regularización resulta ser al menos  $C^1$ . Como no consideramos este planteamiento en el presente trabajo no ahondamos más en el tema.

Congruentes con la interpretación física del problema, escribimos las soluciones con el “pegado” que involucra a los rebotes elásticos. Para continuar las soluciones en este sentido, explotamos las simetrías y periodicidades de las funciones elípticas. Además, tenemos presente que la función raíz cuadrada y la inversa de la función seno son funciones multivaluadas; seleccionamos previamente el rango adecuado: el intervalo  $[0, \infty)$  es el rango para la raíz cuadrada y  $[-\pi/2, \pi/2]$  es el rango para la inversa de la función seno. Como lo hicimos en la sección 2.2, clasificamos las soluciones según el valor de  $h$ .

1. Para  $h > -2M/\pi$  obtenemos las soluciones que llamamos *soluciones hiperbólicas*, dadas por tres tipos de funciones que denotamos por  $q_{H1}$ ,  $q_{H2}$  y  $q_{H3}$ .

- Si  $h \in (-2M/\pi, 0)$ , siguiendo (2.19),

$$q_{H1}(\tau) = \begin{cases} \arcsen\left(\operatorname{sn}\left(2\sqrt{\pi M}\tau, \sqrt{\frac{-h\pi}{2M}}\right)\right) - \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in A_{m1}, \\ -\arcsen\left(\operatorname{sn}\left(2\sqrt{\pi M}\tau, \sqrt{\frac{-h\pi}{2M}}\right)\right) + \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in A_{m2}, \\ -\arcsen\left(\operatorname{sn}\left(-2\sqrt{\pi M}\tau, \sqrt{\frac{-h\pi}{2M}}\right)\right) + \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in B_{m1}, \\ \arcsen\left(\operatorname{sn}\left(-2\sqrt{\pi M}\tau, \sqrt{\frac{-h\pi}{2M}}\right)\right) - \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in B_{m2}. \end{cases}$$

- Si  $h = 0$ , de la expresión (2.20),

$$q_{H2}(\tau) = \arcsen(\operatorname{sen}(2\sqrt{\pi M}\tau)),$$

para toda  $\tau \in \mathbb{R}$ .

- Si  $h \in (0, \infty)$ , de la expresión (2.16),

$$q_{H3}(\tau) = \arcsen\left(\operatorname{sn}\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{2M+h\pi}\tau, \sqrt{\frac{h\pi}{2M+h\pi}}\right)\right),$$

para toda  $\tau \in \mathbb{R}$ .

2. Para  $h = -2M/\pi$  obtenemos las soluciones que llamamos *soluciones parabólicas*, que a partir de (2.21) son de dos tipos, que denotamos por  $q_{P1}$  y por  $q_{P2}$ :

$$q_{P1}(\tau) = \begin{cases} \arcsen(\operatorname{tanh}(2\sqrt{\pi M}\tau)) - \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in [0, \infty), \\ \arcsen(\operatorname{tanh}(-2\sqrt{\pi M}\tau)) - \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

y

$$q_{P2}(\tau) = \begin{cases} -\arcsen(\operatorname{tanh}(2\sqrt{\pi M}\tau)) + \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in [0, \infty), \\ -\arcsen(\operatorname{tanh}(-2\sqrt{\pi M}\tau)) + \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Además, en este nivel de energía está la única *solución de equilibrio*,  $q(\tau) = 0$  para toda  $\tau \in \mathbb{R}$ .

3. Para  $h \in (-\infty, -2M/\pi)$ , obtenemos las soluciones que llamamos *soluciones elípticas*, dadas a partir de (2.22), las cuales pueden ser de dos tipos, que denotamos por  $q_{E1}$  y  $q_{E2}$ :

$$q_{E1}(\tau) = \begin{cases} \arcsen\left(\sqrt{\frac{2M}{-h\pi}} \operatorname{sn}\left(\pi\sqrt{-2h}\tau, \sqrt{\frac{2M}{-h\pi}}\right)\right) - \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in A_m, \\ \arcsen\left(\sqrt{\frac{2M}{-h\pi}} \operatorname{sn}\left(-\pi\sqrt{-2h}\tau, \sqrt{\frac{2M}{-h\pi}}\right)\right) - \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in B_m. \end{cases}$$

y

$$q_{E2}(\tau) = \begin{cases} -\arcsen\left(\sqrt{\frac{2M}{-h\pi}} \operatorname{sn}\left(\pi\sqrt{-2h}\tau, \sqrt{\frac{2M}{-h\pi}}\right)\right) + \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in A_m, \\ -\arcsen\left(\sqrt{\frac{2M}{-h\pi}} \operatorname{sn}\left(-\pi\sqrt{-2h}\tau, \sqrt{\frac{2M}{-h\pi}}\right)\right) + \frac{\pi}{2}, & \text{si } \tau \in B_m. \end{cases}$$

Definimos los intervalos

$$\begin{aligned} A_m &= [2mT_h, (2m+1)T_h], & B_m &= [(2m-1)T_h, 2mT_h], \\ A_{m1} &= [2m(T_h/2), 2m(T_h/2) + T_h/4], & A_{m2} &= [2m(T_h/2) + T_h/4, (2m+1)T_h/2], \\ B_{m1} &= [(2m-1)T_h/2, 2m(T_h/2) - T_h/4], & B_{m2} &= [2m(T_h/2) - T_h/4, 2m(T_h/2)], \end{aligned}$$

donde  $m \in \mathbb{Z}$  y  $T_h$  el período correspondiente de cada solución, según el nivel de energía en el que está definida.

Los períodos  $T_h$  los calculamos mediante una integral elíptica completa de primera especie (véase la sección 1.8) y a continuación proporcionamos el cálculo respectivo para obtener el período,

$$T_h = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{-2h}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2M}{-h\pi} \operatorname{sen}^2\theta}}, & \text{si } h \in (-\infty, -\frac{2M}{\pi}), \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{h\pi}{2M} \operatorname{sen}^2\theta}}, & \text{si } h \in (-\frac{2M}{\pi}, 0), \\ \sqrt{\pi}, & \text{si } h = 0, \\ \frac{4}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2M+h\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{h\pi}{2M+h\pi} \operatorname{sen}^2\theta}}, & \text{si } h \in (0, \infty). \end{cases}$$

Más adelante, en la sección 2.6, explicamos el comportamiento cualitativo de cada una de las soluciones. Para finalizar esta sección, a manera de resumen, escribimos los resultados obtenidos hasta el momento.

**Teorema 2.1** *El problema de Kepler en  $S^1$  presenta las siguientes soluciones, según el nivel de energía  $h$ :*

- *Soluciones elípticas  $q_{E1}(\tau)$  y  $q_{E2}(\tau)$  para  $h \in (-\infty, -2M/\pi)$ , con período  $T_h$ .*
- *Soluciones parabólicas  $q_{P1}(\tau)$  y  $q_{P2}(\tau)$  y la solución de equilibrio  $q(\tau) \equiv 0$  para  $h = -2M/\pi$ .*
- *Soluciones hiperbólicas  $q_{H1}(\tau)$ ,  $q_{H2}(\tau)$  y  $q_{H3}(\tau)$  para  $h \in (-2M/\pi, \infty)$ , con período  $T_h$ .*

## 2.5. Análisis cualitativo del problema de Kepler en $S^1$ regularizado.

Realizando el “pegado” de soluciones que involucra a los rebotes elásticos, observamos que el sistema determinado por la ecuación (2.15) presenta movimientos periódicos siempre que  $h \neq -2M/\pi$ . Es decir, tanto las soluciones hiperbólicas como las elípticas son soluciones periódicas.

- Las soluciones hiperbólicas representan movimientos del cuerpo libre con un recorrido completo del círculo entre cada rebote con el cuerpo fijo.
- Las soluciones elípticas representan movimientos del cuerpo con un recorrido menor a la mitad del círculo entre cada rebote con el cuerpo fijo.

Las únicas soluciones no periódicas son las parabólicas, que representan movimientos del cuerpo libre asintóticos al punto de equilibrio para tiempo infinito (positivo y negativo), rebotando una sola vez el cuerpo libre con el cuerpo fijo.

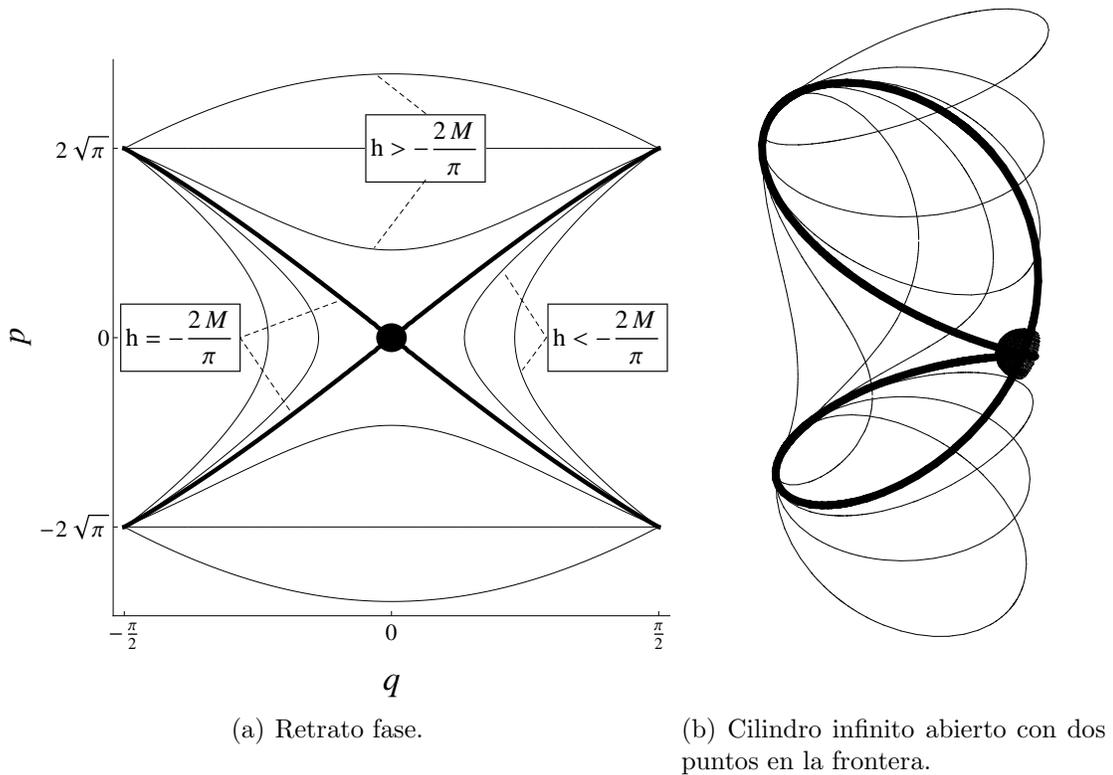


Figura 2.3: Órbitas del problema de Kepler en  $S^1$  regularizado.

En la figura 2.3 mostramos el espacio fase de las órbitas determinadas por las soluciones al problema de Kepler en  $S^1$  regularizado. El espacio fase está definido en

$$\left\{ \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{\pi}{2}, 2\sqrt{\pi M} \right), \left( -\frac{\pi}{2}, -2\sqrt{\pi M} \right), \left( \frac{\pi}{2}, 2\sqrt{\pi M} \right), \left( \frac{\pi}{2}, -2\sqrt{\pi M} \right) \right\}.$$

La estructura topológica del espacio fase corresponde a un cilindro infinito abierto con dos puntos en la frontera, como mostramos en la figura 2.3.

## 2.6. Soluciones del problema de 2 cuerpos en $S^1$ regularizado y su dinámica cualitativa.

Conocemos  $q(\tau)$  para cada nivel de energía en el problema de Kepler en  $S^1$  regularizado y por consiguiente podemos mostrar las soluciones para el sistema (2.6), pero regularizado. Recordamos que el sistema (2.6) es el problema de 2 cuerpos en  $S^1$  con centro en el centro de masa, por lo que definimos las respectivas variables regularizadas con origen en el centro de masa:

$$q_{cm_1}(\tau) = -\frac{m_2}{M}q(\tau), \quad q_{cm_2}(\tau) = \frac{m_1}{M}q(\tau). \quad (2.23)$$

Sabemos que el espacio de configuración para  $q$  es  $\hat{\mathcal{Q}} = [-\pi/2, \pi/2]$ , entonces los respectivos espacios de configuración para  $q_{cm_1}$  y para  $q_{cm_2}$  corresponden a los intervalos  $[-(m_2\pi)/(2M), (m_2\pi)/(2M)]$  y  $[-(m_1\pi)/(2M), (m_1\pi)/(2M)]$ . Pero estos espacios de configuración están sobrepuestos debido a la regularización realizada. Además el centro de masa del sistema (2.6) está, después de la regularización, en  $\pi/2$  ( $-\pi/2$ ). Por estas razones trasladamos (2.23) sobre  $S^1$  para que correspondan físicamente con los espacios de configuración respectivos a  $\theta_{cm_1}$  y  $\theta_{cm_2}$  mencionados en la sección 2.1. Así definimos

$$q_1 = q_{cm_1} + \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{m_2}{M} \right) \quad y \quad q_2 = q_{cm_2} - \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right),$$

por lo tanto,

$$q_1 \in \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{m_1 - m_2}{M} \right), \frac{\pi}{2} \right] \quad y \quad q_2 \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \left( \frac{m_1 - m_2}{M} \right) \right].$$

Las colisiones suceden en el centro de masa ( $cm$ ) fijo en  $\pi/2$  ( $-\pi/2$ ) y en el centro de masa ficticio ( $cmf$ ) ubicado en  $(\pi/2)[(m_1 - m_2)/M]$ . Véase la figura 2.4.

Finalmente podemos enunciar un teorema que engloba todos los resultados anteriores y que muestra explícitamente las soluciones al problema de 2 cuerpos en  $S^1$  regularizado.

**Teorema 2.2** *El problema de 2 cuerpos en  $S^1$  con centro de masa fijo tiene las siguientes soluciones:*

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= -\frac{m_2}{M}q(\tau) + \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{m_2}{M} \right), \\ q_2(\tau) &= \frac{m_1}{M}q(\tau) - \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{m_1}{M} \right), \end{aligned}$$

siendo  $q(\tau)$  la solución al problema de Kepler en  $S^1$  regularizado del teorema 2.1.

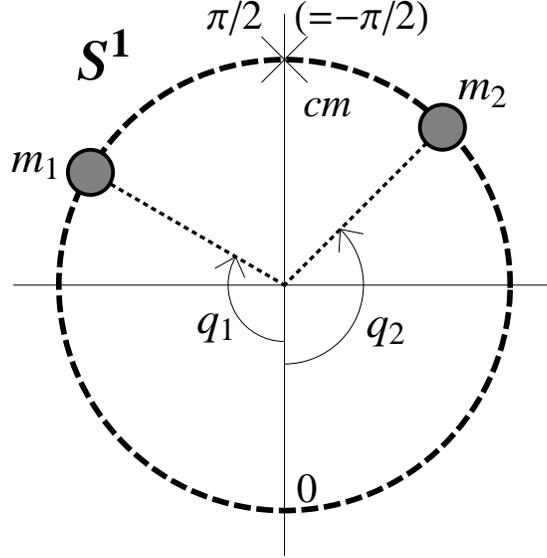


Figura 2.4: *Problema de 2 cuerpos en  $S^1$  regularizado con centro en el centro de masa ( $cm$ ).*

La dinámica en el problema de 2 cuerpos en  $S^1$  regularizado consiste de movimientos periódicos en el caso en que  $q(\tau)$  es cualquier solución hiperbólica ( $q(\tau) = q_{Hi}(\tau)$  con  $i = 1, 2, 3$ ) o elíptica ( $q(\tau) = q_{Ei}(\tau)$ ,  $i = 1, 2$ ), además de que  $q(\tau)$  puede ser la solución de equilibrio.

- En el caso en que la solución  $q(\tau)$  es hiperbólica, significa que los cuerpos rebotan en el centro de masa y recorren en direcciones opuestas  $S^1$  hasta rebotar nuevamente en el centro de masa ficticio, después regresan en direcciones opuestas al centro de masa otra vez y repiten el movimiento indefinidamente.
- El caso en que la solución  $q(\tau)$  es elíptica, representa para los cuerpos dos clases de movimientos y en ambos casos, los cuerpos rebotan periódicamente recorriendo menos de la mitad del espacio  $S^1$  entre cada rebote. Una clase de movimiento es cuando la colisión sucede en el centro de masa (cuando  $q(\tau) = q_{E1}(\tau)$ ) y la otra clase de movimiento es cuando la colisión sucede en el centro de masa ficticio (cuando  $q(\tau) = q_{E2}(\tau)$ ).
- La solución de equilibrio  $q(\tau) \equiv 0$  representa posiciones fijas (*posiciones de equilibrio*) para todo tiempo para los dos cuerpos. La posición fija para el cuerpo de masa  $m_1$  es  $(\pi/2)(1 - m_2/M)$  y para el cuerpo de masa  $m_2$  es  $(-\pi/2)(1 - m_1/M)$ , las cuales son posiciones diametralmente opuestas.

Por otro lado, si la solución  $q(\tau)$  fuera parabólica, entonces los movimientos de los cuerpos son asintóticos a las posiciones de equilibrio de estos para tiempo infinito (positivo o negativo), existiendo un rebote en todo el movimiento. Y de igual manera que ocurre con las soluciones elípticas, hay dos clases de movimientos, dependiendo del

lugar donde se lleva a cabo el rebote elástico. Por un lado en el centro de masa del sistema (cuando  $q(\tau) = q_{P1}(\tau)$ ) y por otro lado en el centro de masa ficticio (cuando  $q(\tau) = q_{P2}(\tau)$ ).

De esta forma, tenemos descrita la dinámica global de los cuerpos que conforman el problema de 2 cuerpos en  $S^1$  regularizado.

## 2.7. El péndulo simple en el plano.

Planteamos de manera breve *el péndulo simple en el plano*, para explicar la relación existente entre éste y el problema de Kepler en  $S^1$  regularizado. Sugerimos revisar [32] (pp. 98 - 156) para un estudio más completo sobre *el péndulo simple*.

*El péndulo simple en el plano* consiste de un cuerpo puntual de masa  $m$  sometido a la fuerza de gravedad y en la que no se consideran otro tipo de fuerzas, con la restricción de movimiento a un plano. Este cuerpo se encuentra suspendido en el extremo de una cuerda inextensible de longitud  $l$  y de masa despreciable, cuyo otro extremo se encuentra fijo; véase la figura 2.5. Este es un sistema mecánico conservativo y escribimos la ecuación de la energía correspondiente:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E. \quad (2.24)$$

La posición del cuerpo de masa  $m$  está dada por el ángulo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  medido a partir de un eje vertical y en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 2.5. La velocidad respecto del tiempo está indicada por el punto sobre  $\theta$ . La constante  $E$  corresponde a la energía del sistema y  $g$  corresponde a la constante de gravedad, que en adelante la consideramos igual a 1.

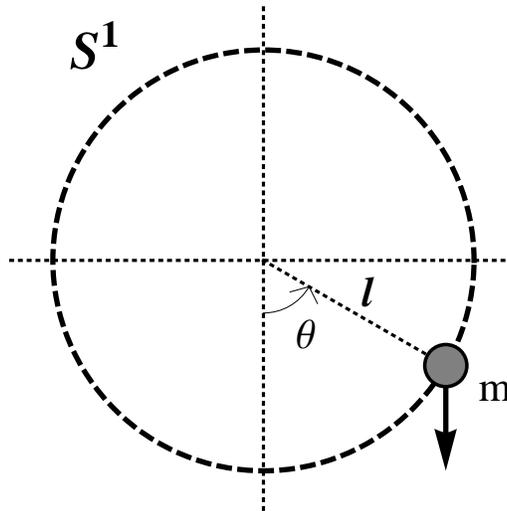


Figura 2.5: *El péndulo simple en el plano.*

Manipulamos algebraicamente la ecuación (2.24) y utilizamos la identidad trigonométrica  $\cos A = 1 - 2\text{sen}^2(A/2)$ , para obtener

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{l}\left(1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{E - ml}{ml^2}. \quad (2.25)$$

Hacemos los cambios de variables  $q = \theta/2$  y  $p = \dot{q}$  para escribir (2.25) como un sistema hamiltoniano, con función de Hamilton  $H : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2l}\text{sen}^2 q = \frac{E}{4ml^2}, \quad (2.26)$$

donde el espacio de configuración  $\mathcal{Q}$  es  $(-\pi/2, \pi/2]$ .

**Teorema 2.3** *El problema de Kepler en  $S^1$  regularizado es un péndulo simple en el plano para cada nivel de energía  $h$ .*

*Demostración.* Comparamos la ecuación (2.17) correspondiente al problema de Kepler en  $S^1$  regularizado con la ecuación (2.26) correspondiente al péndulo simple. Ambas están definidas para  $q \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Si en la ecuación (2.26) hacemos las sustituciones  $l = -1/(2h\pi^2)$ ,  $E = 2M^2/h^2\pi^3$  y  $m = M$  obtenemos la ecuación (2.17). En otras palabras, para cada valor fijo  $h$  en (2.17) estamos representando un péndulo simple en el plano con longitud de cuerda  $l = -1/(2h\pi^2)$ , con energía  $E = 2M^2/h^2\pi^3$  y con masa  $m = M$ .

Definimos las funciones  $l : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $E : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$  y también  $T : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0, \infty)$  como

$$l(h) = -\frac{1}{2h\pi^2}, \quad E(h) = \frac{2M^2}{h^2\pi^3} \quad \text{y} \quad T(h) = \left(l(h), E(h)\right).$$

La función  $T$  es biyectiva porque la función  $l(h)$  es biyectiva y  $E(h)$  es sobreyectiva. Así estamos mostrando que para cada valor de la energía  $h$  en el problema de Kepler en  $S^1$  regularizado está asociado un único péndulo simple en el plano en un nivel de energía  $E$ .

Partimos en tres casos.

- Caso  $h < 0$ . Para cada valor  $h$  tenemos un péndulo simple en el plano de masa  $M$ , con longitud de cuerda  $l = -1/(2h\pi^2)$  y nivel de energía  $E = 2M^2/h^2\pi^3$ .
- Caso  $h > 0$ . En este caso también tenemos un péndulo simple, pero invertido. Para entender esto, recordemos que las coordenadas en las que está definido el péndulo simple son las coordenadas polares, donde la distancia al polo (origen radial) es constante, correspondiendo a la longitud de la cuerda. De esta forma, la ecuación (2.17) determina un péndulo simple con longitud de cuerda negativa. Si bien, esto no tiene sentido físico, en términos matemáticos si lo tiene. El cuerpo suspendido de la cuerda se encuentra en el punto diametralmente opuesto al correspondiente  $l = |-1/(2h\pi^2)|$  con energía  $E = 2M^2/h^2\pi^3$ . En otros términos, la gráfica de la

función  $F(q) = (\text{sen}^2 q)/2l$ , que hace las veces de potencial en la ecuación (2.26), se invierte respecto del eje  $q$ , por lo que los puntos máximos ahora son mínimos y los puntos mínimos ahora son máximos. Esto impacta en la estabilidad de los puntos de equilibrio, convirtiendo en inestable el punto estable y viceversa.

- Caso  $h = 0$ . Este es un caso degenerado que separa los dos casos anteriores. Como en  $h = 0$  las funciones  $l(h)$  y  $E(h)$  no están definidas, tomamos los límites  $h \rightarrow 0^+$  y  $h \rightarrow 0^-$ . De esta manera,  $l \rightarrow -\infty$  y  $l \rightarrow +\infty$  respectivamente y  $E \rightarrow +\infty$ . Esta información en la ecuación (2.17) nos dice que el cuerpo de masa en el problema de Kepler en  $S^1$  regularizado se mueve con velocidad angular constante. En la ecuación (2.26), estos datos eliminan a  $F(q)$ , es decir, hacen cero la función relacionada con el potencial del sistema. Esto quiere decir que el péndulo no estaría sujeto a ninguna fuerza y por lo tanto el movimiento es uniforme en la coordenada angular.

□

# Capítulo 3

## Regularización global y simpléctica en espacios unidimensionales de curvatura 0 ó 1.

En este capítulo presentamos una generalización de la regularización simpléctica utilizada en el capítulo anterior para el problema de 2 cuerpos en  $S^1$ . Esta regularización funciona para las singularidades debidas a colisiones binarias que se presentan en una clase especial de problemas restringidos de 3 cuerpos con la característica de que preserva la estructura hamiltoniana del problema. Las colisiones binarias que se regularizarán son aquellas en las que interviene el cuerpo con masa infinitesimal con alguna de los cuerpos primarios, en donde todos los cuerpos están constreñidos a moverse en un espacio de una dimensión con curvatura 0 ó 1 (recta o círculo).

### 3.1. Problema restringido de 3 cuerpos en espacios de dimensión uno con curvatura 0 ó 1.

Comenzamos planteando el problema de  $n$  cuerpos, como está definido en el capítulo en la sección 1.3, es decir, consideramos el sistema

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{G m_i m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3}, \quad (3.1)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), donde  $\|\cdot\|$  indica una norma adecuada.

La regularización que desarrollamos a continuación la aplicamos para el movimiento de la masa infinitesimal en el problema restringido de 3 cuerpos, como está definido en el capítulo 1 sección 1.6, dispuesto en un espacio de una dimensión con curvatura 0 ó 1. De esta forma estamos estudiando el problema restringido de 3 cuerpos planteado en una línea recta o en un círculo de radio uno. Siguiendo (3.1) escribimos la ecuación de

movimiento para la partícula infinitesimal, con posición  $x$ , como

$$\ddot{x} = \sum_{i=1}^K \frac{m_i(x_i(t) - x)}{|x_i(t) - x|^3} - \sum_{j=K+1}^{K+L} \frac{m_j(x - x_j(t))}{|x - x_j(t)|^3}. \quad (3.2)$$

Las funciones  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, K+L$ , son las posiciones de los cuerpos primarios definidas previamente. Todas las variables están en  $\mathbb{R}$  y por lo tanto podemos suponer, sin perder generalidad, que

$$x_1(t) \geq \dots \geq x_K(t) \geq x \geq x_{K+1}(t) \geq \dots \geq x_{K+L}(t),$$

con  $K \in \{0, 1, 2\}$  y  $L \in \{2 - K, 2\}$ . Hacemos  $y = \dot{x}$  para escribir (3.2) como un sistema hamiltoniano con la función de Hamilton  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$H(x, y, t) = \frac{y^2}{2} - \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{x_i(t) - x} - \sum_{i=K+1}^{K+L} \frac{m_i}{x - x_i(t)}. \quad (3.3)$$

Enfatizamos que debido a que el problema está en un espacio unidimensional es posible distinguir entre fuerzas positivas y fuerzas negativas como está en la ecuación (3.2) y en este sentido, la energía potencial en el hamiltoniano (3.3) dada por la función  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$V(x, t) = - \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{x_i(t) - x} - \sum_{i=K+1}^{K+L} \frac{m_i}{x - x_i(t)},$$

está compuesta por dos sumas, una formada por todos los términos que se derivan de las fuerzas positivas actuando sobre la partícula infinitesimal y otra formada por aquellos términos que provienen de las fuerzas negativas.

Ahora evidenciamos que las ecuaciones que acabamos de escribir efectivamente representan las ecuaciones de movimiento para el problema que nos concierne, ya sea en una recta (la recta real  $\mathbb{R}$ ) o en un círculo de radio uno ( $S^1$ ).

- Si el problema se encuentra dispuesto en la recta  $\mathbb{R}$ , el cuerpo de masa infinitesimal es atraído por cada cuerpo primario en una sola dirección; los cuerpos primarios con posición  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , atraen en dirección positiva al cuerpo secundario y los cuerpos primarios  $x_j$ ,  $j = K + 1, \dots, K + L$ , lo hacen en dirección negativa. En este caso  $L = 2 - K$  y la métrica que consideramos es la norma euclídeana; véase la figura 3.1.
- Si el problema está dispuesto en  $S^1$ , el cuerpo secundario es atraído hacia dos direcciones por cada cuerpo primario, debido a la naturaleza del espacio, tal como hicimos en el planteamiento del problema de 2 cuerpos en  $S^1$  en el capítulo 2 (véase la figura 3.1). Así, cada cuerpo primario atrae en sentido positivo y en sentido negativo al cuerpo secundario. En otras palabras, la fuerza total que actúa sobre la masa infinitesimal debido al cuerpo primario de masa  $m_j$  está compuesta por dos fuerzas, una positiva y otra negativa, dadas por

$$F_j(x, x_j(t)) = \begin{cases} m_j \frac{x_j(t) - x}{|x_j(t) - x|^3} - m_j \frac{2\pi - (x_j(t) - x)}{|2\pi - (x_j(t) - x)|^3} & x_j(t) \geq x, \\ -m_j \frac{x - x_j(t)}{|x - x_j(t)|^3} + m_j \frac{2\pi - (x - x_j(t))}{|2\pi - (x - x_j(t))|^3} & x_j(t) \leq x. \end{cases} \quad (3.4)$$

Si hacemos los cambios  $y_i(t) = x_j(t)$  junto con  $y_k(t) = x_j(t) - 2\pi$  o  $y_k(t) = 2\pi + x_j(t)$  con los subíndices adecuados, obtenemos dos términos como los que están en la ecuación (3.2). En este caso, las variables  $x_j$  están medidas en radianes, la norma corresponde a la longitud de arco,  $K = 2$  y por lo tanto  $L = 2$ . Además, en las ecuaciones (3.2) y (3.3) las masas  $m_1$  y  $m_2$  aparecen dos veces, pero con otro subíndice, pero sabemos que  $m_1 = m_3$  y  $m_2 = m_4$ , a partir de (3.4).

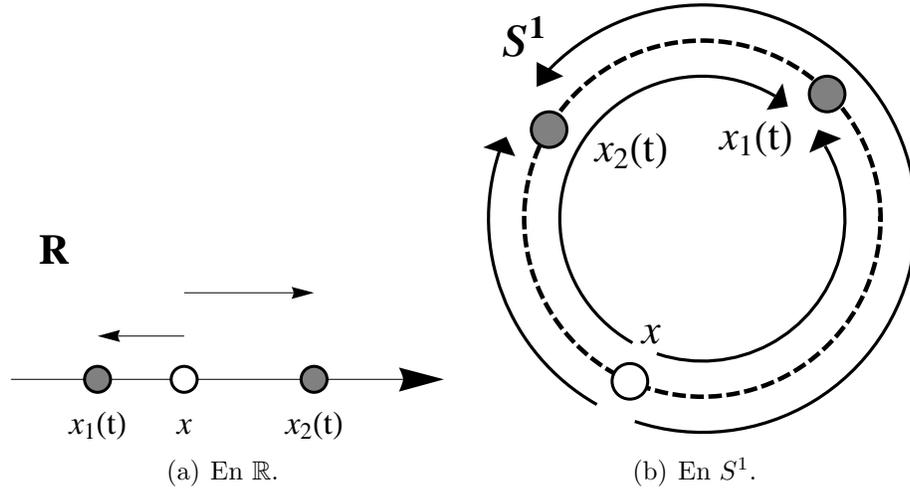


Figura 3.1: Líneas de acción de las fuerzas para el problema de 3 cuerpos restringido en  $\mathbb{R}$  y en  $S^1$ .

Aclaremos que la forma en la que planteamos las líneas de acción de las fuerzas, como están representadas en la figura 3.1, no es única. La discusión sobre la elección del potencial en el hamiltoniano 3.3 está en la introducción de este trabajo.

## 3.2. Regularización global y simpléctica.

El objetivo en este capítulo es la regularización del hamiltoniano (3.3) de forma global y simpléctica. El espacio de configuración para el cuerpo secundario es  $\mathcal{Q} = W \setminus \Delta$ , con  $W$  un subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$  o de  $S^1$  según sea el caso ( $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}$  o  $\mathcal{Q} \subset S^1$  según sea el caso). El conjunto de singularidades está dado por  $\Delta = \{x | x = x_i, i = 1, \dots, K + L\}$  y este conjunto contiene tanto las singularidades debidas a colisiones dobles como aquellas que son debidas a colisión triple. Las singularidades que removemos son las que provienen de colisiones dobles, es decir, haremos un conjunto regular el conjunto definido como  $\Delta_{K,K+1} = \{x | x = x_K \circ x = x_{K+1}\}$ , sabiendo que  $\Delta_{K,K+1} \subset \Delta$ . Escribimos nuevamente el conjunto de singularidades debidas a colisiones dobles, pero ahora hacemos evidente la dependencia explícita respecto del tiempo,

$$\Delta_{K,K+1}(t) = \{x | x = x_K(t) \circ x = x_{K+1}(t)\},$$

enfatisando que este conjunto depende de las posiciones que presentan los cuerpos primarios en el tiempo  $t$ .

El término “global” en este contexto significa que mediante una transformación de coordenadas convertimos todas las singularidades de interés, es decir, aplicamos la misma operación para todas las singularidades. El término simpléctico significa que conservamos la estructura hamiltoniana de las ecuaciones. Realmente, lo que hacemos es convertir las singularidades en puntos regulares, simulando un rebote elástico entre los cuerpos o suponiendo que no existe impedimento para continuar el movimiento en la misma dirección, pegando las soluciones que terminan en colisión con las soluciones adecuadas que comienzan en expulsión. De esta forma, vamos a poner especial atención en los términos que contienen  $x_K$  y  $x_{K+1}$  en el hamiltoniano (3.3), porque en estos términos se encuentran las singularidades que vamos a tratar.

Al igual que hicimos en el capítulo anterior, retomamos las ideas que se muestran en [31]. Comenzamos introduciendo el cambio de variables donde incluimos la dependencia explícita del tiempo, porque a diferencia de lo que hicimos en el capítulo 2 sección 2.3, las singularidades dependen explícitamente del tiempo. El cambio está definido por las funciones  $f : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$q = f(x, t) \quad y \quad \frac{dx}{ds} = g(x, t) \frac{dx}{dt}. \quad (3.5)$$

La segunda ecuación en (3.5) indica una reparametrización del tiempo, es decir,

$$\frac{dt}{ds} = g(x, t). \quad (3.6)$$

Suponemos que las funciones  $f$  y  $g$  son al menos de clase  $C^1$ . Directamente escribimos la transformación de coordenadas  $E : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  como

$$E(x, y, t) = \left( f(x, t), g(x, t) \left( \frac{\partial f}{\partial x} y + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) = (q, p). \quad (3.7)$$

Ahora  $(q, p)$  son las nuevas coordenadas, posición y velocidad, para el cuerpo secundario en el nuevo tiempo  $s$ .

**Teorema 3.1** *La transformación  $E$  es una regularización global y simpléctica para el hamiltoniano  $H$  dado por (3.3) si las funciones  $g : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  están definidas como*

$$g(x, t) = a(x_K(t) - x)^\alpha (x - x_{K+1}(t))^\beta \quad y \quad f(x, t) = \int \frac{dx}{\sqrt{g(x, t)}},$$

para valores  $\alpha, \beta \in \{0, 1, \dots\}$ , con  $\alpha + \beta > 0$  y  $a > 0$ .

*Demostración.* Comenzamos por mostrar que la transformación  $E$  es simpléctica. Denotamos por  $J$  la matriz simpléctica y por  $D_{(x,y)}E$  la matriz jacobiana de  $E$ , entonces

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{(x,y)}E = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ g(x, t) \left( y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] & g(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la definición 1.3, la transformación  $E$  es simpléctica si y solamente si se cumple  $(D_{(x,y)}E)^T J(D_{(x,y)}E) = J$ , donde  $(\cdot)^T$  significa la transpuesta de la matriz. Operando esta condición sabemos que  $E$  es simpléctica si se cumple la relación

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 g(x, t) = 1,$$

por tanto,

$$f(x, t) = \int \frac{dx}{\sqrt{g(x, t)}}.$$

Una vez que la condición de simplecticidad ha quedado establecida, podemos hablar de la inversa de  $E$  (localmente), aquella transformación  $Z : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q} \times \mathbb{R}$  tal que  $Z(E(x, y, t), t) = (x, y)$ . Luego introducimos el cambio de variables en el hamiltoniano (3.3) obteniendo el nuevo hamiltoniano  $\mathcal{H} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q, p, s) &:= H(Z(q, p, t), t) + R(q, p, t) & (3.8) \\ &= H\left(f^{-1}(q, t), \frac{p}{\sqrt{g(f^{-1}(q, t), t)}} - \frac{\partial f}{\partial t} \sqrt{g(f^{-1}(q, t), t)}, t\right) + R(q, p, t) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{p}{\sqrt{g(f^{-1}(q, t), t)}} - \frac{\partial f}{\partial t} \sqrt{g(f^{-1}(q, t), t)} \right)^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{x_i(t) - f^{-1}(q, t)} - \sum_{i=K+1}^{K+L} \frac{m_i}{f^{-1}(q, t) - x_i(t)} + R(q, p, t). \end{aligned}$$

La función resto  $R(q, p, t)$  ( $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) se agrega ya que la transformación  $E$  depende explícitamente del tiempo  $t$  (véase el capítulo 1 la sección 1.2). Es importante resaltar que el nuevo hamiltoniano depende del nuevo tiempo  $s$ , manteniendo en mente la relación (3.6).

Definimos la nueva relación

$$g(x, t) = a(x_K(t) - x)^\alpha (x - x_{K+1}(t))^\beta.$$

Multiplicamos la ecuación (3.8) por el factor  $g(x, t)$  para obtener la regularización del hamiltoniano  $\mathcal{H}$ . Para facilitar la manipulación algebraica introducimos la notación  $A = (x_K(t) - f^{-1}(q, t))$  y  $B = (f^{-1}(q, t) - x_{K+1}(t))$ , así

$$\begin{aligned} aA^\alpha B^\beta \mathcal{H}(q, p, s) &= \frac{p^2}{2} + aA^\alpha B^\beta p \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} (aA^\alpha B^\beta)^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{aA^\alpha B^\beta m_i}{x_i(t) - f^{-1}(q, t)} - \sum_{i=K+2}^{K+L} \frac{aA^\alpha B^\beta m_i}{f^{-1}(q, t) - x_i(t)} \\ &\quad - m_K aA^{\alpha-1} B^\beta - m_{K+1} aA^\alpha B^{\beta-1} + aA^\alpha B^\beta R(q, p, t). \end{aligned}$$

Pasando todos los términos del lado derecho de la última igualdad obtenemos un nuevo hamiltoniano regularizado en el nivel fijo de energía cero, es decir, la nueva función  $\tilde{\mathcal{H}} : \tilde{\mathcal{Q}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow 0$  es

$$\begin{aligned}
0 \equiv \tilde{\mathcal{H}}(q, p, s) &= \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}aA^{2\alpha}B^{2\beta} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + aA^\alpha B^\beta p \frac{\partial f}{\partial t} \\
&\quad - m_K aA^{\alpha-1} B^\beta - m_{K+1} aA^\alpha B^{\beta-1} - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{aA^\alpha B^\beta m_i}{x_i(t) - f^{-1}(q, t)} \\
&\quad - \sum_{i=K+2}^{K+L} \frac{aA^\alpha B^\beta m_i}{f^{-1}(q, t) - x_i(t)} + aA^\alpha B^\beta R(q, p, t) - aA^\alpha B^\beta \mathcal{H}(q, p, s). \quad (3.9)
\end{aligned}$$

El espacio de configuración  $\mathcal{Q} = W \setminus \Delta$  quedó transformado en  $\tilde{\mathcal{Q}}$ .

Hemos quitado las dos singularidades debidas a colisiones binarias con una sola transformación de variables, por eso decimos que  $E$  es global. El nuevo hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}$  depende del hamiltoniano anterior  $\mathcal{H}$  que no es una primera integral.

El último paso es la determinación de la función resto. A partir de la sección 1.2 sabemos que

$$\left. \frac{\partial E}{\partial t}(x, y, t) \right|_{(x,y)=Z(q,p,t)} = J\nabla_{(q,p)} R(q, p, t),$$

por lo que basta hacer los cálculos indicados y obtenemos

$$\begin{aligned}
R(q, p, t) &= - \int \left( \left. \frac{\partial E_2}{\partial t}(x, y, t) \right|_{(x,y)=Z(q,p,t)} \right) dq + \int \left( \left. \frac{\partial E_1}{\partial t}(x, y, t) \right|_{(x,y)=Z(q,p,t)} \right) dp \\
&\quad + \int \left( \frac{\partial}{\partial p} \left( \int \left[ \left. \frac{\partial E_2}{\partial t}(x, y, t) \right|_{(x,y)=Z(q,p,t)} \right] dq \right) \right) dp + C(t), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

donde  $E(x, y, t) = (E_1(x, y, t), E_2(x, y, t))$  y  $C(t)$  es una constante de integración. □

De esta manera, la ecuación (3.9) describe la dinámica para el cuerpo secundario para todo tiempo, mientras que no ocurran más que colisiones binarias entre los primarios y el cuerpo de masa despreciable.

El siguiente corolario muestra los tipos de transformaciones que se obtienen al variar los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en el teorema 3.1.

**Corolario 3.1** *Con las mismas hipótesis del teorema 3.1:*

- Si  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  ó  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ , entonces la transformación  $E$  determina una regularización del tipo Levi-Civita.
- Si  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$ , entonces la medida de Lebesgue del nuevo espacio de configuración  $\tilde{\mathcal{Q}}$  es finito. Más aún,  $\tilde{\mathcal{Q}} = [-\pi/2, \pi/2]$ .

- Para cualquier otra elección, la medida de Lebesgue del nuevo espacio de configuración  $\tilde{\mathcal{Q}}$  es infinita y  $p \rightarrow 0$  cuando  $q \rightarrow +\infty(-\infty)$ .

*Demostración.* Escribimos las funciones  $f$  y  $g$  definidas en el teorema 3.1. Para distinguir fácilmente cada uno de los casos usamos la notación  $f_{\alpha,\beta}$  y  $g_{\alpha,\beta}$  según los valores  $\alpha$  y  $\beta$ . Dividimos en tres partes la demostración.

1. Si  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  ó  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ , las funciones son

$$\begin{aligned} g_{1,0}(x, t) &= a(x_K(t) - x), & f_{1,0}(x, t) &= -\frac{2\sqrt{a(x_K(t)-x)}}{a}, \\ g_{0,1}(x, t) &= a(x - x_{K+1}(t)), & f_{0,1}(x, t) &= \frac{2\sqrt{a(x-x_{K+1}(t))}}{a}. \end{aligned}$$

Escribimos la función inversa de  $f_{1,0}$  y de  $f_{0,1}$  y las componemos con la funciones  $g_{1,0}$  y  $g_{0,1}$  respectivamente como sigue:

$$\begin{aligned} f_{1,0}^{-1}(q, t) &= -\frac{aq^2}{4} + x_K(t) & g_{1,0}(f_{1,0}^{-1}(q, t), t) &= \frac{a^2q^2}{4}, \\ f_{0,1}^{-1}(q, t) &= \frac{aq^2}{4} + x_{K+1}(t) & g_{0,1}(f_{0,1}^{-1}(q, t), t) &= \frac{a^2q^2}{4}. \end{aligned}$$

Salvo traslaciones ( $x_K(t)$  en el primer caso y  $x_{K+1}(t)$  en el segundo caso) y homotecias (el factor  $a^2/4$  en ambos casos), la transformación de coordenadas del teorema 3.1 es la misma transformación de Levi-Civita, que está expuesta en el capítulo 1 sección 1.5. Agregamos las traslaciones porque no regularizamos en el origen, ya que las singularidades dependen del tiempo. La homotecia es porque la transformación tiene el carácter simpléctico.

2. Si  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$ , las funciones son

$$\begin{aligned} g_{1,1}(x, t) &= a(x_K(t) - x)(x - x_{K+1}(t)), \\ f_{1,1}(x, t) &= -\text{sen}^{-1} \left( \frac{x_K(t) + x_{K+1}(t) - 2x}{x_K(t) - x_{K+1}(t)} \right). \end{aligned}$$

La función  $f_{1,1}(x, t)$  es continua para  $x \in (x_{K+1}, x_K)$ . Además, se satisfacen las expresiones

$$\lim_{x \rightarrow x_K^-} f_{1,1}(x, t) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_{K+1}^+} f_{1,1}(x, t) = -\frac{\pi}{2},$$

por lo tanto  $f : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ , donde  $\tilde{\mathcal{Q}} = [-\pi/2, \pi/2]$  es el nuevo espacio de configuración para la coordenada posición  $q$ .

3. Supongamos que  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$ , entonces las funciones son

$$g_{2,1}(x, t) = a(x_K(t) - x)^2(x - x_{K+1}(t))$$

y

$$f_{2,1}(x, t) = \frac{-1}{\sqrt{a}\sqrt{x_K(t) - x_{K+1}(t)}} \ln \left| \frac{\sqrt{x - x_{K+1}(t)} - \sqrt{x_K(t) - x_{K+1}(t)}}{\sqrt{x - x_{K+1}(t)} + \sqrt{x_K(t) - x_{K+1}(t)}} \right|.$$

La función  $f_{2,1}(x, t)$  es continua para  $x \in (x_{K+1}, x_K)$  y son verdaderas las expresiones

- $f_{2,1}(x, t) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow x_K^-$ ,
- $f_{2,1}(x, t) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow x_{K+1}^+$ .

Por lo tanto, el nuevo espacio de configuración para  $q$  es  $\tilde{\mathcal{Q}} = [0, +\infty)$ .

Análogamente hacemos para el caso  $\alpha = 1$  y  $\beta = 2$ , obteniendo que el nuevo espacio de configuración para  $q$  es  $\tilde{\mathcal{Q}} = (-\infty, 0]$ .

Para los demás casos, distinguimos tres argumentos.

- a) Para  $\alpha > 2$ , con  $\beta = 1$ , sabemos que  $g_{2,1}(x, t) \geq g_{\alpha,\beta}(x, t)$  para  $x$  en una vecindad de  $x_k$  y una vecindad de  $x_{K+1}$ . Esto implica que  $f_{2,1}(x, t) \leq f_{\alpha,\beta}(x, t)$  para  $x$  en las vecindades mencionadas. Por lo tanto se satisfacen las desigualdades

$$\lim_{x \rightarrow x_K^-} f_{2,1}(x, t) \leq \lim_{x \rightarrow x_K^-} f_{\alpha,\beta}(x, t)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow x_{K+1}^+} f_{2,1}(x, t) \leq \lim_{x \rightarrow x_{K+1}^+} f_{\alpha,\beta}(x, t).$$

Por consecuencia, el espacio de configuración contiene al espacio de configuración del caso  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ .

- b) Para  $\beta > 2$  con  $\alpha = 1$  se sigue un razonamiento análogo al caso (a) con las funciones  $g_{1,2}(x, t)$  y  $f_{1,2}(x, t)$ .
- c) Para  $\alpha > 1$  y  $\beta > 1$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_K^-} f(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_K^-} \int_{x_o}^x \frac{du}{\sqrt{g(u, t)}} = +\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow x_{K+1}^+} f(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_{K+1}^+} \int_x^{x_o} \frac{du}{\sqrt{g(u, t)}} = -\infty,$$

con  $x_o \in (x_{K+1}, x_K)$ . Por lo tanto  $\tilde{\mathcal{Q}} = (-\infty, +\infty)$ .

Finalmente, para todos los casos tales que  $\alpha + \beta > 2$ , hacemos  $q \rightarrow \pm\infty$  ( $x \rightarrow x_K^-$  o  $x \rightarrow x_{K+1}^+$ ) en la ecuación (3.9). Sabemos que si  $x \rightarrow x_K^-$  o  $x \rightarrow x_{K+1}^+$  entonces  $A \rightarrow 0^+$  y  $B \rightarrow 0^+$  en la ecuación (3.9). Recordamos que esta ecuación está regularizada, por lo que todos los términos están acotados. Así concluimos que  $p \rightarrow 0$ .

□

El primer caso presente en el corolario 3.1 ha sido ampliamente estudiado y un ejemplo se encuentra en [22]. Una primera aplicación del segundo caso la hicimos en el capítulo anterior para el problema de 2 cuerpos en  $S^1$  y lo aplicamos nuevamente en el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ , problema que abordaremos en el siguiente capítulo.

Antes de concluir este capítulo, hacemos notar que si se conociera el movimiento de  $n - 1$  partículas en una recta o círculo siguiendo únicamente la segunda ley de Newton, el estudio realizado en este apartado sería muy útil para el estudio del respectivo *problema restringido de  $n$  cuerpos en  $\mathbb{R}$  o en  $S^1$* .

# Capítulo 4

## Problema restringido de 3 cuerpos en $S^1$ .

A partir de este capítulo estudiamos el tema central del presente trabajo, el *problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$* . Iniciamos planteando el problema y damos una clasificación de cuatro familias de subproblemas, según la trayectoria que siguen los cuerpos primarios en el problema de 2 cuerpos en  $S^1$ , el cual estudiamos completamente en el capítulo 2.

Después de analizar todas las posibles colisiones que se pueden llevar a cabo en el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ , aplicamos la regularización global y simpléctica, desarrollada en el capítulo 3, a las ecuaciones que determinan el problema para obtener un hamiltoniano que describe la dinámica de la masa infinitesimal para todo tiempo en el que no ocurra una colisión total que no pueda ser regularizable.

Posteriormente investigamos sobre la existencia de soluciones lineales en este problema y finalizamos con la compactación del espacio fase respectivo a las ecuaciones de movimiento autónomas.

### 4.1. Planteamiento.

Consideramos tres cuerpos puntuales de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m$  constreñidos a moverse en el círculo de radio uno  $S^1$  (centrado en el plano euclideo) bajo la influencia de la ley de gravitación universal. Además, consideramos que el valor de la masa  $m$  es despreciable respecto de las otras dos, como definimos los problemas restringidos de 3 cuerpos en el capítulo 1 sección 1.6. De esta manera, los cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  conforman el problema de 2 cuerpos en  $S^1$  y los tres cuerpos conforman el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  y el objetivo es determinar la dinámica para el cuerpo de masa infinitesimal.

Siguiendo la segunda ley de Newton y el planteamiento que se presentó en el capítulo 3 sección 3.1, escribimos la ecuación de movimiento para el cuerpo de masa  $m$ ,

$$\theta'' = -\frac{m_1}{(\theta - \theta_1)^2} + \frac{m_1}{[2\pi - (\theta - \theta_1)]^2} - \frac{m_2}{(\theta - \theta_2)^2} + \frac{m_2}{[2\pi - (\theta - \theta_2)]^2}, \quad (4.1)$$

donde suponemos que el valor de la constante de gravitación universal es uno. Las variables  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta$  representan las posiciones de los cuerpos de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m$  respectivamente y  $\theta_1, \theta_2, \theta \in [0, 2\pi]$ . Las comas (") sobre las variable  $\theta$  denotan la derivada respecto del tiempo cada una. Las fuerzas entre los cuerpos se extienden sobre  $S^1$ , en ambas direcciones, como lo mostramos en la figura 4.1.

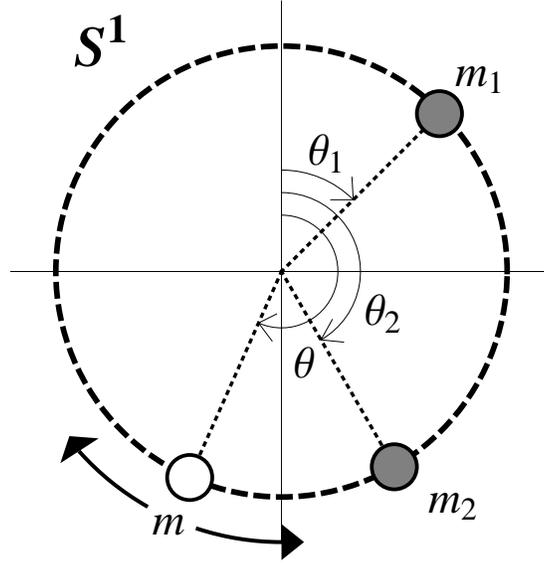


Figura 4.1: Problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ .

El sistema (4.1) lo reescribimos como un sistema con el centro de masa de los cuerpos fijo, es decir,

$$\ddot{x} = \frac{m_1}{(q_1 - x)^2} - \frac{m_1}{[\pi - (q_1 - x)]^2} - \frac{m_2}{(x - q_2)^2} + \frac{m_2}{[\pi - (x - q_2)]^2}. \quad (4.2)$$

Sabemos que el centro de masa para este sistema de cuerpos depende de  $m_1$  y  $m_2$  solamente, por que  $m$  es despreciable. Por esta razón la ecuación (4.2) está escrita en las coordenadas correspondientes a los cuerpos primarios que describen el problema de 2 cuerpos en  $S^1$  regularizado con el centro de masa fijo. Así, la ecuación (4.2) está en términos de  $q_1$  y  $q_2$ , que son las coordenadas de posición de los cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ . La variable  $x$  define la posición del cuerpo secundario en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ , ya que es el intervalo donde están definidas  $q_1$  y  $q_2$ , que son variables regularizadas. La derivada respecto del tiempo  $\tau$  la denotamos por  $(\dot{\phantom{x}})$ . Observemos la figura 4.2 para una mejor comprensión.

Con el fin de reducir parámetros, hacemos la masa total igual a uno, definiendo  $m_1 = \mu$  y  $m_2 = 1 - \mu$ , con  $\mu \in (0, 1)$ . Las variables  $q_1$  y  $q_2$  son funciones ya conocidas y están dadas en el teorema 2.2 y son dependientes de la variable independiente  $\tau$ . Ahora definimos  $\dot{x} = y$  para escribir la ecuación (4.2) como un sistema hamiltoniano de un

grado de libertad no autónomo, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{\mu}{(q_1(\tau) - x)^2} - \frac{\mu}{[\pi - (q_1(\tau) - x)]^2} - \frac{1 - \mu}{(x - q_2(\tau))^2} + \frac{1 - \mu}{[\pi - (x - q_2(\tau))]^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

con la respectiva función de Hamilton  $H : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$H(x, y; \tau) = \frac{y^2}{2} - \frac{\mu}{q_1(\tau) - x} - \frac{\mu}{\pi - (q_1(\tau) - x)} - \frac{1 - \mu}{x - q_2(\tau)} - \frac{1 - \mu}{\pi - (x - q_2(\tau))}. \quad (4.4)$$

El espacio de configuración es  $\mathcal{Q} = [-\pi/2, \pi/2] \setminus \Delta$ , donde

$$\Delta(\tau) = \{x | x = q_1(\tau), x = q_2(\tau), x = q_1(\tau) - \pi, x = q_2(\tau) + \pi\}.$$

El conjunto de singularidades es dependiente de la variable  $\tau$ .

Del teorema 2.2, en el sistema (4.3) y en la función (4.4), las posiciones de los cuerpos primarios están dadas por las funciones

$$q_1(\tau) = -(1 - \mu)r(\tau) + \mu\pi/2, \quad q_2(\tau) = \mu r(\tau) - (\pi/2)(1 - \mu),$$

donde la solución al problema de Kepler en  $S^1$  regularizado la denotamos por  $r(\tau)$  (antes  $q(\tau)$ ) en este capítulo.

Según la solución que representa  $r(\tau)$  para el *problema de Kepler en  $S^1$  regularizado* es el tipo de problema que se establece en el sistema (4.3). Así, clasificamos en cuatro subproblemas el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ :

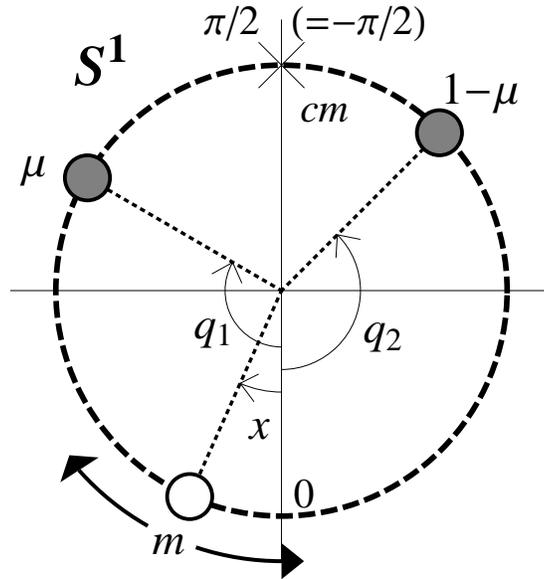


Figura 4.2: Problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  con centro de masa ( $cm$ ) fijo.

- Llamamos *problema hiperbólico restringido de 3 cuerpos en  $S^1$*  si  $r(\tau)$  es una solución hiperbólica.
- Llamamos *problema parabólico restringido de 3 cuerpos en  $S^1$*  si  $r(\tau)$  es una solución parabólica.
- Llamamos *problema elíptico restringido de 3 cuerpos en  $S^1$*  si  $r(\tau)$  es una solución elíptica.
- Llamamos *problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  con dos centros fijos* si  $r(\tau)$  es la solución de equilibrio.

## 4.2. Colisiones regularizables.

De la expresión (4.4), sabemos que el hamiltoniano que describe la dinámica del problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  es

$$H(x, y; \tau) = \frac{y^2}{2} - \frac{\mu}{\mu\frac{\pi}{2} - (1-\mu)r(\tau) - x} - \frac{\mu}{(1-\mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2-\mu) + x} - \frac{1-\mu}{x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1-\mu)} - \frac{1-\mu}{\frac{\pi}{2}(1+\mu) + \mu r(\tau) - x}. \quad (4.5)$$

Esta función proviene de la segunda ley de Newton  $F(x, \tau) = m\ddot{x}$ , es decir,

$$F(x, \tau) = \frac{m\mu}{(\mu\frac{\pi}{2} - (1-\mu)r(\tau) - x)^2} - \frac{m\mu}{[(1-\mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2-\mu) + x]^2} - \frac{m(1-\mu)}{(x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1-\mu))^2} + \frac{m(1-\mu)}{[\frac{\pi}{2}(1+\mu) + \mu r(\tau) - x]^2}, \quad (4.6)$$

donde  $F : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función que representa la fuerza total sobre el cuerpo secundario. Las funciones (4.5) y (4.6) presentan varias singularidades. Estas singularidades son debidas a colisiones entre los cuerpos; de hecho

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta(\tau) \\ &= \left\{ x \mid x = \mu\frac{\pi}{2} - (1-\mu)r(\tau), -(1-\mu)r(\tau) - \frac{\pi}{2}(2-\mu), \mu r(\tau) - \frac{\pi}{2}(1-\mu), \frac{\pi}{2}(1+\mu) + \mu r(\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

El conjunto de singularidades indica que el sistema de cuerpos puede presentar colisiones dobles y triples, en las que participa el cuerpo secundario y los cuerpos primarios. Recordamos que los cuerpos primarios se mueven en órbitas regularizadas, por lo que las colisiones que estudiamos son en las que participa el cuerpo secundario.

Analizamos por separado las colisiones dobles y las colisiones triples.

1. Las colisiones dobles ocurren cuando el cuerpo secundario está en la misma posición de uno y sólo uno de los cuerpos primarios, es decir, cuando  $x = \mu\frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau)$  o cuando  $x = \mu r(\tau) - \frac{\pi}{2}(1 - \mu)$ , para algún  $\tau$ , correspondiendo a la colisión con el cuerpo primario de masa  $\mu$  y con el de masa  $1 - \mu$  respectivamente. Expandiendo en serie de Taylor la función (4.6) alrededor del valor  $x = \mu\frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau)$  tenemos que

$$F(x, \tau) = \frac{m\mu}{\left(x - \mu\frac{\pi}{2} + (1 - \mu)r(\tau)\right)^2} - \frac{m(1 - \mu)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} + \frac{m(1 - \mu)}{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^2} - \frac{m\mu}{\pi^2} \quad (4.8)$$

$$+ \mathcal{O}\left(x - \mu\frac{\pi}{2} + (1 - \mu)r(\tau)\right)$$

y alrededor del valor  $x = \mu r(\tau) - \frac{\pi}{2}(1 - \mu)$  obtenemos

$$F(x, \tau) = -\frac{m(1 - \mu)}{\left(x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1 - \mu)\right)^2} + \frac{m\mu}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} - \frac{m\mu}{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^2} \quad (4.9)$$

$$+ \frac{m(1 - \mu)}{\pi^2} + \mathcal{O}\left(x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1 - \mu)\right).$$

Las funciones (4.8) y (4.9) indican que mientras el cuerpo secundario está muy cerca de alguno de los cuerpos primarios, predomina una fuerza sobre las demás y ésta es una de las fuerzas que ejerce el cuerpo primario más cercano. Por lo tanto, basta modificar este término para regularizar las singularidades debidas a las colisiones binarias.

2. Las colisiones triples ocurren cuando los tres cuerpos se encuentran en la misma posición. Por la disposición de las masas en el problema, existen tres posibles colisiones triples.
  - a) Dos de las colisiones triples suceden en el centro de masa, cuando uno de los cuerpos primarios queda entre los dos cuerpos restantes.
  - b) La otra posible colisión triple ocurre en el centro de masa ficticio, cuando la masa secundaria queda entre los cuerpos primarios.

El caso (a) se refiere al momento en que los cuerpos primarios están colisionando en  $\pi/2$  ( $-\pi/2$ ), o sea, cuando  $r(\tau_c) = -\pi/2$  para algún  $\tau_c$ . Esto convierte a la función (4.6) en la siguiente

$$F(x, \tau_c) = \frac{m}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} - \frac{m}{\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^2}, \quad (4.10)$$

la cual es la fuerza que ejerce un cuerpo de masa 1 fijo en el centro de masa sobre el cuerpo secundario. En otras palabras, este tipo de colisiones “asemejan” colisiones dobles y la función (4.10) da lugar a un problema de 2 cuerpos en el círculo (no necesariamente de radio 1), donde todas las colisiones son regularizables. El caso

(2) no es regularizable por la siguiente razón: la colisión se lleva a cabo en la posición  $(2\mu - 1)\pi/2$ , por eso en ese instante  $r(\tau_c) = \pi/2$  para algún  $\tau_c$  y se tiene que  $x = q_1 = q_2 = (2\mu - 1)\pi/2$ . Resulta que  $\lim_{r \rightarrow \pi/2, x \rightarrow (2\mu - 1)\pi/2} F(x, \tau)$  no está determinado y por lo tanto no podemos controlar la velocidad del cuerpo secundario en este tipo de colisiones con el mecanismo desarrollado hasta ahora.

### 4.3. Regularización.

En esta sección mostramos la transformación de la función (4.5) en otra que no presenta singularidades debidas a las colisiones binarias y a las colisiones triples en el centro de masa (las que se asemejan a las colisiones binarias), para poder interpretar las colisiones como rebotes elásticos entre los cuerpos. De esta forma podemos continuar el movimiento del cuerpos con masa despreciable hasta el momento en el que ocurra una colisión total en el centro de masa ficticio.

Los denominadores que se anulan por la colisión binaria entre el cuerpo de masa infinitesimal con alguno de los cuerpos primarios son  $(q_1(\tau) - x)$  y  $(x - q_2(\tau))$  en (4.4), es decir, los denominadores que indefinen el hamiltoniano (4.5) son  $[\mu\frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x]$  y  $[x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1 - \mu)]$ . La transformación que hacemos regulariza la función (4.5) de manera global.

El cambio de coordenadas que realizamos es

$$q = f(x, \tau), \quad y \quad \frac{dx}{ds} = g(x, \tau) \frac{dx}{d\tau},$$

donde incluimos, como lo hicimos en el capítulo 3 sección 3.2, un cambio en la coordenada independiente en la segunda ecuación, es decir,  $d\tau/ds = g(x, \tau)$ . Hacemos la notación de que este cambio de variables depende explícitamente del tiempo, ya que es necesario que éste haga regulares puntos singulares que dependen de  $\tau$ , como lo señalamos al definir  $\Delta = \Delta(\tau)$  en (4.7). Así, la transformación que aplicamos es  $E : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$E(x, y, \tau) = \left( f(x, \tau), g(x, \tau) \left( \frac{\partial f}{\partial x} y + \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \right) = (q, p). \quad (4.11)$$

Las nuevas coordenadas  $(q, p)$ , posición y velocidad, están definidas en el nuevo tiempo  $s$ .

**Lema 4.1** *La transformación  $E$  dada en (4.11) es simpléctica y es una regularización global para el hamiltoniano (4.5), si las funciones*

$$f : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad g : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

*están definidas como*

$$f(x, \tau) = \arcsen \left( \frac{2x - (2\mu - 1)(\frac{\pi}{2} + r(\tau))}{\frac{\pi}{2} - r(\tau)} \right),$$

$$g(x, \tau) = \left( \mu\frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x \right) \left( (1 - \mu)\frac{\pi}{2} - \mu r(\tau) + x \right).$$

*Demostración.* Este es un caso particular del teorema 3.1. Primero observamos que el hamiltoniano (4.5) está escrito como el hamiltoniano más general (3.3) con  $K = 2$  y  $L = 2$ . La transformación (4.11) es la misma transformación (3.7) del teorema 3.1.

Seleccionamos  $a = 1$ ,  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$  en el teorema 3.1 e identificamos

$$x_K(\tau) = \mu \frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau), \quad x_{K+1}(\tau) = \mu r(\tau) - (1 - \mu)\frac{\pi}{2}$$

para definir la función

$$g(x, \tau) = \left( \mu \frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x \right) \left( (1 - \mu)\frac{\pi}{2} - \mu r(\tau) + x \right).$$

Luego, la función  $f$  definida en el lema se obtiene al resolver la ecuación diferencial dada en el teorema 3.1, es decir,

$$\begin{aligned} f(x, \tau) &= \int \frac{dx}{\sqrt{g(x, \tau)}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left( \mu \frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x \right) \left( (1 - \mu)\frac{\pi}{2} - \mu r(\tau) + x \right)}} \\ &= \arcsen \left( \frac{2x - (2\mu - 1)\left(\frac{\pi}{2} + r(\tau)\right)}{\frac{\pi}{2} - r(\tau)} \right). \end{aligned}$$

Por el teorema 3.1, sabemos que definidas así las funciones  $f$  y  $g$ , la transformación  $E$  dada en (4.11) es una regularización global y simpléctica para el hamiltoniano (4.5).

Por último, por el corolario 3.1 (segundo inciso) sabemos que  $f : \mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ , con  $\tilde{\mathcal{Q}} = [-\pi/2, \pi/2]$ .

□

Aplicando las funciones dadas en el lema 4.1 en la expresión (3.9) obtenemos el hamiltoniano (4.5) regularizado como una nueva función  $\tilde{\mathcal{H}} : \tilde{\mathcal{Q}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow 0$  definida como

$$\begin{aligned} 0 \equiv \tilde{\mathcal{H}}(q, p, s) &= \frac{1}{16}(\sec^2 q - 1)(\pi - 2r(\tau))^2 \left( \mathcal{H} - R(q, p, \tau) - \frac{4\mu}{(\sec q - 1)(\pi - 2r(\tau))} \right. \\ &- \frac{4(\mu - 1)}{(1 + \sec q)(\pi - 2r(\tau))} + \frac{4\mu}{\pi(3 + \sec q) - 2(\sec q - 1)r(\tau)} + \frac{4(\mu - 1)}{\pi(\sec q - 3) - 2(1 + \sec q)r(\tau)} \\ &\left. - \frac{\sec^4 q(-8p \cos q + \cos^2 q(1 - 2\mu + \sec q)(\pi - 2r(\tau))\dot{r}(\tau))^2}{8(\pi - 2r(\tau))^2} \right), \quad (4.12) \end{aligned}$$

donde la función resto, que calculamos a partir de (3.10), es

$$\begin{aligned} R(q, p, t) &= \frac{2p\dot{r}(\tau)}{\pi - 2r(\tau)}(\sec q - 2\mu \sec q + \tan q) + \\ &\left( \frac{1}{16}\dot{r}^2(\tau) + \frac{1}{32}\pi\ddot{r}(\tau) - \frac{1}{16}r(\tau)\ddot{r}(\tau) \right) (\cos^2 q - 4\sec q + 8\mu \sec q - \sec^2 q) + C(\tau). \end{aligned}$$

La transformación  $E$  que aplicamos establece como nuevo espacio de configuración  $\tilde{\mathcal{Q}} = [-\pi/2, \pi/2]$  para el cuerpo secundario, pero recordamos que lo es hasta el instante en el que ocurra una colisión triple en el centro de masa ficticio. Aunque aparentemente  $\tilde{\mathcal{Q}}$  es el mismo que teníamos antes de regularizar el hamiltoniano (4.5), no es así. En este nuevo sistema coordenado, los cuerpos primarios se encuentran fijos en la frontera del espacio de configuración, precisando  $q_1(\tau) \equiv \pi/2$  y  $q_2(\tau) \equiv -\pi/2$ . De este modo, las colisiones binarias entre la masa infinitesimal con cada uno de los primarios se llevan a cabo en las posiciones fijas  $q = \pi/2$  y  $q = -\pi/2$ .

Finalmente, sustituyendo la función resto  $R(q, p, \tau)$  en (4.12), obtenemos el hamiltoniano que describe la dinámica de la masa infinitesimal en el problema restringido de 3-cuerpos en  $S^1$  regularizado,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(q, p, s) = \frac{1}{512} & \left( 32(\pi - 2r(\tau))^2 \cos^2 q C(\tau) - 32(\pi - 2r(\tau))^2 \cos^2 q \mathcal{H} \right. \\ & - 128(\text{sen} q - 1)(p^2 + \pi(\mu - 1) - 2(\mu - 1)r(\tau)) + 128(1 + \text{sen} q)(p^2 - \pi\mu + 2\mu r(\tau)) \\ & - \frac{128(\pi - 2r(\tau))^2 \mu \cos^2 q}{\pi(3 + \text{sen} q) - 2(\text{sen} q - 1)r(\tau)} - \frac{128 \cos^2 q (\mu - 1)(\pi - 2r(\tau))^2}{\pi(\text{sen} q - 3) - 2(1 + \text{sen} q)r(\tau)} \\ & \quad \left. + 2(\pi - 2r(\tau))^2 \cos^2 q (3 + 8(\mu - 1)\mu) \dot{r}^2(\tau) \right) \\ & + (\pi - 2r(\tau))^2 \cos^2 q (\cos 2q - 4\text{sen} q + 8\mu \text{sen} q)(\pi - 2r(\tau)) \dot{r}(\tau) \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

De esta forma, hemos obtenido el hamiltoniano que describe la dinámica del problema, convirtiendo las colisiones binarias entre el cuerpo secundario con cada uno de los primarios en rebotes elásticos, continuando el movimiento hasta la posible colisión triple. Más aún, hemos regularizado las singularidades debidas a las colisiones triples que suceden en el centro de masa, porque

$$\lim_{r(\tau) \rightarrow -\frac{\pi}{2}, q \rightarrow \frac{\pi}{2}} \bar{\mathcal{H}}(q, p, s) = \frac{1}{2}(p^2 - 2\mu\pi), \quad \lim_{r(\tau) \rightarrow -\frac{\pi}{2}, q \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \bar{\mathcal{H}}(q, p, s) = \frac{1}{2}(p^2 + 2\pi(\mu - 1)),$$

son cantidades bien definidas. Por esto decimos que el hamiltoniano (4.13) describe la dinámica de la masa infinitesimal hasta la posible colisión triple en el centro de masa ficticio.

En el siguiente resultado “validamos” el planteamiento y la regularización que realizamos, porque afirmamos que el hamiltoniano (2.15) del problema de Kepler en  $S^1$  regularizado es un caso particular del hamiltoniano (4.13).

**Corolario 4.1** *El hamiltoniano (4.13) generaliza el hamiltoniano (2.15).*

*Demostración* Hacemos  $\mu = 0$ . Con esto anulamos la intervención de uno de los cuerpos primarios, quedando un problema de dos cuerpos. De hecho, como quedan un cuerpo primario (ahora de masa 1) y el cuerpo secundario (que no afecta la dinámica del primario), el sistema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  se ha reducido a un problema de Kepler en  $S^1$ .

El hamiltoniano (4.13) está construido tomando en cuenta el centro de masa fijo, por lo que el cuerpo primario debe estar en esta posición, así consideramos  $r(\tau) \equiv -\pi/2$ . Por último, elegimos  $C(\tau) \equiv 0$ . Sustituyendo estos valores en (4.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2} - \pi - \frac{\pi^2}{4} \mathcal{H} \cos^2 q &\equiv 0 \\ \implies \frac{p^2}{2} - 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \mathcal{H} \cos^2 q &\equiv 0 \\ \implies \frac{p^2}{2} - 2A - A^2 \mathcal{H} \cos^2 q &\equiv 0, \end{aligned}$$

con  $A = \pi/2$ . Como  $r(\tau) = -\pi/2$  para todo  $\tau$ , entonces  $\mathcal{H}$  es una constante. La masa total del sistema es  $M = 1$ .

Hacemos una comparación con la ecuación (2.15) y concluimos que son la misma, salvo por la constante  $A$ .

□

En lo que sigue mostramos algunos resultados generales sobre la dinámica de la masa infinitesimal en cualquiera de los cuatro problemas definidos al final de la sección 4.1. A partir de (4.13) sabemos que el cuerpo secundario colisiona con velocidad distinta de cero con cualquiera de los cuerpos primarios por separado y en la colisión triple en el centro de masa, mientras que lo hace con velocidad cero en la colisión triple en el centro de masa ficticio.

**Corolario 4.2** *En el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  regularizado, todas las colisiones se llevan a cabo con velocidad finita distinta de cero, excepto en la colisión triple en el centro de masa ficticio.*

*Demostración.* En el hamiltoniano (4.13) sustituimos  $q = \pi/2$  y  $q = -\pi/2$  que son las posiciones en las que se llevan a cabo las colisiones binarias con los cuerpos de masa  $\mu$  y  $1 - \mu$  respectivamente. De esta manera, sabemos que la velocidad del cuerpo secundario en la colisión con el cuerpo primario de masa  $\mu$  es  $p = \sqrt{\mu(\pi - 2r(\tau))}$  (y  $p = -\sqrt{\mu(\pi - 2r(\tau))}$  es la velocidad con la que rebota) y la velocidad en la colisión con el cuerpo primario de masa  $1 - \mu$  es  $p = -\sqrt{(1 - \mu)(\pi - 2r(\tau))}$  (y  $p = \sqrt{(1 - \mu)(\pi - 2r(\tau))}$  es la velocidad con la que rebota).

A partir de estos cálculos, haciendo  $r(\tau) = -\pi/2$ , sabemos que la velocidad en la colisión triple en el centro de masa es  $p = \sqrt{2\pi\mu}$  (y  $p = -\sqrt{2\pi\mu}$  es la velocidad con la que rebota) o  $p = -\sqrt{2\pi(1 - \mu)}$  (y  $p = \sqrt{2\pi(1 - \mu)}$  es la velocidad con la que rebota), según el lado donde colisione la masa infinitesimal. Si el cuerpo primario de masa  $\mu$  queda entre las otras dos, entonces la velocidad es  $p = \pm\sqrt{2\pi\mu}$  y si el cuerpo primario de masa  $1 - \mu$  queda entre las otras dos, entonces la velocidad es  $p = \pm\sqrt{2\pi(1 - \mu)}$ .

Por el contrario, si hacemos  $r(\tau) = \pi/2$ , sabemos que la velocidad en la colisión triple en el centro de masa ficticio es 0.

□

## 4.4. Sobre la existencia de soluciones lineales.

En esta sección buscamos las soluciones más simples que puede haber, además de las soluciones de equilibrio. Nos cuestionamos sobre la existencia de movimientos en los que la masa infinitesimal presenta velocidad constante. En el siguiente resultado resolvemos esta cuestión para cualquiera de los 3 problemas definidos en la sección 4.1. No consideramos el caso de dos centros fijos, el cual desarrollamos completamente en el capítulo 5.

**Lema 4.2** *En los casos hiperbólico, parabólico y elíptico, el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  tiene una única solución lineal si y sólo si  $\mu = 1/2$ .*

*Demostración.* Suponemos que  $r(\tau)$  es una solución elíptica, parabólica o hiperbólica del problema de 2 cuerpos en  $S^1$ , dada en el teorema 2.2.

Supongamos que existe una solución lineal

$$(x_o(\tau), y_o(\tau)) = (a\tau + b, a),$$

con  $a$  y  $b$  constantes, que satisface el sistema (4.3). El sistema (4.3) lo escribimos como

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = F(x, r(\tau), \mu), \quad (4.14)$$

donde

$$F(x, r(\tau), \mu) = \frac{\mu}{(q_1(\tau) - x)^2} - \frac{\mu}{[\pi - (q_1(\tau) - x)]^2} - \frac{1 - \mu}{(x - q_2(\tau))^2} + \frac{1 - \mu}{[\pi - (x - q_2(\tau))]^2},$$

$q_1(\tau) = -(1 - \mu)r(\tau) + \mu\pi/2$  y  $q_2(\tau) = \mu r(\tau) - (\pi/2)(1 - \mu)$ . Sustituimos la solución  $(x_o(\tau), y_o(\tau))$  en el sistema (4.14) y tenemos que  $0 = \dot{y}_o = F(x_o(\tau), q(\tau), \mu)$  para todo tiempo  $\tau$ . Como  $F$  está acotada a lo largo de esta solución, las soluciones lineales no representan colisiones de la masa infinitesimal con alguno de los cuerpos primarios, es decir,  $|x_o(\tau) - q_i(\tau)| > 0$  para todo  $\tau$ , con  $i = 1, 2$ , mientras no suceda colisión triple en el centro de masa ficticio.

En lo que sigue, partimos en tres bloques la demostración. Los bloques agrupan tipos de movimientos de los cuerpos primarios, abarcando todos los casos entre los tres bloques.

- Del teorema 2.2 sabemos que existe  $\tau_*$  tal que  $r(\tau_*) = -\pi/2$  para las soluciones elípticas del tipo  $q_{E1}$ , para las soluciones parabólicas del tipo  $q_{P1}$  y para todas las soluciones hiperbólicas. Es decir,  $q_1(\tau_*) = \pi/2$  y  $q_2(\tau_*) = -\pi/2$ , lo que significa que los cuerpos primarios se encuentran en colisión binaria en el centro de masa. En particular  $F(x_o(\tau_*), -\pi/2, \mu) = 0$ , implica que  $x_o(\tau_*) = 0$ .

Partimos en dos casos, según el valor de  $a$ .

- Si  $a \neq 0$ , entonces la solución lineal es  $x_o(\tau) = a\tau + b$ . Esto implica la existencia de un tiempo de colisión  $\tau_c > \tau_*$  tal que  $q_i(\tau_c) = x_o(\tau_c)$  para alguna o ambas  $i = 1, 2$ ; la masa infinitesimal está en colisión con los primarios.

Por lo que mencionamos anteriormente, la colisión no puede ser doble. Si la colisión es triple, entonces por simetría de la dinámica de los cuerpos primarios existe  $\tau_{-c} < \tau_*$  para el cual los cuerpos vuelven a colisión triple, o decir que  $q_1(\tau_{-c}) = q_1(\tau_c) = q_2(\tau_c) = q_2(\tau_{-c})$ . Entonces  $q_i(\tau_{-c}) = x_o(\tau_{-c})$ , lo que implica que  $x_o(\tau_{-c}) = x_o(\tau_c)$ , lo que tampoco puede ser posible por la linealidad de  $x_o(\tau)$ . Por lo tanto no puede ser que  $a \neq 0$ .

- Si  $a = 0$ , entonces  $x_o(\tau) = b$ . Pero sabemos que  $x_o(\tau_*) = 0$ , lo que fija el valor  $b = 0$ . Y  $F(0, r(\tau), \mu) = 0$  si y sólo si  $\mu = 1/2$ .
- Para las soluciones elípticas del tipo  $q_{E2}$ , expresadas en el teorema 2.2, sabemos que existe un  $\tau_a$  y un  $\tau_{-a}$  tales que  $q_1(\tau_{-a}) = q_1(\tau_a) = q_2(\tau_a) = q_2(\tau_{-a}) = \pi\mu - \pi/2$  de tal forma que no ocurre así para cualquier otro  $\tau$  en  $(\tau_{-a}, \tau_a)$ . Es decir,  $\tau_{-a}$  es el tiempo en el que los cuerpos están en colisión triple en el centro de masa ficticio, transcurre el tiempo y  $\tau_a$  es el siguiente tiempo en el que vuelven a estar en colisión triple los tres cuerpos. De esta forma  $x_o(\tau_a) = x_o(\tau_{-a}) = \pi\mu - \pi/2$ .

De igual manera que hicimos en el caso anterior, partimos el siguiente razonamiento en dos casos, según el valor de  $a$ .

- Si  $a \neq 0$ , entonces no podría suceder que  $x_o(\tau_a) = x_o(\tau_{-a})$  por la linealidad de  $x_o(\tau)$ .
- Si  $a = 0$ , entonces  $x_o(\tau) = b = \pi\mu - \pi/2$ . Pero vimos al principio de la demostración que  $\dot{y}_o = F(x_o(\tau), r(\tau), \mu) = 0$ , para cualquier  $\tau$ , entonces  $0 = b = \pi\mu - \pi/2$  que ocurre si y sólo si  $\mu = 1/2$ .
- Supongamos que  $r(\tau)$  es del tipo  $q_{P2}$ . Partimos en dos casos el razonamiento nuevamente.
  - Si  $a \neq 0$ , por la linealidad de la función  $x_o(\tau)$ , existe  $\tau_*$  tal que  $q_1(\tau_*) = x_o(\tau_*)$ , porque  $q_1(\tau)$  está acotada superiormente. Pero no puede ser por que sería una colisión doble.
  - Si  $a = 0$ , entonces  $x_o(\tau) = b$  y como  $q_1(\tau) \rightarrow \pi\mu - \pi/2$ ,  $q_2(\tau) \rightarrow \pi\mu - \pi/2$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , entonces  $b = \pi\mu - \pi/2$  porque  $q_1(\tau) \geq x_o(\tau) \geq q_2(\tau)$  para todo  $\tau$ . Y como vimos que debe cumplirse  $\dot{y}_o = F(x_o(\tau), r(\tau), \mu) = 0$  para todo tiempo  $\tau$ , entonces  $0 = b = \pi\mu - \pi/2$  que se cumple si y sólo si  $\mu = 1/2$ .

Por lo tanto la única solución lineal  $(x_o(\tau), y_o(\tau))$  es  $(0, 0)$  si y sólo si  $\mu = 1/2$

□

A partir del lema 4.2, podemos hablar sobre la existencia de soluciones de equilibrio para el problema, como una consecuencia inmediata.

**Corolario 4.3** *El problema restringido de 3-cuerpos en  $S^1$  en el caso hiperbólico, parabólico y elíptico presenta un único punto de equilibrio para cada  $r(\tau)$ , dada en el teorema 2.2, si y solamente si  $\mu = 1/2$ .*

A esta órbita especial la denotamos por

$$\gamma(\tau) = (0, 0) \quad (4.15)$$

de aquí en adelante.

## 4.5. Compactación del espacio fase.

El sistema hamiltoniano asociado a (4.5) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{\mu}{(\mu\frac{\pi}{2} - (1-\mu)r(\tau) - x)^2} - \frac{\mu}{[(1-\mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2-\mu) + x]^2} \\ &\quad - \frac{1-\mu}{(x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1-\mu))^2} + \frac{1-\mu}{[\frac{\pi}{2}(1+\mu) + \mu r(\tau) - x]^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Con el fin de estudiar el espacio fase determinado por el sistema no autónomo (4.16), aumentamos en uno la dimensión de éste, considerando el tiempo como una variable dependiente. Así obtenemos el sistema autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{\mu}{(\mu\frac{\pi}{2} - (1-\mu)r(\tau) - x)^2} - \frac{\mu}{[(1-\mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2-\mu) + x]^2} \\ &\quad - \frac{1-\mu}{(x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1-\mu))^2} + \frac{1-\mu}{[\frac{\pi}{2}(1+\mu) + \mu r(\tau) - x]^2}, \\ \dot{\tau} &= 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

El sistema (4.17) está definido para

$$(x, y, \tau) \in (q_2(\tau), q_1(\tau)) \times \mathbb{R} \times (\tau_{-1}, \tau_1),$$

donde

$$q_1(\tau) = -(1-\mu)r(\tau) + \mu\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad q_2(\tau) = \mu r(\tau) - \frac{\pi}{2}(1-\mu).$$

Las cotas para el tiempo dependen del problema restringido de 3 cuerpos que consideremos, como están establecidos en la sección 4.1. Debido a que posteriormente consideramos la regularización de la sección 4.3 para las colisiones que así lo permiten, las cotas para la variable  $\tau$  las establecemos suponiendo que el movimiento se puede continuar hasta la aparición de una colisión triple en el centro de masa ficticio, cuando así sucede.

1. En el problema elíptico hay dos casos, como explicamos en el capítulo 2 sección 2.6.
  - Por un lado, si  $r(\tau)$  es de la forma  $q_{E1}$ , las cotas son infinitas, debido a que no hay colisión triple en el centro de masa ficticio. Como el movimiento de los cuerpos primarios es periódico, elegimos las cotas de tal forma que abarcamos un sólo período en el tiempo, así el movimiento de los cuerpos primarios comienzan y terminan en instantes de velocidad cero.

- Por otro lado, si  $r(\tau)$  es de la forma  $q_{E2}$ , las cotas en el tiempo son finitas, porque hay colisión triple en el centro de masa ficticio. Así, la dinámica de los cuerpos primarios comienzan y terminan en colisión triple en el centro de masa ficticio.
2. En el problema parabólico también hay dos casos que consideramos.
- Por un lado suponemos que  $r(\tau)$  es de la forma  $q_{P1}$  correspondiendo a cotas infinitas, ya que el movimiento de los cuerpos primarios no es periódico y no hay colisión triple en el centro de masa ficticio.
  - Por otro lado consideramos que  $r(\tau)$  es de la forma  $q_{P2}$ , en el cual distinguimos dos subcasos por la presencia de colisión triple en el centro de masa ficticio.
    - Consideramos la cota  $\tau_{-1}$  infinita negativa, mientras que  $\tau_1$  es finita, porque que los cuerpos primarios comienzan el movimiento en los puntos de equilibrio y terminan en la colisión triple en el centro de masa ficticio.
    - Consideramos la cota  $\tau_{-1}$  finita y la otra  $\tau_1$  como infinita positiva, porque los cuerpos primarios comienzan en colisión triple en el centro de masa ficticio y terminan en las posiciones de equilibrio.
3. En el problema hiperbólico las cotas son finitas y abarcan un período en el tiempo de los cuerpos primarios, de tal forma que estos comienzan y terminan en colisión triple en el centro de masa ficticio.

La compactación del espacio fase la hacemos para estudiar las propiedades de la dinámica global del sistema (4.17), que abordamos en el capítulo 6. Para esto, un cambio en la variable velocidad  $y$  y otro en el tiempo en el sistema (4.17) es suficiente. Primero hacemos el cambio  $y = \tan v$  para obtener

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tan v, \\ \dot{v} &= \left( \frac{\mu}{\left(\mu\frac{\pi}{2} - (1-\mu)r(\tau) - x\right)^2} - \frac{\mu}{\left[(1-\mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2-\mu) + x\right]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\mu}{\left(x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1-\mu)\right)^2} + \frac{1-\mu}{\left[\frac{\pi}{2}(1+\mu) + \mu r(\tau) - x\right]^2} \right) \cos^2 v, \\ \dot{\tau} &= 1.\end{aligned}$$

Segundo, hacemos el cambio en el tiempo

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{ds} &= \left( \mu\frac{\pi}{2} - (1-\mu)r(\tau) - x \right)^2 \left( (1-\mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2-\mu) + x \right)^2 \\ &\quad \left( x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1-\mu) \right)^2 \left( \frac{\pi}{2}(1+\mu) + \mu r(\tau) - x \right)^2 \cos v,\end{aligned}\tag{4.18}$$

para regularizar las singularidades. El sistema (4.17), después de los dos cambios mencionados queda definido para

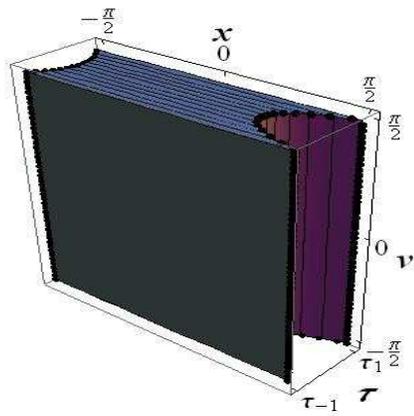
$$x \in \left[ \mu r(\tau) - \frac{\pi}{2}(1-\mu), -(1-\mu)r(\tau) + \mu\frac{\pi}{2} \right], \quad v \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{y} \quad \tau \in [\tau_{-1}, \tau_1]$$

y el sistema definido en un espacio compacto y regularizado “en lo posible” queda

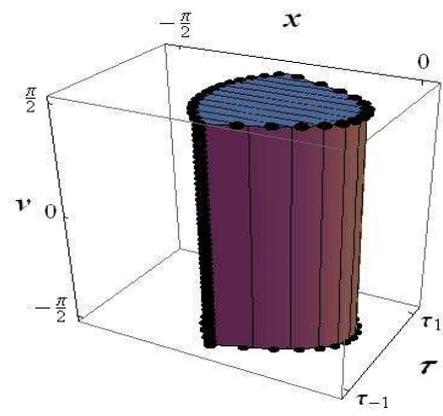
$$\begin{aligned}
x' &= \operatorname{sen} v \left( \mu \frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x \right)^2 \left( (1 - \mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2 - \mu) + x \right)^2 \\
&\quad \left( x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1 - \mu) \right)^2 \left( \frac{\pi}{2}(1 + \mu) + \mu r(\tau) - x \right)^2, \\
v' &= \left( \mu \left( (1 - \mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2 - \mu) + x \right)^2 \left( x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1 - \mu) \right)^2 \left( \frac{\pi}{2}(1 + \mu) + \mu r(\tau) - x \right)^2 \right. \\
&\quad - \mu \left( \mu \frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x \right)^2 \left( x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1 - \mu) \right)^2 \left( \frac{\pi}{2}(1 + \mu) + \mu r(\tau) - x \right)^2 \\
&\quad - (1 - \mu) \left( \mu \frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x \right)^2 \left( (1 - \mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2 - \mu) + x \right)^2 \left( \frac{\pi}{2}(1 + \mu) + \mu r(\tau) - x \right)^2 \\
&\quad \left. + (1 - \mu) \left( \mu \frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x \right)^2 \left( (1 - \mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2 - \mu) + x \right)^2 \left( x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1 - \mu) \right)^2 \right) \\
&\quad \cos^3 v, \\
\tau' &= \left( \mu \frac{\pi}{2} - (1 - \mu)r(\tau) - x \right)^2 \left( (1 - \mu)r(\tau) + \frac{\pi}{2}(2 - \mu) + x \right)^2 \\
&\quad \left( x - \mu r(\tau) + \frac{\pi}{2}(1 - \mu) \right)^2 \left( \frac{\pi}{2}(1 + \mu) + \mu r(\tau) - x \right)^2 \cos v.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

En este sistema,  $d/ds$  está denotada por ( $'$ ). El campo vectorial definido por (4.19) es  $C^l$ , para cualquier  $l$ , respecto de  $x$  y de  $v$  y es  $C^0$  respecto de  $\tau$  porque  $dr/d\tau$  no existe en los instantes en que suceden los rebotes elásticos entre los cuerpos primarios.

Con la frase “en lo posible” nos referimos a la posibilidad de continuar el movimiento a través de una colisión, lo cual no lo es en el caso de colisiones triples en el centro de masa ficticio. En las figuras 4.3, 4.4 y 4.5 se pueden ver las regiones en las que están definidos los espacios fase compactos según el problema que consideramos. En todos los casos, las singularidades debidas a colisiones dobles y colisiones triples en el centro de masa se han convertido en puntos de equilibrio, por lo que todas las aristas en cada región son un continuo de estos (indicados por líneas formadas por esferas negras en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5). Las caras de las regiones son conjuntos invariantes para el flujo, donde éste es paralelo a uno de los ejes coordenados (lo indicamos por líneas paralelas en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5). En las caras donde no hay líneas paralelas el flujo es transversal, que corresponde a la dirección del flujo respecto de la componente  $\tau$ . En esta sección no abordamos el estudio del campo vectorial determinado por (4.19) porque lo hacemos, para un caso particular, en el capítulo 6.

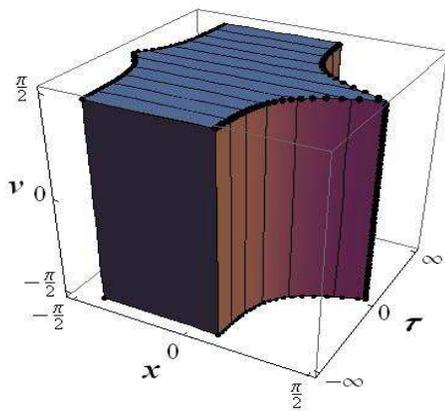


(a) Caso  $q_{E1}$ .

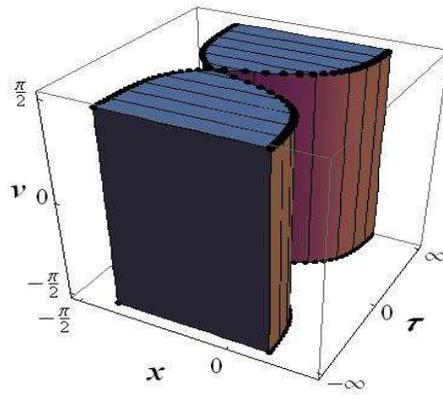


(b) Caso  $q_{E2}$ .

Figura 4.3: Regiones del espacio fase compacto en el problema elíptico (para  $\mu = 1/4$ ).

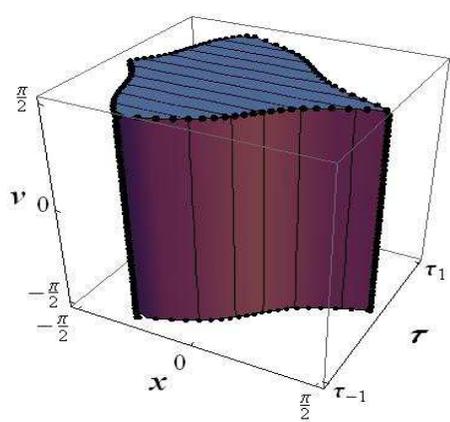


(a) Caso  $q_{P1}$ .

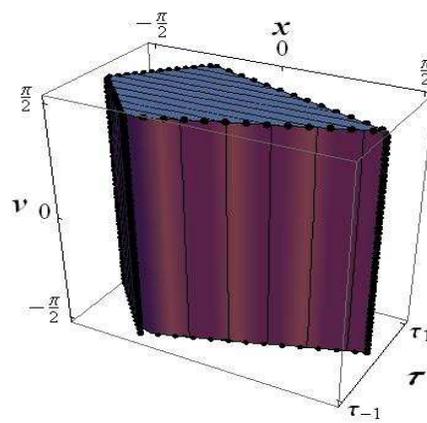


(b) Caso  $q_{P2}$ .

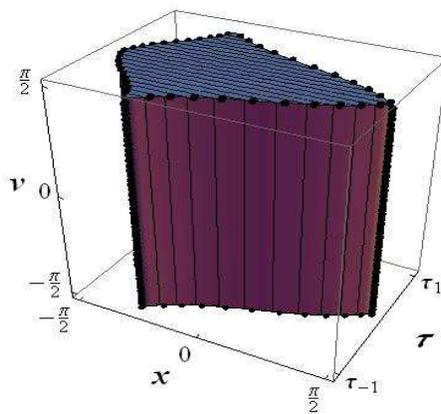
Figura 4.4: Regiones del espacio fase compacto en el problema parabólico (para  $\mu = 1/4$ ).



(a) Caso  $q_{H1}$ .



(b) Caso  $q_{H2}$ .



(c) Caso  $q_{H3}$ .

Figura 4.5: *Regiones del espacio fase compacto en el problema hiperbólico (para  $\mu = 1/4$ ).*

# Capítulo 5

## Problema restringido de 3 cuerpos en $S^1$ con dos centros fijos.

En este capítulo abordamos el *problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  con dos centros fijos*. Mostramos las ecuaciones de movimiento. Nos basamos en los resultados obtenidos en el capítulo 4 y escribimos el hamiltoniano asociado regularizado. Realizamos un análisis cualitativo del problema, presentando la dinámica global del sistema, para cualquier valor de las masas en los primarios.

### 5.1. Planteamiento.

Uno de los cuatro problemas del problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  corresponde al caso cuando los cuerpos primarios se encuentran en la posición de equilibrio para el problema de 2 cuerpos en  $S^1$  (definido en el capítulo 4 sección 4.1). Siguiendo los teoremas 2.1 y 2.2 hacemos  $r(\tau) = 0$  en (4.13) para obtener el hamiltoniano regularizado asociado al *problema restringido de 3-cuerpos en  $S^1$  con dos centros fijos*,

$$\bar{\mathcal{H}}(q, p) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{32}\pi(32 + \mathcal{H}\pi) - \frac{1}{32}\mathcal{H}\pi^2 \cos(2q) + \frac{4\pi(3 + \operatorname{sen}q - 2\mu\operatorname{sen}q)}{17 - \cos(2q)} = 0. \quad (5.1)$$

La primera observación que hacemos es para distinguir el carácter autónomo de este hamiltoniano, ya que no hay dependencia explícita del tiempo porque los cuerpos primarios están en posiciones fijas. Por esta misma razón  $\mathcal{H}$ , energía total del sistema, es una constante de movimiento para el sistema. Por ende, el subproblema que estudiamos en este capítulo es integrable.

El sistema hamiltoniano correspondiente a (5.1) es de un grado de libertad y posee una constante de movimiento, por lo que es un sistema integrable. El hamiltoniano depende (5.1 depende de dos parámetros, la energía  $\mathcal{H}$  y el valor de la masa  $\mu$ . En lo que sigue, mostramos la dinámica global del problema desde el punto de vista cualitativo.

## 5.2. Puntos de equilibrio.

Comenzamos buscando las soluciones más sencillas, las soluciones de equilibrio, para entender la dinámica global del sistema. Para esto, describimos el conjunto de velocidad cero para el cuerpos secundario a partir de la ecuación (5.1),

$$\left\{ q \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \mid p = 0, \mathcal{H} = \frac{-32(5 + \cos 2q - 4\operatorname{sen}q + 8\mu\operatorname{sen}q)}{\pi(1 + \cos 2q)(17 + \cos 2q)} \right\}. \quad (5.2)$$

Este conjunto relaciona las posiciones en las que la velocidad de la masa infinitesimal  $m$  es cero en el nivel de energía  $\mathcal{H}$  y el parámetro de la masa de los cuerpos primarios  $\mu$  para el que suceden. De hecho, por el teorema de la función implícita escribimos  $\mathcal{H}$  como una función de la variable  $q$  y del parámetro  $\mu$ , es decir,  $\mathcal{H} : (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{H}(q, \mu) = \frac{-32(5 + \cos 2q - 4\operatorname{sen}q + 8\mu\operatorname{sen}q)}{\pi(1 + \cos 2q)(17 + \cos 2q)}. \quad (5.3)$$

En la figura 5.1 mostramos la gráfica correspondiente a  $\mathcal{H}(q, \mu)$ , que es una función continua. En el siguiente resultado hacemos uso de esta función.

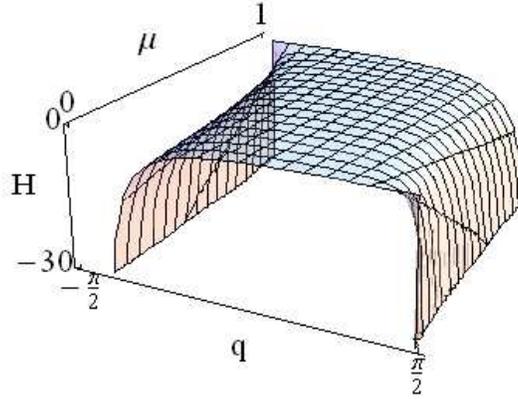


Figura 5.1: Gráfica de la función  $\mathcal{H}(q, \mu)$ .

**Proposición 5.1** *El problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  con dos centros fijos tiene un único punto de equilibrio  $(q_o, 0)$  para cada valor de  $\mu_o \in (0, 1)$ ; para cada valor  $q_o \in (-\pi/2, \pi/2)$ , existe un único valor  $\mu_o$  para el cual  $q_o$  define un punto de equilibrio.*

*Demostración.* Derivamos  $\mathcal{H}(q, \mu)$ , dada en (5.3), respecto de  $q$  e igualamos a cero y por el teorema de la función implícita definimos la función  $\mu : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (0, 1)$ ,

$$\mu(q) = \frac{-4(\cos(q/2) - \operatorname{sen}(q/2))^6(3 + \operatorname{sen}q)^2}{28 \cos 2q + 3 \cos(4q) - 103},$$

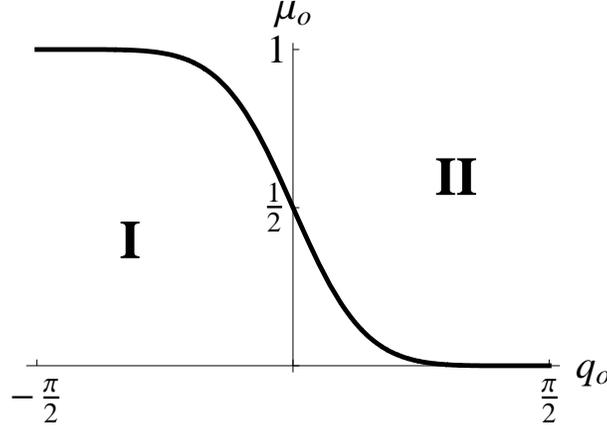


Figura 5.2: Gráfica de la función  $\mu_o(q_o)$ .

cuya gráfica está en la figura 5.2. Esta función relaciona la posición  $q$  con el valor  $\mu$  en donde la energía del sistema no cambia. Llamamos  $q_o$  y  $\mu_o$  a estos valores particulares que ocurren en  $\mathcal{H}_{eq}$ . En otras palabras,  $q_o$  y  $\mu_o$  son los valores para los cuales existen posiciones de equilibrio y se dan para el nivel de energía correspondiente  $\mathcal{H}_{eq}$ .

Mostramos en seguida que la relación  $\mu_o(q_o)$  es una función biyectiva, para demostrar la unicidad de las posiciones de equilibrio y el valor de  $\mu$ . La función  $\mu(q)$  continua y es inyectiva. Es inyectiva porque

$$\frac{d\mu_o}{dq_o} = -\frac{24 \cos^5 q_o (3 + \operatorname{sen} q_o) (90 - 6 \cos 2q_o - 31 \operatorname{sen} q_o + \operatorname{sen} 3q_o)}{(3 \cos 4q_o + 28 \cos 2q_o - 103)^2} < 0,$$

para todo  $q_o \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Además, es sobreyectiva porque

$$\lim_{q_o \rightarrow -\pi/2} \mu_o(q_o) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{q_o \rightarrow \pi/2} \mu_o(q_o) = 0.$$

□

Así queda demostrada la existencia y unicidad de las posiciones de equilibrio  $q_o$  para cada valor de  $\mu_o$ .

### 5.3. Orbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Sabemos, por la proposición 5.1, que el conjunto

$$E = \left\{ (q_o, \mu_o) \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times (0, 1) \mid \mu_o = \mu(q_o) \right\}$$

está conformado por aquellos pares ordenados  $(q_o, \mu_o)$  tales que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(q, \mu) = 0 \quad \text{si } (q, \mu) \in E \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(q, \mu) \neq 0 \quad \text{si } \forall (q, \mu) \notin E.$$

Definimos el siguiente par de conjuntos abiertos que indicamos en la figura 5.2,

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \left\{ (q, \mu) \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times (0, 1) \mid \mu < \mu_o(q_o) \right\}, \\ \mathbf{II} &= \left\{ (q, \mu) \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times (0, 1) \mid \mu > \mu_o(q_o) \right\}.\end{aligned}$$

**Proposición 5.2** *Para cada  $\mu \in (0, 1)$  fijo, el conjunto de velocidad cero (5.2) consta de dos elementos si  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{eq}$ , un elemento (posición de equilibrio) si  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{eq}$  y es vacío si  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{eq}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mu_o \in (0, 1)$  es un valor fijo. Escribimos, a partir de la función  $\mathcal{H}(q, \mu)$  dada en (5.3),

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{8(-\text{sen}5q - 19\text{sen}3q - 274\text{sen}q - 6(1 - 2\mu) \cos 4q - 56(1 - 2\mu) \cos 2q - 412\mu + 206)}{\pi \cos^3 q (17 + \cos 2q)^2}.$$

Si  $(q, \mu) \in \mathbf{I}$ , entonces  $\partial \mathcal{H} / \partial q > 0$  y si  $(q, \mu) \in \mathbf{II}$ , entonces  $\partial \mathcal{H} / \partial q < 0$ . Tomando en cuenta estas desigualdades y la proposición 5.1, concluimos que la función  $\mathcal{H}(q, \mu)$  es estrictamente creciente para  $q \in (-\pi/2, q_o)$ , estrictamente decreciente para  $q \in (q_o, \pi/2)$  y cuando  $q = q_o$ , la función  $\mathcal{H}$  alcanza su valor máximo (véase la figura 5.1).

Por otra parte,

$$\lim_{q \rightarrow \frac{\pi}{2}} \mathcal{H}(q, \mu) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{q \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \mathcal{H}(q, \mu) = -\infty.$$

Como  $\mathcal{H}(q, \mu)$  es una función continua, entonces para  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{eq}$  el conjunto de velocidad cero tiene dos elementos, en cambio, si  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{eq}$ , este conjunto carece de elementos y si  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{eq}$ , el conjunto tendría exactamente un elemento, correspondiendo a la posición de equilibrio. □

A partir de la reversibilidad del problema y de las dos proposiciones anteriores, vamos a describir el espacio fase para la masa infinitesimal  $m$ . Recordamos que la regularización realizada en el capítulo 4, nos permite interpretar las colisiones como rebotes elásticos y continuar en este sentido los movimientos.

Fijamos el valor de  $\mu_o \in (0, 1)$ . Distinguimos tres familias de órbitas, dependiendo del nivel de energía (véase la figura 5.3).

1. Consideramos  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{eq}$ , para el cual no hay puntos de equilibrio y además  $p \neq 0$  para todo tiempo  $s$ . Esto significa que la masa infinitesimal  $m$  viene de un rebote elástico con uno de los cuerpos primarios, sigue su trayectoria recorriendo todo el espacio en un mismo sentido hasta rebotar elásticamente con el otro cuerpo primario para luego volver a rebotar con el primer primario y así sucesivamente. A este tipo de movimiento lo llamamos de tipo *hiperbólico*.

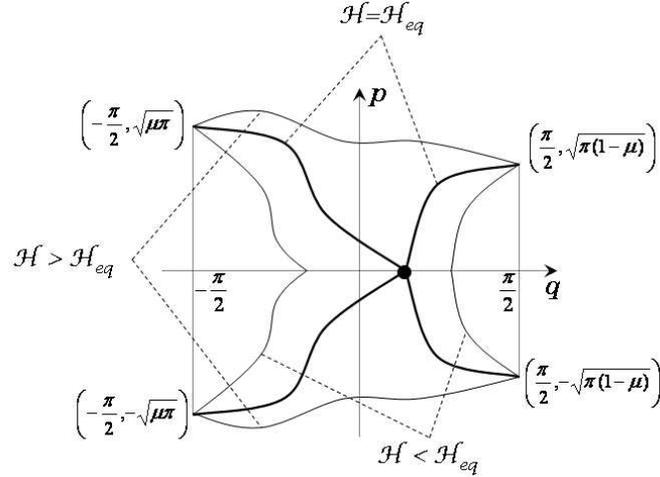


Figura 5.3: *Espacio fase regularizado del problema de 3-cuerpos en  $S^1$  con dos centros fijos.*

2. Consideramos  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{eq}$ , donde las órbitas presentan  $p \neq 0$  para todo tiempo  $s$ , exceptuando la posición de equilibrio que se encuentra en este nivel de energía. Esto significa que la masa infinitesimal  $m$  parte asintóticamente del punto de equilibrio en tiempo infinito, rebota elásticamente con alguno de los cuerpos primarios y regresa al punto de equilibrio asintóticamente en tiempo infinito. A este tipo de movimientos los llamamos de tipo *parabólico*.
3. Consideramos  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{eq}$  y sabemos que  $p = 0$  para algún tiempo  $s_*$ , además de que en estos niveles de energía no hay posiciones de equilibrio. Esto representa para la masa infinitesimal  $m$  un movimiento en el cual rebota con alguno de los cuerpos primarios constantemente sin llegar a pasar la posición de equilibrio. A este tipo de movimientos los llamamos del tipo *elíptico*.

## 5.4. Dinámica global.

El siguiente resultado explica la dinámica global de la masa infinitesimal para el problema que estamos analizando. El espacio fase correspondiente está en la figura 5.3.

**Teorema 5.1** *El problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  con dos centros fijos regularizado presenta las siguientes soluciones, dependiendo del nivel de energía como sigue:*

- *soluciones del tipo elíptico para  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{eq}$ ,*
- *soluciones del tipo parabólico y un punto de equilibrio para  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{eq}$  y*
- *soluciones del tipo hiperbólico para  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{eq}$ ,*

para cada  $\mu \in (0, 1)$ .

Como ya mencionamos al comienzo de este capítulo, este sistema es integrable, pero no contamos con las soluciones explícitas. Es muy probable que éstas no se puedan obtener mediante operaciones algebraicas analizando la ecuación 5.1.

Tres comentarios a partir del teorema 5.1.

1. Este teorema tiene sentido para cualquier valor de  $\mu \in (0, 1)$ , por lo tanto para cada valor  $\mu$ , los espacios fase resultantes son topológicamente conjugados entre sí.
2. Este problema del restringido de 3 cuerpos en el círculo tiene un conjunto de órbitas periódicas no numerable para cada valor de  $\mu$ , correspondientes a las órbitas del tipo elíptico e hiperbólico, además de la posición de equilibrio. Las órbitas periódicas ocurren para cualquier nivel de energía  $\mathcal{H}$ , excepto para el valor  $\mathcal{H}_{eq}$ .
3. Mostramos la dinámica global para este problema, después de haber regularizado global y simplécticamente el respectivo hamiltoniano en el capítulo 4.

# Capítulo 6

## Problemas restringido simétrico hiperbólico y restringido simétrico elíptico de 3 cuerpos en $S^1$ .

Abordamos el caso simétrico en las masas de los cuerpos primarios en el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ . Consideramos  $\mu = 1/2$  en las ecuaciones (4.3), obteniendo el sistema correspondiente al *problema restringido simétrico de 3 cuerpos en  $S^1$* ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{1/2}{(q_1(\tau) - x)^2} - \frac{1/2}{[\pi - (q_1(\tau) - x)]^2} - \frac{1/2}{(x - q_2(\tau))^2} + \frac{1/2}{[\pi - (x - q_2(\tau))]^2}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Las funciones  $q_1(\tau)$  y  $q_2(\tau)$  están determinadas en el teorema 2.2; pueden representar soluciones hiperbólicas, parabólicas o elípticas. El caso de dos centros fijos ya se estudió en el capítulo 5 y por lo tanto, no lo abordamos aquí.

Mostramos la existencia de una órbita con estructura hiperbólica para los problemas restringido simétrico elíptico y restringido simétrico hiperbólico de 3 cuerpos en  $S^1$ , así como la existencia de variedades estable e inestable asociadas a dicha órbita. Estas variedades se intersectan de manera transversal y caracterizan el espacio fase en cuatro grandes regiones que determinan la dinámica global de estos problemas.

Por último, mostramos la existencia de órbitas periódicas para el problema restringido simétrico elíptico de 3 cuerpos en  $S^1$ .

### 6.1. Trayectoria con estructura hiperbólica.

Antes de comenzar el análisis recordamos que para el problema restringido simétrico el centro de masa ficticio está en la posición  $x = 0$  (diametralmente opuesto al centro de masa).

El sistema correspondiente al problema simétrico restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  definido en un espacio compacto lo obtenemos a partir del sistema (4.19), donde sustitu-

imos el valor  $\mu = 1/2$ , obteniendo así

$$\begin{aligned}
x' &= \operatorname{sen} v \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \left( \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{3\pi}{4} + x \right)^2 \left( x - \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4} \right)^2 \\
&\quad \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2, \\
v' &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{3\pi}{4} + x \right)^2 \left( x - \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4} \right)^2 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \right. \\
&\quad - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \left( x - \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4} \right)^2 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \\
&\quad - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \left( \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{3\pi}{4} + x \right)^2 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \\
&\quad \left. + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \left( \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{3\pi}{4} + x \right)^2 \left( x - \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] \cos^3 v, \\
\tau' &= \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \left( \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{3\pi}{4} + x \right)^2 \left( x - \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4} \right)^2 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \\
&\quad \cos v.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Este sistema está definido para

$$x \in \left[ \frac{1}{2}r(\tau) - \frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4} \right], \quad v \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{y} \quad \tau \in [\tau_{-1}, \tau_1],$$

es decir, está definido en un conjunto compacto. La derivada, denotada por ( $'$ ), es respecto del tiempo  $s$ . Recordamos que  $\tau$  es una función del tiempo  $s$  determinada por

$$d\tau/ds = \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \left( \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{3\pi}{4} + x \right)^2 \left( x - \frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4} \right)^2 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}r(\tau) - x \right)^2 \cos v,$$

que se obtiene del reescalamiento en el tiempo en (4.18). El campo vectorial definido en (6.2) es  $C^r$  ( $r > 1$ ) respecto de  $x$  y  $v$ , mientras que es  $C^0$  respecto de  $s$ .

El sistema (6.2) es simétrico respecto de  $\Psi(x, v) = (-x, -v)$  y por lo tanto, si  $(x_o(s), v_o(s))$  es solución, entonces  $(-x_o(s), -v_o(s))$  también lo es.

La órbita de equilibrio  $\gamma(\tau)$ , dada en el corolario 4.3, es una trayectoria en el espacio para el sistema (6.2), que denotamos por  $\Gamma(s) = (0, 0, \tau(s))$ . Esta trayectoria representa para el cuerpo secundario una posición fija en el transcurso del tiempo y es una solución para (6.2) que no presenta colisiones binarias. Más aún,  $\Gamma(s)$  es una trayectoria de colisión-expulsión (empieza en expulsión y termina en colisión) para cualquier problema restringido simétrico hiperbólico, para los problemas restringidos simétricos parabólico y elíptico en el caso de que  $q(\tau)$  es de la forma  $q_{P2}(\tau)$  y  $q_{E2}(\tau)$  respectivamente (véase el capítulo 2, sección 2.4). Si  $q(\tau)$  es de la forma  $q_{P1}(\tau)$  o  $q_{E1}(\tau)$  (véase el capítulo, sección 2.4), entonces la trayectoria  $\Gamma(s)$  no presenta ningún tipo de colisión.

Lo que mostramos a continuación es la estructura hiperbólica de la trayectoria  $\Gamma(s)$  que implica la existencia de conjuntos invariantes en el espacio fase correspondientes a (6.2).

**Teorema 6.1** *La trayectoria  $\Gamma(s)$  tiene estructura hiperbólica para los problemas restringidos simétricos hiperbólico y elíptico de 3 cuerpos en  $S^1$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $r(\tau)$  es una solución hiperbólica o elíptica (soluciones periódicas en el tiempo) dada en el teorema 2.2.

A partir de la definición 1.9, sabemos que estudiar la estructura hiperbólica de una órbita requiere el estudio del campo vectorial linealizado alrededor de dicha órbita. La órbita a tratar es  $\hat{\gamma}(s) = (0, 0)$ , dada en el corolario 4.3. El campo vectorial que analizamos es el definido en (6.2) en el caso no autónomo, es decir, no incluimos la tercer componente  $\tau$ , que representa el tiempo reparametrizado. De esta manera, el campo vectorial lineal no autónomo alrededor de  $\hat{\gamma}(s)$  es

$$A(s) = D_{(x,v)} \left( \begin{array}{c} x' \\ v' \end{array} \right) \Big|_{(x,v)=(\hat{\gamma}(s))} = \left( \begin{array}{cc} 0 & f(s) \\ g(s) & 0 \end{array} \right),$$

donde

$$f(s) = \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{r}(s)}{2} \right)^4 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\hat{r}(s)}{2} \right)^4,$$

$$g(s) = 2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{r}(s)}{2} \right)^4 \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\hat{r}(s)}{2} \right) + 2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\hat{r}(s)}{2} \right) \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\hat{r}(s)}{2} \right)^4$$

y  $\hat{r}(s) = r(\tau(s))$ . Como  $r(\tau)$  es periódica respecto de  $\tau$ , entonces  $\hat{r}(s)$  es periódica respecto de  $s$  y por lo tanto la matriz  $A(s)$  también lo es.

Lo que hacemos en seguida es mostrar es que el sistema lineal asociado

$$\mathbf{y}' = A(s)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

posee una dicotomía exponencial. De la definición 1.8 sabemos que es necesario conocer las soluciones del sistema (6.4), en otras palabras, necesitamos conocer  $X(s)$ , una matriz fundamental de soluciones. Como el sistema (6.4) es periódico en  $s$ , la teoría de Floquet nos sirve para conocer la naturaleza de las soluciones del sistema en cuestión.

Notamos que  $\text{tr}(A(s)) = 0$  y por el corolario 1.1 tenemos que  $\rho_1\rho_2 = 1$  y que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , siendo  $\rho_1$  y  $\rho_2$  los multiplicadores característicos y  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los exponentes correspondientes. A partir de esto,  $\lambda_1 = -\lambda_2$  y por esta razón hay dos posibles escenarios:  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  o  $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . En lo que sigue mostramos que el segundo caso no es posible.

Supongamos que  $\lambda_1 = a_1 + ib_1$  ( $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ ), entonces  $a_1 = 0$ , porque los valores propios complejos son pares conjugados y porque  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . Así,  $\lambda_1 = ib_1$  y  $\lambda_2 = -ib_1$ . A continuación escribimos el sistema (6.4) como una ecuación diferencial ordinaria de grado dos, es decir,

$$\xi'' - f'(s)\xi' - f(s)g(s)\xi = 0, \quad (6.5)$$

con  $\xi = x$ . Por el teorema 1.5 una solución a la ecuación (6.5) sería

$$\xi_1(s) = p_1(s)e^{\lambda_1 s} = p_1(s)(\cos(b_1 s) + i\text{sen}(b_1 s)),$$

siendo  $p_1(s)$  una función periódica. Definimos las funciones reales  $u(s) = p_1(s) \cos(b_1 s)$  y  $v(s) = p_1(s) \text{sen}(b_1 s)$ , entonces  $\xi_1(s) = u(s) + iv(s)$ . Sustituimos la solución  $\xi_1(s)$  en la ecuación (6.5) y obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} u''(s) - f'(s)u'(s) - f(s)g(s)u(s) &= 0, \\ v''(s) - f'(s)v'(s) - f(s)g(s)v(s) &= 0, \end{aligned}$$

que se obtuvieron separando la parte real y la parte imaginaria resultantes. Multiplicando la primera ecuación por  $v(s)$ , la segunda por  $-u(s)$  y sumando ambas ecuaciones resulta que

$$u''(s)v(s) - v''(s)u(s) - f'(s)v(s)u'(s) + f'(s)v'(s)u(s) = 0.$$

Agrupando los términos convenientemente obtenemos una nueva ecuación diferencial

$$\frac{d}{ds} \left( u'(s)v(s) - v'(s)u(s) \right) + f'(s)(v'(s)u(s) - v(s)u'(s)) = 0,$$

es decir,

$$\frac{\frac{d}{ds}(u'(s)v(s) - v'(s)u(s))}{u'(s)v(s) - v'(s)u(s)} = f'(s)$$

y por lo tanto

$$f(s) = \ln |v'(s)u(s) - v(s)u'(s)| + C,$$

donde  $C$  es una constante de integración. Sustituyendo las funciones  $u(s)$  y  $v(s)$  como se definieron antes, llegamos a que  $f(s) = \ln(p_1^2(s)|b_1|)$ .

Nuevamente, por el teorema 1.5, otra solución al sistema (6.4) es

$$\xi_2(s) = p_2(s)e^{-\lambda_1 s} = p_2(s) \cos(-b_1 s) + i\text{sen}(-b_1 s),$$

donde  $p_2(s)$  es una función periódica. Definimos las funciones reales  $\hat{u}(s) = p_2(s) \cos(-b_1 s)$  y  $\hat{v}(s) = p_2(s) \text{sen}(-b_1 s)$ , entonces  $\xi_2(s) = \hat{u}(s) + i\hat{v}(s)$ . Hacemos el mismo cálculo que hicimos para  $\xi_1(s)$  y llegamos a que  $f(s) = \ln(p_2^2(s)|b_1|)$ .

Partimos en dos casos, según si  $p_1$  y  $p_2$  son funciones reales o complejas.

- $p_1(s), p_2(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (asumiendo algunos valores en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ). Esto no puede ser porque  $f(s)$  es una función real.
- $p_1(s), p_2(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tampoco puede suceder y a continuación lo justificamos. Recordamos el teorema 1.7 (teorema de Liouville) y aprovechamos el hecho de que  $\text{tr}(A(s))=0$ , para establecer que  $|X(s)| = 1$ . Por otra parte, escribimos  $X(s)$  pues  $\xi_1(s) = p_1(s)e^{\lambda_1 s}$  y  $\xi_2(s) = p_2(s)e^{-\lambda_1 s}$  son dos soluciones linealmente independientes, como lo establece el teorema 1.6. Así,

$$X(s) = \begin{pmatrix} p_1(s)e^{ib_1 s} & p_2(s)e^{-ib_1 s} \\ ib_1 p_1(s)e^{ib_1 s} + p_1'(s)e^{ib_1 s} & -ib_1 p_2(s)e^{-ib_1 s} + p_2'(s)e^{-ib_1 s} \end{pmatrix},$$

lo que implica que  $|X(s)| = -2ib_1p_1(s)p_2(s) + p_1(s)p_2'(s) - p_1'(s)p_2(s)$ . Como supusimos que  $p_1(s)$  y  $p_2(s)$  son funciones reales, entonces  $|X(s)|$  no puede ser 1 para todo  $s \in \mathbb{R}$  debido al término imaginario  $-2ib_1p_1(s)p_2(s)$ .

Así, establecemos que  $\lambda_1$  es un valor real. De esta forma escribimos una matriz fundamental para el sistema (6.4) como sigue:

$$X(s) = \begin{pmatrix} p_1(s)e^{\lambda_1 s} & p_2(s)e^{-\lambda_1 s} \\ \lambda_1 p_1(s)e^{\lambda_1 s} + p_1'(s)e^{\lambda_1 s} & -\lambda_1 p_2(s)e^{-\lambda_1 s} + p_2'(s)e^{-\lambda_1 s} \end{pmatrix}$$

y calculamos su inversa como

$$X^{-1}(s) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 p_2(s)e^{-\lambda_1 s} + p_2'(s)e^{-\lambda_1 s} & -p_2(s)e^{-\lambda_1 s} \\ -\lambda_1 p_1(s)e^{\lambda_1 s} - p_1'(s)e^{\lambda_1 s} & p_1(s)e^{\lambda_1 s} \end{pmatrix}.$$

Recordamos que el objetivo es mostrar que el sistema (6.4) posee una dicotomía exponencial. Ya conocemos  $X(s)$  y eligiendo  $P$  como la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  hacemos los cálculos marcados en la definición 1.8. Por un lado,

$$\begin{aligned} & X(s)PX^{-1}(t_1) \\ = & \begin{pmatrix} -p_2(s)e^{-\lambda_1 s}(\lambda_1 p_1(t_1)e^{\lambda_1 t_1} + p_1'(t_1)e^{\lambda_1 t_1}) & p_2(s)e^{-\lambda_1 s}p_1(t_1)e^{\lambda_1 t_1} \\ (\lambda_1 p_2(s)e^{-\lambda_1 s} - p_2'(s)e^{-\lambda_1 s})(\lambda_1 p_1(t_1)e^{\lambda_1 t_1} + p_1'(t_1)e^{\lambda_1 t_1}) & (-\lambda_1 p_2(s)e^{-\lambda_1 s} + p_2'(s)e^{-\lambda_1 s})p_1(t_1)e^{\lambda_1 t_1} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -p_2(s)(\lambda_1 p_1(t_1) + p_1'(t_1))e^{-\lambda_1(s-t_1)} & p_2(s)p_1(t_1)e^{-\lambda_1(s-t_1)} \\ (\lambda_1 p_2(s) - p_2'(s))(\lambda_1 p_1(t_1) + p_1'(t_1))e^{-\lambda_1(s-t_1)} & (-\lambda_1 p_2(s) + p_2'(s))p_1(t_1)e^{-\lambda_1(s-t_1)} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -p_2(s)(\lambda_1 p_1(t_1) + p_1'(t_1)) & p_2(s)p_1(t_1) \\ (\lambda_1 p_2(s) - p_2'(s))(\lambda_1 p_1(t_1) + p_1'(t_1)) & (-\lambda_1 p_2(s) + p_2'(s))p_1(t_1) \end{pmatrix} e^{-\lambda_1(s-t_1)} \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} & X(s)(I - P)X^{-1}(t_1) \\ = & \begin{pmatrix} p_1(s)e^{\lambda_1 s}(\lambda_1 p_2(t_1) - p_2'(t_1))e^{-\lambda_1 t_1} & p_1(s)e^{\lambda_1 s}p_2(t_1)e^{-\lambda_1 t_1} \\ (\lambda_1 p_1(s) + p_1'(s))e^{\lambda_1 s}(\lambda_1 p_2(t_1) - p_2'(t_1))e^{-\lambda_1 t_1} & (\lambda_1 p_1(s) + p_1'(s))e^{\lambda_1 s}p_2(t_1)e^{-\lambda_1 t_1} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} p_1(s)(\lambda_1 p_2(t_1) - p_2'(t_1))e^{\lambda_1(s-t_1)} & p_1(s)p_2(t_1)e^{\lambda_1(s-t_1)} \\ (\lambda_1 p_1(s) + p_1'(s))(\lambda_1 p_2(t_1) - p_2'(t_1))e^{\lambda_1(s-t_1)} & (\lambda_1 p_1(s) + p_1'(s))p_2(t_1)e^{\lambda_1(s-t_1)} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} p_1(s)(\lambda_1 p_2(t_1) - p_2'(t_1)) & p_1(s)p_2(t_1) \\ (\lambda_1 p_1(s) + p_1'(s))(\lambda_1 p_2(t_1) - p_2'(t_1)) & (\lambda_1 p_1(s) + p_1'(s))p_2(t_1) \end{pmatrix} e^{\lambda_1(s-t_1)}. \end{aligned}$$

Como las funciones  $p_1(s)$  y  $p_2(s)$  son periódicas, entonces existen constantes  $K_1, K_2 > 0$  tales que

$$\begin{aligned} & \|X(s)PX^{-1}(t_1)\| \\ = & \left\| \begin{pmatrix} -p_2(s)(\lambda_1 p_1(t_1) + p_1'(t_1)) & p_2(s)p_1(t_1) \\ (\lambda_1 p_2(s) - p_2'(s))(\lambda_1 p_1(t_1) + p_1'(t_1)) & (-\lambda_1 p_2(s) + p_2'(s))p_1(t_1) \end{pmatrix} \right\| e^{-\lambda_1(s-t_1)} \\ & \leq K_1 e^{-\lambda_1(s-t_1)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \|X(s)(I - P)X^{-1}(t_1)\| \\ = & \left\| \begin{array}{cc} p_1(s)(\lambda_1 p_2(t_1) - p_2'(t_1)) & p_1(s)p_2(t_1) \\ (\lambda_1 p_1(s) + p_1'(s))(\lambda_1 p_2(t_1) - p_2'(t_1)) & (\lambda_1 p_1(s) + p_1'(s))p_2(t_1) \end{array} \right\| e^{\lambda_1(s-t_1)} \\ & \leq K_2 e^{\lambda_1(s-t_1)}, \end{aligned}$$

donde  $\|\cdot\|$  es una métrica para matrices.

Como hemos mostrado, según la definición 1.8, el sistema (6.4) posee una dicotomía exponencial. Finalmente, por la definición 1.9, la trayectoria  $\Gamma(s)$  tiene estructura hiperbólica. □

## 6.2. Dinámica global.

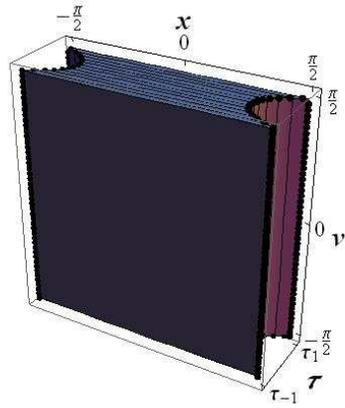
A partir del teorema 1.8, una consecuencia inmediata de la estructura hiperbólica de la trayectoria  $\Gamma(s)$  es la existencia de una variedad local estable  $W_{loc}^s(\Gamma(s))$  y otra variedad local inestable  $W_{loc}^u(\Gamma(s))$ , en una vecindad de forma tubular de la trayectoria  $\Gamma(s)$ . Estas variedades de dimensión 2 se intersectan de manera transversal a lo largo de  $\Gamma(s)$ . Como explicamos en el capítulo, en la sección 1.10, estas variedades locales se pueden extender en el tiempo (en sentido positivo y negativo) para obtener las variedades estable  $W^s(\Gamma(s))$  e inestable  $W^u(\Gamma(s))$  de manera global; en otras palabras

$$\begin{aligned} W^s(\Gamma(s)) &= \bigcup_{s \leq s_o} \left\{ (x(s), v(s), \tau(s)) \mid (x(s_o), v(s_o), \tau(s_o)) \in W_{loc}^s(\Gamma(s_o)) \right\}, \\ W^u(\Gamma(s)) &= \bigcup_{s \geq s_o} \left\{ (x(s), v(s), \tau(s)) \mid (x(s_o), v(s_o), \tau(s_o)) \in W_{loc}^u(\Gamma(s_o)) \right\}. \end{aligned}$$

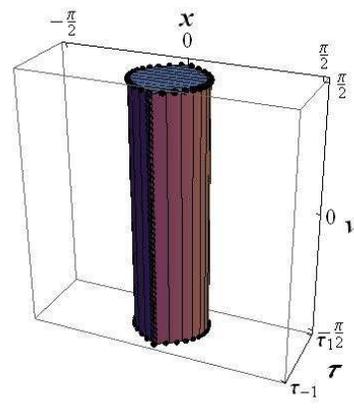
El campo vectorial determinado por (6.2) es un caso particular del campo vectorial definido en (4.19) y por lo tanto hereda sus propiedades. El espacio fase (extendido en el tiempo) compacto tiene por fronteras los planos determinados por  $v = \pi/2$ ,  $v = -\pi/2$ ,  $\tau = \tau_1$ ,  $\tau = \tau_{-1}$  y las superficies  $x = \frac{1}{2}r(\tau) - \frac{\pi}{4}$  y  $x = -\frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4}$ . En la figura 6.1 mostramos los cinco posibles escenarios que abarca el teorema 6.1 para el espacio fase compacto: cuando  $q(\tau) = q_{E1}(\tau)$ ,  $q(\tau) = q_{E2}(\tau)$  y  $q(\tau) = q_{Ha}(\tau)$  para  $a = 1, 2, 3$ .

En cualquiera de los cinco casos representados en las figuras 6.1, las superficies determinadas por los conjuntos

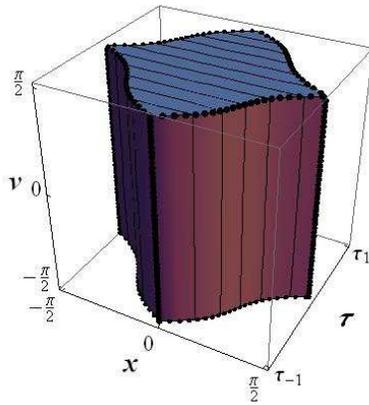
$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid v = \frac{\pi}{2} \right\}, \\ B &= \left\{ (x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid v = -\frac{\pi}{2} \right\}, \\ C &= \left\{ (x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -\frac{1}{2}r(\tau) + \frac{\pi}{4} \right\}, \\ D &= \left\{ (x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{1}{2}r(\tau) - \frac{\pi}{4} \right\}, \end{aligned}$$



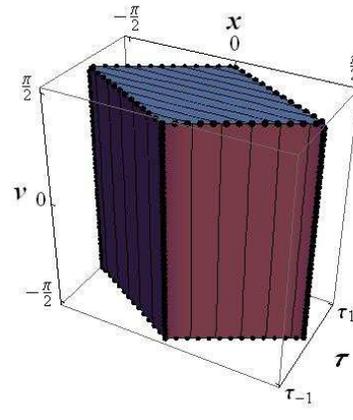
(a) Caso  $q_{E1}$ .



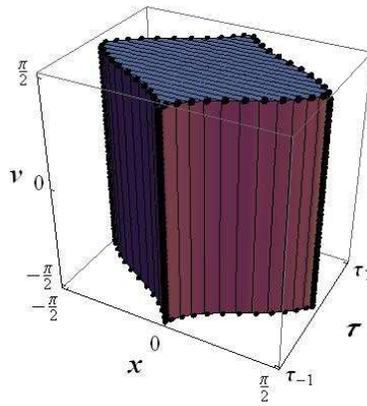
(b) Caso  $q_{E2}$ .



(c) Caso  $q_{H1}$ .



(d) Caso  $q_{H2}$ .



(e) Caso  $q_{H3}$ .

Figura 6.1: *Regiones compactas para los espacios fase (extendidos en el tiempo) para el problema restringido simétrico elíptico e hiperbólico de 3 cuerpos en  $S^1$ .*

son conjuntos invariantes para el flujo de (6.2) (están indicados con líneas paralelas en las figuras 6.2). De hecho, el flujo en  $A$  y  $B$  es paralelo al eje  $x$  y el flujo en  $C$  y  $D$  es paralelo al eje  $v$ .

Las aristas que resultan de las intersecciones de las fronteras antes mencionadas son conjuntos continuos de puntos de equilibrio (están indicados como líneas formadas de puntos en las figuras 6.1). Los conjuntos  $A \cap C$ ,  $A \cap D$ ,  $B \cap C$  y  $B \cap D$  son continuos de puntos de equilibrio.

Construimos un conjunto de secciones transversales al eje  $\tau$ . Definimos

$$\Sigma_{\tau^*} = \{(x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 | \tau = \tau^*\},$$

entonces el conjunto

$$\bigcup_{\tau_{-1} \leq \tau^* \leq \tau_1} \Sigma_{\tau^*}$$

es el espacio fase compacto que hemos estado analizando. En las ecuaciones (6.2) observamos que  $\tau' \geq 0$ , lo que significa que el flujo determinado por estas ecuaciones es transversal a  $\Sigma_{\tau^*}$  para toda  $\tau^* \in [\tau_{-1}, \tau_1]$ , excepto en la frontera del espacio compacto.

Para entender la dinámica de la masa infinitesimal en los problemas que nos ocupan introducimos algunas definiciones para caracterizar diferentes clases de movimientos.

- Llamamos *solución elíptica simétrica* a toda aquella solución que para todo tiempo  $s$  cumple que  $x(s) \neq 0$  y  $v(s) \neq 0$  excepto para un único  $s_*$  tal que  $v(s_*) = 0$ . Es decir, la masa infinitesimal nunca pasa por el centro de masa ficticio y para un único instante tiene velocidad cero.
- Llamamos *solución hiperbólica simétrica* a toda solución que para un único tiempo  $s_*$  cumple que  $x(s_*) = 0$  y que el resto del tiempo  $s$  resulte que  $v(s) \neq 0$ . Es decir, la masa infinitesimal describe una trayectoria que no cambia de signo en la velocidad y sí pasa en un único instante por el centro de masa ficticio.
- Llamamos *solución parabólica simétrica* a toda aquella solución que para toda  $s$  sucede que  $v(s) \neq 0$  y  $x(s) \neq 0$ , además de que  $x(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \pm\infty$ . En otras palabras, el cuerpo secundario no pasa en ningún momento por el centro de masa ficticio y tiene velocidad positiva o negativa a lo largo del tiempo, además de que llega asintóticamente (en el tiempo) a la posición de equilibrio.

Con el análisis que hemos realizado hasta ahora planteamos el siguiente resultado que trata sobre la dinámica de la masa infinitesimal en los casos elíptico e hiperbólico del problema simétrico restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ .

**Proposición 6.1** *Cada solución a los problemas restringidos simétricos elíptico e hiperbólico de 3 cuerpos en  $S^1$  es alguna de las siguientes:*

- *solución de equilibrio con estructura hiperbólica,*
- *solución elíptica simétrica,*

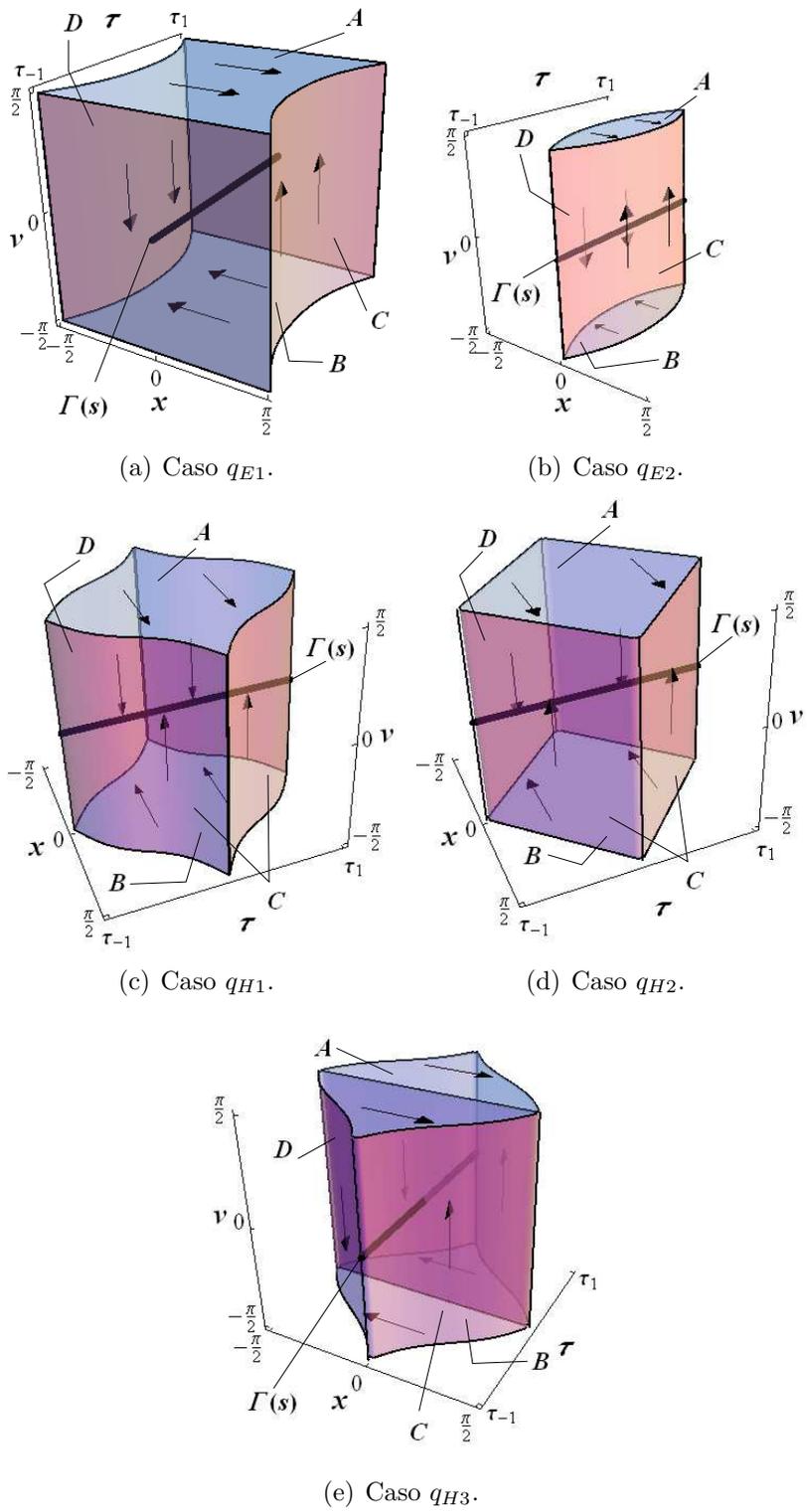


Figura 6.2: Campo vectorial en la frontera y la trayectoria  $\Gamma(s)$ .

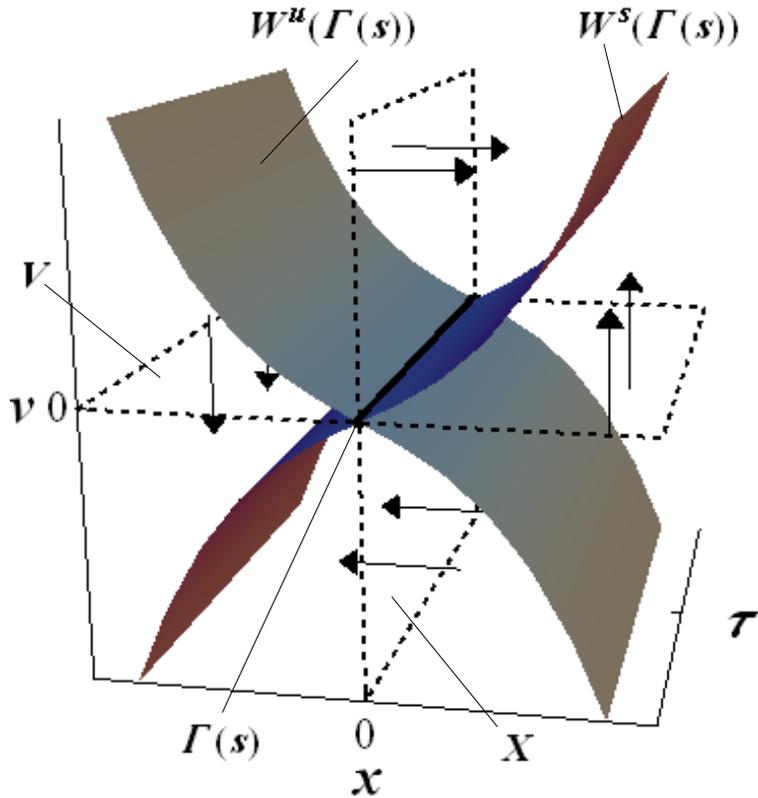


Figura 6.3: Variedades estable e inestable a  $\Gamma(s)$  y los planos  $X$  y  $V$ .

- solución parabólica simétrica o
- solución hiperbólica simétrica.

*Demostración.* Sabemos que la solución de equilibrio (extendida en el tiempo)  $\Gamma(s)$  tiene estructura hiperbólica, por el teorema 6.1 (representada en las figuras 6.2). Como consecuencia sabemos de la existencia de las variedades  $W^s(\Gamma(s))$  y  $W^u(\Gamma(s))$ , las cuales se intersectan transversalmente a lo largo de  $\Gamma(s)$ , como lo mostramos en la figura 6.3.

Hacemos una partición en 4 del espacio fase (extendido) compacto, sin considerar la frontera determinada por las superficies  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  mencionadas anteriormente. Esta partición la definimos mediante dos planos: uno determinado por la ecuación  $x = 0$  (que denotamos por  $X$ ) y otro determinado por la ecuación  $v = 0$  (que denotamos por  $V$ ). Estos dos planos son secciones transversales para el flujo porque

$$\begin{aligned}
 x = 0, v > 0 &\Rightarrow x' > 0, v' = 0, \tau' > 0, \\
 x = 0, v < 0 &\Rightarrow x' < 0, v' = 0, \tau' > 0,
 \end{aligned}$$

que verifica que  $X$  es transversal al flujo y

$$\begin{aligned} x > 0, v = 0 &\Rightarrow x' = 0, v' > 0, \tau' > 0, \\ x < 0, v = 0 &\Rightarrow x' = 0, v' < 0, \tau' > 0, \end{aligned}$$

que verifica que  $V$  es transversal al flujo (véase la figura 6.3). Denotamos por  $I, II, III$  y  $IV$  las 4 partes de la partición como sigue:

$$\begin{aligned} I &= \{(x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, v > 0\}, \\ II &= \{(x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, v > 0\}, \\ III &= \{(x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, v < 0\}, \\ IV &= \{(x, v, \tau) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, v < 0\}. \end{aligned}$$

Escribimos el sentido del flujo en cada una de las 4 partes de la partición

$$\begin{aligned} I &\implies x' > 0 \text{ y } v' > 0, \\ II &\implies x' > 0 \text{ y } v' < 0, \\ III &\implies x' < 0 \text{ y } v' < 0, \\ IV &\implies x' < 0 \text{ y } v' > 0. \end{aligned}$$

A partir de que las fronteras del espacio fase compacto  $A, B, C$  y  $D$  son conjuntos invariantes para el flujo vectorial, que las aristas  $A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D$  son conjuntos de un continuo de puntos de equilibrio y que los planos  $X$  y  $V$  son secciones transversales para el flujo, entonces sabemos que:

- el flujo en  $I$  proviene de  $II$  atravesando el plano  $X$  y proviene de  $IV$  atravesando el plano  $V$ ; el flujo no sale de  $I$ ,
- el flujo en  $II$  sale por el plano  $X$  hacia  $I$  y sale por el plano  $V$  hacia  $III$ ,
- el flujo en  $III$  proviene de  $II$  atravesando el plano  $V$  y proviene de  $IV$  atravesando el plano  $X$ ; el flujo no sale de  $III$  y
- el flujo en  $IV$  sale por el plano  $V$  hacia  $I$  y sale por el plano  $X$  hacia  $III$ .

A partir de aquí describimos la dinámica del cuerpo secundario según el análisis cualitativo del campo vectorial que hemos realizado. Consideramos una condición inicial  $(x_o, v_o, \tau_o) = (x(0), v(0), \tau(0))$  en  $I$  y como  $I$  es un conjunto invariante, entonces la solución  $(x(s), v(s), \tau(s))$ , con la condición inicial dada, tiende al conjunto  $A \cap C$  cuando  $s$  tiende a  $+\infty$ . Para conocer la solución  $(x(s), v(s), \tau(s))$  en tiempo negativo consideramos tres casos.

1. La solución proviene de  $II$ , es decir,

$$\left\{ (x(s), v(s), \tau(s)) \mid s < s_X, x(s_X) = 0 \right\} \subset II$$

El tiempo  $s_X$  es el instante en el que la solución atraviesa el plano  $X$ . Además,  $(x(s), v(s), \tau(s))$  tiende a  $A \cap D$  cuando  $s$  tiene a  $-\infty$ .

2. La solución proviene de  $IV$ , es decir,

$$\left\{ (x(s), v(s), \tau(s)) \mid s < s_V, v(s_V) = 0 \right\} \subset IV$$

El tiempo  $s_V$  es el instante en el que la solución atraviesa el plano  $V$ . Además,  $(x(s), v(s), \tau(s))$  tiende a  $B \cap C$  cuando  $s$  tiende a  $-\infty$ .

3. Si la solución no proviene de  $II$  ni de  $IV$ , entonces

$$\left\{ (x(s), v(s), \tau(s)) \mid s \in \mathbb{R} \right\} \subset W^u(\Gamma(s)).$$

Así,  $(x(s), v(s), \tau(s))$  tiende a  $A \cap C$  cuando  $t$  tiende a  $\infty$  y  $(x(s), v(s), \tau(s))$  tiende a  $\Gamma(s)$  cuando  $s \rightarrow -\infty$ .

Recordamos el carácter simétrico del sistema (6.2) respecto de la simetría dada por  $\Psi(x, v, \tau) = (-x, -v, \tau)$ , lo que implica que si  $(x_o(s), v_o(s), \tau(s))$  es solución, entonces  $(-x_o(s), -v_o(s), \tau(s))$  también lo es. De esta forma, el estudio cualitativo de las soluciones que se encuentran en  $III$  es el mismo que hicimos para las soluciones en  $I$ .

Sólo falta determinar la evolución de las soluciones con condición inicial dada por  $(x_o, v_o, \tau_o) = (x(0), v(0), \tau(0)) \in II$  (la dinámica en  $IV$  es la misma de  $II$  salvo la simetría  $\Psi$ ). La solución puede abandonar  $II$  por el plano  $X$  hacia  $I$  y por el plano  $V$  hacia  $III$ , pero estas soluciones las acabamos de describir (salvo una reparametrización en el tiempo). Si la solución no sale de  $II$ , entonces

$$\left\{ (x(s), v(s), \tau(s)) \mid s \in \mathbb{R} \right\} \subset W^s(\Gamma(s)).$$

Así, la solución tiende a  $A \cap D$  cuando  $s \rightarrow -\infty$ , mientras que la solución tiende a  $\Gamma(s)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

Ahora sabemos que las variedades invariantes  $W^s(\Gamma(s))$  y  $W^u(\Gamma(s))$  parten en cuatro regiones invariantes el espacio fase compacto de (6.2), porque  $W^s(\Gamma(s))$  conecta  $\Gamma(s)$  con  $A \cap D$  y con  $B \cap C$  y  $W^u(\Gamma(s))$  conecta a  $\Gamma(s)$  con  $A \cap C$  y con  $B \cap D$ . Estas regiones contienen las distintas clases de trayectorias.

- Las soluciones que se encuentran en el espacio acotado por el plano  $A$  y las variedades  $W^s(\Gamma(s))$  y  $W^u(\Gamma(s))$  presentan las características de las soluciones hiperbólicas simétricas. Ocurre lo mismo para las soluciones que se encuentran en el espacio que delimitan el plano  $B$  y las variedades  $W^s(\Gamma(s))$  y  $W^u(\Gamma(s))$ , también son soluciones hiperbólicas simétricas.
- Las soluciones que se encuentran en el espacio acotado por el plano  $C$  y las variedades  $W^s(\Gamma(s))$  y  $W^u(\Gamma(s))$ , así como las que se encuentran dentro del espacio delimitado por el plano  $D$  y las variedades  $W^s(\Gamma(s))$  y  $W^u(\Gamma(s))$  presentan las características de las soluciones elípticas simétricas.
- Las soluciones que viven en las variedades  $W^s(\Gamma(s))$  y  $W^u(\Gamma(s))$  son las que corresponden a las soluciones parabólicas simétricas.

□

La proposición 6.1 trata sobre el comportamiento global de las soluciones gracias a la partición que se genera por las variedades estable e inestable de la trayectoria  $\Gamma(s)$ . En el sistema (6.2) todas las singularidades son puntos de equilibrio que permiten la definición de soluciones para todo tiempo  $s$ , pero impiden la continuación del movimiento después de cada colisión. Aún así, las soluciones descritas determinan la dinámica de la masa infinitesimal entre colisiones. Todos los movimientos son movimientos de expulsión-colisión.

- La solución elíptica simétrica indica que si la masa infinitesimal no tiene suficiente energía, ésta no alcanza el centro de masa ficticio y regresa a la colisión de la cual viene originalmente con alguno de los dos cuerpos primarios.
- La solución hiperbólica simétrica indica que si masa infinitesimal tiene suficiente energía, entonces el cuerpo logra alejarse de la colisión con un cuerpo primario y sigue su trayectoria hasta colisionar con el otro cuerpo primario, pasando por el centro de masa ficticio.
- La solución parabólica simétrica indica que la masa infinitesimal tiene la energía necesaria para escapar de la colisión con alguno de los cuerpos primarios, pero no la energía suficiente como para pasar por el centro de masa ficticio, acercándose a éste asintóticamente en el tiempo.

La compactación del espacio fase extendido no nos permite conocer el comportamiento de la masa infinitesimal después de una colisión, pero si permite conocer la dinámica fuera de estos puntos. En lo que sigue, consideramos el problema restringido simétrico de 3 cuerpos en  $S^1$  regularizado para continuar las soluciones simulando un rebote elástico en el lugar de la colisión. A partir de (4.13), sabemos que el hamiltoniano asociado es

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(q, p, s) = & \frac{1}{512} \left( -32\mathcal{H} \cos^2 q (\pi - 2r(\tau))^2 + 64(\text{sen} q - 1)(-2p^2 + \pi - 2r(\tau)) \right. \\ & + 128(1 + \text{sen} q) \left( p^2 - \frac{\pi}{2} + r(\tau) \right) - \frac{64 \cos^2 q (\pi - 2r(\tau))^2}{\pi(3 + \text{sen} q) - 2(-1 + \text{sen} q)r(\tau)} \\ & + \frac{64 \cos^2 q (\pi - 2r(\tau))^2}{\pi(-3 + \text{sen} q) - 2(1 + \text{sen} q)r(\tau)} + 2 \cos^2 q (\pi - 2r(\tau))^2 \dot{r}(\tau)^2 \\ & \left. + \cos^2 q \cos(2q) (\pi - 2r(\tau))^3 \ddot{r}(\tau) \right) \equiv 0, \quad (6.6) \end{aligned}$$

con el respectivo sistema hamiltoniano,

$$\begin{aligned}
q' &= p \\
p' &= \frac{\pi \cos q(\pi^2 - 4r(\tau)^2)}{(\pi(3 + \operatorname{sen}q) - 2(\operatorname{sen}q - 1)r(\tau))^2} - \frac{\pi \cos q(\pi^2 - 4r(\tau)^2)}{(\pi(-3 + \operatorname{sen}q) - 2(\operatorname{sen}q + 1)r(\tau))^2} \\
&+ \frac{1}{512} \left( \operatorname{sen}(4q)(\pi - 2r(\tau))^3 \ddot{r}(\tau) + \operatorname{sen}(2q)(\pi - 2r(\tau))^2 (-32\mathcal{H} + 2\dot{r}(\tau)^2 + (\pi - 2r(\tau))\ddot{r}(\tau)) \right).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

donde  $r(\tau)$  es una solución para el problema de Kepler en  $S^1$  dada en el teorema 2.1. En (4.13) hicimos  $C(\tau) \equiv 0$ , (es una constante de integración) y las derivadas respecto del tiempo  $s$  están denotadas por  $(')$ . Este sistema nos permite controlar el movimiento cerca de la colisión y completamos esta información con la obtenida a partir del teorema 6.1.

Las soluciones del teorema 6.1 preservan sus características en las coordenadas regularizadas, porque la transformación de coordenadas realizada por el lema 4.1 es monótono creciente para el caso simétrico en las masas. De hecho, la transformación es

$$(x, y) = E^{-1}(q, p, \tau) = \left( \frac{\operatorname{sen}q}{2} \left( \frac{\pi}{2} - r(\tau) \right), \frac{4p}{\cos q(\pi - 2r(\tau))} \right)$$

y por ende, preserva el orden tanto en posiciones como en velocidades.

A partir del teorema 6.1 y del hamiltoniano (6.6) conocemos la dinámica global de los problemas restringidos simétricos hiperbólico y elíptico de 3 cuerpos en  $S^1$ .

- La solución de equilibrio indica que la masa infinitesimal está en la posición  $(q_o, p_o) = (0, 0)$  para todo tiempo.
- La solución elíptica simétrica indica que la masa infinitesimal colisiona repetidamente con uno de los cuerpos primarios y nunca pasa por el centro de masa ficticio.
- La solución parabólica simétrica indica que la masa infinitesimal colisiona una sola vez con alguno de los cuerpos primarios y llega asintóticamente (en el tiempo) a la posición de equilibrio en tiempo positivo y negativo.
- La solución hiperbólica simétrica indica que la masa infinitesimal colisiona alternadamente con los cuerpos primarios y entre cada colisión pasa por el centro de masa ficticio.

Resumimos todo lo anterior en uno de los resultados más importantes del presente trabajo.

**Teorema 6.2** *Los problemas restringidos simétricos elíptico e hiperbólico de 3 cuerpos en  $S^1$  regularizados presentan:*

- una solución de equilibrio  $(q_o, p_o) = (0, 0)$ ,

- *soluciones simétricas elípticas,*
- *soluciones simétricas parabólicas y*
- *soluciones simétricas hiperbólicas.*

*Éstas son todas las soluciones y están definidas para todo tiempo.*

### 6.3. Soluciones periódicas.

Probamos la existencia de soluciones periódicas en el tiempo para la masa infinitesimal cuando los cuerpos primarios siguen soluciones elípticas.

**Lema 6.1** *El problema restringido simétrico elíptico de 3 cuerpos en  $S^1$  regularizado presenta soluciones simétricas elípticas y simétricas hiperbólicas que son periódicas, de períodos que son múltiplos respecto del período determinado por las trayectorias de los cuerpos primarios, incluso del mismo período.*

*Demostración.* El razonamiento lo partimos en dos partes y consideramos  $r(\tau)$  una solución elíptica de período  $T$  como está en el teorema 2.1. Así,  $q_1(\tau)$  y  $q_2(\tau)$  son soluciones elípticas para los cuerpos primarios (teorema 2.2) de período  $T$  cada una.

- *Construcción de las soluciones simétricas hiperbólicas periódicas.*

Suponemos que  $(q_*(s), p_*(s))$  es una solución hiperbólica simétrica para el sistema (6.7), con las condiciones iniciales  $q_*(0) = 0$  y  $p_*(0) > 0$ . Además, suponemos que en ese momento los cuerpos primarios se encuentran en colisión en el centro de masa ( $\pi/2$ ). Para esta solución existe  $s_1 > 0$  tal que  $q_*(s_1) = \pi/2$  y  $p_*(s) > 0$  para todo  $s \in (0, s_1)$ , es decir, que la masa infinitesimal está en colisión con el cuerpo primario con posición  $q_1$ . Por continuidad respecto de condiciones iniciales, elegimos una solución  $(q_{2T}(s), p_{2T}(s))$  tal que tenga las mismas condiciones iniciales y además que cumpla  $q_{2T}(s_1) = \pi/2$  y  $\dot{q}_1(\tau_1) = 0$  ( $\tau_1 = \tau(s_1)$ ), es decir, que en el momento de la colisión, el cuerpo primario tenga velocidad cero, de tal forma que  $\dot{q}_1(\tau) \neq 0$  para  $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ . Utilizando la simetría en las masas de los cuerpos primarios, existe un tiempo  $s_{-1} < 0$  tal que la masa infinitesimal colisiona con el cuerpo primario con posición  $q_2$  cuando éste tiene velocidad cero, es decir,  $q_{2T}(s_{-1}) = -\pi/2$  y  $\dot{q}_2(\tau_{-1}) = 0$  ( $\tau_{-1} = \tau(s_{-1})$ ). Así, tenemos una solución definida para  $s \in [s_{-1}, s_1]$  que representa un período ( $T$ ) en tiempo para los cuerpos primarios.

Pero sabemos que el sistema (6.7) es simétrico respecto de  $\Psi$ , por lo que continuamos esta solución para  $s \in [s_1, s_2]$ , de tal forma que  $q_{2T}(s_2) = -\pi/2$  y  $\dot{q}_2(\tau_2) = 0$  ( $\tau_2 = \tau(s_2)$ ). En otras palabras, tenemos una solución que sale de colisión con el cuerpo primario con posición  $q_2$ , sigue su trayecto hasta colisionar con el cuerpo primario con posición  $q_1$ , rebota y recorre el mismo trayecto en sentido contrario hasta volver a colisionar con el cuerpo primario con posición  $q_2$ . Todas las colisiones se llevan a cabo cuando los cuerpos primarios tienen velocidad cero.

Seguimos esta forma de construcción y completamos la solución  $(q_{2T}(s), p_{2T}(s))$  para todo tiempo  $s$ . Esta es una solución periódica de período  $2T$  (en el tiempo  $\tau$ ).

De la misma manera, construimos soluciones periódicas de período  $2nT$ , es decir, que mientras la masa infinitesimal recorre una vez su trayectoria, los cuerpos primarios recorren su trayectoria  $2n$  veces.

■ *Construcción de las soluciones simétricas hiperbólicas periódicas.*

Suponemos que  $(q_*(s), p_*(s))$  es una solución elíptica simétrica de (6.7) con las condiciones iniciales  $q_*(0) > 0$  y  $p_*(0) = 0$ . Además suponemos que en ese momento los cuerpos primarios están en colisión en el centro de masa ( $\pi/2$ ). Entonces existe  $s_1 > 0$  tal que  $q_*(s_1) = q_1(\tau_1)$  ( $\tau_1 = \tau(s_1)$ ). Por continuidad respecto de condiciones iniciales, elegimos una solución  $(q_T(s), p_T(s))$  que tenga las mismas condiciones iniciales y que además  $q_*(s_1) = q_1(\tau_1)$  con  $\dot{q}_1(\tau_1) = 0$ . Por simetría, existe  $s_{-1}$  tal que la solución satisface  $q_*(s_{-1}) = q_1(\tau_{-1})$  con  $\dot{q}_1(\tau_{-1}) = 0$  (donde  $\tau_{-1} = \tau(s_{-1})$ ). Así tenemos definida una solución para  $s \in [s_{-1}, s_1]$  que indica un período ( $T$ ) para el tiempo en los cuerpos primarios.

Continuamos la solución para todo tiempo  $s$  y hemos construido una solución periódica de período  $T$  (en el tiempo  $\tau$ ).

De esta manera también construimos soluciones de período  $nT$ , es decir, que mientras la masa infinitesimal recorre una vez su trayectoria, los cuerpos primarios recorren  $n$  veces su trayectoria.

A todas estas soluciones agregamos aquellas que tienen las mismas características con la condición inicial simétrica  $q_*(0) < 0$  y  $p_*(0) = 0$  y su existencia se debe a la simetría  $\Psi$ .

Así, hemos mostrado soluciones elípticas simétricas periódicas de período  $nT$  con y soluciones hiperbólicas simétricas periódicas de período  $2nT$ .

□

# Capítulo 7

## Conclusiones y perspectivas.

1. *Problema de 2 cuerpos en  $S^1$* . Consideramos dos cuerpos de masa puntual siguiendo la Ley de Gravitación Universal, constreñidos en su movimiento a un círculo de radio uno. Llamamos a este planteamiento el problema de 2 cuerpos en  $S^1$ .
  - **Mostramos la dinámica global de los dos cuerpos. Clasificamos todas las soluciones de las ecuaciones de movimiento en elípticas, parabólicas e hiperbólicas, además de una posición de equilibrio.**
  - **Obtuvimos todas las soluciones de manera explícita y mostramos que están bien definidas para todo tiempo. Calculamos el período de las soluciones periódicas en el tiempo.**

Las soluciones explícitas (para cualquier valor de la energía) las obtuvimos después de haber regularizado la singularidad fija en las ecuaciones de movimiento del sistema con origen en uno de los dos cuerpos. La singularidad fue removida mediante un cambio en las coordenadas posición y velocidad, así como un cambio en el tiempo. Al regularizar, conservamos la estructura hamiltoniana de las ecuaciones. Clasificamos todas las soluciones obtenidas como elípticas, parabólicas, hiperbólicas y una solución de equilibrio. El hamiltoniano regularizado del sistema con origen en uno de los cuerpos corresponde, para cada valor de la energía, al hamiltoniano de un péndulo simple en el plano.

2. *Regularización global y simpléctica en espacios unidimensionales de curvatura constante 0 ó 1*. Consideramos tres cuerpos de masa puntual siguiendo la ley de gravitación universal y constreñidos en su movimiento a una línea recta infinita o a un círculo de radio uno. Uno de los cuerpos posee un valor de masa despreciable respecto de los valores de masa de los otros dos cuerpos, llamados cuerpos primarios. Así, los cuerpos primarios forman el problema de 2 de cuerpos en la recta o en el círculo, ya que su dinámica es independiente de la presencia del cuerpo de masa despreciable. El movimiento de este último cuerpo está gobernado por el movimiento de los primeros dos. Este planteamiento, llamado problema restringido de 3 cuerpos en  $\mathbb{R}$  y en  $S^1$ , presenta en sus ecuaciones de movimiento singularidades debidas a colisiones dobles y triples, que no necesariamente suceden en puntos fijos.

- Presentamos un método para regularizar las ecuaciones de movimiento correspondientes a los problemas restringidos de 3 cuerpos en una línea recta o en un círculo unitario.
- La regularización remueve todas las singularidades debidas a colisiones dobles y en algunos casos las colisiones triples.
- La regularización es simpléctica (preserva la estructura hamiltoniana de las ecuaciones).

La regularización consiste de un cambio en las coordenadas (posición y velocidad) dependiente del tiempo y de un reescalamiento del tiempo. Aún cuando la transformación es dependiente del tiempo, ésta preserva la estructura hamiltoniana de las ecuaciones y remueve todas las singularidades debidas a colisiones dobles. Este método admite como caso particular la regularización del tipo Levi-Civita.

3. *Problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ .* Establecimos el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ .

- Determinamos la existencia de una única solución de equilibrio que ocurre si y solamente si las masas de los cuerpos primarios son iguales.
- Mostramos que no existen soluciones lineales en el tiempo.

Clasificamos en cuatro casos el problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$ , el subproblema elíptico, parabólico e hiperbólico restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  y el subproblema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  con dos centros fijos, según las soluciones que sigan los cuerpos primarios en el problema de 2 cuerpos en  $S^1$ . Regularizamos de manera global y simpléctica las ecuaciones correspondientes al problema, siguiendo el desarrollo del punto 2. Mostramos que no hay soluciones lineales (en el tiempo) para los subproblemas elípticos, parabólicos e hiperbólicos restringidos, excepto cuando las masas de los cuerpos primarios son iguales y la solución es de equilibrio. También mostramos que la ecuación de la energía regularizada asociada al problema admite como caso particular la ecuación de la energía regularizada del problema de 2 cuerpos en  $S^1$ . Hicimos una compactación, mediante cambios de variables, del campo vectorial extendido determinado por las ecuaciones de movimiento.

4. *Problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  con dos centros fijos* Estudiamos el subproblema con dos centros fijos, es decir, cuando los cuerpos primarios siguen la solución de equilibrio en el problema de 2 cuerpos en  $S^1$ .

- Describimos la dinámica global del sistema. Clasificamos todas las soluciones, para cualquier valor de las masas de los cuerpos primarios, en soluciones elípticas, parabólicas, hipérbolicas y una posición de equilibrio.

Determinamos la integrabilidad del problema restringido de 3 cuerpos con dos centros fijos. A partir de la ecuación de la energía regularizada, determinamos la

dinámica global del sistema para todo tiempo. Hicimos una clasificación de todas las soluciones del problema. La dinámica presentada es válida para cualquier valor en las masas de los cuerpos primarios. La dinámica global se obtuvo del análisis de las propiedades geométricas de la ecuación de la energía. Aún cuando el problema es de un grado de libertad integrable, las soluciones explícitas no se pueden obtener por medio de la manipulación algebraica de las ecuaciones.

5. *Problemas restringido simétrico hiperbólico y restringido simétrico elíptico de 3 cuerpos en  $S^1$* . Analizamos los subproblemas hiperbólico y elípticos restringidos, en el caso particular en que el valor de las masas en los cuerpos primarios es  $1/2$ .

- **Demostremos que la solución de equilibrio del problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  tiene estructura hiperbólica para los casos en que los cuerpos primarios presentan movimientos elípticos e hiperbólicos.**
- **Determinamos la dinámica global de los problemas restringido simétrico hiperbólico y restringido simétrico elíptico de 3 cuerpos en  $S^1$ .**
- **Mostramos la existencia de soluciones periódicas para el problema restringido simétrico elíptico, indicando el período correspondiente.**

Analizamos la solución de equilibrio del problema restringido de 3 cuerpos en  $S^1$  y mostramos que posee estructura hiperbólica en el espacio fase extendido, cuando los cuerpos primarios están en movimientos elípticos o hiperbólicos. A partir de este resultado y del estudio geométrico del campo vectorial determinamos la dinámica global para el cuerpo de masa despreciable para los problemas restringido simétrico hiperbólico y restringido simétrico elíptico de 3 cuerpos en  $S^1$ . Después de aplicar la regularización del punto 2 a las ecuaciones, extendimos la dinámica a través de las colisiones, clasificando todas las soluciones (definidas para todo tiempo) en: soluciones elípticas simétricas, parabólicas simétricas e hiperbólicas simétricas y una solución de equilibrio. Mostramos la existencia de soluciones periódicas e indicamos su período para el problema restringido simétrico elíptico de 3 cuerpos en  $S^1$ , siendo soluciones del tipo elípticas simétricas e hiperbólicas simétricas.

En esta investigación se lograron resultados importantes. Un entendimiento completo sobre la dinámica del problema de 3 cuerpos en  $S^1$  está en proceso. Esto se logra realizando la investigación en las siguientes direcciones:

- Estudio de la colisión triple en el centro de masa ficticio.
- Perturbación en el valor de las masas para el caso simétrico.
- Introducción de dinámica simbólica.
- Realización de simulaciones numéricas.

# Bibliografía

- [1] J. Bertrand. *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, **LXXVII** (16), 849-853 (1873).
- [2] D. Boccaletti y G. Pucacco. *Theory of orbits*, volumen I, Springer (2001).
- [3] W. Bolyai y J. Bolyai. *Geometrische untersuchungen*, Hrsg. P. Stäckel, Teubner, Leipzig-Berlín (1913).
- [4] A. V. Borisov, I. S. Mamaev y A. A. Kilin. *Two-body problem on a sphere. Reduction, stochasticity, periodic orbits*, Regular and Chaotic Dynamics, **9** (3), 265-279 (2004).
- [5] R. Broucke y A. Konopliv. *Some models for the motion of the co-orbital, satellites of Saturn*. A. E. Roy (ed.), Long-Term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems, Kluwer Academic Publishers, 155-169 (1988).
- [6] R. A. Broucke. *Motion near the unit circle in the three-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **73**, 281-290 (1999).
- [7] H. Bruns. *Ber die integrale des vielkrper-problems*, Acta Math., **11**, 25-96 (1887).
- [8] J. F. Cariñena, M. F. Rañada y M. Santander. *Central potentials on spaces of constant curvature: the Kepler problem on the two-dimensional sphere  $S^2$  and the hyperbolic plane  $H^2$* . Journal of Mathematical Physics, **46**, 052702, (2005).
- [9] C. Chicone. *Ordinary differential equations with applications*, Texts in Applied Mathematics 34, segunda edición, Springer-Verlag, (2006).
- [10] F. Diacu, E. Pérez-Chavela y M. Santoprete. *The n-body problem in spaces of constant curvature*. versión electrónica arXiv:0807.1747 (22-Agosto-2008).
- [11] C. I. Doering y A. O. Lopes. *Equações diferenciais ordinárias*, Coleção Matemática Universitária, IMPA (2005).
- [12] B. Érdi, *On the global regularizing transformations of the restricted three-body problem*. Publ. Obs. Astron. Belgrade, **49**, 151-157 (1995).
- [13] B. Érdi. *Global regularization of the restricted problem of three bodies*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **90**, 35-42 (2004).

- [14] H. Goldstein. *Classical Mechanics*, segunda edición, Addison-Wesley (1980).
- [15] S. R. Kaplan, E. A. Lacomba y J. Llibre. *Symbolic dynamics of the elliptic rectilinear restricted 3-body problem*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S, **1** (4), 541-555 (2008).
- [16] V. V. Kozlov y O. A. Harin. *Keplers problem in spaces of constant curvature*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **54**, 393-399 (1992).
- [17] E. A. Lacomba y J. Llibre. *On the dynamics and topology of the elliptic rectilinear restricted 3-body problem*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **77**, 1-15 (2000).
- [18] E. A. Lacomba y G. Sierra. *Blow up techniques in the Kepler problem*, Holomorphic Dynamics, Lectures Notes in Mathematics, volumen 1345, Springer-Verlag (1988).
- [19] D. F. Lawden. *Elliptic functions and applications*, Applied Mathematical Sciencies 80, Springer-Verlag (1989).
- [20] H. Liebmann. *Über die zentralbewegung in der nichteuklidische geometrie*, Berichte Königl. Sächsischen Gesell. Wiss., Math. Phys. Klasse **55**, 146-153 (1903).
- [21] N. I. Lobachevsky. *The new foundations of geometry with full theory of parallels*, 1835-1838, Collected Works, volumen 2, GITTL, Moscú, 159 (1949).
- [22] J. Llibre y E. Pérez-Chavela. *Transversal homoclinic orbits in the collinear restricted three-body problem*, Journal of Nonlinear Science, 1-10 (2005).
- [23] C. Marchal. *Regularization of the singularities of the n-body problem*, Aplicacions of Modern Dynamics to Celestial Mechanics and Astrodynamics, 201-236 (1982).
- [24] J. Mather y R. McGehee. *Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time*, Lectures Notes in Physics 38, Springer (1975).
- [25] K. R. Meyer y G. R. Hall. *Introduction to hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Springer-Verlag (1992).
- [26] P. Painlevé. *Lecons sur la théorie analytique des équations différentielles*, A. Herman: París (1897).
- [27] D. G. Saari. *Improbability of collisions in newtonian gravitational systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **62**, 267-271 (1971); **181**, 351-368 (1973).
- [28] D. Saari. *Collisions, rings and other newtonian N-body problems*. American Mathematical Society, Regional Conference Series in Mathematics, número 104, Providence, RI (2005).
- [29] P. J. Serret. *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure*, Librairie de Mallet-Bachelier, París 1860.

- [30] E. L. Stiefel y G. Scheifele. *Linear and regular celestial mechanics*, Springer-Verlag: Berlín (1971).
- [31] V. Szebehely. *Theory of orbits. The restricted problem of three bodies*, Academic Press (1967).
- [32] S. T. Thornton y J. B. Marion. *Classical dynamics of particles and systems*, quinta edición, Thomson (2004).
- [33] T. G. Vozmishcheva. *Some integrable problems in celestial mechanics in spaces of constant curvature*. Journal of Mathematical Sciences, **114** (1) 1025-1066 (2003).
- [34] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Texts in Applied Mathematics 2, segunda edición, Springer-Verlag (2003).
- [35] Z. Xia. *The existence of non collision singularities in the newtonian systems*, Ann. Math., **135**, 411-468 (1992).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Fecha : 10/06/2010

Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE DISERTACIÓN PÚBLICA de DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS) del alumno LUIS FRANCO PEREZ, matrícula 204180024, quien cumplió con los 312 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha once de junio del 2010 presentó la DEFENSA de su DISERTACIÓN PÚBLICA cuya denominación es:

EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE 3 CUERPOS SOBRE EL CIRCULO UNITARIO

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 180 créditos y el programa consta de 492 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBAR

JURADO

Presidente

Secretario

DR. ERNESTO ALEJANDRO LACOMBA ZAMORA

DR. ERNESTO PEREZ CHAVELA

Vocal

Vocal

DR. JAIME CRUZ SAMPEDRO

DR. EDARDO UGALDE SALDAÑA

Vocal

Vocal

DR. FLORIN DIACU

DR. JESUS RUPERTO MUCIÑO RAYMUNDO

UNIDAD IZTAPALAPA

Coordinación de Sistemas Escolares

Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, México, DF, CP 09340 Apdo. Postal 555-320-9000

Tels. 5804-4880 y 5804-4883 Fax: 5804-4876