

UN ESQUEMA NUMERICO
PARA FLUJOS ISOTERMICOS
Y TERMICOS

TESIS QUE PRESENTA
***MA. BLANCA DEL CARMEN
BERMUDEZ JUAREZ***

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS

ENERO 1998



**UNIVERSIDAD AUTONOMA
METROPOLITANA-IZTAPALAPA**

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Alfredo Nicolás Carrizosa, asesor de esta tesis, por todo el apoyo, paciencia, atención y esmero que puso en el desarrollo de esta tesis, haciendo patente el gran cariño que siente por su trabajo.

Agradezco a la Dra. Patricia Saavedra Barrera por su gran apoyo y por las valiosas pláticas y consejos que resultaron muy fructíferas en la realización de este trabajo.

Agradezco también a CONACYT por el beca otorgada para la realización de mis estudios de doctorado.

Reconocimiento

La autora de esta tesis y el asesor queremos señalar que la realización de este trabajo en mucho ha sido posible gracias a las discusiones y/o sugerencias de las siguientes personas: R. Glowinski (U. de Houston, U. P. y M. Curie de Paris); G. Alduncin (I. de Geofísica, UNAM); F. J. Sánchez (U. de Houston, UAM-I); H. Ceniceros (IPN, I. Courant-U. N.Y.); A. Díaz (Area de Termofluidos, UAM-A); E. Gómez, (IPH, UAM-I). En parte, este hecho queda patente con la referencia a sus trabajos en algunos aspectos fundamentales.

Los cálculos numéricos de este trabajo se realizaron en la supercomputadora Tlaloc3 del Laboratorio de Supercómputo de la UAM-I, por lo cual queremos agradecer la ayuda oportuna del M. en C. José Luis Luna y del Dr. Marcelo Lozada, Administrador y Coordinador de dicho Laboratorio respectivamente.

SUMARIO.

Se presenta un esquema numérico para resolver las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo de fluidos viscosos, incompresibles y dependientes del tiempo no térmicos ó térmicamente acoplados bajo la aproximación de Boussinesq. El esquema combina una descomposición de operadores en la discretización temporal y elementos finitos lineales en la discretización espacial. Para mostrar la eficiencia del esquema se muestran resultados de números de Reynolds grandes, hasta $Re \leq 40000$, para el caso de fluidos isotérmicos; con números de Rayleigh grandes hasta $Ra \leq 10^8$ para el caso térmico, en lo que respecta a convección mixta y natural. Esto es, probamos el esquema para viscosidades muy pequeñas y términos de fuerza grandes, lo cual no resulta una tarea trivial. A la vez el esquema es capaz de obtener tales resultados con mallas gruesas, como consecuencia de incorporar un efecto de upwind en un subpaso de la descomposición de operadores.

INDICE

1. INTRODUCCION	1
2. ANTECEDENTES TEORICOS	11
2.1. Definición de los problemas a estudiar	11
2.2. Espacios de tipo Sobolev y Formas Lineales y Multilineales	13
2.3. Existencia y Unicidad de la Solución de las Ecuaciones de Navier-Stokes y Boussinesq	19
2.3.1. Las Ecuaciones de Navier-Stokes	19
2.3.2. El Modelo de Boussinesq	20
2.3.3. La Condición de Div-estabilidad	21
2.4. Descomposición de Operadores	23
3. SOLUCION DE UNA ECUACION DE TRANSPORTE CON CONVECCION DOMINANTE MEDIANTE ESQUEMAS DE UPWIND	26
3.1. El problema discreto	27
3.1.1. Discretización en espacio	27
3.1.2. Discretización en tiempo	28
3.2. Esquemas de Upwind	29
3.2.1. Esquema de upwind de Tabata y de Bristeau-Glowinski	32
3.2.2. Esquema de upwind de Kanayama	32
3.2.3. Esquema de upwind parcial de Ikeda	35
3.3. El Método de Características	37
3.4. Solución del problema discretizado	39
3.5. Resultados numéricos	41
3.6. Algunas conclusiones sobre los esquemas	44
4. UN ESQUEMA DE DESCOMPOSICION DE OPERADORES PARA LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES	49
4.1. Las Ecuaciones de Navier-Stokes	49
4.2. El Esquema de Descomposición de Operadores	50
4.3. Solución de los Subproblemas Estacionarios	52
4.3.1. Solución de los Problemas tipo Stokes	52

4.3.2. Un Proceso Iterativo de Punto Fijo para los Problemas de Tipo Convección-difusión	55
4.4. Formulación Variacional y Elemento Finito	57
4.5. Esquemas clásicos de Upwind para problemas tipo Convección- difusión	58
4.6. Resultados Numéricos	60
4.7. Acerca de los Parámetros	71
5. UN ESQUEMA DE DESCOMPOSICION DE OPERADORES PARA FLUIDOS VISCOSOS, INCOMPRESIBLES Y TERMICOS	73
5.1. Aproximación de Boussinesq	74
5.2. El esquema de descomposición de operadores	76
5.3. Solución de los subproblemas discretizados en el tiempo	78
5.4. Formulación Variacional y Elemento Finito	81
5.5. Resultados Numéricos	82
6. Conclusiones	88
APENDICE A. ALGUNOS ELEMENTOS DE CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD	90
Referencias	98

1. INTRODUCCION

Este trabajo trata sobre la solución numérica de fluidos incompresibles y viscosos, dependientes del tiempo. Se considera tanto el caso isotérmico, gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, como el caso térmico, gobernado por la aproximación de Boussinesq (Navier-Stokes acoplado 'casi incompresiblemente' con la ecuación de temperatura). Ambos modelos se consideran en términos de las variables primitivas de la velocidad y la presión. La solución numérica se basa en un esquema que combina una descomposición de operadores en la discretización temporal y elementos finitos lineales en la discretización espacial. Con esta discretización espacial, el esquema es independiente de la geometría del problema, así como de la dimensión espacial, debido al uso de métodos iterativos en la solución de los subproblemas resultantes que finalmente conducen a la solución de problemas elípticos lineales y simétricos; sin embargo, nuestros experimentos numéricos se presentan solamente para dimensión dos.

Cuando se trabaja con un esquema numérico para el problema completo de Navier-Stokes y de Boussinesq (dependiente del tiempo) podemos considerar dos situaciones: a) capturar flujos estacionarios, cuando existen, como el límite cuando $t \rightarrow \infty$ de la solución del problema no estacionario, b) estudiar la evolución de ciertos flujos.

La eficiencia y robustez del esquema numérico se ilustra obteniendo resultados para números de Reynolds hasta $Re = 40000$, para Navier-Stokes, y hasta números de Rayleigh $Ra = 10^8$ para el modelo de Boussinesq; en ambos problemas usamos la geometría dada por el problema de la cavidad bidimensional. Manejar este rango de parámetros corresponde a considerar viscosidades muy pequeñas y términos de fuerza grandes (en la ecuación de momento), lo cual no es trivial, y, por tanto, corresponde a situaciones que no cualquier esquema numérico puede manejar. Obtener resultados para tal magnitud de parámetros es una necesidad para simular situaciones que corresponden a la realidad; por ejemplo, con respecto a números de Reynolds grandes se tiene que para el caso de un planeador de una longitud característica de $.001km$ y a una velocidad de $.001km/seg$, el número de Reynolds es $Re \approx 7 \times 10^4$, para un automóvil que corre a $.003km/seg$, $Re \approx 6 \times 10^5$ y para aviones a $.03km/seg$, $Re \approx 2 \times 10^7$ [1].

La validación de nuestros resultados se basa en el hecho de que para números de Reynolds $Re \leq 10000$, y hasta cierto grado de mallas no finas,

hemos obtenido la misma precisión que otros autores obtuvieron con mallas mucho más finas [2], [3] y [4]. Además, cuando el número de Reynolds se incrementa, el esquema numérico no requiere de un tratamiento especial adicional más que decrementar el paso de discretización temporal, lo cual es un requisito natural de la dinámica rápida del flujo; dicha dinámica es congruente también con la aparición de más vórtices secundarios en los experimentos numéricos.

Como se menciona en la Sec. 4.6, Navier-Stokes, específicamente dicha validación consiste en comparar nuestros resultados provenientes del problema no estacionario, cuando $t \rightarrow \infty$ con los resultados reportados del problema estacionario. En tales circunstancias y tomando en cuenta que no hemos visto resultados del problema estacionario para números de Reynolds $Re \geq 20000$, los resultados que se presentan para $Re \geq 20000$ no podemos decir que correspondan al estado estacionario, sin embargo se puede observar que la estructura es muy similar al correspondiente estado estacionario para Re menores. Teóricamente, [5], se sabe que dicho estado estacionario puede no existir, o no ser único, a partir de cierto valor crítico Rc ; la pregunta es, cuál es el valor de Rc . Otro camino, más reciente, dentro del contexto de sistemas dinámicos de dimensión infinita, es el concepto de atractor (o atractor universal), [6], lo cual consiste en una estructura más general del concepto de variedad central, a la cual debe tender el flujo cuando $t \rightarrow \infty$, independientemente de su estructura; aclaramos que esto es un tópico de investigación actual.

La contribución de este trabajo consiste en presentar un esquema numérico capaz de manejar el rango de parámetros mencionado, usando elementos finitos de bajo orden (lineales) en la discretización espacial, usando a la vez mallas significativamente gruesas; lograr estas cualidades no es usual en un esquema numérico para esta clase de problemas.

En la literatura se han reportado diversos resultados para números de Reynolds grandes ($Re \leq 12000$) y con un alto grado de precisión, pero usando la formulación vorticidad-función corriente [2], [3], [4], y con mallas finas. Se sabe que con esta formulación la condición de incompresibilidad se satisface automáticamente y la presión no aparece directamente como una incógnita del problema. Sin embargo, hay que enfrentar la falta de condiciones de frontera para la vorticidad, lo cual es la principal dificultad con esta formulación, [7]. En [4] dichas condiciones de frontera se abordan a través de un operador de frontera, y se reportan resultados para números de Reynolds

grandes (hasta $Re = 12000$). Otra forma de abordar este problema, cuando se discretiza con diferencias finitas, es considerando ciertas expansiones de Taylor (véase también [7]).

Otros resultados numéricos han sido reportados recientemente en [8], [9], y [10]. Estos están basados en la formulación de variables primitivas y usan viscosidad artificial [10], o bien esquemas de upwind de tercer orden [8], [9]. En [10], con viscosidad artificial y multimalla en diferencias finitas obtienen resultados de alta precisión hasta $Re = 15000$, pero con mallas muy finas. Para obtener upwind de tercer orden, Tabata y Fujima en [8], usan la idea clásica de upwind, pero además usan puntos “downwind”; por otro lado, Kondo et al. [9] usan una función de peso modificada, la cual es la suma de funciones de peso estándares, y de sus segundas y terceras derivadas. Tanto en [8] como en [9] se reportan resultados hasta $Re = 10000$ y se hace uso de mallas irregulares, refinando la subdivisión en las capas límite.

En [11], se discute la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en variables primitivas para describir el flujo en dominios complejos: flujo en un canal alrededor de un cilindro, y alrededor de cilindros rotantes. La idea principal aquí, después de usar una discretización en tiempo de segundo orden, consiste en transformar la solución del problema original, en cada nivel de tiempo, a la solución de un problema de tipo Stokes mediante un proceso iterativo de punto fijo; la solución de este problema tipo Stokes se realiza mediante un método de penalización haciendo uso de elementos finitos de orden alto en la discretización espacial. En este caso se presentan resultados para $Re \leq 400$.

En [12] también se consideran geometrías análogas a la anterior y se discuten diferentes procedimientos de elemento finito, basados en la formulación vorticidad-función corriente y en la formulación de variables primitivas. En todas estas formulaciones se usa el método streamline-upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) para evitar oscilaciones espurias en presencia de términos convectivos fuertes. En la formulación de variables primitivas se emplean funciones bilineales por pedazos para la velocidad y funciones lineales por pedazos para la presión. Cabe mencionar que con esta formulación (con elementos triangulares) se usa el *esquema- θ* de R. Glowinski, [13], [14], [15] y [16], pero los subproblemas estacionarios correspondientes se resuelven con técnicas diferentes, entre otras razones, para poder aplicar SUPG. En este caso también se consideran números de Reynolds pequeños.

Finalmente, señalamos que otra metodología consiste en aplicar dualidad y Lagrangianos aumentados, [17], [18]; sin embargo, como se menciona explícitamente en tales referencias, dichos aspectos, numéricamente, solamente funcionan para el problema de Stokes o bien para números de Reynolds moderados en Navier-Stokes. Para probar estabilidad y convergencia, también explícitamente se menciona que los algoritmos que resultan en términos de la descomposición de operadores (Peaceman-Rachford, esquema θ de R. Glowinski, etc) es todavía un problema abierto.

En lo que respecta al modelo de Boussinesq, en [10], [19], [20], [21], [22], [23] y [24] se reportan resultados numéricos con un alto grado de precisión, pero usando también mallas finas. En [21] se resuelve un problema de convección mixta en la cavidad con un gradiente de temperatura vertical estable. Se presentan resultados numéricos para un rango amplio de los parámetros, $0 \leq Ra \leq 10^6$ y $400 \leq Re \leq 3000$ usando diferencias finitas. Se identifican así los elementos dinámicos predominantes para varios regímenes de los parámetros. Se estudian dos casos:

1) $Gr/Re^2 \leq 1$, en el cual las características del flujo son similares a los de la cavidad convencional de un fluido no estratificado, los fluidos están bien mezclados y las variaciones de temperatura son pequeñas.

2) $Gr/Re^2 \geq 1$, en donde la mayoría de las porciones de la parte superior y central de la cavidad están estancadas.

Después, para convección natural, se resuelve el problema del flujo de un fluido provocado por fuerzas de flotación en la cavidad con paredes verticales calentadas de diferente manera. Este problema es resuelto por FIDAP (un paquete de elemento finito bastante conocido), el cual tiene un resolvidor para el modelo de Boussinesq estacionario y usa un método completamente acoplado; el rango considerado es para números de Rayleigh Ra , $10^3 \leq Ra \leq 10^6$. Para obtener la solución para $Ra = 10^6$, con FIDAP se tiene que realizar una serie de soluciones para $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$, y toma la solución del Ra anterior para arrancar el método para un Ra mayor.

FIDAP compara sus resultados con los reportados en [19]; mientras que [20] y [22] lo hacen con los resultados reportados por FIDAP; y [24] compara con los de [20]. Todos estos trabajos, excepto [19] usan la formulación en variables primitivas (velocidad y presión). La referencia [19] usa la formulación vorticidad-corriente estacionaria de Boussinesq.

En [20] el mismo problema es resuelto investigando diferentes esquemas

numéricos, contruidos sobre bases iterativas implícitas y semi-implícitas, y usando el concepto de multiplicador de Lagrange. La cavidad aquí es discretizada por una malla rectangular de “elementos clasificados”. Usan elementos bicuadraticos/bilineales para la velocidad y presión respectivamente. En [24], se presentan resultados usando el método mínimos cuadrados de elemento finito con elementos bilineales. En [22] se usa un método de descomposición de operadores para fluidos compresibles con números de Rayleigh grandes.

En [25] se estudia numéricamente la convección natural que se manifiesta en el almacenamiento de granos en silos debido a los gradientes de temperatura producidos por el calor de respiración. Se obtienen resultados hasta $Ra = 10^8$; sin embargo, el modelo (de Boussinesq) con el que se trabaja es para medios porosos y se emplea la formulación vorticidad-función corriente. El problema se discretiza mediante colocación ortogonal con polinomios de Legendre, y el sistema de ecuaciones no lineales que se obtiene se resuelve por el método de Newton-Raphson con factorización LU.

Como se verá en las Secciones 4.6 y 5.5, los resultados de este trabajo se obtienen usando mallas significativamente gruesas (con lo cual queremos decir “significativamente más gruesas” que las reportadas en la bibliografía con otros esquemas); el uso de mallas gruesas, manteniendo el grado de precisión que se obtiene con mallas finas, es de gran importancia en lo que a tiempo de CPU y capacidad de memoria se refiere.

La descomposición de operadores del esquema numérico que aquí se presenta se basa en una discretización temporal de segundo orden y, como otros métodos de descomposición de operadores, nos permite desacoplar las dificultades asociadas con la(s) no linealidad(es) en Navier-Stokes (en Boussinesq) y la condición de incompresibilidad, reduciendo el problema a la solución de una sucesión de subproblemas más simples en cada nivel de tiempo: problemas de tipo Stokes y problemas tipo convección-difusión (transporte).

La solución de los subproblemas estacionarios anteriores se realiza mediante métodos iterativos que conducen a la solución de problemas lineales elípticos y simétricos: gradiente conjugado para los problemas de tipo Stokes y punto fijo para los problemas de tipo transporte.

El antecedente del presente trabajo, de hecho el más cercano a éste, es el *esquema* θ de R. Glowinski, el cual se basa en una descomposición de o-

peradores que se obtiene de una discretización en tiempo de primer orden, y subdividiendo cada subintervalo de tiempo en tres subintervalos de diferente longitud, las cuales se determinan por un parámetro θ cuya elección hace que cuando el problema se restringe a dimensión finita, el esquema resulta ser de segundo orden en exactitud e incondicionalmente estable. Con esta descomposición de operadores se obtienen subproblemas lineales de tipo Stokes en el primer y tercer subintervalos, y un problema elíptico no lineal sin restricción de incompresibilidad en el subintervalo intermedio. La solución de ambos subproblemas se lleva a cabo mediante el método iterativo del gradiente conjugado aplicado a una ecuación funcional satisfecha por la presión en el caso de los problemas de tipo Stokes, y de un problema equivalente de optimización, que se obtiene con una formulación de mínimos cuadrados, en el caso del problema elíptico no lineal.

Con la finalidad de lograr un esquema alternativo, en [26] y [27] se presenta una variante del esquema θ . Cada subintervalo también se subdivide en tres subintervalos, pero en este caso de longitud igual. La discretización en tiempo, a diferencia de la de primer orden en el esquema θ , es de segundo orden (con buen comportamiento para tiempos grandes e incondicionalmente estable cuando se combina implícitamente con el operador laplaciano [28]). Los subproblemas que se obtienen en cada nivel de tiempo son del mismo tipo que en el esquema θ . Los subproblemas de tipo Stokes se resuelven también con gradiente conjugado aplicado a la correspondiente ecuación satisfecha por la presión; sin embargo, el subproblema elíptico no lineal, se resuelve mediante un proceso iterativo de punto fijo, con lo cual se logra un proceso más simple y más barato que el proceso de mínimos cuadrados que se usa en el método θ : el proceso iterativo de punto fijo conduce a la solución de N problemas elípticos lineales y simétricos en cada iteración, mientras que cada iteración del gradiente conjugado en la formulación de mínimos cuadrados requiere de la solución de $3N$ de dichos problemas.

Con respecto al esquema θ , en [13], [14], [15] y [16] se presentan resultados para diferentes flujos (inyectores, inyectores dobles, etc.), con diferentes geometrías; en [14] y [15] se presentan también resultados para flujos compresibles. Los números de Reynolds considerados varían de $Re = 100$ a $Re = 1500$; $Re = 8000$, en el caso de inyectores dobles.

Para el problema clásico de la cavidad, en [26] y [27] se reportan resultados

de alta precisión con $Re = 1000$, y con $Re = 8000$ para inyectores dobles. En ambos casos las mallas que se usan son finas ($h_v = 1/128$). De acuerdo con los resultados y las mallas empleadas se puede decir que la variante en [26] y [27] es competitiva con el esquema θ .

En [29] se muestran también resultados para el problema de la cavidad aplicando un esquema de descomposición de operadores de 5 pasos, en donde resultan dos problemas no lineales de tipo elíptico. El primer subproblema no lineal puede linealizarse y aplicar upwind para controlar oscilaciones espurias para números de Reynolds grandes, mientras que el segundo subproblema no lineal que resulta, se resuelve tal cual para preservar la precisión. Se reportan resultados hasta $Re = 10000$.

El presente trabajo, en lo que se refiere a las ecuaciones de Navier-Stokes, es a su vez una variante del esquema en [26] y [27]. Esta vez, el objetivo es lograr un esquema, de ser posible más sencillo, capaz de reproducir las características principales del flujo para números de Reynolds grandes (más grandes que los reportados por la literatura actual, incluyendo los reportados por la variante en [26] y [27]), empleando para ello mallas gruesas, y por otro lado, poder extenderlo, con las mismas cualidades, al problema más complicado del modelo de Boussinesq.

Tomando en cuenta lo anterior, la variante del esquema reportado en [26] y [27] consiste en reemplazar el término no lineal por uno lineal haciendo uso de la velocidad previamente calculada en el subpaso anterior. De hecho esta idea viene de una observación de R. Glowinski en relación al esquema θ (recordamos que en este caso se usa una discretización en tiempo de primer orden, aunque globalmente es de segundo orden). Procediendo de esta forma, en el subintervalo intermedio resulta en lugar del problema elíptico no lineal un conjunto de problemas (desacoplados) elípticos lineales (no simétricos) de tipo convección-difusión (o de tipo transporte). Entonces, aprovechamos esta estructura y aplicamos una técnica clásica de upwind, que para este tipo de problemas (considerando solamente uno) ha dado excelentes resultados, tanto en precisión como por su papel de estabilizador para cualquier paso de discretización h , sin importar el tamaño de la cantidad convectiva dominante.

Desde luego, no había garantía de que esta cualidad se preservara completamente para las ecuaciones de Navier-Stokes ya que éste es parte solamente de un paso del proceso en cada nivel de tiempo; en los otros dos subpasos restantes juega un papel decisivo la restricción de incompresibilidad. De hecho, los experimentos numéricos mostraron que no hay problema en el as-

pecto estabilizador pero sí lo hay en precisión si la malla es gruesa. Luego, a esta variante, para ser efectiva agregamos una interpolación cúbica para iniciar el proceso iterativo de punto fijo para resolver estos subproblemas; este solo hecho, en relación a fluidos y a nuestro esquema, cuyo efecto no fue simple lo aprendimos de [30].

Cabe mencionar que las aplicaciones de upwind en Navier-Stokes, así como para el modelo de Boussinesq, han sido pocas (al menos para resultados con números de Reynolds altos) comparado con lo mucho que se ha hecho para problemas escalares de transporte. Una idea básica de este trabajo consistió en realizar un análisis de los esquemas que se habían aplicado a estos problemas y seleccionar el mejor, el cual resultó ser el esquema de upwind parcial de Ikeda [31]. Este esquema, bajo ciertas circunstancias, resulta ser de segundo orden e introduce la mínima cantidad de viscosidad artificial necesaria para preservar el principio del máximo discreto, el principio de conservación de masa discreto, y la convergencia en $L^\infty(\Omega)$.

En [32], se presentan resultados numéricos de alta precisión para el problema clásico de la cavidad usando el esquema de descomposición de operadores de 3 pasos, tanto la versión lineal (con upwind) como la no lineal, así como también usando el esquema de 5 pasos mencionado previamente en relación a [29]. En [32] se incluyen resultados para $1000 \leq Re \leq 7500$, con tamaños de malla $h_v = 1/48$ y $1/64$ para $Re = 1000$ y $h_v = 1/64$ y $1/128$ para $Re = 4000$ y 7500 . En [33], reportamos resultados para $7500 \leq Re \leq 12000$ usando la versión lineal y no lineal del esquema de 3 pasos. El h_v usado para $Re = 12000$ es $1/128$. En [34] se presentan resultados numéricos para números de Reynolds en el rango de $400 \leq Re \leq 4000$ con mallas $h_v = 1/32$ para $Re = 1000$ y $h_v = 1/48$ para $Re = 4000$; estas mallas son considerablemente gruesas en relación a las usuales reportadas para otros esquemas (Véase la Sección 4.6).

En [35] presentamos resultados para Navier-Stokes con $15000 \leq Re \leq 40000$, y el tamaño de malla más grueso que se usa es de $1/128$ la cual es significativamente más gruesa que la malla de $h_v = 516$ que emplean Bruneau et al en [10] para $Re = 15000$.

En los resultados numéricos de este trabajo presentamos además de los ya señalados, resultados para $Re = 20000, 25000, 30000$ y 40000 ; todos ellos con $h_v = 1/128$. Con respecto a $Re = 40000$ se presenta el resultado obtenido a partir de un Re menor, así como el obtenido directamente de cero.

Para el caso térmico (Boussinesq) presentamos resultados con $10^5 \leq Ra \leq$

10^8 con un tamaño de malla $h_v = 1/16$ para convección natural; hacemos notar que esta malla corresponde a 289 nodos mientras que los resultados de FIDAP para $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ corresponden a una malla de 625 nodos usando 144 cuadriláteros y con una malla más fina cerca de las paredes. Para convección mixta se muestran resultados también con mallas significativamente gruesas, incluyendo un resultado en el rango de turbulencia térmica [36], con una malla significativamente gruesa.

No presentamos en este trabajo ningún estudio de estabilidad y convergencia teóricos del método propuesto, pero, con respecto a estos aspectos, podemos citar [11], en donde se hace un estudio de la estabilidad para diferentes esquemas de discretización en el tiempo, y también propiedades de convergencia de algunos métodos iterativos (método de Newton, cuasi-Newton, etc). En este caso, no se está haciendo un estudio sobre esquemas de descomposición de operadores. En [37] se hace un estudio sobre la estabilidad y convergencia del *método θ* de R. Glowinski y se muestra con el problema de la cavidad suavizada que el esquema funciona bien hasta $Re = 3200$. En Fernández-Cara [38] también se presenta un estudio de estabilidad y convergencia de una variante cercana al *método θ* de R. Glowinski (no se presentan resultados numéricos). En [39], [40], [41] y [42], también se presentan resultados de estabilidad y estimaciones de error usando elementos finitos de orden alto (no se usa descomposición de operadores).

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el Capítulo II se discuten algunos aspectos teóricos sobre la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Boussinesq. Aquí se introducen los conjuntos y espacios de tipo Sobolev que se requieren para la discretización espacial de tipo elemento finito de dichas ecuaciones estableciéndose ciertas condiciones que deben de cumplir dichos espacios (como la *condición inf-sup*) para que se tenga convergencia a la solución del problema variacional asociado. Por último en este capítulo, se hace una breve descripción de descomposición de operadores.

En el Capítulo III se hace un estudio comparativo de diferentes esquemas de upwind para resolver problemas de convección-difusión. El objetivo es elegir de entre estos esquemas el mejor, para posteriormente aplicarlo a los problemas de convección-difusión que surgen en la descomposición de operadores tanto de los problemas de Navier-Stokes como del modelo de Boussinesq.

En el Capítulo IV se describe el esquema de descomposición de operadores

aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes. Se discute también la solución de los subproblemas estacionarios que surgen de esta descomposición. Para los problemas tipo Stokes se discute la ecuación satisfecha por la presión que se usa en el *método θ* de R.Glowinski y el algoritmo de gradiente conjugado utilizado para este problema. Para los problemas de tipo convección-difusión, se describe el método iterativo de punto fijo utilizado, resaltando la diferencia con el de mínimos cuadrados utilizado por el *método θ* . Se presentan los resultados numéricos (líneas de corriente y vorticidad) para el problema de prueba clásico de la cavidad. Las mallas utilizadas son gruesas y además regulares, contrastando así con el tipo de mallas que se reportan usualmente en la bibliografía las cuales son mallas finas y además más finas cerca de las paredes de la cavidad.

En el Capítulo V se discute una extensión del esquema descrito en el Capítulo IV para la aproximación de Boussinesq. Se presentan resultados numéricos para convección mixta y natural. Para convección natural se muestran resultados con números de Rayleigh en el rango de $10^3 \leq Ra \leq 10^8$.

En el Capítulo VI, se presentan algunas conclusiones.

Tomando en cuenta que los resultados de estabilidad en [11] están en términos de una discretización espacial arbitraria, y aún cuando no se está usando descomposición de operadores, pero si dependen del número de Reynolds, los tomamos como una guía y en el Apéndice A se presentan los resultados al respecto; y se hace un bosquejo de los resultados mencionados sobre las pruebas de estabilidad y convergencia.

2. ANTECEDENTES TEORICOS

2.1. Definición de los problemas a estudiar

En este capítulo se describen algunos resultados teóricos sobre la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, así como del modelo de Boussinesq. También se discutirán brevemente las ideas básicas de descomposición de operadores.

Dada $\Omega \subset R^N$ ($N = 2, 3$ en la práctica) la región del flujo de un fluido, y Γ su frontera (con $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n$, $\Gamma_d \cap \Gamma_n = \emptyset$), se consideran los dos problemas siguientes:

a) Problema de Navier-Stokes. Este problema consiste de las siguientes ecuaciones adimensionalizadas que modelan el flujo de un fluido incompresible, viscoso, isotérmico y dependiente del tiempo

$$\begin{cases} \partial \mathbf{u} / \partial t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, & (2.1) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 & (\text{condición de incompresibilidad}), & (2.2) \end{cases}$$

a las cuales se les agrega la condición inicial

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ en } \Omega \text{ (con } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0), \quad (2.3)$$

así como una condición de frontera adecuada, que por simplicidad la suponemos de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma, t \geq 0 \left(\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \right). \quad (2.4)$$

b) Problema de Boussinesq. Este problema consta de las siguientes ecuaciones, adimensionalizadas que modelan el flujo de un fluido incompresible (bajo la aproximación de Boussinesq), viscoso, térmico y dependiente del tiempo

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \mathbf{u} / \partial t - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{Ra}{Pr Re^2} T \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (2.5) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (\text{condición de incompresibilidad}) \quad (2.6) \\ \partial T / \partial t - \frac{1}{Re Pr} \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = Q, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (2.7) \end{array} \right.$$

con condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (\text{con } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0), \quad (2.8)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega, \quad (2.9)$$

y de frontera dadas por

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad t \geq 0 \quad \left(\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \right), \quad (2.10)$$

$$T = g \quad \text{sobre } \Gamma_d, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_n. \quad (2.11)$$

Las variables desconocidas \mathbf{u} , p y T son los campos de velocidad, presión y temperatura respectivamente del flujo; Q denota una fuente externa de calor. Con respecto a los parámetros, Ra es el número de Rayleigh, Pr es el número de Prandtl; Re es el número de Reynolds, que como se sabe está relacionado con la viscosidad ν por $\frac{1}{Re} = \nu$, donde ν es la viscosidad. \mathbf{f} representa una densidad de fuerzas externas (fuerzas de gravedad, electromagnéticas, etc); y, \mathbf{g} es el vector de gravedad $\mathbf{g} = (0,1)$, en dimensión dos. El término

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, en general $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}$ denota el vector $\left\{ \sum_{j=1}^N v_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right\}_{i=1}^N$, $\nabla \mathbf{u} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^N$,
 $\Delta \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} = \{ \Delta u_i \}_{i=1}^N$, y $\nabla \cdot \mathbf{u} = \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\}$.

La solución numérica de los problemas anteriores involucra el método de elemento finito en la discretización espacial. Por otro lado, el elemento finito se aplica a la formulación variacional (o formulación débil) del problema diferencial. Entonces, es necesario definir algunos espacios de funciones de tipo Sobolev.

2.2. Espacios de tipo Sobolev y Formas Lineales y Multilineales

Denotaremos por $L^2(\Omega)$ al espacio de las funciones cuadrado integrables en el sentido de Lebesgue, sobre Ω . Dicho espacio está dotado de un producto interior y una norma dados por

$$(p, q) = \int_{\Omega} p q \, d\mathbf{x} \text{ y } \|q\|_0 = (q, q)^{1/2},$$

respectivamente. Y consideramos el subespacio

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = 0 \right\};$$

esto es, $L_0^2(\Omega)$ es el espacio de las funciones cuadrado integrables cuya integral es cero sobre Ω .

Hacemos notar que $L_0^2(\Omega)$ se usa en relación con la presión, ya que para las ecuaciones de Navier-Stokes, la presión puede ser determinada en forma única salvo por una constante.

Para cualquier entero no negativo k se define el espacio de Sobolev

$$H^k(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid D^s v \in L^2(\Omega) \text{ para } s = 0, \dots, k \right\},$$

donde D^s denota a todas y cada una de las derivadas de orden s , en el sentido de las distribuciones. Este espacio está dotado de la norma

$$\|v\|_k = \left(\|v\|_0^2 + \sum_{s=1}^k \|D^s v\|_0^2 \right)^{1/2};$$

nótese que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

En particular, se hace uso frecuente del caso $k = 1$, esto es,

$$H^1(\Omega) = \left\{ q \mid q, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, N \right\},$$

así como del subespacio

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\}.$$

En $H_0^1(\Omega)$ se tiene que

$$|v|_1 = (\|\nabla v\|_0^2)^{1/2},$$

define una norma, la cual, por la desigualdad de Poincaré, es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ de $H^1(\Omega)$, suponiendo que Ω es acotada en alguna dirección.

Consideraremos también $H^{-1}(\Omega)$ que es el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$, el cual, como se sabe, tiene norma dada por

$$\|q\|_{-1} = \sup_{0 \neq v \in H_0^1(\Omega)} \frac{(q, v)}{|v|}$$

Para funciones vectoriales, consideramos los espacios

$$\mathbf{H}^k(\Omega) = [H^k(\Omega)]^N = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N) \mid v_i \in H^k(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, N \},$$

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]^N = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N) \mid v_i \in H_0^1(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, N \},$$

$$\mathbf{H}^{-1}(\Omega) = [H^{-1}(\Omega)]^N.$$

Para cualquier entero $k \geq 0$, $\mathbf{H}^k(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\| \mathbf{v} \|_k = \left(\sum_{i=1}^N \| v_i \|_k^2 \right)^{1/2}.$$

En particular, para las funciones que pertenecen a $\mathbf{H}^0(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^N$ se tiene el producto interno y norma dados por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \text{ y } \| \mathbf{v} \|_0 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2},$$

respectivamente, donde $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ denota el producto punto (escalar) de \mathbf{u} y \mathbf{v} en R^n .

Ahora definimos las formas siguientes:

- Lineales:

$$l_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

con \mathbf{f} fija en $\mathbf{L}^2(\Omega)$; o bien

$$l_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

con \mathbf{f} fija en $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el apareamiento de dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

$$l_{Tg}(\mathbf{v}) = \frac{Gr}{Re^2} \int_{\Omega} Tg \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

con T fija en $H^1(\Omega)$ y en donde como recordamos \mathbf{g} es el vector de gravedad $\mathbf{g} = (0, 1)$.

• Bilineales:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \text{ para todo } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ y para toda } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

$$b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}, \text{ para toda } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ y para toda } q \in L^2(\Omega),$$

$$e(T, \theta) = \frac{1}{Pr Re} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla \theta \, d\mathbf{x}, \text{ para todo } \theta, T \in H^1(\Omega).$$

• Trilineales:

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \text{ para toda } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

$$d(\mathbf{u}, T, \theta) = \int_{\Omega} \theta \mathbf{u} \cdot \nabla T \, d\mathbf{x} \text{ para todo } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ y } \theta, T \in H^1(\Omega).$$

Recordemos que

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

y

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i.$$

Usando la forma bilineal $b(*, *)$ definimos el subespacio

$$\mathbf{Z} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid b(\mathbf{v}, q) = 0 \text{ para todo } q \in L^2(\Omega) \right\},$$

que consiste de todas las funciones libres de divergencia débil, es decir, funciones cuya divergencia es cero casi dondequiera.

Además consideramos

$$\mathbf{H}_g^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma \right\},$$

$$\mathbf{V}_g(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_g^1(\Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\},$$

$$\Theta_g(\Omega) = \left\{ \theta \in H^1(\Omega) \mid \theta = g \text{ sobre } \Gamma_d, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_n \right\},$$

y

$$\Theta_{0d}(\Omega) = \left\{ \theta \in H^1(\Omega) \mid \theta = 0 \text{ sobre } \Gamma_d \right\}.$$

Para la discretización por elemento finito consideramos una triangulación τ_h . Entonces $\tilde{\tau}_h$ es la triangulación que se obtiene de τ_h uniendo los puntos medios de cada uno de los lados de los triángulos de τ_h . Y consideramos también \mathcal{P}_k el espacio de polinomios de grado $\leq k$. Definimos los siguientes espacios (y conjuntos) de dimensión finita:

$$H^{1h}(\Omega) = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_{Tr} \in \mathcal{P}_1, \forall Tr \in \tau_h\},$$

$$\mathbf{H}^{1h}(\Omega) = [H^{1h}(\Omega)]^N,$$

$$\tilde{H}^{1h}(\Omega) = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_{Tr} \in \mathcal{P}_1, \forall Tr \in \tilde{\tau}_h\},$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^{1h}(\Omega) = [\tilde{H}^{1h}(\Omega)]^N,$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_g^{1h}(\Omega) = \{\mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{H}}^{1h}(\Omega) \mid \mathbf{v}_h = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma\}, \quad (2.12)$$

$$S_0^h(\Omega) = \left\{ q_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid q_h|_{Tr} \in \mathcal{P}_1, \forall Tr \in \tau_h, \int_{\Omega} q_h d\mathbf{x} = 0 \right\}, \quad (2.13)$$

$$\Theta_g^h(\Omega) = \left\{ \theta_h \in \tilde{H}^{1h}(\Omega) \mid \theta_h = g \text{ sobre } \Gamma_d, \quad \frac{\partial \theta_h}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_n \right\}, \quad (2.14)$$

$$\Theta_{0d}^h(\Omega) = \{ \theta_h \in \tilde{H}^{1h}(\Omega) \mid \theta_h = 0 \text{ sobre } \Gamma_d \},$$

$$\mathbf{Z}^h = \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \text{ para todo } q_h \in S_0^h(\Omega) \}.$$

Estos espacios se usan para la discretización espacial de la velocidad, de la temperatura y de la presión, y puede mostrarse que satisfacen la condición del *inf-sup* (la cual será discutida en una Sección posterior). Usualmente la velocidad se busca en \mathcal{P}_2 y la presión en \mathcal{P}_1 , con lo cual se satisface el principio discreto de *inf-sup*. Sin embargo, numéricamente, y basándonos en

el trabajo de R. Glowinski con respecto al método θ , véase por ejemplo [13], se puede reducir el problema a trabajar solamente con polinomios lineales, usando para la velocidad una malla dos veces más fina que la de la presión; esto es, se trabaja en $\tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}$ para la velocidad y con \mathbf{H}_0^{1h} para la presión. Para la discretización de Boussinesq, extendemos esta idea usando para la velocidad y la temperatura la malla que es dos veces más fina, en este caso también se satisface la condición *inf-sup*, [43].

Para los espacios usuales de Bochner de funciones dependientes también del tiempo con valores en algún espacio de Banach X se usa la siguiente notación:

$$L^p(0, T; X) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} : (0, T) \rightarrow X, \int_0^T \|\mathbf{u}(\tau)\|_X^p d\tau < \infty \right\},$$

con la modificación estándar para $p = \infty$.

2.3. Existencia y Unicidad de la Solución de las Ecuaciones de Navier-Stokes y del modelo de Boussinesq

2.3.1. Las Ecuaciones de Navier-Stokes

La formulación variacional del problema (2.1) – (2.4), usando la notación dada en la sección anterior, es la siguiente:

Dado $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}_0$ y $\mathbf{f} \in L^2(0, +\infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$, encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V}_g)$, tales que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= l_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0(\Omega), \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Se sabe que en todo intervalo $[0, T]$, si $N = 2$, la solución débil \mathbf{u} existe y es única para todo tiempo t , mientras que para $N = 3$, sólo existe y es única en un intervalo pequeño de tiempo. Estos resultados pueden encontrarse en Ladyzhenskaya [44] y Temam [45].

Para evitar las dificultades de la discretización en el espacio libre de divergencias \mathbf{V} , es conveniente trabajar con la formulación siguiente, la cual es equivalente a (2.15) para funciones suficientemente regulares:

Encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}_g^1)$, $p \in L_0^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= l_f(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) &= 0, \forall q \in L^2(\Omega), \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \end{aligned}$$

la cual tiene asociado el problema discreto:

Encontrar $\mathbf{u}_h \in L^\infty(0, T; \tilde{\mathbf{H}}_g^{1h})$ y $p_h \in S_0^h$ tales que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{th}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + c(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p) &= l_f(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}(\Omega), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \forall q_h \in H^{1h}(\Omega), \\ \mathbf{u}_h(0) &= \mathbf{u}_{0h}. \end{aligned}$$

La presión p es única en $L^2(\Omega)/R$ en ambas formulaciones.

Hacemos notar que en las formulaciones anteriores, sobre todo en los problemas discretos, por simplicidad hemos considerado condiciones de frontera de tipo Dirichlet, con $\Gamma_n = \emptyset$ en $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n$. En [46], se considera el caso general $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n$ con condiciones de frontera *naturales* de velocidad y presión sobre Γ_n .

2.3.2. El Modelo de Boussinesq

La formulación variacional del problema (2.5) – (2.11) está dada por:

Dado $\mathbf{u}_0 \in V_0$, encontrar $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}_g)$, $T \in L^\infty(0, T; \Theta_g)$ tales que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= l_{T,g}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0(\Omega), \\ (T_t, \theta) + e(T, \theta) + d(\mathbf{u}, T, \theta) &= (Q, \theta), \forall \theta \in \Theta_{0d}(\Omega), \end{aligned}$$

que nuevamente, para evitar el tener que trabajar con el espacio libre de divergencias V_0 el problema a resolver es:

Encontrar $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_g^1)$, $T \in L^\infty(0, T; \Theta_g)$ y $p \in L_0^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= l_{T,g}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) &= 0, \forall q \in L^2(\Omega) \\ (T_t, \Theta) + e(T, \Theta) + d(\mathbf{u}, T, \Theta) &= (Q, \Theta), \forall \Theta \in \Theta_{0d}(\Omega). \end{aligned}$$

Para este caso, el correspondiente problema discreto está dado por:

Encontrar $\mathbf{u}_h \in L^\infty(0, T; \tilde{\mathbf{H}}_g^{1h})$, $T \in L^\infty(0, T; \Theta_g^h)$ y $p_h \in S_0^h$ tales que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{th}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + c(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= l_{T,g}(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \forall q_h \in S_0^h(\Omega), \\ (T_t, \Theta_h) + e(T_h, \Theta_h) + d(\mathbf{u}_h, T_h, \Theta_h) &= (Q, \Theta_h), \forall \Theta_h \in \Theta_{0d}^h(\Omega). \end{aligned}$$

La existencia y unicidad de las soluciones para el modelo de Boussinesq pueden ser obtenidas empleando las mismas técnicas que las usadas para la ecuaciones de Navier-Stokes. Por ejemplo, para convección libre, con $Q = 0$ y $Re = 1$, la unicidad de las soluciones puede ser probada sólo para números de Rayleigh suficientemente pequeños; véase Lions [47], [45], y Cuvelier [48] para mayor información.

Los espacios de elemento finito para la velocidad y la presión deben ser escogidos igual que para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes; en particular, deberán satisfacer la condición de div-estabilidad. El espacio de elemento finito para la temperatura puede ser escogido de manera que consista de polinomios por pedazos del mismo grado y con respecto a la misma triangulación que para las componentes de la velocidad.

2.3.3. La Condición de Div-estabilidad

Existen ciertas condiciones que deben satisfacer los espacios de elemento finito, y a pesar de que la mayoría de éstas son satisfechas para cualquier selección de espacios de elemento finito conformes, una de las condiciones restringe esta elección.

Las tres primeras condiciones que deben de satisfacer los espacios \mathbf{V}_0^h y S_1^h son las siguientes:

$$a) \quad |a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \leq \kappa_a |\mathbf{u}_h|_1 |\mathbf{v}_h|_1, \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_0^h. \quad (2.16)$$

$$b) \quad |b(\mathbf{v}_h, q_h)| \leq \kappa_b |\mathbf{v}_h|_1 |q_h|_0, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_0^h, y \forall q_h \in S_0^h. \quad (2.17)$$

$$c) \quad c(\mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \leq \kappa_c |\mathbf{u}_h|_1 |\mathbf{v}_h|_1 |\mathbf{w}_h|, \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_0^h, \quad (2.18)$$

las cuales corresponden a las restricciones en estos espacios de dimensión finita de las propiedades en los espacios de dimensión infinita.

La cuarta condición hace uso del espacio discreto \mathbf{Z}^h de funciones libres de divergencia débil, asociado con los espacios \mathbf{V}_0^h y S_0^h con la forma bilineal $b(*, *)$. En general, $\mathbf{Z}^h \not\subset \mathbf{Z}$, aún cuando $\mathbf{V}_0^h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $S_0^h(\Omega) \subset L_0^2(\Omega)$, o sea, funciones discretas de funciones solenoidales no necesariamente son solenoidales. Esto es totalmente análogo al caso de diferencias finitas; una función que satisfaga una aproximación en diferencias a la condición de incompresibilidad no es, en general, solenoidal. Una medida del ángulo entre los espacios \mathbf{Z}^h y \mathbf{Z} , está dada por

$$\theta^* = \sup_{\mathbf{z}_h \in \mathbf{Z}^h, |\mathbf{z}_h|_1=1} \inf_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} |\mathbf{z} - \mathbf{z}_h|_1.$$

En general, $0 \leq \theta^* \leq 1$. Se observa que $\theta^* = 0$ siempre que $\mathbf{Z}^h \subset \mathbf{Z}$ y $\theta^* = 1$ siempre que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Luego entonces, si funciones discretas de funciones libres de divergencia fuesen efectivamente solenoidales, o sea, $\mathbf{Z}^h \subset \mathbf{Z}$, entonces tendríamos $\theta^* = 0$. Se sigue que $b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0$, esto es, la velocidad discreta $\mathbf{u}_h \in \mathbf{Z}^h$ es solenoidal. Sin embargo, como en general $\mathbf{Z}^h \not\subset \mathbf{Z}$, $\text{div } \mathbf{u}_h \neq 0$ aún en el sentido débil (véase [43]).

Entonces, la cuarta condición es la condición de coercitividad débil:

$$d) \quad \sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}^h} (\mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h) / |\mathbf{v}_h|_1 \geq \gamma_a |\mathbf{z}_h|_1, \forall \mathbf{z}_h \in \mathbf{Z}^h.$$

Esta condición se sigue fácilmente del hecho de que $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \gamma_a |\mathbf{v}|_1^2, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

La condición que causa problemas cuando uno escoge los espacios de elemento finito para los cálculos de las ecuaciones de Navier-Stokes tiene la siguiente formulación matemática (véase [43])

Dado cualquier $q_h \in S_0^h$,

$$e) \quad \sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}^h} (\mathbf{z}_h, q_h) / |\mathbf{v}_h|_1 \geq \gamma \|q_h\|_0,$$

donde la constante $\gamma > 0$ puede escogerse independiente de h y de la elección particular de $q_h \in S_0^h$.

Esta condición puede ser expresada de forma equivalente como:

Dado cualquier $q_h \in S_0^h$, existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_0^h$ distinto de $\mathbf{0}$, tal que

$$b(\mathbf{v}_h, q_h) \geq \gamma \|q_h\|_0 |\mathbf{v}_h|_1 .$$

A esta condición se le conoce como la condición de *Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi* (o *LBB*) o la *condición de inf-sup*, proveniente este último nombre de esta tercera formulación:

Existe $\gamma > 0$ independiente de h tal que

$$\inf_{q_h \in S_1^h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_0^h} (b(\mathbf{v}_h, q_h)) / (|\mathbf{v}_h|_1 \|q_h\|_0) \geq \gamma .$$

En términos no muy rigurosos, la condición de div-estabilidad asegura que a medida que $h \rightarrow 0$, las funciones solenoidales discretas tienden a funciones solenoidales. Estaremos entonces interesados en casos especiales de espacios de elemento finito V_0^h y S_0^h para los cuales $\mathbf{Z}^h \subset \mathbf{Z}$, tal que $b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0$ implique que $div \mathbf{u}_h = 0$ casi donde quiera. Para mayor detalle sobre la condición de div-estabilidad véase [43].

2.4. Descomposición de Operadores

Algunas de las ideas básicas de la descomposición de operadores fueron desarrolladas por Marchuk [49] en relación con problemas parabólicos, y puede considerarse como una generalización de los métodos de direcciones alternantes. El método de descomposición de operadores también se conoce como método de pasos fraccionarios, [50]. La idea básica:

el intervalo de discretización temporal se subdivide en un cierto número de subintervalos, reduciendo el problema a una sucesión de subproblemas más simples en cada uno de estos subintervalos, habiendo efectuado previamente una discretización adecuada en la derivada temporal.

Sea H un espacio de Hilbert y A un operador de H en H . Consideremos ahora un problema de valor inicial de la forma

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad (2.20)$$

donde \mathbf{f} es un término fuente y \mathbf{u}_0 es el valor inicial.

A continuación ilustramos la idea básica de la descomposición de operadores con un caso sencillo (conocido como descomposición de Peaceman-Rachford).

Expresamos A en la forma

$$A = A_1 + A_2, \quad (2.21)$$

donde cada uno de los operadores A_1 y A_2 son más simples que A y preservan algunas de sus propiedades. Para ser específicos, subdividimos el intervalo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$, en dos de igual longitud, donde $\Delta t > 0$ es el paso de discretización temporal. En el primer subintervalo se toma uno de los operadores, A_1 o A_2 implícitamente y el otro explícitamente; en el siguiente subintervalo se intercambian los papeles. Quedan entonces subproblemas de la forma:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n}{\Delta t/2} + A_1(\mathbf{u}^{n+1/2}) + A_2(\mathbf{u}^n) = \mathbf{f}^{n+1/2}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + A_1(\mathbf{u}^{n+1/2}) + A_2(\mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{f}^{n+1}, \quad (2.23)$$

donde, como se observa, $\mathbf{u}_t(n+k\Delta t)$ lo estamos aproximando con un esquema de primer orden de tipo Euler.

Consideremos el caso particular en el que $H = R^N$, y A es una matriz simétrica y positiva definida de $N \times N$, y descomponemos a A en la forma

$$A_1 = \alpha A, A_2 = \beta A,$$

con $\alpha + \beta = 1$. Entonces, los subproblemas (2.22) y (2.23) conducen a resolver dos sistemas de ecuaciones lineales, con la misma matriz si $\alpha = 1/2 = \beta$.

Las propiedades sobre estabilidad y exactitud de este esquema se pueden encontrar en [14], donde también se justifica que esta descomposición no es adecuada para problemas rígidos.

La descomposición de operadores aplicada a la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes no estacionarias, conduce a la solución de problemas más simples al desacoplar las dificultades asociadas a la no linealidad y a la condición de incompresibilidad. Hasta donde sabemos, esta idea fue usada por primera vez en el método θ de R. Glowinski [13], [14], [15], el cual usa una discretización de primer orden en el tiempo de la forma (2.21) y cada subintervalo $[n + \Delta t, (n + 1)\Delta t]$ se subdivide en tres subintervalos de longitud diferente, determinada por un parámetro θ .

Como se observará posteriormente, el método de descomposición de operadores que es la base de este trabajo, sigue muy de cerca los pasos del método θ , sin embargo presenta varias diferencias, de tal manera que nos permite resolver las ecuaciones de Navier-Stokes y el modelo de Boussinesq con números de Reynolds y de Rayleigh grandes, usando mallas gruesas y conservando exactitud.

III. SOLUCION DE UNA ECUACION DE TRANSPORTE CON CONVECCION DOMINANTE MEDIANTE ESQUEMAS DE UPWIND

En este capítulo se hace un estudio comparativo de diferentes esquemas numéricos para resolver problemas de convección-difusión no estacionarios. El objetivo de este estudio es seleccionar el mejor de estos esquemas para aplicarlo en la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes no estacionarias para números de Reynolds grandes.

Existen diferentes modelos para fenómenos de difusión en los cuales está presente un fluido en movimiento. Este tipo de fenómenos se describen matemáticamente mediante ecuaciones de convección-difusión, las cuales son ecuaciones parabólicas que involucran derivadas espaciales de primer orden (término convectivo), y en forma genérica están dadas por

$$\begin{cases} \partial u / \partial t - \epsilon \Delta u + \mathbf{w} \cdot \nabla u = f, \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u|_{\Sigma} = 0, \text{ con } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\Omega \subseteq R^N (N = 2, 3)$, con frontera Γ , y $T > 0$; además \mathbf{w} es la velocidad del fluido y satisface $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$.

Las ecuaciones del tipo (3.1) modelan fenómenos físicos tales como transporte de calor, de contaminantes, etc. Sabemos que esta clase de ecuaciones puede ser resuelta sin dificultad alguna cuando la magnitud de \mathbf{w} es pequeña comparada con la de ϵ , pero cuando el término convectivo domina, las ecuaciones tienden a ser hiperbólicas lo cual no resulta fácil de manejar numéricamente a menos que se use una malla muy fina o que se haga uso de esquemas diferentes a los tradicionales.

Una manera de medir la relación entre \mathbf{w} , ϵ y h (tamaño de la malla espacial), es el número de Péclet, que se define como

$$\frac{\mathbf{w}h}{\epsilon} \text{ medida de } \Omega$$

Se sabe que la solución de (3.1) satisface el principio del máximo. Si el número de Péclét es “pequeño”, la solución numérica también lo satisface, sin ser muy exigentes con el esquema numérico empleado. Por otro lado, cuando este número es “grande” (mayor que dos), un esquema numérico estándar por lo regular no preserva este principio, y la correspondiente solución numérica presentará oscilaciones fuertes sin significado físico.

Para resolver numéricamente el problema no estacionario (3.1), aplicamos en este trabajo una combinación de diferencias finitas para la discretización en el tiempo y de elemento finito para la discretización en el espacio. Haremos énfasis en una familia de esquemas de elemento finito que preservan el análogo discreto del principio del máximo. Se pueden aplicar los siguientes tipos de esquemas para evitar las oscilaciones no físicas, independientemente de los valores que tomen \mathbf{w} , h , y ϵ .

1. Esquemas de upwind [28], [31], [51].
2. Esquemas de viscosidad artificial [28], [51].
3. El método de las características [52].

Dentro de los esquemas que se discutirán brevemente en este trabajo están los de Tabata [28], [51], Bristeau-Glowinski [28], Kanayama [31], el de upwind parcial de Ikeda [31], y un algoritmo que mezcla el método de las características [52] y el método del elemento finito.

Luego, se describe un algoritmo para resolver el sistema de ecuaciones que resulta de la discretización del problema [53], y en la última parte de este capítulo daremos algunos resultados numéricos obtenidos con los diferentes esquemas anteriormente mencionados.

3.1. El problema discreto

3.1.1. Discretización en el espacio

Considérese el problema (3.1) y su problema variacional asociado dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dado } \epsilon > 0, \text{ encontrar } u : [0, T] \rightarrow u(t) \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ (du/dt, \Phi) + \epsilon(\nabla u, \nabla \Phi) + (\mathbf{w} \cdot \nabla u, \Phi) = (f, \Phi), \forall \Phi \in H_0^1(\Omega), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Sea τ_h una triangulación de elemento finito de Ω . Entonces un problema discreto asociado a (3.2) está dado por

$$\begin{cases} \text{dado } \epsilon > 0, \text{ encontrar } u_h : [0, T] \rightarrow u_h(t) \in H_0^{1h}(\Omega) \text{ tal que} \\ (du_h/dt, \Phi_h) + \epsilon(\nabla u_h, \nabla \Phi_h) + (\mathbf{w} \cdot \nabla u_h, \Phi_h) = \\ (f, \Phi_h), \forall \Phi_h \in H_{0h}^1(\Omega), \\ u_h(\mathbf{x}, 0) = u_{0h}, \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

Ahora, tomando $\Phi_h \in \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B} = \{\Phi_h^1, \Phi_h^2, \dots, \Phi_h^{N_0}\}$ es una base de $H_0^{1h}(\Omega)$, y N_0 la dimensión de tal espacio, se tiene que este problema es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por

$$\begin{cases} M dU/dt + (\epsilon A + B) U = F, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde A es la matriz asociada al laplaciano, B es la matriz asociada al término convectivo, $U \in R^{N_0}$, y M es la matriz de masa.

3.1.2 Discretización en el tiempo

En esta sección discutiremos la discretización en el tiempo; para ésto, usaremos el esquema de Gear modificado que consiste en:

Sea $\Delta t > 0$, el tamaño de paso en el tiempo, entonces

$$\frac{dU}{dt} \approx \frac{\frac{3}{2}U^{n+1} - 2U^n + \frac{1}{2}U^{n-1}}{\Delta t},$$

en donde U^k es una aproximación para $U(k\Delta t)$.

Entonces, usando esta aproximación en (3.4) obtenemos

$$\frac{3}{2\Delta t} M U^{n+1} + (\epsilon A + B) U^{n+1} = G^{n+1},$$

donde

$$G^{n+1} = f((n+1)\Delta t) + \frac{2}{\Delta t}U^n - \frac{1}{2\Delta t}U^{n-1}, n \geq 1$$

Luego, tenemos que resolver, en el tiempo $(n+1)\Delta t$, el sistema algebraico

$$AU = G, \tag{3.5}$$

donde

$$A = \frac{3}{2\Delta t}M + \epsilon A + B$$

3.2. Esquemas de Upwind

La idea básica en un esquema de upwind consiste en aproximar el término convectivo usando la información de atrás con respecto a la dirección del flujo dada por \mathbf{w} , para ello se busca modificar la contribución de la matriz B . Los esquemas clásicos efectúan la cuadratura sobre dominios clásicos (sobre la triangulación de elemento finito) y no tratan el término convectivo de manera especial cuando éste empieza a dominar sobre la componente de difusión.

En el caso de los esquemas de upwind que vamos a discutir, es necesario introducir los conceptos de *dominio circuncéntrico* y *baricéntrico*, que son los dominios que usarán estos esquemas para efectuar la cuadratura numérica.

Definición 1. Sea τ_h una triangulación de Ω , entonces a cada vértice P_i de cada triángulo T de la triangulación τ_h se le asocia

$$\hat{\Omega}_i^T = \{P = (x, y) \in T \mid \lambda_i(P) \geq \lambda_j(P), \text{ para todos los vértices } P_j \in T, \text{ en donde } \lambda_j \text{ es la coordenada baricéntrica de } P \text{ con respecto a } P_j\}.$$

El dominio baricéntrico $\hat{\Omega}_i$ asociado a cada vértice P_i se define como la unión de los $\hat{\Omega}_i^T$ que contienen al vértice P_i .

Definición 2. A cada vértice P_i de cada triángulo T se le asocia la subdivisión circuncéntrica $\tilde{\Omega}_i^T$ dada por

$$\tilde{\Omega}_i^T = \{P = (x, y) \in T \mid \overline{P_i P} \leq \overline{P_j P} \text{ para todos los } P_j \in T\}.$$

El dominio circuncéntrico $\tilde{\Omega}_i$ asociado con cada vértice P_i se define como la unión de los $\tilde{\Omega}_i^T$ que contienen al vértice P_i .

Se define también

$$\hat{\Gamma}_{ij} = \hat{\Gamma}_i \cap \hat{\Gamma}_j \text{ y } \tilde{\Gamma}_{ij} = \tilde{\Gamma}_i \cap \tilde{\Gamma}_j,$$

en donde $\hat{\Gamma}_i$ y $\hat{\Gamma}_j$ son las fronteras de $\hat{\Omega}_i$ y $\hat{\Omega}_j$ respectivamente, y $\tilde{\Gamma}_i$ y $\tilde{\Gamma}_j$ son las fronteras de $\tilde{\Omega}_i$ y $\tilde{\Omega}_j$, respectivamente.

Y por último se define

$$\Lambda_i^T = \{j \neq i \mid P_j \in T, T \in \tau_h\},$$

y

$$\Lambda_i = \{j \in \Lambda_i^T\}.$$

Nótese que

$$\text{medida de } \hat{\Omega}_i^T = \frac{A(T)}{3},$$

donde $A(T)$ es el área del triángulo T .

A continuación se muestran las subdivisiones baricéntrica (izquierda) y circuncéntrica (derecha), y en la figura 2 se muestran los dominios baricéntrico (izquierdo) y circuncéntrico (derecho) que resultan de las subdivisiones anteriores.

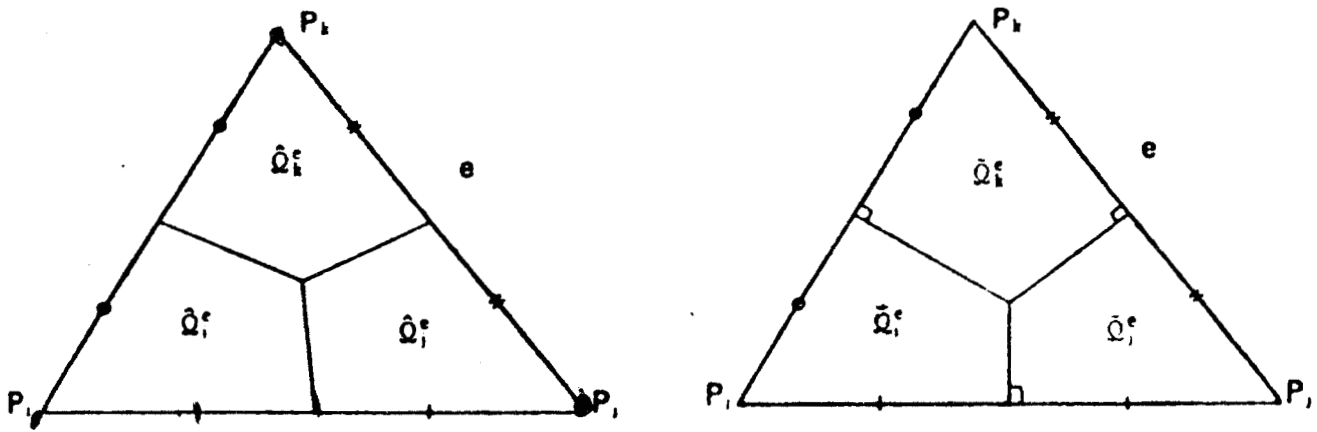


Fig. 1 Subdivisiones baricéntrica y circuncéntrica respectivamente.

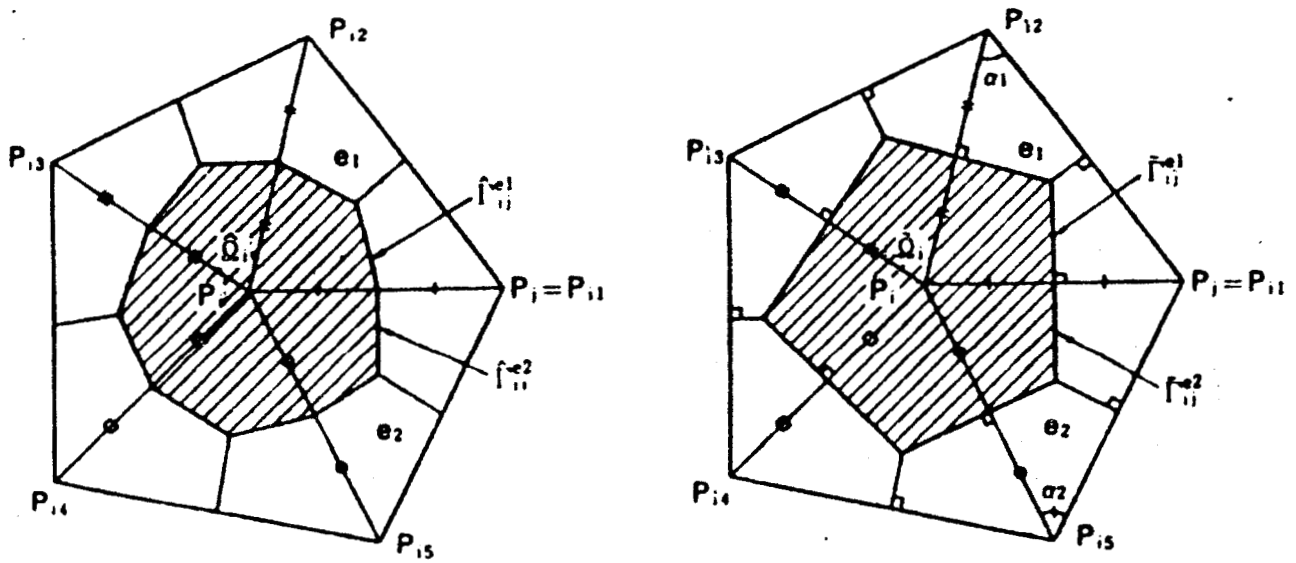


Fig. 2 Dominios baricéntrico y circuncéntrico respectivamente.

3.2.1. Esquemas de upwind de Tabata y de Bristeau-Glowinski

El esquema de Tabata es aplicado a los dominios baricéntricos de la triangulación y es de primer orden. Se trata de asignar a cada vértice P_i un triángulo J_{i1} , el cual se escoge de los triángulos $T \in \tau_h$ que contengan a P_i como vértice, aquel para el cual se cumpla que S_i intersecta al lado opuesto a P_i , donde S_i es la recta que comienza en P_i y en la misma dirección de $-\mathbf{w}$ (véase figura 3). Una vez localizado el triángulo J_{i1} , el elemento B_{ij} de la matriz B se define como

$$B_{ij} = \text{área de } \hat{\Omega}_i \mathbf{w}(P_i) \nabla \Phi_{jh} |_{J_{i1}} .$$

El esquema de Bristeau-Glowinski puede ser visto como una extensión del esquema anterior y es de segundo orden. Sea P_i un nodo de la triangulación τ_h , y S_i el segmento de recta que empieza en P_i y en la dirección de $-\mathbf{w}$. Se buscan dos puntos P_{i1} y P_{i2} para aproximar $\frac{\partial u}{\partial w}$ (o sea el término advectivo $\mathbf{w} \cdot \nabla u$) (véase figura 4).

Puesto que u_h es continua en Ω , con los valores en P_i , P_{i1} y P_{i2} se definen

$$u_{i0} = u_h(P_i), \quad u_{i1} = u_h(P_{i1}), \quad u_{i2} = u_h(P_{i2}).$$

Ahora se define

$$\frac{\partial u}{\partial w}(P_i) \cong \frac{h_{i1} + h_{i2}}{h_{i1} h_{i2}} u_{i0} - \frac{h_{i2}}{h_{i1}(h_{i2} - h_{i1})} u_{i1} + \frac{h_{i1}}{h_{i2}(h_{i2} - h_{i1})} u_{i2},$$

en donde $h_{i1} = |P_i P_{i1}|$ y $h_{i2} = |P_i P_{i2}|$. En este caso, como puede observarse, estamos aproximando $\frac{\partial u}{\partial w}(P_i)$ como la derivada de un polinomio de segundo orden, definido en el segmento de recta S_i y que coincide con u_h en P_i , P_{i1} y P_{i2} . Para mayor detalle sobre la elección de estos puntos véase [28].

3.2.2. Esquema de upwind de Kanayama

Este esquema es de primer orden y se basa en la forma integral del término convectivo. Dicha forma integral está definida sobre el dominio circuncéntrico.

Dado un punto P_{ij} en $\tilde{\Gamma}_{ij}$, se define

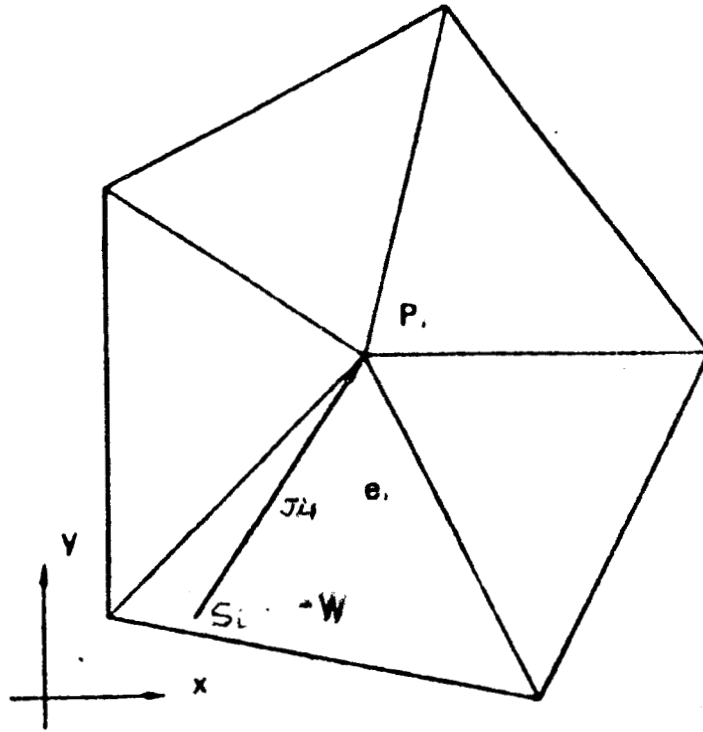


Fig. 3 Triángulo upwind J_{i1} .

$$\tilde{w}_{ij} = \mathbf{w}(P_{ij}) \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \tilde{\mathbf{n}}_i d\Gamma = \mathbf{w}(P_{ij}) (\text{long } \tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{\vec{P}_i P_j}{P_i P_j},$$

donde $\tilde{\mathbf{n}}_i$ es la normal unitaria exterior a $\tilde{\Gamma}_i$.

Entonces, el término advectivo se aproxima como

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} \Phi_{ih} \sum_{j \in \Lambda_i} \tilde{w}_{ij} \{H(\tilde{w}_{ij})u_i + (1 - H(\tilde{w}_{ij}))u_j - u_i\},$$

donde H es la función de Heaviside definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, para este esquema, las matrices quedan definidas por:
la matriz M queda definida, al igual que en los esquemas anteriores, como

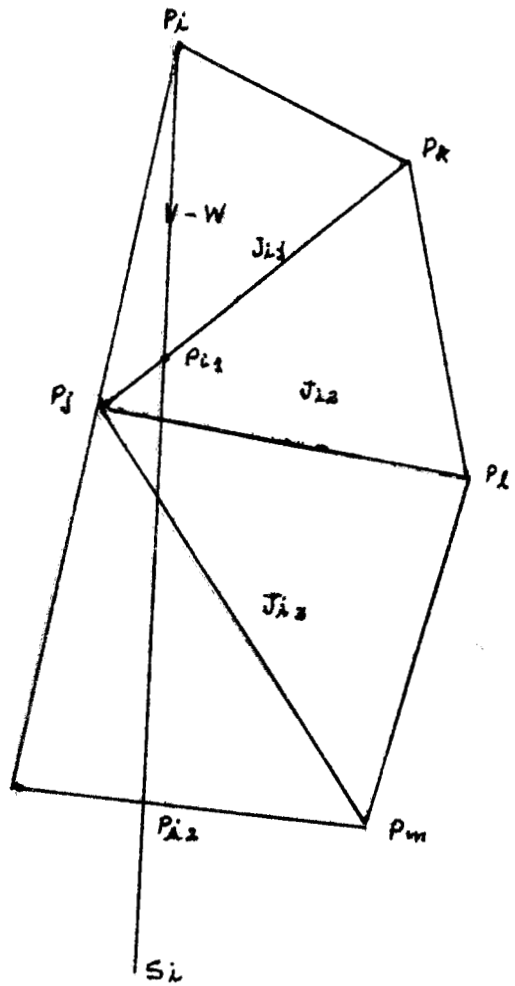


Fig. 4 Determinación de los puntos P_{11} , P_{12} (Bristeau-Glowinski).

$$M_{ij} = \begin{cases} \text{área de } \tilde{\Omega}_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

y la matriz B queda como

$$B_{ij} = \begin{cases} 0.5 \sum_{k \in \Lambda_i} \tilde{w}_{ik} (H(\tilde{w}_{ik}) - 1) & \text{si } i = j, \\ \tilde{w}_{ij} (1 - H(\tilde{w}_{ij})) & \text{si } j \in \Lambda_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3.2.3. Esquema de upwind parcial de Ikeda

Los esquemas de *upwind* involucran una viscosidad adicional, con la ayuda de la cual, es posible preservar el principio del máximo bajo ciertas condiciones adecuadas de estabilidad y con respecto a una triangulación de elemento finito de tipo estrictamente agudo, sin ninguna restricción sobre el tamaño espacial de las mallas. Esta viscosidad adicional permite además, la obtención de soluciones razonables. Debe recalarse que en la mayoría de los esquemas, la aproximación de tipo upwind se aplica al término convectivo completo, y en consecuencia esto puede implicar el agregar más viscosidad artificial de la necesaria, lo cual puede causar que la solución se vea afectada por dicha viscosidad.

El esquema de upwind parcial de Ikeda reduce la cantidad de viscosidad artificial de manera que la solución pueda ser reproducida de la forma más exacta posible. La idea es dividir el término convectivo $\mathbf{w} \cdot \nabla u$ en dos partes. De la formulación variacional del problema discreto, consideramos

$$\beta(\mathbf{w} \cdot \nabla u_h, \Phi_h) + (1 - \beta)(\mathbf{w} \cdot \nabla u_h, \Phi_h),$$

con $0 \leq \beta \leq 1$, y aproximamos el término convectivo aplicando upwind (de Kanayama), pero sólo en la primera parte (por eso el nombre de upwind parcial), mientras que para la aproximación de la segunda parte se hace uso de viscosidad artificial (viscosidad artificial de Ikeda, véase [31] pp. 66-67).

El tipo de aproximación para esta primera parte puede ser como en el caso del esquema de upwind de Kanayama, y el valor de β que se asigna a cada lado $P_i P_j$ de cada triángulo, se define como el valor mínimo en el rango

en el cual el principio del máximo se preserva. Este rango depende del vector \mathbf{w} , la constante difusiva y el tamaño de la malla espacial.

Sea

$$(\text{long } \Gamma_{ij}) = -(\nabla\Phi_{ih}, \nabla\Phi_{jh})\overline{P_iP_j}, \text{ para } j \in \Lambda_i,$$

donde Γ_{ij} es generalmente un segmento de línea que biseca perpendicularmente al lado P_iP_j del triángulo.

Entonces definimos

$$\beta_{ij} = \left(\max(0, 1 - 2\epsilon(\text{long}\Gamma_{ij}) / (|\tilde{\mathbf{w}}_{ij}| \overline{P_iP_j})) \right). \quad (3.6)$$

donde ϵ representa el coeficiente del término difusivo y el valor de β_{ij} representa la magnitud relativa de tipo aproximación de tipo upwind para el término convectivo, la cual disminuye con $|\mathbf{w}|$, h y ϵ . En este caso, \tilde{w}_{ij} es una aproximación a la integral

$$\int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{w} \tilde{\mathbf{n}}_i d\Gamma,$$

donde $\tilde{\mathbf{n}}_i$ es la normal unitaria exterior a $\tilde{\Gamma}_i$.

Entonces las componentes de la matriz B asociada al término advectivo están dadas por:

$$B_{ij} = \begin{cases} -0.5 \sum_{j \in \Lambda_i} \tilde{b}_{ik}(\beta_{ik}(1 - H(\tilde{w}_{ik})) + 0.5(1 - \beta_{ik})) & \text{si } j = i \\ \tilde{b}_{ij}(\beta_{ij}(1 - H(\tilde{w}_{ij})) + 0.5(1 - \beta_{ij})) & \text{si } j \in \Lambda_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el valor de β_{ij} es óptimo en el sentido siguiente:

Si el valor de β_{ij} es estrictamente menor que el dado en (3.6), y \tilde{w}_{ij} no es igual a cero, entonces, $A_{ij} + B_{ij}$ y $A_{ji} + B_{ji}$ ($i \neq j$) se convierten en estrictamente positivas, lo cual resulta una violación al siguiente

LEMA 1. Sean las componentes (i,i) de la matriz de masa M positivas y las otras componentes iguales a cero, y $\theta \in [0, 1]$. Si

- i) $\sum_{j=1}^n (A_{ij} + B_{ij}) = 0$ para $i = 1, \dots, m$,
- ii) $A_{ij} + B_{ij} \leq 0$ para $i = 1, \dots, m$ y $j \neq i$,
- iii) $M_{ii} - (1 - \theta)\Delta t(A_{ij} + B_{ij}) \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$,

entonces la solución al problema (3.1) satisface el principio discreto del máximo. Para la demostración, véase [31], pp. 47-48. También puede verse que con estas condiciones, se satisface el principio discreto de conservación de masa (véase [31], pp. 71-72).

El esquema anteriormente descrito, para este caso (o en el caso de una triangulación del tipo Friedrichs-Keller o sea del tipo diferencias finitas), es un esquema de segundo orden.

3.3. El Método de las Características

Este método toma en cuenta el hecho de que

$$\partial u / \partial t + \mathbf{w} \cdot \nabla u$$

puede ser escrito como $\frac{Du}{Dt}$, la derivada total de u en la dirección del flujo \mathbf{w} .

Para calcular la solución de (3.1) usando este método, se reescribe el problema en la forma

$$\begin{cases} Du/Dt - \epsilon \Delta u = f \text{ en } \Omega \times (0, T) & u|_{\Sigma=0}, \text{ con } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

La ecuación anterior se discretiza usando un esquema de Euler hacia atrás, obteniendo

$$\begin{cases} (u^{n+1}(\mathbf{x}) - u^n(\mathbf{X}^n(\mathbf{x}))/\Delta t - \epsilon \Delta u^{n+1}(\mathbf{x}) = f \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u^{n+1}|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

donde para cualquier $\mathbf{x} \in \Omega$, la curva característica

$$\mathbf{X}^n : [t^n, t^{n+1}] \longrightarrow R^d,$$

es la solución en $t^n = n\Delta t$ al problema de Cauchy

$$\begin{cases} d\mathbf{X}^n/dt = \mathbf{w}(\mathbf{x}; t) \\ \mathbf{X}^n((n+1)\Delta t) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Es decir, se tienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_i^n/dt = w_i(\mathbf{x}; t), \\ X_i^n((n+1)\Delta t) = x_i, i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Si se discretiza la ecuación en espacio mediante el método de elemento finito, entonces se puede mostrar que se tienen las siguientes ventajas:

- Estabilidad incondicional para todo ϵ y Δt .
- Estimaciones de error del orden de

$$h + \Delta t + h^2/\Delta t,$$

con elementos finitos de grado uno (véase [52]).

- Los sistemas lineales que se tienen que resolver son sistemas simétricos.

El esquema anterior es de orden uno; generalizando, si se desea tener un esquema de orden k , se tiene

$$(\alpha_0 u^{n+1}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k \alpha_j u^{n-j+1}(\mathbf{X}^n(t^{n-j+1}))) / \Delta t - \epsilon \Delta u^{n+1}(\mathbf{x}) = f,$$

con

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \sum_{j=0}^k (-j)\alpha_j = 1 \text{ y } \sum_{j=0}^k (-j)^i \alpha_j = 0, 2 \leq i \leq k,$$

donde para cualquier $\mathbf{x} \in \Omega$, la curva característica está definida de $[t^{n-k+1}, t^{n+1}]$ en R^d y es solución de (3.9). Por ejemplo, para $k = 2$, $\alpha_0 = 3/2$, $\alpha_1 = -2$ y $\alpha_2 = 1/2$.

En la práctica, los pies de las características $\mathbf{X}^n(t^{n-j+1})$, no se calculan exactamente. Por ejemplo, para $k = 2$, se define para $1 \leq j \leq k$, una aproximación $(\bar{x}_{j1}, \bar{x}_{j2})$ para $\mathbf{X}^n(t^{n-j+1})$, mediante las expresiones

$$\bar{x}_{j1} = x_1 - j\Delta t w_1^*(x), \bar{x}_{j2} = x_2 - j\Delta t w_2^*(x),$$

donde

$$w_i^* = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j w_i^{n-j}, \quad i = 1, 2$$

y los coeficientes β_j se encuentran de manera que w_i^* sea una aproximación de orden k de w_i^{n+1} , o sea,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j = 1, \text{ y } \sum_{j=0}^{k-1} (1+j)^i \beta_j = 0, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

Por ejemplo. para $k = 2$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = -1$.

Ahora, una aproximación para \tilde{u}_j^{n+j-1} , \tilde{u}_j^{n-j+1} está dada por:

$$\tilde{u}^{n-j+1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^{n+j-1}(\bar{\mathbf{x}}_j) & \text{si } \bar{\mathbf{x}}_j \in \bar{\Omega} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el esquema queda como:

$$(u^{n+1}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde{u}^{n-j+1}(\mathbf{x})) / \Delta t - \epsilon \Delta u^{n+1}(\mathbf{x}) = f, \text{ en } \Omega \times (0, T).$$

Para $k = 2$, que fue el esquema utilizado en este trabajo, se tiene que el error es del orden de

$$h^2 + \Delta t^2 + h^2 / \Delta t.$$

3.4. Solución del problema discretizado

La solución del problema (3.1), después de discretizar en espacio y tiempo, involucra el tener que resolver en cada nivel de tiempo sistemas lineales de la forma (3.5), esto es, sistemas dados por

$$(A + B)U = G, \quad (3.11)$$

con $A = \alpha M + \epsilon A$, siendo A la matriz asociada al laplaciano, $\alpha = \frac{3}{2\Delta t}$, y M =matriz de masa (ver sección 3.1.2). Dicho sistema puede resolverse usando el método de Gauss-Seidel y también mediante un metodo iterativo de punto fijo (véase [53]) que a continuación se describe.

Denotando

$$R(U) = (A + B)U - G,$$

tomando $\mathcal{A} = A + B$ el problema (3.11) es equivalente a

$$R(U) = 0. \quad (3.12)$$

Resolvemos (3.12) mediante el método iterativo siguiente:

Dado $U^0 = U^n$ resolver hasta convergencia

$$U^{m+1} = U^m - \rho A^{-1} R(U^m), \quad \rho > 0, \quad (3.13)$$

y tomamos $U^{n+1} \equiv U = U^{m+1}$.

Por lo tanto, en cada iteración tenemos que resolver un sistema de ecuaciones de la forma

$$AU = F$$

$$AU^{m+1} = AU^m - \rho R(U^m),$$

con matriz A simétrica y definida positiva, ya que $A = \alpha M + \epsilon A$. Observamos que con este método iterativo evitamos la parte no simétrica de A dada por B .

3.5. Resultados numéricos

En el caso específico de este trabajo se resolvió el problema (3.1) con $f = 1$, $\mathbf{w} = (1, 0)$, y Ω la región del canal, descrita en la figura 5), el cual es un problema prueba muy usado en la bibliografía. Se usó una triangulación τ_h del tipo de diferencias finitas (véase la figura 6).

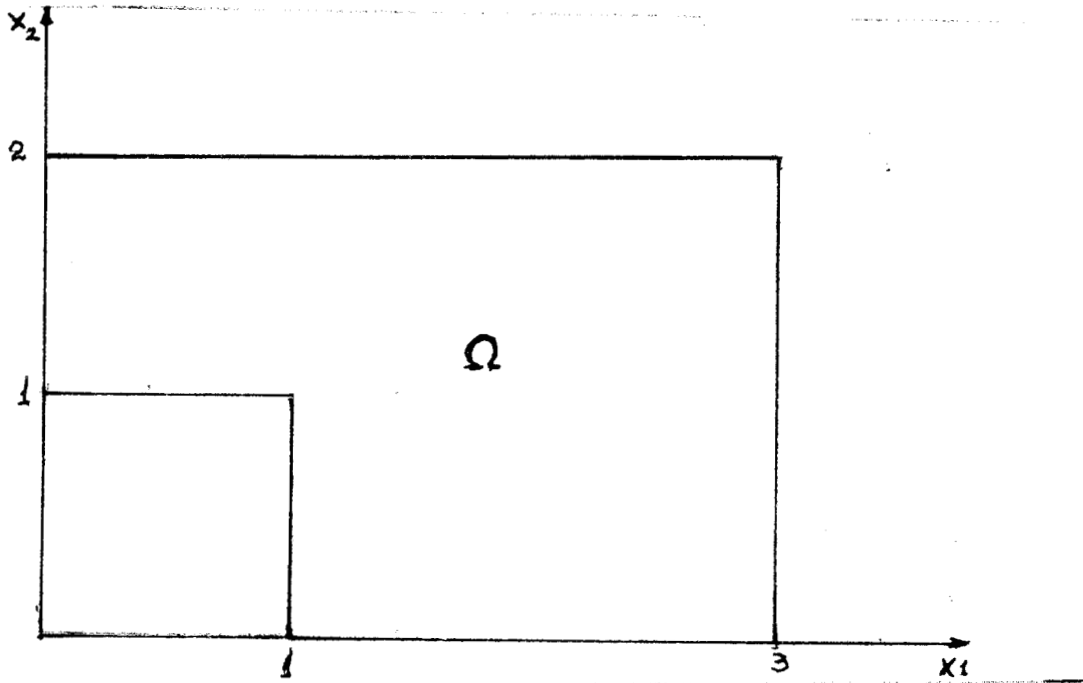


Fig. 5. Región del canal.

Para este problema no se conoce la solución exacta. Se sabe que la solución límite, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, para el problema estacionario está dada por

$$u = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \\ x - 1 & \text{para } 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

(ver figura 7). La dificultad numérica consiste en que esta solución límite presenta una discontinuidad interna a lo largo de la línea $y = 1$ y fenómeno de

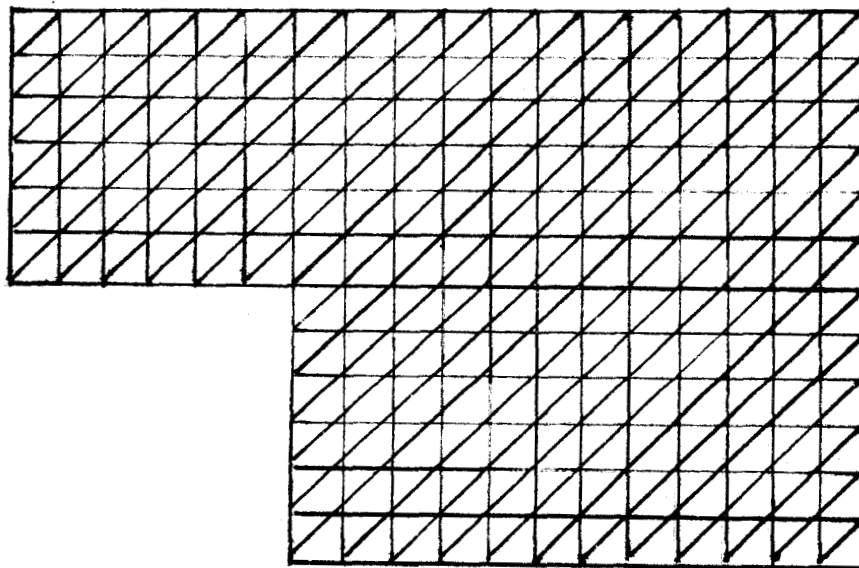


Fig. 6. Triangulación del tipo diferencias finitas.

capa límite a lo largo de la línea $x = 3$. Entonces, para probar la efectividad de los esquemas de upwind discutidos anteriormente hacemos *tender* ϵ a 0 y t a ∞ . Con esto estamos probando el efecto de convección dominante y el buen comportamiento para tiempos grandes de la discretización temporal que estamos usando.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para diferentes valores de h y de ϵ . Se compara la solución aproximada obtenida para el problema estacionario con el correspondiente valor de ϵ y la solución exacta para el problema estacionario pero con $\epsilon = 0$ (ya conocida y mostrada en la figura 7). Las tablas proporcionan entonces la norma dos y la norma infinito de la diferencia entre el valor de la solución aproximada obtenida y la solución del problema estacionario con $\epsilon = 0$. Como puede notarse a medida que se hace tender ϵ a cero, el error se hace más pequeño, lo cual quiere decir que efectivamente, como era de esperarse, el esquema está funcionando perfectamente para valores de ϵ de 10^{-7} (e incluso para $\epsilon = 0$) y con valores de h bastante grandes ($h = 0.25$). Se muestran después también las gráficas de la solución aproximada para $h = 0.25$ con $\epsilon = 10^{-2}$ y $\epsilon = 10^{-7}$, figuras 8

y 9 respectivamente.

EPS	TABATA-KANAYAMA-CARACT.	IKEDA	BRISTEAU
.001	.02960	.023739	.025515
.000001	.0003	.000240	.000258
.0000001	.000003	.000002	.000003

TABLA 1. H=0.5 (Norma infinito)

EPS	TABATA-KANAYAMA-CARACT.	IKEDA	BRISTEAU
.001	.0381282	.0332322	.0332602
.000001	.0003851	.0033582	.0003354
.0000001	.0000038	.0000033	.0000033

TABLA 2. H=0.5 (Norma L^2)

EPS	TABATA-KANAYAMA-CARACT.	IKEDA	BRISTEAU
.001	.075448	.063801	.067262
.000001	.000780	.000660	.00692
.0000001	.000008	.000007	.000007

TABLA 3. H=0.25 (Norma infinito)

EPS	TABATA-KANAYAMA-CARACT.	IKEDA	BRISTEAU
.001	.1520764	.1416091	.1391192
.000001	.0015693	.0014644	.0014313
.0000156	.0000146	.000007	.0000143

TABLA 4. H=0.25 (Norma L^2)

EPS	TABATA-KANAYAMA-CARACT.	IKEDA	BRISTEAU
.001	.0773848	.738838	.755934
.000001	.011699	.011221	.011316
.0000001	.000118	.000113	.000114

TABLA 5. H=0.0625 (Norma infinito)

EPS	TABATA-KANAYAMA-CARACT.	IKEDA	BRISTEAU
.001	3.2267888	3.2016309	3.1815783
.000001	.0474668	.0472355	.0464077
.0000001	.0004770	.0004747	.0004663

TABLA 6. $H=0.0625$ (Norma L^2)

3.6. Algunas conclusiones sobre los esquemas

Los esquemas de upwind utilizados en este trabajo han sido bastante precisos y robustos, como puede observarse de los resultados obtenidos. De hecho el caso $w = (1, 0)$ es bastante severo, puesto que en el caso límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, como ya se mencionó anteriormente, la solución estacionaria presenta una discontinuidad interna y efecto de capa límite en parte de la frontera.

Cabe hacer notar que en este trabajo se está usando el esquema de tipo Gear para la discretización en el tiempo, mientras que en la literatura, de lo que hemos visto reportado hasta el momento, se han usado esquemas tipo θ (Euler hacia atrás, hacia adelante, Crank-Nicholson). Usamos el esquema de tipo Gear para aprovechar la ventaja de que se comporta bien para tiempos grandes cuando se combina implícitamente con el operador laplaciano (ver [28]).

El esquema iterativo tampoco había sido usado para resolver este tipo de problemas. Con dicho esquema obtenemos un sistema con matriz simétrica y positiva definida. Además, este esquema iterativo se puede aplicar también a problemas más complicados como Navier-Stokes y Boussinesq como se ve en Cap. IV y V. Claramente, se puede aplicar también Gauss-Seidel al sistema con la matriz completa, es decir, considerando también la matriz asociada a la parte advectiva B , con lo cual se resuelve un sistema con una matriz que no es simétrica, pero diagonalmente dominante estrictamente, por el efecto upwind.

Además, tomando en cuenta la idea del método de las características, donde puede interpretarse que el upwind se está haciendo indirectamente en tiempos anteriores, se probó el esquema iterativo tomando $(w \cdot \nabla u_h^n, v_h)$, en

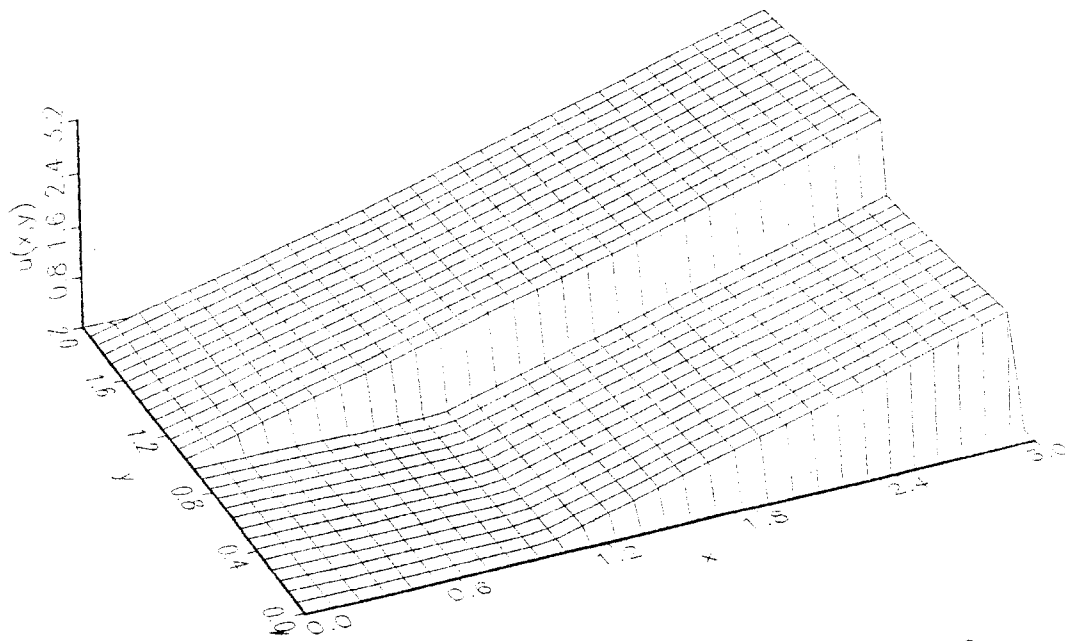


Fig. 7 Gráfica de la función definida en (3.14).

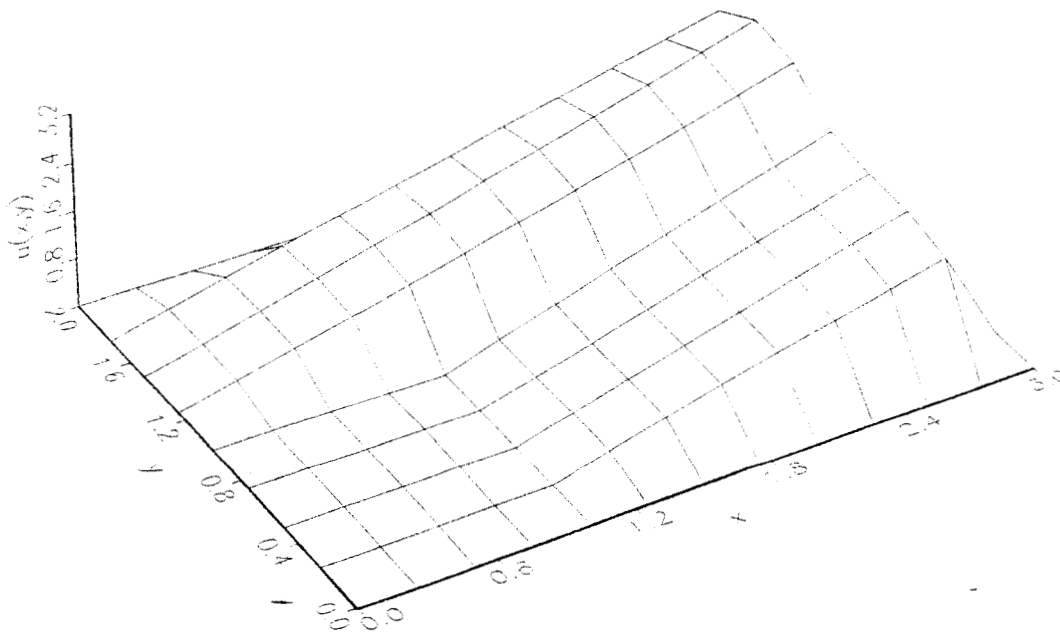


Fig. 8 Solución aproximada con $\epsilon = 0.01$ y $h = 0.25$.

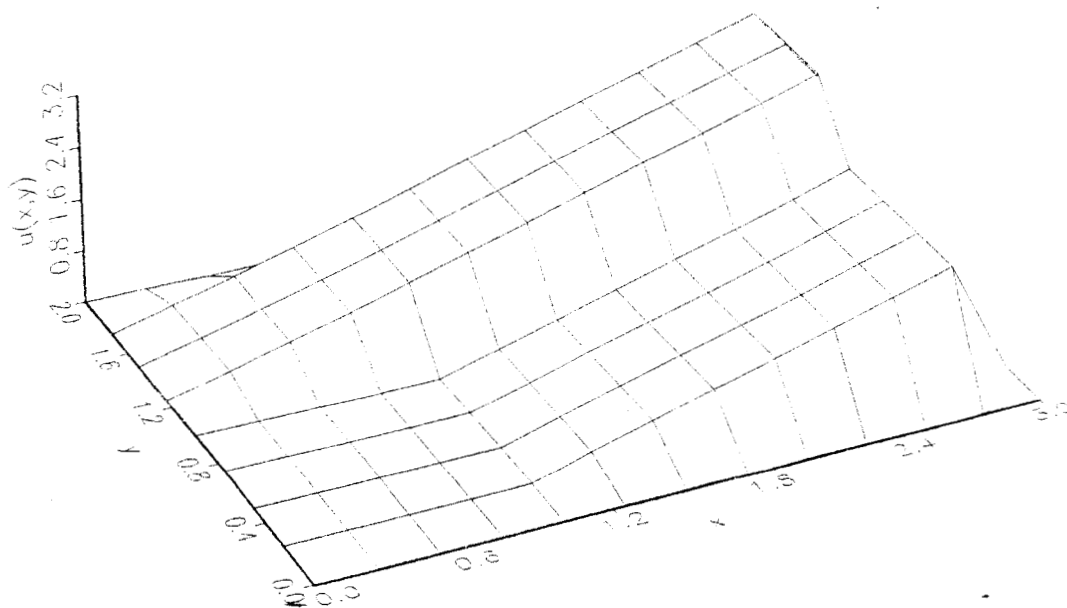


Fig. 9 Solución aproximada con $\epsilon = 1.0E - 7$ y $h = 0.25$.

lugar de $(w \cdot \nabla u_h^{n+1}, v_h)$ pero aplicando un esquema de upwind (o sea, aplicando upwind en el tiempo anterior). En este caso se obtuvieron exactamente los mismos resultados que los mostrados en las tablas, aunque la convergencia fue un poco más lenta. Esta versión puede ser útil para problemas donde w es variable.

4. UN ESQUEMA DE DESCOMPOSICION DE OPERADORES PARA LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

En este Capítulo se discute un método de descomposición de operadores que usa una discretización de segundo orden para aproximar las derivadas con respecto al tiempo para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes no estacionarias que gobiernan el flujo de fluidos viscosos e incompresibles. Nuestra meta es resolver este tipo de ecuaciones manejando números de Reynolds grandes usando mallas gruesas, para lo cual se hace uso del esquema de upwind de Ikeda [31], el cual se ha discutido en el Cap. III. Se reportan resultados numéricos hasta $Re = 40000$ usando mallas gruesas y regulares, lo cual muestra la robustez y estabilidad del esquema.

El esquema a describir consiste de tres pasos en cada intervalo de tiempo. Se obtienen entonces subproblemas de tipo Stokes para el primer y tercer subintervalos y un problema no-lineal de tipo elíptico en el segundo subintervalo, del cual a su vez, obtenemos la variante lineal que se usa en este trabajo; esta variante lineal consiste de problemas de convección-difusión (o de tipo transporte).

La solución de estos subproblemas se lleva a cabo mediante métodos iterativos: gradiente conjugado para los problemas tipo Stokes y un esquema de punto fijo para los problemas de tipo elíptico. En ambos casos, cada iteración conduce a la solución de problemas elípticos, lineales y simétricos. En tales condiciones, varias técnicas se pueden emplear para la discretización espacial; en este trabajo usamos la técnica de elemento finito, de hecho, elementos finitos lineales.

Hasta donde sabemos, la combinación, en la descomposición de operadores, de un proceso iterativo de punto fijo para resolver los subproblemas de convección-difusión, a los cuales a su vez se les aplica una técnica de upwind apropiada, es una manera nueva para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes.

4.1. Las Ecuaciones de Navier-Stokes

Considérese el siguiente problema: encontrar el campo de velocidades u y de presión p de un fluido viscoso, incompresible y no estacionario, el cual es modelado matemáticamente por

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \mathbf{u} / \partial t - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.1) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (\text{condición de incompresibilidad}) \quad (4.2) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ en } \Omega \quad (\text{con } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0), \quad (4.3) \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma, \quad t \geq 0 \quad (\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0), \quad (4.4) \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subset R^N$ ($N = 2, 3$ en la práctica) es la región de flujo del fluido, y Γ es la frontera de Ω , Re es el número de Reynolds, $\nu = \frac{1}{Re}$ es la viscosidad del fluido.

Como se sabe, las dificultades para resolver este problema son las siguientes:

- 1.- El término no lineal.
- 2.- La condición de incompresibilidad dada por (4.2)
- 3.- Las soluciones para las ecuaciones de Navier-Stokes son funciones vectoriales de \mathbf{x} y t , cuyas componentes están acopladas a través del término no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ y la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Con la descomposición de operadores se desacoplan las dificultades asociadas a la no linealidad y a la condición de incompresibilidad.

A continuación comenzamos con la discusión del método.

4.2. El Esquema de Descomposición de Operadores

Con $\Delta t \geq 0$ dado, usamos la siguiente aproximación de segundo orden para la derivada con respecto a t

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, (n+1)\Delta t) \approx \frac{1.5\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + 0.5\mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t}, \quad n \geq 1, \quad (4.5)$$

donde \mathbf{u}^k es una aproximación para $\mathbf{u}(\mathbf{x}, k\Delta t)$.

Dividimos el intervalo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ en tres subintervalos de igual longitud $\frac{\Delta t}{3}$, entonces el esquema de descomposición de operadores aplicado a (4.1)-(4.4), como se mencionó en la Introducción (véase [26] y [27]), está dado por:

Dado $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$ entonces

para $n \geq 0$, calcular sucesivamente $\{\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}}, p^{n+\frac{1}{3}}\}$, $\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}}$, y $\{\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}\}$ mediante

$$\begin{cases} \frac{1.5\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} - 2\mathbf{u}^n + 0.5\mathbf{u}^{n-\frac{1}{3}}}{\Delta t/3} - \frac{\nu}{2}\Delta\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} + \nabla p^{n+\frac{1}{3}} = \\ \mathbf{f}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{\nu}{2}\Delta\mathbf{u}^n - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} = 0 \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} = \mathbf{g}^{n+\frac{1}{3}} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.6)_1$$

$$\begin{cases} \frac{1.5\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} - 2\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} + 0.5\mathbf{u}^n}{\Delta t/3} - \frac{\nu}{2}\Delta\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} + (\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} = \\ \mathbf{f}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{\nu}{2}\Delta\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} - \nabla p^{n+\frac{1}{3}} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} = \mathbf{g}^{n+\frac{2}{3}} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.6)_2$$

$$\begin{cases} \frac{1.5\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} + 0.5\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta t/3} - \frac{\nu}{2}\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \\ \mathbf{f}^{n+1} + \frac{\nu}{2}\Delta\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} - (\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1} \text{ sobre } \Gamma \end{cases} \quad (4.6)_3$$

Nótese que para inicializar el esquema arriba descrito, hay que calcular $\{\mathbf{u}^{\frac{1}{3}}, p^{\frac{1}{3}}\}$ aplicando el método θ (o cualquier otro método como Euler que utilice solamente un valor previo) en el subintervalo $[0, \Delta t']$ con $\Delta t'$ de manera que $\theta\Delta t' = \frac{1}{3}\Delta t$.

Denotando genéricamente por \mathbf{f} el lado derecho correspondiente, en cada paso de tiempo se tiene:

De (4.6)₁ y (4.6)₃ tenemos que resolver dos problemas de tipo Stokes de la forma

$$\begin{cases} \alpha\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma; \end{cases} \quad (4.7)_1$$

y de (4.6)₂, un subproblema de tipo elíptico no lineal

$$\begin{cases} \alpha\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.7)_2$$

con $\alpha = 3/(2\Delta t)$, y $\mu = \nu/2$.

Ahora bien, de acuerdo con lo señalado por R.Glowinski en relación con los esquemas de descomposición de operadores (cf. e.g. [13]), una variante lineal para el problema (4.7)₂, útil y más barata (en el contexto de la formulación de mínimos cuadrados de su método θ), es usar la velocidad previamente calculada para modificar el término no lineal, o sea, usar $(\mathbf{u}^{n+1/3} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+2/3}$ en lugar de $(\mathbf{u}^{n+2/3} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+2/3}$ en (4.6)₂. Entonces, haciendo uso de esta observación obtenemos el problema

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.8)$$

con $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$. Obsérvese que (4.8) consiste de un conjunto de N problemas tipo convección-difusión (o de tipo transporte)lineales, a diferencia del sistema de N problemas elípticos no lineales en (4.7)₂

En nuestro caso, más que la ventaja de ser una variante más barata, aprovecharemos esta estructura para aplicar una técnica de upwind apropiada para trabajar con números de Reynolds grandes y al mismo tiempo con mallas gruesas.

4.3.- Solución de los Subproblemas Estacionarios

A continuación se describe la manera de resolver los subproblemas estacionarios que surgen de la descomposición de operadores, es decir, los problemas de tipo Stokes y los de tipo transporte.

4.3.1. Solución de los Problemas de tipo Stokes

Se sabe que la solución de un problema de tipo Stokes, a pesar de ser un problema lineal, no es trivial. Existen varias técnicas (penalización, método de compresibilidad artificial de Chorin [43], método de gradiente conjugado con tamaño de paso fijo [28], Lagrangianos aumentados y dualidad [17], [18], etc.). Nosotros hemos seleccionado la técnica de la ecuación satisfecha por la presión que se usa en el método θ de R. Glowinski. Por el comportamiento global de nuestro método podemos concluir que dicha técnica se desempeña eficientemente en este contexto. A continuación presentamos una descripción breve de esta técnica.

Supongáse Ω acotado y sea L_0^2 el espacio ortogonal a las constantes en $L^2(\Omega)$, dado por

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q(x) dx = 0\}, \quad (4.9)$$

y $A : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definido por

Dado $q \in L^2(\Omega)$ resolver en $(H_0^1(\Omega))^N$,

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{u}_q - \mu \Delta \mathbf{u}_q = -\nabla q \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u}_q = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.10)$$

entonces

$$Aq = \nabla \cdot \mathbf{u}_q. \quad (4.11)$$

Como puede observarse, A es lineal, y

$$\int_{\Omega} Aq dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_q dx = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_q \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0,$$

entonces $Aq \in L_0^2(\Omega)$, $\forall q \in L^2(\Omega)$. Además, se tiene

Teorema 4.1: El operador A es autoadjunto, fuertemente elíptico, y es un automorfismo sobre L_0^2 .

Para la demostración de este teorema véase [54], en donde se consideran condiciones de frontera más generales.

Sea $\mathbf{u}_0 \in (H^1(\Omega))^N$ solución de

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{u}_0 - \mu \Delta \mathbf{u}_0 = \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma; \end{cases} \quad (4.12)$$

si $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, con \mathbf{u} solución de (4.7)₁, entonces $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \cdot \mathbf{u}_0$ y $Ap = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}$ (puesto que $\bar{\mathbf{u}}$ juega el papel de \mathbf{u}_p en (4.10) y (4.11)). Luego,

$$Ap = -\nabla \cdot \mathbf{u}_0. \quad (4.13)$$

Esta es la ecuación funcional satisfecha por la presión [13], y debido a las propiedades de A podemos resolver dicha ecuación (y por tanto (4.7)₁) mediante un algoritmo de *gradiente conjugado* que a continuación se describe.

Paso 0. Inicialización

Dado $p^0 \in L^2(\Omega)$ resolvemos

$$\begin{aligned} \alpha u^0 - \mu \Delta u^0 &= f - \nabla p^0 \text{ en } \Omega, \\ u^0 &= g \text{ sobre } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.14)$$

y hacemos

$$\begin{aligned} g^0 &= \nabla \cdot u^0, \\ w^0 &= g^0. \end{aligned}$$

Luego, para $m \geq 0$ y dados $\{p^m, u^m, g^m, w^m\}$ calculamos $\{p^{m+1}, u^{m+1}, g^{m+1}, w^{m+1}\}$ de

Paso 1. Descenso

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{u}^m - \mu \Delta \tilde{u}^m &= -\nabla w^m \text{ en } \Omega, \\ \tilde{u}^m &= g \text{ sobre } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.15)$$

y hacemos

$$\tilde{g}^m = \nabla \cdot \tilde{u}^m \quad (4.16)$$

y calculamos

$$\rho_m = \frac{\|g^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}}{\int_{\Omega} (\alpha |\tilde{u}^m| + \mu |\nabla \tilde{u}^m|^2) dx} \quad (4.17)$$

$$p^{m+1} = p^m - \rho_m w^m \quad (4.18)$$

$$u^{m+1} = u^m - \rho_m \tilde{u}^m \quad (4.19)$$

$$g^{m+1} = g^m - \rho_m \tilde{g}^m; \quad (4.20)$$

Si

$$\frac{\|g^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}}{\|g^0\|_{L^2(\Omega)}} \leq \epsilon \quad (4.21)$$

tomamos

$$\begin{aligned} u &= u^{m+1}, \\ p &= p^{m+1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

y terminamos, en caso contrario

Paso 2. Cálculo de la nueva dirección de descenso.

$$\gamma^m = \frac{\|g^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}}{\|g^0\|_{L^2(\Omega)}} \quad (4.23)$$

y actualizamos

$$w^{m+1} = g^{m+1} - \gamma^m w^m. \quad (4.24)$$

Hacemos $m = m + 1$ y regresamos al paso 1.

4.3.2 Un Proceso Iterativo de Punto Fijo para los Problemas de Tipo Convección-Difusión

Los problemas (4.7)₂ y (4.8) son equivalentes a

$$\left\{ \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma \right. \quad (4.25)_1$$

y

$$\left\{ \mathbf{R}_w(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma, \right. \quad (4.25)_2$$

respectivamente, donde

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) \equiv (\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (4.26)_1$$

y

$$\mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) \equiv (\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta) \mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{f}. \quad (4.26)_2$$

Resolvemos entonces (4.25)₁ y (4.25)₂ en el tiempo $(n + \frac{2}{3})\Delta t$, $n \geq 0$, mediante

con $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}}$ resolvemos hasta convergencia

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m - \rho(\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta)^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{u}^m) \text{ en } \Omega; \rho > 0, \\ \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma \end{cases} \quad (4.27)_1$$

y

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m - \rho(\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta)^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}^m) \text{ en } \Omega; \rho > 0, \\ \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.27)_2$$

y luego en cualquier caso tomamos $\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} = \mathbf{u}^{m+1}$.

Considerando (4.26)₁ y (4.26)₂ componente a componente, los problemas (4.27)₁ y (4.27)₂ son equivalentes a

$$\begin{cases} (\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta) u_i^{m+1} = (\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta) u_i^m - \rho R_i(\mathbf{u}^m) \text{ en } \Omega; \rho > 0, \\ u_i^{m+1} = g_i \text{ sobre } \Gamma; \alpha, \mu > 0 \text{ e } i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (4.28)_1$$

y

$$\begin{cases} (\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta) u_i^{m+1} = (\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta) u_i^m - \rho R_{i\mathbf{w}}(\mathbf{u}^m) \text{ en } \Omega; \rho > 0, \\ u_i^{m+1} = g_i \text{ sobre } \Gamma; \alpha, \mu > 0 \text{ e } i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.28)_2$$

respectivamente.

Observamos que en cada iteración se tienen que resolver N problemas lineales desacoplados asociados al operador elíptico lineal $\alpha \mathbf{I} - \mu \Delta$.

Aclaremos que hemos presentado aquí la solución por el método iterativo de punto fijo tanto para la versión no lineal (4.7)₂ como para la versión lineal (4.8), a pesar de que la versión que usamos en este trabajo es la lineal; hacemos esto para hacer la correspondiente comparación con la formulación de mínimos cuadrados del método θ , además de que, como se menciona en la Introducción, se ha experimentado también con la versión no lineal y se tienen resultados reportados en [27], [32] y [33].

En la formulación de mínimos cuadrados usada por el método θ de R. Glowinski para resolver los problemas no lineales de la forma (4.7)₂ en cada iteración del método de gradiente conjugado se necesitan resolver $3N$ problemas elípticos no lineales (como se muestra en [46] por ejemplo); en el caso de problemas lineales, mínimos cuadrados de la forma (4.8) se necesitan resolver $2N$ problemas elípticos lineales en cada iteración del algoritmo de gradiente conjugado (véase [46]).

El proceso iterativo de punto fijo descrito anteriormente, combinado con la discretización en el tiempo de segundo orden dada por (4.5) ha sido aplicada exitosamente en otros problemas escalares dependiente del tiempo y no lineales (La ecuación de Kuramoto-Sivashinsky y la ecuación de Hamilton-Jacobi [53]). En este trabajo mostramos que este método también trabaja para problemas vectoriales acoplados y que permite desacoplarlos como las técnicas de mínimos cuadrados lo hacen para problemas análogos relacionados con el método θ de R. Glowinski. Se sabe que la discretización de segundo orden en el tiempo dada por (4.5) es incondicionalmente estable y se comporta bien a medida que $t \rightarrow \infty$, cuando se combina implícitamente con el operador Laplaciano en problemas lineales [28].

Al saber de algunas experiencias en [30], se inicializó el proceso (4.27)₂ con interpolación cúbica en el tiempo, es decir, se tomó $u^0 = 4u^n - 6u^{n-1/3} + 4u^{n-2/3} - u^{n-1}$, en lugar de interpolación lineal; de esta manera se mejora la precisión incrementando a su vez el tamaño de la malla en un orden de magnitud (en potencia de dos).

4.4. Formulación Variacional y su Discretización en el Espacio por Elemento Finito

Puesto que se hace uso de elementos finitos para la discretización espacial, debemos dar las formulaciones variacionales de los subproblemas obtenidos y restringir estas formulaciones a los espacios de elemento finito apropiados. Sea τ_h una triangulación de Ω y $\tilde{\tau}_h$ la triangulación obtenida de τ_h uniendo los puntos medios de cada $T \in \tau_h$. Entonces, la formulación variacional del problema discreto asociado a (4.7)₁ está dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}_h \text{ en } \tilde{\mathbf{H}}_g^{1h}(\Omega), p_h \in S_0^h(\Omega) \text{ tales que} \\ \alpha(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + (\nabla p_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \text{ en } \Omega, \\ \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}(\Omega) \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in S_0^h(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.29)_1$$

y para (4.8), por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar } \mathbf{u}_h \text{ en } \tilde{\mathbf{H}}_g^{1h}(\Omega) \text{ tal que} \\ \alpha(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + ((\mathbf{w}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \text{ en } \Omega, \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.29)_2$$

con $\tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}$ y $S_0^h(\Omega)$ dados por (2.12) y (2.13), respectivamente, en el Capítulo II.

Cabe mencionar que al aplicar el algoritmo descrito en la subsección (4.3.1), que resuelve la formulación (4.29)₁ surgen las formulaciones variacionales correspondientes a problemas elípticos lineales y simétricos.

4.5. Esquemas clásicos de Upwind para problemas tipo Convección-Difusión

Como hemos mencionado en la Introducción, a diferencia de otros esquemas que usan elementos finitos de orden alto, nuestro esquema hace uso de elementos finitos lineales. Para satisfacer la *condición Inf-Sup* hacemos uso de dos mallas, siendo la malla para la velocidad el doble de fina que la correspondiente a la de la presión. Para ser específicos, si denotamos por τ_h una triangulación de Ω ; la correspondiente triangulación para la velocidad, denotada por $\tilde{\tau}_h$, es aquella que se obtiene de τ_h uniendo los puntos medios de cada triángulo.

Los N problemas lineales de tipo transporte dados por (4.8) son problemas escalares de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha u - \mu \Delta u + \mathbf{w} \cdot \nabla u = f \text{ en } \Omega, \\ u = g \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right. \quad (4.30)$$

con $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$. Estos problemas son de tipo convección-difusión, puesto que representan modelos matemáticos para fenómenos con convección y difusión acoplados e inmersos en un flujo de un fluido incompresible, de velocidad \mathbf{w} .

De la condición de incompresibilidad, tenemos que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla v) v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1 \quad (4.31)$$

lo cual implica que los resultados clásicos sobre existencia y unicidad para problemas variacionales de tipo elíptico son también válidos en este caso así como para los problemas variacionales discretos, puesto que (4.30) se sigue cumpliendo en H_0^{1h} (cf., e.g. [28]).

Aún cuando bajo condiciones suficientes de consistencia y convergencia, la solución aproximada converge, en H^1 , a la solución del problema (4.30), como es bien sabido, la solución numérica, ya sea por diferencias finitas o por elemento finito, conduce a resultados sin significado físico cuando el término advectivo domina al difusivo y se aplica una discretización en la forma estándar. También se sabe que un remedio para este problema es el uso de técnicas de upwind (ver e.g. [28], [55]). Hablando en términos sencillos, el proceso de upwind toma en cuenta la dirección de movimiento del fluido y utiliza la información de atrás con respecto a la dirección de dicho movimiento.

Se ha hecho trabajo considerable usando estas técnicas para este tipo de problemas, principalmente para fluidos con \mathbf{w} constante (ver [28], [30] y [55]), pero muy poco se ha hecho al respecto para las ecuaciones de Navier-Stokes. La razón puede ser que las ecuaciones de Navier-Stokes son un sistema no lineal acoplado con la condición de incompresibilidad, mientras que los otros son lineales, escalares y desacoplados de la condición de incompresibilidad. Entonces, la instrumentación o generalización de estas técnicas no necesariamente implica la misma eficiencia. En [15] se discute un esquema de upwind de tercer orden para problemas de la forma (4.7)₂, sin embargo, los resultados numéricos reportados fueron obtenidos a través del método de características de Galerkin.

Lo que reportamos aquí es la aplicación de una técnica de upwind para el conjunto de problemas escalares de la forma (4.30) que se obtuvieron de la descomposición de operadores aplicada a las ecuaciones de Navier-Stokes. Nuestros experimentos numéricos muestran que de esta manera es posible obtener buenos resultados, usando mallas gruesas; enfatizando que son mucho

más gruesas de lo que se necesitaría si se usara una discretización estándar, como se puede ver por lo reportado en la bibliografía [2], [3] y [4].

El tipo de upwind que se usa en este trabajo en la formulación variacional correspondiente a (4.29)₂ es el upwind parcial de Ikeda [31], el cual como ya se ha dicho en el Capítulo anterior preserva el principio del máximo discreto, el principio de conservación de masa discreto y la convergencia en $L_\infty(\overline{\Omega})$. Para elementos triangulares, este esquema es de segundo orden bajo ciertas condiciones y es una combinación de viscosidad artificial y de upwind, [31 loc. cit.].

4.6. Resultados Numéricos

Se aplica el método para el siguiente problema en la cavidad cuadrada.

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset R^2$$

La condición de frontera está dada por $u = g$ sobre Γ , con

$$\mathbf{g} = \begin{cases} (1, 0) & \text{sobre } \Gamma_a = \{(x, 1) : 0 < x < 1\}, t > 0, \\ (0, 0) & \text{sobre } \Gamma - \Gamma_a, t > 0, \text{ en donde } \Gamma = \text{frontera de } \Omega, \end{cases}$$

con condición inicial

$$\mathbf{u}_0 = \begin{cases} (1, 0) & \text{sobre } \Gamma_a \\ (0, 0) & \text{en } \overline{\Omega} - \Gamma_a. \end{cases}$$

Denotemos por h_v el tamaño de la malla para la velocidad, el cual, recordamos, es el doble de fino que el correspondiente a la malla de la presión. Los resultados que se muestran a continuación corresponden al estado estacionario (obtenidos de la solución del problema no estacionario). Comparamos nuestros resultados principalmente con los reportados en [2], [3] y [4], los cuales son resultados de alta precisión obtenidos directamente del problema estacionario y con la formulación vorticidad-función corriente. Para resolver los sistemas lineales resultantes usamos una factorización de Cholesky. En relación con los problemas tipo Stokes usamos el algoritmo de gradiente conjugado previamente discutido en este Capítulo. Todos los resultados fueron obtenidos usando la versión lineal con upwind en el problema intermedio de tipo convección-difusión.

Se muestran resultados para diferentes números de Reynolds con diferentes valores de h_v .

En la figura 1 mostramos las líneas de corriente para $Re = 1000$, con $\Delta t = \frac{1}{100}$, $h_v = \frac{1}{16}$ y $\frac{1}{32}$ y los correspondientes contornos de la vorticidad.

En la figura 2 mostramos las líneas de corriente para $Re = 4000$ con $\Delta t = \frac{1}{200}$, $h_v = \frac{1}{48}$ y $\frac{1}{64}$ y también mostramos los correspondientes contornos de la vorticidad. Hay que subrayar la aparición de un pequeño vórtice terciario en la esquina inferior derecha en las líneas de corriente el cual aparece para $Re = 3200$ y $Re = 5000$ en [2] con mallas más finas (de 257×257).

En la figura 3 mostramos las líneas de corriente y los contornos de la vorticidad para $Re = 7500$ con $\Delta t = \frac{1}{400}$, $h_v = \frac{1}{48}$ y $h_v = \frac{1}{64}$ los cuales concuerdan bastante bien con los reportados en [2], con algunas pequeñas diferencias debidas al tamaño de la malla (una malla de 257×257 en [2] vs. 65×65 de la nuestra). En este caso observamos la aparición de un pequeño vórtice terciario en la esquina inferior izquierda como en [2].

En la figura 4 mostramos las líneas de corriente y vorticidad para $Re = 10000$ con $\Delta t = \frac{1}{400}$, $h_v = \frac{1}{64}$ y $h_v = \frac{1}{96}$. Estas gráficas coinciden con los resultados reportados en [2] y [3].

Hasta aquí enfatizamos que los resultados que reportamos coinciden perfectamente con los resultados correctos reportados en la bibliografía.

Los resultados que a continuación presentamos, no podemos ya compararlos con los de otros trabajos publicados, puesto que para los pocos que hemos visto que reportan números de Reynolds mayores que 10000, no hay suficiente evidencia de que representen el flujo correcto. La validación de nuestros resultados se basa en el hecho de que para números de Reynolds más pequeños, hemos obtenido los mismos resultados correctos y precisos que otros autores han obtenido con mallas mucho más finas.

Para números de Reynolds más grandes el esquema numérico presenta el mismo comportamiento con respecto al tamaño de las mallas que cuando se trabaja con números de Reynolds hasta 10000. Aún más, al aumentar el número de Reynolds, no se requiere ningún tratamiento especial más que decrementar el tamaño de paso temporal, lo cual es un requerimiento natural debido a la dinámica rápida del fluido; también es notorio la aparición de más subvórtices secundarios, lo cual es también una consecuencia de dicha dinámica. Además, hay que tomar en consideración que para $Re \geq 5000$ los resultados pueden depender del método [10] y [23], y que incluso puede no existir una solución estacionaria.

En la figura 5 mostramos las líneas de corriente y vorticidad para $Re = 15000$ con $\Delta t = \frac{1}{400}$, $h_v = \frac{1}{64}$ y $h_v = \frac{1}{96}$. En [10] se muestran las líneas de corriente para este número de Reynolds (del problema estacionario) con una malla de $\frac{1}{256} \times \frac{1}{256}$. Nuestros resultados concuerdan perfectamente con los vórtices centrales, a pesar de la gran diferencia en el tamaño de la malla.

En las figuras 6, 7, 8 y 9 mostramos las líneas de corriente y vorticidad con $\Delta t = \frac{1}{600}$ para $Re = 20000$, con $h_v = \frac{1}{96}$ y $h_v = \frac{1}{128}$, para $Re = 25000$ y $Re = 30000$ con $h_v = \frac{1}{128}$ y para $Re = 40000$, $h_v = \frac{1}{96}$ y $h_v = \frac{1}{128}$. En este caso, los resultados para $Re = 30000$ y $Re = 40000$ se han obtenido partiendo de los resultados de un Re menor.

En la figura 10, mostramos el resultado de $Re = 40000$ habiendo empezado desde cero, con lo cual hacemos una validación de los resultados anteriores.

Por otro lado, con los resultados con $h_v = 1/16$ en Fig. 1, con $h_v = 1/48$ en la Fig. 3, con $h_v = 1/64$ en Fig. 5, con $h_v = 1/96$ en Fig. 6, mostramos la existencia de una malla gruesa *óptima* por debajo de la cual, principalmente en la vorticidad, los resultados se empiezan a deteriorar. Como se observa para las respectivas líneas de corriente dicho deterioro es mínimo. Esta observación nos lleva a concluir que la malla para $h_v = 1/128$ es casi la *óptima* para $Re = 30000$ y $Re = 40000$: podemos obtener mejores resultados con un h_v menor pero, principalmente en las líneas de corriente, no se tendrán diferencias cualitativas significativas, en lo que se refiere al número de líneas del vórtice central y del número de subvórtices secundarios.

Finalmente queremos señalar, que como se discute en [10], el conocimiento de flujos con números de Reynolds altos puede darnos algunas repuestas sobre flujos turbulentos.

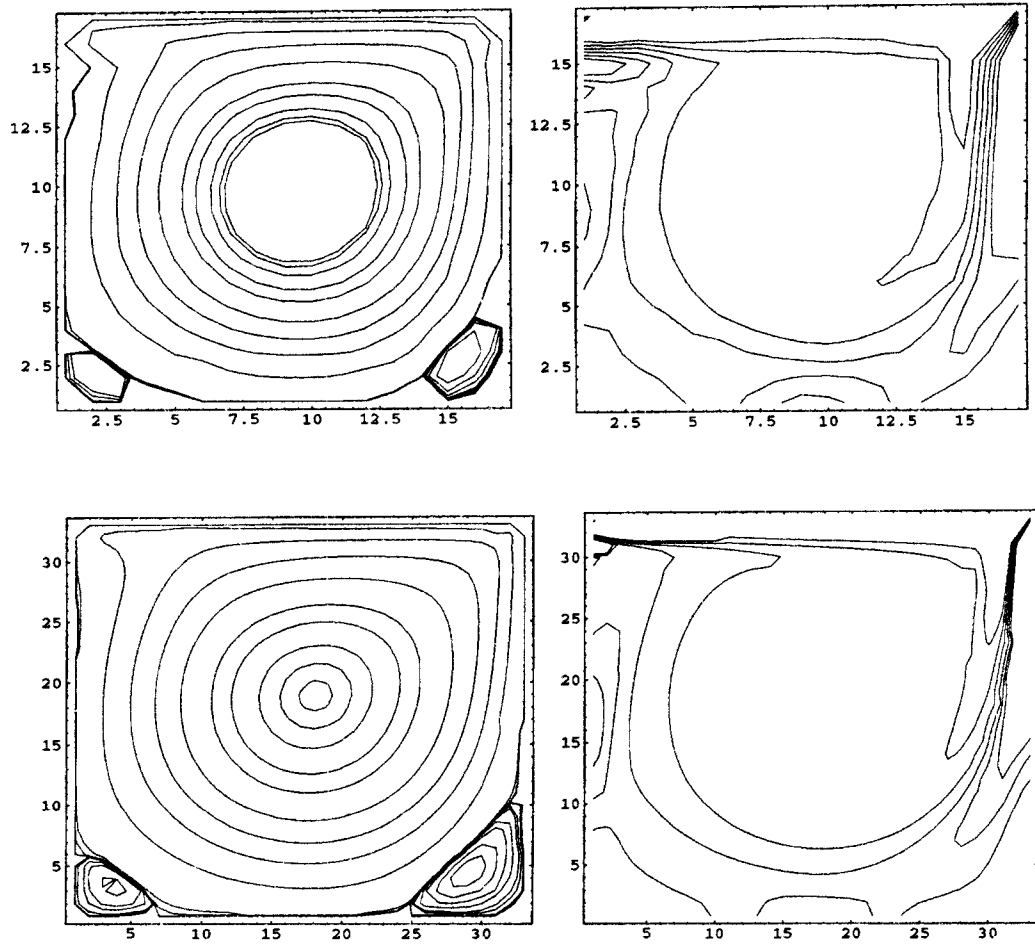


Fig. 1 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=1000$ con $Hv=1/16$ y $Hv=1/32$.

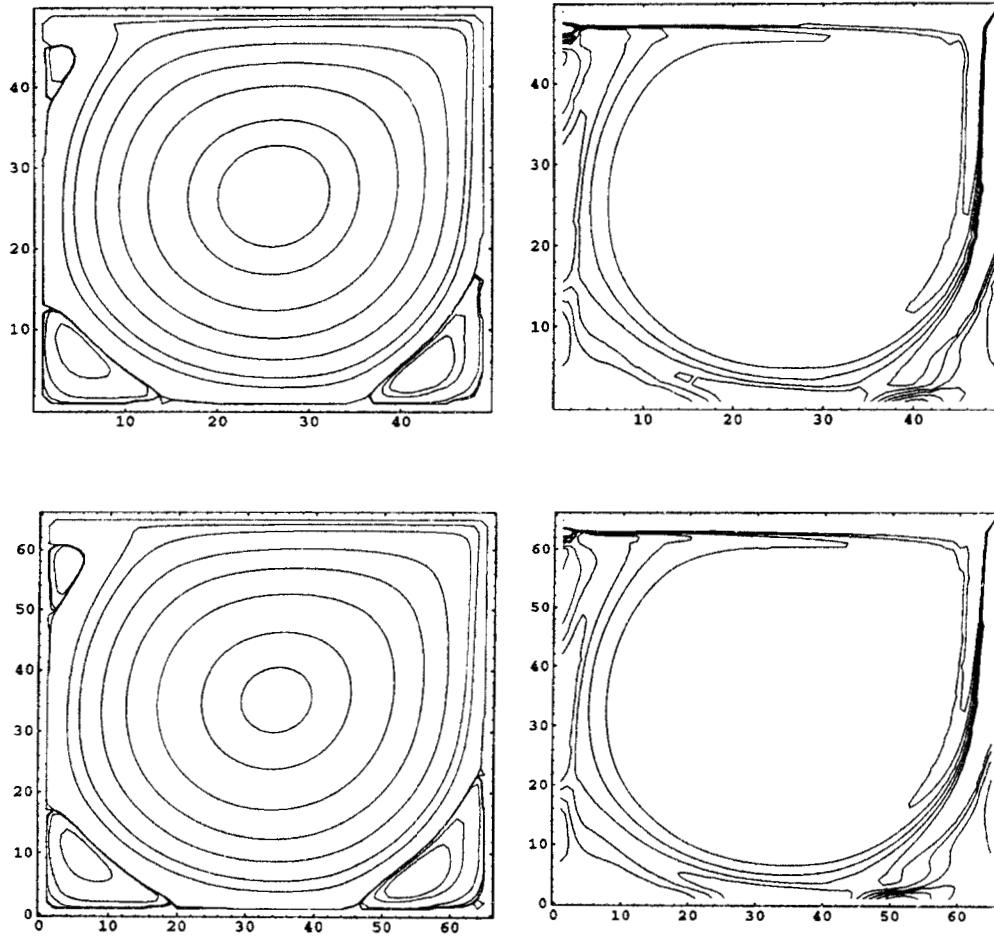


Fig. 2 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=4000$ con $Hv=1/48$ y $Hv=1/64$.

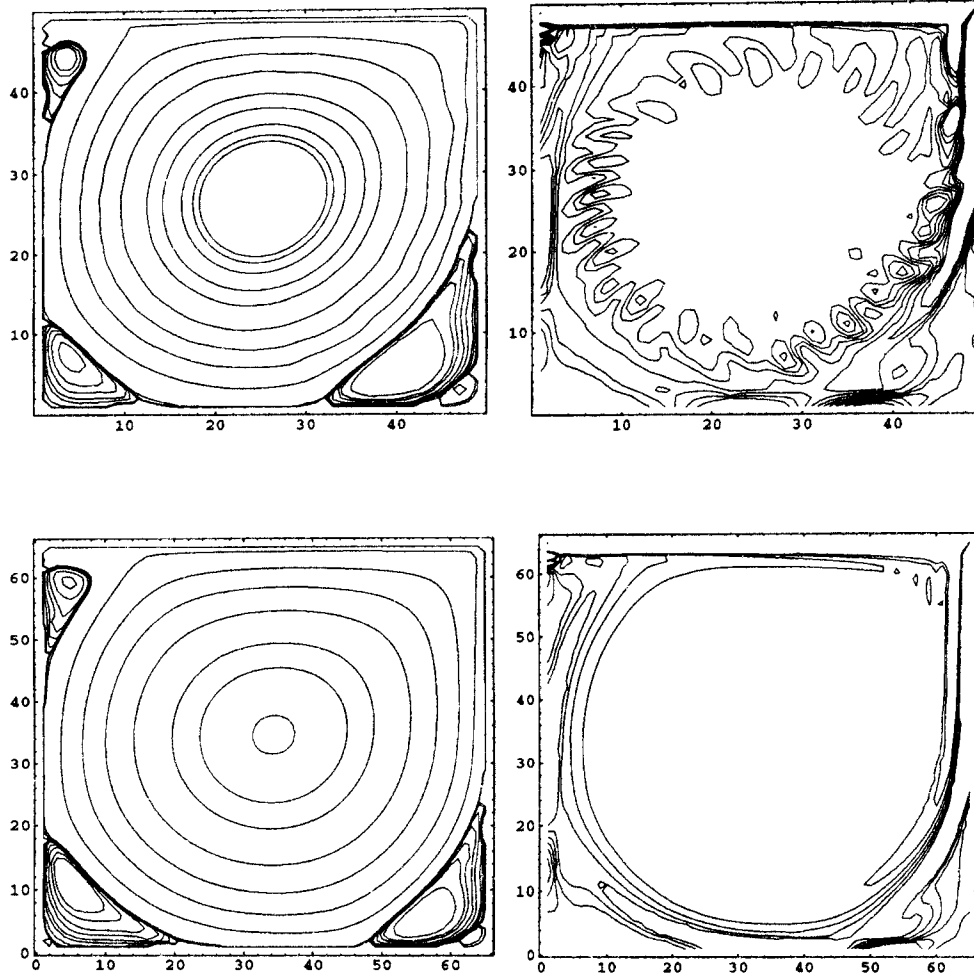


Fig. 3 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=7500$ con $Hv=1/48$ y $Hv=1/64$.

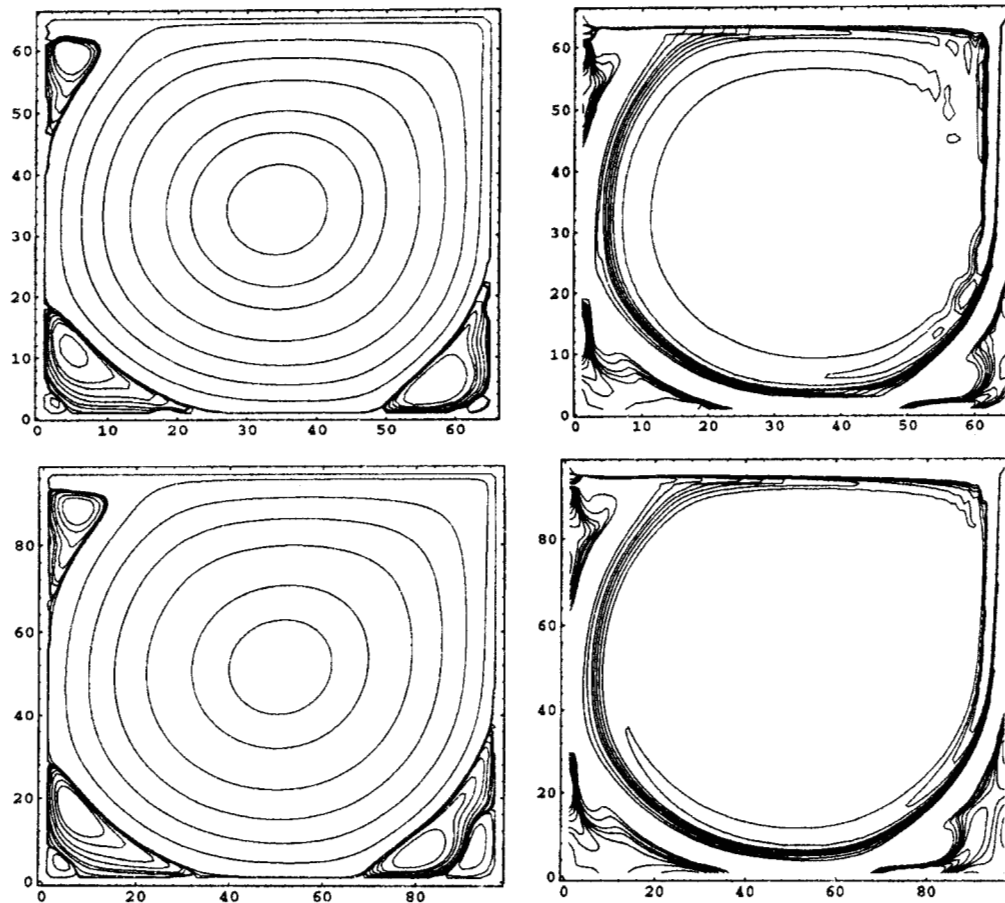


Fig. 4 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=10000$
con $Hv=1/64$ y $Hv=1/96$.

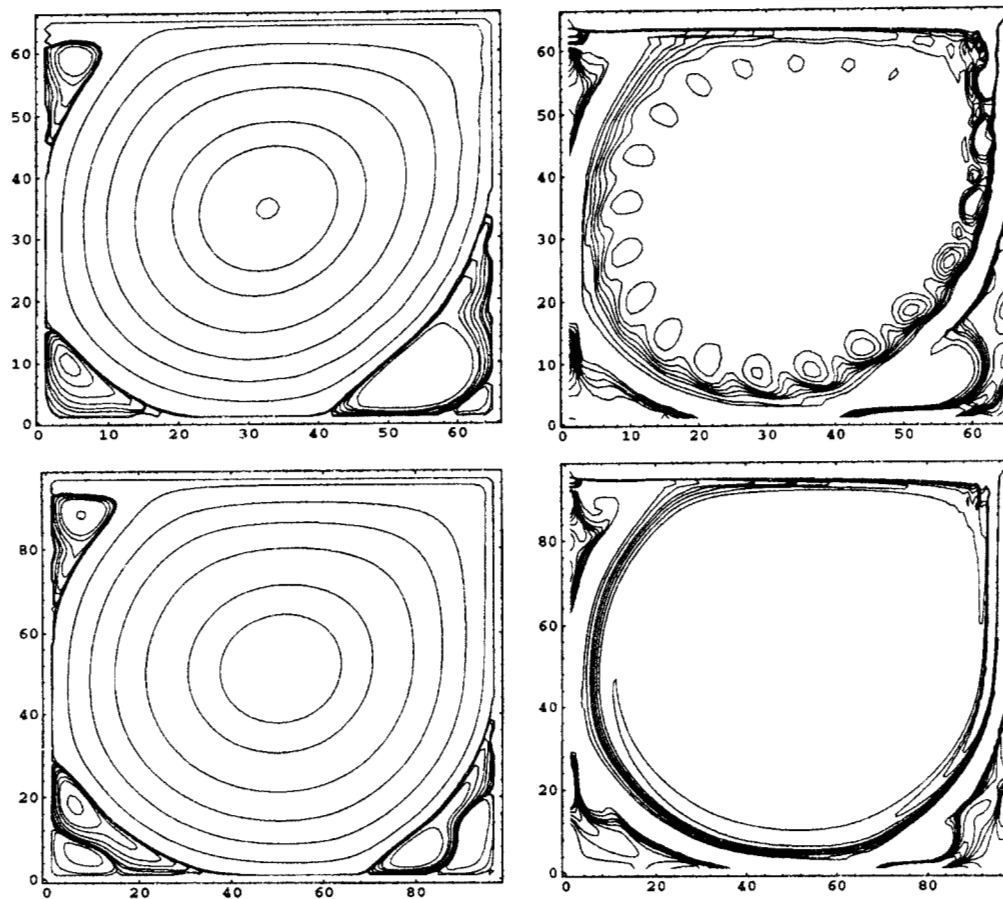


Fig. 5 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=15000$ con $Hv=1/64$ y $Hv=1/96$.

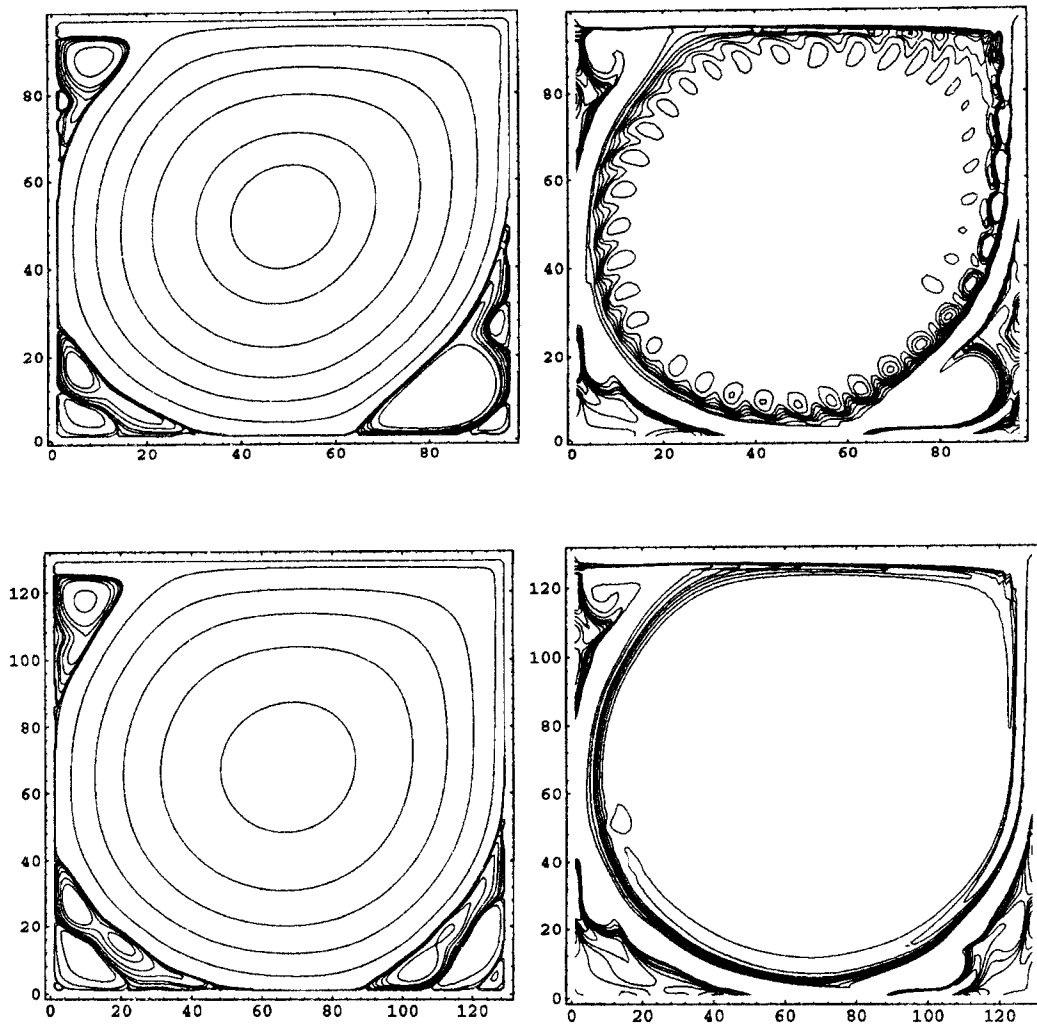


Fig. 6 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=20000$ con $Hv=1/96$ y $Hv=1/128$.

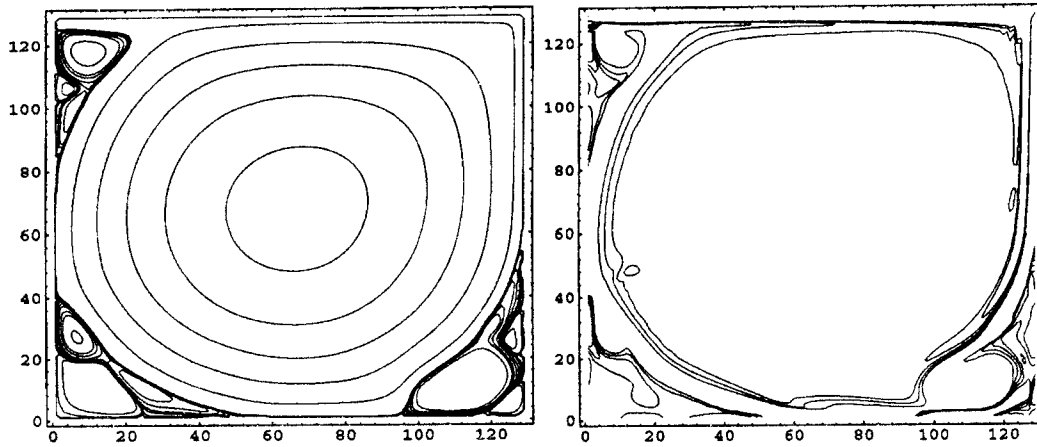


Fig. 7 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=25000$ con $Hv=1/128$.

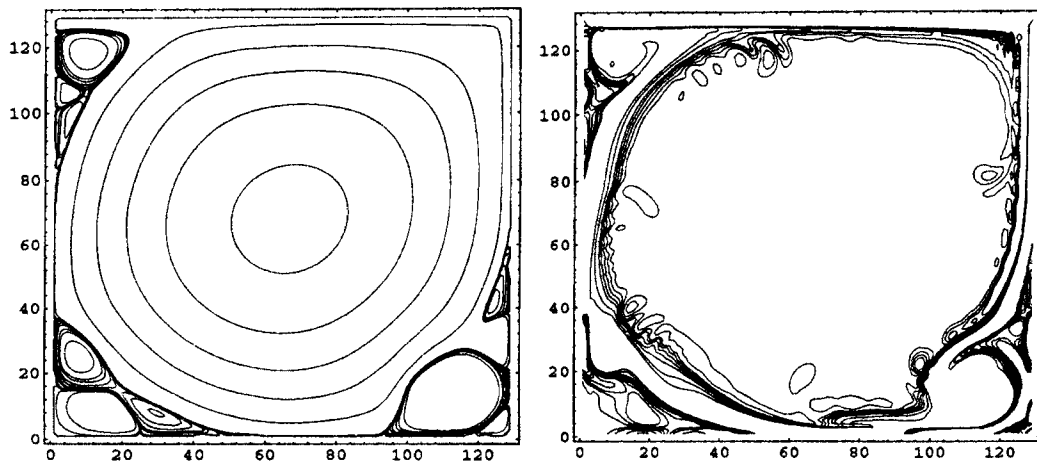


Fig. 8 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=30000$ con $Hv=1/128$.

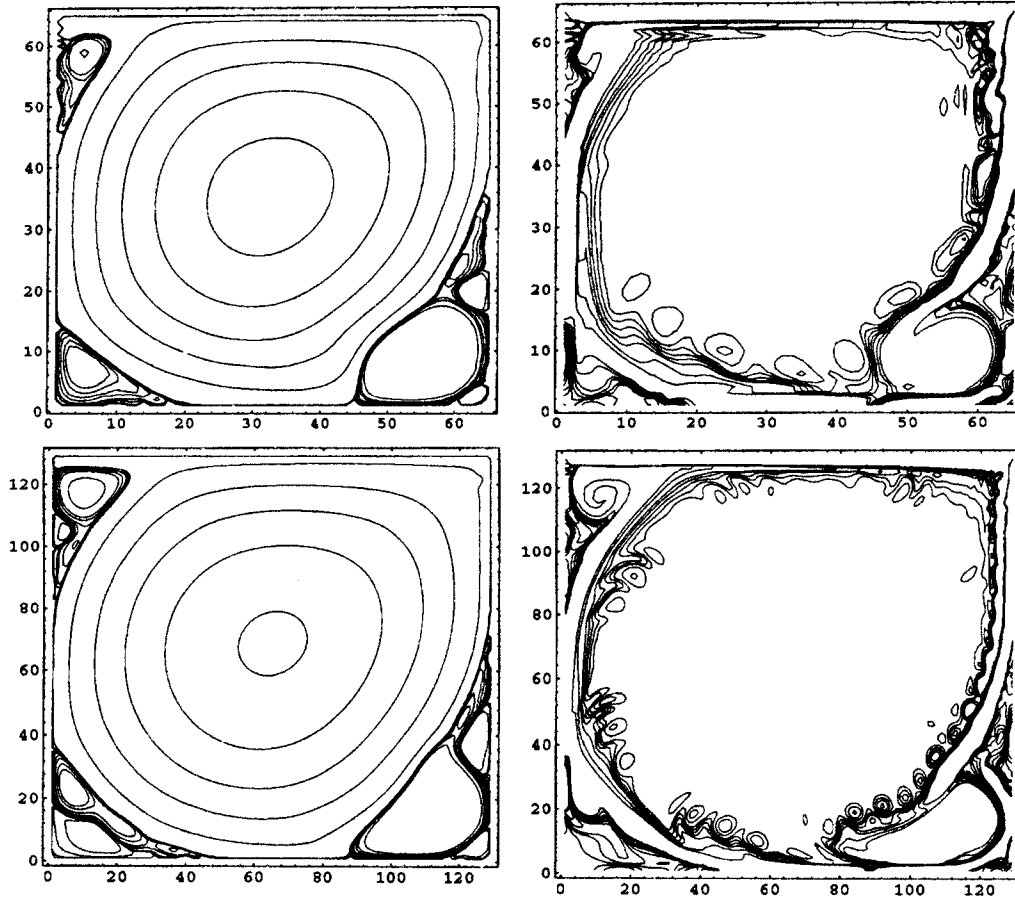


Fig. 9 Líneas de corriente y vorticidad para $Re= 40000$
con $Hv=1/64$ y $Hv=1/128$.

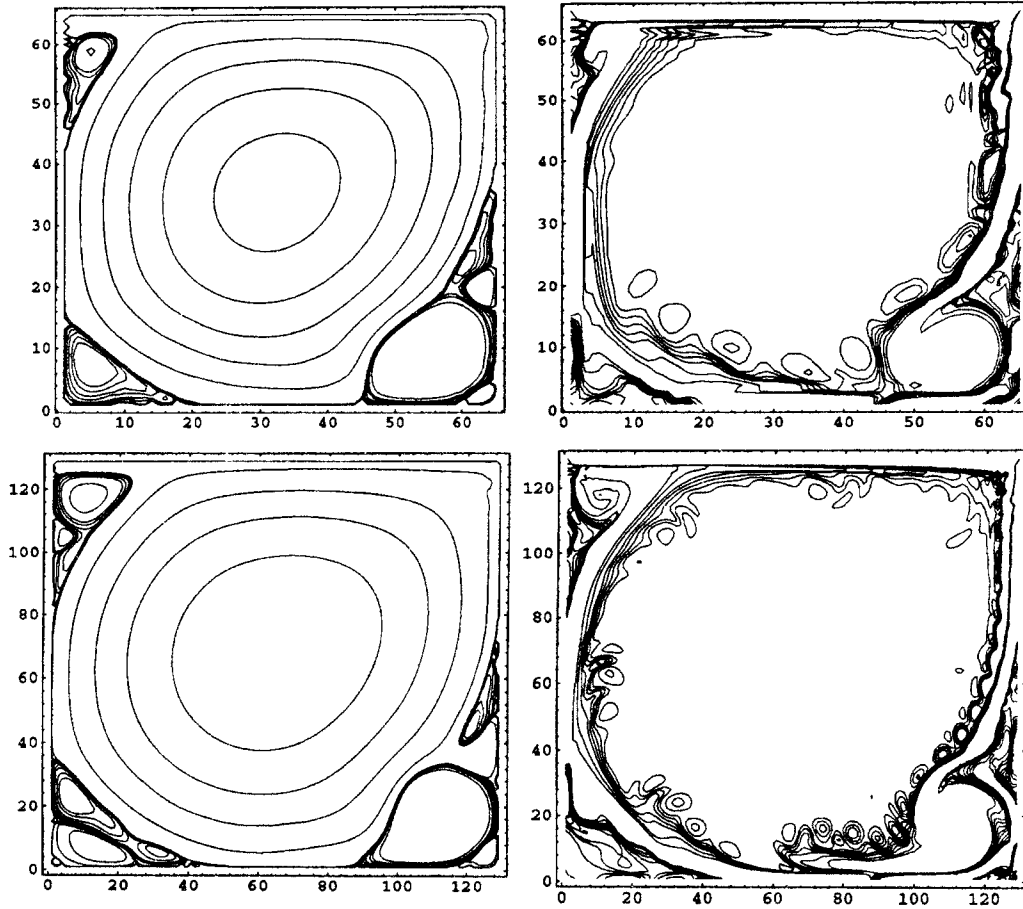


Fig. 10 Líneas de corriente y vorticidad para $Re=40000$ con $Hv=1/64$ y $Hv=1/128$ (desde cero).

4.7. Acerca de los Parámetros

En esta sección hacemos algunos comentarios sobre la elección y/o comportamiento de los parámetros.

- El paso de discretización en tiempo y el tamaño de la malla se tienen que decrementar a medida que el número de Reynolds Re crece. En el primer caso, por la dinámica rápida del fluido, y para el segundo, para lograr precisión; sin embargo, en este último, el decremento es en una razón más lenta que en otros esquemas.

- Respecto a los parámetros ρ y Tol (parámetro para la tolerancia con respecto a la precisión), en el método iterativo de punto fijo para resolver el problema de convección-difusión (discutido en la Sección 4.3.2) en el paso intermedio, se tiene que la rapidez de convergencia crece a medida que ρ se toma cercano a uno; para mantener precisión Tol es más restrictiva a medida que Re se incrementa (del orden de 10^9 a 10^{12}).

- Para el resultado que se presenta de $Re = 40000$ desde $t = 0$, dichos parámetros están dados (algunos ya mencionados) por $h_v = 1/128$, $\Delta t = 1/600$, $\rho = .98$, $Tol = 10^{12}$.

- Para los resultados en termofluidos que se presentan en el siguiente Capítulo, dichos parámetros no presentan cambios significativos a los que hemos señalado para Navier-Stokes.

5. UN ESQUEMA DE DESCOMPOSICION DE OPERADORES PARA FLUIDOS VISCOSOS, INCOMPRESIBLES Y TERMICOS

En este Capítulo se presenta un esquema numérico para el flujo de fluidos viscosos, incompresibles, dependientes del tiempo y térmicamente acoplados bajo la aproximación de Boussinesq. El esquema combina una descomposición de operadores en la discretización temporal de segundo orden, y elementos finitos en la discretización espacial. Este esquema es una extensión del que se ha presentado en el Capítulo anterior para fluidos isotérmicos gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes.

El esquema de descomposición de operadores nos permite en este caso desacoplar las dificultades asociadas con los términos no lineales y la condición de incompresibilidad. De manera análoga al caso de Navier-Stokes, se obtienen problemas tipo Stokes conjuntamente con un problema de advección-difusión para la temperatura en el primer y tercer subintervalos, y problemas de tipo convección-difusión tanto para la velocidad como para la temperatura, en el subintervalo de en medio. En tales circunstancias podemos aplicar la misma técnica de upwind para la velocidad que se usó en Navier-Stokes y así poder manejar números de Rayleigh grandes, o sea, términos de fuerzas externas grandes en las ecuaciones de momento.

La meta es mostrar que el esquema propuesto es capaz de reproducir las principales características de un fluido térmico usando mallas gruesas, alcanzando un grado de exactitud que coincide muy bien con resultados reportados en [19], [20], [10], [21], [22], [23] y [24], donde se usan mallas mucho más finas. Vale la pena recalcar que el tamaño de las mallas gruesas es tal que hace una gran diferencia en tiempo de CPU y ahorro de memoria como posteriormente podrá verse en los resultados.

Para mostrar la eficiencia del esquema presentamos resultados numéricos para convección mixta ($Re \neq 1$) y convección natural (o libre, $Re = 1$) con números de Rayleigh grandes. Como ya se mencionó en la Introducción, esto no es una tarea trivial ya que corresponde a situaciones con término de fuerzas externas grande en la ecuación de momento, el cual depende de la temperatura y establece en consecuencia el acoplamiento con la ecuación de temperatura.

5.1 Aproximación de Boussinesq

En la mayoría de las situaciones de la mecánica de fluidos, una de las mayores simplificaciones que permite la condición de incompresibilidad es el desacoplamiento, de fenómenos dinámicos y térmicos. De esta manera, es posible resolver para la presión y la velocidad sin tomar en cuenta la ecuación de la energía, y resolver esta última, sólo si se desea conocer el campo de temperatura. Sin embargo, hay algunos flujos para los cuales este desacoplamiento no se justifica, por ejemplo en convección libre. En este caso, los efectos de gravedad y flotación no pueden ser despreciados. Por otro lado, y siendo consistentes con la condición de incompresibilidad, se pueden hacer algunas suposiciones sobre los fenómenos térmicos que permitan simplificaciones substanciales en el modelo matemático. En este contexto vamos a considerar el modelo de Boussinesq para flujos de fluidos viscosos, incompresibles y térmicamente acoplados.

La derivación de las ecuaciones de Boussinesq [43] está basada en cuatro suposiciones acerca de los efectos térmicos y termodinámicos del flujo. La primera suposición es que las variaciones de la densidad son despreciables, excepto por el término de fuerza en la ecuación de momento, el cual está dado por $\rho \mathbf{g}$, donde ρ denota la densidad y \mathbf{g} denota la constante de aceleración debida a la gravedad. Como una simplificación se puede suponer que la densidad en el término $\rho \mathbf{g}$ está dada por $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$, la cual es una aproximación lineal de la ecuación de estado $\rho = \rho(T, p)$ alrededor de una temperatura de referencia T_0 a presión constante; ρ_0 es la densidad en T_0 , y β es el coeficiente de expansión térmica. También podemos suponer que, en la ecuación de energía, uno puede despreciar el término de disipación de energía mecánica; y que la viscosidad ν , el coeficiente de expansión térmica β , la conductividad térmica κ , y el calor específico a presión constante c_p son constantes. Las ecuaciones que resultan de estas suposiciones, considerando que el fluido es estacionario, son

$$-\nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{g} \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad \text{en } \Omega \quad (5.1),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.2),$$

$$-\kappa \Delta T + \rho_0 c_p (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = Q, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.3),$$

donde Q denota una fuente de calor.

Si suponemos que hay una escala de longitud l y una temperatura $T_1 - T_0$ características, inherente al problema, por ejemplo, la distancia y la diferencia de temperatura entre dos paredes, entonces se define el *número de Prandtl* adimensional $Pr = \kappa/c_p$, el *número de Grashof* como $\beta l^3 \rho_0^2 | \mathbf{g} | (T_1 - T_0)/\mu^2$, y el *número de Rayleigh* $Ra = Gr Pr$. Si además hay una velocidad característica U , podemos definir el *número de Reynolds* $Re = \rho_0 U l/\nu$. Si tal escala de velocidad no existe, como en convección libre, escogemos $U = \nu/(\rho_0 l)$ (lo cual equivale a $Re = 1$). Si además adimensionalizamos de acuerdo a $x \leftarrow x/l$, $u \leftarrow u/U$, $T \leftarrow (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, $p \leftarrow (p - g \cdot x)/(\rho_0^2 U^2)$, obtenemos

$$-\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{Ra}{Pr Re^2} T \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (5.4),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (5.5),$$

$$-\frac{1}{Re Pr} \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (5.6).$$

Sin embargo, en este trabajo estudiaremos el caso no estacionario, el cual se describe a continuación.

Sea $\Omega \subset R^N (N = 2, 3)$ la región del flujo, y Γ su frontera. Las ecuaciones adimensionalizadas para un fluido térmico dependiente del tiempo bajo la aproximación de Boussinesq están dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{Ra}{Pr Re^2} T \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (5.7),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (5.8),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{Re Pr} \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (5.9),$$

donde \mathbf{u} , p y T son la velocidad, presión y temperatura del flujo respectivamente. Ra es el *número de Rayleigh*, Pr es el *número de Prandtl*, y \mathbf{g} es el vector de gravedad $\mathbf{g} = (0, 1)$. Re es el *número de Reynolds*; y, como es bien sabido, $\nu = \frac{1}{Re}$, donde ν es la *viscosidad*.

La ecuación de momento (5.7) y la ecuación para la temperatura (5.9) deben ser provistas con las condiciones de frontera e iniciales apropiadas, como por ejemplo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad x \in \Omega \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0) \quad (5.10),$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad x \in \Omega \quad (5.11),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \text{ sobre } \Gamma, \quad t \geq 0 \quad \left(\int_{\Gamma} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \right), \quad (5.12),$$

$$T = g_2 \text{ sobre } \Gamma, \quad t \geq 0. \quad (5.13).$$

El acoplamiento entre (5.7) y (5.9) que incluye a Re ($Re \neq 1$) corresponde a convección mixta. Como ya hemos dicho, para convección natural se toma $Re = 1$. Para el modelo de Boussinesq, a las dificultades del problema de Navier-Stokes le agregamos la del acoplamiento entre (5.7)-(5.8) y (5.9). A través de un proceso de descomposición de operadores, desacoplamos las dificultades asociadas con las no linealidades (de la velocidad y de la temperatura) y la condición de incompresibilidad.

5.2. El esquema de descomposición de operadores

Para la discretización en el tiempo, las derivadas temporales \mathbf{u}_t y T_t son aproximadas mediante un esquema de segundo orden

$$f_t(\mathbf{x}, (n+1)\Delta t) \approx \frac{1.5f^{n+1} - 2f^n + 0.5f^{n-1}}{\Delta t}, \quad n \geq 1,$$

donde f^k es una aproximación de f en el punto $(\mathbf{x}, k\Delta t)$.

Subdividimos el intervalo de tiempo de $n\Delta t$ a $(n+1)\Delta t$ en tres subintervalos de igual longitud $\frac{\Delta t}{3}$. Y, descomponemos el problema (5.7)-(5.13) en cada uno de estos subintervalos en la forma siguiente

$$\begin{cases} \frac{1.5\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} - 2\mathbf{u}^n + 0.5\mathbf{u}^{n-\frac{1}{3}}}{\Delta t/3} - \frac{\nu}{2}\Delta\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} + \nabla p^{n+\frac{1}{3}} = \\ \frac{Ra}{Pr Re^2} T^n \mathbf{g} + \frac{\nu}{2}\Delta\mathbf{u}^n - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} = 0 \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} = \mathbf{g}_1^{n+\frac{1}{3}} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (5.14)_1$$

$$\begin{cases} \frac{1.5T^{n+\frac{1}{3}} - 2T^n + 0.5T^{n-\frac{1}{3}}}{\Delta t/3} - \frac{\mu}{2}\Delta T^{n+\frac{1}{3}} + (\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} \cdot \nabla)T^{n+\frac{1}{3}} = \\ \frac{\mu}{2}\Delta T^n \text{ en } \Omega, \\ T^{n+\frac{1}{3}} = g_2^{n+\frac{1}{3}} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (5.14)_2$$

$$\begin{cases} \frac{1.5\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} - 2\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} + 0.5\mathbf{u}^n}{\Delta t/3} - \frac{\nu}{2}\Delta \mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} + (\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} - \\ \frac{Ra}{Pr Re^2} T^{n+\frac{2}{3}} \mathbf{g} = \frac{\nu}{2}\Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}} - \nabla p^{n+\frac{1}{3}} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} = \mathbf{g}_1^{n+\frac{2}{3}} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (5.14)_3$$

$$\begin{cases} \frac{1.5T^{n+\frac{2}{3}} - 2T^{n+\frac{1}{3}} + 0.5T^n}{\Delta t/3} - \frac{\mu}{2}\Delta T^{n+\frac{2}{3}} + (\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} \cdot \nabla)T^{n+\frac{2}{3}} = \\ \frac{\mu}{2}\Delta T^{n+\frac{1}{3}} \text{ en } \Omega, \\ T^{n+\frac{2}{3}} = g_2^{n+\frac{2}{3}} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (5.14)_4$$

$$\begin{cases} \frac{1.5\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} + 0.5\mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta t/3} - \frac{\nu}{2}\Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \\ \frac{Ra}{Pr Re^2} T^{n+\frac{2}{3}} \mathbf{g} + \frac{\nu}{2}\Delta \mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} - (\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{g}_1^{n+1} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (5.14)_5$$

$$\begin{cases} \frac{1.5T^{n+1} - 2T^{n+\frac{2}{3}} + 0.5T^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta t/3} - \frac{\mu}{2}\Delta T^{n+1} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla)T^{n+1} = \\ \frac{\mu}{2}\Delta T^{n+\frac{2}{3}} \text{ en } \Omega, \\ T^{n+1} = g_2^{n+1} \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (5.14)_6$$

en donde $\mu = \frac{1}{Pr Re}$.

Denotando genéricamente por \mathbf{f} y f los correspondientes lados derechos, observamos que en cada paso de tiempo tenemos que resolver subproblemas del siguiente tipo:

En el primer y tercer subintervalos, dos problemas tipo Stokes (como consecuencia de considerar en (5.14)₁ y (5.14)₅ la temperatura del tiempo anterior)

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{u} - \beta \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}_1 \text{ sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (5.15)$$

y dos problemas lineales de convección-difusión para la temperatura

$$\begin{aligned}\alpha T - \gamma \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T &= f \text{ en } \Omega, \\ T &= g_2 \text{ sobre } \Gamma,\end{aligned}\tag{5.16}$$

donde $\alpha = (\frac{3}{2})(\frac{1}{\Delta T})$, $\gamma = \frac{\mu}{2}$ y $\beta = \frac{\nu}{2}$.

En el subintervalo intermedio se tiene un sistema de convección-difusión no lineal

$$\begin{cases} \alpha T - \gamma \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = f \text{ en } \Omega, \\ T = g_2 \text{ sobre } \Gamma, \\ \alpha \mathbf{u} - \beta \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} - cT\mathbf{g} = \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}\tag{5.17}$$

donde $c = \frac{Ra}{Pr Re^2}$.

Cabe hacer notar que para problemas de convección natural, el esquema también trabaja si consideramos $(\mathbf{w} \cdot \nabla)T$ en lugar de $(\mathbf{u} \cdot \nabla)T$, con \mathbf{w} dada por la velocidad previamente calculada, y si consideramos T como la temperatura previamente calculada en la ecuación de momento. Sin embargo, para convección mixta, esta forma desacoplada entre energía térmica y momento no funciona.

5.3. Solución de los subproblemas discretizados en el tiempo

Como en el caso isotérmico del Capítulo anterior, para resolver los problemas de la forma (5.15) usamos la técnica eficiente de la ecuación funcional satisfecha por la presión, la cual se usa en el esquema θ de R. Glowinski para el problema de Stokes correspondiente (cf. e.g. [13], loc. cit); esto es, aplicamos gradiente conjugado en la formulación variacional de tal ecuación. Esta técnica resulta también eficiente en el contexto presentado de estos problemas térmicos. Hasta donde sabemos, ésta es la primera vez que se hace uso de esta técnica en esta clase de problemas.

Como se describe a continuación, para resolver todos los problemas de advección-difusión, tanto para la velocidad \mathbf{u} como para la temperatura T , es posible aplicar la misma técnica iterativa de punto fijo que se aplica en el caso isotérmico para la velocidad \mathbf{u} .

Los problemas de la forma (5.16) son equivalentes a

$$R_{\mathbf{w}}(T) = 0 \text{ en } \Omega, T = f_2 \text{ sobre } \Gamma, \quad (5.18)$$

en donde

$$R_{\mathbf{w}}(T) \equiv (\alpha I - \gamma \Delta)T + (\mathbf{w} \cdot \nabla)T - f.$$

Resolvemos (5.18) mediante la técnica iterativa de punto fijo dada por:

con $T^0 = T_0$ dada, resolvemos hasta convergencia

$$T^{m+1} = T^m - \rho(\alpha I - \gamma \Delta)^{-1} R_{\mathbf{w}}(T^m) \text{ en } \Omega; \rho > 0, \quad (5.19)$$

$$T^{m+1} = f_2 \text{ sobre } \Gamma,$$

y luego tomamos $T^{n+\frac{1}{3}}$ (o T^{n+1}) = T^{m+1} .

Por otro lado definimos

$$R(T, \mathbf{u}) \equiv (\alpha I - \gamma \Delta)T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T - f,$$

y

$$\mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, T) = \alpha \mathbf{u} - \beta \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} - cT\mathbf{g} - \mathbf{f}.$$

Entonces, los sistemas de la forma (5.19) son equivalentes a

$$\begin{cases} R(T, \mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega, \\ T = g_2 \text{ sobre } \Gamma, \\ \mathbf{R}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, T) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_1 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (5.20)$$

Resolvemos (5.20) mediante el siguiente proceso iterativo de punto fijo acoplado, dado por:

con $T^0 = T^{n+\frac{1}{3}}$ y $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^{n+\frac{1}{3}}$ resolvemos hasta convergencia

$$\begin{cases} T^{m+1} = T^m - \rho(\alpha\mathbf{I} - \gamma\Delta)^{-1}R(T^m, \mathbf{u}^m) \text{ en } \Omega, \\ T^{m+1} = g_2 \text{ sobre } \Gamma, \\ \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m - \rho(\alpha\mathbf{I} - \beta\Delta)^{-1}\mathbf{R}_w(\mathbf{u}^m, T^{m+1}) \text{ en } \Omega; \rho > 0, \\ \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{g}_1 \text{ sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (5.21)$$

y luego tomamos $T^{n+\frac{2}{3}} = T^{m+1}$, $\mathbf{u}^{n+\frac{2}{3}} = \mathbf{u}^{m+1}$.

Considerando $\mathbf{R}_w(\mathbf{u}, T)$ en (5.21) componente a componente vemos que el problema (5.21) es equivalente a

$$\begin{cases} (\alpha\mathbf{I} - \gamma\Delta)T^{m+1} = (\alpha\mathbf{I} - \gamma\Delta)T^m - \rho R(T^m, \mathbf{u}^m) \text{ en } \Omega; \rho > 0, \\ T^{m+1} = g_2 \text{ sobre } \Gamma, \\ (\alpha\mathbf{I} - \beta\Delta)u_i^{m+1} = (\alpha\mathbf{I} - \beta\Delta)u_i^m - \rho R_{i,w}(\mathbf{u}^m, T^{m+1}) \text{ en } \Omega, \\ u_i^{m+1} = g_{1i} \text{ sobre } \Gamma; i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (5.22)$$

Así, en cada iteración, tenemos que resolver $(N+1)$ problemas lineales asociados a operadores elípticos simétricos: *un* problema para el operador $\alpha\mathbf{I} - \gamma\Delta$ y N para $\alpha\mathbf{I} - \beta\Delta$. En cada paso de tiempo debemos contar *dos* problemas más (*uno* para cada (5.14)₁ y (5.14)₅) en cada iteración de (5.19) asociado al operador $\alpha\mathbf{I} - \gamma\Delta$.

Para la parte lineal de la velocidad (de tipo convección-difusión) en (5.17) usamos también el esquema de upwind parcial de Ikeda de segundo orden [31], el cual como ya se mencionó en el Capítulo anterior de Navier-Stokes, introduce la mínima cantidad de viscosidad artificial necesaria para preservar el principio del máximo discreto, la ley de conservación de masa discreta y la convergencia en $L_\infty(\bar{\Omega})$.

Cabe aclarar que para la forma desacoplada en convección natural, el proceso iterativo (5.22) funciona también en forma desacoplada. A diferencia de los problemas de Navier-Stokes, los N problemas de convección-difusión lineales escalares desacoplados para la velocidad (con influencia de la temperatura) en (5.17) están acoplados con la ecuación no lineal para la temperatura a través de \mathbf{u} y T . Sin embargo, el upwind trabaja bien aún en dicha situación, esto puede ser porque en cada iteración de (5.21) estas variables están desacopladas.

Para la discretización espacial procedemos en forma análoga a Navier-Stokes: usamos elementos finitos lineales. Tomando en cuenta que la velocidad \mathbf{u} y la temperatura T comparten el mismo orden de regularidad, para

la velocidad y la temperatura usamos una malla el doble de fina que para la presión.

5.4. Formulación Variacional y su Discretización en el espacio por Elemento Finito

Puesto que se hace uso de elementos finitos para la discretización espacial, debemos dar las formulaciones variacionales de los subproblemas obtenidos y restringir estas formulaciones a los espacios de elemento finito apropiados. Sea τ_h una triangulación de Ω y $\tilde{\tau}_h$ la triangulación obtenida de τ_h uniendo los puntos medios de cada $T \in \tau_h$ como en el caso de Navier-Stokes. Entonces, la formulación variacional del problema discreto asociado a (5.15) está dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar } \mathbf{u}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_g^{1h}(\Omega), p_h \in S_0^h(\Omega) \text{ tales que} \\ \alpha(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \beta(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + (\nabla p_h, \mathbf{v}_h) = \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \text{ en } \Omega, \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}(\Omega) \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in S_0^h(\Omega) \end{array} \right. \quad (5.23)_1$$

y en el caso de (5.16), por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar } T \in \Theta_{gd}^h(\Omega) \text{ tal que} \\ \alpha(T_h, \psi_h) - \gamma(\nabla T_h, \nabla \psi_h) + ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla)T_h, \psi_h) = \\ (f, \psi_h), \forall \psi_h \in \Theta_{0d}^h(\Omega), \end{array} \right. \quad (5.23)_2$$

y (5.17) por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar } T_h \in \Theta_{gd}^h(\Omega), \mathbf{u}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_g^{1h}(\Omega), \text{ tales que} \\ \alpha(T_h, \psi_h) - \gamma(\nabla T_h, \nabla \psi_h) + ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla)T_h, \psi_h) = \\ (f, \psi_h), \forall \psi_h \in \Theta_{0d}^h(\Omega), \\ \alpha(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \beta(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{v}_h = \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}(\Omega). \end{array} \right. \quad (5.23)_3$$

donde los espacios $\tilde{\mathbf{H}}_g^{1h}(\Omega)$, $S_0^h(\Omega)$, $\tilde{\mathbf{H}}_0^{1h}(\Omega)$, $\Theta_{gd}^h(\Omega)$, $\Theta_{0d}^h(\Omega)$, fueron ya definidos en el Capítulo II.

5.5. Resultados Numéricos

Denotamos por h_v el tamaño de la malla para la velocidad y la temperatura, y los resultados mostrados corresponden al estado estacionario (del problema dependiente del tiempo).

Comparamos nuestros resultados con los reportados en [19], [20], [21], [22], [23], [24], y [10]. A continuación damos una descripción.

Primero resolvemos un problema de convección mixta en la cavidad con un gradiente de temperatura vertical estable reportado en [21], donde se presentan resultados numéricos sobre un amplio rango de valores de los parámetros, $0 \leq Ra \leq 10^6$ y $400 \leq Re \leq 3000$, usando el paquete de diferencias finitas MAC. Se estudian dos casos: el caso en el que $Gr/Re^2 \leq 1$, donde las características del flujo son similares a los de la cavidad convencional de un fluido no estratificado; los fluidos están bien mezclados y las variaciones de temperatura son pequeñas. En el otro caso, cuando $Gr/Re^2 \geq 1$, la mayoría de las porciones de arriba o de en medio del interior de la cavidad están estancadas.

Para el primer caso mostramos las isotermas y las líneas de corriente: En la figura 1 para $Gr = 100$ y $Re = 1000$, con $h_v = \frac{1}{32}$. En las figuras 2 y 3 para el mismo valor de Gr pero $Re = 4000$, con $h_v = \frac{1}{48}$ y $Re = 10000$, con $h_v = \frac{1}{64}$. En [21] para $Re = 4000$ se usan $h_v = \frac{1}{128}$ y $\frac{1}{256}$. Hacemos notar que el caso $Re = 10000$, en el rango de turbulencia térmica [36], no lo hemos visto reportado en otra parte.

Para el segundo caso, en la figura 4 mostramos las isotermas y líneas de corriente para $Re = 1000$ y $Gr = 10^6$ con $h_v = \frac{1}{32}$. En [21], se usan $h_v = \frac{1}{64}$, $\frac{1}{128}$ y $\frac{1}{256}$.

Los resultados concuerdan muy bien con los de [21] aún cuando la diferencia en cuanto al tamaño de malla es significativa; aún más, concerniente al primer caso, como en [32] y [33] no hay evidencia de que nuestro esquema no pueda reproducir resultados precisos para $Re \geq 10000$.

Para convección natural, resolvemos el problema de un "bouyancy driven flow" en una cavidad cuadrada con paredes verticales calentadas de diferente manera. Este problema es resuelto por FIDAP, el cual tiene un resolvidor para el modelo de Boussinesq estacionario y usa un método acoplado completamente. Como mencionamos en la introducción, los rangos para los

números de Rayleigh son de $10^3 \leq Ra \leq 10^6$. Para obtener la solución para $Ra = 1000000$, FIDAP tiene que realizar una serie de soluciones para $Ra = 1000, 10000, 100000$, y toma la solución del Ra anterior para arrancar el método para un Ra mayor. La malla usada es irregular y mucho más fina que la usada en este trabajo. FIDAP usa 576 elementos rectangulares con 1825 nodos, y nosotros usamos una malla regular muy gruesa con $h_v = \frac{1}{16}$, lo cual corresponde a usar 289 nodos.

En las figuras 5, 6, 7, y 8, se muestran las isotermas y las líneas de corriente para $Ra = 10^5, 10^6, 10^7$ y 10^8 ; todas ellas con $h_v = \frac{1}{16}$. Los últimos resultados muestran que nuestro esquema puede llegar más lejos que FIDAP, manteniendo la malla significativamente gruesa.

FIDAP compara sus resultados con los reportados en [19]; mientras que [20] y [22] lo hacen con los resultados reportados por FIDAP; y [24] compara con [20]. Todos estos trabajos, excepto [19] usan la formulación en variables primitivas (velocidad y presión). La referencia [19] usa la formulación vorticidad-función corriente estacionaria de Boussinesq.

En [20] se resuelve el mismo problema investigando diferentes esquemas numéricos, construidos sobre bases iterativas implícitas y semi-implícitas, y usando el concepto de multiplicador de Lagrange. La cavidad aquí es cubierta por una malla rectangular de "graded elements". Ellos usan 25×25 elementos bicuadráticos/bilineales para la velocidad y presión. En [24], se muestran resultados usando el método mínimos cuadrados de Elemento Finito usando 50×50 elementos bilineales. En [22] se usa un método de descomposición de operadores para fluidos compresibles con número de mach pequeño; la malla reportada es la misma que la usada por FIDAP.

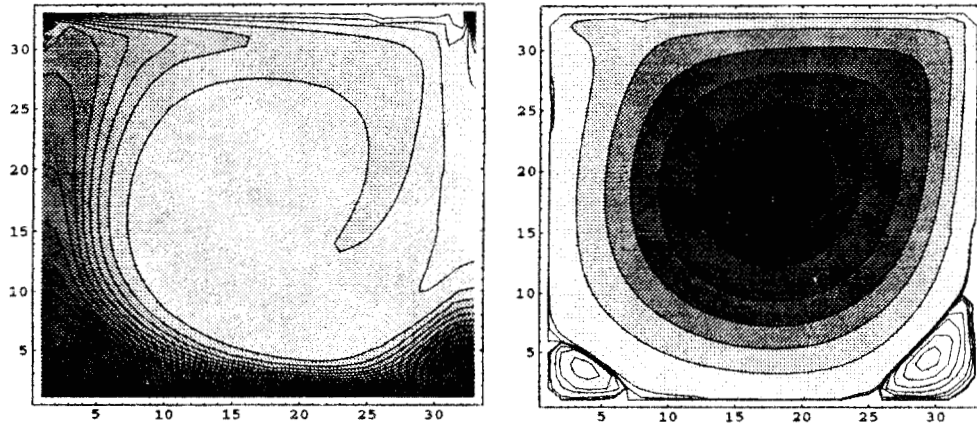


Fig. 1 Isotermas y líneas de corriente para $Gr=100$,
 $Re=1000$ con $Hv=1/32$.

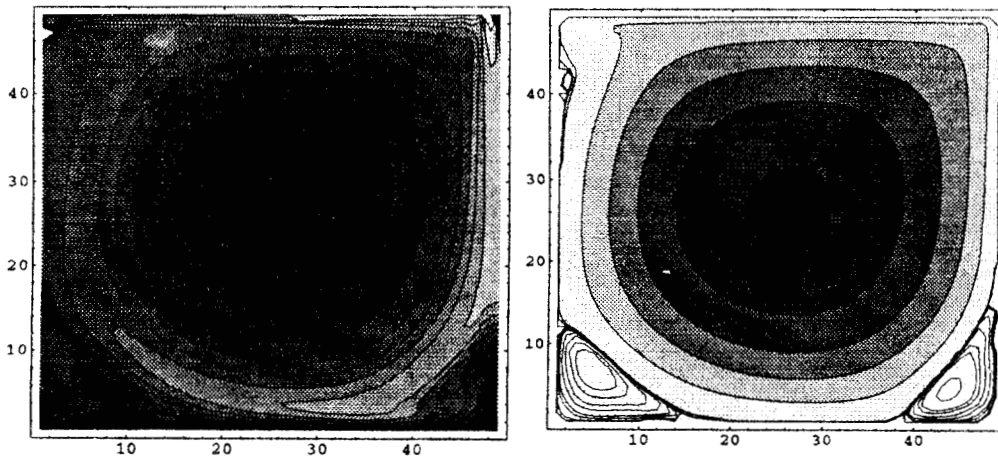


Fig. 2 Isotermas y líneas de corriente para $Gr=100$,
 $Re=4000$ con $Hv=1/48$.

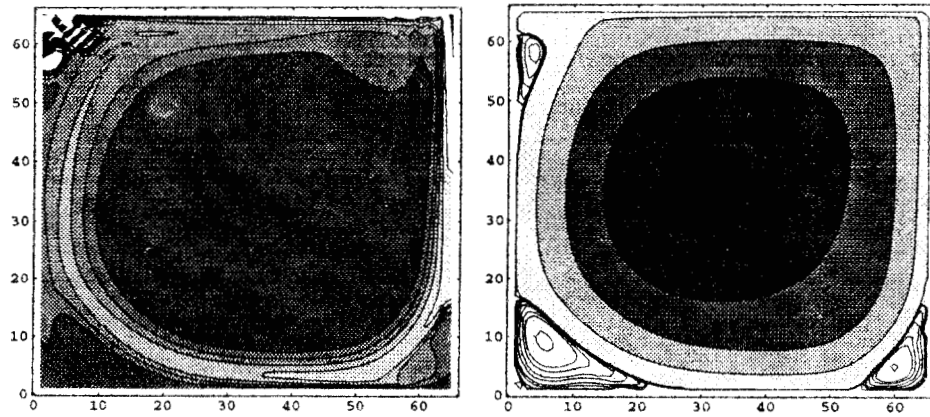


Fig. 3 Isothermas y líneas de corriente para $Gr=100$, $Re=10000$ con $Hv=1/64$.

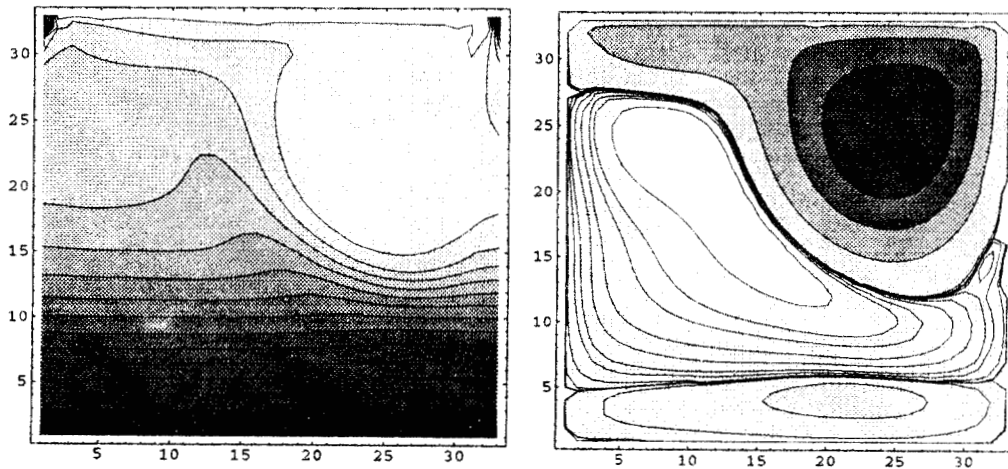


Fig. 4 Isothermas y líneas de corriente para $Gr=10^6$, $Re=1000$ con $Hv=1/32$.

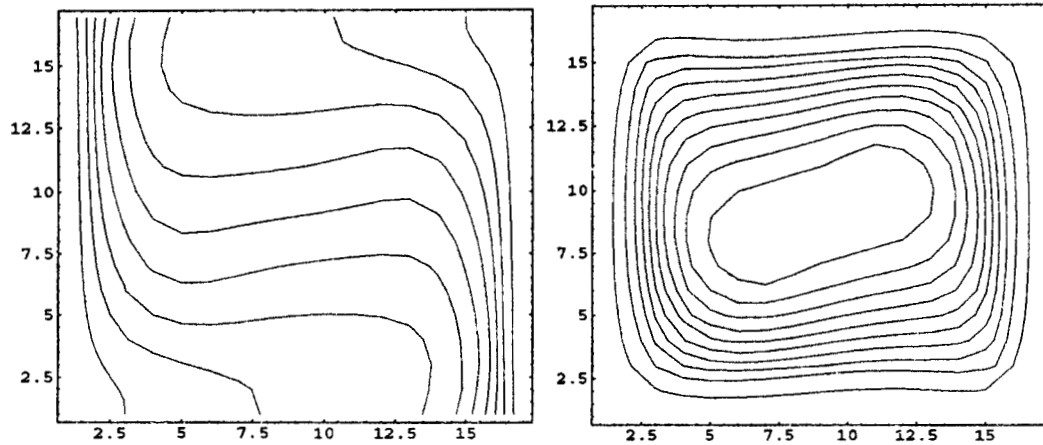


Fig. 5 Isothermas y líneas de corriente para $Ra=10^{**5}$ con $Hv=1/16$.

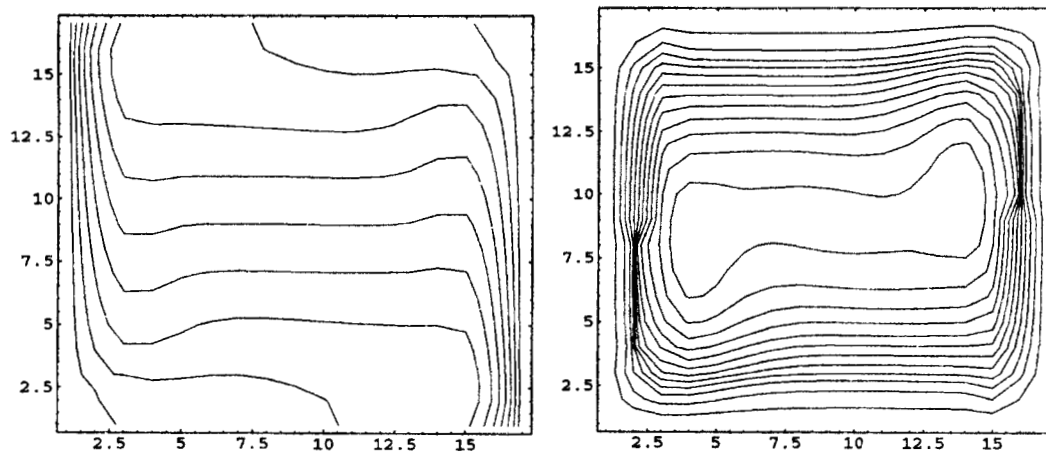


Fig. 6 Isothermas y líneas de corriente para $Ra=10^{**6}$ con $Hv=1/16$.

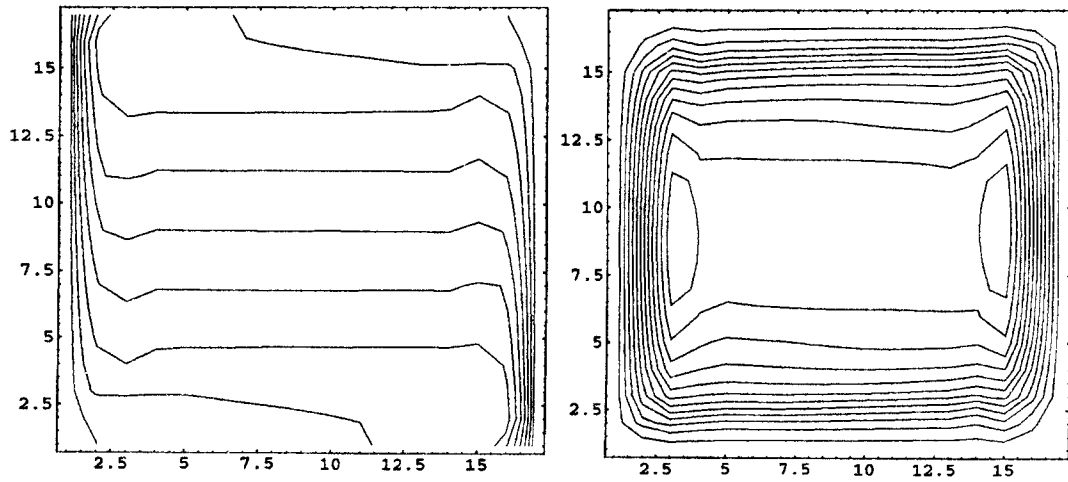


Fig. 7 Isotermas y líneas de corriente para $Ra=10^{**7}$ con $Hv=1/16$.

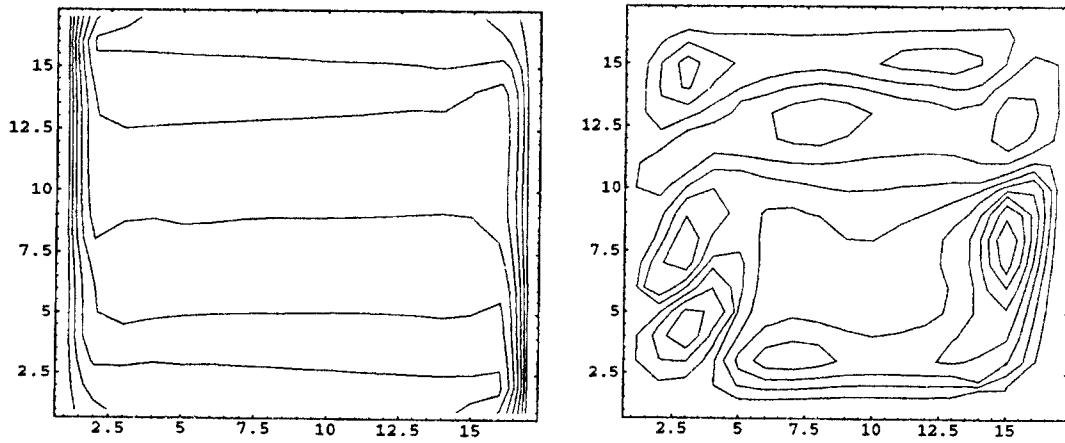


Fig. 8 Isotermas y líneas de corriente para $Ra=10^{**8}$ con $Hv=1/16$.

VI. CONCLUSIONES

Hemos presentado un esquema numérico para fluidos térmicos/isotérmicos viscosos, incompresibles y dependientes del tiempo (en variables primitivas), el cual descompone el problema en una sucesión de subproblemas estacionarios más simples en cada nivel de tiempo, a través de la discretización temporal. La solución de dichos subproblemas estacionarios, como se ha visto, se lleva a cabo mediante métodos iterativos que (finalmente), en cada iteración, requieren de la solución de problemas elípticos lineales y simétricos. En estas condiciones el esquema es independiente de la dimensión espacial.

Se presta especial atención en este trabajo a la solución del problema del subintervalo intermedio, el cual puede ser resuelto como un problema no lineal o bien como un problema lineal de convección-difusión (N problemas de tipo transporte). Seleccionando la versión lineal, aplicamos un esquema de *upwind* que ha resultado ser eficiente para este tipo de problemas escalares (cuando se considera solamente uno) independientemente de la cantidad de dominancia convectiva y del tamaño de la malla espacial. Con esto, el esquema globalmente mantiene esta propiedad (tanto para Navier-Stokes con respecto al número de Reynolds, como para Boussinesq con respecto al número de Rayleigh); sin embargo, al incrementarse dichos parámetros, sobre todo en Navier-Stokes, los resultados se deterioran (en precisión) a partir de cierta malla gruesa. La precisión se mejora significativamente, incluso con una malla más gruesa, inicializando con una interpolación adecuada el proceso iterativo de punto fijo (que evita la parte no simétrica) que se aplica para resolver estos problemas.

Específicamente, como lo muestran los resultados numéricos, la eficiencia del esquema se muestra al presentar resultados para números de Reynolds hasta $Re = 40000$ y para números de Rayleigh hasta $Ra = 10^8$ en convección natural, así como un resultado en el rango de turbulencia térmica en convección mixta. La contribución de este trabajo consiste en reportar resultados numéricos para valores de los parámetros señalados que sobrepasan a los usualmente reportados en la bibliografía acompañados a la vez de mallas significativamente gruesas; hasta donde sabemos ambos hechos se están reportando por primera vez.

Es importante también notar que la estabilidad del esquema se mantiene aún si empezamos el cálculo desde $t = 0$ independientemente de los valores de los parámetros, lo cual no es usual en otros esquemas numéricos.

La precisión obtenida con mallas significativamente gruesas hace que el esquema pueda extenderse a fluidos más complicados que demandan gran cantidad de memoria, mientras preserven la estructura incompresible; por ejemplo, fluidos oceánicos, atmosféricos y océano-atmósfera acoplados (después de aplicar la aproximación de Boussinesq, en océano, y coordenadas de presión, en atmósfera) [56], [57], [58]. Lo mismo se puede decir para los correspondientes problemas de control que también demandan gran cantidad de memoria [13], [59].

APENDICE A
ALGUNOS ASPECTOS DE CONVERGENCIA Y
ESTABILIDAD

Consideremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \mathbf{u} / \partial t - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (A.1) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0 \quad (\text{condición de incompresibilidad}) \quad (A.2) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad (A.3) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma, \quad t \geq 0 \quad \left(\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \right), \quad (A.4) \end{array} \right.$$

En [39], [40], [41] y [42] se presentan resultados teóricos de convergencia y estabilidad (usando esquemas de elemento finito) para el problema no estacionario de Navier-Stokes (A.1 – A.4), donde ni el número de Reynolds ni la viscosidad aparecen explícitamente ya que el problema se considera normalizado respecto a estos parámetros.

En [39] se presentan estimaciones de error de segundo orden para la discretización espacial, manteniendo la variable temporal como variable continua. La velocidad discreta $\mathbf{u}_h(\cdot, t)$ y presión $p_h(t)$, pertenecen a espacios de elemento finito \mathbf{H}_h y L_h respectivamente; \mathbf{H}_h consiste de las funciones lineales por pedazos (como las usadas para nuestros cálculos) y L_h el de funciones constantes por pedazos. Dichas estimaciones están dadas por

$$\| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h(t)) \|_{L^2} \leq h^2 C_1(t), \quad (A.5)$$

$$\| (p - p_h)(t) \|_{L^2 / \mathcal{N}_h} \leq h C_2(t); \quad (A.6)$$

las cuales son de orden óptimo con respecto al tamaño de la malla h , a medida que $h \rightarrow 0$. Suponiendo regularidad apropiada de los datos prescritos \mathbf{u}_0 y \mathbf{f} , se obtienen estimaciones de las constantes que aparecen en (A.5) y (A.6) dadas por

$$C_1(t) \leq Ke^{Kt}, \quad (\text{A.7})$$

y

$$C_2(t) \leq \tilde{K}t^{-1/2}e^{Kt}, \quad (\text{A.8})$$

en cualquier intervalo $(0, T)$ sobre el cual la norma Dirichlet $\|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2}$ de la velocidad (o una norma en L^p apropiada) permanezca uniformemente acotada. Si los datos \mathbf{f} y \mathbf{u}_0 son suficientemente *pequeños*, entonces $C_1(t)$ y $C_2(t)$ permanecen uniformemente acotados a medida que $t \rightarrow \infty$. El comportamiento singular del estimado para la presión, $C_2(t) \sim t^{-1/2}$ a medida que $t \rightarrow 0$, es debido a una dificultad de carácter técnica, la cual puede ser inherente al problema. En los casos especiales en que $\mathbf{u}_0 = 0$ y $\mathbf{f} \equiv 0$, se puede probar que $C_2(t)$ permanece acotado a medida que $t \rightarrow 0$.

La presión discreta p_h está determinada sólo modulo un subespacio N_h de L_h . El espacio N_h siempre contiene a las constantes reales, R , pero es más grande para algunas elecciones de los espacios H_h y L_h .

En [40] se hacen suposiciones adicionales: que la solución a ser aproximada sea estable, y bajo esta suposición se obtienen cotas uniformes para $C_1(t)$ y $C_2(t)$ a medida que $t \rightarrow \infty$, sin requerir que u_0 y \mathbf{f} sean pequeños. Este tipo de resultados, comenzando por suponer estabilidad de la solución, es particularmente importante y útil al tratar con las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto se debe a que es muy difícil probar estabilidad a partir de

suposiciones sobre los datos, excepto cuando los datos son lo suficientemente pequeños como para heredar o vincular estabilidad de energía universal, mientras que por otro lado, en situaciones especiales, aún cuando los datos no sean pequeños, la estabilidad puede estar fuertemente sustentada por observaciones experimentales.

En [41] se presentan estimaciones de error de más alto orden de la forma

$$\| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h(t)) \|_{L^2} \leq h^m C_1(t), \quad (A.9)$$

$$\| (p - p_h)(t) \|_{L^2/\mathcal{N}_h} \leq h^{m-1} C_2(t); \quad (A.10)$$

para los espacios de elemento finito \mathbf{H}_h y L_h , los cuales poseen las correspondientes propiedades de aproximabilidad de orden m , o sea, aquellas típicas para \mathbf{H}_h y L_h consistentes de funciones polinomiales por pedazos de grado menor o igual a $m - 1$ y $m - 2$ respectivamente. De hecho, si uno supone una solución suficientemente regular, particularmente que $\| \mathbf{u}(t) \|_{H^m}$ y $\| p(t) \|_{H^{m-1}/R}$ permanezcan acotadas a medida que $t \rightarrow 0$, uno puede probar estas estimaciones de más alto orden de manera análoga a (A.5) y (A.6). Sin embargo, estas estimaciones de error requieren de una regularidad de la solución que no puede ser supuesta de una manera realista; se cumple sólo en presencia de condiciones de compatibilidad no locales de varios órdenes para los datos \mathbf{u}_0 y \mathbf{f} , en el tiempo $t = 0$. Por ejemplo, se muestra que si $\| \mathbf{u}(t) \|_{H^3}$ permanece acotada a medida que $t \rightarrow 0$, lo cual es necesario para una estimación de error de la forma $\| (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) \|_{L^2} \leq h^3 C$, uniforme a medida que $t \rightarrow 0$, entonces debe necesariamente existir una solución $p_0 \in H^1(\Omega)/R$ del problema de Neumann sobredeterminado

$$\Delta p_0 = \nabla \cdot (\mathbf{f}(\cdot, 0) - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0) \text{ en } \Omega, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla p_0 |_{\partial\Omega} = (\Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}(\cdot, 0) - \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0) |_{\partial\Omega}, \quad (\text{A.12})$$

para la presión inicial. Esto equivale a una condición de compatibilidad que debe ser satisfecha por \mathbf{u}_0 y \mathbf{f} . Debido a su naturaleza no local, ésto es virtualmente imposible de verificar para datos dados. En ausencia de tales condiciones de compatibilidad, estimaciones para la solución de la forma

$$\| \mathbf{u}(t) \|_{H^m} \leq ct^{1-m/2}, \quad (\text{A.13})$$

$$\| p(t) \|_{H^{m-1}/R} \leq ct^{1-m/2}, \quad (\text{A.14})$$

para $m \geq 2$ permanecen válidas a medida que $t \rightarrow 0$. Lo anterior da la base para que en [41] se den estimaciones de error de más alto orden de la forma (A.9) y (A.10) con $3 \leq m \leq 5$, tanto locales como globales. Para las locales se tiene

$$C_1(t) \leq K\tau^{1-m/2}(t)e^{Kt}, \quad (\text{A.15})$$

$$C_2(t) \leq K\tau^{1/2-m/2}(t)e^{Kt}, \quad (\text{A.16})$$

con $\tau = \min\{t, 1\}$ y $0 < t < T$ (Teorema 3.1); y para las globales, suponiendo cierto tipo de estabilidad exponencial en \mathbf{u} , con $1 < t < \infty$ (Teorema 3.2).

En [39], [40], y [41], se trata con aproximaciones discretas espacialmente y continuas en tiempo. En [42], se estudian aproximaciones completamente discretas. Como en los casos anteriores se obtienen estimaciones tanto locales como globales para el error. Se trabaja con un esquema de Crank-Nicolson para la discretización temporal en la aproximación espacial previa de tipo Galerkin, usando la regla del trapecio. Para la demostración de la estimación de error global se requiere de una restricción con respecto al tamaño de paso temporal relativo al tamaño espacial de la malla. Se llega a estimaciones de error de la forma

$$\| \mathbf{U}_n - \mathbf{u}_h(t_n) \|_{\mathbf{L}^2} \leq (\Delta t)^2 F_1(t_n), \quad (\text{A.17})$$

$$\| P_n - p_h(t_n) \|_{L^2/N_h} \leq (\Delta t) F_2(t_n), \quad (\text{A.18})$$

en donde Δt es el tamaño de paso en el tiempo y $\{U_n, P_n\}$ representa la solución totalmente discretizada en el n -ésimo nivel de tiempo $t_n = n\Delta t$. Nuevamente la mayor dificultad aquí es la pérdida de la regularidad de la solución a medida que $t \rightarrow 0$. Consecuentemente, estimaciones de error de la forma (A.17) y (A.18) son válidas sólo como estimaciones de error suavizadas, salvo que los datos del problema satisfagan (A.11) – (A.12), que de no tomarse en cuenta, se llega a constantes de error $F_1(t)$ y $F_2(t)$, que se comportan como t^{-1} y $t^{-3/2}$, a medida que $t \rightarrow 0$.

Hasta ahora, no se han obtenido estimaciones de error de orden óptimo en el contexto de las ecuaciones de Navier-Stokes, bajo suposiciones realistas de los datos, con métodos multipaso de orden más alto, métodos de Runge-Kutta o métodos de pasos fraccionales.

En [37] se presenta un análisis de estabilidad y de convergencia para las ecuaciones de Navier-Stokes no estacionarias totalmente discretizadas mediante el método de elemento finito y el esquema θ de pasos fraccionarios. El método consiste en la solución subsecuente del problema de Stokes generalizado (ecuación parabólica lineal con la condición de incompresibilidad), la solución del problema de Burgers regularizado (ecuación parabólica no lineal), y, la corrección de la condición de incompresibilidad resolviendo nuevamente el problema de Stokes generalizado. La idea central detrás del uso de la técnica de gradiente conjugado para la solución de los problemas de Stokes y de Burgers es la de evitar el procedimiento de actualización de la ecuación de Poisson. Se llega en [37] al siguiente

TEOREMA: Supóngase que existe una única solución fuerte al problema de Navier-Stokes (4.1-4.4), con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas, en el intervalo $(0, T)$. Sea $\theta \in (0, 1 - \sqrt{2}/2)$, $\alpha \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1/3)$, y supongamos que el tamaño de paso en el tiempo es Δt y el tamaño de malla espacial h están relacionados con los datos mediante las siguientes condiciones de estabilidad

$$D_5 \left(\left(\nu \frac{\Delta t}{h^2} \right)^2 (\Delta t S(h))^2 \Lambda_T \right) \leq (1 - \delta) \theta \Delta t \alpha \nu,$$

en donde,

$$\begin{aligned} \Lambda_T &\equiv | \mathbf{u}_0 |^2 \\ + D_5 &\left(\left(\nu \frac{\Delta t}{h^2} \right)^2 \| \mathbf{u}_0 \|_h^2 + (\Delta t S(h))^2 | \mathbf{u}_0 |^2 \| \mathbf{u}_0 \|_h^2 + \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}^2(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega))} \right), \\ D_5 &= \left(\frac{1-2\theta}{\delta} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{1-2\theta}{\theta} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S(h) &= D_3 h^{-1}, \text{ en el caso conforme,} \\ S(h) &= D_3 h^{-(1+\epsilon)}, \text{ en el caso no conforme} \end{aligned}$$

en dos dimensiones y

$$S(h) = D_4 h^{-3/2}, \text{ en 3 dimensiones,}$$

con $\epsilon > 0$, $D_3 > 0$ y $D_4 > 0$.

entonces

(1) Las funciones $\mathbf{u}_{h,\Delta t}^i$ pertenecen a un conjunto acotado en $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}_h) \cap L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$, para $i = 1, 2$ y a un conjunto acotado en $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}_h) \cap L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$, para $i = 3$.

(2) Estas funciones convergen fuertemente a la única solución fuerte del problema de Navier-Stokes (4.1-4.4) en $L^2(0, T; [H_0^1(\Omega)]^n) \cap L^q(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$, para $q \in (1, \infty)$, a medida que $(h, \Delta t) \rightarrow \mathbf{0}_+$, en el caso de aproximaciones conformes y en $L^q(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$, para $q \in (2, \infty)$ para el caso no conforme.

Para la demostración de este teorema véase [37] pp. 13-23.

En [38] se describen resultados sobre convergencia y estabilidad relativos a dos métodos numéricos para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes no estacionarias. Los algoritmos son de una clase particular en lo que respecta a la discretización temporal (más precisamente del tipo Peaceman-Rachford), y fueron obtenidos mediante una ligera modificación del tratamiento numérico del método θ de R. Glowinski. Se describe primero la discretización completa del problema de Dirichlet homogéneo usando en general, aproximaciones externas de los espacios funcionales espaciales involucrados (una elección particular y simple de tal aproximación es el elemento finito estándar de Lagrange P_2 para el campo de velocidades cuando el fluido es bidimensional). Luego se establecen y prueban la convergencia y la estabilidad y se hacen algunos comentarios sobre el tratamiento numérico de otras condiciones de frontera (generalmente no homogéneas). Los resultados teóricos muestran que tales esquemas son (al menos) condicionalmente estables y convergentes.

En [11] se prueba que los esquemas implícitos de primer y segundo orden hacia atrás para las ecuaciones de Navier-Stokes no estacionarias, las cuales son incondicionalmente estables, puesto que la solución permanece acotada independientemente del tamaño de paso temporal y de la viscosidad. Sin embargo, esto es cierto si se resuelve el problema de manera exacta. De hecho se introduce inestabilidad numérica al resolver estos problemas no lineales usando un método iterativo. En este caso se deben tomar en cuenta las propiedades de convergencia del método iterativo. Se dan las condiciones suficientes para que algunos algoritmos iterativos converjan. Estas condiciones son generales, en el sentido de que sólo dependen de los parámetros de

las ecuaciones de Navier-Stokes y de los parámetros de discretización. Por ejemplo, para el Algoritmo SI (ver [11] pp. 28-29), se prueba que el método iterativo converge si se cumple que

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{4\nu}{U^2},$$

en donde $U \geq \|u_h^n\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Para el método de Newton (véase [11] pp. 29-30), se tiene que el algoritmo converge cuadráticamente si se cumple la siguiente relación:

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{2\nu}{1 + U^2},$$

donde $U \geq \|u_h^{n,k-1}\|_{L_\infty(\Omega)}$.

REFERENCIAS

- [1] B. Mohammadi and O. Pironneau, *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*, John Wiley and Sons, 1994.
- [2] U. Ghia, K.N. Ghia and C.T. Shin, High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method; *J. Comput. Phys.* 48, 387-411, (1982).
- [3] R. Schreiber and H.B. Keller, Driven Cavity flow by efficient numerical techniques, *J. Comput. Phys.* 40, 310-333, (1983).
- [4] E.J. Dean, R. Glowinski and O. Pironneau, Iterative Solution of the Stream Function-Vorticity Formulation of the Stokes Problem, Applications to the Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow; *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.*, 87, 117-155, (1991).
- [5] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach Science Publishers (1963)
- [6] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer Verlag (1988).
- [7] R. Peyret, T. D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flows*, Springer, New York (1982).
- [8] M. Tabata and S. Fujima, An Upwind Finite Element Scheme for High-Reynolds-Number Flows; *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Vol. 12, 305-322, (1991).
- [9] N. Kondo, N. Tosaka and T. Nishimura, Third-order Upwind Finite Element Formulations for Incompressible Viscous Flow Problems ; *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.*, 93, 169-187, (1991).
- [10] C-H. Bruneau and C. Jouron, An efficient Scheme for Solving Steady Incompressible Navier-Stokes Equations; *Journal of Comp. Physics* 89, 389-413 (1990).
- [11] H. Juárez, Numerical Simulation of Time-Dependent Viscous Flows in complex Geometries, Ph.D. Thesis. Mathematics Department, University of Houston (1996).

- [12] T. E. Tezduyar, J. Liou and D.K. Ganjoo, Incompressible Flow Computations based on the Vorticity-Stream Function and Velocity-Pressure Formulations, *Computers and Structures* Vol. 35, No. 4, pp 475-472 (1990).
- [13] R. Glowinski, *Finite Element Methods for the Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow. Introduction to the Control of the Navier-Stokes Equations; Lectures in App. Math., V. 28; AMS, (1991).*
- [14] M.O. Bristeau, R. Glowinski and J. Periaux, Numerical Methods for the Navier-Stokes Equations, *Comput. Phys. Report* 6, pp 73-187 (1987).
- [15] R. Glowinski and O. Pironneau, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations; *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 167-204, (1992).
- [16] E. J. Dean, R. Glowinski, C. H. Li, Supercomputer Solution of Partial Differential Equation Problems en Computational Fluid Dynamics and in control, *Computer Physics Communications*, 53, pp 401-439 (1989).
- item[[17]] M. Fortin, R. Glowinski, *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*, *Studies in Math. and its Applications*, Vol 15, North Holland-Amsterdam-New York-Oxford (1991)
- item[[18]] R. Glowinski and P. Le Tallec *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*, SIAM, Philadelphia (1989)
- [19] G. de Vahl Davis, Natural Convection in a Square Cavity: A Benchmark Solution, *Int. J. Numer. Methods Fluids*. Vol. 3, 249-264 (1983).
- [20] B. Ramaswamy, T.C. Jue and J. E. Akin, Semi-implicit and Explicit Finite Element Schemes for Coupled Fluid/Thermal Problems, *Int. Journal for Num. Methods in Engineering*, Vol 34, 675-696 (1992).
- [21] R. Iwatsu, Jae Min Hyn and Kunio Kuwahara, Mixed Convection in a Driven Cavity with a Stable Vertical Temperature Gradient, *Int. Journal Heat Transfer*, Vol 36, No. 6, 1601-1608 (1993).
- [22] Chin-Hsien Li, Roland Glowinski, Modelling and Numerical Simulation of Low-Mach-Number Compressible Flows, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol 23, 77-103 (1996).
- [23] H. Huang and B. R. Seymour, The No-slip Boundary Condition in Finite-Difference Approximations, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, 713-729 (1996).

- [24] L. Q. Tang and T. H. Tsang, A Least-squares Finite Element Method For Time-dependent Incompressible Flows with Thermal Convection; *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 17, 271-289 (1993).
- [25] H. Jiménez, Efecto del calor de respiración sobre la convección natural en el almacenamiento de granos en silos, Tesis Doctoral en proceso (UAMI).
- [26] A. Nicolás and F.J. Sánchez, An Operator Splitting Scheme for the Unsteady Navier-Stokes Equations; *Proceedings of VIII International Conference on Finite Elements in Fluids: New trends and applications*. K. Morgan, E. Oñate, J. Periaux, J. Peraire and O.C. Zienkiewicz (Eds.). CIMNE/Pineridge Press (1993).
- [27] A. Nicolás, F.J. Sánchez, Ecuaciones de Navier-Stokes no estacionarias: un esquema de descomposición de operadores, *Inf. Tecnológica*, Vol. 7, No. 6, pp 133-137 (1996).
- [28] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, New York, Springer-Verlag, (1984).
- [29] F. Sánchez, On some Splitting Methods for the Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, Ph.D. Thesis. Mathematics Department, University of Houston (1996).
- [30] H. D. Ceniceros, Convergence of a Reformulated Boundary Integral Method for Two Fluid Interfaces with Surface Tension; Ph.D. Thesis, Dept. of Mathematics, Courant Institute, New York University, (1995).
- [31] T. Ikeda, *Maximum Principle in Finite Elements Models for Convection-Diffusion Phenomena*; North-Holland Pub. Co., (1983).
- [32] B. Bermúdez, A. Nicolás, F. Sánchez, On Operator Splitting with Upwinding for the Unsteady Navier-Stokes Equations. *East-West Journal of Numerical Mathematics*. Vol 4. No.2 83-98 (1996).
- [33] A. Nicolás, F. Sánchez, B. Bermúdez, On Operator for the Navier-Stokes Equations at High Reynolds Numbers. *Computational Fluid Dynamics 96, Proceedings of the Third ECCOMAS C.F.D. Conference 9-13 September, Paris, France*. J.A.Désidéri, C.Hirsch, P. Le Tallec, M. Pandolfi, J. Periaux, 85-89 (1996).
- [34] B. Bermúdez, A. Nicolás and F.J. Sánchez, Operator Splitting and Upwinding for the Navier-Stokes Equations, Aceptado para su publicación en *Computational Mechanics Journal*.

- [35] B.Bermúdez y A.Nicolás, An Operator Splitting Numerical Scheme for Thermal/Isothermal Incompressible Viscous Flows, aceptado en International Journal for Numerical Methods in Fluids.
- [36] L.D. Landau and E.M. Lipschitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1959).
- [37] Petr Kloucek and F. S. Rys, Stability of the fractional step Θ -scheme for the non-stationary Navier-Stokes Equations, Siam Journal of Numerical Analysis, Vol. 31, No. 5, pp. 1312-1335 (1994)
- [38] E. Fernández Cara and Mercedes Marín B., The Convergence of two Numerical Schemes for the Navier-Stokes equations, Numer. Math. 55,33-60 (1989).
- [39] J. G. Heywood and R. Rannacher, Finite Element Approximation of the non-stationary Navier-Stokes Problem. Part I: Regularity of solutions and second order estimates for spatial discretization, SIAM Journal Numer. Anal. Vol. 19, No. 2, pp 333-345 (1982)
- [40] J. G. Heywood and R. Rannacher, Finite Element Approximation of the nonstationary Navier-Stokes Problem. Part II: Estability of the Solution and Error Estimates Uniform in Time, SIAM Journal Numer. Anal. , Vol. 23, No. 4, pp. 750- 777 (1986)
- [41] J. G. Heywood and R. Rannacher, Finite Element Approximation of the non-stationary Navier-Stokes Problem. Part III: Smoothing Property and Higher Order Estimates for Spatial discretization, Siam Journal Numer. Anal. Vol. 25, No. 3, pp 489-512 (1988).
- [42] J. G. Heywood and R. Rannacher, Finite Element Approximation of the nonstationary Navier-Stokes Problem. Part IV: Error Analysis for Second Order Time Discretization, Siam Journal Numer. Anal. Vol 27, No. 2, pp 353-384 (1990).
- [43] Max D. Gunzburger, *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows*, Academic Press (1989).
- [44] O. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, N.Y., (1969).
- [45] R.Temam, *Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes equations*, North Holland, Amsterdam (1977).

- [46] M. Berggren, Control and Simulation of Advection-Diffusion Systems; Master's Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, University of Houston, (1992).
- [47] J.L. Lions, *Quelque Méthodes de Résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).
- [48] C. Cuvelier, A. Seegal and A. Steenhoven, *Finite Element Methods and Navier-Stokes equations*, Reidel, Dordrecht (1986).
- [49] G. I. Marchuk, *Methods in Numerical Mathematics*, 2nd. Ed. Springer Verlag, N.Y. (1982).
- [50] R. Temam, Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, *Ann. Math. Pura Appl.*, LXXIV, pp 191-380 (1968).
- [51] Thomasset, F., *Implementation of Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag New York Inc. (1982).
- [52] Pironneau, O., On the Transport-Diffusion Algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations, *Num. Math.*, 38, pp. 309-332, (1982).
- [53] A. Nicolás-Carrizosa, A Finite Difference Approach to the Kuramoto-Sivashinsky Equation; *Advances in Numerical Partial Differential Equations and Optimization*, Proceedings of the Fifth Mexico-United States Workshop. SIAM; pp. 262-272, (1991).
- [54] M. Crouzeix, Approximations et Méthodes Iteratives de Résolution d'Inéquations Variationnelles et de Problèmes Non Linéaires, *Cahier de L'INRIA*, 12, pp 139-244, (1974).
- [55] G. Alduncin, Upwind Finite Element Approximation of the Advection-Diffusion Problem; *Advances in Numerical Partial Differential Equations and Optimization*, Proceedings of the Fifth Mexico-United States Workshop. SIAM; pp. 158-170, (1991).
- [56] J. L. Lions, R. Temam, and S. Wang, New Formulation of the Primitive Equations of Atmosphere and Applications, *Nonlinearity*, 5, 237-288, (1992).
- [57] J. L. Lions, R. Temam, and S. Wang, On the Equations of the Large-scale Ocean, *Nonlinearity*, 5, 1007-1053, (1992).
- [58] J. L. Lions, R. Temam, and S. Wang, Models for the Coupled Atmosphere and Ocean, *Computational Mechanics Advances* 1, 5-54. North-Holland (1993).

- [59] F. Abergel and R. Temam, On Some Control Problems in Fluid Mechanics, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1, 303-325, (1990).