

**Algunos Problemas Relacionados con
las
Teorías de Chern-Simons**

Tesis que presenta:

Alejandro Noé Morales Duarte

Como Parte de los Requerimientos para Obtener el Grado de



Doctor en Ciencias

en la

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

CBI

(Mayo 2000)

Índice General

1	Teorías de Chern-Simons	225994	7
1.1	Introducción		7
1.2	Clases de Chern		9
1.3	Conclusiones		15
2	Teorema de Cayley-Hamilton para Supermatrices		16
2.1	Introducción		16
2.2	Polinomios característico y nulos para supermatrices.		19
2.3	El teorema de Cayley-Hamilton para supermatrices.		24
2.4	Casos particulares y ejemplos.		28
2.4.1	Los polinomios $a(x)$ y $d(x)$ son primos relativos.		29
2.4.2	Supermatrices $(1 + 1) \times (1 + 1)$		30
2.4.3	Supermatrices en $Osp(1 2; C)$		31
2.4.4	Los polinomios a y d no son primos relativos y no tienen factores comunes.		33
2.4.5	Los polinomios a y d no son primos relativos y tienen un factor común.		34
2.5	El polinomio $k(x)$ es primo relativo con $a_1(x)$ y $d_1(x)$		35
2.6	El polinomio $k(x)$ no es primo relativo con a_1 y/o $d_1(x)$		37
2.7	Conclusiones		42

3	El Ideal Anulador de una Supermatriz Diagonal Nilpotente	43
3.1	Introducción	43
3.2	El ideal anulador	44
3.3	Ejemplos	57
3.4	Conclusiones	61
4	Modelos Basados en la Acción de Chern-Simons 5-dimensional	63
4.1	Introducción	63
4.2	Acción de Chern-Simons en 4+1 dimensiones	64
4.3	Reducción tipo Kaluza-Klein de la Acción de CS	66
4.3.1	Campo escalar constante ($\phi = 1$) y espacio plano ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) . . .	69
4.4	Cosmología a partir de la acción de CS 5 dimensional	71
4.5	Ecuaciones de Campo	72
4.5.1	Soluciones exactas	75
4.6	Conclusiones	80
5	Conclusiones	81
A	Curvatura y Derivada Covariante Exterior	85
A.1	Haz vectorial	85
A.1.1	Derivada Covariante	86
A.1.2	Potencial A	87
A.2	Curvatura F	90
A.3	Derivada Covariante Exterior	92
A.4	Traza de Formas	95
A.5	Clases de Cohomología	96
B	Factorización Polinomial sobre Algebras de Grassmann	99
C	Identidades Polinomiales	101

INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS - BIPRODUCTOS

Prefacio

Recientemente, se han encontrado cada vez con más frecuencia situaciones en las cuales los términos topológicos en las Lagrangianas juegan roles importantes. Ejemplos de estas situaciones surgen en el estudio de partículas espinoriales o escalares cargadas que interactúan a través de un campo de norma de Chern-Simons (CS). Algunas soluciones de vórtice importantes en la discusión de superconductividad, provienen también de términos de CS acoplados a campos de materia. En el estudio de la gravedad en dimensiones impares, las anomalías y las teorías de campo conforme también involucran términos topológicos de CS. En el capítulo 1 damos una introducción a las teorías de CS.

Los teorías de CS tienen rasgos característicos importantes: son de naturaleza topológica y los grados de libertad fundamentales son las trazas de los elementos del grupo construídos como las holonomías (o líneas de Wilson) de la conexión alrededor de curvas orientadas en la variedad. Además en $2 + 1$ dimensiones son exactamente solubles y poseen un número finito de grados de libertad.

En general, los grados de libertad fundamentales pueden ser determinados a través de las identidades de Mandelstam [1], en particular en el caso del supergrupo $Osp(1 | 2; C)$, estos pueden ser determinados a partir de las identidades de Cayley-Hamilton asociados a las supermatrices involucradas [24].

En el capítulo 2 desarrollamos un método para determinar el polinomio característico

asociado a supermatrices M , $(p + q) \times (p + q)$ en bloques de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde A, B, C y D son matrices $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, $q \times q$ respectivamente. El rasgo distintivo respecto a las matrices ordinarias es que los elementos de matriz M_{RS} , $R = (i, \alpha)$, $S = (j, \beta)$ son elementos en un álgebra de Grassmann con la propiedad de que A_{ij} ($i, j = 1, \dots, p$) y $D_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, q$) son elementos pares (conmutativos), mientras $B_{i\alpha}$ y $C_{\beta j}$ son elementos impares del álgebra (no conmutativos).

En la sección 2.2 proponemos una definición para el polinomio característico de una supermatriz y mostramos que cada supermatriz satisface su ecuación característica. Además, en algunos casos somos capaces de construir polinomios de grado menor que son anulados por la supermatriz. La existencia de estos polinomios de grado menor, motivó que consideráramos el problema de determinar el conjunto de polinomios que anulan a una supermatriz, es decir, determinar el ideal anulador de una supermatriz. Con este fin, discutimos como una primera aproximación el problema de determinar el ideal anulador de una supermatriz diagonal nilpotente en el capítulo 3.

Por otra parte, en el capítulo 4 discutimos las consecuencias 4 dimensionales de la acción 5 dimensional de CS, que resulta de la 5-forma de CS del grupo $SO(1, 5)$ o $SO(2, 4)$ obtenida por Chamseddine [3]. En la sección 4.3 usamos el ansatz de Kaluza-Klein para obtener una teoría 4 dimensional de la interacción de la gravedad con el campo electromagnético más un campo escalar.

Partiendo de la acción de CS 5-dimensional, en la sección 4.4 estudiamos las predicciones cosmológicas en 4-dimensiones para un modelo de Friedmann-Robertson-Walker del universo.

El capítulo 5 contiene las conclusiones alcanzadas en la presente tesis y algunos de los problemas que han quedado pendientes y cómo podrían ser resueltos.

Las contribuciones originales de la tesis están contenidos en los capítulos 2 y 3 en

relación a las identidades de Cayley-Hamilton para supermatrices, y los resultados 4-dimensionales a partir de un CS 5 dimensional en el capítulo 4. Como artículos de investigación estos trabajos aparecen reportados en [27],[37],[38],[39].

Capítulo 1

Teorías de Chern-Simons

Resumen

Mostramos que la acción de Chern-Simons puede obtenerse a partir de la generalización de la acción de Yang-Mills al suprimir el operador de Hodge, lo cual nos permite construir las clases cohomología de las formas de Chern. Se presentan ejemplos que ilustran el método para la obtención de las formas de Chern-Simons, a partir de la independencia en las variaciones del potencial vectorial de las formas de Chern. El análisis lo hacemos en el lenguaje de formas diferenciales. En el apéndice A reunimos las definiciones y teoremas necesarios para la comprensión de la presente discusión.

1.1 Introducción

Las teorías de Chern-Simons (CS) han tenido muy diversas aplicaciones, entre las que están aquellas relacionadas con: la gravedad en $2 + 1$ dimensiones, que resultan ser equivalentes a una teoría de CS [2], las teorías de campo conforme [4], y las anomalías [5] entre otras.

La aparición de las teorías de CS surge al ser construida la supergravedad en 11 dimensiones ($D = 11$). Aparece como un término extraño, independiente de la métrica

(topológico), pero inevitable en la consistencia de la teoría, para garantizar la conservación de la supersimetría local.

Los términos de CS fueron rápidamente considerados en modelos de dimensiones menores ($4 < D < 11$) [6],[8]. Poco después, y sin conexión aparente con lo anterior, la posibilidad e interés de introducir la 3-forma de CS en un espacio tiempo de dimensión $D = 3$ fue sugerida por varios autores [7],[10], con la esperanza de obtener algunas consecuencias observables en materia condensada, así como en los límites de altas temperaturas de nuestro mundo 4-dimensional.

En su forma no-abeliana, donde el potencial A es una 1-forma valuada en el álgebra de Lie, el término de CS tiene la notable propiedad de que su coeficiente numérico debe ser cuantizado para que la teoría cuántica esté bien definida [10], y reveló como deberían ser restringirse algunos parámetros, *a priori* arbitrarios.

Por otra parte, desarrollos recientes [8] (formulación de Ashtekar [9]) sugieren que la gravedad podría estar más cercana a las teorías de norma del modelo estándar de lo que anteriormente se había pensado. De modo muy general, esta relación parece involucrar el estudio de nudos en el espacio tridimensional, teoría cuántica de campo, relatividad general, geometría, topología y álgebra.

Nuestras teorías actuales de electromagnetismo, fuerzas fuerte y débil, son todas teorías de norma. Estas tres fuerzas están descritas por una clase de teoría de norma, que ha resultado de la generalización de las ecuaciones de Maxwell, llamada la teoría de Yang-Mills que a su vez sirve de modelo para desarrollar las teorías de CS.

De esta manera, las interacciones físicas pueden describirse por teorías de norma, las cuales a su vez están determinadas por el grupo de norma (grupo de Lie), que contiene a las partículas en alguna representación. Así, diferentes grupos de Lie, dan diferentes ecuaciones, que describen las diferentes fuerzas en el modelo estándar. El grupo, es llamado el *grupo de simetría o grupo de norma* de la fuerza en cuestión.

En este esquema, el electromagnetismo tiene a $U(1)$ como su grupo de norma; en otras palabras, las ecuaciones de Yang-Mills con grupo de norma $U(1)$, son las ecuaciones de

Maxwell.

1.2 Clases de Chern

La densidad Lagrangiana $L_{YM} = 1/2 \operatorname{tr} (F \wedge *F)$, (donde $F = dA + A \wedge A$ y A representa el potencial vectorial, y es una matriz que vive en el álgebra de Lie) es invariante de norma ante transformaciones locales infinitesimales

$$\begin{aligned}\delta A &= d_D \Lambda(x) \Rightarrow \\ \delta F &= d_D \delta A,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde la naturaleza local de la transformación está determinada por la función continua $\Lambda(x)$, y d_D representa la derivada covariante exterior, y está dada por (para los detalles relacionados con la derivada covariante exterior ver apéndice A)

$$\begin{aligned}d_D \Lambda &= d\Lambda + [A, \Lambda] \\ d_D \delta A &= d\delta A + [A, \delta A]\end{aligned}\tag{1.2}$$

Al eliminar el operador de Hodge en la densidad lagrangiana de Yang-Mills, obtenemos el funcional

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_M \operatorname{tr}(F \wedge F).\tag{1.3}$$

En el caso general de dimensiones pares arbitrarias ($\dim M = 2n$), la ecuación (1.3), la podemos escribir en la siguiente forma:

$$S(A) = \frac{1}{m} \int_M \operatorname{tr}(F^n),\tag{1.4}$$

donde el integrando representa la n -ésima forma de Chern $\operatorname{tr}(F^n)$, la cual es la traza del

producto $tr(\underbrace{F \wedge \dots \wedge F}_{n \text{ factores}})$.

Uno de las características de (1.4) es que da ecuaciones triviales, es decir, cada potencial vectorial es un extremo de esta acción, cuando consideramos variedades simplemente conexas (que es el único caso que discutimos aquí). Podemos ver esto calculando δS , a partir de la ecuación (1.4) (ver apéndice A)

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int_M tr(F^n), \\
 &= n \int_M tr(\delta F \wedge F^{n-1}), \\
 &= n \int_M tr(d_D \delta A \wedge F^{n-1}), \\
 &= n \int_M tr(\delta A \wedge d_D F^{n-1}),
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde d_D representa la derivada covariante exterior.

Usando la identidad de Bianchi ($d_D F = 0$) y la ley de Leibniz resulta

$$\begin{aligned}
 d_D F^{n-1} &= d_D F \wedge F^{n-2} + F \wedge d_D F \wedge F^{n-3} + \dots \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

así que $\delta S = 0$ para toda A .

Existe más información invariante en las formas de Chern, que en (1.4). Para ver esto, observemos que las formas de Chern son cerradas:

$$\begin{aligned}
 dtr(F^k) &= tr(d_D F^k) \\
 &= tr(d_D F \wedge F^{k-1} + F \wedge d_D F \wedge F^{k-2} + \dots) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde hemos usado $tr(d_D \omega) = d tr(\omega)$ y la identidad de Bianchi.

Esto significa que la k –ésima forma de Chern define una clase de cohomología, es decir el conjunto

$$[tr(F^k)] = \{tr(F'^k) \mid \exists \mu \ tr(F'^k) - tr(F^k) = d\mu\}. \quad (1.8)$$

La forma de Chern depende de la conexión A , pero no su clase de cohomología, esto es, si cambiamos el potencial A , la forma de Chern cambia por una forma exacta (ver apéndice A).

Para ver que esto sucede, calculemos $\delta tr(F^k)$

$$\begin{aligned} \delta tr(F^k) &= tr(\delta F^k) \\ &= tr(\delta F \wedge F^{k-1} + F \wedge \delta F \wedge F^{k-2} + \dots + F^{k-1} \wedge \delta F) \\ &= k \ tr(\delta F \wedge F^{k-1}) \\ &= k \ tr(d_D \delta A \wedge F^{k-1}) \\ &= k \ tr(d_D(\delta A \wedge F^{k-1})) \\ &= k \ d \ tr(\delta A \wedge F^{k-1}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde hemos usado la propiedad cíclica de la traza y la identidad de Bianchi.

A continuación consideramos otra alternativa para probar este mismo resultado, que tiene la ventaja adicional de proporcionar un método simple para el cálculo de las formas de CS. Una discusión general sobre el cálculo de las formas de CS puede ser consultada en [12].

Para esto consideraremos dos k -formas de Chern $tr(F'^k)$ y $tr(F^k)$, con potenciales A' y A respectivamente, donde definimos

$$\delta A = A' - A. \quad (1.10)$$

Usaremos además el potencial

$$A_\epsilon = A + \epsilon \delta A, \quad (1.11)$$

para interpolar continuamente entre A' y A (donde $\epsilon \in [0, 1]$).

Si llamamos F_ϵ a la curvatura correspondiente al potencial A_ϵ , podemos escribir la diferencia de las dos k -formas de Chern como

$$tr(F'^k) - tr(F^k) = tr(F_\epsilon^k) \Big|_0^1 = tr(F_1^k) - tr(F_0^k), \quad (1.12)$$

esto es equivalente a

$$\begin{aligned} tr(F'^k) - tr(F^k) &= \int_0^1 \frac{d}{d\epsilon} tr(F_\epsilon^k) d\epsilon \\ &= k \int_0^1 d tr(\delta A \wedge F_\epsilon^{k-1}) d\epsilon \\ &= k d \left(\int_0^1 tr(\delta A \wedge F_\epsilon^{k-1}) d\epsilon \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

la cual es una forma exacta, como queríamos mostrar, para una discusión más amplia ver [12].

Las *formas de Chern-Simons* provienen precisamente del resultado anterior (1.13), y se definen como las $k-1$ formas cuya derivada covariante exterior es igual a la k -ésima forma de Chern

$$d((CS)_{k-1}) = tr(F^k). \quad (1.14)$$

Como ejemplo consideramos el caso especial de $tr(F^2)$. Sabemos ahora, que el cambio del potencial vectorial A , simplemente cambia $tr(F^2)$ por una forma exacta, esto nos permite obtener una 3-forma explícita, cuya derivada es precisamente $tr(F^2)$. Con este objeto, y siguiendo las ideas que llevan a (1.13), escogemos el potencial $A_\epsilon = \epsilon A$. En este

caso la curvatura correspondiente a A_ϵ está dada por

$$F_\epsilon = \epsilon dA + \epsilon^2 A \wedge A. \quad (1.15)$$

Repitiendo los pasos de la demostración anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(F \wedge F) &= \int_0^1 \frac{d}{d\epsilon} \text{tr}(F_\epsilon \wedge F_\epsilon) d\epsilon \\ &= 2 \int_0^1 \text{tr}\left(\frac{dF_\epsilon}{d\epsilon} \wedge F_\epsilon\right) d\epsilon \\ &= 2d \int_0^1 \text{tr}(A \wedge F_\epsilon) d\epsilon \\ &= 2d \int_0^1 \text{tr}(\epsilon A \wedge dA + \epsilon^2 A \wedge A \wedge A) d\epsilon \\ &= d \text{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right), \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde la 3-forma

$$\text{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right), \quad (1.17)$$

se le llama la *3-forma de CS*.

Análogamente se puede mostrar que la forma de CS correspondiente a la 3-forma de Chern ($\text{tr}(F^3)$) está dada por

$$\text{tr}\left(A \wedge (dA)^2 + \frac{3}{2} A^3 \wedge dA + \frac{3}{5} A^5\right), \quad (1.18)$$

existe una fórmula general para el cálculo de las forma de CS que puede consultarse en [12].

Un hecho importante en relación con las formas de CS que las hace candidatos interesantes como Lagrangianas en teorías de campo, es su invariancia bajo los difeomorfismos que preservan la orientación, y que es *casi* invariante de norma, es decir, no es invariante

bajo cualquier transformación de norma, sino sólo bajo aquellas transformaciones de norma conectadas con la identidad (familias de transformaciones de norma que dependen suavemente de 1-parámetro s tal que $\{g_s, s \in [0, 1]\}$) y cumplen $g_0 = 1$ y $g_1 = g$).

El caso más simple corresponde a $2 + 1$ dimensiones en variedades simplemente conexas sin fuentes. Clásicamente esta teoría no resulta muy interesante, debido a que las ecuaciones de Euler-Lagrange $\delta S_{CS} = 0$, nos dicen simplemente que A debe ser plana (es decir con curvatura $F = 0$). Sin embargo, la versión cuántica resulta mucho más interesante al relacionarla con los invariantes de lazo. Esta relación fue discutida por primera vez por Witten [4], y dió lugar a una gran cantidad de trabajos relacionando la teoría cuántica de campo y la topología en 3 dimensiones.

Las teorías de CS también han resultado importantes en el estudio de los aniones, estos resultan de acoplar corrientes de materia $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ a campos de norma de CS. En este caso el efecto del campo de CS es mantener unidos el flujo magnético y la carga eléctrica independientemente de la dinámica de ésta. Esto se aplica a dinámicas relativistas o no-relativistas para los campos de materia. La unión del flujo a las cargas proporciona una realización explícita de los aniones [14],[15].

Una consecuencia importante del acoplamiento *carga-flujo* es que conduce a una interacción tipo Aharonov-Bohm. Por ejemplo, cuando una partícula se mueve adiabáticamente alrededor de otra, en adición a las interacciones eléctricas entre ellas, a nivel cuántico la función de onda no-relativista, adquiere una fase de Aharonov-Bohm dada por

$$\exp\left(ie \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x}\right) = \exp\left(\frac{ie^2}{\kappa}\right). \quad (1.19)$$

Si esta interacción se interpreta como un intercambio doble de dos partículas idénticas, se produce un cambio de fase *aniónico* dado por $2\pi\Delta\theta = e^2/(2\kappa)$, el cual puede tomar cualquier valor especificando por el coeficiente de acoplamiento de CS (κ). Este es el origen de la estadística aniónica en el lenguaje de partículas puntuales.

Por otra parte, los modelos de CS adquieren dinámica vía acoplamientos con otros campos. En particular las soluciones de vórtice provienen del acoplamiento de CS con

campos escalares que tienen una dinámica relativista o no relativista. Estas soluciones de vórtice son similares a los modelos Abelianos de Higgs y a las que surgen en las teorías de Landau-Ginzburg[16],[17].

1.3 Conclusiones

Hemos mostrado que la eliminación del operador de Hodge en la acción de Yang-Mills lleva a la acción de Chern-Simons $S_{CS}(A)$ para el potencial vectorial $A \in \text{End}(E)$. De esta manera la teoría de CS es una teoría de norma definida para haces vectoriales triviales.

El lenguaje usado de formas diferenciales tiene varias ventajas; por una parte nos permite hacer uso de este formalismo no sólo localmente sino globalmente, además de las múltiples aplicaciones del mismo en gravitación, teorías de CS y gravedad cuántica.

Capítulo 2

Teorema de Cayley-Hamilton para Supermatrices

Resumen

A partir de la expresión para el superdeterminante de una matriz proponemos una definición para el polinomio característico y mostramos que cada supermatriz satisface su ecuación característica (teorema de Cayley-Hamilton). En algunos casos somos capaces de construir polinomios de grado menor los cuales mostramos que son anulados por la supermatriz.

2.1 Introducción

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que la matriz $M_{n \times n}$ es raíz de su polinomio característico $p(x) = \det(xI - M)$, es decir, si sustituimos en $p(x)$ la variable x por la matriz M e identificamos a $x^0 \equiv I$ obtenemos como resultado la matriz cero $p(M) = 0$, donde I representa la matriz identidad y x es una variable compleja.

En general $p(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ es un polinomio mónico (coeficiente de la potencia mayor igual a 1) de grado n .

Nuestro interés, es mostrar que existe una versión equivalente de este teorema cuando M es una supermatriz definida sobre un álgebra de Grassmann.

El teorema de Cayley-Hamilton es un teorema poderoso, en el sentido de que produce n^2 identidades nulas entre los elementos de la matriz. Los coeficientes c_k ($k \neq 0$) pueden ser escritos en términos de las trazas $Tr(M), Tr(M^2), \dots, Tr(M^{n-1})$, sus potencias y $c_0 = det(M)$.

Recientemente este teorema ha encontrado aplicaciones interesantes en las teorías de Chern-Simons (CS) en 2+1 dimensiones [19], esencialmente en su relación con las teorías de campo conforme [20], con los invariantes de lazo y con los grupos cuánticos. Las teorías de Chern-Simons son de naturaleza topológica y los grados de libertad fundamentales son las trazas de los elementos del grupo construídos como las holonomías (o líneas de Wilson, o conexiones integradas) de la conexión alrededor de curvas orientadas en la variedad. El conjunto de estas variables es sobrecompleto en virtud de que, para cada grupo existe un conjunto de relaciones entre ellas: las así llamadas identidades de Mandelstam.

Los observables son los valores de expectación de las líneas de Wilson [2]. Además, las teorías de Chern-Simons poseen un número finito de grados de libertad. Otro aspecto de interés es la reducción del espacio fase (inicialmente de dimensión infinita) al subespacio de los verdaderos grados de libertad.

El teorema de Cayley-Hamilton ha jugado un papel importante en la construcción de las llamadas *skein relations* (relaciones de trenza), las cuales son relevantes en el cálculo de los valores de expectación [21], y también en el proceso de reducción del espacio fase.

El ejemplo más simple que ilustra el último punto anterior surge en la discusión del espacio de fase reducido en un sector de la gravedad anti-de Sitter en 2+1 dimensiones, la cual es equivalente a la teoría de Chern-Simons del grupo $SO(2, 2)$ [2]. Esta teoría es descrita más fácilmente en términos de dos copias de los grupos $SL(2, R)$, el cuál es el grupo espinorial de $SO(2, 2)$. Los grados de libertad invariantes de norma asociados a un genus arbitrario de una superficie bidimensional, resultan ser las trazas de cualquier producto de potencias de dos matrices en $SL(2, R)$, M_1 y M_2 , las cuales corresponden a

las holonomías de dos trayectorias homotópicamente distintas de un genus. Sin embargo uno debería ser capaz de reducir este conjunto infinito de trazas a un conjunto finito de grados de libertad. Es precisamente en este punto donde el teorema Cayley-Hamilton es útil. En el caso de $SL(2, R)$ tenemos la identidad de Cayley-Hamilton $M_1^2 - Tr(M_1) M_1 + 1 = 0$. Multiplicando esta ecuación por $M_2 M_1^{-1}$ y tomando la traza obtenemos la siguiente relación entre las trazas

$$Tr(M_2 M_1^{-1}) + Tr(M_1 M_2) = Tr(M_1) Tr(M_2), \quad (2.1)$$

que es una de las identidades de Mandelstam para $SL(2, R)$.

Usando la ecuación (2.1) es posible mostrar que el grado de libertad general

$$Tr(M_1^{p_1} M_2^{q_1} M_1^{p_2} M_2^{q_2} \dots M_1^{p_n} M_2^{q_n} \dots), \quad (2.2)$$

para cualquier $p_i, q_i \in Z$, es reducible y puede ser expresado como una función de tres trazas solamente: $Tr(M_1)$, $Tr(M_2)$ y $Tr(M_1 M_2)$ [22]. Una reducción similar puede llevarse a cabo en el caso de supergravedad 2+1 de Sitter, la cual es una teoría de Chern-Simons del supergrupo $Osp(2 | 1, C)$ [23].

La novedad aquí es que uno está tratando con supermatrices en vez de matrices ordinarias. En el caso particular considerado, se obtuvo una identidad de Cayley-Hamilton en forma heurística, y una relación análoga a (2.1) para las supertrazas. Esto permitió llevar a cabo la reducción de un espacio fase de dimensión infinita, esta vez en términos de cinco supertrazas complejas [24]. El problema de obtener la base en el espacio de fase reducido ha sido resuelto recientemente mediante la introducción de las redes de spin [25]. Este método ha sido generalizado al caso supersimétrico [26].

En este capítulo discutimos la construcción general de las identidades tipo Cayley-Hamilton para las *supermatrices* que constituye un problema interesante por si mismo, además de las posibles aplicaciones en el espacio reducido de las teorías de CS definidas sobre un supergrupo. En la siguiente sección introducimos nuestra notación junto con

algunos resultados que serán útiles para nuestros propósitos. En esta sección también proponemos una definición para los polinomios nulos y característico asociados a una supermatriz a partir de su correspondiente superdeterminante. Los resultados más importantes están contenidos en las secciones siguientes y ya han sido reportados en [27]. Añadimos también un Apéndice B donde hemos reunido algunos resultados útiles.

2.2 Polinomios característico y nulos para supermatrices.

Consideraremos un álgebra de Grassmann Λ sobre los números complejos C , siguiendo la notación establecida en el apéndice B.

Un álgebra de Grassmann (Λ) está determinada por un conjunto de generadores del álgebra $\zeta^a, a = 1, \dots, N$ ($N \rightarrow \infty$) los cuales anticonmutan:

$$\zeta^a \zeta^b = -\zeta^b \zeta^a, \quad (\zeta^a)^2 = 0 \quad (2.3)$$

para toda a, b .

Los elementos $1, \zeta^a, \zeta^a \zeta^b, \dots$ donde los índices en cada producto son todos diferentes, forman una base infinita para Λ .

Los elementos de Λ forman un espacio vectorial de dimensión infinita. Como álgebra sobre los números complejos, Λ es asociativa pero *no* conmutativa. Los elementos de Λ son llamados *supernúmeros*. Cada supernúmero ($a \in \Lambda$) puede ser expresado en la forma

$$a = \tilde{a} + s(a), \quad (2.4)$$

donde \tilde{a} es un número complejo ordinario y $s(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{b_1 \dots b_n} \zeta^{b_n} \dots \zeta^{b_1}$. Los c 's son también números complejos completamente antisimétricos en sus índices y se supone suma sobre índices repetidos. Al número \tilde{a} se le llama el "cuerpo" y a $s(a)$ el "alma" del número de Grassmann a .

Una *supermatriz* es una matriz cuyas entradas son elementos en el álgebra de Grassmann. Consideraremos la supermatriz M , $(p+q) \times (p+q)$ que es una matriz en bloques de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

donde A, B, C y D son matrices $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, $q \times q$ respectivamente. El rasgo distintivo respecto a las matrices ordinarias es que los elementos de matriz M_{RS} , $R = (i, \alpha)$, $S = (j, \beta)$ son elementos de Λ con la propiedad de que A_{ij} ($i, j = 1, \dots, p$) y $D_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, q$) son elementos pares (conmutativos), mientras $B_{i\alpha}$ y $C_{\beta j}$ son elementos impares del álgebra (no conmutativos). En particular esto significa que tales números satisfacen

$$B_{i\alpha}B_{j\beta} = -B_{j\beta}B_{i\alpha}, \quad C_{\alpha i}C_{\beta j} = -C_{\beta j}C_{\alpha i}, \quad B_{i\alpha}C_{\beta j} = -C_{\beta j}B_{i\alpha}, \quad (2.6)$$

mientras que A_{ij} y $D_{\alpha\beta}$ conmutan con todo.

Como en el caso usual, la suma y producto de dos supermatrices es nuevamente una supermatriz. Sin embargo existen conceptos que deben ser redefinidos, como la traza y el determinante, debido a la componente impar de la supermatriz.

El invariante básico, bajo transformaciones de similaridad, para supermatrices es la supertraza, definida por

$$Str(M) = Tr(A) - Tr(D), \quad (2.7)$$

donde la traza sobre las matrices pares es la estándar. Una propiedad importante de la definición anterior es la identidad cíclica $Str(M_1 M_2) = Str(M_2 M_1)$, la cual es una consecuencia del signo negativo en (2.7). La generalización del determinante, llamada *superdeterminante*, se obtiene a partir de (2.7) al definir

$$\delta \ln(Sdet M) = Str(M^{-1}\delta M), \quad (2.8)$$

con las condiciones de frontera apropiadas. En esta notación compacta estamos resumiendo las $(p+q)^2$ relaciones que dan las derivadas parciales de la función $\ln(Sdet M)$ con respecto a las entradas M_{RS} de la supermatriz, en términos de la supermatriz inversa M^{-1} . Por ejemplo, $\partial \ln(Sdet M) / \partial M_{ij} = (M^{-1})_{ji}$ para los índices pares i, j . Estas ecuaciones diferenciales de primer orden se integran bajo las condiciones de frontera $Sdet I = 1$, donde I es la supermatriz unidad, para producir las siguientes dos formas equivalentes de calcular el superdeterminante [28]

$$Sdet(M) = \frac{\det(A - BD^{-1}C)}{\det D} = \frac{\det A}{\det(D - CA^{-1}B)}. \quad (2.9)$$

Todas las matrices involucradas son ahora *pares* en el álgebra de Grassmann y la función \det tiene el significado usual. El superdeterminante tiene la propiedad básica $Sdet(M_1 M_2) = Sdet(M_2 M_1)$ y para estar definido requiere $\det D \neq 0$ y $\det A \neq 0$. Una demostración explícita de la igualdad de las dos formas alternativas de calcular $Sdet(M)$ es dada en [29].

Los polinomios característicos de las matrices pares A y D los denotaremos por $a(x) = \det(xI - A)$ y $d(x) = \det(xI - D)$. A partir de las dos alternativas (2.9) de calcular el superdeterminante es conveniente establecer el siguiente:

Lema 2.1. Para cualquier supermatriz $M_{(p+q) \times (p+q)}$, la función característica definida por $h(x) = Sdet(xI - M)$ puede ser escrita como

$$h(x) = \frac{\tilde{F}(x)}{\tilde{G}(x)} = \frac{F(x)}{G(x)}, \quad (2.10)$$

donde los polinomios básicos \tilde{F}, \tilde{G}, F y G están dados por

$$\tilde{F}(x) = \det(d(x)(xI - A) - B \operatorname{adj}(xI - D)C), \quad \tilde{G}(x) = (d(x))^{p+1}, \quad (2.11)$$

$$G(x) = \det (a(x) (xI - D) - C \operatorname{adj} (xI - A)B), \quad F(x) = (a(x))^{q+1}, \quad (2.12)$$

Demostración

Las expresiones anteriores las podemos obtener a partir de (2.9) usando la relación $(xI - Q)^{-1} = [\det(xI - Q)]^{-1} \operatorname{adj}(xI - Q)$, válida para cualquier matriz par Q . Observemos que \tilde{F} está expresado en términos del determinante de una matriz par $p \times p$, mientras G es el determinante de una matriz par $q \times q$.

Con la intención de motivar la idea básica de nuestra definición del polinomio característico de una supermatriz vamos a considerar el caso simple de una supermatriz M diagonal por bloques (es decir, $B = 0, C = 0$). En este caso $h(x) = a(x)/d(x)$ y claramente el polinomio característico es $P(x) = a(x) d(x)$, el cual es el producto del numerador y el denominador del correspondiente superdeterminante. De hecho tenemos

$$P(M) = \begin{pmatrix} a(A) & 0 \\ 0 & a(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(A) & 0 \\ 0 & d(D) \end{pmatrix} \equiv 0, \quad (2.13)$$

debido a que $a(A) = 0, d(D) = 0$. En el caso general, donde $h(x)$ está dado por (2.10) el numerador del superdeterminante es \tilde{F} (F) mientras que el denominador es \tilde{G} (G) lo cual motiva la siguiente:

Definición 2.1

Para una supermatriz arbitraria $M_{(p+q) \times (p+q)}$ definimos el *polinomio característico*

$$\mathcal{P} = \tilde{F}(x) G(x) = F(x) \tilde{G}(x), \quad (2.14)$$

donde los polinomios básicos \tilde{F}, \tilde{G}, F , y G están dados por (2.11, 2.12).

El hecho de que hayamos definido $\mathcal{P}(x)$ de esta forma en vez de $\mathcal{P}(x) = \tilde{F}(x)\tilde{G}(x)$ o $\mathcal{P}(x) = F(x)G(x)$ puede ser justificado únicamente a posteriori. Usando (2.11,2.12) obtenemos que $\mathcal{P}(x) = a(x)^{q+1}d(x)^{p+1}$. Por simplicidad en la notación, en lo que sigue

no siempre escribiremos la dependencia en x de muchos de los polinomios considerados.

En el caso diagonal por bloques, donde $a(x)$ y $d(x)$ tengan un factor común $f(x)$

$$a(x) = f(x) a_1(x), \quad d(x) = f(x) d_1(x), \quad (2.15)$$

el polinomio característico está dado por $P(x) = f(x) a_1(x) d_1(x)$, que es un polinomio de grado menor que el producto $a(x) d(x)$. Motivados por este hecho y por el trabajo [30], hemos notado que existen algunos casos en los cuales podemos construir polinomios nulos de grado menor que $\mathcal{P}(x)$, de acuerdo a las propiedades de factorización de los polinomios básicos \tilde{F}, \tilde{G}, F , y G . En este punto es importante observar que no existe un teorema de factorización única para polinomios definidos sobre un álgebra de Grassmann. Esto puede verse, por ejemplo, a partir de la identidad $x^2 = (x + \alpha)(x - \alpha)$, donde α es un número de Grassmann par con la propiedad $\alpha^2 = 0$.

La construcción de tales polinomios nulos de menor grado empieza a partir de encontrar divisores de grado máximo de las parejas $\tilde{F}, \tilde{G}, (F, G)$ los cuales denotaremos por $R(S)$ respectivamente. Esto significa que uno es capaz de escribir

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= R \tilde{f}, \quad \tilde{G} = R \tilde{g} \\ F &= S f, \quad G = S g \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde todos los polinomios son mónicos y también $\tilde{f}, \tilde{g}, f, g$ son de menor grado por construcción. Estos polinomios deben satisfacer

$$\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = \frac{f}{g}, \quad (2.17)$$

debido a (2.10), y la expresión en (2.16) podría no ser única. Observemos que en el caso de números complejos la relación (2.17) implicaría al menos $\tilde{f} = \lambda f, \tilde{g} = \lambda g$ con λ una constante. Debido a que estamos considerando polinomios sobre un álgebra de Grassmann esto no es necesariamente cierto, como podemos ver nuevamente en la identidad

antes mencionada $x/(x - \alpha) = (x + \alpha)/x$, la cual hemos reescrito en forma conveniente. La discusión anterior nos lleva a la siguiente:

Definición 2.2. Dada una supermatriz $M_{(p+q) \times (p+q)}$, con función característica $h(x)$ tal que \tilde{F}, \tilde{G} tienen un factor común R y F, G tienen un factor común S (de acuerdo con 2.16), definimos el *polinomio nulo* de M por

$$P(x) = \tilde{f}(x)g(x) = f(x)\tilde{g}(x). \quad (2.18)$$

El polinomio que resulta de esta definición claramente es de menor grado que $\mathcal{P}(x)$, y corresponde justamente a un caso particular del polinomio definido en (2.18) cuando $R = S = 1$. En lo que sigue usaremos principalmente la definición 2.2.

2.3 El teorema de Cayley-Hamilton para supermatrices.

Parte de nuestra estrategia en la demostración de este teorema para el polinomio introducido en la definición 2.2 está basado en uno de los métodos estándares para probar el teorema de Cayley-Hamilton para matrices ordinarias [31]. Brevemente recordaremos tal procedimiento y enfatizaremos que es independiente si la matriz considerada es una matriz o una supermatriz.

Lema 3.1. Sean M , $(xI - M)$ y $N(x)$ supermatrices de orden $(p+q) \times (p+q)$, donde M es independiente de $x \in \Lambda_0$, y $N(x)$ es una matriz polinomial de grado $(n-1)$. $N(x) = N_0x^{n-1} + N_1x^{n-2} + \dots + N_{n-1}x^0$, (donde cada $N_k, k = 0, \dots, n-1$ es una supermatriz $(p+q) \times (p+q)$ independiente de x) tal que

$$(xI - M)N(x) = P(x)I, \quad (2.19)$$

donde $P(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_nx^0$ es un polinomio numérico de grado n sobre Λ_0 , entonces $P(M) = p_0M^n + \dots + p_nI \equiv 0$.

Demostración. La demostración se sigue de comparar potencias independientes de x en (2.19) y calcular explícitamente $P(M)$ [31].

En el caso estándar la matriz $N(x)$ está dada por $N(x) = \text{adj}(xI - M) = \text{det}(xI - M)(xI - M)^{-1}$, y $P(x) = \text{det}(xI - M)$. En el caso de una supermatriz no tenemos una generalización obvia de la matriz polinomial $\text{adj}(xI - M)$ o de $\text{det}(xI - M)$. Sin embargo, siguiendo la analogía tan cercanamente como nos es posible definimos

$$N(x) = P(x)(xI - M)^{-1}, \quad (2.20)$$

donde $P(x)$ es el polinomio introducido en la definición 2.2 de la sección previa. El reto ahora es mostrar que $N(x)$, la cual trivialmente satisface (2.19), es en verdad una matriz polinomial. De esta forma habríamos probado que $P(M) = 0$, de acuerdo al lemma 3.1.

Lemma 3.2. Sean M y $(xI - M)$ supermatrices $(p + q) \times (p + q)$, $x \in \Lambda_0$, entonces

$$(xI - M)_{ij}^{-1} = -\frac{1}{\tilde{F}} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial A_{ji}}, \quad (xI - M)_{i\alpha}^{-1} = -\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial C_{\alpha i}}, \quad (2.21)$$

$$(xI - M)_{\alpha j}^{-1} = -\frac{1}{\tilde{F}} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial B_{j\alpha}}, \quad (xI - M)_{\alpha\beta}^{-1} = -\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial D_{\beta\alpha}}, \quad (2.22)$$

donde $A_{ji}, B_{j\alpha}, C_{\alpha j}$ y $D_{\alpha\beta}$ son las entradas de la supermatriz M definidas en (2.5) y \tilde{F} , G son los polinomios definidos en (2.11, 2.12). La derivada con respecto a un número de Grassmann impar es una derivada izquierda definida de manera tal que

$$\delta \tilde{F} \equiv \delta B_{j\alpha} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial B_{j\alpha}}.$$

Demostración. El primer paso es calcular $(xI - M)^{-1}$ en forma de bloques, con los siguientes resultados

$$(xI - M)_{11}^{-1} = \left((xI - A) - B(xI - D)^{-1}C \right)^{-1}, \quad (2.23)$$

$$(xI - M)_{12}^{-1} = -(xI - A)^{-1}B \left((xI - D) - C(xI - A)^{-1}B \right)^{-1}, \quad (2.24)$$

$$(xI - M)_{21}^{-1} = -(xI - D)^{-1}C \left((xI - A) - B(xI - D)^{-1}C \right)^{-1}, \quad (2.25)$$

$$(xI - M)_{22}^{-1} = \left((xI - D) - C(xI - A)^{-1}B \right)^{-1}, \quad (2.26)$$

donde los subíndices 11, 12, 21, y 22 denotan los bloques $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, $q \times q$ respectivamente. Nos concentraremos ahora en el bloque 11. Reescribiendo todas las matrices inversas en (2.23) en términos de sus adjuntas junto con sus correspondientes determinantes obtenemos

$$(xI - M)_{11}^{-1} = \frac{d}{\tilde{F}} \text{adj} \left((xI - A)d - B \text{adj}(xI - D)C \right). \quad (2.27)$$

Usando la propiedad básica $\delta \det Q = \text{Tr}(\text{adj} Q \delta Q)$ válida para cualquier matriz par Q , calculamos el cambio de \tilde{F} con respecto a A_{ij} , dejando constantes todas las otras entradas, obteniendo

$$\delta \tilde{F} = -d [\text{adj} \left((xI - A)d - B \text{adj}(xI - D)C \right)]_{ij} \delta A_{ji}, \quad (2.28)$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial A_{ji}} = -d [\text{adj}(xI - A)d - B \text{adj}(xI - D)C]_{ij}. \quad (2.29)$$

La comparación de (2.29) con (2.27) completa la demostración de la primera relación en (2.21). La demostración correspondiente para las restantes ecuaciones puede llevarse a cabo en forma similar.

Observemos que las condiciones para la existencia de la inversa de $(xI - M)^{-1}$ son las mismas que para la existencia del $Sdet(xI - M)$ y son que $\det(xI - A) \neq 0$ y que el

$\det(xI - D) \neq 0$. Además, x es una variable de Grassmann par y supondremos que éste es siempre el caso. Debido a estas hipótesis, el término $((xI - A) - B(xI - D)^{-1}C)^{-1}$, por ejemplo, puede siempre ser calculado como

$$\left(I - (xI - A)^{-1}B(xI - D)^{-1}C\right)^{-1}(xI - A)^{-1}. \quad (2.30)$$

El factor de la izquierda puede ser pensado como una expansión en serie de la forma $1/(1 - z) = 1 + z + z^2 + \dots$, con $z = (xI - A)^{-1}B(xI - D)^{-1}C$. Más aún, la serie se detendrá en alguna potencia debido a que z es una matriz con cuerpo cero y por lo tanto nilpotente.

Ahora llegamos al resultado principal de este capítulo, el cual establecemos en el siguiente teorema:

Teorema 3.1. Sean M y $(xI - M)$ supermatrices $(p + q) \times (p + q)$, $x \in \Lambda_0$, entonces $N(x) = P(x)(xI - M)^{-1}$, con $P(x)$ dado en la definición 2.2, es una matriz polinomial.

Demostración. Empezaremos considerando el elemento del bloque 11 de $N(x)$. De acuerdo al lema 3.2 junto con (2.16), este bloque puede ser escrito como

$$N_{ij} = -g \frac{\partial \tilde{f}}{\partial A_{ji}} - g \frac{\tilde{f}}{R} \frac{\partial R}{\partial A_{ji}}. \quad (2.31)$$

El primer término del lado derecho es claramente de carácter polinomial. Para transformar el segundo término hacemos uso de la propiedad

$$\frac{\partial \ln \tilde{G}}{\partial A_{ji}} = 0 = \frac{\partial \ln R}{\partial A_{ji}} + \frac{\partial \ln \tilde{g}}{\partial A_{ji}}, \quad (2.32)$$

la cual se sigue de la factorización $\tilde{G} = R\tilde{g}$, junto con el hecho de que \tilde{G} es una función de $D_{\alpha\beta}$, de acuerdo con (2.11). De esta forma y usando (2.17), obtenemos

$$N_{ij} = f \frac{\partial \tilde{g}}{\partial A_{ji}} - g \frac{\partial \tilde{f}}{\partial A_{ji}}, \quad (2.33)$$

que nos lleva a la conclusión de que el bloque de la matriz N_{ij} es polinomial. La demos-

tración para $N_{\alpha i}$ se hace de la misma manera, excepto que ahora las derivadas se toman respecto a $B_{i\alpha}$ y debemos usar $\partial \ln \tilde{G} / \partial B_{i\alpha} = 0$, en vez de (2.32). Los restantes términos $N_{i\alpha}$ y $N_{\alpha\beta}$ pueden ser tratados en forma análoga considerando las derivadas de $G = Sg$ con respecto a $C_{\alpha i}$ y $D_{\beta\alpha}$, y reemplazando la condición (2.32) por $\partial \ln F / \partial C_{\alpha i} = 0$ y $\partial \ln F / \partial D_{\beta\alpha} = 0$ respectivamente. Los resultados son nuevamente de la forma (2.33), y la única diferencia consiste en las variables de derivación.

Finalmente, usando el teorema (3.1) junto con el lema (3.1) podemos establecer la siguiente extensión del teorema de Cayley-Hamilton para supermatrices:

Teorema 3.2. Sean M y $(xI - M)$ supermatrices $(p + q) \times (p + q)$, $x \in \Lambda_0$, con el $Sdet(xI - M) = \tilde{F}/\tilde{G} = F/G$, donde los polinomios \tilde{F}, \tilde{G}, F y G están dados en (2.11, 2.12). Entonces, para cualquier factor común R tal que $\tilde{F} = R\tilde{f}$, $\tilde{G} = R\tilde{g}$ y S tal que $F = S f$, $G = S g$, donde $\tilde{f}/\tilde{g} = f/g$, el polinomio $P(x) = \tilde{f}(x)g(x) = f(x)\tilde{g}(x)$ anula M , es decir $P(M) = 0$.

2.4 Casos particulares y ejemplos.

En esta sección consideraremos algunos casos interesantes y algunos ejemplos particulares de polinomios nulos de grado mínimo para supermatrices, construidos de acuerdo a las definiciones dadas anteriormente. Nuestro procedimiento general para determinar los polinomios nulos está basado en las propiedades de factorización de los polinomios \tilde{F}, \tilde{G}, F y G introducidos en la sección 2. El trabajo [30] muestra que esas propiedades de factorización están muy relacionadas a las de los polinomios característicos $a(x)$ y $d(x)$ correspondientes a los bloques pares de la supermatriz. En este punto es importante enfatizar que estamos tratando con polinomios sobre un álgebra de Grassmann, y la existencia de un máximo común divisor de dos polinomios no está en correspondencia uno a uno con el hecho de que esos polinomios no sean primos relativos (ver apéndice para la definición). De hecho, mostraremos un ejemplo simple de dos polinomios, los cuales no son primos relativos y sin embargo no tienen un factor común. En esta parte

haremos más énfasis en las propiedades de factorización de $a(x)$ y $d(x)$ y consideraremos tres casos: (1) los polinomios a y d son primos relativos, (2) los polinomios a y d no son primos relativos pero no tienen un factor común y finalmente, (3) ambos polinomios no son primos relativos y tienen un máximo común divisor.

2.4.1 Los polinomios $a(x)$ y $d(x)$ son primos relativos.

Este caso ha sido discutido en [30], en relación con las propiedades de factorización de $h(x)$. El teorema (3.9) de esta referencia muestra que la función característica h puede ser escrita en la forma irreducible única

$$h(x) = \frac{a+r}{d+t}, \quad (2.34)$$

donde r y t son polinomios pares con cuerpo cero con la propiedad $\text{gra}(r) < \text{gra}(a)$ y $\text{gra}(t) < \text{gra}(d)$. Los dos pasos básicos que llevan a (2.34) son, en primer lugar, la posibilidad de escribir

$$\tilde{F} = ad^p + u, \quad G = a^q d + v, \quad (2.35)$$

junto con la factorización

$$\tilde{F} = (a+r)(d^p + t'), \quad (2.36)$$

$$G = (d+t)(a^q + r'), \quad (2.37)$$

donde todos los polinomios u, v, r, r', t, t' tienen cuerpo cero y $\text{gra}(u) < p(q+1)$, $\text{gra}(v) < q(p+1)$, $\text{gra}(t') < pq$, $\text{gra}(r) < p$, $\text{gra}(r') < pq$, $\text{gra}(t) < q$. La expresión (2.35) es justamente la expansión de los polinomios correspondientes en (2.11),(2.12) en términos de las potencias de los números de Grassmann impares $B_{i\alpha}$ y $C_{\beta j}$, mientras las expresiones (2.36, 2.37) son una consecuencia del corolario (3.8) de [30], el cual ha sido incluido en el apéndice B para uso posterior.

El segundo paso surge de la comparación de las dos formas de calcular $h(x)$ (2.10) y del uso del lemma de factorización (3.4) de [30], también incluido en el apéndice B. De esta forma obtenemos

$$F = a^{q+1} = (a + r)(a^q + r'), \quad (2.38)$$

$$\tilde{G} = d^{p+1} = (d + t)(d^p + t'). \quad (2.39)$$

El uso de estas expresiones junto con (2.36),(2.37) y cualquier expresión en (2.10) lleva directamente a la forma (2.34) para $h(x)$.

Nuestro resultado, en el caso de que a y d sean primos relativos, para el polinomio de grado mínimo es el siguiente

$$P(x) = (a + r)(d + t), \quad (2.40)$$

de acuerdo al teorema (3.2).

Además, dados los teoremas de existencia en [30], los autores encuentran un algoritmo de Euclides modificado, el cual de hecho nos permite explícitamente llevar a cabo la reducción en (2.10) para obtener la expresión irreducible que aparece en (2.34).

2.4.2 Supermatrices $(1 + 1) \times (1 + 1)$.

Este es el ejemplo más simple del caso (2.34) y corresponde a la elección

$$M = \begin{pmatrix} p & \alpha \\ \beta & q \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

con $\bar{p} \neq \bar{q}$ de forma tal que $a = x - p$ y $d = x - q$ sean primos relativos, de acuerdo al lemma 3.3 de [30] (ver apéndice B).

Aquí tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= (x - q)(x - p) - \alpha\beta, & \tilde{G} &= (x - q)^2, \\ F &= (x - p)^2, & G &= (x - q)(x - p) + \alpha\beta.\end{aligned}\tag{2.42}$$

El algoritmo Euclideo modificado de [30] aplicado a cada par \tilde{F}, \tilde{G} (F, G) lleva a las siguientes factorizaciones

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \left(x - p + \frac{\alpha\beta}{q - p}\right) \left(x - q - \frac{\alpha\beta}{q - p}\right), \\ \tilde{G} &= \left(x - q + \frac{\alpha\beta}{q - p}\right) \left(x - q - \frac{\alpha\beta}{q - p}\right), \\ F &= \left(x - p + \frac{\alpha\beta}{q - p}\right) \left(x - p - \frac{\alpha\beta}{q - p}\right), \\ G &= \left(x - q + \frac{\alpha\beta}{q - p}\right) \left(x - q - \frac{\alpha\beta}{q - p}\right),\end{aligned}\tag{2.43}$$

las cuales permiten las identificaciones $r = -t' = t = -r' = \alpha\beta/(q - p)$. Todos estos polinomios son de grado cero en este caso. Aquí tenemos $R = x - q - \alpha\beta/(q - p)$, $S = x - p - \alpha\beta/(q - p)$ junto con $\tilde{f} = f = x - p + \alpha\beta/(q - p)$ y $g = \tilde{g} = x - q + \alpha\beta/(q - p)$ en la notación de la sección 2. El polinomio de grado mínimo resulta [27],[32]

$$P(x) = fg = x^2 - x \left(p + q + \frac{\alpha\beta}{q - p}\right) + pq - \frac{(q + p)}{(q - p)}\alpha\beta,\tag{2.44}$$

donde podemos verificar por sustitución directa que $P(M) = 0$.

2.4.3 Supermatrices en $Osp(1 | 2; C)$.

Otro ejemplo de esta clase corresponde al caso de supermatrices que pertenecen al supergrupo $Osp(1 | 2; C)$, el cual es relevante en la discusión del espacio de fase reducido en la supergravidad de de Sitter en 2+1 dimensiones [23],[24]. Aquí consideramos supermatrices $(2 + 1) \times (2 + 1)$ de modo que las propiedades de factorización involucradas son

un caso particular del ejemplo presentado en [30] .

Las supermatrices M pertenecientes a $Osp(1 | 2; C)$ son tales que

$$M^T H M = H, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

donde T denota la supertranspuesta y H la matriz ortosimpléctica. Las matrices M pueden ser parametrizadas en la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} A & \xi \\ \eta^t & a \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

con x_1, x_2 números de Grassmann impares arbitrarios y t denotando la transposición estándar. La condición (2.45) se traduce en las siguientes constricciones sobre los restantes elementos de la matriz

$$\eta^t = \xi^t E A, \quad a = 1 + x_1 x_2, \quad \det A = 1 - x_1 x_2, \quad (2.47)$$

donde E denota el bloque antisimétrico de 2×2 de H en (2.45). Suponemos que $Tr(A) \neq 2$ de manera que a y d sean primos relativos. En la notación de [30], la expresión irreducible única para la función característica es

$$h(x) = \frac{x^2 + \sigma_1 x + \sigma_2}{x + \sigma_3}, \quad (2.48)$$

donde las expresiones para las σ_i ($i = 1, 2, 3$) se obtienen al aplicar el algoritmo Euclideo modificado y están dadas en forma explícita. Sustituyendo nuestros valores particulares para los elementos de la supermatriz obtenemos

$$\sigma_1 = -1 - Str M, \quad \sigma_2 = -\sigma_3 = 1 \quad (2.49)$$

De esta manera, el polinomio de grado mínimo está dado por el producto de los factores $(x^2 + \sigma_1 x + \sigma_2)(x + \sigma_3)$, y es [24]

$$P(x) = x^3 - (2 + \text{Str } M)(x^2 - x) - 1. \quad (2.50)$$

2.4.4 Los polinomios a y d no son primos relativos y no tienen factores comunes.

Un ejemplo de esta clase es proporcionado por la supermatriz $(1 + 1) \times (1 + 1)$

$$M = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

donde σ es un elemento par del álgebra de Grassmann tal que $\bar{\sigma} = 0$ y $\sigma^2 = 0$. En este caso, nuestro método produce una familia de polinomios nulos. Aquí $a = x - \sigma$ y $d = x$, los cuales no son primos relativos de acuerdo a la definición de [30], debido a que el ideal generado por a y d no es todo el anillo de los polinomios pares sobre el álgebra de Grassmann. En particular, no es posible encontrar polinomios P, Q tales que $1 = Pa + Qd$. La razón básica para esto es la imposibilidad de dividir por σ . Nuevamente, enfatizamos el hecho poco intuitivo de que aún cuando a y d no son primos relativos, estos polinomios no poseen un factor común.

Los polinomios básicos son

$$\tilde{F} = x(x - \sigma), \quad F = (x - \sigma)^2 = x^2 - 2x\sigma, \quad \tilde{G} = x^2, \quad G = x(x - \sigma), \quad (2.52)$$

y necesitamos considerar las correspondientes propiedades de factorización. Es obvio, por ejemplo, que \tilde{F} y \tilde{G} tienen a x como factor común. Sorprendentemente, este resultado no puede ser obtenido al aplicar el algoritmo Euclideo (o el algoritmo Euclideo modificado) a \tilde{F} y \tilde{G} . El problema es que el primer residuo tiene cuerpo cero, así que no

podemos continuar con el segundo paso que requiere de dividir por este residuo. Además en el álgebra de Grassman no existe un teorema de factorización única, como podemos ver a partir de la identidad $x^2 = (x + z\sigma)(x - z\sigma)$, donde z es un número complejo arbitrario. Esto nos lleva a la conclusión de que \tilde{F} y \tilde{G} tienen factores comunes de grado máximo los cuales son x y $(x - \sigma)$. Lo mismo sucede con F y G . Así, después de que cada cancelación es llevada a cabo, nos quedan cuatro posibles combinaciones de los cocientes reducidos

$$\frac{\tilde{f}_i}{\tilde{g}_i} = \frac{f_j}{g_j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.53)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= x - \sigma, & \tilde{f}_2 &= x, & f_1 &= x - \sigma, & f_2 &= x - 2\sigma, \\ \tilde{g}_1 &= x, & \tilde{g}_2 &= x + \sigma, & g_1 &= x, & g_2 &= x - \sigma. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para cada posibilidad uno puede verificar que (2.53) es correcta. De acuerdo al teorema (3.2) obtenemos cuatro polinomios nulos dados por $P_{ij}(x) = \tilde{f}_i g_j$. Los cuales son

$$P_{11} = x^2 - x\sigma, \quad P_{12} = x^2 - 2x\sigma, \quad P_{21} = x^2, \quad P_{22} = x^2 - \sigma x. \quad (2.55)$$

Además cualquier combinación lineal de los anteriores polinomios también será aniquilada por la supermatriz, finalmente obtenemos dos polinomios nulos básicos que son

$$P_1 = x^2, \quad P_2 = x\sigma. \quad (2.56)$$

2.4.5 Los polinomios a y d no son primos relativos y tienen un factor común.

Aquí consideraremos el caso donde a y d tienen un máximo común divisor $k(x)$, es decir

$$a(x) = k(x) a_1(x), \quad d(x) = k(x) d_1(x), \quad (2.57)$$

donde a_1 y d_1 son polinomios primos relativos. Discutiremos los siguientes dos casos: (1) Los polinomios k, a_1, d_1 son primos relativos y (2) k no es primo relativo con a_1 y/o d_1 . Cada uno de los polinomios que hemos introducido es mónico. Esto constituye una extensión de la discusión en [30] y el siguiente paso es considerar las nuevas propiedades de factorización de los polinomios $\tilde{F}, \tilde{G}, F, G$.

2.5 El polinomio $k(x)$ es primo relativo con $a_1(x)$ y $d_1(x)$.

Empezamos escribiendo

$$\tilde{F} = (k^A d_1^{A-1} a_1 + Y), \quad \tilde{G} = k^A d_1^A, \quad F = k^B a_1^B, \quad G = (k^B a_1^{B-1} d_1 + Z), \quad (2.58)$$

donde Y y Z son polinomios con cuerpo cero y $A = p+1, B = q+1$. Usando el lemma de factorización 3.6 de [30] con respecto a cada uno de los polinomios primos involucrados podemos escribir \tilde{F} y \tilde{G} de la siguiente manera

$$\tilde{F} = (k^A + Y_1)(d_1^{A-1} + Y_2)(a_1 + Y_3), \quad G = (k^B + Z_1)(a_1^{B-1} + Z_2)(d_1 + Z_3), \quad (2.59)$$

donde $Y_i, Z_i, i = 1, 2, 3$ son polinomios con cuerpo cero. Usando el lemma 3.4 de [30] junto con el hecho de que k, a_1 y d_1 son primos relativos podemos mostrar que la factorización anterior es única. La condición $\tilde{F}G = F\tilde{G}$ y otro uso del lemma (3.4) lleva a las siguientes identidades

$$\begin{aligned} k^{A+B} &= (k^A + Y_1)(k^B + Z_1), \\ d_1^A &= (d_1^{A-1} + Y_2)(d_1 + Z_3), \\ a_1^B &= (a_1^{B-1} + Z_2)(a_1 + Y_3). \end{aligned} \quad (2.60)$$

De esta forma podemos identificar las factorizaciones básicas en (2.16) y escribir

$$\begin{aligned}
R &= d_1^{A-1} + Y_2, & S &= a_1^{B-1} + Z_2, & \tilde{f} &= (k^A + Y_1)(a_1 + Y_3), \\
f &= k^B(a_1 + Y_3), & \tilde{g} &= k^A(d_1 + Z_3), & g &= (k^B + Z_1)(d_1 + Z_3).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Observemos que inmediatamente se cumple la relación $\tilde{f}g = f\tilde{g}$, en virtud de la primera de las relaciones (2.60). Siguiendo con el procedimiento general y módulo cancelaciones accidentales que pueden ocurrir por ejemplo en $(k^A + Y_1)/k^A$ o $k^B/(k^B + Z_1)$, identificamos

$$P(x) = k^{A+B}(a_1 + Y_3)(d_1 + Z_3), \tag{2.62}$$

como el polinomio nulo de grado mínimo en este caso.

Un ejemplo específico de este caso lo proporciona la supermatriz $(2 + 2) \times (2 + 2)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

donde α_1, α_2 son números de Grassmann impares y definimos $\sigma = \alpha_1\alpha_2$, tal que $\sigma^2 = \sigma\alpha_1 = \sigma\alpha_2 = 0$. Aquí $A = B = 3$. Los polinomios característicos básicos son $a(x) = x(x - 1)$ y $d(x) = x(x + 1)$ así que identificamos

$$k = x, \quad a_1 = x - 1, \quad d_1 = x + 1, \tag{2.64}$$

los cuales son realmente primos relativos a pares. Los polinomios básicos son

$$\begin{aligned}
\tilde{F} &= x^3(x + 1)^2(x - 1) + \sigma x(x + 1), \\
F &= x^3(x - 1)^3, \\
\tilde{G} &= x^3(x + 1)^3,
\end{aligned}$$

$$G = x^3(x-1)^2(x+1) - \sigma x(x-1). \quad (2.65)$$

Las propiedades de factorización (2.60) son

$$\begin{aligned} x^6 &= (x^3 - \sigma x)(x^3 + \sigma x), \\ (x+1)^3 &= \left((x+1)^2 - \frac{\sigma(x+1)}{2} \right) \left(x+1 + \frac{\sigma}{2} \right), \\ (x-1)^3 &= \left((x-1)^2 + \frac{\sigma(x-1)}{2} \right) \left(x-1 - \frac{\sigma}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.66)$$

de donde podemos leer los valores para Y_i, Z_i . Esto, junto con (2.59) y (2.65) nos permite verificar las propiedades de factorización de $\tilde{F}, \tilde{G}, F, G$. En este ejemplo particular tenemos cancelaciones accidentales de manera que

$$R = x(x+1) \left(x+1 - \frac{\sigma}{2} \right), \quad S = x(x-1) \left(x-1 - \frac{\sigma}{2} \right), \quad (2.67)$$

cada uno de los cuales difiere de la expresión (2.61) por un factor extra de x . El polinomio nulo de grado mínimo es entonces

$$P(x) = x^6 + \sigma x^5 - x^4, \quad (2.68)$$

el cual es de grado seis en vez de ocho, debido a las cancelaciones accidentales mencionadas anteriormente.

2.6 El polinomio $k(x)$ no es primo relativo con a_1 y/o $d_1(x)$.

Podemos extender el caso anterior escribiendo el máximo común divisor $k(x)$ como

$$k(x) = k_o k_a k_d, \quad (2.69)$$

lo que muestra explícitamente las propiedades de factorización involucradas en el siguiente procedimiento. Una vez que k ha sido identificado, es escrito como el producto de sus factores de grado mínimo, los cuales son posteriormente rearrreglados de acuerdo a la siguiente convención: los que tengan un factor común con $a_1(d_1)$ pero no con $d_1(a_1)$ son llamados $k_a(k_d)$ respectivamente mientras que los factores restantes están incluidos en k_o . Posteriormente exigiremos que k_o, k_a, a_1, k_d, d_1 sean primos relativos a pares. El caso anterior (k primo relativo con a_1 y d_1) corresponde a $k_a = k_d = 1$. Nuevamente, empezamos a partir de las expresiones (2.58), donde k es substituido por (2.69) y buscamos las propiedades de factorización análogas a (2.59). Aquí uno debe ser suficientemente cuidadoso en mantener juntos cualquier producto de potencias de k_a y a_1 o k_d y d_1 , para que los miembros de cada par no sean primos relativos respectivamente. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= (k_o^A + \bar{Y}_1) (k_d^A d_1^{A-1} + \bar{Y}_2) (k_a^A a_1 + \bar{Y}_3), \\ G &= (k_o^B + \bar{Z}_1) (k_a^B a_1^{B-1} + \bar{Z}_2) (k_d^B d_1 + \bar{Z}_3),\end{aligned}\tag{2.70}$$

donde $\bar{Y}_i, \bar{Z}_i, i = 1, 2, 3$ son polinomios de cuerpo cero. Usando la identidad $\tilde{F}G = F\tilde{G}$ junto con el lemma (3.4) de [30] extendemos las propiedades de factorización (2.60) a

$$\begin{aligned}k_o^{A+B} &= (k_o^A + \bar{Y}_1) (k_o^B + \bar{Z}_1), \\ k_d^{A+B} d_1^A &= (k_d^A d_1^{A-1} + \bar{Y}_2) (k_d^B d_1 + \bar{Z}_3) \\ k_a^{A+B} a_1^B &= (k_a^B a_1^{B-1} + \bar{Z}_2) (k_a^A a_1 + \bar{Y}_3).\end{aligned}\tag{2.71}$$

Esta vez no podemos escribir directamente $\tilde{F}, \tilde{G}, F, G$ en la forma prescrita por (2.16). En lugar de esto sólo podemos llegar a las siguientes expresiones generales

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= T \tilde{f}_1, & \tilde{G} &= T \tilde{g}_1 k_a^A / k_d^B, \\ F &= U f_1 k_d^B / k_a^A, & G &= U g_1, \\ \tilde{f} g_1 &= f_1 \tilde{g}_1,\end{aligned}\tag{2.72}$$

donde

$$\begin{aligned} T &= k_d^A d_1^{A-1} + \bar{Y}_2, & U &= k_a^B a_1^{B-1} + \bar{Z}_2, & \tilde{f}_1 &= (k_0^A + \bar{Y}_1)(k_0^A a_1 + \bar{Y}_3), \\ f_1 &= k_0^B(k_a^A \tilde{a}_1 + \bar{Y}_3), & \tilde{g}_1 &= k_0^A(k_d^B d_1 + \bar{Z}_3), & g_1 &= (k_0^B + \bar{Z}_1)(k_d^B d_1 + \bar{Z}_3). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Las ecuaciones (2.73) son generalizaciones de (2.61) y verificamos que $\tilde{f}_1 g_1 = f_1 \tilde{g}_1$ se satisface en virtud de la primera relación en (2.71). Es ahora necesario hacer las siguientes dos observaciones: (i) La forma (2.72) de escribir F y \tilde{G} es bastante desagradable debido a que no muestra claramente el carácter polinomial de estas funciones. Sin embargo sabemos que los productos $T \tilde{g}_1$ y $U f_1$ pueden ser divididos por k_d^B y k_a^A respectivamente de acuerdo a las ecuaciones de factorización, segunda y tercera de (2.71); (ii) el hecho de que no podamos escribir $\tilde{F}, \tilde{G}, F, G$ en la forma (2.16) significa sólo que el método empleado no permite la identificación general del máximo común divisor en cada caso, como sucedió previamente.

Sin embargo, la forma (2.72) para los polinomios básicos puede ser usada todavía para construir un polinomio nulo de acuerdo a las ideas de la sección 3. La definición del polinomio nulo en este caso es

$$P(x) = k_a k_d \tilde{f}_1 g_1, \quad (2.74)$$

y la demostración de que $P(M) = 0$ sigue exactamente los mismos pasos como en el teorema 3.2, con la única diferencia de que la matriz $N(x) = P(x)(xI - M)^{-1}$ es construida con el polinomio anterior $P(x)$ (dado en 2.74). Recordemos que es suficiente mostrar que $N(x)$ es una matriz polinomial. Vamos a considerar el bloque 11 de la supermatriz $N(x)$. Usando el lemma 3.2 junto con (2.74) y la expresión para \tilde{F} en (2.72) podemos escribir

$$N_{ij} = -k_a k_d g_1 \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial A_{ji}} - \frac{k_a k_d g_1 \tilde{f}_1}{T} \frac{\partial T}{\partial A_{ji}}, \quad (2.75)$$

donde el primer término del lado derecho es claramente de carácter polinomial. Para transformar el segundo término hacemos uso de la propiedad

$$\frac{\partial \ln \tilde{G}}{\partial A_{ji}} = 0 = \frac{\partial \ln T}{\partial A_{ji}} + \frac{\partial \ln \tilde{g}_1}{\partial A_{ji}} + (p+1) \frac{\partial \ln k_a}{\partial A_{ji}} - \frac{\partial \ln k_d}{\partial A_{ji}}, \quad (2.76)$$

la cual se sigue de la factorización (2.72) de \tilde{G} , junto con el hecho de que \tilde{G} es función de $D_{\alpha\beta}$, de acuerdo a (2.11). De esta manera y usando la última relación (2.72) obtenemos

$$N_{ij} = k_a k_d f \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial A_{ji}} - k_a k_d g_1 \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial A_{ji}} + (p+1) g_1 \tilde{g}_1 k_d \frac{\partial k_a}{\partial A_{ji}} - (q+1) g_1 \tilde{f}_1 k_a \frac{\partial k_d}{\partial A_{ji}}, \quad (2.77)$$

la cual lleva a la conclusión de que el bloque N_{ij} es en realidad polinomial. La demostración para los bloques restantes de $N(x)$ sigue argumentos similares. La conclusión final es que $N(x)$ es polinomial y por lo tanto $P(M) = 0$.

Finalmente presentamos un ejemplo específico de el caso anterior. Vamos a considerar una supermatriz $(2+2) \times (2+2)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

con $\sigma = \alpha_1 \alpha_2$ como antes. Ahora tenemos $a(x) = x(x-1)$ y $d(x) = x^2$ con $A = B = 3$. El máximo común divisor es $k = x$ y nuestras convenciones en notación para los factores de k conducen a

$$k_0 = k_a = 1, \quad k_d = x, \quad a_1 = x-1, \quad d_1 = x. \quad (2.79)$$

Los polinomios básicos son

$$\tilde{F} = x^5(x-1) - \sigma x^3, \quad F = x^3(x-1)^3, \quad \tilde{G} = x^6, \quad G = x^4(x-1)^2 + \sigma x^2(x-1). \quad (2.80)$$

En este caso, la primera factorización de (2.71) no ocurre y las restantes son

$$\begin{aligned} x^9 &= (x^5 + \sigma x^3(x+1))(x^4 - \sigma x^2(x+1)), \\ (x-1)^3 &= ((x-1)^2 + \sigma(x-1))(x-1-\sigma), \end{aligned} \quad (2.81)$$

que corresponden a la segunda y tercera ecuaciones de (2.71) respectivamente.

A partir de estas expresiones podemos leer los polinomios $\bar{Y}_2, \bar{Y}_3, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ y verificar las factorizaciones (2.70) para \tilde{F} y G en el entendimiento de que $(k_0^A + \bar{Y}_1)$ y $(k_0^B + \bar{Z}_1)$ deberán ser reemplazados por uno. Regresando a (2.73) encontramos que

$$\begin{aligned} T &= x^3(x^2 + \sigma(x+1)), \quad U = (x-1)(x-1+\sigma), \\ \tilde{f}_1 = f_1 &= x-1-\sigma, \quad \tilde{g}_1 = g_1 = x^2(x^2 - \sigma(x+1)), \end{aligned} \quad (2.82)$$

y el polinomio nulo (2.74) está dado por

$$P(x) = x^6 - x^5(1+2\sigma) + \sigma x^3. \quad (2.83)$$

Es interesante observar que las cancelaciones accidentales que ocurren en este caso, que no podemos describir en general, nos permiten reescribir las expresiones (2.72) exactamente en la forma (2.16),(2.17) con las siguientes identificaciones

$$\begin{aligned} R &= x^2(x^2 + \sigma(x+1)), \quad S = x^2(x-1)(x-1+\sigma), \\ \tilde{f} = f &= x(x-1-\sigma), \quad \tilde{g} = g = x^2 - \sigma(x+1). \end{aligned} \quad (2.84)$$

De esta forma podemos encontrar otro polinomio nulo de grado menor que (2.83), el cual está dado por

$$P_1(x) = f g = x^4 - (1+2\sigma)x^3 + \sigma x. \quad (2.85)$$

La forma simple de la supermatriz (2.78) permite una verificación directa de que

$$P_1(M) = 0.$$

2.7 Conclusiones

Dada una supermatriz arbitraria M y a partir de la expresión para $h(x) = Sdet(xI - M)$, que naturalmente se escribe como el cociente de polinomios de acuerdo a (2.10, 2.11, 2.12), hemos introducido dos tipos de polinomios nulos en las definiciones 2.1 y 2.2. También hemos mostrado que cada uno de ellos es aniquilado por M , proporcionando una extensión del teorema de Cayley-Hamilton para supermatrices en el teorema 3.2. A nivel de algunos casos particulares hemos extendido algunos de los resultados de [30] al dar un algoritmo para obtener las factorizaciones requeridas para construir lo que hemos llamado polinomios nulos de grado mínimo, en el caso donde $a(x)$ y $d(x)$ tienen un factor común.

Capítulo 3

El Ideal Anulador de una Supermatriz Diagonal Nilpotente

Resumen

Construimos explícitamente los generadores del ideal anulador de una supermatriz diagonal nilpotente. En algunos casos el conjunto de generadores no incluye el polinomio característico estándar, sino que éste es construido a partir de los generadores del ideal. Incluimos algunos ejemplos que ilustran esta construcción.

3.1 Introducción

En la literatura se han probado muchos de los resultados fundamentales del álgebra lineal y del análisis sobre álgebras de Grassmann, los cuales proveen una base para las teorías físicas definidas en supervariedades, supergrupos de Lie, y superálgebras de Lie [34, 28, 35]. También, se han estudiado los conceptos de valores propios y vectores propios [36], funciones características [30] y un teorema tipo Cayley-Hamilton para supermatrices [37, 61]. En [36] se considera el problema de encontrar los valores propios y vectores propios de una supermatriz. Una hipótesis fundamental en esta referencia es que el cuerpo de la

supermatriz sea *separable*, es decir, que tenga valores propios distintos. Es fácil hallar ejemplos que muestran que el ideal de todos los polinomios que anulan la supermatriz usualmente no está generado por un solo elemento, es decir, no es un ideal principal, como en el caso clásico (sobre los números complejos [31]).

225994

Nuestro objetivo en éste capítulo es determinar los generadores del ideal anulador de una supermatriz diagonal nilpotente, que es el caso complementario más simple al discutido en [36]. En nuestro caso, el cuerpo de la supermatriz no es separable debido a que es idénticamente cero. De esta manera veremos algunas de las diferencias importantes que surgen en el álgebra lineal de supermatrices, con respecto al álgebra lineal clásica, que requieren de mayor discusión y generalización.

Para una supermatriz diagonal $M = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, también es cierto que el polinomio $\prod_i^n (x - \alpha_i)$, anula a la supermatriz como en el caso clásico. Sin embargo, mostraremos que en algunos casos este polinomio es solo uno de los generadores del ideal anulador de la supermatriz, mientras que en otros es construido a partir de los generadores. El método está basado en algunas identidades polinomiales y en el uso de anuladores sobre el álgebra de Grassmann.

3.2 El ideal anulador

Primero recordaremos algunas definiciones básicas [34, 28, 35, 40, 41]. Sea $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ un álgebra de Grassmann sobre los números complejos C donde Λ_0 (respectivamente Λ_1) es la parte par (respectivamente impar) de Λ . Cualquier elemento $a \in \Lambda$ es la suma de su cuerpo $\tilde{a} \in C$ y su alma $s(a)$, y el mapeo " \sim " es un homomorfismo natural de Λ en C . Si $M = (m_{ij})$ es una supermatriz sobre Λ , la matriz $\tilde{M} = (\tilde{m}_{ij})$ sobre los números complejos es llamada el cuerpo de M . Si a es cualquier elemento de un anillo R , entonces $\text{Ann}(a) = \{b \in R \mid ab = 0\}$ denotará el ideal anulador derecho del elemento a (una definición similar se tiene para el anulador izquierdo). Si el anillo R es conmutativo, simplemente hablaremos del ideal anulador. Para un anillo R denotaremos $R[x]$ al anillo

de polinomios en una variable sobre R . Si M es una matriz sobre un anillo R , $I(M)$ denotará el ideal anulador de M , es decir, $I(M) = \{f(x) \in R[x] \mid f(M) = 0\}$.

Teorema 1. Sea $M = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ una supermatriz diagonal sobre un álgebra compleja de Grassmann Λ , donde $\alpha_i \in \Lambda_0$ y $\alpha_i^{r_i} = 0$. Si $r = \max\{r_i\} > t$, donde t es el número de elementos distintos de la supermatriz. Entonces, el ideal anulador de la supermatriz M está generado por los siguientes polinomios

$$\langle x^r, \Pi_i^t(x - \alpha_i), \sum_{i=1}^{t-1} A_i \Pi_{j=1}^i(x - \alpha_j) \rangle. \quad (3.1)$$

Los coeficientes A_i son tales que

$$A_i \in \text{Ann}(V_{i+1}), \quad (3.2)$$

y satisfacen las siguientes relaciones

$$A_j^{(0)} = A_j, \quad A_j^{(k)}(\alpha_j - \alpha_{j+1+k}) = A_{j-1} - A_{j-1}^{(k+1)}, \quad (3.3)$$

donde

$$A_j^{(k)} \in \text{Ann} \left((\alpha_j - \alpha_{j+k+1}) \prod_{q=1}^{j-1} \prod_{p=q+1}^{j+k+1} (\alpha_q - \alpha_p) \right), \quad p \notin U_k, \quad (3.4)$$

para $k = 1, 2, \dots, t$ y $U_k = \{j+k, j+k-1, \dots, j+1\}$. Aquí V_{i+1} es el determinante de Vandermonde

$$V_{i+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^i \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \alpha_{i+1} & \alpha_{i+1}^2 & \dots & \alpha_{i+1}^i \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Demostración

La demostración está dada en dos pasos: (I) Primero mostraremos que el elemento

del ideal anulador es una combinación lineal de algunos polinomios especiales y (II) mostraremos que estos polinomios especiales realmente anulan a M .

(I) Sea $I(M)$ el ideal anulador de la supermatriz M . Sea $P(x) = a_mx^m + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ cualquier elemento del ideal. Este elemento puede ser escrito de la siguiente manera

$$P(x) = x^r h(x) + \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i, \quad (3.6)$$

donde $h(x)$ es un polinomio sobre Λ_0 de grado $m - r$ y $a_i \in \Lambda_0$. De la elección de r se sigue que $M^r = 0$, así para determinar el polinomio $P(x)$ es suficiente describir a

$$R(x) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i. \quad (3.7)$$

Dado que $P(M) = 0$ tenemos $R(M) = 0 = \sum_{i=0}^{r-1} a_i M^i$ y por lo tanto resultan las t ecuaciones lineales

$$\sum_{i=0}^{r-1} a_i \alpha_j^i = 0, \quad j = 1, \dots, t. \quad (3.8)$$

La idea básica de la construcción es determinar los coeficientes a_i . Iniciamos resolviendo para el coeficiente a_0 , el cual escogemos escribirlo en función de α_1 como

$$a_0 = - \sum_{i=1}^{r-1} a_i \alpha_1^i. \quad (3.9)$$

Para determinar a_1 necesitamos otra expresión de a_0 que podemos obtener de (3.9) simplemente cambiando α_1 por α_2 . Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} a_i (\alpha_2^i - \alpha_1^i) = (\alpha_2 - \alpha_1) \left(\sum_{i=2}^{r-1} a_i F_1(i-1, \alpha_2, \alpha_1) + a_1 \right) \quad (3.10)$$

donde

$$F_1(n, x, y) = \sum_{j=0}^n x^j y^{n-j} = F_1(n, y, x), \quad (3.11)$$

es tal que

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) F_1(n, x, y). \quad (3.12)$$

En el Apéndice C, están definidas las funciones $F_k(n, x, \dots)$ para $k \geq 1$ y se dan algunas de sus propiedades relevantes.

De la Eq.(3.10) concluimos que la expresión en los paréntesis cuadrados pertenece al ideal anulador $Ann(\alpha_1 - \alpha_2)$ del elemento $(\alpha_1 - \alpha_2)$. Llamaremos a éste elemento A_1 . De aquí el coeficiente a_1 está expresado en función de los elementos de la supermatriz, como la suma de A_1 , y los restantes coeficientes a_i 's, $i \geq 2$

$$a_1 = A_1 - \sum_{i=2}^{r-1} a_i F_1(i-1, \alpha_1, \alpha_2). \quad (3.13)$$

Nuevamente, para calcular coeficiente a_2 del polinomio $R(x)$ necesitamos otra expresión para a_1 . Existen $n-1$ expresiones distintas para a_1 . De estas escogemos cambiar α_2 por α_3 en (3.13) y tenemos

$$a_1 = A_1^{(1)} - \sum_{i=2}^{r-1} a_i F_1(i-1, \alpha_1, \alpha_3), \quad (3.14)$$

donde $A_1^{(1)} \in Ann(\alpha_1 - \alpha_3)$ (está definido por 3.4). En vez de esto, si cambiamos α_2 por α_4 tenemos

$$a_1 = A_1^{(2)} - \sum_{i=2}^{r-1} a_i F_1(i-1, \alpha_1, \alpha_4), \quad (3.15)$$

donde $A_1^{(2)} \in Ann(\alpha_1 - \alpha_4)$.

Ahora definimos un método sistemático para obtener el siguiente coeficiente a_2 escogiendo la ecuación (3.14), la cual contiene $A_1^{(1)}$, para continuar el cálculo. Restando ahora las relaciones (3.13) y (3.14) y usando las propiedades de la función $F_1(n, x, y)$ (ver Apéndice C) llegamos a

$$A_1^{(1)} - A_1 = (\alpha_3 - \alpha_2) \left[\sum_{i=3}^{r-1} a_i F_2(i-2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + a_2 \right]. \quad (3.16)$$

Multiplicando esta ecuación por $(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$ concluimos que la expresión en los paréntesis cuadrados, la cual llamamos A_2 , que pertenece al anulador $Ann(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 -$

$\alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) = \text{Ann}(V_3)$. De esta manera obtenemos la siguiente expresión para el coeficiente a_2

$$a_2 = A_2 - \sum_{i=3}^{r-1} a_i F_2(i-2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (3.17)$$

Repitiendo el procedimiento anterior una vez más generamos otra expresión para a_2 . Esta vez cambiando α_3 por α_4 en (3.17)

$$a_2 = A_2^{(1)} - \sum_{i=3}^{r-1} a_i F_2(i-2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), \quad (3.18)$$

donde $A_2^{(1)}$ está en el anulador correspondiente. Restando (3.17) y (3.18) y usando las propiedades de la función $F_k(n, x, y, \dots)$ (ver Apéndice C) se determina el coeficiente a_3 .

Podemos escribir una expresión general para a_k , con $0 \leq k \leq t-1$

$$a_k = A_k^{(m-k-1)} - \sum_{i=k+1}^{r-1} a_i F_k(i-k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_m), \quad (3.19)$$

donde las $A_k^{(m)}$ pertenecen a los anuladores definidos en (3.4), y $m = k+1, \dots, t$. Cuando $k < t$ debemos calcular el siguiente coeficiente a_{k+1} . Siguiendo el método que hemos definido, necesitamos otra expresión para a_k que incluya solo $A_k^{(1)}$. Por lo tanto de (3.19), podemos considerar las siguientes dos expresiones para a_k

$$a_k = A_k - \sum_{i=k+1}^{r-1} a_i F_k(i-k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}), \quad (3.20)$$

$$a_k = A_k^{(1)} - \sum_{i=k+1}^{r-1} a_i F_k(i-k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+2}), \quad (3.21)$$

donde A_k y $A_k^{(1)}$ están en los anuladores correspondientes dados por (3.4). Restando estas dos ecuaciones encontramos

$$\begin{aligned} A_k^{(1)} - A_k &= (\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2}) \left[\sum_{i=k+1}^{r-1} a_i F_{k+2}(i-k), \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2} \right] + a_{k+1} \\ &\equiv (\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2}) A_{k+1}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

de donde obtenemos

$$a_{k+1} = A_{k+1} - \sum_{i=k+2}^{r-1} a_i F_k(i-k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+2}). \quad (3.23)$$

Ahora identificaremos el anulador al que pertenece A_{k+1} . Para este fin, multiplicamos (3.22) por el producto que define los anuladores a los cuales A_k y $A_k^{(1)}$ pertenecen. Estos productos están dados en las Eqs. (3.2) y (3.4) y están escritos aquí en una forma ligeramente diferente

$$A_k \in \text{Ann}(V_{k+1}) = \text{Ann} \Pi_{q < p}^{k+1}(\alpha_q - \alpha_p) = \text{Ann} \Pi_{q=1}^k \Pi_{p=q+1}^{k+1}(\alpha_q - \alpha_p), \quad (3.24)$$

$$A_k^{(1)} \in \text{Ann} \left[(\alpha_k - \alpha_{k+2}) \Pi_{q=1}^k \Pi_{p=q+1}^{k+2, p \neq k+1}(\alpha_q - \alpha_p) \right]. \quad (3.25)$$

Multiplicando (3.22) por los factores en (3.24) anulamos A_k . Para anular $A_k^{(1)}$ también, debemos multiplicar por factores restantes en (3.25),

$$\Pi_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_{k+2}), \quad (3.26)$$

obteniendo

$$A_{k+1}(\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2}) \Pi_{q=1}^k \Pi_{p=q+1}^{k+2}(\alpha_q - \alpha_p) = 0, \quad (3.27)$$

lo cual implica que $A_{k+1} \in V_{k+2}$.

Queremos enfatizar que los restantes $r-t$ coeficientes a_p , con $p = t, t+1, \dots, r-1$ no pueden ser determinados y no es necesario hacerlo. Es importante observar que tenemos cierta libertad en la construcción de los coeficientes a_k , la cual viene de la elección de la segunda ecuación que necesitamos generar para determinar el coeficiente correspondiente. Esta característica se observa en la dependencia de m del lado derecho de Eq.(3.19).

Una vez que los primeros t coeficientes a_k han sido obtenidos, el polinomio $R(x)$ puede

escribimos

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t-1} A_i \prod_{j=1}^i (x - \alpha_j). \quad (3.29)$$

Es suficiente ver que todos los elementos de matriz distintos α_i son raíces de $f(x)$. Esto puede mostrarse como sigue:

- i) $f(\alpha_1) = 0$ dado que $(x - \alpha_1)$ es un factor de todas las A_i 's en la expresión de $f(x)$.
- (ii) $f(\alpha_2) = A_1(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$ ya que $A_1 \in \text{Ann}(\alpha_2 - \alpha_1)$.
- (iii) $f(\alpha_3) = A_1(\alpha_3 - \alpha_1) + A_2(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$. Usando la relación (3.3) tenemos

$$A_2(\alpha_2 - \alpha_3) = A_1 - A_1^{(1)} \quad (3.30)$$

y de aquí, usando la relación (3.4), obtenemos

$$A_2(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) = (A_1^{(1)} - A_1)(\alpha_3 - \alpha_1) = -A_1(\alpha_3 - \alpha_1), \quad (3.31)$$

de la cual se sigue que $f(\alpha_3) = 0$.

- (iv) En general si $2 \leq m \leq t$ entonces

$$f(\alpha_m) = A_1(\alpha_m - \alpha_1) + A_2(\alpha_m - \alpha_1)(\alpha_m - \alpha_2) + \cdots + A_{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_m - \alpha_j). \quad (3.32)$$

Ahora, usando la relación (3.3) tenemos

$$A_{m-1}(\alpha_{m-1} - \alpha_m) = A_{m-2} - A_{m-2}^{(1)}. \quad (3.33)$$

Sustituyendo esta expresión en $f(\alpha_m)$ nos lleva a

$$\begin{aligned} f(\alpha_m) &= A_1(\alpha_m - \alpha_1) + \cdots - A_{m-1}(\alpha_{m-1} - \alpha_m) \prod_{j=1}^{m-2} (\alpha_m - \alpha_j), \\ &= A_1(\alpha_m - \alpha_1) + \cdots - (A_{m-2} - A_{m-2}^{(1)}) \prod_{j=1}^{m-2} (\alpha_m - \alpha_j), \\ &= A_1(\alpha_m - \alpha_1) + \cdots + A_{m-2} \prod_{j=1}^{m-2} (\alpha_m - \alpha_j) + \\ &\quad - (A_{m-2} - A_{m-2}^{(1)}) \prod_{j=1}^{m-2} (\alpha_m - \alpha_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_1(\alpha_m - \alpha_1) + \cdots + A_{m-3}\prod_{j=1}^{m-3}(\alpha_m - \alpha_j) + \\
&\quad + A_{m-2}^{(1)}\prod_{j=1}^{m-2}(\alpha_m - \alpha_j).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Nuevamente usando la relación (3.3) tenemos

$$A_{m-2}^{(1)}(\alpha_{m-2} - \alpha_m) = A_{m-3} - A_{m-3}^{(2)}, \tag{3.35}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
f(\alpha_m) &= A_1(\alpha_m - \alpha_1) + \cdots + A_{m-3}\prod_{j=1}^{m-3}(\alpha_m - \alpha_j) + \\
&\quad - (A_{m-3} - A_{m-3}^{(2)})\prod_{j=1}^{m-3}(\alpha_m - \alpha_j), \\
&= A_1(\alpha_m - \alpha_1) + \cdots + A_{m-4}\prod_{j=1}^{m-4}(\alpha_m - \alpha_j) + \\
&\quad + A_{m-3}^{(2)}\prod_{j=1}^{m-3}(\alpha_m - \alpha_j).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Usando repetidamente las expresiones (3.3) y (3.4) finalmente tenemos

$$f(\alpha_m) = A_1^{(m-2)}(\alpha_m - \alpha_1) = 0, \tag{3.37}$$

dado que $A_1^{(m-2)} \in \text{Ann}(\alpha_m - \alpha_1)$.

Por lo tanto, los argumentos anteriores muestran que los elementos de la matriz diagonal M son raíces del polinomio $f(x)$ y por lo tanto anula a M . Esto concluye la prueba del Teorema 1.

Puede obtenerse resultados semejantes cuando el grado máximo de nilpotencia r de los números de Grassmann es menor o igual al número de elementos distintos de la matriz. Como un ejemplo de estos resultados tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2. Si $\max\{r_i\} = r = t$, entonces el ideal anulador de la supermatriz M está

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{t-2} (x - \alpha_j) \left\{ a_{t-1} F_{t-1}(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{t-1}, x) + a_{t-2} \right\} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{t-3} A_i \prod_{j=1}^i (x - \alpha_j), \\
&= \prod_{j=1}^{t-1} (x - \alpha_j) A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} A_i \prod_{j=1}^i (x - \alpha_j). \tag{3.42}
\end{aligned}$$

225994

De esta forma el resultado final es

$$R(x) = \sum_{i=1}^{t-1} A_i \prod_{j=1}^i (x - \alpha_j), \tag{3.43}$$

esto completa la primera parte de la demostración.

Omitimos la segunda parte de la prueba pues sigue las mismas ideas que en el caso previo.

Para el caso de que el grado máximo de nilpotencia de los números de Grassmann sea menor que el número de elementos distintos en la diagonal, tenemos el siguiente:

Teorema 3. Si $\max\{r_i\} = r < t$, entonces el ideal anulador de la supermatriz M está generado por los siguientes polinomios

$$\langle x^r, \sum_{i=1}^{r-1} A_i \prod_{j=1}^i (x - \alpha_j) \rangle, \tag{3.44}$$

donde los coeficientes A_i deben satisfacer las siguientes $t - r$ condiciones de consistencia

$$\sum_{i=1}^{r-1} A_i \prod_{j=1}^i (\alpha_k - \alpha_j) = 0, \quad k = r, \dots, t. \tag{3.45}$$

Las definiciones para los $A_i^{(k)}$ son exactamente las mismas que en el teorema 1.

Omitimos la demostración pues sigue las mismas ideas que los casos anteriores.

Observemos que de acuerdo a los resultados anteriores, en general cuando $r \leq t$, el polinomio característico estándar $P(x) = \prod_{i=1}^t (x - \alpha_i)$, no aparece explícitamente como un generador del ideal correspondiente sin embargo podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4. Si $r < t$, el polinomio característico estándar $P(x) = \prod_{i=1}^t (x - \alpha_i)$, puede ser generado por los polinomios x^r , $\sum_{i=1}^{r-1} A_i \prod_{j=1}^i (x - \alpha_j)$ donde los coeficientes A_i están dados por

$$A_{r-1} = (-1)^{t-(r-1)} S_{t-r+1}^t, \quad (3.46)$$

$$A_{r-p} = (-1)^{t-(r-p)} S_{r-p}^t + \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{p+1-j} A_{r-j} S_{p-j}^{r-j}, \quad (3.47)$$

donde $p = 1, \dots, (r-1)$ y

$$S_k^i = \sum_{q_j < q_{j+1}} \alpha_{q_1} \dots \alpha_{q_k}, \quad j \in \{1, \dots, i\}, \quad (3.48)$$

son las funciones simétricas de k elementos tomados entre los primeros i elementos diagonales α_p , $p = 1, \dots, i$.

Demostración: Dado que $P(M) = 0$, $P(x) \in I(M)$ por lo tanto puede ser escrito en función de los generadores. Para identificar los coeficientes A_i podemos escribir el polinomio característico estándar como

$$\begin{aligned} P(x) &= x^t + \sum_{k=1}^t (-1)^k S_k^t x^{t-k}, \\ &= x^t + \sum_{k=1}^N (-1)^k S_k^t x^{t-k} + \sum_{k=N+1}^t (-1)^k S_k^t x^{t-k}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde $N = t - r$. Los primeros dos términos en la Eq.(3.49) son claramente generados por x^r . Por lo tanto, basta probar que el último término Eq.(3.49) es generado con una elección adecuada de los coeficientes A_i . Para identificarlos reescribiremos esta suma en la siguiente forma

$$\sum_{i=1}^{r-1} A_i \prod_{j=1}^i (x - \alpha_j) = x^{r-1} A_{r-1} + \sum_{m=2}^r x^{r-m} \left\{ \sum_{k=1}^m (-1)^{k+m} A_{r-k} S_{m-k}^{r-k} \right\}. \quad (3.50)$$

Comparando coeficientes de la misma potencia en x en las Eqs. (3.49), (3.50) obtenemos

los resultados deseados dados en las Eqs. (3.46), (3.47).

Observemos que los coeficientes A_i pertenecen a sus anuladores correspondientes. En particular, verificaremos explícitamente que A_{r-1} pertenece a $Ann(V_r)$. Con este fin usaremos la identidad [44]

$$S_i^k V_k = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{k-i+1} & \alpha_1^{k-i+2} & \dots & \alpha_1^k \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{k-i+1} & \alpha_2^{k-i+2} & \dots & \alpha_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_k & \dots & \alpha_k^{k-i+1} & \alpha_k^{k-i+2} & \dots & \alpha_k^k \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

donde V_k es como se definió en el teorema 1 (observe que no hay suma sobre k), junto con las propiedades de composición de los S_i^k

$$\begin{aligned} S_{r-1}^t &= S_{r-1}^{t-1} + S_{r-2}^{t-1} \alpha_t, \\ &= S_{r-1}^{t-2} + S_{r-2}^{t-2} (\alpha_{t-1} + \alpha_t) + S_{r-3}^{t-2} \alpha_t \alpha_{t-1}, \\ &= S_{r-1}^{t-3} + S_{r-2}^{t-3} (\alpha_{t-1} + \alpha_{t-2} + \alpha_{t-3}) \\ &\quad + S_{r-3}^{t-3} (\alpha_{t-1} \alpha_t + \alpha_{t-2} \alpha_t + \alpha_{t-1} \alpha_{t-2}) + S_{r-4}^{t-3} \alpha_t \alpha_{t-1} \alpha_{t-2}, \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} S_{r-i}^{t-N} \tilde{S}_{i-1}^N, \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} S_{r-i}^r \tilde{S}_{i-1}^N. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Aquí \tilde{S}_i^k está definido en completa analogía con (3.48) excepto que ahora

$$\tilde{S}_i^k = \sum \alpha_{t-q_1} \alpha_{t-q_2} \dots \alpha_{t-q_i}, \quad q_j \in \{0, \dots, k-1\}. \quad (3.53)$$

Finalmente, usando (3.51) junto con el hecho de que la nilpotencia es r concluimos que $S_k^r V_r = 0$ y por lo tanto $A_{r-1} \in Ann(V_r)$.

3.3 Ejemplos

En esta sección presentamos dos ejemplos detallados enfatizando los casos más interesantes donde $r \leq t$. En ambos casos mostraremos explícitamente que el polinomio característico estándar $P(x) = \prod_{i=1}^t (x - \alpha_i)$ pertenece al ideal correspondiente. Por simplicidad tomaremos $t = n$, con $\alpha_i^{r_i} = 0$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ and $r = \max\{r_i\}$. Trataremos separadamente dos casos: (i) $r = t = 4$ and (ii) $r = 3 < 5 = t$.

Caso (i): $r = t = 4$.

Inmediatamente identificamos x^4 como el primer generador del ideal anulador. Los restantes generadores están contenidos en el polinomio de tercer grado

$$R(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0. \quad (3.54)$$

De $R(M) = 0$ obtenemos las siguientes ecuaciones para los coeficientes a_i

$$\sum_{i=0}^3 a_i \alpha_j^i = 0, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (3.55)$$

Siguiendo el procedimiento dado anteriormente para determinar los coeficientes encontramos

$$a_0 = -\sum_{i=1}^3 a_i \alpha_1^i. \quad (3.56)$$

Otra expresión para a_0 la obtenemos de (3.56) cambiando α_1 por α_2 . Tomando la diferencia entre la ecuación resultante y (3.56) obtenemos la siguiente expresión para el coeficiente a_1 .

$$0 = (\alpha_2 - \alpha_1) \left[\sum_{i=2}^3 a_i F_1(i-1, \alpha_1, \alpha_2) + a_1 \right]. \quad (3.57)$$

El término entre los paréntesis cuadrados, el cual llamaremos A_1 , pertenece al anulador $B_0 = \text{Ann}(V_2)$, por lo tanto podemos escribir

$$a_1 = A_1 - \sum_{i=2}^3 a_i F_1(i-1, \alpha_1, \alpha_2). \quad (3.58)$$

Nuevamente, necesitamos una expresión adicional para a_1 y la obtenemos a partir de la anterior haciendo la sustitución de α_2 por α_3

$$a_1 = A_1^{(1)} - \sum_{i=2}^3 a_i F_1(i-1, \alpha_1, \alpha_3), \quad (3.59)$$

donde $A_1^{(1)} \in \text{Ann}(\alpha_1 - \alpha_3)$. Estas relaciones nos permiten determinar a_2 restando las correspondientes expresiones (3.58,3.59)

$$a_2 = A_2 - a_3 F_2(1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (3.60)$$

Haciendo el cambio α_3 por α_4 en la expresión anterior obtenemos

$$a_2 = A_2^{(1)} - a_3 F_2(1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4), \quad (3.61)$$

donde

$$A_2 \in B_1 = \text{Ann}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3), \quad (3.62)$$

$$A_2^{(1)} \in B_2 = \text{Ann}(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (3.63)$$

Tomando la diferencia entre (3.60) y (3.61), encontramos

$$a_3(\alpha_3 - \alpha_4) + A_2^{(1)} - A_2 = 0. \quad (3.64)$$

Multiplicando esta ecuación por $(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)$ y usando las Eqs. (3.62) y (3.63) concluimos que

$$a_3 = A_3 \in \text{Ann}(V_4). \quad (3.65)$$

Sustituyendo las expresiones para los coeficientes a_i en $R(x)$ obtenemos

$$R(x) = A_3(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) + A_2(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + A_1(x - \alpha_1). \quad (3.66)$$

Una vez que hemos determinado los coeficientes a_i , el siguiente paso es mostrar que el polinomio característico estándar pertenece al ideal anulador generado por los polinomios

$$\langle x^4, \sum_{i=1}^3 A_i \Pi_{j=1}^i(x - \alpha_j) \rangle. \quad (3.67)$$

Para esto escogemos $A_3 = -\sum_{i=1}^4 \alpha_i$. Los restantes A_j , $j = 1, 2$ los determinamos por la sustitución de A_3 en $R(x)$ identificando las potencias correspondientes de x en $P(x)$ y $R(x)$. Los resultados son

$$A_2 = -(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), \quad (3.68)$$

$$A_1 = -(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1^3 + \alpha_2^3). \quad (3.69)$$

Es un cálculo directo pero tedioso mostrar que cada uno de los anteriores coeficientes A_i , $i = 1, 2, 3$, pertenecen al anulador correspondiente $\text{Ann}(V_{i+1})$.

Caso (ii): $r = 3 < 5 = t$.

Este ejemplo muestra la situación cuando $r < t$. También mostraremos que el polinomio característico estándar $P(x) = \prod_{i=1}^5(x - \alpha_i)$ pertenece al ideal generado por los polinomios

$$\langle x^3, \sum_{i=1}^2 A_i \Pi_{j=1}^i(x - \alpha_j) \rangle. \quad (3.70)$$

Los generadores no triviales del ideal están ahora contenidos en el polinomio de segundo grado

$$R(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0. \quad (3.71)$$

Siguiendo el procedimiento propuesto obtenemos los siguientes valores para los coeficientes

$$\begin{aligned}
a_0 &= -a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2^2, \\
a_1 &= A_1 - a_2(\alpha_2 + \alpha_1), \\
a_2 &= A_2,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

donde $A_1 \in B_0 = \text{Ann}(V_2)$, $A_2 \in B_2 = \text{Ann}(V_3)$ y A_1, A_2 están sujetos a las condiciones de consistencia

$$A_2(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2) + A_1(\alpha_k - \alpha_1) = 0, \tag{3.73}$$

para los valores restantes de $k = 4, 5$. Sustituyendo a_0, a_1, a_2 en $R(x)$ obtenemos

$$R(x) = A_2(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + A_1(x - \alpha_1). \tag{3.74}$$

En lo que sigue mostraremos que el polinomio característico estándar $P(x)$ pertenece al ideal $I(M)$. De las ecuaciones (3.46) y (3.47) encontramos A_1 y A_2

$$\begin{aligned}
A_2 &= -S_3^5, \\
A_1 &= S_4^5 - S_3^5 S_1^2.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Ahora verificamos que cada A_i pertenece al anulador $\text{Ann}(V_{i+1})$. El elemento $A_2 \in \text{Ann}(V_3)$ de la demostración general (3.52). Para probar que $A_1 \in \text{Ann}(V_2)$ seguimos un procedimiento similar al de la demostración de (3.52). La idea principal es hacer explícita la dependencia sobre los factores α_5, α_4 y α_3 . La propiedad básica que estamos usando es la primera línea de (3.52) que nos lleva a

$$\begin{aligned}
A_1 &= S_4^5 - S_3^5 S_1^2, \\
&= \alpha_5 S_3^4 + S_4^4 - \alpha_5 S_2^4 S_1^2 - S_3^4 S_1^2, \\
&= \alpha_5(\alpha_4 S_2^3 + S_3^3) + \alpha_4 S_3^3 - \alpha_5 S_1^2(\alpha_4 S_1^2 + S_2^3) - S_1^2(\alpha_4 S_2^3 + S_3^3),
\end{aligned}$$

$$= \alpha_5(S_3^3 - S_1^2 S_2^3) + \alpha_4 \alpha_5(S_2^3 - S_1^2 S_1^3) + \alpha_4(S_3^3 - S_1^2 S_2^3) - S_1^2 S_3^3. \quad (3.76)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} S_3^3 - S_1^2 S_2^3 &= \alpha_3 S_2^2 - S_1^2(\alpha_3 S_1^2 + S_2^2), \\ &= \alpha_3(S_2^2 - (S_1^2)^2) - S_1^2 S_1^2, \\ &= \alpha_3 F_1(2, \alpha_1, \alpha_2) - S_1^2 S_2^2. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Usando (3.77) en (3.76) podemos escribir

$$A_1 = (\alpha_4 + \alpha_5)(\alpha_3 F_1(2, \alpha_1, \alpha_2) - S_1^2 S_2^2) - \alpha_4 \alpha_5 F_1(2, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_3 S_1^2 S_2^2. \quad (3.78)$$

De la definición (C.1 del apéndice C) tenemos

$$F_1(2, \alpha_1, \alpha_2) V_2 = \alpha_1^3 - \alpha_2^3, \quad (3.79)$$

junto con

$$S_2^2 S_1^2 V_2 = \alpha_1 \alpha_2 \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Como la nilpotencia es $r = 3$ concluimos que $A_1 \in \text{Ann}(V_2)$. Podemos mostrar también que las condiciones de consistencia impuestas por las Eqs.(3.73) se satisfacen para nuestra elección particular de los coeficientes A_i en las Eqs.(3.75).

3.4 Conclusiones

Hemos mostrado que para una supermatriz diagonal $M = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ también es cierto que el polinomio $\Pi_i^n(x - \alpha_i)$, anula a la supermatriz como en el caso clásico, y hemos mostrado también que en algunos casos este polinomio es solo uno de los genera-

dores del ideal anulador de la supermatriz, mientras que en otros, es construido a partir de los generadores. Nuestro método está basado en algunas identidades polinomiales y en el uso de anuladores en el álgebra de Grassmann.

Los cálculos realizados en éste capítulo, muestran que aún en el caso simple de supermatrices diagonales nilpotentes es necesaria la introducción de los anuladores, que resultan complicados y poco prácticos, por lo que es necesario buscar un nuevo enfoque del problema para construir una herramienta útil para el cálculo de los polinomios anuladores de una supermatriz arbitraria.

Capítulo 4

Modelos Basados en la Acción de Chern-Simons 5-dimensional

Resumen

Clásicamente se estudia la proyección a 3+1 dimensiones de la acción 5-dimensional de CS para los grupos $SO(1,5)$, $SO(2,4)$. Usamos el ansatz de Kaluza-Klein para obtener un modelo unificado en 3+1 dimensiones de la gravedad de de Sitter con electromagnetismo no lineal más un campo escalar. Estudiamos también las consecuencias cosmológicas en 3+1 dimensiones de esta acción de CS en el caso de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

4.1 Introducción

Los intentos anteriores por construir teorías de la gravedad como teorías de norma a partir de los grupos de Lorentz y Poincaré en cuatro dimensiones [63],[64], llevaron a la construcción de acciones geométricas que no podían usarse para unificar gravedad con otras interacciones conocidas en el marco de una teoría de norma renormalizable.

Por otra parte, en 3 dimensiones han sido construídos diferentes modelos topológicos de la gravedad [65],[66] y su extensión al espacio de Riemann-Cartan [67]. En particular

una teoría de la gravedad en 3 dimensiones renormalizable y finita, obtenida a partir de la acción de CS fué construída por Witten [2] para los grupos $ISO(1,2)$, $SO(1,3)$ o $SO(2,2)$. Estudios similares se realizaron en dos dimensiones ([3],[72]).

Nuestro interés es estudiar la proyección a 4 dimensiones de una teoría de CS 5 dimensional que naturalmente incorpore la gravedad de Einstein con constante cosmológica. Con este objeto consideramos los grupos $SO(1,5)$ y $SO(2,4)$, cuya conexión unifica los coeficientes de rotación de Ricci 5 dimensional y el fünfbein. **225994**

Utilizamos dos alternativas para llevar a cabo la reducción dimensional: (1) Mediante el ansatz de Kaluza Klein obtenemos un modelo unificado en 3+1 dimensiones que incluye la gravitación de Einstein con constante cosmológica más una electrodinámica no lineal y un campo escalar. (2) Empleando una métrica de FRW en el vacío 5 dimensional obtenemos un modelo para la evolución del factor de escala del universo en 3+1 dimensiones, con un fluido perfecto efectivo originado básicamente por la 5ª dimensión

4.2 Acción de Chern-Simons en 4+1 dimensiones

La acción de CS correspondiente al grupo $SO(1,5)$ o $SO(2,4)$ está dada por

$$S = k \int_{M_5} tr (A(dA)^2 + \frac{3}{2}A^3 dA + \frac{3}{5}A^5), \quad (4.1)$$

donde la conexión es $A = A_{\hat{\mu}}^{\bar{B}\bar{C}} J_{\bar{B}\bar{C}} dx^{\hat{\mu}}$. Los índices espacio temporales son $\hat{\mu} = (\mu, 5)$ con $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $J_{\bar{B}\bar{C}}$ son los generadores del grupo con las siguientes convenciones de índices internos: $\bar{B} = (B, 6)$, $B = (b, 5)$, $b = 0, 1, 2, 3$. El tensor invariante del grupo es $tr (J_{\bar{A}\bar{B}} J_{\bar{C}\bar{D}} J_{\bar{E}\bar{F}}) = \epsilon_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}}$.

Las ecuaciones de movimiento de la conexión $A^{\bar{A}\bar{B}}$ son

$$\epsilon_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}} F^{\bar{C}\bar{D}} \wedge F^{\bar{E}\bar{F}} = 0, \quad (4.2)$$

donde $F^{\bar{A}\bar{B}} = dA^{\bar{A}\bar{B}} + A^{\bar{A}\bar{C}} \wedge A_{\bar{C}}^{\bar{B}}$.

Para hacer contacto con la teoría de la gravedad de Einstein hacemos la siguiente descomposición (tipo Kaluza-Klein)

$$A^{BC} = \tilde{\omega}^{BC}, \quad A^{B6} = l \tilde{e}^B, \quad (4.3)$$

donde l es una constante con dimensiones de longitud, necesaria para cumplir con el requerimiento de que la uno forma de conexión A sea adimensional. Los índices \bar{A} son subidos o bajados por una métrica local de Lorentz. Ignorando términos de frontera, la descomposición anterior nos permite reescribir la acción (4.1) en la forma:

$$\begin{aligned} I_5(\tilde{e}^A, \tilde{\omega}^{BC}) = & 3kl \int \epsilon_{ABCDE} (\tilde{e}^A \wedge \tilde{R}^{BC} \wedge \tilde{R}^{CD} + \\ & + \frac{2}{3} \lambda l^2 \tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B \wedge \tilde{e}^C \wedge \tilde{R}^{DE} + \\ & + \frac{\lambda^2}{5} l^4 \tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B \wedge \tilde{e}^C \wedge \tilde{e}^D \wedge \tilde{e}^E), \end{aligned} \quad (4.4)$$

El primer término en (4.4) es de la forma de Gauss-Bonnet 5 dimensional, el segundo es el correspondiente al término de Einstein 5-dimensional y el tercero representa la constante cosmológica. La constante λ está relacionada con la signatura del grupo de norma

$$\begin{aligned} \lambda &= +1 \text{ para } SO(2,4) \\ \lambda &= -1 \text{ para } SO(1,5). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aquí $\tilde{R}^{AB} = d\tilde{\omega}^{AB} + \tilde{\omega}^A_C \wedge \tilde{\omega}^{CB}$ es la dos forma de curvatura correspondiente a la conexión $\tilde{\omega}^{AB}$ de $S0(1,4)$. Las ecuaciones de movimiento que resultan de la acción (4.4) están dadas por [3]

$$\begin{aligned} \epsilon_{ABCDE} (\tilde{R}^{AB} + \lambda \tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B) \wedge (\tilde{R}^{CD} + \lambda \tilde{e}^C \wedge \tilde{e}^D) &= 0 \\ \epsilon_{ABCDE} (\tilde{R}^{AB} + \lambda \tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B) \wedge \tilde{T}^C &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $\tilde{T}^A = d\tilde{e}^A + \tilde{\omega}^A_B \wedge \tilde{e}^B$. En nuestros cálculos usaremos siempre la torsión igual a cero ($\tilde{T}^A = 0$).

4.3 Reducción tipo Kaluza-Klein de la Acción de CS

En esta sección exploramos la posibilidad de que la acción (4.4) describa una teoría unificada de los campos: Gravitacional, electromagnético y escalar. Con este objeto implementamos nuevamente una reducción tipo Kaluza-Klein escogiendo ahora la siguiente descomposición para la métrica 5-dimensional:

$$ds^2 = g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} dx^{\hat{\mu}} dx^{\hat{\nu}} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \phi (dx^5 + A_\mu dx^\mu)^2. \quad (4.7)$$

donde ϕ es un campo escalar, A_μ representa la conexión electromagnética y $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico 4-dimensional.

Distinguiremos entre los índices 4 dimensionales y 5-dimensionales en la siguiente forma:

$$\hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, 1, 2, 3, 5 \quad , \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

y consideramos que la métrica (4.7) satisface $g_{\hat{\mu}\hat{\nu},5} = 0$. En un marco local de Lorentz $\eta_{AB} = \text{diag}(+, -, -, -, -)$ las componentes de la 2-forma de curvatura 5-dimensional están dadas por:

$$R^a_5 = \frac{1}{2} \phi^{-1} \nabla \phi^a e^5 + \frac{1}{2} \sqrt{\phi} \nabla F^a_b e^b + \frac{1}{4} \left\{ \phi F^a_p F^p_b - \frac{\phi^a \phi_b}{\phi} \right\} e^5 e^b \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} R^a_b &= r^a_b + \frac{1}{2} \sqrt{\phi} \nabla F^a_b e^5 + \frac{1}{2\sqrt{\phi}} \left\{ \phi_p F^a_b + \frac{1}{2} (F^a_p \phi_b - F_{bp} \phi^a) \right\} e^p e^5 + \\ &+ \frac{1}{4} \phi (F^a_b F_{cd} + F^a_c F_{bd}) e^c e^d. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Donde R^a_b y R^a_5 corresponden a las diferentes componentes de la curvatura \tilde{R}^{AB} . El

operador ∇ representa la conexión correspondiente a la métrica $g_{\mu\nu}$. Los índices $a, b = 0, 1, 2, 3$, rotulan la base de 1-formas $\tilde{e}_a = \{e^a, e^5\}$ que satisfacen $e_\mu^a \eta_{ab} e_\nu^b = g_{\mu\nu}$ y e^5 está dado por:

$$e^5 = \sqrt{\phi}(dx^5 + A_\mu dx^\mu). \quad (4.11)$$

Separamos la acción (4.4) en 3 partes definiendo[71]:

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv 3k\eta \int \epsilon_{ABCDE} \tilde{e}^A \wedge \tilde{R}^{BC} \wedge \tilde{R}^{DE}, \\ S_2 &\equiv 3k\eta^3 \int \frac{2}{3} \lambda \epsilon_{ABCDE} \tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B \wedge \tilde{e}^C \wedge \tilde{R}^{DE}, \\ S_3 &\equiv 3k\eta^5 \int \frac{\lambda^2}{5} \epsilon_{ABCDE} \tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B \wedge \tilde{e}^C \wedge \tilde{e}^D \wedge \tilde{e}^E. \end{aligned} \quad (4.12)$$

En el cálculo de la primera parte de la acción S_1 separamos además las partes 4-dimensional y 5-dimensional en el integrando, de lo cual resulta:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ABCDE} \tilde{e}^A \tilde{R}^{BC} \tilde{R}^{DE} &= \delta_{ABCDE}^{12345} \tilde{e}^A \tilde{R}^{BC} \tilde{R}^{DE} \\ &= \delta_{abcd}^{1234} \delta_E^5 Q^{abcdE} - \delta_{abcd}^{1234} \delta_D^5 Q^{abcDe} + \\ &\quad + \delta_{abcd}^{1234} \delta_C^5 Q^{abCde} - \delta_{abcd}^{1234} \delta_B^5 Q^{abcDe} + \\ &\quad + \delta_{abcd}^{1234} \delta_A^5 Q^{abcdE}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $Q^{ABCDE} \equiv \tilde{e}^A \tilde{R}^{BC} \tilde{R}^{DE}$, y $\delta_{h_1 \dots h_r}^{j_1 \dots j_r}$ representa la delta generalizada de Kronecker, que está definida en términos del determinante de orden r de las deltas de Kronecker estándares:

$$\delta_{h_1 \dots h_r}^{j_1 \dots j_r} = \begin{vmatrix} \delta_{h_1}^{j_1} & \delta_{h_2}^{j_2} & \dots & \delta_{h_r}^{j_r} \\ \delta_{h_1}^{j_1} & \delta_{h_1}^{j_1} & \dots & \delta_{h_1}^{j_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{h_1}^{j_1} & \delta_{h_1}^{j_1} & \dots & \delta_{h_1}^{j_1} \end{vmatrix}. \quad (4.14)$$

El tensor de Levi-Civita, en términos de las δ 's generalizadas, está dado por $\epsilon_{h_1 \dots h_n} \equiv \delta_{h_1 \dots h_n}^{12 \dots n}$. Usando la antisimetría de la 2-forma de curvatura y que cada una de las cantidades

son escalares, obtenemos finalmente:

$$\epsilon_{ABCDE} \tilde{e}^A \tilde{R}^{BC} \tilde{R}^{DE} = \epsilon_{abcd} e^5 R^{ab} R^{cd} - 4 \epsilon_{abcd} e^a R^{5b} R^{cd}. \quad (4.15)$$

Continuando con el proceso de reducción, reescribimos la acción en términos de los correspondientes campos tensoriales, suprimiendo la parte correspondiente al término de Gauss-Bonnet en 4 dimensiones. Además debido a la independencia de los campos en la 5ª coordenada, la integración respecto a esta coordenada nos da un radio constante que podemos eliminar mediante una elección adecuada de los parámetros. Bajo estas condiciones la parte S_1 resulta:

$$\begin{aligned} S_1 = & \frac{3k}{5!} l \int \sqrt{-g} \left(r \left(\frac{7}{2} \phi F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{2}{\phi^2} \phi_\alpha \phi^\alpha \right) - r^\alpha{}_\beta \left(14 \phi F_{\rho\alpha} F^{\rho\beta} + \frac{4}{\phi^2} \phi_\alpha \phi^\beta \right) + \right. \\ & + \phi r^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \left(F_{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} + 5 F^\rho{}_\alpha F^\sigma{}_\beta \right) + \frac{9}{16} \phi^2 \left(2 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\rho} F^{\rho\sigma} F_{\beta\sigma} - F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) + \\ & - \frac{9}{2\phi} \left(F^{\beta\alpha} F_{\beta\alpha} \phi_\sigma \phi^\sigma + 2 F^{\alpha\beta} F_{\beta\sigma} \phi_\alpha \phi^\sigma \right) + 14 F_{\alpha\beta} \phi^\alpha \nabla_\sigma F^{\beta\sigma} + 6 F_{\beta\sigma} \phi^\alpha \nabla_\alpha F^{\beta\sigma} + \\ & \left. + 2 F^{\alpha\beta} \phi^\sigma \nabla_\alpha F_{\sigma\beta} - \frac{4}{\phi} \nabla_\alpha \phi^\alpha r + \frac{8}{\phi} \nabla_\beta \phi^\alpha r^\beta{}_\alpha \right) d^4 x. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para la parte S_2 de la acción obtenemos:

$$S_2 = \frac{3k}{5!} \lambda l^3 \int \sqrt{-g} \left(12 r + \phi F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - 24 \frac{\phi_\alpha \phi^\alpha}{\phi^2} \right) d^4 x \quad (4.17)$$

Y finalmente la parte S_3 de la acción es:

$$S_3 = \frac{3k}{5!} \frac{\lambda^2}{5} l^5 \int \sqrt{-g} d^4 x, \quad (4.18)$$

4.3.1 Campo escalar constante ($\phi = 1$) y espacio plano ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$)

La acción (4.16, 4.17 y 4.18) describe el acoplamiento de una electrodinámica no lineal con el campo gravitacional y escalar. En un intento por relacionar esta acción con resultados conocidos, nos reducimos al caso $\phi = 1, g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ para la electrodinámica no lineal. La acción está dada por:

$$S = \frac{3k}{5!} \int \sqrt{-g} \left[\frac{9l}{16} (2 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\rho} F^{\rho\sigma} F_{\beta\sigma} - F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) + \lambda l^3 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{l^5}{5} \right] d^5x, \quad (4.19)$$

donde el término en paréntesis redondos resulta ser

$$2 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\rho} F^{\rho\sigma} F_{\beta\sigma} - F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 8(\vec{E} \cdot \vec{B})^2. \quad (4.20)$$

Ahora comparamos este resultado con 2 tipos conocidos de electrodinámica no lineal.

a) Lagrangiana efectiva de Schwinger.

El campo electromagnético clásico puede producir pares como consecuencia de efectos cuánticos, esto significa que la dinámica del campo electromagnético tiene correcciones cuánticas, que fueron descritas por primera vez mediante la lagrangiana efectiva de Euler-Heisenberg

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \mathcal{L}_o + \delta\mathcal{L} \\ \mathcal{L}_o &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\ \delta\mathcal{L} &\equiv \delta\mathcal{L} [(E^2 - B^2), (\vec{E} \cdot \vec{B})^2]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por otra parte Schwinger mostró que en electrodinámica cuántica estándar y para campos que varían lentamente, la renormalización de la magnitud del campo y la carga eléctrica

implican un comportamiento no lineal del campo electromagnético[73].

La modificación obtenida por Schwinger está dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} [\vec{E}^2 - \vec{B}^2]^2 + \mathcal{B} [\vec{E} \cdot \vec{B}]^2, \quad (4.22)$$

donde

$$\mathcal{A} = Q \left(\frac{2}{45} \frac{1}{m_e^4} + \frac{1}{90} \frac{7}{4} \frac{1}{m_\pi^4} \right), \quad (4.23)$$

$$\mathcal{B} = Q \left(\frac{14}{45} \frac{1}{m_e^4} + \frac{1}{90} \frac{1}{m_\pi^4} \right), \quad (4.24)$$

y $Q = \alpha^2 \hbar / c^5$. Esta expresión considera la dominancia de las partículas cargadas con menor masa: piones y electrones.

Reescribiendo nuestra densidad Lagrangiana (4.19) en términos de los campos \vec{E} y \vec{B} tenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{9}{2} \frac{3kl}{5!} (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 - 2 \frac{3kl^3}{5!} \lambda (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{3kl^5}{5 \cdot 5!}. \quad (4.25)$$

Desafortunadamente no es posible comparar (4.25) con (4.22), debido a que el término $\mathcal{A}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2$, de la teoría no lineal de Schwinger no está presente en nuestro modelo y el coeficiente \mathcal{A} es positivo definido.

b) Lagrangiana de Born-Infeld.

La teoría de Born-Infeld describe una electrodinámica no lineal acoplada a la gravedad.

En el caso de la métrica plana, está dada por la Lagrangiana [74]:

$$\mathcal{L}_{BI} = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{16} (F_{\alpha\beta} * F^{\alpha\beta})^2}, \quad (4.26)$$

donde $(*)$ representa el operador de Hodge. Con el fin de comparar con nuestra Lagrangiana desarrollamos en serie la expresión anterior, únicamente hasta términos cuárticos, y la reescribimos en términos de los campos \vec{E} y \vec{B} . Obtenemos

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) + \frac{1}{8} (E^2 - B^2)^2 + \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 + \frac{1}{4} (E^2 - B^2) (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 + \frac{1}{8} (\vec{E} \cdot \vec{B})^4. \quad (4.27)$$

Nuevamente no es posible comparar con nuestro modelo.

4.4 Cosmología a partir de la acción de CS 5 dimensional

Otra alternativa para explorar una aplicación de la acción de CS 5-dimensional, es el estudio de la cosmología correspondiente. En este caso la 5^a coordenada se trata dinámicamente y se busca que las ecuaciones de movimiento conduzcan a una compactificación del espacio-tiempo 5 dimensional a 4 dimensiones.

En particular el estudio de cosmologías en dimensiones mayores a 4 empieza con Chodos y Detweiler [45]. Su modelo motivó el análisis de diferentes posibilidades incluyendo cosmologías en dimensiones mayores a 4 ([46] ,[51]). Por otra parte, Jordan [52] consideró teorías en 5 dimensiones cuya proyección a 4 dimensiones fué interpretada como una teoría de Jordan-Brans-Dicke.

A partir de la teoría de Chern-Simons (CS) 5-dimensional para los grupos $SO(1, 5)$ y $SO(2, 4)$, estudiamos el comportamiento cosmológico de los modelos de Friedman-Robertson-Walker (FRW) en el vacío 5-dimensional. Al comparar con las cosmologías de FRW en 4-dimensiones obtenemos una densidad de energía y presión efectivas que provienen de la proyección de la teoría a 4-dimensiones. Esto podemos interpretarlo como un modelo del vacío cuadridimensional.

4.5 Ecuaciones de Campo

Los factores de escala $a(t)$ del universo y $\sigma(t)$ del subespacio unidimensional correspondiente a la 5ª dimensión, están definidos por medio del elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \hat{e}^i \hat{e}^i + \sigma^2 (dx^5)^2, \quad (4.28)$$

Para $k = 0$, las 1-formas e^i , $i = 1, 2, 3$ son

$$\hat{e}^i = dx^i. \quad (4.29)$$

Para $k = 1$;

$$\hat{e}^1 = d\chi, \quad \hat{e}^2 = \sin \chi d\theta, \quad \hat{e}^3 = \sin \chi \sin \theta d\phi. \quad (4.30)$$

Para $k = -1$;

$$\hat{e}^1 = d\chi, \quad \hat{e}^2 = \sinh \chi d\theta, \quad \hat{e}^3 = \sinh \chi \sin \theta d\phi. \quad (4.31)$$

Partimos de la acción 5-dimensional de Chern-Simons para la gravedad (4.4) y de sus correspondientes ecuaciones de movimiento (4.6). Recordemos que estamos considerando el caso en el cual la torsión es cero $T^a = 0$. Para obtener las ecuaciones de movimiento para $a(t)$ y $\sigma(t)$, es conveniente escribir la primera de las ecuaciones (4.6) en términos de la 2 forma $\tilde{S}^{AB} = \tilde{R}^{AB} + \lambda \hat{e}^A \wedge \hat{e}^B$, es decir,

$$\epsilon_{ABCDE} \tilde{S}^{AB} \wedge \tilde{S}^{CD} = 0. \quad (4.32)$$

Escribiendo la 2-forma \tilde{S}^{AB} en función de sus componentes, tenemos $\tilde{S}^{AB} = \frac{1}{2} \tilde{S}^{AB}_{LM} \hat{e}^L \wedge \hat{e}^M$, la ecuación (4.32) resulta:

$$\tilde{U}^R_Q \equiv \epsilon_{ABCDQ} \epsilon^{LMNSR} \tilde{S}^{AB}_{LM} \tilde{S}^{CD}_{NS} = \delta_{ABCDQ}^{LMNSR} \tilde{S}^{AB}_{LM} \tilde{S}^{CD}_{NS} = 0, \quad (4.33)$$

donde $\epsilon_{ABCDQ} \epsilon^{LMNSR} \equiv \delta_{ABCDQ}^{LMNSR}$.

Desarrollando el determinante δ_{ABCDQ}^{LMNSR} obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^R_Q &= \delta_Q^R \left(4 \tilde{S}^2 - 16 \tilde{S}^B_M S^M_B + 4 \tilde{S}^{AB}_{LM} \tilde{S}^{LM}_{AB} \right) + \\ &+ 32 \left(\tilde{S}^R_B \tilde{S}^B_Q + \tilde{S}^B_M \tilde{S}^{RM}_{QB} \right) - 16 \left(\tilde{S}^{AB}_{MQ} \tilde{S}^{MR}_{AB} + \tilde{S} \tilde{S}^R_Q \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde hemos definido: $\tilde{S}^{AB}_{AB} \equiv \tilde{S}$, $\tilde{S}^{AB}_{AC} = \tilde{S}^{BA}_{CA} \equiv \tilde{S}^B_C$, y usado las propiedades de antisimetría $\tilde{S}^{AB}_{CD} = -\tilde{S}^{BA}_{CD} = -\tilde{S}^{BA}_{DC}$. Para la métrica (4.28) (casos $k = 0, 1, -1$) las componentes del tensor \tilde{S}^{AB} (ver apéndice D) son

$$S^{t1}_{t1} = S^{t2}_{t2} = S^{t3}_{t3} = \frac{\ddot{a} + a \lambda}{a} \quad (4.35)$$

$$S^{t5}_{t5} = \frac{\ddot{\sigma} + \sigma \lambda}{\sigma} \quad (4.36)$$

$$S^{12}_{12} = S^{13}_{13} = S^{23}_{23} = \frac{\dot{a}^2 + a^2 \lambda + k}{a^2} \quad (4.37)$$

$$S^{15}_{15} = S^{25}_{25} = S^{35}_{35} = \frac{\dot{a} \dot{\sigma} + a \sigma \lambda}{a \sigma} \quad (4.38)$$

donde los índices 1, 2, 3 denotan las variables χ, θ, ϕ , respectivamente en los casos $k = 1, -1$. En el caso $k = 0$ los índices permanecen sin cambio (es decir $1, 2, 3 \rightarrow 1, 2, 3$).

Las ecuaciones de movimiento que resultan de (4.34) correspondientes a la métrica (4.28) son:

I). Componente Temporal (\tilde{U}^t_t):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^3 \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{k \dot{a} \dot{\sigma}}{a^3 \sigma} + \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\dot{a} \dot{\sigma}}{a \sigma} + \frac{k}{a^2} \right] \lambda l^2 + \lambda^2 l^4 = 0. \quad (4.39)$$

II). Componentes Espaciales ($\tilde{U}^i, \chi, \theta, \phi$):

$$\frac{2\ddot{a}\dot{a}\dot{\sigma}}{a^2\sigma} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} + \frac{k\ddot{\sigma}}{a^2\sigma} + \left[\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} + 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{\sigma}\dot{a}}{\sigma a}\right) + \frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] \lambda l^2 + 3\lambda^2 l^4 = 0. \quad (4.40)$$

III). Componente 5 (\tilde{U}^5_5):

$$\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} + \frac{k\ddot{a}}{a^3} + \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] \lambda l^2 + \lambda^2 l^4 = 0. \quad (4.41)$$

Si definimos las cantidades

$$v_1 = \frac{\ddot{a} + a\lambda l^2}{a}, \quad v_2 = \frac{\ddot{\sigma} + \sigma\lambda l^2}{\sigma} \quad (4.42)$$

$$v_3 = \frac{\dot{a}^2 + a^2\lambda l^2 + k}{a^2}, \quad v_4 = \frac{\dot{a}\dot{\sigma} + a\sigma\lambda l^2}{a\sigma} \quad (4.43)$$

podemos escribir las ecuaciones de movimiento en forma muy compacta en términos de las v 's.

Componente temporal:

$$v_3 v_4 = 0, \quad (4.44)$$

Componentes espaciales (1,2,3 o χ, θ, ϕ):

$$2v_1 v_4 + v_3 v_2 = 0, \quad (4.45)$$

Quinta componente:

$$v_1 v_3 = 0. \quad (4.46)$$

La factorización de las ecuaciones de movimiento en términos de las v 's nos permite estudiar las soluciones del sistema de ecuaciones de movimiento (4.39, 4.40, 4.41) en los 3 casos siguientes:

I) $v_3 = 0, \quad v_1 = 0,$

$$\text{II) } v_3 = 0, \quad v_4 = 0,$$

$$\text{III) } v_3 \neq 0, \quad v_1 = v_2 = v_4 = 0.$$

Es posible mostrar que $v_3 = 0$ implica $v_1 = 0$, y que $v_2 = v_4 = 0$ implican a su vez que $v_1 = 0$, por lo que sólo dos de las ecuaciones (4.39,4.40,4.41) son independientes, por lo que reducimos el sistema de ecuaciones a los siguientes dos casos:

$$\text{i) } v_3 = 0, \Rightarrow v_1 = 0.$$

$$\text{ii) } v_3 \neq 0 \text{ y } v_2 = v_4 = 0 \Rightarrow v_1 = 0.$$

En las ecuaciones (4.39,4.40,4.41), los términos entre paréntesis cuadrados corresponden a las componentes del tensor de Einstein 5-dimensional (ver [46]). Observemos que el tensor completo \tilde{U}^R_Q satisface las identidades de Bianchi en todos los casos ($k = 0, 1, -1$).

4.5.1 Soluciones exactas

Para interpretar las soluciones de nuestro modelo, consideramos que los términos adicionales que provienen de la quinta dimensión, representan una densidad de energía $\rho(t)$ y presión $p(t)$ efectivas en 4 dimensiones. De esta manera nuestro modelo reducido corresponde al de FRW para un fluido perfecto con constante cosmológica.

En el modelo de FRW 4 dimensional estándar para un fluido perfecto, caracterizado por una densidad de energía $\rho(t)$ y una presión $p(t)$, las componentes del tensor de Einstein con constante cosmológica están dadas por:

$$G^t_t = T^t_t \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (4.47)$$

$$G^i_i = T^i_i \Rightarrow 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi G p. \quad (4.48)$$

De las ecuaciones de movimiento (4.39,4.40,4.41), obtenemos las expresiones para la presión y la densidad efectivas

$$\rho_f(t) = -\frac{3}{8\pi G} \left(\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^3 \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{k \dot{a} \dot{\sigma}}{a^3 \sigma} \right] \frac{1}{\lambda l^2} + \frac{\dot{a} \dot{\sigma}}{a \sigma} \right),$$

$$p_f(t) = \frac{1}{8\pi G} \left(\left[\frac{2\ddot{a}\dot{a}\dot{\sigma}}{a^2\sigma} + \frac{\dot{a}^2\ddot{\sigma}}{a^2\sigma} + \frac{k\ddot{\sigma}}{a^2\sigma} \right] \frac{1}{\lambda l^2} + \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} + \frac{2\dot{a}\dot{\sigma}}{a\sigma} \right), \quad (4.49)$$

que escritas en términos de las v 's resultan:

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &= \frac{3}{8\pi G} \left(v_3 - \frac{v_3 v_4}{\lambda l^2} \right), \\ p_f(t) &= \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{2v_1 v_4 + v_2 v_3}{\lambda l^2} - 2v_1 - v_3 \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

De aquí observamos que las únicas soluciones correspondientes a modelos no vacíos cuadridimensionales provienen del caso (III o (ii)), es decir, $v_3 \neq 0$, donde la presión y la densidad de energía están dadas por:

$$\rho_f(t) = \frac{3v_3}{8\pi G}, \quad p_f(t) = -\frac{v_3}{8\pi G}. \quad (4.51)$$

Eliminando v_3 de estas ecuaciones, obtenemos la ecuación de estado

$$p_f(t) = -\frac{1}{3}\rho_f(t). \quad (4.52)$$

De esta manera obtenemos un modelo del vacío 4 dimensional correspondiente a un caso particular de quintaesencia. Las ecuaciones de estado $p = \alpha\rho$, con $\alpha < 0$, han resultado de utilidad para explicar la anisotropía observada en la radiación de fondo (CMB) [47],[48]. Estos resultados, sugieren la existencia de una nueva componente de la energía llamada la *quintaesencia*, cuya ecuación de estado es diferente de la de los bariones, neutrinos, materia oscura o radiación. La ecuación de estado de esta nueva componente de la energía es $\omega = p_Q/\rho_Q$, con $\omega < 0$. Esta quinta contribución a la densidad de energía cósmica (Q -componente) se modela mediante un campo escalar Q con auto-interacciones determinadas por un potencial $V(Q)$, de manera que

$$\begin{aligned} \rho_Q &= \frac{1}{2a^2}Q'^2 + V \\ p_Q &= \frac{1}{2a^2}Q'^2 - V, \end{aligned} \quad (4.53)$$

(donde la prima representa la derivada con respecto al tiempo propio) en nuestro caso particular $V(Q) = 0$.

Investigaciones recientes [47],[49],[50] en torno al comportamiento de esta nueva contribución sugieren que ω debe tener algún valor dentro del intervalo $I = [-2/3, -1/6]$ para explicar correctamente la anisotropía en la radiación de fondo.

El signo negativo en la ecuación (4.52) nos sugiere interpretar el fluido perfecto (ρ_f, p_f) como un modelo del vacío cuadridimensional, correspondiente a un tipo particular de quintaesencia con $\omega = -1/3$.

Ahora analizaremos con más detalle las soluciones con $v_3 \neq 0$ ($v_2 = v_4 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$). Sólo existen dos soluciones, que corresponden a los valores $\lambda = 1$, y $\lambda = -1$ ambas con k arbitraria:

1) Caso $\lambda = -1$,

$$\begin{aligned} a(t) &= C_1(e^{-lt} + Ce^{lt}) \\ \sigma(t) &= C_2(e^{-lt} - Ce^{lt}) \\ \Lambda &= 3l^2. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Tomando condiciones de borde $a(0) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} a(t) &= -C_1 \sinh(lt), \\ \sigma(t) &= C_2 \cosh(lt). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Un defecto de esta solución, es el crecimiento no acotado del factor de escala de la quinta dimensión. Mediante un ajuste de la constante de integración C_2 , podríamos suponer que el factor de escala actual σ_o aún no sería observable. A pesar de esto, la solución tiene algunas ventajas que mostramos a continuación.

Los valores del parámetro de Hubble y del parámetro de desaceleración están dados

por

$$\begin{aligned} H &= \frac{\dot{a}}{a} = l \coth(lt), \\ q &= -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\tanh^2(lt). \end{aligned} \quad (4.56)$$

El parámetro de desaceleración q es definido negativo, resultado que concuerda con observaciones recientes [55] y [56] que afirman que el universo se expande en forma acelerada, con un valor negativo para el parámetro de desaceleración dado por [57]

$$q_o = -0.33 \pm 0.17. \quad (4.57)$$

En el modelo estándar se hacen predicciones sobre la edad del universo (t_o), partiendo de la hipótesis de que el parámetro de desaceleración q_o es siempre positivo y $k = 0$. Esto llevaba a la conclusión de que $t_o < 1/H_o$, en particular $t_o = \frac{2}{3}H_o$ para $q_o = 1/2$.

Nosotros podemos determinar en forma consistente el intervalo de valores dentro del cual se encuentra el valor de t_o usando (4.57). A partir de las expresiones para H y q que resultan de nuestro modelo, y usando los valores conocidos actualmente de H_o y q_o , podemos calcular el valor de la constante l a partir de (4.56).

$$-\frac{q_o}{1/H_o^2} = l^2 \Rightarrow l = H_o \sqrt{-q_o}, \quad (4.58)$$

usando $H_o = 65 \text{ km/seg } M_{pc}$ ($1 M_{pc} = 1 \text{ Megaparsec} = 3 \times 10^{19} \text{ km}$)[58] y (4.57) obtenemos

$$l = 37.33_{-11.33}^{+8.67} \frac{Km}{\text{seg. } M_{pc}}, \quad (4.59)$$

sustituyendo estos valores de l en la ecuación para el parámetro de desaceleración $q = -\tanh^2(lt)$, y resolviendo obtenemos para la edad del universo t_o

$$t_o = 16.6_{-7.8}^{+15.91} \times 10^9 \text{ años}, \quad (4.60)$$

dentro de los cuales se encuentran los valores aceptados actualmente para la edad del

universo[58].

Por otra parte, a partir de los valores del parámetro l también podemos estimar un intervalo de valores para la constante cosmológica Λ , y obtenemos:

$$\Lambda = 5.125_{-2.67}^{+2.68} \times 10^{-47} \text{ Km}^{-2}, \quad (4.61)$$

que en términos de la constante cosmológica escalada Ω_Λ ($\Omega_\Lambda = \Lambda c^2/3H_0^2$) resulta

$$\Omega_\Lambda = 0.3275_{-0.1702}^{+0.1712}. \quad (4.62)$$

Estos valores tienen la virtud de ser del orden de los valores esperados para la constante cosmológica que sugieren que la magnitud de ésta debe ser menor de $1/(10^{23} \text{ Km})^2$ [59], o $-1 < \Omega_\Lambda < 2$.

2) Caso $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned} a(t) &= C_1 \cos(lt) + C_2 \sin(lt), \\ \sigma(t) &= C_3 \cos(lt) + C_4 \sin(lt), \\ \Lambda &= -3 l^2. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Tomando condiciones de borde $a(0) = 0$, y usando que $v_4 = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} a(t) &= C_2 \sin(lt), \\ \sigma(t) &= C_3 \cos(lt). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Las expresiones para el parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración están dadas por

$$\begin{aligned} H &= \frac{\dot{a}}{a} = \eta \cot(\eta t), \\ q &= -\frac{a \ddot{a}}{\dot{a}^2} = \tan^2(\eta t). \end{aligned} \quad (4.65)$$

El parámetro de desaceleración q en este caso es definido positivo y su análisis sería

de interés, sólo si nuevas observaciones sugieren que el signo de q no debe ser definido negativo.

4.6 Conclusiones

A partir de la acción de CS para los grupos $SO(1,5)$ ($\Lambda > 0$) y $SO(2,4)$ ($\Lambda < 0$) 5-dimensionales y una descomposición del campo de norma A en términos de los coeficientes de rotación de Ricci 5 dimensionales y el fünfbein, obtenemos una acción (4.16,4.17 y 4.18) con los términos correspondientes a Einstein, constante cosmológica y Gauss Bonnet en 5 dimensiones[3]. A partir de esta acción exploramos la posibilidad de obtener una teoría unificada de los campos gravitacional, electromagnético y escalar, para lo cual usamos una reducción dimensional tipo Kaluza-Klein.

Desafortunadamente las predicciones que resultan de nuestro modelo no pueden ser comparadas directamente con las teorías de la electrodinámica no lineal de Born-Infeld (BI) y Schwinger, debido a que varios de los términos dominantes que aparecen en estas Lagrangianas no están incluidos en nuestro caso.

Sin embargo, ésta podría ser una ventaja de nuestra teoría, ya que ambas teorías de BI y Schwinger presentan el problema de no ser renormalizables.

Por otra parte, las predicciones cosmológicas que obtenemos a partir de la acción de CS 5-dimensional al ser interpretada como un modelo de FRW 4 dimensional, corresponden a un universo en expansión acelerada ($\Lambda > 0$). Además el modelo nos permite determinar los valores para la edad del universo y la constante cosmológica, a partir de los valores actuales de H_o y q_o . Los resultados son del orden de los propuestos actualmente para estos parámetros.

Sin embargo, ésta solución tiene el problema de que el factor de escala de la quinta dimensión crece indefinidamente con el tiempo.

Capítulo 5

Conclusiones

Resumen

Mencionamos las conclusiones alcanzadas en la tesis y algunos de los problemas que han quedado pendientes y ameritan una mayor discusión.

Directa o indirectamente las teorías de CS han estado presentes en cada uno de los diferentes problemas discutidos a lo largo de la tesis. Nuestra motivación fundamental para tratar cada uno de estos problemas ha sido la relevancia de la acción de CS en diferentes teorías de campo, lo que nos ha llevado a continuar la exploración de las consecuencias cosmológicas y el acoplamiento de campos y gravedad en dimensiones mayores a 3.

Las teorías de CS son de naturaleza topológica y los grados de libertad fundamentales son las trazas de los elementos del grupo construidos como las holonomías de la conexión alrededor de curvas orientadas en la variedad. La reducción del conjunto infinito de trazas en $2 + 1$ dimensiones, a un conjunto finito de grados de libertad fundamentales, es posible a partir de identidades tipo Cayley-Hamilton.

En el capítulo 2 hemos generalizado el teorema de Cayley-Hamilton estándar al caso de supermatrices. Además hemos determinado algunos métodos para construir los polinomios característicos asociados. La generalización es posible debido a que podemos

construir una matriz polinomial (2.20) que nos permite seguir las ideas de la demostración del caso estándar. Hemos obtenido también un método para determinar los polinomios anuladores en el caso de supermatrices diagonales nilpotentes.

Para poner este trabajo en la perspectiva correcta y para sugerir algunas posibles líneas de investigación futura, haremos algunos comentarios. Hemos llamado *característico* al polinomio $\mathcal{P}(x)$ introducido en la definición (2.10), debido a que este es el único polinomio que puede asociarse con una supermatriz arbitraria, independientemente de las propiedades de factorización del numerador y denominador de $Sdet(xI - M)$. Sin embargo, este polinomio lleva muy poca información en relación con los bloques impares de M . Tampoco hemos estudiado que tan extensamente éste caracteriza en realidad a la supermatriz. Nuestra esperanza es que los polinomios nulos de grado mínimo, dados en la definición (2.2) y enfatizados en los ejemplos, sean mucho más efectivos a este respecto. Sin embargo, todavía no tenemos un procedimiento completamente general de clasificación para determinar cuando existe un máximo común divisor de los polinomios \tilde{F} y \tilde{G} (F y G) que son los bloques del $Sdet(xI - M)$. Además estos polinomios de grado mínimo no son necesariamente únicos, por lo que deberíamos proporcionar un criterio para seleccionar cuáles de ellos caracterizan completamente a la supermatriz.

Uno de los puntos más importantes que deben ser aclarados desde el punto de vista operacional cuando tratamos de responder a las preguntas anteriores es la relación entre la propiedad de dos polinomios de ser o no primos relativos y la propiedad de tener o no factores comunes.

En el caso de polinomios sobre una álgebra de Grassmann existen tres posibilidades: (i) dos polinomios son primos relativos y no tienen factores comunes, (ii) dos polinomios no son primos relativos y tienen un máximo común divisor que puede ser calculado en la forma usual usando el algoritmo de Euclides. Contrario al caso estándar de polinomios sobre números complejos, donde sólo esas dos alternativas están presentes, en nuestro caso tenemos una tercera posibilidad: (iii) dos polinomios no son primos relativos y sin embargo no tienen un factor común. Es precisamente este caso, el que consideramos en

nuestro ejemplo simple (2.51) al nivel de $a(x)$ y $d(x)$, los cuales llevan a propiedades inusuales de \tilde{F} y \tilde{G} (F y G) teniendo dos máximos comunes divisores ninguno de los cuales puede ser obtenido mediante el algoritmo Euclideo.

Con el fin de determinar el conjunto de polinomios que anulan a una supermatriz, consideramos el problema simple de determinar el ideal anulador de una supermatriz diagonal nilpotente en el capítulo 3. Este resultó mucho más complicado de lo que a primera vista podría parecer, debido a la inclusión de polinomios anuladores de la forma $(\sum_{i=1}^{t-1} A_i \Pi_{j=1}^i (x - \alpha_j))$, que dificultan la aplicación de estos resultados aún en casos simples como se muestra en los ejemplos. Desde nuestro punto de vista, es claro que estos temas requieren ser más estudiados.

En el capítulo 4 investigamos las consecuencias 4-dimensionales de la acción 5-dimensional de CS [3] que incluye la gravedad de Einstein un término de Gauss-Bonnet y la constante cosmológica 5 dimensionales.

En el estudio de este modelo aplicamos el ansatz de Kaluza-Klein y obtenemos un modelo unificado en 3+1 dimensiones que incluye la gravedad con constante cosmológica, un electromagnetismo no lineal y un campo escalar. Desafortunadamente los resultados no son comparables con otros modelos establecidos de electrodinámica no lineal.

Por otra parte, estudiamos las consecuencias cosmológicas en 4 dimensiones de la teoría de CS 5-dimensional para un modelo de FRW del universo. La reducción dimensional la hacemos a través de la interpretación de los términos adicionales como partes de una presión y densidad efectivas en 4 dimensiones, más la constante cosmológica. Al considerar el modelo cosmológico 4-dimensional nos permite obtener la ecuación de estado $p_f = -\frac{1}{3}\rho_f$, que interpretamos como un modelo del vacío cuadridimensional, correspondiente a un tipo particular de quintaesencia con $\omega = -1/3$. La solución (4.54) presenta el problema del crecimiento no acotado del factor de escala de la 5ª dimensión. Este problema puede resolverse si añadimos materia en 5 dimensiones, por ejemplo polvo 5

dimensional (ρ_5 , y $p_5 = 0$). Esto modifica las ecuaciones dinámicas resultando

$$\begin{aligned}v_3 v_4 &= 8\pi G \rho_5, \\2v_1 v_4 + v_3 v_2 &= 0, \\v_1 v_3 &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

La solución que nos interesa ahora es: $v_3 \neq 0$, $v_4 \neq 0$ ($\rho_5 \neq 0$) y $v_1 = v_2 = 0$. La ventaja ahora es que los factores de escala $a(t)$ y $\sigma(t)$ resultan desacoplados. Esto nos da la libertad de tomar la solución que hace que el factor de escala de la 5^a dimensión tienda a cero tan rápidamente como queramos. Este modelo amerita ser discutido con más detalle.

Apéndice A

Curvatura y Derivada Covariante Exterior

Aquí resumimos de manera formal, los resultados y definiciones que consideramos relevantes para la discusión del material expuesto en el capítulo 1.

La generalización de la noción de campos a variedades requiere del concepto de haz, en particular necesitamos el concepto de haz vectorial. En este contexto, las transformaciones de norma, son transformaciones entre los diferentes haces vectoriales (formados por grupos de Lie) definidos sobre una variedad M , y los campos ahora, son funciones con una doble representación: en estos grupos y en los espacios tangentes de la variedad (espacio-tiempo). Esta doble representación de los campos permite, como lo demostraron Yang y Mills, tener en cuenta los grados de libertad internos de las partículas.

A.1 Haz vectorial

Empezaremos definiendo un *haz*: Un haz es una estructura matemática que consiste de dos variedades E , M y un mapeo de proyección sobre $\pi : E \rightarrow M$.

E recibe el nombre de *espacio total*, la variedad M es llamado el *espacio base*, y la función π que conecta ambas variedades, es llamada el *mapeo de proyección*.

Un haz cuyas fibras E_p (donde $E_p = \{q \in E \mid \pi(q) = p \in M\}$, son espacios vectoriales que contienen la representación del grupo de Lie), *son todas iguales* en una vecindad de $p \in U_\alpha \subset M$, lo llamaremos un *haz localmente trivial*. En este caso el haz está definido por la unión de todas estas fibras.

Llamaremos *haz vectorial n -dimensional* E , a un haz lócalmente trivial, tal que cada fibra E_p es un espacio vectorial n -dimensional V . En el caso que nos interesa en física, V contiene la representación del grupo de Lie G , el cual es llamado el *grupo de norma* del haz, y V es llamada la fibra estándar.

Una *sección* de una haz $\pi : E \rightarrow M$ es una función $s : M \rightarrow E$ tal que para cualquier $p \in M$, $s(p) \in E_p$.

El principio de las teorías de norma es que los campos deben ser funciones de estos haces, y que las leyes de la física deben ser ecuaciones diferenciales, tales que si la función s , es una solución, también lo es gs para cualquier $g \in G$. Así, estas ecuaciones diferenciales se dicen covariantes de norma.

A.1.1 Derivada Covariante

Uno de los problemas que se presenta para construir ecuaciones covariantes de norma, es que las derivadas de gs pueden ser muy diferentes de las de s , pues g depende del punto p . La construcción que nos permite salvar esta situación es la idea de derivada covariante sobre una variedad M .

Así, si E es un haz vectorial sobre una variedad M y $\Gamma(E)$ representa el espacio vectorial de todas las funciones que conectan a E con M (llamado también el espacio de secciones de E), una *conexión* D sobre M es la función que asigna a cada campo vectorial $v \in M$ una función $D_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ que satisface las propiedades:

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= \alpha D_v s \\ D_v(s + t) &= D_v s + D_v t \\ D_v(fs) &= v(f)s + f D_v s \end{aligned}$$

$$D_{fv+ws} = fD_v s + D_w s, \quad (\text{A.1})$$

donde $v, w \in Vect(M)$ (espacio vectorial que contiene a todos los vectores tangentes en $p \in M$), y $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ y los escalares $\alpha \in C$.

A.1.2 Potencial A

Ahora probaremos que las componentes del potencial A son precisamente las coordenadas de las derivadas covariantes de la base de las secciones de E (base del espacio de los grados de libertad internos). Para esto observemos que la derivada covariante de s en la dirección v ($D_v s$), la podemos escribir en términos de coordenadas locales x^μ sobre un conjunto abierto $U \subset M$, usando la base correspondiente a los campos vectoriales ∂_μ (grados de libertad externos) y la base de las secciones de E sobre U , $\{e_i\}$. En particular las derivadas covariantes de cada uno de los elementos de la base de secciones, los podemos expresar como combinación lineal de los elementos de esta misma base, es decir,

$$D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i, \quad (\text{A.2})$$

donde usamos la notación abreviada $D_\mu = D_{\partial_\mu}$, y las componentes $A_{\mu j}^i$ son llamadas los símbolos de Christoffel.

De esta manera, para cualquier sección s de E , la expresión de la derivada covariante en ambas bases es

$$\begin{aligned} D_v s &= D_{v^\mu \partial_\mu} (s^i e_i) \\ &= v^\mu D_\mu (s^i e_i) \\ &= v^\mu ((\partial_\mu s^i) e_i + s^i D_\mu e_i) \\ &= v^\mu (\partial_\mu s^i + s^j A_{\mu j}^i) e_i, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

de donde la i -ésima componente de la derivada covariante está dada por

$$(D_\mu s)^i = \partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j. \quad (\text{A.4})$$

Que es el resultado familiar de la derivada covariante en términos de una conexión. En física frecuentemente usamos esta notación para la derivada covariante, pero escribimos $D_\mu s^i$ en vez de $(D_\mu s)^i$ esto puede resultar un poco confuso, pues realmente no estamos tomando la derivada de las funciones componentes s^i , sino la derivada covariante de s y observando cada una de sus componentes.

Es posible ver al potencial como una 1-forma $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, cuyos coeficientes ω_μ son operadores lineales en E . El conjunto de todos los operadores lineales de E lo denotaremos por $End(E)$, y es isomorfo a $E \otimes E^*$ (donde E^* representa el espacio dual de E).

De esta forma, el potencial vectorial A podemos considerarlo como una 1-forma matricial sobre $U \subset M$ valuada en los endomorfismos de E , es decir,

$$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu, \quad (\text{A.5})$$

por lo que A pertenece al espacio $End(E) \otimes T^*U$ (donde T^*U representa el dual del espacio tangente a la variedad en $U \subset M$).

Observemos ahora que A es un operador sobre E . Para esto basta aplicar A a cualquier vector $v \in TU$, así obtenemos un elemento en $End(E)$ (una matriz) determinado por

$$\begin{aligned} A(v) &= A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu (v^\alpha \partial_\alpha) \\ &= A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i v^\alpha \partial_\alpha (x^\mu) \\ &= A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i v^\alpha \delta_\alpha^\mu \\ &= A_{\mu i}^j v^\mu e_j \otimes e^i. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

De esta forma obtenemos un operador sobre secciones $A(v)$, esto es, si aplicamos $A(v)$

a cualquier sección s de E sobre U obtenemos la sección

$$\begin{aligned}
A(v)s &= A_{\mu i}^j v^\mu e_j \otimes e^i (s^k e_k) \\
&= A_{\mu i}^j v^\mu s^k e_j \delta_k^i \\
&= v^\mu A_{\mu i}^j s^i e_j.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Esto nos permite escribir las componentes de la derivada covariante de cualquier sección como

$$(D_v s)^i = v s^i + (A(v)s)^i. \tag{A.8}$$

Es frecuente que uno suprima los índices internos i, j asociados a la base de secciones e_i , para escribir el potencial vectorial únicamente en términos de sus componentes A_μ

$$A_\mu = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i, \tag{A.9}$$

así A podemos escribirlo más brevemente como la 1-forma $A = A_\mu dx^\mu$.

Un resultado útil en relación con las conexiones, es el que afirma que si D^0 es cualquier conexión sobre E entonces $D = D^0 + A$ también lo es (ver [12]). Esta es la razón por la cual uno normalmente no se preocupa mucho en dar el nombre de conexión a D o al potencial vectorial A .

En física D^0 usualmente representa la conexión plana, es decir

$$D_v^0 s = v(s^j) e_j. \tag{A.10}$$

Las conexiones D para las cuales las componentes A_μ viven en un álgebra de Lie, son llamadas G -conexiones. Las transformaciones de norma aplicadas a una sección (es decir, un campo) de un G -haz, también podemos aplicarlas a una G -conexión; esto es, si D es una G -conexión sobre E , y g es una transformación de norma, entonces existe

una nueva conexión D' sobre E tal que

$$D'_v(g s) = g D_v(s), \quad (\text{A.11})$$

que también podemos escribir como

$$D'_v(s) = g D_v(g^{-1}s). \quad (\text{A.12})$$

Es prácticamente directo mostrar que D' cumple con las propiedades que definen a una conexión. En términos del potencial vectorial esta ecuación de transformación es

$$A'_\mu = g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}, \quad (\text{A.13})$$

donde A' representa el potencial vectorial para D' .

A.2 Curvatura F

Para cada conexión D podemos definir *la curvatura* F asociada a D . El concepto de curvatura es el ingrediente esencial para desarrollar la generalización de las ecuaciones de Maxwell, es decir, para obtener las ecuaciones de Yang-Mills.

La curvatura es un operador sobre secciones, que está asociada a una conexión D , y está definido por

$$F(v, w) s = [D_v, D_w] s - D_{[v, w]} s. \quad (\text{A.14})$$

Cuando $F(v, w) s = 0$ para todos los campos vectoriales v y w y secciones s , decimos que la conexión es *plana*.

Entre las propiedades más importantes de la curvatura está la de linealidad respecto a funciones $C^\infty(M)$, es decir

$$F(f v, w) s = F(v, f w) s = F(v, w) (f s) = f F(v, w) s, \quad (\text{A.15})$$

para toda $f \in C^\infty(M)$ y campos vectoriales v, w .

Si expresamos la curvatura en coordenadas locales x^μ sobre algún conjunto abierto $U \subset M$, podemos definir las componentes $F_{\mu\nu}$, como secciones de los $End(E)$ dadas por

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu). \quad (\text{A.16})$$

En este caso $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, ya que $\{\partial_\mu\}$ es una base coordenada, por lo que la expresión para las componentes de la curvatura es más simple $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$. Usando las propiedades de linealidad de la curvatura podemos expresar a la curvatura como

$$F(v, w) = v^\mu w^\nu F_{\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

Estos resultados nos permiten escribir una fórmula para la curvatura en términos del potencial vectorial

$$F_{\mu\nu} e_i = D_\mu D_\nu e_i - D_\nu D_\mu e_i \quad (\text{A.18})$$

$$= (\partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k) e_j. \quad (\text{A.19})$$

Es posible simplificar más esta expresión. Para esto observamos que las secciones $e_j \otimes e^i$ forman una base local de las secciones de $End(E)$ por lo que podemos expresar a $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu i}^j e_j \otimes e^i$, donde las $F_{\mu\nu i}^j$ son las componentes de la curvatura en esta base de secciones.

Al aplicar estas $F_{\mu\nu}$ a los elementos de la base de secciones, obtenemos $F_{\mu\nu} e_i = F_{\mu\nu i}^j e_j$, de aquí que las componentes de la curvatura en términos del potencial resultan ser

$$F_{\mu\nu i}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k, \quad (\text{A.20})$$

si eliminamos los índices internos obtenemos una expresión mucho más simple y familiar

para la curvatura en términos de los potenciales

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (\text{A.21})$$

En muchos casos es conveniente ver a la curvatura F de una conexión D sobre E , como una 2-forma valuada en $\text{End}(E)$ (es decir, un elemento de $\text{End}(E) \otimes \Lambda^2 T^*U$). Como vimos antes, usando coordenadas locales, las componentes $F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu)$ son secciones de $\text{End}(E)$, por lo que ahora podemos definir la 2-forma de curvatura F como una 2-forma valuada en $\text{End}(E)$ por

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (\text{A.22})$$

A.3 Derivada Covariante Exterior

La generalización de la derivada exterior de formas ($d\omega$, con $\omega \in \Omega^p(M)$), a formas valuadas en E es como sigue: Definimos primero la derivada covariante exterior d_D de una sección s de E como la 1-forma

$$(d_D s)(v) = D_v s, \quad (\text{A.23})$$

para cualquier campo vectorial v sobre M (si trabajamos en coordenadas locales x^μ , podemos escribir esta derivada como el producto tensorial $d_D s = D_\mu s \otimes dx^\mu$).

Cuando s es una sección de E y w es una forma diferencial ordinaria, definimos la derivada covariante exterior (asociada a la conexión D) del producto tensorial $s \otimes w$ por

$$d_D (s \otimes w) = d_D s \wedge w + s \otimes dw. \quad (\text{A.24})$$

A continuación enunciamos algunas de las propiedades de la derivada covariante exterior:

1. Si ω es una forma *valuada en E* (es decir, si $\omega = \omega_\mu \otimes dx^\mu$ es una 1-forma la

podemos escribir como $\omega_\mu^j e_j \otimes dx^\mu$) entonces la derivada covariante exterior $d_D \omega$ está dada por

$$d_D \omega = d\omega + A \wedge \omega, \quad (\text{A.25})$$

mientras que la derivada covariante exterior de cualquier forma η *valuada en* $End(E)$ (es decir $\eta = \eta_\mu^j e_j \otimes dx^\mu = \eta_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu$) está dada por

$$d_D \eta = d\eta + [A, \eta] \quad (\text{A.26})$$

2. Si D es una conexión sobre E entonces $d_D^2 \eta = d_D(d_D \eta) = F \wedge \eta$, donde η es una forma valuada en E .

3. Si D es una conexión sobre E , y ω, μ son una p -forma y una q -forma respectivamente valuadas en $End(E)$ entonces

$$d_D(\omega \wedge \mu) = d_D \omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d_D \mu. \quad (\text{A.27})$$

4. Calculando d_D^3 de cualquier forma η valuada en E , es posible mostrar la identidad de Bianchi, es decir, $d_D F = 0$, en efecto

$$d_D^3 \eta = d_D(d_D^2 \eta) = d_D(F \wedge \eta) = d_D F \wedge \eta + F \wedge d_D \eta, \quad (\text{A.28})$$

por otra parte tenemos

$$d_D^3 \eta = d_D^2(d_D \eta) = F \wedge d_D \eta, \quad (\text{A.29})$$

por lo que

$$d_D F \wedge \eta = 0, \quad (\text{A.30})$$

dado que η es arbitraria resulta $d_D F = 0$.

Existen más resultados importantes relacionados con la derivada covariante exterior que pueden ser consultados en [69],[13].

Para obtener las ecuaciones de Yang-Mills a partir de una Lagrangiana, es necesario

establecer el significado de la variación de una función $h(A)$ con respecto al potencial vectorial A .

Podemos pensar la variación (δA) del potencial vectorial A como el potencial vectorial original A más ϵ veces cualquier 1-forma δA en $End(E)$, es decir;

$$A_\epsilon = A + \epsilon \delta A, \quad (\text{A.31})$$

de esta manera la variación de cualquier función h de A está definida por

$$\delta h = \left. \frac{d}{d\epsilon} h(A) \right|_{\epsilon=0}, \quad (\text{A.32})$$

Cuando escribimos $\delta h = 0$, queremos decir, que esta variación se anula para todas las variaciones δA .

Para determinar la variación de la acción (1.5), necesitamos δF cuando varía A . Para esto observemos que si D^0 representa la conexión plana, la curvatura F de D está dada (en términos del potencial) por:

$$F = dA + A \wedge A, \quad (\text{A.33})$$

donde usamos d para la derivada covariante exterior d_{D^0} .

De esta manera δF resulta:

$$\begin{aligned} \delta F &= \left. \frac{d}{d\epsilon} (dA_\epsilon + A_\epsilon \wedge A_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \\ &= d \left(\frac{d}{d\epsilon} A_\epsilon \right) + \left(\frac{d}{d\epsilon} A_\epsilon \right) \wedge A + A \wedge \left(\frac{d}{d\epsilon} A_\epsilon \right) \\ &= d(\delta A) + \delta A \wedge A + A \wedge \delta A \\ &= d\delta A + [A, \delta A] \\ &= d_D \delta A, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

por lo que la variación de la curvatura, es igual a la derivada covariante exterior de la

variación del potencial vectorial.

A.4 Traza de Formas

Necesitamos además algunas propiedades de la traza sobre formas y su relación con la derivada covariante exterior.

La función traza (tr) está definida por:

$$\begin{aligned} tr : V \otimes V^* &\rightarrow R \\ v \otimes f &\rightarrow f(v), \end{aligned} \tag{A.35}$$

donde V es un espacio vectorial y V^* su dual.

Esta definición se reduce a la traza usual al escoger una base $\{e_i\}$ para V y su correspondiente base dual $\{e^i\}$. En estas condiciones, si T es un operador lineal sobre V ($T \in End(V) \cong V \otimes V^*$) tendremos

$$\begin{aligned} T &= T_j^i e_i \otimes e^j \\ tr(T) &= T_j^i e^j(e_i) = T_i^i. \end{aligned} \tag{A.36}$$

Para formas valuadas en E , tenemos los siguientes resultados:

1. Si ω una p -forma y μ es una q -forma, ambas valuadas en $End(E)$ entonces

$$tr(\omega \wedge \mu) = (-1)^{pq} tr(\mu \wedge \omega), \tag{A.37}$$

la cual es llamada la *propiedad cíclica graduada* de la traza, la cual es una generalización de la propiedad cíclica usual de la traza.

2. Para cualquier conexión sobre E , tenemos que si ω es una p -forma valuada en $End(E)$ entonces

$$tr(d_D \omega) = d tr(\omega). \tag{A.38}$$

3. Si M es una variedad orientada n -dimensional, y ω, μ son una p -forma y una q -

forma respectivamente valuadas en $End(E)$ sobre M y si M es compacto y $p+q = n-1$, entonces

$$\int_M tr (d_D \omega \wedge \mu) = (-1)^{p+1} \int_M tr (\mu \wedge d_D \omega). \quad (\text{A.39})$$

En caso de que M tenga una métrica semi-Riemanniana y $p = q = n/2$, entonces

$$\int_M tr (\omega \wedge * \mu) = \int_M tr (\mu \wedge * \omega). \quad (\text{A.40})$$

A.5 Clases de Cohomología

El estudio del potencial mediante formas diferenciales, lleva naturalmente al estudio de la relación entre los espacios de formas diferenciales cerradas y exactas.

En general, si la derivada de una forma diferencial es cero, decimos que la forma diferencial es *cerrada*, por otra parte, si una forma diferencial es la derivada de alguna otra forma diferencial, es llamada *exacta*. De esta manera la ecuación $d^2 = 0$ expresa el hecho de que todas las formas diferenciales exactas, son cerradas.

En el caso del campo eléctrico, si E es d de alguna función (0-forma) sobre el espacio, automáticamente tendremos que $dE = 0$, es decir, si

$$E = -d\phi, \quad (\text{A.41})$$

donde la 0-forma ϕ , es el potencial escalar para E .

Análogamente si B es d de alguna 1-forma sobre el espacio, tendremos que $dB = 0$

$$B = -dA, \quad (\text{A.42})$$

donde la 1-forma A es el potencial vectorial para B .

Todas las formas exactas son cerradas, pero no viceversa, pues depende de la topología del espacio ("hoyos" en la variedad). El estudio de este viceversa es llamada la

cohomología deRham.

La k -ésima cohomología deRham de una variedad M , es un espacio vectorial, denotado por $H^k(M)$, cuya dimensión es el número de "k-hoyos" en M . Para definir este espacio vectorial, primero consideraremos el conjunto de todas las k -formas cerradas sobre M (denotado por $Z^k(M)$), y $B^k(M)$ el espacio vectorial de las k -formas exactas sobre M , observemos que

$$B^k(M) \subset Z^k(M), \quad (\text{A.43})$$

de aquí que una forma natural de ver cuantas formas cerradas existen que no son exactas, es considerar el espacio cociente

$$H^k(M) = Z^k(M) / B^k(M), \quad (\text{A.44})$$

que define el k -ésimo grupo de cohomología deRham sobre M . Así, un elemento de $H^k(M)$ es una clase de equivalencia de k -formas cerradas, y diremos que dos formas cerradas ω, ω' son equivalentes si difieren por una k -forma exacta, en otras palabras, si existe una $(k - 1)$ -forma μ tal que

$$\omega - \omega' = d\mu, \quad (\text{A.45})$$

cuando dos formas son equivalentes se dice que son *cohomólogas* y a la clase de equivalencia de ω se le llama su *clase de cohomología*:

$$[\omega] = \{\omega' \mid \exists \mu \omega - \omega' = d\mu\}. \quad (\text{A.46})$$

En estos términos, la ecuación $d \operatorname{tr}(F^k) = 0$, significa que la k -ésima forma de Chern define una clase de cohomología en $H^{2k}(M)$, es decir, si nosotros cambiamos A (por δA),

la forma de Chern cambia, pero no su clase de cohomología no, es decir

$$\delta \operatorname{tr}(F^k) = d k \operatorname{tr}(\delta A \wedge F^{k-1}) \quad (\text{A.47})$$

como se mostró en (1.9).

Por lo tanto, el hecho de que $\delta S = 0$ (cuando variamos con respecto a la conexión) nos dice que $S(A)$ es independiente de A , por lo tanto, sólo depende del haz $\pi : E \rightarrow M$, es decir, existe un conjunto de haces invariantes E sobre una variedad orientada M dados por

$$\int_M \operatorname{tr}(F^n) \quad (\text{A.48})$$

donde F es la curvatura de cualquier conexión A sobre E .

Apéndice B

Factorización Polinomial sobre Algebras de Grassmann

Consideramos un álgebra de Grassmann Λ sobre los números complejos C . Cualquier elemento $a \in \Lambda$ es la suma del cuerpo $\bar{a} \in C$ más el elemento nilpotente $s(a)$ llamado el alma. El anillo de polinomios sobre el álgebra de Grassmann es denotado por $\Lambda_0[x]$ y consiste de todos los polinomios

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (\text{B.1})$$

donde a_k son los elementos pares del álgebra de Grassmann. El conjunto de los elementos nilpotentes de $\Lambda_0[x]$ es denotado por $Q = s(\Lambda_0)[x]$. El álgebra de Grassmann Λ es generada por un número infinito de generadores impares ξ^A . Sin embargo, cuando tratamos con una matriz específica consideramos solamente superfunciones de los elementos dados de la supermatriz. Estos elementos tendrán una expansión en términos de la base $\{\xi^A\}$, la cual no es relevante para nuestros propósitos [33].

En lo que sigue reunimos algunos resultados básicos de [30] los cuales han sido usados en este trabajo. Tanto como nos es posible seguimos la notación y convenciones de esta referencia y también usamos su numeración para los lemmas y corolarios respectivamente.

Decimos que los polinomios f y g en $\Lambda_0[x]$ son co-primos si el ideal generado por S y T es todo el anillo $\Lambda_0[x]$. Además de cumple el siguiente lema:

Lemma 3.3. Sean f y g en $\Lambda_0[x]$. Entonces f y g son coprimos en $\Lambda_0[x]$ si y sólo si \tilde{f} y \tilde{g} son coprimos en $C[x]$, donde $\tilde{f}(x) = \tilde{a}_i x^i$.

Lemma 3.4. Sean S, T, S_1, T_1 en $\Lambda_0[x]$ y suponemos que $\bar{S} = \bar{S}_1, \bar{T} = \bar{T}_1$ con S y T co-primos. Si $ST = S_1T_1$ entonces $S_1 = (1 + R)S$ y $T_1 = (1/(1 + R))T$ con $R \in Q$. Si además S y S_1 son mónicos entonces $S = S_1$ y $T = T_1$.

Corolario 3.8. Sean S y T polinomios mónicos co-primos en $\Lambda_0[x]$ y sea R en Q tal que $gra(R) < gra(ST)$. Entonces existen R_1 y R_2 en Q tales que $ST + R = (S + R_1)(T + R_2)$, con $gra(R_1) < gra(S)$ y $gra(R_2) < gra(T)$.

Apéndice C

Identidades Polinomiales

Aquí establecemos algunas identidades polinomiales usadas en la demostración de los teoremas correspondientes al ideal anulador de una supermatriz M . La expresión $F_1(n, x, y) = \sum_{j=0}^n x^j y^{n-j} = F_1(n, y, x)$ aparece naturalmente en la identidad algebraica

$$t^{k+1} - x^{k+1} = (t - x) \sum_{j=0}^k t^j x^{k-j} = (t - x) F_1(k, t, x) \quad (\text{C.1})$$

y ha sido usada para estudiar el cociente de diferencias $w[t, x] = \frac{w(t) - w(x)}{t - x}$, donde $w(t)$ es un polinomio mónico, con aplicaciones a identidades combinatorias y a operadores [42, 43].

Fácilmente se sigue de la definición de $F_1(n, x, y)$ que es simétrico en ambos argumentos y que es un polinomio homogéneo de grado n . La demostración de los resultados en la sección 2 requiere de expresiones de este tipo pero de mayor orden. Usando la identidad algebraica básica (C.1), podemos definir las fácilmente en términos de relaciones de menor orden. De esta manera, la definición de $F_2(n, x, y, z)$ es

$$\begin{aligned} F_1(n, x, y) - F_1(n, x, z) &= \sum_{i=0}^n x^i (y^{n-i} - z^{n-i}), \\ &= (y - z) \sum_{i=0}^{n-1} x^i F_1(n - 1 - i, y, z), \\ &= (y - z) F_2(n - 1, x, y, z). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Por lo que F_2 está determinada por la diferencia de F_1 's y satisface

$$F_2(n, x, y, z) = \sum_{i=0}^n x^i F_1(n-i, y, z) = \sum_{i=0}^n x^{n-i} F_1(i, y, z). \quad (\text{C.3})$$

Para $k \geq 1$, los polinomios $F_k(n, \dots)$ pueden ser definidos inductivamente por

$$F_k(n, x, y, \dots) = \sum_{i=0}^n x^i F_{k-1}(n-i, y, \dots). \quad (\text{C.4})$$

Algunas de las propiedades de las F 's son las siguientes:

(i) Son completamente simétricas con respecto al intercambio de cualquiera de sus argumentos. De esta manera, para el caso $k = 2$ tenemos

$$F_2(n, x, y, z) = F_2(n, z, x, y) = F_2(n, y, x, z). \quad (\text{C.5})$$

(ii) La diferencia entre dos F 's que difieren en uno de sus argumentos está dada por

$$\begin{aligned} & F_k(n, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) - F_k(n, x_1, \dots, x_k, x_{k+2}) = \\ & = (x_{k+1} - x_{k+2}) F_{k+1}(n-1, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

La demostración de las propiedades anteriores se sigue por inducción partiendo de las definiciones (C.1 y C.4). En el caso (i) la afirmación es cierta cuando $k = 1$, y la suponemos válida para $k = m$. En el caso donde consideramos dos argumentos en los cuales no se incluye el primero, la demostración es directa debido al argumento de inducción. Por lo tanto sólo tenemos que tratar con el caso donde intercambiamos x_1 con cualquier otro x_q $2 < q \leq m + 2$,

$$\begin{aligned} F_{m+1}(n, x_1, x_2, \dots, x_q, \dots, x_{m+2}) &= \sum_{i=0}^n x_1^i F_m(n-i, x_2, \dots, x_q, \dots, x_{m+2}), \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} x_1^i x_q^j F_{m-1}(n-j-i, x_2, \dots, x_{m+2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n x_q^j \sum_{i=0}^{n-j} x_1^i F_{m-1}(n-j-i, x_2, \dots, x_{m+2}), \\
&= \sum_{j=0}^n x_q^j F_m(n-j, x_2, \dots, x_1, \dots, x_{m+2}), \\
&= F_{m+1}(n, x_q, x_2, \dots, x_1, \dots, x_{m+2}). \tag{C.7}
\end{aligned}$$

La demostración de la propiedad (ii) se hace de la misma manera que la anterior. Suponiendo válido para $k = m$, entonces

$$\begin{aligned}
&F_{m+1}(n, x_0, \dots, x_m, x_{m+1}) - F_{m+1}(n, x_0, \dots, x_m, x_{m+2}) = \\
&= \sum_{i=0}^n \{F_m(n-i, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) - F_m(n-i, x_1, \dots, x_m, x_{m+2})\} \tag{C.8} \\
&= (x_{m+1} - x_{m+2})F_{m+2}(n-1, x_0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}).
\end{aligned}$$

Apéndice D

2-Forma \tilde{S}^{AB}

Aquí resumimos parte de los cálculos realizados para la obtención de las ecuaciones de movimiento (4.39, 4.39 y 4.41). Las componentes de la dos forma $\tilde{S}^{ab} = R^{ab} + \lambda e^a \wedge e^b = \frac{1}{2}\tilde{S}^{ab}_{cd}e^c \wedge e^d$. La expresión general para el producto de las componentes de S^{ab} , la determinamos al desarrollar el determinante de las deltas generalizadas, y está dado por

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{AM}_{CD} \tilde{S}^{EG}_{HG} = & \tilde{R}^{AM}_{CD} \tilde{R}^{EG}_{HK} + \lambda^2 (\delta_C^A \delta_D^M \delta_H^E \delta_K^G - \delta_C^A \delta_D^M \delta_K^E \delta_H^G - \delta_D^A \delta_C^M \delta_H^E \delta_K^G) + \\ & + \lambda (\delta_H^E \delta_K^G \tilde{R}^{AM}_{CD} + \delta_C^A \delta_D^M \tilde{R}^{EG}_{HK} - \delta_K^E \delta_H^G \tilde{R}^{AM}_{CD} - \delta_D^A \delta_C^M \tilde{R}^{EG}_{HK}). \end{aligned} \quad (D.1)$$

De esta expresión podemos obtener los valores de los productos \tilde{S}^2 , $\tilde{S}^B_M \tilde{S}^M_B$, $\tilde{S}^{AB}_{LM} \tilde{S}^{LM}_{AB}$, $\tilde{S}^R_B \tilde{S}^B_Q$, $\tilde{S}^B_M \tilde{S}^{RM}_{QB}$, $\tilde{S}^{AB}_{QM} \tilde{S}^{MR}_{AB}$ y $\tilde{S} \tilde{S}^R_Q$, que están dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^2 = & (\tilde{S}^{AB}_{AB})^2 = \tilde{R}^2 + 2\tilde{R}\lambda(n^2 - n) + \lambda^2(n^2 - n)^2, \\ \tilde{S}^B_M \tilde{S}^M_B = & \tilde{R}^B_M \tilde{R}^M_B + \lambda^2 n(n-1)^2 + 2\lambda\tilde{R}(n-1), \\ \tilde{S}^{AB}_{LM} \tilde{S}^{LM}_{AB} = & \tilde{R}^{AB}_{LM} \tilde{R}^{LM}_{AB} + 2\lambda^2 n(n-1) + 4\lambda\tilde{R}, \\ \tilde{S}^R_B \tilde{S}^B_Q = & \tilde{R}^R_B \tilde{R}^B_Q + \lambda^2 \delta_Q^R (n-1)^2 + 2\lambda\tilde{R}^R_Q (n-1), \\ \tilde{S}^B_M \tilde{S}^{RM}_{QB} = & \tilde{R}^B_M \tilde{R}^{RM}_{QB} + \lambda^2 \delta_Q^R (n-1)^2 + \lambda(\tilde{R} \delta_Q^R + \tilde{R}^R_Q (n-2)), \\ \tilde{S}^{AB}_{QM} \tilde{S}^{MR}_{AB} = & \tilde{R}^{AB}_{QM} \tilde{R}^{MR}_{AB} - 2\lambda^2 \delta_Q^R (n-1) - 4\lambda\tilde{R}^R_Q, \\ \tilde{S} \tilde{S}^R_Q = & \tilde{R} \tilde{R}^R_Q + \lambda^2 \delta_Q^R n(n-1)^2 + \lambda(n\tilde{R} \delta_Q^R - \tilde{R} \delta_Q^R + n^2 \tilde{R}^R_Q - n\tilde{R}^R_Q), \end{aligned} \quad (D.2)$$

donde $n = 5$, y \tilde{R} , \tilde{R}^A_B , \tilde{R}^{AB}_{CD} representan el escalar de curvatura, el tensor de Ricci y el tensor de Riemann 5 dimensionales respectivamente, y son calculados para la métrica de Robertson-Walker en la base de las 1-formas $\{e^a, e^5\}$ dados por (4.29, 4.30, y 4.31).

Bibliografía

- [1] S. Mandelstam, Phys. Rev. **D19**(1979)2391.
- [2] E. Witten, Nucl. Phys. **B311**(1988/89)46, Phys. Rev. Lett. **62**(1989)190.
- [3] A. H. Chamseddine "Topological gauge theory of gravity in five and all odd dimensions". Phys. Lett. B. **233**(1989)291.
- [4] E. Witten "Quantum field theory and the Jones polynomial". Comm. Math. Phys. **121**(1989)351.
- [5] Ver "Current Algebra and Anomalies" (World Scientific 1985).
- [6] E. Cremmer, B. Julia, y J. Scherk, Phys Lett. **B76**(1978)409.
- [7] W Siegel, Nucl. Phys. **B156**(1979)135; R Jackiw and S Templeton, Phys. Rev. **D23**(1981)2291; J Schonfeld, Nucl. Phys. **B185**(1981)157.
- [8] F. W. Hehl, J. Lemke y E. W. Mielke, en: Geometry and theoretical physics, eds. J. Debrus y A. S. Hirshfield (Springer, Berlin, 1991) p. 56.
- [9] A Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **57**(1986)2244; Phys. Rev. D **36**(1987)295.
- [10] S Deser, R Jackiw and S Templeton, Ann. of Phys. **140**(1982)372.
- [11] A Chúcarro and P K Townsend, Phys. Lett. **B180**(1986)89.
- [12] Hehl et al. J. Math. Phys. **32**(1991)2169.

- [13] J Baez and P Muniain. Gauge Fields, Knots and Gravity. World Scientific (1994).
- [14] F Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. World Scientific (1990).
- [15] A Lerda, Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics. Lecture Notes in Physics vol. m 14. Springer Verlag (1992).
- [16] S C Zhang, Int. J. Mod. Phys. **B6**(1992)25.
- [17] Y. N. Obukhov, F. E. Schunck, hep-th/9606131.
- [18] J Leite Lopes. Gauge Field Theories. Pergamon Press (1981).
- [19] Para un resúmen ver por ejemplo Birmingham D Blau M, Rakowski M y Thompson G 1991 *Phys. Rep* **209**129.
- [20] Witten E 1989 *Nucl. Phys. B* **322** 629.
- [21] Horne J H 1990 *Nucl. Phys. B* **334**669.
- [22] Nelson J E, Regge T and Zertuche F 1990 *Nucl. Phys. B* **339** 516.
- [23] Koehler K, Mansouri F, Vaz C and Witten L 1990 *Mod Phys. Lett. A* **5** 935; 1990 *Nucl. Phys. B* **341**167.
- [24] Urrutia L F, Waelbroeck H and Zertuche F 1992 *Mod. Phys. Lett. A* **7**2715.
- [25] C Roveli y L Smolin *Nucl. Phys. B* 442 (1995) 593.
- [26] Y L Ling y Smolin. "Supersymmetric Spin Networks and Quantum Gravity" hep-th/9904016.
- [27] Urrutia L F and Morales, J. *Phys. A: Math Gen.*, **26**(1993)441.
- [28] Ver por ejemplo De Witt B 1984 *Supermanifolds*(Cambridge: Cambridge University Press)p 33.

- [29] Backhouse N B and Fellouris A G 1984 *J. Phys. A: Math. Gen.***17** 1389.
- [30] Kobayashi Y and Nagamichi S 1990 *J. Math. Phys.***31** 2726.
- [31] Ver por ejemplo Nering E D 1970 *Linear Algebra and Matrix Theory* Second edition (New York: Wiley)p 98.
- [32] Urrutia L F, Waelbroeck H and Zertuche F 1993 *Proc. Workshop on Harmonic Oscillators, NASA Conference Publication*vol 3197, ed D Han, Y S Kim and W Zachary, p 267.
- [33] Ver por ejemplo Henneaux M and Teitelboim C 1993 *Quantization of Gauge Systems*(Princeton University Press, New Jersey)ch 6.
- [34] F A Berezin, *Introduction to Superanalysis*, Reidel Publishing Company, Boston,1987.
- [35] Y I Manin, *Gauge Theory and Complex Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [36] Y Kobayashi and S Nagamachi, *Proc. Japan Acad.* **64A**(1988)249.
- [37] L F Urrutia and N Morales, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27** (1994)1981.
- [38] L F Urrutia and N Morales, *Lett. Math. Phys.* **32**(1994)32.
- [39] N Morales, L F Urrutia and H Tapia-Recillas, *Congressus Numerantium* **107**(1995)209.
- [40] M F Atiyha and I G MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass.,1969.
- [41] H Matsumura, *Commutative Algebra*, W.A.Benjamin, N.Y.,1970.
- [42] G C Rota, *Finite Operator Calculus*, Academic Press, N.Y., 1975.
- [43] L Verde-Star, *Studies in Applied Math.* **85** (1991)215.

- [44] S A Hojman, J.Math.Phys. **34** (1993)2968.
- [45] A Chodos and S Detweiler, Phys. Rev. **D 21**(1980)2167.
- [46] M Rosenbaum, M Ryan, and L Urrutia, Phys. Rev. **D 36**(1987)1032.
- [47] R R Caldwell et. al. astro-ph/9708069.
- [48] M S Turner y M White, *Phys. Rev.* **D56**, **R4439**(1997).
- [49] V Silveira y I Waga, *Phys. Rev.* **D56**(1997)4625.
- [50] C Wetterich, *Astron. Astroph.* **301**(1995)321.
- [51] Matzner R A and Mezzacapa A, Phys. Rev. **D 36**(1985)3114.
- [52] Jordan P,Schwerkraft und Weltall, second edition, Braunschweig.
- [53] H C Lee *An Introduction to Kaluza-Klein Theories* (World Scientific, Singapore,1984).
- [54] Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons.s
- [55] S J Perlmutter et. al., Nature **391**(1998)51. S J Perlmutter et. al., astro-ph/9812133.
- [56] A G Riess, et. al., Astron. J. **116**(1998)1009.
- [57] De-Hai Zhang. astro-ph/9912458.
- [58] Neta A Bahcall et. al. astro-ph/9906463.
- [59] S M Carroll y W H Press, Annu. Rev. Astron. Astrophys. **30**(1992)499.
- [60] W Misner, S Thorne, J Wheeler. Gravitation W H Freeman and Company (1973) 774.
- [61] D E Berenstein and L F Urrutia, J. Math. Phys. **35**(1994)1922.

- [62] L F Urrutia, H Waelbroeck and F Zertuche, Mod. Phys. Lett. **A7**(1992)2715.
- [63] R Utiyama, Phys. Rev. **101** (1956) 1597; T W B Kibble, J Math. Phys. **2**(1961)212.
- [64] F W Hehl, J Dermont, Phys. Reports. **258** (1995) 1 y 2.
- [65] S Deser, R Jackiw y S Templeton, Phys. Rev. Lett., **48**(1982)975; Ann. Phys. (N.Y.), **140**(1982)372.
- [66] S Deser y Z Yang, Class. Quantum Gravit., **7**(1990)1603.
- [67] P Baekler, E W Mielke y F W Hehl, Nuovo Cimento, **107**(1992)91.
- [68] E Witten, Nucl. Phys.**B 323**(1989) 113.
- [69] E W Mielke, *Geometrodynamics of Gauge Fields*, Physical Research, Akademie-Verlag Berlin (1987).
- [70] A H Chamseddine and D Wyler, Phys. Lett. **B. 228**(1989)75
- [71] S. Gotzes y A.C. Hirshfeld, Ann.of Phys.(N.Y.) **203**(1990)410.
- [72] K Isler and C Trugensberg, Phys. Rev. Lett. **63**(1989)834.
- [73] Julian Schwinger, Phys. Rev. **82**(1951)664.
- [74] G W Gibbons, D A Rasheed, Phys. Lett. B **365**(1996)46