



División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Física

**“Desentrañando la Paradoja de la
Información: Islas, Agujeros de Gusano
y No Conmutatividad en Agujeros
Negros de Reissner-Nordström Anti-de
Sitter”**

Tesis que presenta

Jorge Luis Haro Santiago
Matrícula: 2212801522
Correo: jorgeluisharo@gmail.com

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física)

Director de Tesis: Dr. Marco Antonio Maceda

Jurado:

Presidente: Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría
Vocal: Dr. Mariano Chernicoff Minsberg
Secretario: Dr. Orlando Guzmán López

Iztapalapa, CDMX, 27 de Mayo del 2024.

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi madre, cuya dedicación y amor han sido la fuente inagotable de mi fortaleza. Su apoyo incondicional ha sido la luz que me ha guiado en cada paso de mi vida.

A Andrea mi querida novia, agradezco tu paciencia, comprensión y aliento constante. Tu presencia ha sido mi refugio, y tus palabras de ánimo han sido el impulso necesario para superar los obstáculos a los que en estos años me he enfrentado.

A mi tío Jesús, agradezco sinceramente tu sabiduría y orientación. Tus consejos han sido invaluablemente perspicaces, y tu apoyo ha sido un faro que ha iluminado mi trayectoria.

No puedo pasar por alto expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Marco Maceda Santamaría por su siempre presente y precisa guía a lo largo de este proceso de investigación. Las discusiones estimulantes, las sugerencias certeras y la paciencia constante que ha demostrado han enriquecido enormemente mi comprensión del campo y han contribuido de manera directa a la calidad de este trabajo.

Agradezco profundamente al Dr. Orlando Guzmán y al Dr. Mariano Chericoff por sus valiosas correcciones y perspectivas, que han enriquecido significativamente mi aprendizaje y mi trabajo.

También me gustaría agradecer al CONAHCYT por la beca de maestría que me fue otorgada.

A cada uno de ustedes, les debo más de lo que las palabras pueden transmitir. Este logro no solo es mío, sino también de aquellos que han estado a mi lado, brindando su apoyo y amor incondicional.

Resumen

En la intrincada travesía a través de la física de agujeros negros, este trabajo se ha sumergido en la exploración profunda de la Paradoja de la Información. En un esfuerzo por desentrañar los misterios fundamentales que rodean la conservación de la información en fenómenos físicos, se han introducido herramientas innovadoras, como la holografía y el método de réplicas, sentando así los cimientos teóricos esenciales.

La investigación se ha dividido en dos etapas: la primera, estableciendo los fundamentos teóricos necesarios, y la segunda, adentrándose en la complejidad de trabajar con entropía en espacios-tiempos curvos no triviales. Destacando avances pioneros, se ha revelado un mecanismo “clásico” para obtener una curva de Page durante la evaporación de agujeros negros.

La contribución principal de este trabajo se centra en la aplicación de la fórmula de las islas al caso de agujeros negros extremales de Reissner - Nordström anti-de Sitter, abordando la imposibilidad de comparar entropías y por lo tanto la obtención de la curva Page debido a divergencias. Este obstáculo se supera mediante el ingenioso uso de la no conmutatividad, sin embargo el resultado obtenido no es el esperado y se mantiene la duda sobre el tiempo de Page para este caso. La solución no satisfactoria del problema abre nuevas interrogantes y pone en tela de juicio el resultado que se obtiene mediante el método de islas, tal vez no en su validez, pero sí en la información que este otorga acerca del agujero negro que se está estudiando y sobre el cual el método se está aplicando.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	v
Introducción	XI
I Parte 1	1
1. Agujeros negros y Termodinámica: De Einstein a Hawking	3
1.1. Introducción a las ecuaciones de campo de Einstein	4
1.1.1. Acción de Einstein-Hilbert	6
1.2. Métrica de Schwarzschild	8
1.2.1. Diagrama de Penrose	13
1.3. Termodinámica de agujeros negros	14
1.3.1. Radiación y temperatura de Hawking	15
1.3.2. Termodinámica de agujeros negros	20
1.3.3. Evaporación de Agujeros Negros	26
2. Más allá de la termodinámica clásica: Entropía de entrelazamiento, paradoja de la información y la curva de Page en agujeros negros	29
2.1. Estados puros y mixtos	30
2.1.1. Estados puros	30
2.1.2. Estados mixtos	30
2.2. Entropía de entrelazamiento	31
2.2.1. Entropía de grano grueso	33
2.3. Paradoja de la información	34
2.4. Curva de Page	38
3. Introducción a la correspondencia AdS/CFT y la entropía de entrelazamiento holográfico: Conceptos básicos y aplicaciones.	41
3.1. Teorías conformes de campo (CFTs)	42
3.2. Espacio de Anti de Sitter (AdS)	46
3.3. Diccionario Holográfico	49

3.4. Entropía de entrelazamiento holográfico	50
3.4.1. Derivación heurística de la fórmula RT	51
3.4.2. Ejemplos de cálculo de la entropía de entrelazamiento	53
4. Introducción al método de réplicas	61
4.1. Introducción	61
4.2. Uso del método de réplicas	62
4.2.1. Modelo de energía aleatoria	62
4.2.2. Solución de réplica al modelo de energía aleatorio	62
5. Modelo de Jackiw-Teitelbom (J-T) y gravedad dilatónica	69
5.1. Introducción	69
5.2. Gravedad en dos dimensiones	70
5.2.1. Modelo de Teitelboim	73
5.2.2. Teoría generalizadas de dilatón (GDT)	74
II Parte 2	75
6. Entropía de la radiación de Hawking	77
6.1. Introducción	77
6.1.1. Ordenando entropías	77
6.1.2. Entropía generalizada	79
6.1.3. Evaporación de agujeros negros	81
6.2. Entropía de la radiación	82
6.3. Cuña de entrelazamiento (“Entanglement Wedge”)	85
6.3.1. Hipótesis de reconstrucción de la cuña de entrelazamiento	87
6.4. Agujeros de gusano replicados	88
6.4.1. El modelo	88
6.4.2. Una cantidad intermedia	90
6.4.3. La entropía de grano fino	93
7. Islas en los agujeros negros de Reissner-Nordström anti-de Sitter	101
7.1. Introducción	101
7.2. La métrica de Reissner-Nordström y la fórmula de las islas.	102
7.2.1. Entropía de BH para el caso no extremal	103
7.2.2. Entropía de BH para el caso extremal	104
7.2.3. Entropía de entrelazamiento para el caso no extremal.	104
7.2.4. Entropía de entrelazamiento para el caso extremal	109
7.3. Métrica no conmutativa de Reissner-Nordström-anti-de Sitter de gran dimensión.	111
7.3.1. No conmutatividad	112
7.3.2. Cálculo de la entropía para el caso extremal	115
8. Conclusiones	121

Índice de figuras

1.1. El diagrama de Kruskal para la solución de Schwarzschild. Obtenido de (Stephani, 2004, pp.306)	12
1.2. Diagrama de Penrose para el agujero negro de Schwarzschild . .	14
1.3. Potencial $V(r)$ para ϕ_{00} en $3 + 1$ dimensiones. El potencial corta el eje r en $2M$	20
2.1. Entropía de Hawking (entropía de la radiación exterior) antes y durante un momento de la evaporación.	35
2.2. Entropía de Hawking hasta el momento después de la saturación.	36
2.3. Entropía de Hawking y entropía BH acotando la curva de Page. .	37
2.4. Curva de Page	38
2.5. Entropía de la radiación de Hawking contra el tiempo para un agujero negro inicialmente puro.	40
4.1. Función $g(Q)$ para el modelo de energías aleatorias, la línea punteada corresponde a los puntos silla $Q_{RS,1}$ y la línea continua a los puntos silla $Q_{RS,0}$	66
6.1. Sistema de dos lados AdS_2 inicialmente con condiciones de frontera reflectantes (línea negra sólida vertical) en su frontera derecha. Una copia independiente B de nuestra CFT en la mitad derecha del espacio de Minkowski la cual jugará el papel de baño, también empieza con condiciones de frontera reflectantes. En algún tiempo finito (punto amarillo), la frontera derecha AdS_2 vuelve sus condiciones de frontera transparente, permitiendo así el acoplamiento de AdS_2 CFT al baño CFT.	82
6.2. Entropía termodinámica del agujero negro (línea punteada) y entropía generalizada sin islas (línea sólida).	83
6.3. Contribuciones con y sin islas para la entropía, el resultado correcto es la de valor mínimo para cada instante de tiempo de modo que se dibuja la curva de Page siguiendo las contribuciones primero sin islas (línea sólida) y luego con islas (línea gris)	84

6.4. Dada una región Σ de una rebanada espacial, mostrada en rojo, podemos definir su diamante causal como todos los puntos donde la evolución es determinada de forma única por las condiciones iniciales en Σ	86
6.5. Cuña de entrelazamiento de la radiación (azul oscuro) y el agujero negro (azul claro). Superficie de corte (curva roja), horizonte (línea punteada negra).	86
6.6. Cuña de entrelazamiento de la radiación (azul oscuro) y el agujero negro (azul claro). Superficie de corte (curva roja), horizonte (línea punteada negra); se presenta además la QES así como la isla dentro del horizonte de sucesos.	87
6.7. Cuña de entrelazamiento de la radiación (azul oscuro) y el agujero negro (azul claro). Superficie de corte (curva roja), horizonte (línea punteada negra).	88
6.8. Entropía en la aproximación plana graficada con línea sólida, aproximación numérica eq.(6.65) graficada con línea discontinua para el caso $\beta = 3$ y μ grande. La línea punteada corresponde al ensamble micronecanónico [1, fig:7].	100

Introducción

En el ámbito de la física de agujeros negros, la Paradoja de la Información se presenta como un desafío de considerable envergadura, cuestionando los principios fundamentales que rigen nuestra comprensión sobre la conservación de la información en los fenómenos físicos.

Esta tesis se sumerge en un viaje de exploración, tomando como guía el trabajo vanguardista de [2] quienes en su artículo seminal, introdujeron conceptos innovadores como “agujeros de gusano de réplica”. Este enfoque se revela como un instrumento esencial para recrear la fórmula de las islas con un método semiclásico, marcando un hito crucial en la resolución de la Paradoja de la Información. A través de esta exploración, se busca no solo entender la conexión íntima entre los agujeros negros, la evolución de la curva de Page y la radiación de Hawking, sino también avanzar hacia la superación de esta paradoja intrínseca, además de la aplicación de los resultados a métricas que nos permitan entender su funcionamiento.

Además, la investigación de [1], ha contribuido significativamente a la comprensión de las dinámicas del interior de los agujeros negros. Su enfoque en los agujeros de gusano de réplica ofrece un marco teórico sólido para abordar aspectos esenciales de la paradoja, como la estructura del interior del agujero negro y la relación entre la radiación de Hawking y la información perdida. Estos trabajos pioneros no solo desentrañan aspectos cruciales de la paradoja, sino que también sirven como pilares sobre los cuales construimos nuestra exploración teórica. En este contexto, nuestro objetivo es el de contribuir al discurso en evolución sobre la Paradoja de la Información al integrar conceptos clave de los trabajos antes mencionados, y explorar dimensiones adicionales como la no conmutatividad en el contexto de agujeros negros extremos. La introducción de la no conmutatividad abre nuevas vías de comparación, lo que permite comprender la compleja danza entre la gravedad cuántica, la evolución de la curva de Page y la teoría de la información.

La primera mitad de este trabajo establece las bases en un momento donde la holografía emerge como una herramienta esencial en la exploración gravitacional. Además, exploramos el método de réplicas, valioso en termodinámica y esencial en el cálculo de la entropía para casos complejos. La segunda mitad se sumerge en la complejidad de trabajar con la entropía

en espacios-tiempos curvos y sus consecuencias en métricas no triviales. Vinculamos estas herramientas con el espacio anti de Sitter, un terreno fértil para nuestras ideas. A medida que avanzamos, presentamos avances innovadores para la solución de la Paradoja de la Información, desentrañando el mecanismo “clásico” para obtener una curva de Page durante la evaporación de un agujero negro mediante la fórmula de las islas.

Esta investigación se inserta en un diálogo fascinante entre dos momentos críticos en la evolución de la física. El problema del cuerpo negro, que en el siglo pasado catalizó una revolución conceptual en la teoría cuántica, planteó interrogantes fundamentales sobre la naturaleza de la radiación electromagnética. Inesperadamente, el camino trazado por los visionarios del siglo XX converge con nuestra exploración de la curva de Page y, por extensión, con la enigmática Paradoja de la Información que nos desafía en el presente.

Este estudio no solo se ubica en la vanguardia de la investigación contemporánea sobre agujeros negros, sino que establece un vínculo conceptual que conecta los enigmas cuánticos de épocas anteriores con las incertidumbres actuales en la comprensión de la información en el cosmos. Más aún, la resolución de la Paradoja de la Información no simplemente constituye un desafío teórico contemporáneo; promete tener repercusiones paradigmáticas que pueden compararse, e incluso superarse, a las del intrigante problema del cuerpo negro del siglo pasado. Del mismo modo en que la solución a ese problema condujo a una transformación radical en la teoría cuántica y en nuestra comprensión fundamental de la naturaleza, superar la Paradoja de la Información podría inaugurar una nueva era en la física teórica. Su eventual resolución no solo arrojaría luz sobre los aspectos más complejos de la gravedad cuántica y la teoría de la información, sino que también sentaría las bases para un cambio conceptual de magnitud similar al que marcó la revolución cuántica del siglo XX. La trascendencia potencial de este trabajo resalta su importancia y enfatiza la necesidad de abordar estos misterios con la seriedad que la historia de la física nos exige reconocer. En el entramado de teorías y desafíos que caracteriza esta introducción espero, que este viaje no solo expanda el conocimiento, sino que también inspire reflexiones profundas y genere nuevos interrogantes en el fascinante terreno de la física teórica, en específico en el entendimiento de los agujeros negros y la gravitación.

Parte I

Parte 1

Capítulo 1

Agujeros negros y Termodinámica: De Einstein a Hawking

Iniciar un trabajo de esta magnitud siempre presenta una complejidad inherente debido a las múltiples interconexiones entre distintos ámbitos de la física, lo que complica la tarea de condensar un siglo de avances en la materia en unos pocos capítulos. El desafío se inicia al abordar las ecuaciones de campo de Einstein y explorar su relevancia en el estudio de los agujeros negros. Este primer capítulo se dedica a establecer una base teórica sólida que facilitará el análisis de los diversos temas avanzados que abordaremos en las secciones subsiguientes de la tesis.

Dicho lo anterior, podemos organizar el capítulo de la siguiente forma: Comenzamos por hacer una breve reseña de la relatividad general de Einstein, introduciendo las ecuaciones de campo de Einstein y la acción de Einstein-Hilbert. A continuación, describiremos las condiciones que dan origen a la métrica Schwarzschild como solución a las ecuaciones de campo y discutimos sus características físicas, como el horizonte de eventos y la singularidad, elementos que son esenciales para entender la naturaleza de los agujeros negros.

Una vez establecida esta base, procederemos a introducir los diagramas de Penrose como una herramienta para representar la estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild, aprovechando su claridad en la representación de conceptos complejos. Esto nos llevará al estudio de la temperatura de Hawking, un fenómeno que nos obliga a considerar los efectos cuánticos en la física de agujeros negros, y a la entropía de Bekenstein-Hawking, que nos proporciona una ventana a la termodinámica de estos enigmáticos objetos.

Finalizaremos abordando un poco acerca de la evaporación de los agujeros negros, veremos como es que existe tal fenómeno además de un breve cálculo clásico que nos permitirá poner sobre relieve lo que significa este proceso en la escala temporal humana y sentará ciertas bases conceptuales para los siguientes

capítulos.

1.1. Introducción a las ecuaciones de campo de Einstein

La formulación de la relatividad general encuentra su origen en el trabajo realizado por Albert Einstein en 1915 [3], en dicho artículo, se da una formulación a las ecuaciones de campo de Einstein transformando nuestra comprensión de la naturaleza del universo. La idea “innovadora” dentro de este trabajo fue proponer que la gravedad no es una fuerza en el sentido tradicional, sino el efecto de la curvatura del espacio-tiempo causada por la distribución de masa y energía. Las ecuaciones de Einstein no solo explicaron las observaciones que desafiaban la teoría Newtoniana, sino que también predijeron fenómenos completamente nuevos, como la existencia de agujeros negros y las ondas gravitacionales, conceptos que han sido confirmados experimentalmente y que siguen siendo fundamentales en la física moderna.

Para el desarrollo de esta sección utilizaremos el libro de *Relativity: An introduction to special and general relativity* [4, p.173-185] como base, se harán referencias esporádicas a otros trabajos que serán mencionadas de forma oportuna en el texto.

En el contexto de Relatividad General (GR por sus siglas en inglés), el concepto de materia se encuentra definido por todo aquello que produce un campo gravitacional, esto es, aquello que contribuye al tensor de energía momento. Para poder derivar las ecuaciones de campo es necesario plantear algunos requerimientos plausibles, estos son

- Las ecuaciones de campo deben de ser ecuaciones tensoriales (independencia de las leyes de la naturaleza a los sistemas coordenados)
- Deben ser ecuaciones diferenciales parciales de a lo mucho segundo orden para las funciones a determinar (los componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$), que son lineales en las derivadas de mayor orden.
- Deben de (en el límite apropiado) ir a la ecuación de Poisson:

$$\nabla U = 4\pi G\mu, \quad (1.1)$$

de la teoría de gravitación de Newton. Aquí U es el potencial, G es la constante gravitacional Newtoniana y μ es la densidad de masa.

- Dado que el tensor de energía momento $T^{\mu\nu}$ es el análogo relativista especial de la densidad de masa, debería ser la causa o fuente del campo gravitacional.
- Si el espacio es plano, $T^{\mu\nu}$ debe anularse.

Con estos requerimientos se puede plantear que las ecuaciones de campo deben de tener la siguiente estructura

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

con una constante κ que deberá ser determinada. Debemos usar que el tensor de energía momento debe tener divergencia igual a 0 (generalización de la ley de conservación de la energía-momento en relatividad especial) y ser simétrico (expresando la ley de conservación del momento angular en Relatividad Especial) lo cual implica para la ecuación anterior lo siguiente:

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \quad \text{y} \quad G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}. \quad (1.3)$$

Existe solo un tensor de segundo orden el cual es lineal en las componentes del tensor de curvatura y el cual satisface (1.3)[5, p.73], dicho tensor es $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Dado que el tensor métrico también satisface (1.3), $G^{\mu\nu}$ tiene la forma:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

La constante Λ es la constante cosmológica, introducida por Einstein (1917). Su propósito inicial era permitir la existencia de un universo estático, evitando la expansión o contracción que predecían las ecuaciones de Einstein al no estar dicha constante presente. Einstein la considero como el mayor error de su carrera, esto después de que Edwin Hubble observará la expansión del universo [6]. Sin embargo, la constante cosmológica ha encontrado una nueva vida y un significado profundo en cosmología, especialmente con el descubrimiento de la aceleración de la expansión del universo. Este término actúa como una forma de energía del vacío con una presión negativa, siendo crucial para explicar las observaciones cosmológicas que se hacen actualmente. Más adelante, exploraremos en detalle el espacio de Anti-de Sitter, que incorpora una constante cosmológica negativa y es fundamental en el marco de la correspondencia AdS/CFT. Dicho lo anterior podemos distinguir entre dos casos $\Lambda = 0$ y $\Lambda \neq 0$, de momento asumiremos el primero. Así, el tensor de Einstein tiene la siguiente forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

De esta forma es posible llegar a las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

Estas ecuaciones fueron derivadas por Einstein después de diez años de trabajo en 1915, y sin embargo resulta interesante saber que fueron también publicadas casi simultáneamente por Hilbert [7], la diferencia entre ambos trabajos resulta de la forma en que el problema matemático es atacado, en su caso Hilbert utilizó el principio variacional para derivar las ecuaciones.

Las ecuaciones de campo de Einstein (1.6), constituyen un sistema de diez diferentes ecuaciones para determinar las diez funciones métricas $g_{\mu\nu}$. Debemos

notar, que incluso con condiciones iniciales fijas, este sistema no posee una solución única; siempre debe ser posible realizar un cambio de coordenadas arbitrario. De hecho, es esta falta de determinación específica en el sistema de ecuaciones de campo la que está asegurada por la existencia de las identidades de Bianchi contraídas

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = \kappa \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.7)$$

Estas identidades expresan el hecho de que las diez ecuaciones de campo no son todas independientes unas de otras. La ecuación anterior nos muestra que las ecuaciones de Einstein son integrables y libres de contradicción interna solo si la divergencia del tensor de energía momento es igual a 0. “El espacio no es el escenario para los eventos físicos, sino un aspecto de la interacción y movimiento de la materia” [4, pp.176], esto es que el espacio es un actor activo en todos los eventos gravitacionales.

La última aclaración que tal vez sea conveniente tratar en esta sección, es la de la constante κ , dicha constante puede ser calculada tomando el límite Newtoniano de la teoría de Einstein (límite de campos gravitatorios débiles y velocidades mucho menores que la velocidad de la luz) [4, pp.177][8, pp.73]. El valor que resulta de hacer lo anterior es $\kappa = 8\pi G$ en donde se tomó $c = 1$.

1.1.1. Acción de Einstein-Hilbert

Sabemos que todas las ecuaciones físicamente significativas, fundamentales conocidas, pueden ser derivadas de un principio variacional, esto incluye por supuesto a las ecuaciones de campo de Einstein [4, pp.182]. La densidad Lagrangiana (escrita como $\mathcal{L}$) es una función que guarda toda la dinámica de un sistema y que cuando es integrada nos da una acción, dicha acción la definimos de la siguiente forma

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^4x. \quad (1.8)$$

La acción es un funcional que toma la trayectoria (también llamado camino o historia) de un objeto como argumento y regresa un escalar. El principio de mínima acción nos dice que los objetos en movimiento siguen el camino que minimiza la acción ($\delta\mathcal{S} = 0$) [9, pp.9]. Para que nosotros podamos obtener las ecuaciones de campo de Einstein de la variación de la densidad Lagrangiana siguiendo el principio de mínima acción debemos pedir que dicha densidad $\mathcal{L}$ sea producto de un escalar L y $\sqrt{-g}$. Para campos gravitacionales puros existe solo un escalar único el cual es cuadrático en sus primeras derivadas con respecto a la métrica y que es lineal en sus segundas derivadas, este es el escalar de curvatura R . Como la materia debe ser representada también en L , la acoplamos añadiendo una parte κL_M que surge de la distribución de materia como por ejemplo de un campo electromagnético. Así entonces el principio variacional planteado por Hilbert [7] tiene la siguiente forma

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int \left[\frac{1}{2} R + \kappa L_M \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (1.9)$$

Podemos iniciar aplicando la variación de forma explícita a la ecuación anterior (1.9)

$$\delta S = \frac{1}{2} \int [R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \delta(2\kappa L_M\sqrt{-g})] d^4x = 0, \quad (1.10)$$

en donde utilizamos que el escalar de curvatura está dado por la contracción del tensor de Ricci $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Cada uno de los términos que aparecen variados con respecto a la métrica, pueden escribirse de la siguiente forma de acuerdo las definiciones y forma de cada uno de sus componentes (por cuestiones de espacio solo escribimos los resultados, pero si el lector así lo decide puede revisar los capítulos 16 y 19 de [4] en donde aparece el origen de estas cantidades):

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \quad (1.12)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = -(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})_{,\nu} + (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})_{,\alpha} - \delta(\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}), \quad (1.13)$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu})]_{,\alpha} \equiv F_{;\alpha}^{\alpha}. \quad (1.14)$$

Para nosotros poder trabajar y comprender el último término de la ecuación 1.10, necesitamos conocer precisamente la densidad Lagrangiana de la materia L_M . Para la determinación de esta cantidad, recurrimos a la fórmula de transcripción estándar [4, pp.183]. Comenzamos con la Lagrangiana relativista-especial correspondiente y sustituimos las derivadas parciales por derivadas covariantes, utilizando el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ en lugar de $\eta_{\mu\nu}$ para formar productos escalares. Por lo tanto, L_M puede incluir símbolos Christoffel, pero no segundas derivadas de la métrica, ya que generalmente se construye solo a partir las cantidades de campo y sus primeras derivadas. Podemos entonces escribir

$$\delta(\sqrt{-g}L_M) = \frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \left(\sqrt{-g} \frac{\partial L_M}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} \delta g_{\mu\nu} \right)_{,\alpha}, \quad (1.15)$$

en donde se utilizó la abreviación siguiente para la derivada variacional

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g_{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} \right)_{,\alpha}. \quad (1.16)$$

Sustituimos (1.12), (1.14), (1.11), (1.15) en el principio variacional (1.10) obteniendo

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2} \int & \left[\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - R^{\mu\nu} + \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} + F_{;\alpha}^{\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial L_M}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} \delta g_{\mu\nu} \right)_{,\alpha} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Utilizando la ley de Gauss es posible reducir los últimos dos términos a una integral de superficie, dicha integral de superficie se anula si se cumple que $\delta g_{\mu\nu} = 0$ y $\delta \Gamma_{\beta\xi}^\alpha = 0$ en la frontera. La razón que sostiene esta demanda de anulación de las variaciones antes mencionadas, es que se está considerando solo las variaciones que no alteran las condiciones físicas en los límites del espacio-tiempo considerado. En otras palabras, estamos estudiando perturbaciones o cambios en el campo gravitacional que no modifiquen el espacio-tiempo en la “lejanía” de donde ocurren los fenómenos físicos de interés. Todo lo anterior se encuentra alineado con el concepto de que las condiciones en el infinito deben permanecer fijas para una teoría bien definida. Con esto en mente la variación de la acción se simplifica

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} + \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_M)}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (1.18)$$

Vemos entonces que para que nuestra igualdad sea cero, debe de cumplirse que haya una independencia de las variaciones de $\delta g_{\mu\nu}$ además de que el término en paréntesis que aparece en (1.18) debe de valer cero:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

con

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_M)}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.20)$$

llegando así a las ecuaciones de Einstein (1.6).

1.2. Métrica de Schwarzschild

Desde la formulación de las ecuaciones de campo de Einstein (1.6), se han descubierto diversas soluciones que arrojan luz sobre la naturaleza de la gravitación. Entre ellas, la solución de Karl Schwarzschild (1873-1916) [10] resalta por su claridad y relevancia, ofreciendo una de las perspectivas más accesibles para el estudio inicial de los fenómenos gravitacionales. La métrica de Schwarzschild fue encontrada en el frente de batalla ruso durante la Primera Guerra Mundial, tan solo un mes después de la publicación de la Teoría de la Relatividad General (GR por sus siglas en inglés) por Albert Einstein (1879-1955) en 1915, siendo así la primera solución exacta no trivial a las ecuaciones de campo de la GR¹. La solución de Schwarzschild resulta importante en nuestro estudio dado que es la primera vez que los físicos del siglo XX se encontraron con una singularidad (entendida en el contexto de geometría diferencial como un punto en que una superficie o variedad tiene una forma indefinida o discontinua, un punto donde

¹La historia detrás de Karl Schwarzschild resulta muy interesante, recordándonos que el conocimiento viene del trabajo arduo, la preparación y sobre todo del compromiso con la ciencia. Para saber un poco más es muy recomendado leer [11].

la curvatura se vuelve infinita) dentro de la teoría de la GR, sin embargo esta singularidad se encontraba presente en la mente de algunos científicos en el siglo XIX, tal es el caso de John Michel quien mediante cálculos simples pudo concluir que si la densidad de un cuerpo celeste es lo suficientemente grande, dicho cuerpo tendrá una velocidad superficial de escape mayor que la velocidad de la luz, dicho de otro modo, nada podrá escapar del cuerpo. A esto que más tarde sería considerado un agujero negro, él le llamo estrellas oscuras.

La métrica de Schwarzschild como ya se mencionó es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein. Las suposiciones necesarias para derivar la métrica son:

- El sistema es esféricamente simétrico; se usan coordenadas esféricas en conjunto con la métrica para obtener esta simetría.
- La solución asume condiciones de vacío $T_{\mu\nu} = 0$ y sin constante cosmológica ($\Lambda = 0$), así que solo se tiene que resolver $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$.
- La solución asume que el sistema es estático e invariante en el tiempo.

Con las anteriores podemos calcular los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y por lo tanto la solución buscada, en este trabajo solo escribimos el resultado, pero el procedimiento puede completo puede ser consultado en [9, pp.12][4, pp.185]; su elemento de línea es²:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.21)$$

¿Qué información podemos obtener de esta métrica?

Comenzamos con un breve repaso de las variables que conforman la métrica, tanto r como t son solo coordenadas y no tienen un significado físico inmediato. Llamamos a t la coordenada temporal para distinguirla, de por ejemplo el tiempo propio τ de un observador en reposo en el campo gravitacional; en el campo de Schwarzschild estas dos cantidades se encuentran relacionadas por

$$d\tau = \sqrt{1 - 2M/r} dt. \quad (1.22)$$

Dicho tiempo recordamos es invariante bajo transformaciones de coordenadas. La coordenada radial r se defina tal que el área superficial de una esfera con $r = cte$, $t = cte$ tenga el valor $4\pi r$. El desplazamiento infinitesimal en la dirección radial está dado por

$$ds = dR = \frac{dr}{\sqrt{1 - 2M/r}}. \quad (1.23)$$

Ahora, vemos de la forma que tiene la métrica (1.21); que en la parte de la componente g_{rr} existe una singularidad. Definimos singularidad (física) como

²En esta métrica $d\Omega^2$ representa el elemento de la métrica asociado a la 2-esfera unitaria

$$d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

una región del espacio-tiempo donde las magnitudes físicas como la curvatura, alcanzan valores infinitos o indefinidos, señalando un punto donde la teoría pierde su validez predictiva. Estas regiones se caracterizan por la divergencia de invariantes geométricos, como el escalar de Kretschmann³, implicando condiciones físicas extremas bajo las cuales se espera que la descripción clásica del espacio-tiempo se rompa. La “singularidad” que nos encontramos, se encuentra en $r = 2M$.

Un sistema coordenado singular puede dar evidentemente una falsa indicación de una singularidad del espacio. De esta forma, no basta con ver una singularidad como en el caso de nuestra métrica, sino que hace falta investigar si un cambio de coordenadas puede quitar dicha singularidad y si ese es el caso entonces la singularidad no se encuentra físicamente presente. Como se mencionó anteriormente podemos probar el escalar de Kretschmann además del determinante de nuestra métrica (también un invariante), en la superficie ($r = 2M$); si alguno de ellos o ambos divergen, entonces podremos concluir que la singularidad existe, de otra forma este no será el caso:

$$-g = r^4 \sin^2 \theta, \quad (1.24)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = 48M^2/r^6, \quad (1.25)$$

ambos resultados son diferentes de cero y regulares en la superficie estudiada. La superficie $r = 2M$ no constituye una singularidad física, pero es importante destacar que su interpretación va más allá de ser simplemente otra ubicación en el sistema de coordenadas. Si estudiamos el movimiento de un sujeto prueba (partícula) en el espacio en las cercanías de la superficie, encontraremos que el tiempo propio que a este le toma alcanzarla y cruzarla es finito, a diferencia del tiempo coordenado, que puede concebirse como el tiempo que mediría un observador “muy muy alejado”⁴ de la superficie y que tiende a infinito.

La superficie $r = 2M$ se conoce como horizonte de sucesos, su nombre proviene precisamente de la particularidad de la que hablamos en el párrafo anterior, y es que si el observador midiendo el tiempo coordenado tarda un infinito en marcar como completo el viaje de la partícula hacia la superficie, dicha superficie actuará como una barrera física, más allá de la cual la información queda inaccesible desde el exterior.

Podemos concluir entonces que las coordenadas que hemos estado utilizando no son las más adecuadas para describir los procesos físicos en las cercanías del

³Este escalar es un invariante geométrico que proporciona una medida de la curvatura del espacio-tiempo, independientemente del sistema de coordenadas. Se define como

$$K = R_{abcd}R^{abcd}$$

un valor infinito de esta cantidad indica la presencia de una singularidad

⁴Muy muy alejado es un término no exacto para referirnos a un punto lo suficientemente alejado para que los efectos gravitacionales estudiados sean despreciables. Técnicamente el punto debería estar situado en infinito, pero para fines prácticos esto no es necesario alcanzar tal extremo, ya que los efectos gravitacionales se vuelven insignificantes a distancias mucho menores que el infinito.

horizonte, y mucho menos dentro de este. Para superar estas limitaciones, se emplean diferentes sistemas de coordenadas, como las de Lemaitre [12], Eddington-Finkelstein [13] [14], y Kruskal-Szekeres [15] (por mencionar algunas), cada una con sus propios beneficios y restricciones.

Las coordenadas de Lemaitre, por ejemplo, resultan útiles para describir la caída libre de objetos hacia un agujero negro, mostrando como es que estos objetos cruzan el horizonte de sucesos, pero su inconveniente resulta en que la solución estática de Schwarzschild se describe mediante funciones métricas dependientes del tiempo. Las coordenadas de Eddington-Finkelstein, son efectivas para analizar el tránsito de partículas y radiación a través del horizonte de sucesos de un agujero negro, facilitando el estudio de las propiedades dinámicas de estos objetos; su limitación radica en que, al igual que las coordenadas de Schwarzschild, están centradas en el agujero negro y no cubren todo el espacio-tiempo de manera global (no proporcionan una visión completa, por ejemplo, de la geometría interna más allá del horizonte). Si introducimos un tiempo retardado por v

$$\begin{aligned} dv &= dt - dt^* = dt + dr/c(1 - 2M/r), \\ cv &= ct + r + 2M \ln(r - 2M) - 2M \ln 2M, \end{aligned} \quad (1.26)$$

dt^* es el tiempo que necesita un fotón que cae radialmente en el campo gravitatorio para completar la distancia dr . La métrica de Eddington-Finkelstein está dada por

$$ds^2 = 2cdrdv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - (1 - 2M/r)c^2dv^2, \quad (1.27)$$

en la cual los rayos viajando hacia dentro radialmente están descritos por $dv = 0$. En este contexto, las coordenadas de Kruskal-Szekeres se destacan por su capacidad de eliminar singularidades aparentes asociadas con el horizonte de sucesos en las coordenadas originales (como las anteriores métricas mencionadas), además de permitirnos visualizar de manera efectiva todo el espacio-tiempo, incluyendo tanto las regiones exteriores como las interiores a $r = 2M$. La extensión máxima de la métrica de Schwarzschild es una métrica que es completa, en el sentido de que incluye todas las regiones posibles y relevantes del espacio-tiempo asociadas con tal geometría y no admite una extensión adicional sin introducir singularidades o inconsistencias. Se logra mediante la introducción de coordenadas como el tiempo avanzado u (en la métrica (1.27)), que permiten el trazado sin ambigüedades a través del horizonte de eventos y la exploración de la geometría más allá de este límite, hacia la región interna del horizonte de sucesos

$$\begin{aligned} cu &= ct - r - 2M \ln(r - 2M) + 2M \ln 2M, \\ c(v - u) &= 2r + 4M \ln(r - 2M) - 4M \ln 2M. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Con esto obtenemos

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - c^2dudv(1 - 2M/r) \quad (1.29)$$

y luego haciendo las transformaciones de coordenadas

$$v' = e^{cv/4M}, \quad u' = -e^{-uc/4M}, \quad z = \frac{1}{2}(v' - u'), \quad \omega = \frac{1}{2}(v' + u'), \quad (1.30)$$

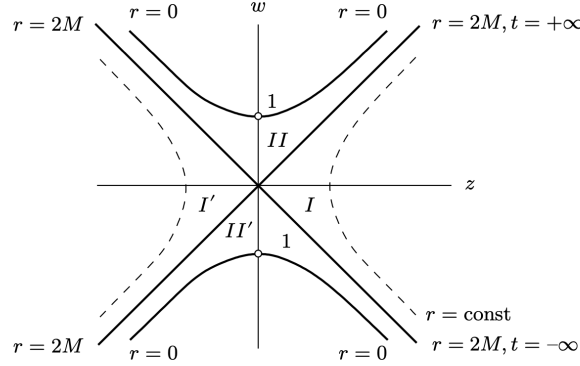


Figura 1.1: El diagrama de Kruskal para la solución de Schwarzschild. Obtenido de (Stephani, 2004, pp.306)

obtenemos la métrica de Kruskal representando la solución de Schwarzschild:

$$ds^2 = 32M^3 r^{-1} e^{-r/2M} (dz^2 - d\omega^2) + r^2(\omega, z)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.31)$$

la cual esta relacionada con la métrica original de Schwarzschild por

$$z^2 - \omega^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M}, \quad \frac{\omega}{z} = \frac{1 - e^{-2ct/4M}}{1 + e^{-2ct/4M}} = \tanh \frac{ct}{4M}. \quad (1.32)$$

Las coordenadas z y ω son espaciales y temporales respectivamente; pueden tomar valores positivos y negativos, pero están restringidos para que r sea positiva.

Con estas coordenadas nos encontramos en posición de estudiar como la singularidad surge para la métrica de Schwarzschild. Para esto hacemos referencia lo mostrado en la figura (1.1), la región marcada como I es el espacio exterior de la métrica de Schwarzschild ($r > 2M$, t infinito) en donde $z > |\omega|$. Los rayos $\omega = \pm z$, $z \geq 0$ forman la frontera de esta región, la cual se encuentra descrita en las coordenadas r y t por $t = \pm\infty$ o $r = 2M$. Si uno cruza esta frontera hacia el interior de la región II , entonces uno llega al interior de la métrica usual de Schwarzschild, las coordenadas de Eddington-Finkelstein (1.27) cubren precisamente estas dos regiones. Las regiones primadas pueden alcanzarse variando las coordenadas ω y z aún más, y son isométricas a las regiones sin primar: la extensión maximal de Schwarzschild cubre ambas partes tanto la interior como la exterior. No ocurren singularidades o fronteras, con la excepción de la singularidad genuina que encontramos en $r = 0$, la cual no puede ser eliminada por un cambio de coordenadas y que se encuentra representada por dos hipérbolas en el diagrama de Kruskal.

Sabemos que un observador o una partícula de prueba (diferente al fotón) viajara necesariamente a una velocidad menor a la de la luz, de esta forma su cono

de luz se encontrara limitado por rectas a 45° medidos desde el eje z , esto tiene implicaciones para las regiones que el observador puede alcanzar, ya que la división existente entre por ejemplo la región I e II , es a su vez una recta a 45° , las geodésicas nulas cumplen que $ds^2 = 0$ y por lo tanto $dz = \pm d\omega$. Físicamente esto se traduce en que cualquier señal, observador o partícula originada en I puede influenciar la región II , pero no puede hacer nada sobre las regiones I' y II' , la región II es lo que conocemos como un agujero negro (todo puede entrar, pero nada puede salir). El único destino posible al momento de cruzar el horizonte es la singularidad real en $r = 0$, sabemos que esta singularidad es real por dos razones expuestas hasta el momento en este capítulo: la primera es que tanto el determinante de la métrica como el invariante de Kretschmann divergen en el punto $r = 0$ y la segunda es que en los cambios de coordenadas realizados siempre se ha mantenido la singularidad en este punto a diferencia de aquella que habíamos encontrado en el horizonte de sucesos[4, p.304-309].

1.2.1. Diagrama de Penrose

Los diagramas de Penrose, desde su concepción por Sir Roger Penrose a mediados del siglo XX [16], han proporcionado una ventana única a la naturaleza del espacio-tiempo. A través de su capacidad para compactificar el infinito y preservar la estructura causal, estos diagramas han servido como herramientas invaluable en la comprensión y análisis de la geometría global de los agujeros negros. En la intersección de la teoría de la relatividad general y la teoría cuántica de campos en espacios curvos, los diagramas de Penrose emergen no solo como representaciones gráficas, sino como mapas que guían la exploración de fenómenos complejos, como el entrelazamiento cuántico y la información en el contexto de agujeros replicados, conceptos que desarrollaremos más adelante en esta tesis.

Para comprender su estructura explicaremos el diagrama de Penrose para un agujero negro de Schwarzschild, empezamos por la métrica como está escrita en (1.29)

$$ds^2 = c^2 du dv (1 - 2M/r) + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad r = r(u, v), \quad (1.33)$$

la cual se encuentra adaptada para rayos lumínicos; mapeamos las dos coordenadas nulas u y v a rangos infinitos por

$$\tan U = cu, \quad \tan V = cv. \quad (1.34)$$

esta transformación de coordenadas mapea el infinito tiempo-retardado y tiempo-avanzado (u y v tienden a $-\infty$ y ∞ , respectivamente) a un rango finito, lo cual es importante por que en este tipo de diagramas se busca que el infinito esté representado de manera finita en el diagrama para poder visualizar toda la estructura causal del espacio-tiempo. Con este cambio obtenemos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^{-2} U \cos^{-2} V (1 - 2M/r) dU dV + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \\ &= \Omega^{-2} [(1 - 2M/r) dU dV + r^2 \Omega^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \\ \Omega &= \cos U \cos V. \end{aligned} \quad (1.35)$$

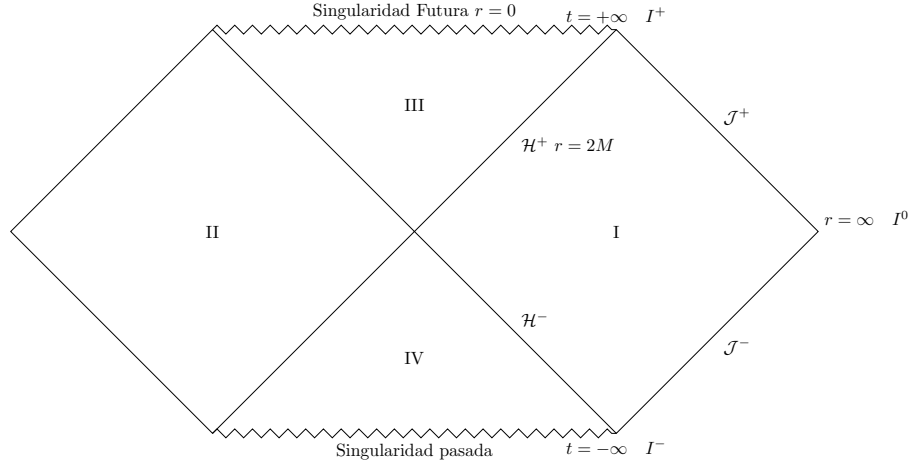


Figura 1.2: Diagrama de Penrose para el agujero negro de Schwarzschild

El factor Ω es un factor que hace que la métrica sea conforme al espacio-tiempo de Minkowski en el infinito, lo cual significa que mientras la métrica ya no es literalmente la métrica física del espacio-tiempo, aún preserva la estructura causal y las trayectorias de luz como líneas rectas a 45° . El factor Ω^2 que multiplica la métrica original de Schwarzschild para garantizar que la métrica resultante sea conforme, pero degenerada (igual a cero) en el infinito esto es que $\Omega = 0$ en $U = \pm \frac{\pi}{2}$ y/o $V = \pm \frac{\pi}{2}$. Dado que $r\Omega \neq 0$ en Ω , la frontera consiste en piezas de un cono de luz.

En la figura (1.2) el punto I^0 representa el infinito espacial, I^+ e I^- representan los infinitos temporales futuro y pasado respectivamente. J^- y J^+ representan el infinito nulo pasado y el infinito nulo futuro respectivamente esto es cuando $u \rightarrow -\infty$ con v fijo y $v \rightarrow \infty$ con u fijo.

1.3. Termodinámica de agujeros negros

Una vez que hemos establecido la estructura clásica de los agujeros negros a través de las ecuaciones de campo de Einstein y la métrica Schwarzschild, llegamos a una frontera en la que el tejido del espacio-tiempo se ve entrelazado con la mecánica cuántica. Esta sección del capítulo nos lleva a explorar algunas sutilezas de los campos cuánticos en la curvatura del espacio-tiempo. Aquí, la cuantización de campos en espacios curvos emerge como una especie de puente que conecta la comprensión de los efectos cuánticos con el horizonte de sucesos, un escenario donde se manifiesta la “radiación de Hawking”.

La transición de lo clásico a lo cuántico siempre es delicada y llena de sutile-

zas técnicas (100 años de realizar esta acción nos lo demuestran). El camino en nuestro caso se encuentra trazado por el estudio de una acción de un campo escalar en un espacio-tiempo bidimensional, una simplificación que filtra los elementos esenciales de la física de agujeros negros. Este paso no es menor, y es utilizado para ilustrar los fundamentos de la radiación de Hawking sin las complejidades matemáticas de un espacio de mayor dimensión. A pesar de su aparente simplicidad, esta aproximación bidimensional conserva la conformidad invariante y revela la naturaleza de la mecánica cuántica aplicada a la curvatura del espacio-tiempo.

El siguiente objetivo será unir nuestros resultados con la “termodinámica de agujeros negros”; haciendo esto, nos encontraremos con las leyes que gobiernan su entropía, temperatura y en última instancia su capacidad para emitir radiación como un cuerpo negro, proceso que nos comienza a adentrar en la evaporación gradual de estos objetos, enfrentándonos a que los agujeros negros no son eternos, sino entidades termodinámicas que evolucionan con el tiempo. Esta última sección del capítulo sentará las bases para el entendimiento de esta compleja interacción existente entre la gravedad (geométrica) y la cuántica, preparándonos para que podamos tratar más adelante la entropía de entrelazamiento, la paradoja de la información y la curva de Page.

1.3.1. Radiación y temperatura de Hawking

Antes de comenzar planteando la acción del problema, debemos hacer un paréntesis para dejar claras la coordenadas que utilizaremos, por que como vimos en la sección anterior, tenemos diversos recursos (coordenadas) que nos permiten estudiar diversos aspectos de una misma métrica de forma más sencilla. Para el desarrollo de esta sección utilizaremos la fantástica referencia de [17, pp.109-123] como base.

Para simplificar nuestros cálculos escribimos al horizonte como $r_g = 2M$, de esta forma la métrica de Schwarzschild en dos dimensiones (sin la parte angular) es:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (1.36)$$

Dividimos entre $d\lambda^2$ y dejamos que $ds^2 = 0$, de esta forma obtenemos:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0. \quad (1.37)$$

Que podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2}. \quad (1.38)$$

Vemos que el ángulo del cono de luz entre las coordenadas t, r decrece cuando r se aproxima a r_g . Después de la integración vemos que las geodésicas nulas salientes y entrantes satisfacen:

$$t = \pm r * +cte, \quad (1.39)$$

r^* es llamada coordenada tortuga y se encuentra definida por:

$$r^* = r + r_g \ln \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right). \quad (1.40)$$

Por lo tanto

$$dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (1.41)$$

el tensor métrico entonces se convierte en:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(r^*)} \right) [dt^2 - dr^{*2}]. \quad (1.42)$$

La coordenada de tortuga r^* es definida solo para $r > r_g$ y varia en el rango $-\infty < r^* < +\infty$. Cuando r se aproxima a r_g la coordenada r^* se va a $-\infty$ y lejos del agujero negro $r^* \rightarrow r$ cuando $r \rightarrow \infty$. Introducimos las coordenadas del cono de luz

$$\tilde{u} \equiv t - r^*, \quad \tilde{v} \equiv t + r^*, \quad (1.43)$$

el tensor métrico queda escrito de la siguiente forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(\tilde{u}, \tilde{v})} \right) d\tilde{u}.d\tilde{v} \quad (1.44)$$

Las coordenadas de tortuga $\tilde{u}, \tilde{v}$ son de la misma forma que las coordenadas de Schwarzschild originales singulares y solo cubren el exterior del agujero negro; y de hecho si hemos puesto atención notamos que estas coordenadas ya habían sido introducidas anteriormente, aunque no de forma explicita, cuando tratamos las coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Ahora sí, consideramos un campo escalar con la acción dada por

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \sqrt{-g} d^2x \quad (1.45)$$

en un espacio tiempo bidimensional. Las soluciones de la ecuación del campo escalar pueden ser escritas tanto en coordenadas tortuga del cono de luz

$$\phi = \tilde{A}(\tilde{u}) + \tilde{B}(\tilde{v}) \quad (1.46)$$

así como en coordenadas del cono de luz de Kruskal-Szekeres

$$\phi = A(u) + B(v) \quad (1.47)$$

donde $A, \tilde{A}$, etc. Son funciones suaves arbitrarias.

Las coordenadas de Kruskal-Szekeres del cono de luz se encuentran definidas por

$$u = -2r_g e^{-\frac{\tilde{u}}{2r_g}}, \quad v = 2r_g e^{\frac{\tilde{v}}{2r_g}} \quad (1.48)$$

En particular $\phi \propto e^{-i\omega\tilde{u}} = e^{-i\omega(t-r^*)}$ describe un modo de frecuencia positiva moviéndose a la derecha con respecto al tiempo t , el cual se propaga alejándose

del agujero negro. El tiempo propio que describe un observador en reposo lejos del agujero negro coincide con t ya que

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{u}d\tilde{v} = dt^2 - dr^{*2}; \quad r \rightarrow \infty \quad (1.49)$$

Por lo tanto este observador asocia “partículas” con los modos de frecuencia positiva con respecto al tiempo t .

Podemos escribir la expansión de modos para el operador de campo $\hat{\phi}$ de la siguiente manera⁵:

$$\hat{\phi} = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \left[e^{-i\Omega\tilde{u}} \hat{b}_\Omega^- + e^{i\Omega\tilde{u}} \hat{b}_\Omega^+ \right] + (\text{movimiento a la izquierda}) \quad (1.50)$$

Los modos que se mueven a la izquierda y a la derecha no se afectan entre sí y pueden ser considerados por separado. Solo se escribió de forma explícita los modos de movimiento a la derecha para facilitar la escritura.

Los operadores $\hat{b}_\Omega^\pm$ satisfacen la relación de conmutación siguiente:

$$[\hat{b}_\Omega^-, \hat{b}_{\Omega'}^+] = \delta(\Omega - \Omega') \quad (1.51)$$

Además debe notarse que en este caso como solamente se esta considerando una dimensión espacial, el factor de normalización en $(2\pi)^{1/2}$ reemplaza a el que se utiliza en el caso tridimensional $(2\pi)^{3/2}$. Definimos el eigenestado $|0_B\rangle$ por:

$$\hat{b}_\Omega^- |0_B\rangle = 0 \quad (1.52)$$

dicho estado, es llamado el vacío de Boulware y no contiene partículas desde el punto de vista del observador que se encuentra alejado. Los estados correspondientes de partículas se construyen con ayuda de los operadores de creación en el modo estándar.

El vacío de Boulware es singular en el horizonte del agujero negro y por lo tanto es físicamente inaceptable. Las coordenadas de Kruskal-Szekeres son no singulares en el horizonte y cubren el espacio tiempo de Schwarzschild completo; en la vecindad del horizonte

$$ds^2 \rightarrow dudv = dT^2 - dR^2 \quad (1.53)$$

y las partículas registradas por un observador cruzando el horizonte deben ser asociadas con los modos de frecuencia positivos con respecto al tiempo T . Buscamos entonces la solución $\hat{\phi}$ en coordenadas del cono de luz de Kruskal-Szekeres

$$\hat{\phi} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[e^{-i\omega u} \hat{a}_\omega^- + e^{i\omega u} \hat{a}_\omega^+ \right] + \text{movimiento a la derecha} \quad (1.54)$$

y los operadores cumplen de nuevo la relación de conmutación

$$[\hat{a}_\omega^-, \hat{a}_{\omega'}^+] = \delta(\omega - \omega') \quad (1.55)$$

⁵Es la solución a las ecuaciones de campo que siguen a la acción.

Además definimos el vacío de Kruskal mediante los operadores de creación y aniquilación $\hat{a}_\omega^\pm$

$$\hat{a}_\omega^- |0_K\rangle = 0 \quad (1.56)$$

siendo este estado regular en el horizonte.

El estado de vacío de Kruskal, lleva a una densidad de energía finita después de quitarle la energía de punto cero, como resultado la reacción de fondo de las fluctuaciones cuánticas es despreciable y no destruye el fondo clásico, de esta manera el estado $|0_K\rangle$ es un candidato natural a ser el verdadero vacío físico en presencia de un agujero negro.

Desde el punto de vista de un observador alejado, el vacío de Kruskal contiene partículas.

Los operadores $\hat{a}_\omega^\pm$ y $\hat{b}_\Omega^\pm$ se encuentran relacionados por las transformaciones de Bogolyubov

$$\hat{b}_\Omega^- = \int_0^\infty d\omega [\alpha_{\Omega\omega} \hat{a}_\omega^- - \beta_{\Omega\omega} \hat{a}_\omega^+] \quad (1.57)$$

Si escribimos a la gravedad superficial como $\kappa = (2r_g)^{-1}$ entonces al sustituir 1.57 en 1.50 e integrar sobre $\tilde{u}$ obtenemos

$$\frac{\alpha_{\Omega\omega}}{\beta_{\Omega\omega}} = \pm \frac{1}{2\pi\kappa} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{\pm \frac{\pi\Omega}{2\kappa}} e^{\frac{i\Omega}{\kappa} \ln \frac{\omega}{\kappa}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{\kappa}\right) \quad (1.58)$$

además de

$$|\alpha_{\Omega\omega}|^2 = e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} |\beta_{\Omega\omega}|^2 \quad (1.59)$$

Ahora calculamos el numero esperado de partículas que ve un observador alejado, para ello utilizamos el operador número de partículas $\hat{N}_\Omega \equiv \hat{b}_\Omega^+ \hat{b}_\Omega^-$ sobre el estado $|0_K\rangle$

$$\langle \hat{N}_\Omega \rangle = \langle 0_K | \hat{b}_\Omega^+ \hat{b}_\Omega^- | 0_K \rangle = \int d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2 \quad (1.60)$$

Para $\Omega' = \Omega$ la condición de normalización implica que

$$\int_0^\infty d\omega (|\alpha_{\Omega\omega}|^2 - |\beta_{\Omega\omega}|^2) = \delta(0) \quad (1.61)$$

por lo tanto obtenemos⁶

$$\langle \hat{N}_\Omega \rangle = \left[e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} - 1 \right]^{-1} \delta(0) \quad (1.62)$$

La densidad media de partículas con frecuencia Ω es:

$$n_\Omega = \frac{\langle N_\Omega \rangle}{V} = \left[e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} - 1 \right]^{-1} \quad (1.63)$$

Estas partículas obedecen la distribución de Bose-Einstein 1.63, y la temperatura correspondiente es:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M} \quad (1.64)$$

⁶el factor $\delta(0)$ se debe a el volumen infinito del espacio entero

3+1 dimensiones

La pregunta natural después de obtener la temperatura de Hawking es si nuestros resultados se mantienen en 3+1 dimensiones, la respuesta corta es que si, pero para estar seguros consideremos un campo escalar cuya acción esta dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} (g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - (m^2 + \Xi R) \phi^2), \quad (1.65)$$

si este campo esta mínimamente acoplado $\Xi = 0$ y carece de masa $m = 0$, entonces su ecuación de movimiento es⁷

$$\square \phi = 0, \quad (1.66)$$

en donde

$$\square = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta. \quad (1.67)$$

El campo se encuentra descompuesto en armónicos esféricos de la siguiente forma

$$\phi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \phi_{lm}(t, r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.68)$$

de lo anterior y utilizando 1.21 encontramos que 1.66 se reduce a⁸

$$\left[{}^{(2)}\square + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{r_g}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \right] \phi_{lm}(t, r) = 0. \quad (1.69)$$

Esta ecuación describe una onda propagándose en el espacio bidimensional con el tensor métrico 1.21 sin la parte angular (solo con la parte radial) más un término que representa un potencial

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{r_g}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right). \quad (1.70)$$

Aún para el modo $\phi_{00}(t, r)$ el potencial V no se anula (ver figura (1.3)).

La interpretación en este caso resulta ser sencilla si se recuerda de los problemas clásicos de la mecánica cuántica, el potencial por ejemplo delta de Dirac, en donde la continuidad de la función de onda y la discontinuidad de la derivada espacial de esta dictan, ciertos valores para las ondas reflejadas y transmitidas a través del potencial. De esta forma una onda escapando de un agujero negro necesita propagarse a través del potencial $V_l(r)$ y por lo tanto su intensidad decrece, este efecto cambia el espectro resultante por valor menor que la unidad al cual llamamos *factor de cuerpo gris* $\Gamma_l(\Omega) < 1$:

$$n_\Omega = \Gamma_l(\Omega) [e^{\frac{\Omega}{T_H}} - 1]^{-1}. \quad (1.71)$$

⁷si la masa no fuera 0, entonces tendríamos la ecuación de Klein-Gordon

⁸El operador ${}^{(2)}\square$ tiene la misma definición que $\square$ la diferencia es que α, β solo pueden tomar valores 0, 1, cuando originalmente corrían de 0 a 3

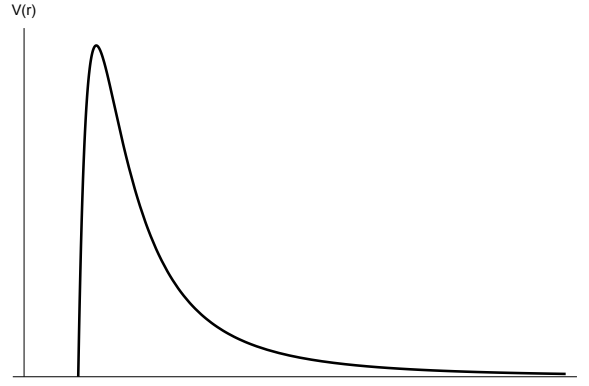


Figura 1.3: Potencial $V(r)$ para ϕ_{00} en $3 + 1$ dimensiones. El potencial corta el eje r en $2M$.

El factor de cuerpo gris se debe enteramente al potencial fuera del horizonte del agujero negro y por lo tanto este no se encuentra relacionado con el origen cuántico de la radiación de Hawking, lo que implica que la derivación en dos dimensiones tratada anteriormente y sus resultados son validos sin mucha alteración en este caso cuatro-dimensional ([17]).

El cálculo del factor de cuerpo gris, resulta en la mayoría de los casos una tarea compleja como cualquiera podría imaginar recordando el estudio de mecánica cuántica clásica (coeficientes de transmisión y reflexión) con el caso de una partícula atravesando un potencial de tipo delta de Dirac; para obtener más información sobre el procedimiento se recomienda al lector consultar [18].

1.3.2. Termodinámica de agujeros negros

De acuerdo a la teoría de la relatividad general, el destino de una estrella masiva que colapsa gravitacionalmente (de masa M) es el de reducirse rápidamente, desde el punto de vista de un observador en la superficie, a un radio del orden de $\frac{2GM}{c^2}$, punto en el que el campo gravitacional es tan fuerte que la radiación o cualquier otra cosa no pueden ya escapar al infinito.

A la región del espacio-tiempo de la cual es imposible escapar la conocemos como “agujero negro”, y su frontera es una hipersuperficie nula saliente la cual falla en alcanzar infinito, llamada “horizonte de sucesos”, como ya lo hemos visto en las secciones anteriores. Para un observador en infinito la estrella parecerá tomarse un tiempo infinito para alcanzar el horizonte de sucesos, sin embargo como el observador solo puede recibir un numero finito de fotones emitidos por la estrella antes de que esta cruce el horizonte, la luminosidad de esta disminuirá exponencialmente para el observador con una escala temporal del orden de $\frac{2GM}{c^3} \approx 10^{-5} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)$; de esta forma la estrella después de este tiempo habrá desaparecido, pero permanece un objeto que ejerce influencia gravitacional, el ya mencionado agujero negro.

Cuando se toman en cuenta los efectos cuánticos, resulta que los agujeros negros no son tan negros como parecería: “La radiación escapa a infinito a una tasa estable” ([19]), de modo que al analizar esta radiación (1.63) nos damos cuenta de que tiene un espectro térmico (1.64) por lo tanto es lógico aplicar conceptos termodinámicos al estudio de los agujeros negros esperando así encontrar más información acerca de su comportamiento, destrucción y formación.

Bekenstein fue uno de los primeros en considerar el estudio de los agujeros negros mediante nociones de la termodinámica [20], analizando la tendencia de estos objetos a incrementar el área de su superficie de sucesos cuando se lleva a cabo alguna transformación⁹. La idea anterior es un recordatorio de la segunda ley de la termodinámica y es que es claro que los cambios que toman lugar en el agujero negro generalmente son aquellos que van en la dirección de aumentar el área del ya mencionado, igual que la entropía para un sistema termodinámico clásico:

“Los cambios de un agujero negro o de un sistema de agujeros negros seleccionan una dirección preferida en el tiempo: aquella en la que el área del agujero negro aumenta.” [20, pp.2334]

El área de un agujero negro resulta estar íntimamente relacionada con la degradación de energía como la entropía, en este caso la masa irreducible de un agujero negro de Kerr M_{ir} esta relacionada con el área superficial A por:

$$M_{ir} = \left(\frac{A}{16\pi} \right)^{1/2}, \quad (1.72)$$

y esta representa energía que no puede ser extraída por medio de procesos de Penrose¹⁰, de esta forma es energía inerte la cual no puede ser convertida en trabajo.

Construimos entonces la expresión análoga a la primera ley de la termodinámica para un agujero negro:

$$dE = TdS - PdV. \quad (1.73)$$

Para ello consideramos un agujero negro de Kerr-Newmann con masa M , carga Q y momento angular $\vec{L}$ que se encuentra dado por la métrica siguiente en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (1.74)$$

⁹Stephen Hawking realizó la prueba sobre la imposibilidad de la disminución del área de un agujero negro en algún proceso, el teorema de Hawking implica para un sistema de varios agujeros negros que el área de cada agujero negro individual no puede disminuir y aún más que el área de dos agujeros negros que se mezclan no puede ser menor que la suma de las áreas iniciales ([21]).

¹⁰Un proceso de Penrose es una forma en la que energía puede ser extraída de un agujero negro con rotación, dicha extracción ocurre si la energía rotacional del agujero negro está localizada fuera del horizonte de sucesos en una región del espacio-tiempo de Kerr llamada ergosfera en la que cualquier partícula es propulsada por la rotación del espacio-tiempo mismo.

en donde

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv r^2 - 2mr + a^2 + q^2, \\ \rho^2 &\equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta.\end{aligned}\tag{1.75}$$

El área está dada por¹¹:

$$A = 4\pi(2M^2 + 2(M^4 - Q^2 - L^2) - Q^2),\tag{1.76}$$

y el área racionalizada puede escribirse como:

$$\alpha = A/4\pi = r_+^2 + a^2 = 2Mr_+ - Q^2,\tag{1.77}$$

en donde $\vec{a} = \frac{\vec{L}}{M}$ y $r_{\pm} = M \pm (M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2}$.

Diferenciamos 1.77 y resolvemos para dM

$$dM = \Theta d\alpha + \vec{\Omega} \cdot d\vec{L} + \Phi dQ,\tag{1.78}$$

en donde:

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{1}{4}(r_+ - r_-)/\alpha \\ \vec{\Omega} &= \vec{a}/\alpha \\ \Phi &= Qr_+/\alpha.\end{aligned}\tag{1.79}$$

Podemos ver que los términos que contienen el momentum angular y la carga representan el trabajo realizado en el agujero negro por un agente externo, siendo así cantidades análogas a $-PdV$, mientras que α representa a S , la entropía. Para cualquier cambio del agujero negro $d\alpha \geq 0$ del mismo modo que la entropía para un cambio en un sistema termodinámico cerrado ($dS \geq 0$); además como se menciona en [20], “ Θ ” el análogo de la temperatura es una cantidad no negativa justo como lo es T .

Cuando se observa a la entropía desde el punto de vista de la información, los agujeros negros resultan ser de nuevo muy parecidos a los sistemas termodinámicos. La entropía mide la incertidumbre en cuanto a cual de las configuraciones internas de un sistema termodinámico en equilibrio es la que finalmente se realiza-, dado un conjunto de parámetros macroscópicos termodinámicos compatibles (Temperatura, presión, etc.); de la misma forma un agujero negro en equilibrio puede ser descrito completamente por un observador externo solamente por tres parámetros: masa, carga y momento angular¹², y como muchos agujeros negros en equilibrio tienen el mismo conjunto de parámetros mencionados pero pueden tener distintas configuraciones internas compatibles¹³, se

¹¹En este caso $G = c = 1$

¹²Esto se conoce como el teorema de no pelo, el cual podemos enunciar de la siguiente manera: Un agujero negro en equilibrio, en el marco de la relatividad general y bajo condiciones de simetría y condiciones de materia adecuadas, se caracteriza completamente por su masa, momento angular y carga eléctrica [22][23][21][8][24].

¹³El número de configuraciones internas sería infinito si no se toman en cuenta los efectos cuánticos, Bekenstein mostró que las longitudes de onda de Compton de las partículas que pueden formar el agujero negro deben estar restringidas a ser menores que el radio del agujero negro y por lo tanto el número de configuraciones internas aunque es enorme, no es infinito [20, pp.2338]

deduce que es necesaria la introducción del concepto de “entropía de agujeros negros” como esa mediada de inaccesibilidad a la información que pueda decirnos la configuración interna del defecto topológico (el agujero negro).

Hago incapie en que no se esta midiendo la entropía térmica que tiene el agujero negro dentro de sí, sino aquella que se refiere “a la equivalencia de todos los agujeros negros que tienen la misma masa, carga y momento angular...” ([20, pp.2336]).

Como la entropía del agujero negro está relacionada con el área de este y a su crecimiento, entonces podemos suponer que¹⁴:

$$S_H = f(\alpha). \quad (1.80)$$

La entropía de un sistema termodinámico que se encuentra en evolución, incrementa su valor debido a la perdida de información gradual, la cual es consecuencia de que los efectos de las condiciones iniciales desaparecen. Del mismo modo cuando un agujero negro se acerca al equilibrio, los efectos de las condiciones iniciales desaparecen y se dice que el agujero negro pierde su cabello, solamente la masa, la carga y el momento angular son las cantidades que permanecen como determinantes de el agujero negro para tiempos posteriores. Podemos entonces suponer distintas formas para la función f , sin embargo la forma más simple que nos lleva a resultados correctos es:

$$f(\alpha) = \gamma\alpha, \quad (1.81)$$

en donde γ es una constante la cual tiene un valor de $\gamma = 1/4$.

Podemos definir la temperatura como $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V$ por lo tanto su equivalente para el agujero negro es:

$$T_H^{-1} = \left(\frac{\partial S_H}{\partial M}\right)_{L,Q}. \quad (1.82)$$

Ahora suponemos que un objeto sea cual sea su origen o composición cae a un agujero negro, dicho objeto contiene una entropía común S_0 . Al momento de atravesar el horizonte de sucesos, el objeto se vuelve inobservable para un observador externo y su entropía también, de modo que la entropía del universo visible parece haber disminuido en el proceso, de este modo al existir la incapacidad de obtener información resulta imposible concebir el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica. Sin embargo, el crecimiento del área del agujero negro compensa la desaparición del objeto incrementando de manera irreversible, es necesario entonces expresar la segunda ley de forma generalizada:

La entropía común en el exterior del agujero negro más la entropía del agujero negro nunca disminuye. ([20])

¹⁴Las condiciones que la entropía debe cumplir son ([25]):

1. Ser función de $M, \vec{L}, Q$.
2. Siempre aumentar cuando radiación o materia caen al agujero negro
3. Cuando dos o más agujeros negros colisionan y se unen, la entropía del agujero negro final debe ser mayor que la suma de las entropías individuales.

$$\Delta S_H + \Delta S_0 > 0. \quad (1.83)$$

Para poder probar la segunda ley en esta forma generalizada es necesario tomar en cuenta los efectos cuánticos, de otra forma se puede llegar a situaciones en donde puede ser violada; además de lo anterior, “el hecho de que la temperatura de un agujero negro decrezca conforme la masa aumenta, significa que los agujeros negros no pueden estar en equilibrio térmico estable en situaciones en las cuales hay una cantidad indefinidamente grande de energía disponible...”, esto implica que el ensamble mecánico canónico no puede ser aplicado a sistemas gravitacionales. En su lugar uno tiene que usar ensambles microcanónicos en los cuales uno considera todas las configuraciones posibles de un sistema con una energía dada” ([25]).

Seguimos el camino de [25], para probar la segunda ley; tomamos un agujero negro rodeado por radiación de cuerpo negro a una temperatura T_m ¹⁵, para cualquier T_m habrá una tasa de acreción de esta radiación en el agujero negro. Si $T_m > T_H$:

$$T_m^{-1} < T_H^{-1} \rightarrow \frac{\partial S_m}{\partial M} < \frac{\partial S_H}{\partial M}, \quad (1.84)$$

y entonces el decrecimiento en S_m es menor que el incremento de S_H y entonces la segunda ley se cumple¹⁶. Ahora si $T_m < T_H$, entonces la acreción viola la segunda ley

$$T_m^{-1} > T_H^{-1} \rightarrow \frac{\partial S_m}{\partial M} > \frac{\partial S_H}{\partial M}, \quad (1.85)$$

dicha inconsistencia puede ser solventada sin tomar en cuenta el caso trivial en el que $T_H = 0$, cuando se considera que los agujeros negros pueden emitir radiación con una temperatura finita diferente de cero.

Si $T_m > T_H$ la acreción es mayor que la emisión y por lo tanto el incremento en S_H es mayor que el decremento en S_m , mientras que para $T_H > T_m$ la emisión es mayor que la acreción y por lo tanto el incremento en S_m es más grande que el decremento en S_H . Si tomamos el resultado cuántico de el valor de la temperatura para la radiación de Hawking $T = \frac{\kappa}{2\pi}$, podemos integrar la primera ley y obtener un valor para la entropía:

$$\begin{aligned} dM = \Theta d\alpha &= \frac{\Theta}{4\pi} dA = \frac{r_+ - r_-}{16\pi\alpha} dA = \frac{r_+ - M}{2A} dA \\ \kappa &= \frac{4\pi(r_+ - M)}{A} \\ \therefore dM &= \frac{\kappa}{8\pi} dA, \end{aligned} \quad (1.86)$$

¹⁵Se toma radiación de cuerpo negro porque esta contiene todas las posibles especies de partículas en equilibrio térmico con potencial químico cero.

¹⁶Se debe probar que el incremento de S_H es mayor o igual que la cantidad de entropía de la materia acrecida, dicho de otro modo se debe probar que $S_H + S_m$ nunca disminuye con el tiempo (segunda ley). Lo anterior es equivalente a mostrar la consistencia de la hipótesis de un número finito de configuraciones internas mostrando que si los parámetros que definen al agujero negro cambian por ciertas cantidades por la acreción de materia y radiación, el valor de σ ($S_H = -\sum p_i \ln p_i = \ln \sigma$) es por lo menos el valor anterior por el número de posibles configuraciones de la acreción de materia o radiación.* $k_B = 1$

$$\frac{1}{T_H} = \frac{\partial S_H}{\partial M} \rightarrow dM = T_H dS, \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{8\pi} dA &= T_H dS \\ \frac{\kappa}{8\pi} dA &= \frac{\kappa}{2\pi} dS, \end{aligned} \quad (1.88)$$

$$S = \frac{1}{4} A + c. \quad (1.89)$$

Si la entropía tiende a cero cuando la masa tiende a cero entonces $c = 0$ y vemos entonces que recuperamos la forma que se había dicho con el valor de γ ya mencionado.

Si consideramos un agujero negro rodeado por radiación en un contenedor a la misma temperatura que el agujero negro, ambos en equilibrio térmico (agujero negro sin rotación y eléctricamente neutro), al tener una fluctuación estadística en el sistema es posible tener una mayor acreción de energía que aquella que es emitida; como los agujeros negros tienen calor específico negativo, la temperatura del agujero negro disminuirá, esto reducirá la tasa de emisión y aumentará la tasa de absorción. Si la radiación de cuerpo negro es mantenida a temperatura constante por un reservorio de energía, el agujero negro crecerá indefinidamente. De forma similar si la fluctuación estadística causa que el agujero negro emita un poco más de lo que absorbe, entonces la tasa de emisión continuará aumentando hasta que el agujero negro desaparezca completamente. Podemos entonces concluir que los agujeros negros no pueden estar en equilibrio térmico estable con un reservorio indefinidamente grande de energía, esto implica que no es posible usar el ensamble canónico de la mecánica estadística cuando las interacciones gravitacionales son importantes ([25]).

Para solucionar lo anterior Hawking plantea el uso del ensamble microcanónico, ya que siempre existe la posibilidad de formar agujeros negros por fluctuaciones estadísticas juntando muchas partículas en un volumen pequeño en el espacio. Planteando un número grande de sistemas aislados cada uno con energía fija E . Cada uno de estos sistemas tendrá un número de configuraciones distintas compatibles con la energía dada. Encontraremos entonces al sistema en una región del espacio de configuraciones en la región compatible con la energía dada. En la mayoría de los casos habrá un estado macroscópico que tiene muchas más configuraciones microscópicas posibles que cualquier otro estado macroscópico.¹⁷

¹⁷**¿Termodinámica de equilibrio en los agujeros negros?** En esta parte es necesario realizar un pequeño paréntesis para discutir la pregunta planteada anteriormente. El uso de la termodinámica de equilibrio no se encuentra justificado para un proceso como el que se está estudiando (agujero negro). En la termodinámica clásica, el estado de equilibrio es un estado donde las propiedades macroscópicas (temperatura, presión, densidad, etc.) son uniformes y no cambian a lo largo del tiempo. Pero, los agujeros negros considerando su naturaleza cuántica no están dentro de esta visión clásica y por lo tanto no podemos suponer que se encuentran en equilibrio. El horizonte de sucesos se comporta como una superficie que absorbe materia y energía, por lo tanto información, la absorción mencionada no sigue las leyes de la termodinámica de equilibrio y por lo tanto los agujeros negros no están en equilibrio termodinámico con su entorno.

1.3.3. Evaporación de Agujeros Negros

Dada la radiación de Hawking, tenemos como resultado general que en infinito tenemos un constante flujo de partículas provenientes del agujero negro, lo que se traduce en que la energía proveniente de la masa (M_{ir}) del agujero negro fluye también hacia infinito, de este modo en algún momento llegaremos a un agujero negro con $A = 0$ proceso al cual conocemos con el nombre de “Evaporación de Agujeros Negros”.

Consideramos un agujero negro como un cuerpo negro con temperatura T_H , por lo que podemos calcular la potencia de su radiación mediante la ley de Stefan-Boltzman:

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma AT_H^4. \quad (1.90)$$

Dado que sabemos que $E = M$, $A \sim M^2$ y $T_H \sim \frac{1}{M}$ podemos escribir

$$\frac{dM}{dt} = -a \frac{1}{M^2}, \quad (1.91)$$

en donde a es una constante.

La ecuación (1.91) nos dice la tasa a la que un agujero negro disminuye su masa al paso del tiempo. Podemos resolver la anterior de modo que obtengamos el tiempo de evaporación (t_{evp}) para un agujero negro con masa inicial M_0

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt} &= \frac{a}{M^2} \\ \int_{M_0}^0 M^2 dM &= - \int_0^{t_{\text{evp}}} dt \\ t_{\text{evp}} &= \frac{M_0^3}{3a}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Reescribimos el resultado anterior como $t_{\text{evp}} = \gamma M_0^3$; $\gamma = \frac{1}{3a}$. El tiempo de vida de un agujero negro con la masa inicial del Sol ($M \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$), se estima en $t_{\text{evp}} \approx 10^{64}$, cuando la edad del universo es aproximadamente 10^{13} años¹⁸, esto lo podemos interpretar como que los agujeros negros de masa estelar, no juegan un papel fundamental en cuanto a la dinámica del universo en prácticamente cualquier escala de tiempo. Cabe destacar en este punto que este cálculo

Y bien, con lo explicado anteriormente, ¿Cuál es el argumento para utilizar un resultado si no se cumplen las condiciones de su uso?

La respuesta surge de considerar al agujero negro como un objeto cuasiestático, de modo que las propiedades significativas del sistema como su masa, carga y momento angular se encuentran constantes a lo largo del tiempo, así la idea del ensamble de agujeros negros equivalentes y por lo tanto la realización de una cantidad como la entropía -que depende del área del horizonte de sucesos- nos permite aplicar conceptos como temperatura (temperatura de Hawking) y las leyes de la termodinámica bajo un análisis aproximado de un sistema en equilibrio.

Cabe mencionar que la idea de conectar nuestra entropía con la entropía clásica es meramente heurística y existen diversas interpretaciones ante los resultados que la aplicación de la termodinámica de agujeros negros nos da como resultado.

¹⁸Utilizando todas las constantes es como se obtiene un valor para la constante $a = \frac{\sigma \hbar^4 c^8}{256 \pi^3 G^2 k_B^4}$

al ser realizado sobre la ley de Stefan-Boltzman es de naturaleza clásica y no contiene información acerca de la geometría y del efecto de fondo del proceso de evaporación; lo utilizamos porque es una buena aproximación para la pérdida de energía dada en el proceso cuando $\frac{dM}{dt} \ll 1$, sin embargo su validez es cuestionable cuando nos encontramos en las últimas etapas de emisión esto es cuando la masa del agujero negro se vuelve comparable con la masa de Planck¹⁹.

El considerar la evaporación de los agujeros negros como un proceso físico real, nos lleva a encontrar un problema difícil de resolver en la física moderna, la “Paradoja de la información” la cuál explicaremos más adelante y que es un parteaguas central dentro de este trabajo.

¹⁹La masa de Planck, es una unidad de masa en el sistema de unidades naturales conocido como las unidades de Planck $M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$.

Capítulo 2

Más allá de la termodinámica clásica: Entropía de entrelazamiento, paradoja de la información y la curva de Page en agujeros negros

La breve exploración que hemos realizado sobre los agujeros negros, ha revelado que existen conexiones profundas entre la geometría del espacio-tiempo (gravedad), la termodinámica y la cuántica. Este capítulo profundiza en esos vínculos al explorar dos conceptos esenciales de la mecánica cuántica: los estados puros y los estados mixtos, además de su interrelación con la entropía y la paradoja de la información.

Iniciaremos con una definición clara de los estados en mecánica cuántica, diferenciando entre estados puros y mixtos. Los estados puros, descritos por un único vector de estado en el espacio de Hilbert, encierran un conocimiento total de las propiedades cuánticas del sistema. En contraposición, los estados mixtos abordan situaciones de incertidumbre estadística, resultando cruciales para el estudio de sistemas que interactúan con su entorno o que están entrelazados con otros sistemas. Mediante operadores de densidad y matrices de densidad, delinearemos sus diferencias fundamentales en términos matemáticos y físicos. Seguidamente, abordaremos la entropía de entrelazamiento, aplicando la entropía de Von Neumann para cuantificar la distribución de la información cuántica en sistemas bipartidos. Este enfoque nos permitirá comprender en mayor profundidad la dinámica de la información cuántica bajo condiciones de interacción

y entrelazamiento.

Concluiremos con una discusión sobre la paradoja de la información, un tema muy interesante en la intersección de la mecánica cuántica y la relatividad general. Examinaremos el impacto de la radiación de Hawking en la conservación de la información y cómo la curva de Page proporciona una posible explicación para reconciliar la evolución temporal de la entropía con las leyes fundamentales de la física.

2.1. Estados puros y mixtos

Definimos en mecánica cuántica un estado por un vector que vive en el espacio de Hilbert y que describe un sistema. Los estados pueden ser catalogados en dos categorías, estados puros y estados mixtos.

2.1.1. Estados puros

Definimos el operador de densidad de la siguiente forma

$$\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle \langle\psi|, \quad (2.1)$$

el cual con respecto a una base ortonormal $|e_j\rangle$ está representado por una matriz de densidad

$$\rho_{ij} \langle e_i | \hat{\rho} | e_j \rangle = \langle e_i | \psi \rangle \langle \psi | e_j \rangle. \quad (2.2)$$

La matriz de densidad para este tipo de estados tiene las siguientes propiedades

$$\rho^2 = \rho, \quad (2.3)$$

$$\rho^\dagger = \rho, \quad (2.4)$$

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_{ij} \rho_{ii} = 1. \quad (2.5)$$

Además de que el valor esperado de un observable A es

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad (2.6)$$

Los estados puros representan sistemas en los que el estado completo es conocido con la máxima certeza permitida por la teoría. Estos estados se encuentran descritos por un único vector de estado en el espacio de Hilbert, lo que nos deja ver que tenemos un conocimiento completo de las propiedades cuánticas del sistema [26, pp.455].

2.1.2. Estados mixtos

Mientras que un estado puro en mecánica cuántica proporciona una descripción completa y coherente de un sistema en un estado bien definido, un estado mixto representa un sistema en un estado de incertidumbre estadística.

Los estados mixtos son particularmente útiles para describir sistemas que están entrelazados con otros sistemas o que son parte de un ensamble estadístico debido a la interacción con un entorno.

Un estado mixto se encuentra descrito mediante una matriz de densidad $\hat{\rho}$, pero esta matriz es distinta a la del caso anterior, ya que no puede ser expresada como el producto externo de un vector de estado consigo mismo. En lugar de eso, la matriz de densidad para un estado mixto es una combinación ponderada de matrices de densidad de estados puros

$$\hat{\rho} \sum_k = p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (2.7)$$

De nuevo, se convierte en una matriz cuando se refiere a una base particular

$$\rho_{ij} = \sum_k p_k \langle e_i | \psi_k \rangle \langle \psi_k | e_j \rangle, \quad (2.8)$$

la matriz de densidad encierra toda la información disponible a nosotros acerca del sistema. Y como cualquier otra probabilidad

$$0 \leq p_k \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_k p_k = 1. \quad (2.9)$$

La matriz de densidad para estados mixtos retiene la mayoría de las propiedades que fueron identificadas para los estados puros:

$$\rho^\dagger = \rho, \quad (2.10)$$

$$\text{Tr}(\rho) = 1, \quad (2.11)$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A), \quad (2.12)$$

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (\text{si } \frac{dp_k}{dt} = 0 \text{ para toda } k), \quad (2.13)$$

pero ρ solo cumple ser idempotente cuando represente un estado puro, de modo que para estados mixtos

$$\rho^2 \neq \rho. \quad (2.14)$$

[26, pp.457]

2.2. Entropía de entrelazamiento

Consideramos un sistema cuántico bipartido con una matriz de densidad ρ que vive en un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ [27] [28] [29] [30, pp.165] [31]. Comenzamos con un estado general (puro o mixto) del sistema completo $\rho = \rho_{AB}$, la matriz de densidad reducida de un subsistema se encuentra definida por la traza parcial

$$\rho_A = \text{Tr}_B \hat{\rho}, \quad (2.15)$$

y la “entropía de entrelazamiento” es la entropía de von Neumann de la matriz de densidad reducida

$$S_A \equiv -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A. \quad (2.16)$$

Por ejemplo si cada subsistema A o B es un único qubit¹, entonces el espacio de Hilbert del sistema completo esta formado por

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |11\rangle, \quad (2.17)$$

en donde el primer bit se refiere a A y el segundo a B , esto es que nos encontramos usando

$$|ij\rangle \equiv |i\rangle_A |j\rangle_B \equiv |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B. \quad (2.18)$$

Suponemos que el sistema se encuentra en el estado puro

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (2.19)$$

entonces $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Como una matriz 4×4 , ρ puede tener elementos tanto en su diagonal como fuera de esta. Las matrices de densidad diagonales son solamente distribuciones clásicas de probabilidad, pero los elementos fuera de la diagonal indican entrelazamiento y son intrínsecamente cuánticos.

La matriz de densidad reducida del sistema A es

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B \hat{\rho} \\ &= \frac{1}{2} \langle 0| (|00\rangle + |11\rangle) (\langle 11| + \langle 00|) |0\rangle_B \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle 1| (|00\rangle + |11\rangle) (\langle 11| + \langle 00|) |1\rangle_B \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle_A \langle 0| + |1\rangle_A \langle 1|) \\ &= \frac{1}{2} I_A. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La última línea nos dice que la matriz reducida de densidad es proporcional a la matriz identidad. En este caso decimos que ρ_A se encuentra máximamente mixto, y el estado inicial $|\psi\rangle$ esta máximamente entrelazado.

La entropía de entrelazamiento del subsistema A entonces es

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\text{tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \log \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \log 2 \neq 0. \quad (2.21)$$

Si tenemos k qubits en el sistema A y k qubits en el sistema B , entonces es un estado máximamente entrelazado con $S_A = k \log 2$. En donde S_A cuenta el

¹La información clásica se encuentra hecha de solo de secuencias de “0” y “1” (en este sentido, toda la información puede ser separada en una serie de preguntas “si/no”). La información cuántica está compuesta de bits cuánticos (conocidos como qubits), existen dos sistemas cuánticos de dos niveles que pueden ser representados por combinaciones lineales de estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ [32, pp.164].

número de bits, o equivalentemente, e^{S_A} cuenta el número de estados entrelazados (dado que k qubits tienen 2^k estados).

La entropía de von Neumann tiene diversas propiedades que son útiles, las mencionaremos aquí, pero serán recordadas aquellas que utilicemos en secciones posteriores de acuerdo al contexto

- $S(\rho) \geq 0$ donde la igualdad se cumple solo para estados puros.
- $S(U^\dagger \rho U) = S(\rho)$, para un operador de evolución unitario U . Esto significa que si ρ evoluciona unitariamente en el tiempo $\rho(0) \rightarrow U^\dagger(t)\rho(0)U(t)$ entonces $S = \text{constante}$; de esta forma si un estado es inicialmente puro, entonces permanecerá puro en el futuro y similarmente si un estado es mixto permanecerá mixto. Esto demuestra la unitariedad de la evolución temporal de los sistemas cuánticos.
- $S(\rho) \leq \log d$ donde d es la dimensionalidad del espacio de Hilbert en donde el sistema vive, la igualdad se cumple cuando se tiene un estado máximamente entrelazado.
- La entropía de von Neumann de una región espacio-temporal Σ , está determinada por una matriz de densidad ρ_Σ y entonces $S_{vN}(\Sigma) = S_{vN}(\rho_\Sigma)$
- Cumple la relación fuerte de subadición. Para los tres subsistemas cuánticos A, B, C $S_{A+B+C} + S_B \leq S_{A+B} = S_{B+C}$ y $S_A + S_C \leq S_{A+B} + S_{B+C}$.
- Para un estado puro con una matriz de densidad ρ a temperatura cero, la entropía de grano fino o de von Neumann de un subsistema A es igual a la entropía de su complemento. Esto muestra manifiestamente que la entropía de entrelazamiento no es una cantidad extensiva. Esta igualdad es violada a temperatura finita.

Más información sobre las anteriores puede ser encontrada en [33], [28], [30].

2.2.1. Entropía de grano grueso

La segunda noción de entropía a tratar es la entropía de grano grueso (S_{cg}). Para explicarla en [34] se nos dice que tenemos una matriz de densidad ρ describiendo el sistema, pero no medimos todos los observables, solo medimos un subconjunto de simple, o también llamado observables de grano grueso A_i . Entonces la entropía de grano grueso está dada siguiendo el siguiente procedimiento. Consideramos todas las matrices de densidad posibles $\tilde{\rho}$ las cuales dan el mismo resultado que nuestro sistema para los observables que estamos rastreando, $\text{Tr}[\tilde{\rho}A_i] = \text{Tr}[\rho A_i]$. Entonces calculamos la entropía de von Neumann $S(\tilde{\rho})$. Finalmente maximizamos esta sobre todas las posibles elecciones de $\tilde{\rho}$. Un ejemplo de la anterior, es la entropía ordinaria que usamos en termodinámica. En ese caso el conjunto de observables se eligen comúnmente como la energía o el volumen. La entropía termodinámica se obtiene al maximizar la entropía de von Neumann a través de todos los estados con esa energía aproximada y

volumen. Este tipo de entropía obedece la segunda ley de la termodinámica, de modo que tiende a incrementarse bajo la evolución unitaria.

La entropía de grano fino, como llamamos a la entropía de von Newmann $S_{fg} = S_{vN}$ en la subsección anterior, no puede ser más grande que la entropía de grano grueso $S_{fg} \leq S_{cg}$.

Esto es una consecuencia de las definiciones, ya que siempre podemos considerar a ρ como un candidato de $\tilde{\rho}$. Otra forma de ver lo anterior es que la entropía de grano grueso provee de una medida del número total de grados de libertad disponibles para el sistema, esto es, que pone un límite superior en cuanto más el sistema puede estar entrelazado con algo más.

2.3. Paradoja de la información

Los resultados del capítulo anterior nos mostraron que los agujeros negros no son tan negros como parecían y que, dada su existencia, la interacción de estos objetos con el fondo, debe terminar en un tipo de radiación, conocida como radiación de Hawking. Esta emisión sugiere que los agujeros negros pueden comportarse como cuerpos negros que irradian energía térmica, permitiéndonos aplicar principios termodinámicos para describir su comportamiento. Esta aproximación introduce conceptos como temperatura y entropía a la descripción de los agujeros negros.

La idea anterior es sumamente importante y en [29] se conoce como “Dogma central”:

Visto desde afuera, un agujero negro puede ser descrito en términos de un sistema cuántico con $A/(4G_N)$ grados de libertad, el cual evoluciona unitariamente bajo la evolución temporal [29, pp.13].

Los autores de [29] además del dogma, mencionan ciertos aspectos a considerar; el primero es que dicho dogma se refiere al agujero negro visto desde el exterior, no provee ninguna información acerca de lo que está pasando detrás del horizonte de sucesos. Además, los grados de libertad indicados por la entropía no se manifiestan en la representación gravitatoria del agujero negro. La evolución unitaria implica que tenemos un Hamiltoniano que genera la evolución temporal. De nuevo este Hamiltoniano no es manifiesto en la descripción gravitacional. El proceso de evaporación de los agujeros negros plantea una pregunta fundamental respecto a la mecánica cuántica: ¿Qué sucede con la información contenida en la materia que formó o ingreso en el agujero negro?

De acuerdo a nuestra experiencia cuántica, la información debe conservarse, pero la evaporación completa de un agujero negro sugiere justo lo contrario. Este problema es el núcleo principal de lo que conocemos como paradoja de la información de los agujeros negros.

Imaginamos que formamos un agujero negro a partir del colapso de materia en un estado puro, dicha formación comienza un proceso de emisión de radiación de Hawking. Esta radiación nos lleva a un aumento progresivo de la entropía de los campos cuánticos externos al agujero negro. La transformación del estado

inicial puro en un estado mixto se debe a la división del vacío original en dos componentes: una que permanece dentro del horizonte y otra que se extiende hacia el exterior. Esta división refleja, como en la teoría cuántica de campos, que el vacío es intrínsecamente un estado entrelazado. Como un estado completo es puro, pero los grados de libertad están entrelazados a distancias cortas. Podemos concluir que el carácter térmico de la radiación de Hawking se origina en el entrelazamiento de los grados de libertad a cortas distancias. Cualitativamente podemos explicar este fenómeno, suponiendo que el vacío se encuentra compuesto por pares de partículas que constantemente se están creando y aniquilando. En la presencia de un horizonte de eventos, uno de los miembros del par puede escapar hacia el infinito, mientras que el otro queda atrapado dentro del agujero negro. Podemos denominar a estas partículas como cuánto saliente de Hawking y cuánto interior de Hawking. Estos dos partículas están entrelazadas entre sí, formando un estado puro. Sin embargo, si nos concentramos únicamente en uno de los miembros, digamos el cuánto saliente, descubriremos que se encuentra en un estado mixto que aparenta ser un estado térmico a la temperatura de Hawking 1.64.

El proceso de emisión de pares no viola el dogma central hasta el momento, en las fases iniciales del proceso, si evaluamos la entropía de grano fino de la radiación emitida, notaríamos que es bastante parecida a una distribución térmica debido a que esta radiación está entrelazada con el sistema cuántico del agujero negro. Por esto, es lógico pensar en un incremento de la entropía de la radiación durante los primeros momentos de la evaporación (ver 2.1). Pero conforme el

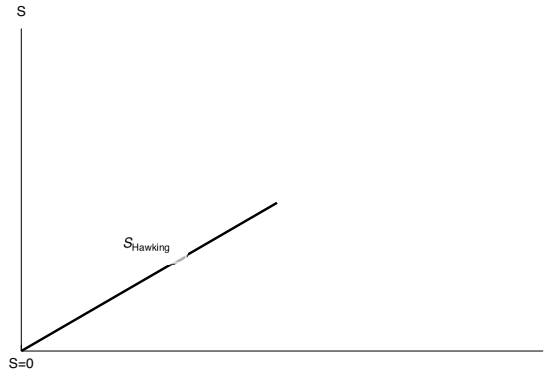


Figura 2.1: Entropía de Hawking (entropía de la radiación exterior) antes y durante un momento de la evaporación.

proceso continúa, el agujero negro disminuye su tamaño, de modo que en un momento la entropía de la radiación excede la entropía termodinámica del propio agujero negro. Esto se debe a que ya no es posible que la entropía de la radiación permanezca entrelazada con el sistema cuántico que se encuentra caracterizando al agujero negro, esto debido a que el número de grados de libertad del agujero negro se define por su entropía termodinámica, dicho de otro modo, el área de

su horizonte. Si los grados de libertad del agujero negro junto con la radiación configuran un estado puro, entonces la entropía de grano fino del agujero negro debería ser equivalente a la de la radiación, $S_{\text{Agujero Negro}} \leq S_H = S_{cg}$ (ver 2.2). De ser válido el dogma central, uno esperaría que la entropía de la radiación

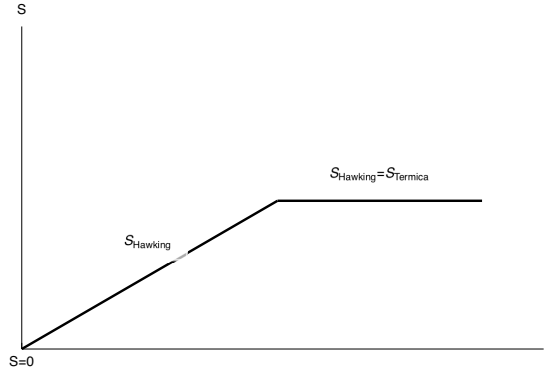


Figura 2.2: Entropía de Hawking hasta el momento después de la saturación.

comenzara a disminuir a partir del punto de saturación. En específico, nunca debería superar la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro.

Cuando el agujero negro se evapora por completo ya no existen dos sistemas en interacción (el agujero negro y la radiación), ahora solo existe uno, la entropía de la radiación. La entropía entonces se satura en el límite térmico y por lo tanto no se tiene más entropía “0”, como esperaríamos de una evolución unitaria al final del proceso. El estado final no es puro a diferencia del inicial que sí lo fue. Hemos así llegado a la paradoja de la información, dicha paradoja nos hace preguntarnos si el proceso realmente necesita ser unitario y si lo es ¿Qué curva debe de seguir la evolución temporal de la entropía?

Soluciones a la presente paradoja han sido propuestas, o por lo menos bases teóricas que permitan su solución. La primera de ellas es la propuesta [35], en donde un agujero negro eventualmente desaparecerá completamente y el estado resultante de la radiación será mixto, tal como un estado térmico. Dicho de otra forma, la información será permanentemente extraviada en el agujero negro, y no existirá matriz para llevar un estado puro inicial a un estado puro final. Esta conclusión en su forma original viola la forma fuerte la invarianza CPT y es por ello que para diversos autores no se encuentra sustentada sobre un terreno firme².

Otra opción en las soluciones a la paradoja es la de suponer que existe un remanente estable de “vida larga” que guarde la información perdida³.

²Aunque actualmente la idea de que la información desaparezca no es generalmente aceptada, no se tiene una idea completamente certera de en donde es que se encuentra la falla en el análisis semiclásico seguido por S. Hawking.

³Existe un muy buen resumen sobre esta idea hasta el año de 1992 en [36], en ella se explica un poco más sobre la forma en que estos remanentes podrían existir en la escala de Planck y el por qué parece ser que esta idea no sigue el camino correcto para resolver la paradoja de la

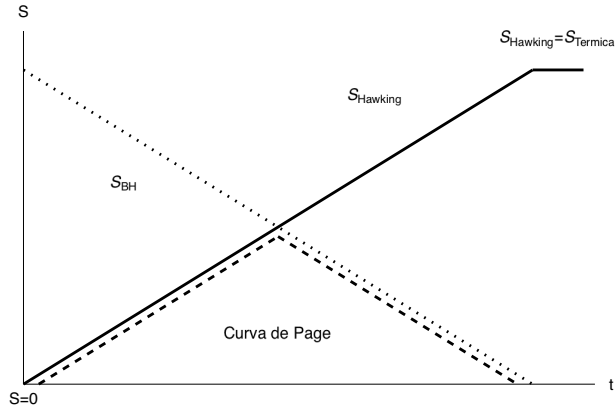


Figura 2.3: Entropía de Hawking y entropía BH acotando la curva de Page.

La última solución propuesta es la que resulta ser la “más productiva de perseguir” [37]. Podemos resumirla en que la mayoría de la información sale con el bulto de radiación. Esta propuesta da origen a la curva de Page [37], curva que responde a nuestra pregunta sobre la forma correcta de una entropía unitaria. La curva de Page (figura 2.4) se construyó postulando que la unitariedad no puede ser violada, de esta forma la entropía de la radiación comienza en cero, creciendo de forma lineal mientras más modos de Hawking salientes son creados. Pero a medida que las partículas de Hawking se entrelazan más con el agujero negro, no quedan más grados de libertad en el agujero negro, esto sucede en lo que se conoce ahora como tiempo de Page. La radiación de Hawking que se crea después de este tiempo, se encontrará entrelazada con la radiación pasada, lo que tenderá a disminuir la entropía de grano fino. El proceso continuará hasta que el agujero negro se haya evaporado y la entropía haya regresado a cero, como se esperaría de la unitariedad, proceso que podemos ver en la figura 2.3.

En la figura 2.4, podemos observar de manera más limpia la curva de Page, que dibujaron como valores extremales, la entropía del agujero negro y la entropía de la radiación de Hawking, esto es la entropía de grano fino del proceso completo.

Ahora, ¿Qué sucedería si olvidamos lo anterior y nos atrevemos a violar la unitariedad? ¿Cuáles son las consecuencias de violar el principio de unitariedad? Las consecuencias de esto son múltiples, pero podemos enunciarlas de la siguiente forma

- Sabemos que la unitariedad se reduce a demandar que el operador de evolución entre dos tiempos sea unitario; esto se traduce en que el producto interno de cualquiera dos estados en el espacio de Hilbert se conserve.
- Al no conservarse el producto interno, tampoco lo hará su cuadrado, esto

información.

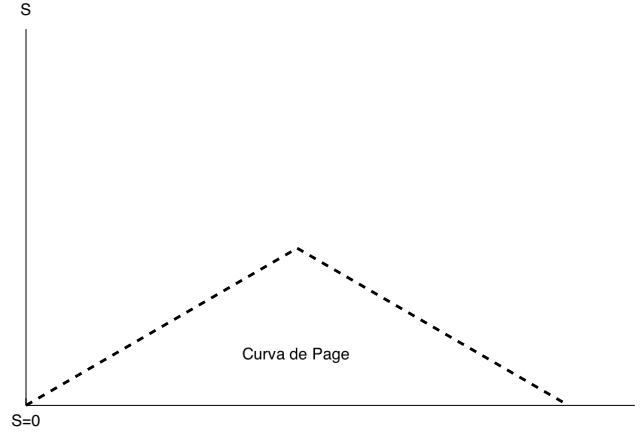


Figura 2.4: Curva de Page

es que la norma no se conservará. La norma recordemos es la probabilidad de encontrar el sistema en un estado determinado.

- La suma de probabilidades será mayor que 1 aunque los estados iniciales se encuentren normalizados, ya que la evolución en la teoría no es unitaria.

De este modo vemos que la opción que parece más correcta, ciertamente es la de una entropía que siga la forma de la curva de Page (figura 2.4) y que gracias a esto nos regrese la unitariedad cuántica necesaria para una correcta teoría de gravedad cuántica⁴.

2.4. Curva de Page

En la sección 1.3.3 vimos que la masa de un agujero negro disminuye como $\frac{dM}{dt} = \frac{a}{M^2}$ (1.91), podemos resolver esta ecuación diferencial para $M(t)$ de la siguiente forma:

$$M = M_0 \left(1 - \frac{t}{t_{evp}}\right)^{1/3}, \quad (2.22)$$

o bien

$$M = M_0 \left(1 - \frac{t}{\gamma M_0^3}\right)^{1/3}. \quad (2.23)$$

La entropía de grano grueso del agujero negro es entonces:

$$S_{BH} = \frac{A}{4} = 4\pi M^2 = 4\pi M_0^2 \left(1 - \frac{t}{\gamma M_0^3}\right)^{2/3}. \quad (2.24)$$

⁴Existe la posibilidad de tener probabilidades negativas, si suponemos que el proceso se encuentra inconcluso. De esta forma cabe la posibilidad (que aquí no estudiamos) de proponer que el proceso del agujero negro es incompleto y nos hace falta tomar en cuenta “algo más” y que esta sea la razón por la que de momento no es posible tener un proceso unitario en la aproximación semiclásica de Hawking [38].

Para la radiación saliente (radiación de Hawking), asumimos que la mayoría de esta radiación son fotones en los modos más bajos l , dado que la solución de Schwarzschild tiene momento angular 0. La entropía de la radiación está dada entonces por

$$S_{Hawking} = 4\pi\beta M_0^2 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\gamma M_0^3}\right)^{2/3}\right), \quad (2.25)$$

en donde $\beta \equiv \frac{dS_{Hawking}/dt}{-dS_{BH}/dt} \approx 1,484$ [39]⁵.

Ahora, el espacio de Hilbert relacionado con los estados salientes puede ser descrito por un sistema bipartido que se encontrará compuesto por el agujero negro y la radiación de Hawking; esto es $\mathcal{H}_{saliente} = \mathcal{H}_{BH} \otimes \mathcal{H}_{Hawking}$ [28, p.50]. Nos encontramos interesados en la entropía de grano fino de la radiación como función del tiempo, el sistema conjunto (radiación y agujero negro) al ser un estado puro su entropía de von Neumann será cero, esta entropía es dibujada por la curva de Page como habíamos mencionado anteriormente.

La entropía del agujero negro disminuye hasta su valor cero, y la entropía de la radiación crece constantemente con el tiempo, buscamos entonces el punto temporal en donde ambas son iguales, el tiempo de Page. El tiempo de Page es donde obtendremos el valor máximo de la entropía para la radiación de grano fino.

El cálculo resulta ser sencillo y basta con igualar las entropías S_{BH} y $S_{Hawking}$ y resolver para el tiempo

$$t_{page} = \left[1 - \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^{3/2}\right] \gamma M_0, \quad (2.26)$$

a este tiempo la masa del agujero negro es:

$$M(t_{page}) = M_0 \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^{1/2}. \quad (2.27)$$

Y por lo tanto en este punto la entropía de la radiación será

$$S_{radiacion} = \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right) 4\pi M_0^2 = 0,5975 S_{BH}. \quad (2.28)$$

La entropía de grano fino utilizando cada una de las entropías anteriores, así como la función de Heaviside $\theta(x)$ y el tiempo de Page puede ser escrita de forma aproximada como sigue:

$$S_{fg} \approx 4\pi\beta M_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{t_{evp}}\right)^{2/3}\right] \theta(t_{page} - t) + 4\pi M_0^2 \left(1 - \frac{t}{t_{evp}}\right)^{2/3} \theta(t - t_{page}). \quad (2.29)$$

Podemos ver la curva de Page para este agujero negro de Schwarzschild en la figura (2.5) [39]. Entonces, al principio del proceso la entropía de la radiación

⁵Para más información sobre el cálculo de β se puede revisar [40] y [41]

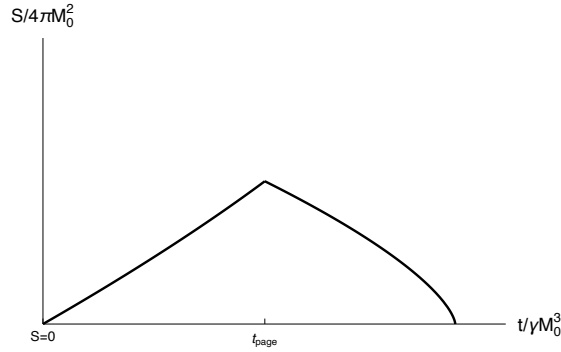


Figura 2.5: Entropía de la radiación de Hawking contra el tiempo para un agujero negro inicialmente puro.

aumenta de forma lineal con respecto al tiempo, cuando se llega al tiempo de Page, la entropía toma un valor maximal y finalmente comienza a disminuir. Recordemos que esta aproximación al tiempo de Page es sobre la métrica de Schwarzschild y no toma en cuenta algunos conceptos más complejos como el factor de cuerpo gris que mencionamos en el capítulo pasado, dichos agregados pueden darnos un tiempo de Page mucho más exacto y una curva correcta para la evolución unitaria, sin embargo nuestra aproximación parece ser correcta para explicar los conceptos presentados.

La curva de Page es una herramienta esencial en el estudio del problema de la información en agujeros negros, pues nos describe el comportamiento de la entropía de la radiación a medida que transcurre el tiempo, de modo que la unitariedad se cumple. Así, de acuerdo al dogma central, una teoría gravitacional que pueda reproducir una curva como la estudiada es una excelente candidata para resolver la paradoja de la información. En los últimos años, se han logrado progresos notables en reproducir la curva de Page dentro del marco de la correspondencia AdS/CFT y mediante el método de réplicas, en los siguientes capítulos nos enfrentaremos a la tarea de sentar algunas bases teóricas básicas que nos sean de utilidad en la teoría que será presentada más adelante.

Capítulo 3

Introducción a la correspondencia AdS/CFT y la entropía de entrelazamiento holográfico: Conceptos básicos y aplicaciones.

En este capítulo, exploraremos la correspondencia holográfica AdS/CFT, también conocida como dualidad gauge/gravedad, propuesta inicialmente por Juan Maldacena en noviembre de 1997 [42]. Esta propuesta revolucionaria, que se originó en el ámbito de la teoría de cuerdas, ha transformado profundamente varios campos de la física teórica. La correspondencia AdS/CFT postula una relación dual entre una teoría de campo conforme (CFT) en d dimensiones y una teoría de gravedad cuántica situada en un espacio-tiempo AdS en $d + 1$ dimensiones [43].

Específicamente, la dualidad fue propuesta en el contexto de la teoría de Yang-Mills $N = 4$, una teoría gauge $U(N)$ maximamente supersimétrica en 3+1 dimensiones. Según Maldacena, esta teoría de Yang-Mills posee un dual holográfico en la forma de teoría de cuerdas tipo IIB en un espacio-tiempo asintóticamente $AdS_5 \times S^5$ [43]. Este vínculo surgió del estudio de las branas D3 en el límite de baja energía de la teoría de cuerdas, revelando una dualidad entre las supercuerdas abiertas y cerradas. En este marco, las cuerdas abiertas que terminan en una brana D generan una teoría de campo gauge $U(N)$, mientras que las cuerdas cerradas describen una teoría gravitacional no trivial en un espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$ cuando N es grande.

La teoría de Yang-Mills tiene una constante de acoplamiento $\lambda = Ng^2$, y cuando N es lo suficientemente grande permite una descripción débilmente acoplada de la gravedad. En contraste, la descripción gravitacional dual tiene un acoplamiento débil $g \sim 1/N$ [43], facilitando estudios en un régimen donde la teoría gauge es fuertemente acoplada y no tratable mediante métodos perturbativos convencionales.

Hasta la fecha, no existe una derivación matemática rigurosa y directa de la correspondencia, pero el caso estudiado por Maldacena sigue siendo el más comprendido y verificado, donde ha sido posible realizar cálculos exactos en ambos lados de la correspondencia, especialmente en casos máximamente supersimétricos donde se pueden utilizar herramientas de integrabilidad, la conjetura ha demostrado ser válida. Sin embargo, ha habido críticas relacionadas con sus fundamentos en la teoría de cuerdas; si la teoría de cuerdas fuera incorrecta o incompleta como teoría cuántica de la gravedad, esto podría sugerir que la base teórica de la correspondencia no es sólida.

En este capítulo, no se profundizará sobre la conjetura y su origen, sino que sentarán las bases para entenderla (ideas generales)[44]; comenzaremos con el estudio de las Teorías Conformes de Campo (CFTs) y su relación con la correspondencia AdS/CFT [45]. Exploraremos cómo las simetrías y las transformaciones del grupo conforme, específicamente en dimensiones superiores a dos, juegan un papel crucial en la formulación y las propiedades de las CFTs. Se discutirán en detalle las transformaciones conformes, que incluyen traslaciones, rotaciones, boosts de Lorentz, y dilataciones, así como transformaciones especiales conformes representadas por la ecuación 3.1, donde se destaca el grupo conforme isomorfo a $SO(2, d)$. Este capítulo también abordará cómo los generadores de estas transformaciones, incluidos los de traslaciones P_μ , las dilataciones D y las traslaciones conformes especiales K_μ , interactúan entre sí según el álgebra conforme, facilitando un marco para entender las interacciones y las invariantes en una CFT [46]. Además, se estudiarán las aplicaciones de estos conceptos al análisis de la entropía de entrelazamiento en CFTs y su relación dual con teorías de gravedad en espacios AdS, subrayando cómo estas herramientas teóricas proporcionan una comprensión profunda de la dualidad gauge/gravedad. Asimismo, se investigarán las implicaciones de estas simetrías para las funciones de correlación y las propiedades dinámicas de las teorías, estableciendo un vínculo detallado entre la estructura matemática de las CFTs y su interpretación física en contextos gravitacionales. Finalizaremos este capítulo presentando la entropía de entrelazamiento holográfico [27][33], así como algunos ejemplos de su uso, de forma que veremos cómo surge la idea de una entropía de agujeros negros dentro de la correspondencia.

3.1. Teorías conformes de campo (CFTs)

Una teoría conforme de campo (CFT, por siglas en inglés) es un tipo especial de teoría cuántica de campos que se caracteriza por ser invariante bajo transformaciones conformes. Las transformaciones conformes son aquellas que

preservan los ángulos, pero no necesariamente las distancias. Dicho de otro modo podemos definir las como aquellas que son invariantes ante el grupo de Poincaré (traslaciones, rotaciones y boosts de Lorentz), reescalamientos de coordenadas $x'^\mu = \lambda x^\mu$ y transformaciones especiales de coordenadas

$$x'^m u = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2x_\nu a^\nu + a^2 x^2}, \quad (3.1)$$

si la teoría vive en $d > 2$ dimensiones [47, pp.102] [28] [45].

El grupo que conforman la unión de las invariantes anteriores se conoce como el grupo conforme, el cual es isomorfo a $SO(2, d)^1$.

Los generadores de estas transformaciones son $M_{\mu\nu}$ para las transformaciones de Lorentz ($M_{\mu\nu}f = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)f$), P_μ para las traslaciones ($P_\mu f(x) = i\partial_\mu f$), D para las transformaciones de escala (este operador actúa en una función de la siguiente forma $Df(x) = ix^\mu\partial_\mu f$) y K_μ para las traslaciones conformes especiales (3.1) (de nuevo este operador actúa sobre una función de la siguiente forma $K_\mu f(x) = i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu\partial_\nu - 2x_\mu\Delta)f(x)$)

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= [K_\mu, K_\nu] = [M_{\mu\nu}, D] = 0, \\ [M_{\mu\nu}, P_\alpha] &= -i(\eta_{\alpha\mu}P_\nu - \eta_{\alpha\nu}P_\mu), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} \pm \text{permutaciones}, \\ [D, P_\mu] &= -iP_\mu, \\ [D, K_\mu] &= iK_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, K_\rho] &= -i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \\ [P_\mu, K_\nu] &= 2i(M_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}D), \end{aligned} \quad (3.2)$$

en donde las tres primeras relaciones manifiestan el álgebra de Lie del grupo de Poincaré, mientras que el resto proveen el álgebra conforme completa. Esta álgebra es isomorfa al álgebra de $SO(d, 2)$ como habíamos mencionado, y puede ser puesta en la forma estándar de este grupo definiendo los generadores J_{ab} con índices antisimétricos ($a, b = 0, 1, \dots, d+1$)

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu}, \\ J_{\mu d} &= \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu), \\ J_{\mu(d+1)=D} &= D. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Entonces podemos escribir J_{ab} como una matriz antisimétrica de la siguiente forma

$$J_{ab} \begin{bmatrix} J_{\mu\nu} & J_{\mu d} & J_{\mu(d+1)} \\ -J_{\mu d} & 0 & D \\ -J_{\mu(d+1)} & -D & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

¹El grupo $SO(2, d)$ es el grupo especial ortogonal de Lie, dicho grupo se encuentra formado por todas las transformaciones lineales que preservan la forma cuadrática de una métrica con signaturas $(2, d)$, en donde 2 representa dos direcciones temporales y d representa las direcciones espaciales.

Definiendo la matriz $G_{ab} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1)$ entonces el conmutador

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(G_{bc}J_{ad} - G_{ac}J_{bd} - G_{bd}J_{ac} + G_{ad}J_{bc}), \quad (3.5)$$

del mismo modo que tuvimos anteriormente para $\eta_{\mu\nu}$ en el conmutador de $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$ reproduciendo el álgebra $SO(1, d)$ [45, pp.31].

Consideramos ahora la transformación de un campo ϕ bajo a representación de Poincaré y la transformación de dilatación [45]. Dado que consideramos un campo escalar el cual es una función bajo la acción del grupo de Poincaré $x \rightarrow x' = \Lambda x + a$ donde $\Lambda \in SO(1, d-1)$, se transforma $\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$. Sin embargo, si incluimos la transformación de escala $x \rightarrow \lambda x$ el campo se transforma también hasta una escala

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \lambda^{-\Delta} \phi(\lambda x), \quad (3.6)$$

aquí Δ se llama dimensión de escala del campo. Entonces el dilatón actúa sobre el campo como

$$[D, \phi(x)] = i(\Delta + x^\mu \partial_\mu) \phi(x), \quad (3.7)$$

y también la acción de K_μ es

$$[K_\mu, \phi(x)] = i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - 2x_\mu \Delta) \phi(x). \quad (3.8)$$

Los generadores P_μ y K_μ pueden ser vistos como operadores de creación y aniquilación sobre D correspondientemente con el valor propio $-i\Delta$ al considerar

$$[D, \phi(0)] = -i\Delta \phi(0), \quad (3.9)$$

y entonces construir representaciones del grupo conforme considerando campos, eigenfunciones de D con el eigenvalor $-i\Delta$ bajo D [45, pp.32]. Estamos interesados en representaciones las cuales están limitadas desde abajo, algo que se encuentra garantizado por el hecho de que

$$[K_\mu, \phi(0)] = 0. \quad (3.10)$$

Aquí $\phi(0)$ es el operador de campo en el origen del espacio de Minkowski y tiene dimensión conforme Δ . Los generadores P_μ y K_μ actuando en $\phi(0)$ aumentan o bajan la dimensión de la escala en una unidad

$$\begin{aligned} DP_\mu \phi(0) &= [D, P_\mu] + P_\mu D \phi(0) = -i(\Delta + 1)P_\mu \phi(0), \\ DK_\mu \phi(0) &= [D, K_\mu] + K_\mu D \phi(0) = -i(\Delta - 1)P_\mu \phi(0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por lo tanto el operador de campo $\phi(0)$ tiene la menor dimensión de escala y es llamado campo primario [28, pp.71][45]. De forma general, en CFT cualquier operador O el cual se transforma bajo transformaciones dilatónicas como $O \rightarrow \lambda^{-\Delta} O$ es llamado “operador primario” de dimensión conforme Δ . En una teoría de campo unitaria conforme Δ es real y positivo, y si O es un operador escalar, este obedece $\Delta \geq \frac{d-2}{2}$. Las derivadas $\partial^n O$ de un operador primario son llamadas “descendientes”; tienen una dimensión conforme $\Delta + n$, de manera que bajo

transformaciones de escala se transforman como $\lambda^{-\Delta-n}$. Otra característica interesante de los operadores primarios en CFT, es que en cualquier punto del espacio-tiempo x hay una biyección natural con una base completa del espacio de Hilbert de la teoría; esto si tomamos la cuantización en un cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ lo cual es equivalente conforme a $\mathbb{R}$ euclidiano [28].

Con el uso de operadores escalares primarios estamos en posición de construir “funciones de correlación”² las cuales tienen que estar limitadas por la invarianza conforme y siguen la siguiente propiedad

$$\langle 0 | \phi_i(x_1) \phi(x_2) \dots | 0 \rangle \rightarrow \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots} \langle 0 | \phi_i(x_1) \phi(x_2) \dots | 0 \rangle. \quad (3.12)$$

Entonces la función de 2-puntos $\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle \sim f((x-y)^2)$ y específicamente resulta ser

$$\langle \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle = \frac{c_{ij}}{(x-y)^{2\Delta}}, \quad (3.13)$$

para campos con la misma dimensión conforme, mientras que si tienen diferente, la función de correlación se anula. Esto nos dice que $c_{ij} = \delta_{ij}$. Debe notarse que el vacío relacionado con esas funciones de correlación es un estado conforme invariante lo que significa $D|0\rangle = 0$ [45, pp-33].

En una CFT, el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ ha sido derivado como una corriente de Noether³ generada por la invarianza traslacional. Este tensor no solo se conserva ante variaciones, cumpliendo que $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$, sino que también carece de traza, $T^\mu_\mu = 0$, una consecuencia de la invarianza bajo dilataciones y transformaciones conformes. Esta característica de no tener traza es muy importante, pues indica que la teoría carece de una escala de energía inherente, destacando la invarianza de escala típica de las CFTs.

Además, el tensor de energía-momento en una CFT es simétrico y tiene asignada una dimensión conforme $\Delta = d$, donde d representa la dimensión espacial en la que se desarrolla la teoría. Esto tiene un impacto directo sobre cómo las dilataciones afectan al tensor, influenciando significativamente las propiedades dinámicas y termodinámicas de la teoría. La función de correlación de dos puntos del tensor de energía-momento, $\langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(y) \rangle$, adopta una forma determinada por la simetría conforme, generalmente expresándose como una función que depende de la distancia entre los puntos y elevada a una potencia dictada por las dimensiones de los operadores y del espacio $\sim \frac{C}{(x-y)^{2d}}$.

La constante de proporcionalidad en esta función de correlación, C , es la carga central efectiva. Esta carga mide el número de grados de libertad o la “complejidad” de la CFT. En teorías bidimensionales, la carga central se manifiesta en el

²Las funciones de correlación, también conocidas como funciones de Green o funciones de correlación de n -puntos, miden la dependencia o correlación entre valores de campos en diferentes puntos del espacio-tiempo. Dicho de otro modo son interpretadas físicamente como la amplitud para la propagación de una partícula o excitación entre dos puntos [48, pp.82].

³El teorema de Noether es un resultado fundamental que relaciona las simetrías continuas de un sistema físico con cantidades conservadas. En términos generales para cada simetría continua de la acción de un sistema físico, existe una cantidad correspondiente que se conserva. En el caso de las teorías de campos, estas cantidades conservadas se expresan a través de corrientes de Noether [48].

término de la anomalía de traza del tensor de energía-momento y es crucial en el desarrollo del álgebra de Virasoro, una extensión centralizada del álgebra de las transformaciones conformes planas. La carga central afecta tanto la amplitud de las funciones de correlación como las propiedades cuánticas y estadísticas de la teoría, incluyendo la estructura de las fases y las transiciones de fase.

Esta noción de carga central adquiere una importancia particular en el contexto de la dualidad AdS/CFT, en donde sirve como un vínculo cuantitativo entre el número de grados de libertad en una CFT en el límite de un espacio Anti-de Sitter (AdS) y la gravedad en el volumen de AdS. Así, la carga central emerge como un indicador esencial del acoplamiento gravitatorio en AdS, jugando un rol crucial en la correspondencia entre teorías gravitacionales y teorías cuánticas de campos, facilitando una comprensión más profunda de ambas descripciones de la física fundamental.

3.2. Espacio de Anti de Sitter (AdS)

El espacio de Anti de Sitter es la otra parte de la correspondencia que necesitamos tratar antes de presentarla de forma un poco más formal. Dicho espacio es una solución de vacío a las ecuaciones de Einstein que es maximalmente simétrica. Esto significa que ninguna dirección del espacio-tiempo se encuentra favorecida, y que cada posición individual a cualquier tiempo nos da la misma métrica. Estas dos condiciones las llamamos isotropía y homogeneidad del espacio. Dados los requerimientos, el espacio-tiempo debe tener una curvatura escalar constante, los candidatos son: espacios AdS que tienen curvatura negativa, espacio de de Sitter con curvatura positiva y por supuesto el espacio de Minkowski con curvatura cero. El tensor de Riemann para un espacio de $(d+1)$ dimensiones es

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{d(d+1)}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \quad (3.14)$$

en donde R es el escalar de Ricci [49]. El resolver las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ (a diferencia de como lo habíamos visto anteriormente) nos da

$$R = \frac{2(d+1)}{d-1}8\pi G_N\Lambda, \quad (3.15)$$

válida para $d > 1$. Por lo tanto, el espacio-tiempo de Anti de Sitter describe un universo con una constante cosmológica negativa. Esto es lo opuesto de lo que pensamos de nuestro universo, el cual tendría que tener una constante cosmológica que impulsa acelerantemente la expansión del universo según las observaciones de Hubble y otros investigadores [6] [50] [51]. El espacio de AdS en cambio, hace el espacio contraerse y dos objetos masivos serán siempre atraídos uno al otro sin importar la velocidad a la que se alejen uno del otro.

Para poder apreciar las simetrías que existen en el espacio de $(d+1)$ dimensiones de anti de Sitter, lo insertamos en $\mathbb{R}^{(2,d)}$, esto es un espacio-tiempo plano de d dimensiones espaciales y dos dimensiones tipo tiempo. El espacio AdS es

entonces la hipersuperficie:

$$-T_0^2 - T_1^2 + \sum_{n=1}^d X_n^2 = -R^2. \quad (3.16)$$

En esta última R es la escala de longitud característica del espacio-tiempo [49]. La métrica de AdS es entonces la métrica inducida en la hipersuperficie. El espacio de de Sitter puede ser definido de manera similar con el lado derecho de la ecuación anterior positiva. Lo primero que notamos es que la simetría de este espacio es $SO(2, d)$, lo que nos permite, por ejemplo, rotar las d dimensiones espaciales, y las dos dimensiones temporales de forma separada. Ahora vamos a explorar esta superficie más de cerca, permitiendo solo una dimensión espacial, al hacer todas las dimensiones espaciales iguales a cero a excepción de $X_1 = X$ obtenemos

$$T_0^2 + T_1^2 - X^2 = R^2, \quad (3.17)$$

la cual puede ser reparametrizada a coordenadas tipo Rindler, $T_0 = R \cosh(\rho) \cos(\tau)$, $T_1 = R \cosh(\rho) \sin(\tau)$ y $X = R \sinh(\rho)$. Esto nos da la siguiente métrica:

$$ds^2 = -dT_0^2 - dT_1^2 + dX^2 = R^2(-\cosh(\rho)^2 d\tau^2 + d\rho^2). \quad (3.18)$$

Notamos que las dos nuevas coordenadas τ y ρ son adimensionales. La representación que se tiene en la ecuación (3.16) nos permite tener curvas temporales cerradas ($X_n = 0$) lo que es generalmente algo que uno trata de evitar en relatividad dado que puede hacer que la causalidad se rompa. Muchos autores, por lo tanto, definen el espacio-tiempo AdS como la cubierta universal de la hipersuperficie anterior, desenrollando el círculo S^1 (con $X_n = 0$) y permitiendo que τ esté en el intervalo $[-\infty, \infty]$, sin identificar a dos τ diferentes [49].

En $\rho = 0$ la métrica luce plana (con un factor conforme R^2), para tener una idea de la métrica, imaginamos que un observador centrado en $\rho = 0$ avienta una partícula en la posición positiva de x . La métrica anterior admite un vector temporal de Killing $k = \partial_\tau$ el cual corresponde a la cantidad conservada, $Q = \frac{d\tau}{d\lambda} \cosh(\rho)^2$, donde λ es un parámetro afín el cual usaremos como el tiempo propio para una partícula masiva. Esta ecuación puede ser interpretada como la conservación de la energía. La geodésica que sigue el camino de la partícula es

$$1 = R^2 \cosh(\rho)^2 \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 - R^2 \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 \quad (3.19)$$

que con la conservación de la energía nos lleva a

$$\frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} = \pm \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R^2 Q^2}{\cosh(\rho)^2} - 1}. \quad (3.20)$$

La partícula tiene una velocidad inicial positiva $\rho'(0) > 1$, la cual determina la energía Q . Pero vemos que un observador posicionado en $\rho = 0$ observará a la partícula detenerse en $\frac{R^2 Q^2}{\cosh^2(\rho)} = 1$; en este punto, la partícula empezará moverse

de regreso al observador. Cuando eventualmente alcance al observador tendrá la misma velocidad inicial, pero dirección contraria, lo cual crea un movimiento oscilatorio, apoyando el hecho de que la constante cosmológica es negativa en Anti de Sitter. Puede mostrarse generalmente que la constante cosmológica es [28]

$$\Lambda = -\frac{(d+1)d}{16\pi G_N R^2}. \quad (3.21)$$

Este ejemplo muestra la importancia de la simetría en el espacio AdS, la cual no solamente es espacial, sino también temporal.

Si en cambio consideramos ahora una partícula sin masa, y la lanzamos desde $\rho = 0$, vemos que ese objeto alcanza infinito en un tiempo finito para el observador

$$\tau = \int_0^\infty \frac{d\tau}{d\rho} d\rho = \int_0^\infty \frac{d\rho}{\cosh(\rho)} = \pi/2. \quad (3.22)$$

Lo que sucede en infinito depende de la condición de frontera impuesta ahí. Una condición de frontera absorbente significaría que la energía puede dejar nuestro sistema, entonces para evitar esto, reflejamos las partículas sin masa de nuevo hacia dentro del espacio.

Con lo anterior podemos entender que en el caso de un agujero negro en el espacio-tiempo asintótico AdS, tendremos un sistema en equilibrio térmico, esto si el agujero negro es lo suficientemente grande, con una cierta cantidad de energía como radiación de Hawking y el resto siendo la masa del agujero negro mismo, lo anterior no sería posible de tener dicho objeto en espacio asintóticamente plano. Más adelante en la sección 6.1.3 volveremos a recuperar este tema, con una finalidad un tanto distinta.

Podemos generalizar la métrica 3.18 a d dimensiones espaciales de la siguiente forma

$$ds^2 = R^2(-\cosh(\rho)^2 d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh(\rho)^2 d\Omega_{d-1}^2), \quad (3.23)$$

en donde $d\Omega$ es el ángulo sólido de una esfera unitaria de $(d-1)$ dimensiones. Estas coordenadas son llamadas coordenadas globales, pero existe otro conjunto de coordenadas, que es realmente útil cuando se estudian agujeros negros, dicho conjunto puede ser obtenido escribiendo $r = R \sinh(\rho)$ y $t = R\tau$

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (3.24)$$

donde $f(r) = 1 + r^2/R^2$. Esta métrica es más fácil de entender intuitivamente dado que en el límite $R \rightarrow \infty$ tenemos el espacio plano de Minkowski con coordenadas esféricas [45] [49].

Esta métrica también nos da la relación entre el radio R del espacio AdS y el tiempo que le toma a una partícula sin masa alcanzar infinito ($r \rightarrow \infty$)

$$t = \frac{\pi}{2} R. \quad (3.25)$$

Podemos entonces pensar el espacio de Anti de Sitter como una caja con una longitud del orden R para partículas sin masa, mientras que para partículas con

masa la caja es infinita.

Un sistema coordenado muy útil es aquel que usa el parche de Poincaré, dicha métrica se puede obtener con la siguiente transformación

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2} (R^2 + (x^i)^2 - t^2) \right) \\ T_1 &= \frac{Rt}{z} \\ X_i &= \frac{R}{z} x^i \\ X_d &= \frac{z}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} (R^2 - (x^i)^2 + t^2) \right), \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde $i \in 1, \dots, d-1$. Esto nos lleva a

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-dt^2 + (dx^i)^2 + dz^2). \tag{3.27}$$

La métrica en su forma anterior se encuentra en su forma conformalmente invariante, de ahí su utilidad. La transformación $(t, x^i, x) \rightarrow \lambda(t, x^i, z)$ deja la métrica invariante. Es importante notar que el parche de Poincaré no cubre la variedad completa, a diferencia de las coordenadas globales. Esta métrica tiene una frontera conforme en infinito $z \rightarrow 0$, lo que significa que podemos remover el prefactor de la ecuación anterior, o más formalmente hacer una transformación conforme

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{3.28}$$

En esta última, (μ, ν) corren en las direcciones ortogonales, dejando $dz = 0$ en la métrica en (3.27), y $\Omega = z/R$, lo cual muestra que la frontera conforme tiene una métrica de Minkowski plana [49]. En las coordenadas globales, es fácil revisar que la frontera conforme tiene la topología $\mathbb{R} \times S^{d-1}$. Esto muestra que las coordenadas son de mucha ayuda en el marco de AdS/CFT; podemos regularizar la métrica y obtener cantidades bien definidas en la frontera de AdS donde la CFT vive, aunque este infinitamente lejos.

3.3. Diccionario Holográfico

Con las secciones pasadas nos encontramos en posición de establecer la correspondencia AdS/CFT. La versión moderna (como se menciona en [28] quien lo recupera de [52]) de la correspondencia nos dice que una CFT_d viviendo en $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ es dual a una teoría cuántica gravitatoria que vive en un espacio-tiempo asintóticamente $AdS_{d+1} \times M$, donde M es una variedad compacta no trivial. La CFT vive en la frontera conforme del espacio-tiempo asintótico AdS. Por ahora no se cuenta con una teoría cuántica gravitacional asintótica al espacio AdS precisa, pero podemos usar una cierta CFT que es conocida y bien definida para obtener algunas conclusiones acerca de la teoría gravitacional de bulto con un límite semiclásico en AdS.

Para nuestros fines, es necesario extraer ciertas conclusiones sobre como las cantidades observables en una teoría se traducen en su dual holográfico. Para realizar lo anterior, necesitamos un mapa que es llamado “diccionario holográfico”, dicho mapa es una lista de las expresiones en CFT de las cantidades interesantes en el bulto, el mapeo es entonces entre ambos lados de la correspondencia. Además, debemos considerar que a falta de una teoría cuántica gravitacional consistente es necesario determinar cuando una CFT es de hecho dual a la gravedad semiclásica. Resulta que como en artículo original [42], si el número de grados de libertad en la CFT (N) es lo suficientemente grande, entonces la teoría gravitacional está débilmente acoplada y tiene un límite a la gravedad clásica. La dualidad establece que los espacios de Hilbert de dos teorías duales son idénticos, lo que significa que existe un mapeo entre estados de la CFT y de la teoría gravitacional en el bulto y también que el Hamiltoniano H que determina la evolución temporal es idéntico para las dos teorías duales, más aún los generadores de simetrías de la CFT ($SO(2, d)$) tienen generadores de bulto de simetría en el espacio AdS.

La correspondencia dice que cada campo escalar del bulto $\phi = \phi(\tau, z, \Omega)$ en AdS está relacionado con un operador primario O de la CFT en la frontera de AdS. Entonces podemos determinar las condiciones de frontera de la frontera conforme de la CFT estudiando un campo local de bulto en AdS cercano a la frontera. Resulta que el campo de bulto puede ser expresado en términos de una suma de campos libres. Si tomamos el funcional generador para las dos teorías, esto es, la CFT y la teoría en AdS que es gravedad con un algún campo de materia ϕ en el bulto, y condiciones de frontera fijas, la dualidad nos indica que

$$Z_{CFT}[J] = Z_{AdS}[J], \quad (3.29)$$

donde J es la fuente usual en términos del funcional generados de la CFT, pero en términos del dual AdS, J es un poco más sutil. Tiene que ver con la configuración de un campo de bulto en la frontera de AdS. Específicamente, un campo de bulto corresponde a un operador primario dual y tiene que tener condiciones de frontera apropiadas en el límite AdS de tal manera que el campo disminuya hasta la función J en la frontera. En otras palabras en el contexto de AdS, $J = \phi_0$. Se demanda que la frontera conforme cumpla ciertas condiciones de frontera porque una geodésica nula puede alcanzar infinito en un tiempo finito (como vimos) y también los modos masivos se acercan a esta en un tiempo finito, entonces estamos interesados en observar el comportamiento del campo bulto cerca de la frontera.

3.4. Entropía de entrelazamiento holográfico

En las secciones anteriores, hemos establecido cómo la dualidad AdS/CFT nos permite explorar y comprender profundamente las propiedades de las teorías de campos y la gravedad. Ahora, nos enfocamos específicamente en la aplicación de este marco para calcular entropías de grano fino en sistemas cuánticos complejos. Consideremos un sistema cuántico A que ocupa una sub-variedad

espacial en una rebanada espacial Σ del espacio AdS, con la frontera denotada por ∂A .

Dentro del marco de las teorías de campo escalar libre en d dimensiones, encontramos que la entropía de entrelazamiento es siempre divergente. Sin embargo, esta divergencia puede ser regularizada introduciendo un corte ultravioleta ϵ , resultando en un término principal divergente que depende de la geometría del subsistema:

$$S_A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma \text{Área}(\partial A)}{\epsilon^{d-1}} + \dots \quad (3.30)$$

Aquí, el coeficiente γ depende del sistema cuántico subyacente pero no de la forma específica de A . Esta expresión no solo refleja la naturaleza de las divergencias encontradas en la teoría de campos, sino que también guarda una notable similitud con la entropía de un agujero negro, lo que nos recuerda nuestro tema central. La correspondencia se presenta como un marco conceptual que nos permitiría bajo el contexto del dogma central obtener una entropía de entrelazamiento que evolucione de forma unitaria para la radiación.

Antes de llegar a este fin, debemos continuar con el camino de revisiones y herramientas teóricas, el siguiente paso es el de presentar la fórmula de Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi [27] [33]. Ellos dan una interpretación gravitacional de la entropía de entrelazamiento presentando una propuesta dentro de la correspondencia AdS/CFT. La propuesta nos dice que la entropía de entrelazamiento S_A de un subsistema A en una CFT d -dimensional sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ con frontera $\partial A \in S^{d-1}$ es

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N^{d+1}}, \quad (3.31)$$

en donde γ_A es la superficie estática de $d - 1$ -dimensiones la cual tiene una frontera $d - 2$ -dimensional $\partial\gamma_A = \partial A$ y G_N^{d+1} es la constante de Newton de la teoría gravitacional en AdS_{d+1} . Esta expresión se conoce como la fórmula de Ryu-Takayanagi (RT) y vemos que mantiene una forma similar a la entropía de Bekenstein.

3.4.1. Derivación heurística de la fórmula RT

Para poder probar la fórmula RT es necesario que antes definamos un nuevo objeto llamado entropía de Rényi, la cual se encuentra definida en términos de los momentos de ρ_A

$$S_{\mathcal{A}}^{(q)} = \frac{1}{1-q} \log[\text{tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}^q)], \quad (3.32)$$

en donde $q \in \mathbb{Z}$, pero a veces es conveniente continuar la definición analítica a $q \in \mathbb{R}^+$. Esto último es especialmente útil cuando usamos el “truco” de réplicas para calcular la entropía de entrelazamiento, dicho truco será introducido del lado de la mecánica estadística en un capítulo posterior dada su importancia en este trabajo sin embargo podemos resumirlo de una manera burda en la siguiente igualdad

$$S_A = \lim_{q \rightarrow 1} S_{\mathcal{A}}^{(q)}. \quad (3.33)$$

Debemos calcular la entropía de la QFT y por lo tanto sería útil construir una integral de camino que calcule ρ_A . Después debemos de calcular las entropías de Renyi tomando una integrarla funcional sobre una “geometría de cubierta ramificada” de la siguiente forma:

Definimos ρ_A en una rebanada de tiempo constante Σ cuando no hay una evolución temporal trivial. Separamos los campos en dos conjuntos $\phi(x) = \{\phi_A(x), \phi_{A^c(x)}\}$. Aquí notamos que la matriz de densidad reducida actúa como operador en $\mathcal{H}_A$. Los elementos de la matriz ρ_A pueden ser definidos por su acción sobre campos soportados por A . Para ver lo anterior, regulamos la integral de camino mediante la imposición de condiciones de frontera para los campos en A

$$\phi_A|_{t=0_-} = \phi_- \quad \phi_A|_{t=0_+} = \phi_+. \quad (3.34)$$

Esto es equivalente a abrir la integral de trayectoria en el dominio restringido del espacio A al tiempo $t = 0^\pm$, y proyectar el resultado sobre valores definidos de $\phi_\pm$.

Escribimos entonces la matriz reducida ρ_A usando la integral de trayectoria

$$(\rho_A)_\pm = \int [D\phi] e^{-S_{QFT}[\phi]} \delta_E(\phi_{\mp A}), \quad (3.35)$$

$$\delta_e(\phi_{\mp A}) \equiv \delta(\phi_A(t=0^-) - \phi_-) \delta(\phi_A(t=0^+) - \phi_+). \quad (3.36)$$

La multiplicación de las matrices reducidas $(\rho_A)^q$ se logra integrando sobre las condiciones de frontera para la componente positiva en la matriz de densidad k -ésima con la componente negativa de la $(k+1)$ matriz de densidad

$$\begin{aligned} (\rho_A)_\pm^q &= \int \prod_{j=1}^{q-1} d\phi_+^{(j)} \delta(\phi_+^{(j)} - \phi_-^{(j+1)}) \\ &\times \left[\int \prod_{k=1}^q [D\phi^{(k)}] \left(e^{-\sum_{k=1}^q S_{QFT}[\phi^{(k)}]} \right) \delta_E(\phi_{\pm A}^{(k)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La integral exterior realiza la identificación deseada de los elementos de la matriz de densidad reducida y la integral interior simplemente replica la integral de trayectoria, la cual calcula los elementos de matriz individuales. Debemos ver cada copia de ρ_A como si fuera calculada en una copia del espacio-tiempo de fondo $\mathcal{B}$ en la frontera CFT. Ahora podemos calcular la integral de trayectoria integrando sobre todos los campos que viven sobre el fondo $\mathcal{B}_q$, el cual es construido tomando q -copias de estas variedades $\mathcal{B}$ y haciendo identificaciones a través de ellas. Definimos lo anterior de la siguiente forma:

$$Z_q[A] = \text{tr}_A(\rho_A^q) \equiv Z[\mathcal{B}]. \quad (3.38)$$

Así podemos escribir (3.32) de la siguiente forma [53]

$$S_A^{(q)} = \frac{1}{1-q} \log \left(\frac{Z_q[A]}{Z_1[A]^q} \right) = \frac{1}{1-q} \log \left(\frac{Z[\mathcal{B}_q]}{Z[\mathcal{B}]^q} \right). \quad (3.39)$$

Ahora se tienen integrales funcionales que calculan los elementos de matriz de potencias enteras arbitrarias de la matriz de densidad [54, pp.7-22].

Del lado de la CFT, la entropía de entrelazamiento puede ser encontrada si calculamos la función de partición en el espacio de n -hojas $(d+1)$ -dimensional vía la fórmula (3.39). Este espacio $\mathcal{B}_q$ está caracterizado por la presencia de un déficit angular $\delta = 2\pi(1-q)$ en la superficie $\delta\mathcal{A}$. Entonces, necesitamos encontrar una geometría de fondo de $(d+2)$ dimensiones S_q en el espacio dual AdS resolviendo la ecuación de Einstein con constante cosmológica negativa tal que la métrica se aproxime a $\mathcal{B}_q$ en la frontera $z \rightarrow 0$.

Para resolver lo anterior asumimos que la geometría de fondo S_q está dada por una q -hoja AdS_{d+2} la cual está definida por el déficit angular δ localizado en una superficie de codimensión dos $\gamma_{\mathcal{A}}$. Así el escalar de Ricci tiene la forma de una función delta

$$R = 4\pi(1-q)\delta(\gamma_{\mathcal{A}}) + R^{(0)}, \quad (3.40)$$

donde $\delta(\gamma_{\mathcal{A}})$ es una función delta localizada en $\gamma_{\mathcal{A}}$ y $R^{(0)}$ es el escalar de Ricci de AdS_{d+2} puro.

Sustituimos (3.40) en la acción de Hilbert para $(d+1)$ diemnsiones [55]

$$\begin{aligned} \log(Z_{AdS}^{(q)}) &= -\frac{1}{16\pi G_N^{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g}(R + \Lambda) + \dots \\ &= -\frac{1}{16\pi G_N^{(d+2)}} \int_{\mathcal{M}} dx^{(d+2)} \sqrt{g}(R + \Lambda) + \dots \\ &= -\frac{4\pi(1-q)\text{Área}(\gamma_{\mathcal{A}})}{16\pi G_N^{(d+2)}} - \frac{1}{16\pi G_N^{d+2}} \int_{\mathcal{M}} dx^{d+2} \sqrt{g}(R^{(0)} + \Lambda). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Basados en el diccionario holográfico

$$Z_{CFT} = Z_{AdS\text{gravitacional}}$$

tenemos

$$\log(Z[\mathcal{B}_q]) = \log(Z_{AdS}^{(q)}) = \frac{(1-q)\text{Área}(\gamma_{\mathcal{A}})}{4G_N^{(d+2)}} + (q - \text{términos independientes}). \quad (3.42)$$

Finalmente llegamos al resultado (3.31) utilizando la entropía de Renyi (3.39)

$$S_{\mathcal{A}}^{(q)} = \frac{\text{Area}(\gamma_{\mathcal{A}})}{4G_N^{(d+2)}}. \quad (3.43)$$

3.4.2. Ejemplos de cálculo de la entropía de entrelazamiento

Continuando con nuestra exploración de la fórmula de Ryu-Takayanagi, es de mucha utilidad considerar ejemplos específicos donde la holografía se emplea para calcular superficies de RT. Esos ejemplos los hemos extraído de los artículos de Ryu y Takayanagi [27] [33], e ilustran aplicaciones claras de la técnica presentada.

Cálculo de la entropía en una CFT_2 sobre $\mathbb{R}^{1,1}$

Existen dos formas de atacar el cálculo de la entropía para una CFT_2 libre, nuestro primer ejemplo, uno mediante cálculos directos sobre la teoría conforme, utilizando la entropía de Renyi y otro método es el de usar la fórmula Ryu y Takayanagi, confiando en el correcto funcionamiento del diccionario holográfico, como antes mencionamos, hacer esto de ambas formas nos permitirá comparar resultados y procedimientos, de modo que podamos estar más seguros de la aplicabilidad de la fórmula RT así como entender un poco más conceptos que surgen en su cálculo. Comenzamos con el cálculo directo en la CFT. Consideremos el caso con estados estáticos para CFT_2 en $\mathbb{R}^{1,1}$. Mapeamos la geometría de fondo al plano complejo aprovechando la no dependencia temporal

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

Se toma el estado $|0\rangle$ de la CFT en $\mathbb{C}$, y escogiendo un instante de tiempo $t = 0$ establecemos $\mathcal{A} = \{x|x \in (-a, a)\}$.

Como primer paso debemos calcular la función de partición $Z[\mathcal{B}_q]$. Dado que $\mathcal{B}_q$ es una superficie con genus-0 podemos mapearle conformalmente de nuevo al plano complejo. Se comienza con campos $\phi(x, t)$ los cuales viven en las q copias ($k = 1, 2, \dots, q$). Las condiciones de “pegado” para $\mathcal{B}_q$ pueden ser mapeadas a condiciones de frontera para los campos

$$\phi_k(x, 0^+) = \phi_{k+1}(x, 0^-), \quad x \in \mathcal{A}. \quad (3.44)$$

Las condiciones de frontera anteriores se pueden implementar si pasamos de la base de q campos independientes a un campo compuesto $\phi(x, t)$ que vive en $\mathcal{B}$ y obedece condiciones de frontera de giro (twist). El mapeo que uno busca, debe implementar los giros por la simetría cíclica de réplica $\mathbb{Z}_q$.

Uno introduce un conjunto de campos de twist los cuales implementan las condiciones de frontera “giradas”. Para el caso revisado los giros son por raíces q -ésimas de la unidad, y la propiedad principal que necesitamos para el operador de twist τ_q es que introduzca un corte de rama del orden q para los campos en su punto de inserción. La dimensión de escala del operador de giro está dada por:

$$h_q = \bar{h}_q = \frac{c}{24} \left(q - \frac{1}{q} \right), \quad (3.45)$$

donde c es la carga central [54, p.28]. Podemos escribir entonces $Z[\mathcal{B}_q]$ de la siguiente forma

$$Z[\mathcal{B}_q] = \prod_{k=0}^{q-1} \langle \tau_q(-a, 0) \tau_q(a, 0) \rangle_{\mathcal{B}}. \quad (3.46)$$

Tratando a los campos de twist como primarios conformes con dimensión de escala dada por (3.45), obtenemos que

$$Z[\mathcal{B}_q] = \left(\frac{2a}{\epsilon} \right)^{-4h_q} = \left(\frac{2a}{\epsilon} \right)^{\frac{c}{6} (q-1/q)}, \quad (3.47)$$

en donde se ha introducido un corte ultravioleta que actúa como regulador [56, pp.7-13]. La entropía de Renyi es entonces

$$S_{\mathcal{A}}^{(q)} = \frac{1}{1-q} \log \left(\frac{2a}{\epsilon} \right)^{\frac{c}{6}(q-1/q)} = \frac{c}{6} (1+1/q) \log \left(\frac{2a}{\epsilon} \right), \quad (3.48)$$

y haciendo $q \sim 1$ obtenemos

$$S_{\mathcal{A}} = \frac{c}{3} \ln \frac{2a}{\epsilon}, \quad (3.49)$$

[57]. Para más información sobre este cálculo instamos al lector a revisar [27, pp.7-12].

Ahora tenemos un resultado, que podemos buscar mediante el uso de la formula RT(3.31), hacemos notar que el cálculo anterior es sumamente complejo y no buscamos aquí explicar todos sus constituyentes, solo fue presentado para poder tener una base sobre la cual comparar nuestro siguiente resultado.

Para realizar esto debemos encontrar geodésicas entre los puntos $(x^1, z) = (-a, \epsilon)$ y $(x^1, z) = (a, \epsilon)$ en las coordenadas de Poincare

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - dx_0^2 + dx_1^2}{z^2}. \quad (3.50)$$

Dado que nos encontramos en un caso estático $dx_0^2 = 0$, así escribimos la acción geodésica de la siguiente forma

$$S = R \int d\xi \frac{\sqrt{x'(\xi)^2 + z'(\xi)^2}}{z}. \quad (3.51)$$

Las ecuaciones de movimiento se resuelven por un medio círculo en el plano “ xz ”:

$$(x, z) = a(\cos \xi, \sin \xi), \quad (\epsilon/a \leq \xi \leq \pi - \epsilon/a). \quad (3.52)$$

La longitud de $\gamma_{\mathcal{A}}$ es

$$\text{Longitud}(\gamma_{\mathcal{A}}) = 2R \int_{\epsilon/a}^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sin \xi} = -2R \log(\epsilon/2a) = 2R \log \frac{2a}{\epsilon}, \quad (3.53)$$

y la entropía finalmente es

$$S_{\mathcal{A}} = \frac{\text{Longitud}(\gamma_{\mathcal{A}})}{4G_N^{(3)}} = \frac{R}{2G_n^{(3)}} \log \frac{2a}{\epsilon} = \frac{c}{3} \log \frac{2a}{\epsilon}, \quad (3.54)$$

donde usamos que $c = \frac{3R}{2G_N^{(3)}}$. La ecuación anterior es consistente con lo revisado previamente en CFT_2 , de modo que la fórmula de Ryu-Takayanagi parece funcionar de manera correcta, más aún aunque parece ser que podemos obtener mucha más información acerca de los campos y su composición en el calculo con entropía de Renyi, el calculo con la formula RT se vuelve más transparente y sencillo, de modo que es más fácil su comprensión en términos físicos.

Geodésicas en AdS_3 , entropía de entrelazamiento de una CFT_2 y su correspondencia holográfica en $\mathbb{R} \times S^1$

Nuestro siguiente ejemplo es un poco más complejo que el anterior, en este caso no nos preocuparemos por el resultado en CFT (dicho resultado puede ser consultado en [27, pp.11]), esta vez nos concentraremos en el cálculo mediante la formula RT.

El sistema estudiado es de nueva cuenta un sistema A en CFT_2 libre en $\mathcal{R} \times S^1$ con temperatura cero. Este tiene un dual en AdS_3 con una correspondiente métrica en coordenadas globales (τ, ρ, θ)

$$ds^2 = R^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2). \quad (3.55)$$

Aquí la CFT_2 vive en un espacio-tiempo caracterizado por las coordenadas (τ, θ) en la frontera de AdS_2 , así que es equivalente topológicamente a un cilindro. El subsistema A en que estamos interesados, vive en una región del cilindro $0 \leq \theta \leq (2\pi l)/L$ donde l y L son las longitudes de los sistemas A y A^c respectivamente. El corte $\rho = \rho_0$ por si mismo debe satisfacer la relación aproximada $e^\rho \sim \frac{L}{\epsilon} \gg 1$. Entonces para el tiempo fijo τ la geodésica que conecta los puntos con $\theta = 0$ y $\theta = \frac{2\pi l}{L}$ determina la superficie mínima γ_A . De nuevo el Área(γ_2) de la superficie mínima es igual a longitud geodésica la cual esta determinada por las ecuaciones de movimientos de la acción geodésica de la métrica en coordenadas globales para el tiempo fijo ($d\tau = 0$).

La acción geodésica esta dada por

$$I = R \int d\chi \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\chi}\right)^2 \sinh^2 \rho \left(\frac{d\theta}{d\chi}\right)^2}. \quad (3.56)$$

Para obtener la ecuacion de movimiento para el Área o lo que es lo mismo en nuestro caso L_γ comenzamos planteando los vectores de posición inicial ($\vec{x}_0$) y velocidad inicial ($\vec{v}_0$), con los que podemos escribir la posición a cada valor de un parámetro λ (la ecuación de las geodésicas en espacio AdS_3)

$$\vec{X}(\lambda) = \cosh(\lambda)\vec{x}_0 + \sinh(\lambda)\vec{v}_0, \quad (3.57)$$

al valor del parámetro final λ^* , se tiene la posición final ($\vec{x}_f$)

$$\vec{X}(\lambda^*) = \vec{x}_f = \cosh(\lambda^*)\vec{x}_0 + \sinh(\lambda^*)\vec{v}_0. \quad (3.58)$$

De la ecuación 3.58, obtenemos la velocidad inicial

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{x}_f - \cosh(\lambda^*)\vec{x}_0}{\sinh(\lambda^*)}, \quad (3.59)$$

y sustituyendo ésta última en 3.57 se tiene:

$$\vec{X}(\lambda) = \frac{\sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda^*)}\vec{x}_f + \left[\cosh(\lambda) - \frac{\cosh(\lambda^*)}{\sinh(\lambda^*)} \sinh(\lambda)\right]\vec{x}_0. \quad (3.60)$$

Hacemos la identificación de $\alpha = \cosh(\lambda^*)$, con lo que podemos obtener que $\alpha^2 - \sinh^2(\lambda^*) = 1$ y equivalentemente $\sinh^2(\lambda^*) = \alpha^2 - 1$, sustituyendo estos resultados en (3.60) se llega a

$$\vec{X}(\lambda) = \frac{\sinh(\lambda)}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \vec{x}_f + [\cosh(\lambda) - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \sinh(\lambda)] \vec{x}_0, \quad (3.61)$$

que es la ecuación (6.4) de [27, sec.6.2] con $\vec{x}_f = \vec{x}$, $\vec{x}_0 = \vec{y}$ y $R = 1$.

En la frontera $\rho = \infty$ de AdS_3 , la métrica es divergente, de forma que es necesario agregar un corte ρ_0 para que las cantidades físicas relevantes estén reguladas, dicho corte restringe el espacio a la región $\rho \leq \rho_0$. Este procedimiento corresponde a un corte ultravioleta en la teoría dual conforme.

En las coordenadas globales para AdS_3 , tenemos una dualidad con teorías de campo conformes de $1 + 1$ dimensiones con carga central:

$$c = \frac{3R}{2G_N^{(3)}}. \quad (3.62)$$

En coordenadas globales AdS_3 está identificado por un cilindro $(t, \theta (\equiv \Omega_1))$ con frontera regularizada $\rho = \rho_0$; así CFT_2 se encuentra definida como la frontera de dicho cilindro. El subsistema “A” que mencionamos en la introducción, corresponde al ángulo $0 \leq \theta \leq 2\pi l/L$.

Planteamos la parametrización para $\vec{x}$ y $\vec{y}$, siguiendo el hiperbolóide en $\mathbb{R}^{2,2}$ adecuado a la geometría hiperbólica de AdS_3 con las variables

$$x^0 = R \cosh(\rho) \cos(t) \quad (3.63)$$

$$x^1 = R \cosh(\rho) \sin(t) \quad (3.64)$$

$$x^2 = R \sinh(\rho) \cos(\theta) \quad (3.65)$$

$$x^3 = R \sinh(\rho) \sin(\theta). \quad (3.66)$$

A tiempo constante $\vec{x}$ y $\vec{y}$ describen los puntos frontera que son unidos por la geodésica, dichos puntos se encuentran dados en $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi l/L$ por lo que podemos escribir

$$\theta = 0 \rightarrow \vec{x} = (\cosh(\rho_0) \cos(t), \cosh(\rho_0) \sin(t), \sinh(\rho_0), 0) \quad (3.67)$$

$$\theta = \frac{2\pi l}{L} \rightarrow$$

$$\vec{y} = (\cosh(\rho_0) \cos(t), \cosh(\rho_0) \sin(t), \sinh(\rho_0) \cos\left(\frac{2\pi l}{L}\right), \sinh(\rho_0) \sin\left(\frac{2\pi l}{L}\right)). \quad (3.68)$$

El vector de velocidad inicial dado por la ecuación (3.59) es ortogonal al de posición inicial, dada la geometría del problema, por lo que se tiene la siguiente condición

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{x}_0 = \frac{1}{\sinh(\lambda^*)} [\vec{x}_f \cdot \vec{x}_0 - \cosh(\lambda^*) \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0] = 0. \quad (3.69)$$

Podemos calcular el primer producto escalar que aparece para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}\vec{x}_f \cdot \vec{x}_0 &= -\cosh^2(\rho_0) \cos^2(t) - \cosh^2(\rho_0) \sin^2(t) + \sinh^2(\rho_0) \cos\left(\frac{2\pi l}{L}\right) \\ &= -1 - 2\sinh^2(\rho_0) \sin^2(\pi l/L).\end{aligned}\tag{3.70}$$

Con este resultado y viendo que $\|\vec{x}_0\|^2 = -1$ entonces encontramos que

$$\cosh(\lambda^*) = 1 + 2\sinh^2(\rho_0) \sin^2\left(\frac{\pi l}{L}\right).\tag{3.71}$$

Ecuación de movimiento para nuestra “Área” y que coincide con (6.7) de [27, sec.6.2] y con la ecuación (2.4) de [33, sec. II] Para estar aún más seguros recordamos la parametrización anterior para obtener el invariante ds^2 , con el hiperboloide dado por $-(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$, por lo tanto con signatura $(-1, -1, 1, 1)$:

$$\begin{aligned}ds^2 &= -(dx^0)^2 - (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= R^2[-\sinh^2(\rho)d\rho^2 + \cosh^2(\rho)d\rho^2 - \cosh^2(\rho)dt^2 + \sinh^2(\rho)d\theta^2] \\ &= R^2[d\rho - \cosh^2(\rho)dt^2 + \sinh^2(\rho)d\theta^2],\end{aligned}\tag{3.72}$$

que es coincidente con la métrica de la ecuación (2.2) [33, sec. II] Continuamos lo anterior ahora si con el cálculo de S_A , para este caso la superficie mínima es γ_A es unidimensional, y es la línea geodésica que conecta los dos puntos frontera para los ángulos $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi l/L$.⁴ Utilizamos la ecuación (3.71), de donde resolvemos para el valor de λ^* , recuperando solamente el valor positivo

$$\lambda^* = R(-\arccos(1 + 2\sin^2(\pi l/L) \sinh^2(\rho_0))).\tag{3.73}$$

Es posible reducir la expresión anterior cuando se toma un corte para la energía grande $e^{\rho_0} \gg 1$, para que esto sea más sencillo escribimos la anterior en forma exponencial

$$\begin{aligned}\lambda^* &= R \log\left(\frac{1}{8}((e^{2\rho_0} - 1)^2(-1 + e^{\frac{2i\pi l}{L}})^2(-e^{-2\rho_0 - \frac{2i\pi l}{L}})\right. \\ &\quad \left.+ 2\sqrt{2}\sqrt{(e^{2\rho_0} - 1)^2(-1 + e^{\frac{2i\pi l}{L}})^2(-e^{-2\rho_0 - \frac{2i\pi l}{L}})}\right. \\ &\quad \left.\sqrt{2 - \frac{1}{8}(e^{2\rho_0} - 1)^2(-1 + e^{\frac{2i\pi l}{L}})^2e^{-2\rho_0 - \frac{2i\pi l}{L}} + 8})\right).\end{aligned}\tag{3.74}$$

⁴Hacemos una pequeña digresión para tratar la elección de x_0 y x_f o sus equivalentes x y y , en el desarrollo anterior y en comparación con los artículos mencionados; el lector notará que las parametrizaciones se encuentran invertidas, sobre todo al ver el ángulo correspondiente a cada uno de los puntos, sin embargo esto no afecta en lo absoluto al cálculo desarrollado y responde a la forma en que se mide el ángulo inicial, como se puede observar en la figura 4 de [27, sec.6.2].

Realizando las simplificaciones obtenemos:

$$\lambda^* \approx R \arccos \left(\frac{1}{2} e^{2\rho_0} \sin^2 \left(\frac{l\pi}{L} \right) \right), \quad (3.75)$$

que es equivalente a

$$\lambda^* \approx \ln \left(\frac{1}{2} e^{2\rho_0} \sin^2 \left(\frac{l\pi}{L} \right) + \frac{1}{2} e^{2\rho_0} \sin^2 \left(\frac{l\pi}{L} \right) \right) = R \ln \left(e^{2\rho_0} \sin^2 \left(\frac{l\pi}{L} \right) \right). \quad (3.76)$$

La entropía entonces es:

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N^{(3)}} = \frac{\lambda^*}{4G_N^{(3)}}, \quad (3.77)$$

$$S_A \approx \frac{c}{3} \ln \left(e^{\rho_0} \sin \left(\frac{\pi l}{L} \right) \right). \quad (3.78)$$

Lo anterior coincide con el resultado conocido para CFT bidimensional, que como mencionamos puede revisarse en [27, pp.11].

Me gustaría terminar este capítulo hablando de manera mas general al considerar un subsistema A que consiste de múltiples intervalos disjuntos

$$A = \{x | x \in [r_1, r_2] \cup [r_2, s_2] \cup \dots \cup [r_N, s_N]\}, \quad (3.79)$$

donde $0 \leq r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots < r_N < s_N \leq L$, donde L es la longitud total del sistema. Dicha región corresponde a $\theta \in \cup_{i=1}^N [\frac{2\pi r_i}{L}, \frac{2\pi s_i}{L}]$ en la frontera. La forma de la entropía para este caso donde no es sencillo descubrir la pantalla holográfica o superficie mínima γ_A es obtenida del resultado en 1+1 dimensiones de la teoría conforme de campos:

$$S_A = \frac{1}{4G_N^{(3)}} \left[\sum_{i,j} \text{Longitud}(r_j, s_i) - \sum_{i < j} \text{Longitud}(r_j, r_i) - \sum_{i < j} \text{Longitud}(s_j, s_i) \right], \quad (3.80)$$

en donde $\text{Longitud}(A, B)$ denota la longitud de la línea geodésica entre dos puntos frontera A y B . La forma correcta y completa de la superficie mínima está dada entonces por lo que se encuentra dentro de los paréntesis, una combinación de líneas geodésicas.

La forma de la entropía propuesta funciona en general para sistemas mucho más complejos y de dimensión superior CFT_d y AdS_{d+1} , y aunque no hay forma de revisar completamente los resultados dada la falta de resultados analíticos del lado de CFT, existen evidencias que los autores mencionan en secciones posteriores de los artículos para apoyar los resultados obtenidos.

Los siguientes dos capítulos presentaran dos herramientas que parecen desconectadas de nuestra discusión actual, pero que resultan sumamente útiles en el desarrollo posterior de la teoría necesaria para encontrar la función que describe la curva de Page, del mismo modo que lo es la formula RT. La función que

describe la entropía de grano fino puede ser obtenida, como veremos más adelante, mediante el método holográfico [58][59], o mediante un método semiclásico [1][2] (ambas soluciones coinciden). De hecho, en esta sección hemos utilizado este segundo método (semiclásico) en la sección 3.4.1, conocido como “método de Réplicas”.

Capítulo 4

Introducción al método de réplicas

4.1. Introducción

El método de réplicas es un procedimiento no riguroso usado popularmente en física estadística, particularmente en la teoría de vidrios de espín (spin glass theory) y en sistemas desordenados (quenched disorder)¹. Consiste en calcular el promedio o esperanza de una función compleja mediante algún procedimiento de continuación analítica a partir del promedio de la función de partición de n réplicas desacopladas del sistema inicial.

Originalmente fue propuesto para simplificar el cálculo del valor promedio de la densidad de energía libre [61] para vidrios de espín, específicamente vidrios de espín de Ising, pero posteriormente se demostró que el método de réplica puede ser muy poderoso para codificar de una manera simple y compacta, propiedades complejas del sistema. Durante 30 años ha evolucionado en una herramienta sofisticada para resolver problemas teóricos diversos, como los vidrios de espín, doblamiento de proteínas, vórtices en superconductores, optimización combinatoria y por supuesto agujeros negros.

En esta sección presentamos una introducción al método mediante un ejemplo simple, de modo que el lector pueda entender su uso posterior en el caso de agujeros negros, así como cantidades y conceptos análogos; dicho ejemplo se encuentra completamente desarrollado en [62, cap.8], de modo que puede considerarse lo siguiente como un resumen de ideas principales.

¹Un vidrio de espín es un estado magnético desordenado en donde el promedio espacial de magnetización sobre los estados es cero, mientras que el promedio temporal de la orientación de cualquier espín dado es diferente de cero, contrastando así con los paramagnetos donde ambos promedios son cero. Un estado de vidrio de espín puede surgir de la competencia entre interacciones ferromagnéticas y antiferromagnéticas o de la frustración geométrica como la red triangular con acoplamiento antiferromagnético entre vecinos cercanos. [60, pp.385].

4.2. Uso del método de réplicas

Como se dijo en la introducción, el método de réplica no es un método riguroso, ya que este cuenta con manipulaciones formales y algunas recetas que pueden parecer arbitrarias, sin embargo dichas recetas se encuentran completamente especificadas y uno puede considerar al método como una herramienta analítica prácticamente automática.

4.2.1. Modelo de energía aleatoria

Comenzamos buscando la solución de réplica para el modelo de energía aleatoria. Dicho modelo es el más simple en la física estadística de un sistema desordenado que exhibe una transición de fase, dicho esto, el modelo no pretende dar una descripción realista de algún sistema físico, sin embargo nos provee de un ejemplo con varios conceptos y es lo suficientemente simple para poder ser estudiado por el método de réplica; la estructura de este modelo aparece en diferentes contextos y su estudio por lo tanto resulta muy útil en fenómenos complejos.

En el modelo de energía aleatoria existen $M = 2^N$ configuraciones que denotamos por los índices $i, j, \dots \in \{1, \dots, 2^N\}$; las energías $\{E_i\}$ se distribuyen de forma Gaussiana con media cero y varianza $N/2$, de este modo la energía es un proceso estocástico. La función de distribución de probabilidad para la energía E_i del estado i está dada por:

$$P(E_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} e^{-E_i^2/N}. \quad (4.1)$$

Dada una instancia del modelo, definida por los 2^N números reales $E_1, E_2, \dots, E_{2^N}$, se asigna a cada configuración j una probabilidad de Boltzman $\mu_\beta(j)$ de la siguiente forma:

$$\mu_\beta(j) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_j}, \quad (4.2)$$

donde $\beta = \frac{1}{T}$ y el factor de normalización Z es la función de partición dada por²:

$$Z = \sum_{j=1}^{2^N} e^{-\beta E_j}. \quad (4.3)$$

4.2.2. Solución de réplica al modelo de energía aleatorio

Los potenciales termodinámicos intensivos del modelo de energía aleatorio son auto-promediables, dicho de otro modo, sus distribuciones se encuentran concentradas alrededor de la media en el límite de N grandes, como por ejemplo la densidad de energía libre $f = -(\beta N)^{-1} \log Z$ ³, sin embargo la función de

²Para más información revisar [62, cap.5]

³Otros potenciales pueden ser calculados de las derivadas de la energía libre.

partición tiene una distribución ancha aún para valores de N grandes; esto se traduce en que su promedio se encuentra dominado por muestras muy raras en la fase de temperaturas bajas. Para describir muestras típicas uno debe calcular el promedio del logaritmo de la función de partición $\mathbb{E} \log Z$.

Resulta interesante notar que es mucho más sencillo calcular momentos enteros de la función de partición $\mathbb{E} Z^n$ con $n \in \mathbb{N}$ que $\mathbb{E} \log Z$.

Ahora, podemos usar lo anterior para calcular el promedio de la función de partición logarítmica si:

$$\mathbb{E} \log Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log(\mathbb{E} Z^n). \quad (4.4)$$

La idea general entonces es llevar el cálculo de la esperanza de la enésima potencia de Z como si n fuera un entero, y en un cierto punto, después de obtener una expresión que sea manejable, recordar que n debe ser un número real y que (4.4) deberá cumplirse.

El método puede ser resumido en una serie de pasos, el primero de ellos consiste en notar que Z^n puede ser escrita como una suma de n términos

$$Z^n = \sum_{i, \dots, i_n}^{2^N} e^{-\beta E_1 - \dots - \beta E_{i_n}}, \quad (4.5)$$

podemos entender esta como la función de partición para un sistema nuevo, formado por n copias estadísticamente independientes de la original. Nos referimos a las copias como réplicas, de ahí el nombre de “método de réplicas”. Reescribimos (4.5) usando la función indicador⁴

$$Z^n = \sum_{i_1 \dots i_n=1}^{2^N} \prod_{j=1}^{2^N} e^{[-\beta E_j (\sum_{a=1}^n \mathbb{I}(i_a=j))]} \quad (4.6)$$

Ahora podemos escribir (4.6) con ayuda del hecho de que las energías son Gaussianas (eq.4.1) y de que las energías asociadas a cada una de las réplicas son independientes⁵:

$$\mathbb{E} Z^n = \sum_{i_1 \dots i_n}^{2^N} e^{\frac{\beta^2 N}{4} \sum_{a,b=1}^n \mathbb{I}(i_a=i_b)}. \quad (4.8)$$

De nuevo, es posible considerar (4.8) como una nueva función de partición para un nuevo sistema replicado. En este caso la energía se encuentra dada por

⁴La función indicador $\mathbb{I}(s)$ de una expresión lógica s está definida como 1 si la expresión es verdadera y 0 si esta es falsa.

⁵Para reescribir esto haciendo uso de (4.1), es necesario multiplicar (4.6) por (4.1) e integrar; podemos hacer el caso para un valor de $n = 1$ de manera que sea más sencillo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N}} e^{-E^2/N - \beta E} dE = \frac{\sqrt{\pi N}}{\sqrt{\pi N}} e^{\frac{\beta^2 N}{4}} = e^{\frac{\beta^2 N}{4}} \quad (4.7)$$

y como se dice dada, la linealidad e independencia de las E_j , podemos obtener el resultado.

$E_{i_1 \dots i_n} = -N\beta/4 \sum_{a,b=1}^n \mathbb{I}(i_a = i_b)$; de este modo se observa que el sistema ya no se encuentra en desorden, la energía es una función determinista de la configuración además de que las réplicas no son más estadísticamente independientes, se encuentran en interacción.

La interacción entre las réplicas se debe a que la energía no puede ser escrita como una suma de términos réplica individuales, esto es equivalente a una atracción entre réplicas distintas. La energía depende de la temperatura, dicha dependencia provoca que el efecto de la interacción sea mayor a menor temperatura.

Dada las configuraciones de las réplicas, es conveniente introducir una matriz de $n \times n$ que se define de la siguiente forma [62, pp. 4, 146]

$$Q_{ab} = \mathbb{I}(i_a = i_b), \quad (4.9)$$

cuyos elementos se encuentran en $\{0, 1\}$. La matriz (4.9) es llamada “matriz de sobreposición”. Con esta definición y notando que (4.6) solo depende de la configuración por la matriz de sobreposición es claro que

$$\mathbb{E}Z^n = \sum_Q \mathcal{N}_N(Q) e^{\frac{N\beta^2}{4} \sum_{a,b=1}^n Q_{ab}}, \quad (4.10)$$

en donde $\mathcal{N}_N(Q)$ es el número de configuraciones $(i, \dots, i_n)$ cuya matriz de superposición es $Q = \{Q_{ab}\}$; la suma $\sum_Q$ corre sobre las matrices simétricas $\{0, 1\}$ con unos en la diagonal. Dado el número de matrices de este tipo $(2^{n(n-1)/2})$, además del número de configuraciones del sistema replicado (2^{nN}) , podemos suponer que el número de configuraciones dada una matriz de superposición satisface un “principio de desviaciones grandes” de la forma $\mathcal{N}_N(Q) = e^{(Ns(Q))}$. Hacemos una pequeña digresión para hablar del principio de desviaciones grandes, este principio se origina en la estadística y se encuentra definido por el teorema de Sanov [62, p. 67]:

Teorema 1 Sean $s_1, \dots, s_N \in \mathcal{X}$ N , variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tomadas de una distribución de probabilidad $p(x)$, y sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$ un conjunto compacto de distribuciones de probabilidad sobre $\mathcal{X}$. Si q es el tipo de $(s_1, \dots, s_N)$, entonces

$$\mathbb{P}[q \in \mathcal{K}] \doteq \exp[-ND(q^*||p)]$$

en donde $q^* = \arg \min_{q \in \mathcal{K}} D(q||p)$ y $D(q||p)$ es la divergencia de Kullback-Leibler definida como

$$D(q||p) \equiv \sum_{x \in \mathcal{X}} q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)}$$

El teorema anterior nos dice que la probabilidad de encontrar una secuencia con tipo q se comporta en general para N grandes como $\exp[-ND(q||p)]$. Para N grandes, las secuencias típicas tienen tipo $q(x) \approx p(x)$, y aquellas con un diferente tipo son exponencialmente raras.

Regresando a nuestra labor, usando esta forma de $\mathcal{N}_N(Q)$, la función de partición replicada puede ser escrita como

$$\mathbb{E}Z^n = \sum_Q e^{(Ng(Q))} \quad (4.11)$$

y

$$g(Q) \equiv \frac{\beta^2}{4} \sum_{a,b=1}^n Q_{ab} + s(Q). \quad (4.12)$$

La estrategia del método de réplica recae en estimar la suma anterior usando el método del punto silla, dicho de otra forma, estimar la suma por un término único dominante.

Es importante mencionar que las n réplicas son equivalentes desde su creación, por lo tanto la función (4.12) debe ser simétrica ante la permutación de ellas, esta es una propiedad del método y es llamada simetría de réplica.

Ahora ¿Qué pasa con el punto silla que se busca si dicho punto posee simetría? Esto es que para una permutación π se cumpla que $Q^\pi = Q$, entonces se dice que el sistema es réplica-simétrico (RS por sus siglas en inglés), si en cambio esto no se cumple tenemos una ruptura de simetría espontánea en el límite de N grandes. Nos concentraremos en el caso más sencillo por el momento, en el cual se tiene simetría y buscamos el punto silla de este.

Si Q es invariante ante permutaciones, entonces se tiene que $Q_{aa} = 1$ y

$$Q_{ab} = q_0; \quad a \neq b, \quad (4.13)$$

dejando dos posibilidades:

- La matriz se encuentra definida por $q_0 = 0$, por lo que el número de configuraciones $\mathcal{N}_N(Q_{RS,0}) = 2^n(2^N - 1) \dots (2^N - n + 1)$, y entonces $s(Q_{RS,0}) = n \log 2$, $g(Q_{RS,0}) = n(\beta^2/4 + \log 2)$.
- La matriz se encuentra definida por $q_0 = 1$, por lo que el número de configuraciones $\mathcal{N}_N(Q_{RS,1}) = 2^N$, y entonces $s(Q_{RS,1}) = \log 2$, $g(Q_{RS,1}) = n^2\beta^2/4 + \log 2$.

Dados ambos puntos silla en esta configuración de réplica simétrica, necesitamos conocer cuál de los dos es el dominante para la suma; para esto graficamos $g(Q_{RS,0})$ y $g(Q_{RS,1})$ como función de T para dos valores de n , los cuales son ($n = 3, n = 0,5$)

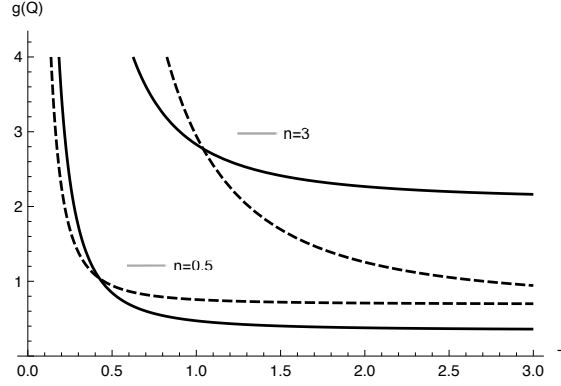


Figura 4.1: Función $g(Q)$ para el modelo de energías aleatorias, la línea punteada corresponde a los puntos silla $Q_{RS,1}$ y la línea continua a los puntos silla $Q_{RS,0}$.

Podemos observar que cuando $n > 1$, en nuestro caso $n = 3$, tenemos un punto donde $g(Q_{RS,0})$ supera a $g(Q_{RS,1})$, dicho punto se encuentra dado por la igualdad de estas dos expresiones

$$\begin{aligned} \frac{n^2 \beta^2}{4} + \log 2 &= \frac{n \beta^2}{4} + n \log 2 \\ \beta^2 &= 4 \log 2 / n \\ \beta &= \sqrt{4 \log 2 / n}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Llamaremos $\beta_c(n)$ a este valor encontrado de β , así tenemos $g(Q_{RS,1}) > g(Q_{RS,0})$ para $\beta > \beta_c(n)$ y lo inverso para cuando $\beta < \beta_c(n)$. Si se asume que en la suma el término dominante se encuentra dado por los factores de réplica-simétrica, entonces tenemos que $\mathbb{E}Z = e^{N \max[g(Q_{RS,0}), g(Q_{RS,1})]}$; este punto $\beta_c(n)$ se interpreta como una transición de fase del sistema de n réplicas. Dicho de otra forma cuando tenemos altas temperaturas el punto silla dominante es el que tiene $q_0 = 0$, y cuando se tienen bajas temperaturas es $q_0 = 1$; en el primero de estos casos las réplicas son independientes y cuando al temperatura baja la independencia desaparece. La explicación cualitativa de lo que sucede con las réplicas es que a bajas temperaturas la distribución de Boltzman está concentrada en los niveles más bajos de energía, por lo tanto todas las réplicas tienen mucha probabilidad de permanecer en la misma configuración. Al hacer el promedio sobre la muestra, esto es sobre los niveles de energía, no podemos distinguir que configuración tiene la menor energía, solo vemos que las réplicas prefieren en manera conjunta encontrarse en el mismo estado.

¿Qué sucede cuando $n < 1$? En este caso la transición está dada de nuevo por (4.14), pero los roles de las temperaturas se invierten. A bajas temperaturas tenemos una dominancia por el valor de $q_0 = 0$ y para altas temperaturas $g(Q_{RS,0}) < g(Q_{RS,1})$, de forma que si se aplica la receta usual de escoger el punto silla que maximiza a $g(Q)$, encontramos algo sin sentido; las réplicas se volverían independientes a bajas temperaturas y estarían correlacionadas a altas

temperaturas. El método de réplica resuelve este problema definiendo un nuevo criterio: para el caso donde $n < 1$, uno debe estimar la suma usando el mínimo de $g(Q)$. No existe justificación matemática para realizar esto sin embargo su funcionamiento y la interpretación física que se le puede dar en el caso que se esté estudiando puede justificarlo.

Ahora podemos utilizar (4.4) para evaluar la densidad de energía libre. Asumimos que los límites $N \rightarrow \infty$ y que $n \rightarrow 0$ conmutan

$$\begin{aligned} -\beta f &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{Nn} \log(\mathbb{E} Z^n) \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{n} g(Q_{RS,0}) = \frac{\beta^2}{4} + \log 2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Este resultado resulta ser correcto para altas temperaturas si se compara con el resultado que se puede obtener por medios usuales, sin embargo, una vez que se realiza la transición de fase no se puede tener el resultado correcto para el caso RS.

Si uno desea obtener el resultado correcto para $\beta > \beta_c$, la suma se encuentra dominada por las matrices que no son RS. Para mejorar el resultado uno puede optimizar el subespacio de matrices, debilitando el requisito de réplica-simétrico. La ruptura de simetría de réplica (RSB por sus siglas en inglés), prescribe un procedimiento recursivo para definir espacios cada vez más grandes de matrices Q en donde se puedan buscar puntos silla. El primer paso para el procedimiento es llamado la ruptura de simetría de réplica de un-paso (1RSB). Suponemos que n es un múltiplo de x , se dividen las n réplicas en n/x grupos de x elementos cada uno, y se hace

$$\begin{aligned} Q_{aa} &= 1, \\ Q_{ab} &= q_1 \quad \text{si } a \text{ y } b \text{ están en el mismo grupo,} \\ Q_{ab} &= q_0 \quad \text{si } a \text{ y } b \text{ están en diferentes grupos.} \end{aligned} \quad (4.16)$$

De esta forma podemos ver que $\mathcal{N}_N(Q) = 2^N(2^N - 1) \dots (2^N - n/x + 1)$ y por lo tanto $s(Q) = (n/x) \log 2$. Con esto podemos escribir

$$g(Q_{RSB}) = \frac{\beta^2}{4} nx + \frac{n}{x} \log 2. \quad (4.17)$$

El siguiente paso es minimizar (4.17) con respecto a x y tomar el límite $n \rightarrow 0$; para ello derivamos (4.17)

$$\frac{\partial g(Q_{RSB})}{\partial x} = \frac{\beta^2}{4} n - \frac{n}{x^2} \log 2, \quad (4.18)$$

e igualamos a 0 la anterior expresión, resolviendo posteriormente para x

$$\begin{aligned} 4/\beta^2 &= x^2 / \log 2 \\ x_s(\beta) &= \sqrt{4 \log 2 / \beta^2} = \frac{2\sqrt{\log 2}}{\beta} = \beta_c / \beta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sustituimos el resultado anterior en (4.17) y asumimos que orden de los límites puede ser intercambiado como en el caso RS

$$-\beta f = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \min_x g(Q_{RSB}) = \lim_{n \rightarrow 0} n/n\beta \sqrt{\log 2} = \beta \sqrt{\log 2}, \quad (4.20)$$

el cual es el resultado correcto para el caso $\beta > \beta_c$. Es posible recuperar la energía libre correcta para el modelo de energía aleatorio en toda la temperatura si aceptamos que la desigualdad $1 \leq x \leq n$ se convierta en $n = 0 \leq x \leq 1$ en el límite $n \rightarrow 0$. Si la minimización se encuentra limitada a $x \in [0, 1]$, tenemos que $x = \beta_c/\beta$ es el punto silla correcto en la fase $\beta > \beta_c$ y para $\beta < \beta_c$ el parámetro x se mantiene con el valor $x = 1$.

Como podemos observar el método de réplica resulta ser una herramienta útil en el cálculo de funciones de partición de modelos complejos y por lo tanto de cantidades que pueden ser derivadas de dicha función. El camino que seguimos con las prescripciones dadas (4.13, 4.16) es el de Parisi ([61]) y este nos dió una clase bien definida de continuaciones analíticas, que resultan ser la correcta en muchos problemas, sin embargo es posible elegir reglas distintas si las características físicas del problema así lo permiten por ello es que el método se considera como no “riguroso”.

En el capítulo 6 retomaremos el método de réplicas, esta vez dentro de la integración de la entropía que describe la curva de Page.

Capítulo 5

Modelo de Jackiw-Teitelbom (J-T) y gravedad dilatónica

5.1. Introducción

Nuestro último elemento teórico antes de abordar los trabajos de [2] y [1] para los agujeros de gusano replicados y la fórmula de la entropía de grano fino es la gravedad de Jackiw-Teitelboim.

Siempre que se quiere conocer información acerca de un fenómeno que no ha sido estudiado con anterioridad se plantea el modelo más simple para su modelado y su consecuente estudio; la razón principal de plantear modelos “simples”, es que estos nos ayudan a sentar ciertas bases teóricas, de modo que podamos construir una teoría robusta que responda todos los cuestionamientos que lleguemos a tener sobre el fenómeno, sin embargo hay que tener siempre presente que estos modelos de juguete pueden ser erróneos o que en su caso, por su incompletitud, agregan incongruencias físicas en el modelado de fenómenos reales.

Dicho lo anterior, el planteamiento de una gravedad cuántica es uno de los modelos más complejos a enfrentarse dentro de la física teórica; encontrar una explicación clara de los fenómenos gravitacionales en la escala de Planck resulta muchas veces imposible dadas las herramientas actuales. Sin embargo, el estudio de modelos generales bidimensionales de la gravedad nos permite atacar preguntas básicas de la gravedad cuántica, eludiendo complicaciones técnicas importantes que hacen el tratamiento en dimensiones superiores complicado. Dicho de otro modo, esperamos mediante el uso de modelos simples, explicar ciertos aspectos de fenómenos físicos dentro de la gravitación en la escala de Planck, como lo es la evaporación de agujeros negros, tema central de esta investigación.

En distintos intentos de encontrar respuesta a las preguntas que surgen del plan-

teamiento de la unificación (gravedad y cuántica), la manera más razonable de proceder es siempre tratar de utilizar hasta donde se pueda las leyes conocidas de la mecánica cuántica dentro de la GR. Esto es extremadamente complicado de hacer en las usuales $3 + 1$ dimensiones, por lo tanto distintos investigadores al notar esto comenzaron a desarrollar modelos en dimensiones menores de gravedad¹.

En dos dimensiones la acción de Einstein-Hilbert es el término de Gauss-Bonnet². Por lo tanto, intrínsecamente los modelos en $D = 2$ son localmente triviales y se introduce en consecuencia una estructura adicional dada por el campo dilatónico, el cual surge naturalmente en todo tipo de compactificaciones desde dimensiones superiores.

La introducción de campos dilatónicos permite el tratamiento de la dinámica para una teoría dimensional $D > 2$ de gravedad en una teoría efectiva a una dimensión menor $D_1 < D$. De los modelos con las características antes mencionadas el más destacable es el de Jackiw-Teitelboim (JT) investigado a fondo durante la década de 1980 [64].

En esta sección introduciremos el modelo de Jackiw y el de Teitelboim, además de una generalización para encontrar JT de la teoría de dilatones generalizada (GDT por sus siglas en inglés).

5.2. Gravedad en dos dimensiones

El comportamiento de la teoría de la relatividad general en dos dimensiones es distinto al usual; dicha discrepancia surge de la modificación de cantidades tensoriales básicas como lo es el tensor de curvatura $R_{\mu\nu\lambda\rho}$. En el caso de $D = 2$ el tensor antes mencionado tiene solamente una componente independiente, todas las demás componentes distintas de cero pueden ser obtenidas por simetría de R_{0101} . El tensor de curvatura puede ser escrito en términos del escalar de curvatura

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}R(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}). \quad (5.1)$$

El tensor de Einstein es:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (5.2)$$

¹La idea claramente no es nueva, un ejemplo muy simple de esto son los potenciales unidimensionales dentro de la mecánica cuántica; estos potenciales constantes nos proveen del ejemplo más simple de cuantización y del efecto túnel. Otros ejemplos incluyen el modelo Ising en dos dimensiones dentro de la mecánica estadística y el campo escalar en dos dimensiones espacio-temporales usado para describir efectos como la ruptura espontánea de simetría y solitones.

²El término de Gauss-Bonnet surge de complementar el escalar de curvatura R con invariantes de orden mayor en curvatura. La ventaja que esto presenta es que introducen términos extras de grados de libertad. Los invariantes de menor dimensión de masa son:

$$P \equiv R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \quad Q \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

La combinación de invariantes que parece ser la más prometedora y por lo tanto más estudiada es $R^2 - 4P + Q$ llamada el término de Gauss-Bonnet [63, p.248].

Utilizando (5.1) podemos escribir

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} &= g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2} R (\delta_\lambda^\lambda g_{\mu\nu} - \delta_\nu^\rho g_{\mu\rho}) - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2} R (2g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

de modo que el tensor de Einstein se anula y las ecuaciones de Einstein no tienen sentido en dos dimensiones. En dos dimensiones es necesaria una nueva teoría de gravedad clásica.

Dado que toda la información de la curvatura del espacio-tiempo se encuentra contenida en el escalar de curvatura, la opción que resulta ser más natural para la ecuación de campo gravitacional es

$$R - \Lambda = 0, \tag{5.4}$$

y se traduce claramente en que el escalar de curvatura es una constante. Dado que todas las variedades bidimensionales son planas conformes, se pueden escoger coordenadas para que la métrica pueda escribirse como $g_{\mu\nu} = e^\varphi \eta_{\mu\nu}$. Podemos escribir (5.4) como la ecuación de espacio plano de Liouville

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi + \Lambda e^\varphi = 0, \tag{5.5}$$

para el factor conforme φ . El beneficio que se obtiene de trabajar con la teoría de Liouville como modelo de gravedad, es que esta es una teoría de campo completamente integrable [65].

La ecuación (5.4) es de uso limitado si no puede ser derivada de un principio de acción. Sin embargo, no hay acción con ecuación de movimiento (5.4) que sea construida de la métrica solamente, que sea invariante bajo transformaciones de coordenadas y que además sea integral de una Lagrangiana local. Si relajamos estas condiciones, podemos encontrar principios de acción para la teoría de curvatura constante de gravedad en dos dimensiones; dichos principios de acción fueron planteados por Teitelboim y Jackiw [66-69].

Modelo de Jackiw

Jackiw propone una acción que es local y generalmente covariante, la relación en los puntos antes señalados viene dada porque esta no es construida completamente de la métrica, dicho esto la acción es:

$$S = \frac{1}{K} \int d^2x \sqrt{-g} N (R - \Lambda). \tag{5.6}$$

En (5.6) N es un campo auxiliar que juega el papel de un multiplicador de Lagrange y K es una constante de acoplamiento.

Si variamos la acción planteada por Jackiw con respecto a N obtenemos

$$\frac{\delta S}{\delta N} = \frac{1}{K} \int d^2x \sqrt{-g} (R - \Lambda) = 0, \tag{5.7}$$

$$R - \Lambda = 0, \quad (5.8)$$

que es justamente nuestra ecuación (5.4). Ahora si variamos la acción con respecto a la métrica obtenemos una ecuación tensorial para N

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \\ \frac{1}{K} \int d^2x \left(\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} N(R - \Lambda) + \frac{\delta N}{\delta g_{\mu\nu}} \sqrt{-g}(R - \Lambda) + \frac{\delta(R - \Lambda)}{\delta g_{\mu\nu}} N \sqrt{-g} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

El segundo término dentro de los paréntesis de la anterior se anula dado que N es un campo escalar auxiliar que no depende de $g_{\mu\nu}$; así la variación de la acción nos lleva a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}N(R - \Lambda)\sqrt{-g}g_{\mu\nu} + \sqrt{-g}N\frac{\delta(R)}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \\ -\frac{1}{2}N(R - \Lambda)\sqrt{-g}g_{\mu\nu} + \sqrt{-g}N[R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu}\square] = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

en donde usamos que $\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu}$. Sabemos que por (5.8) el primer término de (5.10) es igual a cero, así la variación de la acción solo depende de la variación del escalar de curvatura

$$\delta S = \frac{1}{K} \int d^2x \left(\sqrt{-g}N[R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu}] \right). \quad (5.11)$$

Realizando integración por partes podemos cambiar la acción de los operadores diferenciales a N , así tenemos:

$$\sqrt{-g}NR_{\mu\nu} - \sqrt{-g}N_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\square N = 0, \quad (5.12)$$

tomando la traza podemos resolver para el d'Alambertiano

$$\begin{aligned} NR - \square N + 2\square N = 0 \\ \square N = -NR = -N\Lambda, \end{aligned} \quad (5.13)$$

por lo tanto

$$NR_{\mu\nu} - N_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}N\Lambda = 0, \quad (5.14)$$

y por (5.2), tenemos la segunda condición

$$N_{;\mu\nu} + \frac{1}{2}\Lambda g_{\mu\nu}N = 0. \quad (5.15)$$

Una cualidad notable de (5.6) es la relación a la relatividad general tridimensional mediante una reducción dimensional. Para realizar lo anterior comenzamos con la acción tridimensional de Einstein-Hilbert eliminando toda la dependencia en la coordenada espacial x^2 haciendo $g_{02} = g_{12} = 0$ e identificando N^2 con g_{22} . Si este esquema se aplica a la gravedad tridimensional acoplada a campos de

materia, la acción bidimensional tiene una ecuación gravitacional de movimiento como sigue

$$R = \Lambda + k\mathcal{L}_m, \quad (5.16)$$

en donde $\mathcal{L}_m$ es la densidad Lagrangiana para la materia. La ecuación para N consecuentemente se convierte en

$$N_{;\mu\nu} + \frac{1}{2}\Lambda g_{\mu\nu}N = -\frac{K}{2}(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T^\sigma_\sigma), \quad (5.17)$$

con $T_{\mu\nu}$ siendo el tensor de energía momento de los campos de materia [70, pp.11-14].

5.2.1. Modelo de Teitelboim

Teitelboim llegó a una acción para la gravedad bidimensional analizando la estructura Hamiltoniana del espacio bidimensional. Esta acción está construida completamente de la métrica, sin embargo no es generalmente covariante. Escribimos primero la métrica de la siguiente forma

$$\|g_{\mu\nu}\| = e^\varphi \begin{pmatrix} (\eta^\perp)^2 - (\eta^1)^2 & \eta^1 \\ \eta^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

en donde $e^{\varphi/2}\eta^\perp$ y η^1 son la función lapso (lapse function) usual y el vector cambio para $x^0 = \text{Superficies constantes}$. La acción en forma de Lagrange es:

$$S = -\frac{1}{2k} \int d^2x \left[\frac{1}{\eta^\perp} (\varphi_{,0} - \eta^1 \varphi_{,1} - 2\eta_{,1}^2)^2 - \eta^\perp (\varphi_{,1})^2 - 4\eta_{,1}^\perp \varphi_{,1} + 2\eta^\perp \Lambda e^\varphi \right]. \quad (5.19)$$

En esta acción, solo el factor conforme φ es tratado como una variable dinámica, y las partes invariantes de la métrica $(\eta^\perp, \eta^1)$ son consideradas como campos externos dados que no serán variados. En el caso espacial cuando $\eta^\perp = 1$ y $\eta^1 = 0$ obtenemos la acción de Liouville. De forma más general, la variación del factor de escala en esta última acción nos lleva a la ecuación de movimiento (5.4).

Si agregamos campos de materia a (5.19), la ecuación gravitacional de movimiento se vuelve

$$R = \Lambda - \frac{k}{2}T^\mu_\mu, \quad (5.20)$$

donde T^μ_μ es la traza del tensor de energía momento usual para la materia. Si asumimos $k > 0$, esta es precisamente la expresión para el escalar de curvatura en la gravitación de Einstein; en cuatro dimensiones $k = 16\pi G$. Esta notable similitud nos permite pensar que la gravedad bidimensional, basada en la acción (5.19), puede proveer de analogías cercanas con la gravedad en cuatro dimensiones de Einstein [70, pp.14-16].

5.2.2. Teoría generalizadas de dilatón (GDT)

El interés sobre las teorías dilatónicas en $D = 2$ resurgió en la década de los 90's, inspirado por desarrollos diversos en la teoría de cuerdas, además de esto se descubrió que la gravedad dilatónica bidimensional puede ser tratada como una teoría de norma no lineal.

De forma general podemos extraer a todas las GDT de la acción dilatónica siguiente:

$$S^{(dil)} = \int d^2x \sqrt{-g} \left[X \frac{R}{2} - \frac{U(X)}{2} (\Delta X)^2 + V(X) \right] + S^{(m)}, \quad (5.21)$$

en donde R continúa siendo nuestro escalar de curvatura, X es el campo dilatónico, $U(X)$ y $V(X)$ son funciones arbitrarias y g es el determinante de la métrica. El significado de $S^{(m)}$ es el de una acción que contiene los campos de materia que pueden o no ser agregados a la teoría [64, p.330]. Las motivaciones puntuales para estudiar las teorías dilatónicas en $D = 2$ son:

1. Empezando de la gravedad de Einstein en $D \geq 4$ e imponiendo simetría esférica uno reproduce una cierta GDT; de modo análogo a lo realizado anteriormente para la gravedad tridimensional.
2. Un cierto límite de la teoría de supercuerdas lleva a una GDT particular como acción efectiva.
3. Las GDT pueden ser vistas como modelos de juguete para la cuantización de la gravedad y como laboratorio para estudiar la evaporación de agujeros negros, tema de nuestro interés dado el actual trabajo.
4. En una formulación a primer orden, la estructura de Poisson subyacente revela relaciones con la geometría no conmutativa y la cuantización de deformación. De nuevo, las GDT son un laboratorio conveniente para dilucidar estos nuevos conceptos y técnicas.

Dentro de las GDT descritas por la ecuación (5.21), la más simple es la que aquí hemos tratado, el modelo de Jackiw-Teitelboim. Para recuperarlo necesitamos escribir

$$V_{JT} = \Lambda X, \quad U_{JT} = 0, \quad (5.22)$$

así entonces recuperamos

$$S^{(JT)} = \int d^2x \sqrt{-g} \left[X \frac{R}{2} + \Lambda X \right], \quad (5.23)$$

que salvo constantes es idéntica a nuestra ecuación (5.6).

En nuestro trabajo como reseña del realizado por [2] y [1], trataremos los puntos silla explícitamente en ejemplos de agujeros negros eternos en gravedad de Jackiw-Teitelboim bidimensional, es por ello que este capítulo puede servir como introducción a la sección (6.4), o como recordatorio de este tipo particular de modelos gravitacionales.

Parte II

Parte 2

Capítulo 6

Entropía de la radiación de Hawking

6.1. Introducción

En este capítulo haremos una revisión del panorama actual de la entropía de la radiación de Hawking y por lo tanto a la paradoja de la información. De manera esquemática, haremos un repaso de las ideas principales que han llevado a distintos investigadores a recobrar la curva de Page para la radiación de un agujero negro utilizando la correspondencia [58, 59, 71] y mostraremos siguiendo a [2] y a [1] que es posible obtener este mismo resultado para la entropía de grano fino sin apelar a la holografía mediante el método de réplica¹; de manera similar a la forma en que obtuvimos la fórmula de Ryu-Takayanagi de las entropías de Renyi en la sección 3.4.1.

6.1.1. Ordenando entropías

En este punto de nuestra discusión y antes de agregar más información resulta muy conveniente recapitular y “ordenar” las entropías que hemos introducido y con las que continuaremos trabajando.

Existen dos nociones de entropía con las que regularmente nos enfrentamos en la física, la primera y más simple de definir es la entropía de grano fino o de von Newman S_{fg} , dicha entropía como vimos se definía de la siguiente forma

$$S_{fg} = -Tr[\rho \log \rho], \quad (6.1)$$

donde ρ es una matriz de densidad que describe el estado cuántico del sistema. Esta ecuación cuantifica nuestra ignorancia acerca del estado cuántico preciso en el que se encuentra nuestro sistema. Una de sus propiedades más importante

¹Cabe destacar que aunque no se hace uso directo de la holografía los conceptos e ideas aplicados y con los que se le da interpretación a los resultados son heredados de esta.

para nuestros fines era la invarianza de esta ante la evolución unitaria del tiempo $\rho \rightarrow U\rho U^{-1}$.

La segunda noción de entropía es la entropía de grano grueso o como la hemos llamado aquí S_{cg} . En esta entropía tenemos una matriz de densidad ρ que describe a nuestro sistema, pero no medimos todos los observables: medimos solamente un subconjunto simple de observables A_i . Esta entropía se calcula considerando todas las matrices de densidad $\tilde{\rho}$ que nos dan el mismo resultado que nuestro sistema para los observables que se están midiendo. Luego calculamos la entropía de von Newmann $S(\tilde{\rho})$. Finalmente, maximizamos esta entropía sobre todos las posibles elecciones de $\tilde{\rho}$. Esta entropía aunque parece más compleja que la anterior es el resultado usado usualmente en termodinámica y no debe ser confundida nunca con la entropía de grano fino.

Vimos también que existe una relación limitante entre ambas entropías mencionadas. La entropía de grano fino no puede ser más grande que la entropía de grano grueso ($S_{fg} \leq S_{cg}$). Esto es una simple consecuencia de las definiciones, ya que siempre podemos considerar a ρ como candidato para $\tilde{\rho}$. Otra forma de decir esto es que si S_{cg} provee de una medida para el número total de grados de libertad disponibles al sistema, esta impone un límite superior sobre el entrelazamiento máximo que el sistema puede tener con algo más.

Teniendo las anteriores definiciones como base y enfocándonos en gravitación vemos que los agujeros negros tienen una entropía asociada que llamamos entropía de Bekenstein-Hawking (S_{BH}) [20, 72] y que esta tenía que ser vista como una entropía de grano grueso dado que esta crece bajo la evolución temporal. De modo que la pregunta lógica surgió, ¿Cuál es la entropía de grano fino para este caso?

La respuesta surgió bastantes años después con los trabajos de [33, 73] basados en la correspondencia y a orden cero en $G\hbar$ obtuvimos la prescripción para obtener la entropía de von Newmann en la CFT del bulto gravitacional

$$S_{fg} = \frac{\text{Area}[\gamma]}{4G\hbar}, \quad (6.2)$$

en donde γ es la superficie mínima de área la cual es un extremo del funcional de área, esta área no cambia a primer orden con perturbaciones de su localización. La superficie extremal funcional que nos permite el cálculo de la entropía para un agujero negro estacionario es la misma que el horizonte de sucesos.

Esta entropía como se mostró en el capítulo anterior surge de las entropías de Renyi, que se encuentran definidas del lado de la CFT, la entropía de Ryu-Takayanagi nos permite entonces calcular la misma entropía de Renyi pero de forma más simple con cantidades del bulto (del lado de AdS)².

Hasta aquí hemos llegado en nuestra búsqueda de la entropía para la radiación de Hawking que nos dé una curva unitaria en la evolución temporal completa del agujero negro, pero como cualquier lector puede notar hace falta agregar la

²Aunque no la mencionamos aquí la entropía de Hubeny-Ryu-Takayanagi-Rangamani, o por sus siglas (HRT) es una generalización de la entropía (RT) como se mencionó en el capítulo anterior y usamos indistintamente RT o HRT para referirnos al mismo orden de perturbación en la entropía S_{fg} .

acción de campos cuánticos externos al agujero negro, ya que es aquí donde la radiación de Hawking vive y donde se encuentra la violación a la unitariedad.

6.1.2. Entropía generalizada

Mencionamos en la Subsección 1.3.2 que [20] introdujo la segunda ley generalizada para agujeros negros, en donde

$$S_{gen} = \frac{\text{Area del horizonte}}{4G\hbar} + S_{fuera}, \quad (6.3)$$

$$\Delta S_{gen} \geq 0; \quad (6.4)$$

claramente S_{fuera} representa la entropía de la materia así como también a los gravitones fuera del agujero negro, esto incluye las contribuciones de vacío de los campos cuánticos externos. Vemos entonces que la contribución externa de los campos cuánticos es vital para sortear una de las paradojas antes mencionadas y también como paso intermedio para la obtención de la curva de Page. De acuerdo a [58] se incluyen los campos cuánticos propagándose en el fondo, pero no incluimos su efecto en la métrica. El cambio en la fórmula de la entropía es el siguiente:

$$S_{fg} = \frac{\text{Area}[\gamma]}{4G\hbar} + S_{fg}[\rho_{fuera[\gamma]}] \equiv S_{gen}[\gamma]. \quad (6.5)$$

En este caso γ continúa siendo la superficie extremal mínima de área, y $\rho_{fuera[\gamma]}$ es el estado de los campos cuánticos fuera de γ y antes de la frontera de nuestra CFT.

Continuando con esta discusión sabemos que es necesario que exista interacción de los campos cuánticos con la métrica para que pueda darse la evaporación del agujero negro, así que debemos considerar términos de orden superior en teoría de perturbaciones en donde los campos cuánticos estén en interacción con la geometría del problema. La propuesta para este caso fue la presentada por [59] y es la siguiente:

$$S_{fg} = \frac{\text{Area}[\chi]}{4G\hbar} + S_{fg}[\rho_{fuera[\chi]}] \equiv S_{gen}[\chi]. \quad (6.6)$$

Dicha propuesta luce idéntica a la ecuación (6.5), sin embargo difiere de esta en la superficie que involucra (intentamos hacer notar el cambio mediante el uso de χ)³. La superficie χ es la superficie que extremaliza la suma completa, esto es la entropía generalizada S_{gen} ; la superficie es llamada “superficie cuántica extremal” o por sus siglas en inglés QES.⁴

³La idea de considerar una superficie distinta para obtener la entropía de von Newmann del agujero negro y de los campos externos es similar en su origen a la modificación realizada a la entropía RT considerando ahora una superficie de Cauchy para la entropía HRT.

⁴Si llegaran a existir más de una QES es necesario elegir aquella que minimice la entropía generalizada

La definición de (6.6) puede ser escrita de forma más exacta haciendo más notable el cambio realizado y las entropías involucradas

$$S = \min_{\chi} \left[\text{ext}_{\chi} \left(\frac{\text{Area}(\chi)}{4G_N} + S_{\text{semi-cl}}(\Sigma_{\chi}) \right) \right], \quad (6.7)$$

donde Σ es una región espacial definida en una rebanada de tiempo constante, esta región se encuentra asociada a la matriz de densidad $\rho_{\text{fuera}[\chi]} = \rho_{\Sigma}$, de esta forma la entropía de grano fino puede ser escrita como $S_{fg}(\Sigma) \equiv S_{fg}$. Escribimos la entropía de los campos exteriores como $S_{\text{semi-cl}}(\Sigma_{\chi})$, para notar que se está tratando a la teoría gravitacional en la aproximación semiclásica; se tiene una geometría clásica y campos cuánticos definidos en esa geometría clásica.⁵ “La idea es que iniciemos desde una superficie fuera del agujero negro y podamos moverla pasando el horizonte dentro del interior para encontrar el mínimo. En particular, esto significa que la respuesta depende de la geometría del interior del agujero negro. Podemos tener agujeros negros con exteriores similares pero interiores distintos. Estos agujeros negros tendrán entropías de grano fino distintas” [29].

La entropía del agujero va cambiando conforme la evaporación se origina y es determinada de acuerdo a las contribuciones de los términos dentro de eq.(6.7). Cuando el agujero negro se forma y aún no existe radiación de Hawking, no hay superficies extremales que se encuentren al deformar χ hacia dentro, así nos vemos obligados a reducir a $\chi = 0 = \chi_0$. La entropía de grano fino para este agujero negro joven es simplemente la entropía de la materia encerrada por la superficie de corte (la superficie que se encuentra delimitando el área fuera de χ y el espacio externo donde no hay campos cuánticos a tomar en cuenta en nuestra teoría), llamamos a esta superficie χ_0 “superficie de desvanecimiento” (*vanishing surface*); si asumimos que el cascarón que colapso en el agujero negro estaba en un estado puro la entropía de grano fino al inicio será igual a cero. Una vez que el agujero negro comienza a evaporarse y la radiación de Hawking comienza a existir, la entropía de von Newmann de la región no será más igual a cero dado el entrelazamiento existente entre los cuantos de Hawking que lograron escapar y aquellos que quedaron dentro del agujero negro. La entropía continúa creciendo mientras el agujero negro se evapora dado el apilamiento de modos mixtos en el interior. El crecimiento de la entropía es igual al crecimiento de la entropía para la radiación de Hawking (la entropía de grano grueso⁶) pero, al existir radiación de Hawking existe una QES (que aparece poco después de iniciarse el proceso de evaporación y se encuentra ubicada en un punto cercano al horizonte de sucesos, su posición exacta depende del grado de entrelazamiento existente y por lo tanto del tiempo t a lo largo de la superficie de corte cuando decidamos realizar una medición de la entropía) y que llamaremos χ_1 ; la entropía

⁵Esta entropía sigue siendo la entropía de grano fino asociada a los campos cuánticos (incluyendo gravitones) externos.

⁶Esta entropía es la que de forma ingenua podríamos pensar que crece hasta que la evaporación esté completa

generalizada tiene un término dominante⁷ el cual es el término de área además del término correspondiente a los campos cuánticos $S_{semi-cl}$.

$$S_{gen} \approx \frac{\text{Área del Horizonte } (t)}{4G_N}. \quad (6.8)$$

La entropía generalizada para esta superficie χ_1 sigue la evolución de la entropía termodinámica del agujero negro. Dado que el área del agujero negro decrece conforme este se evapora, la superficie extremal nos da una entropía generalizada decreciente [29, p.10-12].

La aplicación completa de la fórmula (6.7) requiere que tomemos el mínimo de la entropía generalizada sobre todas las superficies extremales disponibles $S = \min(S_{\chi_0}, S_{\chi_1})$. Se tienen entonces dos superficies: una creciente de la superficie de desvanecimiento y otra decreciente de la superficie χ_1 justo detrás del horizonte de eventos. Transicionando entre las dos contribuciones de la entropía de acuerdo al mínimo, la entropía del agujero negro sigue una curva de Page⁸.

6.1.3. Evaporación de agujeros negros

En esta pequeña subsección hacemos una digresión para tratar la evaporación de agujeros negros en AdS, antes de seguir avanzando con la entropía de la radiación.

Es bien sabido que los agujeros negros masivos en AdS no se evaporan, sin embargo es posible forzar la evaporación de estos siguiendo la siguiente configuración:

Se considera un agujero negro de dos lados en AdS_2 en gravedad de Jackiw-Teitelboim (JT) acoplado a una CFT (1+1) en el estado Hartle-Hawking⁹. Con condiciones de frontera reflectantes en el infinito de AdS, el estado es independiente del tiempo, pero a tiempo finito acoplamos la frontera derecha de nuestro sistema a un sistema auxiliar B , el cual funcional como un baño. Tomamos a B como una copia del mismo CFT (1+1) en la mitad derecha del espacio de Minkowski y como que este empieza en su propio vacío. El acoplamiento es tal, que después de una pequeña transición, la frontera derecha es completamente transparente. El acoplamiento solamente pega el origen del espacio auxiliar de Minkowski a la derecha de la frontera de AdS_2 . Esto lleva a la evaporación en la derecha del agujero de dos lados AdS_2 [34, pp.2]. La figura 6.1 pone de manera gráfica lo dicho anteriormente [34, pp.3].

⁷La dominancia de este término se origina porque la entropía de la teoría cuántica de campo no captura muchos cuántos de Hawking.

⁸La QES no trivial no se encuentre cercana a ninguna superficie clásica extremal obtenida extremando solo el término de área en (6.7) [29, pp.13]

⁹La característica principal del estado de Hawking-Hartle es que en la sección Euclidiana el tiempo imaginario de Killing es periódico. La periodicidad correspondiente a la temperatura de Hawking previene la aparición de una singularidad cónica en el horizonte bifurcado Euclidiano.

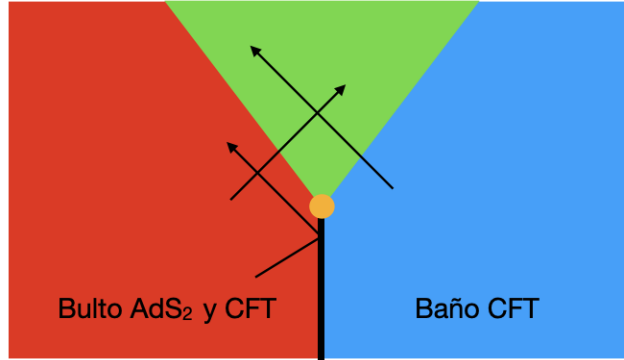


Figura 6.1: Sistema de dos lados AdS_2 inicialmente con condiciones de frontera reflectantes (línea negra sólida vertical) en su frontera derecha. Una copia independiente B de nuestra CFT en la mitad derecha del espacio de Minkowski la cual jugará el papel de baño, también empieza con condiciones de frontera reflectantes. En algún tiempo finito (punto amarillo), la frontera derecha AdS_2 vuelve sus condiciones de frontera transparente, permitiendo así el acoplamiento de AdS_2 CFT al baño CFT.

6.2. Entropía de la radiación

Aunque ya hemos visto que el agujero negro sigue una curva de Page, esto no resuelve de manera directa la paradoja de la información, ya que esta (como se revisó en la Sección 2.3) vive en la entropía de la radiación no en la entropía del agujero negro. Es por ello, que en esta sección revisaremos la entropía de la radiación utilizando la fórmula (6.7), y daremos la tan buscada y anhelada ecuación que dibuja la curva de Page.

Para aplicar la fórmula (6.7) y encontrar la entropía, debemos notar que estamos haciéndolo en una región fuera de la superficie de corte, la cual no contiene agujero negro, a diferencia de como lo hicimos anteriormente. El espíritu de la fórmula radica en que la región en la cual calculamos la entropía puede ser cambiada en tamaño moviendo la superficie χ lo suficiente para minimizar la entropía. Hasta ahora se han considerado casos en los que Σ_χ estaba conectada, sin embargo no hay nada que nos impida considerar la posibilidad de que Σ_χ esté desconectada. Al hacer Σ_χ desconectada, incrementamos el área de la frontera, y esto puede ser aplicado solo si podemos disminuir la contribución semiclásica de la entropía al mismo tiempo¹⁰. La radiación se encuentra entrelazada con los campos viviendo en el interior del agujero negro; así podemos reducir la contribución semiclásica de la entropía incluyendo también el interior del agujero negro. Haciendo lo anterior se ha agregado un término de área. A tiempos lejanos el efecto neto de esto, es el de reducir la entropía generalizada por lo que nos

¹⁰Esto puede suceder si las regiones se encuentran alejadas de la materia entrelazada; esto es justamente lo que sucede con la radiación de Hawking.[29, pp.13]

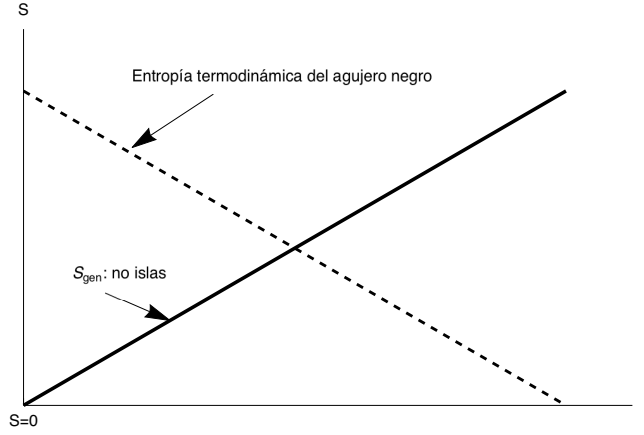


Figura 6.2: Entropía termodinámica del agujero negro (línea punteada) y entropía generalizada sin islas (línea sólida).

vemos obligados a incluir esta región desconectada dentro del agujero negro, que es conocida como “isla”.

La entropía de grano fino de la radiación se encuentra dada por

$$S_{rad} = \min_{\chi} \left[\text{ext}_{\chi} \left(\frac{\text{Area}(\chi)}{4G_N} + S_{\text{semi-cl}}(\Sigma_{\text{rad}} \cup \Sigma_{\text{isla}}) \right) \right]. \quad (6.9)$$

El área que se está considerando, es el área de la frontera de la isla, y la minimización y extremalización a realizarse deben ser con respecto a la ubicación y forma de la isla [2, 29, 34, 74].

Para calcular la entropía de la radiación de Hawking que ha escapado la región del agujero negro, necesitamos calcular la entropía de la región que existe después de la superficie de corte y hasta el infinito (Σ_{rad}). Las islas son cualquier número de regiones contenidas en el lado del agujero negro, dentro de la superficie de corte, el número de islas que tendremos dependerá del problema revisado, dicho número incluye al cero como una posibilidad. Cuando ha llegado el momento de extremalizar el lado derecho de la ecuación (6.9), lo hacemos con respecto a la posición de la superficie χ , para finalmente minimizar sobre todos los posibles valores de posiciones extremales y opciones de islas.

Analizando la ecuación (6.9) para la opción más simple de islas (no tenerlas), vemos que la ya mencionada ecuación para la entropía de la radiación se reduce a la ecuación (6.7). Mientras más radiación de Hawking escape del agujero negro, la entropía continuará creciendo (como se puede observar en la figura (6.2)). Esta contribución siempre extremaliza la entropía generalizada, pero no siempre es el mínimo global de la entropía.

Después de un tiempo de la formación del agujero negro, aparece una isla que extremaliza la entropía generalizada, esta isla se encuentra centrada alrededor del origen y su frontera está cerca del horizonte de sucesos del agujero negro. Esta se mueve hacia el horizonte para diferentes tiempos sobre la superficie de

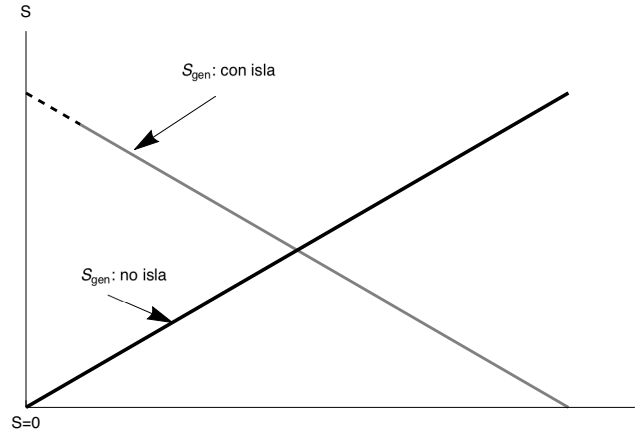


Figura 6.3: Contribuciones con y sin islas para la entropía, el resultado correcto es la de valor mínimo para cada instante de tiempo de modo que se dibuja la curva de Page siguiendo las contribuciones primero sin islas (línea sólida) y luego con islas (línea gris)

corte. El término de la entropía de von Neumann involucra la entropía de la unión de la radiación saliente y la isla, y es por lo tanto pequeña para todos los tiempos, ya que la isla contiene la mayoría de los modos de Hawking que purifican la radiación saliente. Esta contribución a la fórmula de las islas comienza con un valor grande, dada por el área del horizonte a tiempos tempranos, y decrece a cero.

La entropía de grano fino de la radiación de Hawking es entonces el mínimo de estas dos contribuciones. La curva de Page es recuperada, la parte creciente viene de la contribución sin islas y la parte decreciente viene de la contribución con islas como se puede ver en la figura (6.3).

Si el agujero negro se formó inicialmente de un estado puro, entonces se espera que la entropía del agujero negro y la de la radiación sean iguales; y como podemos observarlo la entropía del agujero negro y la de la radiación dan la misma respuesta. En ambos casos la superficie χ se encuentra involucrada, además de que el estado de materia es puro en la rebanada completa de Cauchy lo que implica que $S_{\text{semi-cl}}(\Sigma_\chi) = S_{\text{semi-cl}}(\Sigma_{\text{rad}} \cup \Sigma_{\text{isla}})$. Entonces obtenemos la misma respuesta porque estamos minimizando y extremalizando la misma función, en conclusión ambas entropías se encuentran descritas por la misma curva.

6.3. Cuña de entrelazamiento (“Entanglement Wedge”)

Recordando el capítulo 2.3 y dados los resultados que se han obtenido a lo largo de cuatro décadas de investigación, partes de las cuales hemos resumido en este trabajo, podemos suponer que un agujero negro puede ser visto como un sistema ordinario que debería obedecer las leyes de la termodinámica, de otra forma habría que modificar las leyes de la física conocidas o nuestro entendimiento de forma completa de lo que es un agujero negro¹¹. De este modo, como habíamos visto anteriormente, podemos ver a un agujero negro como un objeto descrito por un número grande, pero finito de grados de libertad que obedece las leyes ordinarias de la física, incluyendo las leyes de la termodinámica. La idea descrita en el párrafo anterior es lo que habíamos introducido como el “dogma central”; recordamos su definición:

■ **Dogma central**

Visto desde afuera, un agujero negro puede ser descrito en términos de un sistema cuántico con $\frac{\text{Area}}{4G_N}$ grados de libertad que evoluciona de forma unitaria bajo el paso del tiempo [29, pp.5].

Los grados de libertad $\frac{\text{Area}}{4G_N}$ son suficientes para describir al agujero negro desde el exterior, pero para describir el interior del agujero negro tenemos varias opciones. La primera y más simple es que los grados de libertad planteados no describan al interior, la segunda es que describen solo una porción del interior y la tercera y última es que estos grados describen todo el interior además del exterior.

La opción más apropiada a tomar es la tercera según lo revisado hasta el momento. Los grados de libertad en el dogma central describen la geometría hasta la superficie mínima; si sabemos el estado de cualquier región espacial, también lo sabemos en el diamante causal asociado con esa región (ver figura (6.4)). Esto ha sido llamado la cuña de entrelazamiento (entanglement wedge). Podemos entender de mejor manera lo anterior con el siguiente conjunto de ejemplos. Consideramos una vez más el agujero negro formado del colapso, pero antes del tiempo de Page (ver figura 6.5). La superficie mínima es una superficie de desvanecimiento en el origen y la cuña de entrelazamiento del agujero negro es la región que se encuentra dentro de la superficie de corte (sección azul claro dentro de la figura (6.5)).

Luego nos es posible observar la cuña de entrelazamiento para $t > t_{\text{Page}}$, para la radiación y el agujero negro (ver figura 6.6). En este caso los grados de libertad del agujero negro describen la región del espacio-tiempo en la cuña de entrelazamiento del agujero negro, mientras que la radiación describe los grados de libertad en la cuña de entrelazamiento de la radiación. Podemos observar en

¹¹Nos gustaría estar completamente seguros de que los agujeros negros existen y que siguen las leyes de la física conocida por lo menos hasta un cierto límite donde su validez es probable, sin embargo esto no es así. Es posible aún después de los trabajos realizados por [75, 76], mencionar artículos que exploran alternativas a los agujeros negros, donde algunas no tienen problemas con incorporar la unitariedad de forma natural como [77].

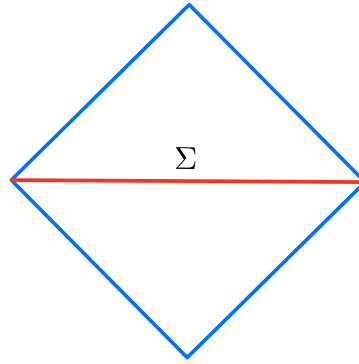


Figura 6.4: Dada una región Σ de una rebanada espacial, mostrada en rojo, podemos definir su diamante causal como todos los puntos donde la evolución es determinada de forma única por las condiciones iniciales en Σ .

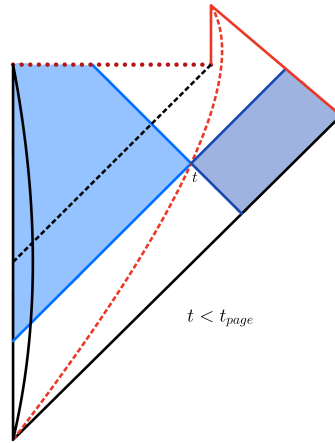


Figura 6.5: Cuña de entrelazamiento de la radiación (azul oscuro) y el agujero negro (azul claro). Superficie de corte (curva roja), horizonte (línea punteada negra).

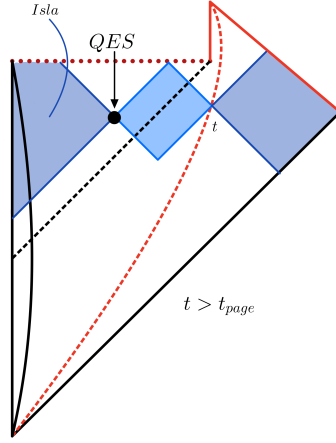


Figura 6.6: Cuña de entrelazamiento de la radiación (azul oscuro) y el agujero negro (azul claro). Superficie de corte (curva roja), horizonte (línea punteada negra); se presenta además la QES así como la isla dentro del horizonte de sucesos.

la figura (6.6) que el agujero negro solo describe una porción del interior (azul claro), lo demás pertenece a la cuña de la radiación; esto es lo que conocemos como Isla y que mencionamos anteriormente. Como la entropía de grano fino de la radiación contiene al interior como parte de la isla después del tiempo de Page, su entropía es sensible al estado cuántico de esa región. Por último se considera el caso para $t > t_{\text{evap}}$, un agujero negro completamente evaporado (ver figura (6.7)). La región en dentro de la superficie de corte es en este caso espacio plano. La cuña de entrelazamiento de la radiación incluye al agujero negro completamente.

6.3.1. Hipótesis de reconstrucción de la cuña de entrelazamiento

La hipótesis de reconstrucción de la cuña de entrelazamiento nos dice que si se tiene un número relativamente pequeño de qubits que se encuentran en un estado desconocido, pero localizados dentro de la cuña de entrelazamiento del agujero negro, entonces realizando operaciones en los grados de libertad del agujero negro podemos leer el estado de esos qubits. Así entonces si asumimos que la formula (6.9) es correcta y describe de manera exacta el estado de la radiación, significa que los operadores de la descripción semiclásica afectan la entropía de la radiación cambiando el estado exacto mencionado. Existe un mapeo llamado el mapeo de Petz que nos permite recuperar la información, dicho mapeo se origina de las investigaciones en información cuántica. Para más información actualizada sobre este tema se recomienda revisar [1, 78] y el libro

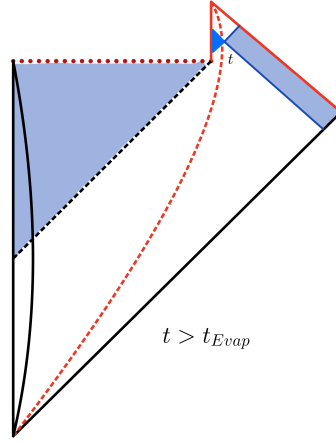


Figura 6.7: Cuña de entrelazamiento de la radiación (azul oscuro) y el agujero negro (azul claro). Superficie de corte (curva roja), horizonte (línea punteada negra).

[79].

En general para un agujero negro, el tiempo de Page marca un antes y un después en cuanto a la descripción de su estado y que después de este tiempo, la mayoría del interior del agujero negro no se encuentra descrita por sus grados de libertad sino por los grados de libertad de la radiación.

6.4. Agujeros de gusano replicados

En esta sección presentaremos los avances realizados por [1, 2], en el cálculo de la fórmula (6.9) [71] mediante el método de réplica sin apelar a la holografía directamente. En los artículos mencionados, se hace el cálculo de la entropía de von Neumann para la radiación fuera de un agujero negro en AdS pegado al espacio plano, usando el método de réplica (la forma de usar el método de réplica recuerda mucho la forma en que este fue usado en la Ecuación 3.4.1 para el cálculo de la entropía de Ryu-Takayanagi) se reproduce el resultado esperado y dado anteriormente por holografía.

6.4.1. El modelo

En esta sección seguiremos directamente a [1]; ellos plantean un modelo de gravedad bidimensional en el cual sea posible derivar la ecuación (6.9); en particular la receta de las “islas”.

Consideramos un agujero negro en gravedad JT (revisar Sección 5.1), con una “brana del fin del mundo” (EOW por sus siglas en Inglés) detrás del horizonte.

La acción para este sistema se encuentra dada por

$$I = I_{JT} + \mu \int_{\text{brana}} ds. \quad (6.10)$$

La acción anterior se compone de dos partes, la primera siendo la acción pura para la gravedad JT:

$$I_{JT} = -\frac{S_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \int_M \sqrt{g} R + \int_{\partial M} \sqrt{h} K \right] - \left[\frac{1}{2} \int_M \sqrt{g} \phi (R + 2) + \int_{\partial M} \sqrt{h} \phi K \right], \quad (6.11)$$

y la segunda, la parte correspondiente a la brana, o dicho de otro modo a los campos cuánticos existentes.

Asumimos que la EOW puede tener distintos estados internos que etiquetaremos con i . Estamos interesados en un número grande k de estados internos posibles para la EOW, cada uno ortogonal al los otros. El modelo supone que estos estados describen los pares interiores de la radiación de Hawking temprana, de aquí que pueda suponerse que la brana modela a los campos cuánticos existentes [2, p.13]. Los pares internos de la radiación de Hawking se encuentran entrelazados con un sistema auxiliar llamado R . El estado del sistema en conjunto se encuentra dado por la superposición entrelazada de k términos pertenecientes al agujero negro y a la radiación de la forma siguiente:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k |\psi_i\rangle_B |i\rangle_R. \quad (6.12)$$

Vemos que $|\psi_i\rangle_B$ es el estado del agujero negro B con la brana en el estado i , y $|i\rangle_R$ es el estado del sistema auxiliar R .

Las condiciones de frontera relevantes para nuestro modelo son las siguientes:

1. En la frontera asintótica

$$ds^2|_{\partial M}, \quad \phi = \frac{1}{\epsilon} \quad \epsilon \rightarrow 0$$

2. En la brana EOW, se imponen condiciones de frontera duales

$$\partial_n \phi = \mu, \quad K = 0$$

En estas condiciones de frontera se asume que τ puede ser interpretado como la coordenada de tiempo imaginario de la frontera holográfica dual al sistema JT, ∂_n es la derivada normal a la frontera de la brana EOW y $\mu \geq 0$.

La conjetura de las islas o la fórmula de las islas eq.(6.9) nos dice que si queremos calcular la entropía del sistema R en el estado (6.12), debemos considerar dos superficies extremales posibles, una de ellas es el conjunto vacío (en donde no existen islas: ver figura 6.5). Para este caso la respuesta a la entropía es solamente $\log(k)$, esta entropía representa el entrelazamiento existente entre el sistema R y el estado bulto de la brana.

La otra superficie a considerar es más entretenida como revisamos anteriormente, y es aquella en donde existe una isla no trivial (ver figura (6.7)). Esta isla contiene la brana EOW detras del horizonte, así que para esta superficie nueva, no hay contribución del término semiclasico en eq.(6.9); la única contribución a la entropía viene del término de “área” que en el caso de gravedad bidimensional JT es un término dilatón

$$\frac{Area(\chi)}{4G_N} \rightarrow S_0 + 2\pi\phi(\chi), \quad (6.13)$$

dándonos la entropía del agujero negro. La extremalización de eq.(6.9) es equivalente a poner la frontera de la isla como un punto extremal del dilatón ϕ . Haciendo uso de eq.(6.9) de forma completa, vemos que la conjetura de las islas predice

$$S(R) = \min\{\log(k), S_{BH}\}. \quad (6.14)$$

La transición entre ambos resultados conforme incrementamos el valor k es un modelo para la transición de Page para un agujero en evaporación. Este es nuestro modelo simple a seguir, y en las subsecciones posteriores se busca derivar el resultado anterior, utilizando el truco de réplicas.

6.4.2. Una cantidad intermedia

Lo que se busca en concreto es el cálculo de la entropía del sistema R , en el estado $\langle\Psi|$ usando la integral de trayectoria gravitacional bi-dimensional. Se comienza el cálculo con la matriz de densidad para este sistema

$$\rho_R = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^k |j\rangle \langle i|_R \langle\psi_i|\psi_j\rangle_B. \quad (6.15)$$

Las amplitudes gravitacionales $\langle\psi_i|\psi_j\rangle$, se encuentran determinadas por un cálculo gravitacional con las siguientes condiciones de frontera:

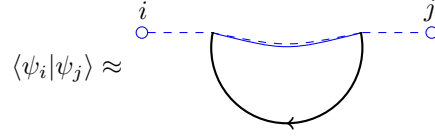
$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \text{diagrama}, \quad (6.16)$$

la línea curva negra representa la frontera asintótica del tipo (1.) con longitud renormalizada β^{12} , la razón por la que la línea se encuentra curvada es porque las condiciones no limitan su forma. La flecha representa la dirección de la evolución temporal, del ket al bra. En las posiciones donde las líneas punteadas azules intersectan la línea negra, requerimos que la brana EOW del tipo i o j intersecte la frontera asintótica [1, p.7].

La configuración gravitacional principal que satisface estas condiciones de fron-

¹²Temperatura inversa del agujero negro.

tera es la siguiente solución clásica:



$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle \approx \quad . \quad (6.17)$$

La frontera asintótica bordea una porción del disco hiperbólico (línea sólida negra con flecha), y una brana EOW (línea azul sólida) sigue una geodésica entre los puntos finales i y j . Como se asumió al principio que los estados internos son ortogonales, esto quiere decir que el resultado para $\langle \psi_i | \psi_j \rangle$ será proporcional δ_{ij} ¹³. Así entonces, el resultado del cálculo anterior puede ser expresado como

$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle = Z_1 \delta_{ij}, \quad (6.18)$$

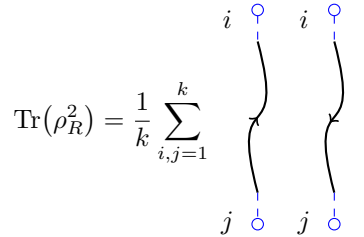
en donde Z_1 es la integral de camino en la región interna al arco negro en eq.(6.17). Normalizando los estados, dividiendo entre Z_1 , encontramos que ρ_R estará maximalmente mezclada proporcional a la matriz identidad,

$$\rho_R = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |i\rangle \langle i|, \quad (6.19)$$

y la entropía de esta matriz de densidad es $S = \log(k)$.

Podemos intentar calcular la entropía de forma directa utilizando el método de réplica, para ello es más sencillo comenzar por otra cantidad llamada “pureza” definida como $\text{Tr}(\rho_R^2)$. La pureza se encuentra relacionada con la 2-entropía de Renyi, dicho de otro modo es el caso especial para 2 dimensiones de la cantidad dentro de el logaritmo de la entropía S_R dada en (6.25). Si calculamos esta traza para eq.(6.15), obtenemos el siguiente resultado

$$\text{Tr}(\rho_R^2) = \frac{1}{k^2} \sum_{i,j=1}^k |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2, \quad (6.20)$$



$$\text{Tr}(\rho_R^2) = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^k \quad . \quad (6.21)$$

El primer término de los diagramas anteriores es la condición de frontera vista anteriormente, y el segundo es su complejo conjugado. Para calcular la pureza,

¹³Este resultado se obtiene de notar que la misma brana EOW conecta ambos puntos, lo que significa que $i = j$.

sumaremos sobre los índices i, j conectando las líneas punteadas. Existen dos maneras en que podemos llenar estas condiciones de contorno dentro de la gravedad bidimensional, estas formas son las siguientes

$$\text{Tr}(\rho_R^2) \approx \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^k \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right). \quad (6.22)$$

Podemos tener una geometría desconectada con la topología de dos discos, o una conectada (agujero de gusano Euclidiano) con la topología de un solo disco. A esta segunda geometría la relacionamos con Z_2 , de hecho se usa la notación $Z_n = Z_n(\beta)$ para representar la integral de camino gravitacional en una topología de disco con una frontera que consiste en segmentos alternantes de n fronteras físicas de longitud renormalizable β , y n branas EOW. Usando la notación antes mencionada, podemos evaluar la suma de ambas contribuciones de la manera siguiente

$$\text{Tr}(\rho_R^2) = \frac{kZ_1^2 + k^2Z_2}{(kZ_1)^2} = \frac{1}{k} + \frac{Z_2^2}{Z_1^2} \quad (6.23)$$

Si se mantiene solamente la dependencia en el término topológico para la acción de JT (eq.6.11) podemos hacer una aproximación útil para observar el comportamiento de Z_n . Este término pesa la contribución de una topología dada por $e^{S_0\xi}$, en donde ξ es la característica de Euler¹⁴. Dado que la topología relevante para Z_n es en forma de disco para cualquier valor de n , entonces la característica de Euler es igual a la unidad, y por lo tanto $Z_n \propto e^{S_0}$; usando esto podemos escribir (dentro de la aproximación)

$$\text{Tr}(\rho_R^2) = \frac{1}{k} + e^{-S_0}. \quad (6.24)$$

De el resultado anterior, vemos que si k no es muy grande, este dominará sobre la suma de ambos lo que significa que la geometría separada (primer término de 6.22) es la importante a considerar; dicho de otro modo, recuperamos $\text{Tr}(\rho_R^2) = \frac{1}{k}$ y por lo tanto $S = \log k$. Ahora si hacemos $k \gg 1$, el término $\frac{1}{k} \approx 0$, y la dominancia estará dada por la geometría de agujero de gusano (segundo término de 6.22) y la entropía se saturará en un valor independiente de k . Este mecanismo es el que permite la transición vista en la ecuación (6.14), previniendo así que la entropía de la radiación crezca indefinidamente [1, pp.6-9].

¹⁴La característica de Euler se define como un invariante topológico que describe la forma o estructura de un espacio topológico sin importar la forma en la que este se encuentre curvado, normalmente se denota con la letra griega χ , pero en este caso utilizamos ξ para no confundir con la fórmula de islas en específico con la QES [80].

6.4.3. La entropía de grano fino

El truco de réplicas vimos anteriormente se basa directamente en la posibilidad de calcular cantidades complicadas, de una continuación “analítica” de la función de partición (ver secciones:3.4.1 y 4). Dicho de otro modo y con ayuda del diccionario holográfico vimos que la función de partición era equivalente a la traza de la matriz de densidad ρ , de modo que el cálculo de $Tr(\rho^n)$ puede ser visto como un observable en n copias del sistema original. Para nuestro caso, la entropía de grano fino de una región puede ser calculada considerando n copias de la teoría original siempre y cuando se elijan condiciones de frontera que conecten a las copias. Dado que n puede tener valores grandes, existen muchas distintas geometrías que pueden llenar las condiciones de frontera para el cálculo de $Tr(\rho^n)$ y con las que debemos aprender a trabajar; mientras llegamos a eso recordamos la ecuación (3.39) y la reescribimos tomando el límite cuando $n \rightarrow 1$ con la notación de esta sección

$$S_R = -Tr(\rho_R \log \rho_R) = -\lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} \log Tr(\rho_R^n). \quad (6.25)$$

Si consideramos dos casos simples, cada uno asociado a dos límites extremos, es decir cuando $k \ll e^{S_{BH}}$ y $k \gg e^{S_{BH}}$, entonces encontramos dos contribuciones. En la primera las geometrías desconectadas con la topología de n discos dominan

$$Tr(\rho_R^n) \supset \frac{k Z_1^n}{k^n Z_1^n} = \frac{1}{k^{n-1}}. \quad (6.26)$$

Y usando (6.25), encontramos que $S_R = \log(k)$, lo que es consistente con (6.14). En el otro límite, la geometría completamente conectada con topología de un solo disco es la dominante. La contribución entonces es

$$Tr(\rho_R^n) \supset \frac{k^n Z_n}{k^n Z_1^n} = \frac{Z_n}{Z_1^n}. \quad (6.27)$$

Esta contribución es independiente de k y por lo tanto puramente gravitacional; para poder calcular la entropía de grano fino es necesario continuar a Z_n a valores cercanos a $n = 1$, la forma de hacer esto es notar que la geometría asociada a $Z_n(\mathcal{M})$ tiene una simetría de réplica $\mathcal{M}_n$, y que el cociente $\mathcal{M}_n$ de la geometría puede ser continuado en n . La variedad $\mathcal{M}_n$ se encuentra asociada a la n -ésima entropía de Renyi. Cuando se toma el límite de $n \rightarrow 1$, esto se convierte en la geometría original y el cálculo de la entropía de von Newmann se reduce a $S_0 + 2\pi\phi_h$, en donde ϕ_h es el valor del dilatón en el horizonte. Obtenemos entonces al final a entropía termodinámica para el agujero negro, lo cual de nuevo es consistente con (6.14).

Dejando de lado estos límites, sabemos que debemos entender la transición entre las contribuciones de geometrías desconectadas y completamente conectadas, debemos sumar sobre las geometrías de réplica que son intermedias.

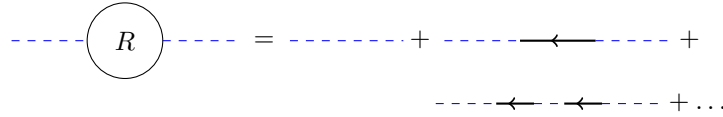
La suma a realizarse debe tomar en cuenta todas las formas de llenar las condiciones de frontera para $Tr(\rho_R^n)$, pero esto se vuelve muy complicado dado el

número de posibilidades aún para un número reducido de replicas. Para simplificar lo anterior se asume que e^{S_0} y k son ambos grandes; de esta forma solo se deben sumar las geometrías que son “planas”¹⁵.

Para sumar sobre todas las geometrías planas, se define la matriz resolvente¹⁶ $R_{ij}(\lambda)$ de ρ_R ¹⁷

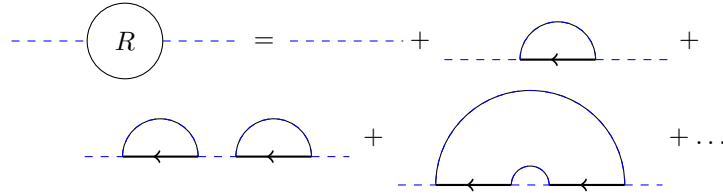
$$R_{ij}(\lambda) = (\lambda I - \rho_R)_{ij}^{-1} = \frac{1}{\lambda} \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (\rho_R^n)_{ij}. \quad (6.28)$$

Las condiciones de frontera para R_{ij} corresponden a una suma infinita sobre diferentes números de fronteras asintóticas AdS_2 , las cuales se encuentran conectadas por las líneas de k índices asociadas al sistema R



$$\text{---} \circ R \text{---} = \text{---} + \text{---} \leftarrow + \text{---} \leftarrow \leftarrow + \dots \quad (6.29)$$

Las líneas punteadas todas vienen con factores de $1/\lambda$, y las líneas sólidas con flechas vienen con factores de $1/(kZ_1)$ que normalizan las integral de camino gravitacional. La geometría que llenan estas condiciones de frontera son:



$$\text{---} \circ R \text{---} = \text{---} + \text{---} \overbrace{\leftarrow}^{\text{arc}} + \text{---} \overbrace{\leftarrow \leftarrow}^{\text{two arcs}} + \text{---} \overbrace{\leftarrow}^{\text{large arc}} + \dots \quad (6.30)$$

Para el segundo término en eq.(6.29), el término con una frontera, tenemos que solamente existe una sola geometría de bulto que puede llenar esta condición; en cambio, para el termino de dos fronteras existen dos geometrías que llenan la condición y por lo tanto debemos sumarlas, estas se encuentran mostradas en la segunda línea de la eq.(6.30). Así, si continuamos con tres fronteras tendremos cinco posibles geometrías, para el término con cuatro fronteras se tendrán 12 geometrías y así sucesivamente. Podemos escribir entonces una ecuación de

¹⁵Las geometrías no planas son aquellas que son eliminadas por potencias de e^{-2S_0} , o por potencias de $\frac{1}{k^2}$, las primeras se asocian a “agarraderas” (puntos de unión en una dimensión superior) y los segundos a cruces que unen las fronteras en más de una forma

¹⁶Dado un operador T en un espacio complejo no trivial χ , definimos el conjunto resolvente $\sigma(T)$ de T como el conjunto de números complejos λ , para el cual $(\lambda I - T)^{-1}$ existe como un operador acotado con dominio χ . El espectro $\omega(T)$ de T es el complemento de $\sigma(T)$. La función $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ es definida en $\sigma(T)$, es llamada la función resolvente o simplemente la resolvente de T .

¹⁷El parámetro λ representa la fuerza de acoplamiento o interacción que caracteriza como las diferentes réplicas están conectadas a través de los agujeros de gusano. λ no tiene una interpretación física directa en términos de una cantidad observable y por lo tanto no tiene una limitante en cuanto al dominio numérico de valores que puede tomar.

Schwinger-Dyson que sume estas geometrías:

$$(6.31)$$

Si escribimos a R como la traza de la matriz resolvente

$$R(\lambda) = \sum_{i=1}^k R_{ii}(\lambda). \quad (6.32)$$

Entonces la ecuación (6.31) es equivalente a

$$R_{ij}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \delta_{ij} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{(kZ_1)^n} R(\lambda)^{n-1} R_{ij}(\lambda). \quad (6.33)$$

El primer término de la anterior se piensa como un “propagador de brana”, los términos siguientes se etiquetan por un valor n de acuerdo a la frontera de la geometría. El factor Z_n es la integral de trayectoria gravitacional. Si tomamos la traza, obtenemos el siguiente resultado (utilizando 6.32)

$$\lambda R(\lambda) = k + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{R(\lambda)^n}{k^n Z_1^n}. \quad (6.34)$$

Dentro de la gravedad de Jackiw-Teitelboim podemos calcular Z_n descomponiendo la integral e trayectoria en dos partes.

$$Z_n = I_{2n} + \varphi \times n. \quad (6.35)$$

El primer término del lado derecho ($I_{2n}(l_1, \dots, l_{2n})$) es la integral gravitacional con $2n$ fronteras geodésicas de dimensiones regularizadas fijas, esta integral puede ser vista de la siguiente manera

$$I_{2n}(l_1, \dots, l_{2n}) = 2^{2n} \int_0^\infty ds \frac{s}{2\pi^2} \sinh(2\pi s) K_{2is}(4e^{-\frac{l_1}{2}}) \dots K_{2is}(4e^{-\frac{l_{2n}}{2}}), \quad (6.36)$$

en donde K es la función de Bessel modificada; para mas información sobre esta expresión se debe revisar el trabajo de [81, pp.15-21].

Ahora, para el segundo término en (6.36), φ es el estado de Hawking-Hartle¹⁸ en la base geodésica; dicho término sirve para calcular la integral de trayectoria

¹⁸ “Los estados de Hawking-Hartle pueden ser interpretados como estados que describen un agujero de gusano que conecta a dos fronteras asintóticas, en donde de cada lado un observador ve un agujero negro en equilibrio a la temperatura inversa β ” [82, p.16].

desde la frontera asintótica a la geodésica de longitud regularizada l . Tiene la expresión:

$$\varphi_\beta(l) = 4e^{-\frac{l}{2}} \int_0^\infty ds \frac{s}{2\pi^2} \sinh(2\pi s) e^{-\frac{\beta s^2}{2}} K_{2is}(4e^{-\frac{l}{2}}). \quad (6.37)$$

Aquí la frontera de I_{2n} consiste en n geodésicas correspondientes a branas EOW, y n geodésicas que necesitan pegarse a los estados de Hartle-Hawking. La fórmula para Z_n es entonces la siguiente

$$\begin{aligned} Z_n &= e^{S_0} \int_0^\infty dl_1 \dots dl_{2n} e^{\frac{l_1 + \dots + l_{2n}}{2}} I_{2n}(l_1 \dots l_{2n}) \rho_\beta(l_1) e^{-\mu l_2} \dots \rho_\beta(l_{2n-1}) e^{-\mu l_{2n}} \\ &= \int_0^{infty} \frac{s}{2\pi^2} \sinh 2\pi s y(s)^n; \quad y(s) = e^{-\frac{\beta s^2}{2}} 2^{1-2\mu} |\Gamma(\mu - 1/2 + is)|^2. \end{aligned} \quad (6.38)$$

El factor de Boltzman ($e^{-\frac{\beta s^2}{2}}$) viene de la integral con el estado de Hartle-Hawking, mientras que el factor de la función Gamma ($2^{1-2\mu} |\Gamma(\mu - 1/2 - is)|^2$) viene de la integral del estado brana.

El parámetro s tiene una interpretación física simple, y es la de dar la energía $s^2/2$ a una región asintótica. La simplificación principal en el cálculo anterior es el hecho de que la energía debe de ser la misma para toda las fronteras asintóticas en una geometría conectada única [1, pp.10-13].

La suma necesaria para la ecuación de Schwinger-Dyson, se convierte en una serie geométrica, esto dado la simpleza de la dependencia en n de la función Z_n dentro de la integral. Definimos ahora las variables reescaladas siguiendo a [1]

$$\rho(s) = e^{S_0} \frac{s}{2\pi^2} \sinh(2\pi s), \quad w(s) = \frac{y(s)}{Z_1}. \quad (6.39)$$

Sumando la serie geométrica, la ecuación para la resolvente es

$$\lambda R = k + \int_0^\infty ds \rho(s) \frac{w(s)R}{k - w(s)R}. \quad (6.40)$$

Esta ecuación contiene toda la información acerca del espectro de entrelazamiento de ρ_R y es exacta en la aproximación plana que estamos tomando en cuenta. Resolviendo la ecuación para $R(\lambda)$ y tomando la discontinuidad a través del eje real, uno encuentra los eigenvalores de la matriz ρ_R

$$D(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} [R(\lambda - i\epsilon) - R(\lambda + i\epsilon)]. \quad (6.41)$$

La entropía de grano fino será entonces

$$S(R) = - \int d\lambda D(\lambda) \lambda \log(\lambda). \quad (6.42)$$

Usamos estos resultados para calcular el espectro de entrelazamiento para el caso en el que el agujero negro esta en un ensamble microcanónico, esto quiere decir que la energía en cada región asintótica se encuentra fija, en lugar de

fijar la longitud renormalizada β . Sea $s = \sqrt{2E}$ y sea Δs el ancho de un pequeño intervalo que define el ensamble microcanónico. Definimos las siguientes cantidades de modo que nos sea benéfico para el desarrollo del espectro

$$e^{\mathbf{S}=\rho(s)\Delta s}, \quad \mathbf{Z}_n=\rho(s)y(s)^n\Delta s \quad \mathbf{w}(s)=\frac{y(s)}{\mathbf{Z}_1}=e^{-\mathbf{S}}, \quad (6.43)$$

$\mathbf{S}$ es la entropía del ensamble microcanónico, y $\mathbf{Z}_n$ es la versión microcanónica de Z_n . El beneficio que surge de considerar el ensamble microcanónico es que la ecuación de la resolvente (6.34) se simplifica a una ecuación cuadrática para R

$$R(\lambda)^2 + \left(\frac{e^{\mathbf{S}} - k}{\lambda} - ke^{\mathbf{S}}\right)R(\lambda) + \frac{k^2 e^{\mathbf{S}}}{\lambda} = 0. \quad (6.44)$$

Y entonces obtenemos sus raíces

$$R_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\left(\frac{e^{\mathbf{S}} - k}{\lambda} - ke^{\mathbf{S}}\right)^2 - \frac{4k^2 e^{\mathbf{S}}}{\lambda}} - \frac{e^{\mathbf{S}} - k}{\lambda} + ke^{\mathbf{S}} \right), \quad (6.45)$$

y

$$R_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{e^{\mathbf{S}} - k}{\lambda} - ke^{\mathbf{S}}\right)^2 - \frac{4k^2 e^{\mathbf{S}}}{\lambda}} - \frac{e^{\mathbf{S}} - k}{\lambda} + ke^{\mathbf{S}} \right), \quad (6.46)$$

consideramos la raíz R_1 para los cálculos siguientes dado que es la raíz que cumple con

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_1 = \frac{1}{2} \left(ke^{\mathbf{S}} - \sqrt{k^2 e^{2\mathbf{S}}} \right) = 0; \quad e^{\mathbf{S}}, k > 0. \quad (6.47)$$

Podemos reescribir la ecuación (6.45) de la siguiente forma

$$R_1(\lambda) = \frac{ke^{\mathbf{S}}}{2} + \frac{k - e^{\mathbf{S}}}{2\lambda} - \frac{ke^{\mathbf{S}}}{2\lambda} [(\lambda - \lambda_-^2)(\lambda - \lambda_+^2)]^{1/2}, \quad (6.48)$$

en donde

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= k^{-1/2} + e^{-\mathbf{S}/2} \\ \lambda_- &= k^{-1/2} - e^{-\mathbf{S}/2}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Sabemos que debemos encontrar la densidad de eigenvalores mediante el método de la resolvente, usualmente esto se hace mediante el uso de la formula de Sokhotski-Plemelj [83, cap.3] [84, cap.8], así entonces comenzamos haciendo el remplazo $\lambda \rightarrow \lambda + i\epsilon$ en R_1 y nos concentramos en el término dentro de la raíz

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_-^2)(\lambda - \lambda_+^2) &\rightarrow (\lambda + i\epsilon - \lambda_-^2)(\lambda + i\epsilon - \lambda_+^2) = \\ &\lambda^2 - \lambda\lambda_-^2 + \lambda_-^2\lambda_+^2 - \lambda\lambda_+^2 - \epsilon^2 + i(\lambda_-^2(-\epsilon) - \lambda_+^2\epsilon + 2\lambda\epsilon). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Entonces si

$$a + ib = \lambda^2 - \lambda\lambda_-^2 + \lambda_-^2\lambda_+^2 - \lambda\lambda_+^2 - \epsilon^2 + i(\lambda_-^2(-\epsilon) - \lambda_+^2\epsilon + 2\lambda\epsilon), \quad (6.51)$$

vemos que

$$\begin{aligned} a &= \lambda^2 - \lambda\lambda_-^2 + \lambda_-^2\lambda_+^2 - \lambda\lambda_+^2 - \epsilon^2 \\ b &= (\lambda_-^2(-\epsilon) - \lambda_+^2\epsilon + 2\lambda\epsilon), \end{aligned} \quad (6.52)$$

y sabemos por [85] que la raíz de un numero complejo puede ser encontrada de la siguiente forma

$$\sqrt{a+ib} = p + i\xi, \quad (6.53)$$

en donde

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} \quad \xi = \frac{\text{sign}(b)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}. \quad (6.54)$$

De esta forma el primer término a la derecha de la ecuación (6.45) puede ser escrito de forma completa como sigue

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{ke^S}{2} \frac{p+i\xi}{\lambda+i\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{ke^S}{2} \frac{(p+i\xi)(\lambda-i\epsilon)}{\lambda^2+\epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{ke^S}{2} \frac{1}{\lambda^2+\epsilon^2} [p\lambda + \xi\epsilon + i(\xi\lambda - \epsilon p)], \end{aligned} \quad (6.55)$$

en este caso la densidad $R(\lambda)$ estará dada por¹⁹

$$D(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left[\frac{ke^S}{2} \frac{\sqrt{a+ib}}{\lambda+i\epsilon} \right] + \dots \quad (6.56)$$

continuyendo con el cálculo obtenemos para este término escrito explícitamente

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left[\frac{ke^S}{2} \frac{\sqrt{a+ib}}{\lambda+i\epsilon} \right] = \frac{ke^S}{2\pi\lambda} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \xi, \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \xi &= \text{sgn}(-\lambda_-^2 - \lambda_+^2 + 2\lambda) \frac{\sqrt{-\lambda^2 + \lambda_+^2\lambda + \sqrt{(\lambda - \lambda_-^2)^2(\lambda - \lambda_+^2)^2 + \lambda_-^2(\lambda - \lambda_+^2)}}}{\sqrt{2}} \\ &= \text{sgn}(-\lambda_-^2 - \lambda_+^2 + 2\lambda) \frac{\sqrt{-\lambda^2 + \lambda_+^2\lambda + \lambda_-^2(\lambda - \lambda_+^2) + |(\lambda - \lambda_-^2)(\lambda - \lambda_+^2)|}}{\sqrt{2}} \\ &= \text{sgn}(-\lambda_-^2 - \lambda_+^2 + 2\lambda) \frac{\sqrt{(\lambda_-^2 - \lambda)(\lambda - \lambda_+^2) + |(\lambda - \lambda_-^2)(\lambda - \lambda_+^2)|}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Es necesario para continuar con la solución evaluar tres casos

$$\begin{aligned} 1. \lambda > \lambda_-^2, \quad \lambda > \lambda_+^2 &\rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \xi = 0, \\ 2. \lambda < \lambda_-^2, \quad \lambda < \lambda_+^2 &\rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \xi = 0, \end{aligned}$$

¹⁹Cabe destacar que el límite de ϵ debe ser tomado por la derecha para que tenga algún sentido.

$$3. \lambda > \lambda_-^2, \quad \lambda < \lambda_+^2 \quad \rightarrow \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \xi = -\sqrt{(\lambda - \lambda_-^2)(\lambda_+^2 - \lambda)}^{20}.$$

Ahora, continuado con la ecuación (6.45), escribimos el segundo y tercer término de la derecha; y realizando el mismo procedimiento que en el primer término obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} -\frac{e^S - k}{2\lambda} + \frac{ke^S}{2} &= \frac{e^S k \lambda - (e^S - k)}{2\lambda} \rightarrow \frac{e^S k(\lambda + i\epsilon) - (e^S - k)}{2(\lambda + i\epsilon)} \\ &= \frac{e^S k(\lambda^2 + \epsilon^2) - (e^S - k)(\lambda - i\epsilon)}{2(\lambda^2 + \epsilon^2)}, \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left[\frac{e^S k(\lambda^2 + \epsilon^2) - (e^S - k)(\lambda - i\epsilon)}{2(\lambda^2 + \epsilon^2)} \right] = \frac{k - e^S}{2\pi} (-1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\lambda^2 + \epsilon^2}, \quad (6.60)$$

$$\frac{k - e^S}{2\pi} (-1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\lambda^2 + \epsilon^2} = \frac{k - e^S}{2} (-1) \delta(\lambda) = \delta(\lambda)(k - e^S) \theta(k - e^S). \quad (6.61)$$

Si juntamos el resultado de la ecuación (6.61), con la tercera condición para la ecuación (6.57), entonces obtenemos el resultado final para la densidad:

$$D(\lambda) = \frac{ke^S}{2\pi\lambda} \sqrt{[\lambda - (k^{-\frac{1}{2}} - e^{\frac{-S}{2}})^2][(k^{-\frac{1}{2}} + e^{\frac{-S}{2}}) - \lambda]} + \delta(\lambda)(k - e^S) \theta(k - e^S). \quad (6.62)$$

Aquí podemos hacer un análisis de acuerdo a los valores de k con respecto a e^S , de modo que nos sea posible revisar el comportamiento de la entropía.

Cuando $k \ll e^S$, el rango del espectro es muy estrecho y el primer término de $D(\lambda)$ es un semicírculo estrecho. Tenemos entonces un espectro que consiste de k eigenvalores de tamaño $1/k$. Esto describe una matriz de densidad maximalmente mixta y por lo tanto la entropía de grano fino es $\log k$.

Cuando k se aproxima a e^S , encontramos

$$\lim_{k \rightarrow e^S} D(\lambda) = \frac{e^{2S} \sqrt{(4e^{-S} - \lambda)}}{2\pi\sqrt{\lambda}}, \quad (6.63)$$

así entonces, se desarrolla una singularidad en el origen. Después del tiempo de Page, la parte suave de la distribución contiene solamente eigenvalores e^S . La entropía de von Newmann tiene una transición aguda cuando va de $\log k$ a S durante la transición de Page: $S = \log m - \frac{m}{2n}$, en donde $m = \min(k, e^S)$ y $n = \max(k, e^S)$ [86, eq.10].

Por último cuando $k \gg e^S$, el termino suave puede ser aproximado de nuevo por una función delta. La distribución describe una matriz de densidad con e^S estados que están maximalmente mezclados, y el resto desenredados. La entropía de grano fino es igual a S .

²⁰ Aquí usamos el hecho de que si $\lambda < \lambda_+^2$ podemos escribir $\text{sgn}(2(\lambda - \lambda_+^2 - 2e^{-S/2}k^{-1/2})) < 0$ $\therefore$ $= -1$

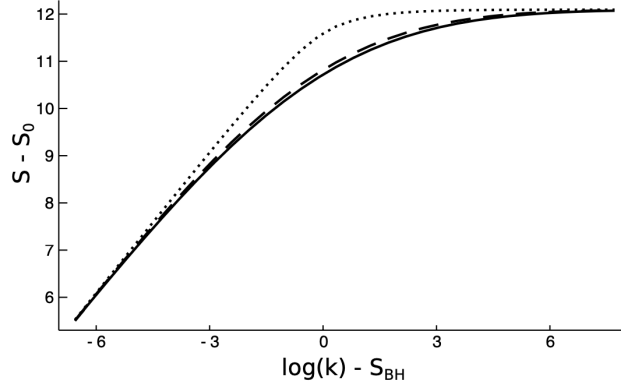


Figura 6.8: Entropía en la aproximación plana graficada con línea sólida, aproximación numérica eq.(6.65) graficada con línea discontinua para el caso $\beta = 3$ y μ grande. La línea punteada corresponde al ensamble microncanónico [1, fig:7].

Si se analiza el caso para el mismo problema pero ahora en el ensamble canónico, no se encuentra una forma de resolver la ecuación (6.40) de forma exacta; los autores [1] proponen la solución numérica de modo que se pueda obtener una idea sobre el comportamiento. El resultado del análisis numérico nos dice que antes de la transición de Page, la distribución de eigenvalores es muy estrecha y localizada cerca de $\lambda = 1/k$ justo como en el caso microcanónico. Después de la transición de Page la distribución se parece al espectro térmico del agujero negro con un corte tajante en $s = s_k$ escogido para que el número total de eigenvalores sea k

$$k = \int_0^{s_k} ds \rho(s). \quad (6.64)$$

Entre los dos regímenes, la curva se interpola suavemente, sin nada que llame particularmente la atención durante la transición. El análisis aproximado de la ecuación de la resolvente permite el cálculo de la entropía de grano fino en el límite semiclásico con G_N pequeña. El resultado es el siguiente

$$S \approx - \int_0^{s_k} ds \rho(s) (\lambda_0 + \omega(s)) \log(\lambda(\lambda_0 + \omega(s))). \quad (6.65)$$

Podemos observar en la figura 6.8 que el error de la aproximación eq.(6.65) es mayor alrededor de la transición de Page, y este error es del orden G_N , sin embargo se encuentra de acuerdo con el promedio sobre el ensamble térmico completo de la respuesta dentro del ensamble microncnónico con una precisión $O(1)$.

Capítulo 7

Islas en los agujeros negros de Reissner-Nordström anti-de Sitter

7.1. Introducción

Pareciera, dados los resultados del capítulo anterior, que la paradoja de la información ha quedado resuelta, y que hemos dado un salto gigantesco en nuestro entendimiento de los agujeros negros, teoría de la información y termodinámica gravitacional; después de todo tenemos una fórmula que nos permite calcular la entropía para la radiación del agujero negro (eq.6.9). Sin embargo, la fórmula de las islas despierta más interrogantes de lo que logra otorgar respuestas, comenzando con lo extraño que resulta el “promedio” que calcula la integral de camino gravitacional, lo que deriva en una conexión innegable de las réplicas -que en un primer momento resultaban ser una extensión analítica independiente cada una de ellas a las otras-. Lo dicho anteriormente nos hace notar que estamos al inicio (y no al final) del camino en nuestro entendimiento de la paradoja de la información, y que teniendo una nueva herramienta debemos enfocarnos en entender su funcionamiento, además de los resultados que esta nos puede dar. Un primer paso para continuar en la línea de la investigación es utilizar la herramienta (eq.6.9) en distintos “laboratorios” gravitacionales y ver que información logramos extraer de esta combinación. En este capítulo aplicaremos lo aprendido acerca de las islas para la radiación de Hawking en la métrica de alta dimensión de un agujero negro no conmutativo anti de Sitter[87-91] y compararemos nuestros resultados por los obtenidos por [92] para el caso sin no-conmutatividad. En la segunda sección de este capítulo resumiremos las ideas principales de la métrica de Reissner-Nordström y los resultados obtenidos por el cálculo realizado en [92]; en la sección tres veremos las modificaciones que se obtienen al aplicar una métrica no conmutativa y veremos si es posible resolver el proble-

ma encontrado en la sección anterior sobre los agujeros negros con la condición extremal. Por último, en la sección cuatro calcularemos el tiempo de Page para el caso extremal haciendo uso de los resultados del caso no conmutativo y el original de [92].

7.2. La métrica de Reissner-Nordström y la fórmula de las islas.

La métrica de Reissner-Nordström es una solución esféricamente simétrica que resulta del acoplamiento de las ecuaciones de Einstein y de Maxwell. Esta métrica representa correctamente a un agujero negro con masa M y carga Q . Existen múltiples razones para estudiar la métrica de Reissner-Nordström, aun cuando no se espera que exista algún cuerpo macroscópico que posea una carga neta, la principal es que podemos estudiar el proceso de dispersión de ondas electromagnéticas así como de ondas gravitacionales utilizando una matriz de dispersión simétrica unitaria, además de esto podemos ver de forma analítica el origen de dos horizontes de sucesos (uno externo y otro interno) y sus características individuales, permitiéndonos escalar a métricas más complejas como lo es la de Kerr [93, pp.205].

En nuestro caso, y en específico en esta sección, buscamos revisar la métrica de Reissner-Nordström acoplada al espacio de anti de Sitter de $(d + 1)$ dimensiones cuando se tiene d tendiendo a un número grande, permitiéndonos revisar la radiación de Hawking y por consiguiente su entropía. La razón para considerar d como grande es que este límite llevará a la geometría cercana al horizonte a un punto fijo, y su dinámica se desacoplará de aquella en la región “lejana”, la teoría efectiva se reduce entonces a una teoría de dilatón bidimensional, como la que ya hemos estado trabajando en capítulos anteriores.

La acción de la teoría de Maxwell-Einstein de $d + 1$ dimensiones tiene la forma siguiente:

$$I = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left(R + \frac{d(d-1)}{L^2} - \frac{L^2}{g_s^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right); \quad (7.1)$$

en donde G_N es la constante gravitacional, R es el escalar de curvatura, L es el radio de curvatura del espacio-tiempo asintótico AdS_{d+1} y g_s es la constante de acoplamiento del campo de norma $U(1)$. Las ecuaciones de movimiento son las siguientes:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{d(d-1)}{2L^2}g_{\mu\nu} = \frac{L^2}{2g_s^2} (4F_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\lambda} - g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \quad (7.2)$$

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0.$$

La métrica solución es:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \\
 A &= \mu \left(1 - \frac{r_+^{d-2}}{r^{d-2}} \right) dt; \quad \mu = \sqrt{\frac{d-1}{2(d-2)} \frac{g_s Q}{L_+^{d-2}}} \\
 f(r) &= 1 - \frac{M}{r^{d-2}} + \frac{Q^2}{r^{2d-4}} \frac{r^2}{L^2}.
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Cuando se trabaja con la métrica de Reissner-Nordström clásica normalmente se estudian dos casos, el no extremal y el extremal. Conocemos como agujero negro extremal dentro de esta métrica al agujero negro que cumple $r_+ = r_-$ en donde r con subíndices $+-$ se refiere al radio del horizonte exterior y al radio del horizonte interior respectivamente. De acuerdo con esto, y siguiendo el trabajo de [92, p.3-19] separaremos los casos de esta forma en las siguientes subsecciones.

7.2.1. Entropía de BH para el caso no extremal

Para el análisis del agujero negro RN-AdS $_{d+1}$ se define $\rho \equiv \frac{r^{d-2}}{M}$ y $M \equiv r_o^{d-2}$, y se toma el límite de dimensión grande $d \rightarrow \infty$ así como el límite de horizonte cercano $r - r_+ \ll r_+$, la métrica se convierte en

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -f(\rho)dt^2 + \frac{r^2}{(d-2)^2 \rho^2 f(\rho)} d\rho^2 + r_o^2 \rho^{\frac{2}{d-2}} d\Omega_{d-1}^2, \\
 A &= \mu \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho} \right) dt, \\
 f(\rho) &= 1 - \frac{1}{\rho} + \frac{Q^2}{M^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{r_o^2}{L^2}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Los horizontes de sucesos tienen entonces el siguiente radio en límite tomado

$$\rho_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kQ^2}{M^2}}}{2k}, \quad k = 1 + \frac{r_o^2}{L^2}. \tag{7.5}$$

La métrica en términos de los horizontes se escribe de la siguiente manera

$$ds^2 = -\frac{k(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2} dt^2 + \left(k(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-) \left[\frac{d-2}{r_o} \right]^2 \right)^{-1} d\rho^2 + r_o^2 \rho^{\frac{2}{d-2}} d\Omega_{d-1}^2. \tag{7.6}$$

La temperatura y entropía de Bekenstein-Hawking asociadas al horizonte externo son

$$T = \left(\frac{d-2}{r_o} \right) \frac{k(\rho_+ - \rho_-)}{4\pi\rho_+}, \quad S_{BH} = \frac{\Omega_{d-1} r_o^{d-1} \rho_+}{4G_N}, \tag{7.7}$$

en donde $\Omega_{d-1} = 2\Pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ es el volumen de la esfera unitaria S^{d-1} .

7.2.2. Entropía de BH para el caso extremal

Para este caso debemos tomar la condición de extremalización antes mencionada, por lo tanto tenemos que $M^2 = 4kQ^2 = r_o^{2d-4}$, con esto aseguramos la coincidencia de horizontes $\rho_+ = \rho_- = \frac{1}{2k} \equiv \rho_h$. La métrica se reescribe de la siguiente forma

$$ds^2 = -\frac{k(\rho - \rho_h)^2}{\rho^2} dt^2 + \left[k(\rho - \rho_h)^2 \left(\frac{d-2}{r_o} \right)^2 \right]^{-1} d\rho^2 + r_o^2 \rho^{\frac{2}{d-2}} d\Omega_{d-1}^2. \quad (7.8)$$

Escribimos la coordenada de tortuga de la siguiente manera

$$\rho_* = \frac{r_o}{(d-2)k} \left[-\frac{\rho_h}{\rho - \rho_h} + \log(\rho - \rho_h) \right], \quad (7.9)$$

y las correspondientes coordenadas de Kruskal son

$$U = -e^{-\kappa(t-\rho_*)}, \quad V = e^{\kappa(t+\rho_*)}, \quad (7.10)$$

en donde $\kappa_{\pm} = \left(\frac{d-2}{r_o} \right) \left(\frac{k(\rho_+ - \rho_-)}{2\rho_{\pm}} \right)$.

En este caso extremal, debe notarse que la gravedad superficial $\kappa_+ = \kappa_- \equiv \kappa$ se vuelve cero, así que se asume que el límite $\kappa \rightarrow 0$ se aproxima al resultado final del caso extremal. La métrica en términos de estas últimas coordenadas se escribe de la siguiente forma:

$$ds^2 = -\omega(\rho) dU dV + r_o^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad \omega^2(\rho) = \frac{k(\rho - \rho_h)^2}{\rho^2} \frac{1}{\kappa^2} e^{-2\kappa\rho_*}; \quad (7.11)$$

y la entropía de Bekenstein-Hawking para este caso es

$$S_{BH} = \frac{\Omega_{d-1} r_o^{d-1} \rho_h}{4G_N}. \quad (7.12)$$

7.2.3. Entropía de entrelazamiento para el caso no extremal.

Se toman, para el cálculo de la entropía de entrelazamiento o grano fino, dos casos a estudiar en la métrica de agujero negro de gran dimensión RN-AdS_{d+1}; el primer caso es en el que no se consideran las islas, dicho de otro modo, la entropía viene puramente de la materia presente, el otro caso es en el que si se consideran islas, las cuales como hemos visto, aparecen en un cierto momento y cambian el resultado final de nuestra entropía.

Para poder realizar el cálculo de la entropía, es necesario hacer ciertas suposiciones sobre la parte finita de la entropía de entrelazamiento de los campos de materia [94, p.4-6]. Estas suposiciones siguen dos límites distintos, uno en que la distancia entre dos regiones, llamadas A y B respectivamente, es pequeña

comparada con la escala del tamaño de las superficies frontera de las regiones y otra donde dicha distancia es grande ¹ :

- Si la distancia que existe entre dos regiones A y B es grande, entonces la radiación de Hawking se asume como descrita por los modos bidimensionales de ondas s con momento angular cero y las influencias de sus modos angulares superiores pueden ser ignoradas. Entonces la parte finita de la entropía de entrelazamiento de los campos de materia esta dada por:

$$I(A : B) = -\frac{c}{3} \log d(A, B) \quad (7.13)$$

en donde c es la carga central, $d(A, B)$ es la distancia entre las fronteras de las regiones en espacio-tiempo plano.

- Cuando la distancia L que se encuentra entre las dos regiones A y B es lo suficientemente pequeña, la información mutua $I(A : B)$ se encuentra dada por

$$I(A : B) = \kappa_{d+1} c \frac{\text{Area}}{L^{d-1}} \quad (7.14)$$

en donde de nuevo c es la carga central del campo sin masa y κ_{d+1} es una constante dependiente de la dimensión.²

Ambas suposiciones pueden ser entendidas si repasamos la sección 5.2.3 de este trabajo y [95, pp.34] en donde se generalizan resultados para dimensiones superiores.

Caso 1: Sin islas

Existen dos puntos que llamaremos $b_{\pm}$, los cuales corresponden a las fronteras de las regiones de radiación en las cuñas izquierda (R_-) y en la cuña derecha (R_+). Aquí $b_+ = (t_b, \rho_b)$ y $b_- = (-t_b + i\beta/2, \rho_b)$. Dado que no existen islas en este caso, se puede inferir que la entropía de entrelazamiento de la radiación de Hawking solo recibe contribuciones de los campos de materia. La entropía de la radiación es

$$S_R = -I(R_+ : R_-). \quad (7.15)$$

¹La separación de casos, responde a los casos límite que podemos tomar, cuando la distancia entre las superficies frontera de las regiones A y B es más grande del tamaño de las superficies frontera, nos permite estudiar los efectos no locales o efectos de entrelazamiento cuántico no extendidos, en cambio el límite de distancia corta, que es cuando la distancia entre las regiones es comparable con su tamaño, nos permite enfocarnos en la entropía de entrelazamiento y en como se mueve la información en la vecindad del horizonte.

²Podemos encontrar una nota importante en [92, pp.6] que debemos mencionar aquí: “Nótese que esta fórmula es válida solamente para el espacio plano. Esperamos que la fórmula de arriba pueda ser también aplicada al espacio-tiempo curvo siempre y cuando requiramos que el tamaño de escala de la curvatura l_R sea mucho más grande que la distancia L ”.

En coordenadas de Kruskal, se tiene

$$\begin{aligned}
S_R &= \frac{c}{3} \log d(b_+, b_-) \\
&= \frac{c}{6} \log [g^2(b)((U(b_-) - U(b_+))(V(b_+) - V(b_-)))] \\
&= \frac{c}{6} \log \left[4 \frac{k(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho} \frac{1}{\kappa_+^2} e^{-4\kappa + \rho_*(b)} \cosh^2(\kappa_+ t_b) \right].
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Asumimos que para tiempos posteriores $t_b \gg \rho_b > \rho_+$, y por lo tanto

$$S_R \simeq \frac{c}{3} \kappa_+ t_b = \frac{d-2}{r_o} \frac{k(\rho_+ - \rho_-)}{6\rho_+} t_b. \tag{7.17}$$

Dado que la entropía de la radiación crece con el tiempo, llegará un momento en que esta sea mayor que la entropía de Bekenstein-Hawking y por lo tanto estaremos violando la unitariedad, la cual sabemos implica que nuestra entropía debe seguir la curva de Page, la interrogante que tenemos ahora es si la introducción de las islas nos permitirá como en el capítulo interior resolver este problema.

Caso 2: con islas

Para este caso nos concentraremos en la situación donde la frontera interior de la región de la radiación se encuentra cercana al horizonte exterior, caracterizado por $\rho_b - \rho_+ \ll \rho_+$. Las fronteras de las islas son $a_+ = (t_a, \rho_a)$ y $a_- = (-t_a + i\beta/2, \rho_a)$. En este caso, como se asumió que las fronteras de las islas se encuentran fuera, pero muy cercanas al horizonte $\rho_a - \rho_+ < \rho_b - \rho_+ \ll \rho_+$, debemos usar la ecuación 7.14, para ello necesitamos la distancia geodésica entre la frontera de la región I y la de la región R

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \frac{r_o}{d-2} \frac{d\rho}{\sqrt{k(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}} \\
&\simeq 2 \frac{r_o}{d-2}.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Y entonces sabiendo que

$$S_{gen} = -2I(R_+ : I) = -2\kappa_{d+1} c \frac{\text{Area}}{L^{d-1}}, \tag{7.19}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
S_{gen} &= 2 \frac{\text{Area}(\partial I)}{4G_N} - 2\kappa_{d+1} c \frac{\text{Area}(\partial R)}{L^{d-1}} \\
&= \frac{\Omega_{d-1} (M\rho_a)^{\frac{d-1}{d-2}}}{2G_N} \\
&\quad - 2\kappa_{d+1} c \frac{\Omega_{d-1} (M\rho_b)^{\frac{d-1}{d-2}}}{(\sqrt{\rho_b - \rho_+} - \sqrt{\rho_a - \rho_+})^{d-1}} \frac{(k(\rho_+ - \rho_-))^{\frac{d-1}{2}}}{2^{d-1}} \left(\frac{d-2}{r_o} \right)^{d-1}.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Definimos las variables $x \equiv \sqrt{\frac{\rho_a - \rho_+}{\rho_+}}$ y $y = \sqrt{\frac{\rho_b - \rho_+}{\rho_+}}$, por lo tanto $x > y \ll 1$, ya que $\rho_a - \rho_+ < \rho_b - \rho_+ \ll \rho_+$. De esta forma la entropía puede ser reescrita de la siguiente forma

$$S_{gen} = \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_a)^{\frac{d-1}{d-2}}}{2G_N} - 2\kappa_{d+1}c \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_b)^{\frac{d-1}{d-2}}}{\left(1 - \frac{x}{y}\right)^{d-1}} \frac{(k(\rho_+ - \rho_-))^{\frac{d-1}{2}}}{\rho_+^{\frac{d-1}{2}} y^{d-1} 2^{d-1}} \left(\frac{d-2}{r_o}\right)^{d-1}. \quad (7.21)$$

La fórmula de las islas nos dice que existe un paso extra a tomar en cuenta y este es el de encontrar el valor mínimo entre todas las soluciones extremales de nuestra entropía S_{fg} ; dado que no tenemos dependencia temporal explícita, derivamos con respecto a la posición ρ_a y resolvemos la ecuación saliente

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{gen}}{\partial \rho_a} &= \frac{d-1}{d-2} \frac{\Omega_{d-1} M^{\frac{d-1}{d-2}} \rho_a^{\frac{1}{d-2}}}{2G_N} \\ &- (d-1)\kappa_{d+1}c \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_b)^{\frac{d-1}{d-2}} (k(\rho_+ - \rho_-))^{\frac{d-1}{2}}}{\left(1 - \frac{x}{y}\right)^d xy \rho_+ \rho_+^{\frac{d-1}{2}} y^{d-1} 2^{d-1}} \left(\frac{d-2}{r_o}\right)^{d-1} = 0, \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\frac{x}{y} \left(1 - \frac{x}{y}\right)^d = G_N \kappa_{d+1} c \frac{(k(\rho_+ - \rho_-))^{\frac{d-1}{2}} (d-2)^{d-1}}{\rho_+^{\frac{d-1}{2}} y^{d+1} 2^{d-2} r_o^{d-1}}. \quad (7.23)$$

Para que se cumpla la condición 7.23 es necesario poner ciertas restricciones en la métrica que estamos trabajando. Continuando con [92], definimos nuevas variables

$$u \equiv \frac{x}{y} \in (0, 1) \quad \text{and} \quad \lambda \equiv \frac{\rho_+^{\frac{d-1}{2}} y^{d+1} 2^{d-2} r_o^{d-1}}{c\kappa_{d+1} G_N (k(\rho_+ - \rho_-))^{\frac{d-1}{2}} (d-2)^d (d+1)}. \quad (7.24)$$

La ecuación (7.23) se convierte en

$$u(1-u)^d = \frac{1}{(d+1)\lambda}. \quad (7.25)$$

Podemos escribir el lado derecho de la anterior como una función de u , $F(u) = u(1-u)^2$; dicha función tiene un máximo en $u_m = \frac{1}{d+1}$ por lo tanto podemos escribir

$$F(u_m) = d^d (1+d)^{-1-d}. \quad (7.26)$$

De este modo para que se cumpla 7.25 se debe tener que $\frac{1}{(d+1)\lambda} < F(u_m)$ lo cual nos da pone una restricción sobre λ

$$\lambda > \left(1 + \frac{1}{d}\right)^d \rightarrow e. \quad (7.27)$$

Al cumplirse dicha restricción tenemos dos valores para u que resuelven la igualdad 7.24, uno u_1 que se encuentra antes del máximo y otro u_2 que se encuentra

después del máximo, dicho de otro modo $0 < u_1 < u_m < u_2$, los valores de la entropía generalizada máximo y mínimo se encuentran en u_2 y u_1 respectivamente, por lo tanto la solución de la fórmula de las islas se encuentra dada por u_1 . Si se tiene un valor $\lambda \leq e$, entonces no se tendrán valores mínimos de la entropía S_{fg} y por lo tanto tampoco se tendrán soluciones de islas triviales, esto pone al descubierto que el cumplimiento de la fórmula de las islas supone una restricción en el agujero negro de gran dimensión sobre la métrica RN-AdS $_{d+1}$, de otra forma tendríamos necesariamente, según nuestro razonamiento en este trabajo, la violación de la unitariedad. Esto puede ser pensado como un resultado de las condiciones necesarias impuestas, pero también como una limitante sintética que surge de una mala aplicación de las condiciones, no sabemos si este tipo de geometrías deben ser aplicables a todos las soluciones tipo agujero negro que tenemos para las ecuaciones de Einstein, aún así se continúa con el trabajo para obtener la mayor cantidad de información de este caso.

Ya que confirmamos la existencia de islas para el caso general $x < y \ll 1$ entonces es momento de evaluar la entropía de grano fino de la radiación de Hawking para el caso espacial $x \ll y/d$ con $d \rightarrow \infty^3$; la solución de islas para este caso es

$$x = \frac{y}{\frac{y^{d+1} r_o^{d-1} 2^{d-2}}{(d-2)^2 \kappa_{d+1} c G_N} \left(\frac{\rho_+}{k(\rho_+ - \rho_-)} \right)^{\frac{d-1}{2}} - d} = \frac{y}{(d+1)\lambda - d}. \quad (7.28)$$

Esta solución debe satisfacer la restricción $\lambda \ll 1$, por lo tanto se tiene

$$x = \frac{y}{(d+1)\lambda - d} \simeq \frac{y}{(d+1)\lambda}. \quad (7.29)$$

Sustituyendo esto en 7.22 obtenemos nuestro resultado

$$\begin{aligned} S_R &\simeq \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_+)^{\frac{d-1}{d-2}}}{2G_N} \\ &- \kappa_{d+1} c \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_+)^{\frac{d-1}{d-2}} (k(\rho_+ - \rho_-))^{\frac{d-1}{2}}}{y^{d-1} \rho_+^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-2}} \left(\frac{d-2}{r_o} \right)^{d-1} \left(1 + (d-1) \frac{x}{y} \right) \\ &\simeq 2S_{BH} \left(1 - \frac{2y^2}{(d+1)(d-2)\lambda} \right) \simeq 2S_{BH}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Para este caso especial así como para otro que se trabaja en [92, pp.12] ($d \frac{x}{y} = \eta \sim O(1)$), el resultado es el mismo $S_{fg} \simeq 2S_{BH}$, de hecho puede mostrarse que para el caso general se obtiene el mismo resultado. Partiendo de la ecuación 7.21 podemos escribir

$$S_R \simeq 2S_{BH} \left(1 - \frac{2y^2}{(d+1)(d-2)\lambda} \left(1 - \frac{x}{y} \right)^{1-d} \right) < 2S_{BH}. \quad (7.31)$$

³No es posible dar una expresión analítica de la solución de islas para el caso general $x < y \ll 1$, esto es lo que nos obliga a tomar casos espaciales [92, pp.10].

Para el caso general $x < y \ll 1$ la solución de islas satisface $x/y = u_1 < u_m = 1/(d+1)$ bajo la restricción $\lambda > e$ y entonces

$$\begin{aligned} S_R &> 2S_{BH} \left(1 - \frac{2y^2}{(d+1)(d-2)\lambda} \left(1 - \frac{1}{d+1} \right)^{1-d} \right) \\ &= 2S_{BH} \left(1 - \frac{2y^2 e}{(d+1)(d-2)\lambda} \right) \\ &\simeq 2S_{BH}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Así se tiene de nuevo $S_{fg} = 2S_{BH}$ para el caso general, los términos superiores han sido ignorados. El doble de la entropía de Bekenstein-Hawking viene del término de área de la isla.

7.2.4. Entropía de entrelazamiento para el caso extremal

Continuando con el análisis y aplicación de la fórmula de las islas en la métrica RN-AdS_{d+1} consideraremos el caso extremal en el mismo límite de gran dimensión. De nuevo dividiremos el proceso a realizar en el cálculo con islas y sin islas de forma que nos sea posible comparar los resultados.

Caso 1: Sin islas

La superficie de Cauchy que incluye al punto $b_+ = (t_b, \rho_b)$ toca la singularidad en $b_0 = (t_b, 0)$; utilizando 7.13, la entropía de la radiación de Hawking está dada por:

$$\begin{aligned} S_R &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{c}{3} \log d(b_+, b_0) \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{c}{6} \log [\omega(\rho) \omega(0) (U(b_0) - U(b_+)) (V(b_+) - V(b_0))] \\ &= \frac{c}{12} \log [f(0) f(\rho_b) (\rho_*(\rho_b) - \rho_*(0))^2], \end{aligned} \quad (7.33)$$

en donde $f(\rho) = k(\rho - \rho_h)^2/\rho^2$, dicha función es singular para nuestra métrica cuando se tiene $\rho = 0$, por lo tanto no nos es posible dar una entropía de entrelazamiento que se comporte de manera correcta para la radiación de Hawking para el caso extremal.

Caso 2: Con islas

Es interesante comenzar con esta pequeña sección notando que dada la existencia de islas, es posible dar una entropía de entrelazamiento para el caso extremal, a diferencia de lo ya establecido en el caso anterior. Para poder resolver y obtener la entropía, establecemos la frontera de la isla como $a_+ = (t_a, \rho_a)$ y consideramos la situación donde $\rho_b - \rho_h \ll \rho_h$. Se asume que la frontera de la isla se encuentra fuera y cerca del horizonte de manera que $\rho_a - \rho_h < \rho_b - \rho_h \ll \rho_h$

y podemos utilizar 7.14 para realizar el análisis.

La distancia geodésica entre a_+ y b_+ es:

$$L = \int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{r_o}{d-2} \frac{d\rho}{k^{1/2}(\rho - \rho_h)} = \frac{r_o}{k^{1/2}(d-2)} \log \left(\frac{\rho_b - \rho_h}{\rho_a - \rho_h} \right), \quad (7.34)$$

y entonces

$$\begin{aligned} S_{gen} &= \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_a)^{\frac{d-1}{d-2}}}{4G_N} - \kappa_{d+1}c \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_b)^{\frac{d-1}{d-2}}}{L^{d-1}} \\ &= \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_a)^{\frac{d-1}{d-2}}}{4G_N} - \kappa_{d+1}c \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_b)^{\frac{d-1}{d-2}}}{\left(\log \left(\frac{\rho_b - \rho_h}{\rho_a - \rho_h} \right)\right)^{d-1}} \frac{k^{\frac{d-1}{2}}(d-2)^{d-1}}{r_o^{d-1}}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Como en [92, pp.14] seguimos utilizando las definiciones $x \equiv \sqrt{\frac{\rho_a - \rho_+}{\rho_+}}$ y $Y \equiv \sqrt{\rho_b - \rho_+}$, por lo tanto $x < y \ll 1$, con esto la entropía de grano fino se convierte en

$$S_{gen} = \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_a)^{\frac{d-1}{d-2}}}{4G_N} - \kappa_{d+1}c \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_b)^{\frac{d-1}{d-2}}}{\left(\log \frac{x^2}{y^2}\right)^{d-1}} \frac{k^{\frac{d-1}{2}}(d-1)^{d-1}}{r_o^{d-1}}, \quad (7.36)$$

y buscando sus puntos extremos derivamos con respecto de ρ_a e igualamos a cero, con lo que obtenemos

$$\frac{x^2}{y^2} \left(\log \frac{y^2}{x^2} \right)^d = 4\kappa_{d+1}cG_N \frac{(d-2)^d k^{\frac{d-1}{2}}}{r_o^{d-1}y^2}. \quad (7.37)$$

Definiendo $z \equiv x^2/y^2 \in (0, 1)$ la ecuación anterior se convierte en

$$z \left(\log \frac{1}{z} \right)^d = 4\kappa_{d+1}cG_N \frac{(d-2)^d k^{\frac{d-1}{2}}}{r_o^{d-1}y^2} \equiv F_0. \quad (7.38)$$

De nuevo como en la subsección anterior investigamos la función en el lado izquierdo de la ecuación anterior $F(z) = z(\log z^{-1})^d$; esta función tiene un punto máximo que llamaremos z_m en $z = e^{-d}$, por lo tanto tenemos que $F(z_m) = \frac{d^d}{e^d}$ y la condición para la existencia de soluciones tipo islas es

$$\frac{d^d}{e^d} > F_0. \quad (7.39)$$

Si la restricción se cumple, entonces tenemos dos posibles soluciones z_1 y z_2 las cuales cumplen que $z_1 < z_m < z_2$, por lo tanto de la misma forma que en el caso no extremal, debemos tomar el valor mínimo siendo este z_1 .

Para el cálculo de la entropía de la radiación de Hawking notamos que la solución

de las islas satisface $x^2/y^2 = z_1 < z_m = e^{-d}$, sustituyendo en 7.36 tenemos

$$\begin{aligned}
S_R &= \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_a)^{\frac{d-1}{d-2}}}{4G_N} - \kappa_{d+1}c \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_b)^{\frac{d-1}{d-2}} k^{\frac{d-1}{2}}(d-2)^{d-1}}{\left(\log \frac{y^2}{x^2}\right)^{d-1} r_o^{d-1}} \\
&> \frac{\Omega_{d+1}(M\rho_a)^{\frac{d-1}{d-2}}}{4G_N} - \kappa_{d+1}c \frac{\Omega_{d-1}(M\rho_a)^{\frac{d-1}{d-2}} k^{\frac{d-1}{2}}(d-2)^{d-1}}{d^{d-1} r_o^{d-1}} \\
&> S_{BH} \left(1 - 4\kappa_{d+1}cG_N \frac{k^{\frac{d-1}{2}}(d-2)^{d-1}}{r_o^{d-1}} \right) \\
&> S_{BH} \left(1 - \frac{y^2}{e^d} \right) \simeq S_{BH},
\end{aligned} \tag{7.40}$$

en donde se utilizó

$$4\kappa_{d+1}cG_N \frac{k^{\frac{d-1}{2}}(d-2)^{d-1}}{d^{d-1}r_o^{d-1}} < \frac{dy^2}{e^d(d-2)} < \frac{y^2}{e^d}. \tag{7.41}$$

La entropía de entrelazamiento o de grano fino de la radiación es aproximadamente igual a la entropía de Bekenstein-Hawking para el caso extremal.

Tiempo de Page

Es posible estimar el tiempo de Page para el agujero negro no extremal con $x < y \ll 1$; la entropía de entrelazamiento S_R está dada por 7.17, la cual crece linealmente con el tiempo t . En el caso con islas vimos que la entropía se encontraba dada por 7.32, por lo tanto podemos inferir el tiempo de Page para nuestro agujero negro comparando ambas expresiones antes mencionadas (7.32, 7.17) tal como se hace en [96, pp.13-14]⁴:

$$t_{Page} \simeq \frac{6S_{BH}}{c\kappa_+} = \frac{3S_{BH}}{\pi cT}. \tag{7.42}$$

Para el caso extremal con $x < y \ll 1$, aunque se puede dar la entropía de entrelazamiento con islas ($S_{fg} \simeq S_{BH}$), la entropía de la radiación se encuentra indefinida, dado que $f(\rho)$ sufre de una divergencia en la singularidad $b_0 = (t_b, 0)$. De esta forma no es posible dada la métrica actual proveer del tiempo de Page para el agujero negro extremal.

7.3. Métrica no conmutativa de Reissner-Nordström-anti-de Sitter de gran dimensión.

El origen de métricas modificadas, como la que aquí trabajaremos, radica en aplicar remedios a las divergencias de las teorías originales de forma que

⁴De hecho el resultado coincide con el de la referencia para el agujero negro de Reissner-Nordström en cuatro dimensiones.

podamos proceder a obtener información con la física conocida y en dado caso indicios de las modificaciones más profundas que se deben hacer en la teoría general.

Vimos en la sección anterior que dada la métrica de Reissner-Nordström, no es posible obtener una solución a la entropía de la radiación para el caso extremal sin el uso de islas, además de que sin este resultado no es posible calcular el tiempo de Page y por lo tanto dar la curva que describiría el proceso unitario. Divisamos que el problema provenía de la singularidad en $\rho = 0$ y por lo tanto de la divergencia en la entropía evaluada en este punto, proponemos entonces en esta sección que la utilización de una métrica modificada como la de Reissner-Nordström-anti-de Sitter de gran dimensión [87, p.56-58] puede ayudarnos a resolver las divergencias y por lo tanto a obtener un resultado para la entropía y tiempo de Page para el caso extremal [97].

7.3.1. No conmutatividad

La no-conmutatividad es una idea originalmente postulada como un modo de mejorar las propiedades de renormalización de una teoría a distancias cortas o hasta hacerla finita. En la década de los 80's la no conmutatividad fue desarrollada ampliamente por los matemáticos para caracterizar la variedad euclidiana en términos del espectro del operador de Dirac en la variedad, proveyendo una generalización de la geometría diferencial, la cual se convirtió en la Geometría No Conmutativa ([87, pp.7])[98-102].

La geometría no conmutativa, es indicada por muchos como una posible herramienta para la descripción de ciertos aspectos en la escala de Planck; se tiene la creencia de que la gravedad cuántica debería tener un principio de incertidumbre, ya que la energía y el momentum necesarios para realizar mediciones modificarían por sí mismos la geometría del espacio-tiempo. De esta forma como sucede con las coordenadas y los momentos en la teoría cuántica convencional, la incertidumbre vendría de una relación no conmutativa y por lo tanto se “debe examinar la posibilidad de que las mediciones de posición podrían no conmutar, postulando la existencia de una variedad no conmutativa.

$$[x^i, x^j] \neq 0$$

“Una característica de una geometría no conmutativa sería la presencia de fluctuaciones cuánticas capaces de eliminar los infinitos que generalmente aparecen y causan el mal comportamiento a corta distancia de las teorías de campo, incluida la gravedad [87, pp.6]”.

En la física de altas energías el interés en esta “no-conmutatividad” se revitalizó cuando, en la Teoría de Cuerdas Abiertas, se demostró que las coordenadas del espacio-tiempo físico se convierten en operadores no conmutativos en una D-brana en presencia de un campo constante Neveu-Schwarz B, y además de que en el marco de trabajo de la Gravedad Cuántica de Lazos, la geometría cuántica resultante exhibe un comportamiento no conmutativo [103]. Sin importar cuál

sea la interpretación de este tipo de geometría en cualquiera de las dos teorías antes mencionadas, la Geometría No-Conmutativa, se emplea actualmente para implementar difusividad del espacio-tiempo⁵ por medio de:

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}, \quad (7.43)$$

en donde θ^{ij} es una matriz anti-simétrica, real de dimensión $D \times D$, con dimensiones de longitud al cuadrado. Esta matriz determina la discretización en celdas fundamentales del espacio-tiempo, de la misma forma -casi- que la constante de Planck discretiza el espacio fase. Como consecuencia de este hecho, la geometría resultante no tiene posiciones fijas ("pointless"), de modo que la noción de punto no tiene significado y se obtiene una incertidumbre en las coordenadas

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{1}{2} |\theta^{ij}|. \quad (7.44)$$

Si definimos θ como la magnitud promedio de un elemento de θ^{ij} , físicamente $\frac{1}{\sqrt{\theta}}$ corresponde a la escala de energía más allá de la cual la variedad de espacio-tiempo diferencial convencional resulta ser una no conmutativa. Un punto clave de todas las formulaciones no conmutativas es la definición equivalente del elemento de línea: la definición de desplazamientos diferenciales conectando dos eventos infinitesimalmente cercanos en el espacio-tiempo parece no ser correcta. En presencia de la difusividad no conmutativa esperamos cierto tipo de eliminación de singularidades que se producen en la variedad diferencial espacial-temporal convencional.

La solución a las ecuaciones de Einstein en presencia de no conmutatividad está sujeta a una interpretación complicada, balanceada entre el formalismo clásico y el cuántico. Aunque los cálculos presentados tienen la apariencia de la Relatividad General clásica, su contenido es puramente gravitacional-cuántico; la razón de esto es el uso, como ya se mencionó anteriormente, de cuasicoordenadas no conmutativas, que dan origen al formalismo cuántico en términos de funciones clásicas deformadas no conmutativas.

En [87] se construyen diversos modelos no conmutativos; nosotros nos enfocaremos al caso extradimensional cargado, la solución aquí presentada no es idéntica a la que se encuentra en el artículo mencionado dado el acoplamiento al espacio de anti-de Sitter, sin embargo como se verá cumple las características necesarias para ser candidata a una métrica que puede ayudarnos a resolver el problema de singularidades obtenido para el caso extremal.

La métrica se asume con la siguiente forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (7.45)$$

La función $f(r)$ se demanda como finita cuando $r \rightarrow \infty$, de manera que

$$f(r) = 1 - \frac{4M}{\pi^{(d-2)/2}} \frac{1}{r^{d-2}} \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) + \frac{d-2}{\pi^{d-3}} \frac{4Q^2}{r^{2(d-2)}} F_d(r) - \frac{r^2 \Lambda}{d}, \quad (7.46)$$

⁵La difusividad del espacio-tiempo se refiere a la capacidad de propagación o difusión de la información, la energía o las partículas en un entorno donde las coordenadas no conmutan.

con

$$F_d(r) \equiv \gamma^2\left(\frac{d}{2} - 1, \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{2^{(8-3d)/2} r^{d-2}}{(d-2)\theta^{(d-2)/2}} \gamma\left(\frac{d}{2} - 1, \frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (7.47)$$

Para probar que la métrica no es singular en el origen reescribimos 7.46 con $\rho \equiv \frac{r^{d-2}}{M}$ y en el límite de dimensión grande $\rho^{\frac{2}{d-2}} \rightarrow \rho^0 = 1$ cuando $d \rightarrow \infty$ por lo tanto $r^{d-2} \rightarrow M \equiv r_0^{d-26}$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} f(\rho) = 1 - \frac{4\pi M}{\pi^{d/2}} \frac{1}{M\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n \left[\frac{(M\rho)^{\frac{2}{d-2}}}{4\theta} \right]^{\frac{d}{2}+n}}{n!^{\frac{d}{2}+n}} + \frac{\pi^3(d-2)}{\pi^d} \frac{4Q^2}{M^2\rho^2} F_d(\rho) - \frac{r_0^2 \Lambda}{d}, \quad (7.48)$$

en donde

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} F_d \equiv & \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n \left[\frac{(M\rho)^{\frac{2}{d-2}}}{4\theta} \right]^{\frac{d}{2}+n-1}}{n!^{\frac{d}{2}+n-1}} \right]^2 \\ & - \frac{2^{4-\frac{3d}{2}}}{(d-2)} M\rho \frac{\theta}{\theta^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n \left[\frac{(M\rho)^{\frac{2}{d-2}}}{4\theta} \right]^{\frac{d}{2}-1+n}}{n!^{\frac{d}{2}-1+n}}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

En el estudio de la métrica en las cercanías de $\rho = 0$ podemos utilizar las series que se obtuvieron en el límite $d \rightarrow \infty$ a orden 0, de modo que nuestra métrica se verá de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(\rho \rightarrow 0) & \cong 1 - \frac{8\pi M}{\pi^{d/2}} \frac{(M\rho)^{\frac{2}{d-2}}}{d} \left(\frac{1}{4\theta} \right)^{\frac{d}{2}} + \frac{\pi^3(d-2)}{\pi^d} 4Q^2 F_d^1 - \frac{r_0^2 \Lambda}{d} \\ & = 1 - \frac{8\pi M}{\pi^{d/2}} \frac{r_0^2}{d} \left(\frac{1}{4\theta} \right)^{\frac{d}{2}} + \frac{\pi^3(d-2)}{\pi^d} 4Q^2 F_d^1 - \frac{r_0^2 \Lambda}{d}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

en donde

$$\begin{aligned} F_d(\rho \rightarrow 0) & \cong F_d^1 = \\ & \frac{1}{M^2\rho^2} \left[\frac{M\rho}{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{1}{4\theta} \right)^{\frac{d}{2}-1} \right]^2 - \frac{2^{4-\frac{3d}{2}}}{d-2} \frac{1}{M\rho} \left(\frac{\theta}{\theta^{d/2}} \left(\frac{1}{4\theta} \right)^{\frac{d}{2}-1} \frac{M\rho}{\frac{d}{2}-1} \right) \\ & = \frac{1}{(d/2-1)^2} \left(\frac{1}{4\theta} \right)^{d-2} - \frac{2^{4-3d/2}}{d-2} \frac{\theta}{\theta^{d/2}} \left(\frac{1}{4\theta} \right)^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{\frac{d}{2}-1} \\ & = \frac{64}{2^{\frac{5d}{2}}} \frac{1}{\theta^{2+d}} \frac{2^{d/2}\theta^{2d} - 2\theta^4}{(d-2)^2} \end{aligned}$$

⁶Debemos ser cuidadosos en como obtenemos los límites para cada uno de los términos en la métrica 7.46, aunque es posible realizar la reducción como se menciona y como se hizo en la sección pasada, debemos conservar los términos sin el límite en las funciones gamma incompletas para poder obtener una métrica no singular en el límite $\rho \rightarrow 0$ [104].

$$= \frac{64}{2^{\frac{5d}{2}}} \frac{1}{\theta^{2+d}} \frac{2^{d/2}\theta^{2d} - 2\theta^4}{(d-2)^2}, \quad (7.51)$$

con lo que podemos concluir que contamos con una métrica que no es divergente en $\rho = 0$.

7.3.2. Cálculo de la entropía para el caso extremal

Dada una métrica que no es singular en el origen (7.46), podemos intentar realizar el cálculo de la entropía para el caso extremal sin islas y con ello el tiempo de Page para la transición.

Para poder trabajar con la métrica (7.46) es necesario realizar ciertas simplificaciones sobre las funciones gamma de manera que, podamos calcular la condición extremal y la consiguiente coordenada tortuga para el caso extremal.

Cuando se tiene el límite de gran dimensión $d \rightarrow \infty$ y x se encuentra fijo en $\gamma(d, x)$, es posible escribir la función gamma de la siguiente forma

$$\gamma(d, x) = x^d e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(d)_{k+1}}, \quad (7.52)$$

en donde $(d)_{k+1}$ es el símbolo de Pochhammer definido de la siguiente forma

$$(d)_{k+1} = \frac{\Gamma(d+k+1)}{\Gamma(d)}. \quad (7.53)$$

A orden 0 obtenemos

$$\gamma(d, x) = x^d e^{-x} \frac{1}{(d)_1} = x^d e^{-x} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(d)} = x^d e^{-x} \frac{d\Gamma(d)}{\Gamma(d)} = x^d e^{-x} d, \quad (7.54)$$

con esto en mente si suponemos que r_0 se mantiene fijo en el límite de gran dimensión, y que $r - r_+ \ll r_+$, entonces las funciones gamma que aparecen en la métrica se reducen a

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r_0^2}{4\theta}\right) &\approx \left(\frac{r_0^2}{4\theta}\right)^{d/2} e^{-\frac{r_0^2}{4\theta} \frac{d}{2}} = \frac{r_0^d}{(4\theta)^{d/2}} e^{-\frac{r_0^2}{4\theta} \frac{d}{2}} \\ \gamma\left(\frac{d}{2} - 1, \frac{r_0^2}{4\theta}\right) &\approx \left(\frac{r_0^2}{4\theta}\right)^{\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{r_0^2}{4\theta} (d/2 - 1)} = \frac{r_0^{d-2}}{(4\theta)^{d/2-1}} e^{-\frac{r_0^2}{4\theta} (d/2 - 1)}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Con esto f en la métrica se convierte en

$$f \approx 1 - \frac{e^{-\frac{r_0^2}{4\theta}} d \pi^{1-d/2} r_0^d}{2^{d-1} \theta^{d/2} \rho} + \frac{4(d-2) F_d^2 \pi^{3-d} Q^2}{M^2 \rho^2} - \frac{r_0^2 \Lambda}{d}, \quad (7.56)$$

en donde

$$F_d^2 = 2^{2-5d/2} e^{-\frac{r_0^2}{4\theta}} r_0^{d-4} \theta^{2-d} (2^{d/2} (-2+d)^2 r_0^d - 8e^{\frac{r_0^2}{4\theta}} M r_0^2 \rho). \quad (7.57)$$

Resolvemos para encontrar la condición extremal, la cual es

$$M = \frac{2^{6-\frac{3d}{2}}(d-2)\pi^{2-\frac{d}{2}}\theta^{2-d/2}}{dr_0^2}Q^2, \quad (7.58)$$

a primer orden en $1/d$.

La función f utilizando (7.58), es en el límite de gran dimensión

$$f_{extremal} = \frac{2^{3d-10}d^2F_{d-extremal}r_0^4\theta^{d-4}}{\pi(d-2)\rho^2Q^2} - \frac{4\pi^{1-\frac{d}{2}}\gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r_0^2}{4\theta}\right)}{\rho} - \frac{\Lambda r_0^2}{d} + 1, \quad (7.59)$$

y

$$F_{d-extremal} = \frac{2^{-\frac{3d}{2}+\frac{1}{2}(8-3d)+6}\pi^{2-\frac{d}{2}}\rho Q^2\theta^{3-d}\gamma\left(\frac{d}{2}-1, \frac{r_0^2}{4\theta}\right)}{dr_0^2} + \gamma\left(\frac{d}{2}-1, \frac{r_0^2}{4\theta}\right)^2. \quad (7.60)$$

La coordenada tortuga asociada es por tanto

$$\begin{aligned} \rho_* &= \int_{\rho} \frac{1}{f_{extremal}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi^{-d-1}}d^2\left(512\pi^3\theta^2Q^2(dvr_0^2-4(d-2)h\theta)^2-(d-2)d(8\pi)^dv^2r_0^4\theta^d(d-\Lambda r_0^2)\right)}{32(d-2)\theta^2Q(d-\Lambda r_0^2)^2\sqrt{(d-2)d(8\pi)^dv^2r_0^4\theta^d(d-\Lambda r_0^2)-256\pi^3\theta^2Q^2(dvr_0^2-4(d-2)h\theta)^2}}\chi \\ &\quad - \frac{\pi^{1-\frac{d}{2}}d^2(dvr_0^2-4(d-2)h\theta)}{2(d-2)\theta(d-\Lambda r_0^2)^2} + \frac{d\rho}{d-\Lambda r_0^2}\xi, \end{aligned} \quad (7.61)$$

en donde para reducir la ecuación se definen las variables siguientes

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \log\left(\pi^{-\frac{d}{2}}(8^d d^3 \pi^{d/2} v^2 r_0^4 \theta^d + 1024 \pi^2 d^2 \theta^3 v \rho Q^2 r_0^2 \right. \\ &\quad \left. - 1024 \pi (d-2) \theta^4 \rho Q^2 (4 \pi d h - \pi^{d/2} \rho (d - \Lambda r_0^2)))\right), \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\chi \equiv \tan^{-1} \left(\frac{16 \theta Q \left(d \pi^{1-\frac{d}{2}} (dvr_0^2 - 4(d-2)h\theta) + 2(d-2)\theta\rho(d-\Lambda r_0^2) \right)}{d \sqrt{\pi^{-d-1}} \sqrt{(d-2)d(8\pi)^dv^2r_0^4\theta^d(d-\Lambda r_0^2)-256\pi^3\theta^2Q^2(dvr_0^2-4(d-2)h\theta)^2}} \right), \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} h &\equiv \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r_0^2}{4\theta}\right) \\ v &\equiv \gamma\left(\frac{d}{2}-1, \frac{r_0^2}{4\theta}\right). \end{aligned} \quad (7.64)$$

En la sección 7.2 vimos que la función f se encontraba determinada por M , ρ , Q y L , el problema del cálculo de la entropía radicaba en $\rho = 0$ y por lo tanto en $f(0)$. Con la nueva métrica suponemos que las divergencias en el origen han quedado eliminadas y por lo tanto podemos intentar de nuevo el cálculo de la entropía

$$S_R = \frac{c}{12} \log[f(0)f(\rho_b)(\rho_*(\rho_b) - \rho_*(0))^2]. \quad (7.65)$$

Los valores necesarios son los siguientes:

■

$$f(0) = 1. \quad (7.66)$$

Resultado válido para el límite de dimensión grande a primer orden en $1/d$.

■

$$\begin{aligned} f(\rho_b) &= \frac{\frac{8^d d^2 r_0^4 \theta^d \gamma\left(\frac{d}{2}-1, \frac{r_0^2}{4\theta}\right)^2}{Q^2} + 1024\pi^{2-\frac{d}{2}} \theta^3 \rho_b \left(dr_0^2 \gamma\left(\frac{d}{2}-1, \frac{r_0^2}{4\theta}\right) - 4(d-2)\theta \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r_0^2}{4\theta}\right) \right)}{1024\pi(d-2)\theta^4 \rho_b^2} \\ &\quad - \frac{\Lambda r_0^2}{d} + 1 \\ &= \frac{2^{d-8}(d-2)d^2 r_0^{2d} e^{-\frac{r_0^2}{2\theta}}}{\pi \theta^2 Q^2 \rho_b^2} - \frac{\Lambda r_0^2}{d} + 1. \end{aligned} \quad (7.67)$$

En donde en la segunda igualdad utilizamos el limite de dimensión grande con r_0 fijo 7.55.

■

$$\rho_*(0) = 0. \quad (7.68)$$

■

$$\begin{aligned} \rho_*(\rho_b) &= \frac{d\rho_b}{d - \Lambda r_0^2} \\ &\quad - \frac{\sqrt{d-2} d^{5/2} \sqrt{\pi^{-d-1}} \sqrt{(2\pi)^d} r_0^d \sqrt{e^{-\frac{r_0^2}{2\theta}}} \tan^{-1} \left(\frac{16\theta Q \rho_b r_0^{-d} \sqrt{d - \Lambda r_0^2}}{\sqrt{d-2} d^{3/2} \sqrt{\pi^{-d-1}} \sqrt{(2\pi)^d} \sqrt{e^{-\frac{r_0^2}{2\theta}}}} \right)}{16\theta Q (d - \Lambda r_0^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (7.69)$$

que se obtiene de nuevo utilizando 7.55.

Así entonces el valor de la entropía es el siguiente:

$$\begin{aligned} S_R &= \frac{1}{12} c \left(\frac{2^{d-8}(d-2)d^2 r_0^{2d} e^{-\frac{r_0^2}{2\theta}}}{\pi \theta^2 Q^2 \rho_b^2} - \frac{\Lambda r_0^2}{d} + 1 \right) \\ &\quad \left(\frac{d\rho_b}{d - \Lambda r_0^2} - \frac{\sqrt{d-2} d^{5/2} \sqrt{\pi^{-d-1}} \sqrt{(2\pi)^d} r_0^d \sqrt{e^{-\frac{r_0^2}{2\theta}}} \tan^{-1} \left(\frac{16\theta Q \rho_b r_0^{-d} \sqrt{d - \Lambda r_0^2}}{\sqrt{d-2} d^{3/2} \sqrt{\pi^{-d-1}} \sqrt{(2\pi)^d} \sqrt{e^{-\frac{r_0^2}{2\theta}}}} \right)}{16\theta Q (d - \Lambda r_0^2)^{3/2}} \right)^2. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Continuando con nuestros cálculos, para poder obtener el tiempo de Page es necesario escribir la entropía como función del tiempo, de esta forma es conveniente definir coordenadas de Kruskal y para ello necesitamos calcular la gravedad superficial (ver sección:7.2.2). El cálculo de la gravedad superficial debe llevarse a cabo en la métrica no extremal y dado que hemos modificado esta métrica con la no-conmutatividad es necesario re-evaluar nuestro resultado de κ antes de continuar.

La gravedad superficial para la métrica de dimensión grande utilizando 7.55 en la simplificación de las funciones γ

$$\kappa_{\pm} = \frac{2^{-\frac{5d}{2}} \pi^{1-d} \theta^{-d} r_0^d e^{-\frac{r_0^2}{2\theta}}}{\rho_{\pm}^3} \left(\frac{16\pi^2 (d-2) \theta^2 Q^2 \left(2^{d/2} (d-2)^2 r_0^d - 4M \rho_{\pm} r_0^2 e^{\frac{r_0^2}{4\theta}} \right)}{M^2 r_0^4} - 2^{\frac{3d}{2}} d \pi^{d/2} \rho_{\pm} \theta^{d/2} e^{\frac{r_0^2}{4\theta}} \right), \quad (7.71)$$

en dónde

$$\rho_{\pm} = \frac{2^{-\frac{5d}{2}} \pi^{1-d} \theta^{-d} e^{-\frac{r_0^2}{2\theta}}}{M^2 r_0^4 (\Lambda r_0^2 - d)} \quad (7.72)$$

$$(\pm \zeta - d M r_0^{d+2} e^{\frac{r_0^2}{4\theta}} \left(2^{\frac{3d}{2}} d \pi^{d/2} M r_0^2 \theta^{d/2} + 64 \pi^2 (d-2) \theta^2 Q^2 \right)),$$

$$\zeta = (d M^2 r_0^{2d+4} e^{\frac{r_0^2}{2\theta}} (\theta^d (d^3 (8\pi)^d M^2 r_0^4 - 2^{3d+4} (d-2)^3 \pi^{d+1} \theta^2 Q^2 (d - \Lambda r_0^2)) + 2^{\frac{3d}{2}+7} (d-2) d^2 \pi^{\frac{d}{2}+2} M Q^2 r_0^2 \theta^{\frac{d}{2}+2} + 4096 \pi^4 (d-2)^2 d \theta^4 Q^4))^{1/2}. \quad (7.73)$$

Ahora con $\kappa_{\pm}$ y la coordenada tortuga ρ_* podemos escribir de nueva cuenta

$$U = -e^{-\kappa(t-\rho_*)} \quad V = e^{\kappa(t+\rho_*)}, \quad (7.74)$$

en donde para el caso extremal recordamos que $\kappa_+ = \kappa_- = \kappa$ y de nueva cuenta definimos

$$\omega^2(\rho) = \frac{f_{extremal}}{\kappa^2} e^{-2\kappa\rho_*}. \quad (7.75)$$

Con esto se debe poder calcular la entropía en coordenadas de Kruskal y por lo tanto encontrar su dependencia en el tiempo. Es prudente recordar en esta parte del trabajo que el orden en que introducimos los límites a las aproximaciones como (7.55) para el cálculo de cantidades como ω , κ y ρ_* , es de suma importancia para el resultado final. Por ejemplo, si se utiliza la cantidad κ como se tiene de forma explícita en (7.71) para el cálculo de $\omega^2(\rho)$, tendremos una divergencia dentro de la exponencial cuando se evalúe el resultado en $\rho = 0$, sin embargo, si llevamos la forma completa (sin utilizar desarrollos de las funciones gamma) hasta nuestro cálculo final y luego hacemos un desarrollo como en

(7.48), podremos obtener un valor finito, esto es, un valor posible a utilizar para el cálculo de la entropía. Además de lo anterior, la validez de las aproximaciones debe ser cuidadosamente revisada en posteriores trabajos para asegurar que los cálculos contengan siempre el significado físico apropiado.

La entropía para el caso extremal en coordenadas de Kruskal está dada por

$$S_R = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{c}{6} \log[\omega(\rho_b)\omega(0)(U(b_0) - U(b_+))(V(b_+) - V(b_0))], \quad (7.76)$$

en donde recordamos que $b_+ = (t_b, \rho_b)$ y $b_0 = (t_b, 0)$, por lo que

$$S_R = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{c}{6} \log[\omega(\rho_b)\omega(0)(e^{\kappa\rho_*(0)} - e^{\kappa\rho_*(\rho_b)})^2]. \quad (7.77)$$

Por lo que nos percatamos que la entropía no depende del tiempo, y por lo tanto es imposible, en este análisis con sus aproximaciones, calcular el tiempo de Page.

Resulta muy interesante notar que pudimos calcular una entropía no solamente en la presencia de islas, sino también, en la métrica modificada por no conmutatividad, ambas expresiones finitas. De este modo, al comparar con el resultado clásico en donde se ha teorizado la no existencia de entropía para agujeros negros extremos[105], podemos concluir que los nuevos desarrollos sugieren que existen configuraciones no triviales de vacío para estos agujeros negros.

El uso de la receta de las islas, nos permite no solamente calcular una entropía que -en teoría- sigue la curva de Page para diversos casos, como hemos visto, sino que también sus resultados nos dan indicios de en donde existe trabajo por realizar. En este último caso revisado, es necesario estudiar la presencia de esta entropía y buscar la aproximación o cambio de coordenadas en el cual podamos observar la dependencia temporal y por lo tanto el tiempo y curva de Page.

Se debe rescatar que el problema sobre el cálculo de la entropía en el caso extremal sin islas, no se debe solamente a las divergencias que se pueden encontrar en la métrica usual de gran dimensión, como se menciona en [92] y que aquí hemos demostrado que no es así, sino que, la configuración geométrica tiene en sí un problema lo que impide que mediante métodos semiclásicos se obtenga una entropía finita y que a su vez imposibilita la descripción correcta de la curva de Page.

Capítulo 8

Conclusiones

A lo largo de este trabajo, hemos explorado los aspectos más relevantes y fundamentales de la paradoja de la información, buscando desde su planteamiento respuesta a la elusiva problemática que esta presenta para el desarrollo de la física moderna.

La solución completa de la paradoja de la información y por lo tanto una correcta descripción de la entropía de los agujeros negros, se esconde tras un horizonte lejano que parece -por fin- avistarse. Los avances presentados en este trabajo en el capítulo 6, como resumen de los artículos ahí mencionados [1, 29], representan una herramienta importante y sobre todo una muestra de un significativo avance hacia una comprensión mayor de la termodinámica, la teoría de la información y la gravitación. Es crucial tener en cuenta que estos resultados se basan en aproximaciones que incluyen límites tales como el de dimensión grande, los cuales son muy útiles y necesarios para abordar la complejidad de los problemas tratados en esta tesis, y aunque facilitan los cálculos, y la manipulación de ciertos aspectos de la paradoja de la información, también introducen limitaciones en la generalización de los resultados a situaciones más realistas. Así, debe reconocerse que la totalidad de mis resultados se encuentra condicionada por los límites introducidos y su validez y aplicabilidad en contextos más complejos requieren una evaluación más detallada y la exploración de otros enfoques que superen de alguna forma las ya mencionadas limitaciones.

La primera mitad de esta tesis se concentra en sentar las bases para entender la paradoja de la información, en una época donde la holografía parece ser una herramienta muy útil y tal vez vital de exploración gravitacional, además de esto se explora un aparato excepcionalmente valioso en la termodinámica, llamado el método de réplicas, que más tarde fue de utilidad en el cálculo de entropía para casos complejos.

La segunda mitad puede dividirse a su vez en dos secciones; la primera, muestra la forma de trabajar con entropía en espacios-tiempos curvos así como las consecuencias que tiene su existencia en las métricas no triviales, además se ligán las herramientas planteadas en la primera sección con el espacio de anti de Sitter que como vimos, resulta un laboratorio natural para nuestras ideas. La

segunda sección de esta última parte presenta los avances más novedosos para la solución de la paradoja de la información, en específico, se exhibe el mecanismo mediante el cual uno puede obtener de forma “clásica” una curva de Page para el proceso de evaporación de un agujero negro (fórmula de las islas). Dentro de esta sección fueron planteadas las dificultades que deben sortearse de modo que estos resultados sean aplicables a métricas más complejas y se dio también un ejemplo de cálculo para la métrica de Reissner-Nordström-anti de Sitter.

El capítulo final de esta tesis presenta nuestra principal contribución al tema, dentro del ejemplo planteado [92](cap. 7.1, 7.2), se encontró que no existe una posibilidad de comparación entre entropías con y sin islas para el caso extremal, dada la aparición de divergencias, por lo tanto se plantea la imposibilidad de encontrar el tiempo de Page y la curva asociada a la evaporación de este agujero negro teórico. Sin embargo, mediante el uso de la no conmutatividad, se logra sortear dichas divergencias y demostramos que la imposibilidad del cálculo no radica en ellas, sino, en la geometría del problema, en específico en la continuación analítica de los agujeros negros¹ extremales y por lo tanto en la condición extremal misma (recordemos que el valor de κ para un agujero negro extremal debe ser 0 proponiendo un nuevo reto en el cálculo de las coordenadas de Kruskal); de este modo quedan en descubierto dos cosas, la primera es la utilidad de la fórmula de islas, y la segunda es que existe un reto gigantesco para entender que es lo que este método está logrando hacer para obtener la entropía deseada, y como es que puede lograrse de otro modo -dado que se encontró una respuesta a la entropía para el caso extremal que podría interpretarse como independiente del tiempo-, lo cual resulta imposible en un evento de evolución temporal como lo es la evaporación de un agujero negro.

Por otro lado pudimos constatar de nuevo la utilidad de la no conmutatividad en la gravitación; no obstante, el empleo de las aproximaciones realizadas debe ser discutido con mayor detenimiento dado que el uso de ellas en un orden inverso o distinto al que usamos nos entrega resultados con problemas de divergencias, siendo que estas parecían en un primer momento erradicadas por la no conmutatividad.

El camino inmediato a seguir parece claro, y es el de buscar formas de aplicar la fórmula de las islas a distintas métricas (cada vez más complejas) de modo que se puedan obtener pistas que nos ayuden a entender su funcionamiento y por lo tanto las modificaciones que en dado caso se deben de hacer en ella para su correcta implementación en la descripción de agujeros negros más apegados a la realidad. La solución de la paradoja de la información es un trayecto arduo y debe ser un tema de interés general en la física; es preciso aprovechar las herramientas de otras áreas para intentar responder a las interrogantes que este camino plantea.

¹Una alternativa a la continuación analítica es el de utilizar métodos numéricos de modo que se pueda abordar la complejidad de los cálculos. Estos métodos ofrecen la ventaja de permitir un tratamiento más preciso y detallado de ciertos aspectos de la problemática abordada en esta tesis, sin introducir las limitaciones asociadas con la continuación analítica. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el uso de métodos numéricos también puede requerir recursos computacionales significativos y una cuidadosa validación de los resultados obtenidos.

Bibliografía

- ¹G. Penington, S. H. Shenker, D. Stanford y Z. Yang, “Replica wormholes and the black hole interior”, *Journal of High Energy Physics* **2022**, 1-87 (2022).
- ²A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian y A. Tajdini, “Replica wormholes and the entropy of Hawking radiation”, *Journal of High Energy Physics* **2020**, 1-42 (2020).
- ³A. Einstein, “Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie”, German, *Annalen der Physik* **354**, 769-822 (1916).
- ⁴H. Stephani, *Relativity: An introduction to special and general relativity* (Cambridge university press, 2004).
- ⁵S. W. Hawking y G. F. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- ⁶E. Hubble, “A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15**, 168-173 (1929).
- ⁷D. Hilbert, “Die Grundlagen der Physik”, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1915**, The Foundations of Physics (First Communication), 395-407 (1915).
- ⁸S. W. Hawking, “Black holes in general relativity”, *Communications in Mathematical Physics* **25**, 152-166 (1972).
- ⁹C. Blinn, *Schwarzschild Solution to Einstein’s General Relativity*, 2017.
- ¹⁰K. Schwarzschild, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”, German, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Available in English translation: “On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein’s Theory”, *Gen. Rel. Grav.* **35**, 951 (2003), 189-196 (1916).
- ¹¹Ø. Grøn, “Celebrating the centenary of the Schwarzschild solutions”, *American Journal of Physics* **84**, 537-541 (2016).
- ¹²G. Lemaître, “L’Univers en expansion”, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **A53**, 51-85 (1933).
- ¹³A. S. Eddington, “A Comparison of Whitehead’s and Einstein’s Formulae”, *Nature* **113**, 192 (1924).

- ¹⁴D. Finkelstein, “Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle”, *Physical Review* **110**, 965-967 (1958).
- ¹⁵M. D. Kruskal, “Maximal Extension of Schwarzschild Metric”, *Physical Review* **119**, 1743 (1960).
- ¹⁶R. Penrose, “Gravitational Collapse and Space-Time Singularities”, *Physical Review Letters* **14**, 57-59 (1965).
- ¹⁷V. Mukhanov y S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity* (Cambridge university press, 2007).
- ¹⁸T. Harmark, J. Natario, R. Schiappa et al., “Greybody factors for d-dimensional black holes”, *Advances in Theoretical and Mathematical Physics* **14**, 727-794 (2010).
- ¹⁹S. W. Hawking, “Particle creation by black holes”, *Communications in mathematical physics* **43**, 199-220 (1975).
- ²⁰J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy”, *Physical Review D* **7**, 2333 (1973).
- ²¹S. Hawking, “contribution to Black Holes”, *Phys. Rev. Letters* **26**, 1344 (1971).
- ²²W. Israel, “Event horizons in static vacuum space-times”, *Physical review* **164**, 1776 (1967).
- ²³W. Israel, “Event horizons in static electrovac space-times”, *Communications in Mathematical Physics* **8**, 245-260 (1968).
- ²⁴B. Carter, “Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom”, *Physical Review Letters* **26**, 331 (1971).
- ²⁵S. W. Hawking, “Black holes and thermodynamics”, *Physical Review D* **13**, 191 (1976).
- ²⁶D. J. Griffiths y D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3.^a ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2018).
- ²⁷S. Ryu y T. Takayanagi, “Aspects of holographic entanglement entropy”, *Journal of High Energy Physics* **2006**, 045 (2006).
- ²⁸D. Harlow, “Jerusalem lectures on black holes and quantum information”, *Reviews of Modern Physics* **88**, 015002 (2016).
- ²⁹A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian y A. Tajdini, “The entropy of Hawking radiation”, *Reviews of Modern Physics* **93**, 035002 (2021).
- ³⁰T. Hartman, *Introduction to Quantum Entanglement*, Último acceso: 2024-04-15, 2015.
- ³¹Y. D. Chong, *Quantum Entanglement*, Último acceso: 2024-04-15, sin especificar.
- ³²S. J. Blundell y K. M. Blundell, *Concepts in Thermal Physics*, 2.^a ed. (Oxford University Press, Oxford, 2009).

- ³³S. Ryu y T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de sitter space/conformal field theory correspondence”, *Physical review letters* **96**, 181602 (2006).
- ³⁴A. Almheiri, N. Engelhardt, D. Marolf y H. Maxfield, “The entropy of bulk quantum fields and the entanglement wedge of an evaporating black hole”, *Journal of High Energy Physics* **2019**, 1-47 (2019).
- ³⁵S. W. Hawking, “Breakdown of predictability in gravitational collapse”, *Physical Review D* **14**, 2460 (1976).
- ³⁶J. Preskill, “Do black holes destroy information”, en *Proceedings of the International Symposium on Black Holes, Membranes, Wormholes and Superstrings*, S. Kalara and DV Nanopoulos, eds.(World Scientific, Singapore, 1993) pp (World Scientific, 1992), págs. 22-39.
- ³⁷D. N. Page, “Information in black hole radiation”, *Physical review letters* **71**, 3743 (1993).
- ³⁸R. P. Feynman, *Negative probability*, inf. téc. (PRE-27827, 1984).
- ³⁹D. N. Page, “Time dependence of Hawking radiation entropy”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2013**, 028 (2013).
- ⁴⁰D. N. Page, “Comment on. Entropy Evaporated by a Black Hole”, *Physical Review Letters* **50**, 1013 (1983).
- ⁴¹W. H. Zurek, “Entropy evaporated by a black hole”, *Physical Review Letters* **49**, 1683 (1982).
- ⁴²J. Maldacena, “The large-N limit of superconformal field theories and supergravity”, *International journal of theoretical physics* **38**, 1113-1133 (1999).
- ⁴³J. Maldacena, “The Gauge/Gravity Duality”, en *Nombre del libro o compilación* (Nombre del editor o de la editorial, 2012), págs. 325-347.
- ⁴⁴L. Susskind y J Lindesay, *Black Holes, Information and the String Theory Revolution. The Holographic Universe*, 2005.
- ⁴⁵O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri e Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity”, *Phys. Rept.* **323**, 183-386 (2000).
- ⁴⁶V. E. Hubeny, “The AdS/CFT Correspondence”, *Classical and Quantum Gravity* **32**, 124010 (2015).
- ⁴⁷M. Ammon y J. Erdmenger, *Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 2015).
- ⁴⁸M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, Boulder, CO, 1995).
- ⁴⁹H. Năstase, *Introduction to the ADS/CFT Correspondence* (Cambridge University Press, 2015).
- ⁵⁰S. Perlmutter et al., “Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae”, *The Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).

- ⁵¹A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis et al., “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, *The Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).
- ⁵²I. Heemskerk, J. Penedones, J. Polchinski y J. Sully, “Holography from Conformal Field Theory”, *Journal of High Energy Physics* **2009**, 079 (2009).
- ⁵³L.-Y. Hung, R. C. Myers y M. Smolkin, “Twist operators in higher dimensions”, *Journal of High Energy Physics* **2014**, 1-45 (2014).
- ⁵⁴M. Rangamani y T. Takayanagi, *Holographic entanglement entropy* (Springer, 2017).
- ⁵⁵F. Villegas, “Agujeros negros en el espacio-tiempo anti-de Sitter (AdS)”, *Revista de Investigación de Física* **25**, 49-53 (2022).
- ⁵⁶P. Calabrese y J. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory”, *Journal of statistical mechanics: theory and experiment* **2004**, P06002 (2004).
- ⁵⁷C. Holzhey, F. Larsen y F. Wilczek, “Geometric and renormalized entropy in conformal field theory”, *Nuclear physics b* **424**, 443-467 (1994).
- ⁵⁸T. Faulkner, A. Lewkowycz y J. Maldacena, “Quantum corrections to holographic entanglement entropy”, *Journal of High Energy Physics* **2013**, 1-18 (2013).
- ⁵⁹N. Engelhardt y A. C. Wall, “Quantum extremal surfaces: holographic entanglement entropy beyond the classical regime”, *Journal of High Energy Physics* **2015**, 1-27 (2015).
- ⁶⁰I. Takeuchi y S. E. Lofland, “Determination of Phase Diagrams Involving Magnetic Transitions”, en *Methods for Phase Diagram Determination* (Elsevier, 2007), págs. 383-III.
- ⁶¹M. Mézard, G. Parisi y M. A. Virasoro, *Spin glass theory and beyond: An Introduction to the Replica Method and Its Applications*, vol. 9 (World Scientific Publishing Company, 1987).
- ⁶²M. Mezard y A. Montanari, *Information, physics, and computation* (Oxford University Press, 2009).
- ⁶³M. Roos, *Introduction to cosmology* (John Wiley & Sons, 2015).
- ⁶⁴D. Grumiller, W. Kummer y D. Vassilevich, “Dilaton gravity in two dimensions”, *Physics Reports* **369**, 327-430 (2002).
- ⁶⁵R. Jackiw y C. Teitelboim, “Quantum theory of gravity”, Adam Hilger, Bristol (1984).
- ⁶⁶C. Teitelboim, “Gravitation and hamiltonian structure in two spacetime dimensions”, *Physics Letters B* **126**, 41-45 (1983).
- ⁶⁷C. Teitelboim, “Supergravity and hamiltonian structure in two spacetime dimensions”, *Physics Letters B* **126**, 46-48 (1983).
- ⁶⁸C. Teitelboim, “Remarks on the quantum mechanics of the relativistic string”, *Physics Letters B* **126**, 49-53 (1983).

- ⁶⁹R. Jackiw, “Lower dimensional gravity”, Nuclear Physics B **252**, 343-356 (1985).
- ⁷⁰J. D. Brown, *Lower dimensional gravity* (World Scientific, 1988).
- ⁷¹A. Almheiri, R. Mahajan, J. Maldacena e Y. Zhao, “The Page curve of Hawking radiation from semiclassical geometry”, Journal of High Energy Physics **2020**, 1-24 (2020).
- ⁷²S. W. Hawking, “Black hole explosions?”, Nature **248**, 30-31 (1974).
- ⁷³V. E. Hubeny, M. Rangamani y T. Takayanagi, “A covariant holographic entanglement entropy proposal”, Journal of High Energy Physics **2007**, 062 (2007).
- ⁷⁴P. Hayden y G. Penington, “Learning the alpha-bits of black holes”, Journal of High Energy Physics **2019**, 1-55 (2019).
- ⁷⁵B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari et al., “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger”, Physical review letters **116**, 061102 (2016).
- ⁷⁶K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, R. Azulay, A.-K. Bacsko, D. Ball, M. Baloković, J. Barrett, D. Bintley et al., “First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole”, The Astrophysical Journal Letters **875**, L4 (2019).
- ⁷⁷C. R. Argüelles, M. F. Mestre, E. Becerra-Vergara, V. Crespi, A. Krut, J. Rueda y R. Ruffini, “What does lie at the Milky Way centre? Insights from the S2-star orbit precession”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters **511**, L35-L39 (2022).
- ⁷⁸G. Penington, “Entanglement wedge reconstruction and the information paradox”, Journal of High Energy Physics **2020**, 1-84 (2020).
- ⁷⁹M. Ohya y D. Petz, *Quantum entropy and its use* (Springer Science & Business Media, 2004).
- ⁸⁰Wikipedia contributors, *Euler characteristic — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler_characteristic&oldid=1156814904, [Online; accessed 6-June-2023], 2023.
- ⁸¹Z. Yang, “The quantum gravity dynamics of near extremal black holes”, Journal of High Energy Physics **2019** (2019).
- ⁸²D. Harlow y D. Jafferis, “The factorization problem in Jackiw-Teitelboim gravity”, Journal of High Energy Physics **2020**, 1-32 (2020).
- ⁸³S. Weinberg, *The quantum theory of fields: Volume 1, foundations* (Cambridge university press, 2005).
- ⁸⁴G. Livan, M. Novaes y P. Vivo, “Introduction to random matrices theory and practice”, Monograph Award **63**, 54-57 (2018).
- ⁸⁵S. Rabinowitz, “How to find the square root of a complex number”, Mathematics and Informatics Quarterly **3**, 126 (1993).

- ⁸⁶D. N. Page, “Average entropy of a subsystem”, *Physical review letters* **71**, 1291 (1993).
- ⁸⁷P. Nicolini, “Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review”, *International Journal of Modern Physics A* **24**, 1229-1308 (2009).
- ⁸⁸S. Ansoldi, P. Nicolini, A. Smailagic y E. Spallucci, “Non-commutative geometry inspired charged black holes”, *Physics Letters B* **645**, 261-266 (2007).
- ⁸⁹S. A. Alavi, “Reissner-Nordstrom black hole in noncommutative spaces”, *arXiv preprint arXiv:0909.1688* (2009).
- ⁹⁰A. González, R. Linares, M. Maceda y O. Sánchez-Santos, “Thermodynamics of a higher dimensional noncommutative inspired anti-de Sitter-Einstein-Born-Infeld black hole”, *International Journal of Theoretical Physics* **57**, 2041-2063 (2018).
- ⁹¹R. Linares, M. Maceda y D. Martínez-Carbajal, “Test particle motion in the Born-Infeld black hole”, *Physical Review D* **92**, 024052 (2015).
- ⁹²C.-W. Tong, D.-H. Du y J.-R. Sun, “Island of Reissner-Nordström anti-de Sitter black holes in the large d limit”, *arXiv preprint arXiv:2306.06682* (2023).
- ⁹³S. Chandrasekhar y K. S. Thorne, *The mathematical theory of black holes*, 1985.
- ⁹⁴K. Hashimoto, N. Iizuka e Y. Matsuo, “Islands in Schwarzschild black holes”, *Journal of High Energy Physics* **2020**, 1-21 (2020).
- ⁹⁵H. Casini y M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 504007 (2009).
- ⁹⁶X. Wang, R. Li y J. Wang, “Islands and Page curves of Reissner-Nordström black holes”, *Journal of High Energy Physics* **2021**, 1-20 (2021).
- ⁹⁷C. H. Nam, “Entanglement entropy and Page curve of black holes with island in massive gravity”, *The European Physical Journal C* **82**, 381 (2022).
- ⁹⁸A. Connes y J. Lott, “Particle models and noncommutative geometry”, *Nucl. Phys. B* **18**, 29-47 (1989).
- ⁹⁹J. Madore, “Noncommutative geometry for pedestrians”, en *Classical and Quantum Nonlocality* (World Scientific, 2000), págs. 111-139.
- ¹⁰⁰J. Madore, “The fuzzy sphere”, *Classical and Quantum Gravity* **9**, 69 (1992).
- ¹⁰¹M. Dubois-Violette, J. Madore y R. Kerner, “Shadow of noncommutativity”, *Journal of Mathematical Physics* **39**, 730-738 (1998).
- ¹⁰²M. Dubois-Violette, R. Kerner y J. Madore, “Noncommutative differential geometry of matrix algebras”, *Journal of Mathematical Physics* **31**, 316-322 (1990).
- ¹⁰³N. Seiberg y E. Witten, “String theory and noncommutative geometry”, *Journal of High Energy Physics* **1999**, 032 (1999).

¹⁰⁴H Bateman y A Erdélyi, *Higher Transcendental Functions, Vol II*, MacGraw-Hill Book Company, 1953.

¹⁰⁵M. C. Sean, C. J. Matthew y R. Lisa, “Extremal limits and black hole entropy”, (2009).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00134

Matrícula: 2212801522

Desentrañando la Paradoja de la Información: Islas, Agujeros de Gusano y No Conmutatividad en Agujeros Negros de Reissner-Nordström Anti-de Sitter.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 10:00 horas del día 27 del mes de mayo del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA
DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG
DR. ORLANDO GUZMAN LOPEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

DE: JORGE LUIS HARO SANTIAGO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA BERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Román Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

[Signature]
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

VOCAL

[Signature]
DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG

SECRETARIO

[Signature]
DR. ORLANDO GUZMAN LOPEZ