Teoria del Campo en Espacio-Tiempo Curvo. Dos Ejemplos.

Tesis que presenta

Alfredo Macias Alvarez

Para la obtencion del grado de Maestro en Fisica

Mayo de 1985

ASESOR: OCTAVIO PIMENTEL RICO

Universidad Autonoma Metropolitana-Iztapalapa
Division de Ciencias Basicas e Ingenieria

A MI PADRE:

QUIEN ME HA ORIENTADO RESPETAN
DO MI LIBERTAD DE ELECCION,
Y ME HA BRINDADO A LA VEZ
TODO SU APOYO, TODO SU CARIÑO
Y ES ADEMAS UN EJEMPLO EN
MI VIDA.

DESEO AGRADECER A LOS DOCTORES URRUTIA Y PIMENTEL POR SU PACIENCIA Y SUS VALIOSOS CONSEJOS Y ORIENTACIONES.

INDICE

PARTE I

PARTE II

PARTE I

SOLUCIONES EXACTAS A LA TEORIA DE GRAVEDAD EN TRES DIMENSIONES CON TERMINO TOPOLOGICO DE MASA.

DIRECTOR

DR. LUIS URRUTIA

INTRODUCCION

La motivación de este trabajo está basada en el interés existente en modelos de gravitación de baja dimensionalidad ($n<4$) como medio para entender adecuadamente el modelo de cuatro dimensiones.

Sin embargo, la teoria de Einstein para dimensinalidad $n<4$ tiene serias dificultades. En $n=3$ la teoria no tiene dinámica y para $n=1,2$ la teoria no existe.

Deser, Jackiw y Templeton propusieron en 1982 una teoria de gravitación en tres dimensiones, la cual, mediante la adición de un término topológico de masa, que da un grado de libertad de espín 2 masivo, pretende en principio superar las dificultades de la teoria de Einstein convencional. Recientemente Henneaux, realizó la cuantización exacta del modelo de Jackiw para la gravedad de dos dimensiones.

Nuestro interés en este trabajo es buscar soluciones exactas de la teoria en tres dimensiones antes mencionada. Elegimos la métrica de Kerr-Schild para analizar esta nueva teoria, debido a que nos interesan soluciones del tipo de hoyo negro y del tipo de onda plana, las cuales son típicas de esta clase de métricas en 4- dimensiones.

I.1 TEORIA DE EINSTEIN EN ESPACIO-TIEMPO TRIDIMENSIONAL.

A primera vista, la ley de la gravitación de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \qquad (1.1)$$

parece trabajar en cualquier número de dimensiones; ya que dicha teoria puede formularse en términos de un número pequeño de postulados, los cuales son independientes de la dimensionalidad del espacio-tiempo. Sin embargo, un análisis más detallado revela que para $n<4$ la teoria tiene serias dificultades. Esto puede sentirse contando las componentes algebraicamente independientes del tensor de curvatura $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, del tensor de Ricci y del tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$ como se muestra en la siguiente tabla:

	DIMENSION				
# of ALGEBRAICALLY INDEPENDENT COMPONENTS	n	4	3	2	1
RIEMANN CURVATURE TENSOR $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$	20	6	1	0
RICCI TENSOR $R_{\alpha\beta}$	$\frac{1}{2}n(n+1)$ for $n > 2$	10	6	1	0
EINSTEIN TENSOR $G_{\alpha\beta}$	$\frac{1}{2}n(n+1)$ for $n > 2$	10	6	0	0
CURVATURE SCALAR R	1 for $n > 1$	1	1	1	0

Para $n>2$, el tensor de Ricci puede ser expresado en términos del tensor de Einstein y ambos tienen por tanto el mismo número de componentes

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} \quad ; \quad R_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{1}{n-2} G\, g_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

$$G = \frac{1}{2}(2-n) R \quad ; \quad R = \frac{2}{2-n} G$$

Para $n=4$, el tensor de Einstein así como el de Ricci tienen diez componentes algebraicamente independientes, mientras el tensor de curvatura tiene veinte. Para $n=3$, sin embargo, el tensor de Einstein, el de Ricci y el de curvatura tienen el mismo número de componentes independientes 6. Esto indica que el tensor de curvatura puede ser expresado bien sea en términos del de Einstein ó bien en términos del de Ricci. Así:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma} G_{\beta\delta} + g_{\beta\delta} G_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta} G_{\beta\gamma} + \\ - g_{\beta\gamma} G_{\alpha\delta} + G\left(g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}\right) \tag{1.3}$$

Para $n=2$, el tensor de Ricci no puede ser expresado en términos del de Einstein. El tensor de curvatura así como el escalar de curvatura tienen una sola componente. Esto indica que tanto el tensor de Riemann como el de Ricci pueden ser expresados en términos del escalar de curvatura

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} R \left(g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}\right) \tag{1.4}$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

Como conscuencia de (1.5), el tensor de Einstein -- se anula idénticamente en dos dimensiones.

La menor dimensión en la cual la teoria de Einstein -- tiene sentido es por tanto $n=3$. Sin embargo las ecuaciones --- (1.2) y (1.3) nos previenen de que la teoría tiene característecas no esperadas. Veamos algunas:

1.- El espacio-tiempo es localmente plano fuera de la materia.

En el vacío, sabemos que $G_{\alpha\beta}=0$ de manera que en virtud de (1.3)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0 \qquad (1.6)$$

Esto significa que el espacio-tiempo es localmente plano fuera - de la materia en tres dimensiones. Una partícula de prueba en reposo, fuera de un cuerpo central, no sufre aceleración. Dos cuerpos separados por el vacío se mueven uniforme y rectilíneamente sin saber uno acerca de la existencia del otro. Existen sin embargo efectos globales producidos por un cuerpo central en el espacio-tiempo circunvecino.

2.- La materia curva el espacio solo localmente.

De las ecuaciones (1.1) y (1.3) se deduce que

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K\big[& g_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}T_{\beta\gamma} + \\ & - g_{\beta\gamma}T_{\alpha\delta} - T(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})\big] \end{aligned} \qquad (1.7)$$

El tensor de curvatura está completamente determinado por la distribución local de materia.

3.- El campo gravitacional no tiene grados de libertad dinámicos.

Debido a la ecuación (1.7) la curvatura está totalmente determinada por la distribución local de materia. El espacio-tiempo fuera de la materia es por tanto plano. Cuando la distribución de materia cambia en una región, no hay propagación de efectos de curvatura a otras regiones, es decir, no existen on--

das gravitacionales. El tensor de Weyl, el cuál en espacios-tiempos de mayor dimensionalidad, lleva la información acerca de la parte de la curvatura no determinada localmente por la materia, se anula en tres dimensiones. La ecuación (1.3) es una reexpresión de este hecho.

4.- No existe límite newtoniano.

La teoria de la gravitación de Newton en tres dimensiones, predice un potencial gravitacional logarítmico fuera de la materia. Una partícula de prueba cerca de un cuerpo central, se acelera en la teoria de Newton. Por esta razón, la teoria de Newton no puede ser obtenida como caso límite de la teoria de Einstein en un esparcio-tiempo tridimensional , en virtud de que como se dijo en 1, los efectos gravitacionales en la teoria de Einstein no se propagan fuera de la materia , las particulas de prueba no experimentan aceleración en espacios-tiempos de dimensionalidad 3.

5.- No existen agujeros negros en tres dimensiones.

Al no existir efectos gravitatorios fuera de la materia, la luz emitida por las estrellas escapará siempre a infinito.

I.2 GRAVITACION EN TRES DIMENSIONES CON TERMINO TOPOLOGICO DE MASA.

Sería conveniente tener una teoría de gravitación en tres dimensiones, la cual no adolezca de los problemas de la teoria de Einstein normal. Recientemente, Deser, Jackiw y Templeton han construído teorías de norma y gravitación en espacios de dimensionalidad impar que poseen términos de masa explícitos de origen topológico.

En particular, propusieron una teoría de gravitación en tres dimensiones, la cual mediante la adición de un término topológico de masa que da un grado de libertad de espín 2 masivo pretende superar las dificultades de la teoría de Einstein convencional.

Para explicar las modificaciones, examinemos algunos hechos geométricos, válidos en un número cualquiera dé dimensiones d.

El tensor de curvatura contiene toda la información acerca de la curvatura del espacio y puede ser expresado para $d \geq 3$ en términos del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, del escalar de curvatura R y del tensor sin traza $C_{\alpha\mu\beta\nu}$ llamado tensor de Weyl ó tensor conforme.

$$\begin{aligned} R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{d-2}\big(g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta} - g_{\mu\beta}R_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha}R_{\mu\beta} + \\ + g_{\alpha\beta}R_{\mu\nu}\big) - \frac{R}{(d-1)(d-2)}\big(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \\ - g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}\big) + C_{\alpha\mu\beta\nu} \end{aligned} \qquad (1.8)$$

El tensor de Weyl existe solo para $d>3$ y se anula para $d=3$. DesempeÑa un papel dual: no solamente es la parte sin traza del tensor de curvatura, sino que también contiene las propiedades conformes de la métrica. $C_{\alpha\mu\beta\nu}$ es invariante ante una redefinición conforme de la métrica ($g_{\mu\nu} \rightarrow \rho(x) g_{\mu\nu}$) y se anula si y solo sí la métrica es conformalmente plana ($g_{\mu\nu} = \rho(x)\eta_{\mu\nu}$).

En d=3 el tensor de curvatura, no tiene parte sin -- traza y $C_{\alpha\mu\beta\nu}$ se anula idénticamente. De manera que podemos expresar el tensor de curvatura en términos del de Einstein como - vimos en la sección anterior:

$$R^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu} = -\epsilon^{\alpha\mu\gamma}\epsilon_{\beta\nu\delta}G^{\delta}_{\gamma} \tag{1.9}$$

Sin embargo, existe otro tensor, el cual reemplaza al tensor de Weyl y que contiene las propiedades conformes de la métrica tridimensional.

El tensor de segundo rango

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\tilde{R}^{\nu}_{\beta} \tag{1.10}$$

donde

$$\tilde{R}_{\nu\beta} = R_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\nu\beta}R \tag{1.11}$$

tiene la propiedad de anularse si y solo *sí* la tres-metrica es - conformalmente plana y no se altera bajo una redefinición conforme de la métrica. Este tensor es llamado análogo tridimensional del tensor de Weyl ó tensor de Cotton-York.

Este tensor $C^{\mu\nu}$ es manifiestamente simétrico:

$$\sqrt{-g}\,\epsilon_{\alpha\mu\nu}C^{\mu\nu} = \nabla_{\beta}G^{\beta}_{\alpha} = 0 \tag{1.12}$$

como $\sqrt{g}\,\epsilon_{\alpha\mu\nu}$ es el tensor completamente antisimétrico, forzozamente $C^{\mu\nu}$ tiene que ser un tensor simétrico.

Además, $C^{\mu\nu}$ es un tensor sin traza y es covariantemente conservado (cumple con las identidades de Bianchi). La demostración de estas propiedades está en el apéndice.

En las ecuaciones de campo, el tensor de Cotton-York - complementa al de Einstein, pero ya que es un orden superior en las derivadas respecto a $R_{\mu\nu}$, la constante de proporcionalidad debe tener dimensiones de masa inversa. Así, llegamos a la si--- guiente modificación a la teoria de Einstein en ausencia de fuen tes y constante cosmológica.

$$G^{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.13)$$

Las ecuaciones de campo anteriores, simplemente expre- san un balance entre el tensor de Einstein y el tensor de ------ Cotton-York. En ausencia de fuentes implican que el escalar de - curvatura se anula (ya que $C^{\mu\nu}$ no tiene traza). Así, podemos reescribir $C^{\mu\nu}$ de la siguiente manera:

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left[\epsilon^{\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha R^{\nu}{}_{\beta} + \epsilon^{\nu\alpha\beta} \nabla_\alpha R^{\mu}{}_{\beta} \right] \qquad (1.14)$$

El tensor de Cotton-York $C^{\mu\nu}$ puede obtenerse variando una acción, la cual se agrega a la acción de Einstein. De manera que la acción total es

$$I = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{g}\, R + \frac{1}{\kappa^2 \mu} I^{*}_{cs} \qquad (1.15)$$

Las ecuaciones de campo (1.13) se obtienen de la variación de esta acción.

El caracter masivo de la teoria puede verse iterando las ecuaciones de campo, con lo cual se obtiene

$$(\quad {}^{\mu\nu\alpha} \left[\partial \ldots \omega_\alpha{}^{ab} - \frac{2}{3} \omega_{\mu b}{}^{c} \omega_{\nu c}{}^{a} \omega_{\alpha a}{}^{b} \right]$$

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu + \mu^2) R_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + 3 R^{\alpha}_{\mu} R_{\alpha\nu} \qquad (1.16)$$

En el límite linealizado, el lado derecho de esta ecuación se anula, el operador diferencial es precisamente el D'alambertiano de espacio plano y la curvatura satisface la ecuación de Klein-Gordon con masa $(|\mu|)$. Nótese que aún cuando la ecuación de campo para $g_{\mu\nu}$ es de tercer orden en las derivadas, la propagación es causal y no taquiónica aunque no tenemos control sobre el signo de μ^2.

APENDICE I.1

C^{ab} no tiene traza

$$C^{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\epsilon^{acf}\,\nabla_c\left(R^b_f - \frac{1}{4}\delta^b_f R\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\epsilon^{acf}\,\eta^{bm}\,R_{mcf}$$

donde

$$R_{abc} = \nabla_c R_{ab} - \nabla_b R_{ac} + \frac{1}{4}\left(\eta_{ac}\nabla_b R - \eta_{ab}\nabla_c R\right)$$

$$C^a_a = \eta_{ab}\,C^{ab} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\eta_{ab}\,\epsilon^{acf}\,\eta^{bm}\,R_{mcf}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\epsilon^{acf}\,\delta^m_a\,R_{mcf}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\epsilon^{acf}\,R_{acf}$$

Es posible demostrar que

$$R_{acf} + R_{fac} + R_{caf} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{acf} = -\left(R_{fac} + R_{caf}\right)$$

sust.

$$C^a_a = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(\epsilon^{acf}R_{fac} + \epsilon^{acf}R_{caf}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(\epsilon^{fac}R_{fac} - \epsilon^{caf}R_{caf}\right)$$

$$\therefore \quad C^a_a = 0$$

APENDICE I.2

C^{ab} es covariantemente constante

$$C^{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{acf} \nabla_c \left(R^b_f - \frac{1}{4} \delta^b_f R \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{acf} g^{bm} R_{mcf}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{acf} R^b{}_{cf}$$

$$\nabla_b C^{ab} = -\frac{1}{2} \left[\nabla_b \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{acf} \right) R^b{}_{cf} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{acf} \nabla_b R^b{}_{cf} \right]$$

sabemes que $\nabla_b \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{acf} \right) = 0$

$$R^b{}_{cf} = \nabla_f \tilde{R}^b_c - \nabla_c \tilde{R}^b_f$$

$$\nabla_b R^b{}_{cf} = \nabla_b \nabla_f \tilde{R}^b_c - \nabla_b \nabla_c \tilde{R}^b_f$$

$$\nabla_b \nabla_f \tilde{R}^b_c = \nabla_f \nabla_b \tilde{R}^b_c + \tilde{R}^b_h R^h{}_{cfb} - \tilde{R}^h_c R^b{}_{hfb}$$

$$\nabla_b \nabla_c \tilde{R}^b_f = \nabla_c \nabla_b \tilde{R}^b_f + \tilde{R}^b_h R^h{}_{fcb} - \tilde{R}^h_f R^f{}_{hcb}$$

$$\Rightarrow \nabla_b R^b{}_{cf} = \nabla_f \nabla_b \tilde{R}^b_c - \nabla_c \nabla_b \tilde{R}^b_f + \tilde{R}^b_h \left(R^h{}_{cfb} - R^h{}_{fcb} \right) + \tilde{R}^h_f R^b{}_{hcb} - \tilde{R}^h_c R^b{}_{hfb}$$

sabemos además

$$\tilde{R}^\nu_\beta = G^\nu_\beta - \frac{1}{2} \delta^\nu_\beta R \quad , \quad G^\nu{}_{\beta;\nu} = 0$$

$$\nabla_\nu \tilde{R}^\nu_\beta = -\frac{1}{2} \delta^\nu_\beta R_{,\nu} = -\frac{1}{2} R_{,\beta}$$

$$\Rightarrow \nabla_f \nabla_b \tilde{R}^b_c - \nabla_c \nabla_b \tilde{R}^b_f = \nabla_f \left(-\frac{1}{2} R_{,c} \right) - \nabla_c \left(-\frac{1}{2} R_{,f} \right)$$

$$= \nabla_f \nabla_c \left(-\frac{1}{2} R \right) - \nabla_c \nabla_f \left(-\frac{1}{2} R \right) = 0$$

$$R_{hcfb} + R_{hfbc} + R_{hbcf} = 0$$

$$R_{hcfb} - R_{hfcb} = -R_{hbcf}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{R}^b{}_h \left(R^h{}_{cfb} - R^h{}_{fcb} \right) = -\tilde{R}^b{}_h R^h{}_{bcf}$$

$$= -\left[R^b{}_h R^h{}_{bcf} - \frac{1}{4} R R^b{}_{bcf} \right]$$

como

$$R^h{}_{bcf} = \delta^h_c G_{bf} - \delta^h_f G_{bc}$$

$$R^b{}_h R^h{}_{bcf} = R^b{}_h \delta^h_c G_{bf} - R^b{}_h \delta^h_f G_{bc}$$

$$= R^b{}_c G_{bf} - R^b{}_f G_{bc}$$

$$= R^b{}_c \left(R_{bf} - \frac{1}{2} g_{bf} R \right) - R^b{}_f \left(R_{bc} - \frac{1}{2} g_{bc} R \right)$$

$$= -\frac{1}{2} R_{fc} R + \frac{1}{2} R_{cf} R = 0$$

$$R^b{}_{bcf} = \delta^b_c G_{bf} - \delta^b_f G_{bc} = G_{cf} - G_{fc} = 0$$

$\Rightarrow$

$$R^b{}_h R^h{}_{bcf} - \frac{1}{4} R R^b{}_{bcf} = 0$$

$$\tilde{R}^h{}_f R^b{}_{hcb} - \tilde{R}^h{}_c R^b{}_{hfb} = \left(R^h{}_f - \frac{1}{4} \delta^h_f R \right) R_{hc} - \left(R^h{}_c - \frac{1}{4} \delta^h_c R \right) R_{hf}$$

$$= -\frac{1}{4} R R_{fc} + \frac{1}{4} R R_{fc} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\nabla_b R^b{}_{cf} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla_a C^{ab} = 0$$

II FORMALISMO DE LAS TRIADAS

En cada punto del espacio-tiempo tridimensional, introducimos una triada de tres vectores independientes $\alpha_a{}^{\mu}$. La triada dual $\alpha^a{}_{\mu}$ se define mediante las siguientes relaciones

$$\alpha_a{}^{\mu}\,\alpha^b{}_{\mu} = \delta_a^b$$
$$\alpha_a{}^{\mu}\,\alpha^a{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \qquad (2.1)$$

Los índices latinos son los índices de la triada, etiquetan los diferentes vectores de la misma. Los índices griegos son índices tensoriales. Ambos adoptan los valores 2, 3, 4.

Un tensor $T^{\mu\ldots}_{\nu\ldots}$ se relaciona con sus componentes triadiales mediante las siguientes relaciones

$$T^{b\ldots}_{a\ldots} = \alpha_a{}^{\mu}\,\alpha^b{}_{\nu}\ldots T^{\nu\ldots}_{\mu\ldots}$$
$$T^{\nu\ldots}_{\mu\ldots} = \alpha^a{}_{\mu}\,\alpha_b{}^{\nu}\ldots T^{b\ldots}_{a\ldots} \qquad (2.2)$$

Los índices tensoriales se suben y bajan mediante los tensores métricos $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ y los índices triadiales mediante -- las componentes sobre la triada del tensor métrico g_{ab}, g^{ab}.

La derivada direccional a lo largo de un vector de la triada es

$$T^{\ldots}_{\ldots,a} = \partial_a T^{\ldots}_{\ldots} = \alpha_a{}^{\mu}\,\partial T^{\ldots}_{\ldots}/\partial x^{\mu} \qquad (2.3)$$

Las componentes en la triada de una derivada covariante son:

$$T^{b\ldots}_{a\ldots;c} = e_a{}^{\mu} e^b{}_{\nu} \cdots e_c{}^{\gamma} T^{\nu\ldots}_{\mu\ldots;\gamma} \qquad (2.4)$$

y están dadas por

$$T^{b\ldots}_{a\ldots;c} = T^{b\ldots}_{a\ldots,c} - \Gamma^{d}_{ac} T^{b\ldots}_{d\ldots} - \cdots + \Gamma^{b}_{dc} T^{d\ldots}_{a\ldots} + \cdots \qquad (2.5)$$

donde Γ^{a}_{bc} son los coeficientes de rotación de Ricci

$$\Gamma^{a}_{bc} = - e^{a}{}_{\mu;\nu} e_b{}^{\mu} e_c{}^{\nu} \qquad (2.6)$$

los cuales son el análogo de los símbolos de Christoffel en este formalismo.

El conmutador de dos derivadas direccionales a lo largo de la triada es

$$T^{\ldots}_{\ldots,[ab]} = T^{\ldots}_{\ldots,c} \Gamma^{c}_{[ab]} \qquad (2.7)$$

Los vectores de la triada determinan las formas diferenciales lineales

$$e^{a} = e^{a}{}_{\mu} dx^{\mu} \qquad (2.8)$$

en términos de la cual la forma métrica está dada por

$$ds^2 = e^{a} e_{a} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \qquad (2.9)$$

El producto exterior o de Grassman de dos formas diferenciales lineales.

$$A = A_\mu \, dx^\mu \quad ; \quad B = B_\mu \, dx^\mu$$

está definido como

$$A \wedge B = A_\mu B_\nu \, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

La derivada exterior de las 1- formas se define

$$dA = A_{\nu,\mu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu = A_{[\nu,\mu]} \, dx^\mu \wedge dx^\nu \, .$$

Los coeficientes de rotación y las componentes en la triada del tensor de curvatura determinan las formas

$$\Gamma^a{}_b = \Gamma^a{}_{bc} \, \alpha^c \qquad (2.10)$$

$$\mathcal{R}^a{}_b = \mathcal{R}^a{}_{bcd} \, \alpha^c \wedge \alpha^d \qquad (2.11)$$

las cuales se relacionan a las formas de la triada mediante las fórmulas de Cartan

$$d\alpha^a = \alpha^b \wedge \Gamma^a{}_b = \Gamma^a{}_{bc} \, \alpha^b \wedge \alpha^c \qquad (2.12)$$

$$\tfrac{1}{2} \mathcal{R}^a{}_b = d\Gamma^a{}_b + \Gamma^a{}_m \wedge \Gamma^m{}_b \qquad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.12) determinan la parte antisimétrica $\Gamma^a{}_{[bc]}$ de los coeficientes de rotación. El hecho de que $g_{ab;c} = 0$ determina la parte simétrica $\Gamma_{(ab)c}$ de los coeficientes de rotación

$$\Gamma_{(ab)c} = \tfrac{1}{2} g_{ab,c} \quad , \quad \Gamma_{abc} = g_{am} \Gamma^m{}_{bc} \qquad (2.14)$$

las expresiones para $\Gamma^a{}_{[bc]}$ y $\Gamma_{(ab)c}$ determinan todos los coeficientes de rotación y las ecuaciones (2.13) determinan todas las componentes del tensor de curvatura.

En nuestro caso, tenemos triadas rígidas, de tal manera que g_{ab} son constantes. Entonces los coeficientes de rotación son antisimétricos en los primeros dos índices y están determinados mediante (2.10) por

$$\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac} = \Gamma_{a[bc]} + \Gamma_{b[ca]} - \Gamma_{c[ab]} \qquad (2.15)$$

Usaremos una triada nula $\sigma_a^{\ \mu}$ en espacio-tiempo tridimensional con signatura (-, -, +). Sus productos escalares estando dados por

$$g_{ab} = \sigma_a^{\ \mu} \sigma_{b\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

los índices numéricos se refieren a índices triadiales, los cuales son subidos ó bajados haciendo la permutación $2,3,4 \mapsto 2,-4,-3$ en dichos índices.

III METRICAS DE KERR - SCHILD

Estas métricas son interesantes en cuatro dimensiones, debido a que admiten la existencia de agujeros negros y ondas - gravitacionales. Por esta razón, estudiaremos estas métricas en un espacio - tiempo tridimensional para ver el efecto del término topológico de masa.

Consideraremos espacios-tiempos tridimensionales, donde existen coordenadas en las cuales la métrica tiene la forma -

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2h\, a^3{}_\mu a^3{}_\nu \qquad (3.1)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas y a^3_μ es un vector nulo .

$$g^{\mu\nu} \cdot a^3{}_\mu a^3{}_\nu = 0 \qquad (3.2)$$

puesto que para estas estas métricas -g=1

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - 2h\, a^{3\mu} a^{3\nu} \qquad (3.3)$$

de manera que a^3_μ es nulo también respecto a la métrica de ------ Minkowski

$$\eta^{\mu\nu} a^3{}_\mu a^3{}_\nu = 0 \qquad (3.4)$$

Escogiendo coordenadas nulas en el espacio de Minkowski tales que

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x) \ ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x) \ ; \quad \xi = y \qquad (3.5)$$

Entonces, la métrica (3.1) da el elemento de línea

$$ds^2 = d\zeta^2 - 2\,du\,dv + 2h(\alpha^3)^2 \qquad (3.6)$$

Un campo general de direcciones reales nulas en el espacio de Minkowski, consistente con (3.2) y (3.4) está dado por

$$\alpha^3 = l = Y\,d\zeta + \frac{Y^2}{2}\,du + dv \qquad (3.7)$$

donde Y es una función arbitraria de las coordenadas. La triada de vectores se completa con

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= m = d\zeta + Y\,du \\ \alpha^4 &= k = du - h\alpha^3 \end{aligned} \qquad (3.8)$$

tales que

$$\begin{aligned} k^2 &= 0 \qquad & lm &= 0 \\ m^2 &= 0 \qquad & km &= 0 \\ kl &= -1 \end{aligned} \qquad (3.9)$$

La base dual es

$$\begin{aligned} \partial_2 &= \partial_\zeta - Y\,\partial_v \\ \partial_3 &= \partial_v + h\,\partial_4 \\ \partial_4 &= \partial_u + \frac{Y^2}{2}\,\partial_v - Y\,\partial_\zeta \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Calculando los coeficientes de rotación de Ricci

$$d\alpha^a = -\Gamma^a_{\ b} \wedge \alpha^b$$

se obtiene las formas

$$\Gamma^2_{\ 3} = \Gamma^4_{\ 2} = -hY_{,2}\,\alpha^2 + (hY_{,3} - h_{,2})\,\alpha^3$$

$$\Gamma^2_4 = \Gamma^3_2 = -g_{,2}\,\alpha^2 + (h g_{,4} - g_{,3})\,\alpha^3 - g_{,4}\,\alpha^4$$

$$\Gamma^4_4 = -\Gamma^3_3 = -h g_{,4}\,\alpha^2 - h_{,4}\,\alpha^3$$

de donde los coeficientes de rotación son

$$\Gamma^2_{32} = \Gamma^4_{22} = -h g_{,2}$$

$$\Gamma^2_{33} = \Gamma^4_{23} = h g_{,3} - h_{,2}$$

$$\Gamma^2_{42} = \Gamma^3_{22} = -g_{,2}$$

$$\Gamma^2_{43} = \Gamma^3_{23} = h g_{,4} - g_{,3}$$

$$\Gamma^2_{44} = \Gamma^3_{24} = -g_{,4}$$

$$\Gamma^4_{42} = -\Gamma^3_{32} = -h g_{,4}$$

$$\Gamma^4_{43} = -\Gamma^3_{33} = -h g_{,4}$$

Ahora pasamos a calcular las dos formas de curvatura, utilizando la segunda fórmula de Cartan (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Omega^2_3 = \Omega^4_2 = \Big[& h(g_{,23} + g_{,32}) - (h g_{,4} + g_{,3})(h g_{,3} - h_{,2}) + \\
& + g_{,2} h_{,3} - (h g_{,2})^2 - h g_{,2} h_{,4} + g_{,3} h_{,2} - h_{,22}\Big]\, \alpha^2 \wedge \alpha^3 + \\
& + \left[h g_{,24} + g_{,2} h_{,4} - h g_{,2}^2 - g_{,4}(h g_{,3} - h_{,2}) \right] \alpha^2 \wedge \alpha^4 + \\
& + \left[h_{,24} - h g_{,34} - g_{,3} h_{,4} - h g_{,2}(g_{,3} - h g_{,4}) \right] \alpha^3 \wedge \alpha^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^2_4 = \Omega^3_2 = & \left[h g_{,42} + g_{,4} h_{,2} + g_{,2} h_{,4} + h g_{,4}(h g_{,4} - 2 g_{,2}) \right] \alpha^2 \\
& + 2 h g_{,4}^2\, \alpha^4 \wedge \alpha^2 + (h g_{,44} + 2 h_{,4} g_{,4})\, \alpha^4 \wedge \alpha^3
\end{aligned}$$

$$R_4 = -R_3 = \Big[\ldots$$

$$- h g_{,2}(h g_{,4} - g_{,3}) + g_{,2}(h g_{,3} - h_{,2})\Big]\, \alpha^2 \wedge \alpha^3 +$$

$$+ (h g_{,44} + 2 h_{,4} g_{,4})\, \alpha^2 \wedge \alpha^4 + \Big[h_{,44} - h g_{,4}(g_{,3} - h g_{,4}) +$$

$$- g_{,4}(h g_{,3} - h_{,2})\Big]\, \alpha^3 \wedge \alpha^4$$

Estamos ya en posición de calcular las componentes del tensor de Riemann para lo cual hacemos uso de la ecuación (2.11) Así, se obtiene

$$R^2{}_{323} = R^4{}_{223} = h(g_{,23} + g_{,22}) - (h g_{,4} - g_{,3})(h g_{,3} - h_{,2}) + g_{,2} h_{,3} +$$
$$- (h g_{,2})^2 - h g_{,2} h_{,4} + g_{,3} h_{,2} - h_{,22}$$

$$R^2{}_{324} = R^4{}_{224} = h g_{,24} + g_{,2} h_{,4} - h g_{,2}^2 - g_{,4}(h g_{,3} - h_{,2})$$

$$R^2{}_{334} = R^4{}_{234} = h_{,24} - h g_{,34} - g_{,3} h_{,4} - h g_{,2}(g_{,3} - h g_{,4})$$

$$R^2{}_{423} = R^3{}_{223} = h g_{,42} + g_{,4} h_{,2} + g_{,2} h_{,4} + h g_{,4}(h g_{,4} - 2 g_{,3})$$

$$R^2{}_{442} = R^3{}_{242} = 2 h g_{,4}^2$$

$$R^2{}_{443} = R^3{}_{243} = h g_{,44} + 2 h_{,4} g_{,4}$$

$$R^4{}_{423} = -R^3{}_{323} = h g_{,43} + g_{,4} h_{,3} - h^2 g_{,2} g_{,4} - h_{,42} + h_{,4} g_{,3} +$$
$$- h g_{,2}(h g_{,4} - g_{,3}) + g_{,2}(h g_{,3} - h_{,2})$$

$$R^4{}_{424} = -R^3{}_{324} = h g_{,44} + 2 h_{,4} g_{,4}$$

$$R^4{}_{434} = -R^3{}_{334} = h_{,44} - h g_{,4}(2 g_{,3} - h g_{,4}) + g_{,4} h_{,2}$$

Una vez conocido el tensor de Riemann es inmediato calcular el tensor de Ricci, puesto que

$$R_{ab} = R^c{}_{abc}$$

de tal manera que las componentes del tensor de Ricci son:

$$R^{22} = R_{22} = h(g_{,142}+g_{,124}) + 2g_{,14}h_{,12} + hg_{,14}(hg_{,14} - 3g_{,13}) + g_{,12}(2h_{,14} - hg_{,12})$$

$$R^{44} = R_{33} = (hg_{,12})^2 - g_{,12}h_{,13} + (hg_{,14} - g_{,13})(hg_{,13} - h_{,12}) - h(g_{,133} + g_{,123}) + hg_{,12}h_{,14} - g_{,13}h_{,12} + h_{,22}$$

$$R^{33} = R_{44} = 2hg_{,14}^2$$

$$-R^{24} = R_{23} = h_{,24} - hg_{,134} - g_{,13}h_{,14} + hg_{,12}(hg_{,14} - g_{,13})$$

$$-R^{23} = R_{24} = hg_{,144} + 2h_{,14}g_{,14}$$

$$R^{43} = R_{34} = hg_{,12}^2 + h_{,144} \mp g_{,12}h_{,14} - hg_{,124} + hg_{,14}(hg_{,14} - g_{,13})$$

Solo nos falta calcular el tensor de Cotton-York para poder escribir las ecuaciones de campo. Para ésto usamos su definición y el hecho de que para las métricas en consideración $-g=1$ Esto es

$$C^{ab} \doteq \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \epsilon^{acd}\, \nabla_c R^b{}_d$$

$$= \epsilon^{acd}\left[R^b{}_{d,c} + \Gamma^b_{sc} R^s{}_d - \Gamma^s_{dc} R^b{}_s\right]$$

así tenemos que

$$C^{22} = R_{24,3} - R_{23,4} + h_{,14} R_{24} - 3(hg_{,14} - g_{,13}) R_{34} - g_{,14} R_{33} + -(hg_{,13} - h_{,12}) R_{44}$$

$$C^{33} = R_{44,2} - R_{24,4} + 2g_{,12} R_{24} - 3g_{,14} R_{34} + 2hg_{,14} R_{44}$$

$$C^{44} = R_{23,3} - R_{33,2} - (2hg_{,12} + h_{,14}) R_{23} + (hg_{,14} + g_{,13}) R_{33} + -3(hg_{,13} - h_{,12}) R_{34}$$

$$\mathcal{C}^{23} = \mathcal{R}_{34,4} - \mathcal{R}_{44,3} + 2\left(hJ_{,4} - J_{,2}\right)\mathcal{R}_{24} + J_{,4}\mathcal{R}_{23} - 2h_{,4}\mathcal{R}_{44}$$

$$\mathcal{C}^{24} = \mathcal{R}_{33,4} - \mathcal{R}_{34,3} + \left(hJ_{,3} - h_{,2}\right)\mathcal{R}_{24} + \left(hJ_{,4} - J_{,3}\right)\mathcal{R}_{23}$$

$$\mathcal{C}^{34} = \mathcal{R}_{34,2} - \mathcal{R}_{23,4} + J_{,2}\mathcal{R}_{23} + hJ_{,2}\mathcal{R}_{24} - J_{,4}\mathcal{R}_{33}$$

donde debido a que $R=0$ ($R^2_2 + R^3_3 + R^4_4 = 0$) se usó el hecho de que

$$\mathcal{R}_{22} = 2\mathcal{R}_{34}$$

Nótemos que puesto que $C = C^a_a = 0$ entonces

$$\mathcal{C}^{22} = 2\mathcal{C}^{34}$$

de manera que, vamos por tanto, a tener una ecuación repetida.

Las identidades de Bianchi para el tensor de Ricci son:

$$\mathcal{R}^{ab}{}_{;b} = 0$$

i) $$\mathcal{R}_{22,2} - \mathcal{R}_{24,3} - \mathcal{R}_{23,4} + 2J_{,2}\left(h\mathcal{R}_{24} + \mathcal{R}_{22}\right) + \left(hJ_{,3} - h_{,2}\right)\mathcal{R}_{44} + 3\left(hJ_{,4} - J_{,3}\right)\mathcal{R}_{34} - h_{,4}\mathcal{R}_{24} - J_{,4}\mathcal{R}_{33} = 0$$

ii) $$\mathcal{R}_{44,3} + \mathcal{R}_{43,4} - \mathcal{R}_{24,2} - 3J_{,2}\mathcal{R}_{34} - hJ_{,4}\mathcal{R}_{24} - hJ_{,2}\mathcal{R}_{44} + J_{,4}\mathcal{R}_{23} + 2\left[h_{,4}\mathcal{R}_{44} - \left(hJ_{,4} - J_{,3}\right)\mathcal{R}_{24}\right] = 0$$

iii) $$\mathcal{R}_{34,3} + \mathcal{R}_{33,4} - \mathcal{R}_{23,2} - 3hJ_{,2}\mathcal{R}_{34} - J_{,2}\mathcal{R}_{33} - \left(hJ_{,3} - h_{,2}\right)\mathcal{R}_{24} + J_{,3}\mathcal{R}_{23} = 0$$

Estamos ya listos para escribir las ecuaciones de campo

$$\mathcal{R}^{ab} + \frac{1}{\mu}\mathcal{C}^{ab} = 0$$

i) $\mathcal{R}^{22} + \frac{1}{\mu} C^{22} = 0$

$$\mu \mathcal{R}_{22} + (h_{,4} + \partial_3) \mathcal{R}_{24} - \mathcal{R}_{23,4} - 3(hJ_{,4} - J_{,3}) \mathcal{R}_{34} - J_{,4} \mathcal{R}_{33} + - (hJ_{,3} - h_{,2}) \mathcal{R}_{44} = 0$$

ii) $\mathcal{R}^{33} + \frac{1}{\mu} C^{33} = 0$

$$(\mu + \partial_2 + 2hJ_{,4}) \mathcal{R}_{44} + (2J_{,2} - \partial_4) \mathcal{R}_{24} - 3J_{,4} \mathcal{R}_{34} = 0$$

iii) $\mathcal{R}^{44} + \frac{1}{\mu} C^{44} = 0$

$$(\mu - \partial_2 + hJ_{,4} + J_{,3}) \mathcal{R}_{33} + (\partial_3 - 2hJ_{,2} - h_{,4}) \mathcal{R}_{23} + - 3(hJ_{,3} - h_{,2}) \mathcal{R}_{34} = 0$$

iv) $\mathcal{R}^{24} + \frac{1}{\mu} C^{24} = 0$

$$\mathcal{R}_{33,4} - \mathcal{R}_{34,3} + (hJ_{,2} - h_{,2}) \mathcal{R}_{24} + (hJ_{,4} - J_{,3} - \mu) \mathcal{R}_{23} = 0$$

v) $\mathcal{R}^{23} + \frac{1}{\mu} C^{23} = 0$

$$\mathcal{R}_{34,4} - (\partial_3 + 2h_{,4}) \mathcal{R}_{44} + \left[2(hJ_{,4} - J_{,3}) - \mu\right] \mathcal{R}_{24} + J_{,4} \mathcal{R}_{23} = 0$$

vi) $\mathcal{R}^{34} + \frac{1}{\mu} C^{34} = 0$

$$(\mu + \partial_2) \mathcal{R}_{34} + (J_{,2} - \partial_4) \mathcal{R}_{23} + hJ_{,2} \mathcal{R}_{24} - J_{,4} \mathcal{R}_{33} = 0$$

Las expresiones i) y vi) son la misma ecuación debido a que $R_{22} = 2R_{34}$ y $C^{22} = 2C^{34}$.

Los conmutadores de las derivadas direccionales a lo largo de la triada son:

$$A_{,23} - A_{,32} = A_{,2} hJ_{,2} - A_{,3} J_{,3} + A_{,4} (hJ_{,3} - h_{,2})$$

$$A_{,24} - A_{,42} = A_{,2}\mathcal{J}_{,2} - A_{,3}\mathcal{J}_{,4} + A_{,4}h\mathcal{J}_{,4}$$

$$A_{,34} - A_{,43} = A_{,2}\left(\mathcal{J}_{,3} - h\mathcal{J}_{,4}\right) + A_{,4}h_{,4}$$

Tenemos así, planteado el caso general para la métrica de Kerr-Schild en la teoria de gravitación con término topológico de masa. El siguiente paso es entonces encontrar soluciones a estas ecuaciones.

IV SOLUCIONES

En analogía con el caso cuadridimensional nos concentraremos al caso

$$g_{,4} = \Gamma_{424} = 0$$

esto quiere decir que consideraremos curvas geodésicas nulas, tangentes a $e_4 = -e^3$.

Para este caso tenemos que:

i) Los coeficientes de rotación son

$$\Gamma^2_{32} = \Gamma^4_{22} = -h g_{,2}$$

$$\Gamma^2_{33} = \Gamma^4_{23} = h g_{,3} - h_{,2}$$

$$\Gamma^2_{42} = \Gamma^3_{22} = -g_{,2}$$

$$\Gamma^2_{43} = \Gamma^3_{23} = -g_{,3}$$

$$\Gamma^4_{43} = -\Gamma^3_{33} = -h_{,4}$$

ii) Los conmutadores para las derivadas direccionales se reducen a

$$A_{,23} - A_{,32} = A_{,2}\, h g_{,2} - A_{,3}\, g_{,3} + A_{,4}(h g_{,3} - h_{,2})$$

$$A_{,24} - A_{,42} = A_{,2}\, g_{,2}$$

$$A_{,34} - A_{,43} = A_{,2}\, g_{,3} + A_{,4}\, h_{,4}$$

de manera que

$$g_{,23} - g_{,32} = h\,g_{,2}^{2} - g_{,3}^{2}$$
$$g_{,24} = g_{,2}^{2} \quad ; \quad g_{,34} = g_{,2}\,g_{,3}$$

iii) Utilizando los conmutadores para las derivadas direcciona-- les, podemos escribir el tensor de Riemman para este caso de la siguiente manera

$$R^{2}{}_{324} = R^{4}{}_{224} = h\left[2(g_{,32} - g_{,3}^{2}) - h_{,4}\,g_{,2}\right] + g_{,2}\,h_{,3} + 2h_{,2}\,g_{,3} - h_{,22}$$
$$R^{2}{}_{324} = R^{4}{}_{224} = g_{,2}\,h_{,4}$$
$$R^{2}{}_{334} = R^{4}{}_{234} = h_{,24} - g_{,3}\,h_{,4} - 2h\,g_{,2}\,g_{,3}$$
$$R^{2}{}_{423} = R^{3}{}_{223} = g_{,2}\,h_{,4}$$
$$R^{4}{}_{423} = -R^{3}{}_{323} = h_{,4}\,g_{,3} - h_{,42} + g_{,2}(2h\,g_{,3} - h_{,2})$$
$$R^{4}{}_{434} = -R^{3}{}_{334} = h_{,44}$$

iv) Así, el tensor de Ricci queda de la siguiente manera

$$R^{22} = R_{22} = 2g_{,2}\,h_{,4}$$
$$R^{33} = R_{44} = 0$$
$$R^{44} = R_{33} = h_{,22} - 2g_{,3}\,h_{,2} - g_{,2}\,h_{,3} + h\left[g_{,2}\,h_{,4} - 2(g_{,32} - g_{,3}^{2})\right]$$
$$R^{23} = -R_{24} = 0$$
$$R^{24} = -R_{23} = -h_{,24} + g_{,3}\,h_{,4} + 2h\,g_{,2}\,g_{,3}$$
$$R^{34} = R_{34} = h_{,44} - g_{,2}\,h_{,4} = g_{,2}\,h_{,4} \qquad (y \; R_{22} = 2R_{34}$$

v) El tensor de Cotton-York para este caso es

$$C^{22} = -\Omega_{23,4} + 3\vartheta_{,3}\Omega_{34}$$

$$C^{33} = 0$$

$$C^{44} = \Omega_{23,3} - \Omega_{33,2} - (2h\vartheta_{,2} + h_{,4})\Omega_{23} + \vartheta_{,3}\Omega_{33} + \\ - 3(h\vartheta_{,3} - h_{,2})\Omega_{34}$$

$$C^{23} = \Omega_{34,4}$$

$$C^{24} = \Omega_{33,4} - \Omega_{34,3} - \vartheta_{,3}\Omega_{23}$$

$$C^{34} = \Omega_{34,2} - \Omega_{23,4} + \vartheta_{,2}\Omega_{23}$$

vi) Las ecuaciones de campo nos quedan

a) $(2\mu + 3\vartheta_{,3})\Omega_{34} - \Omega_{23,4} = 0$

b) se satisface idénticamente

c) $(\mu + \vartheta_{,3} - \partial_2)\Omega_{33} + (\partial_3 - 2h\vartheta_{,2} - h_{,4})\Omega_{23} + 3(h_{,2} - h\vartheta_{,3})\Omega_{34} =$

d) $(\mu + \vartheta_{,3})\Omega_{23} = \Omega_{33,4} - \Omega_{34,3}$

e) $\Omega_{34,4} = 0$

vii) Por último tenemos las identidades de Bianchi para el ten-- sor de Ricci

a) $\left(2\partial_2 - 3\Gamma_{13}\right) Z_{34} + \left(2\Gamma_{12} - \partial_4\right) Z_{23} = 0$

b) $\left(\partial_4 - 3\Gamma_{12}\right) Z_{34} = 0$

c) $\left(\partial_3 - 3h\Gamma_{12}\right) Z_{34} + \left(\partial_4 - \Gamma_{12}\right) Z_{33} + \left(\Gamma_{12} - \partial_2\right) Z_{23} = 0$

viii) Puesto que $R=0$ tenemos que

$$h_{,44} = 2\Gamma_{12} h_{,4}$$

IV.1

El caso $Y_2 \neq 0$ no es interesante debido a que nos conduce a espacio plano como veremos a continuación:

De la ecuación de campo e) $R_{24,4}=0$ se tiene, usando el hecho de que $h_{,24}=Y_{,2}h_{,2}$

$$(Y_{,2}h_{,4})_{,4} = Y_{,2}(h_{,44}+Y_{,2}h_{,4}) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad h_{,44} = -Y_{,2}h_{,4}$$

teniendo en cuenta viii) de la página anterior concluimos que

$$h_{,44}=0$$

de manera que como $Y_{,2}\neq 0$

$$h_{,4}=0$$

por lo tanto se tiene que $R_{22}=0=R_{34}$.

Fijemonos ahora en la ecuación de campo a). Esta se reduce, debido a que $R_{34}=0$, a

$$Q_{23,4}=0$$

Explícitamente

$$\left[Y_{,2}(h_{,2}-2hY_{,3})\right]_{,4}=0$$

$$2Y_{,2}^{2}(h_{,2}-2hY_{,3})=0$$

$$2Y_{,2}Q_{23}=0$$

entonces

$$Q_{23}=0$$

Por último, examinando la ecuación d) se tiene que ésta se reduce a

$$Q_{33,4}=0$$

ya que $Q_{23} = h_{,2}-2hY_{,3}=0$

$$= 2h_{,2}Y_{,3}+2hY_{,32}$$

así podemos escribir

$$R_{33} = 2h f_{13}^{2} - f_{12} h_{13}$$

de manera que

$$R_{33,4} = f_{12}\left(2h f_{13}^{2} - f_{12} h_{13}\right) = f_{12} R_{33} = 0$$

por tanto

$$R_{33} = 0$$

En conclusión, como $R_{ab} = 0$ el espacio es plano

IV.2

Examinemos ahora el caso $Y_{14} = 0$, con

$$\gamma_{,2} = \Gamma_{422} = 0$$

esto es, el caso para el cual $e_4 = -e^3$ no tiene distorción.

Para este caso:

examinando los conmutadores para las derivadas direcciones tenemos

$$\gamma_{,32} = \gamma_{,3}^{2} \qquad ; \qquad \gamma_{,34} = 0$$

Las únicas componentes del tensor de Ricci distintas de cero son

$$R_{33} = h_{,22} - 2\gamma_{,3} h_{,2}$$

$$R_{23} = h_{,24} - \gamma_{,3} h_{,4}$$

sabemos además de la condición de que el escalar de curvatura -- $R = 0$ que $h_{44} = 0$

Las ecuaciones de campo para este caso son

a) $R_{23,4} = 0$

c) $(\mu + \gamma_{,3} - D_2) R_{33} + (D_3 - h_{,4}) R_{23} = 0$

d) $(\mu + \gamma_{,3}) R_{23} = R_{33,4}$

Escribiendo explícitamente la ecuación a) se tiene

$$(h_{,24} - \gamma_{,3} h_{,4})_{,4} = h_{,442} = 0 \text{ debido a que } h_{,44} = 0$$

De manera que esta ecuación se satisface idénticamente

Examinando la ecuación d) y escribiendola explicitamente resulta que

$$-(\mu + g_{,3})(h_{,12} - g_{,3} h_{,1})_{,} = h_{,122} - 2g_{,3} h_{,12}$$

ó bien

$$h_{,122} - (\mu + 3g_{,3}) h_{,12} + g_{,3}(\mu + g_{,3}) h_{,1} = 0$$

podemos escribirla como sigue

$$\left[h_{,22} - (\mu + 3g_{,3}) h_{,2} + g_{,3}(\mu + g_{,3}) h\right]_{,1} = 0$$

integrando

$$h_{,22} - (\mu + 3g_{,3}) h_{,2} + g_{,3}(\mu + g_{,3}) h = M \quad \text{con } M_{,1} = 0$$

considerando el caso particular $M \neq 0$ tenemos que

$$h_{,22} - (\mu + 3g_{,3}) h_{,2} + g_{,3}(\mu + g_{,3}) h = 0$$

haciendo

$$g_{,3} = z \Rightarrow z_{,2} = z^2 \quad , \quad z_{,1} = 0$$

$$h_{,2} = \frac{dh}{dz} z_{,2} = h' z_{,2} = h' z^2$$

$$h_{,22} = h'' z^4 + 2h' z^3$$

así, escribimos la ecuación de la siguiente manera

$$z^2 h'' - (\mu/z + 1) z h' + (\mu/z + 1) h = 0$$

La solución a esta ecuación es

$$h = z\left[c_1 + c_2 \int \frac{e^{-\mu/z}}{z} dz\right] ;$$

$$\text{si } z = y^{-1} \; ; \; dz = -y^{-2} dy$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{-\mu/z}}{z} dz = -\int \frac{e^{-\mu y}}{y} dy = -Ei(-\mu y)$$

así

$$h = z\left[c_1 - c_2 Ei(-\mu/z)\right] \quad ; \quad \begin{array}{l} c_{1,2} = c_{2,2} = 0 \\ c_{1,11} = c_{2,11} = 0 \end{array}$$

donde

$$\ldots = c + \ln(\mu/z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu^k}{k \cdot k!} z^{-k}$$

Hemos introducido las funciones arbitrarias C_1, C_2, - con las restricciones $C_{1,2} = C_{2,2} = 0$ y $C_{2,44} = C_{1,44} = 0$. Dichas funciones deben además satisfacer la ecuación c) de la pagina 32, que es —

$$C_{2,43} - 2\left[C_{1,4} + C_{2,4} \right) \frac{z^{-\mu/2}}{2} \, dz \Big] C_{2,4} +$$

$$+ \frac{\mu}{z^2} Z_{,3} C_{2,4} - \mu z^5 (4z + 3\mu) C_2 = 0$$

En lugar de intentar la búsqueda de soluciones para este nuevo - sistema, hemos preferido examinar algunos casos particulares los cuales se muestran en las secciones siguientes.

IV.3

Caso estático

Buscamos ahora la solución al caso en el cual no hay variación en el tiempo, manteniendo las restricciones $Y_{,4} = 0$, $Y_{,2} = 0$ del caso anterior.

El hecho de no existir variación en el tiempo implica que $\partial_u = -\partial_v$ (de (3.5)), de manera que ésta es la condición para que la solución sea estática. Esta condición adicional implica que la función Y es una constante:
la base del dual para este caso es

$$\partial_2 = \partial_1 - Y\partial_v$$

$$\partial_3 = \partial_v + h\partial_4$$

$$\partial_4 = \left(Y^2/2 - 1\right)\partial_v - Y\partial_1$$

entonces tenemos que

$$Y_{,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_1 Y = Y\partial_v Y$$

usando esto

$$Y_{,4} = 0 \quad \Rightarrow \left(Y^2/2 - 1\right)\partial_v Y - Y^2\partial_v Y = \left(Y^2/2 + 1\right)\partial_v Y = 0$$

por tanto, como $\left(Y^2/2 + 1\right) \neq 0$ se tiene que $\partial_v Y = 0$

Con esto, examinemos $Y_{,3}$ para determinar su valor

$$Y_{,3} = \partial_v Y + h\partial_4 Y = 0$$

Por lo tanto Y es una constante.

Las componentes del tensor de Ricci para el caso estático son entonces

$$R_{33} = h_{,22} \quad ; \quad R_{23} = h_{,24}$$

$$R_{22} = R_{44} = R_{24} = R_{34} = 0$$

Así, las ecuaciones de campo se reducen a

a) $h_{,44} = 0$

c) $h_{,222} - \mu h_{,22} = h_{,243} - h_{,4} h_{,42}$

d) $h_{,242} - \mu h_{,24} = 0$

Cambiando las variables ξ, v por σ, τ mediante la -- transformación

$$\sigma = \xi - y v$$

$$\tau = \left(y^2/2 - 1 \right) v - y \xi$$

tenemos que

$$\partial_\sigma = \partial_\xi - y \partial_v$$

$$\partial_\tau = \left(y^2/2 - 1 \right) \partial_v - y \partial_\xi$$

puesto que Y = cte. Entonces

$$\partial_2 = \partial_\sigma$$

$$\partial_4 = \partial_\tau$$

Invirtiendo la transformación

$$v = \frac{y\sigma + \tau}{\frac{3}{2} y^2 - 1} \quad ; \quad \xi = \frac{\left(y^2/2 - 1 \right)\sigma + y\tau}{\frac{3}{2} y^2 - 1}$$

de manera que podemos escribir la ∂_3 como

$$\partial_3 = \frac{y}{\frac{3}{2} y^2 - 1} \partial_\sigma + \left(h + \frac{1}{\frac{3}{2} y^2 - 1} \right) \partial_\tau$$

Estamos en posición de escribir las ecuaciones de campo en nuestras nuevas variables y resolverlas.

a) $h_{,44} = 0 \Rightarrow \partial^2_{\tau\tau} h = 0$ esto quiere decir que $h = A(\sigma) + \tau B(\sigma)$ es decir, lineal en τ.

d) $h_{,242} - \mu h_{,24} = 0$

$$\partial^3_{\sigma\tau\sigma} h - \mu \partial^2_{\sigma\tau} h = 0$$

sustituyendo la h de la ecuación anterior

$$B''(\sigma) - \mu B'(\sigma) = 0$$

entonces se tiene que

$$B(\sigma) = a e^{\mu\sigma} + b \qquad \text{con } a, b \text{ constantes}$$

c) $h_{,222} - \mu h_{,22} = h_{,243} - h_{,4} h_{,42}$

$$\partial^3_{\sigma\sigma\sigma} h - \mu \partial^2_{\sigma\sigma} h = \partial^3_{\sigma\tau 3} h - \partial_\tau h \, \partial^2_{\tau\sigma} h$$

$$\partial^3_{\sigma\sigma\sigma} h = A''' + \tau B'''$$

$$\partial^2_{\sigma\sigma} h = A'' + \tau B''$$

$$\partial_\tau h = B$$

$$\partial^2_{\tau\sigma} h = B'$$

$$\partial^3_{\sigma\tau 3} h = \frac{y}{\frac{3}{2} y^2 - 1} B'$$

en donde

$$A' = \frac{\partial A}{\partial \sigma} \quad ; \quad B' = \frac{\partial B}{\partial \sigma}$$

entonces la ecuación queda como

$$A'''(\sigma) - \mu A''(\sigma) = \frac{y}{\frac{3}{2} y^2 - 1} B'' - B B'$$

Calculando el miembro derecho de la ecuación.

$$\frac{J}{\frac{3}{2}J^2-1}\,B'' - BB' = a\mu e^{\mu\sigma}\left[\frac{J}{\frac{3}{2}J^2-1}\,\mu - b - a e^{\mu\sigma}\right]$$

haciendo

$$H = \frac{J\mu}{\frac{3}{2}J^2-1} - b$$

nuestra ecuación queda como

$$A'''(\sigma) - \mu A''(\sigma) = a\mu e^{\mu\sigma}\left(H - a e^{\mu\sigma}\right)$$

La solución a la ecuación homogénea es

$$A(\sigma) = \alpha e^{\mu\sigma} + \beta\sigma + \gamma$$

La solución particular a nuestra ecuación se obtiene - utilizando el método de variación de parámetros y es

$$A_p(\sigma) = \underset{\sim}{\alpha}(\sigma) e^{\mu\sigma} + \underset{\sim}{\beta}(\sigma)\sigma + \underset{\sim}{\gamma}(\sigma)$$

donde

$$\underset{\sim}{\alpha}(\sigma) = \frac{a}{\mu}\left(H\sigma - \frac{a}{\mu} e^{\mu\sigma}\right) + cte.$$

$$\underset{\sim}{\beta}(\sigma) = \frac{a}{\mu} e^{\mu\sigma}\left(\frac{a}{2} e^{\mu\sigma} - H\right) + cte.$$

$$\underline{\gamma}(\sigma) = \frac{a}{\mu} e^{\mu\sigma}\left[H(\sigma - 1/\mu) - \frac{a}{2} e^{\mu\sigma}(\sigma + 1/2\mu) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{a}{2} e^{\mu\sigma} - H\right)\right] + cte.$$

Por lo tanto la solución general al caso estático es

$$h(\sigma, z) = A(\sigma) + A_p(\sigma) + zB(\sigma)$$

$$h(\sigma,\zeta) = \left[\alpha + \frac{a}{\mu}\left(H\sigma - \frac{a}{\mu} e\right)\right] + \left[\beta + \frac{a}{\mu} e \left(\frac{a}{2} e - H\right)\right]\sigma$$

$$+ \gamma + \frac{a e^{\mu\sigma}}{\mu}\left[H(\sigma - 1/\mu) - \frac{a}{2} e^{\mu\sigma}(\sigma - 1/2\mu) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{a}{2} e^{\mu\sigma} - H\right)\right] +$$

$$+ \zeta\left[a e^{\mu\sigma} + b\right]$$

Esta solución no es satisfactoria en el sentido de que no es asintóticamente plana ya que h no tiende a cero en infinito.

IV.4

Examinaremos el caso Y = cte, $h = h(2)$. En este caso, solo $R_{33} = h_{,22}$ es distinto de cero, y solo una ecuación de campo queda por satisfacer, la cual es

$$(\mu - \partial_2) R_{33} = 0$$

ó explicitamente

$$h_{,222} - \mu h_{,22} = 0$$

Como $h = h(2)$, sus derivadas en las direcciones 3 y 4 se anulan, es decir

$$h_{,3} = \partial_v h + h \partial_4 h = 0 \quad \Rightarrow \partial_v h = 0$$

usando esto

$$h_{,4} = \partial_u h - j \partial_\zeta h = 0 \quad \Rightarrow \partial_u h = j \partial_\zeta h$$

Así, nuestra ecuación se reduce ya que

$$h_{,2} = \partial_\zeta h - j \partial_v h = \partial_\zeta h$$

y queda como

$$(\partial^3_{\zeta\zeta\zeta} - \mu \partial^2_{\zeta\zeta}) h = 0$$

con la condición adicional de que

$$\partial_u h = j \partial_\zeta h$$

la solución a la ecuación de campo es

$$h = \frac{A}{\mu^2} e^{\mu\zeta} + B\zeta + C \quad \text{con } A, B, C$$ constantes.

La solución general que cumple tambien con la condición adicional es

$$h = \frac{A}{\mu^2} e^{\mu(\zeta + j u)} + B(\zeta + j u) + C$$

Esta solución es muy parecida a la onda plana convencional.

IV.5

Onda Plana

Cualquier espacio-tiempo que admite un vector nulo l covariantemente constante

$$l_{a;b} = 0$$

es llamado onda gravitacional con frente de onda plano. La métrica entonces, es posible escribirla en la forma

$$ds^2 = d\zeta^2 - 2\,du\,dv - 2H\,dv^2 \qquad \text{con} \qquad H = H(\zeta, v)$$

En nuestro caso seguiremos la analogía con el caso 4-dimensional; la métrica es de la forma

$$ds^2 = d\zeta^2 - 2\,du\,dv + 2h\,l^2$$

en donde

$$l = y\,d\zeta + \frac{y^2}{2}\,du + dv$$

es un vector nulo por construcción.

Tomando el límite $y \longrightarrow 0$, el vector nulo l se reduce a

$$l = dv$$

y cumple con la condición de ser covariantemente constante como se muestra en el apéndice a esta sección. De esta manera, identificando $h = -H$ nuestra métrica se escribe como

$$ds^2 = d\zeta^2 - 2\,du\,dv - 2H\,dv^2$$

que es la métrica de onda plana.

Veamos, cual es la forma de $H = H(\zeta, v)$ para nuestras ondas planas.

En este caso, las únicas componentes del tensor de Ricci, distintas de cero son

$$R_{33} = h_{,22} \qquad ; \qquad R_{23} = h_{,24}$$

Así, las ecuaciones de campo se escriben explícitamente como

a) $R_{23,4} = 0$ ó bien $h_{,244} = 0$

c) $(\mu - \partial_2) \Omega_{33} + (\partial_3 - h_{,4}) \Omega_{23} = 0$

ó bien

$$\mu h_{,22} - h_{,222} + h_{,243} - h_{,4} h_{,24} = 0$$

ó
$$(h_{,2} - \mu h)_{,22} - h_{,243} + \left(\tfrac{1}{2} h_{,4}^{2}\right)_{,2} = 0$$

d) $\mu \Omega_{23} - \Omega_{33,4} = 0$ ó $h_{,224} - \mu h_{,24} = 0$

ó bien

$$(h_{,2} - \mu h)_{,24} = 0$$

La base dual para este caso es

$$\partial_2 = \partial_\zeta$$
$$\partial_3 = \partial_v + h \partial_u$$
$$\partial_4 = \partial_u$$

De manera que las ecuaciones de campo quedan como

a) $\dfrac{\partial^3 h}{\partial \zeta \partial u^2} = 0$

c) $\dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left[\dfrac{\partial h}{\partial \zeta} - \mu h \right] - \dfrac{\partial^3 h}{\partial \zeta \partial u \partial v} + \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{2} \left(\dfrac{\partial h}{\partial u} \right)^2 \right] = 0$

d) $\dfrac{\partial^2}{\partial \zeta \partial v} \left(\dfrac{\partial h}{\partial \zeta} - \mu h \right) = 0$

Introduciendo el hecho de que h = h (ζ, v) las ecua-- ciones de campo se reducen a:

a) se cumple idénticamente

c) $\dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\dfrac{\partial h}{\partial \zeta} - \mu h \right) = 0$

d) $$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial v}\left(\frac{\partial h}{\partial\zeta} - \mu h\right) = 0$$

haciendo la identificación $\omega = \dfrac{\partial h}{\partial \zeta} - \mu h$ tenemos que

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta\,\partial v} = 0$$

de manera que

$$\omega = \alpha\zeta + c(v) \qquad \alpha = cte.$$

es decir

$$\frac{\partial h}{\partial\zeta} - \mu h = \alpha\zeta + c(v)$$

Resolviendo la ecuación se tiene que

$$h = -\frac{1}{\mu}\left[\alpha\left(\zeta + 1/\mu\right) + c(v) + \gamma(v)\, e^{\mu\zeta}\right]$$

donde α es una constante y donde $C(v)$, $\gamma(v)$ son funciones arbitrarias de v.

La métrica está entonces dada por

$$ds^2 = d\zeta^2 - 2\,du\,dv - \frac{1}{\mu}\left[\alpha\left(\zeta + 1/\mu\right) + c(v) + \gamma(v)\, e^{\mu\zeta}\right] dv^2$$

donde $\alpha = cte$, $c(v)$, $\gamma(v)$ funciones arbitrarias

$\ell = \partial v$ es covariantemente constante

$$\ell^3 = a^3_{\mu}\,\partial x^{\mu} = a^3_{\zeta}\,\partial\zeta + a^3_{u}\,\partial u + a^3_{v}\,\partial v$$
$$= \partial v \implies a^3_{v} = 1$$

$$\ell^3_{;b} = \ell^3_{,b}$$

ya que las Γ's son cero en este caso

la base dual es

$$\partial_2 = \partial_\zeta$$
$$\partial_3 = \partial_v + h\partial_u$$
$$\partial_4 = \partial_u$$

de manera que

$$\ell^3_{,2} = \partial_\zeta\,\partial v = 0$$
$$\ell^3_{,4} = \partial_u\,\partial v = 0$$
$$\ell^3_{,3} = \partial_v\,\partial v = 0$$

ya que ℓ^3 es nulo puesto que

$\ell_3\ell^3 = \partial_v\,\partial v = 0$ por construcción

$\therefore$ $\ell = \partial v$ es covariantemente constante.

RESUMEN

En primer lugar, se plantearon las ecuaciones generales para la métrica de Kerr-Schild, definida como $ds^2 = d\zeta^2 - 2\,du\,dv + 2h(a^3)^2$, en donde $a^3 = Y\,d\zeta + \frac{Y^2}{2}\,du + dv$, en la teoria de gravedad en tres dimensiones con término topológico de masa de Deser, Jackiw y Templeton.

En analogía con el caso cuadridimensional impusimos la restricción $Y_{,4}=0$. Vimos que el caso $Y_{,4}= 0$, $Y_{,2}\neq 0$ no es interesante, puesto que nos conduce a espacio plano.

A continuación examinamos el caso $Y_{,4}= 0$, $Y_{,2}= 0$, el cual nos llevó a una solución muy complicada, la cual no es posible escribirla en términos de funciones elementales y por tanto es difícil de manejar.

En seguida analizamos el caso estático, es decir, cuando la métrica no depende del tiempo. Encontramos una solución, la cual no es satisfactoria en el sentido de que no es asintóticamente plana, de manera que no constituye una buena analógia para un hoyo negro.

Se examinó también, el caso particular Y = cte, h = h(2), resultando la solución muy semejante a la onda plana convencional.

Por último tratamos el caso de la onda plana, siguiendo la analogía con el caso de cuatro dimensiones y encontramos una solución a este caso.

En conclusión, hemos mostrado que la gravedad en tres dimensiones con término topológico de masa admite soluciones exactas del tipo de onda plana.

REFERENCIAS

1.- S. Deser, R. Jackiw y S. Templeton
Annals of Physics 140, 372 - 411 (1982)

2.- J. W. Jork Jr.
Physical reviewletters 26, 26, 1656 - 1658 (1971)

3.- G. C. Debney, R. P. Kerr y A. Schild
Journal of mathematical Physics 10, 10, 1842 - 1854 (1969)

4.- R. J. Finkelstein
Journal of mathematical Physics 16, 6, 1271 - 1277

5.- L. P. Einsenhart "Riemannian Geometry"
(Princeton U. Press, Princeton, N. J. 1926)

6.- R. Jackiw, "Lower Dimensional Gravity"
Preprint del MIT. Cambridge Massachusetts Septiembre 1984.

7.- S. Giddings, J. Abbott, K. Kuchar
"Einstein's thery in a three - dimensional spacetime".
Preprint Universidad de Utah. Salt lake city. Utah.

8.- E. Kamke, "Differential gleichungen lösungsmethoden und lösungen" (New York, Chelsea, 1971)

9.- C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, "Gravitation".
(WH. Freeman and Co. San Fco. 1973).

10.-M. Henneaux
Physical Review letters 54, 10, 959 - 962 (1985).

PARTE II

ECUACION DE DIRAC EN EL UNIVERSO DE GÖDEL

DIRECTOR

DR. OCTAVIO PIMENTEL

INTRODUCCION

A falta de una teoría cuántica unificada de Gravitación y las otras interacciones, es válido considerar una teoría semiclásica: Gravitación clásica y otros campos cuánticos. Los campos cuánticos se pueden considerar a dos niveles 1ª y 2ª cuantización.

Las ecuaciones de los campos en espacios-tiempos curvos, son solubles exactamente en muy pocos casos. Por esta razón, es conveniente, si buscamos soluciones exactas para las ecuaciones de los campos, tratar con espacios-tiempos con alto grado de simetría.

En nuestro caso, trataremos con el campo de Dirac en 1ª cuantización, en el universo de Gödel. El universo de Gödel, es un universo homogéneo con propiedades interesantes;

a) Es solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, para un fluido perfecto cuya ecuación de estado es $P = 0$.

b) Es a causal, ya que permite la existencia de geodésicas temporaloides cerradas.

c) Tiene más de un vector de Killing temporaloide, lo cual da lugar, al hacer la segunda cuantización a dos cuantizaciones inequivalentes.

Debe notarse que puesto que el universo de Gödel es estático no es un modelo físico aceptable del universo real.

I ECUACION DE DIRAC EN ESPACIO-TIEMPO CURVO

1.1 INTRODUCCION

El puente conceptual entre las teorías especial y general de la relatividad es el principio de equivalencia, el cual establece la indistinguibilidad local de los efectos gravitacionales y celerativos.

Dadas las ecuaciones, de relatividad especial, que gobiernan al sistema en ausencia de gravitación, podemos determinar los efectos de ésta en el sistema usando el principio de covariancia general en dichas ecuaciones. Esto sería suficiente si todas las cantidades de interés físico tuvieran propiedades de transformación tensoriales. Sin embargo, la teoría cuántica-relativista del electrón, propuesta por Dirac a principios de siglo, introdujo un nuevo objeto: el espinor de 4-componentes cuyas propiedades de transformación son más complicadas que las de un tensor. Ampliando el principio de covariancia general para incluir cantidades con transformaciones de espín es posible hacer que la ecuación de Dirac sea compatible con la relatividad general.

1.2 ECUACION DE DIRAC GENERALMENTE COVARIANTE

En espacio-tiempo plano la ecuación de Dirac para una partícula de masa m está dada por

$$\left(\gamma^a \partial_a + m\right)\psi(x) = 0 \tag{1.1}$$

donde las matrices γ obedecen la regla de anticonmutación

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \tag{1.2}$$

aquí η^{ab} es la métrica de Lorentz (-1, 1, 1, 1) diagonal. - Indices repetidos se suman a menos que se especifique lo contrario. Indices latinos del principio del alfabeto se usan para cantidades de espacio-tiempo plano y para índices tetradiales. Toman los valores 0, 1, 2, 3. Indices griegos se utilizan para -- cantidades generalmente covariantes y toman los valores 0, 1, 2, 3. Indices latinos de la mitad del alfabeto (i, j, k,...) están reservados para ser índices espaciales y toman los valores - 1, 2, 3.

Para generalizar una ecuación covariante de Lorentz como (1.1) a la relatividad general usamos el principio de covariancia general: sustituimos η_{ab} con $g_{\mu\nu}$, todas las derivadas normales por derivadas covariantes y los tensores de Lorentz por objetos que se transforman como tensores ó densidades tensoriales bajo transformaciones generales de coordenadas. Sin embargo este método tiene que modificarse cuando tratamos con objetos que se transforman como espinores.

Las matrices γ constantes, del espacio-tiempo plano se reemplazan por matrices $\gamma(x)$, dependientes de las coordenadas, que satisfacen la regla de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu} \tag{1.3}$$

la cual es la generalización de (1.2) usando el principio de covariancia general.

Se introduce además las conexiones afines espinoriales $\Gamma_\mu(x)$. Son matrices definidas mediante la siguiente relación

$$0 = \nabla_\mu \gamma_\nu(x) \equiv \partial_\mu \gamma_\nu(x) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\gamma_\lambda(x) - \Gamma_\mu \gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x)\Gamma_\mu \qquad (1.4)$$

$$\partial_\mu \gamma_\nu(x) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\gamma_\lambda(x) = [\Gamma_\mu, \gamma_\nu(x)] \qquad (1.5)$$

donde los paréntesis cuadrados significan conmutador y los índices de las γ's fueron bajados con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

La derivada covariante de un campo espinorial $\psi(x)$ está definida como

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu - \Gamma_\mu)\psi \qquad (1.6)$$

Estamos listos para escribir la versión generalmente covariante de la ecuación de Dirac (1.1)

$$(\gamma^\mu(x)\nabla_\mu + m)\psi(x) = 0 \qquad (1.7)$$

Para relacionar las matrices $\gamma(x)$ dependientes de las coordenadas con las matrices γ constantes del espacio-tiempo plano se introducen un campo tetradial, esto es, un conjunto de cuatro vectores $h^a{}_\mu$ definidos por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, h^a{}_\mu(x)\, h^b{}_\nu(x) \qquad (1.8)$$

La tétrada también satisface la relación

$$h^a{}_\mu h^{b\mu} = h^a{}_\mu h^b{}_\nu g^{\mu\nu} = \eta^{ab} \qquad (1.9)$$

$h^a{}_\mu$ son objetos covariantes bajo transformaciones generales de coordenadas en su índice μ y covariante de Lorentz en su índice a.

Se sigue de las ecuaciones (1.2), (1.3), (1.8) que las matrices $\gamma(x)$ generalizadas se relacionan con las constantes de la siguiente manera

$$\gamma_\mu(x) = h^a{}_\mu(x)\cdot\gamma_a \qquad (1.10)$$

Para obtener una expresión explícita para la conexión espinorial, sustituimos en (1.5) la ecuación (1.10) , multiplicamos por $h_{a\nu}$ y usando la ecuación (1.9) obtenemos

$$\left[\Gamma_\mu , \gamma^a\right] = h^{\nu a}\gamma^b \nabla_\mu h_{\nu b} \qquad (1.11)$$

Utilizando las propiedades algebraicas de las matrices de Dirac puede verse que la Γ_μ tiene que ser proporcional al -- conmutador de las matrices γ . Se puede probar que

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\sigma_{ab}\, h^a{}_\nu \nabla_\mu h^{b\nu} \qquad (1.12)$$

de donde

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\sigma^{ab}\, h_a{}^\nu \nabla_\mu h_{b\nu} \qquad (1.12a)$$

donde

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{2}\left[\gamma^a , \gamma^b\right] = \gamma^a\gamma^b \; ; \; a \neq b \qquad (1.13)$$

1.3 TETRADAS EN EL ESPACIO-TIEMPO

En cada punto en un espacio-tiempo Riemanniano, debido al principio de equivalencia, podemos construir un marco de referencia localmente plano como un conjunto de diferenciales Lorentzianas dx^a. En el mismo punto tenemos también coordenadas generales x^μ asociadas con la métrica $g_{\mu\nu}(x)$, cuyas diferenciales dx^μ están relacionadas con dx^a mediante la siguiente regla

$$dx^\mu = h_a{}^\mu dx^a \qquad (1.14)$$

las $h_a^\mu(x)$ con $a = 0, 1, 2, 3$ son los cuatro vectores tetradiales en el espacio-tiempo de Riemann. Ellas relacionan cantidades tensoriales en el espacio-tiempo de Riemann con cantidades en el marco Lorentziano local.

Las tétradas sólo es posible definirlas en cada punto, puesto que no existe un mapeo global $x^a \rightarrow x^\mu$ a menos que el tensor de curvatura sea cero y el espacio-tiemplo plano.

Las relaciones fundamentales que proporcionan la estructura tetrádica del espacio-tiempo son:

$$h_a{}^\mu h_{\mu b} = \eta_{ab} \qquad (1.15)$$

$$h_a{}^\mu h^{a\nu} = g^{\mu\nu} \qquad (1.16)$$

APENDICE 1.1 Dependencia de Γ_μ con γ^b

Sabemos que

$$[\Gamma_\mu , \gamma^a] = h^{\nu a}$$

La base para las matrices de 4 x 4 son las 16 matrices siguien - tes:

$$\Gamma^S = I \qquad (1)$$

$$\Gamma^V = \gamma^a \qquad (4)$$

$$\Gamma^T = \gamma^a \gamma^b \quad (a \neq b) \quad (6)$$

$$\Gamma^A = \gamma^a \gamma^5 \qquad (4)$$

$$\Gamma^P = \gamma^5 \qquad (1)$$

donde

$$\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

Así tenemos que en general

$$\Gamma_\mu = A\Gamma^S + B\Gamma^V + C\Gamma^T + D\Gamma^A + E\Gamma^P$$

Ya que

$$[\Gamma_\mu , \gamma^a] \sim \gamma^b$$

Examinemos los conmutadores $[\Gamma_\mu , \gamma^a]$ para, de acuerdo con la condición anterior, determinar cuales de los coeficientes - A, B, C, D, E, son distintos de cero

$$[\Gamma^S , \gamma^a] = 0$$

$$[\Gamma^V , \gamma^a] = 2\gamma^b \gamma^a - 2^{ba}$$

$$[\Gamma^{T}, \gamma^{a}] = 2\left(\eta^{bc}\gamma^{a} - \eta^{ac}\gamma^{b} - i\epsilon^{abcd}\gamma_{d}\gamma_{5}\right)$$

$$[\Gamma^{A}, \gamma^{a}] = -2\eta^{ba}\gamma^{5}$$

$$[\Gamma^{P}, \gamma^{a}] = 2\gamma^{5}\gamma^{a}$$

Esto implica que A = B = D = E = 0

$$\Gamma_{\mu} \sim \Gamma^{T}_{T}$$

Ya que solo

$$[\Gamma^{T}, \gamma^{a}] \sim \gamma^{b}$$

Así:

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{4}\,\Gamma^{T} h_{a}{}^{\nu} \nabla_{\mu} h_{b\nu}$$

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{4}\,\sigma^{ab} h_{a}{}^{\nu} \nabla_{\mu} h_{b\nu}$$

II METODO GEODESICO LAGRANGIANO

Normalmente pensamos que las conexiones $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ deben -- calcularse antes de que podamos escribir las ecuaciones de las - geodésicas

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0 \qquad (2.1)$$

Sin embargo, el argumento puede invertirse: una vez escritas las ecuaciones de las geodésicas, los coeficientes de conexión se -- pueden leer de ellas.

Para calcular las ecuaciones geodésicas, solo es necesario recordar que una geodésica es una curva parametrizada que extremiza la integral

$$I = \frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\,\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\,d\lambda \qquad (2.2)$$

en el sentido

$$\delta I = 0 \qquad (2.3)$$

En aplicaciones prácticas de este principio variacio-- nal, el primer paso es reescribir (2.2) en la forma más sim-- ple posible, introduciendo los valores específicos de la $g_{\mu\nu}$ para el problema en consideración. Si nuestro interés es en las geodésicas es posible reconocer constantes de movimiento aún sin llevar a cabo ninguna variación. Si el propósito es calcular las $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, se procede a variar respecto a cada coordenada, obteniendose cuatro ecuaciones. A continuación se rearreglan las ecua--- ciones, de tal manera que sea de la forma (2.1) . Consecuentemente, las $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ se leen inmediatamente, son los coeficientes en estas cuatro ecuaciones.

III CONSTRUCCION DE LA ECUACION DE DIRAC PARA EL UNIVERSO DE GÖDEL (ingredientes).

3.1 INTRODUCCION

El universo de Gödel es una solución a las ecuaciones de Einstein, con constante cosmológica distinta de cero, cuya -- fuente es polvo. Su geometría está descrita por el elemento de - línea

$$ds^2 = -(dt + e^{ar}d\theta)^2 + dr^2 + \tfrac{1}{2}e^{2ar}d\theta^2 + dz^2 \qquad (3.1a)$$

$$= -dt^2 + dr^2 + dz^2 - \tfrac{1}{2}e^{2ar}d\theta^2 - 2e^{ar}dt\,d\theta \qquad (3.1b)$$

donde a es un párametro relacionado con la vorticidad del fluido.

De manera que la métrica es

$$g_{tt} = -1 \qquad g_{\theta\theta} = -\tfrac{1}{2}e^{2ar} \qquad g_{t\theta} = g_{\theta t} = -e^{ar}$$
$$g_{rr} = 1 \qquad g_{zz} = 1 \qquad (3.2)$$

y su inversa es

$$g^{tt} = 1 \qquad g^{\theta\theta} = 2e^{-2ar} \qquad g^{t\theta} = g^{\theta t} = -2e^{-ar} \qquad (3.3)$$
$$g^{rr} = 1 \qquad g^{zz} = 1$$

$$g = \det g_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}e^{2ar} \qquad (3.4)$$

3.2 CONEXIONES AFINES (Christoffeles)

Utilizando el método geodésico-lagrangiano se calculan los símbolos de Christoffel ó conexiones afines.

El lagrangiano asociado al universo de Gödel es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(-\dot{t}^2 - 2e^{ar}\dot{t}\dot{\theta} + \dot{r}^2 - \frac{1}{2}e^{2ar}\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) \qquad (3.5)$$

$$I = \int \mathcal{L}\, d\lambda \qquad (3.6)$$

la condición $\delta I = 0$ implica que

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad , \; q_i = t, r, \theta, z \qquad (3.7)$$

Aplicando la condición anterior a t obtenemos que

$$\ddot{t} + a e^{ar}\dot{r}\dot{\theta} + e^{ar}\ddot{\theta} = 0 \qquad (3.8)$$

haciéndolo para r obtenemos

$$\ddot{r} + a e^{ar}\dot{t}\dot{\theta} + \frac{a}{2}e^{2ar}\dot{\theta}^2 = 0 \qquad (3.9)$$

para θ

$$\ddot{t} + a e^{ar}\dot{r}\dot{\theta} + a\dot{t}\dot{r} + \frac{1}{2}e^{ar}\ddot{\theta} = 0 \qquad (3.10)$$

Despejando $\ddot{\theta}$ de (3.8) y sustituyendo en (3.10) obtenemos que

$$\ddot{t} + a e^{ar}\dot{r}\dot{\theta} + 2a\dot{t}\dot{r} = 0 \qquad (3.11)$$

Despejando $\ddot{t}$ de (3.11) y sustituyendo en (3.8) se tiene que

$$\ddot{\theta} - 2a e^{-ar}\dot{t}\dot{r} = 0 \qquad (3.12)$$

Así, las ecuaciones de las geodésicas en el universo de Gödel son:

$$\ddot{t} + 2a\dot{t}\dot{r} + a e^{ar}\dot{r}\dot{\theta} = 0 \qquad (3.11)$$

$$\ddot{r} + a e^{ar}\dot{t}\dot{\theta} + \frac{1}{2} a e^{2ar}\dot{\theta}^{2} = 0 \tag{3.9}$$

$$\ddot{\theta} - 2a e^{-ar}\dot{t}\dot{r} = 0 \tag{3.12}$$

$$\ddot{z} = 0 \tag{3.13}$$

Por lo tanto, las conexiones afines son

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{t}_{tr} = a & &\Gamma^{t}_{r\theta} = \frac{1}{2} a e^{ar} \\
&\Gamma^{r}_{t\theta} = \frac{1}{2} a e^{ar} & &\Gamma^{r}_{\theta\theta} = \frac{1}{2} a e^{2ar} \\
&& \Gamma^{\theta}_{tr} = -a e^{-ar} &
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.3 TETRADAS

Una tétrada para la métrica de Gödel esta dada por

$$\begin{gathered}
h_{(0)}{}^{\mu} = \delta_{0}^{\mu} \quad , \quad h_{(1)}{}^{\mu} = \delta_{1}^{\mu} \quad , \quad h_{(3)}{}^{\mu} = \delta_{3}^{\mu} \\
h_{(2)}{}^{\mu} = \sqrt{2}\left(e^{-ar}\delta_{2}^{\mu} - \delta_{0}^{\mu}\right)
\end{gathered} \tag{3.15}$$

$$h_{\mu a} = g_{\mu\nu} h_{a}{}^{\nu} \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered}
h_{\mu(0)} = g_{\mu 0} \; ; \; h_{\mu(1)} = g_{\mu 1} \; ; \; h_{\mu(3)} = g_{\mu 3} \\
h_{\mu(2)} = \sqrt{2}\left(e^{-ar} g_{\mu 2} - g_{\mu 0}\right)
\end{gathered} \tag{3.17}$$

donde las δ_{a}^{μ} son deltas de Kronnecker.

APENDICE 3.3.1

Prueba de las tétradas

$$\text{i)}\quad h^{\mu}_{(\alpha)} h_{\mu(\beta)} = \eta_{(\alpha)(\beta)}$$

$$\text{ii)}\quad h^{\mu}_{(\alpha)} h^{\nu(\alpha)} = g^{\mu\nu}$$

$$h^{\mu}_{(0)} h^{\nu}_{(0)} g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0} g_{\mu\nu} = g_{00} = \eta_{00} = -1$$

$$h^{\mu}_{(1)} h^{\nu}_{(1)} g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{1}\delta^{\nu}_{1} g_{\mu\nu} = g_{11} = \eta_{11} = 1$$

$$h^{\mu}_{(2)} h^{\nu}_{(2)} g_{\mu\nu} = 2\left[e^{-ar}\delta^{\mu}_{2} - \delta^{\mu}_{0}\right]\left[e^{-ar}\delta^{\nu}_{2} - \delta^{\nu}_{0}\right] g_{\mu\nu}$$

$$= 2\left[e^{-2ar}\delta^{\mu}_{2}\delta^{\nu}_{2} - 2e^{-ar}\delta^{\mu}_{2}\delta^{\nu}_{0} + \delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0}\right] g_{\mu\nu}$$

$$= 2\left[g_{00} + e^{-2ar} g_{22} - 2e^{-ar} g_{20}\right] = \eta_{22}$$

$$= 2\left[-1 - \tfrac{1}{2} + 2\right] = 1$$

$$h^{\mu}_{(3)} h^{\nu}_{(3)} g_{\mu\nu} = g_{33} = \eta_{33} = 1$$

$$h^{\mu}_{(0)} h^{\nu(0)} + h^{\mu}_{(1)} h^{\nu(1)} + h^{\mu}_{(2)} h^{\nu(2)} + h^{\mu}_{(3)} h^{\nu(3)} = g^{\mu\nu}$$

$$-\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0} + \delta^{\mu}_{1}\delta^{\nu}_{1} - 2\left[e^{-ar}\delta^{\mu}_{2} - \delta^{\mu}_{0}\right]\left[e^{-ar}\delta^{\nu}_{2} - \delta^{\nu}_{0}\right] + \delta^{\mu}_{3}\delta^{\mu}_{3} = g^{\mu\nu}$$

$$-\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0} + \delta^{\mu}_{1}\delta^{\nu}_{1} - 2\left[e^{-2ar}\delta^{\mu}_{2}\delta^{\nu}_{2} - 2e^{-ar}\delta^{\mu}_{2}\delta^{\nu}_{0} - \delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0}\right] + \delta^{\mu}_{3}\delta^{\nu}_{3} = g$$

$$g^{00} = 1$$

$$g^{11} = 1$$

$$g^{22} = 2e^{-2ar}$$

$$g^{33} = 1$$

$$g^{02} = 2e^{-ar}$$

3.4 CONEXIONES AFINES ESPINORIALES

Sabemos de (1.12a) que

$$\Gamma_\rho = -\frac{1}{4}\gamma^a\gamma^b h_a{}^\nu \nabla_\rho h_{b\nu}$$

de manera que

$$\Gamma_\rho = -\frac{1}{4}\gamma^a\gamma^b\left[h_a{}^\nu h_{\nu b,\rho} - h_a{}^\nu h_{b\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\right] \qquad (3.18)$$

así, tenemos que

$$\Gamma_t = -\frac{1}{4}\gamma^a\gamma^b h_a{}^\nu\left[h_{\nu b,t} - \Gamma^\lambda_{\nu t} h_{\lambda b}\right] \qquad (3.19)$$

de (3.15) se concluye que

$$h_{\nu b,t} = 0$$

de manera que

$$\Gamma_t = \frac{1}{4}\gamma^a\gamma^b h_a{}^\nu h_{b\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu t} \qquad (3.20)$$

utilizando (3.14) , (3.15) y (3.17) en la expresión anterior obtenemos

$$\Gamma_t = \frac{\sqrt{2}}{4}a\gamma^{(2)}\gamma^{(1)} \qquad (3.21)$$

De la misma forma

$$\Gamma_r = -\frac{1}{4}\gamma^a\gamma^b h_a{}^\nu\left[h_{\nu b,r} - \Gamma^\lambda_{\nu r} h_{\lambda b}\right] \qquad (3.22)$$

$$\Gamma_r = -\frac{\sqrt{2}}{4}a\gamma^{(0)}\gamma^{(2)} \qquad (3.23)$$

$$\Gamma_\theta = -\frac{1}{4}\gamma^a\gamma^b h_a{}^\nu\left[h_{b\nu,\theta} - \Gamma^\lambda_{\nu\theta} h_{b\lambda}\right] \qquad (3.24)$$

de (3.17) se observa que

$$h_{\nu b,\theta} = 0$$

así

$$\Gamma_\theta = \frac{1}{4}\gamma^a\gamma^b h_a{}^\nu \Gamma^\lambda_{\nu\theta} h_{b\lambda} \qquad (3.25)$$

$$\Gamma_{\phi} = -\frac{1}{4} a e^{ar} \gamma^{(1)} \gamma^{(0)} \qquad (3.26)$$

Por último

$$\Gamma_z = -\frac{1}{4} \gamma^a \gamma^b h_a{}^{\nu} \left[h_{b\nu,z} - \Gamma^{\lambda}_{\nu z} h_{b\lambda} \right] \qquad (3.27)$$

de (3.17) y (3.14) se observa que

$$h_{b\nu,z} = 0$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu z} = 0$$

por lo tanto

$$\Gamma_z = 0 \qquad (3.28)$$

En resumen: las conexiones afines espinoriales son

$$\Gamma_t = \frac{\sqrt{2}}{4} a \gamma^{(2)} \gamma^{(1)} \qquad (3.21)$$

$$\Gamma_r = -\frac{\sqrt{2}}{4} a \gamma^{(0)} \gamma^{(2)} \qquad (3.23)$$

$$\Gamma_{\phi} = -\frac{1}{4} a e^{ar} \gamma^{(1)} \gamma^{(0)} \qquad (3.26)$$

$$\Gamma_z = 0 \qquad (3.28)$$

3.5 MATRICES DE DIRAC

Las matrices de Dirac de espacio-tiempo curvo se relacionan con las de espacio-tiempo plano de acuerdo con

$$\gamma^{\mu} = h_a{}^{\mu} \gamma^a \qquad (1.10')$$

así

$$\gamma^{\mu} = h_{(0)}{}^{\mu} \gamma^{(0)} + h_{(1)}{}^{\mu} \gamma^{(1)} + h_{(2)}{}^{\mu} \gamma^{(2)} + h_{(3)}{}^{\mu} \gamma^{(3)} \qquad (3.29)$$

utilizando (3.15) en (3.29) tenemos

$$\gamma^{\mu} = \delta^{\mu}_{0}\,\gamma^{(0)} + \delta^{\mu}_{1}\,\gamma^{(1)} + \sqrt{2}\left(e^{-ar}\,\delta^{\mu}_{2} - \delta^{\mu}_{0}\right)\gamma^{(2)} + \delta^{\mu}_{3}\,\gamma^{(3)} \qquad (3.30)$$

de manera que

$$\gamma^{1} = \gamma^{(0)} - \sqrt{2}\,\gamma^{(2)} \qquad (3.31)$$

$$\gamma^{r} = \gamma^{(1)} \qquad (3.32)$$

$$\gamma^{\theta} = \sqrt{2}\,e^{-ar}\,\gamma^{(2)} \qquad (3.33)$$

$$\gamma^{2} = \gamma^{(3)} \qquad (3.34)$$

En la representación estandar ó de Dirac

$$\gamma^{(0)} = -i\beta \qquad\qquad \gamma^{(k)} = i\beta\alpha^{(k)} \qquad (3.35)$$

en donde

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad (3.36)$$

y

$$\sigma^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (3.37)$$

con

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;;\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \;;\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.38)$$

Sustiyendo (3.36) y (3.37) en (3.35) se tiene que

$$\gamma^{(0)} = i\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \;;\quad \gamma^{(1)} = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{(2)} = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \;;\quad \gamma^{(3)} = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.39)$$

3.6 DERIVADA COVARIANTE ESPINORIAL

La derivada covariante de un campo espinorial $\psi(x)$ está de finida como

$$\nabla_\mu \psi = \left(\partial_\mu - \Gamma_\mu\right)\psi \qquad (1.6)$$

Utilizando (3.21), (3.23), (3.26) y (3.28) se obtienen las derivadas covariantes espinoriales

$$\begin{aligned}
\nabla_t \psi &= \psi_{,t} - \frac{\sqrt{2}}{4} a \gamma^{(2)} \gamma^{(1)} \psi \\
\nabla_r \psi &= \psi_{,r} + \frac{\sqrt{2}}{4} a \gamma^{(0)} \gamma^{(2)} \psi \\
\nabla_\theta \psi &= \psi_{,\theta} + \frac{1}{4} a e^{ar} \gamma^{(1)} \gamma^{(0)} \psi \\
\nabla_z \psi &= \psi_{,z}
\end{aligned} \qquad (3.40)$$

3.7 CONDICION SUBSIDIARIA

Trataremos el caso del neutrino (m=0); en este caso, el espín del neutrino es antiparalelo a su momento, de manera que la función de onda ψ satisface la condición

$$\left(\underline{1} + i\gamma_5\right)\psi = 0 \qquad (3.41)$$

La matriz γ_5 está definida en espacio-tiempo plano como

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \qquad (3.42)$$

en espacio-tiempo curvo como

$$\underset{\sim}{\gamma_5} = \frac{1}{4!} g^{1/2} \epsilon_{\mu\nu\eta\lambda} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\eta \gamma^\lambda \qquad (3.43)$$

Para encontrar como se relacionan, usamos en (3.43) lo siguiente:

$$\gamma^{\mu} = h_a{}^{\mu} \gamma^a \qquad (1.10')$$

$$\epsilon_{abcd} = g^{1/2} \epsilon_{\mu\nu\eta\lambda} h_a{}^{\mu} h_b{}^{\nu} h_c{}^{\eta} h_d{}^{\lambda} \qquad (3.44)$$

así tenemos que

$$\underset{\sim}{\gamma_5} = \frac{1}{4!} g^{1/2} \epsilon_{\mu\nu\eta\lambda} h_a{}^{\mu} h_b{}^{\nu} h_c{}^{\eta} h_d{}^{\lambda} \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d$$

$$= \frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d$$

Por lo tanto

$$\underset{\sim}{\gamma_5} = \gamma_5 \qquad (3.45)$$

A continuación, examinaremos que restricciones impone sobre la función de onda, el hecho de que satisfaga la condición adicional (3.41)

$$(1 + i\gamma_5)\psi = 0$$

$$\gamma_5 = \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \gamma^{(3)} \qquad (3.46)$$

usando (3.38) y (3.39) tenemos que

$$\gamma_5 = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.47) \qquad \text{donde} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así

$$(1 + i\gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.48)$$

donde

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

de (3.48) se obtiene que $\quad \eta_1 - \eta_2 = 0$
es decir

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta \qquad (3.49)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (3.50)$$

donde η es un espinor de dos componentes.

IV ECUACION DE DIRAC UNIVERSO DE GÖDEL

La ecuación de Dirac generalmente covariante es

$$\left(\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} + m \right) \psi = 0 \qquad (1.7)$$

explícitamente

$$\left(\gamma^{t} \nabla_{t} + \gamma^{r} \nabla_{r} + \gamma^{\theta} \nabla_{\theta} + \gamma^{z} \nabla_{z} + m \right) \psi = 0 \qquad (4.1)$$

utilizando las expresiones (3.31-34) Para las matrices de Dirac, así como las (3.40) para las derivadas covariantes, la ecuación de Dirac queda

$$\Big[\left(\gamma^{(0)} - \sqrt{2}\, \gamma^{(2)} \right) \partial_{t} + \gamma^{(1)} \partial_{r} + \sqrt{2}\, e^{-ar} \gamma^{(2)} \partial_{\theta} + \gamma^{(3)} \partial_{z} + \\ - \frac{\sqrt{2}}{4} a \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} + \frac{1}{2} a \gamma^{(3)} + m \Big] \psi = 0 \qquad (4.2)$$

Se tratará el caso del neutrino (m=0). Incorporando (3.39) en (4.2) así como la condición m=0 tenemos

$$\left[i \begin{pmatrix} -I & -\sqrt{2}\sigma^{2} \\ \sqrt{2}\sigma^{2} & I \end{pmatrix} \partial_{t} + i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^{1} \\ \sigma^{1} & 0 \end{pmatrix} \partial_{r} + i \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}\sigma^{2} \\ \sqrt{2}\sigma^{2} & 0 \end{pmatrix} e^{-ar} \partial_{\theta} + \\ + i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^{3} \\ \sigma^{3} & 0 \end{pmatrix} \partial_{z} + \frac{\sqrt{2}a}{4} \begin{pmatrix} \sigma^{3} & 0 \\ 0 & -\sigma^{3} \end{pmatrix} + \frac{i}{2} a \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^{1} \\ \sigma^{1} & 0 \end{pmatrix} \right] \psi = 0 \qquad (4.3)$$

o bien, sustituyendo (3.50)

$$\left. \begin{matrix} -i I \partial_{t} + \frac{\sqrt{2}}{4} a \sigma^{3} & \vdots & -i\sqrt{2}\sigma^{2}\partial_{t} - i\sigma^{1}\partial_{r} - i\sqrt{2}\sigma^{2} e^{-ar}\partial_{\theta} - i\sigma^{3}\partial_{z} - \frac{ia}{2}\sigma^{1} \\ i\sqrt{2}\sigma^{2}\partial_{t} + i\sigma^{1}\partial_{r} + i\sqrt{2}\sigma^{2} e^{-ar}\partial_{\theta} + i\sigma^{3}\partial_{z} + \frac{ia}{2}\sigma^{1} & \vdots & i I \partial_{t} - \frac{\sqrt{2}}{4} a \sigma^{3} \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} =$$

(4.4)

De donde se obtiene la ecuación

$$\left[i\left(I+\sqrt{2}\sigma^{2}\right)\partial_{t} + i\sigma^{1}\partial_{r} + i\sqrt{2}\sigma^{2}e^{-ar}\partial_{\theta} + i\sigma^{3}\partial_{z} + \frac{a}{2}\left(i\sigma^{1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma^{3}\right)\right]\eta = 0 \qquad (4.5)$$

dos veces.

Proponemos una solución de la forma

$$\eta(t,r,\theta,z) = e^{-ia(\omega t + l\theta + kz)}\varphi(r) \qquad (4.6)$$

sustituyendola en la ecuación tenemos que ésta se reduce a

$$\left[a\omega\left(I+\sqrt{2}\sigma^{2}\right) + i\sigma^{1}\partial_{r} + al\sqrt{2}\sigma^{2}e^{-ar} + \sigma^{3}ak + \frac{a}{2}\left(i\sigma^{1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma^{3}\right)\right]\varphi = 0 \qquad (4.7)$$

haciendo $\varphi(r) = \begin{pmatrix}\eta_{1}(r)\\ \eta_{2}(r)\end{pmatrix}$ y sustituyendo las expresiones (3.38) de las matrices de Pauli, nuestra ecuación se transforma en dos ecuaciones, que son

$$\left(\partial_{r} - \sqrt{2}al\,e^{-ar} - \sqrt{2}a\omega + a/2\right)\eta_{2}(r) = ia\left(\omega + k - \sqrt{2}/4\right)\eta_{1}(r) \qquad (4.8)$$

$$\left(\partial_{r} + \sqrt{2}al\,e^{-ar} + \sqrt{2}a\omega + a/2\right)\eta_{1}(r) = ia\left(\omega - k + \sqrt{2}/4\right)\eta_{2}(r) \qquad (4.9)$$

de (4.8) $\eta_{1}(r) = \dfrac{1}{ia(\omega + k - \sqrt{2}/4)}\left(\partial_{r} - \sqrt{2}al\,e^{-ar} - \sqrt{2}a\omega + a/2\right)\eta_{2}(r)$

sustituyendo en (4.9) y rearreglando se obtiene la ecuación

$$\left[\partial^{2}_{rr} + a\partial_{r} - 2a^{2}l^{2}e^{-2ar} + (\sqrt{2} - 4\omega)a^{2}l\,e^{-ar} + a^{2}\left(\frac{1}{8} - \omega^{2} - k^{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)\right]\eta_{2}(r) = 0 \qquad (4.10)$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = e^{-ar}$$

$$\eta_{2}(r) \equiv G\left(e^{-ar}\right) \equiv G(x) \qquad (4.11)$$

la ecuación (4.10) queda como

$$\left\{ \partial^2_{xx} + \left[-2\ell^2 + (\sqrt{2}-4\omega)\ell \frac{1}{x} - \lambda^2 \frac{1}{x^2} \right] \right\} G(x) = 0 \qquad (4.12)$$

en donde

$$\lambda^2 = \omega^2 + k^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} k - \frac{1}{8} \qquad (4.13)$$

Para resolver esta ecuación, examinemos los casos asintóticos.

i) $(r \rightarrow \infty)$ $x \rightarrow \infty$

$$G'' - 2\ell^2 G = 0 \qquad \text{entonces} \qquad G \sim e^{\pm\sqrt{2}\ell x}$$

como queremos que la solución decaiga a cero en el infinito, escogemos $G \sim e^{-\sqrt{2}\ell x}$

ii) $(r \rightarrow -\infty)$ $x \rightarrow 0$.

$$G'' - \frac{\lambda^2}{x^2} G = 0 \qquad \text{entonces} \qquad G \sim x^{\alpha+1}$$

en donde $\alpha(\alpha+1) = \lambda^2$ de manera que (4.14)

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4\lambda^2}\right) \qquad (4.15)$$

La solución será oscilatoria cuando

$$-2\ell^2 + \frac{(\sqrt{2}-4\omega)\ell}{x} - \frac{\lambda^2}{x^2} > 0 \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \lambda^2 > 0 \\ \omega < 0 \end{matrix} \qquad (4.16)$$

es decir, para valores de x en el rango

$$\frac{\sqrt{2}-4\omega}{4\ell} - \frac{1}{4\ell}\sqrt{2+8(2\omega^2-\lambda^2)} < x < \frac{\sqrt{2}-4\omega}{4\ell} + \frac{1}{4\ell}\sqrt{2+8(2\omega^2-\lambda^2)} \qquad (4.17)$$

la solución será oscilatoria.

Puesto que x es real

$$0 < \lambda^2 \leq 2\omega^2 + \frac{1}{4} \qquad (4.18)$$

lo cual implica que

$$k\left(k-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq \omega^2 + \frac{3}{8} \qquad (4.19)$$

Definiendo una nueva variable

$$v = s x \qquad \text{con } s \qquad (4.20)$$

un parámetro a determinar, la ecuación de Dirac (4.12) se -- transforma a

$$\left[\partial^2_{vv} + \left(-\frac{2\ell^2}{s^2} + \frac{(\sqrt{2}-4\omega)\ell}{s v} - \frac{\lambda^2}{v^2}\right)\right] Z(v) = 0 \qquad (4.21)$$

donde $Z(v) \equiv G(v/s) = G(x)$

Esta ecuación se puede convertir a la ecuación con---- fluente hipergeométrica. Hagamos

$$Z(v) = \left(\frac{v}{s}\right)^{\alpha+1} e^{-\gamma \ell v/s} f(v) \qquad (4.22)$$

donde α está determinada por (4.14). Así f satisface la e- cuación confluente hipergeométrica

$$v f'' + \left[2(\alpha+1) - v\right] f' - \left[\alpha + 1/2 + \sqrt{2}\omega\right] f = 0 \qquad (4.23)$$

si

$$\gamma = \sqrt{2} \quad ; \quad s = 2\gamma\ell = \sqrt{8}\,\ell \qquad (4.24)$$

Las dos soluciones independientes son

$$\begin{aligned} &{}_1F_1(\alpha + 1/2 + \sqrt{2}\omega, 2\alpha+2, v) \\ &v^{-2\alpha-1}\, {}_1F_1(-\alpha - 1/2 + \sqrt{2}\omega, -2\alpha, v) \end{aligned} \qquad (4.25)$$

La combinación lineal de estas soluciones, que satisfa ce las condiciones a la frontera usuales, esto es, que $Z(v) \to 0$ cuando $r \to \pm\infty$, es la función de Kummer. Dicha combinación li neal es

$$U(\alpha+1/2+\sqrt{2}\omega, 2\alpha+2, v) = \frac{\Gamma(-2\alpha-1)}{\Gamma(-\alpha-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\omega)} \; {}_1F_1(\alpha+1/2+\sqrt{2}\omega, 2\alpha+2, v) +$$

$$+\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2+\sqrt{2}\omega)} \; v^{-2\alpha-1} \; {}_1F_1(-\alpha-1/2+\sqrt{2}\omega, -2\alpha, v) \qquad (4.26)$$

con α negativa.

Por lo tanto, la solución es

$$Z(v) = \left(\frac{v}{\sqrt{2}\,\ell}\right)^{\alpha+1} e^{-v/2}\, U(\alpha+1/2+\sqrt{2}\omega, 2\alpha+2, v) \qquad (4.27)$$

Examinando el comportamiento asintótico

$$Z(v\to 0) \sim v^{-\alpha}\, e^{-v/2} \longrightarrow 0 \qquad (4.28)$$

$$Z(v\to\infty) \sim v^{\frac{1}{2}-\sqrt{2}\omega}\, e^{-v/2} \longrightarrow 0 \qquad (4.29)$$

de manera que se satisfacen las condiciones a la frontera

Es interesante comparar estos resultados con las geodésicas nulas en el universo de Gödel puesto que el neutrino se propaga a lo largo de geodésicas nulas. Notemos la existencia de tres vectores de Killing $\partial_t, \partial_\theta, \partial_z$. Si u^μ es un vector tangente a la geodésica nula, entonces sus componentes covariantes a lo largo de una geodésica nula fija tienen un valor constante. Haciendo

$$u_t = -P_0 \;;\; u_\theta = -P_2 \;;\; u_z = P_3 \qquad (4.30)$$

y debido a que $u^\mu u_\mu = 0$ obtenemos una ecuación para la componente restante $u^r = u^1$, entonces

$$u^1 u_1 = 4P_0P_2\, e^{-ar} - P_0^2 - P_3^2 - 2e^{-2ar}P_2^2$$

o bien en términos de x

$$u^1 u_1 = 4P_0P_2\, x - P_0^2 - P_3^2 - 2P_2^2 x^2 \qquad (4.31)$$

una solución real es posible solamente si

$$4P_0P_2x - P_0^2 - P_3^2 - 2P_2^2x^2 > 0 \qquad (4.32)$$

Es interesante notar la similitud entre esta ecuación (4.32) y (4.16) si en esta última ecuación hacemos $\omega = P_0$, $l = P_2$, $k = P_3$. La diferencia está en los terminos $\sqrt{2}\,l$ y $-\frac{\sqrt{2}}{2}k - \frac{1}{8}$ ausentes en (4.32), esto se puede atribuir al hecho de que el primer cálculo es más preciso que este último, el cual es precisamente una - aproximación óptica.

Sin embargo, en el límite de altas frecuencias (w -- grande) los resultados son idénticos.

Por último, calculemos la otra solución. Sabemos de -- (4.8) que

$$Z_1(r) = \frac{1}{ia(\omega + k - \sqrt{2}/4)} \left(\partial_r - \sqrt{2}\,a\,l\,e^{-ar} - \sqrt{2}\,a\,\omega + a/2\right) Z_2(r)$$

ó bien, en términos de x, con $Z_1(r) = Z_1(e^{-ar}) = G(x)$.

$$G(x) = \frac{1}{i(\omega + k - \sqrt{2}/4)} \left(-x\partial_x - \sqrt{2}\,l\,x - \sqrt{2}\,\omega + 1/2\right) G(x)$$

en términos de v con $s = \sqrt{8}\,l$, $G(xs) \equiv Z(v)$

$$Z(v) = \frac{i}{\omega + k - \sqrt{2}/4} \left(v\partial_v + \frac{1}{2}v + \sqrt{2}\,\omega - 1/2\right) Z(v)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior (4.27) y el hecho de que

$$U'(a,b,z) = -a\,U(a+1,b+1,z)$$

tenemos que

$$Z(v) = \frac{i}{(\omega + k - \sqrt{2}/4)} \left(\frac{v}{\sqrt{8}\,l}\right)^{\alpha+1} e^{-v/2} \left(\alpha + 1/2 + \sqrt{2}\,\omega\right) \Big[U(\alpha + 1/2 + \sqrt{2}\,\omega, 2\alpha + 2, v) - v\,U(\alpha + 3/2 + \sqrt{2}\,\omega, 2\alpha + 3, v) \Big] \qquad (4.34)$$

la cual cumple también con las condiciones a la frontera.

REFERENCIAS

1.- T. Chapman, D. Leiter
American Journal of Physics 44 , 9, 858-862 (19)

2.- J. Cohen, C. V. Vishueshwara, S. V. Dhurandhar
J. Phys A: Math. Gen. 13, 933-938 (1980)

3.- B. R. Iyer
Physical Review D 26, 8, 1900-1905 (1982)

4.- J. Pfarr
General Relativity and Gravitation 13, 11, 1073-1091
(1981)