



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00096

Matrícula: 2173805771

Sistema de Funciones Iteradas, Fractales y Multifractales.

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 12:00 horas del día 7 del mes de mayo del año 2021 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. JOSE LUIS DEL RIO CORREA  
DR. JOSE RUBEN LUEVANO ENRIQUEZ  
DR. LEV GUZMAN VARGAS



Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: YULIÁN ANDRÉS ÁLVAREZ BALLESTEROS

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

YULIÁN ANDRÉS ÁLVAREZ BALLESTEROS

ALUMNO

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. JOSE LUIS DEL RIO CORREA

VOCA

DR. JOSE RUBEN LUEVANO ENRIQUEZ

SECRETARIO

DR. LEV GUZMAN VARGAS

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella

---



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

---

# Sistema de Funciones Iteradas, Fractales y Multifractales

---

*Tesis presentada por*

Yulián Andrés

ÁLVAREZ BALLESTEROS

*Director de tesis*

Dr. José Luis

DEL RÍO CORREA

---

MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

*Para optar por el título de*

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

Ciudad de México, Septiembre de 2020



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1. Fundamentos Matemáticos de la Geometría Fractal</b>	<b>1</b>
1.1. Midiendo la distancia: Espacios métricos . . . . .	1
1.2. Sucesiones de Cauchy, Límite y Propiedades de los Conjuntos . . . . .	4
1.3. El espacio métrico $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$ : El espacio donde viven los fractales . . . . .	9
1.4. Transformaciones Unidimensionales . . . . .	12
1.4.1. El Conjunto de Cantor . . . . .	13
1.5. Transformaciones afines en el espacio Euclidiano . . . . .	15
1.6. El teorema de contracción de Banach . . . . .	17
<b>2. Sistemas de Funciones Iteradas</b>	<b>23</b>
2.1. Sistema de funciones iteradas IFS . . . . .	23
2.1.1. Triangulo de Sierpinski . . . . .	25
2.1.2. El helecho de Barnsley . . . . .	26
2.2. El teorema de Collage . . . . .	30
<b>3. Caos en Fractales</b>	<b>33</b>
3.1. El Juego del Caos . . . . .	33
3.2. La Dirección de los Puntos en un Fractal . . . . .	34
3.3. Transformaciones Continuas del Espacio de Direcciones a los Fractales . . . . .	36
3.4. Introducción a los Sistemas Dinámicos . . . . .	39
3.5. Dinámica en los Fractales . . . . .	44
3.6. La Sombra de la Dinámica Determinista . . . . .	46
<b>4. Dimensión Fractal</b>	<b>51</b>
4.1. La Longitud de las Costas y la Dimensión Fractal . . . . .	51
4.2. Determinación Teórica de la Dimensión Fractal. . . . .	53

4.3. La Dimensión Fractal de Hausdorff-Besicovitch . . . . .	55
<b>5. Medidas Invariantes sobre Fractales</b>	<b>59</b>
5.1. Introducción a la Medida Invariante sobre Fractales . . . . .	59
5.2. Campos y Sigma-Campo . . . . .	62
5.3. Medida . . . . .	63
5.4. Integración . . . . .	65
5.5. Densidades Invariantes . . . . .	68
5.5.1. Densidades Conjugadas . . . . .	70
5.6. Operador de Perron-Frobenius . . . . .	71
5.6.1. Punto Fijo del Operador de Perron-Frobenius . . . . .	73
5.6.2. Espectro del Operador de Perron-Frobenius . . . . .	74
5.7. El Espacio Métrico Compacto $(\mathcal{P}(\mathbf{X}), d)$ . . . . .	75
5.8. Ensamble Microcanónico . . . . .	76
5.9. Sistemas Dinámicos Disipativos . . . . .	79
5.10. Operador de Markov: Una Contracción sobre $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ . . . . .	81
5.11. Teorema de Elton . . . . .	85
5.12. Sistemas de funciones iteradas recurrentes . . . . .	86
5.12.1. Algoritmo de juego de caos para un IFS recurrente . . . . .	89
5.12.2. Algoritmo de Máquina de Fotocopiado . . . . .	91
5.12.3. Secuencias de ADN e IFS's Recurrentes . . . . .	93
5.13. Cadena de Markov . . . . .	95
5.14. Teorema de Collage para IFS's recurrentes . . . . .	97
5.15. Vectores de Medida . . . . .	99
<b>6. Multifractales</b>	<b>103</b>
6.1. Medida Multifractal . . . . .	103
6.1.1. La medida de Cantor . . . . .	103
6.1.2. Fractales Autoafines sin Huecos . . . . .	108
6.1.3. Sistemas de funciones iteradas aplicadas a funciones . . . . .	115
6.2. Entropías Generalizadas y Dimensiones Fractales . . . . .	119
6.2.1. Medida de Halsey y Dimensión Generalizada $D_q$ . . . . .	120
6.2.2. Conjunto de Cantor con diferentes escalas . . . . .	121
6.2.3. Dimensión de Rényi generalizada (Desarrollo histórico) . . . . .	124
6.2.4. Dimensión Reticular de Rényi Generalizada . . . . .	129
6.2.5. Dimensión generalizada en fractales . . . . .	130

---

6.3. El Espectro Multifractal y el Exponente $\tau$ . . . . .	131
6.4. Turbulencias . . . . .	132
6.5. Atractor Extraño . . . . .	135
6.6. Medida multinomial . . . . .	139
6.6.1. Dimensiones Fractales . . . . .	140
6.6.2. Espectro Óptico de la Separación Multifractal . . . . .	142
6.6.3. Comportamiento Local . . . . .	143
6.6.4. Exponente de Hölder . . . . .	145
6.6.5. Extensión de las Ideas de Boltzmann a Multifractales . . . . .	147
6.6.6. Conjunto de Condensación . . . . .	151
6.6.7. Medida Probabilística de $J_\alpha$ . . . . .	152
6.7. Dimensión Generalizada y Transformaciones de Legendre . . . . .	156
6.7.1. Exponente de Correlación como un Promedio Global . . . . .	156
6.7.2. Transformada de Legendre . . . . .	158
<b>7. Conclusiones</b>	<b>163</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>164</b>
Referencias . . . . .	165
<b>8. Apéndices</b>	<b>167</b>
8.1. Distancia de Hausdorff . . . . .	167
8.2. Sistemas de Funciones Iteradas con Probabilidades, Algoritmo de Iteración Aleatoria .	169
8.3. Sistemas de Funciones Iteradas Recurrentes . . . . .	171





# Resumen

En esta tesis se estudian los sistemas de funciones iteradas, los fractales y los multifractales para describir de manera cualitativa el comportamiento irregular de sistemas reales. La geometría fractal es una rama nueva en las matemáticas, pero que cuenta con un formalismo riguroso, por esto empezamos por hacer una descripción básica de la topología en diferentes espacios como  $\mathbb{R}^2$  y el espacio de direcciones, para luego definir el espacio en el que viven los fractales. Se dan a conocer las técnicas usadas para crear de forma aproximada fractales determinista y figuras naturales como el Helecho de Barnsley, este método se llama sistema de funciones iteradas del cual se aplicaran dos algoritmos, uno llamado determinista y otro de iteración aleatoria. Los fractales construidos a través del algoritmo de iteraciones aleatorias pueden estudiarse como sistemas dinámicos caóticos en el espacio de direcciones. La dimensión fractal es una cantidad positiva no entera asociada únicamente a los fractales y que se ha calculado para muchos objetos reales, desde las costas de los países hasta los órganos humanos. Aquí se muestran las definiciones de dimensión fractal y dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Los sistemas de funciones iteradas por si solos no son suficientes para describir la compleja irregularidad de los objetos reales como por ejemplo las nubes, las montañas o el ADN, por esta razón es necesario agregar probabilidades que especifiquen zonas privilegiadas o marginadas. Para lo cual se estudia brevemente como una herramienta la teoría de la medida, las cadenas de Markov y los sistemas de funciones iteradas recurrentes como otro método de elaboración de imágenes. Finalmente, se hace una descripción de los multifractales como objetos que tienen una estructura más rica que los fractales al poseer todo un espectro de dimensiones fractales que puede incluir dimensiones enteras y que se pueden construir como sistemas de funciones iteradas con probabilidad, no solo para obtener imágenes, sino también para describir el comportamiento de magnitudes físicas como la distribución de masa o carga y la dispersión de energía en turbulencias completamente desarrolladas. En conclusión, los fractales y los multifractales exhiben de forma matemática la estructura interna de objetos reales presentes en la naturaleza por lo que tienen el potencial de convertirse en un modelo aplicado cotidianamente en la física. Este trabajo recopila muchos de los resultados y temas tratados en la literatura sobre fractales y sistemas dinámicos, pero que no siempre se encuentran juntos, por ejemplo, los conjuntos de condensación, el teorema de Eggleston, los sistemas de funciones iteradas aplicadas a funciones, la multifractalidad y las relaciones con la estadística de Boltzmann,

por lo que la tesis aporta en la manera en la que se abordan los temas los cuales muchas veces se encuentran de forma separada, de manera formal y matemática y otras veces con enfoques más prácticos, los tópicos son tratados (sin extendernos demasiado) desde los dos puntos de vista tanto formal como aplicativo, por lo que de alguna forma contribuye tanto en completar, unir y agregar tanto explicaciones como gráficos ilustrativos relacionados con los resultados que algunas veces están faltantes en la bibliografía.

# Introducción

Las interpretaciones clásicas de la física estaban basadas en fundamentos deterministas. Las leyes de movimiento de Newton establecieron un conjunto de reglas sencillas que han sido aplicadas hasta la actualidad para predecir el comportamiento de muchos sistemas físicos, en especial el de los planetas. Estos comportamientos son descritos mediante ecuaciones diferenciales y condiciones iniciales, por lo que el estado futuro de cualquier sistema clásico puede predecirse teniendo solo estos dos elementos. En algunos casos las ecuaciones tienen soluciones analíticas o exactas, y en otros casos no existen. Un sistema que arroja soluciones exactas es el problema de dos cuerpos, como el de tierra-luna o el de sol-tierra, cuya solución fue encontrada por Isaac Newton, para la cual no se requiere mucho más que la aplicación de la ley de gravitación. La sencillez de estas leyes también fue una de las causas del éxito de la teoría, aunque en su momento no fuera posible realizar una demostración empírica, Einstein (Einstein y Infeld, 1986) sostenía que la ley de inercia era imposible de mostrar en la práctica, puesto que no se puede realizar un experimento ideal; sin embargo, los experimentos en el espacio han sido satisfactorios. Desde la perspectiva de Newton el movimiento planetario era perpetuo y siempre ha tenido las mismas características, para Henri Poincaré esta estabilidad era cuestionable. El problema de tres cuerpos puso en evidencia problemas inherentes a la teoría, como la no solución de las ecuaciones diferenciales y la imposibilidad de tener condiciones iniciales exactas, lo que nos lleva al escenario de la impredecibilidad de los sistemas reales.

Los sistemas dinámicos, el caos y los fractales son una especie de trinidad en las matemáticas, ya que son campos de estudio que aparecen juntos frecuentemente en la literatura, además, es la forma actual de estudiar los sistemas cuyo comportamiento está descrito por ecuaciones diferenciales que no son fáciles de solucionar y es más práctico recurrir a métodos diferentes a los comunes o simplemente no se pueden solucionar y son altamente sensibles a sus condiciones iniciales. El objetivo de este trabajo es estudiar principalmente la teoría fractal y multifractal, usada generalmente para describir objetos geoméricamente irregulares (Mandelbrot, 1982), pero que se puede usar para hacer una descripción cualitativa de algunos aspectos de la dinámica de sistemas físicos, biológicos, geológicos, entre otros, precisamente por tener comportamientos irregulares.

Los primeros capítulos tienen como objetivo mostrar los conceptos matemáticos relacionados con la teoría fractal, complementados con algunos ejemplos de la vida real. Las definiciones y el

orden temático son tomados mayormente de los libros de Barnsley (Barnsley, 1993), Peitgen (Heinz-Otto Peitgen y Saupe, 2004), Harte (Harte, 2001) y Beck (Beck y Schlögl, 1993).

En el capítulo uno se resumen conceptos matemáticos básicos relacionados con los espacios métricos y que sirven como base para construir la teoría fractal, con especial importancia la definición de la distancia de Hausdorff y el operador de Hutchinson.

En el capítulo dos se definen los sistemas de funciones iteradas (IFS por sus siglas en inglés) como un método de construcción de fractales a los que se les llama deterministas. Veremos que las imágenes producidas con IFS's pueden ser tanto complicadas y abstractas como naturales y cotidianas aunque mantengan una estructura irregular, y se describe brevemente el teorema de Collage como una herramienta para obtener imágenes específicas.

En el capítulo tres se realiza una introducción a los sistemas dinámicos. Se definen de manera matemática y se explica a través de ejemplos el concepto de caos y la dinámica en los fractales.

En el capítulo cuatro se hace una introducción a la dimensión fractal y en particular la dimensión de Hausdorff-Besicovitch. La dimensión fractal puede ser usada para diferenciar un fractal de otro, pero existen muchos casos en los que hay una misma dimensión para dos fractales diferentes y es necesario recurrir a otras cantidades para diferenciarlos. La dimensión fractal es importante porque permite encontrar una conexión con la información del mundo real, ya que es posible medir la dimensión fractal de muchos objetos o fenómenos naturales cuya forma y comportamiento es irregular.

El objetivo del capítulo cinco es demostrar que la teoría de la medida es una herramienta que se puede usar tanto en las ciencias como la ingeniería para modelar sistemas e imágenes del mundo real. En este se discuten aspectos formales de la teoría de la medida así como también se define el espacio de las probabilidades. Se estudia al operador de Perron-Frobenius como el operador de evolución temporal de las densidades de probabilidad y como el que define las densidades invariantes. Se describe al ensamble microcanónico de la mecánica estadística usando medidas de probabilidad invariantes y densidades invariantes. Se introduce la métrica de Hutchinson como una forma de calcular distancias entre medidas. Se usa al operador de Markov como una de las formas de definir y describir el comportamiento de medidas invariantes. Se describen los IFS's recurrentes como una extensión de los IFS's con probabilidad, los cuales están asociados con los procesos de Markov a primer orden (también llamadas cadenas de Markov), y que permiten obtener una variedad más amplia de fractales deterministas. Se hace un pequeño resumen sobre como se usan los IFS's recurrentes para simular representaciones del juego del caos de las secuencias de DNA (por sus siglas en inglés). Finalmente, se estudian los procesos de Markov los cuales están estrechamente relacionados con el vector de medida.

Para finalizar, en el capítulo seis se estudia la teoría multifractal, se definieron, por medio de ejemplos y de manera formal, los conceptos de espectro fractal y dimensión generalizada. Así mismo, se realizó un breve recuento histórico del origen de estos conceptos a través de la teoría de Rényi

de la información. La teoría multifractal es usada para el estudio de la disipación de energía en turbulencias completamente desarrolladas, así como de los sistemas dinámicos. Se muestra a través del teorema de Eggleston que el intervalo unitario es un multifractal. También se observó que el espectro multifractal está relacionado con la dimensión generalizada a través de una transformación de Legendre lo que nos conduce a analogías con la mecánica estadística.



# Capítulo 1

## Fundamentos Matemáticos de la Geometría Fractal

Se discutirán algunos conceptos matemáticos que son de utilidad a la hora de entender el significado de la palabra fractal, su importancia y sus aplicaciones. No se realizará una exposición con toda la rigurosidad matemática que los temas contienen, por lo que es posible que no se realicen algunas demostraciones y nos enfoquemos mayormente en la visualización de los conceptos en diferentes situaciones o espacios.

### 1.1. Midiendo la distancia: Espacios métricos

Un primer acercamiento hacia lo que es considerado un fractal, es verlo como un simple subconjunto de un espacio.

**Definición 1.1.1.** *Un espacio  $\mathbf{X}$  es un conjunto. Los puntos del espacio son los elementos del conjunto.*

De manera informal un espacio es el lugar en el que viven los fractales. Los espacios nos muestran la estructura que deben tener los puntos que lo componen. El conjunto de los números reales  $\mathbf{X} = \mathbb{R}$  es un espacio en el que cada “punto”  $x \in \mathbf{X}$  es un número real, o un punto sobre una línea. El plano Euclidiano,  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$  en el que cualquier par de puntos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  representados de la forma  $x = (x_1, x_2)$  son un punto en  $\mathbb{R}^2$ , es un ejemplo común que se trabaja con frecuencia. Otro espacio especial por su utilidad es el plano complejo,  $\mathbf{X} = \mathbb{C}$ , en el que cualquier punto  $x \in \mathbf{X}$  está representado como

$$x = x_1 + ix_2, \text{ donde } i = \sqrt{-1}$$

para algún par de números reales  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

Los objetos o elementos (números, imágenes, transformaciones, entre otros) en este caso llamados puntos del espacio, deben pertenecer a un conjunto en el que se pueda medir la distancia entre cualquier par de estos. Este conjunto debe ser saturado en algún sentido, lo que significa que una sucesión arbitraria debe satisfacer algunas pruebas que nos muestren la existencia de un límite y que este esté en el conjunto.

Usamos la notación “ $\forall$ ” que significa “para todo”. También introducimos la notación  $A \setminus B$  que se entiende como quitar el conjunto  $B$  a  $A$  es decir  $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$  y también utilizamos “ $\Rightarrow$ ” como implicación.

**Definición 1.1.2.** *Un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$  es un espacio junto con una función real  $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , que mide la distancia entre un par de puntos  $x$  y  $y$  en  $\mathbf{X}$ . Requerimos que  $d$  cumpla los siguientes axiomas:*

- 1**  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in \mathbf{X}$
- 2**  $0 < d(x, y) < \infty \forall x, y \in \mathbf{X}, x \neq y$
- 3**  $d(x, x) = 0 \forall x \in \mathbf{X}$
- 4**  $d(x, y) < d(x, z) + d(z, y) < \infty \forall x, y, z \in \mathbf{X}$ ,

a la función  $d$  se le llama métrica.

Las siguientes son algunas métricas en el espacio  $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ :

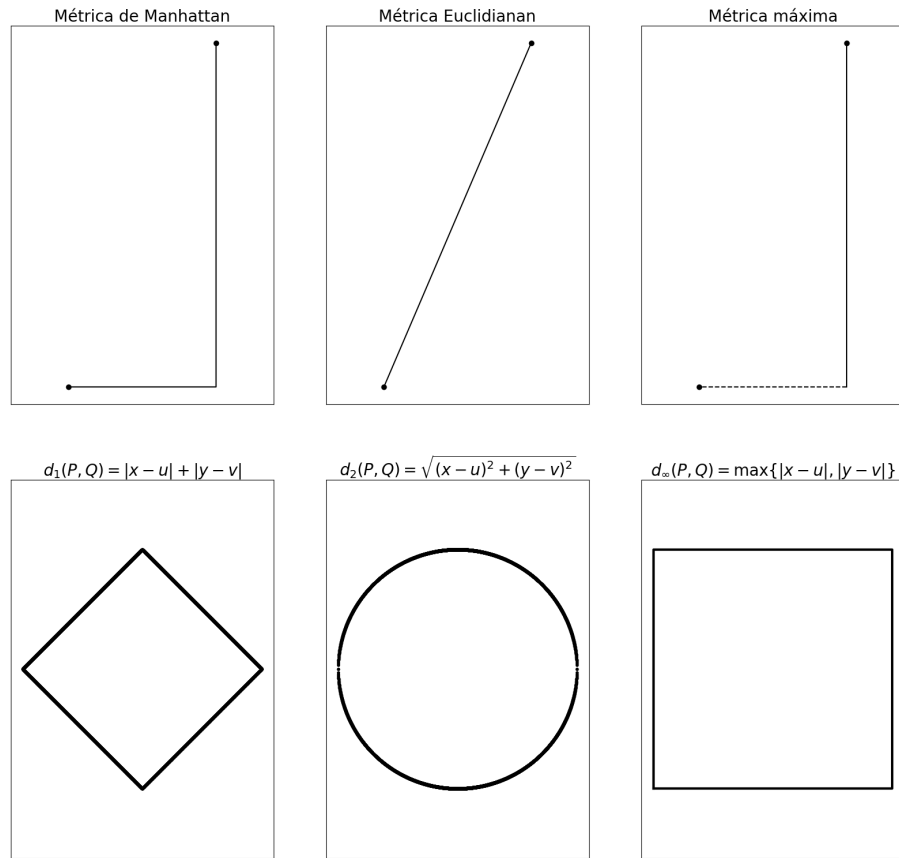
- a**  $d(x, y) = |x - y|$  (métrica euclidiana)
- b**  $d(x, y) = 2 \cdot |x - y|$
- c**  $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ .

En el espacio  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$  (El plano), para cualquier par de puntos  $P = (x, y)$ ,  $Q = (u, v)$  en el plano podemos definir:

- a**  $d_2(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$  (métrica euclidiana)
- b**  $d_\infty(P, Q) = \max\{|x - u|, |y - v|\}$  (métrica máxima)
- c**  $d_1(P, Q) = |x - u| + |y - v|$  (Métrica de Manhattan).

La figura 1.1 muestra los tres tipos de métricas en el plano mencionados, se puede ver que cada métrica cambia la geometría del espacio.





**Figura 1.1:** Tres formas de medir la distancia entre dos puntos en el plano y las correspondientes curvas que se encuentran a una distancia constante del origen.

**Definición 1.1.3.** *Dos métricas  $d_1$  y  $d_2$  de un espacio  $\mathbf{X}$  son equivalentes si existen constantes  $0 < c_1 < c_2 < \infty$  tal que*

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}.$$

Una idea subyacente al concepto de métricas equivalentes es que cualquier par de estas dan la misma noción de que los puntos están cerca o que están alejados. Es como si hubiese una forma estándar para deformar limitadamente el espacio, por lo cual las distancias están determinadas tanto antes como después de la deformación.

**Definición 1.1.4.** *Dos espacios métricos  $(\mathbf{X}_1, d_1)$  y  $(\mathbf{X}_2, d_2)$  son equivalentes si existe una función  $h : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$  que es uno a uno y sobre (i.e., invertible), tal que la métrica  $\tilde{d}_1$  en  $\mathbf{X}_1$  definida mediante*

$$\tilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)), \quad \forall x, y \in \mathbf{X}_1$$

*es equivalente a  $d_1$ .*

Se puede pensar que se requiere que  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  estén relacionados mediante una deformación limitada del espacio, de forma tal que en ninguna parte haya compresiones o estrechamientos arbi-

trariamente largos, además no hay sobre posiciones, plegaduras, o desgarres.

**Definición 1.1.5.** Una función  $f : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$  de un espacio métrico  $(\mathbf{X}_1, d_1)$  a otro espacio métrico  $(\mathbf{X}_2, d_2)$  es continua si, para cada  $\epsilon > 0$  y  $x \in \mathbf{X}_1$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$d_1(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Si  $f$  es también uno a uno y sobre, y entonces es invertible, y si también la inversa  $f^{-1}$  de  $f$  es continua, entonces decimos que  $f$  es un homeomorfismo entre  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$ . En ese caso decimos que  $\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{X}_2$  son homeomorfos.

La afirmación de que dos espacios son equivalentes métricamente es mucho más fuerte que la declaración de que estos son homeomorfos: para ser equivalentes debe existir una relación cercana entre  $\epsilon$  y  $\delta$  que son independientes de  $x$ . El homeomorfismo es la relación de equivalencia para propiedades topológicas; dos espacios que son homeomorfos son espacios topológicos idénticos. Dos métricas  $d_1$  y  $d_2$  en un espacio dado  $\mathbf{X}$  son topológicamente idénticas (definen el mismo espacio topológico) si el mapeo identidad  $\iota : (\mathbf{X}, d_1) \rightarrow (\mathbf{X}, d_2)$  dado por  $\iota(x) = x$  es un homeomorfismo.

Podemos mostrar que sí dos espacios métricos son equivalentes entonces existe un homeomorfismo entre estos. Si dos espacios métricos son equivalentes, existe un mapeo uno a uno y sobre  $h : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$  tal que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(h(x), h(y)) \leq c_2 d_1(x, y),$$

la segunda desigualdad implica que si

$$d_1(x, y) \leq \delta = \epsilon/c_2 \Rightarrow d_2(h(x), h(y)) \leq c_2 \delta = \epsilon$$

ya que  $h$  es invertible, podemos escribir la primera desigualdad como

$$d_1(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \leq \frac{1}{c_1} d_2(x, y)$$

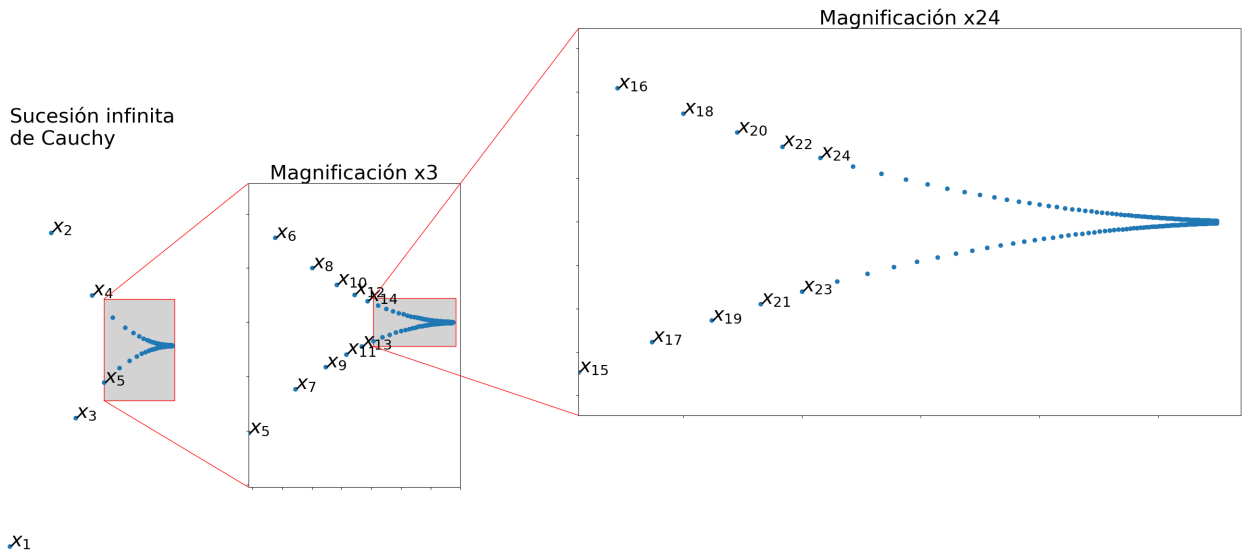
para puntos  $x, y \in \mathbf{X}_2$ . Entonces  $d_1(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \epsilon$  siempre que  $d_2(x, y) < c_1 \epsilon$ , se tiene que  $h$  y su inversa son continuas, por lo tanto  $h(x)$  es un homeomorfismo.

## 1.2. Sucesiones de Cauchy, Límite y Propiedades de los Conjuntos

Después de hablar de espacios métricos veamos que es el límite de una sucesión y otras propiedades básicas que son usadas para describir conjuntos y subconjuntos de los espacios métricos.

**Definición 1.2.1.** Una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos en un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$  es llamada una sucesión de Cauchy si, para cualquier número dado  $\epsilon > 0$ , existe un entero  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  para todo  $n, m > N$ .

$x_0$



$x_1$

**Figura 1.2:** En la imagen se muestran sucesivas magnificaciones de una sucesión de Cauchy, a medida que la sucesión avanza los puntos están cada vez más cerca.

Los puntos de una sucesión de Cauchy se acercan cada vez más a medida que la sucesión avanza, la figura 1.2 ilustra este comportamiento. Que una sucesión de puntos se acerquen a medida que se avanza en la sucesión no implica la convergencia a un punto, puesto que este podría no existir, veamos.

**Definición 1.2.2.** Una sucesión de  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos en un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$  es convergente a un punto  $x \in \mathbf{X}$  si, para cualquier número  $\epsilon > 0$ , existe un entero  $N > 0$  tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon \quad \forall n > N$$

en este caso el punto  $x \in \mathbf{X}$ , al cual converge la sucesión, es llamado el límite de la sucesión, y usamos la notación

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

El límite de una sucesión convergente  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiene esta propiedad: sea

$$\mathbf{B}(x, \epsilon) = \{y \in \mathbf{X} : d(x, y) \leq \epsilon\}$$

la bola cerrada de radio  $\epsilon > 0$  centrada en  $x$ . Cualquier bola centrada en  $x$  contiene todos los puntos después de algún índice  $N$ , donde  $N$  se hace cada vez más grande a medida que  $\epsilon$  es más pequeño.

**Teorema 1.2.1.** *Si una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos en un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$  convergen a un punto  $x \in \mathbf{X}$ , entonces  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy.*

**Definición 1.2.3.** *Un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$  es completo si cada sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathbf{X}$  tiene un límite  $x \in \mathbf{X}$ .*

Si  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy de  $\mathbf{X}$  y si  $(\mathbf{X}, d)$  es completo entonces existe un punto  $x \in \mathbf{X}$  tal que, para cada  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbf{B}(x, \epsilon)$  contiene infinitos elementos de la sucesión.

El espacio métrico  $(\mathbb{R}, \text{Euclidiana})$  es un espacio completo. Teniendo en cuenta que cada subconjunto acotado tiene una mínima cota superior, lo que implica que para una sucesión monótona creciente  $\{l_n\}$  que esté acotada superiormente existe un límite. Ya que la cota mínima no puede ser menor que  $\{l_n\}$  para cualquier  $n$  (la sucesión es creciente) y no existe una distancia mínima para todos los  $l_n$ , se tiene que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $x_n \in \mathbf{B}(\text{cota mínima}, \epsilon)$  para  $n > N$ . Usamos esta propiedad para probar completos de  $(\mathbb{R}, d)$  como sigue: sea  $\epsilon_i = \frac{1}{2^i}$  y  $N_i$  para cada  $i$  un número tal que  $N_i > N_{i-1}$  y  $d(x_n, x_m) < \epsilon_i$  siempre que  $n, m > N_i$ . Se sigue que existe un intervalo de longitud  $\epsilon_i$  tal que todos los  $x_n$  está en este intervalo si  $n > N_i$ . Sea  $l_i$  la más grande de las cotas inferiores del conjunto  $\{x_n : n > N_i\}$ . La sucesión  $\{l_n\}$  es monótona creciente, y está acotada por arriba por la mínima cota superior del mismo conjunto de los  $x_n$  el cual llamaremos  $L_i$ . Entonces esta sucesión tiene un límite al que llamaremos  $x$ . Exigimos que  $x$  sea también el límite de la sucesión de Cauchy. Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbf{B}(x, \epsilon) \supset [l_i, L_i]$  para algún  $i$ , entonces si  $n > N_i$ ,  $x_n \in \mathbf{B}(x, \epsilon)$  que es que  $x$  es el límite de  $\{x_i\}$  y la sucesión converge. Entonces  $(\mathbb{R}, \text{Euclidiana})$  es completo.

**Definición 1.2.4.** *Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ . Un punto  $x \in \mathbf{X}$  es llamado un punto límite de  $S$  si existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos  $x_n \in S \setminus \{x\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .*

**Definición 1.2.5.** *Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ . La clausura de  $S$  denotada como  $\bar{S}$ , se define  $\bar{S} = S \cup \{\text{puntos límite de } S\}$ .  $S$  es cerrado si contiene todos los puntos límites, que es,  $S = \bar{S}$ .  $S$  es perfecto si es igual al conjunto de todos sus puntos límite.*

Veamos que  $S = [0, 1]$  es un subconjunto perfecto de  $(\mathbb{R}, \text{Euclidiana})$ . Sea  $S = [0, 1] \subset (\mathbb{R}, \text{Euclidiana})$ . Sea  $x \in S$ , y sea  $a = \min(x, x - 1)$  tal que si  $a = 0$ , entonces  $x = 1$ . En otras palabras,  $a$  es la menor distancia a una de las cotas del intervalo. Entonces la sucesión  $\{x_n = x + a/2^n\}_{n=1}^{\infty}$  se mantiene en  $S$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $\epsilon > a/2^N$ . Esto implica que para  $n > N$ ,  $d(x, x_n) = d(x, x - a/2^n) = a/2^n < \epsilon$ , en otras palabras esta sucesión en  $[0, 1]$  converge a  $x$ , entonces  $x$  es un punto límite. Ya que  $x$  es cualquier punto en el conjunto, este consiste enteramente de puntos límites, es cerrado, y por lo tanto perfecto.

Sea  $S$  un subconjunto del espacio métrico completo  $(\mathbf{X}, d)$ . Entonces  $(S, d)$  es un espacio métrico. Podemos mostrar que  $(S, d)$  es completo si, y solo si,  $S$  es cerrado en  $\mathbf{X}$ . Si  $(S, d)$  es completo, entonces dada una sucesión de Cauchy en  $S$ , que converge a un punto en  $S$ , cada punto límite es el límite de una sucesión convergente en  $S$ , y por lo tanto una sucesión de Cauchy en  $S$ .  $S$  contiene a sus puntos límites y por lo tanto es cerrado. Ahora bien, suponiendo que  $S$  es cerrado, y que sea  $\{x_n\}$  una sucesión de Cauchy en  $S$ , entonces  $\{x_n\}$  es también una sucesión de Cauchy en  $\mathbf{X}$  y existe un punto  $x \in \mathbf{X}$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow x$ , porque  $\mathbf{X}$  es completo. Por lo que  $x$  es un punto límite para  $S$ , ya que  $S$  es cerrado  $x \in \mathbf{X}$ .

**Definición 1.2.6.** Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ .  $S$  es compacto si cada sucesión infinita  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $S$  contiene una subsucesión que tiene un límite en  $S$ .

**Definición 1.2.7.** Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ .  $S$  es acotado si existe un punto  $a \in \mathbf{X}$  y un número real  $R > 0$  tal que

$$d(a, x) < R \quad \forall x \in S.$$

**Definición 1.2.8.** Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ .  $S$  es totalmente acotado si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un conjunto de puntos finitos  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$  tal que siempre que  $x \in \mathbf{X}$ ,  $d(x, y_i) < \epsilon$  para algún  $y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Este conjunto de puntos  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  es llamado un  $\epsilon$ -net.

**Teorema 1.2.2.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo, y sea  $S \subset \mathbf{X}$ . Entonces  $S$  es compacto si, y solo si, es cerrado y totalmente acotado.

**Demostración:**

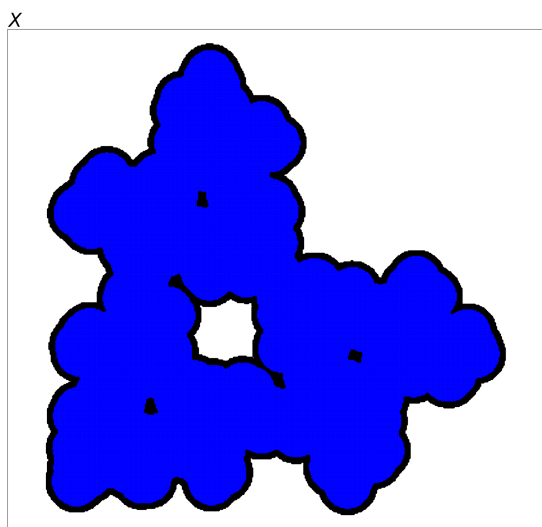
Supongamos que  $S$  es cerrado y totalmente acotado. Sea  $\{x_i\} \in S$  una sucesión infinita de puntos en  $S$ . Ya que  $S$  es totalmente acotado encontramos una colección finita de bolas cerradas de radio 1 tal que  $S$  está contenido en la unión de estas bolas. Por el principio del palomar (un par de palomas ponen huevos en dos buzones  $\Rightarrow$  al menos uno de los buzones contiene un gran número de palomas enojadas), una de las bolas  $B_1$ , contiene infinitos puntos  $x_n$ . Escogemos  $N_1$  tal que  $x_{N_1} \in B_1$ . Es fácil ver que  $B_1 \cap S$  es totalmente acotado. Entonces podemos cubrir  $B_1 \cap S$  por medio de un conjunto de bolas de radio  $1/2$ . Por el principio del palomar, una de las bolas, digamos  $B_2$ , contiene infinitos puntos  $x_n$ . Seleccionamos  $N_2$  tal que  $x_{N_2} \in B_2$  y  $N_2 > N_1$ . Continuamos construyendo una secuencia anidada de bolas,

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset B_4 \supset B_5 \supset B_6 \supset B_7 \supset B_8 \supset B_9 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

donde  $B_n$  tiene radio  $\frac{1}{2^{n-1}}$  y una sucesión de enteros  $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $x_{N_n} \in B_n$ . Es fácil ver que

$\{x_{N_n}\}_{n=1}^{\infty}$ , la cual es una subsucesión de la sucesión original  $\{x_n\}$ , es una sucesión en  $S$ . Ya que  $S$  es cerrado, y  $\mathbf{X}$  es un espacio métrico completo,  $S$  es también completo. Entonces  $\{x_n\}$  converge a un punto  $x$  en  $S$  (nótese que  $x$  es exactamente  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ .) Entonces,  $S$  es compacto. De forma contraria, Supongamos ahora que  $S$  es compacto. Sea  $\epsilon > 0$ . Supongamos que no existe un  $\epsilon$ -net para  $S$ . Entonces existe una sucesión infinita de puntos  $\{x_i\} \in S$  con  $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$  para todo  $i \neq j$ . Pero esta sucesión debe poseer una subsucesión convergente  $\{x_{N_i}\}$ . Por el teorema 3.1 esta sucesión es de Cauchy, y entonces podemos encontrar un par de enteros  $N_i$  y  $N_j$  con  $N_i \neq N_j$  tal que  $d(x_{N_i}, x_{N_j}) < \epsilon$ . Pero  $d(x_{N_i}, x_{N_j}) \geq \epsilon$ , entonces tenemos una contradicción. Por lo que debe existir un  $\epsilon$ -net. Esto completa la prueba.

La compacidad de un conjunto  $\mathbf{X}$  en el plano significa que está acotado, lo que quiere decir que puede ser encerrado completamente dentro de un disco lo suficientemente grande, y que además, toda sucesión de puntos del conjunto convergen a un punto en el conjunto, es decir, que el conjunto es cerrado. De esta manera, una imagen en el plano, como la que se muestra en la figura 1.3, es un ejemplo de un conjunto compacto.



**Figura 1.3:** Una imagen en el plano es un ejemplo de un conjunto compacto, en la que los bordes del conjunto corresponden a la frontera y la parte sombreada a su interior.

**Definición 1.2.9.** Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ .  $S$  es abierto si para cada  $x \in S$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbf{X} : d(x, y) \leq \epsilon\} \subset S$ .

Veamos que si  $(\mathbf{X}, d)$  es un espacio métrico el conjunto  $\mathbf{X}$  es abierto y cerrado. Sabemos que si  $\mathbf{X}$  es cerrado este debe contener todos sus puntos límite, entonces sea  $\{x_n\}$  una sucesión convergente en  $\mathbf{X}$ , por definición existe un  $x \in \mathbf{X}$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow x$ , por lo tanto  $\mathbf{X}$  es cerrado. Sin embargo, una sucesión de Cauchy no necesita converger. Sea  $\mathbf{X} \subset Y$ , tal que  $Y$  sea completo, entonces si  $\{x_n\} \rightarrow y \notin \mathbf{X}$ , la sucesión no converge en  $\mathbf{X}$ , y  $y$  no es un punto límite en  $\mathbf{X}$ . Dado que la sucesión es de Cauchy y asta no converge,  $\mathbf{X}$  no es un espacio métrico completo. Un ejemplo es  $\mathbf{X} = (0, 1)$ . Dado  $x \in \mathbf{X}$ , por definición  $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbf{X} : d(x, y) < \epsilon\}$ , que es un subconjunto del espacio  $\mathbf{X}$  para cualquier  $\epsilon$ , por lo que  $\mathbf{X}$  es abierto.

Si  $(\mathbf{X}, d)$  es un espacio métrico, entonces “ $S \subset \mathbf{X}$  es abierto”, es lo mismo que decir “ $\mathbf{X} \setminus S$  es cerrado”. Suponiendo que “ $S \subset \mathbf{X}$  es abierto”. Supongamos que  $\{x_n\}$  es una sucesión en  $\mathbf{X} \setminus S$ . Asumiendo que  $x \in S$ . Entonces cada bola  $B(x, \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$  contiene un punto  $x_n \in \mathbf{X} \setminus S$ , lo que significa que  $S$  no es abierto. Esto es una contradicción. La suposición es falsa. Por lo tanto  $x \in \mathbf{X} \setminus S$  es cerrado. Supóngase que “ $\mathbf{X} \setminus S$  es cerrado”. Sea  $x \in S$ . Queremos mostrar que existe una bola  $B(x, \epsilon) \subset S$ . Asumamos que no hay una bola  $B(x, \epsilon) \subset S$ . Entonces para cada entero  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

podemos encontrar un punto  $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (\mathbf{X} \setminus S)$ . Claramente  $\{x_n\}$  es una sucesión en  $\mathbf{X} \setminus S$ , con límite  $x \in \mathbf{X}$ . Ya que  $\mathbf{X} \setminus S$  es cerrado concluimos que  $x \in \mathbf{X} \setminus S$ . Esto contradice  $x \in S$ . La suposición de que no existe una bola  $B(x, \epsilon) \subset S$  es falsa. Por lo tanto existe una bola  $B(x, \epsilon) \subset S$ . Por lo tanto “ $S$  es abierto.”

Cada subconjunto acotado  $S$  de  $(\mathbb{R}^2, \text{Euclidiana})$  posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass: “Toda sucesión infinita  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos de  $S$  contienen una subsucesión que es de Cauchy.” Deducimos que cada subconjunto acotado y cerrado de  $(\mathbb{R}^2, \text{Euclidiana})$  es compacto. En particular, todo espacio métrico de la forma (Subconjunto cerrado y acotado  $\mathbb{R}^2, \text{Euclidiana}$ ) es un espacio métrico completo.

**Definición 1.2.10.** Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ . Un punto  $x \in \mathbf{X}$  es un punto de la frontera de  $S$  si para cada número  $\epsilon > 0$ ,  $B(x, \epsilon)$  contiene un punto en  $\mathbf{X} \setminus S$  y un punto en  $S$ . El conjunto de todos los puntos de la frontera es llamada la frontera de  $S$  y se denota  $\delta S$ .

**Definición 1.2.11.** Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ . Es un punto interior de  $S$  si existe un número  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset S$ . El conjunto de puntos interiores de  $S$  es llamado el interior de  $S$  y se denota  $S^0$ .

En la figura 1.3 se observaba un ejemplo de conjunto compacto en el plano. Suponiendo que todo el espacio  $\mathbf{X}$  representa al mundo, es decir, en el que el océano es la superficie blanca y el conjunto compacto (la imagen sombreada) es una isla, la línea costera de esta isla sería la frontera del conjunto, y la parte sombreada o tierra firme representaría el interior del conjunto.

**Definición 1.2.12.** Un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$  es conexo si los únicos dos subconjuntos de  $\mathbf{X}$  que son simultáneamente abiertos y cerrados son  $\mathbf{X}$  y  $\emptyset$ . Un subconjunto  $S \subset \mathbf{X}$  es conexo si el espacio métrico  $(S, d)$  es conexo.  $S$  es desconexo si no es conexo.  $S$  es completamente desconexo siempre que los únicos subconjuntos conexos no vacíos de  $S$  son los subconjuntos formados por un solo punto.

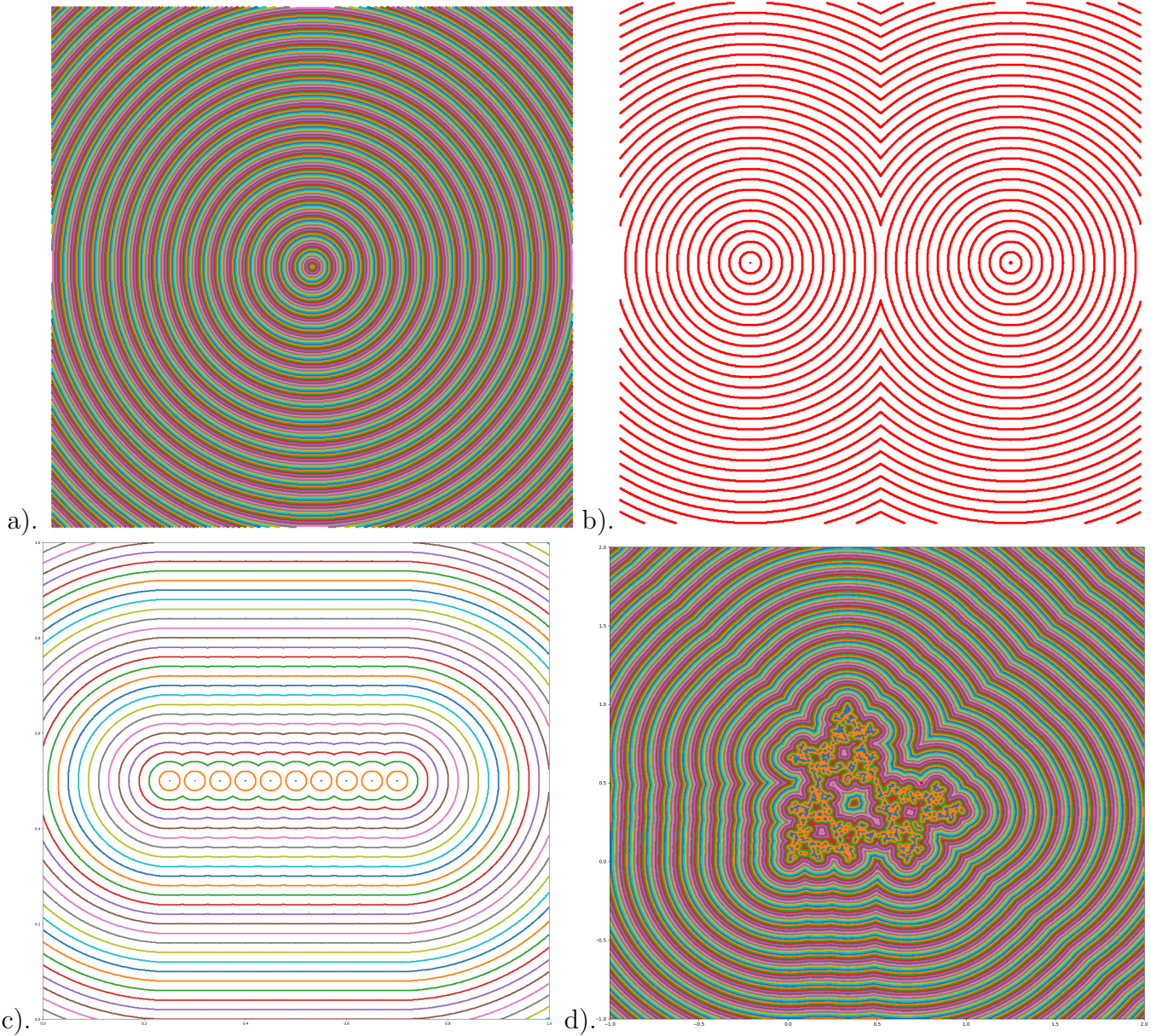
**Definición 1.2.13.** Sea  $S \subset \mathbf{X}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ . Entonces  $S$  es conexo por camino si, para cada par de puntos  $x$  y  $y$  en  $S$ , existe una función continua  $f : [0, 1] \rightarrow S$ , del espacio métrico (Euclidiano,  $[0, 1]$ ) a un espacio métrico  $(S, d)$ , tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ . Tal función es llamada el camino de  $x$  a  $y$  en  $S$ .  $S$  es desconexo por caminos si no es conexa por caminos.

### 1.3. El espacio métrico $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$ : El espacio donde viven los fractales

Llegamos al espacio ideal para estudiar la geometría fractal. Se trabajó con algunos espacios métricos completos tal como  $(\mathbb{R}^2, \text{Euclidiana})$  o  $(\hat{\mathbb{C}}, \text{esférica})$ , los cuales se denotaban por  $(\mathbf{X}, d)$ . Cuando se quiera discutir imágenes, dibujos, subconjuntos a blanco y negro en el espacio, será natural introducir el espacio  $\mathcal{H}$ .

**Definición 1.3.1.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo. Entonces  $\mathcal{H}$  denota al espacio cuyos puntos son los subconjuntos compactos de  $\mathbf{X}$  diferentes al conjunto vacío.

Cualquier subconjunto de  $\mathcal{H}$  está formado por uno o más subconjuntos compactos de  $\mathbf{X}$ . En el espacio  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$  un punto en el espacio  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  podría ser representado por una imagen.



**Figura 1.4:** Curvas de nivel: a). Alrededor de un punto se llenó el espacio con curvas de nivel de diferentes colores, las cuales representa los puntos a una distancia  $d(x, B)$  constante. b). Las curvas de nivel para un conjunto compuesto por dos puntos. c). Curvas de nivel para un conjunto de 10 puntos. d). La curvas de nivel para un conjunto compacto  $B$  formado por 1000 punto.

**Definición 1.3.2.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo,  $x \in \mathbf{X}$ , y  $B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . Se define

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

$d(x, B)$  es llamada la distancia del punto  $x$  al conjunto  $B$ .



Con la métrica Euclidiana los puntos equidistantes a un punto forman circunferencias centradas en el punto, por lo que si el conjunto  $B = x \in \mathbb{R}^2$  es un conjunto formado por un solo punto, las curvas de nivel (conjunto de puntos que están a una misma distancia de  $B$ ) son circunferencias, como se muestra en la figura 1.4. También se muestra como varían las curvas de nivel para un conjunto compuesto por dos puntos, cerca de cada punto no se observan diferencias, pero a distancias más grandes que la mitad de la distancia entre los puntos, las curvas interfieren unas con las otras produciendo un patrón distinto. Este patrón se modifica considerablemente con la cantidad de puntos y su distribución en el espacio.

**Definición 1.3.3.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . Se define

$$D(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max\{d(x, \mathbf{B}) : x \in \mathbf{A}\}.$$

$d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es llamado la distancia del conjunto  $A \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$  al conjunto  $B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ .

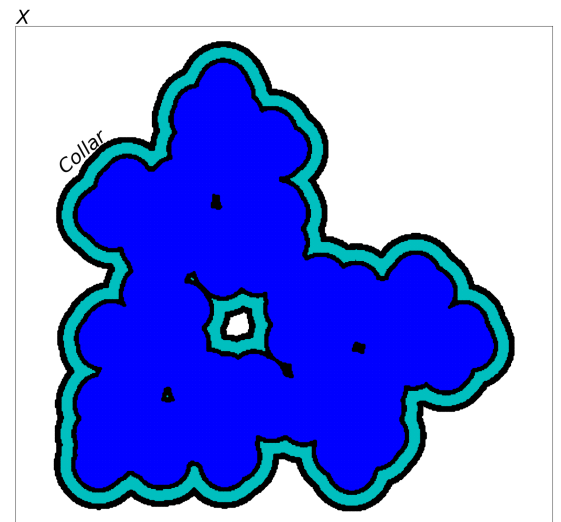
En general la distancia  $d(A, B) \neq d(B, A)$ , por lo que no es una métrica del espacio  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ .

**Definición 1.3.4.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo. Entonces la **distancia de Hausdorff** entre los puntos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  está definido como

$$h(A, B) = d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \vee d(\mathbf{B}, \mathbf{A}).$$

Donde la notación  $x \vee y$  representa el máximo entre dos números reales  $x$  y  $y$ .

La distancia de Hausdorff es una métrica para el espacio  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , por lo que  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  es un espacio métrico. En el plano la distancia de Hausdorff  $h(A, B)$  es considerada como la distancia entre dos imágenes o conjuntos compactos  $A$  y  $B$ , este concepto se puede visualizar con facilidad introduciendo el concepto de collar, como un conjunto que contiene a  $A$  junto con todos los puntos que están a una distancia  $\epsilon \geq 0$  de la frontera de  $A$  como se observa en la figura 1.5. Así la distancia de Hausdorff entre dos conjuntos compactos  $A$  y  $B$  se determina al encontrar el menor  $\epsilon_A = d(A, B)$  para un collar de  $A$ , tal que este contenga completamente a  $B$ , así mismo, se busca el menor  $\epsilon_B = d(B, A)$  tal que el collar de  $B$  contenga a  $A$ , el mayor de estos valores es la distancia de Hausdorff  $h(A, B)$ .

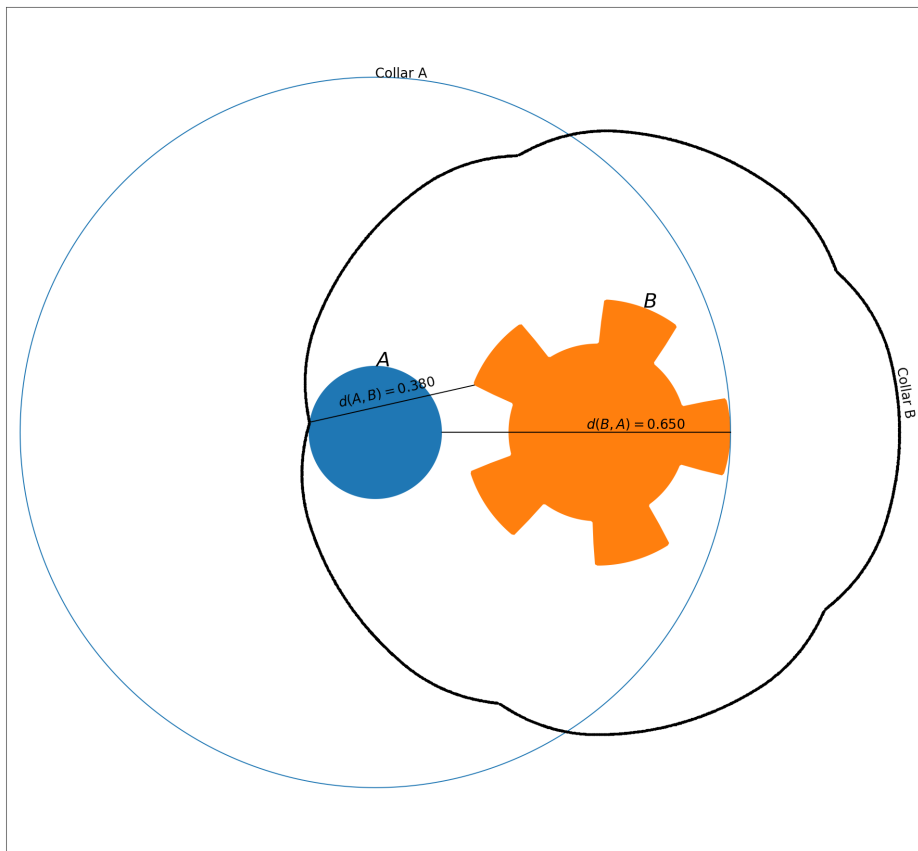


**Figura 1.5:** El collar de un conjunto compacto en el espacio  $\mathbb{R}^2$  contiene al conjunto  $A$  y además a todos los puntos que están a una distancia no mayor a  $\epsilon$ .

Un ejemplo ilustrativo se muestra en la figura 1.6, en la cual hay dos conjuntos  $A$  y  $B$  y sus respectivos collares, se puede ver que el collar correspondiente al conjunto  $B$  contiene a los dos conjuntos y que  $\epsilon_A > \epsilon_B$ , por lo que la distancia de Hausdorff en este caso es  $h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) = d(B, A) = \epsilon_A$ . Para un espacio métrico completo  $(\mathbf{X}, d)$ , el espacio métrico  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  es completo, y además, si  $A_n \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$  es una sucesión de Cauchy, entonces

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(\mathbf{X}).$$

El conjunto  $A$  está compuesto por todos los  $x \in \mathbf{X}$  tales que exista una sucesión de Cauchy  $\{x_n \in A_n\}$  que converja a  $x$ .



**Figura 1.6:** La imagen muestra dos conjuntos  $A, B \in X$ , la distancia de Hausdorff está dada por el mayor  $\epsilon$  que absorba a los dos conjuntos, en este caso el collar del conjunto  $A$  contiene a los conjuntos y tiene el mayor  $\epsilon$ .

## 1.4. Transformaciones Unidimensionales

En la geometría fractal es posible encontrar formas irregulares y fragmentadas, y otras que presentan regularidades que se repiten en todas las escalas, estas son tema de estudio de la geometría fractal determinista. Existen subconjuntos de espacios que pueden ser generados a partir de *transformaciones* sencillas, o que tienen propiedades invariantes ante estas.

**Definición 1.4.1.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico. Una transformación en  $\mathbf{X}$  es una función  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  que asigna exactamente un punto  $f(x) \in \mathbf{X}$  a cada punto de  $x \in \mathbf{X}$ . Si  $S \in \mathbf{X}$  entonces  $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ .  $f$  es uno a uno si  $x, y \in \mathbf{X}$  con  $f(x) = f(y)$  implica que  $x = y$ .  $f$  es sobre si  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ .  $f$  se llama invertible si es uno a uno y sobre: en este caso es posible definir la transformación  $f^{-1} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ , llamada la inversa de  $f$ , mediante  $f^{-1}(y) = x$ , donde  $x \in \mathbf{X}$  es el único punto tal que  $y = f(x)$ .

**Definición 1.4.2.** Sea  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  una transformación sobre un espacio métrico. La iteración hacia adelante de  $f$  es la transformación  $f^{\circ n} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  definida por  $f^{\circ 0}(x) = x$ ,  $f^{\circ 1}(x) = f(x)$ ,  $f^{\circ n+1}(x) = f \circ f^{\circ n}(x) = f(f^{\circ n}(x))$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . si  $f$  es invertible entonces la iteración hacia atrás es la transformación  $f^{\circ -m} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  definida mediante,  $f^{\circ (-1)}(x) = f^{-1}(x)$ ,  $f^{\circ (-m)}(x) = (f^{\circ m})^{-1}(x)$  para  $m = 1, 2, 3, \dots$

Estudiar las transformaciones será de utilidad para identificar cambios geométricos del espacio métrico, tales como: estiramientos, encogimientos, doblamientos, desdoblamientos, entre otros. Asimismo, es importante conocer que hacen las transformaciones sobre los conjuntos y como actúan sobre cada punto del conjunto.

### 1.4.1. El Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es un subconjunto del espacio métrico  $([0, 1], d_E)$ , que se obtiene de la sucesiva eliminación de intervalos medios. Empezamos con el intervalo unitario, removemos el intervalo abierto de longitud  $1/3$  y centrado en  $1/2$ , entonces eliminamos el tercio medio en los intervalos remanentes, y así sucesivamente, como se ve en la figura 1.7. El conjunto también se puede construir

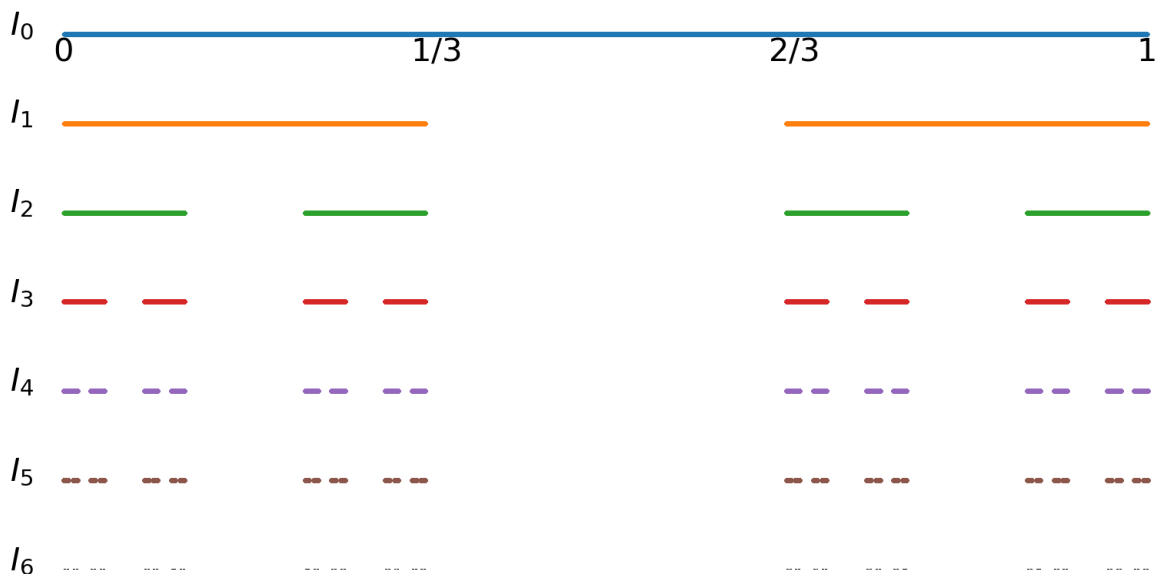


Figura 1.7: Construcción del conjunto de Cantor.

a partir de los conjuntos cerrados anidados de la siguiente manera  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset I_5 \supset I_6 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ , donde:

$$I_0 = [0, 1],$$

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

$I_3 =$  Se construye a partir del conjunto  $I_2$ , se toma cada intervalo por separado, se divide en tercios y se elimina el intervalo medio en cada uno de los subintervalos y los unimos nuevamente. Definimos

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n,$$

$\mathcal{C}$  contiene el punto  $x = 0$ , por lo que no es vacío. De hecho  $\mathcal{C}$  es un conjunto perfecto que contiene incontables puntos, y es oficialmente un fractal.

Una transformación afín en  $\mathbb{R}$  es de la forma  $f(x) = a \cdot x + b$  donde  $a$  y  $b$  son constantes reales. Partiendo del intervalo  $I = [0, 1]$ ,  $f(I)$  es un nuevo intervalo de longitud  $|a|$ , y trasladado del punto 0 al punto  $b$ . Por lo que las transformaciones

$$f(x) = \frac{1}{3}x \qquad f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

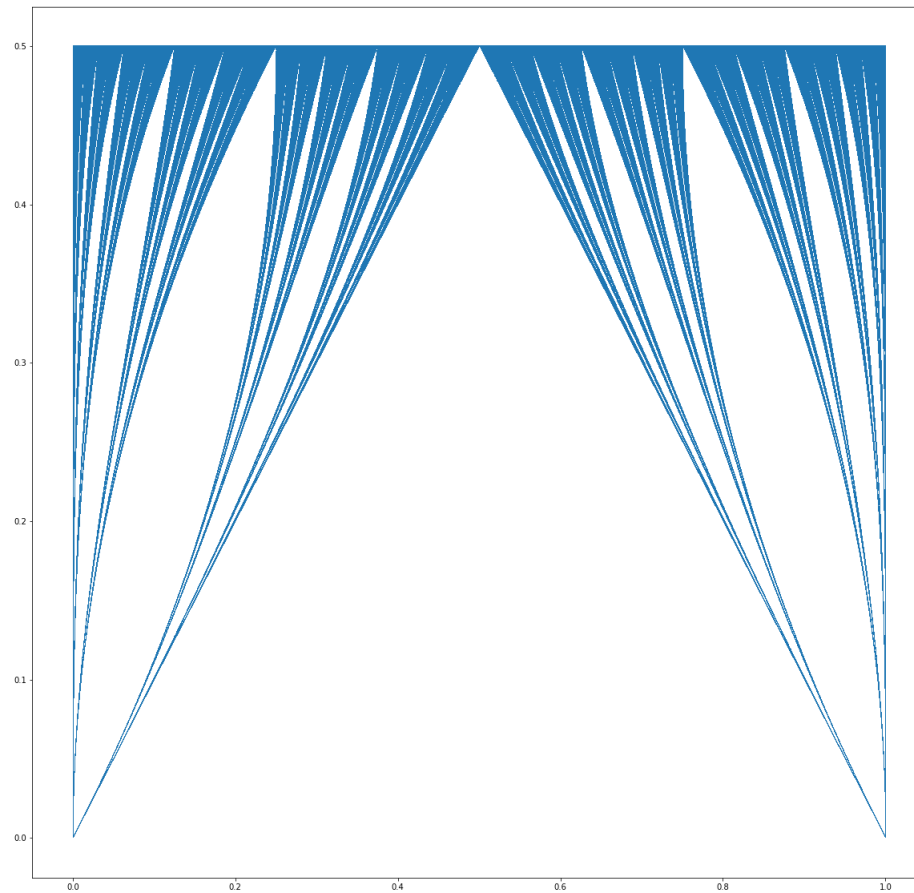
sobre el intervalo  $[0, 1]$ , genera el intervalo  $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , y las transformaciones sucesiva llevan al conjunto de cantor.

Si se realiza una generalización del conjunto de cantor en la que tenemos dos transformaciones afines de la forma

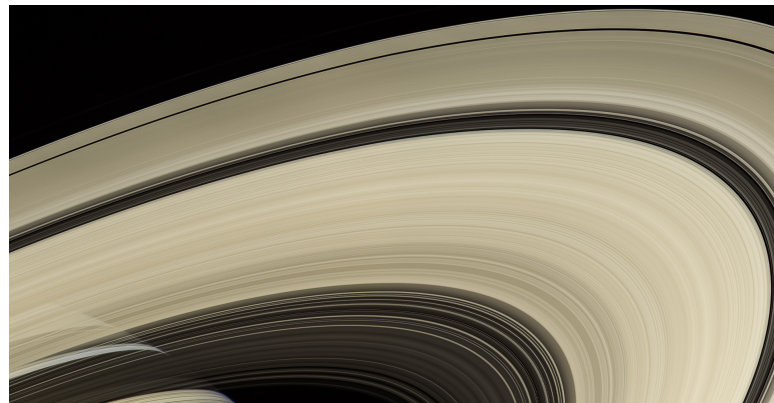
$$f(x) = rx \qquad f(x) = rx + (1 - r)$$

aplicadas sucesivamente al intervalo  $[0, 1]$ , y variando  $r$  entre 0 y  $1/2$ , obtenemos una “cortina” vertical como la que vemos en la figura 1.8.

Ha habido conjeturas que sostienen que la sección transversal radial de los anillos de Saturno son conjuntos de Cantor (Mandelbrot, 1982; Avron and Simon, 1981; Fridman and Gorkavyi, 1994). Se han descubierto miles de brechas entre los anillos, las cuales dejan pasar la luz del sol, por lo que la estructura de los anillos está compuesta por muchos círculos cercanos cuyos radios coinciden con puntos en el conjunto de Cantor. Las imágenes obtenidas por la nave espacial Cassini muestran esta estructura (figura 1.9).



**Figura 1.8:** Cortinas de Cantor. Conjuntos de Cantor generados a partir de dos transformaciones afines unidimensionales, y de la variación del parámetro  $r$  en el eje vertical.



**Figura 1.9:** Anillos de Saturno. La imagen obtenida por la sonda Cassini deja ver la estructura de los anillos.

## 1.5. Transformaciones afines en el espacio Euclidiano

**Definición 1.5.1.** Una transformación  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma

$$w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f),$$

donde  $a, b, c, d, e, f$  son números reales, es llamada una transformación afín (bidimensional).

A menudo se usará la siguiente notación que es equivalente:

$$w(x) = w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t.$$

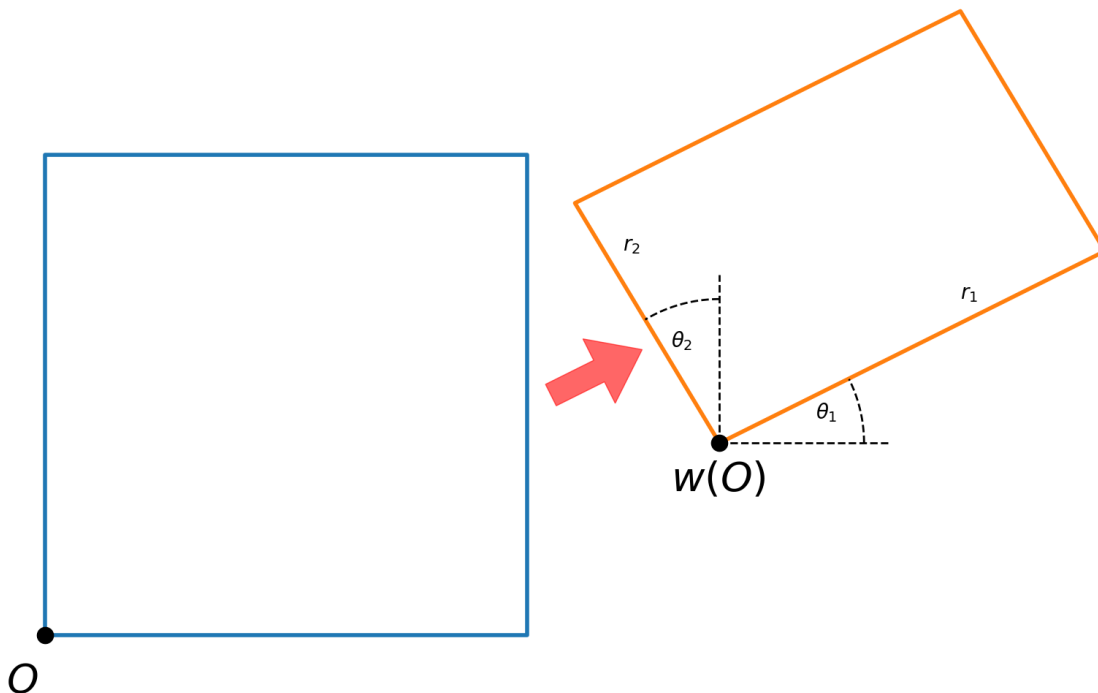
Aquí  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  es una matriz real bidimensional de tamaño  $2 \times 2$  y  $t$  es un vector columna. La matriz  $A$  se puede escribir siempre de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix},$$

donde  $(r_1, \theta_1)$  son las coordenadas polares del punto  $(a, c)$  y  $(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$  son las coordenadas del punto  $(b, d)$ . La transformación lineal

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

en  $\mathbb{R}^2$  transforma cualquier paralelepípedo en el plano en otro al cambiar la ubicación de sus vértices.



**Figura 1.10:** Una transformación afín toma un paralelepípedo en este caso un cuadrado con vértice en el origen, y lo transforma en otro paralelepípedo.

En general una transformación afín  $w(x) = Ax + t$  en  $\mathbb{R}^2$  consiste de una transformación lineal que deforma relativamente el espacio como se mencionó anteriormente, seguido por una translación producida por el vector  $t$ .

**Definición 1.5.2.** Una transformación  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es llamada una similitud si es una transformación afín que tiene una de las formas específicas

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t,$$

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t.$$

Para alguna translación  $(e, f) \in \mathbb{R}^2$ , algún número real  $r \neq 0$ , y algún ángulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .  $\theta$  es llamado el ángulo de rotación mientras que  $r$  es el factor de escala o escalamiento. La transformación lineal

$$R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es una rotación y

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es una reflexión.

## 1.6. El teorema de contracción de Banach

**Definición 1.6.1.** Una transformación  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  sobre un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$  es llamada contractiva o mapeo de contracción si existe una constante  $0 \leq s < 1$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbf{X}.$$

Cualquiera de tales números  $s$  es llamado un factor de contracción de  $f$ .

Sería conveniente ser capaz de hablar del número más grande y el más pequeño en un conjunto de números reales. Sin embargo, un conjunto tal como  $S = (-\infty, 3)$  no posee ninguno. Esta dificultad es superada por la siguiente definición.

**Definición 1.6.2.** Se denota  $S$  un conjunto de números reales. Entonces el ínfimo de  $S$  es igual a  $-\infty$  si  $S$  contiene números negativos de magnitud arbitrariamente pequeña. De otra forma el ínfimo de  $S = \max\{x \in \mathbb{R} : x \leq s \text{ para todo } s \in S\}$ . El ínfimo de  $S$  siempre existe a causa de la naturaleza del sistema de números reales, y se denomina  $\inf S$ . El supremo de  $S$  es similarmente definido. Es igual a  $\infty$  si  $S$  contiene números positivos de magnitud arbitrariamente grande. De otra forma el supremo de  $S = \min\{x \in \mathbb{R} : x \geq s \text{ para todo } s \in S\}$ , es denotado como  $\sup S$ .

**Teorema 1.6.1** (Teorema de mapeo de contracción o de punto fijo de Banach). *Sea  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  un mapeo contractivo en un espacio métrico completo  $(\mathbf{X}, d)$ . Entonces  $f$  posee exactamente un punto fijo  $x_f \in \mathbf{X}$  y además para cualquier punto  $x \in \mathbf{X}$ , la sucesión  $f^{\circ n}(x) : n = 0, 1, 2, \dots$  converge a  $x_f$ . Que es,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = x_f, \quad \text{para cada } x \in \mathbf{X}$$

**Demostración:** Sea  $x \in \mathbf{X}$ . Sea  $0 \leq s < 1$  un factor contractivo para  $f$ , entonces

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} d(x, f^{\circ |n-m|}(x)) \quad (1.1)$$

(La notación  $u \wedge v$  denota el mínimo de un par de números reales  $u$  y  $v$ . Dado que  $s^{m \wedge n} > s^{m \vee n}$ , es decir, que para  $m > n$ ,  $s^m < s^n$ , entonces se escoge el mayor factor de contracción que garantice que se cumpla la propiedad) para todo  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ , donde tenemos fijo a  $x \in \mathbf{X}$ . En particular, para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tenemos

$$\begin{aligned} d(x, f^{\circ k}(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^{\circ 2}(x)) + \dots + d(f^{\circ(k-1)}(x), f^{\circ k}(x)) \\ &\leq (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1})d(x, f(x)) \\ &\leq (1 - s)^{-1}d(x, f(x)), \end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación 1.1 obtenemos

$$d(f^{\circ n}(x), f^{\circ m}(x)) \leq s^{m \wedge n} (1 - s)^{-1} d(x, f(x)),$$

de lo cual inmediatamente se sigue que  $\{f^{\circ n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy. Ya que  $\mathbf{X}$  es completo esta sucesión de Cauchy posee un límite  $x_f \in \mathbf{X}$  y tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = x_f.$$

Ahora mostraremos que  $x_f$  es un punto fijo de  $f$ . Dado que  $f$  es contractiva también es continua y por lo tanto

$$f(x_f) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ(n+1)}(x) = x_f.$$

Finalmente, ¿puede haber más de un punto fijo?. Suponiendo que existe. Sea  $x_f$  y  $y_f$  puntos fijos de  $f$ . Entonces  $x_f = f(x_f)$ ,  $y_f = f(y_f)$ , y

$$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq s d(x_f, y_f),$$

donde  $(1 - s)d(x_f, y_f) \leq 0$ , lo que implica que  $d(x_f, y_f) = 0$  y entonces  $x_f = y_f$ . Esto completa la demostración.



Es posible extender estos conceptos al espacio métrico de los fractales  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h(d))$  en donde se satisfacen algunas propiedades importantes. Se puede ver que los mapeos contractivos  $w : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  sobre el espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$  con factor de contracción  $s$ , son continuos, y además,  $w$  mapea al espacio  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  en sí mismo. Sea  $S$  un subconjunto no vacío de  $\mathbf{X}$ , entonces claramente  $w(S) = \{w(x) : x \in S\}$ . Se quiere mostrar que  $w(S)$  es compacto. Sea  $\{y_n = w(x_n)\}$  una sucesión infinita de puntos en  $S$ . Entonces  $\{x_n\}$  es una sucesión infinita en  $S$ . Ya que  $S$  es compacto existe una subsucesión  $\{x_{N_n}\}$  que converge a un punto  $\hat{x} \in S$ . Pero la continuidad de  $w$  implica que  $\{y_{N_n} = w(x_{N_n})\}$  es una subsucesión de  $\{y_n\}$  que converge a  $\hat{y} = w(\hat{x}) \in w(S)$ . Vemos que en el caso bidimensional  $w(B)$  es la contracción de un subconjunto del espacio  $(\mathbf{X}, d)$ , y lo visualizamos como la reducción o contracción realizada a una imagen. El efecto sobre una figura en el plano se muestra en la figura 1.11.

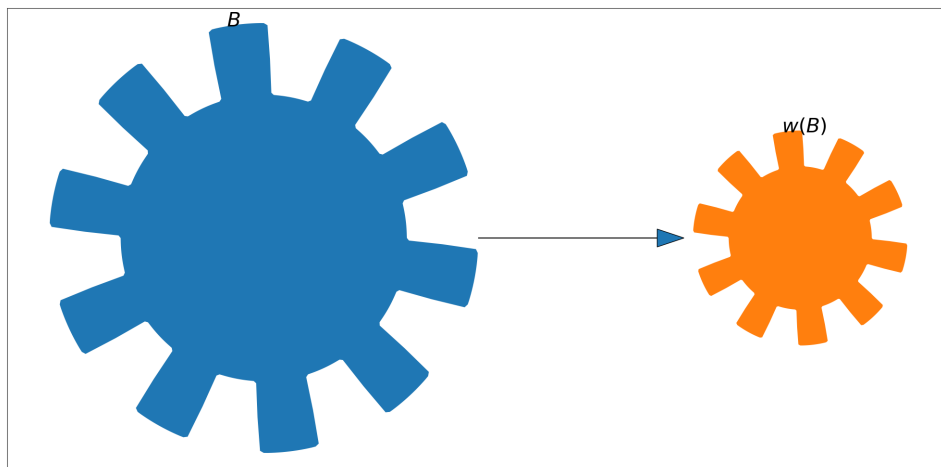


Figura 1.11: Ejemplo de imagen reducida por el efecto de  $w(B)$

Podemos definir  $w : \mathcal{H}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{X})$  como

$$w(B) = \{w(x) : x \in B \quad \forall B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})\}$$

el cual es una contracción sobre  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h(d))$  con factor de contracción  $s$ .

Otra propiedad importante es que para todo subconjunto  $B, C, D$ , y  $E$ , en  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, E),$$

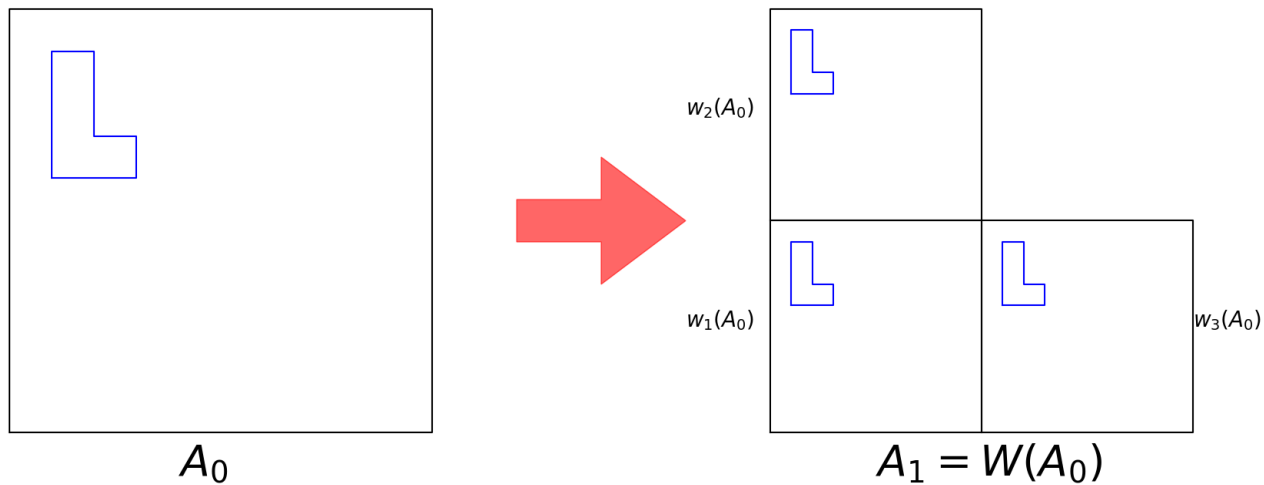
(véase la demostración en (Barnsley, 2006)) donde como es usual  $h$  es la métrica de Hausdorff. Lo que permite introducir el operador de Hutchinson como un collage de imágenes obtenido al aplicar  $N$  contracciones a un determinado conjunto o imagen.

**Definición 1.6.3.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico. Sea  $\{w_n : n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  mapeos de contracción sobre  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  Se denota al factor de contracción de  $w_n$  por  $s_n$  para cada  $n$ . Se define  $W : \mathcal{H}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{X})$

como el operador de Hutchinson

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \quad \text{para cada } B \in \mathcal{H}(\mathbf{X}).$$

Entonces  $W$  es un mapeo de contracción con factor de contracción  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .



**Figura 1.12:** La imagen inicial (a la izquierda) es transformada por el operador de Hutchinson  $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B)$ , que genera una nueva imagen compuesta por copias reducidas de la imagen original. La transformación  $w_1$  solo contrae la imagen, mientras que  $w_2$  realiza la misma contracción y traslada la imagen a la esquina superior izquierda, y  $w_3$  traslada la imagen reducida a la esquina inferior izquierda

Se puede construir como ejemplo un operador de Hutchinson en el plano real a partir de tres contracciones,

$$w_1(x) = w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x_1 \\ 0.5x_2 \end{pmatrix},$$

$$w_2(x) = w_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x_1 \\ 0.5x_2 + 0.5 \end{pmatrix},$$

$$w_3(x) = w_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x_1 + 0.5 \\ 0.5x_2 \end{pmatrix},$$

claramente se tratan de transformaciones afines que realizan una copia de la imagen original, la reducen y posteriormente trasladan la imagen a otra ubicación en el plano. La siguiente figura (1.12) muestra como una imagen se transforma bajo el efecto del respectivo operador de Hutchinson  $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B)$ . El operador de Hutchinson juega un papel importante en la teoría fractal determinista, este será estudiado en el siguiente capítulo.

En este capítulo se resumieron conceptos matemáticos relacionados con la geometría fractal. Se definen los espacios y las métricas, conceptos que sirven como base para construir la teoría relacionada con los fractales, e introduce los conceptos de conjuntos abiertos, cerrados, compactos, así como la

equivalencia métrica en diferentes espacios. Este andamiaje permite definir el espacio métrico de mayor importancia en este, el espacio en el que viven los fractales  $(\mathcal{H}, h)$ , cuyos elementos son todos los subconjuntos compactos diferentes del conjunto vacío de un espacio subyacente dado. También se define el operador de Hutchinson, utilizado para crear fractales determinista. Finalmente se muestran en el apéndice algunos programas realizados en lenguaje Python para generar algunas de las imágenes mostradas en el capítulo.



# Capítulo 2

## Sistemas de Funciones Iteradas

En el capítulo anterior se había definido el operador de Hutchinson, este operador es frecuentemente considerado como una analogía de la máquina de copiado, en la que a partir de una imagen obtenemos una nueva formada por imágenes reducidas o deformadas de la imagen original al estilo de un Collage de fotos. Veremos como a través de la repetición sucesiva de este mecanismo se obtienen fractales deterministas. También se introducirá otro método basado en juegos de azar y aleatoriedad, el cual facilita y enriquece la obtención de fractales.

### 2.1. Sistema de funciones iteradas IFS

**Definición 2.1.1.** *Un sistema de funciones iteradas consiste de un espacio métrico completo  $(\mathbf{X}, d)$  junto con un conjunto finito de mapeos de contracción  $w_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ , con sus factores de contracción respectivos  $s_n$ , para  $n = 1, 2, \dots, N$ . La abreviación en inglés “IFS” es usada en vez de “iterated function system”. La notación para el IFS es  $\{\mathbf{X}; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  y su factor de contracción es  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .*

Ya se había visto en el capítulo anterior una manera de construir el conjunto de cantor, mediante la aplicación sucesiva de dos transformaciones, a partir de las cuales podemos definir un IFS  $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$ , con

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x \qquad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

contracciones en el espacio real unidimensional.

El siguiente teorema resume los principales resultados encontrados hasta el momento para los IFS.

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $\{\mathbf{X}; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  un sistema de funciones iteradas con factor de con-*

tracción  $s$ . Entonces la transformación (operador de Hutchinson)  $W : \mathcal{H}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{X})$  definida por:

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

para todo  $B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ , es un mapeo de contracción sobre el espacio métrico  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h(d))$  con factor contractivo  $s$ . Que es

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C)$$

para todo  $B, C \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . Su único punto fijo,  $A \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ , obedece:

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A),$$

y esta dado por  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{\circ n}(B)$  para cualquier  $B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ .

**Definición 2.1.2.** El punto fijo  $A \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$  descrito en el teorema es llamado el atractor del IFS.

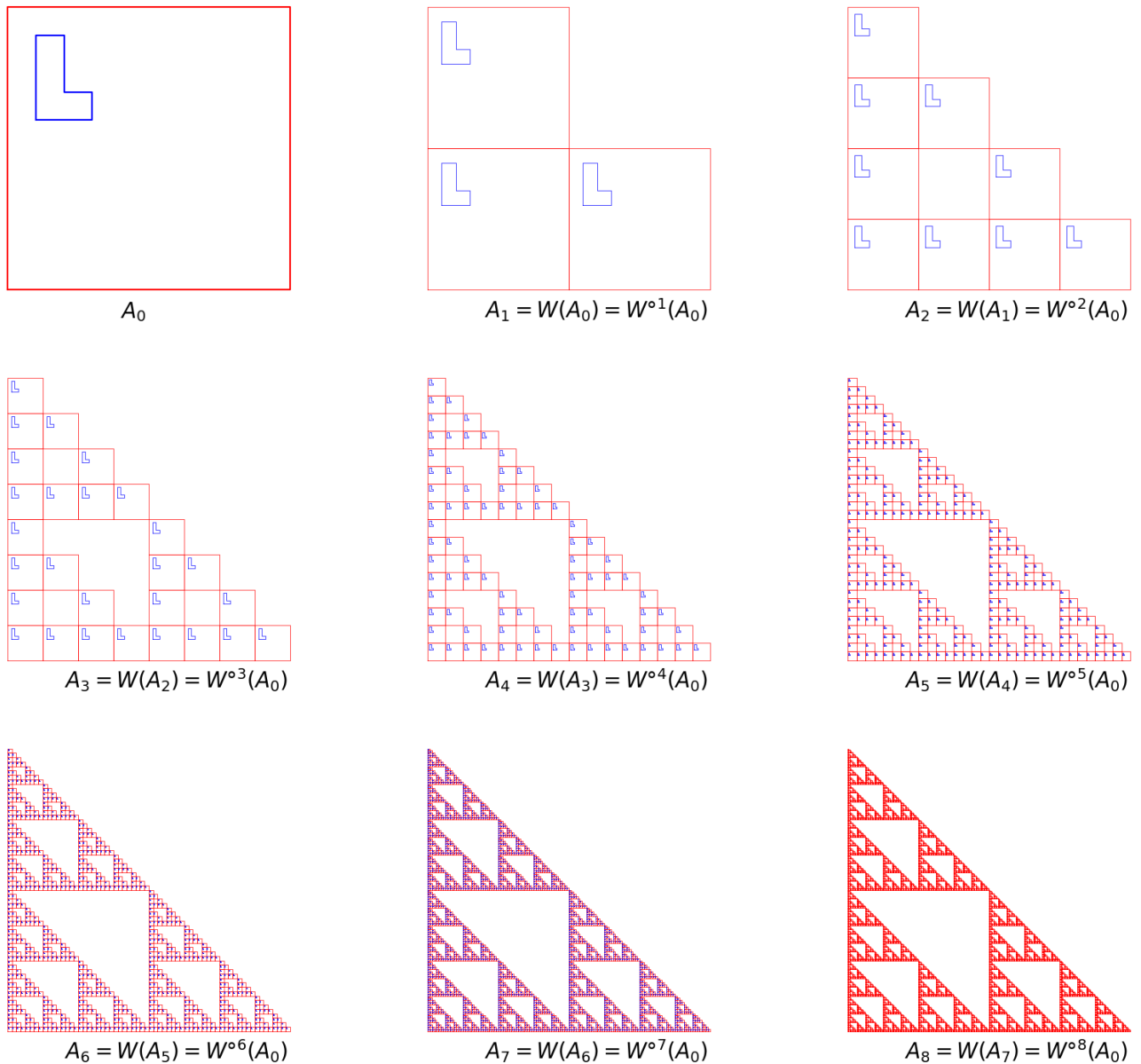
Ya se había visto el efecto producido por la aplicación del operador de Hutchinson sobre un conjunto es un espacio dado, ahora la atención se centra en el resultado de la aplicación sucesiva del operador de Hutchinson sobre un conjunto. Un IFS de la forma  $\{\blacksquare; w_1, w_2, w_3\}$ , donde  $\blacksquare = [0, 1] \times [0, 1]$ , y las contracciones:

$$w_1(x) = w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x_1 \\ 0.5x_2 \end{pmatrix},$$

$$w_2(x) = w_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x_1 \\ 0.5x_2 + 0.5 \end{pmatrix},$$

$$w_3(x) = w_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x_1 + 0.5 \\ 0.5x_2 \end{pmatrix},$$

utilizadas en el capítulo anterior que tiene como espacio al cuadrado unitario en  $\mathbb{R}^2$ , y operador de Hutchinson  $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B)$ , ¿Qué ocurre cuando el operador de Hutchinson es aplicado sucesivamente?. Nuevamente partiendo de una imagen o conjunto inicial (figura 2.1), en este caso un cuadrado con una letra L en una esquina como una referencia para facilitar la visualización de rotaciones y reflexiones sobre la imagen. Al aplicar el operador de Hutchinson sobre esta imagen el resultado es una nueva imagen a la que se le aplica nuevamente el operador, así sucesivamente después algunas iteraciones llegamos a una imagen a la que la aplicación del operador no tiene aparente efecto, esta imagen es un punto fijo y el atractor del IFS.

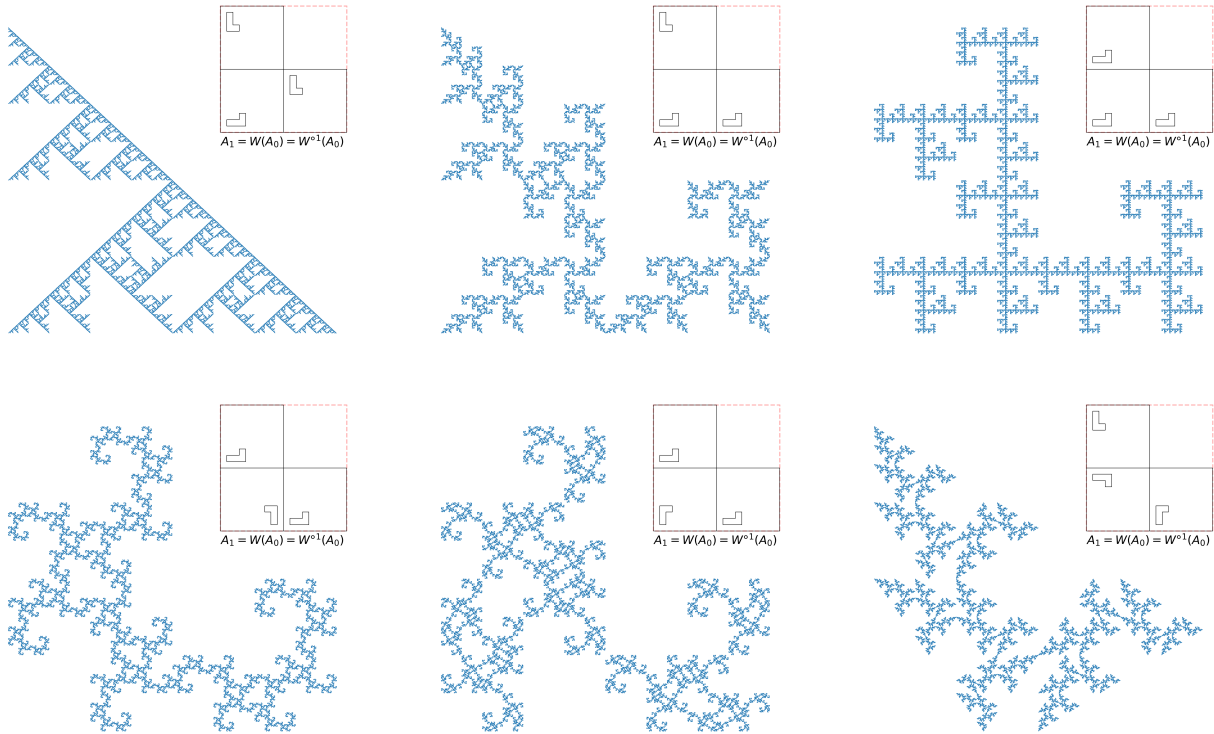


**Figura 2.1:** Una variación del triángulo de Sierpinski, un IFS con tres transformaciones afines con factor de contracción  $s = 1/2$ . Se observan las primeras ocho iteraciones del operador de Hutchinson sobre la imagen  $A_0$ .

### 2.1.1. Triángulo de Sierpinski

El ejemplo ilustrado en la figura 2.1 es una variación del famoso triángulo de Sierpinski. Este es un caso particular de atractor que se obtiene a partir de tres transformaciones afines, existen muchos otros ejemplos que se pueden obtener a través de sistemas de funciones iteradas en  $\mathbb{R}^2$  aplicando pequeñas modificaciones a las transformaciones, algunas de estas se muestran en (figura2.2).

Existen muchas formas de transformar un cuadrado a un cuadrado mediante una transformación lineal que solo utiliza contracciones, rotaciones y reflexiones. En la figura 2.2 se observa una familia de IFS's, todos están compuestos por copias reducidas que conservan su posición dentro del espacio, pero que están rotadas o reflejas, estos cambios generan distintas formas de los atractores.



**Figura 2.2:** Seis IFS's de tres transformaciones. Las imágenes muestran el atractor y la primera transformación de Hutchinson en la esquina superior derecha. Estos ejemplos muestran como las variaciones en las transformaciones afines generan distintos atractores.

Cualquiera de las transformaciones de un IFS se pueden escribía de la forma

$$w_i(x) = w_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix},$$

por lo que cada transformación está determinada por los parámetros  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $e_i$  y  $f_i$ , estos parámetros se pueden ordenar en tablas para hacer referencia a un mismo IFS, en la tabla 2.2 se muestran los parámetros de las tres transformaciones del triángulo de Sierpinski.

**Tabla 2.1:** Parámetros del IFS de un triángulo del Sierpinski

$w$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
1	0.5	0	0	0.5	0	0
2	0.5	0	0	0.5	0.5	0
3	0.5	0	0	0.5	0	0.5

### 2.1.2. El helecho de Barnsley

Los sistemas de funciones iteradas también permiten obtener estructuras que se asemejan a los objetos que se encuentran en la naturaleza, un ejemplo popular en la literatura es el helecho de

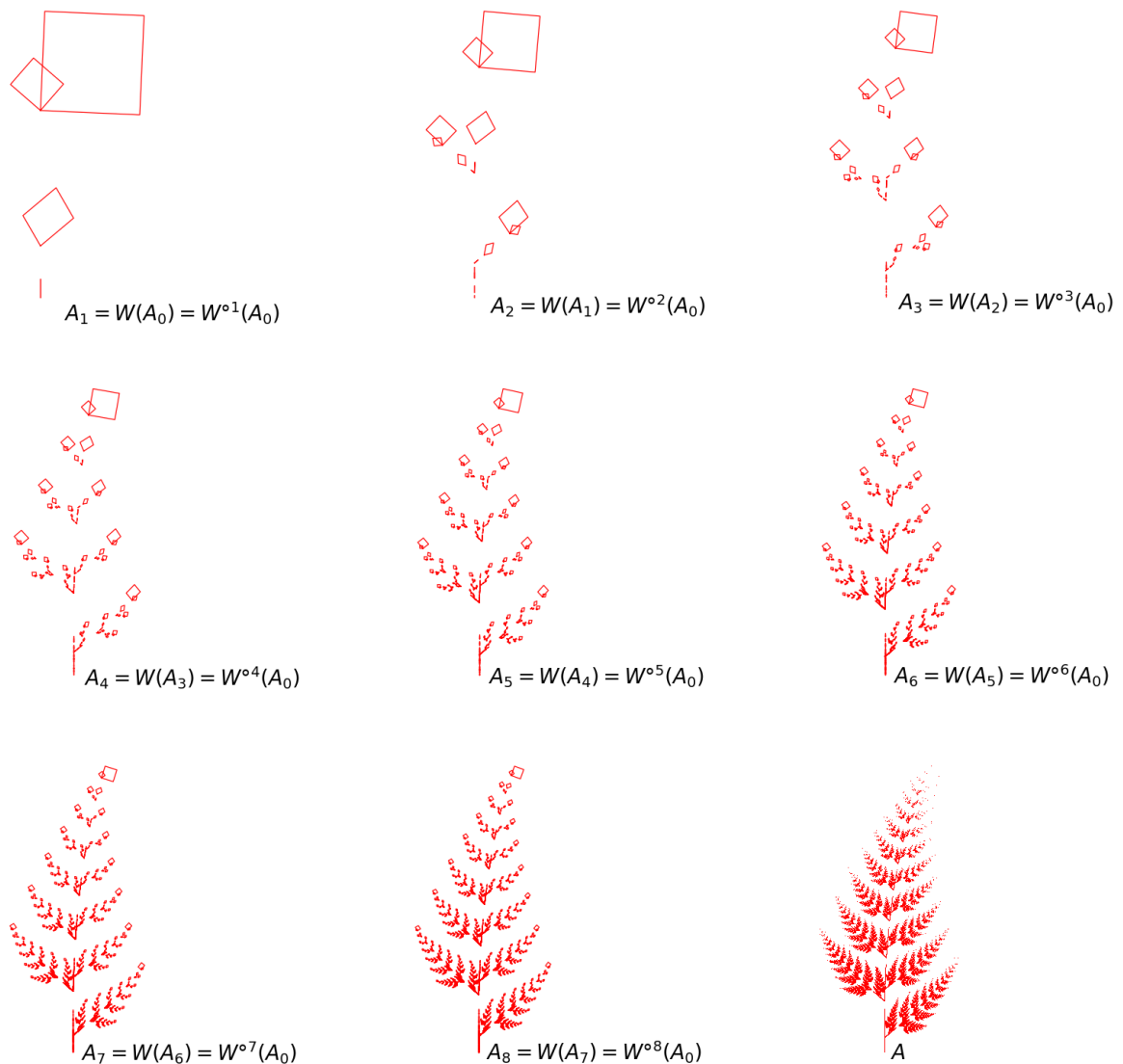


Barnsley, una imagen construida a partir de cuatro transformaciones con los siguientes parámetros; Hay dos formas de llegar al atractor, una de ellas es mostrada en la imagen 2.3, este método es

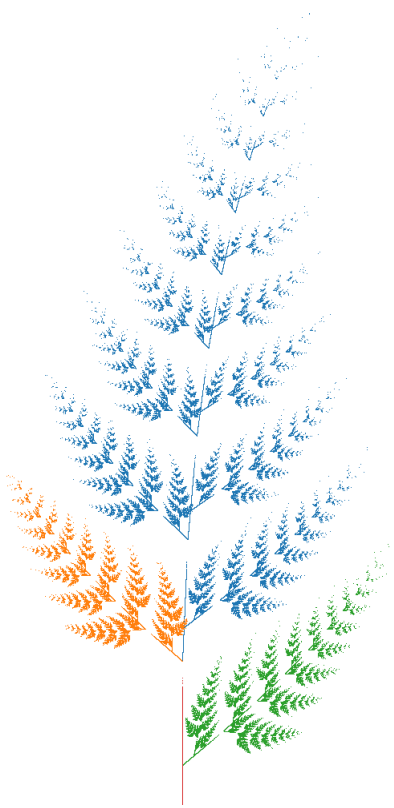
**Tabla 2.2:** Parámetros del IFS de un helecho

$w$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
1	0	0	0	0.16	0	0
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44

llamado el *algoritmo determinista*, y como se ve en la imagen consiste en aplicar sucesivamente el operador de Hutchinson a un conjunto compacto dado.



**Figura 2.3:** El resultado de la iteración sucesiva del operador de Hutchinson, donde se ilustra la forma de obtener fractales mediante el algoritmo determinista.



**Figura 2.4:** Esta figura muestra el resultado del IFS de la tabla 2.2.

Otro resultado del IFS es mostrado en la figura 2.4, esta imagen es un acercamiento borroso y desconexo de lo que se supone es un helecho, por lo que es un momento oportuno para introducir otro parámetro importante en la construcción de fractales determinista, este parámetro es la probabilidad, la cual está asociada con otra forma de obtener fractales, y que se explicara con mayor detalle más adelante.

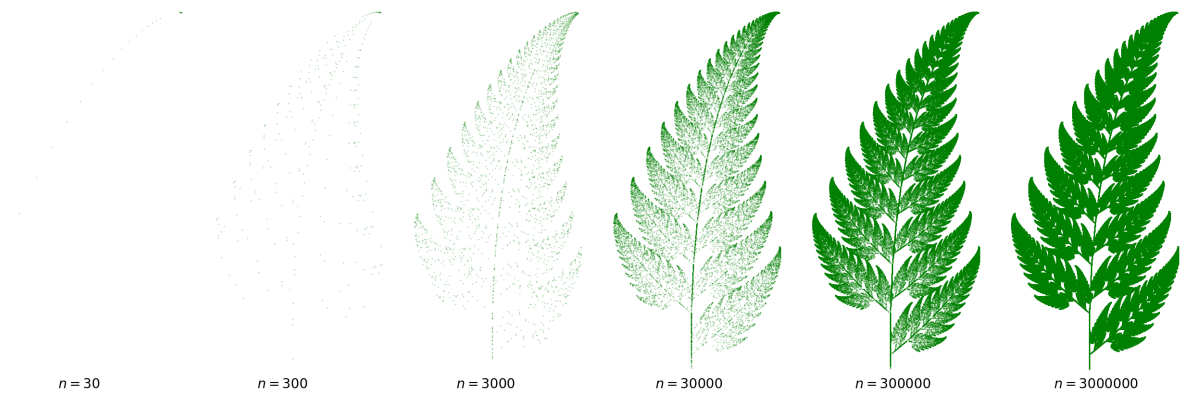
El *algoritmo de iteración aleatoria* ó *Juego del Caos* a diferencia del algoritmo determinista no parte de una imagen completa para construir el fractal, sino que toma un punto que esté en el espacio (en este caso  $\mathbb{R}^2$ ), y en cada iteración es seleccionada una de las transformaciones del IFS a partir del parámetro probabilidad, la cual es denota como  $p_i$  y esta asociada con la transformación  $w_i$ . La probabilidad indica la frecuencia de visitas que tiene un punto a un lugar determinado del espacio, la probabilidad también satisface la igualdad  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ .

El algoritmo de iteración aleatoria disminuye considerablemente la cantidad de cálculos necesarios para obtener una imagen del atractor del IFS en comparación con el algoritmo determinista. En el caso ejemplificado en la figura 2.4 el número de cálculos sigue una ley de potencias, si se parte de una imagen inicial, por ejemplo un cuadrado, y suponemos que para dibujar este cuadrado solo es necesario definir sus vértices, al aplicar el operador de Hutchinson la nueva imagen consta de cuatro nuevos cuadrados por lo que el número de vértices aumenta a  $4^2 = 16$ , para la siguiente iteración  $4^3 = 64$ , y así sucesivamente, por lo que la regla de potencias que sigue es de la forma *#de puntos en  $A_0 \times N^n$* , donde  $N$  es el número de transformaciones y  $n$  la iteración. Siguiendo esta ley de potencias se puede ver que después de  $n = 30$  el número de puntos obtenidos asciende al orden de  $\approx 10^{18}$ , lo que implica grandes dificultades computacionales. En contraste en el método aleatorio es posible develar la imagen del atractor con muchos menos puntos, como se ilustra en la figura 2.5.

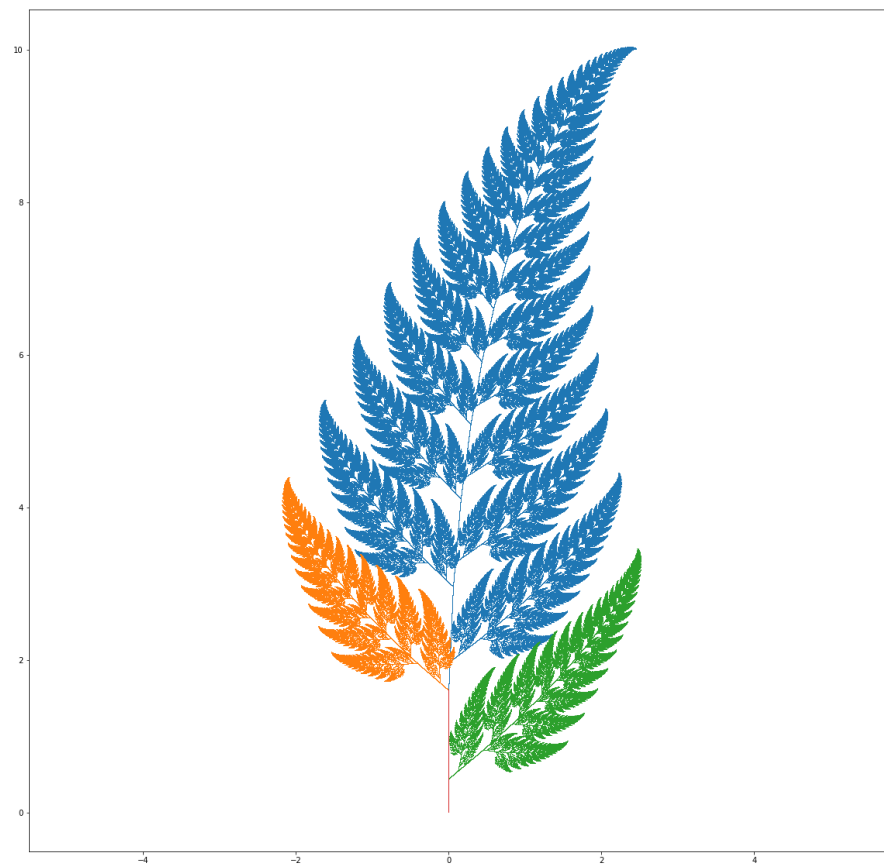
Si incluimos probabilidades al IFS de la tabla 2.2, como en la tabla 2.3, el atractor obtenido es considerablemente diferente al que se muestra en la figura 2.4 como se puede observar en 2.6, este comportamiento se estudiara con más detalle el capítulo 6.

**Tabla 2.3:** Parámetros del IFS con probabilidad para un helecho de Barnsley.

$w$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$p$
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07



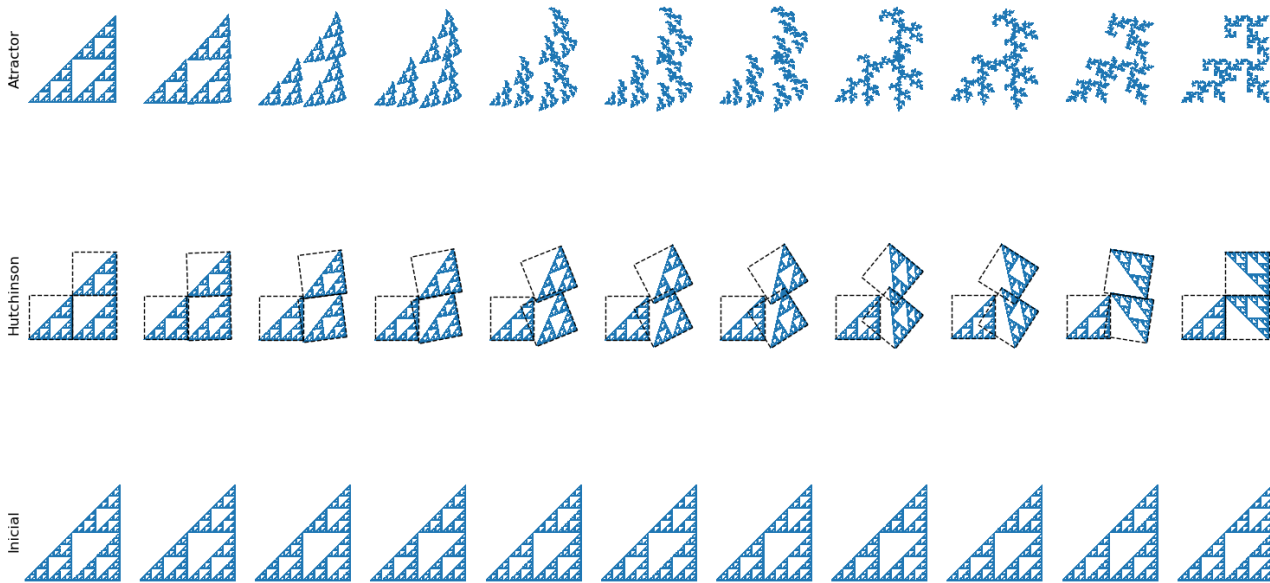
**Figura 2.5:** El algoritmo de iteración aleatoria para diferentes valores de  $n$ .



**Figura 2.6:** Helecho resultante del algoritmo de iteración aleatoria para el IFS de la tabla 2.3.

## 2.2. El teorema de Collage

El problema inverso a la construcción de fractales deterministas a través de IFS's, es el de encontrar un conjunto o imagen específica mediante un IFS adecuado. Supongamos que partimos de un conjunto dado al cual queremos llegar a través de un IFS, por lo que se le aplica el operador de Hutchinson a la imagen; si en la primera iteración el resultado es una imagen idéntica a la original, entonces el correspondiente IFS se puede utilizar para construir la imagen deseada. Por otro lado, si la imagen obtenida es muy cercana a la inicial, el atractor del IFS por el principio de contracción será una imagen que no estará lejos de la imagen original. La figura 2.7

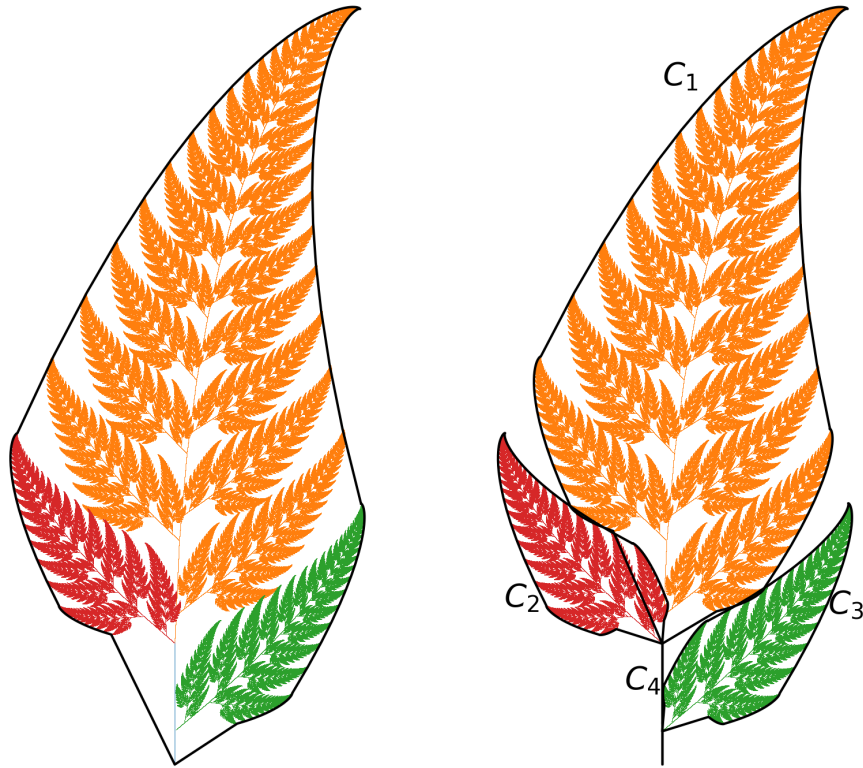


**Figura 2.7:** Los fractales tienen dependencia continua de los parámetros, en la imagen podemos ver que pequeños cambios en los parámetros modifican levemente al atractor.

Para explicar en que consiste el *Teorema de Collage* veamos el ejemplo mostrado en la figura 5.4, en ella se puede observar nuevamente como objeto de estudio la imagen bidimensional de un helecho. El ejercicio consiste en identificar las partes que son copias de la imagen original. En este caso podemos identificar cuatro copias transformadas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , cuya unión o collage generan una imagen idéntica o muy cercana a la original. La distancia entre las imágenes es encontrada utilizando la distancia de Hausdorff entre dos conjuntos. Es apropiado mencionar que la copia  $C_4$  tiene factor de contracción  $s = 0$  en la dirección  $x$  por lo que se reduce a una línea, pero sigue siendo una copia de la imagen original.

El siguiente teorema es central para el diseño de IFS's cuyos atractores están cerca de un conjunto dado.

**Teorema 2.2.1.** (*El teorema de Collage, (Barnsley 1985b)*). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Dado  $L \in \mathcal{H}(X)$ , y dado  $\epsilon \geq 0$ . Elige un IFS  $\{X; (w_0), w_1, w_2, \dots, w_n\}$  con factor de



**Figura 2.8:** El teorema de Collage aplicado al helecho. A la izquierda la imagen original, y a la derecha un collage formado por cuatro copias  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , estas copias son obtenidas a través de cuatro transformaciones afines que pertenecen a un IFS.

contracción  $0 \leq s < 1$ , tal que

$$h \left( L, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^n w_n(L) \right) \leq \epsilon$$

Donde  $h(d)$  es la métrica de Hausdorff. Entonces

$$h(L, A) \leq \epsilon / (1 - s),$$

donde  $A$  es el atractor del IFS. Equivalentemente,

$$h(L, A) \leq (1 - s)^{-1} h \left( L, \bigcup_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^n w_n(L) \right) \quad \text{para todo } L \in \mathcal{H}(\mathbf{X}).$$

Este teorema dice, que para encontrar un IFS cuyo atractor esté cerca o se parezca a este, se necesita buscar un conjunto de transformaciones (contracciones que estén dentro del espacio correspondiente), cuya unión esté cerca al conjunto dado.



# Capítulo 3

## Caos en Fractales

En el capítulo anterior se vieron dos formas de construir fractales a través de IFS's. Por un lado, se daba la denominación de determinista porque de alguna forma la estructura estaba determinada completamente por el operador de Hutchinson y en cada iteración es posible encontrar un conjunto o imagen definida. Por otro lado, teníamos un mecanismo en el que se partía de un punto del espacio y se realizaban iteraciones, aplicando una única transformación del IFS al azar ó asignando probabilidades. Este último algoritmo aleatorio deja interrogantes con respecto a la manera en la que se obtiene el fractal y que papel juega la probabilidad. En este capítulo se definen los sistemas dinámicos que pueden estar asociados a un IFS y algunas de sus propiedades.

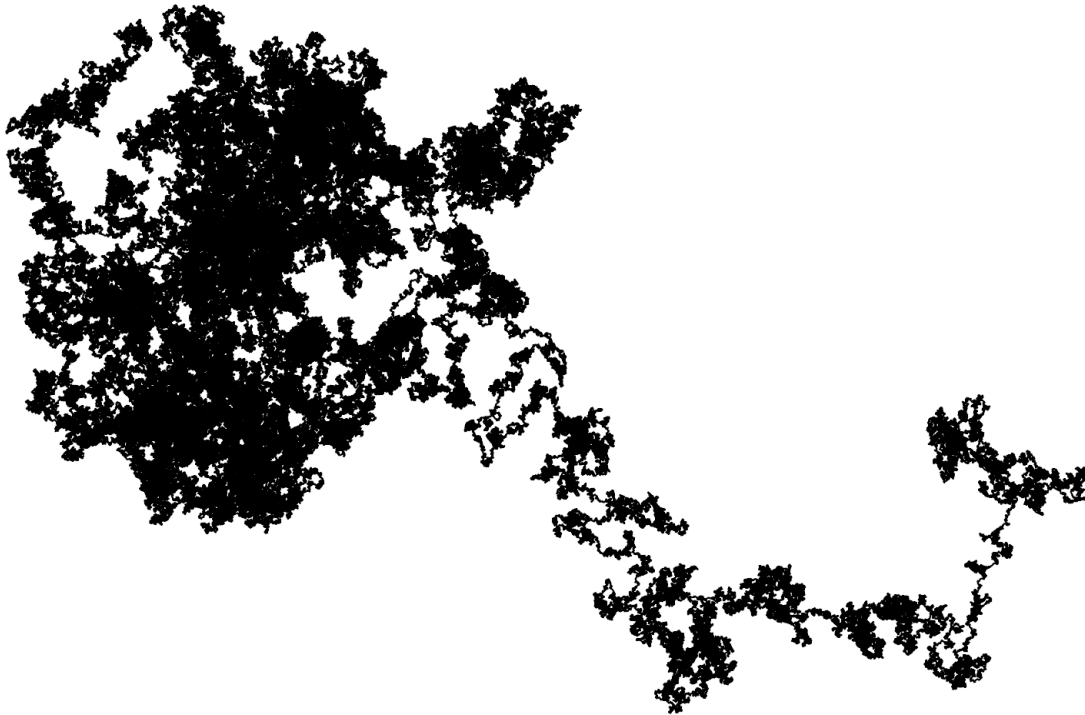
### 3.1. El Juego del Caos

El algoritmo de iteraciones aleatorias parte de un IFS  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ , con probabilidad  $p_i > 0$  asignada a la transformación  $w_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , donde  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Se escoge un  $x_0 \in \mathbf{X}$  y después se selecciona recursiva e independientemente los  $x_n \in \{w_1(x_{n-1}), w_2(x_{n-1}), \dots, w_N(x_{n-1})\}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , en donde la probabilidad de que se dé el evento  $x_n$  es  $p_i$ . Este proceso crea una sucesión  $\{x_n; 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Este método fue usado en el capítulo anterior para mostrar como dibujar fractales deterministas a partir de sistemas de funciones iteradas, ahora la intención es describir como este mecanismo aleatorio obtiene exitosamente estos atractores y descubrir más información sobre la profunda estructura del atractor de un IFS.

Un ejemplo de proceso aleatorio es el *Movimiento Browniano*, observado por primera vez por el botánico Escocés Robert Brown (1773-1858). El movimiento se presenta cuando una partícula se halla en un fluido, es causado por los choques continuos contra las moléculas presentes en él. Se puede describir el movimiento de la partícula paso a paso. Partiendo de un punto en el plano se selecciona una dirección al azar, se avanza en esa dirección una distancia dada, nuevamente se escoge

otra dirección, y se avanza otra vez, esto se repite el número de veces que se desee. La figura 3.1 muestra el resultado que se obtiene al realizar este proceso, el cual se asemeja bastante al que se observa al ver a través de un microscopio a una partícula inmersa en un fluido.



**Figura 3.1:** Trayectoria del movimiento Browniano, generado después de un millón de pasos.

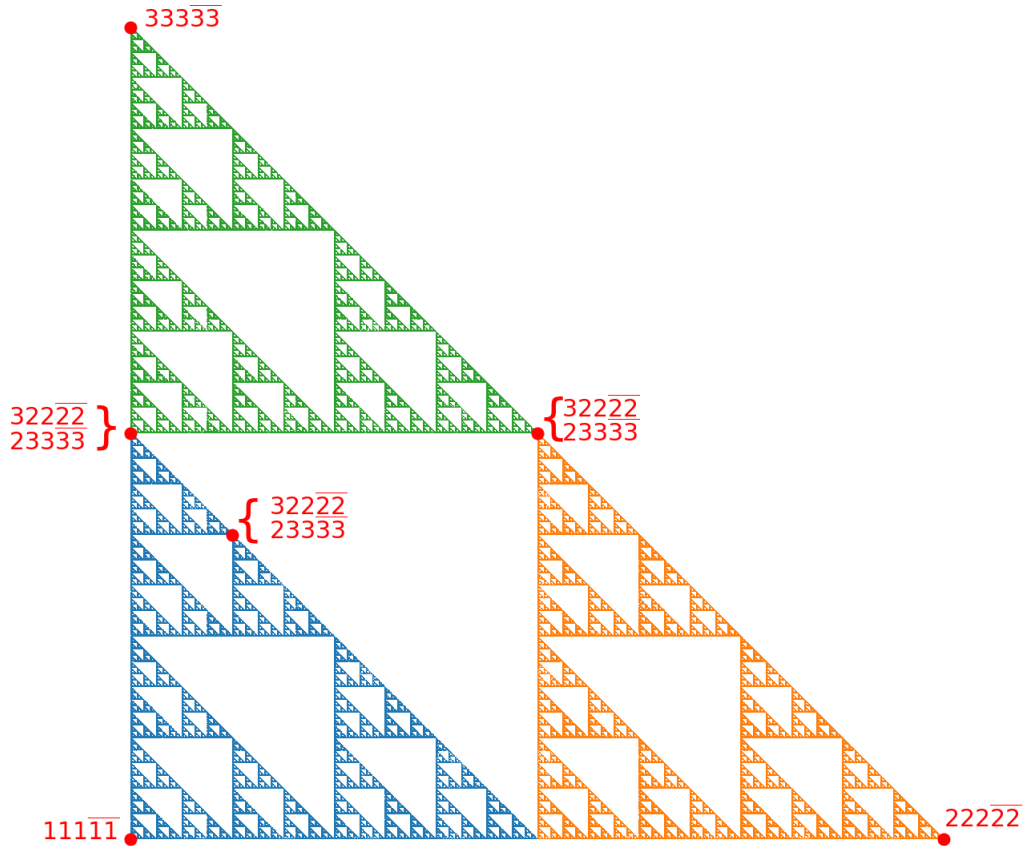
## 3.2. La Dirección de los Puntos en un Fractal

Empezamos por considerar informalmente el concepto de dirección de puntos sobre el atractor de un IFS. Esta idea de dar direcciones a cada punto del atractor consiste en seguir la secuencia de transformaciones que lleva a cualquier conjunto o lugar del espacio. El conjunto de Cantor solo tiene dos transformaciones,  $w_1(x) = \frac{1}{3}x$  y  $w_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . Una secuencia infinita de 1's y 2's puestos juntos dan la dirección de un punto en el conjunto, esta secuencia depende del orden de las transformaciones que se realizaron para llegar a este punto. Es importante mencionar la necesidad de que el número de transformaciones sea infinito, puesto que una secuencia finita lleva a un sector del espacio y no a un punto. En el intervalo  $w_1([0, 1]) = [0, 1/3]$  todos los puntos tienen una dirección que comienza en 1, para el intervalo construido de la forma  $w_2(w_1([0, 1])) = [2/9, 1/3]$  la dirección correspondiente empieza en 12. La transformación  $\dots w_1(w_1(w_1(w_1([0, 1]))) = 0$  lleva a un punto con una única dirección 11111. Todos los puntos del conjunto de Cantor son disyuntos, por lo que solo hay una dirección para cada punto, y el IFS está *completamente desconectado*. Considerando al IFS

$$\left\{ \mathbb{C}; w_1(z) = \frac{1}{2}z, w_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, w_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i \right\}.$$



El atractor  $A$  de este IFS es un triángulo de Sierpinski con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ , y  $(0, 1)$ . Podemos dar direcciones a los puntos sobre  $A$  de acuerdo a la secuencia de transformaciones que llevan a ellos. Existen al menos dos puntos en  $A$  que tienen dos direcciones, ya que existe un punto en cada uno de los conjuntos  $w_1(A) \cap w_2(A)$ ,  $w_2(A) \cap w_3(A)$ , y  $w_3(A) \cap w_1(A)$ , como ilustra la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Algunos puntos en el triángulo de Sierpinski tienen dos direcciones, mientras otros tienen solo una dirección.

Por otro lado algunos puntos en el triángulo de Sierpinski tienen solo una dirección tal como son los vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ , y  $(0, 1)$ . A pesar de que el atractor está conectado, la proporción de puntos con múltiples direcciones es "pequeña", en un sentido en el que no se ha precisado. En casos como este decimos que el IFS está *solo tocando*. Nótese que esta terminología se refiere al IFS en lugar de su atractor. Otra posibilidad es que el IFS esté *sobrepuesto*, para el cual habrá puntos para los cuales existen más de una dirección, como sería el caso del IFS  $\{[0, 1], \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$ , cuyo atractor es el intervalo unitario  $A = [0, 1]$ , pero

$$w_1(A) \cap w_2(A) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{4}, 1\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],$$

y los puntos en  $[1/4, 1/2]$  tienen al menos dos direcciones. En casos como este en los que hay muchos puntos con varias direcciones se dice que el IFS está sobrepuesto. La razón por la cual se hace referencia al IFS y no al atractor es porque un conjunto puede ser el atractor de distintos IFS's.

### 3.3. TRANSFORMACIONES CONTINUAS DEL ESPACIO DE DIRECCIONES A LOS FRACTALES

---

El espacio de direcciones  $\mathbf{X} = \Sigma$  de  $N$  símbolos, en este caso los enteros  $\{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ , tienen como puntos palabras o secuencia de símbolos como las mencionadas en la sección anterior, por ejemplo,  $x = 2 \ 5 \ 8 \ 12 \ 34 \ (N - 2) \ 7 \ 0 \ \dots$  es una secuencia de símbolos semi-infinita. En general, un elemento  $x \in \Sigma$ , se puede escribir como  $x = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}\dots$  donde cada  $x_i = \{0, 1, 2, 3, \dots, N - 1\}$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $S$  un conjunto.  $S$  es contable si es vacío o si existe una transformación sobre  $c : I \rightarrow S$ , donde  $I$  es cualquiera de los conjuntos

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, n\}, \dots,$$

o los enteros positivos  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .  $S$  es incontable si no es contable.

Pensamos el conjunto incontable como un conjunto más grande que uno contable. Vamos a hacer fundamental uso del espacio de direcciones para formalizar el concepto de direcciones. ¿Cuántos puntos contiene el espacio de direcciones?.

**Teorema 3.2.1.** El espacio de direcciones de dos o más símbolos es incontable.

**Demostración:** Probemos para el espacio de direcciones de dos símbolos  $\{1, 2\}$ . Un elemento del espacio  $\Sigma$  se denota como  $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\dots$ , donde cada  $\omega_i \in \{1, 2\}$ . Se define la transformación  $\rho : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$  por  $\rho(1) = 2$  y  $\rho(2) = 1$ . Suponiendo que el espacio es contable. Sea  $c : \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \Sigma$  la función de conteo. Considerando el punto  $\sigma \in \Sigma$  definido por

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots,$$

donde  $\sigma_n = \rho((c(n))_n)$ , y  $(c(n))_n$  representa al  $n$ -ésimo símbolo de  $c(n)$ . ¿Cuándo alcanzará la función de conteo a  $\sigma$ ? ¡Nunca!, por ejemplo,  $c(3) \neq \sigma$  porque los símbolos en la tercera posición son diferente.

### 3.3. Transformaciones Continuas del Espacio de Direcciones a los Fractales

Para formalizar el concepto de dirección y espacio de direcciones se establecen algunas definiciones que ayudan a construir una transformación continua  $\phi$  que relacione al espacio de direcciones asociado a un IFS con el atractor del IFS.

**Definición 3.3.1.** Sea  $\{\mathbf{X} : w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un IFS. El espacio de direcciones asociado con el IFS,  $(\Sigma, d_c)$ , es definido como el espacio de direcciones de  $N$  símbolos  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ , con la métrica dada

por

$$d_c(\omega, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\omega_n - \sigma_n|}{(N+1)^n} \quad \text{para todo } \omega, \sigma \in \Sigma.$$

Se puede observar que un punto  $x \in A$  con dirección  $w = w_1w_2w_3w_4\dots$ , tras la transformación  $w_j(x)$  obtendrá la dirección  $\tilde{w} = jw_1w_2w_3w_4\dots$  para  $j = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ .

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $\{\mathbf{X}; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  un IFS. Denotando  $A$  como el atractor del IFS. Sea  $(\Sigma, d_c)$  el espacio de direcciones asociado al IFS. Para cada  $\sigma \in \Sigma$ ,  $n \in N$ , y  $x \in \mathbf{X}$ , sea*

$$\phi(\sigma, n, x) = w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ w_{\sigma_3} \circ \dots \circ w_{\sigma_n}$$

entonces

$$\phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$$

existe, pertenece a  $A$ , y es independiente de  $x \in \mathbf{X}$ . Si  $\mathbf{K}$  es un conjunto compacto de  $\mathbf{X}$ , entonces la convergencia es uniforme sobre  $x \in \mathbf{K}$ . La función  $\phi : \Sigma \rightarrow A$  es continua y sobre.

**Definición 3.3.2.** *Sea  $\{\mathbf{X} : w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un IFS con el espacio de direcciones asociado  $\Sigma$ . Sea  $\phi : \Sigma \rightarrow A$  la función continua del espacio de direcciones sobre el atractor del IFS construida en el teorema 3.3.1. Una dirección de un punto  $a \in A$  es cualquier miembro del conjunto*

$$\phi^{-1}(a) = \{\omega \in \Sigma : \phi(\omega) = a\}.$$

El conjunto es llamado el conjunto de direcciones de  $A$ , El IFS está totalmente desconectado si cada punto de su atractor posee una única dirección. El IFS está solo tocando si no es completamente desconectado y también si su atractor contiene un conjunto  $\mathcal{O}$  abierto tal que

**i**  $w_i(\mathcal{O}) \cap w_j(\mathcal{O}) = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$  con  $i \neq j$

**ii**  $\cup_{i=1}^N w_i(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ .

Un IFS cuyo atractor cumple con (i) y (ii) obedece la condición de conjunto abierto. El IFS está sobrepuesto si no está solo tocando o desconectado.

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $\{\mathbf{X} : w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un IFS con atractor  $A$ . El IFS es totalmente disconexo si y solo si*

$$w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, N\} \quad \text{con } i \neq j.$$

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $\Sigma$  el espacio de direcciones de los  $N$  símbolos,  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ , y que define dos*

### 3.3. TRANSFORMACIONES CONTINUAS DEL ESPACIO DE DIRECCIONES A LOS FRACTALES

diferentes métricas en  $\Sigma$  como

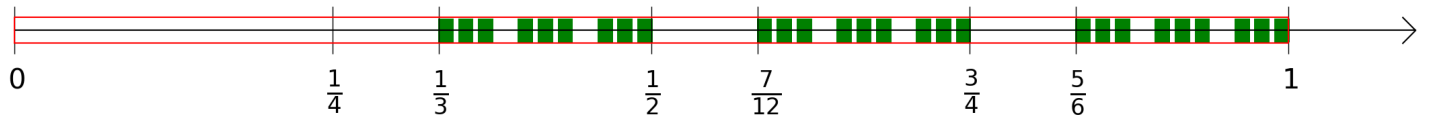
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}, \quad d_2(x, y) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{(N+1)^i} \right|$$

entonces  $(\Sigma, d_1)$  y  $(\Sigma, d_2)$  son espacios métricos equivalentes.

Se muestra que el espacio de direcciones es métricamente equivalente a un conjunto de Cantor totalmente desconectado de  $[0, 1]$ . Dado un IFS mediante  $\{[0, 1]; w_n(x) = \frac{1}{(N+1)}x + \frac{n}{n+1} : n = 1, 2, \dots, N\}$  Entonces

$$w_n([0, 1]) = \left[ \frac{n}{N+1}, \frac{n+1}{N+1} \right] \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N.$$

Para  $N = 3$  las transformaciones  $w_1 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ ,  $w_2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ ,  $w_3 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$  tienen puntos fijos  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  y 1 respectivamente, el atractor se muestra en la figura 3.3. El atractor es totalmente desconexo.



**Figura 3.3:** Un conjunto de Cantor especial, construido a partir de tres transformaciones.

Para el caso  $N = 3$ , el intervalo  $[0, \frac{1}{4}]$  es eliminado en la primera iteración, por lo que en el espacio de direcciones  $\Sigma$  con  $\sigma_i = \{0, 1, 2, 3\}$ , los puntos del conjunto tienen direcciones sin  $\sigma_1 = 0$ , para la siguiente iteración también se elimina  $\sigma_2 = 0$ , y así sucesivamente, entonces ningún dígito es cero. Considerando la transformación continua  $\phi : (\Sigma, d_c) \rightarrow (A, \text{Euclideana})$  se sigue que los dos espacios asociados son equivalentes.

**Definición 3.3.3.** Sea  $\{X : w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un IFS con atractor  $A$ , a un punto  $a \in A$  se le llama un punto periódico del IFS si existe una secuencia finita de números  $\{\sigma(n) \in \{1, 2, \dots, N\}\}_{n=1}^P$  tal que

$$a = w_{\sigma(P)} \circ w_{\sigma(P-1)} \circ \dots \circ w_{\sigma(1)}(a).$$

Si  $a \in A$  es periódico, entonces el entero  $P$  más pequeño que cumpla la condición anterior es el periodo de  $a$ .

Entonces un punto en el atractor es periódico si se le pueden aplicar una secuencia de transformaciones específica que hagan que se regrese al punto. Si  $a \in A$  es un punto periódico, entonces

$$\sigma = \sigma(P)\sigma(P-1)\sigma(P-2)\dots\sigma(1)\sigma(P)\sigma(P-1)\sigma(P-2)\dots\sigma(1)\dots = \overline{\sigma(P)\sigma(P-1)\sigma(P-2)\dots\sigma(1)}.$$

y en consecuencia  $\phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, a) = a$ .

**Definición 3.3.4.** *Un punto en el espacio de direcciones cuyos símbolos sean periódicos, es llamada una dirección periódica. Un punto en el espacio de direcciones cuyos símbolos son periódicos después de algunos de sus símbolos iniciales es eventualmente periódico.*

Nótese que el atractor de un IFS es tal que ante la transformación de Hutchinson  $W(A) = A$ , por lo que cada punto  $x \in A$  satisface que  $w_i(x) \in A$ , por lo que las transformaciones envían puntos de  $A$  en  $A$ , lo que implica que los puntos del atractor son periódicos, es decir que siempre que se parta de un punto en el atractor es posible regresar a este mediante transformaciones del IFS.

**Teorema 3.3.4.** *El atractor de un IFS es la clausura de sus puntos periódicos.*

### 3.4. Introducción a los Sistemas Dinámicos

La intención de esta sección es introducir la terminología asociada con los sistemas dinámicos, para posteriormente descubrir cuál es la relación entre estos y los IFS.

**Definición 3.4.1.** *Un sistema dinámico es una transformación  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  sobre un espacio métrico  $(\mathbf{X}, d)$ . Es denotado como  $\{\mathbf{X}, f\}$ . La órbita de un punto  $x \in \mathbf{X}$  es una sucesión  $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ .*

**Definición 3.4.2.** *Sea  $\{\mathbf{X}, f\}$  un sistema dinámico. Un punto periódico de  $f$  es un punto  $x \in \mathbf{X}$  tal que  $f^n(x) = x$  para algún  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Si  $x$  es un punto periódico de  $f$ , entonces un entero  $n$  tal que  $f^n(x) = x, n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  es un periodo de  $x$ , el menor entero es llamado el periodo mínimo del punto periódico  $x$ . La órbita de un punto periódico de  $f$  es llamado el ciclo de  $f$ . El periodo mínimo de un ciclo es el número de distintos puntos contenidos en este. Un periodo de un ciclo de  $f$  es el periodo de un punto en el ciclo.*

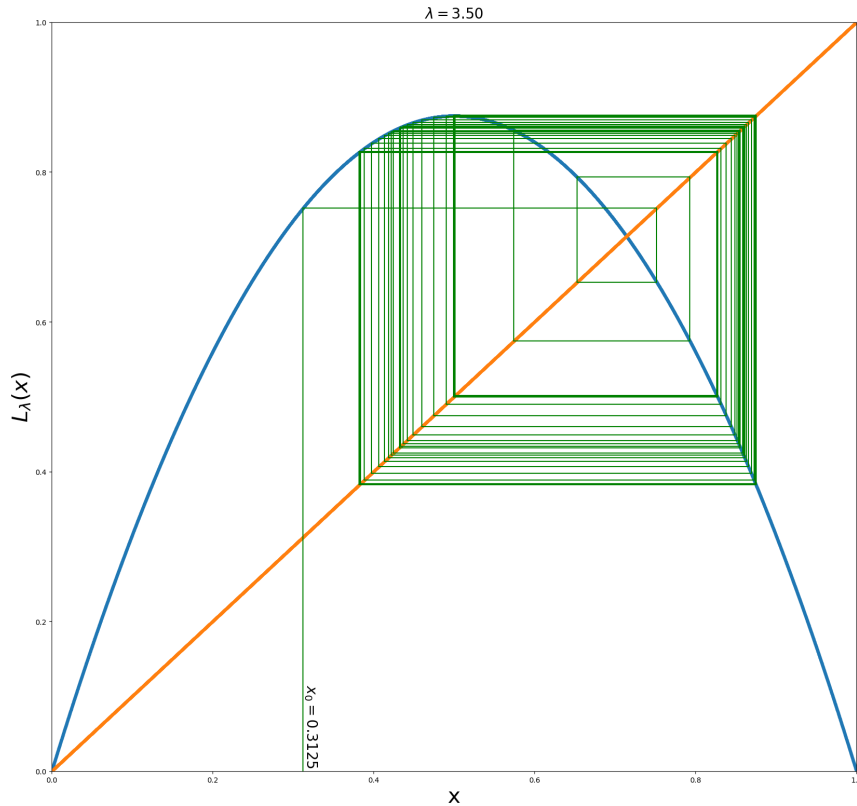
**Definición 3.4.3.** *Sea  $\{\mathbf{X}, f\}$  un sistema dinámico y sea  $x_f \in \mathbf{X}$  un punto fijo de  $f$ . El punto  $x_f$  es un punto fijo atractivo de  $f$  si hay un número  $\epsilon > 0$  tal que la transformación  $f$  envía a la bola  $\mathbf{B}(x_f, \epsilon)$  dentro de sí misma, y además  $f$  es un mapeo contractivo en  $\mathbf{B}(x_f, \epsilon)$ . Aquí  $\mathbf{B}(x_f, \epsilon) = \{y \in \mathbf{X} : d(x_f, y) \leq \epsilon\}$ . El punto  $x_f$  es un punto fijo repulsivo de  $f$  si existen  $\epsilon > 0$  y  $C > 1$  tal que*

$$d(f(x_f), f(y)) \geq Cd(x_f, y) \quad \text{para todo } y \in \mathbf{B}(x_f, \epsilon).$$

**Definición 3.4.4.** *Sea  $\{\mathbf{X}, f\}$  un sistema dinámico. Se le dice punto eventualmente periódico de  $f$  a un punto  $x \in \mathbf{X}$  tal que  $f^m(x)$  es periódico para algún entero positivo  $m$ .*

Para representar órbitas podemos tomar como ejemplo al mapa logístico  $L_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ , donde el parámetro  $\lambda$  tiene un rango  $0 < \lambda \leq 4$ . Las órbitas del sistema dinámico  $\{[0, 1], L\}$  se pueden observar graficando la transformación  $L_\lambda(x)$  y la función lineal  $y = f(x) = x$  como muestra

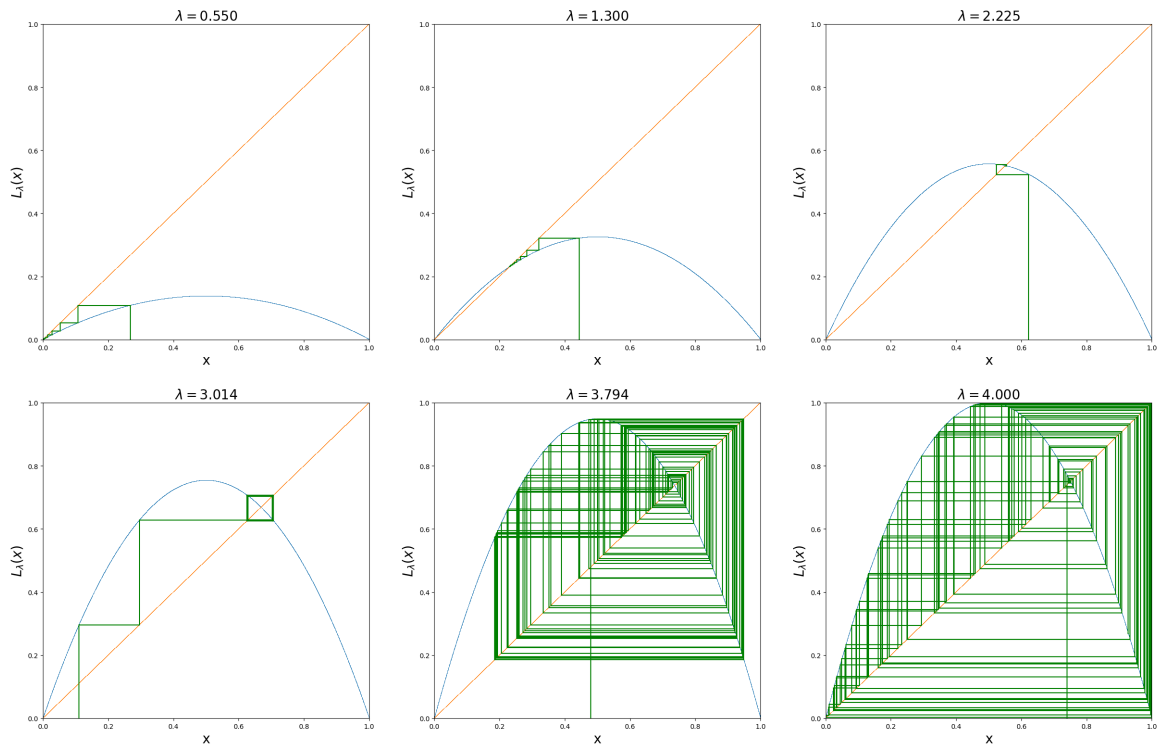
la figura 3.4. La órbita del punto  $x_0 \in [0, 1]$  para el mapa logístico parte de punto  $(x_0, 0)$ , y lo conecta por una línea recta al punto  $(x_0, x_1 = L_\lambda(x_0))$ , nuevamente el punto es conectado por una línea recta horizontal al punto  $(x_1, x_1)$ , y de este al punto a  $(x_1, x_2 = L_\lambda(x_1) = L_{\lambda^2}(x_0))$ , este proceso puede continuar indefinidamente.



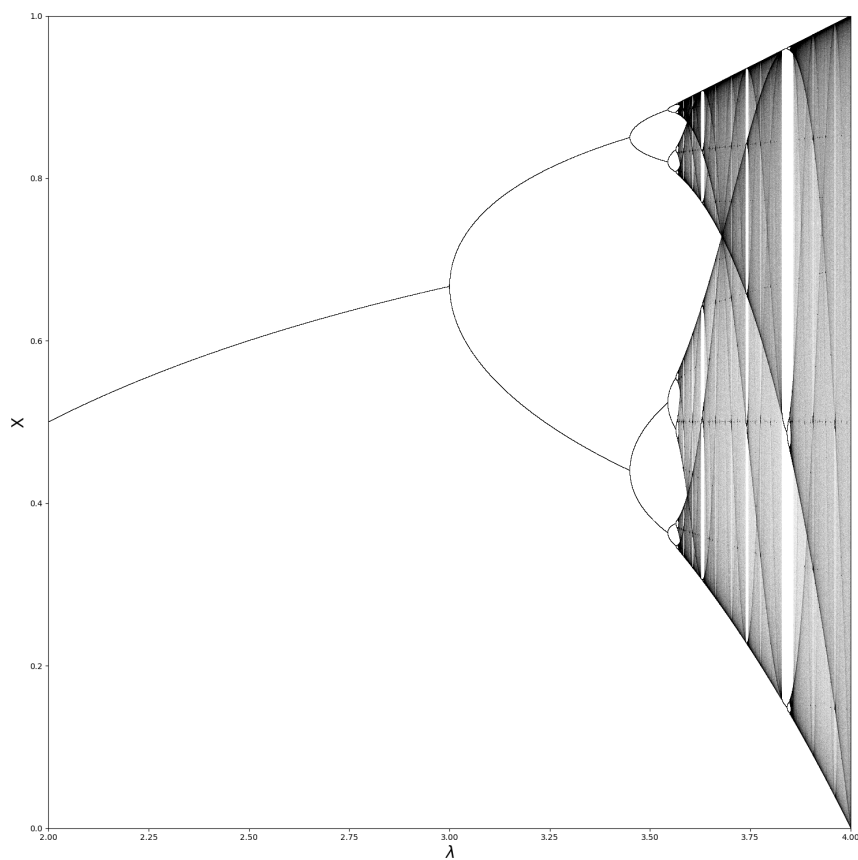
**Figura 3.4:** Diagrama de la órbita del punto  $x_0$  usando el mapa logístico

Algunas veces se llama punto estable a un punto atractivo e inestable a un punto repulsivo. La estabilidad de un punto fijo depende de la pendiente de la curva en los puntos fijos  $x_f = 0$  y  $x_f = 1 - \frac{1}{\lambda}$  (en el caso del mapa logístico), la cual está determinada por  $|L'_\lambda(x_f)| < 1$  para puntos atractivos (estables) o  $|L'_\lambda(x_f)| > 1$  para repulsivos (inestables). En la figura 3.5 se observan diferentes órbitas para diferentes  $\lambda$ 's. En la figura 3.6 Se muestra un diagrama de bifurcación el cual está compuesto por las órbitas para valores de  $\lambda$  entre 2 y 4. Se puede observar que en principio las órbitas están compuestas por un único punto, esto quiere decir que se tienen un punto fijo estable. A medida que  $\lambda$  crece se llega al punto en que las órbitas se bifurcan, por lo que están compuestas por dos puntos, es decir que las órbitas son periódicas con periodo dos. Si  $\lambda$  sigue creciendo se puede observar que las órbitas siguen bifurcándose haciendo que los periodos aumenten. Hay una secuencia de bifurcaciones que aparecen cuando  $\lambda$  crece hasta  $\lambda_\infty \approx 3.57$ , cuando  $0 < \lambda < \lambda_\infty$ ,  $L_\lambda$  tiene diferentes comportamientos: un punto fijo estable en cero, un punto fijo estable diferente de cero o una órbita estable con periodo  $2^q$  donde  $q$  es un entero positivo y para  $\lambda = \lambda_q$  con  $\lambda_q < \lambda_{q+1} < \lambda_\infty$ . Cuando  $\lambda = \lambda_\infty$  el atractor es un conjunto de tipo Cantor, el cual se estudiara en el capítulo 6.

Otro ejemplo de estudio es la transformación de la tienda, este sistema dinámico consiste en



**Figura 3.5:** Órbitas para diferentes valores del parámetro  $\lambda$ . En la primera imagen solo hay un punto fijo atractor en  $x = 0$ , por lo que las órbitas de todos los puntos se van a cero para  $\lambda \leq 1$ , y para valores de  $\lambda > 1$  existen dos puntos fijos  $x_f = 0$  que es evidentemente repulsivo, y  $x_f = 1 - \frac{1}{\lambda}$  el cual es atractor si  $\lambda \leq 3$ , y repulsor para  $3 < \lambda \leq 4$ . Todas las órbitas tienen el mismo número de iteraciones.

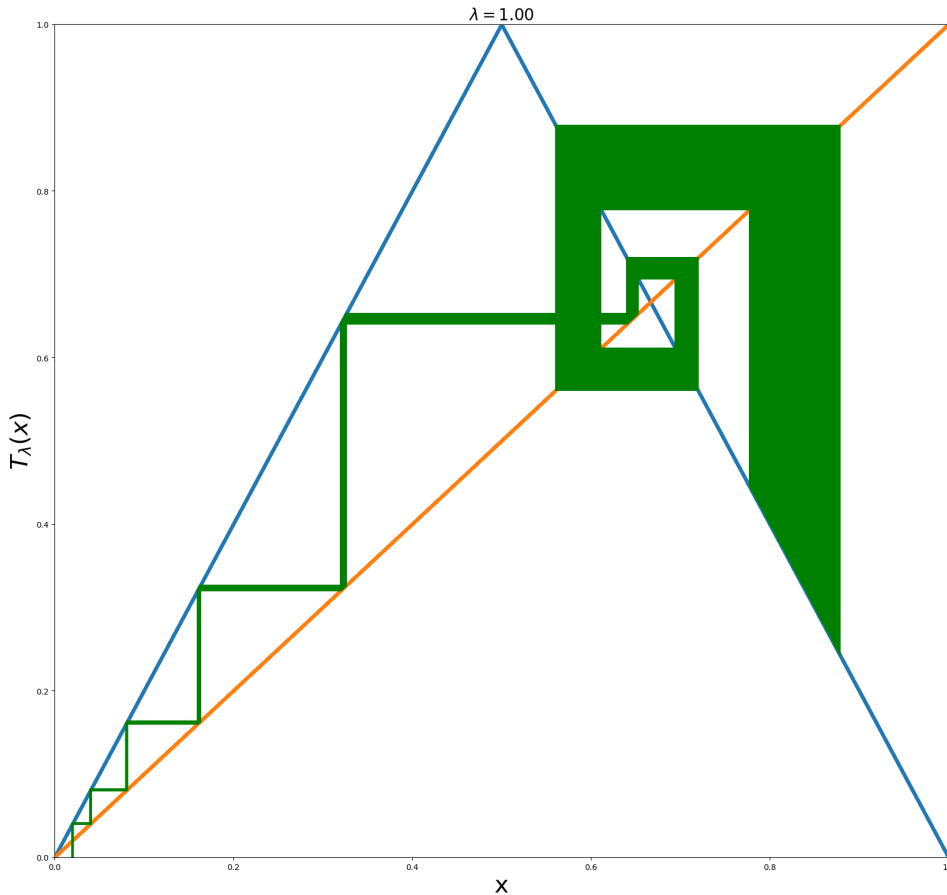


**Figura 3.6:** Diagrama de bifurcación para el mapeo logístico con valores de  $\lambda \in [2, 4]$ .

estirar y doblar los puntos del intervalo  $[0, 1]$ ,  $\{[0, 1], f\}$  donde

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 2\lambda x & \text{sí } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2\lambda(1-x) & \text{sí } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

El comportamiento de una órbita para  $\lambda = 1$  se ilustra en la figura 3.7.



**Figura 3.7:** Transformación de la tienda para un pequeño intervalo. Después de algunas iteraciones el intervalo se empieza a difundir por gran parte del espacio. En esta imagen se puede observar que el sistema es susceptible a las condiciones iniciales y que pequeñas variaciones generan órbitas diferentes, y que además a partir de un conjunto inicial después de algunas iteraciones se interceptará con otros conjuntos del espacio.

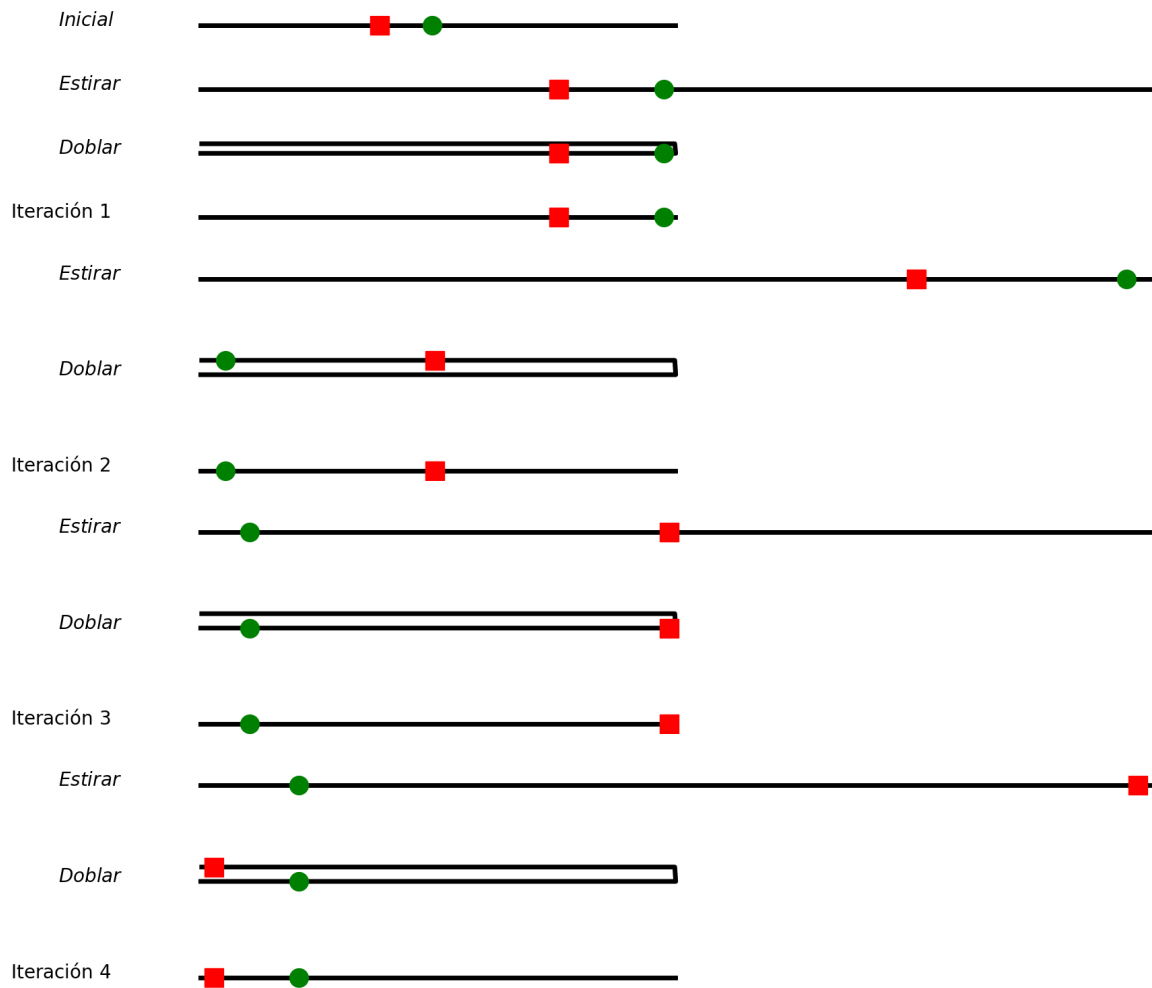
La transformación logística y de la tienda son ejemplos de como un pequeño intervalo puede difundirse en todo el espacio. Si un intervalo abierto inicial  $I$  al ser iterado puede eventualmente llegar a otro intervalo cualquiera  $J \in X$ , se dice que la iteración se comporta como una mezcla, formalmente:

**Definición 3.4.5.** Una función de mezcla es una función  $f$  tal que dado un conjunto  $A$  (de alguna clase de conjuntos) y cualquier otro conjunto  $B$  de la misma clase, existe un número entero  $N$  tal que  $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$  para cualquier  $n > N$ .

Una propiedad de las mezclas es que existe al menos un punto en el espacio tal que  $\{f^n(x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$  es denso, es decir que dado un conjunto abierto  $\mathcal{O}$ , existe un  $n$  tal que  $f^n(x) \in \mathcal{O}$ . Cuando



la función tiene esta propiedad, tiene una órbita densa. Además, cuando una iteración se mezcla por todo un intervalo, como en algunos casos de la transformación de la tienda, la sucesión dada por los puntos  $x_0, x_1, x_2, \dots$  es arbitrariamente cercana a cualquiera de los puntos del espacio o intervalo, y se le llama órbita ergódica, teniendo en cuenta que no todos los puntos pueden ser ergódicos, en el capítulo 5 se complementará este tema. Un ejemplo se muestra en la figura 3.8, la transformación de la tienda estira y dobla los puntos de un determinado intervalo para obtener una mezcla.



**Figura 3.8:** La transformación de la tienda funciona como un proceso de amasar en el que se estira y se dobla un conjunto hasta lograr una mezcla. En la gráfica se ven dos puntos de referencias representados por un cuadrado y un círculo sujetos a cuatro iteraciones de la transformación de la tienda.

De aquí se pueden agregar tres definiciones para identificar sistemas dinámicos caóticos.

**Definición 3.4.6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, Un conjunto  $B \subset X$  es denso en  $X$  si la clausura de  $B$  es igual a  $X$ . Una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  de puntos en  $X$  es densa en  $X$  si para cada punto  $a \in X$ , existe una subsucesión  $\{x_{\sigma_n}\}_{n=0}^{\infty}$  que converge a  $a$ . En particular una órbita  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  de un sistema dinámico  $\{X, f\}$  es denso en  $X$  si la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es densa en  $X$ .

**Definición 3.4.7.** Un sistema dinámico  $\{X, f\}$  es transitivo, si siempre que  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  sean subconjuntos abiertos del espacio métrico  $(X, d)$ , existe un entero finito  $n$  tal que  $\mathcal{U} \cap f^n(\mathcal{V}) \neq \emptyset$ .

**Definición 3.4.8.** *Un sistema dinámico  $\{X, f\}$  es sensible a condiciones iniciales si existe  $\delta > 0$  tal que, para cualquier  $x \in X$  y cualquier bola  $B(c, \epsilon)$  con radio  $\epsilon > 0$ , existe  $y \in B(c, \epsilon)$  y un entero  $n \geq 0$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ .*

**Definición 3.4.9.** *Un sistema dinámico  $\{X, f\}$  es caótico sí; (1) es transitivo, (2) es sensible a condiciones iniciales, y (3) el conjunto de las órbitas periódicas es denso en  $X$ .*

## 3.5. Dinámica en los Fractales

Se resumen algunas de las características dinámicas de los elementos que componen un fractal. Una de ellas es que dado un IFS  $\{\mathbf{X}; w_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  con atractor  $A$ , si el IFS es totalmente desconectado, entonces para cada  $n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , la transformación  $w_n : A \rightarrow A$  es uno a uno.

**Definición 3.5.1.** *Sea  $\{\mathbf{X}; w_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  un IFS totalmente desconectado con atractor  $A$ . La transformación de desplazamiento asociada a  $A$  es  $S : A \rightarrow A$  definida por*

$$S(a) = w_n^{-1}(a) \quad \text{for } a \in w_n(A),$$

donde  $w_n$  es visto como una transformación sobre el atractor  $A$ . El sistema dinámico  $\{A; S\}$  es llamado el sistema dinámico de desplazamiento asociado al IFS.

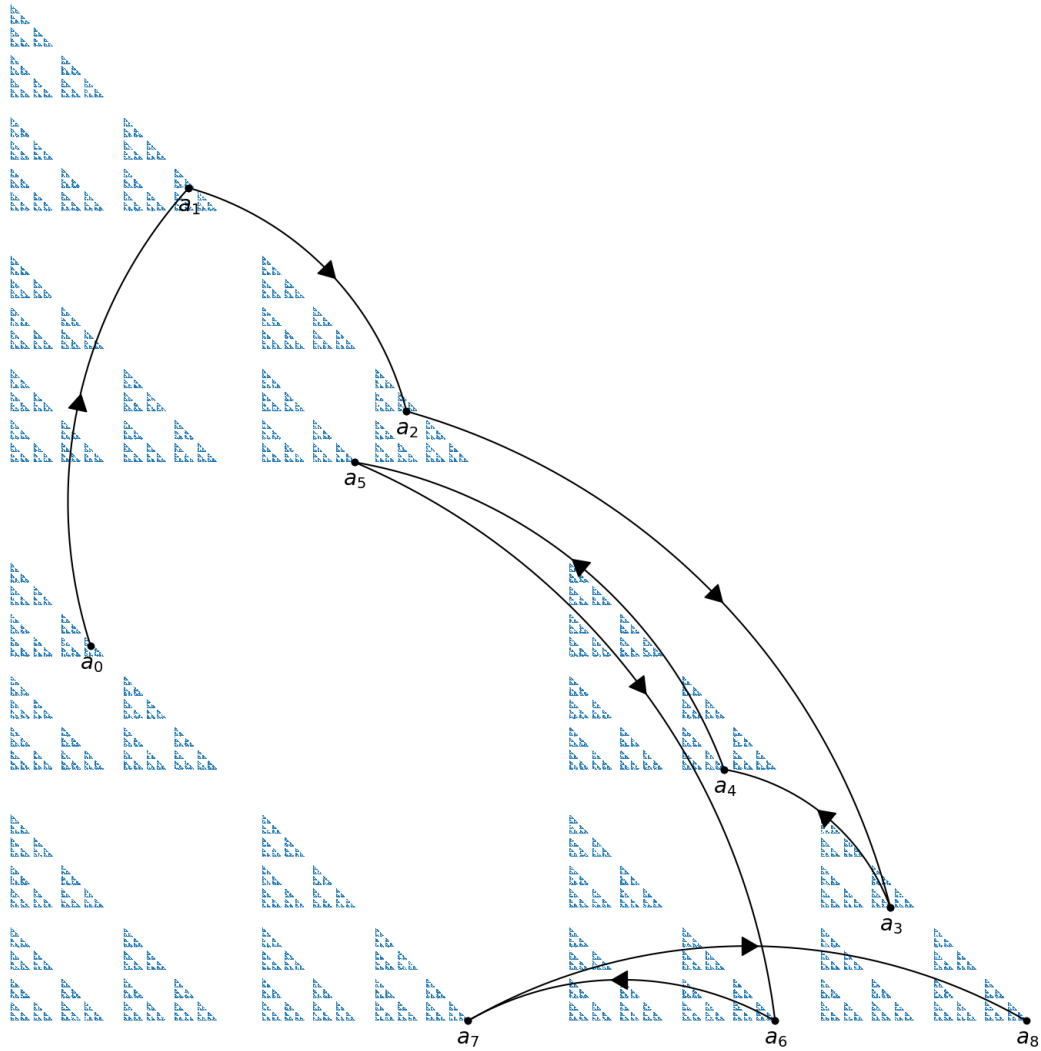
La figura 3.9 muestra un fractal  $A$  totalmente desconectado cuyo IFS está dado por  $\{\blacksquare; w_1, w_2, w_3\}$ , y la órbita generada por la transformación de desplazamiento sobre el punto  $a_0 = \phi(133223212\bar{2}\bar{2})$ , tal que  $S(a_0) = S(\phi(133223212\bar{2}\bar{2})) = a_1 = \phi(33223212\bar{2}\bar{2})$ ,  $a_2 = \phi(3223212\bar{2}\bar{2})$ ,  $a_3 = \phi(223212\bar{2}\bar{2})$ , etc., y donde la función  $\phi : \Sigma \rightarrow A$  es la función asociada al espacio de direcciones. El punto  $a_8$  es un punto fijo repulsivo, puesto que cualquier variación pequeña causa cambios grandes en la órbita.

Se puede mejorar la definición para los IFS sobrepuestos utilizando el concepto de mezcla tratado en la pasada sección. Si  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  es un IFS, se define el conjunto  $M$  como

$$M = \bigcup_{i \neq j} (w_i(A) \cap w_j(A))$$

la intersección de los puntos del IFS. Entonces se cumplen las siguientes propiedades: Interior abierto: Existe un conjunto abierto  $\mathcal{O}$  con respecto a  $A$ , tal que  $\mathcal{O} \subset M$ , Entonces el IFS está sobrepuesto. Direcciones densas: El IFS está sobrepuesto si la órbita  $\phi^{-1}(M)$  en el espacio de direcciones es densa bajo la transformación de desplazamiento. Interiores vacíos: Si  $M$  no tiene un interior, y el IFS está compuesto por transformaciones afines, entonces el IFS está solo tocando.

**Definición 3.5.2.** *Dos espacios métricos  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $f : X_1 \rightarrow X_2$ . Dos subconjuntos  $S_1 \subset X_1$  y  $S_2 \subset X_2$  son topológicamente*



**Figura 3.9:** La órbita de un sistema dinámico en un fractal. Este es un ejemplo de una órbita eventualmente periódica.

equivalentes u homeomorfo, si los espacios métricos  $(S_1, d_1)$  y  $(S_2, d_2)$  son topológicamente equivalentes.  $S_1$  y  $S_2$  son métricamente equivalentes si  $(S_1, d_1)$  y  $(S_2, d_2)$  son espacios métricos equivalentes.

**Definición 3.5.3.** Dos sistemas dinámicos  $\{X_1; f_1\}$  y  $\{X_2; f_2\}$ , son equivalentes o topológicamente conjugados, si existe un homeomorfismo  $\theta : X_1 \rightarrow X_2$  tal que

$$f_1(x_1) = \theta^{-1} \circ f_2 \circ \theta(x_1) \text{ para todo } x_1 \in X_1$$

$$f_2(x_2) = \theta \circ f_1 \circ \theta^{-1}(x_2) \text{ para todo } x_2 \in X_2.$$

o

$$\theta(f_1(x_1)) = f_2(\theta(x_1)) \tag{3.1}$$

En otras palabras, los dos sistemas dinámicos están relacionados por el siguiente diagrama con-

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\theta} & X_2 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ \text{mutativo: } X_1 & \xrightarrow{\theta} & X_2 \end{array} .$$

Consideremos un ejemplo simple que consiste en encontrar el homeomorfismo  $\theta : X_1 \rightarrow X_2$ , al que se le llama función conjugada de las transformaciones

$$f(x) = 1 - \lambda x^2 \quad \text{y} \quad g(y) = ry(1 - y).$$

utilizando el ansatz

$$\theta(y) = ay + b$$

y la ecuación 3.1, por comparación de las potencias se obtiene que

$$\theta(y) = \left(y - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\lambda} [(1 + 4\lambda)^{1/2} + 1]$$

y

$$r = (1 + 4\lambda)^{1/2} + 1.$$

Este es un ejemplo de función conjugada lineal en  $y$ . Se puede decir entonces que tanto la transformación  $f$  como  $g$  son un mapa logístico pero en diferentes espacios. En el capítulo 5 se muestra un ejemplo menos trivial.

**Teorema 3.5.1.** *Sea  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un IFS totalmente desconectado y sea  $\{A; S\}$  el sistema dinámico de desplazamiento asociado. Sea  $\Sigma$  el espacio de direcciones de  $N$  símbolos asociado y sea  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$  definida como*

$$T(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots \quad \text{para todo } \sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots \in \Sigma$$

*Entonces los dos sistemas dinámicos  $\{A; S\}$  y  $\{\Sigma; T\}$  son equivalentes. El homeomorfismo que provee esta equivalencia es  $\phi : \Sigma \rightarrow A$ , Como se define en el teorema 3.3.1. Además,  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_p\}$  es un ciclo repulsivo de periodo  $p$  para  $S$  si, y solo si,  $\{\phi(a_1), \phi(a_2), \phi(a_3), \dots, \phi(a_p)\}$  es un ciclo repulsivo de periodo  $p$  para  $T$ .*

## 3.6. La Sombra de la Dinámica Determinista

El objetivo de esta sección es extender la definición de sistema dinámico de desplazamiento asociado a un IFS totalmente desconectado para cubrir los casos solo tocando y sobrepuesto. Sea  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un IFS, y  $A$  su atractor. Asumiendo que  $w_n : A \rightarrow A$  es invertible para cada

$n = 1, 2, \dots, N$ , pero el IFS no es totalmente desconectado. Se quiere definir un sistema dinámico  $\{A; S\}$  análogo al sistema dinámico de desplazamiento antes definido. Claramente, se debe definir

$$S(x) = w_n^{-1}(x) \quad \text{donde } x \in w_n(A), \text{ pero } x \notin w_m(A) \quad \text{para } m \neq n$$

para cada  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ . Además, Al menos una de las intersecciones  $w_m(A) \cap w_n(A)$  es diferente de vacío para algún  $m \neq n$ . Considerando el sistema dinámico asociado al IFS  $\{[0, 1]; \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\}$ , cuyo fractal está apenas tocando o rozando en  $\frac{1}{2}$ . Se tiene que la transformación  $S(x) = 2x$  para  $x \in [0, \frac{1}{2})$  y  $S(x) = 2x - 1$  para  $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ , y donde se puede definir  $S(\frac{1}{2})$  como 0 o 1. La definición solo afecta al punto  $\frac{1}{2}$  o cualquier órbita que lleve a este, es el caso de los puntos  $x \in [0, 1]$  cuya expansión binaria termine en  $s = \dots 01\bar{1}1$  ó  $s = \dots 10\bar{0}0$ , donde  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n}$  con  $s_n = \{0, 1\}$ .

**Definición 3.6.1.** Sea  $\{X; w_1, w_2\}$  un IFS.  $A$  el atractor del IFS. Asumiendo que ambas transformaciones  $w_1 : A \rightarrow A$  y  $w_2 : A \rightarrow A$  son invertibles. Una secuencia de puntos  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una órbita del sistema dinámico de desplazamiento aleatorio asociado al IFS si

$$x_{n+1} = \begin{cases} w_1^{-1}(x_n) & \text{Cuando } x_n \in w_1(A) \text{ } x_n \notin w_1(A) \cap w_2(A), \\ w_2^{-1}(x_n) & \text{Cuando } x_n \in w_2(A) \text{ } x_n \notin w_1(A) \cap w_2(A), \\ \text{uno de } \{w_1^{-1}(x_n), w_2^{-1}(x_n)\} & \text{Cuando } x_n \in w_1(A) \cap w_2(A), \end{cases}$$

para cada  $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Se usará la notación  $x_{n+1} = S(x_n)$  a pesar de que no está bien definida la transformación  $S : A \rightarrow A$  que cumple las condiciones. También se escribe  $\{A; S\}$  para denotar la colección de posibles órbitas definidas, y llamaremos  $\{A; S\}$  como el sistema dinámico de desplazamiento aleatorio asociado al IFS.

**Definición 3.6.2.** El IFS elevado asociado al IFS  $\{X; w_1, w_2\}$  es el IFS  $\{X \times \Sigma; \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ , donde  $\Sigma$  es el espacio de direcciones de dos símbolos  $\{1, 2\}$ , y

$$\tilde{w}_1(x, \sigma) = (w_1(x), 1\sigma) \quad \text{para todo } (x, \sigma) \in X \times \Sigma;$$

$$\tilde{w}_2(x, \sigma) = (w_2(x), 2\sigma) \quad \text{para todo } (x, \sigma) \in X \times \Sigma.$$

La proyección del atractor del IFS elevado en el espacio original  $X$  es el atractor del IFS original, y la proyección de  $\tilde{A}$  en  $\Sigma$  es el espacio de direcciones también denotado  $\Sigma$ . Recalcando que  $\Sigma$  es equivalente a un conjunto clásico de Cantor, lo que indica que el IFS elevado es completamente desconectado.

**Lema 3.6.1.** Si  $\{X; w_1, w_2\}$  es un IFS con atractor  $A$ , y las transformaciones  $w_1 : A \rightarrow A$  y  $w_2 : A \rightarrow A$  invertibles. Entonces el IFS elevado asociado es completamente desconectado.

**Definición 3.6.3.** Sea  $\{X; w_1, w_2$  un IFS. Las dos transformaciones  $w_1 : A \rightarrow A$  y  $w_2 : A \rightarrow A$  invertibles. Se denota  $\tilde{A}$  al atractor del IFS elevado asociado. Entonces el sistema dinámico de desplazamiento  $\{\tilde{A}, \tilde{S}\}$  asociado con el IFS elevado es llamado el sistema dinámico de desplazamiento elevado asociado con el IFS.

Nótese que

$$\tilde{S}(x, \sigma) = (w_{\sigma_1}^{-1}(x), T(\sigma)) \quad \text{para todo } (X, \sigma) \in \tilde{A},$$

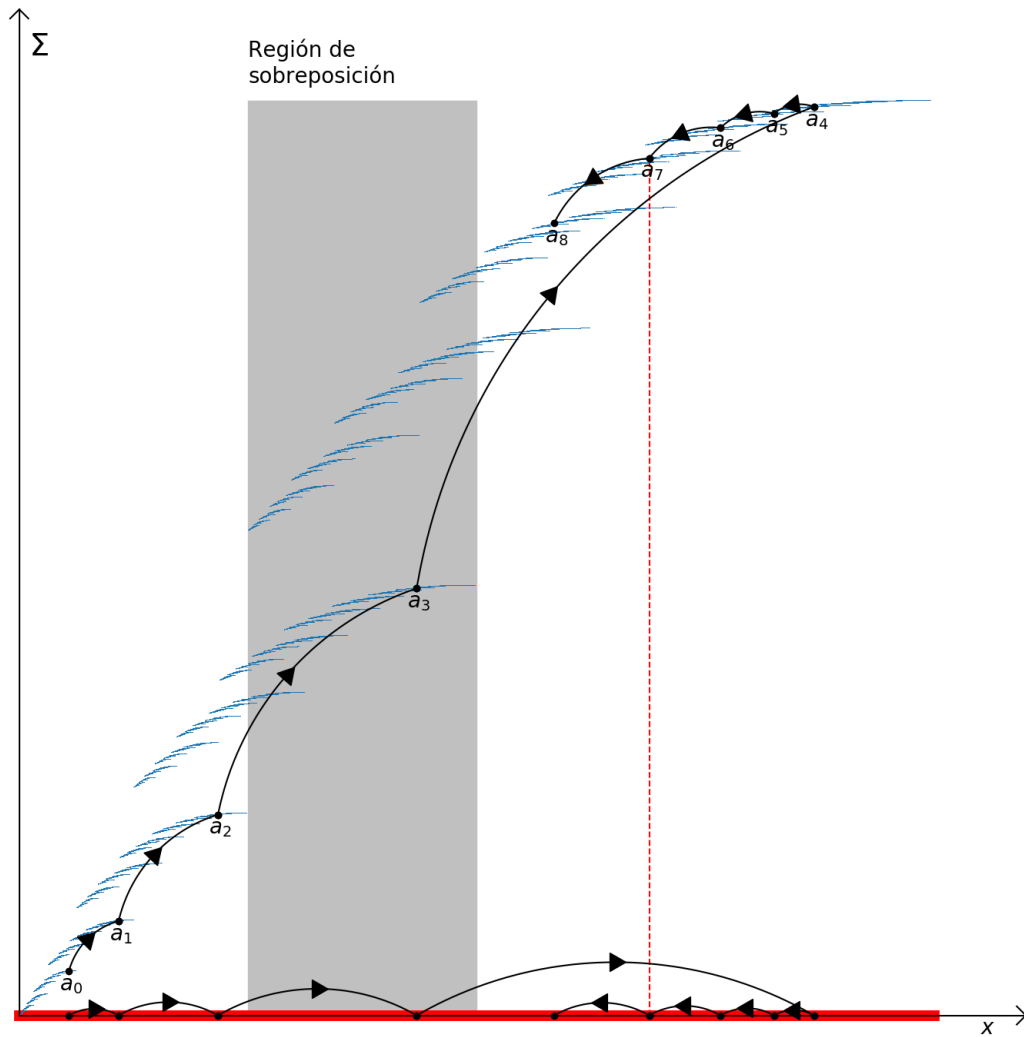
donde

$$T(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\dots \quad \text{para todo } \sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots \in \Sigma.$$

**Teorema 3.6.1** (El teorema de la sombra). Sea  $\{X; w_1, w_2\}$  un IFS de transformaciones invertibles  $w_1$  y  $w_2$  y atractor  $A$ .  $\{x\}_{n=0}^\infty$  cualquier órbita del sistema dinámico de desplazamiento aleatorio  $\{A; S\}$ . Entonces hay una órbita  $\{\tilde{x}\}_{n=0}^\infty$  del sistema dinámico elevado  $\{\tilde{A}; \tilde{S}\}$  tal que la primera componente de  $\tilde{x}_n$  es  $x_n$  para todo  $n$ .

Un ejemplo es el IFS  $\{\mathbb{R}; \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$ . El cual está sobrepuesto en la región  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ . La imagen 3.10 muestra al atractor asociado  $\tilde{A}$ , y sus proyecciones. El Atractor elevado  $\tilde{A}$  es completamente desconectado y la sombra de las órbitas se proyecta sobre el atractor del IFS original  $A$ .

**Teorema 3.6.2.** El sistema dinámico de desplazamiento asociado a un IFS totalmente desconectado de dos o más transformaciones es caótico.



**Figura 3.10:** La figura muestra un IFS elevado compuesto por dos transformaciones  $\{X \times \Sigma; \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ . En la parte inferior del esquema está el atractor  $A = [0, 1]$  el cual se obtiene de la proyección del sistema dinámico en el eje  $x$ , y en el eje  $\Sigma$  un conjunto de Cantor clásico.





# Capítulo 4

## Dimensión Fractal

Existen varios números asociados a los fractales que pueden ser usados para compararlos. Generalmente estos números hacen referencia a la dimensión del fractal. Las dimensiones fractales son importantes porque pueden ser definidas en conexión con la información del mundo real, y pueden ser medidas aproximadamente en experimentos. Por ejemplo, se puede medir la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña, su valor está alrededor de 1.2. Las dimensiones fractales pueden estar relacionadas con objetos como nubes, árboles, costas, plumas, redes neuronales en el cuerpo, polvo en el aire para algún instante de tiempo, ropa, la distribución de frecuencias de la luz reflejadas por una flor, los colores emitidos por el sol, la rugosidad del océano durante una tormenta. Estos números permiten comparar conjuntos del mundo real con fractales obtenidos en el laboratorio, como el atractor de un IFS. Se restringe la atención a subconjuntos compactos de espacios métricos.

### 4.1. La Longitud de las Costas y la Dimensión Fractal

Los intentos realizados para medir la longitud de las costas de los países han llevado a la conclusión de que su longitud es infinita. Los métodos implementados han sido diversos, pero todos han llevado a la misma conclusión (Véase (Mandelbrot, 1982)). Uno de estos métodos consiste en recubrir con bolas de diámetro  $\epsilon$  la costa de tal forma que el número de estas sea el menor posible, se puede obtener una estimación de la longitud si se multiplica el número de bolas por el diámetro. El resultado dependerá de  $\epsilon$ , y cuando  $\epsilon$  tienda a cero la longitud diverge a infinito. La forma explícita de la dependencia de la longitud con  $\epsilon$  fue encontrada por Richardson (1961). En este caso el resultado fue que la longitud satisface una ley de potencias de la forma  $L(\epsilon) = b\epsilon^{-|m|}$ , donde  $L(\epsilon)$  es la longitud y  $b$  y  $m$  constantes. De aquí se obtiene que  $L(\epsilon) = b\epsilon^{-|m|} = N(\epsilon)\epsilon$ , con  $N(\epsilon) = b\epsilon^{-|m|-1} = b(1/\epsilon)^{1+m}$  el número de bolas necesarias para adoquinar la costa. Al término  $D = 1 + m$  se le conoce como dimensión de Hausdorff

de las costas, con lo que  $N(\epsilon) = b(\epsilon)^{-D}$ , y si resolvemos para  $D$  encontramos que

$$D = \frac{\ln N(\epsilon) - \ln b}{\ln(1/\epsilon)}$$

teniendo en cuenta que el término  $\frac{\ln b}{\ln(1/\epsilon)}$  tiende a cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Este ejemplo permite realizar una definición intuitiva de la dimensión de un fractal.

**Definición 4.1.1.** Sea  $A \in \mathcal{H}(X)$  donde  $(X, d)$  es un espacio métrico. Para cada  $\epsilon > 0$  se denota  $\mathcal{N}(A, \epsilon)$  el número más pequeño de bolas cerradas de radio  $\epsilon > 0$  necesarios para cubrir  $A$ . Si

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\}$$

existe, entonces  $D$  es llamada la dimensión fractal de  $A$ . Se usará la notación  $D = D(A)$  para decir que “ $A$  tiene dimensión  $D$ .”

Es fácil ver que la dimensión fractal de un punto es cero, ya que solo se necesita un único cubrimiento (bola cerrada), con lo que para cualquier  $\epsilon$ ,  $\ln \mathcal{N}(A, \epsilon) = \ln \mathcal{N}(x) = \ln 1 = 0$ . Los siguientes dos teoremas simplifican el cálculo de la dimensión fractal.

**Teorema 4.1.1.** Sea  $A \in \mathcal{H}$ , donde  $(X, d)$  es un espacio métrico. Sea  $\epsilon_n = Cr^n$  para los números reales tales que  $0 < r < 1$  y  $C > 0$ , y el entero  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Si

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln(1/\epsilon_n)} \right\}$$

entonces  $A$  tiene dimensión fractal  $D$ .

El siguiente teorema es un caso particular en el que se pasa del tamaño  $\epsilon$  de la cubierta a número de cubiertas de igual tamaño y llevando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 4.1.2.** Sea  $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ , con la métrica Euclidiana. Al cubrir el espacio  $\mathbb{R}^m$  con cajas de lado  $1/2^n$ . Sea  $\mathcal{N}_n(A)$  el número de cajas de lado  $1/2^n$  que interceptan al atractor. Entonces

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(A))}{\ln(2^n)} \right\}$$

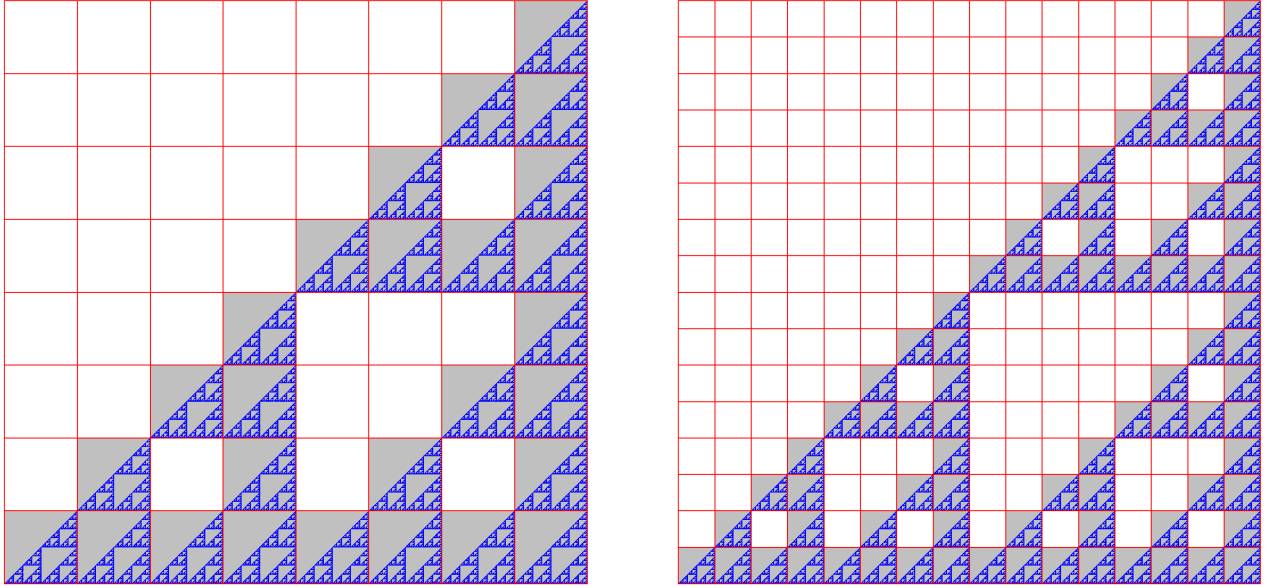
es la dimensión de  $A$ .

Si se considera el triángulo de Sierpinski  $\triangle$ , el número de cajas necesarias para cubrirlo esta dado por  $\mathcal{N}_n(\triangle) = 3^n$ , si el triángulo está construida a partir de un IFS con tres transformaciones y  $n$  al número de iteraciones, por supuesto siempre es posible llegar a un número infinito de cubrimientos,

ya que para los IFS  $n \rightarrow \infty$ , pero no es necesario llegar a estos extremos. El teorema 4.1.2 dice que

$$D(\triangle) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(\triangle))}{\ln(2^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} \right\} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

En donde vemos que desaparece la dependencia de  $n$ .



**Figura 4.1:** El número de cajas necesarias para cubrir al triángulo de Sierpinski depende de  $n$ , y es de la forma  $\mathcal{N} = 3^n$ . En caso de la izquierda el espacio se divide en  $(2^3)^2 = 64$  cajas de lado  $2^{-3}$ , de ellas solo  $3^3$  cubren al fractal. A la derecha espacio se divide en  $(2^4)^2$  cajas de lado  $2^{-4}$  y solo  $3^4$  cubren al fractal. La dependencia con  $n$  desaparece en la dimensión fractal.

## 4.2. Determinación Teórica de la Dimensión Fractal.

En esta sección se extiende la definición de dimensión fractal de la sección anterior por lo que ambas son consistentes entre sí, para un conjunto dado la dimensión fractal obtenida al usar las dos definiciones deben ser la misma. Se presenta algunas propiedades de la dimensión fractal que da un rango de valores permitidos.

**Definición 4.2.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $A \in \mathcal{H}(X)$ .  $\mathcal{N}(\epsilon)$  denota al número mínimo de bolas de radio  $\epsilon$  necesarias para cubrir  $A$ . Si

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup \left\{ \frac{\ln \mathcal{N}(\tilde{\epsilon})}{\ln(1/\tilde{\epsilon})} : \tilde{\epsilon} \in (0, \epsilon) \right\} \right\}$$

existe, entonces  $D$  es llamado la dimensión fractal de  $A$ . Se usa la notación  $D = D(A)$ , y se dice que “ $A$  tiene dimensión  $D$ .”

**Teorema 4.2.1.** Sea  $m$  un entero positivo; y considerando el espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{Euclidiana})$ . La

dimensión fractal  $D(A)$  existe para todo  $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ . Sea  $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$  tal que  $A \subset B$ ; y sea  $D(B)$  la dimensión fractal de  $B$ . Entonces  $D(A) \leq D(B)$ . En particular  $0 \leq D(A) \leq m$ .

El rango de valores que puede tomar la dimensión fractal siempre que se trabaja en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^m$ , la dimensión fractal existe y toma valores entre 0 y  $m$ .

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $m$  un entero positivo; y considerando el espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{Euclidiana})$ . Sea  $A$  y  $B$  pertenecientes a  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ . Sea  $A$  tal que su dimensión fractal está dada por*

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\}.$$

Sea  $D(B)$  y  $D(A \cup B)$  las dimensiones fractales de  $B$  y  $A \cup B$ , respectivamente. Suponiendo que  $D(B) \leq D(A)$ . Entonces  $D(A \cup B) = D(A)$ .

Variaciones pequeñas en los conjuntos no afectan la dimensión fractal. Si la dimensión fractal de un conjunto en  $\mathbb{R}^2$  es dos entonces agregar elementos de  $\mathbb{R}^2$  no afecta la dimensión.

El siguiente teorema fue introducido inicialmente por (Moran, 1946), y permite estimar la dimensión fractal para IFS's solo realizando una inspección sobre el atractor.

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $\{\mathbb{R}^m; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un IFS, y sea  $A$  su atractor. Suponiendo que  $w_n$  es una transformación afín con factor de escala  $s_n$  para cada  $x \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . Si el IFS está totalmente desconectado o solamente tocando entonces el atractor tiene dimensión  $D(A)$ , la cual está dada por la solución única a la ecuación*

$$\sum_{n=1}^N |s_n|^{D(A)} = 1, \quad D(A) \in [0, m]$$

si el IFS está sobrepuesto, entonces  $\bar{D} \geq D(A)$ , donde  $\bar{D}$  es la solución a

$$\sum_{n=1}^N |s_n|^{\bar{D}(A)} = 1, \quad \bar{D}(A) \in [0, \infty).$$

El conjunto de Cantor puede ser generado por dos transformaciones, si estas dos transformaciones tienen el mismo factor de contracción  $r$  tenemos que  $2r^D = 1$  con lo que la dimensión fractal tiene la forma  $D_{Cantor} = \frac{\log 2}{\log 1/r}$ , despejando obtenemos la dependencia del factor de contracción con la dimensión esto es  $r = 2^{-\frac{1}{D}}$ . La figura 4.2 muestra el comportamiento del conjunto de Cantor para valores de  $D = [0, 1]$ .

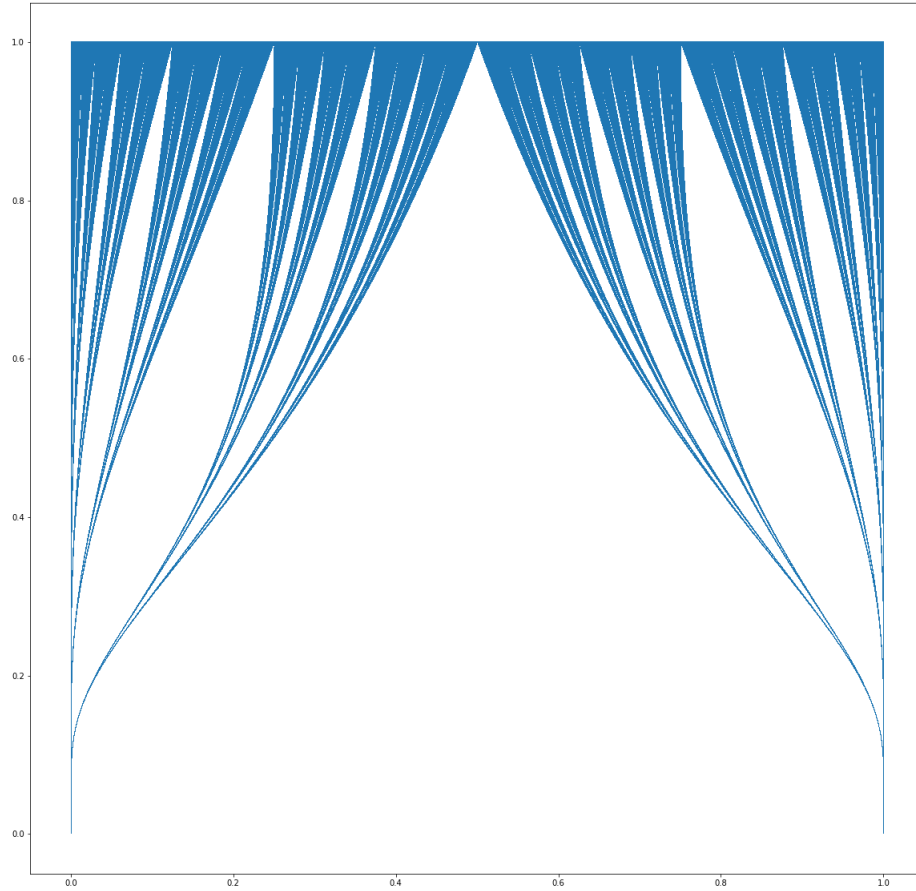


Figura 4.2: El conjunto de Cantor con  $N = 2$  y la dimensión fractal  $D$  variable en el eje vertical.

### 4.3. La Dimensión Fractal de Hausdorff-Besicovitch

La Dimensión de Hausdorff-Besicovitch para subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^m$  introducida en 1918 es otro número real que puede ser usado para caracterizar la compleja geometría de los subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^m$ . Su definición es más compleja y sutil que la de la dimensión fractal. En el espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{Euclidiana})$ , donde  $m$  es un entero positivo, dado  $A \in \mathbb{R}^m$  acotado. Entonces se define el diámetro de  $A$  como

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Sean  $0 < \epsilon < \infty$ , y  $0 \leq p < \infty$ .  $\mathcal{A}$  es una sucesión de subconjuntos  $\{A_i \subset A\}$ , tal que  $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Entonces se define

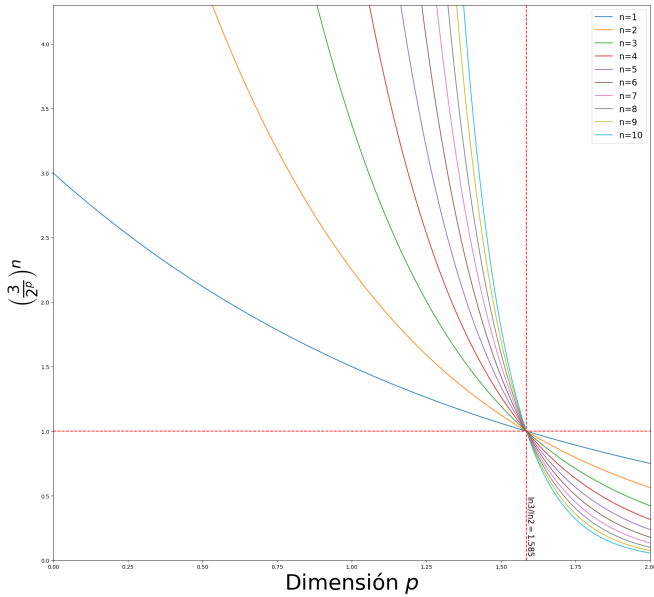
$$\mathcal{M}(A, p, \epsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(A_i))^p : \{A_i\} \in \mathcal{A}, \text{ y } \text{diam}(A_i) < \epsilon \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Entonces, el ínfimo se extiende a todo subconjunto acotado de  $A$  que tenga diámetro menor que  $\epsilon$ .  $\mathcal{M}(A, p, \epsilon)$  es un número en el rango de  $[0, \infty)$ , los posibles valores son cero, finito, o infinito. Se define

$$\mathcal{M}(A, p) = \sup\{\mathcal{M}(A, p, \epsilon) : \epsilon > 0\}.$$

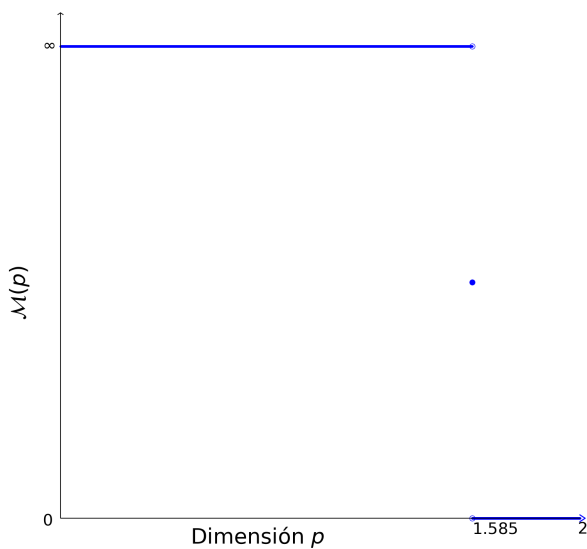
Entonces para cada  $p \in [0, \infty)$  se tiene que  $\mathcal{M}(A, p) \in [0, \infty)$ .

**Definición 4.3.1.** Sea  $m$  un entero positivo y  $A$  un subconjunto acotado del espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{Euclidiana})$ . Para cada  $p \in [0, \infty)$  la cantidad  $\mathcal{M}(A, p)$  es llamada la medida  $p$ -dimensional de Hausdorff de  $A$ .



**Figura 4.3:** Comportamiento de la sucesión en función de  $p$  para diferentes valores de  $n$ . Para  $p < \ln 3 / \ln 2$  la sucesión es creciente, y para valores de  $p > \ln 3 / \ln 2$  la sucesión es decreciente.

Entonces la medida  $p$ -dimensional de Hausdorff  $\mathcal{M}(\triangle, p)$  tiene un valor finito diferente de cero cuando  $2^{np} = 3^n$  en donde el valor de  $p = \ln 3 / \ln 2$ . El comportamiento de la función  $\mathcal{M}(\triangle, p)$  se muestra en la figura 4.4.



**Figura 4.4:** Gráfica de la función  $\mathcal{M}(p)$

Por ejemplo, el triángulo de Sierpinski  $\triangle$  se puede cubrir mínimamente con  $3^n$  triángulos de diámetro  $\text{diam} A_i = d \cdot 2^{-n}$  donde  $d$  es el diámetro de  $\triangle$ , se tiene entonces un posible ínfimo de la forma  $d^p \left(\frac{3}{2^p}\right)^n$ . La figura 4.3 muestra el comportamiento de esta sucesión para  $d = 1$ , cuando  $\left(\frac{3}{2^p}\right)^n = 1$ ,  $p = \frac{\ln 3}{\ln 2}$  y la secuencia es independiente de  $n$ , la línea vertical en  $p = \frac{\ln 3}{\ln 2}$  divide la secuencia en dos regiones. Para valores de  $p < \ln 3 / \ln 2$  esta secuencia es creciente, por lo que el valor mínimo se encuentra para valores de  $n$  fijos, es decir, el ínfimo se encuentra en el diámetro más grande posible dentro de rango  $\epsilon > 0$  dado, y para valores de  $p > \ln 3 / \ln 2$  la sucesión converge a cero para cualquier  $\epsilon$ .

La medida  $p$ -dimensional de Hausdorff es una función que depende de  $p$  cuyo rango se restringe a tres posibles valores; cero, un valor finito, ó infinito.

**Teorema 4.3.1.** Sea  $m$  es un entero positivo. Sea  $A$  un subconjunto acotado del espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{Euclidiana})$ . Para función  $\mathcal{M}(\triangle, p)$  con  $p \in [0, \infty)$ , existe un único número real  $D_H \in [0, m]$  tal que

$$\mathcal{M}(\triangle, p) = \begin{cases} \infty & \text{si } p < D_H \text{ y } p \in [0, \infty) \\ 0 & \text{si } p > D_H \text{ y } p \in [0, \infty) \end{cases}$$

El valor real  $D_H$  es llamado la Dimensión de Hausdorff-Besicovitch del conjunto  $A$  y también es denotado como  $D_H(A)$ . Esta definición también satisface la propiedad  $0 \leq D_H(A) \leq D(A) \leq m$ , ya que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch presupone un recubrimiento del conjunto más óptimo que la dimensión fractal.

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $m$  un entero positivo. Sea  $\{\mathbb{R}^m; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un IFS, y  $A$  su atractor. Sea  $w_n$  con un factor de escala  $s_n$  para cada  $n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . Si el IFS es totalmente desconectado o solo está tocando, entonces la dimensión de Hausdorff-Besicovitch  $D_H(A)$  y la dimensión fractal son iguales. Entonces  $D(A) = D_H(A) = D$ , donde  $D$  es la solución única de*

$$\sum_{n=1}^N |s_n|^D = 1, \quad D \in [0, m].$$

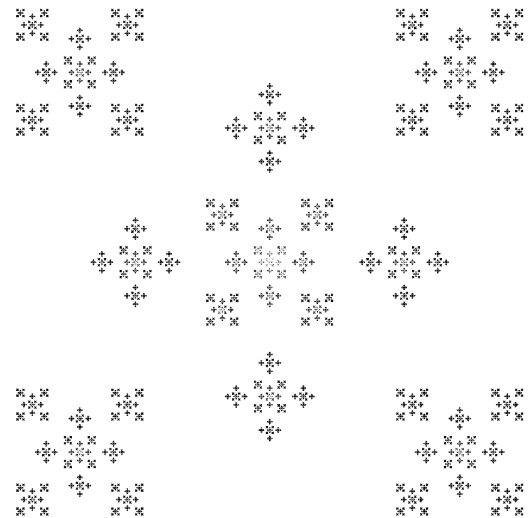
*Si  $d$  es positivo, entonces la medida de Hausdorff-Besicovitch  $\mathcal{M}(A, D_H(A))$  es un número real positivo.*

La demostración a este teorema se puede encontrar en (Hutchinson, 1981). Considerando un IFS de cinco transformaciones tales que los factores de contracción sean  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{4}$  y  $r_5 = \frac{1}{2}$ , en la figura 4.5 se muestra un ejemplo de atractor. La ecuación de Moran se reduce a:

$$4 \left(\frac{1}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p = 4 \left(\frac{1}{4}\right)^{D_H} + \left(\frac{1}{2}\right)^{D_H} = 1$$

tomando  $x = (1/2)^p$  y  $x^2 = (1/4)^p$ , la ecuación se convierte en una ecuación cuadrática de la forma  $4x^2 + x = 1$ , al resolver la ecuación se obtiene que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch:

$$D_H(A) = \frac{\ln\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}.$$



**Figura 4.5:** Ejemplo de atractor para un IFS de cinco transformaciones.

En este capítulo se hace una introducción a la dimensión fractal y en particular la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, la cual está relacionada con la medida de Hausdorff. La dimensión fractal puede ser usada para diferenciar un fractal de otro, pero existen muchos casos en los que hay una misma dimensión para dos fractales diferentes y es necesario recurrir a otras cantidades para diferenciarlos. La dimensión fractal es importante porque permite encontrar una conexión con la información del mundo real, ya que es posible medir la dimensión fractal de muchos objetos que se encuentran en la

naturaleza y cuya forma es irregular, como en el caso de la superficie de los pulmones (2.97) ó cerebro (2.79), la sección transversal de una coliflor (2.8), la frontera del movimiento Browniano (1.333), la costa de irlanda ( $1.22 \pm 0.02$ ), y muchos otros (ver (Wikipedia, s.f.-a)).



# Capítulo 5

## Medidas Invariantes sobre Fractales

En el capítulo dos fue definido un algoritmo de obtención de fractales por medio de IFS con probabilidades al que se le llamó algoritmo de iteración aleatoria. En el capítulo tres se realizó un resumen sobre los sistemas dinámicos y la dinámica en los fractales, y en el capítulo cuatro se definieron algunas medidas, como la dimensión y la medida de Hausdorff, que están asociadas a los fractales. En este capítulo se profundiza el papel que juega la probabilidad para los fractales y como deberían ser estas probabilidades para obtener un resultado específico.

### 5.1. Introducción a la Medida Invariante sobre Fractales

En el capítulo tres se mostró un IFS de cuatro transformaciones que lleva al helecho de Barnsley. Este se obtuvo de dos formas diferentes, en uno de los casos se usó el algoritmo determinista y en el otro el aleatorio, se observó que la distribución de los puntos en los atractores era distinta, y que para obtener una imagen nítida era necesario asignar una probabilidad específica para cada transformación.

**Definición 5.1.1.** *Un sistema de funciones iteradas con probabilidades consiste de un IFS*

$$\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N\}$$

*junto con un conjunto ordenado de números  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ , tal que*

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N = 1 \quad \text{y } p_i > 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N.$$

La probabilidad  $p_i$  esta asociada con la transformación  $w_i$ . La nomenclatura “IFS con probabilidad” es usada para “sistemas de funciones iteradas con probabilidad.” La notación completa para este IFS es:

$$\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

la referencia explícita a las probabilidades pueden ser suprimidas.

En una imagen en blanco y negro las probabilidades  $p_i$  permiten controlar la distribución de los puntos sobre la imagen, si se cuenta la frecuencia relativa de los puntos en cada subconjunto, como por ejemplo  $w_i(\blacksquare)$ , se puede establecer una medida sobre el atractor. Esta medida es invariante y puede ser tomada como el tono de gris de la imagen.

Un ejemplo de un IFS con probabilidad es:

$$\{\mathbb{C}; w_1(z), w_2(z), w_3(z), w_4(z); 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\},$$

donde

$$w_1(z) = 0.5z, \quad w_2 = 0.5z + 0.5,$$

$$w_3(z) = 0.5z + (0.5)i, \quad w_4 = 0.5z + 0.5 + (0.5)i.$$

este IFS puede ser representado por la tabla 5.1.

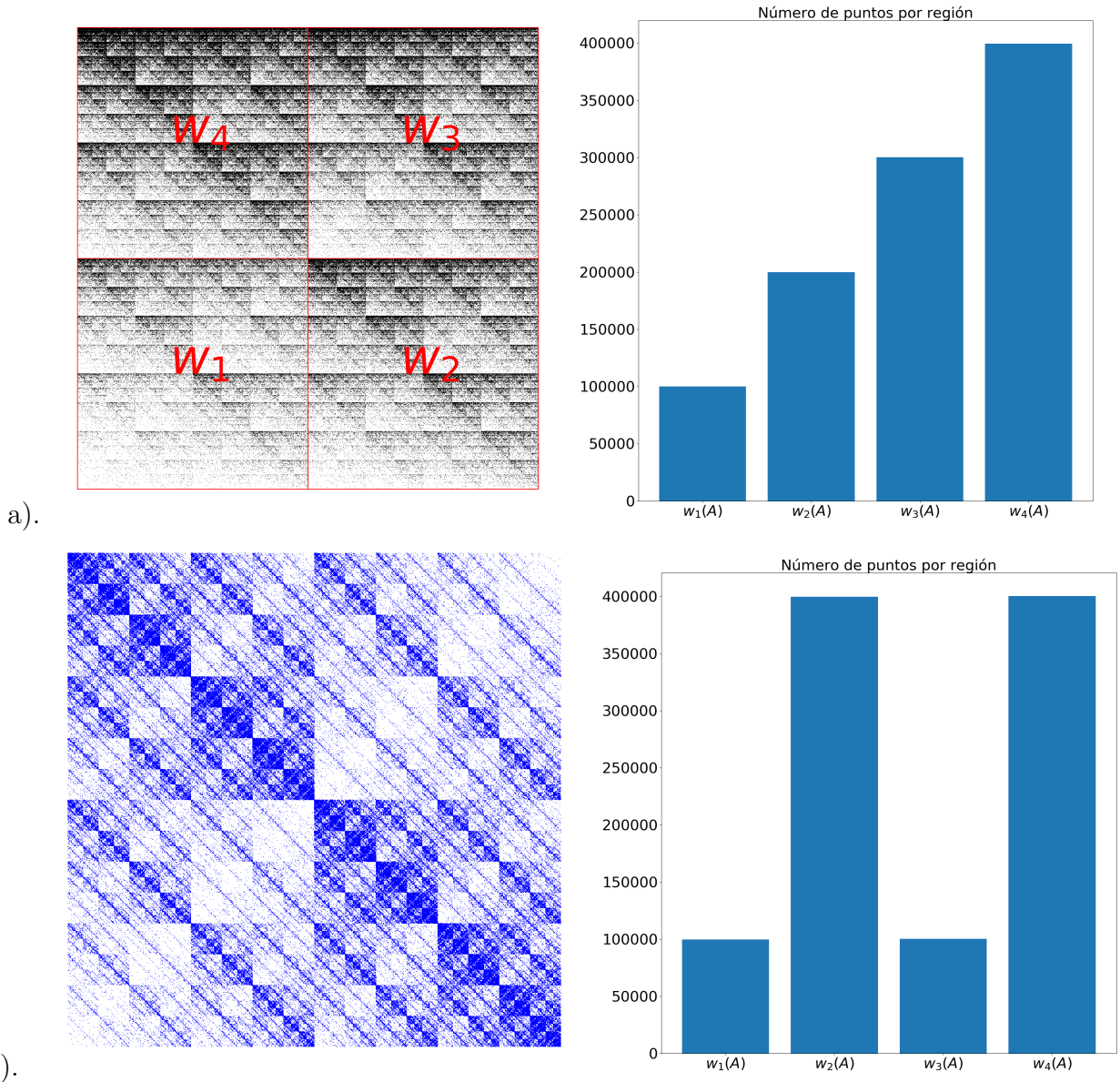
**Tabla 5.1:** Parámetros y probabilidades  $p$  de un IFS

$w$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$p$
1	0.5	0	0	0.5	0	0	0.1
2	0.5	0	0	0.5	0.5	0	0.2
3	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.3
4	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.4

El atractor es el cuadrado unitario  $\blacksquare$ . Aquí es donde interviene el algoritmo de iteración aleatoria. Se escoge un punto inicial,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Una transformación es seleccionada al “azar” del conjunto  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ . La probabilidad de que se seleccione  $w_i$  es  $p_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . La transformación es aplicada a  $z_0$  para generar un nuevo punto  $z_1 \in \mathbb{C}$ . Nuevamente una transformación es seleccionada de la misma manera (independientemente de la selección previa), y se le aplica a  $z_1$  para producir un nuevo punto  $z_2$ . El proceso se repite algún número de veces, el resultado es una sucesión finita de puntos  $\{z_n : n = 1, 2, \dots, num\}$  donde  $num$  es un entero positivo igual al número de iteraciones ejecutadas. Para simplificar asumimos que  $z_0 \in \blacksquare$ , dado que  $w_i(\blacksquare) \subset \blacksquare$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , la “órbita” está en  $\blacksquare$ .

Considerando que ocurre cuando aplicamos el algoritmo con los parámetros de la tabla 5.1, si el número de iteraciones es lo suficientemente grande, el resultado será una imagen en  $\blacksquare$ . Cada pixel del cuadrado  $\blacksquare$  es visitado por la “órbita”  $\{z_n : n = 1, 2, \dots, num\}$ . La razón con la cual es visitada una parte de la imagen en  $\blacksquare$  depende de las probabilidades. Si  $num = 10,000$ , entonces se espera que como la imagen en  $\blacksquare$  solo tiene puntos que están solo tocando, el número de puntos en  $w_1(\blacksquare)$  es aproximadamente 1000, en  $w_2(\blacksquare) \approx 2000$ , en  $w_3(\blacksquare) \approx 3000$ , y en  $w_4(\blacksquare) \approx 4000$ . Esta estimación la corrobora la imagen 5.1, en la que se muestra el resultado para un IFS con los parámetros de

la tabla 5.1, y  $num = 1'000,000$ . En 5.1 b). Se muestra el mismo sistema pero con probabilidades



**Figura 5.1:** a). Imagen generada con el algoritmo de iteración aleatoria aplicado a la tabla 5.1, al lado un diagrama de barras con el número de puntos en la región  $w_i(A)$ . b). Algoritmo de iteración aleatoria aplicado a la tabla 5.1 con diferentes probabilidades. Los atractores obtenidos tienen texturas diferentes.

diferentes. El resultado es una textura diferente a la obtenida en la imagen anterior, pero en cada caso el atractor es el mismo,  $\blacksquare$ . Sin embargo los puntos producidos por el algoritmo de iteración aleatorio caen sobre el atractor  $\blacksquare$  con diferentes frecuencias en diferentes lugares.

Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $\{\mathbf{X}; w_1, \dots, w_N; p_1, \dots, p_N\}$  un IFS con probabilidades. Denotando  $A$  como el atractor del IFS. Existe un número llamado **medida invariante** del IFS, que se denota por  $\mu$ .  $\mu$  asigna “masa” a muchos subconjuntos de  $\mathbf{X}$ . Por ejemplo,  $\mu(A) = 1$  es la masa del atractor y  $\mu(\emptyset) = 0$  es la masa del conjunto vacío. También  $\mu(\mathbf{X}) = 1$ , lo que nos dice que la masa del espacio completo es la misma masa que la del atractor del IFS, que es que toda masa se localiza en el atractor.

No todos los subconjuntos de  $\mathbf{X}$  tienen masa asignada. Los subconjuntos de  $\mathbf{X}$  que tienen masa

son llamados subconjuntos de Borel de  $\mathbf{X}$ , denotados como  $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ . También, si  $\mathcal{O}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbf{X}$ , entonces  $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$ . Entonces hay un número muy grande de conjuntos que tienen masa. Aplicando el algoritmo de iteraciones aleatorias al IFS con probabilidades, se produce una secuencia de puntos  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Sea  $\mathcal{N}(B, n) =$  número de puntos en  $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\} \cap B$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$  entonces, casi siempre,

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\mathcal{N}(B, n)}{(n+1)} \right\}$$

esto es, la masa de la bola  $B$  es proporcional a los puntos producidos por el algoritmo de iteración aleatorio, los cuales viven en  $B$ . (Para ser precisos también se requiere que la masa de la frontera de  $B$  sea cero.)

El ejemplo anterior es una forma empírica de definir probabilidades que se puede extender a cualquier sistema dinámico. Claramente la cantidad  $\frac{\mathcal{N}(B, n)}{(n+1)}$  es una frecuencia relativa, y la medida invariante  $\mu$  es una probabilidad. Se puede hacer una comparación con la mecánica estadística en donde los estados termodinámicos del sistema están descritos por la distribución de los microestados, los cuales son puntos en el espacio de fase que corresponden exactamente a un microestado del sistema completo en la descripción clásica o en el espacio de Hilbert de la mecánica cuántica. Es decir, como en la figura 5.1, el espacio de fase puede ser dividido en celdas con el fin de obtener frecuencias relativas y sus correspondientes probabilidades.

## 5.2. Campos y Sigma-Campo

Se realiza una breve introducción a la teoría de la medida la cual está estrechamente relacionada con las probabilidades. Aunque esta teoría parezca complicada, proviene de problemas reales y prácticos como el estudiado en la sección anterior.

**Definición 5.2.1.** *Sea  $\mathbf{X}$  un espacio. Denotando  $\mathcal{F}$  como una clase no vacía de subconjuntos de un espacio  $\mathbf{X}$ , tal que*

1.  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ ;
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{X} \setminus A \in \mathcal{F}$ .

*Entonces  $\mathcal{F}$  es llamado un campo (también se le suele llamar Álgebra).*

El espacio  $X \in \mathcal{F}$ , puesto que si  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{X} \setminus A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A \cup \mathbf{X} \setminus A = X \in \mathcal{F}$ , y en consecuencia el conjunto vacío también está dentro del campo, ya que  $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{F}$ .

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $X$  un espacio. Sea  $\mathcal{G}$  un conjunto no vacío de subconjuntos de  $X$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de subconjuntos de  $X$  que puede ser construido de muchos conjuntos en  $\mathcal{G}$  usando la operación de unión, intersección, y complemento respecto a  $X$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es un campo.*

La demostración puede ser consultada en el capítulo nueve (Barnsley, 1993).

**Definición 5.2.2.** *El campo en el teorema 5.2.1 es llamado el campo generado por  $\mathcal{G}$ .*

Para  $A \subset X$  donde  $X$  es un espacio,  $\mathcal{F} = \{X, A, X \setminus A, \emptyset\}$  es entonces un campo.

**Definición 5.2.3.** *Sea  $\mathcal{F}$  el campo tal que*

$$A_i \in \mathcal{F} \text{ para } i \in 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Entonces  $\mathcal{F}$  es llamado un  $\sigma$ -campo (sigma-campo).

Dado un campo, existe un mínimo, o más pequeño,  $\sigma$ -campo que lo contiene.

**Teorema 5.2.2.** *Sea  $X$  un espacio y sea  $\mathcal{G}$  un conjunto de subconjuntos de  $X$ .  $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in I\}$  denota el conjunto de todos  $\sigma$ -campo en  $X$  los cuales contienen a  $\mathcal{G}$ . Entonces  $\mathcal{F} = \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$  es un  $\sigma$ -campo.*

**Demostración:** Se debe mostrar que  $\bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$  es un  $\sigma$ -campo y que para cada  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}_\alpha$  contiene al conjunto  $\mathcal{G}$ . Suponiendo que  $A_i$  es un conjunto tal que  $A_i \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ , entonces para cada  $\alpha$ , el conjunto  $A_i \in \mathcal{F}_\alpha$  y entonces  $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_\alpha$ . Suponiendo que  $A = \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ , entonces para cada  $\alpha$ ,  $A \in \mathcal{F}_\alpha$  y  $X \setminus A \in \mathcal{F}_\alpha$ . Esto concluye la demostración.

**Definición 5.2.4.** *Sea  $\mathcal{G}$  el conjunto de subconjuntos de  $X$ . El  $\sigma$ -campo mínimo que contiene a  $\mathcal{G}$ , definido en el teorema 5.2.2, es llamado el  $\sigma$ -campo generado por  $\mathcal{G}$ .*

**Definición 5.2.5.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se denota  $\mathcal{B}$  el  $\sigma$ -campo generado por los subconjuntos abiertos de  $X$ .  $\mathcal{B}$  es llamado el campo de Borel asociado con el espacio métrico. Un elemento de  $\mathcal{B}$  es llamado un subconjunto de  $X$ .*

El siguiente teorema da la motivación a la forma en la que el campo de Borel fue generado.

**Teorema 5.2.3.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Entonces el campo de Borel asociado es generado por un conjunto contable de bolas. (Véase (Barnsley, 1993)).*

## 5.3. Medida

Una medida esta definida sobre un campo. A cada miembro le es asignado un número real no negativo que dice cuál es su “masa” o probabilidad dependiendo del caso. En la literatura se suele distinguir entre medidas sobre campos (premedida) y  $\sigma$ - campos (medida), esta ambigüedad es resuelta por el teorema de extensión de Carathéodory.

**Definición 5.3.1.** Una medida  $\mu$ , sobre un campo  $\mathcal{F}$ , es una función real no negativa  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ , tal que siempre que  $A_i \in \mathcal{F}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$ , con  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  y  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ , tenemos

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

**Definición 5.3.2.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico.  $\mathcal{B}$  denota los subconjuntos de Borel de  $\mathbf{X}$ . Sea  $\mu$  una medida sobre  $\mathcal{B}$ . Entonces  $\mu$  es llamada la medida de Borel.

**Teorema 5.3.1.** Sea  $\mathcal{F}$  un campo y sea  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  una medida. Entonces

1. Si  $B \supset A$ , Entonces  $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$ , para  $A, B \in \mathcal{F}$ ;
2. Si  $B \supset A$ , Entonces  $\mu(B) \geq \mu(A)$ ;
3.  $\mu(\emptyset) = 0$
4. Si  $A_i \in \mathcal{F}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$ , y  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ , Entonces  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ;
5. Si  $\{A_i \in \mathcal{F}\}$  obedece  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ , y si  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ , entonces  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ ;
6. Si  $\{A_i \in \mathcal{F}\}$  obedece  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ , y si  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ , entonces  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$ .

La demostración de estas propiedades puede ser consultada en (Juan H, 2010).

Son importantes las medidas sobre subconjuntos compactos de los espacios métricos tales como  $(\mathbb{R}^2, \text{Euclidiana})$ . El  $\sigma$ -campo subyacente natural es el campo de Borel, generado por subconjuntos abiertos del espacio métrico. El siguiente teorema permite trabajar con la restricción de la medida a cualquier campo que genere el  $\sigma$ -campo.

**Teorema 5.3.2** (Carathéodory).  $\mu$  denota la medida sobre un campo  $\mathcal{F}$ .  $\hat{\mathcal{F}}$  denota al  $\sigma$ -campo generado por  $\mathcal{F}$ . Entonces existe una única medida  $\hat{\mu}$  en  $\hat{\mathcal{F}}$  tal que  $\mu(A) = \hat{\mu}(A)$  para todo  $A \in \mathcal{F}$ .

**Demostración:** Sea  $\mathcal{F}$  un campo de subconjuntos de un espacio  $X$ , y  $\mu$  la medida sobre el campo  $\mathcal{F}$ . La medida exterior  $\mu^*$  está definida para todo  $A \in 2^X$  (donde  $2^X$  es la familia de todos los subconjuntos de  $X$ ) por la formula:

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las cubiertas numerables  $E_n$  de  $A$  tales que  $E_n \in \mathcal{F}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Se dice que un conjunto  $A \subset X$  es  $\mu$ -medible sí para cualquier  $E \in \mathcal{F}$  se cumple

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(E \setminus A).$$

Sea  $\mathcal{M}(\mu)$  la colección de todo los conjuntos  $\mu$ -medibles, entonces  $\mathcal{M}(\mu)$  es un  $\sigma$ -campo que contiene a  $\mathcal{F}$  (se demuestra en (Juan H, 2010) página 67). El  $\sigma$ -campo  $\mathcal{M}(\mu)$  también contiene a  $\hat{\mathcal{F}}$  que es el  $\sigma$ -campo generado por  $\mathcal{F}$ , por lo tanto  $\hat{\mu}$  es una medida exterior para  $\hat{\mathcal{F}}$ . Ya que  $\hat{\mu}$  es una medida definida en  $\mathcal{M}(\mu)$ , entonces se puede demostrar (ver (Juan H, 2010) página 70) unívocamente que  $\hat{\mu} = \mu$  para todo  $\sigma$ -campo de medida finita.

**Teorema 5.3.3.** *Sea una medida  $\mu$  sobre un campo  $\mathcal{F}$  extendida a una medida  $\hat{\mu}$  sobre un  $\sigma$ -campo  $\hat{\mathcal{F}}$  que contiene a  $\mathcal{F}$ . Entonces, para todo  $A \in \hat{\mathcal{F}}$ ,*

$$\hat{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \forall n = 1, 2, \dots \right\}.$$

**Definición 5.3.3.** *Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico, y sea  $\mu$  una medida de Borel. Entonces el soporte de  $\mu$  es el conjunto de puntos  $x \in \mathbf{X}$  tal que  $\mu(B(x, \epsilon)) > 0$  para todo  $\epsilon > 0$ , donde  $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbf{X} : d(y, x) < \epsilon\}$ .*

El soporte de una medida es el conjunto en que vive la medida.

**Teorema 5.3.4.** *Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico, y sea  $\mu$  la medida de Borel. Entonces el soporte de  $\mu$  es cerrado.*

## 5.4. Integración

En esta sección se muestra como realizar integrales con respecto a la medida, con el objetivo de definir la métrica sobre los espacios cuyos puntos son medidas, este espacio métrico es compacto. Sea  $(\mathbf{X}, d)$  es espacio métrico compacto,  $\mu$  la medida de Borel sobre  $\mathbf{X}$ . Sea  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Se explica el significado de las integrales tales que:

$$\int_{\mathbf{X}} f(x) d\mu(x).$$

**Definición 5.4.1.** *Reservamos la notación  $\chi_A$  para la función característica del conjunto  $A \subset \mathbf{X}$ , la cuál está definida como:*

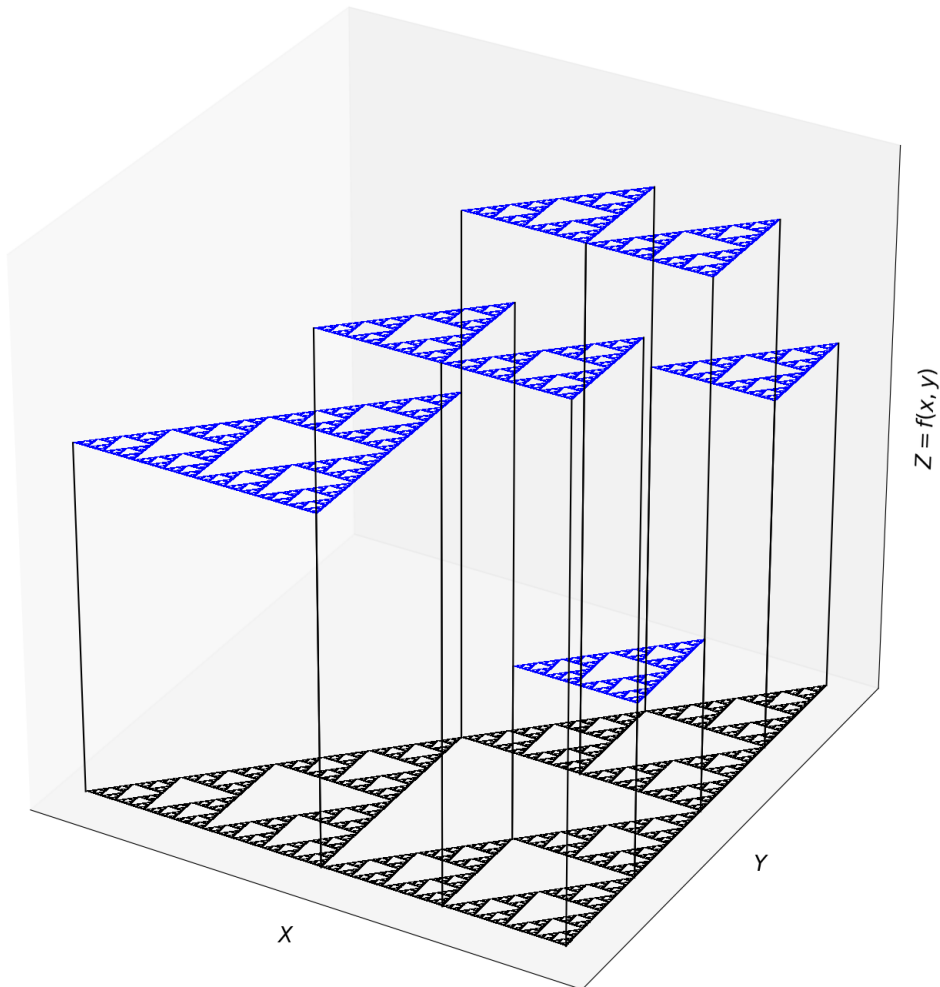
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in A \\ 0 & \text{para } x \in \mathbf{X} \setminus A \end{cases}$$

Una función  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada simple si se puede escribir de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^N y_i \chi_{I_i}(x),$$

donde  $N$  es un entero positivo,  $I_i \in \mathcal{B}$  y  $y_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\cup_{i=1}^N I_i = \mathbf{X}$ , y  $I_i \cap I_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ .

Entonces se puede decir que una función real en un espacio  $X$  cuyo rango es un conjunto finito es simple. En la figura 5.2 se muestra un ejemplo de una función simple en el espacio  $\mathbb{R}^2$ , cuyo dominio es el atractor  $\triangle$  y en el eje  $Z$  la función simple  $f(X, Y)$ .



**Figura 5.2:** Gráfica de una función simple, con un triángulo de Sierpinski como dominio.

**Definición 5.4.2.** La integral (con respecto a  $\mu$ ) de una función simple es

$$\int_{\mathbf{X}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{X}} f d\mu = \sum_{i=1}^N y_i \mu(I_i).$$

Sí  $\mu$  es la medida de Borel sobre el intervalo cerrado  $[0, 1]$  tal que  $\mu(I) = \text{Longitud de } I$ , donde  $I$  es cualquier subintervalo de  $[0, 1]$ . Entonces para una función constante a trozos con discontinuidades



finitas, la integral:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)d\mu(x)$$

donde la integral representa el área bajo la curva  $f(x)$ . A esta medida  $\mu$  se le suele llamar medida de Lebesgue. Como ejemplo se puede considerar la **función de distribución acumulada** o simplemente función de distribución, la cual se define como la probabilidad de que una variable aleatoria  $\xi$  se encuentre en el intervalo  $[0, x]$ , esto es

$$F(x) = Prob(0 \leq \xi \leq x) = \int_0^x \rho(x)dx = \int_{[0,x]} \rho(x)d\mu(x)$$

donde  $\rho(x)$  es la densidad de probabilidad, si esta densidad es uniforme entonces  $F(x) = x$ . Cuando esta distribución es una función simple donde los conjuntos  $I_i$  son de la forma  $I_i = [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$  con  $i = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  la longitud de  $I_i$  es  $\delta_i = 1/N$ , de manera que los valores de  $y_i$  satisfagan la relación  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = 1$ , con lo que la función de distribución acumulada toma la forma

$$F(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k-1} y_i + y_k \left( x - \frac{k-1}{N} \right)$$

donde  $k$  hace referencia al intervalo que contenga el valor  $x$ , es decir,  $x \in [\frac{(k-1)}{N}, \frac{k}{N}]$ . Entonces la función  $F(x)$  es un conjunto de  $N$  rectas que unen los puntos:

$x$	0	1/N	2/N	2/N	...	(N-1)/N	1
$y$	0	$y_1/N$	$(y_1 + y_2)/N$	$\sum_{i=1}^3 y_i/N$	...	$\sum_{i=1}^{N-1} y_i/N$	1

Este resultado nos permite encontrar distribuciones de probabilidad acumulada, en el siguiente capítulo se aplicara este resultado para el conjunto de Cantor.

**Definición 5.4.3.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto,  $\mathcal{B}$  denota el campo de Borel asociado. Sea  $\mu$  la medida de Borel. Una partición de  $\mathbf{X}$  es un conjunto de Borel no vacío,  $\{A_i \in \mathcal{B} : i = 1, 2, \dots, M\}$ , tal que  $\mathbf{X} = \cup_{i=1}^M A_i$ , y  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ .

**Teorema 5.4.1.** Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto,  $\mathcal{B}$  denota el campo de Borel asociado. Sea  $\mu$  la medida de Borel sobre  $\mathbf{X}$ . Sea  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. (i) Sea  $n$  un entero positivo. Entonces existe una partición  $\mathcal{B}_n = \{A_{n,m} \in \mathcal{B} : m = 1, 2, \dots, M(n)\}$  de diámetro  $1/n$ . (ii) Sea  $x_{n,m} \in A_{n,m}$  para  $m = 1, 2, 3, \dots$ , y define una secuencia de funciones simples porque

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{M(n)} f(x_{n,m})\chi_{A_{n,m}}(x) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f(x)$ . (iii) La secuencia  $\{\int_{\mathbf{X}} f_n(x)d\mu\}$  converge. (iv) El

valor del límite es independiente de la secuencia en particular de la partición, y de la elección de  $x_{n,m} \in A_{n,m}$ .

**Definición 5.4.4.** El límite en el teorema 5.4.1 es llamada la integral de  $f$  (con respecto a  $\mu$ ). Se denota mediante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{X}} f_n d\mu = \int_{\mathbf{X}} f d\mu.$$

## 5.5. Densidades Invariantes

En la sección 5.2 sé hablo de las frecuencias relativas obtenidas por un IFS con una condición inicial aleatoria  $z_0$ . Considérese ahora un ensamble de condiciones iniciales  $x_0$  y las frecuencias relativas con las que aparece un valor inicial  $x_0$  que pertenece a un conjunto  $A \subset X$ . El espacio  $X$  puede ser el espacio de fase de las posiciones y las velocidades de un sistema de partículas, para dar un ejemplo físico de sistema dinámico. La medida de la forma

$$\mu_0(A) = \int_A dx \rho_0(x) \quad (5.1)$$

es llamada la medida de probabilidad de  $A$ , en donde  $\rho_0$  está definida sobre todo el espacio y es llamada densidad de probabilidad. Claramente la medida definida en 5.3.1 se toma sobre un conjunto  $A$  mientras que la densidad es una función de las coordenadas  $x$  del espacio de fase. La función  $\rho_0(x)$  como se verá en el siguiente capítulo, puede ser tanto una función continua como una distribución de probabilidad con singularidades, en ese caso la función de distribución acumulada no tiene una función de densidad de probabilidad, por esta razón a menudo se utiliza en lugar de 5.1, la integral

$$\mu_0(A) = \int_A d\mu_0(x). \quad (5.2)$$

Notación equivalente a 5.1.

Dado una transformación  $f$ , se quiere estudiar cuál es el comportamiento de las órbitas para los diferentes valores iniciales  $x_0$ . Sea  $\mu_n$  la distribución de probabilidad correspondiente a la  $n$ -ésima iteración del mapeo  $f$ , en donde  $\mu_n(A)$  es la probabilidad de encontrar el valor  $x_n$  de alguna de las órbitas en el conjunto  $A$  del espacio de fase. Se tiene que, para una medida de probabilidad

$$\mu_n(A) = \int_A dx \rho_n(x)$$

en donde  $\rho_n$  es la densidad de probabilidad, se satisface la relación

$$\mu_{n+1}(A) = \mu_n(f^{-1}(A)). \quad (5.3)$$

en donde  $f^{-1}(A)$  es la preimagen de  $A$ . Es decir, el conjunto de puntos tales que para  $x_n \in X$   $f(x_n) = x_{n+1} \in A$ . Entonces la frecuencia relativa de  $x_{n+1}$  en el conjunto  $A$  debe ser igual a la frecuencia relativa de los  $x_n \in f^{-1}(A)$ . La distribución de probabilidad que no cambia bajo la acción de  $f$  es llamada invariante, y la medida de probabilidad correspondiente satisface la condición

$$\mu_{n+1}(A) = \mu_n(A). \quad (5.4)$$

Una medida de probabilidad que satisface las condiciones 5.3 y 5.4 es llamada medida invariante, en la siguiente sección se extenderá esta noción para IFS's con probabilidad. La densidad de probabilidad asociada a la medida es una densidad invariante, la cual describe un conjunto de puntos cuya densidad no cambia en el tiempo, para el caso del espacio de fase, este conjunto es el estado estacionario y en el caso de los fractales es el atractor del sistema. Se tiene entonces una medida que no depende del número de iteraciones o del tiempo por lo que se denotara a la medida de probabilidad ya no como  $\mu_n$  sino solo como  $\mu$ .

La medida invariantes satisfacen la relación 5.3, para un subconjunto arbitrario  $A \in X$  esta relación en términos de la densidad invariante toma la forma

$$\int_A dx \rho(x) = \int_{f^{-1}(A)} dx \rho(x).$$

Se introduce el valor esperado para una función de prueba  $Q(x)$  con respecto a la densidad invariante  $\rho$  como:

$$\langle Q \rangle = \int_X dx \rho(x) Q(x).$$

$\langle Q \rangle$  es el valor promedio del observable  $Q$ . De manera equivalente, usando la medida de probabilidad se puede escribir

$$\langle Q \rangle = \int_X d\mu(x) Q(x)$$

por lo que se tienen que

$$\langle Q \rangle = \int_X d\mu(x) Q(x) = \int_X d\mu(f^{-1}(x)) Q(x) = \int_X d\mu(x) Q(f(x)).$$

Nótese que la propiedad de invarianza de la medida hace que el promedio de un operador arbitrario  $Q(x)$  sea igual al promedio de  $Q(f(x))$ . En otras palabras, el valor esperado de los observables en un ensamble invariante es invariante ante la acción de la transformación  $f$ .

El promedio temporal del observable  $Q$  con respecto a cierta trayectoria está definido como

$$\bar{Q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q(x_n).$$

Este promedio temporal es un promedio para un valor inicial dado  $x_0$ , es decir, el promedio sobre la órbita.

En el capítulo tres se definieron las mezclas 3.4.5, como transformaciones que toman un conjunto y mediante el uso repetido de la transformación  $f$  se llega a otro conjunto cualquiera del espacio. Estas mezclas tienen la propiedad, como se mencionó, de que las órbitas son arbitrariamente cercanas a cualquier punto del espacio y por esta razón son llamadas órbitas ergódicas. Para una densidad de probabilidad inicial suave arbitraria  $\rho_0(x)$  se tienen que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x) = \rho(x)$$

sí  $f$  es una mezcla, y en donde  $\rho(x)$  es la densidad invariante natural. Esta densidad es algunas veces introducida en la física como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - x_n)$$

donde  $\delta(x - x_n)$  es la función delta de Dirac. Las mezclas implican ergodicidad, pero la ergodicidad no implica necesariamente que la transformación sea una mezcla.

**Definición 5.5.1.** *[Ergodicidad] Una transformación junto con una medida invariante es llamada “ergódica” si para cualquier función de prueba  $Q(x)$  el promedio temporal es igual al ensamble promedio:*

$$\bar{Q} = \langle Q \rangle \tag{5.5}$$

La ergodicidad también significa que el promedio temporal no depende de las condiciones iniciales.

### 5.5.1. Densidades Conjugadas

En el capítulo tres se definieron los espacios métricos conjugados 3.5.3 y utilizamos al mapa logístico como ejemplo, veamos ahora un ejemplo menos trivial, en el que se conjugan las densidades de probabilidad.

El mapa de Ulam es un mapa logístico para  $\lambda = 2$ , este mapeo está topológicamente conjugado con el mapa de la tienda, lo que permite encontrar de forma analítica la densidad invariante natural. Usando la transformación de coordenadas

$$\theta(y) = -\cos\pi y = x$$

en la transformación de Ulam  $f(x) = 1 - 2x^2$ , se puede obtener la transformación conjugada  $g(y)$ , esto es

$$\theta(g(y)) = -\cos \pi g(y) = 1 - 2 \cos^2 \pi y = -\cos 2\pi y = -\cos \pi(2 - 2y).$$

Esto se cumple para el mapa de la tienda

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{sí } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & \text{sí } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

En este caso la densidad invariante  $\rho_x(x)$  de la transformación  $f(x)$  está conectada con la densidad correspondiente a la transformación topológicamente conjugada  $g(y)$  por

$$\rho_y(y) = \rho_x(x) |\det D\theta(y)| \tag{5.6}$$

en donde  $\det D\theta(y)$  es el determinante de la matriz de Jacobi de  $\theta(y)$ . En el caso unidimensional  $\det D\theta(y) = \frac{d\theta}{dy}$ . La ecuación 5.6 es una expresión para la conservación de la probabilidad

$$\rho_y(y)dy = \rho_x(x)dx,$$

para el mapa de la tienda  $\rho_y(y) = 1$ . Al derivar

$$y = \frac{1}{\pi} \arccos(-x),$$

se obtiene la densidad invariante natural para el mapa de Ulam

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi(1-x^2)^{1/2}}.$$

En la figura 5.3 se muestra un histograma normalizado del mapa de Ulam y su densidad invariante.

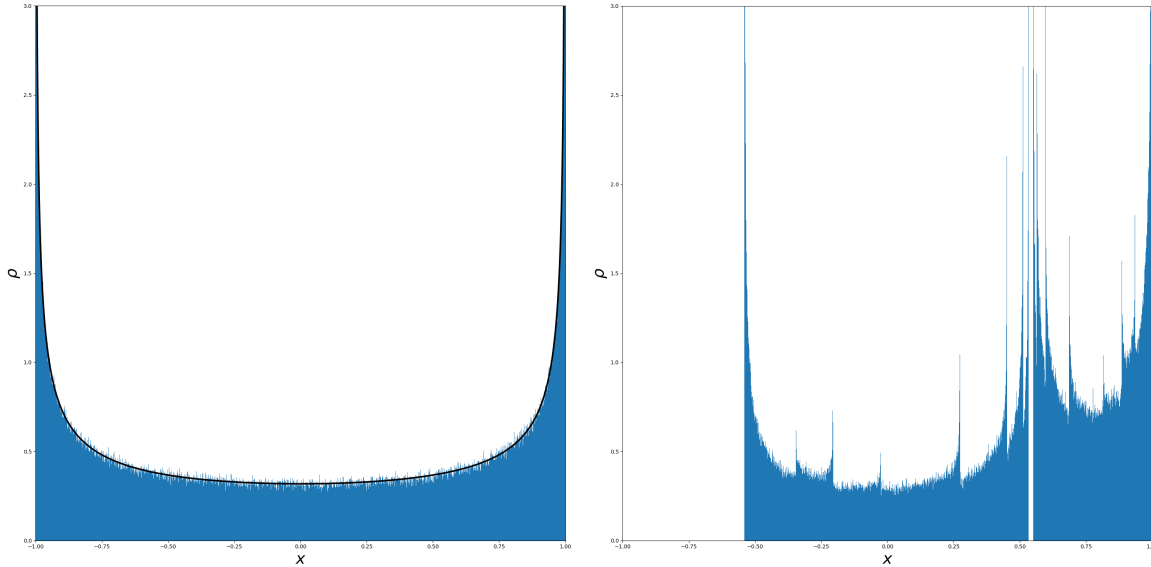
## 5.6. Operador de Perron-Frobenius

Las transformaciones  $f$  en el espacio de fase dan la evolución temporal de las trayectorias, y las frecuencias relativas están relacionadas con la medida  $\mu_n$  por la relación

$$\mu_n \approx \frac{\mathcal{N}(A, n)}{(n+1)} = \int_A dx \rho_n(x),$$

para  $n$  grande. Esta es solo una interpretación intuitiva de la densidad de probabilidad  $\rho_n$ .

**Definición 5.6.1** (Operador de Perron-Frobenius). *Sea  $\rho_n$  la densidad de probabilidad asociada a la*



**Figura 5.3:** En la gráfica de la izquierda un histograma normalizado de una órbita del mapa de Ulam, la órbita tiene un millón de elementos y las cajas tienen un grosor de 0.001. Se compara con la densidad invariante  $\rho$ . En la derecha el histograma para un mapa logístico con  $\lambda = 1.54$  con los mismos parámetros.

medida de probabilidad  $\mu_n$ , el operador lineal  $L$  que actúa sobre el espacio de las densidades, tal que

$$L\rho_n = \rho_{n+1} \quad (5.7)$$

es llamado operador de Perron-Frobenius, este determina la evolución temporal de la densidad de probabilidad.

Restringiéndonos al caso unidimensional se tiene que para un conjunto  $A = [a, b]$  con  $a < b \in \mathbb{R}$ , partiendo de la ecuación 5.4

$$\int_a^b dx \rho_{n+1}(x) = \sum_{\sigma} \int_{f_{\sigma}^{-1}(a)}^{f_{\sigma}^{-1}(b)} dx \rho_n(x).$$

Es importante notar que la preimagen no es única y en principio puede estar compuesta por varios intervalos y puntos. Por ejemplo, el mapa de la tienda siempre tiene dos preimágenes que se pueden distinguir por medio del subíndice  $\sigma$  como si se tratase de una dirección. Sustituyendo la variable  $x$  por  $f_{\sigma}^{-1}(y)$  se tiene que

$$dx = df_{\sigma}^{-1}(y) = \frac{dy}{f'(f_{\sigma}^{-1}(y))}$$

entonces

$$\int_a^b dx \rho_{n+1}(x) = \sum_{\sigma} \int_a^b dy \frac{\rho_n(f_{\sigma}^{-1}(y))}{|f'(f_{\sigma}^{-1}(y))|}.$$

Por lo que la densidad  $\rho_{n+1}$  satisface

$$\rho_{n+1}(x) = \sum_{\sigma} \frac{\rho_n(f_{\sigma}^{-1}(y))}{|f'(f_{\sigma}^{-1}(y))|}.$$

Entonces el operador de Perron-frobenius  $L$  está dado por

$$L\rho(x) = \sum_{\sigma} \frac{\rho(f_{\sigma}^{-1}(y))}{|f'_{\sigma}(f_{\sigma}^{-1}(y))|}$$

sumando sobre todas las preimagenes. De forma compacta se tienen que

$$L\rho(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|f'(x)|}. \quad (5.8)$$

Se puede obtener una forma integral mediante el uso de la propiedad de la función delta de Dirac

$$\int_X \rho(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{\rho(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

en donde la suma se realiza sobre todas las raíces de  $g$ . Con  $g(x) = y - f(x)$  tal que  $x \in f^{-1}(y)$ , se tienen que

$$L\rho(y) = \int_X dx \rho(x) \delta(y - f(x))$$

es la forma integral de la ecuación 5.8. Para el caso  $d$ -dimensional el operador tienen la forma

$$L\rho(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|U(x)|},$$

en donde  $U(x)$  es el determinante Jacobiano de  $f(x)$ .

### 5.6.1. Punto Fijo del Operador de Perron-Frobenius

El operador de Perron-Frobenius puede ser aplicado a una gran variedad de funciones  $\phi(x)$  las cuales no son necesariamente densidades normalizadas. Cualquier función  $\phi$  que sea invariante ante la acción del operador  $L$  es una función invariante, como si se tratara un punto fijo de un sistema dinámico.

Las densidades invariantes satisfacen la relación

$$L\rho(x) = \rho(x).$$

La más importante de estas densidades es la densidad invariante natural, determinemos algunas de estas densidades y su correspondiente operador de Perron-Frobenius.

### Mapa de la Tienda

El mapa de la tienda está dado por la ecuación

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{sí } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & \text{sí } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

con  $X = [0, 1]$ . Para un dado  $y$  se tienen dos preimágenes  $f_\sigma^{-1}(y) = y/2, 1 - y/2$ , con  $|f'(x)| = 2$  se obtiene que

$$L\rho(y) = \rho(y) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{y}{2}\right).$$

para la densidad invariante natural. La solución a esta ecuación funcional es  $\rho(x) = 1$ .

### Mapa de Ulam

Este mapeo fue discutido en la sección anterior, en esta ocasión se usará el operador  $L$  para llegar a los mismos resultados. Se tiene que

$$f(x) = 1 - 2x^2$$

en el espacio  $X = [-1, 1]$ . Su derivada es  $|f'(x)| = 4|x|$ , con preimágenes de la forma

$$f_\pm(y) = \pm \left(\frac{1-y}{2}\right)^{1/2},$$

entonces

$$L\rho(y) = \rho(y) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1-y}\right)^{1/2} \left\{ \rho \left[ \left(\frac{1-y}{2}\right)^{1/2} \right] + \rho \left[ - \left(\frac{1-y}{2}\right)^{1/2} \right] \right\}.$$

Se puede verificar que la solución es la densidad normalizada

$$\rho(y) = \frac{1}{\pi(1-y^2)^{1/2}}.$$

En general, es difícil encontrar las funciones invariantes o puntos fijos del operador de Perron-Frobenius, y solo se han encontrado soluciones analíticas para pocos mapeos o transformaciones caóticas.

### 5.6.2. Espectro del Operador de Perron-Frobenius

Las densidades invariantes pueden ser vistas como funciones propias del operador de Perron-Frobenius con valor propio 1. En general las funciones propias o eigenfunciones satisfacen la ecuación

$$L\phi_\alpha(x) = \eta_\alpha\phi_\alpha(x)$$



donde  $\phi_\alpha$  es una función en el espacio de funciones y  $\eta_\alpha$  sus valores propios. Estas funciones no son necesariamente densidades, puesto que pueden ser funciones negativas y no estar normalizadas, pero las densidades pueden ser una combinación lineal de estas.

La densidad invariante natural es la función propia  $\rho = \phi_0$  correspondiente al valor propio más grande  $\eta_0 = 1$ . También el segundo valor propio más grande  $\eta_1$  tiene significado físico y es responsable de la aproximación asintótica al punto fijo  $\phi_0$ . Asumiendo que hay un conjunto completo de funciones propias  $\phi_\alpha$  del operador  $L$  y una diferencia entre  $\eta_0 = 1$  y  $\eta_1$ . Expresando una distribución inicial  $\rho_0$  arbitraria como una combinación lineal de funciones propias de  $L$ , se tiene

$$\rho_0(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \phi_{\alpha},$$

donde  $c_{\alpha}$  es un coeficiente. Aplicando el operador  $L$   $N$  veces obtenemos que

$$\rho_n(x) = L^N \rho_0(x) = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^N c_{\alpha} \phi_{\alpha}(x) = c_0 \phi_0(x) + R_N,$$

donde  $R \rightarrow 0$  para cuando  $N \rightarrow \infty$  ya que  $|\eta_1| < \eta_0 = 1$ . Por la normalización se tienen que  $c_0 = 1$ . El término restante decae como

$$R_N \sim \eta_1^N$$

cuando  $N \rightarrow \infty$ . Entonces  $\eta_1$  determina la aproximación al estado de equilibrio  $\phi_0$ . Dependiendo del espacio de funciones, el operador  $L$  puede tener un espectro continuo y mientras exista una diferencia entre  $\eta_0$  y  $\eta_1$  se pueden aplicar las consideraciones vistas.

Una transformación es llamada **exponencialmente mezclada** si su aproximación asintótica decae exponencialmente a la densidad invariante  $\phi_0$ , esto es

$$|\rho_N - \phi_0| \sim \exp(-\gamma N) = |\eta_1|^N.$$

en donde  $\gamma^{-1} > 0$  y es llamado “tiempo de relajación”.

## 5.7. El Espacio Métrico Compacto $(\mathcal{P}(\mathbf{X}), d)$

En esta sección se introduce el espacio métrico que justifica lo visto en las anteriores secciones, en este espacio es donde realmente viven los fractales.

**Definición 5.7.1.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Sea  $\mu$  la medida de Borel sobre  $\mathbf{X}$ . Si  $\mu(\mathbf{X}) = 1$ , entonces  $\mu$  está normalizada.*

**Definición 5.7.2.** *Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto. Se denota  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  como el conjunto de*

medidas de Borel normalizadas sobre  $\mathbf{X}$ . La **métrica de Hutchinson**  $d_H$  sobre  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  es definida por;

$$d_H(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_{\mathbf{X}} f d\mu - \int_{\mathbf{X}} f d\nu : f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}, |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \forall x, y \in \mathbf{X} \right\},$$

para todo  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ .

**Teorema 5.7.1.** *Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo. Se denota  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  de conjuntos de medidas de Borel normalizadas sobre  $\mathbf{X}$  y se denota  $d_H$  la métrica de Hutchinson. Entonces  $(\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_H)$  es un espacio métrico compacto.*

## 5.8. Ensamble Microcanónico

Usualmente un ensamble microcanónico es una colección de sistemas en donde la densidad de probabilidad  $\rho$  es constante para cualquier tiempo (Greiner, Neise, y Stöcker, 1995) (Pathria y Beale, 2011). También se puede caracterizar por medio de los valores esperados de los observables, de manera que asumiendo que  $\langle f \rangle$  corresponde al valor en equilibrio para cada observable  $f$ , entonces  $f$  es el llamado ensamble microcanónico o medida microcanónica (de Oliveira y Werlang, 2006), por lo que no se entiende al ensamble como una colección sino como una medida de probabilidad. En esta sección se establecen las analogías entre las medidas de probabilidad, estudiadas anteriormente, y el ensamble microcanónico de la mecánica estadística clásica.

El siguiente es un método usualmente llamado partición de grano grueso, que se usa frecuentemente en la literatura para obtener densidades de probabilidad, y que también se puede usar para otro tipo de sistemas como los cuánticos. Considerando  $\mathcal{N}$  copias idénticas de un sistema cerrado que interactúan entre sí, cada uno de los cuales está caracterizado por un conjunto de parámetros, llamados observable termodinámicos los cuales están constituidos por las macrovariables o los observables macroscópicos, por ejemplo  $(E, V, N)$ , la energía, el volumen y el número de partículas en el sistema (no confundir con número de sistemas  $\mathcal{N}$ ). Cada uno de los sistemas tiene un microestado en un tiempo fijo  $x = (q = (q_1, q_2, \dots, q_{nN}), p = (p_1, p_2, \dots, p_{nN})) \in \Gamma$  donde  $\Gamma$  es el espacio de fase y  $n$  es el número de grados de libertad. El comportamiento de los vectores de posición y momento  $q$  y  $p$  están descritos por las ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

para un hamiltoniano independiente del tiempo  $H(x)$ . En general los microestados son todos diferentes, pero siempre deben estar sobre la superficie de energía, es decir, los microestados están restringidos en un conjunto compacto del espacio de fase, esto se debe a la conservación de la energía.

Se puede hacer una división de la hipersuperficie de energía en elementos de igual tamaño  $\Delta\sigma_i$ , semejante a la que se usó en la imagen 5.1, para encontrar frecuencias relativas. Cada uno de estos elementos de superficie  $\Delta\sigma_i$  tienen un número  $n_i$  de sistemas. Si estos elementos de superficie se hacen lo suficientemente pequeños, cada uno de estos corresponderá exactamente a un microestado. Sin embargo  $\Delta\sigma_i$  se construye de tal manera que cubra  $n_i$  microestados. Entonces se tiene que

$$\mathcal{N} = \sum_i n_i.$$

El número que corresponde a la frecuencia relativa  $n_i/\mathcal{N}$  puede ser interpretado como la probabilidad de que un microestado se encuentre en el elemento  $\Delta\sigma_i$ , para  $\mathcal{N}$  lo suficientemente grande.

El número total de formas en las que se pueden distribuir los sistemas en los elementos de superficie está dado por la combinatoria  $\frac{\mathcal{N}!}{\prod_i n_i!}$ . Si la probabilidad de encontrar un sistema en el elemento de superficie  $\Delta\sigma_i$  es  $\omega_i$ , entonces la probabilidad de tener exactamente  $n_i$  sistemas en  $\Delta\sigma_i$  es  $\omega_i^{n_i}$ , ya que estos sistemas son estadísticamente independientes. Por esta razón, dada una distribución de sistemas  $\{n_i\}$  su probabilidad está dada por

$$\mathcal{N}! \prod_i \frac{\omega_i^{n_i}}{n_i!}.$$

Utilizando este resultado se puede mostrar que la distribución de sistemas más probable sobre la superficie de energía se da para  $n_i$  constante, es decir, para la configuración en la que todas las probabilidades  $\mu_i$  son iguales, en consecuencia la medida de probabilidad  $\mu = \sum_i \mu_i$  es invariante. Es importante en este punto notar que los resultados obtenidos son independientes de las condiciones iniciales.

En el caso de un sistema cerrado  $\rho$  es la densidad del espacio de fase y está dada por

$$\rho_{cm}(x) = \rho_{cm}(q, p) = \frac{1}{\sigma(E)} \delta(E - H(q, p))$$

en donde  $\sigma(E)$  es el área superficial, por lo que  $1/\sigma(E)$  es un factor de normalización. Una de las consecuencias de este resultado es que la medida  $d\mu = dx = dqdp \cdot Const$  es la medida de Lebesgue. A menudo se supone que el espacio de fase accesible es compacto, tal que la medida de Lebesgue esté normalizada y las funciones constantes sean integrables, por lo que la medida  $\mu$  sobre todo el espacio corresponde al volumen del espacio de fase.

Dada una condición inicial  $x_0 = (q, p) \in \Gamma$ , también llamada microestado, se asume que el Hamiltoniano genera una solución única  $x(t) := T^t x_0 = (q(t), p(t))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y el conjunto de puntos  $\{x(t) : t \in \mathbb{R}, x(0) = x_0\}$  es la órbita en el espacio de fase. Se asume que esta órbita está restringida a un conjunto acotado en el espacio de fase, esto es consecuencia de las constantes

de movimiento como la energía y también de las constricciones. El número  $f(x(t))$  describe el valor del observable macroscópico representado por  $f$ , en el instante de tiempo  $t$ . En principio diferentes condiciones iniciales arrojan diferentes valores del observable macroscópico  $f$  para diferentes tiempos, pero sí el sistema está en equilibrio termodinámico la medida debe ser la misma para cada observable, independientemente de las condiciones iniciales y del instante de tiempo en el que se realice la medida; esta afirmación hace parte de los fundamentos de la mecánica estadística. Medir de forma precisa el valor de  $f(x(t))$  no es posible, ya que se deben conocer en detalle tanto las posiciones como los momentos de todas las partículas, entonces se supone que la medida es un promedio temporal de  $f$ . Para un intervalo de tiempo  $[t_0, t_0 + t]$  el promedio temporal está dado por

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} f(T^s x) ds.$$

Dado que los intervalos de tiempo macroscópicos son extremadamente grandes en comparación con los microscópicos, en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene que

$$\bar{f}(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} f(T^s x) ds$$

este límite no depende de las condiciones iniciales. Argumentando que para un intervalo de tiempo lo suficientemente largo el sistema visita (o al menos pasa arbitrariamente cerca) todos los conjuntos abiertos del espacio de fase  $\Gamma$  durante el proceso de medida, es razonable decir que este límite coincide con el valor promedio de  $f$  sobre  $\Gamma$ , definiendo este promedio como

$$\langle f \rangle := \int_{\Gamma} f(x) dx$$

donde  $dx$  corresponde a la medida de Lebesgue. Entonces regresamos a la hipótesis ergódica 5.5.1.

En cuanto al comportamiento temporal de la densidad, este está dado por el operador de Perron-Frobenius, tal que si  $L^t \rho_{t=0} = \rho_t(x)$  corresponde a la densidad en un tiempo  $t$ , entonces

$$\int_A \rho_t(x) dx$$

es el número promedio de microestados en el conjunto  $A \in \Gamma$  en el instante  $t$ ; por lo que

$$\int_{\Gamma} \rho_t(x) dx = \mu(\Gamma) = 1$$

para una medida normalizada. El valor de un observable en un tiempo  $t$  está dado por

$$\int_{\Gamma} f(x) \rho_t(x) dx.$$

Como condición de equilibrio se dice que

$$\frac{d\rho_t(x)}{dt} = 0$$

la derivada total de la densidad del espacio de fase desaparece a lo largo de la trayectoria del espacio de fase, lo que se conoce como **teorema de Liouville**. Esto no es extraño teniendo en cuenta los resultados obtenidos al principio de la sección en donde  $\rho = \rho_t = \text{constante}$ , lo que es equivalente a la invarianza de la medida de Lebesgue.

Se concluye entonces que en equilibrio la medida de probabilidad debe ser invariante con respecto a la dinámica, y que el ensamble microcanónico se puede definir así:

**Definición 5.8.1.** *Sea  $L^t$  el operador que denota el flujo Hamiltoniano. El ensamble microcanónico es la medida invariante  $dx$ .*

## 5.9. Sistemas Dinámicos Disipativos

En la sección anterior se estudió un tipo de sistema cerrado, el cual no intercambia energía con el exterior, por lo que su volumen en el espacio de fase se mantiene constante. Pasamos ahora a considerar sistemas en los cuales el volumen del espacio de fase disminuye hasta desaparecer para tiempos relativamente largos. Estos sistemas reciben el nombre de disipativos, a los que también se les puede asignar una medida de probabilidad invariante  $\mu$  y una densidad invariante  $\rho$  que satisface la ecuación de Liouville estacionaria (Ramshaw, 2019).

La probabilidad de encontrar un microestado en un conjunto  $A$  del espacio de fase  $\Gamma$  está dada por  $\mu(A)$ . En general  $A$  es una región que depende del tiempo por lo que la medida  $\mu$  también debe depender del tiempo, esta medida dependiente del tiempo se denota como  $\mu_t$ . El comportamiento de  $\mu_t$  está determinado por la relación

$$\int_{A(t)} d\mu_t(x) = \int_A d\mu_0(x_0) \tag{5.9}$$

suponiendo  $A$  a tiempo  $t = 0$ ,  $A(t)$  es el conjunto producto del cambio en el tiempo de  $A$ , explícitamente  $T^t(A) = A(t)$ . Entonces la probabilidad de que  $x(t) \in A(t)$  es la misma que la probabilidad de que  $x_0 \in A$ . Derivando 5.9 con respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A(t)} d\mu_t(x) = \frac{\partial}{\partial t} \int \chi_{A(t)}(x) d\mu_t(x) = 0. \tag{5.10}$$

Como se ha mencionado, la medida y la densidad pueden ser tanto funciones absolutamente continuas

como distribuciones. 5.9 se puede escribir de formas equivalente

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \rho_t(x) \chi_{A(t)}(x) d\mu_t(x) = 0.$$

La función característica  $\chi_{A(t)}(x)$  es una función constante, por lo que  $\frac{d\chi_{A(t)}(x)}{dt} = 0$ , entonces aplicando la regla de la cadena se tienen que

$$\frac{\partial \chi_{A(t)}(x)}{\partial t} = -\dot{x} \cdot \nabla \chi_{A(t)}(x),$$

en donde  $\nabla \chi_{A(t)}(x)$  es una distribución compuesta por funciones delta de Dirac. Sustituyendo en 5.10 e integrando por partes, se tiene que

$$\int_{A(t)} dx \left\{ \frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_t(x) \dot{x}] \right\} = 0$$

de donde se infiere que

$$\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_t(x) \dot{x}] = 0$$

a excepción de conjuntos de medida de Lebesgue igual a cero. Esta es una ecuación de Liouville para una densidad de probabilidad que no es necesariamente una función absolutamente continua.

La ecuación de Liouville se puede escribir de la forma

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \dot{x}$$

donde  $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \cdot \nabla$  es la derivada convectiva a lo largo del espacio de fase. Los sistemas disipativos se pueden definir también por la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int dx \rho \nabla \cdot \dot{x} < 0.$$

Mientras  $\nabla \cdot \dot{x} < 0$  sea finita la densidad  $\rho$  diverge exponencialmente con un tiempo característico  $\frac{1}{|\nabla \cdot \dot{x}|}$ .

Cuando la medida invariante definida por la ecuación 5.9 no dependa del tiempo, se tiene que

$$\int_{A(t)} d\mu(x) = \int_A d\mu(x_0)$$

donde  $\mu_t = \mu_0 \equiv \mu$ , lo que es equivalente a  $\mu(A(t)) = \mu(A)$ , Sí  $\mu$  es una medida independiente del tiempo, entonces la correspondiente probabilidad también lo es, por lo que  $\rho_t(x) = \rho(x)$  y su derivada

parcial con respecto al tiempo desaparece y se tiene que la ecuación de Liouville se reduce a

$$\nabla \cdot [\rho(x)\dot{x}] = 0,$$

la cual es válida para medidas absolutamente continuas como para singulares o distribuciones.

## 5.10. Operador de Markov: Una Contracción sobre $\mathcal{P}(\mathbf{X})$

Se denota  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico completo.  $\mathcal{B}$  denota el subconjunto de Borel de  $\mathbf{X}$ . Sea  $w : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  continua. Entonces uno puede probar que  $w^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ . Se deduce que si  $\nu$  es una medida de Borel normalizada sobre  $\mathbf{X}$  entonces también lo es  $\nu \circ w^{-1}$ . A su vez, esto implica que la siguiente función definida toma  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  en sí misma.

**Definición 5.10.1.** *Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto y sea  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  el espacio de medidas de Borel normalizada sobre  $\mathbf{X}$ . Sea*

$$\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

*un IFS con probabilidades. El operador de Markov asociado con el IFS es la función  $M : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  definido por;*

$$M(\nu) = p_1\nu \circ w_1^{-1} + p_2\nu \circ w_2^{-1} + \dots + p_N\nu \circ w_N^{-1}$$

*para todo  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ .*

**Lema 5.10.1.** *Se denota a  $\mathbf{M}$  como el operador de Markov asociado con un IFS, como en la definición 5.10.1. Sea  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  o una función simple o una función continua y  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ . Entonces*

$$\int_{\mathbf{X}} f d(\mathbf{M}(\nu)) = \sum_{i=1}^N p_i \int_{\mathbf{X}} f \circ w_i d\nu.$$

**Teorema 5.10.1.** *Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto. Sea*

$$\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

*un IFS con probabilidad. Sea  $s \in (0, 1)$  un factor contractivo para el IFS. Sea  $\mathbf{M} : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  es el operador de Markov asociado. Entonces  $\mathbf{M}$  es un mapeo de contracción, con factor de contracción  $s$ , con respecto a la métrica de Hutchinson sobre  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ . Que es,*

$$d_H(\mathbf{M}(\nu), \mathbf{M}(\mu)) \leq s d_H(\nu, \mu) \quad \text{para todo } \nu, \mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X}).$$

En particular, hay una única medida  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  tal que

$$\mathbf{M}(\mu) = \mu.$$

**Demostración:**  $L$  denota al conjunto de funciones continuas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \forall x, y \in X$ . Entonces

$$\begin{aligned} d_H(M(\nu), M(\mu)) &= \sup \left\{ \int f d(M(\mu)) - \int f d(M(\nu)) : f \in L \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i d\mu - \int \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i d\nu : f \in L \right\}. \end{aligned}$$

Sí  $\tilde{f} = s^{-1} \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i$ , entonces  $\tilde{f} \in L$ . Sí  $\tilde{L} = \{\tilde{f} \in L : \tilde{f} = s^{-1} \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i, \text{ para algún } f \in L\}$ . Entonces se puede escribir que  $d_H(M(\nu), M(\mu)) = \sup \left\{ s \int \tilde{f} d(M(\mu)) - s \int \tilde{f} d(M(\nu)) : \tilde{f} \in \tilde{L} \right\}$  ya que  $\tilde{L} \subset L$ , por consiguiente:

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq s d_H(\nu, \mu).$$

**Definición 5.10.2.** Se denota  $\mu = \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i$  al punto fijo del operador de Markov, propuesto por el teorema 5.10.1.  $\mu$  es llamada la medida invariante del IFS con probabilidades.

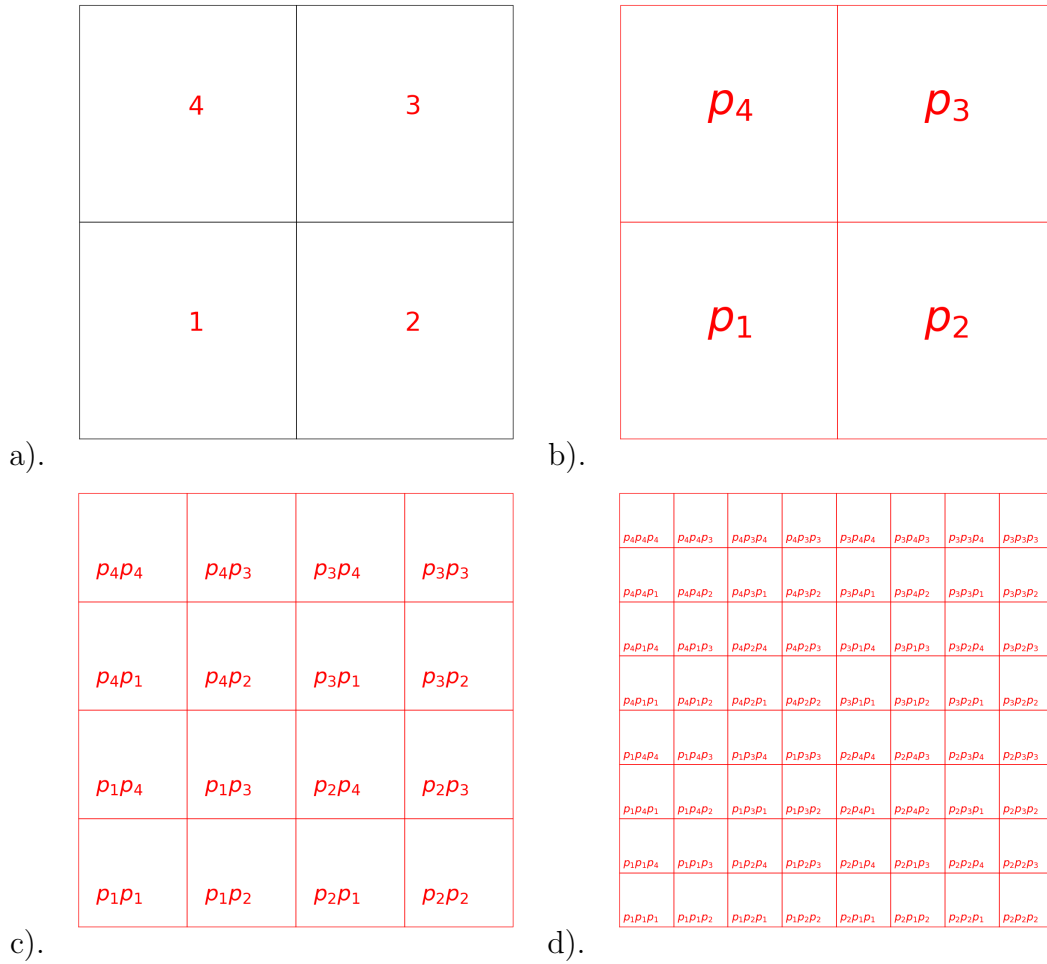
Esta medida invariante se discutió informalmente en la primera sección del capítulo.

Considerando el IFS con probabilidad

$$\{\blacksquare \subset \mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4; p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

correspondiente al collage que se muestra en la figura 5.4 a), cuatro transformaciones de contracción  $w_i$  con factor de contracción  $s = 1/4$  ocupan todo el cuadrado unitario  $\blacksquare$ . Sí  $\mathbf{M}$  es el operador de Markov asociado, y  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ , tal que  $\mu_0(\blacksquare) = 1$ . Por ejemplo,  $\mu_0$  podría ser la medida uniforme para la cual  $\mu_0(S)$  es el área de  $S \in \mathcal{P}(\blacksquare)$ . Observando el comportamiento de la sucesión de medidas  $\{\mu_n = \mathbf{M}^n(\mu_0)\}$ , se puede ver que sí la medida  $\mu_1 = \mathbf{M}(\mu_0)$  es tal que  $\mu(w_i(\blacksquare)) = p_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , las medidas asociadas a las regiones  $i = 1, 2, 3, 4$  dependen del conjunto de probabilidades como se ilustra la figura 5.4 b). Se deduce que  $\mu_2 = \mathbf{M}^2(\mu_0)$  satisface  $\mu(w_i \circ w_j(\blacksquare)) = p_i p_j$  para  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , y que la distribución de medidas (probabilidades) es como la que se muestra en la figura 5.4 c), este proceso se puede realizar indefinidamente de manera que las regiones se reducen y las medidas son nuevamente redistribuidas. Rápidamente se entiende la idea del proceso, cuando el operador de Markov es aplicado, la “masa” en la celda  $\blacksquare_{i,j\dots k} = w_i \circ w_i \circ \dots \circ w_k$  es redistribuida entre las celdas más pequeñas  $w_1(\blacksquare_{i,j\dots k})$ ,  $w_2(\blacksquare_{i,j\dots k})$ ,  $w_3(\blacksquare_{i,j\dots k})$ , y  $w_4(\blacksquare_{i,j\dots k})$ . También, la masa de otras celdas es mapeada a otras subceldas de  $\blacksquare_{i,j\dots k} = w_i$  de tal manera que la masa total de  $\blacksquare_{i,j\dots k} = w_i$  igual a como estaba antes de que el operador de Markov fuese aplicado. Esta forma de distribución de “masa”





**Figura 5.4:** a). Un collage construido a partir del IFS de cuatro transformaciones. En b), c), y d) la medida correspondiente a cada región.

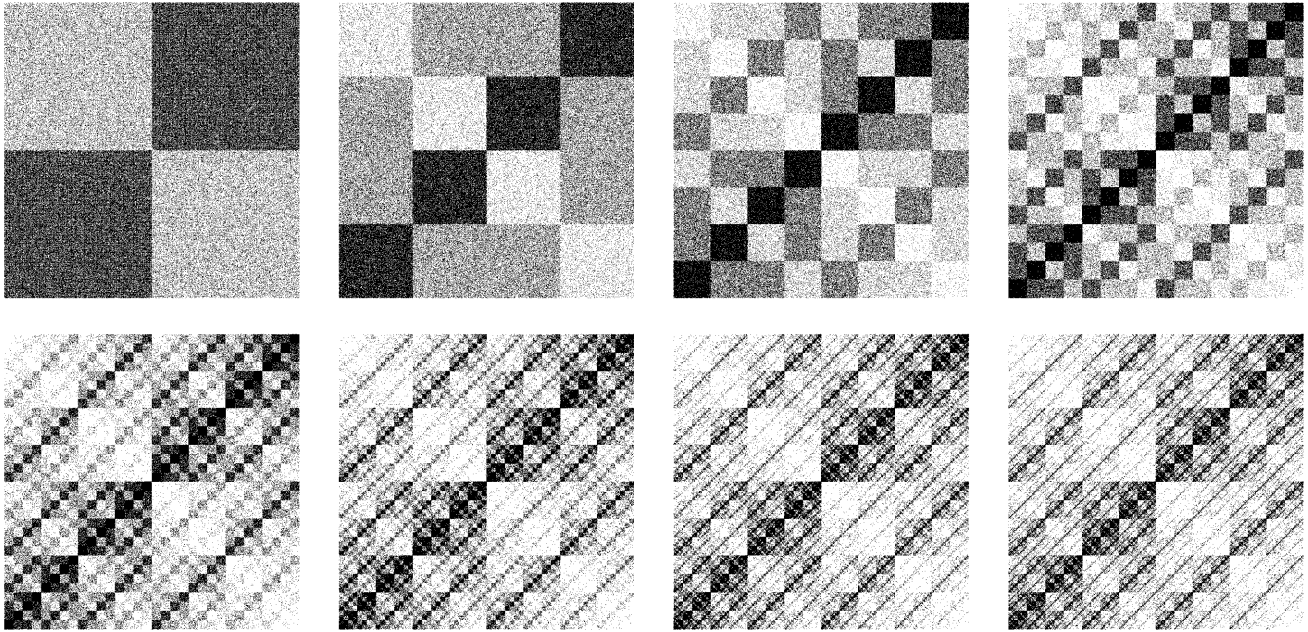
está definida en una escala cada vez más fina a medida que el operador de Markov es repetidamente aplicado.

Otra forma de representar el efecto de la aplicación sucesiva del operador de Markov se muestra en la figura 5.5, cada imagen tiene la misma cantidad de puntos (250.000) de tal forma que la medida  $\mu$  es invariante bajo la aplicación del operador. En cada iteración se puede observar una redistribución de los puntos en el espacio, la distribución dependiente de las probabilidades ( $p_1 = 0.4, p_2 = 0.1, p_3 = 0.4, p_4 = 0.1$ ), y se puede observar que entre más se aplique el operador la imagen se acerca más al atractor del IFS. De esta manera, la distribución de “masa” es definida a escalas cada vez más finas a medida que el operador es aplicado repetidamente.

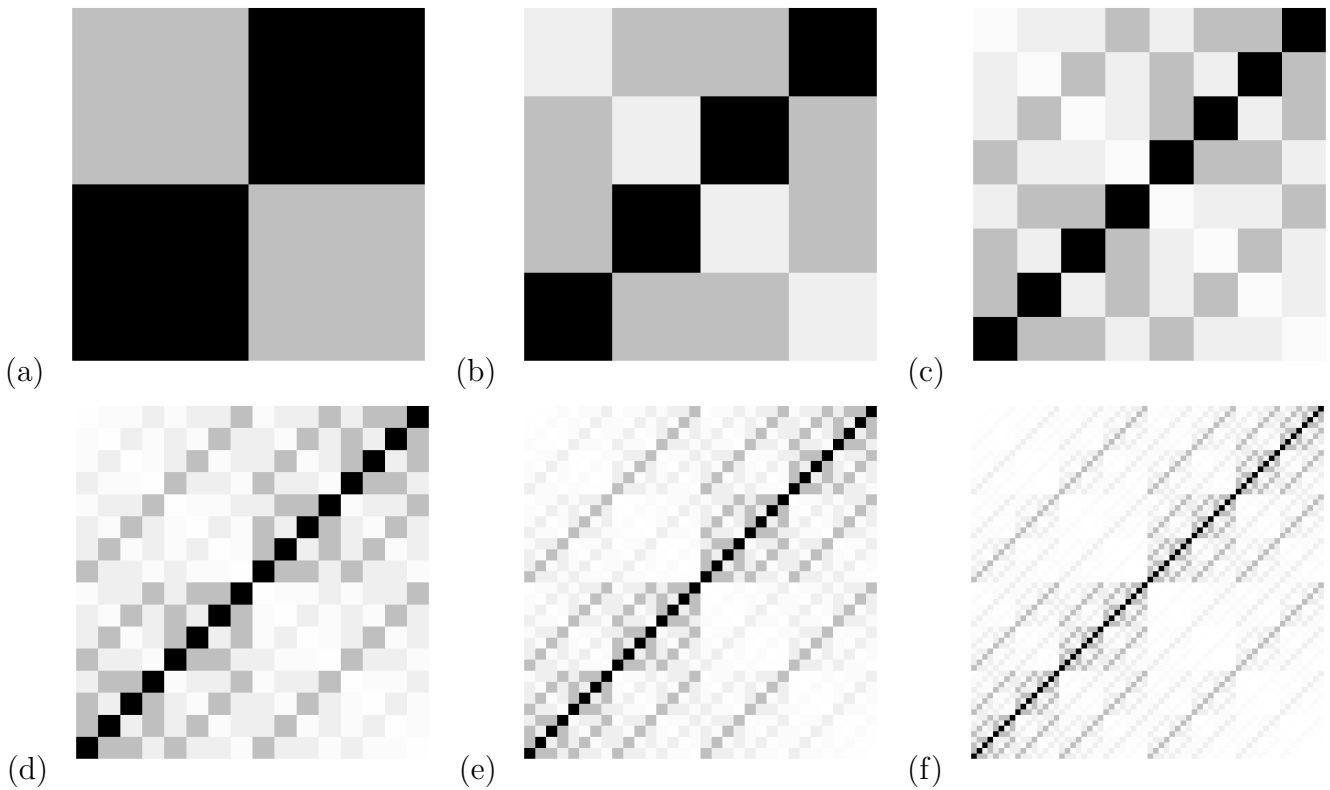
Esta idea también es ilustrada en la figura 5.6, en la cual se ha asignado el valor de la medida de Markov  $M$  a cada región como un tono de gris, de tal forma que el tono de grises (en escala de 0 a 1 donde 0 es el tono menos intenso o blanco y 1 el más intenso o negro) indica sí la probabilidad en alguna celda es mayor, menor o igual que en otras celdas.

**Teorema 5.10.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Sea

$$\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$



**Figura 5.5:** En la figura se muestran ocho imágenes, que muestran el resultado de la aplicación sucesiva del operador de Markov a una medida uniforme del espacio  $\blacksquare$ , en cada imagen el número total de puntos es el mismo manteniendo la medida invariante, pero la distribución de los puntos cambia.



**Figura 5.6:** La secuencia de imágenes ilustran en escala de gris el comportamiento de las medidas para cada región producidas mediante aplicación iterativa del operador de Markov. Las regiones más oscuras corresponden a lugares de mayor probabilidad.

un IFS con probabilidades. Sea  $\mu$  la medida invariante asociada. Entonces el soporte de  $\mu$  es el atractor del IFS  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ .

**Teorema 5.10.3** (El teorema de collage para la medida). *Sea*

$$\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

*un IFS con probabilidades.  $\mu$  la medida invariante asociada. Sea  $s \in (0, 1)$  un factor de contracción para el IFS. Sea  $M : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  el operador de Markov asociado. Sea  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ . Entonces*

$$d_H(\nu, \mu) \leq \frac{d_H(\nu, M(\nu))}{(1 - s)}.$$

De nuevo el teorema de Collage para la medida apunta en la misma dirección del correspondiente para IFS's que se estudió en el capítulo 2, en esta ocasión el propósito es encontrar el conjunto de probabilidades que puedan llevar a la imagen dada.

## 5.11. Teorema de Elton

En la primera sección de este capítulo se había dado una introducción a la teoría de la medida y se obtuvo un resultado en el que la medida dependía del número de puntos que están en una región dada, finalmente se tienen las herramientas que llevan al resultado más importante para los IFS con probabilidad.

**Teorema 5.11.1.** *Sea  $(\mathbf{X}, d)$  un espacio métrico compacto. Sea*

$$\{\mathbf{X}; w_1; w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

*un IFS con probabilidades.  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  denota una órbita del IFS producida por el algoritmo de iteración aleatoria empezando en  $x_0$ . Que es,*

$$x_n = w_{\sigma_n} \circ w_{\sigma_{n-1}} \circ \dots \circ w_{\sigma_1}(x_0),$$

*donde el mapeo es seleccionado independientemente de acuerdo a las probabilidades*

$$p_1, p_2, \dots, p_N \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

*Sea  $\mu$  la única medida invariante para el IFS. Entonces con probabilidad uno (que es, para toda la secuencia de direcciones  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  excepto para un conjunto de sucesiones con probabilidad cero),*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) = \int_{\mathbf{X}} f(x) d\mu(x)$$

para toda función continua  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  y para todo  $x_0$ .

**Corolario 5.11.1.** Sea  $B$  un subconjunto de Borel de  $\mathbf{X}$  y sea  $\mu(\text{frontera de } B) = 0$ . Sea  $\mathcal{N}(B, n) =$  número de puntos en  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \cap B$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$  entonces, con probabilidad uno,

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\mathcal{N}(B, n)}{(n+1)} \right\}$$

para todo punto inicial  $x_0$ . Esto es; la “masa” de  $B$  es proporcional al número de pasos iterados cuando se corre el algoritmo de iteración aleatorio, el cual produce puntos en  $B$ .

## 5.12. Sistemas de funciones iteradas recurrentes

A lo largo de este trabajo se han visto diferentes tipos de IFS's, se destacan dos tipos: los que viven en espacios compactos generalmente de  $\mathbb{R}^2$ , como el triángulo de Sierpinski o el helecho de Barnsley, y aquellos que están en el espacio de todas las medidas de Borel normalizadas  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  o espacio de probabilidades, que se vio en este capítulo.

Se llama a este tipo de IFS's sistemas fractales, en general los sistemas fractales están definidos por los elementos que contiene. Los elementos básicos que deben tener son:

1. Un espacio métrico subyacente  $(\mathbb{X}, d)$  que se necesita para definir los fractales y el modelo del sistema.  $\mathbb{X}$  puede ser  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , o un subconjunto de estos espacios, como  $\square \subset \mathbb{R}^2$ , que es un subconjunto acotado y cerrado de  $\mathbb{R}^2$ , usualmente  $(\mathbb{X}, d)$  es compacto, y sus subconjuntos acotados también.
2. Un espacio de modelos  $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(\mathbb{X})$ . Cada punto de  $\mathbb{Y}$  es un modelo que está definido a partir del espacio  $\mathbb{X}$ . Los fractales generados por el sistema fractal también pertenecen a  $\mathbb{Y}$ , por ejemplo, en  $\mathbb{Y}$  están los espacios de conjuntos, el espacio de funciones, y los espacios de medidas. También es necesaria una métrica tal que  $(\mathbb{X}, h)$  sea un espacio métrico compacto.  $(\mathcal{H}(\mathbb{X}), d_{Hausdorff})$  y  $(\mathcal{P}(\mathbb{X}), d_H)$  son un par de ejemplos.
3. Un operador de contracción  $O$  que actúe sobre el espacio  $(\mathbb{Y}, h)$ , como el operador de Hutchinson  $W$  o el operador de Markov  $M$ . Este operador es tal que para un número real  $s$  con  $0 \leq s < 1$

$$h(O(\phi), O(\psi)) \leq s \cdot h(\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathbb{Y}.$$

El operador se construye a partir de funciones contractivas elementales que actúan sobre el espacio subyacente  $\mathbb{X}$ .

Considérense los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 1.** El sistema fractal definido por los IFS's compuestos por transformaciones contractivas que actúan sobre  $\mathbb{X} = \square \subset \mathbb{R}^2$ , en el que el espacio subyacente es  $\square$ . Los fractales del sistema son los atractores de todos los IFS's posibles. El espacio de modelos  $\mathbb{Y}$  que está compuesto por todos los subconjuntos compactos de  $\square$ ,  $\mathbb{Y} = \mathcal{H}(\mathbb{X})$ . El operador  $O$  está definido como una función  $O : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  es definida como

$$O(\mathbb{Y}) = W(\mathbb{Y}) = \bigcup \{w_i(x) : x \in \mathbb{Y}\}.$$

donde  $w_i$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots$ , es una transformación contractiva que actúa sobre el espacio  $\mathbb{X}$ .

**Ejemplo 2.** El siguiente ejemplo de sistema fractal está definido por los IFS's compuestos por transformaciones afines contractivas en el espacio  $\square \subset \mathbb{R}^2$  y las probabilidades  $p_i$ . Los fractales de este sistema son los atractores del operador de Markov. El espacio  $\mathbb{Y} = \mathcal{P}(\square)$ , es el conjunto de todas las medidas normalizadas de Borel sobre  $\square$ . Por ejemplo, los modelos pueden estar representados por imágenes en escala de grises, cuyos tonos están dados por las medidas de cada subconjunto. El operador  $O$  está definido igual que el operador de Markov.

**Ejemplo 3.** Este último ejemplo tiene como espacio al intervalo unitario  $\mathbb{X} = [0, 1] \in \mathbb{R}$ , con  $\mathbb{Y} = \mathcal{F} = C[0, 1]$  el espacio de funciones continuas en el dominio  $[0, 1]$ . En este sistema los fractales son funciones de interpolación fractal que pueden ser generados por transformaciones afines (ver capítulo 6 en (Barnsley, 1993)). El operador  $O$  correspondiente a este sistema es una función  $O : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  igual al operador  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  descrito en (Barnsley, 1993).

En esta sección se agrega un sistema fractal llamado sistema de funciones iteradas recurrentes.

**Definición 5.12.1.** *Un sistema de funciones iteradas recurrentes consiste de un IFS  $\{\mathbb{X}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$  junto con una matriz  $\{p_{ij} \in [0, 1] : i, j = 1, 2, \dots, N\}$ , Tal que (i)*

$$p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \dots + p_{iN} = 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N$$

*y (ii) tal que para cualquier  $i$  y  $j$ , existe una secuencia finita de enteros  $k, l, s, \dots, m \in \{1, 2, \dots, N\}$  de modo que*

$$p_{ik}p_{kl}p_{ls} \dots p_{mj} > 0$$

La probabilidad de transición para un cierto proceso de Markov de tiempo discreto es  $p_{ij}$ , que da la posibilidad o probabilidad, de moverse del estado  $i$  al estado  $j$ , sí el proceso está en el estado  $i$ . La condición (i) dice que el proceso es estocástico en las filas: dependiendo en qué estado se encuentra el sistema hay disponible un conjunto de probabilidades que suman 1, y que describe las posibles secuencias de estados al que el sistema puede hacer la transición en el paso siguiente. La condición (ii) dice que si el sistema está en el estado  $i$  entonces existe una probabilidad finita de alcanzar el estado  $j$  en un número finito de pasos, para cualquier par de enteros  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Un IFS con probabilidad proporciona un ejemplo simple de un IFS recurrente. El IFS con pro-

babilidad

$$\{\mathbb{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

es en muchas formas lo mismo que el IFS recurrente

$$\{\mathbb{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; (p_{ij})\}$$

donde  $p_{ij} = p_j$  para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Diremos que un IFS recurrente es hiperbólico sí el IFS asociado es hiperbólico, es decir, que es contractivo con factor de contracción  $0 \leq s < 1$ . Restringimos la atención a IFS recurrentes hiperbólicas.

Ejemplos de parámetros para IFS's recurrentes están presentes en la tabla 5.2 y 5.3. En cada caso el espacio  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ , y sus transformaciones son afines.

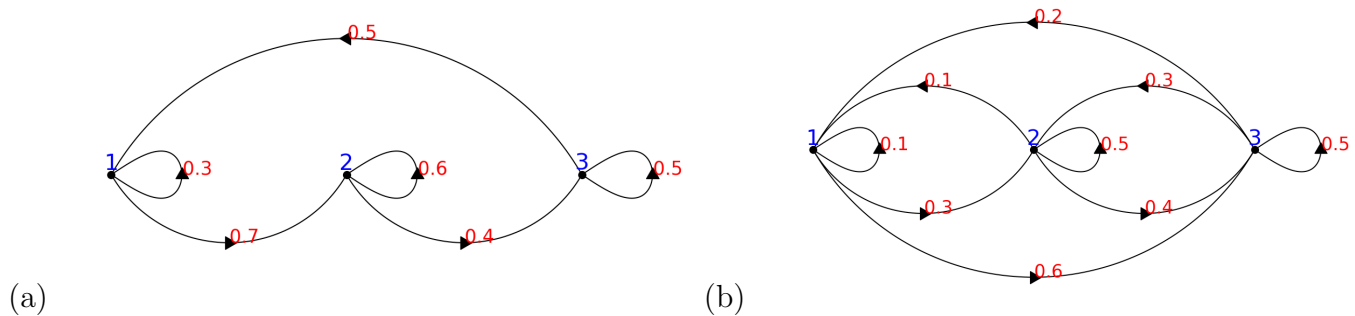
**Tabla 5.2:** Ejemplo de parámetros para un IFS recurrente en el que no todas las transiciones son posibles.

$w_i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$p_{i3}$
1	0.5	0	0	0.5	0	0	0.3	0.7	0
2	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0	0.6	0.4
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.5

**Tabla 5.3:** Ejemplo de parámetros para un IFS recurrente en el que todas las transiciones son posibles.

$w_i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$p_{i3}$
1	0.5	0	0	0.5	0	0	0.1	0.3	0.6
2	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.1	0.5	0.4
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.2	0.3	0.5

La figura 5.7 proporciona dos diagramas del proceso de Markov asociado.



**Figura 5.7:** Proceso de Markov para el IFS recurrente en la tabla 5.2 en (a) y 5.3 en (b).

Se dice que el sistema está en el estado  $i$  si la última de las transformaciones aplicadas fue  $w_i$ . Para el IFS en la tabla 5.2 no es posible nunca aplicar una transformación  $w_3$  sí el sistema está en el estado 1. Tampoco es posible realizar una transición del estado 2 al estado 1. Para el IFS recurrente

en la tabla 5.3, cualquier transformación puede seguir a cualquier otra transformación; que es, el sistema puede transitar de cualquier estado a cualquier otro en un paso.

Un IFS recurrente tiene un atractor teórico de medida única. Esta es una medida invariante que puede ser calculada por medio de un algoritmo de “juego de caos” generalizado. También puede ser calculado usando una extraña “máquina de copiado.”

### 5.12.1. Algoritmo de juego de caos para un IFS recurrente

Se presenta un algoritmo para el caso de los parámetros del IFS recurrente en las tablas 5.2 y 5.3. El algoritmo produce una órbita  $\{(x_n, y_n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$  que, con probabilidad uno, describe una única medida invariante asociada con el IFS recurrente. La relación entre las órbitas y las medidas es igual a lo descrito en las secciones anteriores de este capítulo para el caso de IFS con probabilidades.

- (1) Seleccionar un punto inicial  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Es deseable que el punto inicial sea tan cercano como sea posible al atractor.
- (2) Seleccionar un estado inicial  $s_0 = \{1, 2, 3\}$ . Cualquier otro estado en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  podría ser usado. El proceso de Markov asociado con la matriz de transición  $(p_{ij})$  posee un único vector estacionario  $(m_1, m_2, m_3)$  con  $m_i > 0$ , tal que

$$\sum_{i=1}^3 m_i p_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Sí se conoce el vector, entonces es buena idea seleccionar el estado inicial correspondiente al más grande  $m_j$ .

- (3) Seleccionar  $s_1 \in \{1, 2, 3\}$  con probabilidad  $p_{s_0 j}$  asociado a la elección  $s_1 = j$ .
- (4) Calcular  $(x_1, y_1) = w_{s_1}(x_0, y_0)$ .
- (5) Seleccionar  $s_2 \in \{1, 2, 3\}$  con probabilidad  $p_{s_1 j}$  asociado a la elección  $s_2 = j$ .
- (6) Calcular  $(x_2, y_2) = w_{s_1}(x_1, y_1)$ .
- ...
- (2n+1) Seleccionar  $s_n \in \{1, 2, 3\}$  con probabilidad  $p_{s_{n-1} j}$  asociado a la elección  $s_n = j$ .
- (2n+2) Calcular  $(x_n, y_n) = w_{s_n}(x_{n-1}, y_{n-1})$ .
- ...

El resultado del cálculo anterior es una órbita de la forma

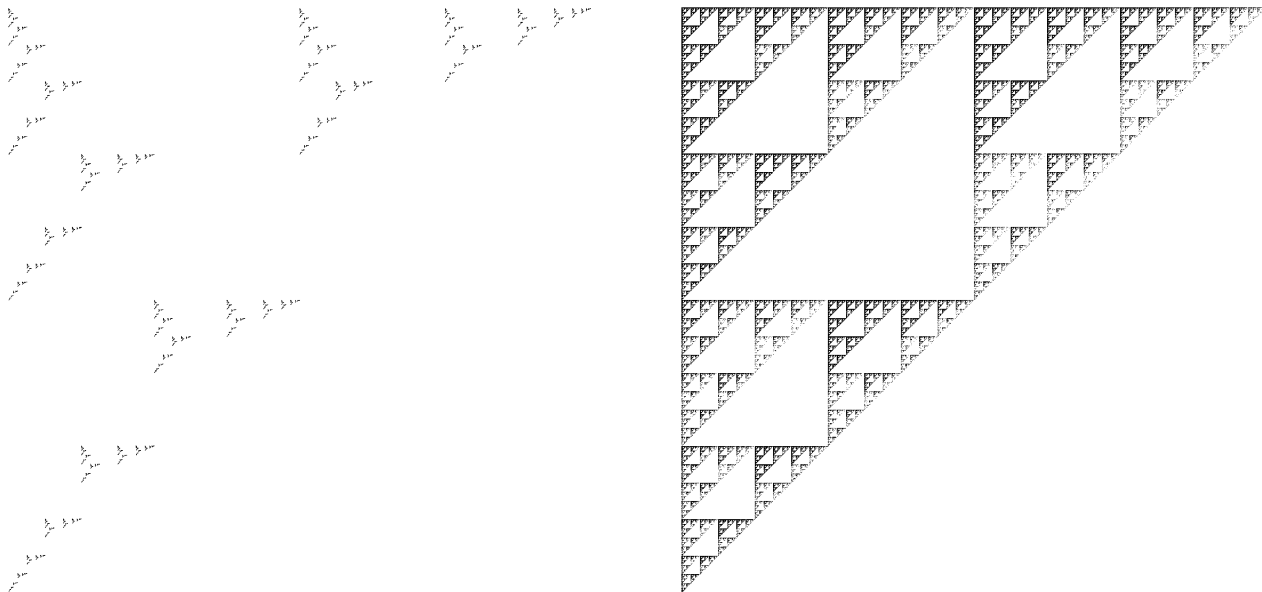
$$Q(num) = \{(x_n, y_n) : n = 1, 2, \dots, num\}$$

(Con probabilidad uno) el valor de la medida invariante  $\mu \in \mathcal{P}([0, 1] \times [0, 1])$  del IFS recurrente está dado por la fórmula

$$\lim_{num \rightarrow \infty} \mu(S) = \frac{\text{número de puntos en } \{S \cap Q(num)\}}{num}$$

para cualquier subconjunto medible  $S \subset \mathbb{R}^2$ .

La figura 5.8 muestra los resultados obtenidos para las tablas 5.2 y 5.3.



**Figura 5.8:** Resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de juego del caos a las tablas 5.2 y 5.3.

**Tabla 5.4:** Parámetros para un IFS recurrente de cuatro transformaciones.

$w_i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$p_{i3}$	$p_{i4}$
1	0.5	0	0	0.5	0	0	0.3	0.5	0.1	0.1
2	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.1	0.5	0	0.4
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.3	0.3	0.2	0.2
4	0.5	0	0	0.5	0.5	0	0.25	0.25	0.25	0.25

En la tabla 5.4 están los parámetros para un IFS recurrente en el cuadrado unitario, en esta ocasión se usan cuatro transformaciones, el resultado obtenido se muestra en la figura 5.9, en la de la derecha se puede observar como están asignadas las probabilidades en todo el espacio. Se observa una región en blanco en el atractor a la que le corresponde la probabilidad  $P_{23} = 0$ , en la que no hay



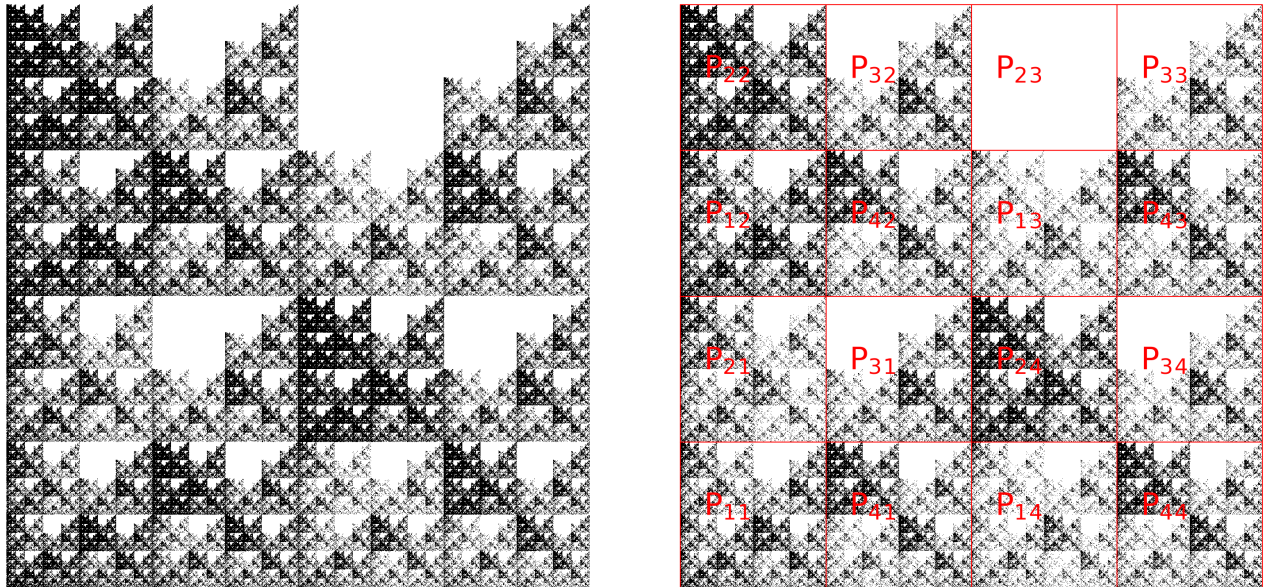


Figura 5.9: El Atractor del IFS con los parámetros de la tabla 5.4, cada probabilidad afecta una región específica en el cuadrado unitario.

ninguna posibilidad de que llegue algún punto y por lo tanto su medida es cero. Esta región carente de puntos aparece autosimilarmente en todo el espacio.

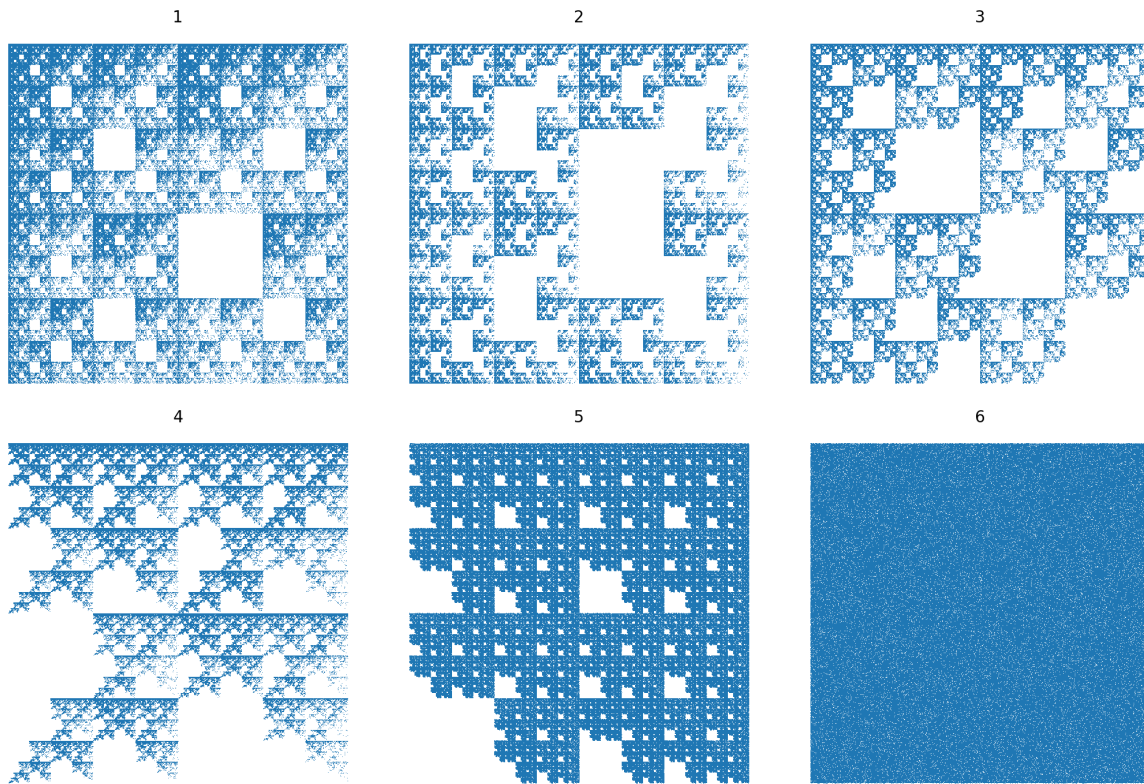
Tabla 5.5: Seis conjuntos de probabilidades de transición para un IFS's recurrente de cuatro transformaciones.

N°	$w_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$p_{i3}$	$p_{i4}$
1.	1	0.3	0.5	0.1	0.1
	2	0.3	0.5	0.0	0
	3	0.3	0.3	0.2	0.2
	4	0.25	0.25	0.25	0.25
3.	1	0.3	0.5	0.1	0.1
	2	0.1	0.5	0	0.4
	3	0.3	0.3	0.2	0.2
	4	0.5	0	0.5	0
5.	1	0	0.3	0.3	0.4
	2	0.25	0.25	0.25	0.25
	3	0.25	0.25	0.25	0.25
	4	0.25	0.25	0.25	0.25
N°	$w_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$p_{i3}$	$p_{i4}$
2.	1	0.3	0.5	0.1	0.1
	2	0.1	0.5	0	0.4
	3	0.3	0.3	0.2	0.2
	4	0.25	0.25	0.25	0.25
4.	1	0.5	0.25	0	0.25
	2	0.1	0.5	0.4	0
	3	0.3	0.3	0.2	0.2
	4	0.3	0.5	0.1	0.1
6.	1	0.25	0.25	0.25	0.25
	2	0.25	0.25	0.25	0.25
	3	0.25	0.25	0.25	0.25
	4	0.25	0.25	0.25	0.25

Como ejemplos, en la tabla 5.5 hay seis conjuntos, cada uno contiene las probabilidades de transición para un IFS recurrente con los parámetros de 5.4, los atractores se muestran en 5.10.

### 5.12.2. Algoritmo de Máquina de Fotocopiado

El objetivo de este algoritmo, al igual que el anterior, es encontrar la única medida invariante asociada con un IFS recurrente. El mecanismo consiste en realizar copias reducidas y filtradas de varias imágenes de entrada y luego unir cada una de estas copias. En la figura 5.11 se muestra en



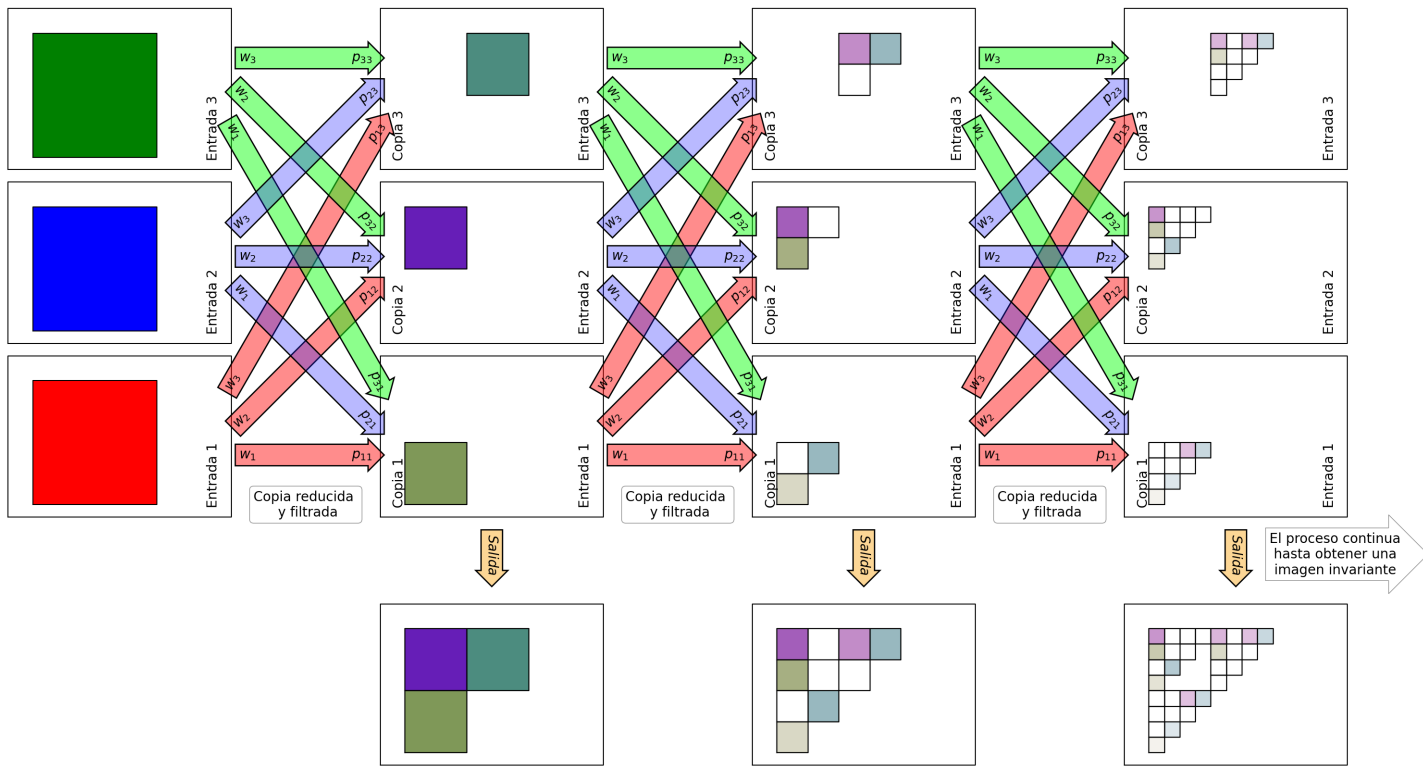
**Figura 5.10:** Cada uno de los atractores corresponde a un conjunto de probabilidades.

que consiste el proceso:

1. Se seleccionan tres imágenes de entrada,
2. a cada una de las imágenes se les aplica las transformaciones  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$ , las cuales indican a cuál de las entradas será asignada la copia, como indican las flechas en la figura 5.11,
3. la imagen es filtrada por un factor  $p_{ij}$  dependiendo de la entrada  $i$  y la transformación  $w_j$ , el filtrado atenúa el brillo, la opacidad o transparenta la imagen. Por ejemplo en 5.11, la entrada 1, es transparentada en tres factores  $p_{11}$ ,  $p_{12}$  y  $p_{13}$ , cuando alguna de las probabilidades es cero la imagen desaparece, las copias obtenidas son asignadas a las entradas 1, 2 y 3 dependiendo de la transformación  $w_j$  aplicada.
4. Se unen las copias para obtener una imagen de salida.
5. El proceso se repite hasta obtener una imagen a la salida que sea invariante ante una nueva ejecución del proceso.

La transparencia de una imagen depende de las entradas y los factores  $p_{ij}$ , por ejemplo, la transparencia de la copia 1 es

$$\text{copia1} = p_{11} \times \text{Entrada1} + p_{21} \times \text{Entrada2} + p_{31} \times \text{Entrada3}$$



**Figura 5.11:** Proceso de obtención de medidas invariantes. Este proceso funciona como una fotocopiadora con tres unidades de copiado, las cuales hacen copias reducidas y filtradas de las imágenes para luego mezclarlas en la salida. En esta ilustración se usó el IFS recurrente de la tabla 5.2 cuyo atractor se muestra en la figura 5.8.

donde *Entrada*1, 2 y 3 dan la transparencia de cada una de las entradas, para las demás copias tenemos que

$$copia2 = p_{12} \times Entrada1 + p_{22} \times Entrada2 + p_{32} \times Entrada3$$

$$copia1 = p_{13} \times Entrada1 + p_{23} \times Entrada2 + p_{33} \times Entrada3.$$

Finalmente las imágenes son superpuestas y al atractor le corresponde una transparencia dada por

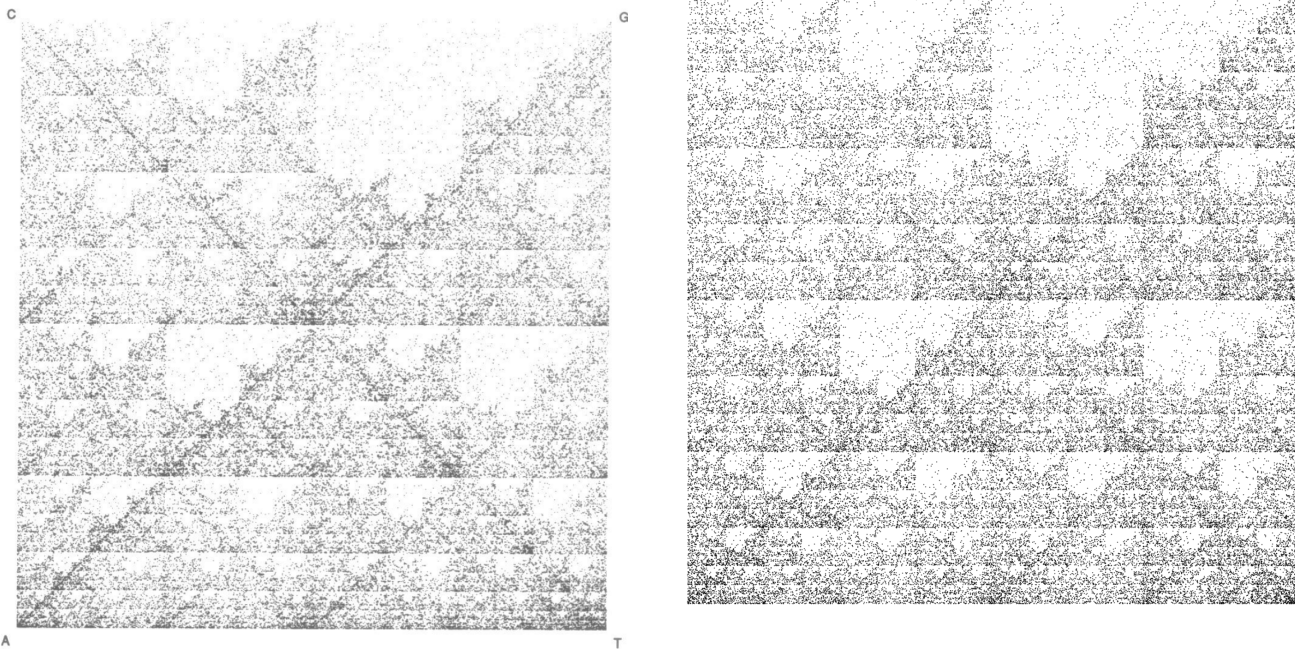
$$Atractor = copia1 + copia2 + copia3.$$

Este número corresponde a las medidas invariantes del sistema, este tema será tratado en la sección sobre vectores de medida 5.15, en donde se obtiene el operador de Markov 5.11 para los IFS's como los de las tablas 5.2 y 5.3.

### 5.12.3. Secuencias de ADN e IFS's Recurrentes

Las representaciones del juego del caos (algoritmo del juego del caos para IFS's recurrentes) de las secuencias de DNA han sido usadas para encontrar patrones, que pueden dar información contenida en el DNA (Goldman, 1993). Las secuencias de DNA están formadas por sucesiones de las letras A, C, G y T, las cuales representan las cuatro subunidades de nucleótidos de una banda (adenina, citosina, guanina, timina). La manera en la que se obtienen imágenes a partir de secuencias de DNA

utilizando el juego del caos, consiste en nombrar cada una de las esquinas de un cuadrado con las letras A, C, G y T, si la primera letra de la secuencia es, por ejemplo, la letra C, se traza una línea resta del centro del cuadrado a la esquina correspondiente a esta letra, y se dibuja un punto en la mitad de esta. Partiendo de este punto se puede trazar otra línea que vaya a la esquina con la segunda letra en la secuencia, y marcar nuevamente otro punto en el centro de la línea. Este procedimiento se repite a lo largo de toda la secuencia, los puntos generan una imagen como la que se muestra en la figura 5.12 (lado izquierdo) tomada de (Goldman, 1993).



**Figura 5.12:** Representación y respectiva simulación del juego del caos de la secuencia de la región de beta globina humana. La simulación (a la derecha) fue obtenida con los parámetros de la tabla 5.7.

Se puede utilizar los IFS's recurrentes como un modelo simple que simule los resultados obtenidos en secuencias de ADN como las de la figura 5.12. La tabla 5.7 muestra los parámetros de un IFS recurrente, cuyas probabilidades se obtienen al contar el número de veces que aparece un dinucleótido  $XY$  ( $X, Y \in \{A, C, G, T\}$ ) en la secuencia, específicamente la probabilidad  $P_{XY}$  es de la forma;

$$P_{XY} = \frac{n_{XY}}{n_{XA} + n_{XC} + n_{XG} + n_{XT}}.$$

con  $n_{XY}$  suministrados por (Goldman, 1993) y puestos en la tabla 5.6.

En la figura 5.12, al lado derecho, está el resultado de la simulación, en la que se usaron los parámetros de la tabla 5.7. Se puede observar que tanto los resultados originales como la simulación comparten el mismo patrón.

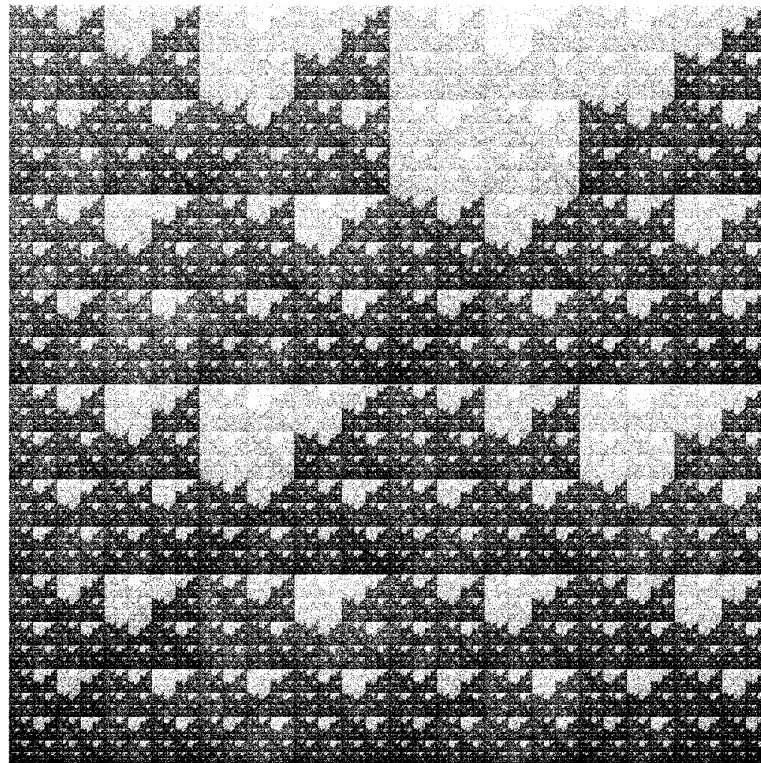
En la figura 5.13 se muestra una simulación con un número mayor de puntos, lo que permite observar que los patrones también están presentes en los lugares con menor densidad de puntos.

**Tabla 5.6:** Número de dinucleótidos  $n_{XY}$  encontrados en secuencia de la región de beta globina humana. Los nucleótidos de  $X$  en la primera columna y los de  $Y$  en la primera fila.

$X \backslash Y$	A	C	G	T	Total
A	7239	3658	5227	5945	22069
C	5166	3293	502	5207	14168
G	4580	2839	3676	3694	14789
T	5087	4379	5383	7444	22293

**Tabla 5.7:** Parámetros para un IFS recurrente con probabilidades.

$w_i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$p_{i3}$	$p_{i4}$
1	0.5	0	0	0.5	0	0	0.328	0.166	0.237	0.269
2	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.365	0.233	0.035	0.367
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.309	0.192	0.249	0.250
4	0.5	0	0	0.5	0.5	0	0.228	0.197	0.241	0.334



**Figura 5.13:** Esta imagen es una versión con mayor número de puntos (2'000.000) que la simulación obtenida en la figura 5.12 del lado derecho.

## 5.13. Cadena de Markov

En la sección anterior se dijo que la probabilidad de transición de un estado  $i$  a un estado  $j$  está dada por el elemento  $p_{ij}$  del IFS' recurrente, estos  $p_{ij}$  son los elemento de una matriz cuadrada  $N \times N$   $P$  llamada la Matriz de transición la cual está relacionada con las cadenas de Markov. Una

cadena de Markov es un modelo estocástico que describe una secuencia de posibles eventos en los que la probabilidad de que cada evento ocurra depende solo del estado alcanzado en el evento anterior. Para tiempos continuos el modelo se conoce como proceso de Markov (ver (Bishop y Peres, 2017) y (Wikipedia, s.f.-b)). Formalmente una cadena de Markov sobre un espacio  $Y$  es una secuencia de variables aleatorias  $\{X_n\}$  con valores en  $Y$ , con una función de transición  $p(x, y) : Y \times Y \rightarrow [0, 1]$  tal que para todo  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x, y \in Y$  la probabilidad condicional sea de la forma

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = p(x, y)$$

en el  $n$ -ésimo la función de transición es

$$p^{(n)}(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x),$$

y puede ser calculado de  $p$  usando la iteración

$$p^{(n)}(x, y) = \sum_{z \in Y} p(z, y) p^{(n-1)}(x, z).$$

Además  $p$  debe satisfacer

$$\sum_{y \in Y} p(x, y) = 1$$

para cada  $x \in Y$ . Dado cualquier  $p$  con estas propiedades y cualquier estado inicial  $X_0 = \rho \in Y$  existe una cadena de Markov correspondiente.

Si el espacio es finito,  $X_j$  con  $j = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , la función de transición puede ser representada por la matriz de transición  $P$ , cuyo elementos están dados por  $p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p(i, j)$ . ya que cada fila de  $P$  suma 1, todos sus elementos son no negativos, y se dice que  $P$  es estocástica en las filas o una matriz estocástica derecha.

Una distribución estacionaria  $\tilde{\mu}$  es un vector fila, cuyos elementos son números positivos que entre sí suman 1. Este vector es invariante ante la aplicación de la matriz de transición  $P$ ,

$$\tilde{\mu}P = \tilde{\mu}.$$

por lo que  $\tilde{\mu}$  es un vector propio de  $P$  con valor propio 1. En general puede haber varios vectores propios con valor propio 1. Sin embargo, para matrices con entradas estrictamente positivas, o para una matriz estocástica aperiódica irreducible, el vector es único y se puede calcular encontrando el límite para cualquier  $i$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (P^k)_{ij} = \mu_j$$

donde  $\mu_j$  es el  $j$ -ésimo elemento del vector  $\tilde{\mu}$ . Este resultado está respaldado por el teorema de Perron-Frobenius. Lo que nos indica que a largo plazo la probabilidad de encontrarse en el estado  $j$  es independiente del estado inicial  $i$ .

La aplicación de la matriz estocástica a una distribución de probabilidad redistribuye la “masa” de probabilidad que se encontraba en la distribución original preservando la “masa” total. Si el proceso es aplicado repetidamente la distribución converge a una distribución estacionaria para la cadena de Markov dada. Este proceso se presenta cuando se aplica sucesivamente el operador de Markov sobre una medida, como se vio en la sección anterior.

## 5.14. Teorema de Collage para IFS's recurrentes

El objetivo de esta sección es generalizar la estructura de los IFS's al caso de IFS's recurrentes. La idea es tomar el espacio métrico compacto ya conocido  $(\mathcal{H}, h)$ , en el que  $\mathcal{H}$  es la familia de todos los subconjuntos compactos del espacio  $X$  y  $h$  es la métrica de Hausdorff, y definir un espacio múltiple compuesto por espacios de este tipo.

Sea  $(\mathbb{X}_j, d_j)$  un espacio métrico compacto con  $j = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , y  $(\mathcal{H}_i, h_j)$  el espacio métrico de subconjuntos compactos no vacíos con la métrica de Hausdorff. Se define al mapeo  $W_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i \forall (i, j) \in I$ , donde  $I$  es un conjunto compuesto por pares de índices con la propiedad de que para cada  $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$  existe un  $j \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$  tal que  $(i, j) \in I$ . Además para todo  $(i, j) \in I$  y  $A, B \in \mathcal{H}_j$  se tiene que

$$h_i(W_{ij}(A), W_{ij}(B)) \leq s_{ij}h_j(A, B)$$

para algún  $s_{ij}$ .

Suponiendo que  $w_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  es un mapeo de contracción,  $\mathbb{X}$  es un espacio compacto y las probabilidades  $(p_{ij})$  son estocásticas en las filas, esto quiere decir que  $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ . Definiendo  $(\mathbb{X}_j, d_j) = (\mathbb{X}, d)$  para cada  $j$ , y  $W_{ij} = \{w_i(x) : x \in S\}, i, j = 1, 2, \dots, N$ . Sea  $I(i) = \{j : p_{ji} > 0\}$ . Sea  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_3 \times \dots \times \mathcal{H}_N$ , con la métrica  $\tilde{h}$  definida como

$$\tilde{h}((A_1, A_2, \dots, A_N), (B_1, B_2, \dots, B_N)) = \max\{h_j(A_j, B_j) | j = 1, 2, \dots, N\}$$

se puede demostrar que el espacio métrico  $(\tilde{\mathcal{H}}, d_h)$ .

Se puede ver a  $\tilde{\mathcal{H}}$  como una pila de planos  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \dots, \mathbb{X}_N$ , de tal forma que un punto en  $\tilde{\mathcal{H}}$  tiene  $N$  puntos que corresponden a un punto en cada plano. Se define  $\tilde{W} : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  como

$$\tilde{W}(A_1, A_2, A_3, \dots, A_N) = \left( \bigcup_{j \in I(1)} W_{1j}(A_j), \bigcup_{j \in I(2)} W_{2j}(A_j), \bigcup_{j \in I(3)} W_{3j}(A_j), \dots, \bigcup_{j \in I(N)} W_{Nj}(A_j) \right).$$

Para el caso  $N = 2$  este mapeo puede ser escrito como

$$\tilde{W} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{12}(A_2) \\ W_{21}(A_1) \cup W_{22}(A_2) \end{pmatrix}$$

$\tilde{W}$  es un mapeo de contracción sobre  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

**Teorema 5.14.1.**  $\tilde{W} : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  *satisface*

$$\tilde{h}(\tilde{W}(A), \tilde{W}(B)) \leq s\tilde{h}(A, B) \quad \forall A, B \in \tilde{\mathcal{H}},$$

donde  $s = \max\{s_{ij}, (i, j) \in I\}$ .

La demostración puede ser consultada en (Barnsley, 1993).

Ahora se tiene un sistema fractal con sus tres elementos. Un espacio subyacente  $\mathbb{X}$ , utilizando copias de este espacio se crea el espacio de modelos  $\mathbb{Y} = \tilde{\mathcal{H}}$ , y un mapeo de contracción  $O = \tilde{W}$  sobre  $\tilde{\mathcal{H}}$  construido a partir de transformaciones elementales que actúan sobre el espacio  $\mathbb{X}$ . Los puntos fijos del operador  $O$  dan la aproximación fractal a los modelos. En este caso específico tiene la siguiente estructura.

**Corolario 5.14.1.** *Para  $s < 1$  existe un único elemento*

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_N) \in \tilde{\mathcal{H}}$$

tal que

$$A_i = \bigcup_{j \in I(i)} W_{ji}(A_j) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

es decir,  $\tilde{W}(A) = A$ , donde  $A$  es el atractor del IFS recurrente.

**Corolario 5.14.2** (Teorema de Collage para IFS's recurrentes). *Sí  $B \in \tilde{\mathcal{H}}$  satisface*

$$\tilde{h}(B, W(B)) \leq \epsilon > 0$$

entonces

$$\tilde{h}(A, B) \leq \frac{\epsilon}{1-s},$$

donde  $A$  es el atractor del IFS recurrente.

Estos resultados se pueden asociar con los resultados obtenidos en la anterior sección, en la que las imágenes se construyen a partir de un punto y las transformaciones de contracción  $w'_i s$ .



**Corolario 5.14.3.** *Sea  $\{\mathbb{X}; w_i, (p_{ij}), i, j = 1, 2, 3, \dots, N\}$  un IFS recurrente con  $\mathbb{X}$  compacto y  $w_i$ 's contracciones uniformes, Sea  $A$  el soporte de la única medida estacionaria. Entonces existe un único conjunto compacto  $A_i \subset A$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , con  $A = \cup_{i=1}^N A_i$  tal que*

$$A_i = \cup_{j:p_{ji}>0} w_i(A_j), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Para observar al atractor  $A_i$  en las trayectorias de la forma  $x_0, w_{i_1}(x_0), w_{i_2}(w_{i_1}(x_0))$  solo es necesario seguir los puntos que terminan con la transformación  $w_i$ .

## 5.15. Vectores de Medida

En esta sección se estudian los sistemas fractales usando los IFS recurrentes cuyos atractores son vectores de medida. Para el caso de IFS con probabilidades, en el que el espacio era  $\mathbb{X} = \square \subset \mathbb{R}^2$ , y  $\{\mathbb{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, \dots, p_N\}$  un IFS con probabilidades con  $w_i$  contracciones afines, y en el que  $\mathbb{Y} = \mathcal{P}(\mathbb{X})$ . El operador  $O$  se define igual que el operador de Markov, el cual se sabe es contractivo. Se definirá una estructura análoga a esta para los IFS's recurrentes. Considérese el caso de tres copias del espacio  $\mathbb{X}$ . Se trabaja con medidas de Borel normalizadas  $\tilde{\mathcal{P}}$  usando el espacio de medida  $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ ,  $\tilde{\mathcal{P}}$  está definido sobre subconjuntos de Borel  $\tilde{S}$  de  $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathbb{X}$  en la siguiente forma:

$$\tilde{S} = (S_1, S_2, S_3) \in \mathcal{B}(\mathbb{X}) \times \mathcal{B}(\mathbb{X}) \times \mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

donde  $\mathcal{B}(\mathbb{X})$  representa a los subconjuntos de Borel de  $\mathbb{X}$ . Un punto en  $\tilde{\mathcal{P}}$  es un vector de medidas

$$\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

donde  $\mu_i$  es una medida de Borel sobre  $\mathbb{X}$ , tal que

$$\mu_1(\mathbb{X}) + \mu_2(\mathbb{X}) + \mu_3(\mathbb{X}) = 1.$$

Entonces la medida del vector compuesto por los subconjuntos  $\tilde{S} = (S_1, S_2, S_3)$  es

$$\tilde{\mu}(\tilde{S}) = \mu_1(S_1) + \mu_2(S_2) + \mu_3(S_3)$$

Se define la métrica generalizada de Hutchinson  $\tilde{d}$  sobre  $\tilde{\mathcal{P}}$  como

$$\tilde{d}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \sup \left\{ \sum_i \left( \int_{\mathbb{X}} f_i d\mu_i - \int_{\mathbb{X}} f_i d\nu_i \right) : \tilde{f} = (f_1, f_2, f_3) \in L \right\}$$

para todo  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \tilde{\mathcal{P}}$ , donde

$$L = \left\{ \tilde{f} = (f_1, f_2, f_3) : f_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, } y |f_i(x) - f_j(y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, i = 1, 2, 3 \right\}.$$

y dado que  $(\mathcal{P}(\mathbb{X}), d_H)$  y  $(\mathbb{X}, d)$  son espacios métricos compactos, se sigue que,  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{d})$  es también un espacio métrico compacto. Dadas las condiciones se puede definir un operado de Markov generalizado  $\tilde{M}, \tilde{M} : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$  que este asociado al IFS recurrente. Se define

$$\tilde{M}(\tilde{\mu}(\tilde{S})) = \left( \sum_i p_{i1} \mu_i(w_1^{-1}(S_1)), \sum_i p_{i2} \mu_i(w_2^{-1}(S_2)), \sum_i p_{i3} \mu_i(w_3^{-1}(S_3)) \right) \quad (5.11)$$

La expectativa es que este operador sea una contracción cuando las transformaciones  $w_i$  sean contracciones. Para el caso en el que  $p_{ij} = p_j$  y las transformaciones  $w_i$ 's son contractivas con factor de contracción  $0 \leq s < 1$ , se tiene que

$$\tilde{d}(\tilde{M}(\tilde{\nu}), \tilde{M}(\tilde{\mu})) = \sup \left\{ \sum_j \left( \int_{\mathbb{X}} f_j d(\tilde{M}(\tilde{\mu})_j) - \int_{\mathbb{X}} f_j d(\tilde{M}(\tilde{\nu})_j) \right) : \tilde{f} \in L \right\}$$

tenemos que la integral satisface

$$\int_{\mathbb{X}} f_j d(\tilde{M}(\tilde{\mu})_j) = \sum_i p_{ij} \int_{\mathbb{X}} f_i(w_j(x)) d\mu_i(x),$$

reemplazando, se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{M}(\tilde{\nu}), \tilde{M}(\tilde{\mu})) &= \sup \left\{ \sum_{ij} p_{ij} \int_{\mathbb{X}} f_i(w_j(x)) d\mu_i(x) - \sum_{ij} p_{ij} \int_{\mathbb{X}} f_i(w_j(x)) d\nu_i(x) : \tilde{f} \in L \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{ij} p_j \int_{\mathbb{X}} f_i(w_j(x)) d\mu_i - \sum_{ij} p_j \int_{\mathbb{X}} f_i(w_j(x)) d\nu_i : \tilde{f} \in L \right\} \end{aligned}$$

Se define

$$\hat{f}(x) = \left( s^{-1} \sum_j p_j f_j(w_j(x)), s^{-1} \sum_j p_j f_j(w_j(x)), s^{-1} \sum_j p_j f_j(w_j(x)) \right)$$

entonces  $\hat{f} \in L$ , ya que  $s^{-1} \sum_j p_j f_j(w_j(x))$  es un tipo de  $f$ . Sea

$$\hat{L} = \{ \tilde{f} \in L : \text{para algún } f \in L \}.$$

Entonces se puede escribir

$$\tilde{d}(\tilde{M}(\tilde{\nu}), \tilde{M}(\tilde{\mu})) = \sup \left\{ s \int \tilde{f} d\tilde{\mu} - s \int \tilde{f} d\tilde{\nu} : \tilde{f} \in \tilde{L} \right\},$$

ya que  $\hat{L} \subset L$ , entonces se llega a que

$$\tilde{d}(\tilde{M}(\tilde{\nu}), \tilde{M}(\tilde{\mu})) = s\tilde{d}(\tilde{\nu}, \tilde{\mu}).$$

Esta demostración es válida para el caso especial  $p_{ij} = p_j$ .

Para el caso general en el que la matriz de transición  $P = (p_{ij})$  no está condicionada, la contractividad del operador de Markov no depende únicamente de las transformaciones  $w_i$  sino también de la matriz de transición. Esto se puede visualizar considerando que pasa cuando el espacio  $\mathbb{X}$  está compuesto por un punto. Entonces  $\tilde{\mathcal{P}}$  es el conjunto

$$\{\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0\}.$$

y la distancia de Hutchinson está dada simplemente por:

$$\tilde{d}(\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)) = |\mu_1 - \nu_1| + |\mu_2 - \nu_2| + |\mu_3 - \nu_3|.$$

Entonces el operador de Markov está dado por:

$$\tilde{M}(\tilde{\mu}) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)P = (\mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{21} + \mu_3 p_{31}, \mu_1 p_{12} + \mu_2 p_{22} + \mu_3 p_{32}, \mu_1 p_{13} + \mu_2 p_{23} + \mu_3 p_{33})$$

donde  $P$  es la matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene la desigualdad

$$\tilde{d}(\tilde{M}(\tilde{\nu}), \tilde{M}(\tilde{\mu})) \leq s\tilde{d}(\tilde{\nu}, \tilde{\mu})$$

pero no se puede, en el caso general, encontrar un factor de contracción  $s$ , como en el caso de

$$P = \begin{bmatrix} 1 - 2\epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 - 2\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 1 - 2\epsilon \end{bmatrix}$$

en el que  $\epsilon$  es un número positivo muy pequeño. Para esta matriz de transición se encuentra que

$$\tilde{d}\left(\tilde{M}((1, 0, 0)), \tilde{M}((0, 0, 1))\right) = (1 - 3\epsilon)\tilde{d}((1, 0, 0), (0, 0, 1)).$$

por lo que para  $\epsilon$  muy pequeño las distancias serían aproximadamente iguales. Además si el operador tiene un único punto fijo, debe existir una métrica en la que el operador de Markov sea contractivo.

El operador de Markov  $M$  para IFS con probabilidades es un ejemplo de transformación que preserva las medidas sobre un espacio métrico.

Dado un conjunto de espacios,  $\{\mathbb{X}_k : k = 1, 2, 3, \dots, N\}$ , se pueden construir transformaciones preservando la medida  $M_{ij} : \mathcal{P}(\mathbb{X}_i) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{X}_j)$ , acorde a

$$M_{ij}(\nu) = p_{ij1}\nu \circ w_{ij1}^{-1} + p_{ij2}\nu \circ w_{ij2}^{-1} + \dots + p_{ijN_{ij}}\nu \circ w_{N_{ij}}^{-1}$$

donde  $w_{ijn} : \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{X}_j$  para  $n \in \{1, 2, \dots, N_{ij}\}$  es contractiva entre los espacios métricos  $(\mathbb{X}_i, d_i)$  y  $(\mathbb{X}_j, d_j)$  de acuerdo a

$$d_j(w_{ijn}(x), w_{ijn}(y)) \leq s \cdot d_i(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}_i$$

y  $p_{ijn}$  positivo tal que

$$\sum_n p_{ijn} = 1.$$

El IFS  $\{\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j; w_{ijn}, p_{ijn}, n = 1, 2, 3, \dots, N_{ij}\}$  actúa entre los espacios  $\mathbb{X}_i$  y  $\mathbb{X}_j$ . Entonces la matriz de transición de dimensión  $N \times N$   $P = p_{ij}$ , estocástica en las filas, da la probabilidad de transición entre el espacio  $\mathbb{X}_i$  al  $\mathbb{X}_j$ .

Se puede definir el operador de Markov  $\tilde{M} : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$ , donde  $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\mathbb{X}_1) \times \mathcal{P}(\mathbb{X}_2) \times \mathcal{P}(\mathbb{X}_3) \times \dots \times \mathcal{P}(\mathbb{X}_N)$ , por

$$\tilde{M}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N) = \left( \sum_i p_{i1} M_{i1}(\mu_i), \sum_i p_{i2} M_{i2}(\mu_i), \sum_i p_{i3} M_{i3}(\mu_i), \dots, \sum_i p_{iN} M_{iN}(\mu_i) \right)$$

El cual se espera que sea contractivo.

En este capítulo se discutieron aspectos formales de la teoría de la medida, así como también se definió el espacio de las probabilidades  $\mathcal{P}(X)$ , la métrica de Hutchinson  $d_H$  y el operador de Markov  $M$ , elementos que componen un sistema fractal. Se describen los IFS's recurrentes como una extensión de los IFS's con probabilidad, los cuales están asociados con los procesos de Markov a primer orden (también llamadas cadenas de Markov), y que permiten obtener una variedad más amplia de fractales deterministas. Se hace un pequeño resumen sobre como se usan los IFS's recurrentes para simular representaciones del juego del caos de las secuencias de DNA. Finalmente, se estudia los procesos de Markov los cuales están estrechamente relacionados con el vector de medida.

# Capítulo 6

## Multifractales

Considere una “población” que tiene a sus miembros distribuidos sobre un volumen  $L^E$  de forma irregular, esta población podría ser en principio la población humana, la cantidad de oro distribuida sobre la tierra o la distribución de la energía disipada. El oro se distribuye de tal forma que hay pocos lugares en los que la concentración sea alta, pero se encuentra en pocas cantidades en cualquier lugar. Las distribuciones de la energía disipada en el ambiente producto del flujo de turbulencias y las impurezas en una superficie. Teniendo esto en cuenta, la teoría multifractal está relacionada con el estudio de las distribuciones de cantidades físicas y de otros tipos sobre un soporte geométrico. El soporte puede ser un plano ordinario, la superficie de una esfera o su volumen, o podría ser en si mismo un fractal. Los multifractales surgen como una generalización de los fractales, permitiendo hacer una descripción con espectros de dimensiones y no con una única dimensión como en el caso fractal simple. Se puede decir que un multifractal es un conjunto de fractales que se encuentran íntimamente entrelazados. Este concepto fue originalmente introducido por Mandelbrot (Mandelbrot, 1972), quien también expuso algunos lugares en los que se podrían encontrar, desde entonces se han realizado muchas investigaciones relacionadas con los multifractales.

### 6.1. Medida Multifractal

En esta sección se estudian dos casos de IFS's unidimensionales con probabilidad, tema que se trató en el capítulo 5, se muestra como desentrañar la estructura interna que tienen estos sistemas.

#### 6.1.1. La medida de Cantor

En capítulos anteriores se había discutido el conjunto de Cantor y su construcción, tómesese de nuevo como ejemplo para introducir a la discusión. Como se había visto el conjunto de Cantor se obtiene al dividir el intervalo unitario en tres partes iguales y eliminar el intervalo medio, los dos intervalos restantes son nuevamente divididos en tercios eliminando el intervalo central, y se repite

este proceso en cada intervalo resultante infinitas veces. Como se había dicho en el capítulo 1, esto se puede escribir como:

$$I_0 = [0, 1],$$

$$I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1],$$

$$I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1],$$

$I_3 =$  se construye a partir del conjunto  $I_2$ ; se toma cada intervalo por separado, se divide en tercios y se elimina el intervalo medio en cada uno de los subintervalos y se unen nuevamente. El conjunto de Cantor está definido como  $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ , y su dimensión fractal y de Hausdorff es  $D = -\frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2$ . Cada uno de los conjuntos  $I_n$  es una cubierta del conjunto de Cantor de orden  $n$  con medida  $\mu(I_n)$ . Una cubierta  $I_n$  del conjunto de Cantor tiene  $2^n$  subconjuntos de longitud  $3^{-n}$  a los que se les llama *cilindros* de orden  $n$ , caracterizados como  $C_{z_1 z_2 z_3, \dots, z_n}$  con  $z_i = \{0, 1, 2\}$  indicando cada uno de los tres intervalos resultantes de la partición, 0 para el intervalo izquierdo, 1 para el central y 2 para el derecho, por tratarse del conjunto de Cantor el intervalo central se encuentra ausente por lo que  $z_i$  solo tomara los valores 0 o 2. La cubierta  $I_0 = [0, 1]$  contiene a todos los números ternarios de la forma  $0.z_1 z_2 z_3 \dots$  con  $z_i = \{0, 1, 2\}$ , por lo que la distribución de probabilidad es homogénea. Si se asignan las probabilidades  $p_0 \in [0, 1]$  a  $z_i = 0$ ,  $p_1 = 0$  a 1 y  $p_2 = 1 - p_0$  a 2, el peso estadístico de la cubierta  $I_N$  satisface la relación:

$$\mu(I_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} (p_0 + p_1 + p_2)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (p_0 + p_2)^N = 1.$$

En términos de IFS's con probabilidad, el conjunto de Cantor se puede obtener con tres transformaciones en el espacio  $X = [0, 1]$ , específicamente

$$\left\{ X = [0, 1]; w_0(x) = \frac{1}{3}x, w_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; p_0, p_1 = 0, p_2 \right\}.$$

En la primera iteración la medida de Cantor se obtiene al asignar al intervalo de la izquierda la probabilidad  $\mu_0(C_0 = [0, 1/3]) = p_0$  y al de la derecha  $\mu_2(C_2 = [2/3, 1]) = p_2$ , como se muestra en la figura 6.1. La medida del intervalo central  $\mu_1(C_1 = [1/3, 2/3]) = p_1 = 0$  es equivalente a hacer  $z_i = \{0, 2\}$ . Se observa también que los intervalos que componen la cubierta  $I_1$  contienen a los puntos de la forma  $0.0c_2c_3\dots \in C_1 = [0, 1/3]$  y  $0.2c_2c_3\dots \in C_2 = [2/3, 1]$  y cuyos pesos estadísticos son:

$$\mu(C_0) = p_0 \lim_{N \rightarrow \infty} (p_0 + p_2)^N = p_0$$

$$\mu(C_2) = p_2 \lim_{N \rightarrow \infty} (p_0 + p_2)^N = p_2$$

sin tener en cuenta  $\mu(C_1) = p_1 \lim_{N \rightarrow \infty} (p_0 + p_2)^N = p_1 = 0$  por ser nula. Al repetir el proceso iterativamente se obtienen diferentes distribuciones, como se muestra en la figura 6.1. Considérese

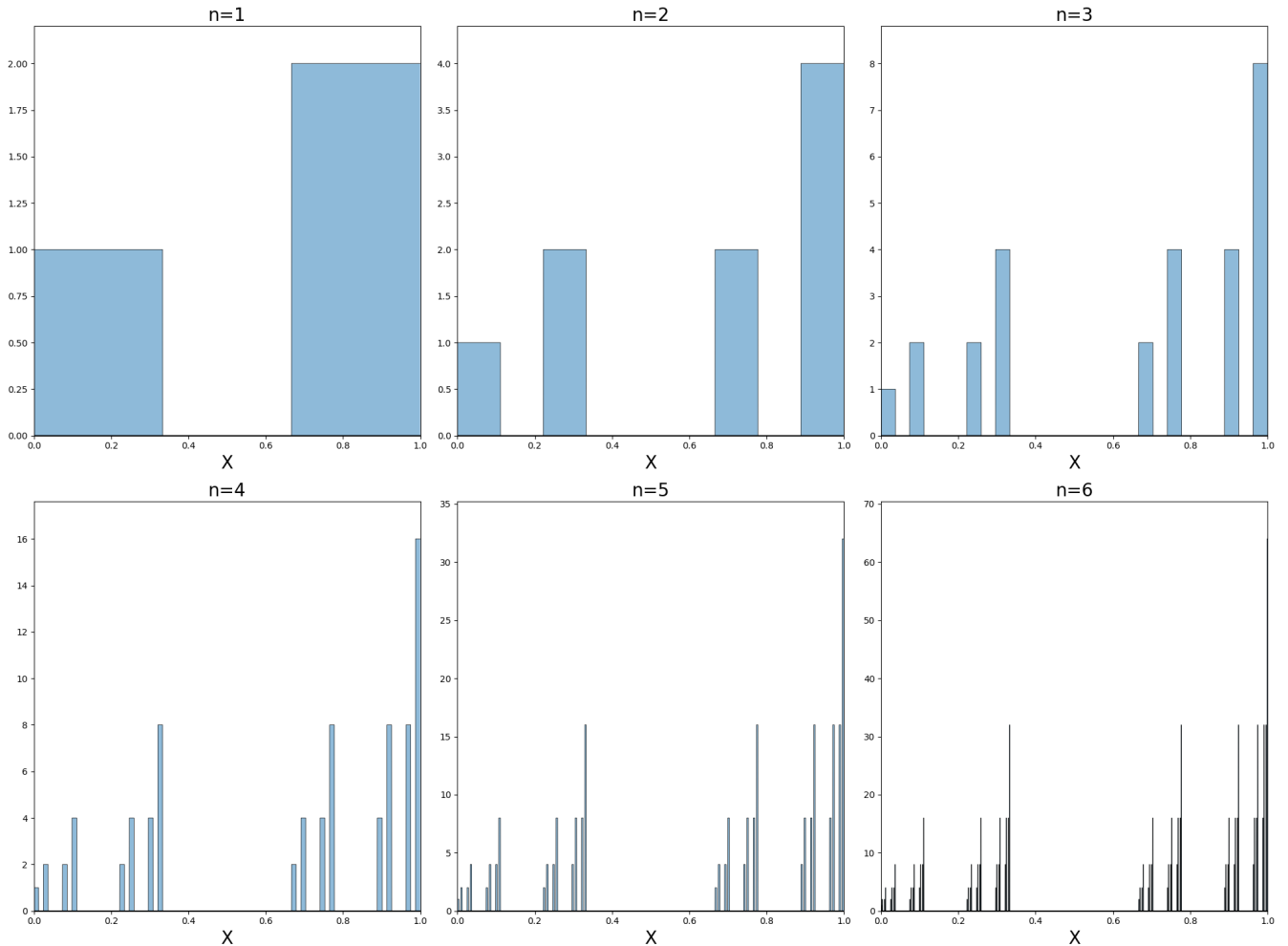
este último ejemplo para la cubierta  $I_2$ , tenemos cuatro cubiertas de longitud  $3^{-2}$ ;

$$0.00c_3c_4\dots \in C_{00} = [0, 1/9] \quad 0.02c_3c_4\dots \in C_{02} = [2/9, 1/3]$$

$$0.20c_3c_4\dots \in C_{20} = [2/3, 7/9] \quad 0.22c_3c_4\dots \in C_{22} = [8/9, 1]$$

los cuales tienen medida  $\mu(C_{00}) = p_0^2$ ,  $\mu(C_{02}) = p_0p_2$ ,  $\mu(C_{20}) = p_2p_0$  y  $\mu(C_{22}) = p_2^2$  por lo que la medida probabilística de la cubierta de orden dos es igual a uno,  $\mu(I_2) = \mu(C_{00}) + \mu(C_{02}) + \mu(C_{20}) + \mu(C_{22}) = p_0^2 + p_0p_2 + p_2p_0 + p_2^2 = (p_0 + p_2)^2 = 1$ . Para una cubierta de orden  $n$  se obtiene

$$\mu(I_n) = \sum_{z_1=0}^2 \sum_{z_2=0}^2 \sum_{z_3=0}^2 \dots \sum_{z_n=0}^2 \mu(C_{z_1z_2z_3\dots z_n}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_0^k p_2^{n-k} = (p_0 + p_2)^n = 1$$



**Figura 6.1:** Distribuciones de probabilidad para las cubiertas de orden  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$  con  $p_0 = 1/3$  asignada a la izquierda y  $p_2 = 2/3$  a la derecha.

El proceso puede ser esquematizado con el siguiente ejemplo: Supóngase que se tiene una barra de algún material que tiene una densidad uniforme  $\rho_0 = 1$  y longitud  $l_0 = 1$ , por lo que su masa es igual a  $\mu_0 = 1$ . Ahora se corta la barra en dos partes de masa  $\mu_1 = 1/2$  ajustando su longitud a

$l_1 = 1/3$ , lo que causa que la densidad de las barras cambie a  $\rho_1 = \mu_1/l_1 = 3/2$ . Repetir este proceso  $n$  veces genera  $N = 2^n$  barras de longitud  $l_n = 3^{-n}$  con masa  $\mu_n = 2^{-n}$ , este proceso conserva la masa total

$$C_n = \sum_{i=1}^N \mu_i = 1.$$

La masa de las barras satisface una regla de escala dada por  $\mu_i = l_i^\alpha$ , donde el exponente de escala está dado por  $\alpha = \log 2 / \log 3$ . La densidad de las barras  $\rho_i = \rho_0 l_i^{\alpha-1}$  crece rápidamente al disminuir su longitud lo que sugiere que cuando  $l \rightarrow 0$  la densidad será divergente, por lo que el exponente  $\alpha$  controla la singularidad de la densidad, por esta razón algunas veces es llamado exponente de singularidad. La masa de la barra es un ejemplo de medida invariante, se dice que una medida es singular cuando la medida de una variable aleatoria  $\xi$  se encuentre en el intervalo  $(x \leq \xi \leq x + \Delta x)$  satisface la ley de potencia:

$$\mu(x \leq \xi \leq x + \Delta x) = \Delta x^{\alpha(x)}$$

como pasa en el caso de la masa de la barra. Cuando una medida es singular la densidad de probabilidad solamente existe cuando  $\alpha(x)$  es igual a 1 en todo el intervalo, puesto que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mu(x \leq \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^{\alpha(x)-1} = \begin{cases} 0 & \text{sí } \alpha(x) > 1 \\ \infty & \text{sí } \alpha(x) < 1. \end{cases}$$

Se puede definir la “masa” de un segmento  $[0, x]$  con  $x \in [0, 1]$ , para la medida  $\mu_n$ , correspondiente a la  $n$ -ésima iteración, como

$$C_n(x) = \int_0^x \rho(t) dt = \int_0^x d\mu_n(t),$$

esta función en el límite  $n \rightarrow \infty$  se conoce como la función de Cantor o escalera del diablo. La función  $C(x)$  se puede interpretar como una función de distribución acumulada, en el capítulo anterior se obtuvo un resultado para conjuntos de la forma  $J_i = [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$  con  $i = \{1, 2, 3, \dots, N\}$

$$C_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k-1} y_i + y_k \left( x - \frac{k-1}{N} \right).$$

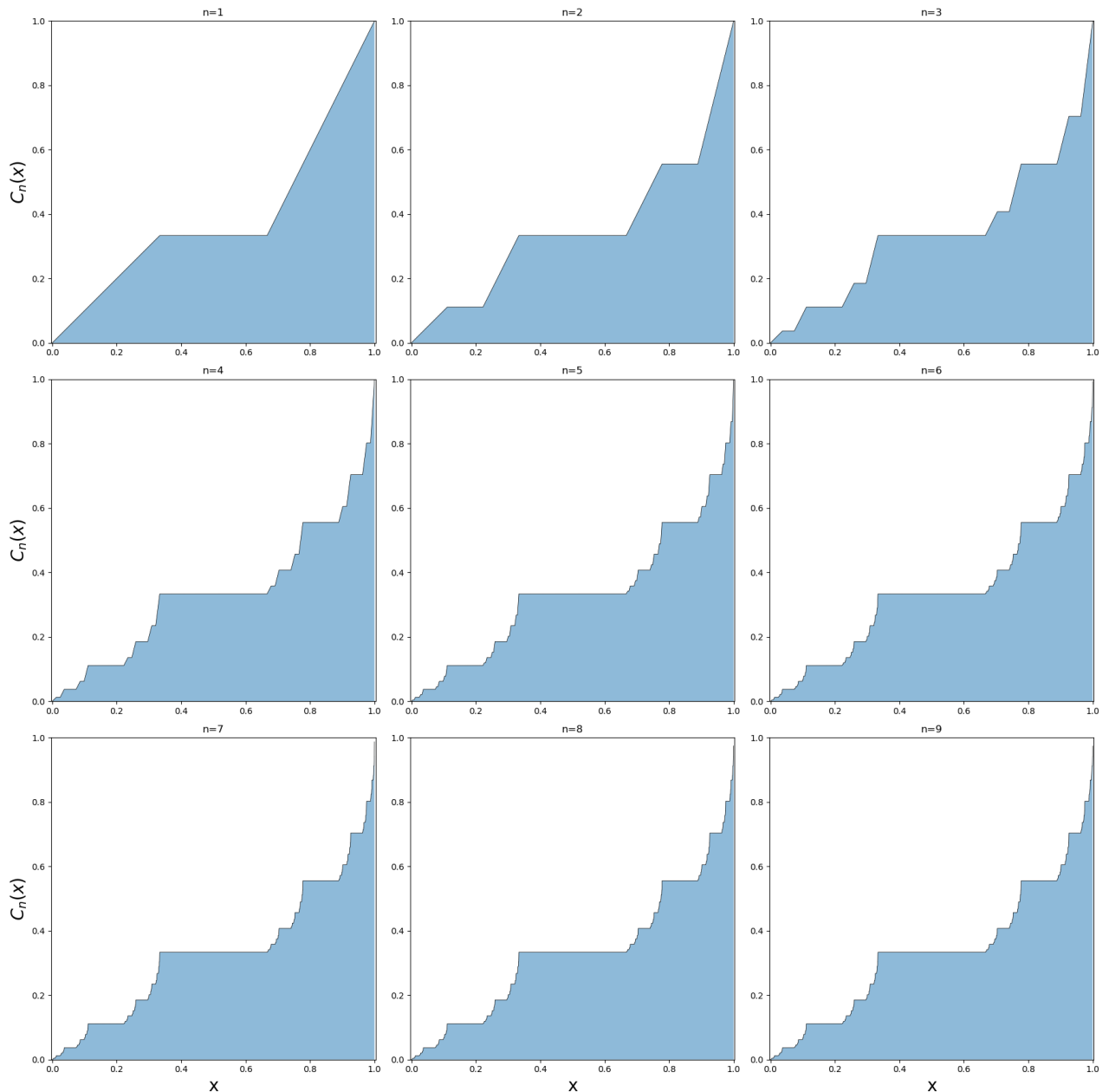
Para este caso en particular los conjuntos  $I_n$  están compuestos por los cilindros  $C_{z_1 z_2 z_3, \dots, z_n}$  que a su vez son los conjuntos  $J_i$ , a orden uno  $N = 3$ , por lo que se tienen tres cubiertas  $C_0, C_1$  y  $C_2$ , esto quiere decir que la función está compuesta por tres rectas unidas por los puntos

$x$	0	1/3	2/3	1
$C_1$	0	$y_1/N = 1/3$	$(y_1 + y_2)/N = y_1/N = 1/3$	$\sum_{i=1}^3 y_i/N = 1/3 + 2/3 = 1$

donde  $y_1 = 3p_0 = 1$ ,  $y_2 = 3p_1 = 0$  y  $y_3 = 3p_2 = 2$ . En la figura 6.2 se muestran los resultados de las primeras iteraciones, en donde se puede observar que las curvas presentan un comportamiento



autoafín. La Función de Cantor también se puede obtener a través de un IFS con mapeos de tono de grises (IFSM), este tema se tratará más adelante.



**Figura 6.2:** La “masa” de una conjunto de Cantor como función de la posición en el intervalo  $[0, 1]$ .

Ahora, si se considera la razón de cambio de la probabilidad en el primer cilindro de  $I_n$  tomando la medida  $\mu_n$  como la medida a orden  $n$ , se puede ver que para todo  $n$

$$\frac{\log \mu_n([0, 3^{-n}])}{\log \delta_n} = \frac{\log(3^{-n})}{\log(3^{-n})} = 1$$

donde  $\delta_n = 3^{-n}$  es el ancho del intervalo. Para el último intervalo

$$\frac{\log \mu_n([1 - 3^{-n}, 1])}{\log \delta_n} = \frac{\log((2/3)^n)}{\log(3^{-n})} = 1 - \log_3 2 \approx 0.3691.$$

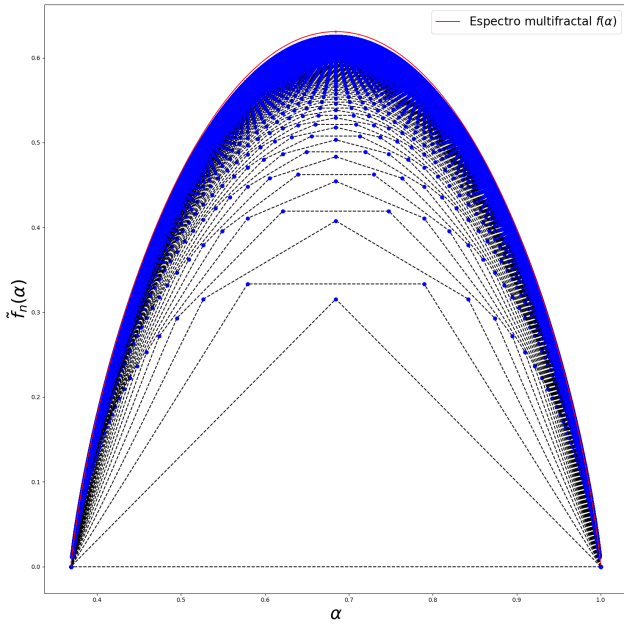
Sea  $I_n(\alpha)$  el conjunto que contiene a los subintervalos de la  $n$ -ésima iteración (a orden  $n$ ), tal que para  $C_{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n} \in I_n(\alpha)$  entonces

$$\frac{\log \mu(C_{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n})}{\log \delta_n} = \alpha.$$

Sea  $\#I_n(\alpha)$  el número de subintervalos en  $I_n(\alpha)$ , estos son aquellos que comparten la misma medida y en consecuencia el mismo  $\alpha$ , por ejemplo,  $\#I_3(0.3691) = 1$ ,  $\#I_3(0.5794) = 3$ ,  $\#I_3(0.7897) = 3$ , y  $\#I_3(1) = 1$ , de tal forma que para cubrir  $\#I_3(0.5794)$  se necesitan tres intervalos o cubiertas. Considerando valores de  $\alpha$  tales que  $\#I_n(\alpha) > 0$ , se define la dimensión pre-fractal como:

$$\tilde{f}_n(\alpha) = \frac{\log \#I_n(\alpha)}{\log 1/\delta_n},$$

en la figura 6.3 se muestra la función  $\tilde{f}_n(\alpha)$  para las primeras 500 iteraciones, también se encuentra la función  $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(\alpha)$ , llamada *espectro multifractal*.



**Figura 6.3:** Espectro multifractal del conjunto de Cantor  $\tilde{f}(d)$ , y bajo esta curva los puntos  $\tilde{f}_n(d)$  de sus primeras 500 iteraciones.

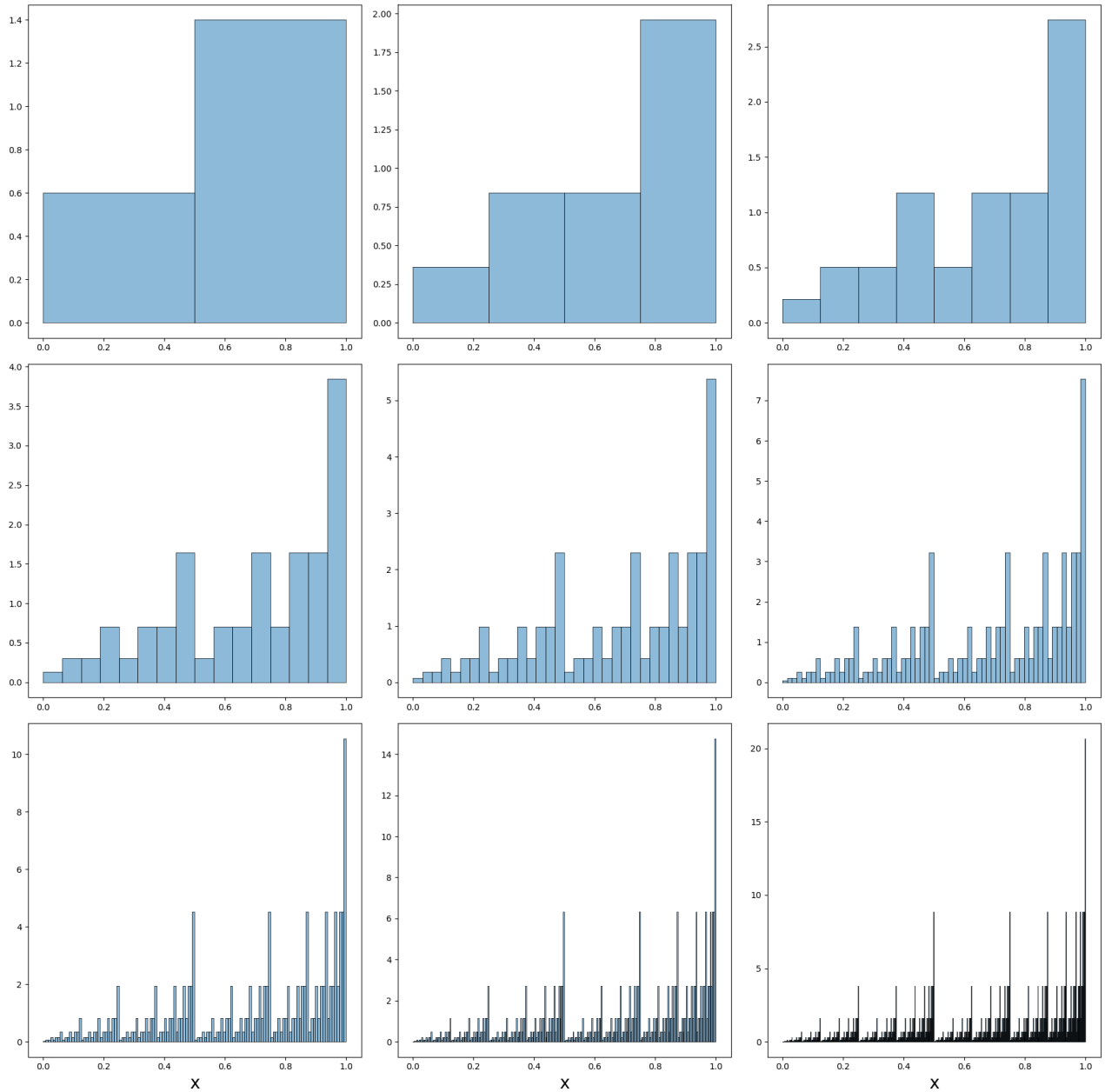
El siguiente es otro ejemplo sobre el espectro multifractal que ayuda a profundizar en el tema.

### 6.1.2. Fractales Autoafines sin Huecos

Considérese ahora un proceso de bisección, que consiste en partir un conjunto a la mitad y asignar probabilidades en cada una. En este caso se estudiará el intervalo unitario  $[0, 1]$ , el cual es dividido en dos partes iguales  $C_0 = [0, 1/2]$  y  $C_1 = [1/2, 1]$ , a las que se les asigna las probabilidades  $p_0$  y  $p_1 = 1 - p_0$  respectivamente. El proceso se puede repetir indefinidamente sobre cada intervalo haciendo que este proceso sea un caso especial de un proceso multiplicativo. Nuevamente el resultado se puede obtener con IFS con probabilidades

$$\left\{ X = [0, 1]; w_0(x) = \frac{1}{2}x, w_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; p_0, p_1 \right\}.$$

cuyas probabilidades se muestra en forma de barras. Iteraciones infinitas en tales procesos resultan en una distribución autoafín de la densidad de probabilidad. Este proceso se puede observar en la figura 6.4 en donde la probabilidad es el área bajo la curva.

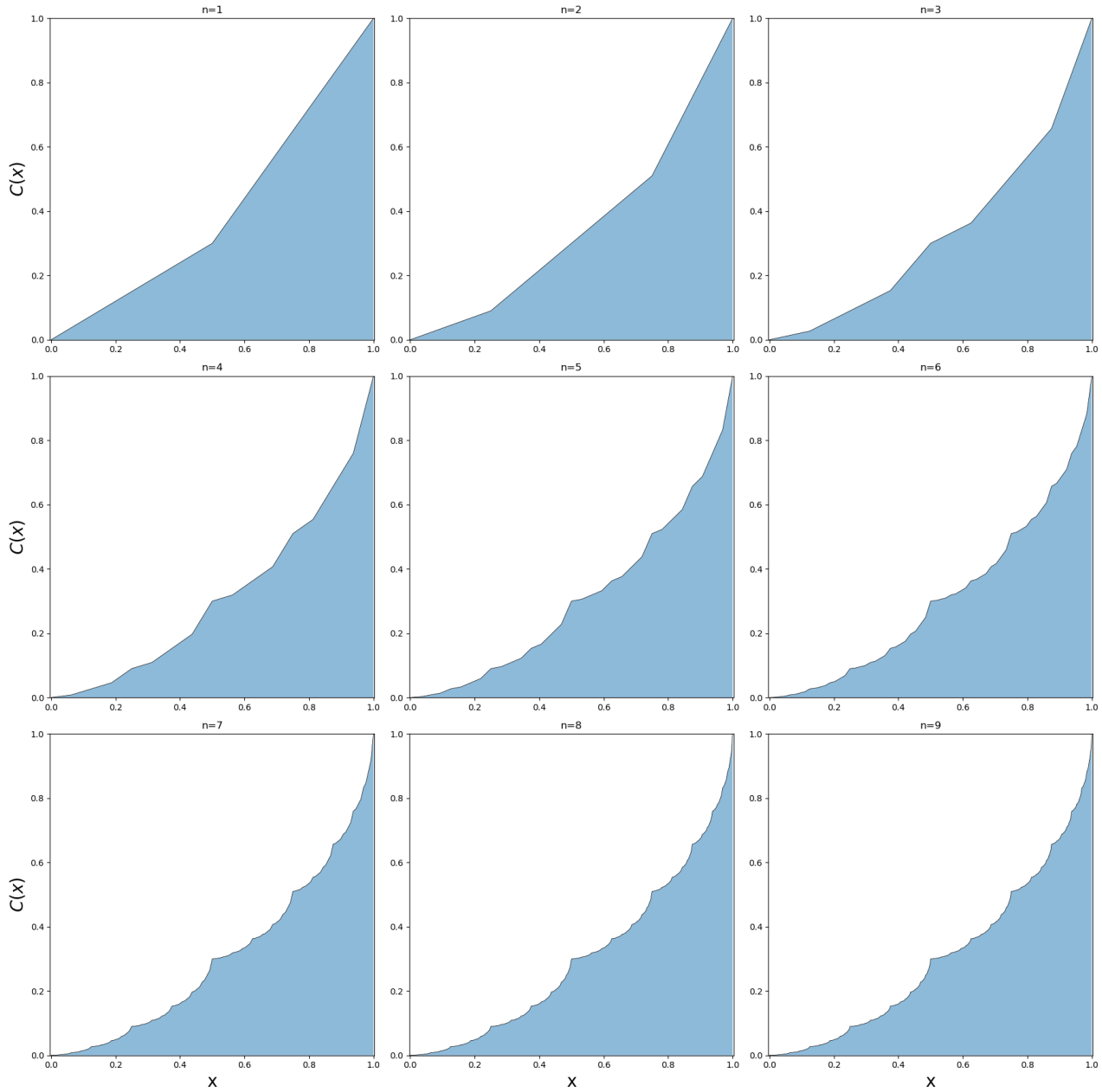


**Figura 6.4:** Distribuciones de probabilidad obtenida mediante bisección iterativa. Se puede observar que muchas de la barra comparten las mismas probabilidades.

Después de  $n$  iteraciones, la probabilidad en el intervalo  $m \cdot 2^{-n} < x < (m + 1)2^{-n}$ , para  $m = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ , está dado por  $p_0^k p_1^{n-k}$ , donde  $k$  es el número de unos en los primeros  $n$  lugares binarios de  $x$ , por lo que  $k = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Por ejemplo, para  $n = 6$ ,  $x = \frac{1}{5} = 0.00110011\dots$  tiene dos 1's en los primeros seis lugares binarios. Por lo tanto la probabilidad es igual a  $p_0^2 p_1^4$  para todo el intervalo  $0.001100 = \frac{12}{64} < x < \frac{13}{64} = 0.001101$ . En términos de cilindros  $x \in C_{001100} = [12/64, 13/64]$ , es decir, cualquier número binario que empiece por 0.001100. La longitud de este cilindro es  $2^{-6}$ , y contiene a  $x = \frac{1}{5}$ . En la sexta iteración, existen  $\binom{n}{k} = \binom{6}{2} = 15$  intervalos con densidad  $p_0^k p_1^{n-k} = p_0^2 p_1^4$ , es decir, hay 15 intervalos cuyos valores de  $x$  tienen precisamente dos unos en sus primeros seis lugares binarios. La razón de la notación binaria para  $x$  se atribuye a que describe un tipo de distribución en la que los ceros y los unos indican la ubicación de los intervalos además de la probabilidad

correspondiente.

La “masa” entendida como una función de distribución acumulada, también tiene un comportamiento autoafín, figura 6.5.



**Figura 6.5:** Función de distribución acumulada para el proceso de bisección. A diferencia de la función de Cantor esta distribución de “masa” no tiene intervalos constantes, es una función siempre creciente.

Nótese la autoafinidad incipiente en esta construcción recursiva: la mitad derecha de cada distribución (ver figura 6.4) es igual a la mitad izquierda multiplicada por  $1/p_0$ . En el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  la distribución de probabilidad  $P(x)$  para  $x \in [0, 1]$  es

$$P(x) = \frac{1}{p_0} P\left(\frac{x}{2}\right), \quad (6.1)$$

esta es una ecuación funcional. Esta propiedad se puede demostrar analíticamente para la proba-

bilidad acumulada estacionaria, considerando que las probabilidades aculadas en  $[0, x/2]$  y  $[x/2, x]$ , satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{P([0, x/2])}{[x/2, x]} = \frac{p_0}{p_1}$$

con  $P([0, x/2]) + P([x/2, x]) = P([o, x])$ , de donde se obtiene

$$\frac{P(x/2)}{P(x) - P(x/2)} = \frac{p_0}{p_1}$$

de aquí se tiene que  $P(x) = P(x/2)/p_0 = P(x/2)/(1 - p_1)$ . La probabilidad acumulada estacionaria satisface esta relación para cualquier intervalo  $[0, x]$  como también para el intervalo  $[0, x/2]$ . Los factores 2 y  $1/p_0$  son los factores de escala en este fractal autoafín, y ocurre lo mismo para la distribución de “masa”.

En el proceso de bisección la dimensión fractal y la de Hausdorff usual basada en el límite cuando  $r \rightarrow 0$  de  $\log N/\log(1/r)$ , es de poca ayuda. Después de  $n$  iteraciones del número de piezas es igual a  $N = 2^n$  y la longitud  $\delta_n$  de cada pieza es  $r^n = 2^{-n}$ , entonces  $D = 1$  igual que la dimensión euclidiana del intervalo unitario.

La estructura multifractal se manifiesta cuando se enfoca la atención en como están distribuidas las probabilidades. Se encuentra que después de  $n = 2m$  iteraciones el mayor número de segmentos tiene una probabilidad  $p_0^m p_1^m$  (esto ocurre para  $k = m$ ) es igual al coeficiente binomial  $\binom{n}{m}$ , es decir, todos los cilindros de la forma  $C_{z_1 z_2 z_3, \dots, z_{n=2m}}$  (donde  $z_i = \{0, 1\}$ ) que tengan igual número de uno y ceros en el subíndice. Estos subintervalos se localizan en el intervalo unitario como todos los intervalos cerrados con longitud  $\delta_n = 2^{-n}$  cuyas abscisas tienen igual número de ceros y unos en los primeros  $n$  lugares binarios de  $x$ . Este conjunto tienen la mayor dimensión de Hausdorff, en este caso

$$D = \frac{1}{n} \log_2 \binom{n}{n/2}$$

por lo que surge la pregunta sobre cuál es la dimensión fractal de los conjuntos con probabilidades  $p_0^k p_1^{n-k}$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  que se analizara a continuación.

En general, hay  $\binom{n}{k}$  segmentos de longitud  $\delta_n = 2^{-n}$  con probabilidad  $p_0^k p_1^{n-k}$ , que en total representan una probabilidad igual a

$$P_{\frac{k}{n}} = \binom{k}{n} p_0^k p_1^{n-k},$$

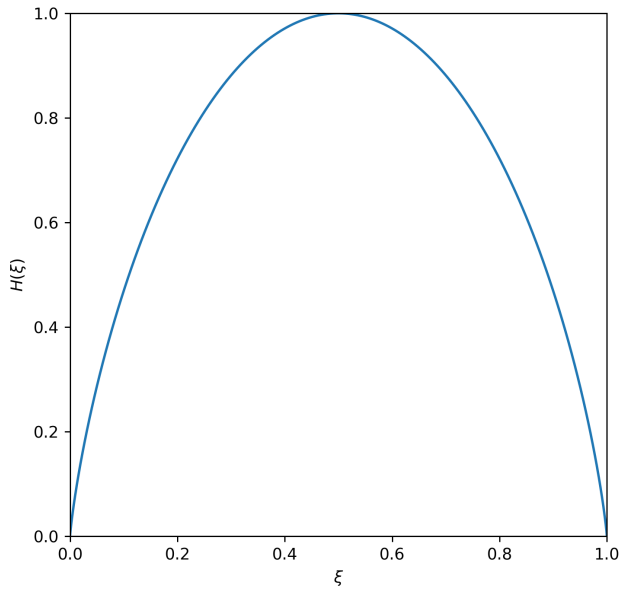
y densidad de probabilidad  $p_{\frac{k}{n}} = \binom{k}{n} (1 - p)^k p^{n-k} 2^{-n}$ . La probabilidad total se mantiene invariante satisfaciendo que  $\sum_{k=0}^n P_{k/n} = 1$ . Para valores grandes de  $n$  ( $n > 10$ ) se puede usar la fórmula de

Stirling en los factoriales e ignorando el factor  $(n/2\pi k(n-k))^{1/2}$ , se puede escribir

$$\binom{n}{k} \approx \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-n} = 2^{nH(k/n)} \quad (6.2)$$

donde  $H$  es la función de entropía, conocida en termodinámica y teoría de la información como:

$$H(\xi) := -\xi \log_2 \xi - (1 - \xi) \log_2(1 - \xi) = \frac{\log \xi^\xi (1 - \xi)^{1-\xi}}{\log 1/2}. \quad (6.3)$$



**Figura 6.6:** Función de entropía  $H(\xi)$ .

El comportamiento de esta función se muestra en la figura 6.6. La dimensión fractal del conjunto de todos estos subintervalos que tienen en común la probabilidad  $p_0^k p_1^{n-k}$  está dada por

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \binom{n}{k}}{n \log(1/r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \binom{n}{k}}{n \log 1/\delta_n} \quad (6.4)$$

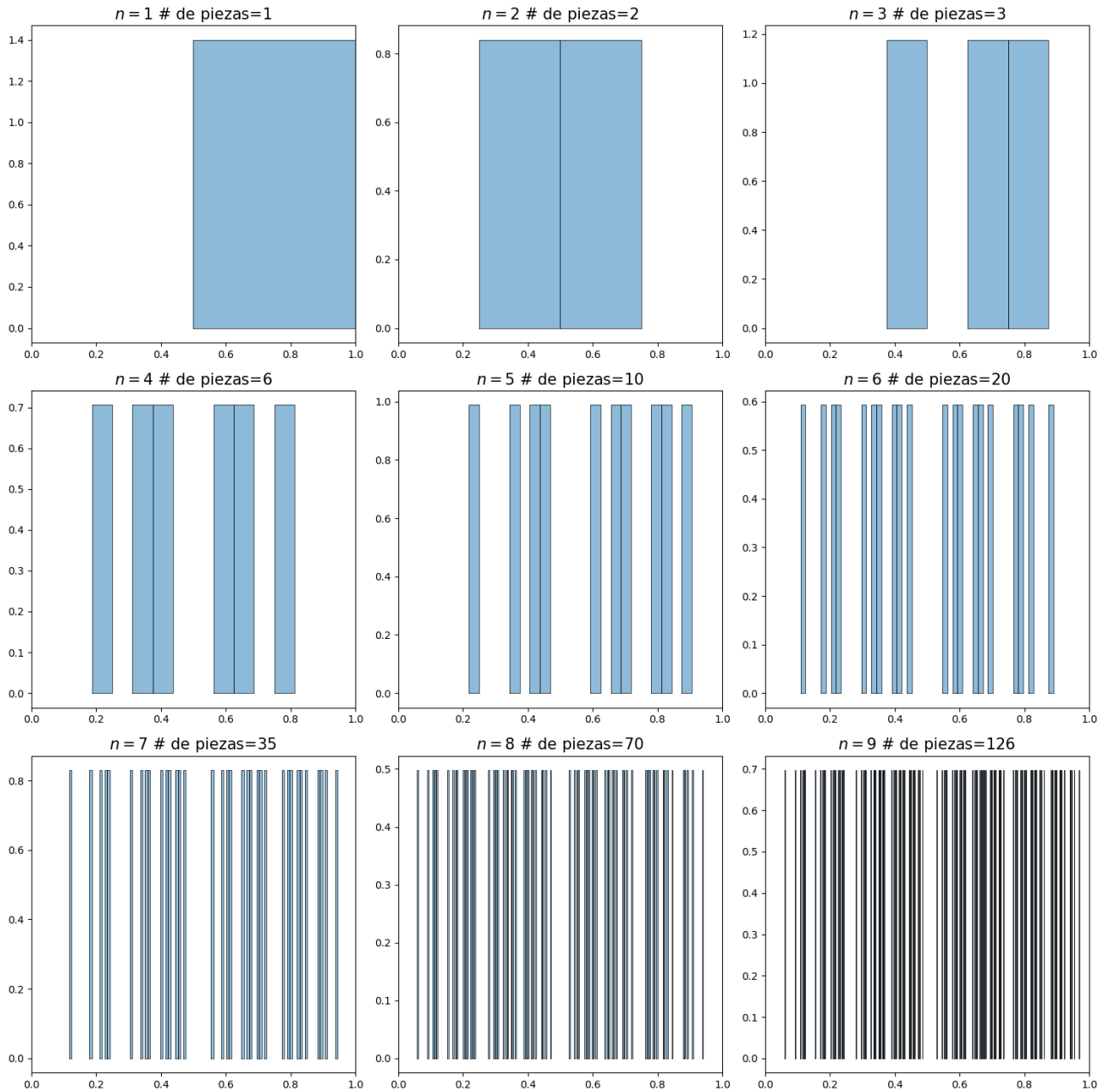
en donde  $\xi = k/n$ . El resultado anterior como se verá en la sección 6.6 es un caso particular del teorema de Eggleston. Para  $r = 1/2$  y usando la aproximación en la ecuación 6.2 se obtiene que

$$f(\xi) = H(\xi). \quad (6.5)$$

Entonces, dependiendo del valor de la variable  $\xi$ , la cual representa una probabilidad dada ( $\xi = k/n$  para la probabilidad  $p_0^k p_1^{n-k}$ ), se obtienen diferentes dimensiones fractales en el soporte de tal probabilidad. De hecho, el rango de  $f(\xi)$ , va de 0 para  $\xi = 0$  y 1 a  $f(\xi) = 1$  para  $\xi = 0.5$ ,  $\xi = 0$  y 1 representan las probabilidades con menor población, solo hay un subintervalo que tiene probabilidad  $p_0^n$  y otro con probabilidad  $p_1^n$ , los cuales están en los extremos de  $[0, 1]$ . Esta es una razón por la cual tales fractales son llamados multifractales. Nótese que los subconjuntos del intervalo unitario que tienen dimensión fractal  $f(\xi)$  están dispersos en todo el intervalo entrelazándose con los conjuntos que tienen otras dimensiones.

Los subconjuntos fractales del multifractal no tienen un patrón tan regular como el que presenta el conjunto de Cantor u otros fractales construidos con IFS's. En la figura 6.7 se muestra una sucesión de imágenes del orden  $n = 1$  hasta  $n = 9$ , en las que se observan los elementos que tienen probabilidad  $p_0^{\lfloor n/2 \rfloor} p_1^{n - \lfloor n/2 \rfloor}$  donde  $\lfloor x \rfloor$  es el mayor entero menor que  $x$ . Para este caso, se divide el intervalo unitario en  $2^n$  subintervalos iguales, se seleccionan aquellos cilindros de orden  $n$ , que tienen  $n/2$  ceros y  $n - n/2$  unos, de manera que el número de cilindros es  $\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n-n/2)!}$ . Separando los valores de  $n$  en pares e impares con  $\# =$  Número de cilindros a orden  $n$  con la característica anterior tenemos: para

$n$  par y  $n = 2m$



**Figura 6.7:** Sucesión de imágenes que muestra la construcción de un subconjunto fractal compuesto por los elementos con mayor probabilidad, en el que se puede detallar que el fractal no es autoafín.

$$\# = \frac{2m!}{m!m!}$$

y para  $n$  impar con  $n = 2m + 1$

$$\# = \frac{(2m + 1)!}{m!(m + 1)!}$$

así se tienen que la dimensión fractal esta dada por:

$$f_{n=2m} = \frac{\log \left( \frac{2m!}{m!m!} \right)}{2m \log 2}$$

y

$$f_{n=2m+1} = \frac{\log \left( \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} \right)}{2m \log 2}.$$

Se pueden ver dos irregularidades en la construcción de este fractal, una de estas se presenta en el patrón al parecer geoméricamente más irregular que los fractales autoafines, y otra, consecuencia de la no autoafinidad y el número de piezas que lo componen, que hacen que la convergencia de la dimensión fractal se produzca más lentamente.

Después de haber considerado la dimensión fractal  $f(\xi)$  del soporte de un multifractal, ¿cómo asegurar que las densidades de probabilidad de la forma  $p_0^k p_1^{n-k} / \delta_n$  no converjan a cero o diverjan a infinito cuando  $n \rightarrow \infty$ ?. Con el propósito de evitar las divergencias se introduce el exponente de *Lipshitz-Hölder*  $\alpha(\xi)$  de la siguiente manera:

$$p_0^k p_1^{n-k} r^{-n\alpha(\xi)} = p_0^k p_1^{n-k} \delta_n^{-\alpha(\xi)}$$

lo que caracteriza las singularidades de las probabilidades, entonces el exponente tiene la forma

$$\alpha(\xi) = \frac{\xi \log p_0 + (1 - \xi) \log p_1}{\log r} = \frac{\log p_0^\xi p_1^{1-\xi}}{\log r}. \quad (6.6)$$

Otra manera alternativa de introducir el exponente  $\alpha$  es hacer

$$p_0^k p_1^{n-k} \delta_n^{-\alpha(\xi)} = C(\xi)$$

donde  $C(\xi) \neq 0, \infty$ , se tiene entonces que  $C(\xi) = (2^{\alpha(\xi)} p_0)^k (2^{\alpha(\xi)} p_1)^{n-k}$  con  $C(\xi) = 1$

$$\alpha(\xi) = -\frac{\log p_0^\xi p_1^{1-\xi}}{\log 2}.$$

Para el proceso de bisección en particular, en el que  $\xi = k/n$  y  $r = 1/2$  se tiene que

$$\alpha(\xi) = \frac{\log p_0^k p_1^{n-k}}{n \log r} = \frac{\log \mu_n(C_{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n})}{\log \delta_n}$$

en donde  $\mu_n(C_{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n})$ , igual que en la sección anterior, es la medida de  $C_{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n} \in I_n(\alpha)$  en donde  $I_n(\alpha)$  es el conjunto que contiene a los subintervalos de longitud  $\delta_n$  de la  $n$ -ésima iteración con razón de cambio  $\alpha$ .

Como se ve en la ecuación 6.6,  $\alpha(\xi)$  es una función líneal de  $\xi$ , monótona creciente para  $p_0 < 0.5$  y monótona decreciente para  $p_0 > 0.5$ . Para  $\xi = 0$ ,  $\alpha = \alpha_{min} = -\log_2(p_1)$  y para  $\xi = 1$ ,  $\alpha = \alpha_{max} = -\log_2 p_0$ . Entonces, para  $p_0 = 0.3$ , por ejemplo, el exponente de Lipshitz-Hölder  $\alpha$  toma un rango de  $\alpha_{min} = 0.51$  a  $\alpha_{max} = 1,75$ . El valor de  $\alpha_{min}$  es la parte menos probable del espectro multifractal



y  $\alpha_{max}$  el más probable.

En la mayoría de los casos no se tiene acceso directo a la variable  $\xi$ , de hecho,  $\xi$  está relacionada con muchos procesos de bisección específicos que son a menudo irrelevantes. Los parámetros importantes para describir un proceso aleatorio multiplicativo, como el de bisección, es la dimensión fractal del soporte  $f$ , el exponente de Lipshitz-Hölder  $\alpha$  de la densidad de distribución, y la relación  $f(\alpha) := f(\xi(\alpha))$ , llamada el “espectro de singularidades” (strength of the singularity) de  $\alpha$ , que es, el soporte de la dimensión de Hausdorff o simplemente el espectro multifractal. En el ejemplo, en el cual  $\alpha$  es una función lineal de  $\xi$ , el espectro  $f(\alpha)$  es simplemente una versión estirada y transpuesta de  $f(\xi)$  (ver la figura 6.8) en la que  $\alpha$  es de la forma

$$\xi(\alpha) = \frac{\alpha + \log_2(1 - p)}{\log_2\left(\frac{1-p}{p}\right)}.$$

El máximo valor de  $f(\alpha)$  está en  $\xi = 0.5$ . De acuerdo con la ecuación 6.6  $\alpha_0 = -\frac{1}{2} \log_2 p(1 - p) = (\alpha_{min} + \alpha_{max})/2$  y  $f(\alpha_0) = 1$  que coincide la dimensión de Hausdorff del intervalo unitario (o cualquier intervalo en  $\mathbb{R}$ ). Para un proceso aleatorio multiplicativo sobre un fractal (a diferencia de un intervalo) con dimensión fractal  $D$ , el mayor valor de  $f(\alpha)$  es  $D$ . En otras palabras, el máximo del espectro multifractal  $f(\alpha)$  es igual a la dimensión fractal del soporte.

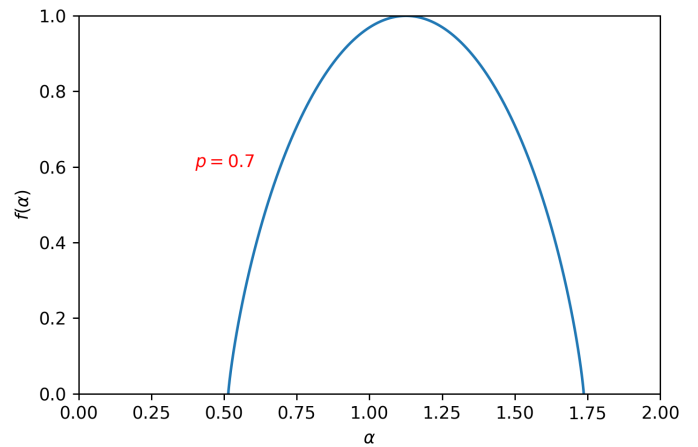


Figura 6.8: Espectro multifractal de proceso aleatorio multiplicativo.

Otro punto especial de  $f(\alpha)$  es aquel en el que la pendiente  $df/d\alpha = 1$ . Derivando

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\log \xi - \log(1 - \xi)}{\log p - \log(1 - p)} \tag{6.7}$$

se tiene que para  $\xi_1 = p$ ,  $df/d\alpha = 1$ . De la ecuación 6.6 se obtiene que  $\alpha(\xi_1) = \alpha_1 = H(p)$ , por lo que  $\tilde{f}(p) = f(\alpha_1)$  y entonces  $f(\alpha_1) = \alpha_1$ , por esto  $f(\alpha_1)$  es una recta tangente de la curva  $f(\alpha)$  con pendiente uno. Al valor  $f(\alpha_1)$  se le conoce como la dimensión de información  $D_1$ .

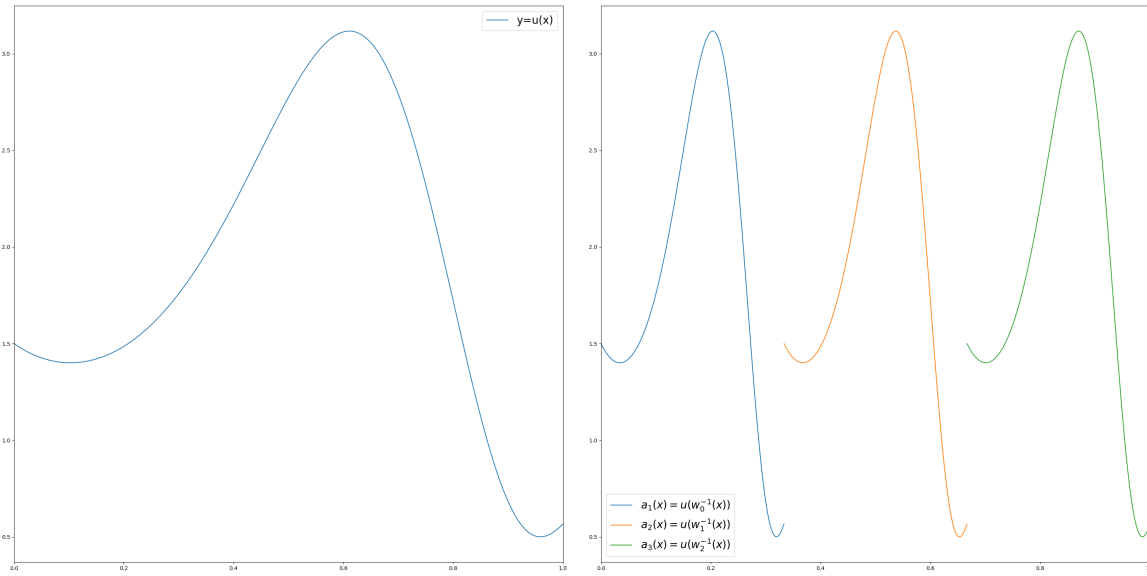
### 6.1.3. Sistemas de funciones iteradas aplicadas a funciones

En las secciones anteriores se mostraron las distribuciones de probabilidad acumuladas  $C(x)$  asociadas a las distribuciones de probabilidad de un conjunto de Cantor y en un proceso de bisección (ver 6.2 y 6.5), y se explicó brevemente una forma de construir las funciones  $C_n(x)$ . En esta sección se explicará como funciona un IFS aplicado a funciones no negativas en lugar de a conjuntos. Sea  $y = u(x)$  una función no negativa en el espacio  $X = [0, 1]$  y dada una transformación afín contractiva

en  $x$  que deja invariante el rango de  $u(x)$  de la forma

$$w \begin{pmatrix} x \\ y = u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx + e \\ u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = f(x) \\ a(x') = u(f^{-1}(x')) \end{pmatrix}$$

donde  $r$  y  $e$  son constantes positivas tales que  $r \leq 1$  y  $e \leq 1 - r$ , entonces  $\hat{f}(X) = [e, e + r]$ . La función  $a(x) = u(f^{-1}(x))$  contrae y traslada la gráfica  $u(x)$  en la dirección  $x$  y es válida para  $x \in \hat{f}(X) = [e, r + e]$ ,  $a(x)$  es entonces equivalente a realizar la transformación  $w$  sobre el vector  $(x, u(x))$ .



**Figura 6.9:** Función no negativa  $u(x)$  y tres transformaciones contractivas en  $x$ .

Se define un sistema de funciones iteradas que  $\{[0, 1] \times \mathbb{R}^+; w_0, w_1, w_2\}$ , donde las  $w_i$  son transformaciones afines contractivas en las direcciones  $x$  y en  $y$  de la forma

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y = u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + e_i \\ d_i u(x) + g_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_i = f_i(x) \\ b_i(x'_i) = \phi_i(a_i(x'_i)) \end{pmatrix}$$

donde  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $e_i$  y  $g_i$  son constantes positivas tales que  $a_i, d_i \leq 1$  y  $e_i \leq 1 - a_i$ . La función  $b_i(x) = \phi_i(a_i(x)) = \phi_i(u(f_i^{-1}(x))) = d_i u(f_i^{-1}(x)) + g_i$  esta definida en el intervalo  $I_i = [e_i, a_i + e_i]$ . Utilizando  $b_i(x)$  e introduciendo un operador  $T$  se puede definir otra función  $v(x)$  de la siguiente forma

$$v(x) = Tu(x) = \sum_{i=0}^2 b_i(x) \chi_{I_i}(x) = \sum_{i=0}^2 \phi_i(u(f_i^{-1}(x))) \chi_{I_i}(x) \quad (6.8)$$

que es de utilidad para encontrar distribuciones de probabilidad acumuladas como las que se vieron en las dos secciones anteriores.

Considérese como ejemplo el IFS con los parámetros de la tabla 6.1 en donde se hace que los parámetros que afectan en la dirección  $y$  dependan de las probabilidades. El atractor de este IFS es la función de Cantor  $C(x)$ , los resultados para las primeras iteraciones son idénticos a los mostrados en la figura 6.2 para  $p_0 = 0.3$  y  $p_2 = 0.7$ . Las funciones  $\phi_i(x)$  para este IFS con la función  $u(x) = C_0(x) = x$  son de la forma

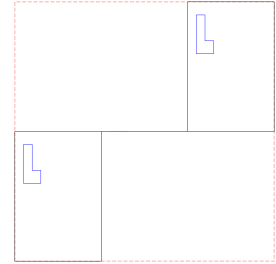
**Tabla 6.1:** Parámetros para un IFS con tres transformaciones.

$w$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$g$
1	1/3	0	0	$p_0$	0	0
2	1/3	0	0	$p_1$	1/3	$p_0$
3	1/3	0	0	$p_2$	2/3	$p_0$

$$b_0(x) = d_0 u(f_0^{-1}(x)) + g_0 = p_0(3x) = 3p_0x \text{ con } I_0 = [0, 1/3]$$

$$b_1(x) = d_1 u(f_1^{-1}(x)) + g_1 = p_0 \text{ con } I_1 = [1/3, 2/3]$$

$$b_2(x) = d_2 u(f_2^{-1}(x)) + g_2 = p_2(3x - 2) + p_0 \text{ con } I_2 = [2/3, 1]$$



estas funciones definen la función  $C_n(x)$  utilizando la ecuación 6.8,

esto es

$$C_1(x) = \begin{cases} 3p_0x & \text{para } I_0 = [0, 1/3] \\ p_0 & \text{para } I_1 = [1/3, 2/3] \\ p_2(3x - 2) + p_0 & \text{para } I_2 = [2/3, 1] \end{cases}$$

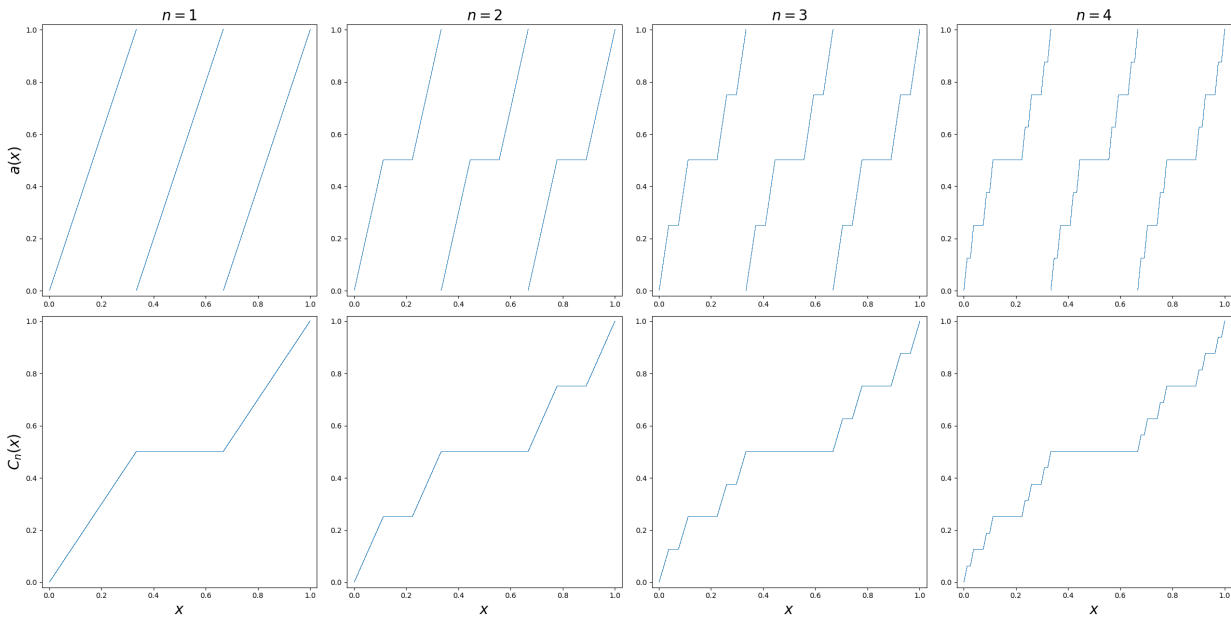
que como se veía en las secciones anteriores es la unión de tres rectas. A orden dos la función  $C_2(x) = T(TC_0(x)) = T^2C_0(x)$  y en general  $C_n(x) = T^nC_0(x)$ , por lo que la función de Cantor o escalera del diablo se halla en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$

$$C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n F_0(x).$$

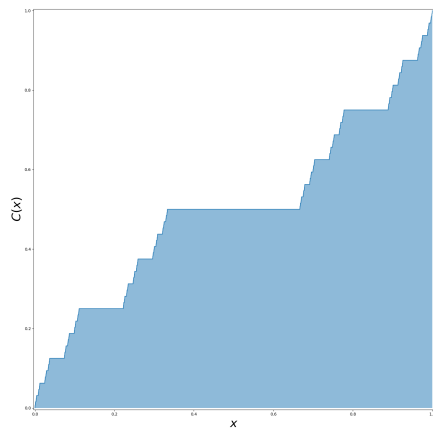
$T$  es un operador contractivo por lo que  $C(x)$  es un punto fijo del operador. En la figura 6.10 se muestran las gráficas obtenidas hasta orden cuatro, en la primera fila se realizan tres transformaciones contractivas en  $x$  de las funciones  $C_n(x)$  y en la segunda fila las funciones  $C_n(x)$  obtenidas al aplicar el operador  $T$  y compuestas por las rectas  $b_i(x)$ . En la figura 6.11 se muestra la función  $C(x)$  obtenida en el límite  $n \rightarrow \infty$  para las probabilidades  $p_1 = 0$  y  $p_0 = p_2 = 0.5$ .

Ya que  $C(x)$  es un punto fijo de del operador  $T$  se tienen que  $TC(x) = C(x)$ , relación de la que se puede obtener una ecuación funcional para  $C(x)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C(x) &= TC(x) = \sum_{i=0}^2 \phi_i(C(w_i^{-1}(x)))\chi_{I_i}(x) \\ &= \phi_0(C(3x))\chi_{I_0}(x) + \phi_1(C(3x - 1))\chi_{I_1}(x) + \phi_2(C(3x - 2))\chi_{I_2}(x) \\ &= p_0C(3x)\chi_{I_0}(x) + p_0\chi_{I_1}(x) + (p_2C(3x - 2) + p_0)\chi_{I_2}(x) \end{aligned} \tag{6.9}$$



**Figura 6.10:** IFS aplicada a funciones, en la primera fila se muestran las gráficas de las transformaciones contractivas en  $x$  de las funciones  $C_n$  y en la segunda fila las funciones  $C_n$ .



**Figura 6.11:** Función de Cantor  $C(x)$  para  $p_0 = p_2 = 0.5$ .

téngase en cuenta que los valores de  $x$  permitidos son aquellos para los que la inversa de las transformaciones  $w_i^{-1}(x)$  exista, es decir el intervalo  $I_i$ . Haciendo la sustitución  $y = 3x$  la transformación inversa  $w_1^{-1}(y)$  existe para todos los valores de  $y \in [0, 1]$ , pero la transformación  $w_2^{-1}(y)$  y  $w_2^{-1}(y)$  no están definidas para ningún  $y \in [0, 1]$ , entonces los términos  $C(w_2^{-1}(x)) = C(3x - 2)$  y  $p_0\chi_{I_1}$  desaparecen de la ecuación 6.9 y se obtiene

$$C(y) = \frac{1}{p_0} C\left(\frac{y}{3}\right),$$

la cual es una ecuación funcional para la función de Cantor.

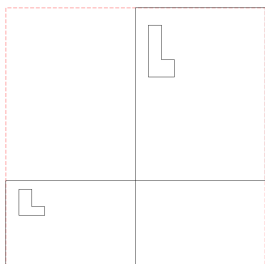
**Tabla 6.2:** Parámetros para un IFS con dos transformaciones.

$w$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$g$
1	$1/2$	0	0	$p_0$	0	0
2	$1/2$	0	0	$p_1$	$1/2$	$p_0$

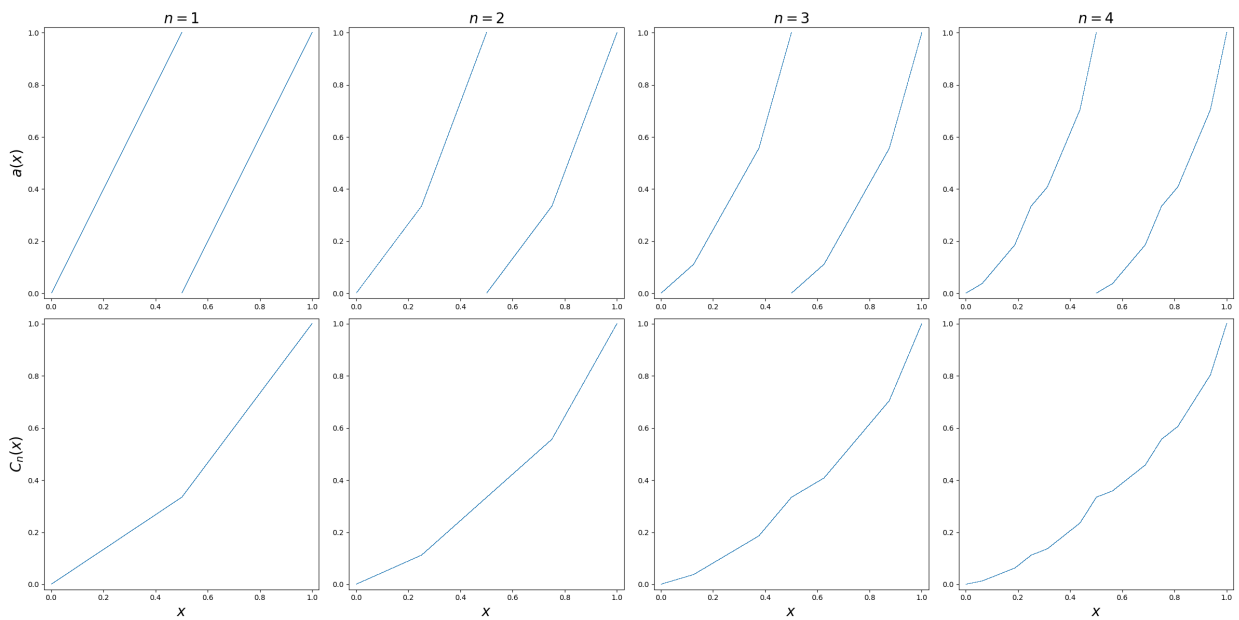
Para el proceso de bisección que se estudió en la sección anterior, se puede repetir el método de IFS aplicado a funciones, utilizando el IFS con los parámetros de la tabla 6.2 y la función  $C_0(x) = x$ , se obtienen las funciones

$$b_0(x) = 2p_0x \text{ con } I_0 = [0, 0.5]$$

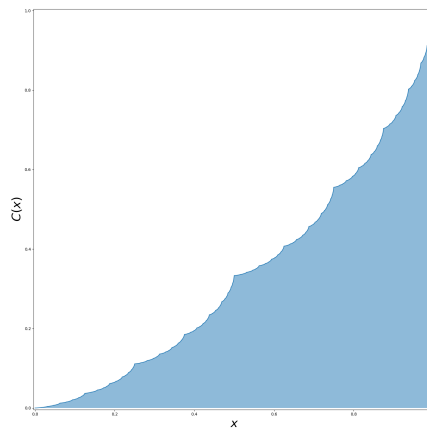
$$b_1(y) = p_1(2x - 1) + p_0 \text{ con } I_1 = [0.5, 1],$$



cuya unión genera la función  $C_1(x)$ , el resultado se puede ver en las figuras 6.4 y 6.12, y el atractor se muestra en la figura 6.13. También se puede hallar una ecuación funcional de forma análoga a como se encontró la ecuación 6.9 el resultado es el mismo de la ecuación 6.1.



**Figura 6.12:** IFS aplicada a funciones, en la primera fila se muestran las gráficas de las transformaciones contractivas en  $x$  de las funciones  $C_n$  y en la segunda fila las funciones  $C_n$ .



**Figura 6.13:** Distribución de probabilidad acumulada para un proceso de bisección con  $p_0 = 1/3$  y  $p_1 = 2/3$ .

## 6.2. Entropías Generalizadas y Dimensiones Fractales

Mientras un conjunto de Cantor autosimilar generado por segmentos de igual longitud está caracterizado por un simple exponente de escala, la dimensión de Hausdorff  $D$ , los multifractales están descritos por dos exponentes de escala, uno para el soporte fractal y otro para las probabilidades.

Para introducir apropiadamente estos dos exponentes de escala, se debe recordar que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch y la dimensión fractal satisfacen la relación mostrada en el teorema 4.3.2:

$$\sum_{i=1}^N |r_i|^D = 1, \quad D \in [0, m].$$

donde  $r_i$  es el factor de contracción asociado a una transformación unidimensional  $w_i$ ,  $D$  es la dimensión fractal y  $m$  la dimensión euclidiana. En el caso multifractal tenemos segmentos de longitud  $r_i$  asociados con las probabilidades  $p_i$ . La relación anterior sirve para introducir dos nuevos exponentes;  $\tau$  que corresponde al soporte fractal con intervalos  $r_i$  y  $q$  para las probabilidades  $p_i$ , satisfaciendo:

$$\sum_{i=1}^N p_i^q r_i^{-\tau} = 1 \quad (6.10)$$

la ecuación 6.10 no tiene un valor único de  $q$  y  $\tau$ , existe un rango continuo de exponentes  $\tau = \tau(q)$  que satisfacen la relación.

En el caso del conjunto original de Cantor ( $N = 2$ ,  $r_l = \frac{1}{3}$ ), la ecuación 6.10 para  $p_l = \frac{1}{2}$  es

$$\left(\frac{1}{2}\right)^q \left(\frac{1}{3}\right)^{-\tau} + \left(\frac{1}{2}\right)^q \left(\frac{1}{3}\right)^{-\tau} = 1$$

que tiene solución  $\tau = (q - 1) \log 2 / \log 3$ . Remplazando la dimensión de Hausdorff  $D = \log 2 / \log 3$  para el conjunto de Cantor, podemos escribir  $\tau = (q - 1)D$ . Cuando  $q = 0$ ,  $\tau$  corresponde a la dimensión de Hausdorff  $D$ . Se puede establecer una relación entre la dimensión  $D$  y los exponentes  $q$  de la forma

$$D_q = \frac{\tau}{q - 1}$$

que puede pasar a jugar el rol de una *dimensión generalizada* lo que sugiere otro método para encontrar dimensiones asociadas a los multifractales.

### 6.2.1. Medida de Halsey y Dimensión Generalizada $D_q$

Para introducir con más detalle la definición de  $D_q$  considérese un conjunto  $M$  que se encuentra inmerso en una porción finita del espacio Euclidiano  $m$ -dimensional, ahora se procede a encontrar una cubierta óptima de  $N$  elementos para  $M$ , cada miembro de la cubierta tiene una medida  $\mu_i$  y un diámetro  $\Delta_i$ . La medida de Halsey esta definida como (del Río-Correa y Durán-Meza, 1987) (C.Halsey y Mogens H.Jensen, 1987)

$$H(M, q, \tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i^q(\Delta)}{\Delta_i^\tau} \quad (6.11)$$

igual que en el caso de la medida de Hausdorff 4.3.1 el tamaño de las cubiertas  $\Delta_i$  no es necesariamente el mismo o igual a  $\Delta = \max \Delta_i$ , pero a diferencia de la medida de Hausdorff que define la dimensión fractal de un conjunto con un número real, la medida de Halsey define una curva  $\tau(q)$ . Para obtener el comportamiento de esta curva, Considérense dos regiones, una región  $A$  con  $q \geq 1$  y  $\tau \geq 0$ , y otra región  $B$  tal que  $q \leq 1$  y  $\tau \leq 0$ . En la región  $A$  se ajustan las cubiertas  $\Delta_i$  de tal forma que

la cantidad  $\sum_{i=1}^N \frac{\mu_i^q(\Delta)}{\Delta_i^\tau}$  sea un máximo y en la región  $B$  lo más pequeña posible. El supremo en la región  $A$  existe mientras haya constantes positivas  $a > 0$  y  $\alpha_0 > 0$  tales que para cualquier cubierta de  $M$

$$\mu_i \leq a\Delta_i^{\alpha_0}.$$

De donde se tiene que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mu_i^q(\Delta)}{\Delta_i^\tau} \leq \sum_{i=1}^N \frac{a^q \Delta_i^{\alpha_0 q}}{\Delta_i^\tau} = a^q \sum_{i=1}^N \Delta_i^{\alpha_0 q - \tau}$$

el problema se reduce al estudiado en el capítulo 4 para la medida de Hausdorff, entonces aplicando los teoremas 4.3.1 y 4.3.2 con  $\alpha_0 = D_H$  para que esta cantidad se mantenga finita se demuestra que  $\tau$  debe ser de la forma

$$\tau < \alpha_0(q - 1).$$

$H(M, q, \tau)$  es una función monótona no decreciente de  $\tau$  y monótona no creciente de  $q$ , por lo que se puede inferir que existe una única función  $\tau(q)$  tal que se satisfaga la siguiente propiedad:

$$H(M, q, \tau) = \begin{cases} \infty & \text{sí } \tau > \tau(q) \\ 0 & \text{sí } \tau < \tau(q). \end{cases}$$

Esta ecuación permite definir  $D_q$  como

$$(q - 1)D_q = \tau(q). \tag{6.12}$$

Esta definición de  $D_q$  para  $q = 0$  toma la misma forma que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch 4.3.1.

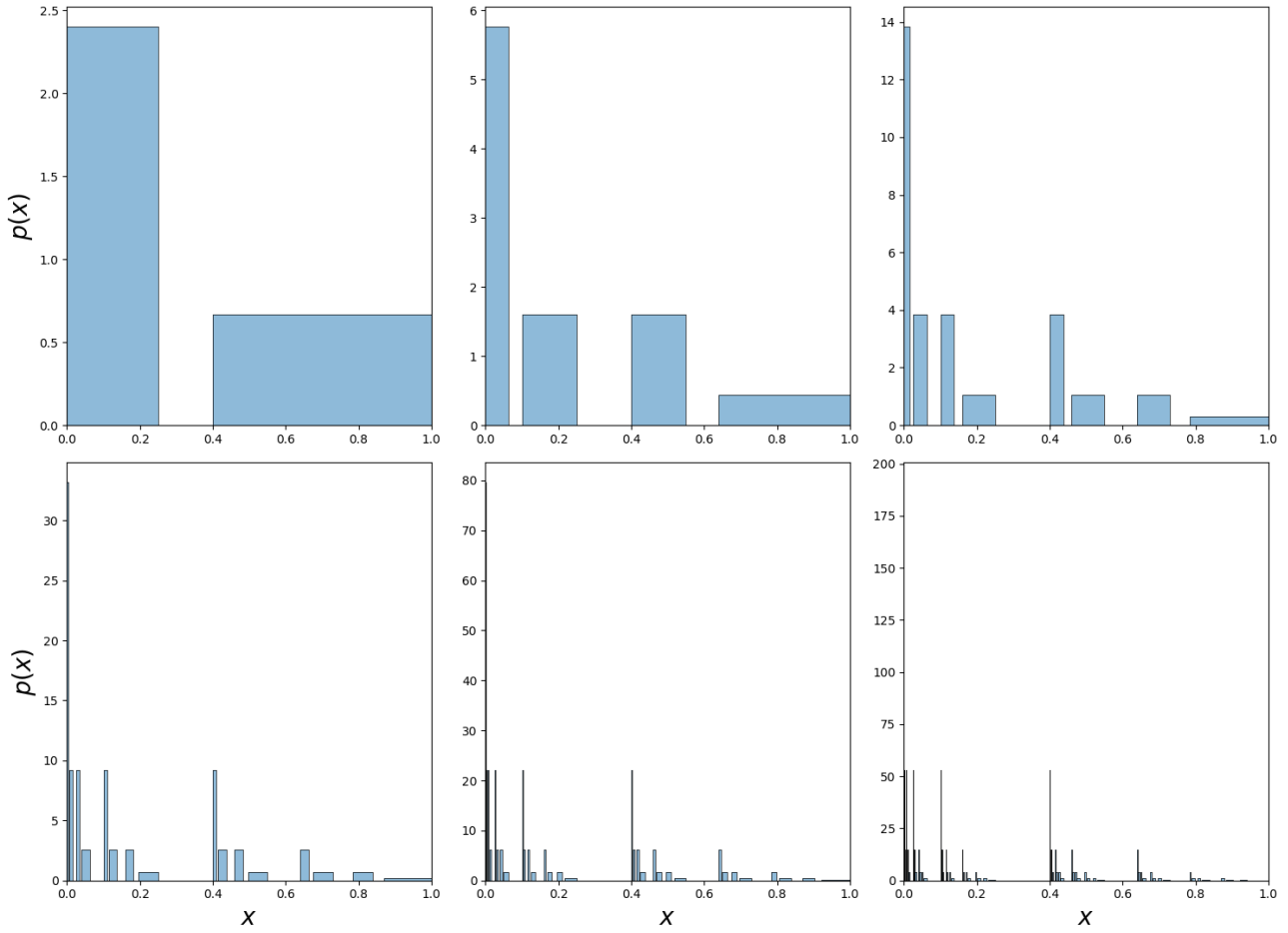
### 6.2.2. Conjunto de Cantor con diferentes escalas

Un ejemplo similar al de la sección 6.1.1 para la medida de Cantor es obtenido mediante una construcción como la que se muestra en la figura 6.14, usando un IFS con probabilidad en el intervalo unitario de la forma

$$\{X = [0, 1]; w_0(x) = \Delta_0 x, w_1(x) = \Delta_1 x + \Delta_0, w_2(x) = \Delta_2 x + \Delta_0 + \Delta_1; \mu_0, \mu_1 = 0, \mu_2\}.$$

Asumiendo que  $\Delta_2 > \Delta_0$ . En este caso también se satisface la condición 6.10

$$\sum_{l=0}^3 \mu_l^q \Delta_l^{-\tau} = 1$$



**Figura 6.14:** Construcción del conjunto de cantor con factores de contracción diferente, para este caso particular  $\Delta_0 = 1/4$ ,  $\Delta_1 = 3/20$  y  $\Delta_2 = 3/5$ , con sus respectivas medidas de probabilidad  $\mu_0 = 3/5$ ,  $\mu_1 = 0$  y  $\mu_2 = 2/5$ .

de donde se obtienen que

$$D_q = \frac{\tau}{q-1}.$$

Explícitamente la suma en la medida de Halsey después de  $n$  iteraciones tienen la forma

$$H(M, q, \tau, \Delta^n) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \mu_0^{qm} \mu_2^{q(n-m)} (\Delta_0^m \Delta_2^{n-m})^{-\tau} = 1$$

se espera que en el límite  $n \rightarrow \infty$  los términos más grandes de la suma sean dominantes. Para encontrar los términos más grandes se calcula

$$\frac{\partial \log H(M, q, \tau, \Delta^n)}{\partial m} = 0$$

usando la aproximación de Stirling se encuentra que

$$\tau(q) = \frac{\log \left( \frac{n}{m} - 1 \right) + q \log \left( \frac{\mu_0}{\mu_2} \right)}{\log \left( \frac{\Delta_0}{\Delta_2} \right)} \quad (6.13)$$



ya que se espera que el término máximo domine la suma y de 6.10 se tiene que

$$\binom{n}{m} \mu_0^{qm} \mu_2^{q(n-m)} (\Delta_0^m \Delta_2^{n-m})^{-\tau} \quad (6.14)$$

reemplazando  $\tau$  se obtienen que

$$\log \left( \frac{m}{n} \right) \log \Delta_2 - \log \left( 1 - \frac{m}{n} \right) \log \Delta_0 = q(\log \mu_0 \log \Delta_2 - \log \mu_2 \log \Delta_0). \quad (6.15)$$

De donde se puede observar que para cualquier valor de  $q$  existe un valor de  $n/m$  correspondiente y a su vez determina  $\tau$  en 6.13. El término maximal que determina a  $\tau$  provienen de los  $\binom{n}{m}$  intervalos de tamaño  $\Delta_0^m \Delta_2^{n-m}$ . Su espectro fractal está dado por

$$f(\xi = m/n) = -\frac{\log \binom{n}{m}}{\log \Delta_0^m \Delta_2^{n-m}}$$

para  $n$  grande, de donde se infiere que

$$\binom{n}{m} (\Delta_0^m \Delta_2^{n-m})^f = 1 \quad (6.16)$$

esto es

$$f(\xi) = \frac{(1-\xi) \log(1-\xi) + \xi \log \xi}{\xi \log \Delta_0 + (1-\xi) \log \Delta_2} \quad (6.17)$$

para  $\Delta_0 = \Delta_2 = 0.5$  está expresión es equivalente a 6.5.

El exponente de Lipshitz-Hölder  $\alpha$ , el cual determina la singularidad en la medida, está determinado por

$$\mu_0^m \mu_2^{n-m} = (\Delta_0^m \Delta_2^{n-m})^\alpha$$

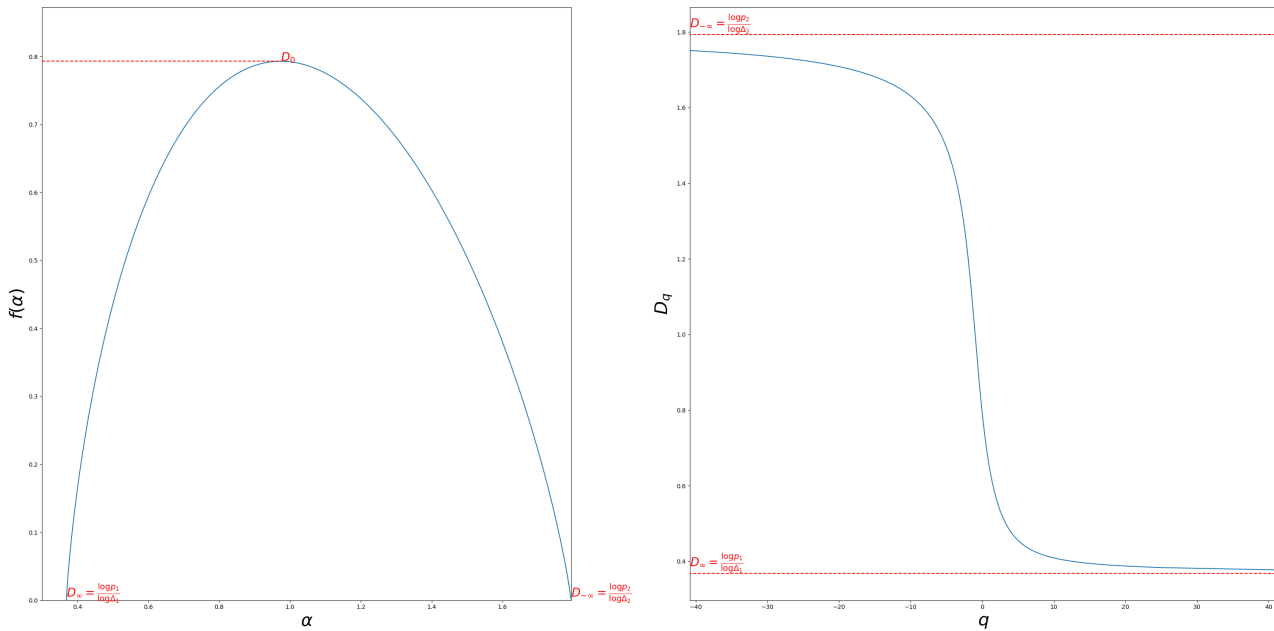
o

$$\alpha(\xi = m/n) = \frac{\xi \log \mu_0 + (1-\xi) \log \mu_2}{\xi \log \Delta_0 + (1-\xi) \log \Delta_2}. \quad (6.18)$$

Por lo tanto, para cualquier  $q$ , la medida se escala como  $\alpha(q)$  en un conjunto de segmentos que convergen en un conjunto de dimensión  $f(q)$ . A medida que  $q$  varía, las diferentes regiones del conjunto determinan  $D_q$ . Se puede demostrar que las Ecuaciones 6.13, 6.15, 6.38, y 6.18 conducen a

$$\tau(q) = (q-1)D_q = q\alpha(q) - f(q). \quad (6.19)$$

En la figura 6.15 se muestra al espectro multifractal  $f(\alpha)$  y a la dimensión generalizada  $D_q$ , estas curvas se obtuvieron para  $\Delta_0 = 0.25$  y  $\Delta_2 = 0.6$  con las respectivas probabilidades  $\mu_0 = 0.6$  y  $\mu_2 = 0.4$ . El espectro multifractal tienen dos valores de  $\alpha$  para los que  $f = 0$ , el del lado izquierdo corresponde al menor valor de  $\alpha = D_\infty = \frac{\log p_1}{\log \Delta_1}$  el cual se da en  $\xi = 1$  obtenido de la ecuación 6.38 y



**Figura 6.15:** Gráficas del espectro multifractal y de la dimensión generalizada para  $\Delta_0 = 0.25$ ,  $\Delta_0 = 0.6$  y  $\mu_0 = 0.6$ ,  $\mu_2 = 0.4$ , se observa que  $f(\alpha) = 0$  corresponde a los valores de  $\alpha$

6.18, el restante se obtiene de la misma forma, este es  $\alpha = D_{-\infty} = \frac{\log p_2}{\log \Delta_2}$  para  $\xi = 0$ .  $D_{\infty}$  corresponde con la región en la que la medida esta más concentrada y  $D_{-\infty}$  a donde la medida es menor.

### 6.2.3. Dimensión de Rényi generalizada (Desarrollo histórico)

La dimensión generalizada es un concepto que proviene de la teoría de la información y que fue desarrollado por el matemático húngaro Alfred Rényi (1965). En esta breve sección se hace un recuento histórico del origen de la fórmula de Shannon y la dimensión de Rényi, esta no pretende ser una explicación exhaustiva de como se llega a estos resultados, el objetivo es bosquejar el tipo de ideas que usó Rényi para obtenerlos, si desea más información puede dirigirse directamente a la fuente (Rényi, 1965). En la siguiente sección se realiza una definición formal de los resultados aquí mostrados.

La teoría de información aparece en conexión con la transmisión de información (Claude Shannon en 1948), en particular, con la longitud de la representación binaria de la información. Así, si se tiene un conjunto  $E$  con  $n$  elementos, cuando  $n = 2^N$ , cada elemento se etiqueta con un número binario que tenga  $N$  dígitos. Hartley definió la información necesaria para caracterizar al conjunto  $E$  por la cantidad  $\log_2 n$ . Se pueden nombrar a cada uno de los subconjuntos de  $E$  con un número binario, por ejemplo para  $n = 8$  los elementos del conjunto son nombrados usando tres bits de la siguiente manera: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111, entonces la cantidad de información que caracteriza al conjunto es  $\log_2 8 = 3$ .

Considérese un experimento que consiste en dividir el conjunto  $E$  de manera aleatoria en varios subconjuntos tales que  $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_a$  donde  $E_k$  son disjuntos o no-conexos. La probabilidad

de que un elemento de  $E$  este en  $E_k$  sea igual a  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, a$ ) la cual es independiente de lo que pase con otros elementos. La cantidad de información generada por la distribución de probabilidad  $P = (p_1, p_2, \dots, p_a)$  en este experimento es

$$H_1(P) = - \sum_{k=1}^a p_k \log_2 p_k$$

conocida como la *fórmula de Shannon* o *entropía de Shannon*. Rényi demostró que la fórmula de Shannon puede deducirse usando el siguiente razonamiento: Supongamos que hay un elemento particular en que estamos interesados; sin embargo, no sabemos de cuál de los  $n$  elementos del conjunto  $E$  se trata. Se lleva a cabo una secuencia de experimentos similares al discutido anteriormente, donde los  $n$  elementos son colocados en forma independiente y aleatoria en los  $a$  subconjuntos ( $E_k, k = 1, \dots, a$ ). Nosotros podremos decir después de cada experimento en que subconjunto está localizado cada elemento y cuál subconjunto contiene el elemento de interés desconocido. El primer experimento produce una partición  $\Delta_1$ , el segundo experimento produce otra partición  $\Delta_2$ , etc. Sea  $\Delta^{(m)}$  el producto cruz de las  $m$  particiones generadas por los primeros  $m$  experimentos independientes, podemos pensar que cada elemento toma una trayectoria de longitud  $m$  a través de  $\Delta^{(m)}$ . El elemento desconocido será determinado unívocamente cuando su trayectoria sea única con respecto a todos los otros elementos. Denotando por  $P_{nm}$  la probabilidad de que este elemento desconocido pueda ser identificado después de  $m$  experimentos, de manera que su trayectoria sea única. Se puede demostrar que el valor de  $P_{nm}$  es el siguiente:

$$P_{nm} = \sum_{\sum_{i=1}^a m_i = m} \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_a!} \prod_{j=1}^a p_j^{m_j} \left( 1 - \prod_{j=1}^a p_j^{m_j} \right)^{n-1} \quad (6.20)$$

donde la suma se realiza sobre todos los posibles  $m_i$  tales que  $\sum_{i=1}^a m_i = m$ . Denotando por  $e_1(n, \epsilon) = \text{mín}\{m : P_{nm} \geq 1 - \epsilon\}$  donde  $0 < \epsilon < 1$ , Rényi mostró que

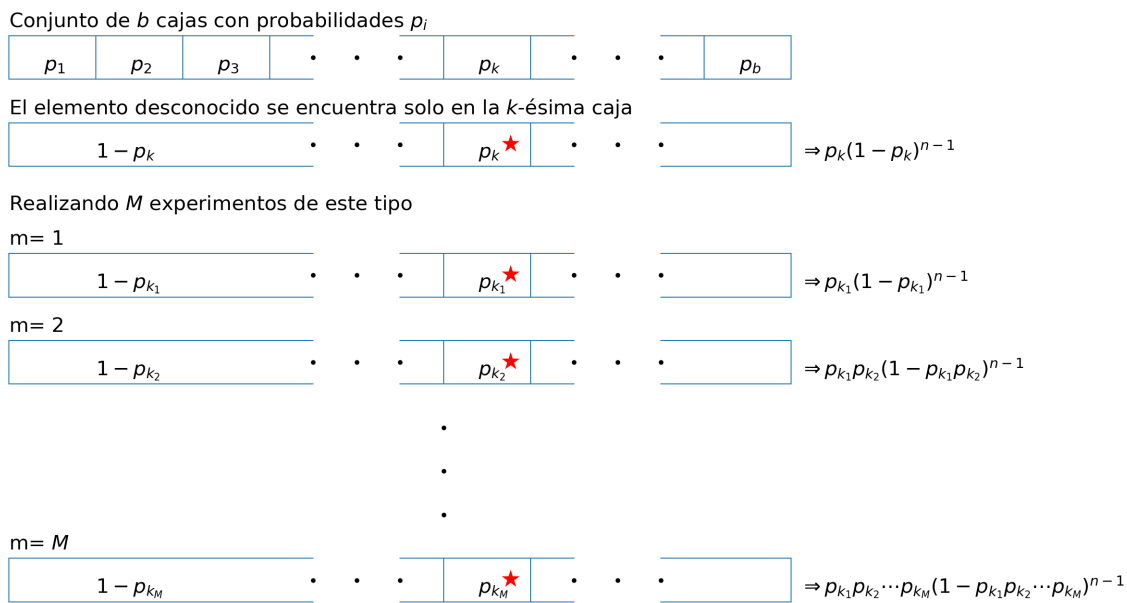
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{e_1(n, \epsilon)} = H_1(P) \quad (6.21)$$

donde

$$H_1(P) = - \sum_{k=1}^a p_k \log_2 p_k \quad (6.22)$$

y  $P = (p_1, p_2, \dots, p_a)$  es la distribución de probabilidad, la fórmula de Shannon se reduce a la función de entropía  $H$  mostrada en la sección anterior (ecuación 6.3). La relación 6.21 se puede interpretar de la siguiente manera: la cantidad de información necesaria para caracterizar a  $E$  es  $\log_2 n$ , entonces  $H_1(P)$  es la cantidad de información recopilada después de cada experimento, si  $n$  es lo suficientemente grande  $\log_2 n / H_1(P)$  es aproximadamente la cantidad de experimentos requeridos para localizar el elemento desconocido.

Para ilustrar esto de manera sencilla supongamos que el número de divisiones del conjunto  $E$  sea dos, de tal forma que para  $n = 8$  elementos diferentes hay  $2^8 = 256$  posibles formas de organizarlos en dos subconjuntos o compartimientos  $E_1$  y  $E_2$ , de estos solo hay dos formas en las que un elemento en particular se encuentre solo en alguno de los dos subconjuntos, ya que para  $m = 1$  existen dos posibles sumas de enteros positivos iguales a  $m = 1$ ,  $m_1 = 1$  y  $m_2 = 0$  o  $m_1 = 0$  y  $m_2 = 1$ , estas dos formas tienen probabilidades  $p_1(1 - p_1)^{n-1} = p_1(1 - p_1)^7$  y  $p_2(1 - p_2)^7$ , de tal forma que  $P_{nm} = P_{81} = p_1(1 - p_1)^7 + p_2(1 - p_2)^7$ , para  $p = p_1 = 1 - p_2$  se tiene que  $P_{81} = p(1 - p)^7 + p^7(1 - p)$ , con  $p = 1/2$  se obtienen  $P_{81} = 1/2^7$ . Con esta configuración  $P_{nm}$  tiende rápidamente a 1, se puede mostrar que  $P_{8m} = (1 - \frac{1}{2^m})^7$  por lo que el valor  $e_1(n, \epsilon)$  puede ser relativamente pequeño para valores de  $\epsilon \ll 1$ . Siguiendo este razonamiento podemos inferir fácilmente que la cantidad  $\frac{m!}{m_1!m_2!\dots m_a!}$  en la ecuación 6.20 es el número de maneras en las que el elemento desconocido se puede organizar después de  $m$  experimentos con una probabilidad  $\prod_{j=1}^a p_j^{m_j} (1 - \prod_{j=1}^a p_j^{m_j})^{n-1}$ , en la figura 6.16 se muestra un ejemplo.



**Figura 6.16:** Ejemplo de experimento de Rényi para el cual se tienen  $b$  cajas y  $n$  elementos, la probabilidad de que un elemento caiga en la  $i$ -ésima caja es  $p_i$  como se muestra en la parte superior del esquema, la probabilidad de que un elemento desconocido esté en la  $k$ -ésima caja es  $p_k(1 - p_k)^{n-1}$  sin importar en donde estén los demás elementos, si se repite este experimento siguiendo un camino único para el elemento desconocido representado por una estrella se obtiene que después de  $M$  experimentos la probabilidad de obtener este resultado es  $p_{k_1}p_{k_2}\dots p_{k_M}(1 - p_{k_1}p_{k_2}\dots p_{k_M})^{n-1}$  donde  $k_i$  puede tomar cualquier valor entre 1 y  $b$ .

Otra forma de ilustrar esto es utilizando sistemas dinámicos. Suponiendo que se pone a correr un sistema dinámico en particular en un espacio dado, tal espacio es dividido en cajas de igual tamaño  $B_i$ , después de algunas iteraciones se detiene y se observa que el último punto está en la caja  $B_k$ . Si un investigador externo no conoce el resultado, pero sabe cuál es la distribución de probabilidad de las cajas y quiere encontrar en cuál de las cajas quedó tal punto, puede realizar algunas preguntas sobre el experimento, las cuales son contestadas con un “sí” o un “no” (0 o 1). Por ejemplo él podría preguntar si la caja en cuestión está dentro de las primeras cien. Después de

un número finito de preguntas el investigador podrá saber que el último punto está en la caja  $B_k$  y el procedimiento puede repetirse. Nuevamente si tenemos ocho cajas numeradas con los números binarios 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111, el investigador puede preguntar “¿la caja desconocida es alguna de las que tienen 1 como primer, segundo o tercer dígito?”, después de tres preguntas el investigador sabrá en cuál de las cajas se encuentra el elemento desconocido. En otras palabras no son necesarios más que tres dígitos para codificar las ocho posibles resultados, la cantidad de información es 3 y su unidad de medida es el bit.

También puede adoptar un enfoque axiomático para determinar la forma de la función  $H_1(P)$ , donde se puede demostrar que es la única función que tiene las propiedades requeridas. Una de esas propiedades es la propiedad aditiva. Considere dos distribuciones de probabilidad diferentes para dividir al conjunto  $E$ ,  $P = (p_1, p_2, \dots, p_a)$  y  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_b)$  representan dos distribuciones de probabilidad distintas tal que los términos de  $PQ$  son de la forma  $p_i q_j$ , con  $i = \{1, \dots, a\}$  y  $j = \{1, \dots, b\}$ . Entonces la función  $H_1(P)$  satisface la propiedad aditiva

$$H_1(PQ) = H_1(P) + H_1(Q)$$

Usando el contexto anterior, Renyí extendió la noción de información a órdenes más altos (Rényi, 1965).  $P_{nm}^q$  se define como la probabilidad de que en cada clase de  $\Delta^{(m)}$  haya menos de  $q$  elementos, es decir que cada posible camino de longitud  $m$  contenga menos de  $q$  elementos al tomar la misma ruta. Sea

$$e_q(n, \epsilon) = \text{mín} \{m : P_{nm}^q \geq 1 - \epsilon\}$$

para  $q \geq 2$  y  $0 < \epsilon < 1$ , se tienen entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{e_q(n, \epsilon)} = \left(1 - \frac{1}{q}\right) H_q(P) \tag{6.23}$$

donde

$$H_q(P) = \frac{-1}{q-1} \log_2 \sum_{k=1}^a p_k^q.$$

Esta función  $H_q(P)$  satisface  $\lim_{q \rightarrow 1} H_q(P) = H_1(P)$  y la propiedad aditiva. Como en el caso de  $H_1(P)$ , la forma funcional de  $H_1(P)$  se puede argumentar desde una perspectiva pragmática o desde un enfoque axiomático.

Ahora para introducir la idea de dimensión considérese una variable aleatoria  $X$  que toma muchos valores contables  $x_k$  con probabilidad  $p_k = Pr\{X = x_k\} \geq 0$ , tal que  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ . Entonces se puede definir la cantidad de información contenida en el valor de  $X$  como la entropía

$$H_1(P) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 p_k$$

y

$$H_q(P) = \frac{-1}{q-1} \log_2 \sum_{k=1}^{\infty} p_k^q.$$

para  $q \neq 1$ . Escribiendo  $X$  en términos de una variable aleatoria discreta  $X_n = \lfloor nX \rfloor / n$ , con distribución de probabilidad  $P_n = (p_1, p_2, \dots)$ , entonces se define la dimensión de la distribución de  $X$  como

$$D_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_q(P_n)}{\log_2 n}. \quad (6.24)$$

Esta cantidad indica que tan rápido la información de  $X$  tiende a infinito.

### Ejemplo

Tomando como ejemplo el conjunto de Cantor cuya variable aleatoria discreta toma los valores representados en base 3 de la forma  $X_n = \lfloor 3^n X \rfloor / 3^n = (0.c_1 c_2 \dots c_n)_3$  para  $c_k = \{0, 2\}$ , con probabilidades  $p_0$  y  $p_2$ , por ejemplo

$$\begin{aligned} X_1 &= (0.c_1)_3 \\ X_2 &= (0.c_1 c_2)_3 \\ &\vdots \\ X_n &= \lfloor 3^n X \rfloor / 3^n = (0.c_1 c_2 \dots c_n)_3 \end{aligned}$$

tal que en cada paso aparece un dígito más en la expansión. ¿A qué razón se acumula la información de la medida de Cantor cuando  $n$  crece?. Sea  $P_n$  la distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta  $X_n$ , la cual puede tomar  $2^n$  posibles valores, de la forma  $x_k$  donde  $k = \{1, 2, \dots, 2^n\}$ . Para el caso en el que  $q \neq 1$  la entropía está dada por

$$\begin{aligned} H_q(P) &= \frac{-1}{q-1} \log_2 \sum_{k=1}^{2^n} (\text{Pr}\{X_n = x_k\})^q \\ &= \frac{-1}{q-1} \log_2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_0^{qk} p_2^{q(n-k)} \\ &= \frac{-1}{q-1} \log_2 (p_0^q + p_2^q)^n \\ &= \frac{-n}{q-1} \log_2 (p_0^q + p_2^q). \end{aligned}$$

Entonces la dimensión de Rényi o dimensión generalizada es

$$D_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_q(P_n)}{\log_2(3^n)} = \frac{-1}{q-1} \log_3 (p_0^q + p_2^q).$$

Para  $q = 1$

$$D_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_1(P_n)}{\log_2(3^n)} = -(p_0 \log_3 p_0 + p_2 \log_3 p_2).$$

En la sección 6.1.1 se describió el tamaño del soporte de la medida de Cantor entre su dimensión, aunque está fuera invariante ante la forma en la que estaban ubicadas dentro del soporte. Usando la dimensión de Rényi también se puede caracterizar la forma en la que la medida esta localizada. Definimos la dimensión de Rényi en un contexto más general.

#### 6.2.4. Dimensión Reticular de Rényi Generalizada

Existen dos formas de hacer una construcción multifractal (ver (Harte, 2001)), una de ellas es llamada reticular, ya que el espacio  $X$  es cubierto por una secuencia de redes compuestas por cajas  $d$ -dimensionales de lado  $\delta_n$  que tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . La segunda consiste en analizar todo punto  $x \in X$  tal que la medida  $\mu[S_\delta(x)] > 0$ , en donde  $S_\delta(x)$  es una esfera cerrada de radio  $\delta$  centrada en  $x$ . En este trabajo solo se estudia el caso reticular.

Considérese una red que cubre el soporte de la medida  $\mu$  con cajas  $d$ -dimensionales como se señalaba anteriormente, las cajas tienen grosor  $\delta_n$ , la  $k$ -ésima caja se denota como  $B_{\delta_n}(k)$ , donde  $k \in I_n = \{k : \mu[B_{\delta_n}(k)] > 0\}$ . Se evalúa el comportamiento cuando  $\delta_n \rightarrow 0$  esto ocurre cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se define  $\tau(q)$  como

$$\tau(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{k \in K_n} \mu^q[B_{\delta_n}(k)]}{\log \delta_n} \quad -\infty < q < \infty, \quad (6.25)$$

si el límite existe. Formalmente:

**Definición 6.2.1.** *La dimensión de Rényi generalizada o simplemente dimensión generalizada,  $\tilde{D}_q$ , está definida como*

$$D_q = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \in K_n} \mu[B_{\delta_n}(k)] \log \mu[B_{\delta_n}(k)]}{\log \delta_n} & q = 1 \\ \frac{\tau(q)}{q-1} & q \neq 1 \end{cases}$$

siempre que el límite y  $\tau$  existan tanto para  $q = 1$  y  $q \neq 1$  respectivamente.

El siguiente teorema es válido para cualquier medida  $\mu$ :

**Teorema 6.2.1.** [Beck, 1990]

1.  $D_s \leq D_q$  para cualquier  $s > q$ ;  $q, s \in \mathbb{R}$ .
2.  $\frac{s}{s-1} \frac{q-1}{q} \tilde{D}_q \leq D_s \leq D_q$  para  $s < q < 1$  o  $0 > s > q$ .

Se dice que la medida  $\mu$  tienen mínima uniformidad si  $\frac{q-1}{q} D_q = \frac{s}{s-1} D_s = \text{constante}$ , o máxima uniformidad si  $D_s = D_q = \text{constante}$ .

### Ejemplo

En el caso de la medida de Cantor se tiene que cuando se asigna una medida  $p_0 = 1 - p_2 = 1/3$  como en secciones anteriores,  $\tau(q) = -\log_3(p_0^q + p_2^q)$ , y entonces  $D(q) = \tau(q)/(q-1)$ , este es un caso de no uniformidad. Cuando se asigna una medida de forma uniforme sobre el conjunto de cantor  $p_0 = p_2 = 1/2$ , entonces  $\tau(q) = (q-1)\log_3 2$ , por lo que  $\tilde{D}(q) = \log_3 2$  para todo  $q$ . Este es el caso de máxima uniformidad en el que  $\tilde{D}(q)$  es la dimensión fractal del conjunto de Cantor. En general para un fractal autosimilar con probabilidades iguales  $p_i = 1/N$ , se tiene que  $D_q = D_0$  para todos los valores de  $q$ , y no es necesario tomar el límite  $\delta_n \rightarrow 0$ , entonces se tiene que

$$D_q = \frac{1}{q-1} \frac{\log N(1/N)^q}{\log \delta_n} = \frac{\log N}{\log(1/r)}$$

el cual es independiente de  $q$ .

### 6.2.5. Dimensión generalizada en fractales

$D_q$  es la única cantidad que relaciona los dos exponentes  $q$  y  $\tau$  para el multifractal general. Esta relación puede ser fácil de deducir del límite en 6.10 al introducir un número constante caja  $N$  con tamaños  $\delta_n = r$ , el cual para  $n \rightarrow \infty$  no afecta el valor de  $\tau$  y  $q$  para el cual el límite en la expresión 6.10 converge. Entonces,

$$\tau = \tau(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{l=1}^N p_l^q}{\log r},$$

de la definición de dimensión generalizada

$$\tau(q) = (q-1)D_q \tag{6.26}$$

Para un fractal autosimilar, la dimensión  $D_q$  puede ser obtenido directamente de  $p_l$  y  $r_l$ , del generador usando la ecuación 6.10 y la identidad ecuación 6.26:

$$\sum_{l=1}^N p_l^q r_l^{(q-1)D_q} = 1 \tag{6.27}$$

Para  $q = 1$ ,  $\tau(q) = 0$  y  $D_q$  es dado por

$$D_1 = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q=1} \tag{6.28}$$

lo cual, con la ecuación 6.10, se convierte en

$$D_1 = -\frac{\sum_{l=1}^N p_l \log p_l}{\sum_{l=1}^N p_l \log r_l} \tag{6.29}$$



Para  $N$  probabilidades iguales  $p_i = 1/N$ ,

$$D_1 = \frac{N \log N}{\sum_{l=1}^N \log r_l} \quad (6.30)$$

para cuando  $q \rightarrow 1$ , tenemos que

$$D_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{H_1}{\log r} \quad (6.31)$$

donde  $H_1$  es la entropía de Shannon para las probabilidades  $p_i$ . Esta entropía  $H_1$  y la dimensión  $D_1$  provenientes de la teoría de la información, como se observaba en la sección anterior, juega un rol importante en el análisis de sistemas dinámicos no lineales, especialmente en descripciones de pérdida de información de sistemas caóticos que evolucionan en el tiempo. En este contexto la entropía  $H_1$  es llamada *entropía de Kolmogorov*.

Para  $q = 2$ , la dimensión generalizada lleva a la llamada dimensión de correlación

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{l=1}^N p_l^2}{\log r}$$

la que en adición con  $D_0$  y  $D_1$ , es otra dimensión fractal importante.

### 6.3. El Espectro Multifractal y el Exponente $\tau$

Se define formalmente al espectro multifractal para una medida  $\mu$ .

**Definición 6.3.1.** *Sea*

$$I_n(\alpha, \epsilon) = \left\{ k : \alpha - \epsilon < \frac{\log \mu[B_{\delta_n}(k)]}{\log \delta_n} \leq \alpha + \epsilon \right\}$$

*La medida multifractal se define como*

$$f(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \#I_n(\alpha, \epsilon)}{-\log \delta_n}$$

para  $\alpha > 0$ , se permite  $f(\alpha) = -\infty$  cuando  $\#I_n(\alpha, \epsilon) = 0$ .

En las secciones precedentes se introdujeron dos funciones diferentes para describir un multifractal:

- El espectro multifractal  $f(\alpha)$  que describe la dimensión fractal  $f$  de un subconjunto con un dado exponente de masa de Lipshitz-Hölder  $\alpha$ .
- La dimensión fractal generalizada  $D_q$  o equivalentemente, el exponente  $\tau(q) = (1 - q)D_q$ .

ya que las funciones  $f(\alpha)$  y  $\tau(q)$  describen el mismo aspecto y tienen la misma información del multifractal pueden ser relacionados a través de la transformación de Legendre

$$\tau(q) = \inf_{\alpha} \{q\alpha - f(\alpha)\} \quad (6.32)$$

y

$$f(\alpha) = \inf_q \{q\alpha - \tau(q)\} \quad (6.33)$$

De donde se obtienen las relaciones

$$\alpha = -\frac{d\tau}{dq} \quad (6.34)$$

$$q = \frac{df}{d\alpha}. \quad (6.35)$$

Estas ecuaciones representan una transformada de Legendre de las variables  $q$  y  $\tau$  a las variables  $\alpha$  y  $f$ . Es conocido que las transformaciones de Legendre juegan un papel importante en la mecánica clásica y en la termodinámica. Existe una analogía entre los multifractales y la mecánica estadística que va más allá del cambio de variable mediante la transformación. La ecuación 6.10 está inspirada en la función de partición de la mecánica estadística, esta analogía permite que estos parámetros sean equivalentes a conceptos termodinámicos como la energía ( $\alpha$ ), la energía libre ( $\tau/q$ ), la entropía ( $f$ ) y la temperatura ( $1/q$ ).

## 6.4. Turbulencias

Las turbulencias son un fenómeno común en la naturaleza, están presentes en el humo que sale de un cigarrillo, en el flujo de aire circulando alrededor de una pelota de golf, en el aire cerca de un avión en despegue, en el aire alrededor de un vehículo en movimiento y en muchos otros casos. El fenómeno consiste en la presencia de movimientos irregulares y remolinos en un fluido, los cuales son cambios bruscos y aleatorios de la presión y la velocidad del fluido. Son causadas por excesos de energía cinética en el fluido, los cuales sobrepasan el amortiguamiento del fluido. Es bien conocido que el comportamiento de los fluidos está descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes, pero el carácter no lineal de estas ecuaciones han generado la necesidad de una descripción estadística, la cual ha servido, entre otras cosas, para describir el proceso de disipación de la energía a pequeñas escalas.

Mandelbrot (1974, 1975) sugiere que las turbulencias presentan algunas facetas fractales, en algunos trabajos como en (SREENIVASAN y MENEVEAU, 1986) se estudian las características geométricas de las turbulencias desde un punto de vista fractal y se determina que es posible medir su dimensión fractal. Otra faceta fractal de las turbulencias completamente desarrolladas es la disipación de energía cinética la cual ha sido estudiada con el objetivo de explicar el carácter intermi-

tente de la razón de disipación de la energía cinética. En (MENEVEAU y SREENIVASAN, 1987b) se muestra un modelo multifractal que se ajusta satisfactoriamente a los resultados experimentales 6.17.

Este modelo tiene semejanzas con la estructura que se mostró en las secciones anteriores y es llamado modelo de cascada. El proceso originalmente ideado por Richardson (1922), consiste básicamente en que la energía cinética contenida en un remolino puede ser transferida en proporciones distintas al dividirse en remolinos más pequeños. Se puede simular este proceso utilizando la bisección repetida con proporciones distribuidas de manera aleatoria. En la sección anterior al realizar la bisección se asignaba una porción  $p_0$  de la medida original a uno de los lados y  $p_1 = 1 - p_0$  al otro lado obteniéndose un patrón como el de la figura 6.4, en este caso en cada iteración u orden  $n$  una de las porciones de energía es asignada de manera aleatoria a uno de los dos lados, ya sea el izquierdo o el derecho, y por defecto al lado sobrante le corresponde la otra porción de la energía para obtener una distribución como la que se muestra en la figura 6.18.

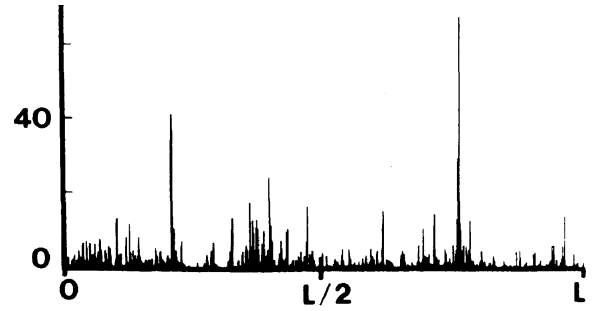


Figura 6.17: Energía disipada  $\epsilon/\epsilon_L$  en un experimento de capa límite.

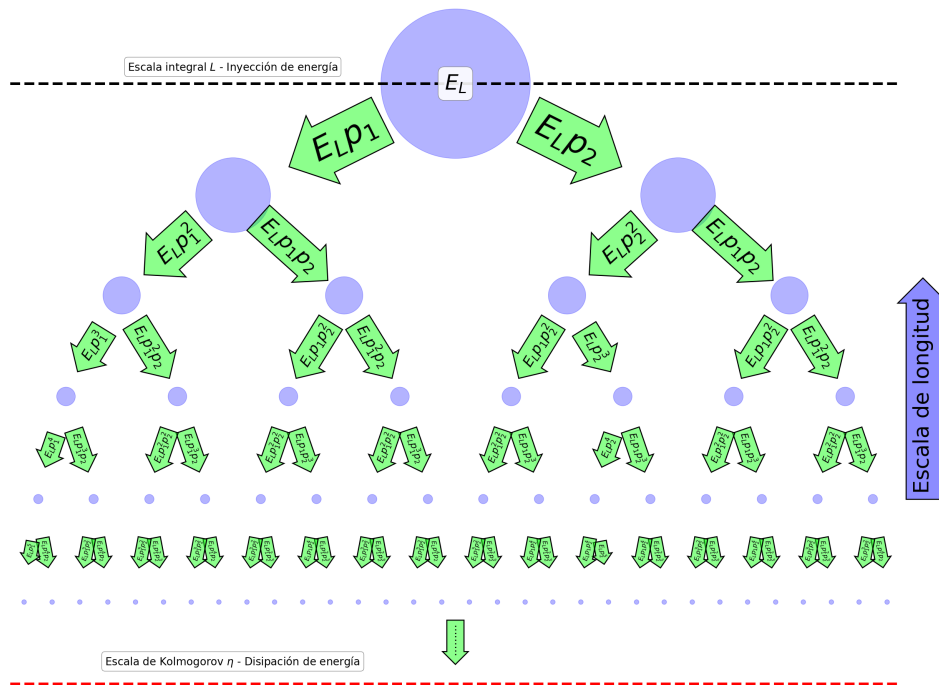
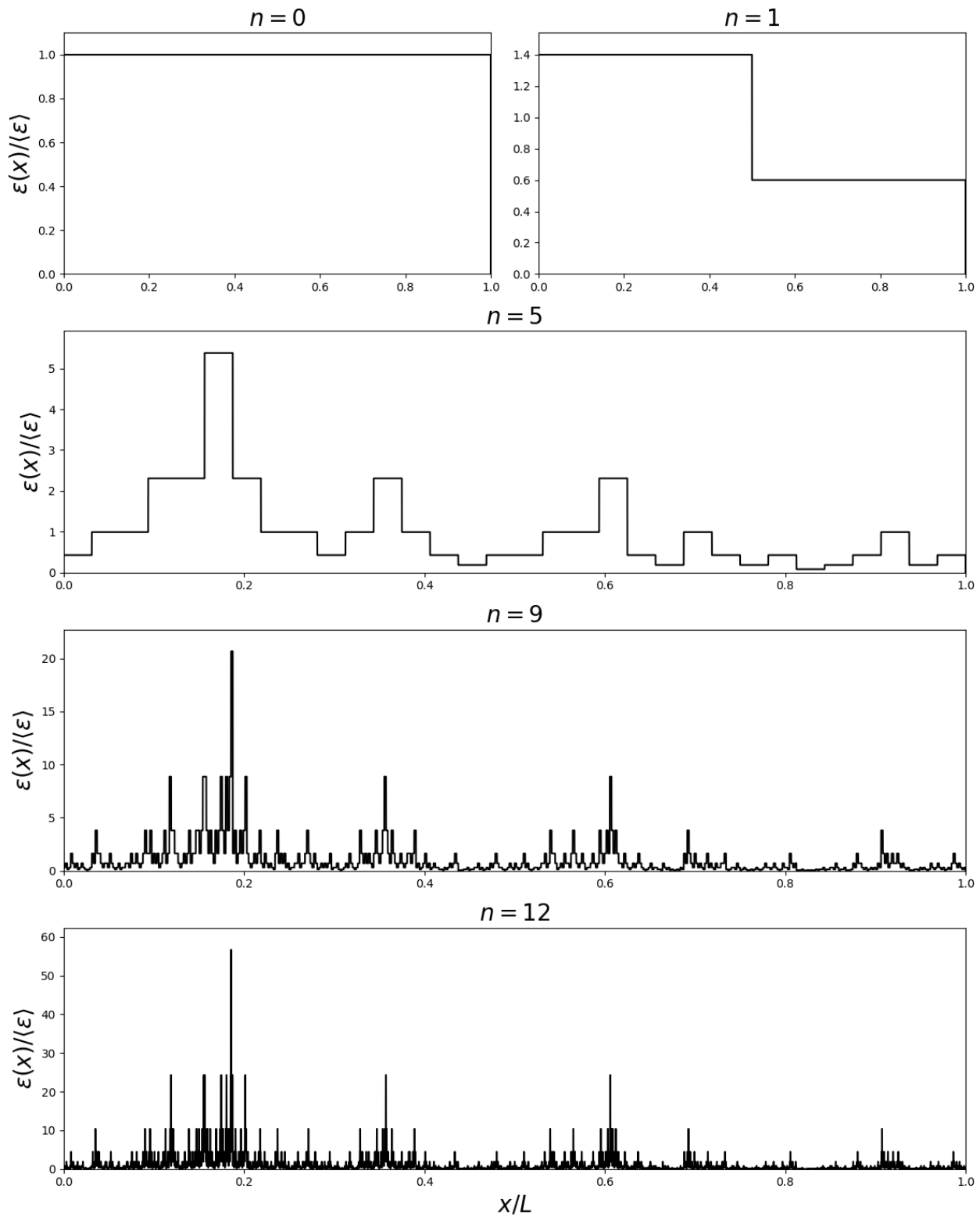


Figura 6.18: Representación esquemática de la cascada de energía de Richardson para turbulencias. Un remolino de tamaño  $L$  se divide en dos de tamaño  $L/2$ , cada uno se queda con una fracción de la energía  $E_L$ , el proceso se repite hasta alcanzarse la escala de Kolmogorov  $\eta$  momento en el cual la energía se convierte en calor.

La figura 6.19 muestra la forma en que se construye una señal artificial que se asemeje a la mostrada en 6.17, el valor del estado  $n$  que se ajusta mejor a la señal experimental depende del número de Reynolds. La forma de obtener el valor de  $p_0$  adecuado es mediante la dimensión generalizada.



**Figura 6.19:** Secuencia de gráficas de distribución de la energía  $\epsilon/\langle\epsilon\rangle$  para los estados  $n = 0, 1, 5, 9$  y  $12$ , con  $p_1 = 0.7$  y  $p_2 = 0.3$ . En estado  $12$  corresponde a la señal que se muestra en la figura 6.17.

La dimensión generalizada  $D_q$  de la distribución a orden  $n$  puede ser calculada analíticamente

para este caso utilizando la identidad (MENEVEAU y SREENIVASAN, 1987a)

$$\sum_i^n E_r^q = E_L^q \left( \frac{r}{L} \right)^{(q-1)D_q},$$

donde  $N = 2^n$  es el número de remolinos a orden  $n$ ,  $L$  el tamaño del remolino inicial, es decir la escala integral  $L$  y  $E_L$  la energía total disipada en el dominio de  $L$ . En el  $n$ -ésimo estado el tamaño de los remolinos es  $r = 2^{-n}L$  y hay  $\binom{n}{m}$  con energía disipada  $E_r = p_1^{n-m}p_2^m E_L$  para  $0 \leq m \leq n$ , la suma sobre todos los remolinos es

$$E_L^q (p_1^q + p_2^q)^n = 2^{n(1-q)D_q} E_L^q = 2^{n\tau} E_L^q.$$

Entonces

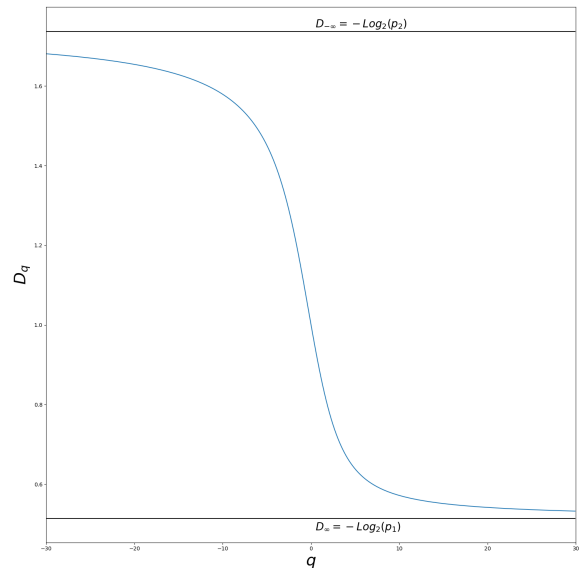
$$D_q = \frac{1}{(1-q)} \frac{\log(p_1^q + p_2^q)}{\log 2} = \log_2(p_1^q + p_2^q)^{1/(1-q)}$$

los límites  $q \rightarrow \pm\infty$  están dados por

$$D_\infty = -\log_2 p_1$$

$$D_{-\infty} = -\log_2 p_2$$

para  $p_1 > 1/2$ . Estos límites son usados para encontrar el valor de  $p_1$  de los resultados experimentales (MENEVEAU y SREENIVASAN, 1987b). Para  $p_1 = 0.7$  el comportamiento de  $D_q$  se muestra en la figura 6.20, y el espectro multifractal es igual al visto en la figura 6.8.



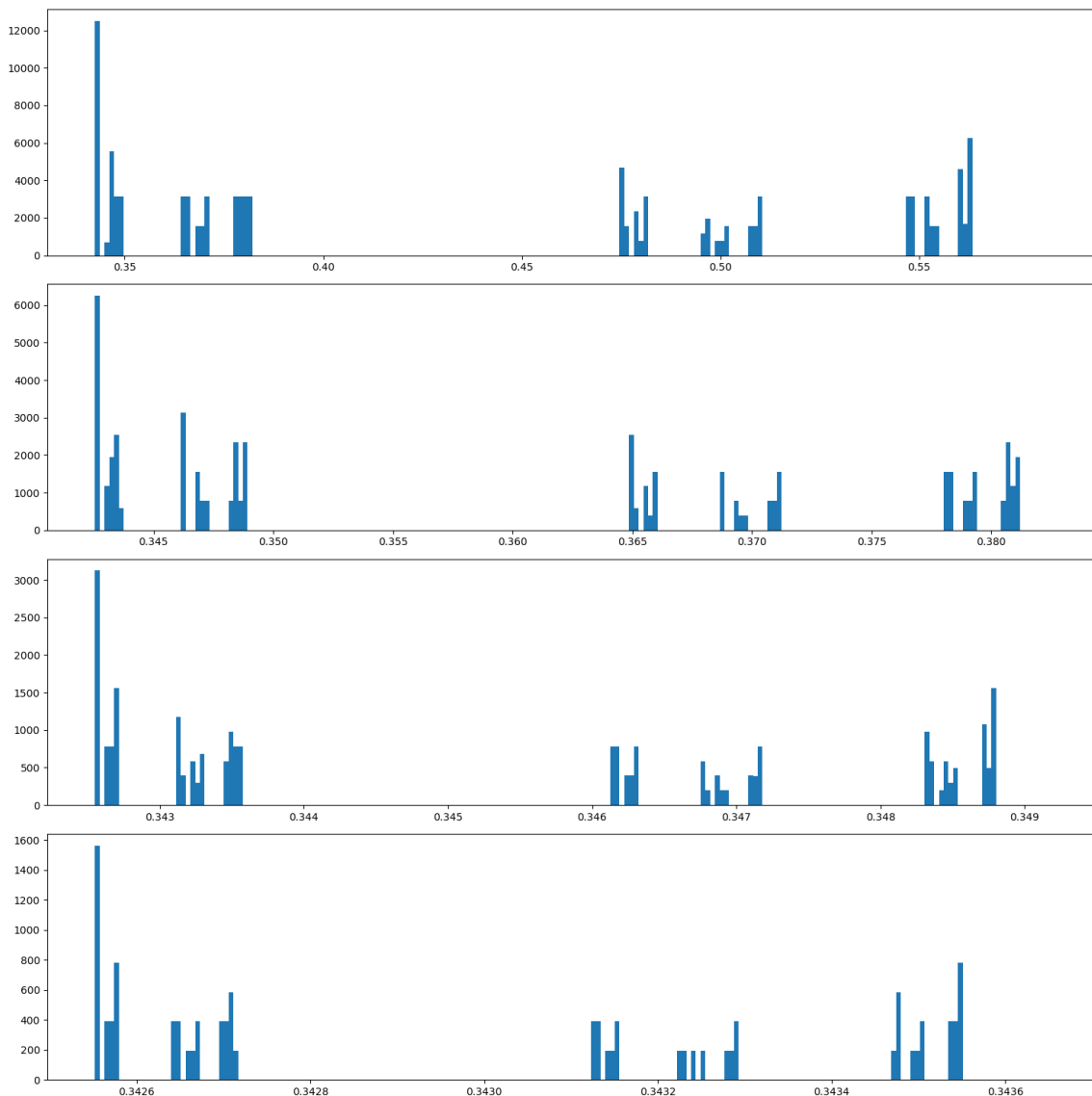
**Figura 6.20:** Modelo teórico de la dimensión generalizada  $D_q$  de una sección unidimensional a través de un campo de disipación en flujos turbulentos completamente desarrollados, con  $p_1 = 0.7$ .

## 6.5. Atractor Extraño

En el capítulo 3 se definió un sistema dinámico (Definición 3.4.1) como una transformación en la que la órbita de un punto  $x_0 \in X$  es una sucesión de la forma  $\{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$ . Un atractor extraño es un atractor para el cual la órbita es sensible a las condiciones iniciales  $x_0$ , lo que implica que tiene un comportamiento caótico. Un sistema caótico tiene un atractor extraño, alrededor del cual el sistema oscila para siempre, nunca repitiéndose o estableciéndose en un estado estable de comportamiento. Nunca llega al mismo punto dos veces y su estructura tiene una forma fractal que podría ser autosimilar, lo que significa que existen los mismos patrones en todas las escalas sin importar cuánto se acerque.

En 3.4 se estudiaron las órbitas del mapa logístico  $L_\lambda = \lambda x(1-x)$ , se observó que para diferentes valores de  $\lambda$  el punto fijo puede ser atractivo o repulsivo. Para  $\lambda = \lambda_\infty = 3.5699456\dots$  la órbita converge a un atractor extraño, en este caso un conjunto de Cantor.

Simulemos una órbita para el mapa logístico compuesto por  $2 \times 10^5$  puntos como se mostró en la figura 3.4 para  $\lambda_\infty = 3.5699456\dots$ . En la parte superior de la figura 6.21 se muestra un histograma de los resultados en un rango de 0.34 a 0.58, en los demás la escala fue sucesivamente reducida a un factor de 0.166. Como se observa algunos intervalos están bien poblados y otros están vacíos, se puede ver que existen al menos tres intervalos poblados en cada histograma y la estructura es casi la misma, tanto la separación relativa entre los intervalos como el número de puntos obtenidos, por lo que es posible afirmar que la órbita tiene un comportamiento autosimilar semejante al del conjunto de Cantor. Sí se construye a partir de dos intervalos de longitud  $r_1 = 0.408$  y  $r_2 = r_1^2 \approx 0.166$  y con



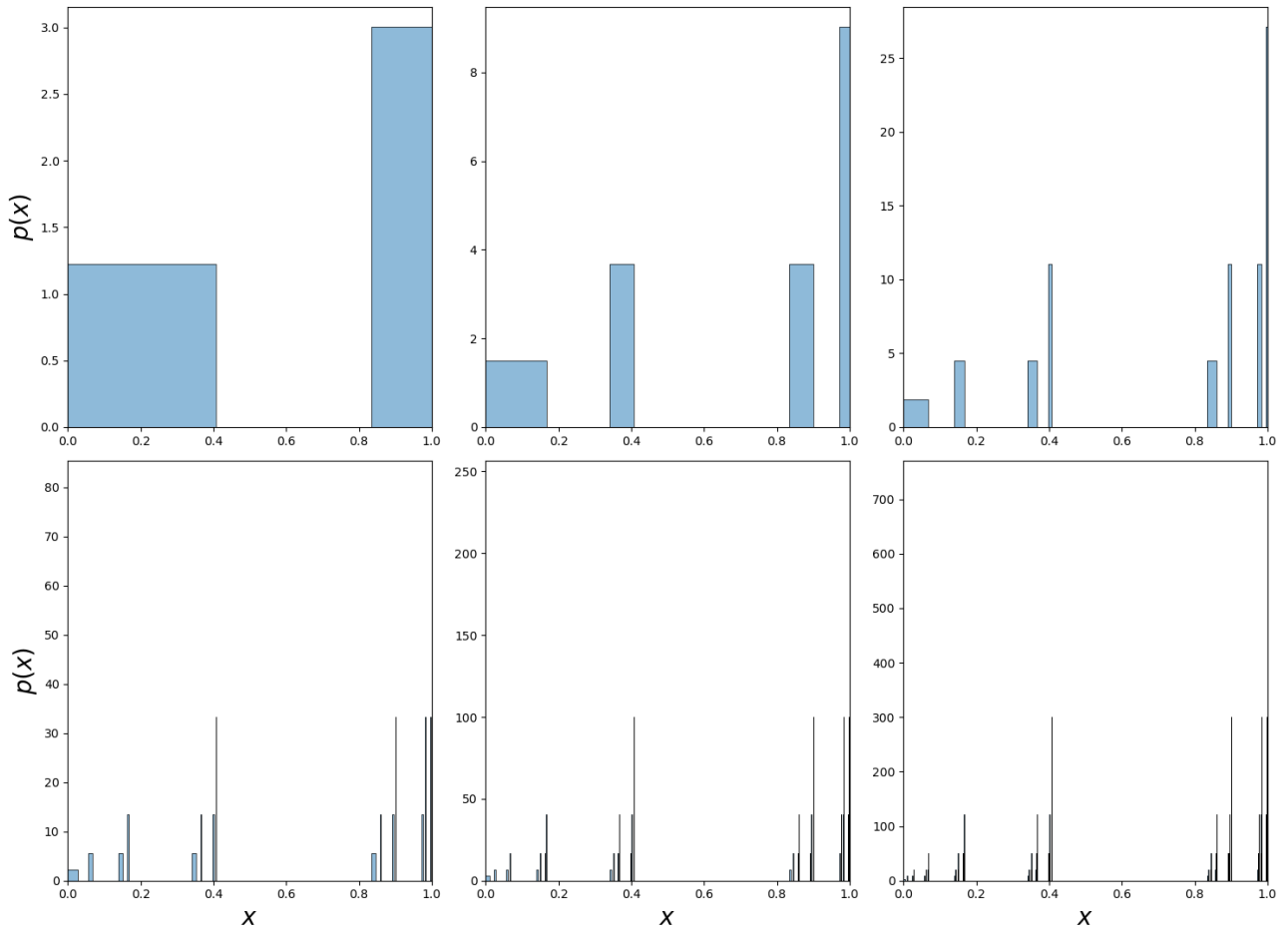
**Figura 6.21:** Histograma de una mapeo logístico para  $\lambda_\infty = 3.5699456\dots$  en el rango  $[0.34, 0.58]$  y sucesivas contracciones de escala.

probabilidades  $p_1 = p_2 = 0.5$ , se puede calcular la dimensión generalizada  $D_q$  para este sistema. Este

sistema es equivalente al que se obtienen con un IFS con probabilidad de la forma 6.2.2

$$\{X = [0, 1]; w_0(x) = r_0x + r_1, w_1(x) = r_1x, w_2(x) = r_2x + r_0 + r_1; p_0 = 0, p_1, p_2\}.$$

Considerando que  $\tau(q = 0)$  es el negativo de la dimensión fractal, de 6.10 se encuentra



**Figura 6.22:** Construcción del conjunto de Cantor para  $r_1 = 0.408$  y  $r_2 = 0.408^2$  con probabilidades  $p_1 = p_2 = 0.5$ .

$$r_1^D + r_2^D = 1$$

donde  $D = D_0$  es la dimensión fractal. Como  $r_2 = r_1^2$  se tiene que  $x + x^2 = 1$ , con  $x = r_1^D$ , la solución a la ecuación anterior es  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\dots$ , entonces  $D = \frac{\log 0.618}{\log 0.408} \approx 0.537$ . Para cualquier  $\tau$  y para  $p_1 = p_2 = 0.5$  6.10 toma la forma

$$r_1^{-\tau} + r_2^{-\tau} = r_1^{-\tau} + (r_1^{-\tau})^2 = 2^q$$

esta es una ecuación cuadrática cuya solución es  $r^{-\tau} = \frac{\sqrt{1+2^{q+2}}-1}{2}$ , de donde se obtienen que

$$\tau(q) = -\frac{\log \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{1+2^{q+2}}-1) \right]}{\log r_1} = \frac{\log \left[ \frac{2}{\sqrt{1+2^{q+2}}-1} \right]}{\log r_1} \quad (6.36)$$

de aquí se puede calcular la dimensión generalizada

$$D_q = \frac{\tau}{q-1} = \frac{\log \left[ \frac{1}{2}(\sqrt{1+2^{q+2}}-1) \right]}{(q-1) \log r_1} \quad (6.37)$$

para  $q \neq 1$ . En el límite  $q \rightarrow \infty$  el término dominante en 6.36 es  $2^{q+2}$ , por lo que  $\tau(q \rightarrow \infty) \propto -q(2 \log_2 r_1)^{-1} = -q(\log_2 r_1^2)^{-1}$  entonces  $D_\infty = -(\log_2 r_1^2)^{-1} = 0.387$  para  $r_1 = 0.408$ . Cuando  $q \rightarrow \infty$  el término  $\sqrt{1+2^{q+2}} \approx 1+2^{q-1}$  entonces  $\tau(q \rightarrow -\infty) \propto -(q-1)(\log_2 r_1)^{-1}$  y la dimensión generalizada toma el valor  $D_{-\infty} = -(\log r_1)^{-1} = 0.773$ .

La dimensión fractal del conjunto de todos los subintervalos que tienen la misma probabilidad  $p_1^k p_2^{n-k}$  está dada por intervalos de tamaño  $r_1^k r_2^{n-k}$ , por lo que el espectro multifractal se puede obtener de la relación

$$f(k/n) = -\frac{\log \binom{n}{k}}{\log r_1^k r_2^{n-k}}$$

de donde se obtiene que

$$\binom{n}{k} (r_1^k r_2^{n-k})^f = 1$$

haciendo el logaritmo, usando las ecuaciones 6.2 y 6.3, y despejando se obtiene

$$f(\xi) = \frac{(1-\xi) \log(1-\xi) + \xi \log \xi}{(2-\xi) \log r_1} \quad (6.38)$$

con  $\xi = \frac{k}{n}$  y  $r_2 = r_1^2$ . El exponente de Lipshitz-Hölder está dado por

$$\alpha(\xi) = \frac{\xi \log(p_1) + (1-\xi) \log(p_2)}{(2-\xi) \log r_1} = -\frac{1}{(2-\xi) \log_2 r_1}$$

para  $p_1 = p_2 = 0.5$ . Como sabemos, para obtener  $f(\alpha)$  a partir de las dos ecuaciones anteriores se tiene en cuenta que para cada valor de  $\alpha$  existe un único valor  $f$ , ya que ambas son funciones de  $\xi$ , el cual toma valores en el intervalo unitario  $[0, 1]$ , por lo que el exponente  $\alpha$  da el rango de valores de  $f$ , se puede obtener una relación para  $f(\alpha)$  reemplazando  $\xi = 2 + \frac{1}{\alpha \log_2 r_1}$  en 6.38 se encuentra que:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\log 2} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{\alpha \log_2 r_1} \right) \log \left( -1 - \frac{1}{\alpha \log_2 r_1} \right) - \left( 2 + \frac{1}{\alpha \log_2 r_1} \right) \log \left( 2 + \frac{1}{\alpha \log_2 r_1} \right) \right\}.$$

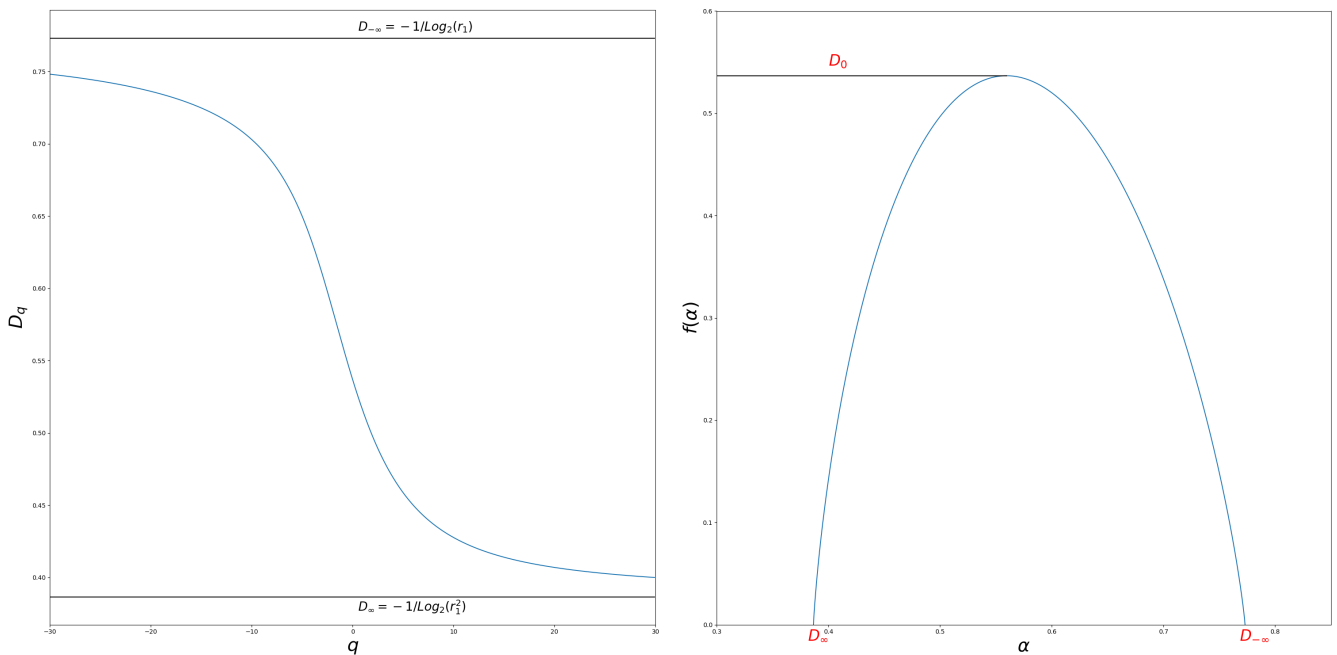


De la ecuación 6.36 se puede encontrar una expresión para  $\alpha$  en función de  $q$ , esto es

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq} = \frac{2^{q+1}}{\log_2 r_1 (1 + 2^{q+2} - \sqrt{1 + 2^{q+2}})}$$

de donde se puede verificar que el valor  $\alpha(0) = \frac{-2}{(5-\sqrt{5})\log_2 r_1} \approx 0.559$  corresponde al máximo del espectro  $f$  y que en  $\alpha(q = \pm\infty) = D_{\pm\infty}$  el espectro tome el valor mínimo  $f(\alpha) = 0$ .

Escoger a  $r_1 = 0.408$  con  $r_2 = r_1^2$  es simplemente un modelo para describir al atractor extraño generado para  $\lambda = 3.5699456\dots$  que tiene una discrepancia de 2.5% con los resultados numéricos por lo que se considera que el atractor extraño no es exactamente autosimilar. En la figura 6.23 se muestra el comportamiento de la dimensión generalizada y del espectro multifractal.



**Figura 6.23:** Dimensión multifractal y espectro multifractal del atractor extraño del mapa logístico para  $\lambda = 3.5699456\dots$

## 6.6. Medida multinomial

Hasta el momento se han discutido algunos ejemplos sencillos que tienen que ver con la teoría multifractal, como el conjunto de Cantor y la bisección. Se puede concluir, del ejemplo de bisección, que el intervalo unitario junto con la asignación de probabilidades es un ejemplo de multifractal simple, es decir, que está compuesto por infinitos subconjuntos fractales con dimensiones fractales no enteras. Estos ejemplos se pueden generalizar utilizando la medida multinomial.

Una medida multinomial es construida sobre el intervalo unitario por la división repetida del intervalo y la relocalización de masa. El intervalo unitario es dividido inicialmente en  $b$  intervalos de igual longitud, donde  $b \geq 2$ . Cada uno de esos intervalos es dividido en  $b$  nuevos intervalos, y así sucesivamente. Cada subintervalo de la  $n$ -ésima iteración puede ser caracterizado unívocamente

por un número racional en base  $b$  con  $n$  dígitos. Como se había visto en la primera sección, estos intervalos son llamados cilindros de orden  $n$  y están definidos por

$$C_{z_1 z_2 z_3 \dots z_n} = \left[ \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{b^j}, b^{-n} + \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{b^j} \right]$$

Para  $z_i \in \Omega_0 = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ . El espacio  $\Omega_0^n$  se define como el conjunto que contienen a todas las secuencias de la forma  $\omega_n = z_1 z_2 z_3 \dots z_n$ , cada una de estas secuencias representa a uno de los  $b^n$  subintervalos de longitud  $\delta_n = b^{-n}$ . Los números dentro de estos intervalos son aquellos que tienen los mismos primeros  $n$  dígitos en base  $b$ . Asignando a cada  $z \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$  una probabilidad  $p_z$  tal que

$$\sum_{z=0}^{b-1} p_z = 1,$$

la medida de probabilidad  $\mu$  atribuible a un cilindro en particular es entonces

$$\begin{aligned} \mu[C_{\omega_n}] &= p_{z_1} p_{z_2} \cdots p_{z_n} \\ &= p_0^{n\Phi_0(\omega_n)} p_1^{n\Phi_1(\omega_n)} p_2^{n\Phi_2(\omega_n)} \cdots p_{b-1}^{n\Phi_{b-1}(\omega_n)}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

donde  $\Phi_i(\omega_n)$  es la fracción de dígitos que son iguales a  $i$  en la secuencia  $\omega_n$ . Para excluir a los intervalos que tienen probabilidades iguales a cero se define otro espacio de la forma  $\Omega = \{\omega \in \Omega_0 : p_\omega > 0\}$  con  $s = \#\Omega$ . En el caso particular de la medida de Cantor se tiene que  $b = 3$ , con probabilidades  $p_0 = \frac{1}{3}$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = \frac{2}{3}$ , entonces  $s = 2$ .

### 6.6.1. Dimensiones Fractales

Denotando como  $M(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n))$  al conjunto de cilindros que tienen los mismos  $(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n))$ , el número de cilindros en este conjunto está dado por su cardinalidad

$$\#M(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n)) = \frac{n!}{(n\Phi_0(\omega_n))!(n\Phi_1(\omega_n))! \cdots (n\Phi_{b-1}(\omega_n))!} \quad (6.40)$$

Este valor es igual al número de cubiertas de longitud  $\delta_n$  necesarias para cubrir el conjunto  $M(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n))$ . Separando el intervalo unitario en conjuntos que tienen los mismos valores de  $(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n))$ , se tiene

$$[0, 1] = \bigcup_{\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n)} M(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n)).$$

Cuando se considera el límite  $n \rightarrow \infty$  el intervalo tiende a un punto y las fracciones toman valores definidos como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_i(\omega_n) = \phi_i \text{ para } i = \{0, 1, 2, \dots, b-1\} \quad (6.41)$$

en términos de los conjuntos  $M(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n))$

$$M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n))$$

Se tiene entonces que utilizando la fórmula de Stirling la dimensión de Hausdorff está dada por

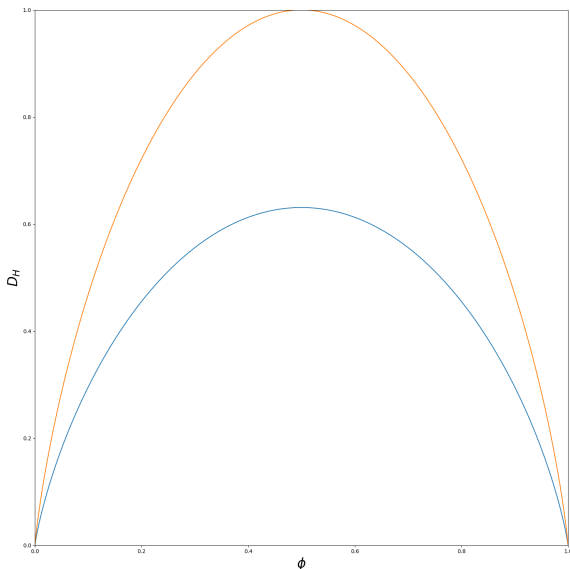
$$D_H(M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \#M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})}{\log b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{i \in \Omega} \phi_i^{-n\phi_i}}{n \log b} = - \sum_{i \in \Omega} \phi_i \log_b \phi_i \quad (6.42)$$

Este resultado es el teorema de Eggleston e indica la dimensión fractal de los conjuntos  $M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})$ . De este se puede concluir que el intervalo unitario es un multifractal, cuyos espectros de singularidad están dados por la ecuación 6.42. Además, la dimensión global de Hausdorff de  $I$  es

$$D_H([0, 1]) = \max_{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1}} D_H(M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})) = 1,$$

obtenido cuando  $\phi_0 = \phi_1 = \dots \phi_{b-1} = 1/b$ , llamado el conjunto normal en base  $b$ .

### Ejemplos



**Figura 6.24:** La curva de abajo muestra el espectro de dimensiones del Conjunto de Cantor y la de arriba espectro de dimensiones de la bisección 6.6.

Un ejemplo del teorema de Eggleston es el resultado obtenido en la ecuación 6.5 para el proceso de bisección, que no es más que el proceso multinomial con  $b = 2$  y en donde la variable  $\xi = \frac{k}{n}$  cumple el papel de  $\phi_i$ . Cuando se hace la separación multifractal de  $I$  el subconjunto  $M(\phi_0, \phi_1)$  se tiene que

$$D_h^I(M(\phi_0, \phi_1)) = \frac{1}{\log 2} \sum_{i=0}^1 \phi_i \log \phi_i.$$

Por otra parte cuando se hace la separación multifractal de  $C \subset I$ , donde  $C$  hace referencia al conjunto de Cantor, se obtiene

$$D_h^C(M(\phi_0, \phi_2 = 1 - \phi_0)) = \frac{1}{\log 3} (\phi_0 \log \phi_0 + \phi_2 \log \phi_2)$$

de donde se obtiene que el espectro multifractal de  $C$  está dado por

$$D_h^C(M(\phi_0, \phi_2 = 1 - \phi_0)) = D_h^I(M(\phi_0, \phi_1 = 1 - \phi_0)) \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Para el caso del conjunto de Cantor  $b = 3$  y por el teorema de Eggleston

$$D_H(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = \frac{\log 2}{\log 3} D_H(\phi_0, \phi_2)$$

con  $\phi_1 = 0$ , haciendo notar que  $D_H(\phi_0, \phi_1, \phi_2) \neq D_H(\phi_0, \phi_2)$ . Para  $\phi_0 = \phi_2 = 1/2$  la dimensión es máxima y  $D_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Haciendo  $\phi = \phi_0 = 1 - \phi_2$  se tiene que  $D_H(\phi) = \phi \log_3 \phi + (1 - \phi) \log_3(1 - \phi)$ , el comportamiento se muestra en la figura 6.24 comparado con el de la bisección.

### 6.6.2. Espectro Óptico de la Separación Multifractal

Una forma de visualizar el carácter multifractal del intervalo unitario consiste en construir un espectro óptico. Como ejemplo se puede tomar la base  $b = 3$  de tal forma que cada conjunto  $M(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$  es un fractal representado por un conjunto de líneas del mismo color indicando que tienen dimensión  $D_H(M(\phi_0, \phi_1, \phi_2))$ . El número de conjuntos  $M(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$  diferentes está dado por el valor  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  (solo para  $b = 3$ ), de tal forma que para  $n = 8$  dígitos se tienen una familia de 45 conjuntos diferentes como se muestra en la figura 6.25. Los cilindros de  $M(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$  están dispersos en el intervalo unitario y no son necesariamente contiguos. El espectro óptico de un multifractal corresponde al entretrejido de todos los conjuntos  $M(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ , el resultado se muestra en la figura 6.26. Los cilindros  $C_{z_1 z_2 \dots z_8}$  de longitud  $\delta_n = 3^{-8}$  tienen estructura multifractal, ya que si se toma cualquiera de estos se puede observar la misma estructura presente en todo el intervalo unitario (figura 6.26). Tomando un cilindro al azar  $C_{z_1 z_2 \dots z_8}$  y haciendo  $n = 16$  se obtiene una nueva familia de 45 subconjuntos como los que se muestran en 6.25, los nuevos cilindros  $C_{z_1 z_2 \dots z_{16}}$  de longitud  $\delta_n = 3^{-16}$  están distribuidos en el cilindro original  $C_{z_1 z_2 \dots z_8}$ , al unir nuevamente esta familia se obtiene una estructura multifractal (figura 6.27) igual a la conformada por los  $C_{z_1 z_2 \dots z_8}$  en el intervalo unitario 6.26.

Utilizando el teorema de Eggleston con  $\phi_2 = 1 - \phi_0 - \phi_1$  se obtiene la dimensión fractal:

$$D_H(M(\phi_0, \phi_1, \phi_2)) = -\phi_0 \log_3 \phi_0 - \phi_1 \log_3 \phi_1 - (1 - \phi_0 - \phi_1) \log_3(1 - \phi_0 - \phi_1),$$

entonces  $D_H(M(\phi_0, \phi_1, \phi_2))$  es una superficie dependiente de las variables  $\phi_0$  y  $\phi_1$ , como se muestra en la figura 6.28.

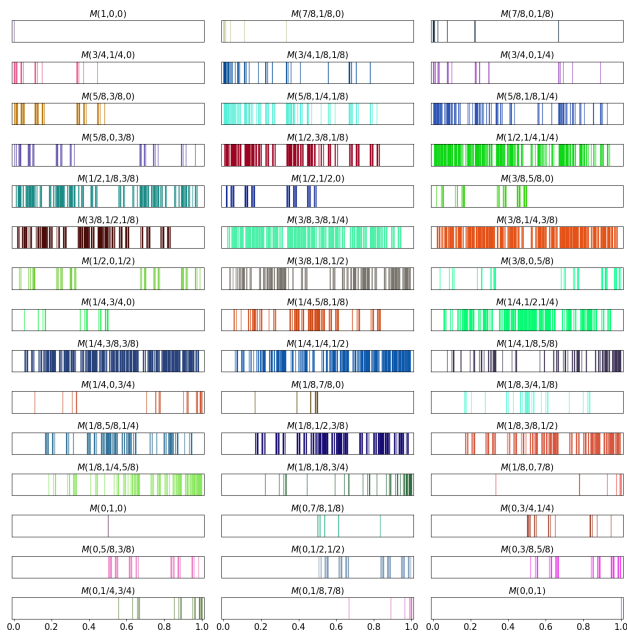


Figura 6.25: Familia de los 45 conjuntos  $M(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$  para  $n = 8$ , cada uno de estos tienen una estructura fractal y está compuesto por todos los cilindros que comparten las mismas fracciones o frecuencias  $\phi_i$ .

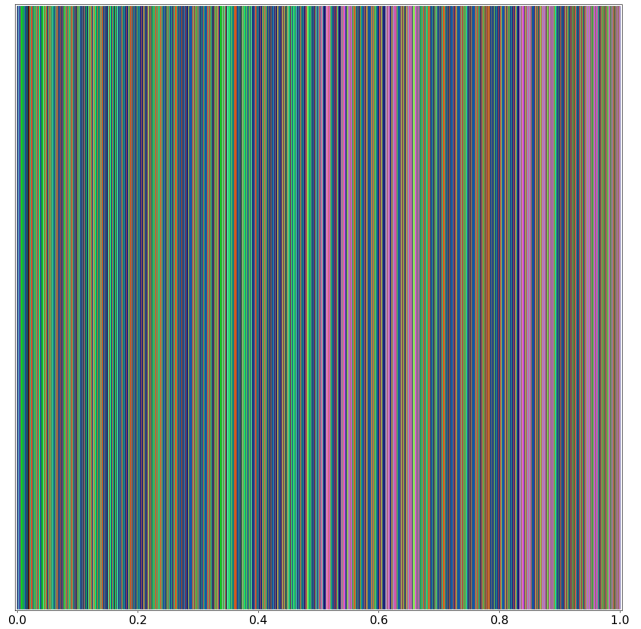


Figura 6.26: Espectro óptico compuesto por los diferentes conjuntos fractales  $M(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$  mostrados es 6.25.

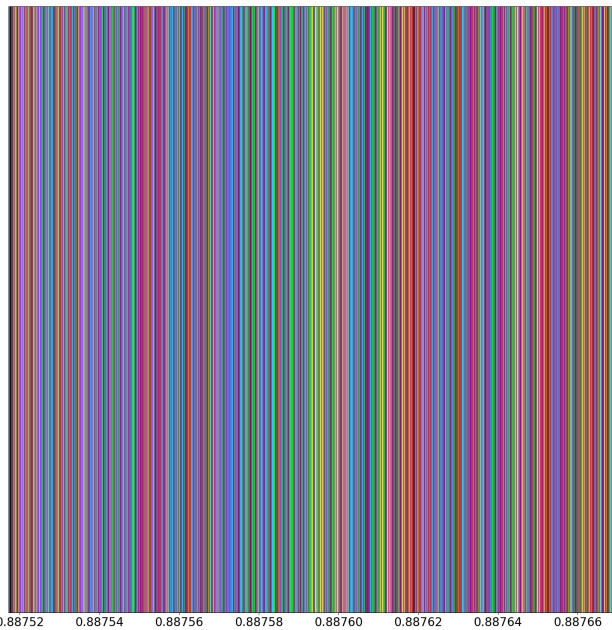


Figura 6.27: Espectro óptico de uno de los cilindros  $C_{z_1 z_2 \dots z_8}$ .

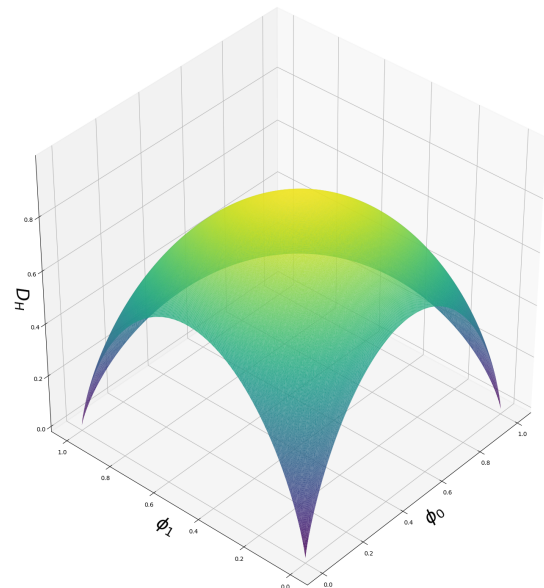


Figura 6.28: Espectro de dimensiones para  $b = 3$ .

### 6.6.3. Comportamiento Local

La medida de Cantor, como se construyó en el primer ejemplo de este capítulo es una distribución de probabilidad cuya función de distribución acumulada es la función de Cantor, esta distribución no tiene ni función de densidad de probabilidad, ni una función de probabilidad, ya que esta medida no es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Una forma alternativa para caracterizar tal medida es describir a lo que se le llama comportamiento local.

Para un dado  $n$ , se consideran aquellos cilindros  $C_{\omega_n}$  con medidas diferentes de cero, estos son

todos aquellos tales que para  $z_i \in \Omega = \{1, 2, \dots, b\}$ ,  $\omega_n \in \Omega^n = \{z_1 z_2 \dots z_n : \mu[z_i] > 0\}$ . El comportamiento local de estos cilindros está descrito por

$$\begin{aligned} A(\omega_n) &= \frac{\log \mu[C_{\omega_n}]}{\log \delta_n} = -\frac{1}{n} \log_b \left[ \prod_{i \in \Omega} p_i^{n\Phi_i(\omega_n)} \right] \\ &= -\sum_{i \in \Omega} \Phi_i(\omega_n) \log_b p_i. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Por ejemplo para  $b = 2$  y  $n = 4$  las frecuencias de aparición de un dígito  $i \in \Omega = \{0, 1\}$  toma los valores  $\Phi_i = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  o 1. Entonces considerando a  $A$  como una variable aleatoria la distribución de probabilidad para  $A(\omega_2)$  puede ser reducida a una expresión en términos del número de subintervalos con valores particulares de  $\Phi_0$  y  $\Phi_1$ . Si se quiere saber cuál es la probabilidad de que  $A(\omega_4) = \alpha$ , esta dependerá del número de cilindros con fracciones  $\Phi_0$  y  $\Phi_1$ , si  $\Phi_0 = \Phi_1 = \frac{1}{2}$ , hay seis cilindros con estos valores para  $n = 4$

$$\begin{array}{ccc} 0.0011 & 0.0101 & 0.0110 \\ 0.1010 & 0.1100 & 0.1001. \end{array}$$

La probabilidad de que  $A(\omega_n) = \frac{1}{2}(\log p_0 + \log p_1) = \alpha$  está dada por  $\Pr\{A = \alpha\} = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8}$ .

En general, de la definición de la variable aleatoria  $\alpha = A(\omega_n)$ , ecuación 6.43, se observa que dado un vector  $\Phi_i(\omega_n)$  este tiene asociado un valor de  $\alpha$ , pero esta es una relación que no es uno a uno, puesto que dado un valor de  $\alpha$ , el cuales un escalar, no se puede determinar un vector  $\Phi_i(\omega_n)$  con más de dos componentes, (esto se debe a que  $\Phi_0(\omega_n) + \Phi_1(\omega_n) = 1$ ), lo que implica que existe un conjunto infinito de vectores que satisface un valor dado de  $\alpha$ , como se muestra en la siguiente sección.

Se define el conjunto de vectores  $\Psi(\alpha)$  como

$$\Psi(\alpha) = \left\{ (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1}) : \alpha = -\sum_{i \in \Omega} \phi_i \log_b p_i \text{ y } \sum_{i \in \Omega} \phi_i = 1 \right\}, \quad (6.44)$$

y el subconjunto  $\Psi_n(\alpha)$  como

$$\Psi_n(\alpha) = \{(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1}) \in \Psi(\alpha) : n\phi_\omega \text{ es un entero no negativo } \forall \omega \in \Omega\}.$$

Para  $b = 2$  con  $p_i \neq p_j$ , el conjunto de fracciones se reduce a  $\Omega = \{i, j\}$ , entonces  $\Psi(\alpha)$  tienen solo un punto. Para un valor particular de  $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1}) \in \Psi_n(\alpha)$ , la probabilidad depende del número de cilindros a orden  $n$  con esos valores, definido como  $N_n(\phi_0, \dots, \phi_{b-1}) = \frac{n!}{(n\phi_0)!(n\phi_1)!\dots(n\phi_{b-1})!}$ . Por lo

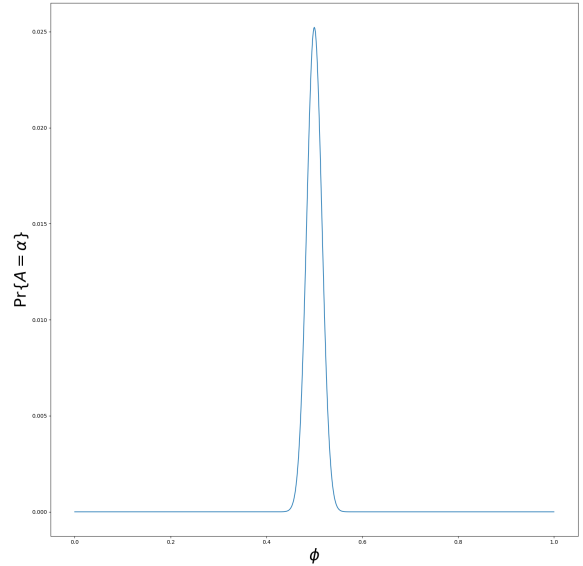
tanto se sigue que

$$\Pr\{A(\omega_n) = \alpha\} = \begin{cases} 0 & \text{sí } \Psi_n(y) = \emptyset \\ \frac{1}{b^n} \sum_{(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1}) \in \Psi_n(y)} N_n(\phi_0, \dots, \phi_{b-1}) & \text{sí } \Psi_n(\alpha) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  esta probabilidad tiende a concentrarse alrededor de  $\phi_i = 1/2$ , la cual corresponde al valor  $\alpha = \alpha_0 = (1/s) \sum_{i \in \Omega} \log_b p_i$  con probabilidad

$$\Pr\{\alpha(\Phi_0)\} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n\Phi_0}.$$

En la figura 6.29 se muestra la distribución para  $n = 1000$ , la cual tienen un máximo en  $\Phi_0 = 1/2$ . Esto ocurre en el caso en el que el intervalo es dividido en partes iguales, pero se puede realizar una partición en la que las probabilidades tiendan a cero.



**Figura 6.29:** Probabilidad  $\Pr\{A = \alpha\}$ , para  $b = 2$ ,  $\phi = \phi_0 = 1 - \phi_1$  y  $n = 1000$ .

### 6.6.4. Exponente de Hölder

Tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se encuentra el exponente de Hölder:

$$\alpha(\Phi_i(\omega_n), P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu[C_{\omega_n}]}{\log \delta_n} = - \sum_{i \in \Omega} \Phi_i(\omega_n) \log_b p_i. \tag{6.45}$$

donde  $P$  es el vector de probabilidades compuesto por las  $p_i$  y la base  $b$ . El exponente de Hölder de un punto depende de los dígitos en el número dado y del vector de probabilidades que caracterizan el proceso multiplicativo, su definición implica que todos los puntos que conforman a  $M(\Phi_0(\omega_n), \Phi_1(\omega_n), \dots, \Phi_{b-1}(\omega_n))$  tienen el mismo exponente de Hölder; sin embargo, el inverso no es válido, ya que como se discutirá a continuación para un valor dado de  $\alpha$  existe un número infinito de conjuntos  $M(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{b-1})$ , que poseen el mismo valor de  $\alpha$ .

De la definición de  $\alpha$  se tiene que:

$$\alpha = A_0\phi_0 + A_1\phi_1 + \dots + A_{b-2}\phi_{b-2} + D \tag{6.46}$$

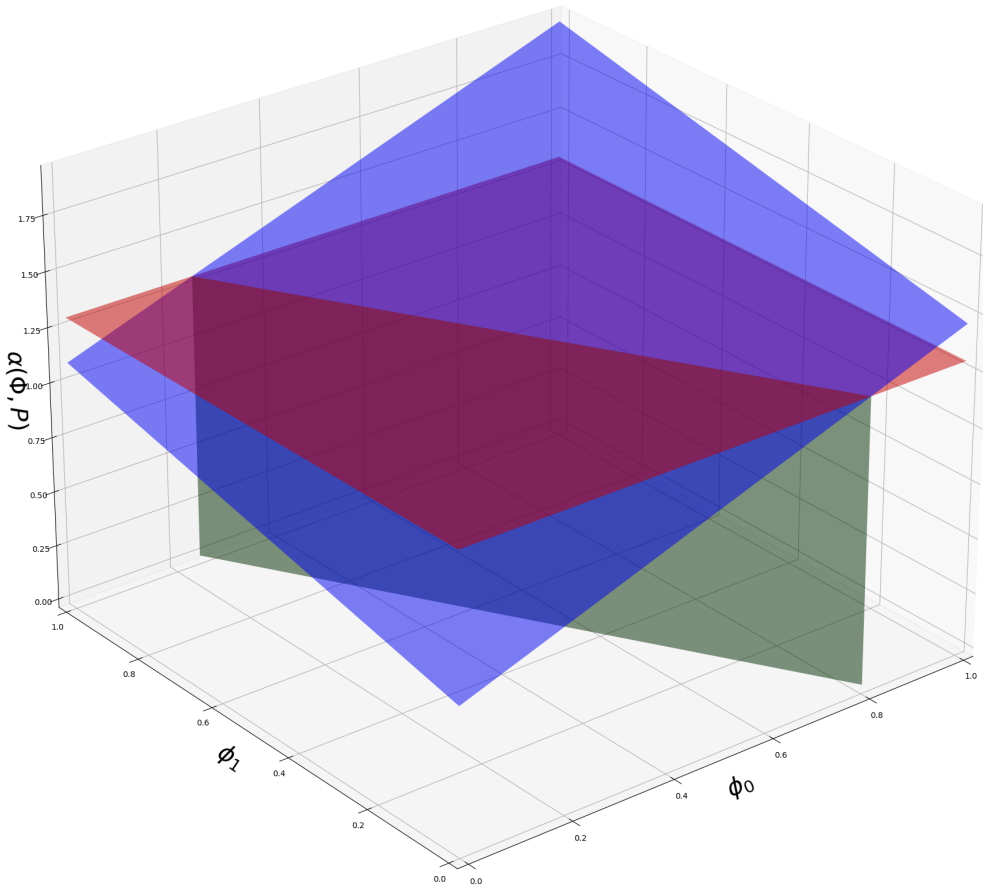
donde

$$A_j = -\log_b \frac{p_j}{1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{b-2}}$$

y  $D = -\log_b(1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{b-2})$ . Esta ecuación define un hiperplano en el espacio  $(\alpha, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-2})$ , que al fijar  $\alpha$  determina la hiper-recta en el plano  $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-2})$ , así por ejemplo en base  $b = 3$  se tienen

$$\alpha = A_0\phi_0 + A_1\phi_1 + D \tag{6.47}$$

que es la ecuación de un plano en tres dimensiones, al fijar el valor de  $\alpha$  se determina una recta en el plano  $(\phi_0, \phi_1)$ , todos ellos con el mismo valor de  $\alpha$  (figura 6.30).



**Figura 6.30:** Se muestran tres planos,  $\alpha = A_0\phi_0 + A_1\phi_1 + D$  (azul),  $\alpha = 1.3$  y la recta  $A_0\phi_0 + A_1\phi_1 + D = 1.3$  para el vector de probabilidad  $P = (p_0 = 0.2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.5)$ .

De lo anterior se observa que cuando se fija el exponente de Hölder, se encuentra un conjunto infinito de puntos  $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})$  y a cada punto está asociado un conjunto  $M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})$ , por lo que existen infinitos conjuntos  $M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})$  con el mismo exponente de Hölder.

Se define a  $J_\alpha$  como el conjunto de puntos de intervalo unitario  $I$  que tienen el mismo exponente de Hölder, esto es

$$J_\alpha = \left\{ x : \alpha = -\sum_{i \in \Omega} \phi_i \log_b p_i \text{ y } \sum_{i \in \Omega} \phi_i = 1 \right\} = \bigcup M(\phi'_0, \phi'_1, \dots, \phi'_{b-1}) \tag{6.48}$$



la unión corre sobre todos los conjuntos  $M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})$  que tienen el valor  $\alpha$  como exponente de Hölder.

### 6.6.5. Extensión de las Ideas de Boltzmann a Multifractales

El conjunto  $J_\alpha$  está conformado por un número infinito de conjuntos  $M(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{b-1})$ , cada uno de ellos es un conjunto fractal, cuya dimensión está dada por el teorema de Eggleston, por lo que  $J_\alpha$  tienen una estructura multifractal. Ahora se presenta el problema de encontrar la dimensión de Hausdorff de  $J_\alpha$ , para encontrarla se usarán dos propiedades básicas de la dimensión de Hausdorff

$$D_H(M) \leq D_H(M') \text{ si } M \subset M' \quad (6.49)$$

$$D_H\left(\bigcup_n M_n\right) = \sup D_H(M_n) \quad (6.50)$$

por lo que la dimensión de Hausdorff de  $J_\alpha$  será el máximo de las dimensiones de Hausdorff de los subconjuntos que lo componen.

Denotando por  $D(\alpha)$  a la dimensión de Hausdorff de  $J_\alpha$  se tiene

$$D(\alpha) = D_H(J_\alpha) = \max D_H(M(\phi'_0, \phi'_1, \dots, \phi'_{b-1})) = \frac{1}{\log b} \max(S(\phi'_0, \phi'_1, \dots, \phi'_{b-1})) \quad (6.51)$$

La propiedad 6.49 y 6.50 de la dimensión de Hausdorff y el teorema de Eggleston, permiten extender las ideas de Boltzmann sobre la irreversibilidad para la descripción de los fractales estadísticos, en particular permite encontrar el espectro de dimensiones del multifractal estadístico.

Para describir la evolución al equilibrio de un sistema aislado de  $N$  partículas que no interactúan entre sí, Boltzmann introduce el espacio  $\mu$  que es el espacio de fase de una partícula, el estado microscópico corresponde a una nube de  $N$  puntos en el espacio  $\mu$ , dividiéndolo en  $K$  celdas el estado mesoscópico del sistema se describe con el vector formado con los números de ocupación de cada celda  $\{n\} = \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$ ; a continuación se define la entropía para el estado mesoscópico en términos de  $W\{K\}$ , el número de microestados compatibles con  $\{n\}$ , está dado por:

$$S(\{n\}) = k \log W(\{n\}) = k \log \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_K!} \quad (6.52)$$

que se puede expresar en términos de la entropía de Shannon como

$$S(\{n\}) = kN \sum_{j=1}^K \phi_j(t) \log \phi_j(t) \quad (6.53)$$

con  $\phi_j(t) = n_j(t)/N$ . Tomando el límite cuando  $K \rightarrow \infty$ ,  $\phi_j(t) \rightarrow \phi(r, \nu, t)$  siendo esta última

cantidad gobernada por la ecuación de Boltzmann, con lo que se demuestra el teorema  $H$ , el cual garantiza que para tiempos grandes la entropía del sistema es máxima y que la distribución del equilibrio es aquella que maximiza la entropía compatible con las condiciones de energía y el número de partículas constante.

Así, para determinar la dimensión de Hausdorff de  $J_\alpha$  se maximiza la entropía de Shannon con respecto a las frecuencias  $(\phi'_0, \phi'_1, \dots, \phi'_{b-1})$ :

$$S(\phi'_0, \phi'_1, \dots, \phi'_{b-1}) = - \sum_{r=0}^{b-1} (\phi'_r \log \phi'_r) \quad (6.54)$$

con las constricciones

$$\alpha = - \sum_{i \in \Omega} \phi_i \log_b p_i \text{ y } \sum_{i \in \Omega} \phi_i = 1. \quad (6.55)$$

Nótese que estas constricciones son similares a la energía interna por partícula cuando se tienen un sistema físico de un número  $b$  de niveles de energía, con  $\varepsilon_r = -\frac{\log p_r}{\log b} = \log_b p_r$ . De inmediato se demuestra que la frecuencia que maximiza la entropía de Shannon está dada por:

$$\phi'_r = P_r(q) = \frac{p_r^q}{Z_q} \quad (6.56)$$

donde  $Z_q = \sum_{r=0}^{b-1} p_r^q$  y  $q$  es un parámetro indeterminado de Lagrange, cuyo valor está determinado implícitamente por la constricción 6.56:

$$\alpha(q) = \sum_{r=0}^{b-1} P_r(q) \left[ -\frac{\log p_r}{\log b} \right] \equiv \left\langle -\frac{\log p}{\log b} \right\rangle_q \quad (6.57)$$

en donde  $\langle \rangle_q$  denota el promedio tomado con  $\{P_r(q)\}$ .

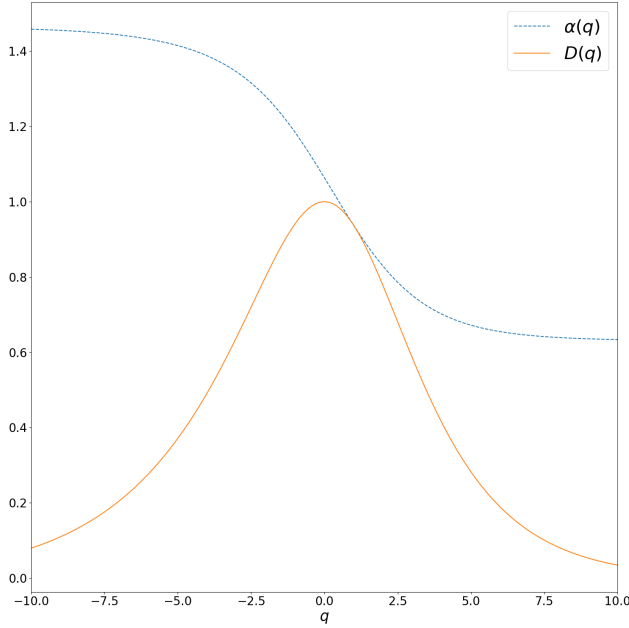
La dimensión de Hausdorff de  $J_\alpha$  es entonces:

$$D(q) = D(\alpha(q)) = -\frac{1}{\log b} \sum_{r=0}^{b-1} P_r(q) \log P_r(q) = \left\langle -\frac{\log P_q}{\log b} \right\rangle_q \quad (6.58)$$

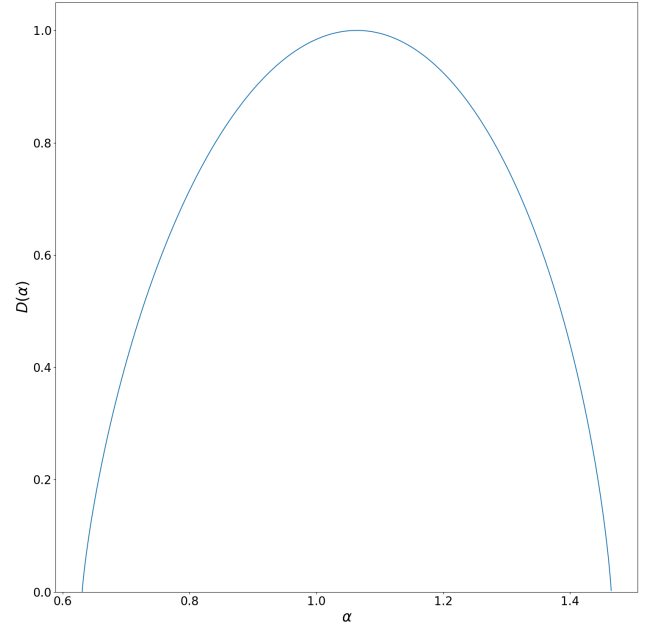
en la figura 6.31 se muestra un ejemplo para  $p_0 = 0.2$ ,  $p_1 = 0.3$  y  $p_2 = 0.5$ . El espectro de dimensiones para la separación multifractal estadística de  $I$  se encuentra eliminando el parámetro  $q$  de 6.57 y 6.58, obteniéndose la curva  $D(\alpha)$ , mostrada en la figura 6.32.

Es posible establecer una relación entre  $\alpha(q)$  y la función  $Z_q$ , ya que:

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \sum_{r=0}^{b-1} p_r^q \right) = \sum_{r=0}^{b-1} p_r^q \log p_r \quad (6.59)$$



**Figura 6.31:** Gráfica de las funciones  $D(q)$  y  $\alpha(q)$  para  $p_0 = 0.2$ ,  $p_1 = 0.3$  y  $p_2 = 0.5$ .



**Figura 6.32:** Espectro de dimensiones  $D(\alpha)$  para  $p_0 = 0.2$ ,  $p_1 = 0.3$  y  $p_2 = 0.5$ .

usando esta relación en 6.57 se obtiene:

$$\alpha(q) = -\frac{1}{\log b} \frac{\partial}{\partial q} \log Z_q = \frac{\partial}{\partial q} \left( -\frac{\log Z_q}{\log b} \right) = \frac{\partial \tau(q)}{\partial q} \quad (6.60)$$

donde hemos definido

$$\tau(q) = -\frac{\log Z_q}{\log b}. \quad (6.61)$$

También se puede establecer una relación entre  $D(\alpha)$  y  $\alpha(q)$ , puesto que

$$D(\alpha(q)) = -\frac{1}{\log b} \sum_{r=0}^{b-1} P_r(q) (q \log p_r - \log Z_q) = q\alpha(q) - \tau(q). \quad (6.62)$$

Tomando la derivada de esta expresión con respecto a  $\alpha$ , obtenemos:

$$\frac{d}{d\alpha} D(\alpha) = q + \alpha \frac{dq}{d\alpha} - \frac{d\tau}{dq} \frac{dq}{d\alpha} = q + \left( \alpha - \frac{d\tau}{dq} \right) \frac{dq}{d\alpha}$$

usando 6.60 se encuentra que

$$\frac{dD(\alpha)}{d\alpha} = q. \quad (6.63)$$

Las relaciones 6.60, 6.62 y 6.63, implican que la función  $D(\alpha)$  es la transformada de Legendre de  $\tau(q)$  y viceversa, ya que de 6.63 se tiene

$$dD = qd\alpha = d(q\alpha) - \alpha dq$$

$$d(D - q\alpha) = -\alpha dq \tag{6.64}$$

y usando 6.62 encontramos que:

$$d(-\tau) = -\alpha dq \tag{6.65}$$

de donde se obtiene 6.60. Lo anterior nos lleva a que las funciones  $D(\alpha)$  y  $\tau(q)$  contienen la misma información.

**Ejemplo (Vicsek, 1992)**

Considerando al intervalo unitario  $I$  dividido en tres partes iguales  $\delta = 1/3$ , con probabilidades  $p_0 = p_2$  y  $p_1$  donde  $p_1 = 1 - 2p_0$ . Asumiendo que la probabilidad en el intervalo medio sea mayor que la probabilidad en los otros dos  $p_0 < p_1$ . Entonces se tiene un IFS con probabilidad de la forma

$$\left\{ X = [0, 1]; w_0(x) = \frac{1}{3}x, w_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; p_0 = p_2, p_1 \right\}.$$

mostrado en la figura 6.33. Aplicando la ecuación 6.57 y 6.58 se obtiene el exponente de Hölder y la

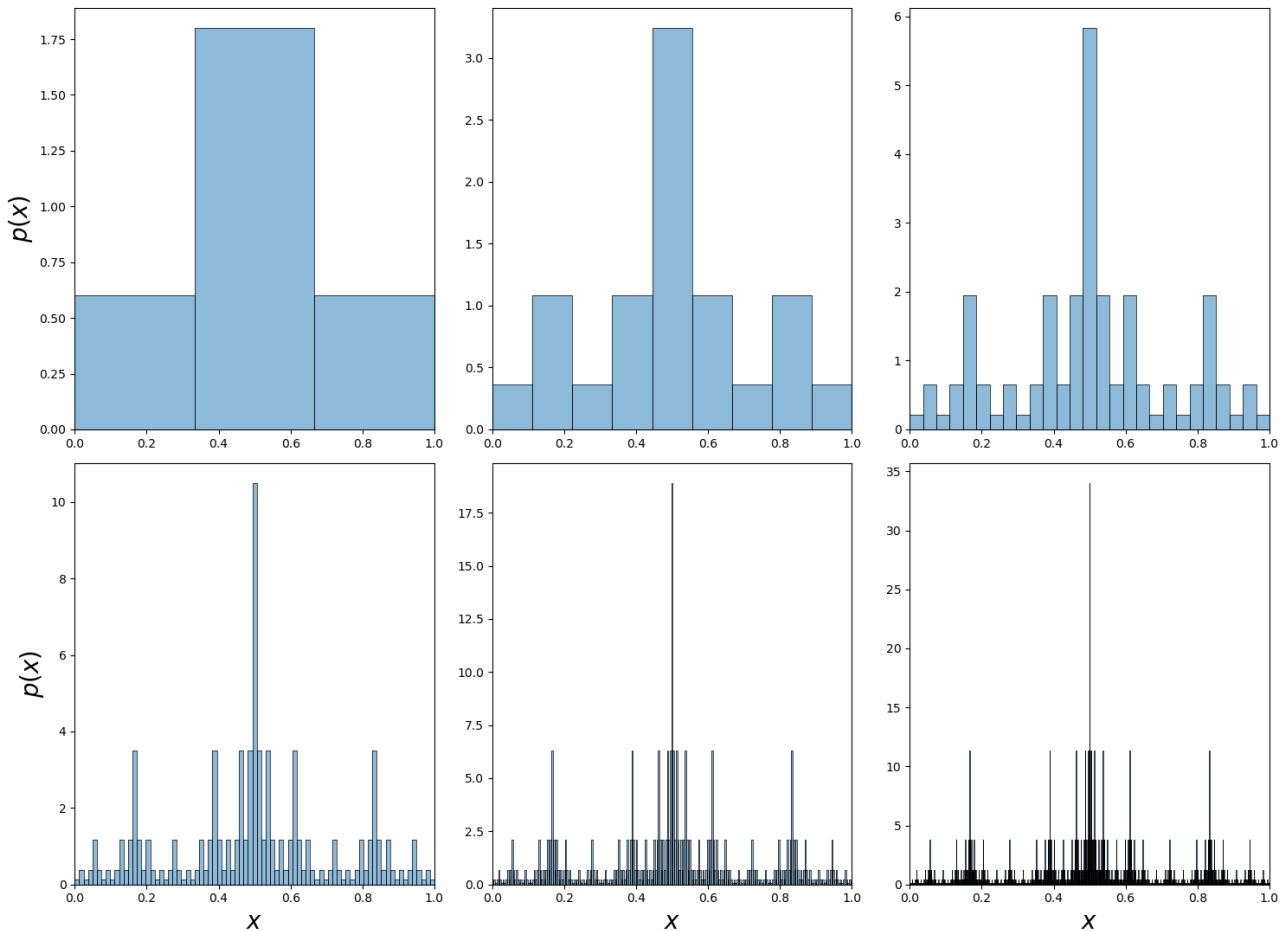
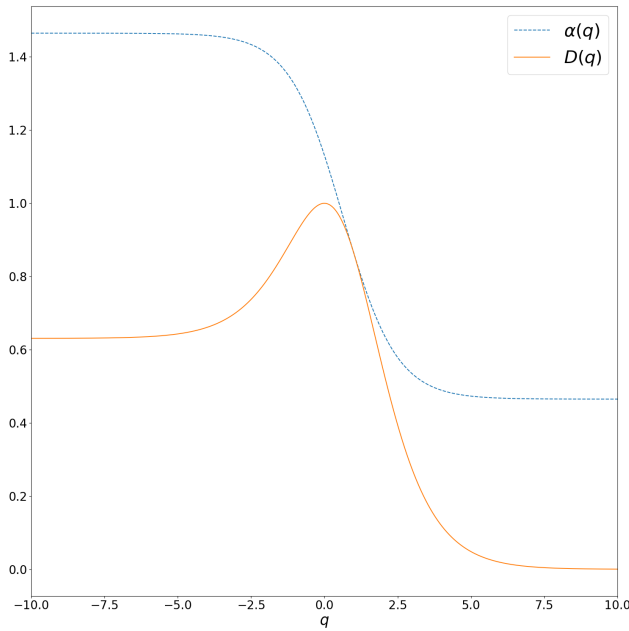


Figura 6.33: Primeras seis iteraciones de la construcción de la medida fractal en el intervalo unitario.

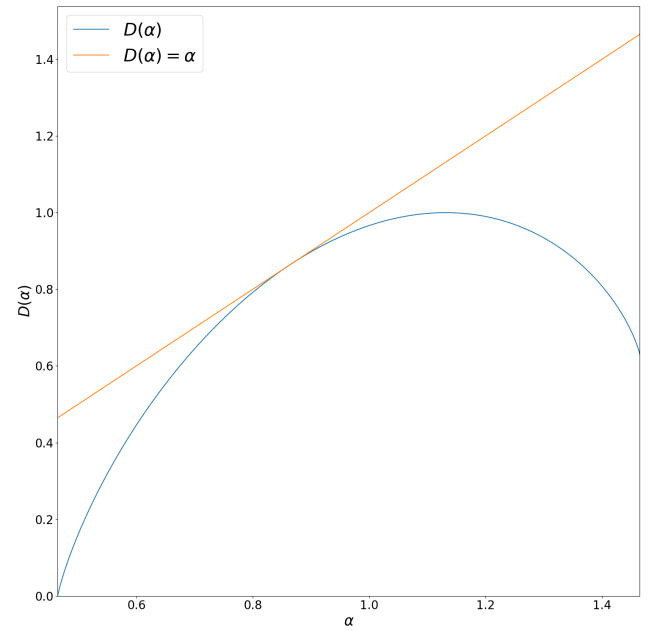
dimensión generalizada  $D_q$ , estos resultados se muestran en la figura 6.34.

El espectro de dimensiones se obtienen eliminado el parámetro  $q$  de 6.57 y 6.58, el resultado

obtenido se muestra en la figura 6.35.



**Figura 6.34:** Gráfica de las funciones  $D(q)$  y  $\alpha(q)$  para  $p_0 = p_2 = 0.2$  y  $p_1 = 0.6$ .



**Figura 6.35:** Espectro de dimensiones  $D(\alpha)$  para  $p_0 = p_2 = 0.2$  y  $p_1 = 0.6$ .

### 6.6.6. Conjunto de Condensación

Regresamos a la definición de  $J_\alpha$  6.48 para calcular su peso estadístico. Se había definido un cilindro de orden  $K$  6.1.1 como un intervalo de diámetro  $\Delta\omega = b^{-K}$  alrededor de  $\omega$ , es decir

$$C_{z_1 z_2 \dots z_K} = \left\{ \omega : 0.z_1 z_2 \dots z_K \bar{0} < \omega < 0.z_1 z_2 \dots z_K \overline{(b-1)} \right\}.$$

El peso estadístico de este cilindro es

$$\mu(C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = \mu(\omega) \Delta\omega = p_0^{n_0(k)} p_1^{n_1(k)} \dots p_{b-1}^{n_{b-1}(k)} = (\Delta\omega)^{\alpha(\omega)}$$

donde el número de veces que aparece el  $i$ -ésimo dígito es  $n_i(K)$ . El peso estadístico de un cilindro de orden  $K$  alrededor de un punto con exponente de Hölder  $\alpha_0$  es:

$$\mu_{\alpha_0}(C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = b^{-K\alpha_0}.$$

Denotando  $N_{\alpha_0}(C_{z_1 z_2 \dots z_K})$  como el número de cilindros a orden  $K$  que contienen números con un exponente de Hölder igual a  $\alpha_0$  y recordando que la definición de la dimensión de Hausdorff de  $J_{\alpha_0}$  es:

$$D_{\alpha_0} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\alpha_0}(C_{z_1 z_2 \dots z_K}))}{\log b^{-K}}$$

de manera que para valores grandes de  $K$  se tiene que

$$N_{\alpha_0}(C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = (b^{-K})^{D(\alpha_0)}$$

por lo que el peso estadístico de todos los cilindros que conforman la cubierta de  $J_{\alpha_0}$  con un diámetro  $b^{-K}$  es:

$$\mu_{J_{\alpha_0}}(C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = (b^{-K})^{\alpha_0 - D(\alpha_0)}$$

entonces el peso estadístico de  $J_\alpha$  está dado por:

$$\mu_{J_\alpha}(C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (b^{-K})^{\alpha - D(\alpha_0)}.$$

Este resultado nos dice que al considerar cilindros cada vez más pequeños la medida estadística se va concentrando en un conjunto  $J_{\alpha_c}$  que es aquel en que la dimensión de Hausdorff es igual a su exponente de Hölder:

$$\mu(J_\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_c)$$

con

$$\alpha_c = D(\alpha_c).$$

Al conjunto  $J_{\alpha_c}$  se le llama *conjunto de condensación de la medida*.

### 6.6.7. Medida Probabilística de $J_\alpha$

De todos los conjuntos  $J_\alpha$  con el vector de probabilidad  $\mathbf{p} = \{p_0, p_1, \dots\}$  que se han definido ¿Cuál es aquel que tiene mayor peso estadístico cuando se utiliza el vector de probabilidad  $P(q)$ ?. El vector de probabilidad  $P(q)$  se define como

$$P(q) = \{P_0(q), P_1(q), \dots, P_{b-1}(q)\} \tag{6.66}$$

con  $P_i(q) = \frac{p_i^q}{Z_q}$  y  $Z_q = \sum_{i=0}^{b-1} p_i^q$ . Se define entonces el peso estadístico de un cilindro a orden  $K$  como

$$\mu(q, C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = P_0^{n_0(K)} P_1^{n_1(K)} \dots P_{b-1}^{n_{b-1}(K)} = \frac{[\mu(C_{z_1 z_2 \dots z_K})]^q}{Z_q^K}.$$

Tenemos que

$$Z_q^K = b^{K \log_b Z_q} = b^{-K(-\log_b Z_q)} = (b^{-K})^{\tau(q)}$$

con  $\tau(q) = -\log_b Z_q$ . Así, la relación entre los pesos estadísticos de un cilindro tomados con  $P(q)$  y  $\mathbf{p}$  es:

$$\mu(q, C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = (b^{-k})^{-\tau(q)} [\mu(C_{z_1 z_2 \dots z_K})]^q$$

de manera que el peso estadístico con  $P(q)$  de una cilindro alrededor de un punto con exponente de Hölder  $\alpha_0$  es:

$$\mu_{\alpha_0}(q, C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = (b^{-k})^{-\tau(q)} [\mu_{\alpha_0}(C_{z_1 z_2 \dots z_K})]^q = (b^{-k})^{-\tau(q)+q\alpha_0}$$

siguiendo un proceso similar al descrito en la sección anterior se encuentra que el peso estadístico de una cubierta de  $J_\alpha$  es:

$$\mu_{J_{\alpha_0}}(q, C_{z_1 z_2 \dots z_K}) = (b^{-k})^{q\alpha_0 - \tau(q) + D(\alpha_0)}$$

de donde es inmediato que el peso estadístico de cualquier  $J_\alpha$  es:

$$\mu(q, J_\alpha) = \lim_{K \rightarrow \infty} (b^{-K})^{\alpha q - \tau(q) - D(\alpha)}.$$

La medida probabilística  $\mu(q, J_\alpha) \approx (b^{-K})^{\alpha q - \tau(q) - D(\alpha)}$  de cualquier conjunto solo puede tomar valores entre 0 y 1, el exponente de escalamiento solo puede ser negativo, por lo que se satisface la siguiente desigualdad:

$$q\alpha - D(\alpha) \geq \tau(q) \tag{6.67}$$

recordando que la transformada de Legendre de  $D(\alpha)$ , está definida por (Olsen, 2000):

$$\tau = \inf_{\alpha} (q\alpha - D(\alpha)) \tag{6.68}$$

en donde el mínimo se toma respecto a  $\alpha$ . Vemos que  $\tau(q)$  es una transformación de Legendre de  $D(\alpha)$ , y que para un valor dado de  $q$  esta relación determina el valor del exponente de Hölder que tiene la máxima medida probabilística.

Así para un valor fijo de  $q$ , cuando  $\Delta_k = b^{-k} \rightarrow 0$  casi todas las medidas probabilísticas de los diferentes conjuntos  $J_\alpha(\Delta_k)$  tienden a cero, siendo apreciablemente distinta de cero para aquellos conjuntos  $J_\alpha(\Delta_k)$  cercanos al valor de  $\alpha^*$  para el cual se cumple la igualdad:

$$q\alpha^* - D(\alpha^*) = \tau(q) \tag{6.69}$$

de forma que cuando  $\Delta_k \rightarrow 0$  la medida probabilística a orden  $q$ , se va concentrando en un conjunto en particular.

A continuación estudiamos la forma en que la medida estadística  $P(q)$  se distribuye sobre los diferentes conjuntos  $J_\alpha(\Delta_k)$  y como se va concentrando sobre un conjunto particular cuando  $\Delta_k$  tiende a cero.

Para un valor de  $q$ , el conjunto  $j_\alpha(\Delta_k)$  que tiene la mayor medida posible es aquel que satisface:

$$\left. \frac{\partial \mu(q, J_\alpha(\Delta_k))}{\partial \alpha} \right|_{\alpha^*} \Rightarrow \left. \frac{\partial \log \mu(q, J_\alpha(\Delta_k))}{\partial \alpha} \right|_{\alpha^*} = \left( q - \frac{dD}{d\alpha^*} \right) \log \Delta_k = 0 \quad (6.70)$$

y

$$\left. \frac{\partial^2 \log \mu(q, J_\alpha(\Delta_k))}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha^*} = \left( q - \frac{d^2 D}{d\alpha^{*2}} \right) \log \Delta_k < 0. \quad (6.71)$$

La primera ecuación establece que  $q$  es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva  $D(\alpha)$  Vs.  $\alpha$ , en el punto  $(\alpha^*, D(\alpha^*))$ , en tanto que la segunda ecuación nos dice que la curva  $D(\alpha)$  es cóncava hacia abajo y está directamente relacionada con las fluctuaciones de la medida alrededor del valor más probable  $\alpha^*$  como veremos a continuación.

La forma de la distribución de la medida  $\mu(q, J_\alpha(\Delta_k))$  se encuentra haciendo un desarrollo logarítmico alrededor del máximo, es decir

$$\mu(q, J_\alpha(\Delta_k)) = \frac{\exp \left\{ \frac{(\alpha - \alpha^*)^2}{2\sigma_\alpha^2} \right\}}{\sqrt{2\pi\sigma_\alpha^2}} \quad (6.72)$$

donde  $\sigma_\alpha = |D''(\alpha^*) \log \Delta_k|^{-1/2}$ . Para analizar el comportamiento de la medida cuando  $\Delta_k \rightarrow 0$ , consideremos la medida del conjunto:

$$S_\alpha(\Delta_k) = \bigcup_{\alpha^* - \alpha \leq \alpha \leq \alpha^* + \alpha} J_\alpha(\Delta_k), \quad (6.73)$$

dada por

$$\mu(S_\alpha(\Delta_k)) = \int_{\alpha^* - \alpha}^{\alpha^* + \alpha} \mu(q, J_\alpha(\Delta_k)) d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\sigma_\alpha^2}}} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |D''(\alpha^*) \log \Delta_k|} e^{-t^2} dt$$

de donde

$$\mu(S_\alpha(\Delta_k)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (6.74)$$

con  $x_0 = \alpha |D''(\alpha^*) \log \Delta_k|$ . Esta medida es el área bajo la curva normal en el intervalo  $[-x_0, x_0]$ . Cuando  $\Delta_k$  disminuye el valor de  $x_0$  va creciendo de manera que la medida de  $S_\alpha(\Delta_k)$  va aumentando y tendiendo a uno, independientemente del valor de  $\alpha$ , así la medida se concentra cada vez más alrededor del conjunto  $J_{\alpha^*}$  que por tal razón es llamado el conjunto de condensación de la medida.

Así podemos establecer el teorema de condensación de la medida en la siguiente forma:

$$\lim_{\Delta_k \rightarrow 0} \mu(q, J_\alpha(\Delta_k)) = \delta(\alpha - \alpha(q)). \quad (6.75)$$



Dado un valor de  $q$ , el primer paso consiste en calcular  $Z_q$  y el vector de probabilidad  $P(q)$ ,

$$P(q) = \{P_0(q), P_1(q), \dots, P_{b-1}(q)\}$$

con  $P_r(q) = \frac{p_r^q}{Z_q}$  y  $Z_q = \sum_{r=0}^{b-1} p_r^q$ . Usando estos resultados en la ecuación 6.61 y 6.56 se encuentra  $\tau(q)$  y el conjunto de concentración de la medida  $M(\phi(q)) = M(P(q))$ , el valor de  $\alpha^*$  asociado al conjunto de condensación está dado por la ecuación 6.58. Para encontrar la dimensión de Hausdorff de  $J_\alpha$  se tienen dos posibles opciones, la primera de ellas es utilizar la ecuación 6.62 que corresponde a usar el teorema de Eggleston, o bien utilizar:

$$D(\alpha(q)) = q\alpha(q) - \tau(q)$$

que corresponde al cálculo de la transformada de Legendre de  $\tau(q)$ .

Finalmente para visualizar el conjunto de condensación se utiliza el sistema de funciones iteradas con vector de probabilidad  $P(q)$  (figuras 6.36 y 6.37).

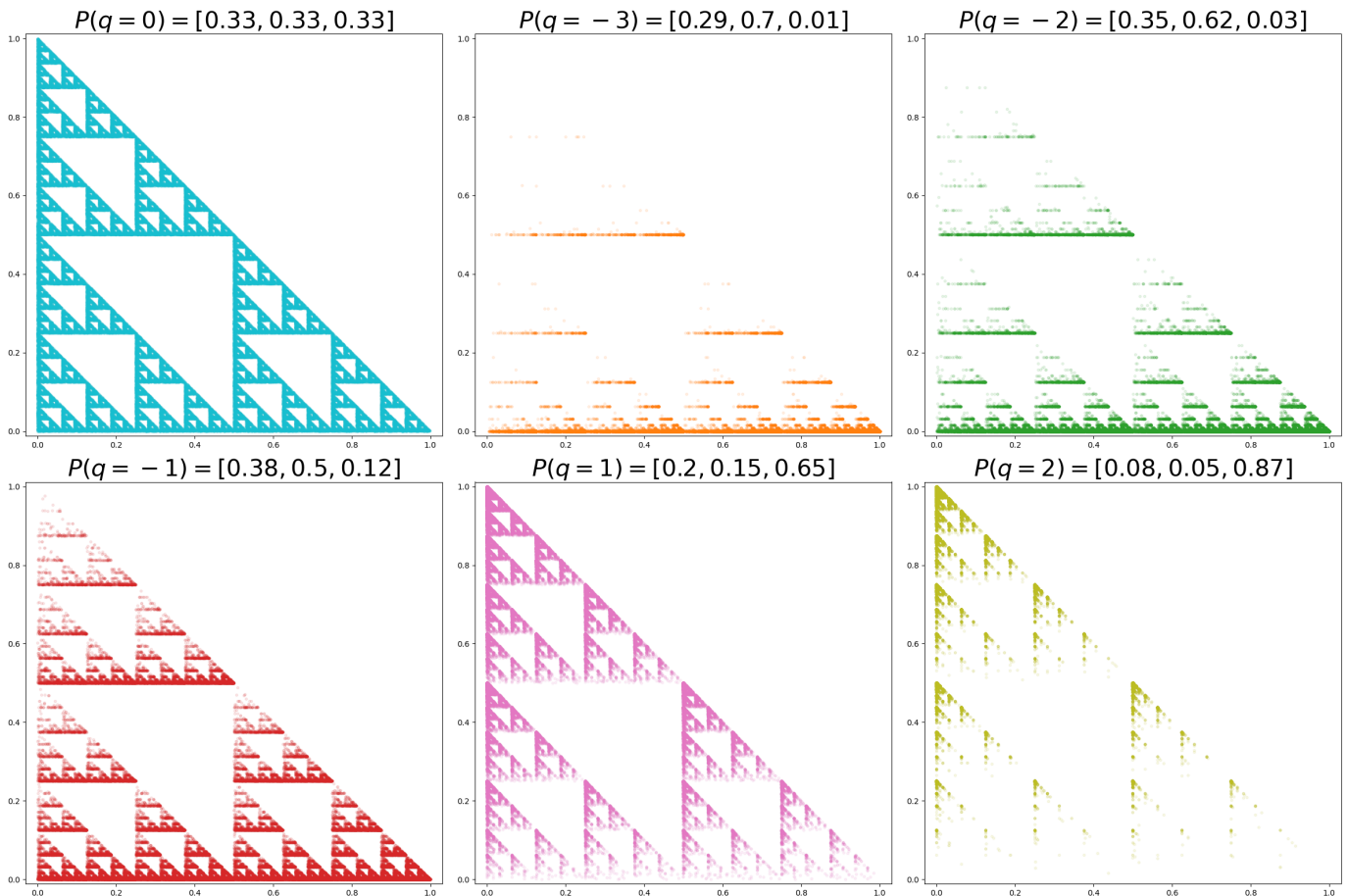


Figura 6.36: Triángulo de Sierpinski para diferentes valores de  $P(q)$ .

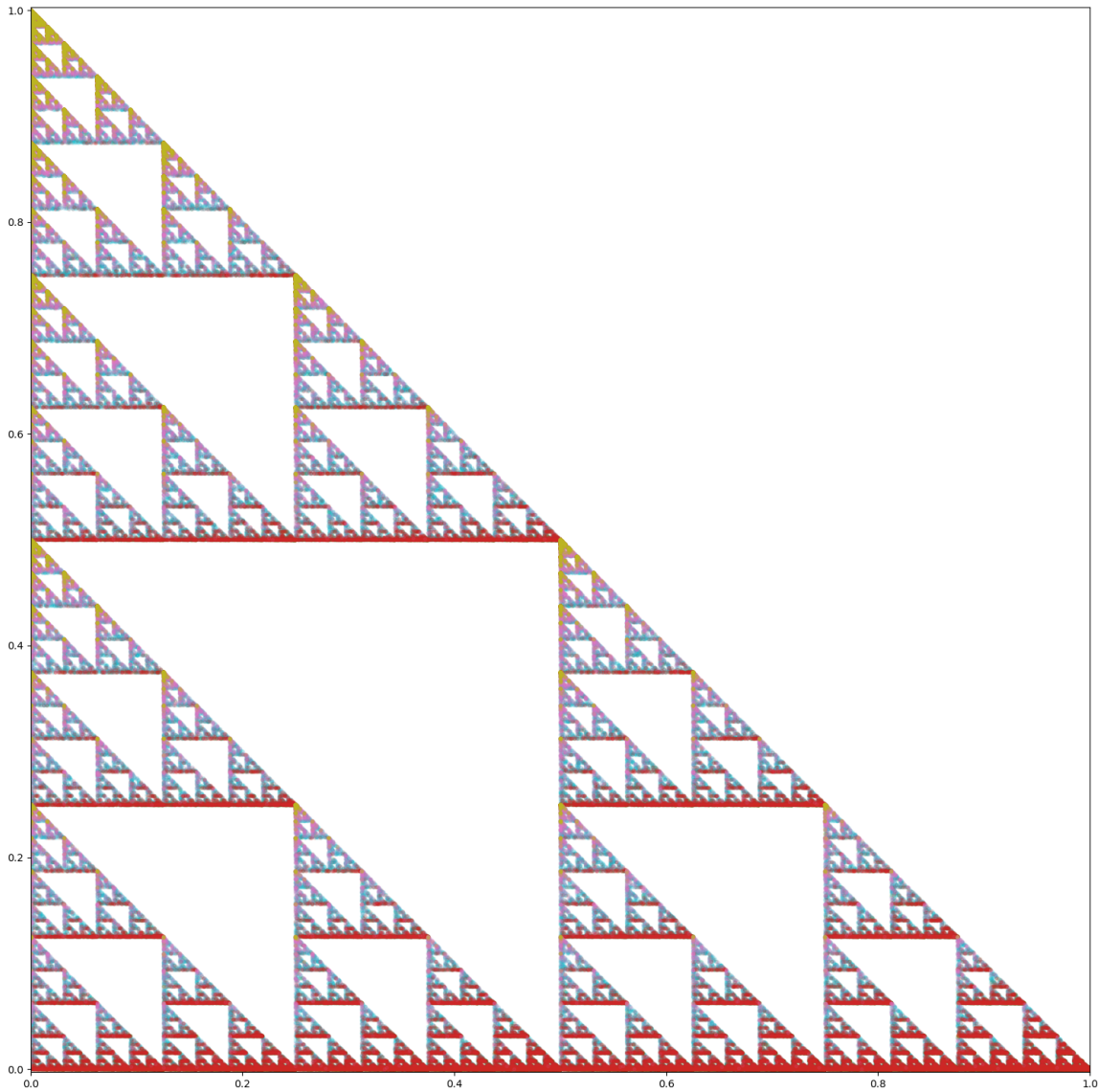


Figura 6.37: Unión de los conjuntos mostrados en la figura 6.36.

## 6.7. Dimensión Generalizada y Transformaciones de Legendre

Una forma alternativa para describir la medida  $\mu$  es usar un promedio global de potencia  $q$ -ésima de  $\mu$ , o el momento  $q$ -ésimo. Definimos primero esto y entonces se muestra que el promedio global y el comportamiento local está relacionado por una transformación de Legendre.

### 6.7.1. Exponente de Correlación como un Promedio Global

En este ejemplo, el exponente de correlación definido en la ecuación 6.25 puede ser expresado como

$$\tau(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{\omega \in \Omega_0^n} \mu^q[C_{\omega_n}(\omega)]}{\log \delta_n}, \quad (6.76)$$

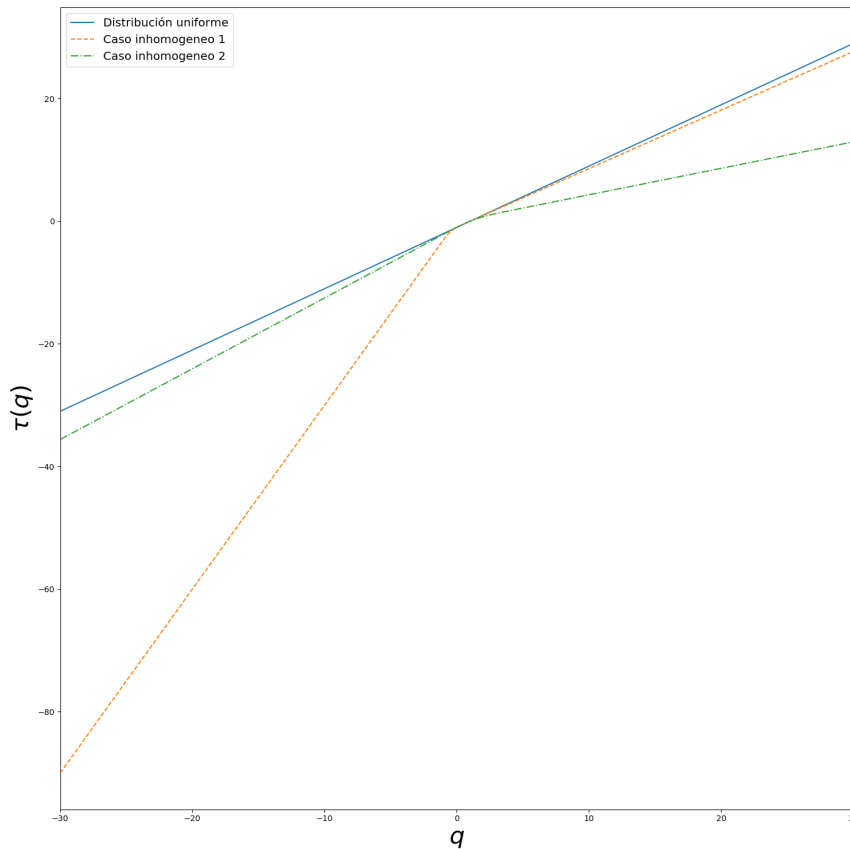
donde  $q \in \mathbb{R}$  y  $\delta_n = b^{-n}$  es el grosor del subintervalo. Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} \tau(q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} \log_b \left[ \sum_{w_1 \in \Omega} \cdots \sum_{w_n \in \Omega} p_{w_1}^q \cdots p_{w_n}^q \right] \\ &= -\log_b \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega}^q. \end{aligned} \tag{6.77}$$

La cantidad  $Z_q = \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega}^q$  es conocida como la función de partición y es comúnmente usada en la mecánica estadística.

### Ejemplo

Considere el caso de la medida multinomial con  $b = 10$ . Si se usará un valor pequeño de  $b$ , digamos dos o tres, entonces un valor relativamente grande de un  $p_{\omega}$  necesariamente significa valores más pequeños para todos los otros  $p_{\omega}$ 's. Considérense tres escenarios: el primero cuando  $p_{\omega} = 0.1$  para todo  $\omega$  (i.e.,  $\omega = 0, \dots, 9$ ). Esto simplemente producirá la distribución uniforme. La correspondiente gráfica de  $\tau(q)$  es la línea recta con pendiente uno en la figura 6.38. El segundo escenario es cuando



**Figura 6.38:**  $\tau(q)$  para la medida multinomial con  $b = 10$ . La línea recta (sólida) representa el caso donde  $p_{\omega} = 0.1$  para todo  $\omega$  (i.e.,  $\omega = 0, 1, 2, \dots, 9$ ). La línea discontinua es donde  $p_{\omega}$  para todo  $\omega$ , excepto uno que es igual a 0.001, y la línea punteada es donde todos los  $p_{\omega}$  son iguales a 0.07, excepto uno que es igual a 0.37.

todos los valores de  $p_{\omega} = 0.111$  excepto uno que es igual a 0.001. Esta es similar a la distribución uniforme, pero tiene pequeñas áreas donde hay muchas pequeñas medidas (diferentes de cero). La

gráfica correspondiente de  $\tau(q)$  tiene una pendiente más pronunciada para  $q < 0$ , pero similar a la medida uniforme para  $q > 0$ . El último caso es donde todas las  $p_\omega$ 's son igual a 0.07, excepto una que es igual a 0.37. En este caso la gráfica de  $\tau(q)$  cae más bruscamente para  $q > 0$ , pero es bastante similar a la medida uniforme para  $q < 0$ .

Cuando todas las  $p_\omega$ 's son iguales diferentes de cero, la medida estará uniformemente distribuida sobre el soporte de  $\mu$ . De esta situación, se sigue de la ecuación 6.77 que  $\tau(q)$  será una línea recta con pendiente  $D_0$ . Cuando la medida no está uniformemente distribuida sobre su soporte,  $\tau(q)$  se vuelve una curva cóncava, es decir, los dos finales de la línea se acercan permaneciendo anclados en  $q = 0$ , pero  $\tau(q)$  sigue siendo una función creciente cuya pendiente no superara la pendiente correspondiente a la distribución homogénea. Para  $q > 0$ ,  $\tau$  se acercará al caso uniforme, si hay áreas en el soporte que contengan probabilidades relativamente más grandes a otras áreas. Por el contrario, para  $q < 0$ , la  $\tau$  se alejará de la uniforme si hay áreas que tengan medidas diferentes de cero muy pequeñas con respecto a las demás. En resumen, la función  $\tau(q)$  puede ser interpretada como la forma en la que la medida se desvía de la distribuida uniformemente. Cuando  $q < 0$ ,  $\tau$  describe la abundancia de áreas con medidas relativamente altas, y cuando  $q > 0$ , describen áreas que contienen medidas diferentes de cero relativamente bajas. Este comportamiento se relaciona con las ideas expresadas en el teorema 6.2.1.

### 6.7.2. Transformada de Legendre

El objetivo de esta sección es mostrar que la relación entre  $f(\alpha)$  y  $\tau(q)$  toma la forma de una transformada de Legendre. Empezando con la ecuación 6.42 para el espectro  $f(\alpha)$ , maximizando la cantidad

$$-\sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega \log_b \phi_\omega,$$

sujeta a las constricciones del conjunto  $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{b-1}) \in \Phi(y)$ , estas son,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega = 1 \tag{6.78}$$

y

$$\alpha = -\sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega \log_b p_\omega. \tag{6.79}$$

Usando dos multiplicadores de Lagrange,  $\lambda$  y  $q$ , considérese la función  $Q$  como

$$Q = -\sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega \log_b \phi_\omega + q \left( \alpha + \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega \log_b p_\omega \right) + \lambda \left( -1 + \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega \right).$$

Derivando con respecto a  $\phi_\omega$

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi_\omega} = -\log_b \phi_\omega - 1 + q \log_b p_\omega + \lambda, \quad \omega \in \Omega_0. \quad (6.80)$$

Usando las dos constricciones y  $\frac{\partial Q}{\partial \phi_\omega} = 0$ , para  $\phi_\omega$  y  $\omega \in \Omega$ , se tienen  $s + 2$  ecuaciones, y  $s + 3$  parámetros; es decir, las cantidades  $s\phi_\omega$ ,  $\lambda$ ,  $q$  y  $\alpha$ , donde  $s = \#\Omega$ . Expresamos  $\alpha$  como una función de  $q$  de la forma  $\alpha_q$ . Igualando a cero la ecuación 6.80

$$\log_b \phi_\omega = -1 + q \log_b p_\omega + \lambda$$

que es,  $\phi_\omega = b^{\lambda-1} p_\omega^q$ . De la ecuación 6.78 se sigue que

$$\sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega = \sum_{\omega \in \Omega} b^{\lambda-1} p_\omega^q = 1$$

por lo tanto, El máximo para un dado  $\alpha$  y  $q$  se da cuando

$$\phi_\omega = \frac{p_\omega^q}{\sum_{i \in \Omega} p_i^q}, \quad \omega \in \Omega. \quad (6.81)$$

De la ecuación 6.79 y 6.81

$$\alpha_q = \frac{-1}{\sum_{i \in \Omega} p_i^q} \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega^q \log_b p_\omega.$$

entonces, de la ecuación 6.42

$$\begin{aligned} f(\alpha_q) &= - \sum_{\omega \in \Omega} \frac{p_\omega^q}{\sum_{i \in \Omega} p_i^q} \log_b \left( \frac{p_\omega^q}{\sum_{j \in \Omega} p_j^q} \right) \\ &= \frac{-q}{\sum_{i \in \Omega} p_i^q} \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega^q \log_b p_\omega + \log_b \sum_{j \in \Omega} p_j^q \\ &= \frac{-q}{\sum_{i \in \Omega} p_i^q} \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega^q \log_b p_\omega - \tau(q) \end{aligned} \quad (6.82)$$

entonces

$$\tau(q) = q\alpha_q - f(\alpha_q) = -\log_b \sum_{j \in \Omega_0} p_j^q. \quad (6.83)$$

es la solución a la transformada de Legendre, dada por  $\tau(q) = \inf_\alpha \{q\alpha - f(\alpha)\}$ . La función  $\alpha_q$  expresa los valores de  $\alpha$  donde el ínfimo es alcanzado (i.e., donde la función  $f(\alpha)$  es máxima) como una función de  $q$ . Nótese que

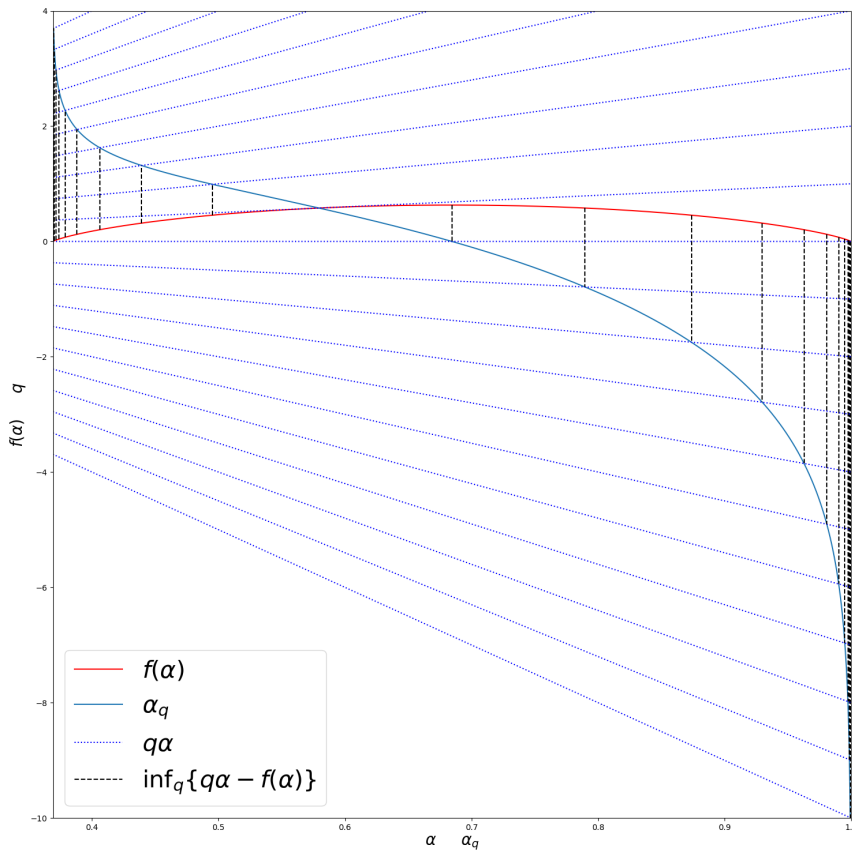
$$\alpha_{\min} = \lim_{q \rightarrow \infty} \alpha_q = \min_{\omega \in \Omega} (-\log_b p_\omega), \quad (6.84)$$

y

$$\alpha_{\text{máx}} = \lim_{q \rightarrow -\infty} \alpha_q = \max_{\omega \in \Omega} (-\log_b p_\omega) \tag{6.85}$$

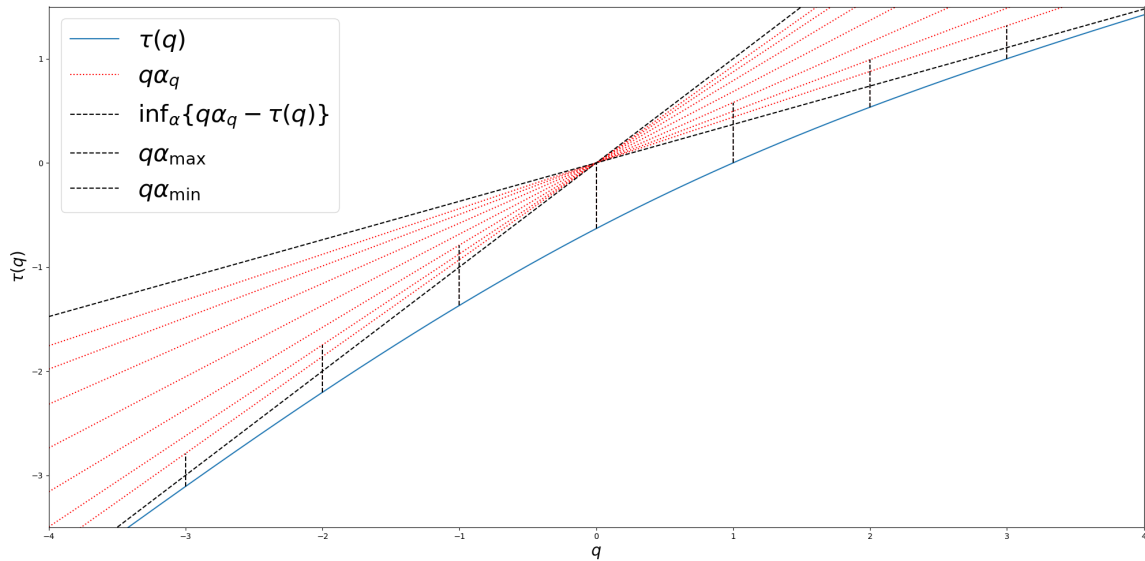
**Ejemplo - Medida de Cantor**

Sea  $b = 3$  con  $p_0 = \frac{1}{3}$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = \frac{2}{3}$ . La transformada de Legendre de  $f(\alpha)$  y la función  $\alpha_q$  están graficadas en la figura 6.39. Se puede observar que la función  $\alpha_q$  está compuesta por las distancias más cortas entre  $f(\alpha)$  y las rectas  $q\alpha_q$ . También es de notar que el valor de  $\alpha$  para el cual se dan los mínimos están dados por  $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = q$ , es decir, en los lugares en los que la pendiente de  $f(\alpha)$  son iguales a  $q$ , entonces el ínfimo ocurre cuando la función  $f(\alpha)$  y las líneas  $q\alpha$  tienen la misma pendiente  $q$ . La transformada de Legendre de  $f(\alpha)$  a  $\tau(q)$  es mostrada en la figura 6.40. De manera similar a  $f(\alpha)$ , se puede ver que los ínfimos se presentan cuando la pendiente de  $\tau(q)$  es el negativo de la pendiente de  $q\alpha_q$ , debido a la relación  $\frac{d\tau(q)}{dq} = -\alpha$ .



**Figura 6.39:** Transformación de Legendre para la medida de Cantor.  $f(\alpha)$  y  $\alpha_q$  para la medida multinomial con  $p_0 = \frac{1}{3}$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = \frac{2}{3}$  (líneas sólidas). La pendiente de la línea punteada toma los valores  $q = -10, -9, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9, 10$ . La distancia más pequeña entre la línea punteada y la curva  $f(\alpha)$ , ocurre en el valor  $\alpha_q$ .

En este capítulo se estudió la teoría multifractal, se definieron por medio de ejemplos y de manera formal los conceptos de espectro fractal y dimensión generalizada. Así mismo, se realizó un breve recuento histórico del origen de estos conceptos utilizando la teoría de Rényi de la información. La teoría multifractal es usada para el estudio de la disipación de energía en turbulencias completamente



**Figura 6.40:** Transformada de Legendre de  $\tau(q)$ .  $\tau(q)$  es graficada (línea sólida). Cuando  $q$  se hace crecer en dirección positiva,  $\tau(q)$  tiende a la línea  $q\alpha_{\min}$ , y cuando  $q$  decrece en dirección negativa,  $\tau(q)$  tiende a  $q\alpha_{\max}$  (líneas discontinuas diagonales). Cada línea punteada tiene pendiente  $\alpha = \alpha_q$ ,  $q = -3, -2, \dots, 2, 3$  (ver la figura 6.39). La derivada de  $\tau(q)$  es  $\alpha_q$ . La distancia más pequeña (líneas verticales discontinuas)  $f(\alpha)$ , entre la curva  $\tau(q)$  y una línea  $q\alpha$  (i.e., una línea con pendiente  $\alpha$ ) ocurre en  $q$  cuando la pendiente de la línea es  $\alpha_q$ ; i.e.,  $f(\alpha_q) = q\alpha_q - \tau(q)$  es la solución a  $f(\alpha) = \inf_q \{q\alpha - \tau(q)\}$ .

desarrolladas, así como de los sistemas dinámicos. Se muestra con el teorema de Eggleston que el intervalo unitario es un multifractal. También se observó que el espectro multifractal y la dimensión generalizada están relacionadas a través de transformaciones de Legendre lo que nos conduce a analogías con la mecánica estadística.





# Capítulo 7

## Conclusiones

Este trabajo aborda el estudio de las irregularidades encontradas en sistemas reales y en la naturaleza. Se considera, a diferencia de Galileo, que las formas que componen la naturaleza no están descritas por triángulos, círculos o cuadrados, sino que están descritos por medio de fractales. Estos Fractales no solo describen formas de objetos particulares sino que también describen comportamientos de cantidades físicas.

Los físicos tendemos a realizar simplificaciones y suposiciones que nos facilitan el entendimiento del mundo que nos rodea, con la parsimonia como justificación, pero este enfoque ha dejado de lado sistemas y fenómenos que no son susceptibles de simplificación o que no se someten ante estas suposiciones, por lo que los sistemas fractales, sin insinuar que sean más complejos o sencillos que otros, son una propuesta para abordar sistemas no lineales y caóticos. Para esto, como primera meta de estudio, nos hemos planteado entender e ilustrar que se considera como comportamiento irregular o comportamiento fractal desde un punto de vista matemático, pero también se ha mostrado de manera computacional como simular e ilustrar estos sistemas.

Los sistemas fractales y los multifractales se complementan, el uno como método de simulación de sistemas y el otro como forma de análisis, en este trabajo se tomaron como ejemplo los IFS's unidimensionales con probabilidades para realizar un análisis multifractal. Esta misma estrategia se realiza para estudiar fractales bidimensionales construidos a través del juego del caos, como es el caso de las secuencias de ADN las cuales son también susceptibles a análisis multifractales. En ciencias biológicas y médicas se realizan cálculos de medidas fractales como la dimensión de Hausdorff en órganos, tumores, ritmos cardiacos, entre otros, para posteriormente ser simulados y analizados de manera multifractal con el potencial de ayudar a encontrar diagnósticos o tratamientos de enfermedades.

El espectro multifractal y la dimensión generalizada son funciones continuas y derivables relacionadas por transformaciones de Legendre que sirven como instrumentos de identificación de sistemas con comportamientos irregulares, por lo que se puede afirmar que, a pesar de que un sistema se comporte de manera irregular, puede conservar patrones regulares u ordenados que faciliten su estudio

---

y permitan realizar analogías con la mecánica estadística.

La geometría fractal fue formalizada por Mandelbrot en los 70's, aunque ya se habían estudiado con anterioridad conjuntos, objetos y fenómenos relacionados con el tema, sigue siendo para los físicos un área nueva y difícil de aceptar, por lo que se considera necesario divulgar y revisar los resultados relacionados con la geometría fractal, con el objetivo de desarrollar una teoría definitiva y sacar el mayor provecho para las ciencias naturales y aplicadas.

En esta tesis se retoman muchos de los temas presentes en la literatura sobre los IFS, fractales y multifractales, estos son estudiados de manera formal y empírica, incluyendo algunos resultados que no se encuentran en los libros de texto más divulgados, como es el caso de los conjuntos de condensación, el teorema de Eggleston, los IFS aplicados a funciones, y la teoría multifractal aplicada a las ideas de Boltzmann. Por esta razón pensamos que este trabajo puede tomarse como un punto de partida para futuras investigaciones.

## Referencias

- Barnsley, M. F. (1993). *Fractals everywhere*. San Diego, USA: Morgan Kaufmann.
- Barnsley, M. F. (2006). *Superfractals: Patterns of nature*. New York, USA: Cambridge University Press.
- Beck, C., y Schlögl, F. (1993). *Thermodynamics of chaotic systems an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bishop, C. J., y Peres, Y. (2017). *Fractals in probability and analysis*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- C.Halsey, T., y Mogens H.Jensen, I. P. B. I. S., Leo P.Kadanoff. (1987). Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 2, 501-511. doi: 10.1088/1361-6404/ab2b06
- del Río-Correa, J. L., y Durán-Meza, G. (1987). Conjuntos de condensación en multifractales. *XXI Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas 2016*, 1(XXI), 423-427.
- de Oliveira, C. R., y Werlang, T. (2006). Ergodic hypothesis in classical statistical mechanics. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(2), 189-201. doi: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172007000200003>
- Einstein, A., y Infeld, L. (1986). *La evolución de la física*. Barcelona: Salvat Editores.
- Goldman, N. (1993). Nucleotide, dinucleotide and trinucleotide frequencies explain patterns observed in chaos game representations of dna sequences. *Nucleic Acids Research*, 21(10), 2487-2491. doi: 10.1093/nar/21.10.2487
- Greiner, W., Neise, L., y Stöcker, H. (1995). *Thermodynamics and statistical mechanics*. New York: Springer-Verlag.
- Harte, D. (2001). *Multifractals: Theory and applications*. Boca Raton, Florida: Chapman and Hall CRC.
- Heinz-Otto Peitgen, H. J., y Saupe, D. (2004). *Chaos and fractals new frontiers of science*. New York, NY: Springer.
- Hutchinson, J. E. (1981). Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(05), 713-747.
- Juan H, A. W., Arredondo R. (2010). *Medidas e integrales*. Ciudad de México, México: Universidad Autónoma Metropolitana.
- Mandelbrot, B. B. (1972). Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence. *Rosenblatt M., Van Atta C. (eds) Statistical Models and Turbulence. Lecture Notes in Physics*, 12, 333-351. doi: [https://doi.org/10.1007/3-540-05716-1\\_20](https://doi.org/10.1007/3-540-05716-1_20)
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature*. New York: W. H. Freeman and Company.

- MENEVEAU, C., y SREENIVASAN, K. R. (1987a). The multifractal spectrum of the dissipation field in turbulent flows. *Nuclear Physics B*, 2, 49-76. doi: [https://doi.org/10.1016/0920-5632\(87\)90008-9](https://doi.org/10.1016/0920-5632(87)90008-9)
- MENEVEAU, C., y SREENIVASAN, K. R. (1987b). Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Physical review letters*, 59(13), 1424-1427. doi: <https://doi.org/10.1017/S0022112086001209>
- Moran, P. A. P. (1946). Additive functions of intervals and hausdorff measure. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 42(01), 15-23. doi: DOI:10.1017/S0305004100022684
- Olsen, L. (2000). Multifractal geometry. *Progress in Probability*, 46, 2-37.
- Pathria, R., y Beale, P. D. (2011). *Statistical mechanics*. Academic Press.
- Ramshaw, J. D. (2019). Singular invariant probability densities in dissipative dynamical systems. *European Journal of Physics*, 40. doi: 10.1088/1361-6404/ab2b06
- Rényi, A. (1965). On the foundations of information theory. *REVIEW OF THE INTERNATIONAL STATISTICAL INSTITUTE*, 33(1), 1-15. doi: 10.2307/1401301
- SREENIVASAN, K. R., y MENEVEAU, C. (1986). The fractal facets of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 173, 357-386. doi: <https://doi.org/10.1017/S0022112086001209>
- Vicsek, T. (1992). *Fractal growth phenomena*. World Scientific.
- Wikipedia. (s.f.-a). *List of fractals by hausdorff dimension*. Descargado de [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_fractals\\_by\\_Hausdorff\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension)
- Wikipedia. (s.f.-b). *Markov chain*. Descargado de [https://en.wikipedia.org/wiki/Markov\\_chain](https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain)

# Capítulo 8

## Apéndices

En este apéndice se recopilan algunos de los programas en lenguaje python usados para generar imágenes de fractales y gráficas que se encuentran en este trabajo. Estos pueden servir como punto de partida y orientación a quienes estén interesados en la programación, advirtiéndoles que pueden existir códigos más óptimos o que escritos en otros lenguajes y con programación en paralelo pueden ser ejecutados más rápidamente. Estos programas junto con algunas modificaciones sirven para generar una gran variedad de fractales en el plano y extenderse a  $\mathbb{R}^3$ .

### 8.1. Distancia de Hausdorff

Este programa identifica los puntos que están a una distancia de Hausdorff fija a un determinado conjunto, en este ejemplo el conjunto es un punto en el plano, y el resultado es una gráfica de las líneas equidistantes al conjunto.

```
import numpy as np
import pylab as plt

# esta función toma el segundo elemento de un arreglo ,
# en el caso bidimensional la componente en y del plano cartesiano .
def sortSecond(val):
    return val[1]

# El conjunto del plano en este caso es un punto ubicado en (0.5,0.5).
PPuntos = [[0.5,0.5]]
# Creamos una red de puntos que llenen todo el plano.
mallax = np.arange(0,1, 0.001)
malla = []
```

```
for i in mallax:
    for j in mallax:
        malla.append([i,j])

# esta función calcula la distancia entre dos conjuntos en R2.
def distanciaHausdorff(A,B):
    min_dist_A = []
    for i in A:
        D = []
        for j in B:
            D.append(np.sqrt(((i[0]-j[0])**2)+((i[1]-j[1])**2)))
        min_dist_A.append(min(D))
    max_dist_A = max(min_dist_A)

    min_dist_B = []
    for k in B:
        D = []
        for l in A:
            D.append(np.sqrt(((k[0]-l[0])**2)+((k[1]-l[1])**2)))
        min_dist_B.append(min(D))
    max_dist_B = max(min_dist_B)
    return max(max_dist_A , max_dist_B)

# Se calculan las distancias del conjunto a cada punto de la
# malla y luego se separan por distancias.
curva1 = []

for k in malla:
    distancia = distanciaHausdorff(PPuntos, [k])
    curva1.append([k, distancia])

curva1.sort(key=sortSecond)
disx =[]
disy =[]
```

---

```

C = np.arange(0,1.1,0.01)
for m in range(0,len(C)-1):
    curvax = []
    curvay = []
    for j in range(0, len(curva1)):
        if curva1[j][1] >= C[m] and curva1[j][1] < C[m+1]:
            curvax.append(curva1[j][0][0])
            curvay.append(curva1[j][0][1])
    disx.append(curvax)
    disy.append(curvay)

# Grafica.
plt.figure('distancia', figsize=(20,20))
for i in range(0, len(disx)):
    plt.plot(disx[i], disy[i], '.')
#plt.plot(0,0, 'or')
plt.xlim(0,1)
plt.ylim(0,1)

```

## 8.2. Sistemas de Funciones Iteradas con Probabilidades, Algoritmo de Iteración Aleatoria

Este programa crea un arreglo de puntos en el plano a partir de los parámetros (factores de contracción, ángulos de rotación y translaciones) del IFS con probabilidades para crear una imagen.

```

#Definimos la transformacion afin
def Cont(str, Parametros, x):
    str=[str[0]*Parametros[x][2], str[1]*Parametros[x][3]]
    return str

def Rot(str, Parametros, x):
    str=[str[0]*np.cos(Parametros[x][0]) - str[1]*np.sin(Parametros[x][1]),
        str[0]*np.sin(Parametros[x][0]) + str[1]*np.cos(Parametros[x][1])]
    return str

def Trans(str, Parametros, x):

```

---

```
str=[str[0]+Parametros[x][4],str[1]+Parametros[x][5]]
return str

def transformacion(str,Parametros,x):
str=Trans(Rot(Cont(str,Parametros,x),Parametros,x),Parametros,x)
return str

def Probabilidades(str):
ran = random.uniform(0, 1)
x = 0
for i in range(0,len(str)):
    if ran>=x and ran<x+str[i]:
        eleccion = i
        x = x + str[i]
return eleccion

Parametros = [[0.0, 0.0, -0.5, 0.5, 0.5, 0.0],
              [0.0, 0.0, 0.5, 0.5, 0.5, 0.0],
              [0.0, 0.0, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5],
              [0.0, 0.0, -0.5, 0.5, 0.5, 0.5]]

Prob = [0.1,0.35,0.2,0.35] # vector de probabilidades.

punto_inicial=[uniform(0, 1),uniform(0, 1)]
resultado = []
#secuencia de 100 iteraciones para un valor aleatorio y una
#transformacion aleatoria
for k in range(0,100):
    caso=Probabilidades(Prob)
    punto_inicial = transformacion(punto_inicial,Parametros,caso)
# resultado de las 100 iteraciones
resultado=punto_inicial
#componentes X y Y de las transformaciones
#Sierpinsky=[]
Fractalx = []
```



```

Fractaly = []
#Genera los puntos del fractal de Sierpinsky
for i in range(0,1000000):
    caso=Probabilidades(Prob)
    resultado=transformacion(resultado,Parametros,caso)
    Fractalx.append(resultado[0])
    Fractaly.append(resultado[1])

plt.figure('fractal',figsize=(15,15))
plt.plot(Fractalx,Fractaly,'r')
plt.axis('equal')
plt.axis('off')

```

### 8.3. Sistemas de Funciones Iteradas Recurrentes

Para obtener fractales, como el de la figura 5.13, solo es necesario cambiar al vector de probabilidades por una matriz de probabilidad, y modificar el modo de elección de las probabilidades teniendo en cuenta las cadenas de Markov.

Se agrega una función que seleccione de manera aleatoria dentro de los elementos de la matriz de probabilidades

```

def Probabilidades(str,I):
    ran = random.uniform(0, 1)
    x = 0
    for i in range(0,len(str[I])):
        if ran>=x and ran<x+str[I][i]:
            eleccion = i
            x = x + str[I][i]
    return eleccion

```

cambiamos el vector por la matriz de la forma

```

Prob = [[0.328, 0.166, 0.237, 0.269],
        [0.365, 0.233, 0.035, 0.367],
        [0.309, 0.192, 0.249, 0.250],
        [0.228, 0.197, 0.241, 0.334]]

```

y por tratarse de una cadena de Markov se asignan los valores relacionados con la probabilidad obtenida en la iteración inmediatamente anterior

```
punto_inicial=[uniform(0, 1),uniform(0, 1)]
resultado = []
#secuencia de 100 iteraciones para un valor aleatorio y una
#transformacion aleatoria
caso = random.randint(0, len(Parametros)-1)
for k in range(0,100):
    caso=Probabilidades(Prob, caso)
    punto_inicial = transformacion(punto_inicial,Parametros ,caso)
# resultado de las 100 iteraciones
resultado=punto_inicial
#componentes X y Y de las transformaciones
#Sierpinsky=[]
Fractalx = []
Fractaly = []
#Genera los puntos del fractal de Sierpinsky
for i in range(0,2000000):
    caso=Probabilidades(Prob, caso)
    resultado=transformacion(resultado ,Parametros ,caso)
    Fractalx.append(resultado [0])
    Fractaly.append(resultado [1])

finalmente se realiza la gráfica con los puntos que están en los arreglos Fractalx y Fractaly.
```