

✓ ONDAS DE CHOQUE EN FLUIDOS

Tesis que presenta

✓ JOSE INES JIMENEZ AQUINO

Para Obtener el Grado de Maestro en Física.

Junio de 1968. ✓

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA.

✓ CBI

Aesor: Rosa Ma. Velasco Belmont.

¡ A LA MEMORIA DE MI HERMANO!

El Dr. CONRADO JIMENEZ AQUINO

Que fue ejemplo de integridad y  
esperanza de la comunidad Juchi  
teca.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a la Dra. Rosa María Velasco, por su valiosa dirección en la elaboración de este trabajo, y por la gran intuición que ella mostró durante el desarrollo del mismo.

Al Dr. L.S. García-Colín y al Dr. Ramón Peralta F. por sus valiosas observaciones y críticas que me hicieron de este trabajo.

Deseo también agradecer al M. en C. Francisco Uribe por sus valiosas opiniones. Al Fis. Enrique Díaz por su colaboración para poder llevar a cabo los cálculos numéricos.

A Guadalupe Ríos López por el sacrificio y esfuerzo que me brindó en el mecanografiado de este trabajo.

¡ A MI PUEBLO ZAPOTECA !

# INDICE

## CAPITULO I

	Página
I.1.- Introducción .....	1
I.2.- Ondas de choque débiles en el régimen de Euler, despreciando efectos irreversibles.....	6
I.3.- Características de ondas de choque débiles .....	10

## CAPITULO II

II.1.- Perfil y anchura de ondas de choque débiles en el régimen de Navier-Stokes .....	12
II.2.- Definición de la anchura de la onda de choque y su cálculo en el régimen de Navier-Stokes .....	18
II.3.- Casos especiales para el perfil y la anchura de la onda de choque en el régimen de Navier-Stokes .....	22

## CAPITULO III

III.1.- Perfil y anchura de ondas de choque débiles en el régimen de Burnett .....	26
III.2.- Ecuaciones de Burnett .....	26
III.3.- Perfil de la onda de choque en el régimen de Burnett .....	33
III.4.- Expresión de la anchura de la onda de choque en el régimen de Burnett .....	37
III.5.- Casos especiales para el perfil y la anchura de la onda de choque en el régimen de Burnett .....	38

CAPITULO IV

IV. 1.- Comparación de la anchura de la onda de choque con algunos resultados teóricos .....	40
IV. 2.- Comparación de la anchura y el perfil de la onda de choque con los resultados experimentales .....	52
CONCLUSIONES .....	47
BIBLIOGRAFIA .....	48

## CAPITULO I

### I.1.- INTRODUCCION

Uno de los fenómenos que ocurre en los flujos de fluidos, cuyas velocidades son mayores que la velocidad del sonido (flujos supersónicos) es la presencia de la onda de choque.

Las ondas de choque, son fenómenos fuera de equilibrio, las cuales ocurren por ejemplo en vuelos supersónicos, explosiones, descargas eléctricas, etc. Las investigaciones que se han realizado para el mejor entendimiento de su estructura, han sido tanto teóricas como experimentales.

El tratamiento teórico para analizar la estructura de las ondas de choque ha sido a través de dos puntos de vista, los cuales son: El enfoque fenomenológico, partiendo esencialmente de las ecuaciones de Navier-Stokes, y el enfoque de la teoría cinética, cuyo punto de partida es la ecuación de Boltzmann.

De los estudios realizados desde el punto de vista fenomenológico podemos citar por ejemplo el trabajo de Becker (1), quien obtuvo la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, considerando únicamente a los coeficientes de viscosidad  $\mu$ , y conductividad térmica  $\nu$  como constantes. El obtuvo una expresión para la velocidad en la región de la onda de choque, y a partir de ésta obtuvo también una expresión para la anchura de la misma. Sin embargo estos cálculos fueron mejorados por Thomas (2) quien introdujo en sus cálculos la dependencia en la temperatura de los coeficientes de transporte  $\mu$  y  $\nu$ .

Por otro lado el tratamiento de Wang Chang (3), para el problema de ondas de choque, ha sido, siguiendo la idea de Chapman-Enskog. Puesto que Wang Chang introduce en las ecuaciones de conservación para la densidad del flujo de momento y energía, las expresiones para el tensor de esfuerzos  $P_{xx}$ , y para el flujo calor  $q_x$ . Estas expresiones para  $P_{xx}$  y  $q_x$ , de acuerdo con el método de Chapman-Enskog al resolver la ecuación de Boltzmann son: a orden cero  $p = nKT$  y  $q_x = 0$  que corresponden al caso de un fluido ideal, a primer orden obtiene las ecuaciones de Navier-Stokes, a segundo y a tercer orden las ecuaciones de Burnett.

En su teoría, Wang Chang desarrolla las cantidades  $T/T_0$ ,  $v/v_0$ ,  $\lambda/\Delta$  en serie de potencias de  $(M-1)$ , donde  $M$  es el número de Mach,  $T$  y  $v$  son la temperatura y la velocidad en la región de la onda de choque respectivamente,  $T_0$  y  $v_0$ , son la temperatura y la velocidad antes de la onda de choque respectivamente.  $\lambda$  es la longitud libre media de las moléculas y  $\Delta$  es una longitud macroscópica (anchura de la onda de choque). En la primera aproximación, usa las ecuaciones de Navier Stokes, y considera solamente a primer orden en  $(M-1)$ . En la segunda aproximación usa las ecuaciones de Burnett considerando sus cálculos ahora hasta  $(M-1)^2$ ; etc.; obteniendo así, expresiones para la velocidad en la región de la onda de choque, y para el recíproco de la anchura. Las series convergen para números de Mach ligeramente mayores que uno, y por tanto concluye que la teoría de Chapman-Enskog también es aplicable sólo para ondas de choque débiles.

Ahora bien, el punto de partida de la teoría cinética aplicada al problema de ondas de choque, ha sido a través de la ecuación de Boltzmann, cuya solución a este problema específico se ha tratado de obtener tanto analítica como numéricamente. Mott-Smith (4), estudió la estructura de las ondas de choque partiendo de la ecuación de Boltzmann, suponiendo que la función de distribución molecular de velocidades en una onda de choque es bimodal, es decir; se expresa como la suma de dos funciones maxwellianas con temperaturas y velocidades promedio, correspondientes a las regiones anterior y posterior de la onda de choque. La anchura de la onda de choque que obtiene es inversamente proporcional a  $(M-1)$ , para  $(M-1)$  pequeño, y para ondas de choque fuertes, la anchura es mayor que la obtenida por Becker y Thomas.

H.W. Liepman, R. Narasimha, y M. T. Chahine (5), estudiaron la estructura de una onda de choque, y determinaron el rango de aplicabilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes. Calcularon el perfil de la velocidad y de la temperatura usando el modelo iterativo de Bhatnagar, Gross y Krook (BGK), para la solución de la ecuación de Boltzmann comenzando con la solución conocida de Navier-Stokes. Así mostraron que la solución de N-S es una buena aproximación en la región de alta presión dentro de la onda de choque, mientras que en la región de baja presión el perfil correcto se desvía de la solución de N-S, cuando la intensidad de la onda de choque aumenta.

En cuanto a la solución numérica de la ecuación de Boltzmann, citamos el

trabajo de G.A. Bird (6) quien estudió el problema de la estructura de la onda de choque por el método Monte Carlo. El modelo de gas que Bird estudió es el de un gas cuyas moléculas se encuentran dentro de un potencial repulsivo  $\sim 1/r^n$  con valores de  $n$  dados por 5, 9, 12 e  $\infty$ . Sus resultados concuerdan con las predicciones de Mott-Smith.

Por otro lado, se ha tratado de demostrar hasta ahora que las soluciones de la ecuación de Boltzmann, existen solamente para números de Mach menores que un número crítico. Por ejemplo, para el método de Grad de los trece momentos, la solución a la ecuación de Boltzmann existe sólo hasta el número de Mach  $M= 1.65$ . Lowell H. Holway, Jr. (7) han mostrado a través de argumentos matemáticos que la solución de la ecuación de Boltzmann al problema de ondas de choque, no converge para números de Mach mayores que  $M= 1.851$ . En el método usado por Chapman-Enskog, el cual es parecido al método de Grad para resolver la ecuación de Boltzmann, se muestra que la solución a primer orden, que corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes existe para todos los números de Mach. Sin embargo la solución a segundo orden (Ecuaciones de Burnett), no existe para números de Mach mayores que  $M= 2.1$ . Así que parece razonable pensar que tomando la solución a ordenes superiores, el número de Mach puede decrecer hasta el número límite dado por  $M= 1.851$ . Este criterio de convergencia de las soluciones a la ecuación de Boltzmann es importante, ya que es una ayuda para evitar cálculos innecesarios. Además de que parece presentar un límite de aplicabilidad de teorías "Lineales" en la descripción de los efectos producidos por dichas ondas [cfr. García Colín (13)].

En el tratamiento experimental, H. Alsmeyer (8) modeló un experimento para medir la distribución de la densidad del Argón (Ar) y del Nitrógeno ( $N_2$ ), por medio de la absorción de electrones a través de un tubo, para números de Mach en el rango de 1.55 hasta 10. La comparación del perfil de la densidad del Argón muestra una buena concordancia con el método de Monte Carlo usado por G.A. Bird, en el intervalo completo del número de Mach. También la concordancia del perfil de la densidad de Mott-Smith es buena, usando la misma ley molecular para el gas dada por Bird aunque la concordancia es mejor para números de Mach más pequeños. Se encuentra que la solución de Navier-Stokes, y la solución de BGK difieren un poco del experimento para el número de Mach  $M= 1.55$ , mientras que las ecuaciones de Burnett lo mejoran para el mismo número de Mach.



En este trabajo se estudia la estructura de las ondas de choque desde el punto de vista fenomenológico, tomando en cuenta algunos resultados de la teoría cinética. El objetivo principal es introducir en las ecuaciones hidrodinámicas los términos de Burnett, y con ello tratar de lograr una mejor descripción de la estructura de la onda de choque.

En el capítulo I se da una definición general de una onda de choque. Se establecen las ecuaciones hidrodinámicas de conservación del flujo de masa, momento y energía en una dimensión en su forma general. Enseguida se supone la descripción de la onda de choque en su estado estacionario; y de las ecuaciones que resultan se desprecian los efectos disipativos de tal manera que la onda de choque se manifiesta solamente como una discontinuidad matemática.

En el capítulo II, los efectos disipativos se toman en cuenta en las ecuaciones de conservación del flujo de masa, momento y energía; y como consecuencia de ello aparece una estructura de la onda de choque. Se considera únicamente a los coeficientes de viscosidad  $\mu$ , y de conductividad térmica  $\nu$  debido a que nuestros cálculos se efectuarán para un gas monatómico, ya que para dicho gas se sabe que el coeficiente de viscosidad volumétrica  $\beta=0$ . Los coeficientes de transporte  $\mu, \nu$  son en general funciones de la temperatura y de la densidad. Sin embargo, solamente tomaremos en cuenta la dependencia en la temperatura de dichos coeficientes.

La solución a las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene siguiendo el método de Landau (9), el cual consiste esencialmente en el desarrollo de la diferencia  $(\epsilon - \epsilon_1)$ , donde  $\epsilon$  es la energía interna específica local en la región del choque y  $\epsilon_1$  es la energía interna específica local antes del choque, y de la diferencia  $(p - p_1)$ , donde  $p$  es la presión local; en serie de potencias de las cantidades  $(V - V_1)$  y  $(s - s_1)$ , es decir tomando al volumen y a la entropía específica local como variables independientes. El orden de aproximación que se considera es hasta segundo orden en la diferencia  $(V - V_1)$ . Se obtiene una ecuación diferencial que describe la estructura de la onda de choque, cuya solución nos da el perfil del volumen, y por lo tanto el perfil de la densidad de la onda de choque. De esta expresión para el perfil se obtiene una expresión para la anchura de la misma.

Escribimos la expresión del perfil de la densidad para un gas monatómico perfecto recurriendo a algunos resultados de la teoría cinética.

En el capítulo III, se introducen los términos e Burnett en las ecuaciones de conservación del flujo de momento y energía; donde nuevamente se considera sólo a los coeficientes  $\mu$  y  $\nu$  como funciones de la temperatura. El orden de aproximación que se considera ahora es a tercer orden en la diferencia  $(V - V_1)$ . Siguiendo la misma idea de Landau, se obtiene una ecuación diferencial que describe a la onda de choque.

Esta ecuación contiene términos de tercer orden de corrección a las ecuaciones de Navier-Stokes, y términos Burnett del mismo orden. Estamos interesados únicamente en la solución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden que contiene solamente los términos de Burnett, de manera que se propone un método aproximado para resolverla. La solución aproximada comienza con la solución de Landau, el siguiente término de la solución involucra un parámetro de pequeñez que contiene esencialmente los términos de Burnett. La solución describe el perfil del volumen y de la densidad de la onda de choque en el régimen de Burnett.

Observamos también que la expresión para la anchura es la misma para la obtenida en el régimen de N-S a segundo orden en  $(V - V_1)$ . Finalmente se escribe la relación explícita para el perfil de la densidad para el caso particular de un gas monatómico perfecto.

Para concluir, en el capítulo IV se compara el resultado obtenido de la anchura con otros resultados teóricos, así como también con los resultados experimentales. Los perfiles exactos y aproximados de N-S, así como también el perfil de Burnett se comparan con el experimento para algunos números de Mach, dados por 1.55, 1.75, 2.05, 3.38 y 3.8.

Para la anchura, se observa que la concordancia con algunos trabajos teóricos y con los datos del experimento es solamente para números de Mach cercanos a uno. En cuanto al perfil de la densidad relativa de la onda de choque el perfil exacto de N-S concuerda con el experimento mejor que su solución aproximada; sobre todo en la región de baja densidad de la onda de choque. Sin embargo, el per

fil de Burnett solamente se ajusta mejor en la región de alta densidad.

I.2.- Ondas de choque débiles en el régimen de Euler, despreciando efectos irreversibles.

En general una onda de choque es una perturbación en la cual, las propiedades de un gas cambian en forma brusca en un intervalo de distancia muy pequeño.

En este trabajo estamos interesados en describir a una onda de choque en su estado estacionario. De modo que consideraremos a un sistema de coordenadas que se mueve junto con la onda de choque en una sola dirección; por lo consiguiente los flujos de las cantidades concernientes serán funciones de la variable  $\chi = x - Ut$  donde  $\chi$  es la posición de la onda de choque con respecto a un sistema fija,  $U$  es la velocidad constante de la onda de choque,  $t$  es el tiempo y  $x$  es la posición de la onda de choque en el sistema de coordenadas que se mueve junto con ella.

En general, para los flujos en una dimensión, las ecuaciones hidrodinámicas de conservación del flujo de masa, momento y energía son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (I.1)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 - P_{xx})}{\partial x} = 0, \quad (I.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \epsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{1}{2} u^2 + \epsilon \right) \rho u - P_{xx} u + q_x \right\} = 0, \quad (I.3)$$

donde  $u$  es la velocidad hidrodinámica,  $\epsilon$  es la energía interna específica local,  $\rho$  la densidad. Tomando en cuenta también las relaciones de Navier-Stokes para el tensor  $P_{xx}$  y el flujo de calor  $q_x$  como:

$$P_{xx} = -p + \frac{4}{3} \mu u_x \quad ; \quad q_x = -\nu \frac{dT}{dx} \quad (I.4)$$

y las relaciones termodinámicas para  $\epsilon$  y  $p$  como

$$\epsilon = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad ; \quad p = R \rho T \quad , \quad (I.5)$$

donde  $p$  es la presión local,  $R$  la constante universal de los gases y  $\gamma$  la razón de las capacidades caloríficas  $C_p$  y  $C_v$  respectivamente.

En esta sección vamos a desprestigiar los términos que involucran la viscosidad y la conductividad térmica y como consecuencia de ello la onda de choque se manifiesta por sí misma como una discontinuidad matemática. Las soluciones de las ecuaciones hidrodinámicas (I,1)-(I,3) para el estado estacionario en este caso particular son:

$$\rho U^2 = cte \quad , \quad (II.6)$$

$$\rho U^2 + p = cte \quad , \quad (I.7)$$

$$w + \frac{1}{2} U^2 = cte \quad , \quad (I.8)$$

donde hemos usado la transformación  $x = \chi - Ut$ , para obtener  $U = u - U$ , donde  $U$  es la velocidad de la onda de choque en el sistema de coordenadas que se mueve junto con ella.

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = j = cte \quad , \quad (I.9)$$

que corresponde a la continuidad en la densidad del flujo de masa, donde  $\rho_i, U_i$  son la densidad y la velocidad respectivamente en la región antes de la superficie de discontinuidad. El subíndice 2 indica la región después de la superficie de discontinuidad.

La continuidad en la densidad del flujo de momento

$$p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2 \quad , \quad (I.10)$$

donde  $p_1$  es la presión local en la región antes de la superficie de discontinuidad, y  $p_2$  es la presión local en la región posterior.

La continuidad en la densidad del flujo de energía

$$\omega_1 + \frac{1}{2} \mathcal{V}_1^2 = \omega_2 + \frac{1}{2} \mathcal{V}_2^2 \quad (I. 11)$$

donde  $\omega_1$ , es la entalpía local en la región antes de la superficie de discontinuidad, y  $\omega_2$  es la entalpía en la región posterior.

La discontinuidad en las cantidades  $\rho$ ,  $p$ , etc.; se pueden ver cualitativamente en la figura 1.

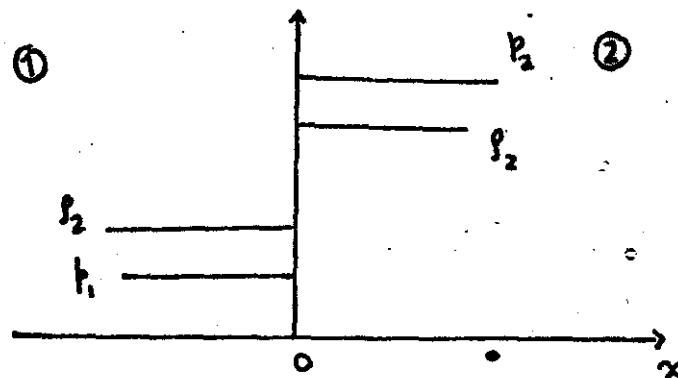


Fig. 1.

donde los índices 1 y 2 se refieren a ambos lados de la superficie de discontinuidad. El estado del gas 1 recibe el nombre de frente de choque, mientras que el estado 2, el respaldo de choque.

De las nueve cantidades  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  etc. podemos reducir a seis con el uso de la relación termodinámica entre  $\omega$ ,  $p$  y  $\rho$ . Entonces de dichas ecuaciones es suficiente especificar tres de las cantidades en términos de las tres restantes. Es muy usual especificar a la densidad y a la presión  $p$ , en el estado del gas 1, y un parámetro adicional que identifica la intensidad de la onda de choque, como por ejemplo, la presión  $p_2$ .

Es conveniente escribir las relaciones anteriores en una forma algo diferente. Tomando en cuenta que  $\mathcal{V}_1 = jV_1$ ,  $\mathcal{V}_2 = jV_2$  donde  $V_1 = 1/\rho_1$ ,  $V_2 = 1/\rho_2$  son los volúmenes específicos antes y después de la superficie de discontinuidad. De las ecuaciones (I.9) y (I.10) se tiene que:

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2} \quad (I.12)$$

Para la diferencia de velocidades

$$j_1 - j_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(v_1 - v_2)} \quad (I.13)$$

tomamos únicamente la raíz positiva, porque sólo las condiciones  $p_2 > p_1$  y  $v_1 > v_2$  pueden ocurrir (ver Landau, pág. 320). La sustitución de (I.12) en (I.11) conduce a:

$$\omega_2 - \omega_1 - \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(v_1 + v_2) = 0 \quad (I.14)$$

usando la relación  $\omega = \epsilon + pV$ , la ecuación anterior es ahora

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)(p_1 + p_2) = 0 \quad (I.15)$$

Las ecuaciones (I.14) ó (I.15) son conocidas como la adiabática de choque ó adiabática de Hugoniot-Rankine, por analogía con la adiabática de Poisson de la termostática, excepto que la adiabática de choque no se puede escribir como  $f(p,V) = \text{cte.}$  (ver Landau, pág. 321). Las tres ecuaciones no se pueden resolver explícitamente sin especificar la ecuación de estado y las propiedades termodinámicas. La adiabática de choque se representa gráficamente en la fig. 2

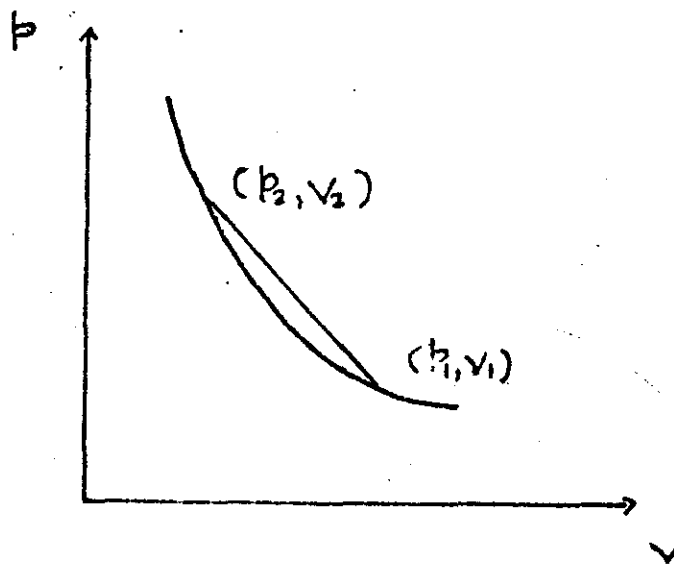


Fig. 2.

### I,3,- Características de las ondas de choque débiles.

Una onda de choque débil, es aquella en la cual las discontinuidades de cada una de las cantidades como la presión, densidad, entropía, etc. se consideran pequeñas. Una de las características de las ondas de choque débiles es la siguiente: Si consideramos a las diferencias  $(p_2 - p_1)$  y  $(v_2 - v_1)$  pequeñas, entonces a partir de la ecuación (I.12) hacemos un desarrollo de  $p_2$  en términos de  $(v_2 - v_1)$  y  $(s_2 - s_1)$ , tomando en cuenta únicamente hasta el primer orden en  $(v_2 - v_1)$ , así que:

$$j^2 = -\frac{(p_2 - p_1)}{(v_2 - v_1)} = -\frac{1}{(v_2 - v_1)} \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s (v_2 - v_1) \right\} = -\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s$$

La derivada se evalúa en el punto 1, donde la entropía específica es constante con el valor  $s_1$ . Las velocidades en ésta aproximación son iguales, puesto que  $v_1$  y  $v_2$  son del mismo orden de magnitud en dicha aproximación, es decir;  $v_1 \approx v_2 = v$ , de manera que:

$$v = v_1 = v_2 = jv = \sqrt{-v^2 \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s} = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} = c, \quad (I.16)$$

luego entonces, la velocidad de propagación de una onda de choque débil a primera aproximación, es la velocidad del sonido, y las propiedades del gas son las mismas en ambos lados de la superficie de discontinuidad.

La otra característica de las ondas de choque débiles, es que a partir de la adiabática de choque, el cambio en la entropía  $s_2 - s_1$ , a través de la superficie de discontinuidad, sin tomar en cuenta los efectos disipativos, es de tercer orden relativo a la discontinuidad en la presión o bien, en el volumen. Esto puede verse en la siguiente forma:

Si la adiabática de choque (I.14) se hace un desarrollo de  $(\omega_2 - \omega_1)$  en serie de potencias de pequeñas cantidades  $(s_2 - s_1)$  y  $(p_2 - p_1)$ , tomados como variables independientes, los términos de primer y segundo orden en  $(p_2 - p_1)$  se anulan, por lo tanto se debe tomar hasta el tercer orden en  $(p_2 - p_1)$ . La expresión con respecto a  $(s_2 - s_1)$ , solo es necesario hasta el primer orden. Así que el resultado que se obtiene es ( ver Landau, pág. 323)

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{12T_1} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3, \quad (I.17)$$

por lo tanto, la discontinuidad en la entropía es de tercer orden relativo a la discontinuidad en la presión. Sin embargo si de la adiabática de choque (I.15) se hace el mismo desarrollo pero ahora en las variables  $(v_2 - v_1)$  y  $(S_2 - S_1)$  se obtiene:

$$S_2 - S_1 = - \frac{1}{12T_1} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s (v_2 - v_1)^3 \quad (I.18)$$

También,  $(S_2 - S_1)$  es de tercer orden relativo a la discontinuidad en el volumen.

Por otro lado se sabe que, en todos los casos que se han investigado la -- compresibilidad o adiabática  $-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$  decrece con un aumento en la presión, a decir que  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s > 0$ . Sin embargo esto no es una relación termodinámica y no puede obtenerse de argumentos termodinámicos. De modo que en principio es posible que sea negativo. El signo de  $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s$  se determina por argumentos de estabilidad de la onda de choque, los cuales no trataremos en este trabajo. En lo sucesivo, a menos que se diga lo contrario, supondremos que el signo de  $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$  es positivo.

Suponiendo que  $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s > 0$  como consecuencia de que en una onda de choque de cualquier intensidad  $S_2 - S_1 > 0$ , necesariamente se tiene que :

$$p_2 > p_1, \quad (I.19)$$

$$v_1 > v_2, \quad \rho_2 > \rho_1 \quad (I.20)$$

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2, \quad (I.21)$$

$$v_1 > v_2. \quad (I.22)$$

Las desigualdades (I.19) y (I.20) significan que, cuando el gas pasa a través de la onda de choque se comprime, es decir, la presión y la densidad aumentan.



## CAPITULO II

### II.1.- Perfil y anchura de ondas de choque débiles en el régimen de Navier-Stokes.

En las secciones del capítulo anterior, hemos estudiado a las ondas de choque como superficies de discontinuidad de anchura cero. En esta sección nuestro objetivo es ahora, considerar la estructura de las ondas de choque y debido a los procesos disipativos, las discontinuidades de las cantidades concernientes ocurren en forma gradual, en una región de anchura finita, donde esta anchura disminuye conforme la magnitud de las discontinuidades aumenta.

Debido a que las ondas de choque fuertes causan un considerable incremento en la temperatura del gas, la estructura de la onda de choque será función de la temperatura, dependiendo del orden de aproximación que se considere para su estudio.

En el desarrollo de esta sección vamos a considerar como hemos dicho anteriormente, que los coeficientes de transporte son únicamente funciones de la temperatura, es decir:  $\mu(T)$  y  $\nu(T)$ , y que el orden de aproximación que vamos a considerar será a segundo orden en la diferencia  $(V-V_1)$ . Estamos suponiendo también que el coeficiente de voluminosidad volumétrica  $\gamma = 0$ .

Tomando en cuenta ahora que la onda de choque tiene una anchura finita, la densidad del flujo de masa, momento y energía son constantes a través de dicha anchura, es decir: que las soluciones de las ecuaciones hidrodinámicas (I.1)-(I.3) para el estado estacionario, tomando en cuenta los efectos disipativos son que:

La densidad del flujo de masa es:

$$\rho V = j = \text{cte} . \quad (\text{II.1})$$

La densidad del flujo de momento será:

$$p + \rho v^2 - \frac{4}{3} \mu \frac{dv}{dx} = \text{cte} \quad , \quad (\text{II.2})$$

donde  $\sigma_{xx} = \frac{4}{3} \mu \frac{dv}{dx}$  es la componente xx del tensor de esfuerzos viscosos de ----  
acuerdo con (I.4)

La densidad del flujo de energía será:

$$\rho v (\omega + \frac{1}{2} v^2) - \frac{4}{3} \mu v \frac{dv}{dx} - \nu \frac{dT}{dx} = \text{cte} \quad , \quad (\text{II.3})$$

siendo  $\sigma_{xx} v = \frac{4}{3} \mu v \frac{dv}{dx}$  el flujo de energía debido a las fricciones internas, y  
 $q_x = -\nu \frac{dT}{dx}$  el flujo de energía debido a la conducción térmica.

Antes de continuar en el desarrollo de este trabajo es preciso recordar que las ecuaciones (II.1) - (II.3) se pueden integrar en forma exacta, para el caso particular en que  $\frac{\nu}{\mu} c_p = \frac{4}{3}$  ( ver Whitham, pág. 187-190). Sin embargo la comparación con nuestros resultados se hará al final de este capítulo.

Ahora bien, para calcular las constantes, tomaremos en cuenta que a grandes distancias de la onda de choque, las cantidades termodinámicas son constantes, es decir; son independientes de la posición.

Denotaremos por el índice 1 los valores de las cantidades en el frente de choque. De la relación  $v = jV$  se tiene que  $\frac{dv}{dx} = j \frac{dV}{dx}$ . Esta cantidad es cero lejos de la onda de choque, y por lo tanto las constantes en (II.2) y (II.3) serán  $p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_1 + j^2 v_1^2$  y  $\omega_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \omega_1 + \frac{1}{2} j^2 v_1^2$  respectivamente. Las ecuaciones --- (II.2) y (II.3) se transforman ahora en

$$p - p_1 + j^2 (v - v_1) - \frac{4}{3} \mu j \frac{dV}{dx} = 0 \quad , \quad (\text{II.4})$$

$$\omega - \omega_1 + \frac{1}{2} j^2 (v^2 - v_1^2) - \frac{4}{3} j \mu v \frac{dV}{dx} - \nu \frac{dT}{dx} = 0 \quad . \quad (\text{II.5})$$

Consideremos ahora ondas de choque en las cuales todos los cambios son pequeños. es decir; que todas las diferencias  $p - p_1$ ,  $v - v_1$ , etc. entre los valo-

res dentro y fuera de la región de transición son pequeñas. El desarrollo que vamos a tomar en las cantidades  $(p-p_1)$  y  $(\epsilon-\epsilon_1)$  será en potencias de  $(V-V_1)$  y  $(s-s_1)$  tomando al volúmen y a la entropía específica local como variables independientes. En este régimen de Navier-Stockes vamos a considerar solamente hasta términos de segundo orden en  $(V-V_1)$ .

Si multiplicamos a la ecuación (ii.4) por  $\frac{1}{2}(V+V_1)$  y lo restamos de (II.5), el resultado que se obtiene es

$$\omega - \omega_1 - \frac{1}{2}(p-p_1)(V+V_1) - \frac{2}{3}j\mu(V-V_1)\frac{dV}{dx} - \frac{\nu}{j}\frac{dT}{dx} = 0, \quad (\text{II.6})$$

y de acuerdo con la relación termodinámica  $\omega = \epsilon + pV$  tenemos

$$\epsilon - \epsilon_1 + \frac{1}{2}(V-V_1)(p+p_1) - \frac{2}{3}j\mu(V-V_1)\frac{dV}{dx} - \frac{\nu}{j}\frac{dT}{dx} = 0. \quad (\text{II.7})$$

Por otro lado, la derivada con respecto a  $x$  aumenta el orden de pequeñez en una unidad más, así que la derivada  $\frac{dV}{dx}$  será de segundo orden, y por lo tanto  $(V-V_1)\frac{dV}{dx}$  es de tercer orden; de tal manera que podemos omitirlo. Luego la ecuación (II.7) nos queda como

$$\epsilon - \epsilon_1 + \frac{1}{2}(V-V_1)(p+p_1) - \frac{\nu}{j}\frac{dT}{dx} = 0, \quad (\text{II.8})$$

en el orden de aproximación que estamos considerando, los dos primeros términos de (II.8) conducen al término de segundo orden  $T(s-s_1)$ . Además la derivada se puede escribir como

$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s \frac{dV}{dx} + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_V \frac{ds}{dx} \approx \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s \frac{dV}{dx}, \quad (\text{II.9})$$

puesto que  $\frac{ds}{dx}$  es de tercer orden en  $(V-V_1)$ .

Ahora bien, el coeficiente  $\nu$  depende únicamente de la temperatura, de manera que si tomamos su desarrollo en potencias de  $(V-V_1)$  y  $(s-s_1)$ , solo el término  $\nu = \nu(T_1) = \nu_1$  debe tomarse en cuenta de la expresión  $\nu \frac{dT}{dx}$ , ya que  $\frac{dT}{dx}$  como hemos visto de (II.9) es de segundo orden en  $(V-V_1)$ . Finalmente el cambio de entropía en este orden de aproximación de acuerdo con (II.8) será

$$T_1(s-s_1) = \frac{\nu_1}{j} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s \frac{dV}{dx}. \quad (\text{II.10})$$

Ahora, en la ecuación para el flujo de momento (II.4), introducimos el desarrollo de  $(p-p_1)$  en potencias de  $(V-V_1)$  y  $(s-s_1)$ . Nuevamente de la expresión  $\mu \frac{dV}{dx}$ , tomamos solamente a  $\mu$  como  $\mu = \mu(\tau_1)$ , puesto que el producto  $\mu \frac{dV}{dx}$  es de segundo orden. Lo anterior conduce a

$$\left[ j^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \right] (V-V_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s (V-V_1)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_V (s-s_1) = \frac{4}{3} j \mu_1 \frac{dV}{dx} \quad (II.11)$$

Una vez establecidas las ecuaciones (II.10) y (II.11), para obtener la ecuación diferencial que describe la estructura de la onda de choque, se procede de la siguiente manera. Sustituyendo (II.10) en (II.11)

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s (V-V_1)^2 + \left[ j^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \right] (V-V_1) = j \left\{ \frac{4}{3} \mu_1 - \frac{V_1}{\tau_1^2} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \right\} \frac{dV}{dx} \quad (II.12)$$

En el miembro derecho de esta ecuación, podemos sustituir a  $j$  por su valor a primera aproximación, es decir;  $j^2 \approx \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s = \rho_1 c_1^2$ , pero ciertamente no podemos hacerlo en el miembro izquierdo, puesto que  $j^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s$  sería cero. Sin embargo, para evitar que esto suceda reescribimos el miembro izquierdo de (II.12) como:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s (V-V_1)^2 + \left[ j^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \right] (V-V_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s (V-V_1) \left\{ V - \left( V_1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \left[ j^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \right] \right) \right\}$$

y definimos a  $V_2$  como

$$V_2 = V_1 - \frac{2}{\left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s} \left[ j^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \right] \quad (II.13)$$

donde el índice 2 indica el valor del volumen después de la onda de choque.

Usando una de las relaciones de Maxwell  $\left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_V = - \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s$ , y la expresión dada por (II.13), la ecuación (II.12) se transforma ahora en

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s (V-V_1)(V-V_2) = \rho_1 c_1 \left\{ \frac{4}{3} \mu_1 - \frac{V_1}{\tau_1} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right\} \frac{dV}{dx} \quad (II.14)$$

pero  $\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_P} = - \frac{1}{\tau_1} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s$ ; definimos  $\Gamma_{ns} = \left\{ \frac{4}{3} \mu_1 + V_1 \left( \frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_P} \right) \right\}$  donde  $\Gamma_{ns}$  es

porcional al coeficiente de absorción del sonido. Sean  $\epsilon_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s$  y  $N_1 = \rho_1 c_1 \Gamma_{ns}$ . Entonces la ecuación diferencial que determina la estructura de la onda de choque en el régimen de Navier-Stokes a segundo orden en  $(V-V_1)$  es:

$$\epsilon_1 (V-V_1)(V-V_2) = N_1 \frac{dV}{dx} \quad (II.15)$$

De esta ecuación, vemos que a grandes distancias en ambos lados de la onda de choque  $\frac{dV}{dx} = 0$ . A tales distancias el volumen es  $V_1$  ó  $V_2$ . Luego entonces la cuadrática en  $V$  tiene ceros en  $V_1$  y  $V_2$ , lo cual es consistente con las condiciones impuestas en un principio. La solución de la ecuación (II.15) corresponde a

$$x - x_0 = -\frac{2N_1}{\epsilon_1} \tanh^{-1} \frac{V - \frac{1}{2}(V_1+V_2)}{\frac{1}{2}(V_1-V_2)} \quad (II.16)$$

tomando a  $x_0 = 0$ , y despejando  $(V-V_1)$ , se obtiene el perfil de volumen de la onda de choque; el cual está dado por

$$V - V_1 = \frac{1}{2}(V_2 - V_1) \left( 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} \right) \quad (II.17)$$

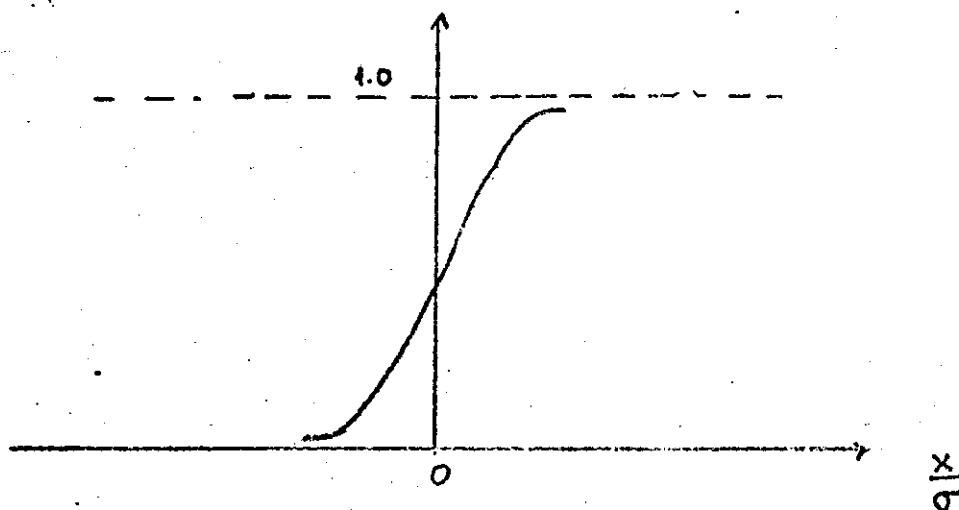
donde hemos definido a

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\epsilon_1}{2N_1} (V_1 - V_2) \quad \text{ó} \quad \sigma = \frac{2N_1}{\epsilon_1} \frac{1}{(V_1 - V_2)} \quad (II.18)$$

Si en la ecuación (II.17) sustituimos  $V = \sqrt{\rho}$ ,  $V_1 = \sqrt{\rho_1}$ , y  $V_2 = \sqrt{\rho_2}$  después de un simple desarrollo algebraico, obtenemos el perfil de la densidad relativa de la onda de choque, el cual se expresa como

$$\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} \right]}{1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \left[ 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} \right]} \quad (II.19)$$

donde  $P_2$  se puede determinar en términos de  $P_1$  de acuerdo con la relación (II.15). La gráfica cualitativa de (II.19) se muestra como sigue:



de la cual vemos que, el cambio total ocurre casi cuando  $x = -\sigma$  y  $x = \sigma$ .

El cambio en la entropía se obtiene de (II.10) y (II.17) dando como resultado que

$$s - s_1 = -\frac{\gamma_1}{4\beta_1 c_{11}} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s \frac{E_1}{N_1} (V_2 - V_1)^2 \frac{1}{c_{11}^2} > 0, \quad (II.20)$$

puesto que  $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s = -\frac{T_1}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ , y de la ecuación de estado siempre se obtiene que  $-\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s > 0$ . De (II.20) vemos que el cambio de entropía  $s - s_1$  es de segundo orden en  $(V - V_1)$ , y que tiene su valor máximo en  $x=0$ . En  $x \rightarrow \pm\infty$  siempre  $s = s_1$  en cualquier caso. A diferencia del cambio de entropía  $s - s_1$ , el cambio total de entropía  $s_2 - s_1$  es de tercer orden en  $(V - V_1)$ .

La fórmula (II.18) es cualitativamente válida solamente para diferencias suficientemente pequeñas de  $(V - V_1)$ . Así podemos determinar el orden de la magnitud de la anchura, para el caso en que la diferencia  $(V - V_1)$  sea del mismo orden de magnitud que  $V_1$  y  $V_2$ . En esta aproximación la velocidad  $\bar{v}$  es del orden de magnitud que la velocidad del sonido  $c$ . De la teoría cinética se sabe que  $\mu \sim \lambda \rho c$  donde  $\lambda$  es la longitud libre media de las moléculas. Puesto que  $\mu \sim \lambda \rho c$  y  $E_1 \sim \frac{1}{2} \rho v^2 \sim \frac{c^2}{\lambda^3}$ , entonces  $\sigma \sim \lambda$ . De modo que requerimos de algunos resultados de la teoría cinética para investigar la estructura interna de las ondas de choque.

La representación que usa Landau para obtener la ecuación diferencial que describe la estructura de la onda de choque en las variables (s,p), donde s es la entropía específica local, y p es la presión. Sin embargo, nosotros hemos tomado la representación (s,V), siendo V el volumen específico, para poder obtener el perfil de la densidad de onda de choque, y así comparar con la solución exacta, y con los resultados experimentales.

## II.2.- Definición de la anchura de la onda de choque y su cálculo en el régimen de Navier-Stokes.

La definición de la anchura de la onda de choque que vamos a tomar, es la misma usada por otros investigadores, como por ejemplo: Wang Chang (3) y H.W. Liepmann (5), Mott-Smith (4), etc. cuya expresión es:

$$\Delta = \frac{v_2 - v_1}{\left| \frac{dv}{dx} \right|_{\max}} \quad (\text{II.21})$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades antes y después de la onda de choque, y  $\left| \frac{dv}{dx} \right|_{\max}$  es la pendiente máxima de la velocidad. Sin embargo la ecuación (II.21) se puede escribir de otra manera, usando la relación  $j = \rho v$ , así que

$$\Delta = \frac{V_2 - V_1}{\left| \frac{dV}{dx} \right|_{\max}} \quad (\text{II.22})$$

Veamos ahora la forma explícita de la anchura en el régimen de Navier-Stokes. Para evaluar  $\left| \frac{dV}{dx} \right|_{\max}$  usamos la expresión (II.17), y obtenemos

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2\sigma} (V_2 - V_1) \text{sech}^2 \frac{x}{\sigma} \quad (\text{II.23})$$

cuyo máximo valor ocurre en  $x = 0$ . Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_2 - v_1}{2\sigma}$$

(II.24)

Por lo tanto la expresión para la anchura de acuerdo con la definición (II.22)

$$\Delta = 2\sigma \quad , \quad (II.25)$$

donde  $\sigma$  se obtiene de la ecuación (II.18). De manera que

$$\Delta = \frac{4N_1}{\epsilon_1} \frac{1}{v_1 - v_2} = \frac{4N_1}{[j^2 + (\frac{\partial p}{\partial v})_s]} \quad (II.26)$$

En general se sabe que  $(\frac{\partial p}{\partial v})_s = -\rho_1^2 c_1^2$  ;  $j^2 = \rho_1^2 U_1^2$  . Tomemos ahora la expresión más adecuada para  $[j^2 + (\frac{\partial p}{\partial v})_s]$  ,

$$[j^2 + (\frac{\partial p}{\partial v})_s] = j^2 [1 + \frac{(\frac{\partial p}{\partial v})_s}{j^2}] = j^2 [1 - \frac{1}{M^2}] \quad , \quad (II.27)$$

donde  $M = U_1/c_1$  es el número de Mach. La expresión (II.27) se puede escribir a -- primera aproximación si tomamos a  $j \approx \rho_1 c_1^2$  , de acuerdo con (I.16) así que

$$[j^2 + (\frac{\partial p}{\partial v})_s] = \rho_1^2 c_1^2 [1 - \frac{1}{M^2}] \quad , \quad (II.28)$$

Para  $N_1 = \rho_1 c_1 \left\{ \frac{4}{3} \mu_1 + v_1 \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right\} = \rho_1 c_1 \mu_1 \left\{ \frac{4}{3} + \frac{v_1}{c_v \mu_1} - \frac{v_1}{\mu_1 c_p} \right\}$  , sea  $f = \frac{v_1}{c_v \mu_1}$

$\gamma = c_p/c_v$  entonces

$$N_1 = \rho_1 c_1 \mu_1 \left( \frac{4}{3} + f - f/\gamma \right) \quad (II.29)$$



de acuerdo con las ecuaciones (II.28) y (II.29) podemos escribir la anchura como

$$\Delta = \frac{4\mu_1}{\rho_1 c_1} \left( \frac{4}{3} + \beta - \frac{\beta}{\gamma} \right) \left( \frac{1}{1 - 1/M^2} \right), \quad (\text{II.30})$$

donde podemos observar que los parámetros del gas que determinan la anchura son  $\mu_1 = \mu(T_1)$  y  $\gamma = \rho/c_1$ .

Si se desea introducir la longitud de la trayectoria libre media de las moléculas  $\lambda_1$ , donde el subíndice indica que está evaluada en la región antes de la onda de choque, debemos recurrir a los resultados de la teoría cinética. Así que desde el punto de vista de la teoría cinética los coeficientes  $\mu$  y  $\nu$ , para un gas monatómico están dados a primera aproximación (ver Chapman y Cowling, pág. 167)

$$\mu = \frac{5}{8} \sqrt{mRT} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma^2 W_{1(2)}}; \quad \nu = \frac{5}{2} G \mu. \quad (\text{II.31})$$

donde  $m$  es la masa de una molécula,  $k$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura.  $\sigma$  es una longitud escogida, y  $W_{1(2)}$  es simplemente un número definido por la integral

$$W_{1(2)}^{(2)} = \int e^{-g^2} g dg \int (1 - \cos^2 \chi) \frac{b}{\sigma} d\left(\frac{b}{\sigma}\right), \quad (\text{II.32})$$

la integral

$$\int (1 - \cos^2 \chi) b d\left(\frac{b}{\sigma}\right) \quad (\text{II.33})$$

recibe el nombre de sección transversal de colisión. Los parámetros  $g$ ,  $\chi$  y  $b$ , tienen que ver con la ley de interacción molecular (ver Chapman y Cowling, pág. 55).

Se define la longitud de la trayectoria libre media  $\lambda_1$  como

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{n_1 \pi \sigma^2 W_{1(2)}} \quad \text{donde } n_1 = \rho_1 / m \text{ es la densidad numérica de partículas,}$$

$m$  es la masa de una molécula y  $\rho_1$  es la densidad del gas en la región antes de la onda de choque. Por lo tanto, la expresión para la viscosidad  $\mu_1$  es

$$\mu_1 = \frac{5}{8} \frac{n_1 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sqrt{m k T_1} \lambda_1, \quad (\text{II.34})$$

así que introduciendo esta expresión en la ecuación para la anchura dada en (II.30) tenemos

$$\Delta = \frac{4}{\rho_1 c_1} \left[ \frac{5}{8} \frac{n_1 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right] \sqrt{m k T_1} \lambda_1 \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{M^2} \right) \left( \frac{1}{1 - 1/M^2} \right). \quad (\text{II.35})$$

Esta ecuación nos muestra la dependencia de la anchura de la onda de choque en los parámetros  $\lambda_1$  y  $M$ .

Por otro lado, también de la teoría cinética la trayectoria libre promedio se puede calcular para el modelo de moléculas que se encuentran en un potencial repulsivo  $\varphi(r) = \frac{a}{(r-1)^{\nu-1}}$ . El resultado es (ver Chapman y Cowling pág. 171)

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{n_1 \pi} \frac{\left( \frac{2kT}{a} \right)^{2/\nu-1}}{A_2(\nu) \Gamma\left(4 - \frac{2}{\nu}\right)}. \quad (\text{II.36})$$

Sin embargo, en la mayoría de los resultados, siempre se grafica la cantidad relativa  $\lambda_1/\Delta$  como función del número de Mach, y por lo tanto la expresión (II.35) nos muestra que  $\lambda_1/\Delta$  es independiente del modelo molecular de que se trate, al menos en el orden de aproximación que se siguió para obtenerla.

De los resultados obtenidos en esta sección, vemos que, de la definición -- usada para la anchura de la onda de choque surge en forma natural la anchura ob-

tenida por el método de Landau, cuando se obtiene el perfil del volúmen de la onda de choque.

Otra observación importante es la siguiente: para poder analizar la estructura interna de la onda de choque, es necesario recurrir a ciertos resultados de la teoría cinética. En nuestro caso, por ejemplo, para comparar la longitud de la anchura de la onda de choque, con la longitud de la trayectoria libre media de la moléculas.

### II.3.- Casos especiales para el perfil y la anchura de la onda de choque, en el régimen de Navier-Stokes.

Los resultados obtenidos en las secciones anteriores para el perfil y la anchura de la onda de choque son válidos en el régimen de Navier-Stokes y a segundo orden de aproximación en  $(V-V_1)$ . Ahora vamos a aplicar estos resultados a un caso particular, como por ejemplo, un gas perfecto monoatómico.

De la ecuación de estado de un gas perfecto, se tiene

$$\sqrt{m k T_1} = \frac{\rho_1 c_1}{\sqrt{T} n_1}, \quad \text{donde } \gamma = \frac{5}{3}, \quad (\text{II.37})$$

de manera que, la expresión para la viscosidad es

$$\mu_1 = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} \rho_1 c_1 \lambda_1 = \eta \rho_1 c_1 \lambda_1, \quad \text{donde } \eta = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}, \quad (\text{II.38})$$

y por lo tanto para la anchura, sustituyendo directamente en (II.35) se tiene

$$\Delta = 4\eta \lambda_1 \left( \frac{4}{3} + \gamma - \frac{\gamma}{\gamma} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{M^2}} \right), \quad (\text{II.39})$$

el factor  $\left( \frac{4}{3} + \gamma - \frac{\gamma}{\gamma} \right) = \frac{7}{3}$  para  $\gamma = \frac{5}{3}$ . Por lo tanto

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{4 \left( \frac{7}{3} \eta \right)} \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right). \quad (\text{II.40})$$

Para la expresión del perfil de la densidad relativa escribimos de acuerdo con (II.19)

$$\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{x}{\sigma} + c\right) \right]}{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \left[ 1 + \tanh\left(\frac{x}{\sigma} + c\right) \right]} \quad (II.41)$$

donde introducimos la constante  $c$  en el argumento, con el fin de que en  $x=0$ , se tenga que  $\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{2}$ , así que el valor de la constante  $c$  es

$$c = \tanh^{-1} \frac{1 - \rho_1/\rho_2}{1 + \rho_1/\rho_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (II.42)$$

De acuerdo con las ecuaciones (II.13) y con (II.28) tenemos que

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{E_1}{2N_1} (v_1 - v_2) = \frac{\rho_1^2 C_1^2}{2N_1} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right),$$

pero  $N_1 = \frac{7}{3} \eta \rho_1^2 C_1^2 \lambda_1$ ,  $E_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_s = \frac{1}{2} (\gamma + 1) \rho_1^3 C_1^2$  entonces

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{1}{2 \left(\frac{7}{3} \eta\right) \lambda_1} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) = 0.35 \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \quad (II.43)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{M^2}\right) \quad ; \quad 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)$$

(II.44)

De manera que la ecuación que describe el perfil de la densidad relativa de la onda de choque en el régimen de Navier-Stokes será:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{(0.125)(1 + \frac{3}{M^2}) \left\{ 1 + \tanh \left[ 0.35(1 - \frac{1}{M^2}) \frac{x}{\lambda_1} + (0.5) \ln \frac{4}{1 + \frac{3}{M^2}} \right] \right\}}{1 - (0.375)(1 - \frac{1}{M^2}) \left\{ 1 + \tanh \left[ 0.35(1 - \frac{1}{M^2}) \frac{x}{\lambda_1} + 0.5 \ln \frac{4}{1 + \frac{3}{M^2}} \right] \right\}} \quad (II.45)$$

tanto  $4/3$ , como la densidad relativa son funciones explícitas del número de Mach así que en el último capítulo de este trabajo daremos los resultados para algunos números de Mach y compararemos con otros resultados, y a la vez con los resultados experimentales.

Ahora bien, como dijimos al principio de este capítulo; existe una solución exacta a las ecuaciones (II.1)-(II.3), para el caso particular en que  $\frac{\nu}{\mu} c_p = 4/3$ . Esta solución exacta es (ver Witham, pág. 190).

$$c - \frac{3}{4\mu} \frac{j(\gamma+1)}{2\gamma} (\sigma_1 - \sigma_2) x = \sigma_1 \left\{ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ln(\sigma - \sigma_2) - \ln(\sigma_1 - \sigma) \right\} \quad (II.46)$$

tomando a la constante  $c=0$ , y la aproximación  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \approx 1$ , se obtiene la solución.

$$V - V_1 = \frac{1}{2} (V_2 - V_1) \left( 1 + \tanh \frac{x}{\delta} \right) \quad (II.47)$$

donde

$$\frac{1}{\delta} = \frac{3}{16\mu} \frac{\rho_1^2 c_1^2}{\gamma} (\gamma+1) (V_1 - V_2) \quad (II.48)$$

La ecuación (II.47) tiene la misma estructura algebraica que la ecuación (II.17). Por lo tanto (II.17) surge como caso particular de (II.46)

Por otro lado, sin tomar la aproximación de  $\frac{v_2}{v_1} \approx 1$ , podemos también reescribir la solución exacta (II.46) en términos de la densidad relativa  $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$  con la sustitución de  $v = j/\rho$ ,  $v_1 = j/\rho_1$  y  $v_2 = j/\rho_2$ . De manera que obtenemos lo siguiente:

$$B - \frac{x}{\Delta} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \ln \left\{ \frac{1 - \rho_2}{\rho_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}} \right\} + \ln \left\{ \frac{\rho_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}}{\rho_2} \right\} \quad (II.49)$$

donde las relaciones entre  $\rho_1$  y  $\rho_2$  se obtienen de (II.44); así que

$$\rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\frac{M^2}{3} + 1}{M^2 - 1}, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{3}{M^2} \right) \quad (II.50)$$

$$y \quad \frac{x}{\Delta} = \frac{12}{5\sqrt{2\pi\gamma}} \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{x}{\lambda_1} = 0.74 \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{x}{\lambda_1}$$

la constante  $B$  se elige, de tal manera que en  $x=0$ ,  $\rho_2 = 1/2$ , finalmente, la solución (II.49) se puede escribir como

$$\ln \left\{ \frac{\rho_2 (1 + 2\rho^*)}{\rho_2 + \rho^*} \right\} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \ln \left\{ \frac{(1 - \rho_2)(1 + 2\rho^*)}{\rho_2 + \rho^*} \right\} \quad (II.51)$$

o bien en término de las cantidades de (II.50)

$$\ln \left\{ \frac{\rho_2 \left( 1 + \frac{5}{3}M^2 \right)}{(M^2 - 1)\rho_2 + 1 + \frac{M^2}{3}} \right\} - \left( 0.25 \right) \left( 1 + \frac{3}{M^2} \right) \ln \left\{ \frac{(1 - \rho_2)(1 + \frac{5}{3}M^2)}{(M^2 - 1)\rho_2 + 1 + \frac{M^2}{3}} \right\} = 0.74 \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{x}{\lambda_1} \quad (II.52)$$

que corresponde a la solución exacta que describe el perfil de la onda de choque en el régimen de Navier-Stokes. La comparación con nuestros resultados y los del experimento se hará en el último capítulo.

## CAPITULO III

### III.1.- Perfil y anchura de ondas de choque en el régimen de Burnett

Nuestro propósito ahora, es estudiar el efecto de las ecuaciones constitutivas de Burnett en el perfil y la anchura de la onda de choque, siguiendo el método analítico de Landau. El orden de aproximación que vamos a considerar en esta sección, será de tercer orden en la diferencia de  $(V-V_1)$ , luego entonces, tendremos términos de tercer orden en las ecuaciones de Burnett y también términos de tercer orden en las ecuaciones de Navier-Stokes.

Se impone nuevamente la continuidad del flujo de masa, momento y energía a través de la onda de choque, pero ahora tomando en cuenta en los flujos de momento y energía los términos de Burnett. Nuevamente suponemos sólo la dependencia en la temperatura de los coeficientes de transporte  $\mu(T)$  y  $\nu(T)$ .

En el desarrollo sistemático que se sigue; se obtiene una ecuación diferencial que describe la estructura de la onda de choque en el siguiente orden de aproximación.

### III.2.- Ecuaciones de Burnett

Nuevamente para la continuidad del flujo de masa es:

$$\rho v = j = \text{cte} \quad (\text{III.1})$$

para el flujo de momento se tiene lo siguiente:

$$p + \rho v^2 + \sigma_{xx} = \text{cte} \quad (\text{III.2})$$

siendo  $\sigma_{xx}$  la componente xx del tensor viscoso.

La continuidad del flujo de energía es:

$$\rho v \left( w + \frac{v^2}{2} \right) + v \sigma_{xx} + q_x = \text{cte} \quad , \quad (\text{III.3})$$

donde  $q_x$  es la componente x del flujo de calor.

Para  $\sigma_{xx}$  y  $q_x$  tomaremos las ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de Fourier y los términos de Burnett de acuerdo con la notación de Wang Chang (12). Así que  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{xx}^{(2)}$  ,  $q_x = q_x^{(1)} + q_x^{(2)}$  .

$$P_{ij} = p \delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad ,$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = -2\mu \dot{D}_{ij} \quad ,$$

(III.4)

que corresponden a Navier-Stokes sin viscosidad volumétrica y  $\dot{D}_{ij} = D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij}$  con  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  ; de tal manera que  $\dot{D}_{ij}$  es el tensor de deformación sin traza.

$$q_x^{(1)} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{Ecuación de Fourier} \quad (\text{III.5})$$

Por otro lado, las ecuaciones de Burnett son ; Wang Chang (ibidem.) y L.S. García Colín (14).

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \omega_1 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \dot{D}_{ij} + \omega_2 L_{ij} - \omega_2 \dot{M}_{ij} - 2\omega_2 \dot{N}_{ij} + \omega_3 (\nabla \cdot \nabla T)_{ij} + \omega_4 (\nabla^2 \nabla T)_{ij} + \omega_5 (\nabla T \nabla T)_{ij} + \omega_6 Q_{ij} \quad , \quad (\text{III.6})$$

$$q_x^{(2)} = \theta_1 \nabla \cdot \vec{v} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \theta_2 \left[ \frac{2}{3} T \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{2}{3} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] + \theta_3 (\nabla^2 \dot{D})_i + \theta_4 (\nabla \cdot \dot{D})_i + \theta_5 (\nabla T \cdot \dot{D})_i \quad (\text{III.7})$$



escribiremos ahora las definiciones de los tensores que intervienen en (III.6) y (III.7), donde el índice  $(\circ)$  significa tensor sin traza.

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( X_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( X_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \quad \vec{X} \text{ es la fuerza externa.}$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_a} \frac{\partial u_a}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_a} \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \right),$$

$$N_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( D_{kj} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{kj} \right) + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \left( D_{ki} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ki} \right) \right], \quad (\text{III.8})$$

$$Q_{ij} = \left( D_{ia} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ia} \right) \left( D_{aj} - \frac{1}{3} D_{pp} \delta_{aj} \right),$$

a partir de estas ecuaciones podemos calcular las componentes  $\bar{v}_{xx}^{(2)}$  y  $q_x^{(2)}$ , y el resultado que se obtiene es

$$\bar{v}_{xx}^{(2)} = \frac{2}{3} \omega_3 \frac{dT^2}{dx^2} - \frac{2}{3} \omega_2 v \frac{dp}{dx^2} + \left( \frac{2}{3} \omega_1 - 2\omega_2 + \frac{4}{9} \omega_6 \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{2\omega_2}{3\rho^2} \frac{dp}{dx} \frac{d\rho}{dx} + \frac{2}{3} \omega_4 \frac{dp}{dx} \frac{dT}{dx} + \frac{2}{3} \omega_5 \left( \frac{dT}{dx} \right)^2. \quad (\text{III.9})$$

$$q_x^{(2)} = \frac{2}{3} (\theta_2 T + \theta_4) \frac{dv^2}{dx^2} + \left( \theta_1 + \frac{8}{3} \theta_2 + \frac{2}{3} \theta_5 \right) \frac{dT}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{2}{3} \theta_3 \frac{dp}{dx} \frac{dv}{dx}. \quad (\text{III.10})$$

Ahora bien, sabemos que  $\frac{dv}{dx}$  es de segundo orden en  $(V-V_1)$ , y que  $\frac{ds}{dx}$  es de tercer orden. Entonces de las relaciones

$$\frac{dp}{dx} = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \frac{dv}{dx} + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_v \frac{ds}{dx}, \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{dT}{dx} = \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s \frac{dv}{dx} + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_v \frac{ds}{dx}, \quad (\text{III.12})$$

podemos observar que  $\frac{dp}{dx} \frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{dp}{dx} \frac{dT}{dx}$ ,  $\frac{dT}{dx} \frac{dv}{dx}$  y  $(\frac{dT}{dx})^2$  contienen términos que son de ordenes mayores o iguales a cuatro en  $(v-v_1)$ ; así que de entrada no las vamos a tomar en cuenta. Considerando hasta términos de tercer orden solamente las ecuaciones (III.9) y (III.10) se reducen a

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \frac{2}{3} \omega_3 \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2}{3} \omega_2 v \frac{d^2 p}{dx^2}, \quad (\text{III.13})$$

$$q_x^{(2)} = \frac{2}{3} (\theta_2 T + \theta_4) \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (\text{III.14})$$

donde los coeficientes de Burnett están dados por (ver Chapman y Cowling, pág. 287)

$$\theta_2 T = \frac{45}{8} \frac{\mu^2}{\rho}; \quad \theta_4 = 3 \frac{\mu^2}{\rho}; \quad \omega_2 = 2 \frac{\mu^2}{\rho}; \quad \omega_3 = 3 \frac{\mu^2}{\rho T} \quad (\text{III.15})$$

luego entonces

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \frac{2}{3} \left( 3 \frac{\mu^2}{\rho T} \right) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2}{3} \left( 2 \frac{\mu^2}{\rho} \right) v \frac{d^2 p}{dx^2}, \quad (\text{III.16})$$

$$q_x^{(2)} = \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\rho} \left( 3 + \frac{45}{8} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (\text{III.17})$$

Las constantes en las ecuaciones para el flujo de momento y energía son  $(p_1 + j^2 v_1)$  y  $(\omega_1 + \frac{1}{2} j^2 v_1^2)$  respectivamente. Tomando en cuenta que  $\sigma_{xx}^{(1)} = -\frac{4}{3} \mu j \frac{dv}{dx}$  de acuerdo con la ecuación (III.16), la ecuación para el flujo de momento a tercer orden de aproximación será

$$p - p_1 + j^2 (v - v_1) - \frac{4}{3} j \mu \frac{dv}{dx} + \frac{2}{3} \left( 3 \frac{\mu^2}{\rho T} \right) \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2}{3} \left( 2 \frac{\mu^2}{\rho} \right) v \frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \quad (\text{III.18})$$

Para el flujo de energía tomamos en cuenta a  $q_x = -\nu \frac{dT}{dx}$ , y a las ecuaciones (III.16) y (III.17), así que

$$\omega - \omega_1 + \frac{j^2}{2}(v^2 - v_1^2) - \frac{4}{3}j\mu v \frac{dv}{dx} - \frac{\nu}{j} \frac{dT}{dx} + \frac{2}{3} \left( \frac{\mu^2}{\rho T} \right) v \frac{dT^2}{dx^2} - \frac{2}{3} \left( \frac{\mu^2}{\rho} \right) v^2 \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\rho} \left( 3 + \frac{45}{8} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (III.19)$$

Una vez establecidas las ecuaciones (III.18) y (III.19), el método de Landau consiste en evaluar la diferencia de entropía  $(s - s_1)$ , y para ello procedemos de la siguiente manera; se multiplica a la ecuación (III.18) por  $\frac{1}{2}(v + v_1)$  y se resta de (III.19), y considerando solamente términos de tercer orden nos queda como resultado

$$\omega - \omega_1 + \frac{1}{2}(v + v_1)(p - p_1) - \frac{2}{3}j\mu(v - v_1) \frac{dv}{dx} - \frac{\nu}{j} \frac{dT}{dx} + \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\rho} \left( 3 + \frac{45}{8} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (III.20)$$

transformamos esta relación a la representación  $(v, s)$  usando la relación termodinámica  $\omega = \epsilon + pv$ , y nos queda lo siguiente

$$\epsilon - \epsilon_1 + \frac{1}{2}(p - p_1)(v + v_1) - \frac{2}{3}j\mu(v - v_1) \frac{dv}{dx} - \frac{\nu}{j} \frac{dT}{dx} + \frac{2}{3} \left( 3 + \frac{45}{8} \right) \frac{\mu^2}{\rho} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (III.21)$$

Tomemos ahora el desarrollo de  $(\epsilon - \epsilon_1)$ ,  $(p - p_1)$  y  $\nu(T)$  en serie de potencias de  $(s - s_1)$  y  $(v - v_1)$  considerando hasta términos de tercer orden en  $(v - v_1)$ . El desarrollo de la conductividad térmica se puede describir como sigue

$$\nu(T) = \nu(T_1) + \left( \frac{\partial \nu}{\partial v} \right)_s (v - v_1) + \left( \frac{\partial \nu}{\partial s} \right)_v (s - s_1) + \dots \quad (III.22)$$

sin embargo, para la expresión  $\nu(T) \frac{dT}{dx}$  solo debemos tomar en cuenta los dos primeros términos de (III.22), puesto que  $(s - s_1) \frac{dT}{dx}$  es de un orden mayor o igual a cuatro, debido a que  $(s - s_1)$  es de segundo orden. Escribimos  $\left( \frac{\partial \nu}{\partial v} \right)_s = \left( \frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_s \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s$ , luego entonces de los desarrollos de  $(\epsilon - \epsilon_1)$ ,  $(p - p_1)$  y  $\nu(T)$  hasta términos de tercer orden, la ecuación (III.21) se transforma en:

$$T_1(s - s_1) + \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s (v - v_1)(s - s_1) - \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s (v - v_1)^3 - \frac{1}{j} \left[ \nu_1 + \left( \frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s \right] \frac{dT}{dx} - \frac{2}{3}j\mu_1(v - v_1) \frac{dv}{dx} + \frac{2}{3} \left( 3 + \frac{45}{8} \right) \frac{\mu^2}{\rho_1} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (III.23)$$

Factorizando  $T_1(s-s_1)$ , usando la ecuación (III.12) para  $\frac{dT}{dx}$ , y tomando en cuenta que  $T_1(s-s_1) = \frac{v_1}{j} \frac{dT}{dx}$ , de la cual podemos obtener lo siguiente

$$\frac{d}{dx}(s-s_1) = \frac{v_1}{j} \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) = \frac{v_1}{j} \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s \frac{dv}{dx} + \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_v \frac{ds}{dx} \right] \approx \frac{v_1}{j} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (III.24)$$

La ecuación (III.23) para la diferencia de entropía  $(s-s_1)$  se puede escribir en el orden de aproximación considerado como

$$s-s_1 = \frac{v_1}{j \pi_1} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s \frac{d}{dx}(v-v_1) + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi_1} \left[ \frac{2}{3} \mu_1 j + \frac{1}{j} \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial T^2} \right)_s - \frac{v_1}{\pi_1} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \right)_s \right] \right] \frac{d}{dx} (v-v_1)^2 + \frac{1}{\pi_1} \left[ \frac{v_1^2}{j^2 c_v} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s - \frac{2}{3} \left( 3 + \frac{4\mu_1}{8} \right) \frac{\mu_1^2}{\rho_1} \right] \frac{d^2}{dx^2} (v-v_1) + \frac{1}{6 T_1} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s (v-v_1)^3 = 0 \quad (III.25)$$

donde hemos usado el hecho de que  $\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(v-v_1)$ .

Por otro lado consideremos ahora a la ecuación para el flujo de momento (III.18), y sustituyamos en  $(p-p_1)$  y en  $\mu(T)$  por su desarrollo en serie de potencias de  $(v-v_1)$  y  $(s-s_1)$ . De la misma manera que hicimos con  $v \frac{dT}{dx}$  tomaremos solo hasta términos de tercer orden en  $\mu \frac{dv}{dx}$ , y con el uso de la relación de Maxwell para  $\left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_v = - \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s$ , entonces la ecuación (III.18) adquiere la forma de

$$\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \right)_s (v-v_1) \right] (s-s_1) = \left[ j + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \right] (v-v_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s (v-v_1)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 p}{\partial v^3} \right)_s (v-v_1)^3 - \frac{4}{3} j \mu_1 \frac{d}{dx} (v-v_1) - \frac{4}{3} j \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s \frac{d}{dx} \frac{1}{2} (v-v_1)^2 - \frac{2}{3} \frac{\mu_1^2}{\rho_1} \left[ \frac{2}{\rho_1} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s - \frac{3}{\pi_1} \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s \right] \frac{d^2}{dx^2} (v-v_1) \quad (III.26)$$

Ahora bien, para obtener la ecuación diferencial que describe la onda de choque a tercer orden de aproximación en  $(v-v_1)$ , se sustituye la ecuación (III.25) en (III.26), y agrupando términos semejantes se tiene

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{4}{3} j \mu_1 + \frac{\nu_1}{j \Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right\} \frac{d}{dx} (v - v_1) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left[ \frac{2}{3} \mu_1 j + \frac{1}{j} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_s - \frac{\nu_1}{\Gamma_1} \right\} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right] + \frac{\nu_1}{j \Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left( \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \right)_s \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{3} j \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right\} \frac{d}{dx} (v - v_1)^2 + \\
& \quad + \left\{ \frac{1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left[ \frac{\nu_1^2}{j^2 c_v} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s - \frac{2}{3} \left( 3 + \frac{45}{8} \right) \frac{\mu_1^2}{\rho_1} \right] + \frac{2}{3} \frac{\mu_1^2}{\rho_1} \left[ \frac{2}{\rho_1} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s - \frac{3}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right] \right\} \frac{d^2}{dx^2} (v - v_1) \quad (\text{III.27}) \\
& \quad + \left\{ \frac{1}{6 \Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s - \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 p}{\partial v^3} \right)_s \right\} (v - v_1)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s (v - v_1)^2 - \left[ j^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \right] = 0
\end{aligned}$$

Definimos ahora

$$N_1 = \left\{ \frac{4}{3} \mu_1 + \frac{\nu_1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right\} = j \left[ \frac{4}{3} \mu_1 - \frac{\nu_1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right] \approx \rho_1 c_1 \Gamma_1 s \quad (\text{III.28})$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left[ \frac{2}{3} \mu_1 j + \frac{1}{j} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_s - \frac{\nu_1}{\Gamma_1} \right\} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right] + \frac{\nu_1}{j \Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left( \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \right)_s + \frac{4}{3} j \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_s \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right\} \quad (\text{III.29})$$

$$B = \frac{1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left[ \frac{\nu_1^2}{j^2 c_v} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s - \frac{2}{3} \left( 3 + \frac{45}{8} \right) \frac{\mu_1^2}{\rho_1} \right] + \frac{2}{3} \frac{\mu_1^2}{\rho_1} \left[ \frac{2}{\rho_1} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s - \frac{3}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \right] \quad (\text{III.30})$$

$$E_2 = \frac{1}{6 \Gamma_1} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s - \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 p}{\partial v^3} \right)_s \quad (\text{III.31})$$

Nuevamente

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s (v - v_1)^2 - \left[ j^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \right] = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s (v - v_1) (v - v_2), \quad \text{con } E_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s$$

Finalmente, la ecuación que determina la estructura de la onda de choque a tercer orden en  $(V-V_1)$  tomando en cuenta los términos de Burnett es:

$$N_1 \frac{d}{dx}(V-V_1) + B \frac{d^2}{dx^2}(V-V_1) + N_2 \frac{d}{dx}(V-V_1)^2 + \epsilon_2 (V-V_1)^2 - \epsilon_1 (V-V_1)(V-V_2) = 0 \quad (\text{III.32})$$

Como podemos ver, esta ecuación es un poco más general que la obtenida en el capítulo anterior, la cual se obtiene de (III.32) como caso particular cuando los coeficientes  $B = N_2 = \epsilon_2 = 0$ .

De acuerdo con las ecuaciones (III.28) - (III.31) vemos que  $N_1$ , y  $N_2$  dependen de los coeficientes de transporte.  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_1$  dependen de la ecuación de estado, y  $B$  de los términos de Burnett. En el orden de aproximación en que la ecuación (III.31) se construyó  $\epsilon_1$ ,  $N_1$  representan términos de segundo orden,  $N_2$ ,  $\epsilon_2$  y  $B$  representan términos de tercer orden.  $N_2$  corresponde una corrección a tercer orden en el régimen de Navier-Stokes. En todos los casos los coeficientes son constantes, y están expresados en una forma más general.

### III.3.- Perfil de la onda de choque en el régimen de Burnett

Queremos ahora encontrar la solución de la ecuación diferencial (III.32) suponiendo que los coeficientes  $N_2$  y  $\epsilon_2$  que corresponden a la corrección de tercer orden a las ecuaciones de Navier-Stokes son nulos, pero que el coeficiente -- que contienen los términos de Burnett es diferente de cero. La razón de hacer esto es por la simplicidad matemática, aunque tomando el caso contrario, es decir  $B=0$  y  $\epsilon_1, N_2$  distintos de cero, se puede obtener una solución exacta de la ecuación diferencial resultante. Sin embargo, los cálculos son tediosos y por tal motivo, los detalles para su estudio se efectuarán para trabajos posteriores.

Ahora bien, siguiendo con nuestra hipótesis inicial, la ecuación diferencial por resolver es una ecuación de segundo orden no lineal, de modo que se propone un método aproximado para resolverla, donde el parámetro de pequeñez tiene que ver con el coeficiente de Burnett.

Así que para el caso en que  $N_2 = 0$ ,  $\epsilon_2 = 0$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$N_1 \frac{d}{dx} (v-v_1) + B \frac{d^2}{dx^2} (v-v_1) - \epsilon_1 (v-v_1) (v-v_2) = 0, \quad (\text{III.33})$$

introduciendo la nueva variable  $z = (v-v_1)$ , entonces  $(v-v_1)(v-v_2) = z^2 + z(v_1-v_2)$  luego sustituyendo en (III.33) se obtiene

$$\frac{dz}{dx} + \frac{B}{N_1} \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{\epsilon_1}{N_1} [z^2 + z(v_1-v_2)] = 0. \quad (\text{III.34})$$

Definimos por cuestión de abreviatura a  $b = \frac{B}{N_1}$  y  $q = \frac{\epsilon_1}{N_1}$  recordando que  $\frac{1}{\sigma} = \frac{\epsilon_1}{2N_1} (v_1-v_2) = \frac{q}{2} (v_1-v_2)$  entonces

$$\frac{dz}{dx} + b \frac{d^2 z}{dx^2} - q z^2 - \frac{z}{\sigma} = 0, \quad (\text{III.35})$$

como podemos ver es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, cuya solución se propone de la siguiente forma:

$$z = z_0 + b z_1 + b^2 z_2 + \dots \quad (\text{III.36})$$

donde  $b$  es el parámetro de pequeñez, y  $z_0$  es la solución de (III.35) para el caso en que  $b=0$ , el cual corresponde a la solución de Landau dada anteriormente por

$$z_0(x) = v - v_1 = \frac{1}{2} (v_2 - v_1) \left\{ 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} \right\}, \quad (\text{III.37})$$

de tal manera que

$$\frac{dz_0}{dx} - q z_0^2 - \frac{z_0}{\sigma} = 0 \quad (\text{III.38})$$

Para encontrar la ecuación diferencial que satisface  $z_1(x)$ , sustituimos la ecuación (III.36) en (III.35); tomando en cuenta la ecuación (III.38) y además suponiendo que los términos en  $b^2$  son despreciables, así que

$$\frac{dz_1}{dx} - \left( 2q z_0 + \frac{z_0}{\sigma} \right) z_1 + \frac{d^2 z_0}{dx^2} = 0 \quad (\text{III.39})$$

Esta ecuación corresponde a una ecuación diferencial lineal no homogénea para  $z_1$ , puesto que  $z_0(x)$  es una función conocida.

Ahora identifiquemos a  $P(x) = -(2q_0 + \frac{q_0}{\sigma})$  y  $Q(x) = -\frac{d^2 z_0}{dx^2}$  entonces

$$\frac{dz_1}{dx} + P(x)z_1 = Q(x) \quad (III.40)$$

cuya solución general es:

$$z_1(x) = \exp\left\{\int P(x)dx\right\} \left[ \int e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx + C \right] \quad (III.41)$$

donde

$$\int P(x)dx = \ln \cosh^2 \frac{x}{\sigma} \quad ; \quad \frac{d^2 z_0}{dx^2} = -\frac{1}{\sigma^2} (v_2 - v_1) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{\sigma} \tanh \frac{x}{\sigma} \quad (III.42)$$

y

$$\int e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx = \frac{(v_2 - v_1)}{\sigma} \ln \cosh \frac{x}{\sigma} \quad (III.43)$$

finalmente

$$z_1(x) = \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{\sigma}} \left[ C + \frac{v_2 - v_1}{\sigma} \ln \cosh \frac{x}{\sigma} \right] \quad (III.44)$$

Con esta expresión para  $z_1$ , podemos escribir la solución para la distribución del volumen (III.38) de la siguiente manera

$$v - v_1 = (v_2 - v_1) \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} \right) + \frac{b}{\sigma} \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{\sigma}} \left[ \frac{C\sigma}{v_2 - v_1} + \ln \cosh \frac{x}{\sigma} \right] \right\} \quad (III.45)$$

si hacemos a  $A = \frac{C\sigma}{v_2 - v_1}$ , podemos ahora escribir lo anterior como

$$v - v_1 = (v_2 - v_1) \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} \right) + \frac{b}{\sigma} \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{\sigma}} \left[ A + \ln \cosh \frac{x}{\sigma} \right] \right\} \quad (III.46)$$



Esta solución debe cumplir con las condiciones impuestas a grandes distancias de la onda de choque, es decir cuando hacemos tender a  $x$  a  $\pm\infty$  debemos tener que, el volumen debe tender a  $V_2$  y  $V_1$  respectivamente. Estas condiciones se satisfacen puesto que

$$\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{\sigma}} = \operatorname{sech}^2 \frac{x}{\sigma} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{y} \quad \tanh \frac{x}{\sigma} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm 1$$

y por lo tanto  $V \rightarrow V_2$ ,  $V \rightarrow V_1$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  respectivamente.

Ahora el perfil de la densidad relativa de la onda de choque en este régimen de Burnett se obtiene, haciendo la sustitución de  $V=1/\rho$ ,  $V_1=1/\rho_1$ , y  $V_2=1/\rho_2$ , de tal manera que resulta

$$\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} + \frac{(1 - 1/M^2)}{\cosh^2 \frac{x}{\sigma}} \left[ A + \ln \cosh \frac{x}{\sigma} \right] \right]}{1 - \frac{1}{2} (1 - \rho_1/\rho_2) \left[ 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} + \frac{(1 - 1/M^2)}{\cosh^2 \frac{x}{\sigma}} \left[ A + \ln \cosh \frac{x}{\sigma} \right] \right]} \quad \text{(III. 47)}$$

donde los cálculos para  $\frac{b}{\sigma}$  conducen a  $\frac{b}{\sigma} = \frac{1}{2} (1 - 1/M^2)$ . La ecuación (III.47) concuerda también con los casos límites para cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Sin embargo, si deseamos localizar el perfil de la densidad relativa, en el sistema de coordenadas de tal manera que en  $x=0$ , la densidad relativa  $\rho_R = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{2}$ , entonces, la constante  $A = \frac{3}{5} + \frac{3}{M^2}$ . La elección de  $\rho_R = 1/2$  en el origen es completamente arbitrario y no tiene ningún significado físico importante.

Hemos pues obtenido la solución aproximada a la ecuación diferencial que describe a la onda de choque, tomando en cuenta los términos de Burnett. El perfil de la densidad relativa de la onda de choque (III.47) posee una constante, la cual como hemos visto se determina en forma arbitraria. Hemos elegido en el origen de coordenadas a la densidad relativa igual a  $1/2$  con la finalidad de comparar con los resultados experimentales de Alsmeyer, y con esta elección particular la constante  $A = \frac{3}{5} + \frac{3}{M^2}$ . Notemos también que si quisiéramos localizar al perfil del volumen relativo de la onda de choque en el origen, de tal manera que

$$\frac{V - V_2}{V_1 - V_2} = \frac{1}{2} \quad \text{entonces automáticamente } A = 0.$$

III.4.- Expresión de la anchura de la onda de choque en el régimen de Burnett.

Vamos ahora a calcular la expresión de la anchura de la onda de choque en el régimen de Burnett, usando la definición dada anteriormente por la ecuación (II.36). En este caso para calcular  $\left| \frac{dz}{dx} \right|_{\max}$  partimos de la solución (III.45), o bien de (III.36), tomando en cuenta que  $A=0$  de modo que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz_0}{dx} + b \frac{dz_1}{dx} \quad , \quad (\text{III.48})$$

siendo  $z_0$  la solución de Landau, y  $z_1$  la solución (III.44). Para calcular el máximo tomaremos una derivada más de (III.48) e igualamos a cero de manera que

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z_0}{dx^2} + b \frac{d^2z_1}{dx^2} = 0 \quad , \quad (\text{III.49})$$

cuyo resultado conduce a la siguiente ecuación

$$\left( \text{Senh} \frac{x}{\sigma} \right) \left[ \frac{2b}{\sigma} \text{senh} \frac{x}{\sigma} + \text{cosh} \frac{x}{\sigma} \right] - \frac{b}{\sigma} \left( 3 - 2 \text{cosh}^2 \frac{x}{\sigma} \right) \left[ 1 - 2 \ln \text{cosh} \frac{x}{\sigma} \right] = 0 \quad , \quad (\text{III.50})$$

de este resultado podemos ver que, una posible raíz exacta es para  $x=0$ , es decir donde tenemos localizada a la onda de choque. Así que la pendiente máxima en  $x=0$  es:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\max} = \left. \frac{dz_0}{dx} \right|_{x=0} + b \left. \frac{dz_1}{dx} \right|_{x=0} \quad (\text{III.51})$$

donde

$$\left. \frac{dz_0}{dx} \right|_{x=0} = \frac{v_2 - v_1}{2\sigma} \text{sech}^2 \frac{x}{\sigma} \Big|_{x=0} = \frac{v_2 - v_1}{2\sigma} \quad (\text{III.52})$$

$$\frac{x}{\sigma} = (0.35) \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \frac{x}{\lambda_1}$$

(III.57)

Los factores  $\rho_1/\rho_2$  y  $(1 - \rho_1/\rho_2)$  se obtienen de acuerdo con (II.14), así que

$$\rho_R = \frac{(0.125) \left(1 + \frac{3}{M^2}\right) \left\{ 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} + \frac{\left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{\cosh^2 \frac{x}{\sigma}} \left[ \frac{3}{5 + \frac{3}{M^2}} + \ln \cosh \frac{x}{\sigma} \right] \right\}}{1 - (0.375) \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \left\{ 1 + \tanh \frac{x}{\sigma} + \frac{\left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{\cosh^2 \frac{x}{\sigma}} \left[ \frac{3}{5 + \frac{3}{M^2}} + \ln \cosh \frac{x}{\sigma} \right] \right\}}$$

(III.58)

que corresponde al perfil de la densidad relativa de la onda del choque para un gas monatómico perfecto, en el régimen de Burnett. Este resultado será comparado con el experimento.

## CAPITULO IV

### IV. 1.- Comparación de la anchura de la onda de choque con algunos resultados teóricos.

Queremos ahora comparar los resultados obtenidos de la anchura y el perfil de la onda de choque con los datos experimentales, y con algunas expresiones analíticas para la anchura en el régimen de Naviere-Stokes puesto que nuestro resultado en el régimen de Burnett es la misma.

Por ejemplo la comparación analítica de la anchura con el resultado obtenido por Wang Chang a primer orden en  $M-1$  para un gas monatómico perfecto es:

$$\frac{\lambda_1}{\Delta} = \frac{8\sqrt{\gamma}}{5\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\left(\frac{4}{3} + \beta - \frac{\beta}{\gamma}\right)} (M-1) \quad , \quad (IV.1)$$

donde  $f = \frac{5}{2}$ ,  $\gamma = \frac{5}{3}$ , ahora bien, nuestro resultado según la ecuación (II.53) es:

$$\frac{\lambda_1}{\Delta} = \frac{1}{4\eta \left(\frac{4}{3} + \beta - \frac{\beta}{\gamma}\right)} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \quad ; \quad \eta = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} \quad , \quad (IV.2)$$

si consideramos el caso en que  $M \approx 1$  entonces  $1 - \frac{1}{M^2} \approx 2(M-1)$  y por lo tanto

$$\frac{\lambda_1}{\Delta} = \frac{8}{5} \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\left(\frac{4}{3} + \beta - \frac{\beta}{\gamma}\right)} (M-1) \quad , \quad (IV.3)$$

el cual coincide con la expresión de Wang Chang. Esto significa entonces que el resultado de Wang Chang se aplica solamente para números de Mach cercanos a uno.

Por otro lado, si de los resultados de Thomas, se hace el mismo desarrollo en  $(M-1)$ , la expresión para la anchura en el mismo orden en (II-1) es

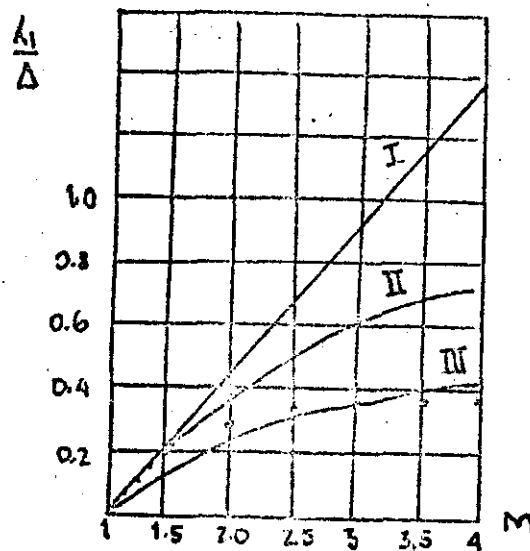
$$\frac{\lambda_1}{\Delta} = \frac{6}{5\sqrt{2\pi\gamma}} (M-1) . \quad (IV.4)$$

Thomas usó la expresión para  $f = \frac{4}{3}\gamma$ . De manera que si de (IV.2) hacemos nuevamente a  $M \gg 1$  y  $f = \frac{4}{3}\gamma$  se obtiene

$$\frac{\lambda_1}{\Delta} = \frac{6}{5\sqrt{2\pi\gamma}} (M-1) ,$$

que corresponde al mismo resultado de Thomas.

Si graficamos los valores de  $\frac{\lambda_1}{\Delta}$  como una función del número de Mach  $M$ , tomada de nuestro resultado (IV.2), pero considerando que  $f = \frac{4}{3}\gamma$  con el fin de comparar con el resultado de Thomas, Becker y Mott-Smith.



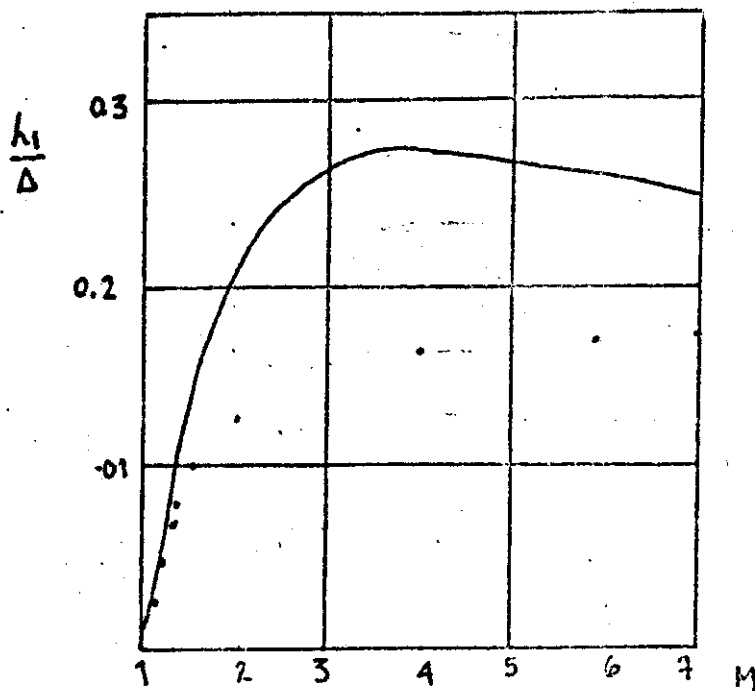
La curva I se obtiene de la teoría de Becker, la curva II se sigue de la teoría de Thomas; la curva III de los cálculos de Mott-Smith, y la curva marcada con puntos se obtiene de nuestros cálculos. La curva I y II así como la de los puntos, tienen la misma pendiente inicial, salvo que la curva de Becker crece casi linealmente con  $M$ , mientras que la curva de Thomas y la obtenida de nuestros cálculos tienden a un límite finito, los cuales son: 1.02 y 0.37 respectivamente. La curva III tiene una pendiente más pequeña y su valor asintótico, cuando  $M \rightarrow \infty$  es 0.55, es decir para ondas de choque fuertes, no difiere mucho de nuestros resultados, mientras que con las curvas I, II en este límite hay una diferencia notoria. Así que la expresión para la anchura dada por (IV.2) para el valor de  $f = \frac{4}{3}\gamma$  concuerda con los resultados de Becker y Thomas sólo para números de Mach cercanos a uno. Para ondas de choque fuertes, nuestra comparación sólo es cualitativa.

IV.2.- Comparación de la anchura y el perfil de la onda de choque con los resultados experimentales.

A continuación mostraremos la gráfica del recíproco de la anchura de la onda de choque, obtenida de los resultados experimentales de Alsmeyer, para el Argón, el cual es un gas monatómico. Estos resultados se van a comparar con la curva obtenida de la ecuación

$$\frac{\lambda_1}{\Delta} = \frac{1}{4(\frac{2}{3}\eta)} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) = \frac{4}{7\sqrt{2\eta\pi}} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \quad (\text{IV.5})$$

que corresponde al caso particular de un gas monatómico perfecto, donde  $\gamma = \frac{5}{3}$ . Esta ecuación muestra, que para  $M \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\lambda_1}{\Delta} = \frac{4}{7\sqrt{2\eta\pi}} = 0.176$ .



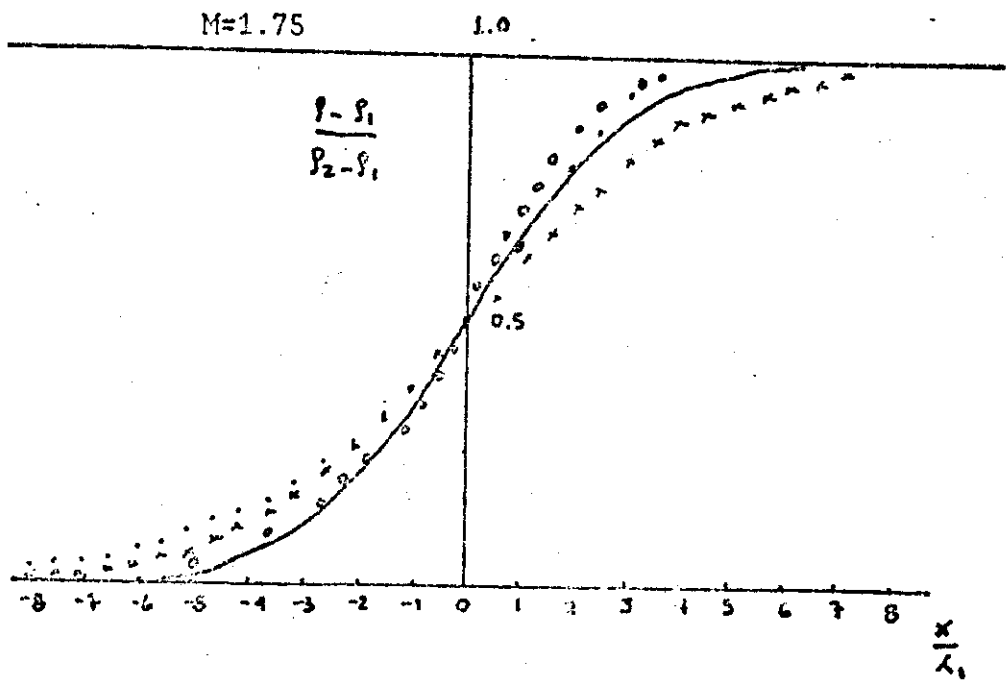
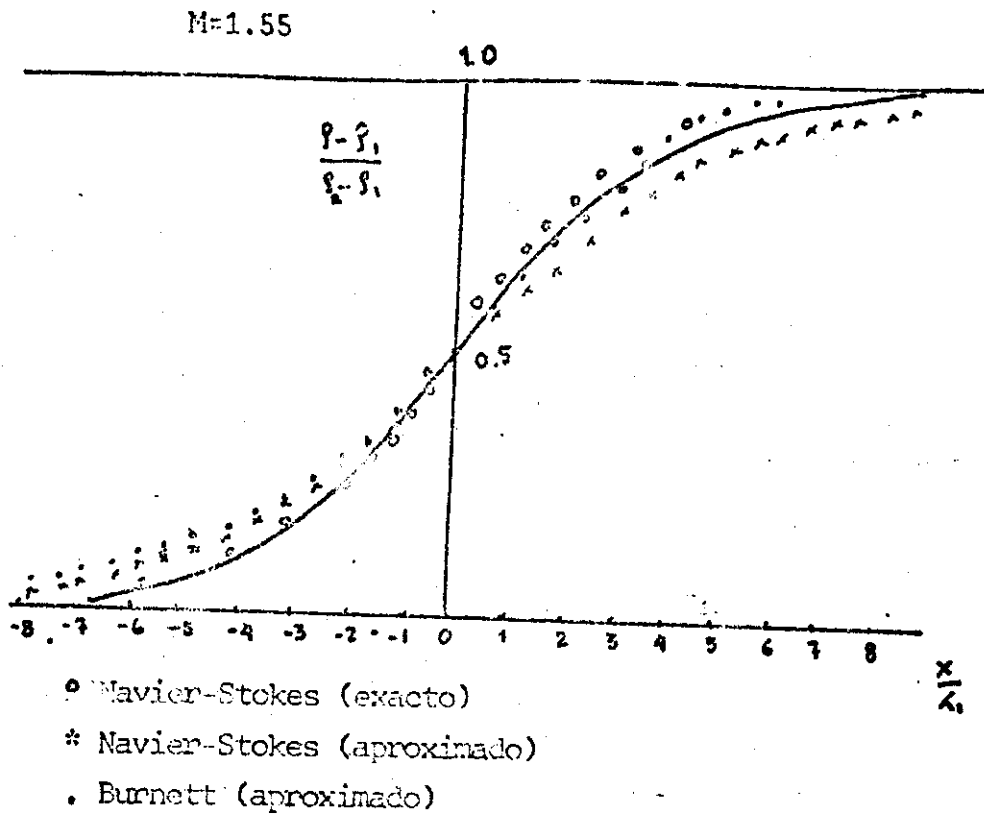
La gráfica nos muestra que la concordancia de nuestros resultados con el experimento es solamente para números de Mach cercanos a uno, y nuevamente la discrepancia es notoria para ondas de choque fuertes.

Para el perfil de la densidad de la onda de choque, nosotros compararemos con los resultados experimentales de Alsmeyer (8), para números de Mach dados por 1.55, 1.75, 2.05, 3.38 y 3.8. En todos los casos podemos observar lo siguiente: en cuanto al perfil exacto y aproximado de Navier-Stokes, podemos observar que existe una diferencia notoria, puesto que el perfil exacto concuerda me-

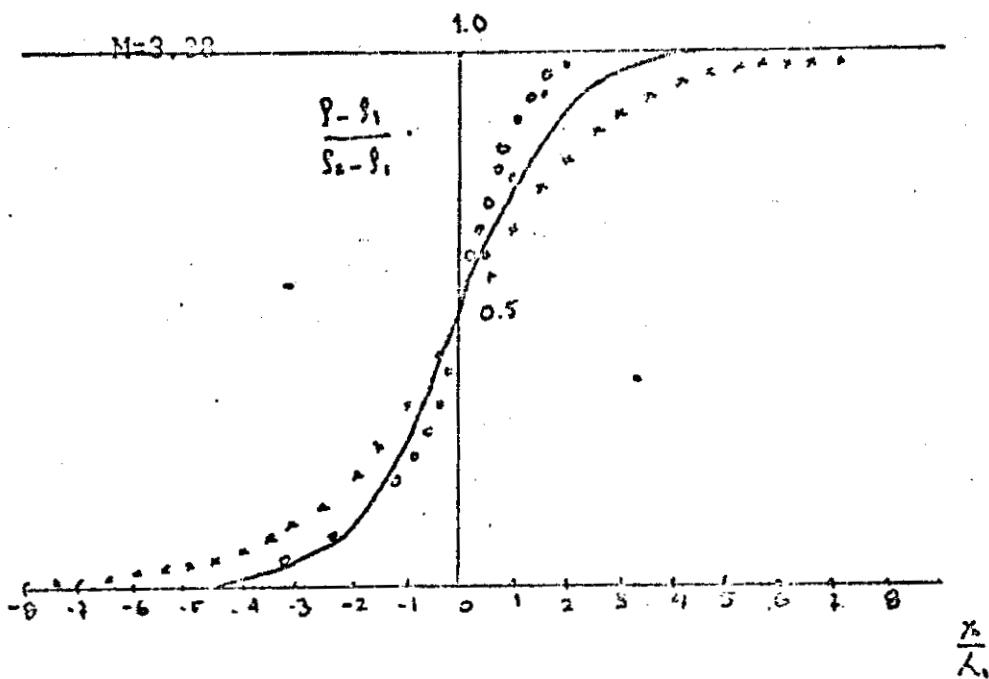
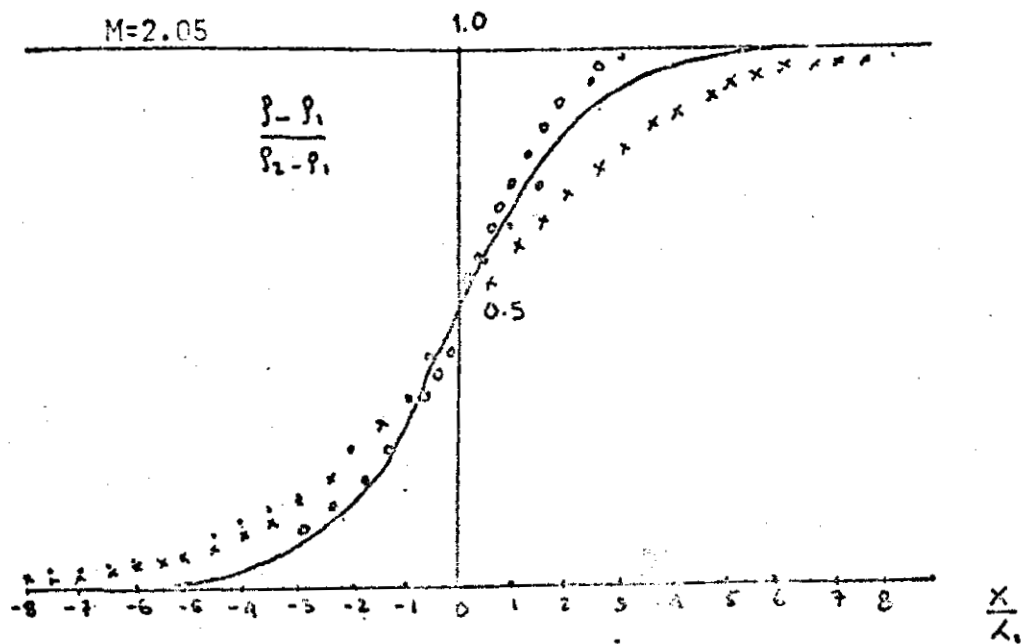
por con el experimento, principalmente en la región de baja densidad de la onda de choque.

En la región de alta densidad existe una ligera desviación para el perfil exacto, sin embargo; éste se acerca mejor al experimento que la solución aproximada. Por otro lado, para el perfil aproximado de Burnett notamos que el ajuste a la curva experimental se acerca más en la región de alta densidad de la onda de choque, en comparación con el perfil exacto y aproximado de Navier-Stokes. Tanto los resultados experimentales como los realizados por nosotros, muestran que la anchura de la onda de choque disminuye conforme el número de Mach aumenta.

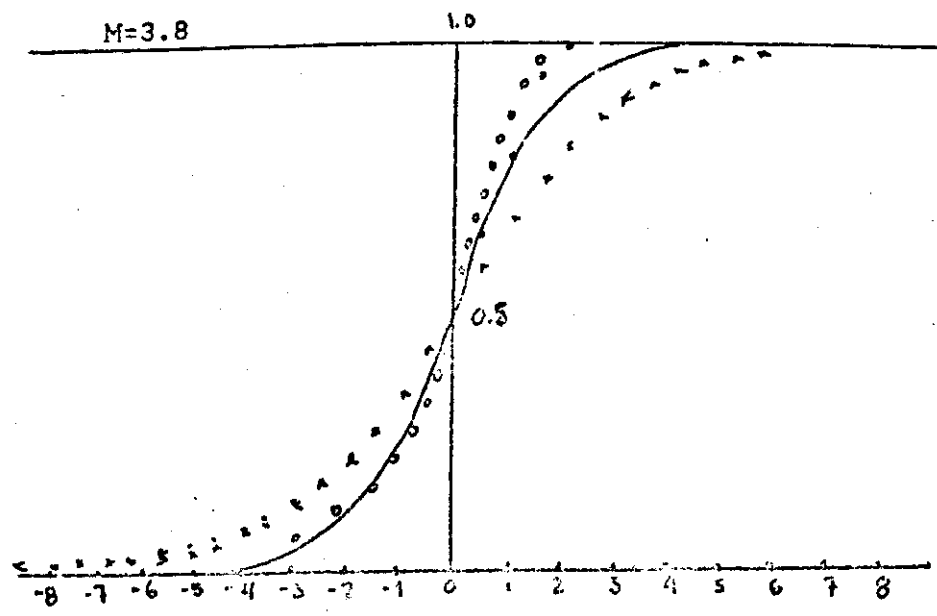
Las gráficas de dichas curvas se presentan a continuación:







- Navier-Stokes (exacto)
- \* Navier-Stokes Aproximado
- . Burnett (aproximado)



- Navier-Stokes (exacto)
- \* Navier-Stokes (aproximado)
- Burnett (aproximado)

## CONCLUSIONES

La relevancia de este trabajo, consiste en haber introducido las ecuaciones de Burnett, para tratar de describir a la onda de choque desde el punto de vista fenomenológico, el cual se ha hecho siguiendo la idea sistemática de Landau.

Los perfiles exacto y aproximado de Navier-Stokes, y el perfil de Burnett se han comparado con el experimento para números de Mach dados por 1.55, 1.75, 2.05, 3.38 y 3.8. Se observa que el perfil de Burnett describe mejor al experimento en la región de alta densidad. Sin embargo en la región de baja densidad, el perfil exacto de Navier-Stokes parece la más adecuada en comparación con los otros dos.

La anchura de la onda de choque, se obtiene del perfil del volumen en el régimen de Navier-Stokes, la cual permanece inalterada aún en el régimen de Burnett. La expresión de la anchura  $\sigma$  coincide con la definición que toman otros investigadores; que es la definición de la anchura de pendiente máxima. La comparación de la anchura con algunos resultados teóricos y con el experimento, es buena para números de Mach cercanos a uno.

Las perspectivas de este trabajo son: la posibilidad de encontrar la solución exacta de la ecuación diferencial no lineal y de segundo orden, o una solución numérica que permita describir posiblemente mejor a la onda de choque. La otra sería, tomar en cuenta el siguiente término de corrección de la solución aproximada que se ha propuesto.

Finalmente, estudiar con detalle la ecuación diferencial que surge tomando el coeficiente de Burnett  $B=0$  y los coeficientes  $\zeta_2, \eta_2$  diferentes de cero, donde  $\eta_2$  corresponde esencialmente la corrección de tercer orden a las ecuaciones de Navier-Stokes, e involucra términos que tienen que ver con la dependencia explícita, o no explícita en la temperatura de los coeficientes de transporte.

Por otro lado, se considera la posibilidad de obtener la expresión para el perfil de la temperatura de la onda de choque, siguiendo nuevamente el método de Burnett, considerando ahora a la temperatura y a la entropía como variables independientes.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) R. Becker, Z. Physik. 8, 321 (1922)
- (2) L. H. Thomas, J. Chem. Phys. 12, 449 (1944)
- (3) C. S. Wang Chang. Studies in statistical mechanics. Vol. V, parte A, chapter III, North Holland (1970).
- (4) H. M. Mott-Smith. Phys. Rev. 82, 888 (1951).
- (5) H. W. Liepmann, R. Narasimha, and M. T. Chahine. Phys. Fluids. 5, 1313 (1962)
- (6) G. A. Bird. Phys. Fluids. 13, 1172 (1970)
- (7) Lowell H. Holway, Jr. Phys. Fluids, 7, 911 (1964)
- (8) H. Alsmeyer, J. Fluid. Mech. 74, 487 (1976)
- (9) L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Fluid mechanics. (Pergamon Press 1959)  
Addison-Wesley. cap. IX
- (10) S. Chapman and T. G. Cowling. The mathematical theory of non-uniform gases.  
(Cambridge University, Press. London, 1952)
- (11) H. S. Hsu, G. B. Linear and non-linear gases. Wiley, N. Y. (1974).
- (12) C. S. Wang Chang, G. E. Uhlenbeck. Studies in statistical mechanics. vol. V.  
parte A, chapter I. North Holland (1970)
- (13) L. S. García Colín. Physica 112 A, 341-349 (1983)
- (14) L. S. García Colín, M. López de Haro. J. Non-Equilib. thermodyn. 7, 93-104  
(1982)
- (15) L. S. García Colín. Selected topics in non-equilibrium phenomena. Lectures  
delivered while visiting professor at the Universidade  
Estadual de Campinas, August. 1984.

(16) Charles Muckenfuss. Phys. Fluids. 5, 1325 (1962)

(17) Charles Muckenfuss. Phys. Fluids. 5, 165 (1962)

(18) Wayland C. Griffith. J. Fluid Mech. 106, 81 (1981)

(19) D. C. Wallace. Phys. Rev. 25, 3290 (1982).