



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

**“Invariantes algebraicos de ideales
binomiales de aristas”**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

Luis Eduardo Plata Correa

2222800108

luisplata591@gmail.com

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Felipe Zaldívar Cruz

Dra. Yuriko Pitones Amaro

JURADO:

Presidente:

Dr. Rafael Heraclio Villarreal Rodriguez

Secretario:

Dr. Luis Nuñez Betancourt

Vocal:

Dra. Yuriko Pitones Amaro

Iztapalapa, Ciudad de México a 25 de Noviembre de 2024

DEDICATORIA

*Para mis abuelitos:
Gabriel Juan Plata Cruz y
María del Refugio Correa Mondragón,
quienes me enseñaron a no rendirme,
y que donde quiera que estén,
seguro que están muy orgullosos.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías, CONAHCYT, por la beca que me otorgó para la realización de mis estudios de maestría durante el periodo Agosto 2022 - Junio 2024. Así mismo, quiero expresar mi más sincero agradecimiento por el apoyo y la beca otorgada para la conclusión de esta tesis, derivada del proyecto con clave CF-2023-G-33.

A mi asesor, el Dr. Felipe Zaldívar y a mi coasesora, la Dra. Yuriko Pitones, a quienes les extiendo mi más sincero agradecimiento por toda la paciencia, empatía y enseñanzas brindadas en estos últimos dos años. Por todas las horas invertidas, todo el conocimiento y experiencia transmitidas.

A los doctores:

- Dra. Martha Álvarez Ramírez
- Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda
- Dr. Valente Santiago Vargas

por sus consejos y apoyo incondicional.

Agradezco infinitamente a mi familia. Gracias a mi hermana, Marla Plata, que siempre fue mi confidente en los momentos difíciles. A mi madre, Galdina Plata, que siempre tuvo un abrazo para animarme cuando creía que no podría más. A mi pareja, Alondra Barragan, que estuvo acompañándome en la mayor parte de este proceso de mi vida, y la cual siempre tenía las palabras adecuadas para consolarme en los momentos complicados.

Por último, a mis compañeras Mirian León y Jessica Hernández, a quienes admiro y con las que pasé muchas horas estudiando.

ÍNDICE

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Introducción	1
1. Ideales binomiales	6
1.1. Bases de Gröbner	6
1.2. Ideales binomiales de aristas	11
1.3. Resoluciones libres	17
2. El ν -número de ideales binomiales de aristas J_G	23
2.1. Ideales de aristas y el ν -número	23
2.2. ν -número de ideales binomiales	25
2.3. El ν -número de gráficas cerradas	36
3. Otros resultados	41
3.1. Gráficas multipartitas completas	41
3.2. Otros ejemplos	43
4. El ν -número de gráficas cíclicas. Perspectivas	44
Conclusión	51
Referencias	52
Índice alfabético	53

INTRODUCCIÓN

Esta tesis se basó principalmente en el artículo de Delio Jaramillo y Lisa Seccia [11], en el cual se estudia el ν -número de un ideal graduado en el anillo de polinomios $S = K[x_1, \dots, x_n]$ sobre un campo K . El ν -número es un invariante algebraico introducido por Cooper et al. [4], y que originalmente es motivado por la teoría algebraica de códigos, para investigar el comportamiento de la función de distancia mínima de códigos proyectivos de tipo Reed-Muller. En esta tesis, los ideales binomiales J_G asociados a una gráfica simple G y la relación que se establece entre su ν -número y la cardinalidad mínima del conjunto de dominación conexas de G . En particular, se demuestra que la localización del ν -número en uno de los ideales primos mínimos del ideal binomial de aristas J_G coincide con el número de dominación conexas de G . Con esto, obtenemos una cota superior para el ν -número de estos ideales. Luego, partiendo de algunos resultados ya conocidos sobre ideales de aristas, analizamos cómo se comporta el ν -número de J_G cuando G es una gráfica cerrada. Por último, como aportación a este tema de investigación, damos un avance a una Conjetura propuesta por D. Jaramillo y L. Seccia [11], analizamos cómo se comporta el ν -número de J_G cuando G es una gráfica cíclica de orden $n \geq 4$. La estructura del contenido de esta tesis se describe a continuación.

En el Capítulo 1, estudiamos principalmente los ideales binomiales J_G que están naturalmente asociados a una gráfica simple G , y los ideales primos $P_T(G)$, que resultarán ser los ideales primos mínimos de J_G . Estos ideales los definimos en la Sección 1.2 y están dados como sigue:

- Sea $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ el anillo de polinomios con $2n$ variables y G una gráfica con vértices $[n] = \{1, \dots, n\}$. El ideal binomial de aristas G está dado por

$$J_G = \langle f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i : \{i, j\} \in E(G), i < j \rangle.$$

- Sea una gráfica simple G con vértices $[n]$. Dado un subconjunto $T \subseteq [n]$, un conjunto $W = [n] \setminus T$, y sean $G_1, \dots, G_{c(T)}$ las componentes conexas de G_W , donde G_W es la subgráfica de G inducida por W y $c(T)$ denota el número de componentes conexas que se generan. Para cada G_i denotamos por $\tilde{G}_i$ a la gráfica completa sobre $V(G_i)$ y definimos el ideal

$$P_T(G) = \left\langle \bigcup_{i \in T} \{x_i, y_i\}, J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_{c(T)}} \right\rangle.$$

En la Sección 1.1, introducimos bases de Gröbner respecto a un orden monomial. En particular, nos interesa el orden lexicográfico, pues en este caso las gráficas cuyo ideal binomial de aristas tiene una base de Gröbner cuadrática se denominan gráficas cerradas. La caracterización es la siguiente.

Teorema 1.25. Sea G una gráfica con vértices $[n]$, y sea $\prec$ el orden de lexicográfico en el anillo de polinomios $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ inducido por

$$x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n \succ y_1 \succ \dots \succ y_n.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) Los generadores de J_G forman una base de Gröbner.
- (2) Para toda arista $\{i, j\}$ y $\{k, \ell\}$ con $i < j$ y $k < \ell$, se tiene $\{j, \ell\} \in E(G)$ si $i = k$, y $\{i, k\} \in E(G)$ si $\ell = j$.

En la Sección 1.3, definimos otro invariante muy conocido desde principios del siglo XX, la regularidad de Castelnuovo-Mumford. Para definir este invariante, consideremos $I \subset S$ un ideal graduado, y sea $F_\bullet$ una resolución mínima graduada de S/I como un S -módulo:

$$F_\bullet : 0 \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{t,j}} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1,j}} \rightarrow S \rightarrow S/I.$$

La regularidad de Castelnuovo-Mumford de S/I esta dada por:

$$\text{reg}(S/I) = \max\{j - i : \beta_{i,j} \neq 0\}.$$

En particular se tiene que $\text{reg}(I) = \text{reg}(S/I) + 1$.

Cerramos el Capítulo con el Teorema de Kazunori Matsuda y Satoshi Murai [15, Teorema 1.1], quienes demuestran una estrecha relación entre la regularidad del ideal J_G , la longitud más larga de un camino inducido de G y su número de vértices.

Teorema 1.41. Sea G una gráfica simple con vértices $[n]$ y sea ℓ_G la longitud del camino inducido más largo de G . Entonces

$$\ell_G + 1 \leq \text{reg}(J_G) \leq n.$$

Además, si G es cerrada, entonces $\text{reg}(J_G) = \text{reg}(\text{in}_{<}(J_G)) = \ell_G + 1$.

En el Capítulo 2, definiremos el v -número para un ideal I graduado del anillo de polinomios en n variables. Sea K un campo y $S = K[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ el anillo de polinomios en n variables con su graduación estándar e I un ideal homogéneo graduado de S . El v -número de I está definido por:

$$v(I) = \min\{d \geq 0 : \exists f \in S_d \text{ y } \mathfrak{p} \in \text{Ass}(I) \text{ con } (I : f) = \mathfrak{p}\}.$$

Podemos definir el v -número de $I \subset S$ localmente para cada primo asociado $\mathfrak{p}$ de I como:

$$v_{\mathfrak{p}}(I) = \min\{d \geq 0 : \exists f \in S_d \text{ con } (I : f) = \mathfrak{p}\}.$$

Esta definición local del v -número nos permite centrarnos en el caso de gráficas completas, donde, se sabe que $J_{\mathcal{K}_n}$ es un primo mínimo de J_G . Se sigue de la definición que, el v -número de J_G está acotado superiormente por su v -número en $J_{\mathcal{K}_n}$.

En la Sección 2.2, introducimos el concepto de conjunto de dominación conexa. Un conjunto de dominación conexa (CDS) de una gráfica conexa G , es un subconjunto D de los vértices de G tal que D induce una gráfica conexa G_D , y cada vértice en $V(G) \setminus D$ es adyacente a por lo menos un vértice en D . El mínimo de la cardinalidad de los conjuntos de dominaciones conexas se llama el número de dominación conexa, denotado por $\gamma_c(G)$. Resulta ser que, el v -número del ideal J_G en $J_{\mathcal{K}_n}$ coincide con el número de dominación conexa de G . Esta relación implica el siguiente Teorema.

Teorema 2.20. Sea G una gráfica conexa con vértices $[n]$ y J_G su ideal binomial de aristas. Entonces, la localización del v -número de J_G en $J_{\mathcal{K}_n}$ viene dada por

$$v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G) = \begin{cases} \min\{|B| : B \in \mathcal{D}_c(G)\} = \gamma_c(G) & \text{si } G \neq \mathcal{K}_n \\ 0 & \text{si } G = \mathcal{K}_n, \end{cases}$$

donde $\mathcal{D}_c(G) = \{B \subseteq [n] : \forall \{i, j\} \notin E(G), \exists \text{ un camino } P : i, i_1, \dots, i_s, j \text{ tal que } \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq B\}$.

En la Sección 2.3, analizamos el v -número de J_G cuando G es una gráfica cerrada. Notamos que el ideal inicial de J_G es igual al ideal de aristas de una gráfica bipartita H_G , que denominaremos gráfica inicial. Con esto podremos aplicar el siguiente Teorema, el cual se demuestra en [12].

Teorema 2.26. Sea G una gráfica conexa. Si $I(G)$ no es primo, entonces

$$v(I(G)) = \min\{|A| : A \in \mathcal{A}_G\},$$

donde $\mathcal{A}_G = \{A : A \text{ es un conjunto estable de } G \text{ y } N_G(A) \text{ es una cubierta de vértices mínima de } G\}$.

Por otro lado, un conjunto $\{e_1, \dots, e_r\}$ de aristas disjuntas por pares de una gráfica G es un apareamiento inducido si las únicas aristas de G contenidas en $\bigcup_{i=1}^r e_i$ son $e_1, \dots, e_r$. El número de apareamiento inducido $\text{im}(G)$, es el número de aristas con el mayor apareamiento inducido. Mientras que, un clan de una gráfica G es un subconjunto no vacío $C \subseteq V(G)$ tal que C induce una gráfica completa. Una cubierta de clanes de G es una familia $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_s\}$ de clanes de G tal que para todo $v \in V(G)$ existe un clan $C \in \mathcal{C}$ con $v \in C$. El número de cubiertas de clanes de G , denotado

por $\theta(G)$, es el número mínimo de clanes en G necesario para cubrir el conjunto de vértices de G , es decir,

$$\theta(G) = \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una cubierta de clanes de } G\}.$$

Introduciendo el número de apareamiento inducido y el número mínimo de clanes, junto con los Teoremas 1.41 y 2.26 obtenemos un Teorema para gráficas cerradas, el cual relaciona a todos estos elementos.

Teorema 2.31. Sea $G \neq \mathcal{K}_n$ una gráfica conexa cerrada y sea H_G su gráfica inicial. Entonces

$$v(J_G) < \theta(G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = v(I(H_G)) \leq \text{im}(H_G) = \ell_G = \text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_G)).$$

Si $G = \mathcal{K}_n$, entonces $0 = v(J_G) < v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = \text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_G)) = 1$.

El Capítulo 2 finaliza con ejemplos y cálculos en Macaulay2 que comprueban los resultados obtenidos.

En el Capítulo 3, se estudian las gráficas $G = \mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}$, las cuales se llaman gráficas r -partitas completas y se da un resultado general el cuál es suficiente para conocer el valor del v -número de los ideales binomiales de aristas $J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}$.

Proposición 3.3. Sea $G = \mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}$ con $a_\ell = |V_\ell|$ y $a_1 \leq \dots \leq a_r$ una gráfica r -partita completa con conjunto de vértices $V = \bigsqcup_{\ell=1}^r V_\ell = [n]$. Entonces

$$v(J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 = 1 \\ 2 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Concluimos el Capítulo 3 con ejemplos que muestran la necesidad de considerar gráficas cerradas para que el Teorema 2.31 se cumpla, también en los ejemplos podemos notar que el v -número de una gráfica conexa más general (no necesariamente cerrada), preserva la desigualdad $v(J_G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G)$.

Estos ejemplos motivan la pregunta, ¿se cumple la desigualdad $v(J_G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G)$ en algún caso más general? Esta pregunta abierta es propuesta por D. Jaramillo y L. Seccia [11], y se Conjetura que la respuesta es afirmativa.

En el Capítulo 4, comenzamos con más ejemplos de gráficas conexas (más generales) los cuales refuerzan la Conjetura previa del Capítulo 3. Además, podemos notar que para gráficas cíclicas, es decir, gráficas que son ciclos, se cumple que $v(J_G) = v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = \text{reg}(S/J_G)$. Más aún, usando Macaulay2 se verifica que para gráficas cíclicas, se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_{C_n}) = v(J_{C_n}) = v(\text{in}_{\prec}(J_{C_n})) = n - 2 = \text{reg}(S/J_{C_n}) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_{C_n})).$$

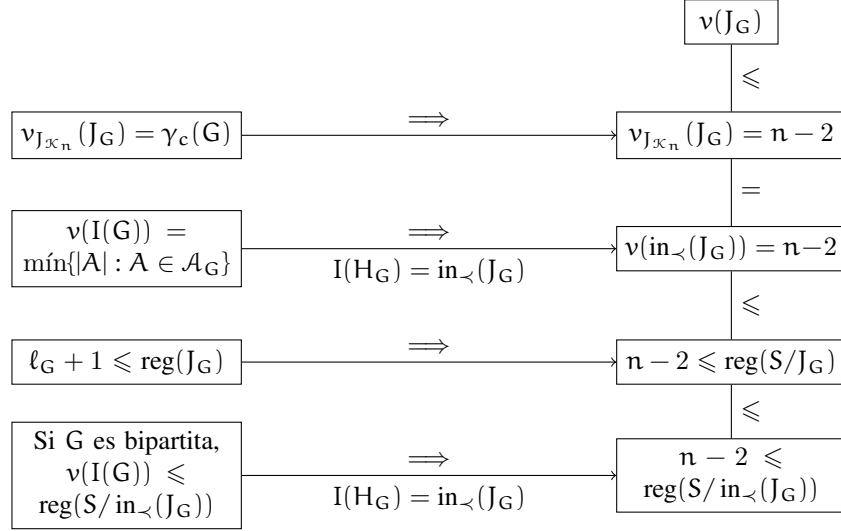
Esta cadena de igualdades se presenta como Conjetura en [11, Sección 4.3]. El siguiente Teorema es una aportación a este tema de investigación.

Teorema 4.10. Sea $G = C_n$ un ciclo con vértices $[n]$ de orden $n \geq 4$ y H_{C_n} su gráfica inicial. Entonces,

$$v(J_{C_n}) \leq v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_{C_n}) = v(\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(J_{C_n})) = n - 2 \leq \text{reg}(S/J_{C_n}) \leq \text{reg}(S/\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(J_{C_n})).$$

La demostración de este Teorema podemos resumirla con el diagrama que se muestra a continuación.

Sean $G = C_n$ un ciclo de orden $n \geq 4$.



La última desigualdad del Teorema es una implicación directa del Teorema 4.8 de [18].

Teorema 4.8. Sea G una gráfica bipartita con conjunto de vértices $[n] = X \cup Y$ tal que $X \cap Y = \emptyset$ y con $I(G)$ el ideal de aristas de G . Entonces, $v(I(G)) \leq \text{im}(G)$. Además, tenemos $v(I(G)) \leq \text{reg}(S/I(G))$.

Para cerrar el Capítulo 4, se presenta un Contraejemplo a una de las igualdades de la Conjetura de gráficas cíclicas. Además, se aborda un resultado de Deblina Dey, A. V. Jayanthan y Kamalesh Saha [2], quienes estudiaron el mismo problema desde otra perspectiva y propusieron una nueva Conjetura sobre el v -número de gráficas cíclicas. En esta tesis, también se sugiere una Conjetura más general sobre el v -número de ideales binomiales de gráficas cíclicas.

Conjetura 4.13. Sea $G = C_n$ un ciclo de orden n . Entonces

$$v(J_{C_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3 \\ n - 2 & \text{si } 4 \leq n \leq 8 \\ \lceil \frac{2n}{3} \rceil & \text{si } n \geq 9. \end{cases}$$

El caso $n = 3$ es el único demostrado en esta tesis, mientras que los casos $4 \leq n \leq 9$ se verifican con Macaulay2, el resto es parte de la Conjetura propuesta en [2, Conjetura 4.11].

Notación. A lo largo de esta tesis se estará introduciendo notación específica, que se explicará en su debido tiempo, sin embargo, parte de la notación estándar en toda la tesis es la siguiente:

- K denotará siempre un campo arbitrario. Para los ejemplos desarrollados en Macaulay2 tomamos a $K = \mathbb{Q}$.
- Denotaremos al anillo de polinomios en $2n$ variables por $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$. En algunas ocasiones tomaremos sólo al anillo de polinomios en n variables $S = K[x_1, \dots, x_n]$, se especificará en esos casos.
- Los ideales arbitrarios de S se denotarán por I , mientras que los ideales primos de S se denotarán por $\mathfrak{p}$.
- Siempre tomaremos gráficas simples, pero las llamaremos simplemente *gráficas* y las denotaremos por G . Habitualmente consideraremos gráficas conexas que se denotarán de igual manera, pero siempre especificaremos cuando hablemos de una gráfica (simple) arbitraria o una gráfica (simple) conexas.

1. IDEALES BINOMIALES

En este Capítulo introduciremos los ideales binomiales generados por aristas, de los cuales estudiaremos su v -número en las secciones posteriores. Además se introducen conceptos básicos sobre resoluciones libres para definir la regularidad de Castelnuovo-Mumford en estos ideales. Comenzamos definiendo orden monomial y bases de Gröbner; para esta parte nos basamos principalmente en [8] y [9]. En segundo lugar, vemos conceptos de gráficas simples conocidos; para estas gráficas se definen sus ideales binomiales asociados y se dan propiedades importantes. Una referencia para el estudio de estos ideales es [9]. Concluimos el Capítulo con el Teorema principal de [15], el cual relaciona la regularidad de los ideales de aristas con el número de vértices y la longitud del camino inducido más largo de la gráfica asociada al ideal. Finalmente, se da un resultado para árboles [13, Teorema 4.1].

1.1. Bases de Gröbner. Un monomio u en las variables $x_1, \dots, x_n$ es un producto de la forma $u = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ donde $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Usaremos la notación $u = x^a$, donde $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. El grado de u es $\sum_{i=1}^n a_i$. Sea $\mathcal{M}_n \subset K[x_1, \dots, x_n]$ el conjunto de monomios en las variables $x_1, \dots, x_n$. Un *ideal monomial* es un ideal que es generado por monomios. Sea $M \subseteq \mathcal{M}_n$ distinto del vacío. Un monomio $u \in M$ se llama *elemento mínimo* de M si para $v \in M$ tal que v divide a u , entonces $v = u$.

Ejemplo 1.1. (a) Sea $n = 1$. Entonces un elemento mínimo de un conjunto no vacío M de $\mathcal{M}_1$ es único. De hecho, si q es el grado mínimo de los monomios que pertenecen a M , entonces el monomio x_1^q es el único elemento mínimo de M .
 (b) Sea $n = 2$ y $\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{M}_2$. Entonces M tiene una cantidad finita de elementos mínimos. En efecto, supongamos que $u_1 = x_1^{a_1} x_2^{a_2}, u_2 = x_1^{a_2} x_2^{b_2}, \dots$ son elementos mínimos de M con $a_1 \leq a_2 \leq \dots$. Si $a_i = a_{i+1}$, entonces, u_i o u_{i+1} no pueden ser mínimos. Por lo tanto $a_1 < a_2 < \dots$. Como u_i no puede dividir a u_{i+1} , tenemos que $b_i > b_{i+1}$. Así, $b_1 > b_2 > \dots$. Por lo tanto el número de elementos mínimos de M es finito.

Lema 1.2 (Lema de Dickson). [10, Teorema 1.2] *El conjunto de elementos mínimos de un conjunto no vacío M de $\mathcal{M}_n$ es finito.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n . Notemos que del Ejemplo 1.1 el Lema es cierto para $n = 1, 2$. Sea $n > 2$ y supongamos que el Lema se cumple para $n - 1$. Sea $y = x_n$ y N el conjunto de monomios u en las variables $x_1, \dots, x_{n-1}$ que satisfacen la condición de que existe $b \geq 0$ con $uy^b \in M$. Es claro que $N \neq \emptyset$, pues $u \in M$. De la hipótesis de inducción, los elementos mínimos de N son finitos. Sean $u_1, \dots, u_s$ denota los elementos mínimos de N . Entonces de la definición de N , se tiene que para cada u_i , existe $b_i \geq 0$ con $u_i y^{b_i} \in M$. Sea $b = \max\{b_1, \dots, b_s\}$. Además, dado $0 \leq c < b$ definimos el subconjunto $N_c \subset N$ como

$$N_c = \{u \in N : uy^c \in M\}.$$

Por la hipótesis de inducción, el número de elementos mínimos de N_c es finito, y los denotamos por $u_1^{(c)}, u_2^{(c)}, \dots, u_s^{(c)}$. Entonces un monomio que pertenece a M puede ser dividido por uno de los monomios listados a continuación:

$$\begin{aligned} & u_1 y^{b_1}, \dots, u_s y^{b_s} \\ & u_1^{(0)}, \dots, u_{s_0}^{(0)} \\ & u_1^{(1)} y, \dots, u_{s_1}^{(1)} y \\ & \dots \\ & u_1^{(b-1)} y^{b-1}, \dots, u_{s_{b-1}}^{(b-1)} y^{b-1}. \end{aligned}$$

Además, para un monomio $w = uy^e \in M$, donde u es un monomio en $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, se tiene $u \in N$. Por lo tanto si $e \geq b$, entonces a w lo divide uno de los $u_1 y^{b_1}, \dots, u_s y^{b_s}$. Por otra parte, si $0 \leq e < b$, dado que $u \in N_e$, se sigue que w puede dividirse por uno de los $u_1 y^{(e)}, \dots, u_{s_e}^{(e)} y^e$.

Por tanto, todo elemento mínimo de M debe aparecer en la lista anterior de monomios. En particular, el número de elementos de M es finito. $\square$

Definición 1.3. Sea $S = K[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre el campo K y $\mathcal{M}_n$ el conjunto de monomios en las variables $x_1, \dots, x_n$. Un *orden monomial* en S es un orden total $\prec$ en $\mathcal{M}_n$ tal que

- (i) $1 \prec u$ para todo $1 \neq u \in \mathcal{M}_n$.
- (ii) Si $u, v \in \mathcal{M}_n$ y $u \prec v$, entonces $uw \prec vw$ para toda $w \in \mathcal{M}_n$.

Ejemplo 1.4. Sea $u = x^a$ y $v = x^b$ monomios. Definimos el *orden lexicográfico* $\prec_{\text{lex}}$ en $\mathcal{M}_n$. Decimos que $u \prec_{\text{lex}} v$ si

$$\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{o} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

y la componente no nula más a la izquierda del vector $b - a = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$ es positiva. El orden $\succ_{\text{lex}}$ es un orden monomial sobre $S = K[x_1, \dots, x_n]$ inducido por la ordenación

$$x_1 \succ_{\text{lex}} x_2 \succ_{\text{lex}} \dots \succ_{\text{lex}} x_n.$$

Subejemplo 1.5. Para el orden lexicográfico se tiene

$$x_2^{20} \prec_{\text{lex}} x_1 \quad \text{y} \quad x_1^4 x_3^{100} \prec_{\text{lex}} x_1^4 x_2.$$

Sea $f \in S$. El *soporte* del polinomio $f = \sum_{j=1}^t c_j u_j$, con $c_j \in K$, es el conjunto de monomios $\text{supp}(f) = \{u_j : c_j \neq 0\}$. El *monomio inicial*, $\text{in}_{\prec}(f)$ de $f \neq 0$ es el monomio mayor $u \in \text{supp}(f)$ con respecto al orden monomial $\prec$. El coeficiente c de $\text{in}_{\prec}(f)$ lo llamamos *coeficiente principal*. Si $f, g \in S$ son polinomios no cero. Entonces $\text{in}_{\prec}(fg) = \text{in}_{\prec}(f) \cdot \text{in}_{\prec}(g)$. En particular, si u es un monomio, entonces $\text{in}_{\prec}(ug) = u \cdot \text{in}_{\prec}(g)$.

Ejemplo 1.6. Sea $S = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ y $f = x_1 x_4 - x_2 x_3 \in S$. Entonces con el orden monomial $\prec_{\text{lex}}$ se tiene que $\text{supp}(f) = \{x_1 x_4, x_2 x_3\}$ y $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(f) = x_1 x_4$.

Sea I un ideal de un anillo de polinomios S con $I \neq \langle 0 \rangle$. El *ideal inicial* de I con respecto a un orden monomial $\prec$ es el ideal monomial $\text{in}_{\prec}(I) = \langle \text{in}_{\prec}(f) : f \in I, f \neq 0 \rangle$. Además, notemos que si $I = \langle f, g \rangle$ en general $\langle \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(f), \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(g) \rangle \neq \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(I)$, ya que si consideramos $f, g \in K[x_1, \dots, x_7]$ dados por $f = x_1 x_4 - x_2 x_3, g = x_4 x_7 - x_5 x_6$ e $I = \langle f, g \rangle$, entonces $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(f) = x_1 x_4, \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(g) = x_4 x_7$. Sea $h = x_7 f - x_1 g = x_1 x_5 x_6 - x_2 x_3 x_7$. Dado $h \in I$, se sigue que $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(h) = x_1 x_5 x_6 \in \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(I)$. Sin embargo, $x_1 x_5 x_6 \notin \langle x_1 x_4, x_4 x_7 \rangle$, por tanto

$$\langle \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(f), \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(g) \rangle = \langle x_1 x_4, x_4 x_7 \rangle \neq \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(I).$$

Definición 1.7. Fijemos un orden monomial $\prec$ en S . Sea I un ideal de S con $I \neq \langle 0 \rangle$. Entonces una *base de Gröbner* de I con respecto a $\prec$ es un subconjunto $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\} \subset I$ tal que $\{\text{in}_{\prec}(g_1), \dots, \text{in}_{\prec}(g_s)\}$ es un sistema de generadores monomiales del ideal inicial $\text{in}_{\prec}(I)$.

Ejemplo 1.8. Consideremos el ideal $I = \langle x^2 - 1, x + y, y^2 - 1 \rangle$ en $K[x, y]$. Tenemos que $\mathcal{G} = \{x + y, y^2 - 1\}$ con el orden $\prec_{\text{lex}}$, inducido por $x \succ y$, es una base de Gröbner de I ya que se tiene que $\{\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(x + y), \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(y^2 - 1)\} = \{x, y^2\}$ y entonces $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(I) = \langle x, y^2 \rangle = \langle x^2, x, y^2 \rangle$ pues $x^2 = x \cdot x$.

Decimos que la ecuación $f = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_s g_s + f'$ es una *expresión estándar* de f con respecto a $g_1, \dots, g_s$ y f' es residuo de f con respecto a $g_1, g_2, \dots, g_s$. Diremos que f se *reduce a cero* con respecto a $g_1, g_2, \dots, g_s$ si existe una expresión estándar de f con $f' = 0$.

Lema 1.9. [10, Lema 1.23] Si un conjunto finito $\{g_1, g_2, \dots, g_s\} \subset S$ es una base de Gröbner del ideal $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$, entonces todo polinomio $0 \neq f \in S$ tiene un único residuo con respecto a $g_1, \dots, g_s$.

Demostración. Supongamos que los polinomios f' y f'' son residuos de f con respecto a $g_1, \dots, g_s$. Supongamos que $f' \neq f''$, entonces $0 \neq f' - f'' \in I$ y así el monomio inicial $w = \text{in}_<(f' - f'') \in \text{in}_<(I)$. Por otra parte, dado que w pertenece a $\text{supp}(f')$ o $\text{supp}(f'')$, se tiene que w no puede pertenecer a $\langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle$. Sin embargo, dado que $\{g_1, \dots, g_s\}$ es una base de Gröbner, entonces el ideal inicial $\text{in}_<(I)$ coincide con $\langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle$. Lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 1.10. [10, Corolario 1.24] *Supongamos que el conjunto $\{g_1, \dots, g_s\} \subset S$ es una base de Gröbner del ideal $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ de S . Entonces un polinomio $0 \neq f \in S$ pertenece a I si y sólo si el único residuo de f con respecto a $g_1, \dots, g_s$ es cero.*

Demostración. En general, si un residuo de un polinomio $0 \neq f \in S$ con respecto a $g_1, \dots, g_s$ es cero, entonces $f \in I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$.

Ahora, supongamos que $0 \neq f \in S$ pertenece a I y $f = f_1 g_1 + \dots + f_s g_s + f'$. Como $f \in I$ entonces $f' \in I$. Si $f \neq 0$ entonces $\text{in}_<(f') \in \text{in}_<(I)$. Dado que $\{g_1, \dots, g_s\}$ es una base de Gröbner de I , se tiene que $\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle$. Sin embargo, como f' es un residuo de f , entonces $\text{in}_<(f') \in \text{supp}(f)$ no puede estar en $\langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle$. Esto es una contradicción. $\square$

Sean f y g polinomios no cero de S con c_f y c_g los coeficientes principales de $\text{in}_<(f)$ y $\text{in}_<(g)$ respectivamente. Entonces el polinomio

$$\mathcal{S}(f, g) = \frac{\text{mcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g))}{c_f \text{in}_<(f)} f - \frac{\text{mcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g))}{c_g \text{in}_<(g)} g$$

se llama el $\mathcal{S}$ -polinomio de f y g .

Lema 1.11. [10, Lema 1.27] *Sean $f, g \in S$ no cero y supongamos que $\text{in}_<(f)$ y $\text{in}_<(g)$ son primos relativos, es decir, $\text{mcm}(\text{in}_<(f), \text{in}_<(g)) = \text{in}_<(f) \text{in}_<(g)$. Entonces $\mathcal{S}(f, g)$ se reduce a cero con respecto a f, g .*

Demostración. Para simplificar la notación, supongamos que el coeficiente de $\text{in}_<(f)$ en f y de $\text{in}_<(g)$ en g es 1. Sea $f = \text{in}_<(f) + f_1$ y $g = \text{in}_<(g) + g_1$. Como $\text{in}_<(f)$ y $\text{in}_<(g)$ son primos relativos, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, g) &= \text{in}_<(g)f - \text{in}_<(f)g \\ &= (g - g_1)f - (f - f_1)g \\ &= f_1 g - g_1 f. \end{aligned}$$

Notemos que $\text{in}_<(f_1) \text{in}_<(g)$ no puede coincidir con $\text{in}_<(g_1) \text{in}_<(f)$. En efecto, si tenemos que $\text{in}_<(f_1) \text{in}_<(g) = \text{in}_<(g_1) \text{in}_<(f)$, entonces como $\text{in}_<(f)$ y $\text{in}_<(g)$ son primos relativos, se sigue que $\text{in}_<(f)$ divide a $\text{in}_<(f_1)$. Sin embargo, como $\text{in}_<(f_1) \prec \text{in}_<(f)$, no es posible. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\text{in}_<(f_1 g) \prec \text{in}_<(g_1 f)$, entonces $\text{in}_<(\mathcal{S}(f, g)) = \text{in}_<(f g_1)$. Como $\mathcal{S}(f, g) = f_1 g - g_1 f$ es una expresión estándar de $\mathcal{S}(f, g)$ con respecto a f, g con residuo 0. Se tiene que $\mathcal{S}(f, g)$ se reduce a cero con respecto a f, g . $\square$

Lema 1.12. [10, Lema 1.28] *Sea w un monomio y $f_1, \dots, f_s$ polinomios con $\text{in}_<(f_i) = w$ para toda $1 \leq i \leq s$ y $g = \sum_{i=1}^s b_i f_i$, con $b_i \in K$ para toda i y supongamos que $\text{in}_<(g) \prec w$. Entonces existe $c_{jk} \in K$ con*

$$g = \sum_{1 \leq k, s \leq s} c_{jk} \mathcal{S}(f_i, f_k).$$

Demostración. Sea c_i el coeficiente del monomio $w = \text{in}_<(f_i)$ en el polinomio f_i . Entonces $\sum_{i=1}^s b_i c_i = 0$. Sea $g_i = \frac{1}{c_i} f_i$. Entonces $S(f_j, f_k) = g_j - g_k$ con $1 \leq j, k \leq s$. Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s b_i f_i &= \sum_{i=1}^s b_i c_i g_i \\ &= b_1 c_1 (g_1 - g_2) + (b_1 c_1 + b_2 c_2)(g_2 - g_3) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)(g_3 - g_4) \\ &\quad + \cdots + (b_1 c_1 + \cdots + b_{s-1} c_{s-1})(g_{s-1} - g_s) + (b_1 c_1 + \cdots + b_s c_s) g_s. \end{aligned}$$

Así $\sum_{i=1}^s b_i c_i = 0$, se sigue que

$$\sum_{i=1}^s b_i f_i = \sum_{i=2}^s (b_1 c_1 + \cdots + b_{i-1} c_{i-1}) S(f_{i-1}, f_i). \quad \square$$

Teorema 1.13 (Criterio de Buchberger). [10, Teorema 1.29] Sea $I \subset S$ un ideal y $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ un sistema de generadores de I . Entonces $\mathcal{G}$ es una base de Gröbner de I si y sólo si para cada $i \neq j$, $S(g_i, g_j)$ se reduce a cero con respecto a $g_1, \dots, g_s$.

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ un sistema de generadores de I . Si $\mathcal{G}$ es base de Gröbner, dado el polinomio $S(g_i, g_j) \in \langle g_i, g_j \rangle$, tenemos en particular que $S(g_i, g_j) \in I$. Del Corolario 1.10 se tiene que $S(g_i, g_j)$ se reduce a cero con respecto a $g_1, \dots, g_s$.

Sea $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ es un sistema de generadores de I que satisface, para cada $i \neq j$, $S(g_i, g_j)$ se reduce a cero con respecto a $g_1, \dots, g_s$.

Primer paso: Si $0 \neq f \in I$, entonces escribimos el conjunto de sucesiones $\mathcal{H}_f = \{(h_1, \dots, h_s) : f = \sum_{i=1}^s h_i g_i \text{ con } h_i \in S\}$ y dado que $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ es un sistema de generadores de I , se sigue que $\mathcal{H}_f \neq \emptyset$. Asociando cada sucesión $(h_1, h_2, \dots, h_s) \in \mathcal{H}_f$ con el monomio $\delta_{(h_1, \dots, h_s)} = \max\{\text{in}_<(h_i g_i) : h_i g_i \neq 0\}$. Entonces $\text{in}_<(f) \preceq \delta_{(h_1, \dots, h_s)}$. Consideremos particularmente el monomio

$$\delta_f = \min_{(h_1, \dots, h_s) \in \mathcal{H}_f} \delta_{(h_1, \dots, h_s)}.$$

Entonces por la expresión $\text{in}_<(f) \preceq \delta_{(h_1, \dots, h_s)}$ se tiene que $\text{in}_<(f) \preceq \delta_f$.

Segundo paso: Supongamos que $\text{in}_<(f) = \delta_f$. Entonces, como $0 \neq f = \sum_{i=1}^s h_i g_i$, existe un $h_i g_i \neq 0$ con $\text{in}_<(f) = \text{in}_<(h_i g_i)$. En particular, $\text{in}_<(f) \in \langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle$. Por lo tanto, si podemos demostrar que $\text{in}_<(f) = \delta_f$ para cada polinomio $0 \neq f \in I$, entonces $\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle$ y $\mathcal{G}$ resultará ser una base de Gröbner de I .

Tercer paso: Ahora, supongamos que existe un polinomio $0 \neq f \in I$ con $\text{in}_<(f) \prec \delta_f$. Si podemos obtener una contradicción, entonces nuestra demostración termina.

Reescribiendo la ecuación $f = \sum_{i=1}^s h_i g_i$.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\text{in}_<(h_i g_i) = \delta_f} h_i g_i + \sum_{\text{in}_<(h_i g_i) \prec \delta_f} h_i g_i = \sum_{\text{in}_<(h_i g_i) = \delta_f} c_i \cdot \text{in}_<(h_i) g_i \\ (1.1) \quad &\quad + \sum_{\text{in}_<(h_i g_i) = \delta_f} (h_i - c_i \cdot \text{in}_<(h_i)) g_i + \sum_{\text{in}_<(h_i g_i) \prec \delta_f} h_i g_i \end{aligned}$$

ya que $h_i = c_i \cdot \text{in}_<(h_i) + (h_i - c_i \cdot \text{in}_<(h_i))$ y donde $c_i \in K$ es el coeficiente de $\text{in}_<(h_i)$ en el polinomio h_i . Un hecho crucial es que todo monomio u que pertenece al soporte de

$$\sum_{\text{in}_<(h_i g_i) = \delta_f} (h_i - c_i \cdot \text{in}_<(h_i) g_i) + \sum_{\text{in}_<(h_i g_i) \prec \delta_f} h_i g_i$$

satisface que $u \prec \delta_f$. Por lo tanto, la hipótesis que $\text{in}_<(f) \prec \delta_f$ garantiza que

$$\text{in}_<\left(\sum_{\text{in}_<(h_i g_i) = \delta_f} c_i \cdot \text{in}_<(h_i) g_i\right) \prec \delta_f.$$

Sin embargo, dado que $\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_i) = \delta_f$, se tiene que $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_i)) = \delta_f$. Entonces se deduce del Lema 1.12 que, utilizando los $\mathcal{S}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_j \mathbf{g}_j), \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k))$ con $\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_j \mathbf{g}_j) = \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k) = \delta_f$, podemos reescribir a (1.1) como sigue

$$(1.2) \quad \sum_{\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_i) = \delta_f} c_i \cdot \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_i) = \sum_{j,k} c_{jk} \mathcal{S}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_j \mathbf{g}_j), \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k))$$

donde $c_{jk} \in K$. Dado que $\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_j \mathbf{g}_j) = \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k) = \delta_f$, se sigue que

$$\mathcal{S}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_j \mathbf{g}_j), \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k)) = (1/b_j) \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_j) - (1/b_k) \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k),$$

donde b_j es el coeficiente de $\text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_j)$ en $\mathbf{g}_j$. En este caso cada monomio $\mathbf{u}$ pertenece al soporte de $\mathcal{S}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_j \mathbf{g}_j), \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k))$ que satisface $\mathbf{u} \prec \delta_f$.

Sea $\mathbf{u}_{jk} = \delta_f / \text{mcm}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_j), \text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_k))$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{jk} \mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= \left[\mathbf{u}_{jk} \frac{\text{mcm}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_j), \text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_k))}{b_j \cdot \text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_j)} \mathbf{g}_j - \frac{\text{mcm}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_j), \text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_k))}{b_k \cdot \text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_k)} \mathbf{g}_k \right] \\ &= \delta_f \left[\frac{1}{b_j \cdot \text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_j)} \mathbf{g}_j - \frac{1}{b_k \cdot \text{in}_{\prec}(\mathbf{g}_k)} \mathbf{g}_k \right] \\ &= \frac{\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_j)}{b_j} \mathbf{g}_j - \frac{\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k)}{b_k} \mathbf{g}_k \\ &= \mathcal{S}(\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_j \mathbf{g}_j), \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k)). \end{aligned}$$

Usando la igualdad (1.2) existe una expresión de la forma

$$(1.3) \quad \sum_{\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_i) = \delta_f} c_i \cdot \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_i) = \sum_{j,k} c_{jk} \mathbf{u}_{jk} \mathcal{S}(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k), \quad c_{jk} \in K$$

con $\text{in}_{\prec}(\mathbf{u}_{jk} \mathcal{S}(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k)) \prec \delta_f$. La condición que satisface el Teorema garantiza la existencia de una expresión $\mathcal{S}(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k)$ de la forma

$$(1.4) \quad \mathcal{S}(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) = \sum_{i=1}^s p_i^{jk} \mathbf{g}_i, \quad \text{in}_{\prec}(p_i^{jk} \mathbf{g}_i) \preceq \text{in}_{\prec}(\mathcal{S}(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k))$$

donde $p_i^{jk} \in S$. Sustituyendo (1.4) en (1.3) obtenemos

$$(1.5) \quad \sum_{\text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_i) = \delta_f} c_i \cdot \text{in}_{\prec}(\mathbf{h}_i \mathbf{g}_i) = \sum_{j,k} c_{jk} \mathbf{u}_{jk} \left(\sum_{i=1}^s p_i^{jk} \mathbf{g}_i \right)$$

Reescribiendo el lado derecho de la ecuación (1.5) como $\sum_{i=1}^s h'_i \mathbf{g}_i$. Entonces $\text{in}_{\prec}(h'_i \mathbf{g}_i) \prec \delta_f$. Finalmente, se da (1.5) junto con la segunda igualdad de (1.1), resulta que existe una expresión de $\mathbf{f}$ de la forma

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^s h''_i \mathbf{g}_i, \quad \text{in}_{\prec}(h''_i \mathbf{g}_i) \prec \delta_f$$

la existencia de tal expresión contradice la definición de δ_f , como se deseaba. $\square$

Ejemplo 1.14. Sea $\mathbf{f} = x_1 x_4 - x_2 x_3 - x_2 x_3$, $\mathbf{g} = x_4 x_7 - x_5 x_6$ e $I = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$, notemos que, como $\langle \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(\mathbf{f}), \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(\mathbf{g}) \rangle \neq \text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(I)$, entonces $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ no es una base de Gröbner de I con respecto al orden lexicográfico $\prec_{\text{lex}}$. Por otro lado, si $\mathbf{h} = \mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = x_1 x_3 x_6 - x_2 x_3 x_7$, entonces $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}\}$ es una base de Gröbner de I con respecto a $\prec_{\text{lex}}$. En efecto, $\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbf{h}$ se reduce a cero con respecto a $\mathbf{h}$. Dado que $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(\mathbf{g})$ y $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(\mathbf{h})$ son primos relativos, del Lema 1.11 se sigue que $\mathcal{S}(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ se reduce a cero con respecto a $\mathbf{g}, \mathbf{h}$. Además como

$$\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{h}) = x_5 x_6 \mathbf{f} - x_4 \mathbf{h} = x_2 x_3 x_4 x_7 - x_2 x_3 x_5 x_6 = x_2 x_3 \mathbf{g},$$

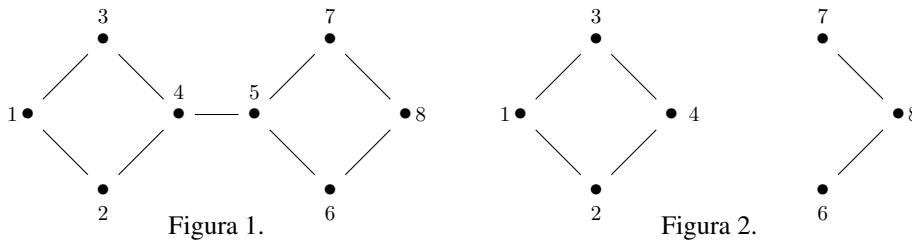
entonces $\mathcal{S}(f, h)$ se reduce a cero con respecto a g . Del criterio de Buchberger 1.13 se tiene que $\mathcal{G} = \{f, g, h\}$ es base de Gröbner.

1.2. Ideales binomiales de aristas. En esa Sección introduciremos algunos conceptos básicos de teoría de gráficas, y definiremos los ideales binomiales J_G generados por las aristas de la gráfica G . De igual manera, definiremos los ideales $P_T(G)$ para T un subconjunto de los vértices de G , que serán ideales primos de $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ y además, daremos propiedades importantes tanto de J_G como de $P_T(G)$.

Recordemos que una *gráfica finita* G es un par ordenado de conjuntos finitos (V, E) tal que V es el conjunto de *vértices* y el conjunto E es el conjunto de *aristas*. Una arista $z = \{v_i, v_j\}$ se dice que une a los vértices v_i y v_j . Denotamos $V(G) = [n]$ al conjunto de vértices, donde cada vértice lo denotaremos por alguno de los naturales en $[n] = \{1, \dots, n\}$, y denotamos al conjunto de aristas por el conjunto $E(G) = \{\{i, j\} : i, j \in [n]\}$. Un *lazo* de G es una arista tal que esté unida por un mismo vértice, esto es, $\{i, i\} \in E(G)$. Vamos a considerar siempre *gráficas simples*, es decir, que no tengan lazos y que a lo más exista una arista uniendo dos vértices cualesquiera en G . Sea H y G dos gráficas, entonces H es una *subgráfica* de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$. Una subgráfica H es una *subgráfica inducida* si H contiene a todas las aristas $\{i, j\} \in E(G)$ con $i, j \in [n]$. En este caso, si H es una subgráfica inducida por $V(H)$, usaremos la notación $H = G_{V(H)}$. Un *camino* de longitud m en G es una sucesión de vértices $P : i_0, i_1, \dots, i_{m-1}, i_m$ donde $z_j = \{i_{j-1}, i_j\}$ es una arista para toda $1 \leq j \leq m$ tal que $i_s \neq i_\ell$ para toda $s \neq \ell$.

Sea G una gráfica simple con vértices $[n]$. Decimos que G es una *gráfica conexa* si para todo par de vértices $i, j \in [n]$ existe un camino del vértice i al vértice j . Observemos que si G tiene una descomposición disjunta de subgráficas $G = \bigcup_{\ell=1}^r G_\ell$ donde $G_1, \dots, G_r$ son los máximos subgráfos conexos de G , los G_i son llamadas las *componentes conexas* de G . Un vértice i de G es un *vértice de corte* de G si G tiene menos componentes conexas que $G_{[n] \setminus \{i\}}$.

Ejemplo 1.15. Consideremos la gráfica G de la figura 1 con vértices $V(G) = [8]$ y sea $V(H) = [8] \setminus \{5\}$, entonces la subgráfica inducida $H = G_{[8] \setminus \{5\}}$ es la gráfica de la figura 2. La gráfica G tiene un camino $P : 1, 2, 4, 5, 6, 8$ que tiene longitud 5. El vértice 5 es un vértice de corte de G ya que G tiene una única componente conexa mientras que $H = G_{[n] \setminus \{8\}}$ tiene dos componentes conexas.



Una gráfica simple G es *completa* si para todo $i, j \in [n]$ existe la arista $\{i, j\} \in E(G)$, y se denota como $G = \mathcal{K}_n$. Una gráfica G es *bipartita* si su conjunto de vértices $V(G)$ puede dividirse en dos conjuntos disjuntos de vértices V_1 y V_2 tales que toda arista de G tiene un vértice en V_1 y un vértice en V_2 .

Ejemplo 1.16. La gráfica $G = \mathcal{K}_4$ de la figura 3 es una gráfica completa con 4 vértices, mientras que la gráfica de la figura 4 es una gráfica bipartita, ya que $V_1 = \{1, 2, 3\}$ y $V_2 = \{4, 5, 6\}$, donde $[n] = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, además que para cada $e = \{i, j\} \in E(G)$, se tiene que, si $i \in V_1$ entonces $j \in V_2$.

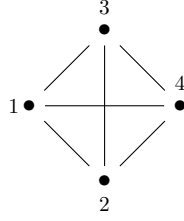


Figura 3.

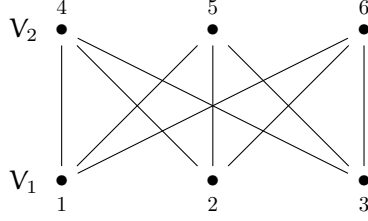


Figura 4.

Un binomio de $S = K[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio de la forma $u - v$, donde u y v son monomios en S . Un *ideal binomial* es un ideal de S generado por binomios. Consideraremos el siguiente Ejemplo de ideal binomial de aristas.

Definición 1.17. Sea $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ el anillo de polinomios en $2n$ variables y G una gráfica simple con vértices $[n]$. El *ideal binomial de aristas* de G se define como sigue:

$$J_G = \langle f_{ij} = x_i y_j - x_j y_i : \{i, j\} \in E(G), i < j \rangle.$$

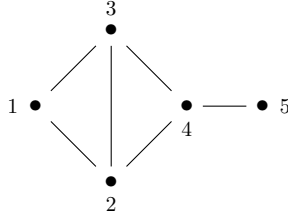
Observación 1.18. Los *ideales determinantaes* son ideales generados por los menores de una matriz de indeterminadas. Notemos que el ideal binomial de aristas J_G es un ideal determinantal generado por los 2-menores de la matriz

$$X_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

donde los índices de las columnas vienen dados por las aristas de G .

Si $G = \mathcal{K}_n$, entonces por la definición de ideal binomial de aristas $J_{\mathcal{K}_n}$ es el ideal de todos los 2-menores de la matriz de indeterminadas X_n .

Ejemplo 1.19. Sea G la gráfica conexa siguiente :



Considerando solamente los 2-menores de las aristas de G obtenemos la matriz

$$X_5 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_4 & y_5 \end{pmatrix},$$

por lo tanto el ideal binomial de la gráfica G es:

$$J_G = \langle x_1 y_2 - x_2 y_1, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_2 y_3 - x_3 y_2, x_2 y_4 - x_4 y_2, x_3 y_4 - x_4 y_3, x_4 y_5 - x_5 y_4 \rangle$$

Dado un subconjunto $T \subseteq [n]$, un conjunto $W = [n] \setminus T$, y sean $G_1, \dots, G_{c(T)}$ las componentes conexas de G_W , donde G_W es la subgráfica de G inducida por W y $c(T)$ denota el número de componentes conexas que se generan. Para cada G_i denotamos por $\tilde{G}_i$ a la gráfica completa sobre $V(G_i)$ y definimos el ideal

$$P_T(G) = \left\langle \bigcup_{i \in T} \{x_i, y_i\}, J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_{c(T)}} \right\rangle.$$

Ejemplo 1.20. Sea G la gráfica simple con 7 vértices de la figura 5, y sea $T \subset [7]$ dado por $T = \{4\}$. Entonces $W = [7] \setminus \{4\}$, y así la subgráfica de G inducida por W es la gráfica G_W de la figura 6 que tiene dos componentes conexas.

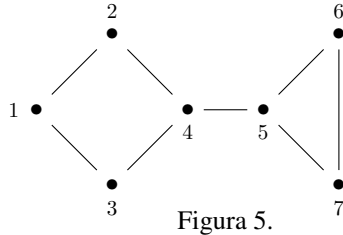


Figura 5.

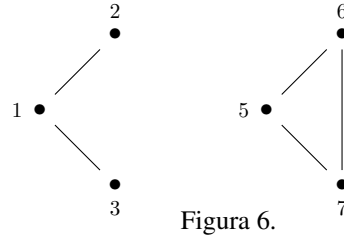


Figura 6.

Observemos que, en la figura 7 se muestra la gráfica $\tilde{G}_1$ y en la figura 8 se muestra la gráfica $\tilde{G}_2$:

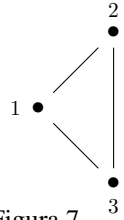


Figura 7.

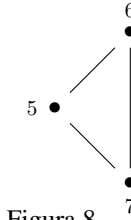


Figura 8.

donde su ideal binomial de aristas correspondientemente es

$$J_{\tilde{G}_1} = \langle x_1y_2 - x_2y_1, x_1y_3 - x_3y_1, x_2y_3 - x_3y_2 \rangle \quad y$$

$$J_{\tilde{G}_2} = \langle x_5y_6 - x_6y_5, x_5y_7 - x_7y_5, x_6y_7 - x_7y_6 \rangle.$$

Por lo tanto, el ideal es

$$P_T(G) = \langle x_4, y_4, J_{\tilde{G}_1}, J_{\tilde{G}_2} \rangle.$$

Observación 1.21. En particular, si $G = \mathcal{K}_n$, y $T = \emptyset$ entonces G es su única componente conexa, se obtiene que $J_{\tilde{\mathcal{K}}_n} = J_{\mathcal{K}_n}$, y por lo tanto $J_{\mathcal{K}_n} = P_{\emptyset}(\mathcal{K}_n)$.

Lema 1.22. [10, Lema 7.14] *El ideal $P_T(G)$ es un ideal primo.*

Demostración. Primero reducimos el anillo $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ módulo las variables que aparecen en $P_T(G)$, es decir, si $\bigcup_{i \in T} \{x_i, y_i\}$ son las variables de $P_T(G)$, entonces al hacer $S / \langle \bigcup_{i \in T} \{x_i, y_i\} \rangle$ obtenemos el anillo de polinomios $S' = K[\{x_j, y_j\} : x_j, y_j \notin \bigcup_{i \in T} \{x_i, y_i\}]$ y sea un ideal primo $\mathfrak{p} \subset S'$ tal que $S/P_T(G) \simeq S'/\mathfrak{p}$. Además, $\mathfrak{p}$ es de la forma $(\mathfrak{p}_1 + \dots + \mathfrak{p}_{c(T)})S'$ con $\mathfrak{p}_i = P_{\emptyset}(\tilde{G}_i) \subset S_i$, donde los $\tilde{G}_i$ son las gráficas completas con conjuntos de vértices disjuntos y donde S_i es el anillo de polinomios sobre K de las variables correspondientes, es decir, con los vértices de $V(\tilde{G}_i)$. Vamos a probar por inducción sobre i que, $S'/(p_1 + \dots + p_i)$ es un dominio entero.

Para $i = 1$. Sea $\bar{f}\bar{g} \in S'/J_{\tilde{G}_1}$ y supongamos que $0 = \bar{f}\bar{g} = fg + J_{\tilde{G}_1}$ y entonces $fg \in J_{\tilde{G}_1}$ y así $fg = r(x, y)$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$. Y así $f|r$ o $g|r$. Por tanto $S'/J_{\tilde{G}_1}$ es un dominio entero.

Sea $i > 1$ y sea $B = C/(p_1 + \dots + p_{i-1})C$ donde C es el anillo de polinomios sobre K en las variables de los anillos $S_1, \dots, S_{i-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} B[x_j, y_j : j \in V(G_i)] / \mathfrak{p}_i B[x_j, y_j : j \in V(G_i)] \\ \simeq C[x_j, y_j : j \in V(G_i)] / (p_1 + \dots + p_i) \end{aligned}$$

se tiene que $B[x_j, y_j : j \in V(G_i)] / \mathfrak{p}_i$ es un dominio y por tanto

$$A = C[x_j, y_j : j \in V(G_i)] / (p_1 + \dots + p_i) C[x_j, y_j : j \in V(G_i)]$$

es un dominio, esto produce el resultado deseado ya que $S'/(p_1 + \dots + p_i)S'$ no es más que una extensión polinómica de A . $\square$

Proposición 1.23. [10, Problema 7.8] Si G es una gráfica con vértices $[n]$ y componentes conexas $G_1, \dots, G_r$, sea $T \subset [n]$. Consideremos $T_i = T \cap V(G_i)$, para $i = 1, \dots, r$. Entonces:

- (a) $P_T(G) = \sum_{i=1}^r P_{T_i}(G_i)S$.
- (b) $P_T(G)$ es ideal primo mínimo¹ de J_G si y sólo si cada $P_{T_i}(G_i)$ es un ideal primo mínimo de J_{G_i} .

Demostración. Para (a), notemos que, como los $G_1, \dots, G_r$ son componentes conexas de G , entonces si ordenamos las variables de $P_T(G)$ adecuadamente se tiene que

$$P_T(G) = \left\langle \bigcup_{i \in W} \{x_i, y_i\}, J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_{c(T)}} \right\rangle = \langle P_{T_1}(G_1)S, \dots, P_{T_r}(G_r)S \rangle.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P_T(G) &= \langle P_{T_1}(G_1)S, \dots, P_{T_r}(G_r)S \rangle \\ &= \left\langle \bigcup_{i=1}^r P_{T_i}(G_i)S \right\rangle = P_{T_1}(G_1)S + \dots + P_{T_r}(G_r)S \\ &= \sum_{i=1}^r P_{T_i}(G_i)S. \end{aligned}$$

Para (b), supongamos que $P_T(G)$ es primo mínimo de J_G y que $P_{T_i}(G_i)$ no es primo mínimo de J_{G_i} , se sigue que existen primos p_i tales que $J_{G_i} \subset p_i \subset P_{T_i}(G_i)$. Ahora notemos que $J_G = \sum_{i=1}^r J_{G_i}$. Entonces,

$$J_G = \sum_{i=1}^r J_{G_i} \subset \sum_{i=1}^r p_i \subset \sum_{i=1}^r P_{T_i}(G_i) = P_T,$$

con $\sum_{i=1}^r p_i$ primo, es decir, $J_G \subset \sum_{i=1}^r p_i \subset P_T(G)$, lo que contradice que $P_T(G)$ es primo mínimo de J_G . Recíprocamente, supongamos que existe un primo p tal que $J_G \subset p \subset P_T(G)$. Sean

$$P_{T_i}(G_i) = \left\langle \bigcup_{k \in T_i} \{x_{i_k}, y_{i_k}\}, J_{\tilde{G}_{i1}}, \dots, J_{\tilde{G}_{i c(T_i)}} \right\rangle.$$

Por otro lado, sea $W_i = V(G_i) \setminus T_i \subset V(G_i)$ y entonces $G_{ij} \subset G_i$ para toda $1 \leq j \leq c(T_i)$, es decir, todos los generadores de $J_{G_{ij}}$ son generadores de J_{G_i} , pues las aristas de G_{ij} son aristas de G_i , y así $J_{G_{ij}} \subset J_{G_i}$. Similarmente, $J_{\tilde{G}_{ij}} \subset J_{\tilde{G}_i}$. Se sigue que cada generador de $J_{G_{ij}}$ es un generador de $P_T(G)$ y así podemos considerar el ideal primo $p \subset P_T(G)$,

$$p = P_T(G_{[n] \setminus T}) = \left\langle \bigcup_{\ell \in T} \{x_\ell, y_\ell\}, J_{\tilde{G}_{ij}} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq c(T_i) \right\rangle.$$

Sea $f_{\ell s} = x_\ell y_s - x_s y_\ell$, $f_{t\ell} = x_t y_\ell - x_\ell y_t \in J_G$ con $\ell \in T$, entonces $f_{\ell s}, f_{t\ell} \in p$ pues los generan las variables x_ℓ, y_ℓ . Mientras que el resto de generadores son generadores de algún $J_{G_{ij}}$, y así $J_G \subset p$. Consecuentemente, como $J_{G_i} \subset J_G$ entonces $J_{G_i} \subset p$ y así $J_{G_i} \subset P_{T_i}(G_{ij})$. Por último, como $P_{T_i}(G_i)$ es primo mínimo de J_{G_i} , entonces $P_{T_i}(G_i) \subseteq P_{T_i}(G_{ij})$ para toda i , y entonces

$$\left\langle P_{T_i}(G_i) : 1 \leq i \leq r \right\rangle \subseteq \left\langle P_{T_i}(G_{ij}) : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq c(T_i) \right\rangle,$$

es decir, $P_T(G) \subseteq P_T(G_{[n] \setminus T})$, y así $P_T(G) = P_T(G_{[n] \setminus T}) = p$. Por lo tanto, $P_T(G)$ es primo mínimo de J_G . $\square$

Proposición 1.24. [10, Corolario 7.13] J_G es un ideal radical.

¹Un ideal primo p es un ideal primo mínimo del ideal I si $I \subset p$ y no hay ningún ideal primo que contenga a I que esté propiamente contenido en p .

Demostración. Por [9, Teorema 7.11], se sabe que para un orden monomial adecuado $\text{in}_\prec(J_G)$ es un ideal monomial libre de cuadrados. Esto implica que $\text{in}_\prec(J_G)$ es un ideal radical. Supongamos ahora que $f^k \in J_G$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\text{in}_\prec(f)^k = \text{in}_\prec(f^k) \in \text{in}_\prec(J_G)$ y por lo tanto existe un $a \in K$ tal que $\text{in}_\prec(f - ag) \prec \text{in}_\prec(f)$. Usando la expansión binomial $(f - ag)^k = f^k - gh$, para algún $g \in S$, se sigue entonces que $(f - ag)^k \in J_G$ y entonces $f - ag \in \sqrt{J_G}$, además como $\text{in}_\prec(f - ag) \prec \text{in}_\prec(f)$ podemos aplicar inductivamente este proceso podemos concluir que $f - ag \in J_G$, pero entonces también $f \in J_G$. $\square$

Teorema 1.25. [9, Teorema 1.1] Sea G una gráfica con vértices $[n]$, y sea $\prec_{\text{lex}}$ el orden de lexicográfico en $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ inducido por

$$x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n \succ y_1 \succ \dots \succ y_n.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) Los generadores de J_G forman una base de Gröbner.
- (2) Para toda arista $\{i, j\}$ y $\{k, \ell\}$ con $i < j$ y $k < \ell$, se tiene $\{j, \ell\} \in E(G)$ si $i = k$, y $\{i, k\} \in E(G)$ si $\ell = j$.

Demostración. Supongamos que (2) no se cumple, entonces $\{i, j\}$ y $\{i, k\}$ son aristas con $i < j < k$, y así $\{j, k\} \notin E(G)$. Esto implica que $S(f_{ik}, f_{ij}) = y_i f_{jk} \in J_G$, pero ninguno de los monomios cuadráticos iniciales de los generadores cuadráticos de J_G divide a $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(y_i f_{ik}) = x_j y_i y_k$.

Recíprocamente, aplicando el criterio de Buchberger 1.13 se tiene que todo $S(f_{ij}, f_{k\ell})$ se reduce a cero. Si $i \neq k$ y $j \neq \ell$, entonces $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(f_{ij})$ y $\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(f_{k\ell})$ no tienen factor común. En este caso, como $f_{ij}, f_{k\ell}$ son primos relativos, entonces $S(f_{ij}, f_{k\ell})$ se reduce a cero. Por otro lado, si $i = k$, podemos suponer que $\ell < j$. Entonces $S(f_{ij}, f_{i\ell}) = y_i f_{\ell j}$ es la expresión estándar de $S(f_{ij}, f_{i\ell})$. Similarmente, si $j = \ell$, podemos asumir que $i < k$. Entonces, $S(f_{ij}, f_{kj}) = x_j f_{ik}$, es la expresión estándar de $S(f_{ij}, f_{k\ell})$. En ambos casos el S -polinomio se reduce a cero. $\square$

Definición 1.26. Una gráfica simple G que cumple una de las condiciones del Teorema 1.25 se llama *gráfica cerrada*.

Teorema 1.27. [10, Teorema 7.16] Sea G una gráfica simple con vértices $[n]$. Entonces

$$J_G = \bigcap_{W \subseteq [n]} P_W(G).$$

Demostración. Notemos que $J_G \subset P_W(G)$. Se demostrará por inducción sobre n que cada ideal primo mínimo que contiene a J_G es de la forma $P_W(G)$, para algún $W \subseteq [n]$. Como ya vimos en la Proposición 1.24, J_G es un ideal radical, y como un ideal radical es la intersección de sus ideales primos mínimos, se seguirá la afirmación del Teorema.

Sea P un primo mínimo de J_G . Primero mostraremos que $x_i \in P$ si y sólo si $y_i \in P$. Supongamos que G es conexa. En efecto, si $G_1, \dots, G_r$ son componentes conexas de G , entonces cada ideal primo mínimo P de J_G es de la forma $P_1 + \dots + P_r$, donde cada P_i es un ideal primo mínimo de J_{G_i} . Por lo tanto, si cada P_i tiene la forma esperada, entonces también lo tiene P . Sea $T = \{x_i : i \in [n], x_i \in P, y_i \notin P\}$. Mostraremos que $T = \emptyset$. Esto implicará que si $x_i \in P$, entonces $y_i \in P$. Similarmente, también se deduce que $y_i \in P$ implica que $x_i \in P$ de modo que la conclusión final será que $x_i \in P$ si y sólo si $y_i \in P$.

Primero observemos que $T \neq \{x_1, \dots, x_n\}$ pues si pasara que $T = \{x_1, \dots, x_n\}$ tendríamos que $J_G \subset J_{\bar{G}} \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset P$ y así P no es primo mínimo de J_G . Supongamos que $T \neq \emptyset$. Dado que $T \neq \{x_1, \dots, x_n\}$ y que G es conexa entonces existe $\{i, j\} \in E(G)$ tal que $x_i \in T$ pero $x_j \notin T$. Como $x_i y_j - x_j y_i \in J_G \subset P$ y $x_i \in P$, se sigue que $x_j y_i \in P$. Además, dado que P es un ideal primo entonces $x_j \in P$ o $y_j \in P$ entonces por definición de T no es posible que $y_j \in P$ y así $x_j \in P$. Dado que $x_j \notin T$, se sigue que $y_j \in P$. Sea G' una subgráfica inducida de G con vértices $[n] \setminus \{j\}$.

Entonces $\langle J_{G'}, x_j, y_j \rangle = \langle J_G, x_j, y_j \rangle \subset P$, por lo tanto $\tilde{P} = P / \langle x_j, y_j \rangle$ es un ideal primo mínimo de $J_{G'}$ con $x_i \in \tilde{P}$ pero $y_i \notin \tilde{P}$ para todo $x_i \in T \subset \tilde{P}$. Por hipótesis de inducción, $\tilde{P}$ es de la forma $P_W(G')$ para algún subconjunto $W \subset [n] \setminus \{j\}$. Esto contradice el hecho de que $T \neq \emptyset$.

Sea ahora G una gráfica simple arbitraria. Por lo demostrado anteriormente, existe un subconjunto $W \subseteq [n]$ tal que $P = \langle \bigcup_{i \in W} \{x_i, y_i\}, \tilde{P} \rangle$ donde $\tilde{P}$ es un ideal primo que no contiene variables. Sea G' una gráfica $G_{[n] \setminus W}$. Entonces la reducción módulo el ideal $\langle \bigcup_{i \in W} \{x_i, y_i\} \rangle$ muestra que $\tilde{P}$ es un ideal primo binomial de $J_{G'}$ que no contiene variables. Sean $G_1, \dots, G_c$ son las componentes de G' . Ahora, se demostrará que $\tilde{P} = \langle J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_c} \rangle$. Esto implicaría entonces que $P = \langle \bigcup_{i \in W} \{x_j, y_j\}, J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_c} \rangle$ como se busca.

Para simplificar la notación podemos suponer que ninguno de los generadores de P son variables, y debemos demostrar que $P = \langle J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_c} \rangle$, donde $G_1, \dots, G_c$ son las componentes conexas de G . Para probar esto, supongamos que $i, j \in E(\tilde{G}_k)$ con $i < j$, para alguna k , entonces $f_{ij} \in P$. Y así, tenemos que $\langle J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_c} \rangle \subset P$. Dado que $\langle J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_c} \rangle$ es un ideal primo mínimo que contiene a J_G , entonces $\langle J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_c} \rangle = P$.

Sea $i = i_0, \dots, i_r = j$ un camino en G_k de i a j . Haremos inducción sobre r para demostrar que $f_{ij} \in P$. La afirmación es trivial para $r = 1$. Supongamos que $r > 1$. Por hipótesis de inducción $f_{i_1 j} \in P$. Por otra parte, tenemos $x_{i_1} f_{ij} = x_j f_{i i_1} + x_i f_{i_1 j}$ y $f_{i i_1} \in P$ porque $i < i_1$ y existe $\{i, i_1\} \in E(G_k)$, así $x_{i_1} f_{ij} \in P$, como $x_{i_1} \notin P$, entonces $f_{ij} \in P$. $\square$

Lema 1.28. [9, Proposición 3.8] Sea $A_1, \dots, A_s$ y $B_1, \dots, B_t$ subconjuntos disjuntos por pares de $[n]$. Entonces,

$$\langle J_{\tilde{A}_1}, \dots, J_{\tilde{A}_t} \rangle \subset \langle J_{\tilde{B}_1} \dots J_{\tilde{B}_t} \rangle$$

si y sólo si para cada $i = 1, \dots, s$ existe un j tal que $A_i \subset B_j$.

Demostración. Si $A_i \subset B_j$ entonces $J_{\tilde{A}_i} \subset J_{\tilde{B}_j}$ por lo tanto $\langle J_{\tilde{A}_1}, \dots, J_{\tilde{A}_t} \rangle \subset \langle J_{\tilde{B}_1} \dots J_{\tilde{B}_t} \rangle$. Recíprocamente, supongamos que $\langle J_{\tilde{A}_1}, \dots, J_{\tilde{A}_t} \rangle \subset \langle J_{\tilde{B}_1} \dots J_{\tilde{B}_t} \rangle$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\bigcup_{j=1}^t B_j = [n]$ y consideremos el epimorfismo de K -álgebras

$$\varphi : S \rightarrow K[x_i, x_i z_1]_{i \in B_1}, \dots, [x_i, x_i z_t]_{i \in B_t} \subset K[x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_t]$$

dado por $\varphi(x_i) = x_i$ para cada i y $\varphi(y_i) = x_i z_j$ para cada $i \in B_j$ y $j = 1, \dots, t$. Notemos que

$$\ker(\varphi) = \langle J_{\tilde{B}_1} \dots J_{\tilde{B}_t} \rangle,$$

ya que $\varphi(x_i) = 0$ y $\varphi(y_i) = 0$ si y sólo si

$$0 = \varphi(x_i) \varphi(y_j) - \varphi(x_j) \varphi(y_i) = \varphi(x_i y_j - x_j y_i).$$

Ahora fijando uno de los conjuntos A_i y tomando $k \in A_i$, se tiene que $k \in B_j$, para algún j . Afirmamos que $A_i \subset B_j$. En efecto, sea $\ell \in A_i$ con $\ell \neq k$ y supongamos que $\ell \in B_r$ con $r \neq j$. Dado que $x_k y_\ell - x_\ell y_k \in J_{\tilde{A}_i} \subset \langle J_{\tilde{B}_1} \dots J_{\tilde{B}_t} \rangle$, se sigue que $x_k y_\ell - x_\ell y_k \in \ker(\varphi)$, por lo tanto

$$0 = \varphi(x_k y_\ell - x_\ell y_k) = x_k x_\ell z_j - x_k x_\ell z_r$$

la cual es una contradicción, ya que $z_j = z_r$ si y sólo si $r = j$. $\square$

Proposición 1.29. [10, Proposición 7.19] Sea G una gráfica con vértices $[n]$, y sean W y T subconjuntos de $[n]$. Sean $G_1, \dots, G_s$ las componentes conexas de $G_{[n] \setminus W}$, y $H_1, \dots, H_t$ las componentes conexas de $G_{[n] \setminus T}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) $P_T(G) \subset P_W(G)$.
- (2) $T \subset W$ y para cada $i = 1, \dots, t$ se tiene que $V(H_i) \setminus W \subset V(G_j)$ para alguna j .

Demostración. Para un subconjunto $U \subset [n]$, denotamos por L_U al ideal generado por las variables $\{x_i, y_i : i \in U\}$. Con esta notación, para cualesquiera W y T subconjuntos de $[n]$ tenemos que $P_W(G) = \langle L_W, J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_s} \rangle$ y $P_T(G) = \langle L_T, J_{\tilde{H}_1}, \dots, J_{\tilde{H}_t} \rangle$. De esto, se sigue que $P_T(G) \subset P_W(G)$ si y sólo si los $J_{\tilde{H}_i}$ son algunos de los $J_{\tilde{G}_j}$ y $L_T \subset L_W$ si y sólo si $T \subset W$ y $\langle L_W, J_{\tilde{H}_1}, \dots, J_{\tilde{H}_t} \rangle \subset \langle L_W, J_{\tilde{G}_1}, \dots, J_{\tilde{G}_s} \rangle$.

Notemos que $\langle L_W, J_{\tilde{H}_1}, \dots, J_{\tilde{H}_t} \rangle = \langle L_W, J_{\tilde{H}'_1} \dots J_{\tilde{H}'_t} \rangle$ donde $H'_t = (H_i)_{[n] \setminus W}$. Así, $P_T(G) \subset P_W(G)$ si y sólo si $J_1 = \langle L_W, J_{\tilde{H}'_1}, \dots, J_{\tilde{H}'_t} \rangle \subset \langle L_W, J_{\tilde{G}_1} \dots J_{\tilde{G}_t} \rangle = J_2$ pues los generadores de los ideales J_1 y J_2 no tienen variables en común con x_i y y_i para $i \in W$. Dado que $V(H'_t) = V(H_i) \setminus W$, la equivalencia de (1) y (2) se sigue del Lema 1.28. $\square$

Observación 1.30. [10, Observación 2.2] Sea G una gráfica conexa con vértices $[n]$ y $T \subset [n]$. Entonces $P_T(G)$ es un primo mínimo de J_G si y sólo si $T = \emptyset$.

En efecto, si $P_T(G)$ es un primo mínimo de J_G con G conexa, notemos que $P_\emptyset \subset P_T(G)$ pues $P_\emptyset(G)$ no contiene variables y por ser $P_T(G)$ ideal primo mínimo entonces $P_\emptyset(G) = P_T(G)$, es decir, $T = \emptyset$. Recíprocamente, como $P_\emptyset(G)$ no contiene variables, entonces $P_T(G) \not\subset P_\emptyset(G)$ para toda $T \neq \emptyset$, y entonces del Teorema 1.27, $J_G = \bigcap_{T \subset [n]} P_T \subset P_\emptyset(G)$. Por lo tanto, $P_\emptyset(G)$ es un primo mínimo de J_G .

Teorema 1.31. [10, Teorema 7.20] Sea G una gráfica conexa con vértices $[n]$, y $W \subset [n]$. Entonces $P_W(G)$ es un ideal primo mínimo de J_G si y sólo si $W = \emptyset$, o $W \neq \emptyset$ y para cada $i \in W$ se tiene que $c(W \setminus \{i\}) < c(W)$. En otras palabras, si y sólo si cada $i \in W$ es un vértice de corte de la gráfica $G_{([n] \setminus W) \cup \{i\}}$.

Demostración. La primera parte del Teorema se probó en la Observación 1.30. Ahora, supongamos que $P_W(G)$ es un primo mínimo de J_G y fijemos $i \in W$. Sean $G_1, \dots, G_r$ las componentes conexas de $G_{[n] \setminus W}$. Consideraremos varios casos:

Primero supongamos que no existe una arista $\{i, j\}$ de G tal que $j \in G_k$ para algún k . Sea $T = W \setminus \{i\} \subset W$. Entonces las componentes conexas de $G_{[n] \setminus T}$ son $G_1, \dots, G_r, \{i\}$. Así $c(T) = c(W) + 1$, con $T \subset W$. Sin embargo, este caso no puede darse ya que de la Proposición 1.29 implica que $P_T(G) \subset P_W(G)$.

Ahora supongamos que existe exactamente un G_k , digamos G_1 , para el que existe $j \in G_1$ tal que $\{i, j\}$ es una arista de G . Entonces las componentes conexas de $G_{[n] \setminus T}$ son $G_1, \dots, G_r$, donde $V(G_1) = V(G_1) \cup \{i\}$. Así $c(T) = c(W)$. De nuevo este caso no puede darse ya que esto implica que $P_T(G) \subset P_W(G)$.

Queda considerar el caso en el que haya al menos dos componentes, digamos $G_1, \dots, G_k$, para $k \geq 2$ y $j_\ell \in G_\ell$ para $\ell = 1, \dots, k$ tal que $\{i, j_\ell\}$ es una arista de G . Entonces las componentes conexas de $G_{[n] \setminus T}$ son $G'_1, G_{k+1}, \dots, G_r$, donde $V(G'_1) = \bigcup_{\ell=1}^k (V(G_\ell) \cup \{i\})$. En este caso $c(T) < c(W)$.

Recíprocamente, supongamos que $c(W \setminus \{i\}) < c(W)$ para todo $i \in W$ y que $P_W(G)$ no es un primo mínimo de J_G . Entonces existe un subconjunto propio $T \subset W$ con $P_T(G) \subset P_W(G)$. Elegimos $i \in W \setminus T$ y tenemos que $c(W \setminus \{i\}) < c(W)$. De la discusión de los tres casos anteriores podemos suponer que $G_1, G_{k+1}, \dots, G_r$ son las componentes conexas de $G_{[n] \setminus T}$, donde $V(G'_1) = \bigcup_{\ell=1}^k (V(G_\ell) \cup \{i\})$ y donde $k \geq 2$. Se sigue que $G_{[n] \setminus T}$ tiene una componentes conexa H que contiene a G'_1 . Entonces $V(H) \setminus W$ contiene los subconjuntos $V(G_1)$ y $V(G_2)$. Por lo tanto, $V(H) \setminus W$ no está contenido en ningún $V(G_i)$, de la Proposición 1.29 se tiene que $P_T(G) \subset P_W(G)$. $\square$

1.3. Resoluciones libres. En esta Sección, se consideran conceptos básicos de resoluciones libres las cuales nos basamos principalmente en [6], y con esto estudiar la resolución libre de los ideales binomiales de aristas J_G . Además, se define la regularidad de Castelnuovo-Mumford, en particular, estudiaremos la regularidad de estos ideales. Cerramos la Sección enunciando el Teorema principal de Matsuda Kazunori y Murai Satoshi [15], que nos da una relación entre regularidad de

Castelnuovo-Mumford del ideal J_G , el número de vértices de la gráfica y la longitud del camino inducido más largo de G . Algunas referencias para consultar más detalles son [6, 10, 15].

Recordemos que un *anillo graduado* es un anillo R junto con una familia de grupos aditivos $\{R_n\}_{n \geq 0}$ tales que $R = \bigoplus R_n$ y $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$, para todo $m, n \geq 0$. Si R es un anillo graduado con graduación $\{R_n\}$, un *R-módulo graduado* es un R -módulo M junto con una familia de subgrupos aditivos $\{M_n\}_{n \geq 0}$ tales que $M = \bigoplus M_n$ y $R_n M_m \subseteq M_{m+n}$, para todo $m, n \geq 0$.

Ejemplo 1.32. Si $S = K[x_1, \dots, x_n]$ es el anillo de polinomios sobre el campo K , entonces R es un anillo graduado definiendo S_k como el subconjunto de polinomios homogéneos de grado k , donde $S_0 = K$. Esta graduación $S = \bigoplus_{k \geq 0} S_k$ se llama *graduación estándar* del anillo S .

Si $R^{(\Gamma)} = \bigoplus_{i \in \Gamma} R$ es una suma directa de copias del anillo R indexada por Γ , diremos que $R^{(\Gamma)}$ es un *módulo libre*. Un R -módulo P es *proyectivo* si para cada epimorfismo de módulos $A \xrightarrow{p} B$ y todo morfismo de R -módulos $P \xrightarrow{f} B$ existe un morfismo g tal que el siguientes diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & g \swarrow & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Es conocido que si F es un módulo libre, entonces es proyectivo. Otro resultado conocido es que para todo R -módulo M , existe un módulo libre F que se proyecta sobre M , para más detalles ver las referencias [6, Teorema 11.3] y [6, Lema 11.19].

Un *complejo de cadenas* de R -módulos $(C_\bullet, \delta_\bullet)$, o simplemente *complejo*, es una sucesión de R -módulos C_i y morfismos de R -módulos

$$C_\bullet : \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

tal que $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$ para toda n , o equivalentemente que $\text{Im}(\delta_{n+1}) \subseteq \ker(\delta_n)$. Los morfismos δ_n se llaman las *diferenciales* del complejo. La *homología* de $(C_\bullet, \delta_\bullet)$ es la familia de R -módulos $H_n(C_\bullet) = \ker(\delta_n) / \text{Im}(\delta_{n+1})$. Si M es un R -módulo, una *resolución proyectiva* de M es un complejo exacto $(P_\bullet, \delta_\bullet)$ donde cada P_i es un módulo proyectivo, o equivalentemente $H_0(P_\bullet) = M$ y $H_i(C) = 0$ para toda $i \neq 0$.

Teorema 1.33. [6, Teorema 12.2] *Cada R-módulo tiene una resolución proyectiva.*

Demostración. Sea M un R -módulo. Existe un módulo libre P_0 que se proyecta sobre M . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \ker(\pi_0) \xrightarrow{\iota_0} P_0 \xrightarrow{\pi_0} M \rightarrow 0,$$

donde ι_0 es el morfismo inclusión y π_0 es un epimorfismo. Fijemos $\delta_0 = \pi_0$. Nuevamente, existe un módulo libre que se proyecta sobre $\ker(\delta_0)$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & 0 & & \\ & \searrow & & \swarrow & & & \\ & & \ker(\delta_0) & & & & \\ & \nearrow \pi_1 & & \searrow \iota_0 & & & \\ P_1 & \xrightarrow{\delta_1} & P_0 & \xrightarrow{\delta_0} & M & & \end{array}$$

donde el morfismo $\delta_1 = \iota_0 \circ \pi_1$ satisface que $\text{Im}(\delta_1) = \ker(\delta_0)$, ya que si $y \in \text{Im}(\delta_1)$, entonces $(\iota_0 \circ \pi_1)(x) = y$, es decir, $\delta_0(x) = y$. Aplicando δ_0 obtenemos $0 = \delta_0(y)$ y así $y \in \ker(\delta_0)$. Recíprocamente, sea $y \in \ker(\delta_0)$, entonces $\delta_0(y) = 0$. Por otro lado, $0 = \delta_0 \circ \delta_1(x)$ para toda $x \in P_1$, es decir, $\delta_0(y) = \delta_0 \circ \delta_1(x)$, esto implica que $y = \delta_1(x)$ y por lo tanto $y \in \text{Im}(\delta_1)$. En

cada paso, $\pi_i : P_i \rightarrow \ker(\delta_{n-1})$ es un epimorfismo, $\iota_i : \ker(\delta_i) \rightarrow P_i$ es la inclusión y obtenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow \ker(\delta_{n+1}) \xrightarrow{\iota_{n+1}} P_{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1}} \ker(\delta_n) \rightarrow 0.$$

Continuando con este proceso indefinidamente siempre que $P_n \neq 0$, la sucesión resulta ser una resolución proyectiva para M . $\square$

Una *resolución libre* $(F_\bullet, \delta_\bullet)$ de un R -módulo M es una resolución proyectiva tal que cada P_i es libre. Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local o una K -álgebra graduada local. Un complejo $(F_\bullet, \delta_\bullet)$ es *mínimo* si $\text{Im}(\delta_{n+1}) \subseteq \mathfrak{m}F_n$ para toda n . Para cualquier S -módulo (libre) graduado $L = \bigoplus_j L_j$, fijando k un índice se define el módulo desplazado $L(k)$ como el módulo graduado $L(k) = \bigoplus_j L(k)_j$ donde el sumando directo $L(k)_j = L_{k+j}$ es el que se desliza.

Ejemplo 1.34. Cuando $L = S = K[x_1, \dots, x_n]$ la graduación estándar está dada por $S = \bigoplus_d S_d$, donde S_d el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado d , y sea k cualquier entero, entonces $S(k)$ tiene sumandos directos $S(-k)_j = S_{j-k}$, es decir, hay un desplazamiento a la izquierda.

Subejemplo 1.35. Si $S = K[x, y]$ y $k = -2$ entonces $S(-2)$ desliza los sumandos directos de S dos lugares hacia la izquierda, es decir, $S(-2)_0 = S_{0-2} = S_{-2}$.

Definición 1.36. Dado un R -módulo M finitamente generado y un conjunto $z_1, \dots, z_r$ de generadores, una *sizigia* de M es una relación $\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_r z_r = 0$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R$. Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local o una K -álgebra graduada. Sea $F_\bullet$ es una resolución libre mínima del R -módulo M finitamente generado (graduado) y para cada $n \geq 1$, el submódulo

$$\Omega_n(M) = \text{Im}(\delta_n)$$

es la n -ésima sizigia de M .

Observación 1.37. Para cada n , tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \ker(\delta_n) \rightarrow F_n \rightarrow \text{Im}(\delta_n) \rightarrow 0.$$

Con $\ker(\delta_n) = \Omega_{n-1}(M)$ y $\text{Im}(\delta_n) = \Omega_n(M)$, así tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \Omega_{n-1}(M) \rightarrow F_n \rightarrow \Omega_n(M) \rightarrow 0.$$

Por otra parte, sean $S = K[x_1, \dots, x_n]$ y la resolución mínima del S -módulo M finitamente generado

$$0 \rightarrow F_s \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

donde $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}$ para cada i , es decir, F_i está generado por $\beta_{i,j}$ elementos de grado j . El $\beta_{i,j}$ se llama el (i, j) -ésimo *número de Betti* de M . A menudo escribimos los números de Betti de un módulo en su tabla de Betti:

$\beta(M)$	0	1	2	...
0	$\beta_{0,0}$	$\beta_{0,1}$	$\beta_{0,2}$	...
1	$\beta_{1,1}$	$\beta_{1,2}$	$\beta_{1,3}$	...
2	$\beta_{2,2}$	$\beta_{2,3}$	$\beta_{2,4}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ejemplo 1.38. Sea $S = K[x, y, z]$ y $M = S/\langle xy, xz, yz \rangle$. Consideremos el siguiente morfismo $S \rightarrow S/\langle xy, xz, yz \rangle$, donde $\ker(S \rightarrow M) = \langle xy, xz, yz \rangle$. Entonces obtenemos la sucesión de morfismos $S(-2)^3 \xrightarrow{(xy \ xz \ yz)} S \rightarrow M$. Para el siguiente morfismo, calculamos el núcleo de $S(-2)^3 \xrightarrow{(xy \ xz \ yz)} S$. Hacemos

$$(xy \ xz \ yz) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & y \\ 0 & -x \end{pmatrix},$$

así obtenemos un nuevo morfismo de la sucesión,

$$S(-3)^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}} S(-2)^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} xy & xz & yz \end{pmatrix}} S \longrightarrow M.$$

Ahora calcularemos el núcleo de $S(-3)^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}} S(-2)^3$, pero notemos que el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & y \\ 0 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} = \bar{0} \in \text{Mat}_{3 \times n}(K).$$

tiene solución si y sólo si

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} = \bar{0} \in \text{Mat}_{2 \times n}(K).$$

Por lo tanto, la resolución mínima para M es

$$0 \longrightarrow S(-3)^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}} S(-2)^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} xy & xz & yz \end{pmatrix}} S \longrightarrow M,$$

donde cada entrada de las matrices correspondientes son los generadores del núcleo de cada uno de los morfismos. Notemos que los desplazamientos graduados afectan también a todos los índices superiores. Por ejemplo, cuando escribimos la función de grado 2, sólo tenemos que desplazar el grado de cada generador en 1, pero como ahora nuestra función cae en $S(-2)^3$, tenemos que subir el grado de 2 a 3, y escribir $S(-3)^2$. El número de Betti $\beta_{ij}(M)$ de M cuenta el número de copias de $S(-j)$ de grado i en nuestra resolución. Así que $\beta_{0,0} = 1, \beta_{1,2} = 3, \beta_{2,3} = 2$. Por lo tanto, la tabla de Betti para M es:

$\beta(M)$	0	1	2
0	1	-	-
1	-	3	2

Podemos calcular estos invariantes usando Macaulay2:

```
i1 : S=QQ[x,y,z];
o1 = S
o1 : PolynomialRing
i2 : I=ideal(x*y,x*z,y*z);
o2 : Ideal of S
i3 : t = betti res I;
      0 1 2
o3 = total: 1 3 2
      0:   1 . .
      1:   . 3 2
o3 : BettiTally
```

Definición 1.39. Sean $I \subset S$ un ideal graduado, y sea $F_\bullet$ una resolución mínima graduada de S/I como un S -módulo:

$$F_\bullet : 0 \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{t,j}} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1,j}} \rightarrow S \rightarrow S/I.$$

La regularidad de Castelnuovo-Mumford de S/I es definida como:

$$\text{reg}(S/I) = \max\{j - i : \beta_{i,j} \neq 0\}.$$

Notemos que si tenemos una resolución libre mínima de I

$$0 \rightarrow F_s \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow I \rightarrow 0$$

podemos obtener siempre otra resolución libre mínima para S/I

$$0 \rightarrow F_s \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow S \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

y así obtenemos que $\text{reg}(I) = \text{reg}(S/I) + 1$.

Observación 1.40. Sea G una gráfica con componentes conexas $G_1, \dots, G_r$ y consideremos los anillos de polinomios $S_i = K[[x_j, y_j] : j \in V(G_i)]$. Entonces

$$\text{reg}(S/J_G) = \sum_{i=1}^r \text{reg}(S_i/J_{G_i}).$$

En efecto, vamos a probar que $S/J_G \simeq \bigotimes_{i=1}^r S_i/J_{G_i}$. Basta probarlo para dos componentes conexas y el isomorfismo se sigue inductivamente sobre r . Consideremos G una gráfica simple con vértices $[n]$ y G_1, G_2 sus dos componentes conexas. Sea $S_i = K[[x_j, y_j]_{j \in V(G_i)}]$ con J_{G_i} su ideal de aristas respectivo y el ideal $J_G = \langle J_{G_1} \cup J_{G_2} \rangle = \langle J_{G_1} \otimes 1 + 1 \otimes J_{G_2} \rangle$. Entonces

- (1) la función $\varphi : S_1/J_{G_1} \times S_2/J_{G_2} \rightarrow S_1 \otimes S_2/J_G$ dada por $\varphi(f + J_{G_1}, g + J_{G_2}) = (f \otimes g) + J_G$ es bilineal.
- (2) Existe un único isomorfismo $\tilde{\varphi} : S_1/J_{G_1} \otimes S_2/J_{G_2} \rightarrow S_1 \otimes S_2/J_G$ dado por $\tilde{\varphi}((f + J_{G_1}) \otimes (g + J_{G_2})) = (f \otimes g) + J_G$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} S_1/J_{G_1} \times S_2/J_{G_2} & \xrightarrow{\varphi} & S_1 \otimes S_2/J_G \\ \text{canónico} \downarrow \rho & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ S_1/J_{G_1} \otimes S_2/J_{G_2} & & \end{array}$$

es decir, $\tilde{\varphi} \circ \rho = \varphi$.

Para (1), la función está bien definida y es bilineal, pues

$$\begin{aligned} \varphi((f_1 + f_2) + J_{G_1}, g + J_{G_2}) &= (f_1 + f_2) \otimes g + J_G \\ &= ((f_1 \otimes g) + J_G) + ((f_2 \otimes g) + J_G) \\ &= \varphi(f_1 + J_{G_1}, g + J_{G_2}) + \varphi(f_2 + J_{G_1}, g + J_{G_2}) \end{aligned}$$

y además, para $\alpha \in K$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha f + J_{G_1}, g + J_{G_2}) &= (\alpha f \otimes g) + J_G \\ &= \alpha((f \otimes g) + J_G) = \alpha \varphi(f + J_{G_1}, g + J_{G_2}). \end{aligned}$$

Similarmente por la derecha.

Para (2), por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo $\tilde{\varphi} : S_1/J_{G_1} \otimes S_2/J_{G_2} \rightarrow S_1 \otimes S_2/J_G$ dado por $\tilde{\varphi}((f + J_{G_1}) \otimes (g + J_{G_2})) = (f \otimes g) + J_G$ tal que $\tilde{\varphi} \circ \rho = \varphi$. Resta mostrar que $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo.

Inyectividad: Supongamos que $\tilde{\varphi}((f + J_{G_1}) \otimes (g + J_{G_2})) = \bar{0}$, entonces $(f \otimes g) + J_G = \bar{0}$, es decir, $f \otimes g \in J_G = \langle J_{G_1} \otimes 1 + 1 \otimes J_{G_2} \rangle$, así $f \otimes 1 \in J_{G_1} \otimes 1$ y $1 \otimes g \in 1 \otimes J_{G_2}$, esto implica que $f \in J_{G_1}$ y $g \in J_{G_2}$. Es decir, $\ker(\tilde{\varphi}) = J_G$ y por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es inyectiva.

Suprayectividad: Sea $p \otimes q + J_G \in S_1 \otimes S_2/J_G$, con $p \in S_1$ y $q \in S_2$, entonces $(f \otimes g) + J_G = p \otimes q + J_G$, es decir $\tilde{\varphi}((f + J_{G_1}) \otimes (g + J_{G_2})) = p \otimes q + J_G$. Por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es suprayectiva. Así

se tiene $S_1/J_{G_1} \otimes S_2/J_{G_2} \simeq S_1 \otimes S_2/J_G \simeq S/J_G$. Ahora, consideremos las resoluciones libres

$$F_{\bullet}^{(1)} : 0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}^{(1)}} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}^{(1)}} \rightarrow S \rightarrow S_1/J_{G_1}.$$

$$F_{\bullet}^{(2)} : 0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}^{(2)}} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}^{(2)}} \rightarrow S \rightarrow S_2/J_{G_2}.$$

Entonces, como $S_1/J_{G_1} \otimes S_2/J_{G_2} \simeq S/J_G$ y el producto tensorial conmuta con la suma directa obtenemos

$$\left(\bigoplus_j S_1^{\beta_{i,j}^{(1)}}(-j) \right) \otimes \left(\bigoplus_j S_2^{\beta_{i,j}^{(2)}}(-j) \right) \simeq \bigoplus_j \left(S_1^{\beta_{i,j}^{(1)}}(-j) \otimes S_2^{\beta_{i,j}^{(2)}}(-j) \right) \simeq \bigoplus_j S^{\beta_{i,j}}(-j)$$

donde $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}^{(1)} + \beta_{i,j}^{(2)}$. Por lo tanto

$$\text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S_1/J_{G_1}) + \text{reg}(S_2/J_{G_2}).$$

Similarmente, para el caso de r componentes conexas basta con tomar

$$J_G = \left\langle \bigcup_{i=1}^r J_{G_i} \right\rangle = \langle J_{G_1} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \dots, 1 \otimes \cdots \otimes J_{G_i} \otimes \cdots \otimes 1, \dots, 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes J_{G_r} \rangle$$

y así obtenemos que $\bigotimes_{i=1}^r S_1/J_{G_i} \simeq \left(\bigotimes_{i=1}^r S_r \right) / J_G$, pero $S \simeq \bigotimes_{i=1}^r S_i$, es decir, $S/J_G \simeq \bigotimes_{i=1}^r S_i/J_{G_i}$. Por lo tanto

$$\text{reg}(S/J_G) = \sum_{i=1}^r \text{reg}(S_i/J_{G_i}).$$

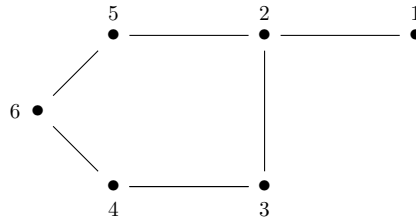
La observación 1.40 demuestra que es suficiente tomar gráficas conexas G . El siguiente Teorema nos muestra relación que existe entre la regularidad de Castelnuovo-Mumford del ideal J_G , el camino inducido² más largo de G y el número de vértices de G .

Teorema 1.41. [15, Teorema 1.1][5, Teorema 2.2] *Sea G una gráfica simple con vértices $[n]$ y sea ℓ_G la longitud del camino inducido más largo de G . Entonces*

$$\ell_G + 1 \leq \text{reg}(J_G) \leq n.$$

Además, si G es cerrado, entonces $\text{reg}(J_G) = \text{reg}(\text{in}_{\prec}(J_G)) = \ell_G + 1$.

Ejemplo 1.42. Consideremos la siguiente gráfica con 6 vértices



la cual no es cerrada, pues $\{4, 6\} \in E(G)$ pero $\{4, 5\} \notin E(G)$. El camino inducido de G más largo de G está dado por 1, 2, 3, 4, 6, es decir, $\ell_G = 4$. Por lo tanto $5 \leq \text{reg}(J_G) \leq 6$.

Si $K = \mathbb{Q}$, con Macaulay2 podemos verificar que el Teorema se satisface:

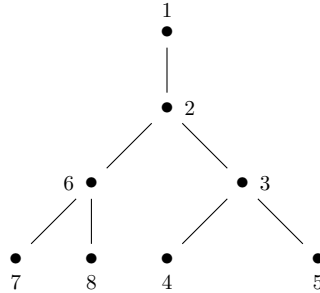
```
i1 : S=QQ[x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6];
i2 : I = ideal (x1*y2-x2*y1, x2*y3-x3*y2, x2*y5-x5*y2, x3*y4-x4*y3,
x4*y6-x6*y4, x5*y6-x6*y5);
```

²Un camino inducido de G es un camino P tal que la subgráfica inducida por los vértices de P sigue siendo un camino.

o2 : Ideal of S
i3 : regularity I;
o3 = 5

Teorema 1.43. [13, Teorema 4.1] Para un árbol³ T , se satisface $\text{reg}(S/J_T) \geq \text{iv}(T) + 1$, donde $\text{iv}(T) = |\{\text{vértices internos de } T\}|$, es decir, la cardinalidad del conjunto de todos los vértices de T que no son hojas.

Ejemplo 1.44. Consideremos el árbol T siguiente



donde en este caso $\text{iv}(T) = 3$, entonces del Teorema 1.43 se tiene que $4 \leq \text{reg}(S/J_T)$. Nuevamente, con Macaulay2 podemos verificar el Teorema.

2. EL v -NÚMERO DE IDEALES BINOMIALES DE ARISTAS J_G

En este Capítulo definiremos el v -número de un ideal I del anillo de polinomios $S = K[x_1, \dots, x_n]$, además de definirlo localmente en uno de los ideales primos asociados del ideal binomial de aristas J_G . Este es un invariante algebraico introducido por Susan Cooper y sus colaboradores en *Generalized minimum distance functions and algebraic invariants of Geramita ideals* [4] y motivado originalmente por la teoría algebraica de códigos. En particular, se estudia este invariante para los ideales binomiales J_G con G una gráfica, definidos en el Capítulo 1. Daremos uno de los Teoremas principales de [11], el cual está fuertemente relacionado con el número de dominación conexa de la gráfica G , donde la prueba de este Teorema se apoya principalmente en algunos resultados de [16]. Para cerrar la Sección, se muestra otro de los Teoremas principales de [11] para un tipo de gráficas particulares, que se denominan cerradas. Estas gráficas son definidas en [10], y su v -número está relacionado con diversos elementos de la gráfica.

2.1. Ideales de aristas y el v -número. Recordemos que un ideal primo p es un *ideal primo asociado* de S/I si $(I : f) = p$ para algún $f \in S_d$, donde $(I : f)$ es el ideal generado por el conjunto de todos los $g \in S$ tal que $gf \in I$. El conjunto de primos asociados de S/I es denotado por $\text{Ass}(S/I)$ o simplemente $\text{Ass}(I)$.

Definición 2.1. [4, Definición 4.1] Sea $S = K[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ el anillo de polinomios con n variables e $I \subset S$ un ideal homogéneo. El v -número de I es el invariante definido como sigue

$$v(I) = \min\{d \geq 0 : \exists f \in S_d \text{ y } p \in \text{Ass}(I) \text{ con } (I : f) = p\}.$$

Podemos definir el v -número de $I \subset S$ localmente para cada primo asociado p de I como

$$v_p(I) = \min\{d \geq 0 : \exists f \in S_d \text{ con } (I : f) = p\}.$$

Si consideramos el ideal máximo $m = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ tenemos que $K \simeq S/m$ y por tanto $v(m) = 0$. Ahora, para un módulo $M \neq 0$ denotamos

$$\alpha(M) = \min\{\deg(f) : f \in M \setminus \{0\}\}.$$

Por convención, si $M = 0$ entonces $\alpha(0) = 0$.

³Un árbol es una gráfica conexa T tal que para todo $i, j \in V(T)$ existe un único camino de i a j .

Proposición 2.2. [12, Proposición 3.1] Sea $I \subset S$ un ideal monomial libre de cuadrados. Entonces

$$v(I) = \min\{\alpha((I : p)/I) : p \in \text{Ass}(I)\}$$

y $\alpha((I : p)/I) = v_p(I)$ para $p \in \text{Ass}(I)$.

Demostración. Sea $\text{Ass}(I) = \{p_1, \dots, p_r\}$. Sabemos que para cualquier ideal se cumple que $(I : 1) = I$ y $(I : I) = S$. Supongamos que I es primo y sea $p \in \text{Ass}(I)$ y así existe un $f \in S_d$ tal que $p = (I : f)$. Notemos que $I = p$. En efecto, siempre se tiene que $I \subseteq (I : f) = p$. Sea $g \in (I : f) = p$, entonces $gf \in I$, como I es primo se tiene que $f \in I$ o $g \in I$. Notemos que $f \notin I$ pues si sucediera que $f \in I$ obtenemos que $(I : f) = S$ lo cual sería una contradicción. Esto implica que $g \in I$, por lo tanto $I = p$. Como $(p : 1) = p$ y $\deg(1) = 0$, entonces de la definición local del v -número tenemos que

$$v_p(p) = \min\{d \geq 0 : \exists f \in S_d \text{ con } (p : f) = p\} = 0.$$

Por otra parte, como $(I : p) = S$ y $(I : p)/I = S/I$ es un dominio entero, pues $I = p$, entonces contiene constantes, así se tiene que

$$\alpha(S/I) = \min\{\deg(f) : f \in S/I, f \neq 0\} = 0,$$

por lo tanto $v_p(I) = \alpha((I : p)/I) = 0$. Ahora, sea I un ideal no primo, por lo anterior podemos suponer que I tiene al menos dos primos asociados. Existen p_i y $f \in S_d$ tal que $(I : f) = p_i$ y $v(I) = \deg(f)$. Tenemos que $f \in (I : p_i) \setminus I$ y además, como $(I : f) = p_i$ notemos que $f \in (I : p_i) \setminus I$, y por lo tanto

$$v(I) = \deg(f) \geq \alpha((I : p_k)/I) \geq \min\{\alpha(I : p) : p \in \text{Ass}(I)\}.$$

Para la otra desigualdad, como I es un ideal monomial libre de cuadrados, se tiene que $I = \bigcap_{i=1}^r p_i \subsetneq \bigcap_{i \neq k} p_i = (I : p_k)$ para $1 \leq k \leq r$, podemos elegir un polinomio homogéneo f_k en $(I : p_k) \setminus I$ tal que $\alpha((I : p_k)/I) = \deg(f_k)$. Notemos que, como $f_k \notin I = \bigcap_{i=1}^r p_i$ entonces existe un ideal primo p_k tal que $f_k \notin p_k$. Además, $p_k \subset (I : f_k)$, ya que si $p_k \not\subset (I : f_k)$ se seguiría que existe un polinomio $g \in p_k$ tal que $g \notin (I : f_k)$, es decir, $gf_k \notin I = \bigcap_{i=1}^r p_i$, pero esto implicaría que $gf_k \notin p_k$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, a partir del análisis anterior se tiene las contenciones siguientes:

$$p_k \subset (I : f_k) = \bigcap_{i=1}^r (p_i : f_k) = \bigcap_{f_k \notin p_i} p_i \subset p_k$$

así se sigue que $(I : f_k) = p_k$, y consecuentemente obtenemos $v(I) \leq \deg(f_k)$ para $k = 1, \dots, r$. $\square$

Sea G una gráfica simple con conjunto de vértices $V(G) = [n]$ y aristas $E(G)$. El *ideal de aristas* de G es el ideal monomial libre de cuadrados definido por

$$I(G) = \langle x_i x_j : \{i, j\} \in E(G) \rangle \subset K[x_1, \dots, x_n].$$

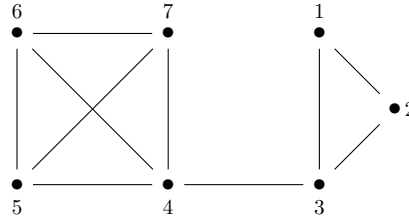
Observación 2.3. De la definición 1.26, si G es una gráfica cerrada, entonces el ideal inicial de J_G (con respecto al orden lexicográfico) está dado por

$$\text{in}_{\prec}(J_G) = \langle x_i y_j : \{i, j\} \in E(G), i < j \rangle.$$

Así, podemos notar que el ideal $\text{in}_{\prec}(J_G)$ puede verse como el ideal de aristas de una gráfica bipartita H_G con su conjunto de vértices $V(H_G) = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_n\}$, es decir, $\text{in}_{\prec}(J_G) = I(H_G)$. La gráfica H_G se llama *gráfica inicial* de G .

Por otro lado, recordemos que un conjunto $\{e_1, \dots, e_r\}$ de aristas disjuntas por pares de una gráfica G es un *apareamiento inducido* si las únicas aristas de G contenidas en $\bigcup_{i=1}^r e_i$ son $e_1, \dots, e_r$. El *número de apareamiento inducido* $\text{im}(G)$, es el número de aristas con el mayor apareamiento inducido. Además, se sabe de [10, Proposición 7.32], que la longitud del camino más largo de G es igual al número de apareamiento inducido por H_G .

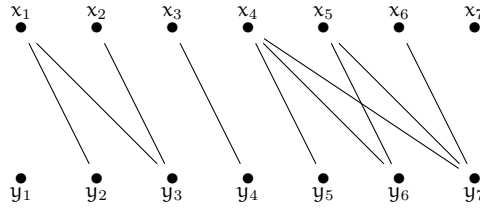
Ejemplo 2.4. Sea G la siguiente gráfica cerrada con 7 vértices



entonces, el ideal inicial de J_G está dado por

$$\text{in}_{<}(J_G) = \langle x_1y_2, x_1y_3, x_2y_3, x_3y_4, x_4y_5, x_4y_6, x_4y_7, x_5y_6, x_5y_7, x_6y_7 \rangle$$

y la gráfica inicial H_G es la siguiente gráfica bipartita



Un camino inducido más largo en G viene dado por 1, 3, 4, 6 y el correspondiente apareamiento inducido en H_G es $\{x_1, y_3\}, \{x_3, y_4\}, \{x_4, y_6\}$. Por tanto, $\ell_G = \text{im}(H_G) = 3$. Además, del Teorema 1.41 se tiene que $\text{reg}(J_G) = 4$.

2.2. v -número de ideales binomiales. En esta Sección estudiaremos el v -números de ideales binomiales de aristas. Se demostrará que el invariante algebraico $v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G)$ coincide con un invariante puramente combinatorio de la gráfica G , a saber, su número de dominación conexa.

Observación 2.5. Notemos que si G es una gráfica simple con vértices $[n]$ con componentes conexas $G_1, \dots, G_r$ y $S_i = K[[x_j, y_j] : j \in V(G_i)]$. Entonces

$$(J_G : P_T(G)) = \bigcap_{i=1}^r (J_G : P_{T_i}(G_i)) = \bigcap_{i=1}^r (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) + J_G.$$

En efecto, para la primero igualdad:

$$\begin{aligned} \text{Sea } f \in (J_G : P_T(G)) &\Leftrightarrow f \cdot P_T(G) = f \sum_{i=1}^r P_{T_i}(G_i)S \subseteq J_G \quad (\text{Proposición 1.23}) \\ &\Leftrightarrow fg = f \sum_{i=1}^r g_i \in J_G \text{ con } g = \sum_{i=1}^r g_i \in \sum_{i=1}^r P_{T_i}(G_i) \\ &\Leftrightarrow fg_i \in P_{T_i}(G_i) \subseteq J_G \\ &\Leftrightarrow f \in (J_G : P_{T_i}(G_i)) \\ &\Leftrightarrow f \in \bigcap_{i=1}^r (J_G : P_{T_i}(G_i)), \text{ para toda } i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Por otro lado, para la segunda igualdad:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } f \in \bigcap_{i=1}^r (J_G : P_{T_i}(G_i)) &\Leftrightarrow fg_i \in J_G \text{ para toda } g_i \in P_{T_i}(G_i) \\
&\Leftrightarrow f \sum_{i=1}^r g_i = fg_i + f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r g_j \in J_G \\
&\Leftrightarrow fg_i \in J_{G_i} \text{ para toda } i \text{ y } f \sum_{j=1}^r g_j \in J_G \\
&\Leftrightarrow f \in (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) \text{ para toda } i \text{ y } f \sum_{j=1}^r g_j \in J_G \\
&\Leftrightarrow f \in \bigcap_{i=1}^r (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) \text{ y } f \sum_{j=1}^r g_j \in J_G \\
&\Leftrightarrow f \in \bigcap_{i=1}^r (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) + J_G.
\end{aligned}$$

La siguiente Proposición prueba que es suficiente tomar gráficas conexas simples para calcular el v -número del ideal J_G .

Proposición 2.6. [11, Proposición 3.1] *Sea G una gráfica simple con vértices $[n]$ y $G_1, \dots, G_r$ sus componentes conexas. Sea $S_i = K[\{x_j, y_j\} : j \in V(G_i)]$. Entonces,*

$$v(J_G) = v\left(\sum_{i=1}^r J_{G_i} S_i\right) = \sum_{i=1}^r v(J_{G_i}).$$

Demostración. Dado que $G_1, \dots, G_r$ son componentes conexas de G , podemos escribir $J_G = \sum_{i=1}^r J_{G_i} S_i$. Sea $T \subseteq [n]$ tal que $v(J_G) = v_{P_T(G)}(J_G)$. Entonces, existe $f \in S$ con $\deg(f) = v(J_G)$ y

$$(J_G : f) = P_T(G) = \sum_{i=1}^r P_{T_i}(G_i) S_i \quad (\text{Proposición 1.23}).$$

En particular, esto implica que $f \in (J_G : P_T(G)) \setminus J_G$. Además,

$$(J_G : P_T(G)) = \bigcap_{i=1}^r (J_G : P_{T_i}(G_i)) = \bigcap_{i=1}^r (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) + J_G \quad (\text{Observación 2.5}).$$

Como $\bigcap_{i=1}^r (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) = \prod_{i=1}^r (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i))$, podemos escribir $f = f_1 \cdots f_r$ con $f_i \in (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) \setminus J_{G_i}$. Así $(J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) = P_{T_i}(G_i) y$

$$\sum_{i=1}^r v(J_{G_i}) \leq \sum_{i=1}^r \deg(f_i) = v(J_G).$$

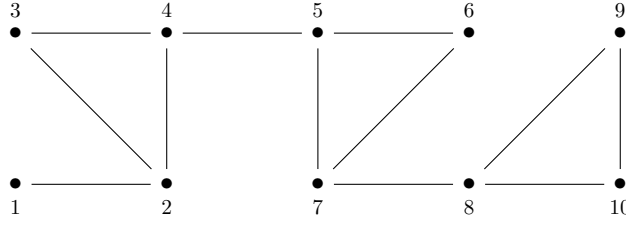
En cuanto a la otra desigualdad, para cada componente conexa de G elegimos $f_i \in S_i$ tal que $v(J_{G_i}) \deg(f_i)$. Por lo tanto, $f_i \in (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) \setminus J_{G_i}$ para algún $P_{T_i}(G_i)$. Como antes, tenemos $f = f_1 \cdots f_r \in \bigcap_{i=1}^r (J_{G_i} : P_{T_i}(G_i)) = (J_G : P_T(G))/J_G$, y por la Proposición 1.23, es un primo mínimo de J_G . En particular, de la Proposición 2.2, obtenemos

$$v(J_G) \leq \alpha((J_G : P_T(G))/J_G) \leq \sum_{i=1}^r \deg(f_i) = \sum_{i=1}^r v(J_{G_i}). \quad \square$$

Definición 2.7. [16, Definición 3.1] *Sea G una gráfica simple de vértices $[n]$. Dado $e = \{i, j\} \notin E(G)$, definimos G_e la gráfica con vértices $[n]$ y con aristas*

$$E(G_e) = E(G) \cup \{\{k, \ell\} : k, \ell \in N_G(i) \text{ o } k, \ell \in N_G(j)\}.$$

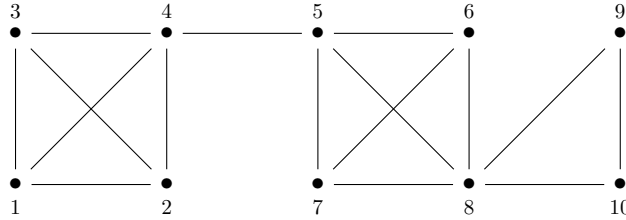
Ejemplo 2.8. Consideremos la siguiente gráfica G :



y notemos que $e = \{2, 7\} \notin E(G)$, además $N_G(2) = \{1, 3, 4\}$ y $N_G(7) = \{5, 6, 8\}$. Entonces las aristas de G_e son

$$E(G_e) = E(G) \cup \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}, \{6, 8\}\}.$$

Por lo tanto, la gráfica G_e es la siguiente:



Proposición 2.9. [16, Proposición 3.2] Sea G una gráfica simple con vértices $[n]$ y $e = \{i, j\} \notin E(G)$. Entonces

$$(J_G : f_e) = \bigcap_{T \in \mathcal{A}_{ij}} P_T(G),$$

donde $\mathcal{A}_{ij}$ es un conjunto que consta de todos los subconjuntos de T de $[n] \setminus \{i, j\}$ con las siguientes propiedades:

- (a) $P_T(G)$ es un primo mínimo de J_G .
- (b) Para cada camino $P : i, i_1, \dots, i_s, j$ existe un t tal que $i_t \in T$.

Demostración. Del Teorema 1.27 $J_G = \bigcap_{T \subset [n]} P_T(G)$ y J_G es J_G -primario, pues $P_T(G)$ es primo, y $f_e \notin J_G$, entonces del [1, Lema 4.4] tenemos que $(J_G : f_e) = \bigcap_{f_e \notin P_T(G)} P_T(G)$. Basta mostrar que $f_e \notin P_T(G)$ si y sólo si $T \in \mathcal{A}_{ij}$. Supongamos que $f_e \notin P_T(G)$ para algún $T \subset [n]$. Notemos que $i, j \notin T$, ya que si $i \in T$ implica que $x_i, y_i \in P_T(G)$ y así $f_e \in P_T(G)$ que sería una contradicción. Similarmente, si $j \in T$. Además, i y j no pertenecen a la misma componente conexa de $[n] \setminus T$ ya que tendríamos de nuevo que $f_e \in P_T(G)$. Por lo tanto, al menos uno de los vértices i_ℓ de cada camino $P : i, i_1, \dots, i_s, j$ debe estar en T . Por último, como $J_G = \bigcap_{T \subset [n]} P_T(G)$ con $P_T(G)$, entonces de [8, Lema 1.3.5] se tiene que $P_T(G)$ es ideal primo mínimo de J_G . Por otro lado, para $T \in \mathcal{A}_{ij}$, tenemos que las variables x_i, x_j, y_i, y_j no están en $P_T(G)$, e i, j no pertenecen a la misma componente conexa de $[n] \setminus T$ pues existe $i_\ell \in T$ de $P : i, i_1, \dots, i_s, j$, lo que implica que $f_e \notin P_T(G)$. $\square$

Lema 2.10. [16, Lema 3.8] Sean G una gráfica simple con vértices $[n]$, $e = \{i, j\} \notin E(G)$ y $P : i, i_1, \dots, i_s, j$ un camino en G . Supongamos que A, B son dos subconjuntos de $\{i_1, \dots, i_s\}$ con $A \cup B = \{i_1, \dots, i_s\}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$h_{A,B} = \prod_{i_j \in A} x_{i_j} \prod_{i_j \in B} y_{i_j} \in J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq s \rangle,$$

donde $g_{P,0} = x_{i_1} \cdots x_{i_s}$ y para cada $1 \leq t \leq s$, $g_{P,t} = y_{i_1} \cdots y_{i_t} x_{i_{t+1}} \cdots x_{i_s}$.

Demostración. Para cada conjunto dado A, B con $A \cup B = \{i_1, \dots, i_s\}$ y $A \cap B = \emptyset$, sea

$$\mathcal{M}_{A,B} = \{j : i_j \in A \text{ y } i_{j+1} \in B\}.$$

Por inducción en el número de elementos de $\mathcal{M}_{A,B}$, se demostrará que $h_{A,B} \in J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 1 \leq t \leq s-1 \rangle$. Si $|\mathcal{M}_{A,B}| = 0$, entonces para todo $i_j \in A$ se tiene que $i_{j+1} \notin B$. Notemos que si $i_1 \in A$, se tendría que $i_2 \notin B$, y así $i_2 \in A$ pues A y B forman una partición de $\{i_1, \dots, i_s\}$, por lo tanto $i_3 \notin B$. Siguiendo este procedimiento notemos que $A = \{i_1, \dots, i_s\}$, es decir, $B = \emptyset$, lo cual no es posible ya que A, B es una partición. Ahora, supongamos que k es el menor entero tal que $k \geq 2$ e $i_k \in A$. Si repetimos el proceso anterior podemos notar que $A = \{i_k, i_{k+1}, \dots, i_s\}$, como A, B es una partición, entonces $B = \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$. Notemos que $s \neq k-1$, pues de lo contrario tendríamos que $A = \emptyset$, lo cual no es posible. Se sigue que, si $\mathcal{M}_{A,B} = \emptyset$ existe $1 \leq t \leq s-1$ tal que $B = \{i_1, \dots, i_t\}$ y $A = \{i_{t+1}, \dots, i_s\}$. Así que $h_{A,B} = g_{P,t}$, pues

$$h_{A,B} = \prod_{i_j \in A} x_{i_j} \prod_{i_j \in B} y_{i_j} = x_{i_{t+1}} \cdots x_{i_s} y_{i_1} \cdots y_{i_t} = g_{P,t}$$

y así se cumple la afirmación.

Por otro lado, sea $k \geq 0$ y supongamos que para cada partición A, B de $\{i_1, \dots, i_s\}$ con $|\mathcal{M}_{A,B}| \leq k$, $h_{A,B} \in J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq s \rangle$ y que $A', B' \subset \{i_1, \dots, i_s\}$ forman una partición de $\{i_s, \dots, i_1\}$ y $|\mathcal{M}_{A',B'}| = k+1$. Sea $d = \max \mathcal{M}_{A',B'}$, entonces existe $1 \leq p \leq d$ y $d+1 \leq q \leq s$ tal que $\{i_p, i_{p+1}, \dots, i_d, i_{q+1}\} \cap \{i_1, \dots, i_s\} \subset A$ y $\{i_{p-1}, i_{d+1}, i_{d+2}, \dots, i_q\} \subset B$ pues $A \cup B = \{i_1, \dots, i_s\}$ y $|\mathcal{M}_{A,B}| \leq k$.

Ahora, notemos que $h_{A',B'} = f_{i_d, i_{d+1}} h_{A',B'}/(x_{i_d} y_{i_{d+1}}) + y_{i_d} x_{i_{d+1}} h_{A',B'}/(x_{i_d} y_{i_{d+1}})$, pues $\{i_d, i_{d+1}\} \in E(G_e)$. Entonces $h_{A',B'} \in J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq s \rangle$ si y sólo si

$$u_1 = y_{i_d} x_{i_{d+1}} h_{A',B'}/(x_{i_d} y_{i_{d+1}}) \in J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq s \rangle.$$

Pero $u_1 = h_{A',B'}$ donde $A'_1 = A' \cup \{i_{d+1}\} \setminus \{i_d\}$ y $B_1 = B' \cup \{i_d\} \setminus \{i_{d+1}\}$. Si $d+1 < q$ podemos repetir el mismo proceso en $h_{A'_1, B'_1}$ usando el binomio $f_{i_{d+1}, i_{d+2}} \in J_{G_e}$. Después de un número finito de pasos podemos encontrar la siguiente representación para $h_{A',B'}$

$$h_{A',B'} = \sum_{z=d}^{q+1} w'_z f_{i_z, i_{z+1}} + h_{A'',B''},$$

donde $w'_i \in K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_d]$, $A'' = A' \cup \{i_q\} \setminus \{i_d\}$ y $B'' = B' \cup \{i_d\} \setminus \{i_q\}$.

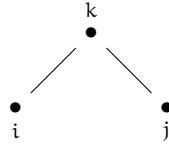
Para mostrar el resultado basta ver que $h_{A'',B''} \in J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq s \rangle$. En efecto, si $p = d$ entonces $|\mathcal{M}_{A'',B''}| = k$ y por la hipótesis de inducción la demostración está completa. En este caso $|\mathcal{M}_{A'',B''}| = k+1$ y su elemento máximo es $d-1$. Podemos repetir el procedimiento anterior en $h_{A'',B''}$ y después de un número finito de pasos encontramos la siguiente expresión

$$(2.1) \quad h_{A',B'} = \sum_{z=p}^{q-1} w_z f_{i_z, i_{z+1}} + h_{A,B},$$

donde A es de la forma $A = A \cup \{i_{p+q-d}, \dots, i_q\} \setminus \{i_q, \dots, i_{p+q-d-1}\}$ y B de la forma $B = B' \cup \{i_p, \dots, i_{p+q-d-1}\} \setminus \{i_{p+q-d}, \dots, i_q\}$ y $w_p, w_{p+1}, \dots, w_{q-1} \in K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$. Notemos que de la ecuación (2.1) se tiene que $f_{i_z, i_{z+1}} \in J_{G_e}$ porque $\{i_z, i_{z+1}\} \in E(G_e)$. También, $|\mathcal{M}_{A,B}| \leq k$ y por hipótesis de inducción $h_{A,B} \in J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq s \rangle$. Se sigue que $h_{A',B'} \in J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq s \rangle$. $\square$

Observación 2.11. Sea G una gráfica y $e = \{i, j\} \notin E(G)$. Veamos cómo se relaciona el ideal $(J_G : f_e)$ con la suma de ideales $J_{G_e} + \langle g_{P,t} : P : i, i_1, \dots, i_s, j \text{ un camino de } i \text{ a } j \text{ y } 0 \leq t \leq s \rangle$ para algunos casos particulares.

- (1) Consideremos una gráfica conexa G con vértices $V(G) = \{i, k, j\} = [3]$ y aristas $E(G) = \{\{i, k\}, \{k, j\}\}$.



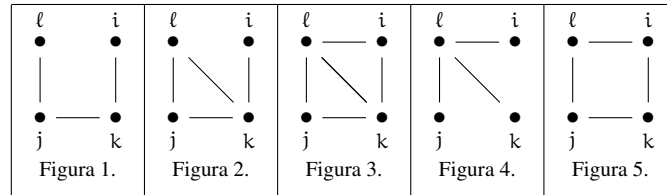
Sea $P : i, k, j$ el único camino de los vértices i a j de G , con $i < j$ y $e = \{i, j\} \notin E(G)$. Notemos primero que $E(G) = E(G_e)$, por lo tanto $J_G = J_{G_e}$, además $\langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq 1 \rangle = \langle x_k, y_k \rangle$. Ahora notemos que $J_G \subset \langle x_k, y_k \rangle$, pues si $h \in J_G$ entonces

$$h = g_1 f_{ik} + g_2 f_{kj} = x_k(g_2 y_j - g_1 y_i) + y_k(g_1 x_i - g_2 x_j) \in \langle x_k, y_k \rangle.$$

Esto implica que $J_{G_e} + \langle x_k, y_k \rangle = \langle x_k, y_k \rangle$. Por otra parte, $\langle x_k, y_k \rangle$ es ideal primo, pues $K[x_i, x_k, x_j, y_i, y_k, y_j] / \langle x_k, y_k \rangle \simeq K[x_i, x_j, y_i, y_j]$ es dominio entero. Ahora, si $f \in (J_G : f_e)$ entonces $f \cdot f_e \in J_G \subset \langle x_k, y_k \rangle$, es decir, $f \cdot f_e \in \langle x_k, y_k \rangle$, pero $f_e = x_i y_j - x_j y_i \notin \langle x_k, y_k \rangle$, así $f \in \langle x_k, y_k \rangle$. Por lo tanto podemos concluir que

$$(J_G : f_e) \subseteq J_{G_e} + \langle g_{P,t} : 0 \leq t \leq 1 \rangle = \langle x_k, y_k \rangle.$$

- (2) Ahora consideremos una gráfica conexa G con vértices $V(G) = \{i, k, \ell, j\} = [4]$ y con $G \neq \mathcal{K}_4$. Las posibles gráficas con estas características son las siguientes:



Notemos que los únicos caminos de i a j son de longitud 2 y 3. Sin pérdida de generalidad, sean $P_1 : i, k, j$ y $P_2 : i, k, \ell, j$, con $i < k < \ell < j$, los caminos de i a j de longitud 2 y 3 respectivamente.

Para P_1 , tenemos $\langle g_{P_1,t} : 0 \leq t \leq 1 \rangle = \langle x_k, y_k \rangle$, y $E(G) \subseteq E(G_e)$, entonces $J_G \subseteq J_{G_e}$. Notemos que $J_{G_e} \subset \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$, pues en todos los casos, dado $h \in J_{G_e}$ se puede escribir como

$$h = x_k h_1 + y_k h_2 + x_\ell h_3 + y_\ell h_4 \in \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle,$$

es decir, $J_G \subseteq J_{G_e} \subset \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$ y $\langle x_k, y_k \rangle \subset \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$, entonces $J_{G_e} + \langle x_k, y_k \rangle \subset \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$. Además, $\langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$ es ideal primo, pues

$$K[x_i, x_k, x_\ell, x_j, y_i, y_k, y_\ell, y_j] / \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle \simeq K[x_i, x_j, y_i, y_j]$$

que es un dominio entero. Entonces, notemos que si $f \in (J_G : f_e)$ si y sólo si $f \cdot f_e \in J_G$ entonces $f \cdot f_e \in \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$, pero $f_e = x_i y_j - x_j y_i \notin \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$, por tanto $f \in \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$. Por otro lado, sea $f \in (J_G : f_e)$ esto implica que $f \cdot f_e \in J_G \subset J_{G_e} + \langle x_k, y_k \rangle$ y supongamos que $f \notin J_{G_e} + \langle x_k, y_k \rangle$, esto implica que $f \notin \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$, una contradicción. Por lo tanto

$$(J_G : f_e) \subseteq J_{G_e} + \langle g_{P_1,t} : 0 \leq t \leq 1 \rangle.$$

Para P_2 , se tiene que $J_G = J_{G_e} \subset \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$ y además $\langle g_{P_2,t} : 0 \leq t \leq 2 \rangle = \langle x_k x_\ell, x_\ell y_k, y_k y_\ell \rangle$. Notemos que

$$\langle x_k x_\ell, x_\ell y_k, y_k y_\ell \rangle = \langle x_k, y_k \rangle \cap \langle x_\ell, y_k \rangle \cap \langle x_\ell, y_\ell \rangle \subset \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle,$$

entonces $J_G + \langle x_k x_\ell, x_\ell y_k, y_k y_\ell \rangle \subset \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$. Como antes, si $f \in (J_G : f_e)$ implica que $f \in \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$. Y nuevamente, supongamos que $f \cdot f_e \in J_G + \langle x_k x_\ell, x_\ell y_k, y_k y_\ell \rangle$ con $f \notin J_G + \langle x_k x_\ell, x_\ell y_k, y_k y_\ell \rangle$, implicaría que $f \notin \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$. Lo cual es una contradicción, por lo tanto

$$(J_G : f_e) \subseteq J_{G_e} + \langle g_{P_2,t} : 0 \leq t \leq 2 \rangle.$$

El siguiente Teorema generaliza los resultados obtenidos en la Observación 2.11.

Teorema 2.12. [16, Teorema 3.7] Sea G una gráfica simple con vértices en $[n]$ y sea $e = \{i, j\} \notin E(G)$. Entonces

$$(J_G : f_e) = J_{G_e} + \langle g_{P,t} : P : i, i_1, \dots, i_s, j \text{ es un camino entre } i, j \text{ y } 0 \leq t \leq s \rangle.$$

donde $g_{P,0}$ y $g_{P,t}$ son como el Lema anterior.

Demostración. Por la Proposición 2.9 tenemos que $(J_G : f_e) = \bigcap_{T \in \mathcal{A}_{ij}} P_T(G)$. Sea T un subconjunto arbitrario de $\mathcal{A}_{ij}$. Para cada camino $P : i, i_1, \dots, i_s, j$ tenemos que $i_\ell \in T$ para algún ℓ , y así $x_{i_\ell}, y_{i_\ell} \in P_T(G)$ lo que implica que

$$g_{P,t} = y_{i_1} \cdots y_{i_t} x_{i_{t+1}} \cdots x_{i_s} \in P_T(G)$$

para cada $1 \leq t \leq s$, pues si $1 \leq \ell \leq t$ entonces $y_{i_\ell} \mid g_{P,t}$, o si $t+1 \leq \ell \leq s$ se tiene que $x_{i_\ell} \mid g_{P,t}$. Supongamos que $k, \ell \in N_G(i)$. Si $k \in T$ o $\ell \in T$, entonces $x_k, y_k \in P_T(G)$ o $x_\ell, y_\ell \in P_T(G)$, por tanto tenemos que $f_{k\ell} \in P_T(G)$. En caso contrario, se encuentra que en la misma componente conexa de la gráfica inducida por $[n] \setminus T$, lo que implica que $f_{k\ell} \in P_T(G)$, como se deseaba. Por lo tanto tenemos que

$$J_{G_e} + \langle g_{P,t} : P : i, i_1, \dots, i_s, j \text{ es un camino y } 0 \leq t \leq s \rangle \subseteq (J_G : f_e).$$

Para demostrar la otra contención se utiliza un argumento de inducción sobre el número de vértices de G . Para el caso de $n = 1, 2$ no hay nada que probar. Los casos de $n = 3, 4$ ya se demostraron en la Observación 2.11. Supongamos que el resultado es válido para cada gráfica con un número de vértices menor que el de G . Sean $f \in (J_G : f_e)$, y $Q, P_1, \dots, P_r$ caminos entre i y j en G . Escribimos $f = f' + f''$ donde

$$f'' \in I = J_{G_e} + \langle g_{P_\ell, t} : \text{para toda } \ell \text{ y } t \rangle$$

y ningún monomio de f' está en $\text{in}_<(I)$. Entonces $f' \in (J_G : f_e)$ y así

$$(2.2) \quad f'f_e = h_1 f_{e_1} + \cdots + h_r f_{e_r}.$$

Sea $g = \text{in}_<(f')$. Ahora se demostrará que para cada i_c en el camino $Q : i, i_1, \dots, i_s, j$ se tiene que $x_{i_c} \mid g$ o $y_{i_c} \mid g$. Por contradicción, supongamos que $x_{i_c} \nmid g$ y $y_{i_c} \nmid g$ para algún $1 \leq c \leq s$. Fijemos $x_{i_c} = y_{i_c} = 0$ en la ecuación (2.2). Sea $w = f'|_{x_{i_c}=y_{i_c}=0}$ y $f'_\ell = f_\ell|_{x_{i_c}=y_{i_c}=0}$. Entonces, $\text{in}_<(w)$ es igual a g , ya que $x_{i_c} \nmid g$ y $y_{i_c} \nmid g$. También obtenemos que $wf_e = \sum_{i_c \notin e_\ell} f'_\ell f_{e_\ell}$. Por lo tanto $w \in (J_{G_1 \setminus \{e\}} : f_e)$, donde G_1 es la subgráfica inducida de G con vértices $[n] \setminus \{i_c\}$. Notemos que $J_{G_1} \subseteq J_{G_e}$ y cada camino entre i y j en $G_1 \setminus \{e\}$ es uno de los caminos $P_1, \dots, P_r$. Así, ningún monomio de w está en $\text{in}_<(J_{G_1} + \langle g_{P_\ell, t} : \text{para todo } \ell \text{ y } t \rangle)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, x_{i_c} o y_{i_c} dividen a g . Se concluye que existen dos subconjuntos A y B con $A \cup B = \{i_1, \dots, i_s\}$ tal que $\prod_{i_j \in A} x_{i_j} \prod_{i_j \in B} y_{i_j}$ divide al monomio g , y por el Lema 2.10

$$h_{A,B} = \prod_{i_j \in A} x_{i_j} \prod_{i_j \in B} y_{i_j} \in J_{G_e} + \langle g_{Q,t} : t \leq s \rangle$$

tenemos que $g \in J_{G_e} + \langle g_{Q,t} : t \leq s \rangle$. Ahora continuando el mismo argumento para $f' - g$ se muestra que $f' \in J_{G_e} + \langle g_{Q,t} : \text{para toda } 0 \leq t \leq s \rangle$. $\square$

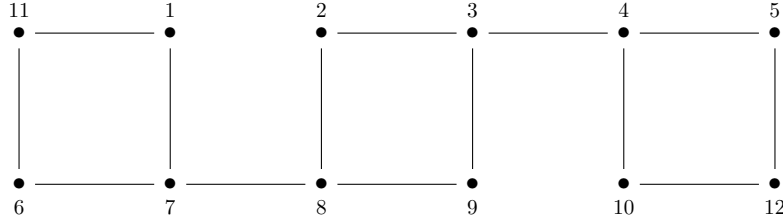
Definición 2.13. Sea G una gráfica simple con vértices $[n]$, y sea $i, j \in V(G) = [n]$ con $i < j$. Un camino $\pi : i, i_1, \dots, i_s, j$ se llama *admisible* si

- (i) $i_k \neq i_\ell$ para todo $k \neq \ell$.
- (ii) Para cada $k = 1, \dots, s$ se tiene que $i_k < i$ o $i_k > j$.
- (iii) Para cada subconjunto propio $\{j_1, \dots, j_r\}$ de $\{i_1, \dots, i_s\}$, la sucesión $i, j_1, \dots, j_r, j$ no es un camino.

Dado un camino admisible $\pi : i, i_1, \dots, i_s, j$ le asociamos el monomio

$$u_\pi = \prod_{i_k > j} x_{i_k} \prod_{i_\ell < i} y_{i_\ell}.$$

Ejemplo 2.14. Consideremos la gráfica G



El camino $\pi : i = 11, 6, 7, 8, 2, 3, 4, 10, 12 = j$, es admisible, pues todos los vértices de π son distintos, $i_k < i$ para todo $i_k \in \{6, 7, 2, 3, 4, 10\} = P$ y notemos que para todo subconjunto $\{j_1, \dots, j_r\} \subset P$, la sucesión $11, j_1, \dots, j_r, 12$ no es un camino. El monomio asociado a π es

$$u_\pi = \prod_{i_\ell < i} y_{i_\ell} = y_2 y_3 y_4 y_6 y_7 y_8 y_9.$$

Lema 2.15. [11, Lema 3.5] Sea G una gráfica con n vértices. Entonces

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i < j} \{u_\pi f_{ij} : \pi \text{ es un camino admisible de } i \text{ a } j\} \cup \{g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G)\}$$

es una base de Gröbner de $J_G + \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle$ con respecto al orden lexicográfico, donde

$$\mathcal{D}_c(G) = \{B \subseteq [n] : \forall \{i, j\} \notin E(G), \exists \text{ un camino } P : i, i_1, \dots, i_s, j, \text{ tal que } \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq B\}$$

$$y g_{C,D} = \prod_{k \in C} x_k \prod_{k \in D} y_k.$$

En particular,

$$\begin{aligned} \text{in}_<(J_G + \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle) \\ = \text{in}_<(J_G) + \text{in}_<(\langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle). \end{aligned}$$

Demostración. Para demostrar que $\mathcal{G}$ es una base de Gröbner aplicamos el criterio de Buchberger 1.13 y demostraremos que todos los pares $\mathcal{S}(f, h)$ con $fh \in \mathcal{G}$ se reducen a cero. Del [10, Teorema 7.11] tenemos que

$$\mathcal{G}' = \bigcup_{i < j} \{u_\pi f_{ij} : \pi \text{ es un camino admisible de } i \text{ a } j\}$$

es una base de Gröbner de J_G . Como consecuencia, tenemos que $\mathcal{S}(h, f)$ se reduce a cero siempre que $f, h \in \mathcal{G}'$. Además, el $\mathcal{S}$ -polinomio de dos monomios siempre se reduce a cero. Por tanto, nos queda comprobar que $\mathcal{S}(f, h)$ se reduce a cero cuando $f = u_\pi f_{ij} \in \mathcal{G}$ y $h = g_{C,D}$, en este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f, h) &= \frac{\text{mcm}(u_\pi x_i y_i, g_{C,D})}{u_\pi x_i y_j} u_\pi (x_i y_j - x_j y_i) - \frac{\text{mcm}(u_\pi x_i y_i, g_{C,D})}{g_{C,D}} g_{C,D} \\ &= \frac{\text{mcm}(u_\pi x_i y_i, g_{C,D})}{x_i y_j} (x_i y_j - x_j y_i) - \text{mcm}(u_\pi x_i y_i, g_{C,D}) \\ &= -\frac{\text{mcm}(u_\pi x_i y_i, g_{C,D})}{x_i y_j} x_j y_i. \end{aligned}$$

Notemos que el monomio $-\frac{\text{mcm}(u_\pi x_i y_i, g_{C,D})}{x_i y_j} x_j y_i$ es divisible por $g_{C,D}$ o $g_{C',D'}$, donde

$$C' = (C \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\} \quad \text{y} \quad D' = (D \setminus \{y_j\}) \cup \{y_i\}.$$

Por lo tanto $\mathcal{S}(f, h)$ se reduce a cero. Por último,

$$\begin{aligned} \text{in}_<(J_G) + \text{in}_<(\langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle) \\ &= \langle x_i y_j : \{i, j\} \in E(G), i < j \rangle + \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle \\ &= \langle \langle x_i y_j : \{i, j\} \in E(G), i < j \rangle \cup \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle \rangle \\ &= \text{in}_<(J_G + \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle). \end{aligned} \quad \square$$

Observación 2.16. Sea $G \neq \mathcal{K}_n$ una gráfica con vértices $[n]$. Entonces

$$(J_G : J_{\mathcal{K}_n}) = \bigcap_{e \notin E(G)} (J_G : f_e).$$

En efecto, sea $f \in (J_G : J_{\mathcal{K}_n})$, entonces $fg \in J_G$ con $g \in \mathcal{K}_n$. Si $g \notin J_G$, entonces $g = f_e$ para toda $e \notin E(G)$, es decir, $fg = ff_e \in J_G$ para cada $e \notin E(G)$, o bien, $f \in (J_G : f_e)$ con $e \notin E(G)$. Por lo tanto $f \in \bigcap_{e \notin E(G)} (J_G : f_e)$. Para la otra contención, sea $f \in \bigcap_{e \notin E(G)} (J_G : f_e)$, entonces $ff_e \in J_G$ para toda $e \notin E(G)$, y $f_e \in J_{\mathcal{K}_n}$, por lo tanto $f \in (J_G : J_{\mathcal{K}_n})$.

Observación 2.17. Sea $G \neq \mathcal{K}_n$ una gráfica y $e = \{i, j\} \notin E(G)$. Ahora veremos la relación entre $(J_G : J_{\mathcal{K}_n})$ y $J_G + \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle$ para los casos $n = 3$ y $n = 4$.

- (1) Consideremos la gráfica G de (1) de la Observación 2.11. De la Observación 2.16 y de la Proposición 2.9 tenemos que $(J_G : J_{\mathcal{K}_3}) = (J_G : f_e) = \langle x_k, y_k \rangle$. Por otro lado, $J_G \subset (J_G : f_e) = \langle x_k, y_k \rangle$ y $\langle g_{C,D} : C = \{k\} \text{ o } D = \{k\} \rangle = \langle x_k, y_k \rangle$, y entonces $J_G + \langle g_{C,D} : C = \{k\} \text{ o } D = \{k\} \rangle = \langle x_k, y_k \rangle$, es decir,

$$(J_G : J_{\mathcal{K}_3}) = J_G + \langle g_{C,D} : C = \{k\} \text{ o } D = \{k\} \rangle.$$

- (2) Ahora consideremos las gráficas como en (2) de la Observación 2.11. Debemos estudiar cada gráfica independientemente.

Para la gráfica de la figura 1, por la Observación 2.16 $(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = (J_G : f_{ij}) \cap (J_G : f_{kl}) \cap (J_G : f_{il})$. Y de la Proposición 2.9 tenemos $(J_G : f_{ij}) = \langle x_k, y_j, f_{lj} \rangle$, $(J_G : f_{kl}) = \langle x_j, y_j, f_{ik} \rangle$ y $(J_G : f_{il}) = \langle x_k, y_j, f_{lj} \rangle \cap \langle x_j, y_j, f_{ik} \rangle$, así $(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = \langle x_k, y_j, f_{lj} \rangle \cap \langle x_j, y_j, f_{ik} \rangle$. Por otro lado, $J_G = \langle f_{ik}, f_{kj}, f_{lj} \rangle$ y además x_k, x_ℓ, y_k, y_ℓ son algunos generadores de $I = \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle$, pues existen los caminos $P_1 : i, k, j$ y $P_2 : i, \ell, j$. Ahora bien, si $f \in (J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = \langle x_k, y_j, f_{lj} \rangle \cap \langle x_j, y_j, f_{ik} \rangle$, entonces $f = f_1 x_k + f_2 y_k + f_3 f_{lj}$ y $f = g_1 x_\ell + g_2 y_\ell + g_3 f_{ik}$, donde $f_1 x_k + f_2 y_k, g_1 x_\ell + g_2 y_\ell \in I$ y $f_3 f_{lj}, g_3 f_{ik} \in J_G$, por lo tanto

$$(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) \subseteq J_G + \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle.$$

Para la gráfica de la figura 2, tenemos que $(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = (J_G : f_{ij}) \cap (J_G : f_{il}) = \langle x_k, y_k, f_{lj} \rangle = \langle x_k, y_k \rangle + \langle f_{lj} \rangle$, pues $(J_G : f_{ij}) = \langle x_k, y_k, f_{lj} \rangle = (J_G : f_{il})$, y notemos que $\langle f_{lj} \rangle \subset J_G$ y $\langle x_k, y_k \rangle \subset I = \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle$, ya que x_k, y_k son algunos generadores de I pues existen los caminos $P_1 : i, k, j$ y $P_2 : i, k, \ell$, y por lo tanto

$$(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) \subseteq J_G + \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle.$$

Para la gráfica de la figura 3, tenemos que $(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = (J_G : f_{ij}) = \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$ y x_k, x_ℓ, y_k, y_ℓ son algunos generadores de $\langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle$, pues existen los caminos $P_1 : i, k, j$ y $P_2 : i, \ell, j$, entonces $(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) \subset \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle$ y por lo tanto

$$(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) \subseteq J_G + \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle.$$

Para la gráfica de la figura 4 se tiene que $(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = (J_G : f_{ij}) \cap (J_G : f_{il}) \cap (J_G : f_{lj}) = \langle x_k, y_k \rangle$, pues $(J_G : f_{ij}) = (J_G : f_{il}) = (J_G : f_{lj}) = \langle x_k, y_k \rangle$. Por otro lado, $I = \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle = \langle x_k, y_k \rangle$ pues los únicos caminos son

$P_1 : i, k, j, P_2 : i, k, \ell$ y $P_3 : \ell, k, j$. Además, $J_G = \langle f_{ik}, g_{\ell k}, f_{kj} \rangle$, entonces $J_G + I = I$. Por lo tanto

$$(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = J_G + \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle.$$

Por último, para la gráfica de la figura 5, se tiene que $(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = (J_G : f_{ij}) \cap (J_G : f_{kl})$. Y en este caso $(J_G : f_{ij}) = \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle$ y $(J_G : f_{kl}) = \langle x_i, x_j, y_i, y_j \rangle$, entonces $(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) = \langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle \cap \langle x_i, x_j, y_i, y_j \rangle$. Notemos que las variables $x_k, y_k, x_\ell, y_\ell \in I = \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle$, pues existen los caminos $P_1 : i, k, j$ y $P_2 : i, \ell, j$, así $\langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle \subset I$. Similarmente, las variables $x_i, y_j, x_j, y_i \in I$, pues existen los caminos $P_3 : k, i, \ell$ y $P_4 : k, j, \ell$, entonces $\langle x_i, x_j, y_i, y_j \rangle \subset I$, se sigue que $\langle x_k, x_\ell, y_k, y_\ell \rangle \cap \langle x_i, x_j, y_i, y_j \rangle \subset I$. Por lo tanto

$$(J_G : J_{\mathcal{K}_4}) \subset J_G + \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle.$$

La siguiente Proposición generaliza los resultados de la Observación 2.17.

Proposición 2.18. [11, Proposición 3.6] Sea $\mathcal{D}_c(G)$ y $g_{C,D}$ como en Lema 2.15, donde $C \cup D = \{i_1, \dots, i_s\} \in \mathcal{D}_c(G)$ con $C \cap D = \emptyset$ y sea $G \neq \mathcal{K}_n$ una gráfica con vértices $[n]$. Entonces

$$(J_G : J_{\mathcal{K}_n}) = \bigcap_{e \notin E(G)} (J_G : f_e) = J_G + \langle g_{C,D} : C \cup D \in \mathcal{D}_c(G), C \cap D = \emptyset \rangle.$$

Demostración. La primer igualdad se mostró en la Observación 2.16. Para la segunda igualdad, sea $g_{C,D} = \prod_{k \in C} x_k \prod_{k \in D} y_k$ con $B = C \cup D = \{i_1, \dots, i_s\} \in \mathcal{D}_c(G)$ y $C \cap D = \emptyset$. Queremos probar que $g_{C,D} \in (J_G : f_e)$ para cada $e = \{i, j\} \notin E(G)$. Por definición de $\mathcal{D}_c(G)$, para cada $e = \{i, j\} \notin E(G)$ podemos encontrar un camino $P_e : i, j_1, \dots, j_s, j$ de i a j tal que $\mathcal{J} = \{j_1, \dots, j_s\} \subseteq B$. Fijamos $C' = \mathcal{J} \cap C$ y $D' = \mathcal{J} \cap D$ y definimos

$$q = \prod_{k \in C'} x_k \prod_{k \in D'} y_k.$$

Observemos que $\mathcal{J} = C' \cup D'$ y $C' \cap D' = \emptyset$. Así que, por el Teorema 2.12 $q \in (J_G : f_e)$. Además, por construcción, q divide a $g_{C,D}$. Así, $g_{C,D} \in (J_G : f_e)$. Esto prueba que

$$\langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D = \{i_1, \dots, i_s\} \in \mathcal{D}_c(G) \rangle \subseteq \bigcap_{e \notin E(G)} (J_G : f_e) = (J_G : J_{\mathcal{K}_n}),$$

y como $J_G \subseteq (J_G : J_{\mathcal{K}_n})$ podemos concluir que

$$J_G + \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D = \{i_1, \dots, i_s\} \in \mathcal{D}_c(G) \rangle \subseteq \bigcap_{e \notin E(G)} (J_G : f_e) = (J_G : J_{\mathcal{K}_n}).$$

Para la otra contención, usaremos inducción en el número de vértices. Para $n = 1, 2$ no hay nada que mostrar. Para $n = 3, 4$ se mostraron en la Observación 2.17. Así que, supongamos por hipótesis de inducción que el resultado se cumple para cada gráfica con menor número de vértices de G . Sea $f \in (J_G : J_{\mathcal{K}_n})$ y sea $\mathcal{D}_c(G) = \{A, B_1, \dots, B_r\}$. Definimos $I = J_G + \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \setminus \{A\} \rangle$. Entonces, por el algoritmo de la división, escribimos $f = f' + f''$ tal que $f' \in I$ y ningún monomio de f' está en $\text{in}_\prec(I)$. Usando la primera parte de la prueba, $f' = f - f'' \in (J_G : J_{\mathcal{K}_n})$, y tenemos que

$$f' f_e = h_{1_e} f_{e_1} + \dots + h_{k_e} f_{e_k}, \quad \forall e \notin E(G) \quad (1)$$

donde $f_{e_1}, \dots, f_{e_k}$ son los generadores naturales de J_G . Sea $g = \text{in}_\prec(f')$ y $A = \{i_1, \dots, i_s\}$. Demostraremos que para cada $i_c \in A$, es decir, $x_{i_c} | g$ o $y_{i_c} | g$. Por contradicción. Supongamos que $x_{i_c} \nmid g$ y $y_{i_c} \nmid g$, para alguna $1 \leq c \leq s$ y fijamos $x_{i_c} = y_{i_c} = 0$ en (1). Definimos $w = f'|_{x_{i_c}=y_{i_c}=0}$ y $h'_{j_e} = h_{j_e}|_{x_{i_c}=y_{i_c}=0}$. Entonces

$$w f_e = \sum_{i_c \notin e_j} h'_{j_e} f_{e_j} \quad \forall e \notin E(G), i_c \notin e. \quad (2)$$

Además, $w \in (J_{G_1} : J_{\mathcal{K}_{n-1}})$, donde $G_1 = G_{V(G) \setminus \{i_c\}}$. Notemos que, como $x_{i_c} \nmid g$ y $y_{i_c} \nmid g$ tenemos que $\text{in}_{\prec}(w) = g$. Por hipótesis de inducción

$$(J_{G_1} : J_{\mathcal{K}_{n-1}}) = J_{G_1} + \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle,$$

y del Lema 2.15 implica que $u_{\pi} x_i y_j | g$ donde $i < j$ y u_{π} es un camino admisible en G_1 o $g_{C',D'} | g$, donde $C' \cup D' \in \mathcal{D}_c(G_1)$.

En el primer caso, dado que $J_{G_1} \subseteq J_G$, tendríamos que $g \in \text{in}_{\prec}(J_G) \subseteq \text{in}_{\prec}(I)$, una contradicción. En el segundo caso, se demostrará que siempre es posible encontrar un monomio $g_{C',D'} \in \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \setminus \{A\} \rangle$ tal que $g_{C',D'} | g$, y de nuevo obtener una contradicción. Por hipótesis, sabemos que $g_{C',D'} | g$, donde $C' \cup D' \in \mathcal{D}_c(G_1)$. Si $C' \cup D' \in \mathcal{D}_c(G) \setminus \{A\}$ no hay nada que probar. Así, supongamos que $C' \cup D' \notin \mathcal{D}_c(G)$. Entonces, por hipótesis $g_{C',D'} | g$ donde $C' \cup D' \in \mathcal{D}_c(G_1)$, basta con encontrar un $j_c \in N_G(i_c)$ tal que $x_{j_c} \in \text{supp}(g)$ o $y_{j_c} \in \text{supp}(g)$. Sea $j_c \in N_G(i_c)$. Si $x_{j_c} | g$ o $y_{j_c} | g$, hemos terminado. En caso contrario, aplicando el mismo argumento anterior, concluimos que

$$w' = f' |_{x_{j_c}=y_{j_c}=0} \in (J_{G_2} : J_{\mathcal{K}_{n-1}}),$$

donde $G_2 = G_{V(G) \setminus \{j_c\}}$. Si $G_2 = \mathcal{K}_{n-2}$, entonces el vértice i_c es de grado $n-1$ y esto implica que $C' \cup D'$ debe contener un vecino de i_c , y hemos terminado. Si $G_2 \neq \mathcal{K}_{n-2}$, de nuevo, por hipótesis de inducción y Lema 2.15 existe un monomio $g_{F',H'} | \text{in}_{\prec}(w') = g$ con $F' \cup H' \in \mathcal{D}_c(G_2)$. Esto significa que para cada arista $e = \{i_c, v\} \notin E(G_2)$ existe un camino de i_c a v contenido en $F' \cup H'$. En particular, $F' \cup H'$ contiene un vecino de i_c , digamos v_c . Como $g_{F',H'} | g$, podemos concluir que $\text{supp}(g)$ contiene a x_{v_c} o y_{v_c} . Como se ha observado antes, $C' \cup D' \cup \{v_c\}$ está en $\mathcal{D}_c(G)$, por lo tanto el monomio g es divisible por un elemento de I , lo cual es una contradicción. Esto prueba que para toda $i_c \in A$, se tiene que $x_{i_c} | g$ o $y_{i_c} | g$. Concluimos que $g \in \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D = A \in \mathcal{D}_c(G) \rangle$. Ahora, aplicando este argumento a $f' - g$, tenemos que $f' \in \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D = A \in \mathcal{D}_c(G) \rangle$ y esto completa la demostración. $\square$

Con el siguiente Teorema llegamos al resultado principal de esta Sección. Para demostrar el Teorema utilizaremos la caracterización equivalente del v -número dada en la Proposición 2.2. Nos interesa el caso para el ideal primo $\mathfrak{p} = P_{\emptyset}(G)$.

Notemos que de la Observación 1.21 que $J_{\mathcal{K}_n} = P_{\emptyset}(G)$ y del Teorema 1.31 tenemos que $J_{\mathcal{K}_n}$ es un primo mínimo de J_G , por lo que queremos calcular $\alpha((J_G : J_{\mathcal{K}_n})/J_G)$. Además, como $v(J_G)$ es el mínimo de todos los primos asociados de J_G , entonces $v(J_G) \leq v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G)$.

Definición 2.19. Un *conjunto de dominación conexa* (CDS por sus siglas en inglés) de una gráfica conexa G es un subconjunto D de los vértices de G tal que D induce una gráfica conexa G_D , y cada vértice en $V(G) \setminus D$ es adyacente a por lo menos un vértice en D . El mínimo de la cardinalidad de los conjuntos de dominaciones conexas se llama *el número de dominación conexa*, denotado por $\gamma_c(G)$.

Teorema 2.20. [11, Teorema 3.2] Sea G una gráfica conexa con vértices $[n]$ y J_G su ideal binomial de aristas. Entonces, la localización del v -número de J_G en $J_{\mathcal{K}_n}$ viene dada por

$$v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G) = \begin{cases} \min\{|B| : B \in \mathcal{D}_c(G)\} = \gamma_c(G) & \text{si } G \neq \mathcal{K}_n \\ 0 & \text{si } G = \mathcal{K}_n \end{cases}$$

donde $\gamma_c(G)$ es el número de dominación conexa.

Demostración. En la Proposición 2.2, vimos que si $I = \mathfrak{p}$ es ideal primo, entonces $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = 0$, por lo tanto, si $G = \mathcal{K}_n$ se tiene que $J_G = J_{\mathcal{K}_n}$ es ideal primo, por lo tanto $v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G) = 0$.

Para $G \neq \mathcal{K}_n$, de la Proposición 2.2 y la Proposición 2.18, tenemos que

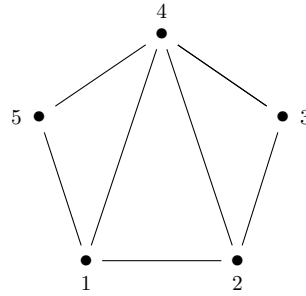
$$\begin{aligned} \alpha((J_G : J_{\mathcal{K}_n})/J_G) &= \alpha((J_G + \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle)/J_G) \\ &= \alpha(\langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle) \\ &= \min\{\deg(g_{C,D}) : g_{C,D} \in \langle g_{C,D} : C \cap D = \emptyset, C \cup D \in \mathcal{D}_c(G) \rangle\}. \end{aligned}$$

Notemos que el grado del monomio $g_{C,D}$ depende de la cardinalidad de $B \in \mathcal{D}_c(G)$ ya que de eso depende el número de variables de $g_{C,D}$ y por lo tanto obtenemos que $v_{J_{K_n}}(J_G) = \min\{|B| : B \in \mathcal{D}_c(G)\}$. Observemos que $\mathcal{D}_c(G)$ es el conjunto de todos los conjuntos de dominación conexas de G . En efecto, sea B un CDS y sea $\{i, j\} \notin E(G)$. Por definición de CDS, se tiene que $i, j \in B$, pues, como $\{i, j\} \notin E(G)$ entonces para que G_B sea conexo se debe tener al menos un camino $P : i, i_1, \dots, i_s, j \in B$ de i a j o si $i, j \notin B$ existen $b_i, b_j \in B$ tal que $\{i, b_i\}, \{j, b_j\} \in E(G)$. Así, como G_B es conexo, podemos encontrar siempre un camino $P : i, b_i, \dots, b_j, j \in G$ de i a j tal que $\{b_i, \dots, b_j\} \subseteq B$, se sigue que $B \in \mathcal{D}_c(G)$. Recíprocamente, sea $B \in \mathcal{D}_c(G)$ esto implica que para cada $\{i, j\} \notin E(G)$ existe un camino $P : i, i_1, \dots, i_s, j$ tal que $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq B$ y G es conexas, y así para todo $k \in [n] \setminus B$ existe un $b_k \in B$ tal que $\{b_k, k\} \in E(G)$. Además, si G_B no fuera conexas, existiría algún $1 \leq t \leq s$ tal que $i_t \notin B$, que contradice que $B \in \mathcal{D}_c(G)$, así G_B es conexas. Por lo tanto, B es un CDS. Así,

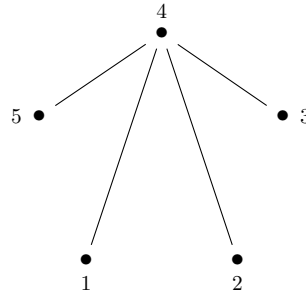
$$\min\{|A| : A \in \mathcal{D}_c(G)\} = \gamma_c(G). \quad \square$$

Antes de terminar esta Sección, daremos un resultado donde el número de dominación conexas es una cota superior para el v -número de cualquier ideal binomial de aristas J_G asociado a una gráfica G . Sea G una gráfica conexas, un *árbol de expansión* de una gráfica G es una subgráfica T que es un árbol y cubre todos los vértices de G .

Ejemplo 2.21. Sea G la gráfica a continuación:



Entonces un árbol de expansión T de G es la gráfica siguiente



De [3] podemos observar la estrecha relación entre el número de dominación conexas de una gráfica G y el mayor número de hojas de un árbol de expansión. Este resultado nos dice que el número de dominación conexas $\gamma_c(G)$ es el número de vértices que no son hojas en un árbol de expansión con el mayor número de hojas. Es decir, $\gamma_c(G) = n - lf_{\max}(G)$, donde $lf_{\max}(G)$ es el *número máximo de hojas* de G . Del Ejemplo 2.21 tenemos que $n = 5$ y $lf_{\max}(G) = 4$. Por lo tanto $\gamma_c(G) = 1$.

Corolario 2.22. [11, Corolario 3.7] Sea G una gráfica conexas. Entonces

$$v(J_G) \leq \gamma_c(G) \leq \text{reg}(S/J_{T_G})$$

donde T_G es el árbol de expansión de G con el mayor número de hojas.

Demostración. Del Teorema 2.20 y de [3] tenemos que $v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G) = \gamma_c(G) = n - \text{lf}_{\text{máx}}(G)$. Además, $v(J_G) \leq v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G)$, pues $v(J_G)$ es el mínimo de todos los primos mínimos de J_G . Por último, del Teorema 1.43 se tiene que $\gamma_c(G) = n - \text{lf}_{\text{máx}}(G) \leq \text{iv}(T_G) + 1 \leq \text{reg}(S/T_G)$. Por lo tanto

$$v(J_G) \leq v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G) = \gamma_c(G) = n - \text{lf}_{\text{máx}}(G) \leq \text{reg}(S/J_{T_G}). \quad \square$$

Observación 2.23. Notemos que del Corolario 2.22 el v -número de J_G con la regularidad de un ideal binomial de aristas de una subgráfica T_G de G . Esta subgráfica en general no es inducida. Sin embargo, cuando T_G es inducida, la $\text{reg}(S/J_{T_G}) \leq \text{reg}(S/J_G)$ y así $v(J_G) \leq \text{reg}(S/J_G)$.

2.3. El v -número de gráficas cerradas. Sabemos por el Teorema 1.25 que las gráficas cerradas se caracterizan por ser aquellas gráficas cuyo ideal binomial de aristas asociado tiene una base de Gröbner respecto al orden lexicográfico, dada por los generadores naturales del ideal. En particular, el ideal inicial de J_G puede entenderse como el ideal de aristas de una gráfica bipartita H_G , como se vió en la Observación 2.3. En esta Sección, se establecerá una relación entre el v -número de J_G y el de su ideal inicial cuando G es una gráfica cerrada. Antes de esto, daremos algunos resultados previos que nos ayudarán a estudiar mejor la relación entre $v(J_G)$ y el ideal inicial $\text{in}_{\prec}(J_G)$.

Recordemos que, la *vecindad de vértices de un vértice* v es el conjunto $N_G(v) = \{i \in V(G) : \{v, i\} \in E(G)\}$. Análogamente, si $V \subseteq V(G)$ es un subconjunto de los vértices de G , entonces se define la *vecindad de vértices de V* como $N_G(V) = \{k \in V(G) : \{i, k\} \in E(G) \text{ para cada } i \in V\}$.

A continuación presentamos dos familias de conjuntos.

$\mathcal{F}_G = \{A : A \text{ es un conjunto máximo estable}^4 \text{ de } G\}$.

$\mathcal{A}_G = \{A : A \text{ es un conjunto estable de } G \text{ y } N_G(A) \text{ es una cubierta de vértice mínima}^5 \text{ de } G\}$.

Observación 2.24. [8, Corolario 1.3.10] Si $I \subset S$ es un ideal monomial, y sea $p \in \text{Ass}(I)$. Entonces existe un monomio u tal que $p = (I : u)$.

En efecto, dado que $p \in \text{Ass}(I)$, existe $f \in S$ tal que $p = (I : f)$. Por [8, Corolario 1.3.9] p es un ideal monomial. Entonces, si $u \in p$ es un generador de p implica que $x_i \in p$, pues $u = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$, y como p es primo entonces $x_i \in p$. Se sigue que, para cada $x_i \in p = (I : f)$ tenemos que $x_i f \in I$, es decir, existen $f_i \in S$ tal que $x_i f = \sum_{j=1}^s f_j u_j$ donde cada u_j son los generadores de I . Además, tenemos que $\text{supp}(x_i f) \subset \bigcup_{j=1}^s \text{supp}(f_j u_j)$, pues como x_i es una variable, entonces para toda $w \in \text{supp}(f)$ existe un $w_j \in \text{supp}(f_j)$ tal que $x_i w = w_j u_j \in I$. Se sigue que $p = (I : f) \subset \bigcap_{w \in \text{supp}(f)} (I : w)$. Por otro lado, sea $g \in \bigcap_{w \in \text{supp}(f)} (I : w)$, entonces $gw \in I$ para toda $w \in \text{supp}(f)$, así $gf \in I$. Consecuentemente $p = \bigcap_{w \in \text{supp}(f)} (I : w)$. Como p es irreducible, se sigue que $p = (I : u)$ para algún $u \in \text{supp}(f)$.

Lema 2.25. [12, Lema 3.4] Sea $I = I(G)$ el ideal de aristas de una gráfica simple G con vértices $V(G) = [n]$. Se cumple lo siguiente.

- (a) Si $A \in \mathcal{A}_G$ y $x_A = \prod_{i \in A} x_i$, entonces $(I : x_A) = \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$.
- (b) Si A es estable y $N_G(A)$ es una cubierta de vértices, entonces $N_G(A)$ es una cubierta de vértices mínima.
- (c) Si $(I : f) = p$ para algún $f \in S_d$ y algún $p \in \text{Ass}(I)$, entonces existe $A \in \mathcal{A}_G$ tal que $|A| \leq d$.
- (d) Si $A \in \mathcal{F}_G$ entonces $N_G(A) = V(G) \setminus A$ y $(I : x_A) = \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$.

Demostración. (a) Sea $x^c \in (I : x_A)$, es decir, $x^c x_A \in I = I(G)$, entonces $x^c x_A = x^b x_e$, donde $x_e = \prod_{k \in e} x_k$ para alguna $e \in E(G)$ y algún monomio $x^b \in S$. Como $N_G(A)$ es una cubierta de

⁴Un subconjunto $V \subset V(G)$ es *estable* (o *independiente*) si no existen dos vértices en V tales que estén unidos por una arista de G .

⁵Un subconjunto $V \subset V(G)$ es una *cubierta de vértices* si cada arista de G es incidente con al menos un vértice de V . Una cubierta de vértices es *mínima* si cada subconjunto propio de V no es una cubierta de vértice de G .

vértices, tenemos que $e \cap N_G(A) \neq \emptyset$. Sea $i \in e \cap N_G(A)$, entonces $\{i\} \cup A$ contiene al menos un par de vértices adyacentes de G , y consecuentemente $i \notin A$ pues A es estable. Esto implica que $x^c x_A = x^b x_e = x_i (x_j x^b)$, así $x_i \mid x^c x_A$, notemos que x_i no puede dividir a x_A , pues $i \notin A$, por lo tanto $x_i \mid x^c$ y así $x^c \in \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$. Para la otra contención, sea $x_i \in \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$, es decir, $\{i\} \cup A$ tiene al menos dos vértices adyacentes de G e $i \notin A$, pues A es estable y existe la arista $e = \{i, j\} \in E(G)$ con $j \in A$. Entonces $x_i x_A = (x_i x_j) x^b$, donde $x^b = \prod_{\substack{k \in A \\ j \neq k}} x_k$. Por lo tanto $x_i \in (I : x_A)$.

(b) Sea $i \in N_G(A)$. Es suficiente probar que $B = N_G(A) \setminus \{i\}$ no es una cubierta de vértices de G . Como $i \in N_G(A)$ existe $e \in E(G)$ tal que $e \subset \{i\} \cup A$ donde $i \notin A$, pues A es estable. Entonces $x_i x_A = x_e x^b$ para algún monomio $x^b = \prod_{\substack{k \in A \\ j \neq k}} x_k$. Necesitamos sólo demostrar que $B \cap e = \emptyset$. Supongamos $B \cap e \neq \emptyset$. Sea $j \in B \cap e$, como $j \in N_G(A) \setminus \{i\}$, entonces $j \notin A$, pues A es estable. Como $x_i x_A = x_e x^b = x_i (x_j x^b)$ se sigue que $x_A = x_j x^b$, y $j \in A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $B \cap e = \emptyset$ y así $N_G(A)$ es cubierta mínima.

(c) Escribimos $f = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^{c_i}$, donde $0 \neq \lambda_i \in K$ y $x^{c_i} \in S_d$ para toda i , por la Observación 2.24 tenemos

$$(I : f) = \bigcap_{i=1}^r (I : x^{c_i}) = p$$

y consecuentemente $(I : x^{c_k}) = p$ para algún k . Así, entonces tenemos que $f = x^{c_k} = x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_s}$. Como I es libre de cuadrados, podemos suponer que $\alpha_i \in \{0, 1\}$ para toda i . Fijamos $A = \{i : \alpha_i = 1\}$, es decir, $f = x_A$, y notemos que $|A| \leq d$, pues $\sum_{i=1}^n \alpha_i = d$ y A tiene sólo los i tales que $\alpha_i = 1$. El conjunto A es estable porque $(I : x_A) = p \subsetneq S$, ya que si A no fuera estable, entonces existe $e = \{i, j\} \subset A$, y así $x_A = (x_i x_j) x^b$, para algún x^b y tendríamos que $x_A \in I = I(G)$, esto implicaría que $(I : x_A) = S$, lo cual es una contradicción.

Ahora demostraremos la igualdad $p = \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$. Sea $x_i \in p$. Entonces podemos escribir $x_i x_A = x^b x_e = x_i (x_j x^b)$ donde $x^b = \prod_{\substack{k \in A \\ j \neq k}} x_k$. Es decir, $i \in N_G(A)$, así $x_i \in \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$. Por tanto $p \subseteq \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$. Para la otra contención, sea $x_i \in \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$. Entonces $\{i\} \cup A$ contiene al menos dos vértices adyacentes de G . Así, $x_i x_A = x^b x_e \in I$, por lo tanto $x_i \in (I : x_A) = p$. Como p está generado por una cubierta mínima de vértices de G , entonces por [19, Lema 6.3.37] obtenemos que $N_G(A)$ es una cubierta mínima de vértices de G . Así $A \in \mathcal{A}_G$.

(d) Primero demostraremos la igualdad $N_G(A) = V(G) \setminus A$. Sea $i \in N_G(A)$. Entonces $\{i\} \cup A$ tiene al menos dos aristas adyacentes y además $i \notin A$, pues A es estable, por lo tanto $i \in [n] \setminus A$. Para la otra contención, sea $i \notin A$, entonces $\{i\} \cup A$ tiene al menos dos vértices adyacentes, ya que A es estable máximo, es decir, existe $i \in A$ tal que $\{i, j\} \in E(G)$. Así $i \in N_G(A)$. Ahora, para mostrar que $(I : x_A) = \langle x_i : i \in N_G(A) \rangle$. Por la igualdad previa es suficiente probar que $(I : x_A) = \langle x_i : i \in V(G) \setminus A \rangle$. Sea $x^c \in (I : x_A)$, es decir, $x^c x_A \in I$, entonces $x^c x_A = x_i (x_j x^b)$, y así $x_i \mid x^c x_A$. Como $i \notin A$ entonces x_i no divide a x_A y por lo tanto x_i divide a x^c , esto implica que $x^c \in \langle x_i : i \in [n] \setminus A \rangle$. Para la otra inclusión, sea $x_i \in \langle x_i : i \in [n] \setminus A \rangle$. Como A es estable máximo, entonces $\{i\} \cup A$ tiene al menos dos vértices adyacentes. Así $x_i x_A = x_e x^b$, por lo tanto $x_i \in (I : x_A)$. $\square$

El siguiente Teorema es aún más general de lo que se presenta en esta tesis. Los autores Delio Jarmillo y Rafael H. Villarreal presentan este resultado en [12] para un *clutter*⁶, en particular, una gráfica simple es un Ejemplo de un clutter.

Teorema 2.26. [12, Teorema 3.5] *Sea G una gráfica conexa. Si $I(G)$ no es primo, entonces*

$$v(I(G)) = \min\{|A| : A \in \mathcal{A}_G\}$$

⁶Un *clutter* C es un conjunto finito V junto con una familia E de subconjuntos de V tales que si $f_1, f_2 \in E$, entonces $f_1 \not\subset f_2$. El conjunto V se llama *conjunto de vértices* de C y E se llama el *conjunto de aristas* de C .

Demostración. Para cada $A \in \mathcal{A}_G$, entonces por la parte (a) del Lema 2.25 se tiene que $(I(G) : x_A) = \langle N_G(A) \rangle$. Así $v(I(G)) \leq \min\{|A| : A \in \mathcal{A}_G\}$. Para la otra desigualdad, sea $f \in S_d$ y $p \in \text{Ass}(I)$ tal que $(I(G) : f) = p$ y $v(I(G)) = d$. Por la parte (c) del Lema 2.25 existe $A \in \mathcal{A}_G$ con $|A| \leq d$ tal que $(I(G) : x_A) = p$. Por lo tanto $\min\{|A| : A \in \mathcal{A}_G\} \leq v(I(G))$. $\square$

Observación 2.27. [12, Corolario 3.6] Del Teorema 2.26 se deduce que $v(I(G)) \leq i(G)$, donde $i(G)$ es el número de dominación independiente de G , que es el tamaño mínimo de un conjunto independiente tal que cada vértice que no está en el conjunto es adyacente a algún vértice de él.

Definición 2.28. Un *clan* de una gráfica G es un subconjunto no vacío $C \subseteq V(G)$ tal que C induce una gráfica completa. Una *cubierta de clanes* de G es una familia $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_s\}$ de clanes de G tal que para todo $v \in V(G)$ existe un clan $C \in \mathcal{C}$ con $v \in C$. El número de cubiertas de clanes de G , denotado por $\theta(G)$, es el número mínimo de clanes en G necesario para cubrir el conjunto de vértices de G , es decir,

$$\theta(G) = \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una cubierta de clanes de } G\}.$$

El resultado siguiente describe la relación que existe entre el v -número del ideal binomial de aristas J_G y su ideal inicial para una gráfica cerrada G .

Proposición 2.29. [11, Proposición 3.9] Sea G una gráfica cerrada conexa con n vértices y sea H_G su gráfica inicial. Entonces

$$v(J_G) < \theta(G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = v(I(H_G)).$$

Demostración. De la Observación 2.3 se tiene directamente la igualdad, pues $\text{in}_{\prec}(J_G) = I(H_G)$. Para la desigualdad $\theta(G) \leq v(I(H_G))$, sea $G \neq \mathcal{K}_n$ una gráfica cerrada. Por el Teorema 2.26 existe $A \in \mathcal{A}_{H_G}$ tal que $v(I(H_G)) = |A|$. Sea $A = \{v_1, \dots, v_s\}$ y definimos $B = \{w_1, \dots, w_s\}$ de la siguiente manera:

- (1) Si $v_i = x_{a_i}$ para algún a_i , entonces $w_i = y_{b_i}$, donde $b_i = \max\{j \in [n] : \{a_i, j\} \in E(G)\}$.
- (2) Si $v_i = y_{b_i}$ para algún b_i , entonces $w_i = x_{a_i}$, donde $a_i = \min\{j \in [n] : \{j, b_i\} \in E(G)\}$.

Dado que G es cerrada, se tiene que cada arista $\{v_i, w_i\}$ de H_G define un clan C_i en G con vértices $[a_i, b_i] = \{a_i, a_i + 1, \dots, b_i\}$. Supongamos que $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_s\}$ es una cubierta de clanes de G , es decir, $V(G) = \bigcup_{i=1}^s V(G_{C_i})$. Sea $k \in V(G)$. Como G es conexa, existe $\ell \in V(G)$ tal que $\{k, \ell\} \in E(G)$. Supongamos que $k < \ell$, entonces tenemos que $\{x_k, y_\ell\} \in E(H_G)$. Dado que $A \in \mathcal{A}_{H_G}$, tenemos que $N_{H_G}(A)$ es una cubierta mínima de H_G , existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tal que $x_k \in N_{H_G}(v_i)$ o $y_\ell \in N_{H_G}(v_i)$. Si $x_k \in N_{H_G}(v_i)$, por (2) $v_i = y_{b_i}$ y $\{k, b_i\} \in E(G)$. Por lo tanto, como a_i es el mínimo, entonces $a_i \leq k$ y así $k \in V(G_{C_i}) = [a_i, b_i]$. Si $y_\ell \in N_{H_G}(v_i)$, por (1) $v_i = x_{a_i}$ y $\{a_i, \ell\} \in E(G)$. Además, como a_i es el mínimo y b_i es el máximo, obtenemos $a_i \leq \ell \leq b_i$. Así, tenemos dos posibilidades para k . Si $a_i \leq k \leq \ell \leq b_i$, implicaría que $k \in V(G_{C_i})$ y así hemos terminado. Si pasara que $k \leq a_i \leq \ell \leq b_i$, nuevamente como G es cerrada, tenemos que $\{k, a_i\} \in E(G)$ y $a_i < \ell$. Iterando el procedimiento anterior, como G es una gráfica finita, finalmente podemos encontrar un clan C_i tal que $k \in V(G_{C_i})$. Con esto probamos la afirmación e implica que $\theta(G) \leq v(I(H))$.

Ahora, para la desigualdad $v(J_G) < \theta(G)$, sea $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_s\}$ una cubierta de clanes de G , con $V(G_{C_i}) = [a_i, b_i]$. Notemos que, como G es cerrada, se tiene que $a_i < a_i + 1 \leq b_i < b_i + 1$ para toda i . Sea $e = \{r, t\} \notin E(G)$. Dado que $\mathcal{C}$ es una cubierta de clanes, podemos siempre encontrar clanes, digamos C_{i_r} y C_{i_t} , tal que $r \in V(G_{C_{i_r}})$ y $t \in V(G_{C_{i_t}})$. Además $i_r \neq i_t$ porque $e = \{r, t\} \notin E(G)$ y existe el camino $P_{r,t} : r, b_{i_r}, b_{i_r+1}, \dots, b_{i_t-1}, t$ de r a t . Esto demuestra que, como $e = \{r, t\} \notin E(G)$, podemos siempre considerar un camino $P_{r,t}$ de r a t con vértices en $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{s-1}\}$. Así, $B \in \mathcal{D}_c(G)$ y por el Teorema 2.20 obtenemos

$$v(J_G) \leq v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G) = \min\{|B| : B \in \mathcal{D}_c(G)\} \leq s - 1 = |\mathcal{C}| - 1$$

para cada cubierta de clanes. En particular para $\theta(G)$, por lo tanto

$$v(J_G) \leq v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G) \leq \theta(G) - 1 < \theta(G).$$

Si $G = \mathcal{K}_n$ es una gráfica completa, entonces el conjunto de vecinos de x_1 es una cubierta de vértices mínima de H_G , por el Teorema 2.26 se tiene que $v(I(H_G)) = 1$. Ahora, como G es completa, se tiene que $V(G)$ es un clan y así $V(G)$ es una cubierta mínima de clan y $\theta(G) = 1$, y por el Teorema 2.20 $v(J_G) = 0$. Por lo tanto

$$v(J_G) = 0 < 1 = \theta(G) = v(I(H_G)) = v(\text{in}_{\prec}(J_G)). \quad \square$$

La relación que existe entre $\text{im}(G)$ y $v(I(G))$ cuando G es una gráfica bipartita ya ha sido estudiada en [18, Teorema 4.5]. A continuación se presenta un resultado para la gráfica inicial H_G de una gráfica conexa cerrada G .

Proposición 2.30. [11, Proposición 3.10] *Sea G una gráfica conexa cerrada y sea H_G su gráfica inicial. Entonces*

$$v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = v(I(H_G)) \leq \text{im}(H_G) = \ell_G.$$

Demostración. Sean $\{i_0, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{\ell-1}, i_\ell\}$ un camino inducido más largo en G y $\ell = \ell_G$ su longitud. Definimos

$$e_1 = \{x_{i_0}, y_{i_1}\}, e_2 = \{x_{i_1}, y_{i_2}\}, \dots, e_\ell = \{x_{i_{\ell-1}}, y_{i_\ell}\}$$

como su correspondencia inducida en H_G , es decir, es el conjunto de aristas de su correspondiente gráfica inicial H_G . Consideremos el conjunto $A = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{\ell-1}}\}$ que es un conjunto estable, pues H_G es bipartita. Probaremos que $N_{H_G}(A)$ es una cubierta de vértices. En efecto, sea $e = \{x_r, y_s\} \in E(H_G)$. Debemos probar que $y_s \in N_{H_G}(A)$. Si $x_r \in A$, entonces no hay nada que probar, ya que $e = \{x_r, y_s\} \in E(H_G)$. Supongamos que $x_r \notin A$. Si $y_s \notin N_{H_G}(A)$, entonces existe un k tal que $\{x_r, y_{i_k}\} \in E(H_G)$ porque $\ell_G = \text{im}(G)$ es el número de apareamiento inducido. Además, $r > i_{k-1}$ ya que de lo contrario tendríamos que $\{x_{i_{k-1}}, y_{i_k}\} \in E(G)$ lo que contradice el hecho que $e_1, \dots, e_\ell$ es un apareamiento inducido, pues $\{x_{i_{k-1}}, y_{i_k}\} \in E(G)$ y $e = \{x_r, y_s\}$ serían aristas adyacentes. Luego, tenemos dos posibilidades:

(1) Si $r < i_k < s$ entonces existe la arista $\{x_{i_k}, y_s\} \in E(H_G)$, pues G es cerrada. Así, $y_s \in N_{H_G}(A)$, una contradicción.

(2) Si $i_{k-1} < r < s$ entonces existe la arista $\{x_{i_{k-1}}, y_s\} \in E(H_G)$, pues G es cerrada. Así, $y_s \in N_{H_G}(A)$, una contradicción.

Por lo tanto $N_{H_G}(A)$ es una cubierta de vértices y como A es estable, entonces por el Lema 2.25 inciso (b), $N_{H_G}(A)$ es una cubierta mínima de vértices, es decir, $A \in \mathcal{A}_G$. Entonces, por el Teorema 2.26 y la observación 2.3 sabemos que $v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = v(I(H_G)) = \min\{|A| : A \in \mathcal{A}_G\} = \ell_G$. Por lo tanto, se concluye que

$$v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = v(I(H_G)) \leq |A| = \text{im}(H_G) = \ell_G. \quad \square$$

Con los resultados anteriores obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 2.31. [11, Teorema 3.11] *Sea $G \neq \mathcal{K}_n$ una gráfica conexa cerrada y sea H_G su gráfica inicial. Entonces*

$$v(J_G) < \theta(G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = v(I(H_G)) \leq \text{im}(H_G) = \ell_G = \text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_G)).$$

Si $G = \mathcal{K}_n$, entonces $0 = v(J_G) < v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = \text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_G)) = 1$.

Demostración. De la Proposición 2.29 tenemos $v(J_G) < \theta(G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = v(I(H))$. Por la Proposición 2.30 obtenemos $v(I(H)) \leq \text{im}(H_G) = \ell_G$. Por último, del Teorema 1.41 se tiene que $\ell_G = \text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_G))$. Comparando estos resultados se tiene el resultado deseado. Ahora, si $G = \mathcal{K}_n$, del Teorema 2.20 se tiene que $v(J_G) = 0$. Además, dado que G es completa, entonces $\{x_i\} \subset V(H_G)$ es estable y es una cubierta mínima, pues $[n] \setminus \{x_i\} = N_{H_G}(x_i)$, entonces por el Teorema 2.26 $v(I(H_G)) = v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = 1$. Por otro lado, por ser G completa, entonces

$P : i, j$ con $\{i, j\} \in E(G)$ es el camino inducido más largo de G , entonces $\ell_G = 1$ y nuevamente por el Teorema 1.41 se tiene $\text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_G)) = 1$. $\square$

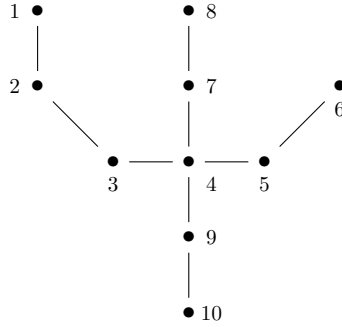
Cabe mencionar que los resultados presentados en esta Sección, suponen que G es una gráfica cerrada y H_G su gráfica inicial con respecto a un etiquetado adecuado. Si el etiquetado no es el adecuado, entonces $\text{in}_{\prec}(J_G)$ puede no representar el ideal de aristas una gráfica bipartita en general.

A continuación, se muestra un Ejemplo de una gráfica que no es cerrada pero cuyo ideal binomial de aristas satisface $v(J_G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G)$. Se ha utilizado Macaulay2 para calcular el v -número de los ideales binomiales de arista y en su ideal inicial presentados. En general, este Código calcula el v -número de cualquier ideal graduado.

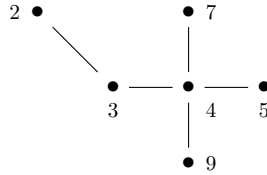
Macaulay2 código 1. [11, Código 4.7]

```
vnumber = method(TypicalValue => ZZ);
vnumber (Ideal) := (I) -> (
  L := ass I;
  G := apply(0..#L-1, n->gens gb ideal(flatten mingens(quotient(I, L#n)
    \I)));
  N := apply(G, i->flatten entries i);
  F := apply(0..#L-1, i->apply(N#i, x-> if not quotient(I, x)==L#i then 0
    else x)-set0);
  min flatten degrees ideal(flatten F)
)
```

Ejemplo 2.32. Sea G la siguiente gráfica no cerrada:



Notemos que $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ es un conjunto de dominación conexo mínimo, pues para cada $i \in [n] \setminus B = \{1, 6, 8, 10\}$ existe un $j \in B$ tal que $\{i, j\} \in E(G)$, a saber, $\{1, 2\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{9, 10\} \in E(G)$. Además ningún subconjunto propio $B' \subset B$ es un conjunto de dominación conexo de G y G_B es una subgráfica conexas inducida de G , como se muestra a continuación.



Por lo tanto, $v_{J_{\mathcal{K}_{10}}}(J_G) = \gamma_c(G) = 6$. Además, $\mathcal{C} = \{\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}\}$ es una cubierta de clanes mínima, entonces $\theta(G) = 5$. Con un cálculo en Macaulay2 usando el Código 1 se muestra que $v(J_G) = 3$ y $v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = 6$. Además, como G es un árbol, es a su vez un árbol de expansión y, por el Corolario 2.22, tenemos

$$3 = v(J_G) < 5 = \theta(G) \leq 6 = \gamma_c(G) = v_{J_{\mathcal{K}_{10}}}(J_G) = v(\text{in}_{\prec}(J_G)) \leq 7 = \text{reg}(S/J_G).$$

Notemos que, como G no es cerrada, no podemos aplicar el Teorema 2.31. De hecho, la longitud del camino $P : 1, 2, 3, 4, 5, 6$ el cual es el camino inducido más largo de G es $\ell_G = 5$, por lo que $\ell_G \leq v_{J_{\mathcal{K}_{10}}}(G)$.

Para calcular $v(J_G)$ y $v(\text{in}_<(J_G))$ usando el Código 1 procedimos como sigue:

```
i1 : vnumber = method(TypicalValue => ZZ);
i2 : Código 1
o2 = FunctionClosure[stdio:3:19-17:1]
o2 : FunctionClosure
i3 : R=QQ[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7,y8,
      y9,y10];
o3 = R
o3 : PolynomialRing
i4 : I=ideal(x1*y2-x2*y1,x2*y3-x3*y2,x3*y4-x4*y3,x4*y5-x5*y4,
      x5*y6-x6*y5,x4*y7-x7*y4,x7*y8-x8*y7,x4*y9-x9*y4,
      x9*y10-x10*y9);
o4 : Ideal of R
i5 : J=ideal(x1*y2,x2*y3,x3*y4,x4*y5,x5*y6,x4*y7,x7*y8,x4*y9,
      x9*y10);
o5 : Ideal of R
i6 : vnumber(I)
o6 = 3
i7 : vnumber(J)
o7 = 6
```

3. OTROS RESULTADOS

En este Capítulo mostraremos una Proposición para calcular el v -número de una gráfica r -partita completa, este es un resultado dado en [11] el cual se demuestra usando principalmente el [17, Lema 2.2] y un Teorema [10] visto en el Capítulo 1, que recordaremos en la Sección 3.1. Por último, basándose en los Teoremas obtenidos previamente y algunos ejemplos de la Sección 3.2, se dará una Conjetura propuesta en [11] que aún sigue abierta.

3.1. Gráficas multipartitas completas. Sea G una gráfica simple con conjunto de vértices $V = V(G)$. Si tenemos que

$$V = \bigsqcup_{\ell=1}^r V_\ell = [n]$$

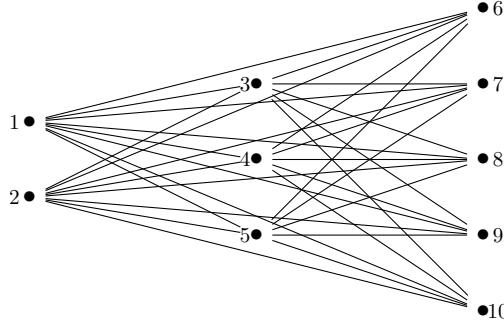
es una unión disjunta de r subconjuntos, donde V_ℓ es la ℓ -ésima parte de V y fijamos $a_\ell = |V_\ell|$, además

$$E(G) = \{\{i, j\} : \text{para cada } i \in V_\ell \text{ y para cada } j \in V_{\ell'}, \text{ con } \ell \neq \ell'\}$$

entonces G se llama una gráfica r -partita completa, denotada por $\mathcal{K}_{a_1, a_2, \dots, a_r}$. Reordenando si es necesario, podemos suponer que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$ y

$$V_\ell = \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\ell-1} a_m, 2 + \sum_{m=1}^{\ell-1} a_m, \dots, a_\ell + \sum_{m=1}^{\ell-1} a_m \right\}.$$

Ejemplo 3.1. La siguiente gráfica $G = \mathcal{K}_{2,3,5}$ es la gráfica 3-partita completa con conjuntos de vértices $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, donde $V_1 = \{1, 2\}$, $V_2 = \{3, 4, 5\}$ y $V_3 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.



Recordemos el Teorema 1.31 con el cual concluimos la Sección 1.2, que nos ayudará a probar el siguiente lema. Este Teorema afirma que si G es una gráfica conexa con vértices $[n]$, y $W \subset [n]$. Entonces $P_W(G)$ es un ideal primo mínimo de J_G si y sólo si $W = \emptyset$, o $W \neq \emptyset$ y para cada $i \in W$ se tiene que $c(W \setminus \{i\}) < c(W)$. En otras palabras, si y sólo si cada $i \in W$ es un vértice de corte de la gráfica $G_{([n] \setminus W) \cup \{i\}}$.

Lema 3.2. [17, Lema 2.2] Sea $G = \mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}$ con $a_1 \leq \dots \leq a_r$ una gráfica r -partita completa con conjunto de vértices $V(G) = \bigsqcup_{\ell=1}^r V_\ell = [n]$. Fijemos $s = |\{\ell : a_\ell = 1\}|$. Entonces, la descomposición primaria mínima de J_G está dada por

$$J_G = J_{\mathcal{K}_n} \cap \mathfrak{p}_{s+1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r,$$

donde $\mathfrak{p}_\ell = \langle x_i, y_i : i \notin V_\ell \rangle$ para $\ell = s+1, \dots, r$.

Demostración. Para cada conjunto no vacío $W \subset V$, se tiene que

$$c(W) = \begin{cases} |V_\ell \setminus W| & \text{si } V \setminus V_\ell \subset W \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $V \setminus V_\ell \not\subset W$ para cada $\ell > s$ entonces $c(W) = 1$, no se cumple la condición del Teorema 1.31. Sea $i \in W = V \setminus V_\ell$, notemos que i es un vértice de corte de $G_{(V \setminus W) \cup \{i\}}$, pues como G es una gráfica r -partita completa, esto implica que para cada $v \in V_\ell$ existe $\{i, v\} \in E(G)$, además $V \setminus W = V_\ell$, por lo tanto $G_{(V \setminus W) \cup \{i\}}$ tiene menos componentes conexas que $G_{V \setminus W}$, y así por el Teorema 1.31 tenemos $c(W \setminus \{i\}) = 1 < c(W) = |V_\ell|$ con $\ell > s$, entonces $P_{V \setminus V_\ell}(G)$ es un primo mínimo de J_G y por lo tanto es un primo asociado de J_G , para $\ell = s+1, s+2, \dots, r$. También notemos que las componentes conexas de G_W son sólo los vértices de V_ℓ , pues $\{i, j\} \notin E(G)$ para toda $i, j \in V_\ell$, es decir, $P_{V \setminus V_\ell}(G) = \mathfrak{p}_\ell = \langle x_i, y_i : i \notin V_\ell \rangle$. Por lo tanto, del Teorema 1.27

$$J_G = \bigcap_{W \subset V} P_W(G) = P_\emptyset(G) \cap \left(\bigcap_{\ell=s+1}^r \mathfrak{p}_\ell \right) = J_{\mathcal{K}_n} \cap \mathfrak{p}_{s+1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r. \quad \square$$

Proposición 3.3. [11, Proposición 4.2] Sea $G = \mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}$ con $a_1 \leq \dots \leq a_r$ una gráfica r -partita completa con conjunto de vértices $V = \bigsqcup_{\ell=1}^r V_\ell = [n]$. Entonces

$$v(J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 = 1 \\ 2 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $a_1 = 1$. Como $\mathcal{K}_{a_1, a_2, \dots, a_r}$ es r -partita completa, entonces $V_1 = \{v_1\}$ es un conjunto de dominación conexas pues G es r -partita entonces v_1 es adyacente a todos los vértices de $V \setminus V_1$, además $G_{\{v_1\}}$ es conexo, y como $1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$, entonces $|V_1|$ es la mínima cardinalidad de los conjuntos de dominación conexas, así del Teorema 2.20 $v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}) = \gamma_c(\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}) = 1$. Además $0 \leq v(J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}) \leq v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}) = 1$, pero como $J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}$ no es primo, entonces $v(J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}) \neq 0$, por lo tanto $v(J_{\mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}}) = 1$.

Ahora, supongamos que $\alpha_1 > 1$. Por el Lema 3.2 los primos mínimos de $J_{\mathcal{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}}$ son $J_{\mathcal{K}_n}$ y $p_\ell = \langle x_i, y_i : i \notin V_\ell \rangle$ para $\ell = s+1, \dots, r$. Como los generadores de $J_{\mathcal{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}}$ son los binomios de la forma $x_i y_j - x_j y_i$, entonces no puede haber un elemento $f \in S_\ell$ tal que $(J_{\mathcal{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}} : f) = p_\ell$, pues los generadores son de grado dos. Por lo tanto, de la definición de v -número, tenemos que

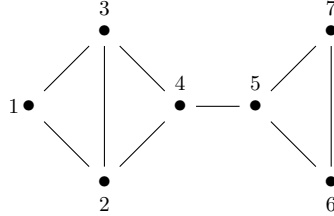
$$2 \leq v_{p_\ell}(J_{\mathcal{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}}), \text{ para toda } \ell = s+1, \dots, r.$$

Además, notemos que como $\mathcal{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$ es r -partita completa, entonces para cada $i, j \in V$ se tiene que $\{i, j\} \in E(G)$ es un conjunto de dominación conexa para $i \in V_\ell$ y $j \in V_{\ell'}$ con $\ell \neq \ell'$. Dado que $\alpha_1 > 1$, entonces no hay ningún vértice de grado $n-1$, es decir, existe al menos un vértice, digamos $v \in V$ tal que $\{i, v\} \notin E(G)$ o $\{j, v\} \notin E(G)$, así $\{i, j\}$ es un conjunto mínimo de dominación conexa, esto implica que $\gamma_c(\mathcal{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}) = 2$. Por lo tanto, nuevamente del Teorema 2.20 obtenemos

$$v(J_{\mathcal{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}}) = \gamma_c(\mathcal{K}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}) = 2. \quad \square$$

3.2. Otros ejemplos. Concluiremos este Capítulo con otros ejemplos que muestran la necesidad de considerar gráficas cerradas G para que el Teorema 2.31 se cumpla, pero también podremos notar que motivan una Conjetura del v -número de una gráfica no necesariamente cerrada, a saber, la desigualdad $v(J_G) \leq v(\text{in}_\prec(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G)$.

Ejemplo 3.4 (Gráfica cerrada). Sea G la siguiente gráfica cerrada,



El ideal binomial de aristas de G es

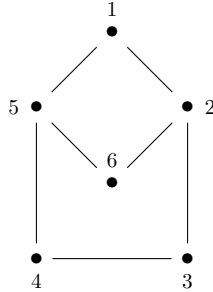
$$J_G = \langle x_1 y_2 - x_2 y_1, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_2 y_3 - x_3 y_2, x_2 y_4 - x_4 y_2, x_3 y_4 - x_4 y_3, x_4 y_5 - x_5 y_4, \\ x_5 y_6 - x_6 y_5, x_5 y_7 - x_7 y_5, x_6 y_7 - x_7 y_6 \rangle \subset K[x_1, \dots, x_7, y_1, \dots, y_7].$$

Uno de los caminos más largos inducidos por G es $P : 1, 3, 4, 5, 7$ con longitud $\ell_G = 4$. Como G es cerrada, del Teorema 1.41 tenemos que $\text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_\prec(J_G)) = 4$. Por otro lado, notemos que $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6, 7\}\}$ es una cubierta de clanes mínima, entonces $\theta(G) = 4$. Del Teorema 2.31 tenemos $4 = \theta(G) \leq v(\text{in}_\prec(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G) = 4$, por lo tanto $v(\text{in}_\prec(J_G)) = 4$.

Además, un CDS de cardinalidad mínima es $\{3, 4, 5\} \subset [7]$, entonces $\gamma_c(G) = 3$, es decir, $v_{J_{\mathcal{K}_7}}(J_G) = 3$. Por último, si $K = \mathbb{Q}$ con el Código 1 obtenemos que $v(J_G) = 2$. Por lo tanto

$$2 = v(J_G) < v(\text{in}_\prec(J_G)) = \theta(G) = \ell_G = \text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_\prec(J_G)) = 4.$$

Ejemplo 3.5 (Gráfica no cerrada). Consideremos la siguiente gráfica no cerrada con seis vértices.



El ideal binomial de aristas de G está dado por

$$\begin{aligned} J_G = \langle x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_4 - x_4y_3, x_4y_5 - x_5y_4, x_5y_6 - x_6y_5, x_2y_6 - x_6y_2 \rangle \\ \subseteq K[x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6]. \end{aligned}$$

Si $K = \mathbb{Q}$, usando el Teorema 2.20 y el código 1, obtenemos

$$v(J_G) = 2 < 3 = v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = v_{J_{\mathcal{K}_6}}(J_G)$$

$$\text{reg}(S/J_G) = 3 = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_G)).$$

Como vimos con las gráficas cerradas y en el Ejemplo 2.32, la desigualdad $v(J_G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G)$ es válida. Es natural preguntarse entonces, ¿se cumple la desigualdad

$$v(J_G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G)$$

en algún caso más general? Esta es una pregunta abierta propuesta por Delios Jaramillo y Lisa Seccia [11], y se Conjetura que la respuesta es afirmativa. Esta Conjetura toma más fuerza con algunos resultados y ejemplos del siguiente Capítulo.

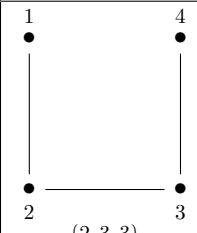
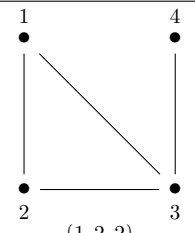
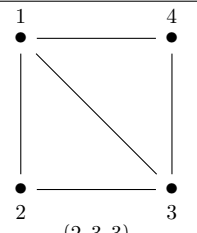
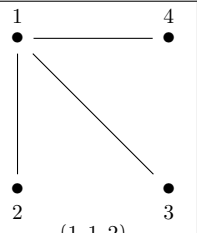
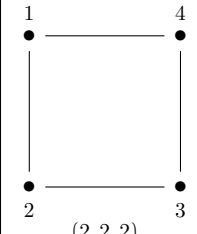
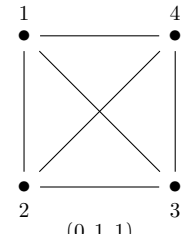
4. EL v -NÚMERO DE GRÁFICAS CÍCLICAS. PERSPECTIVAS

En este Capítulo recopilamos algunos ejemplos del artículo [11] sobre el v -número de gráficas cíclicas⁷ y que motivan una Conjetura [11, Sección 4.3] sobre el v -número de este tipo de gráficas. Esta Conjetura nos dice que si $G = C_n$ es un ciclo de orden n , entonces

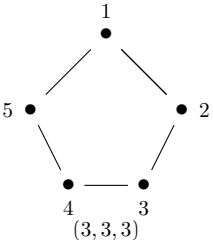
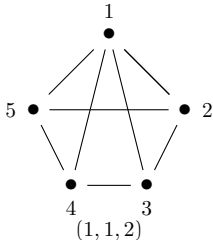
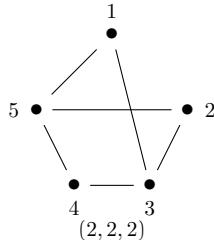
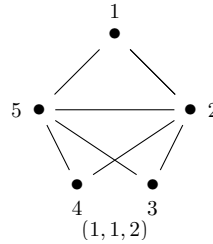
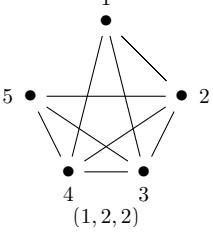
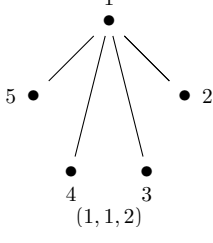
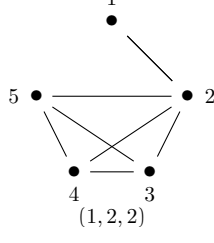
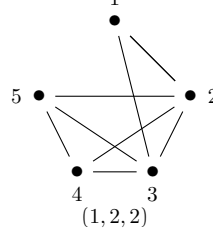
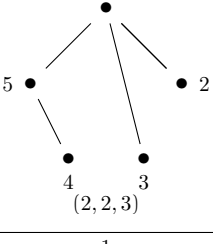
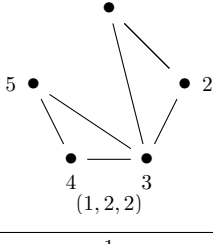
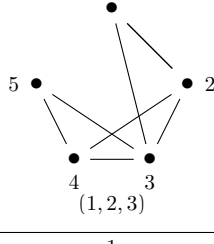
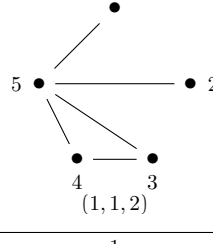
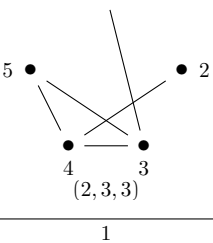
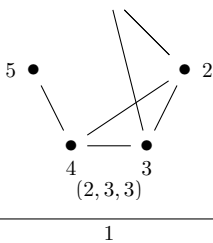
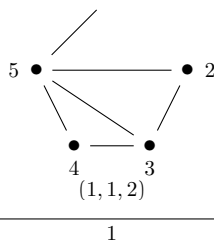
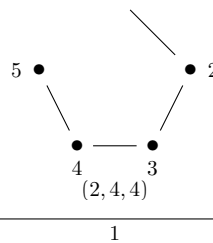
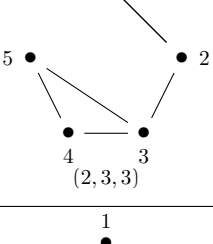
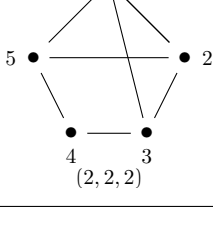
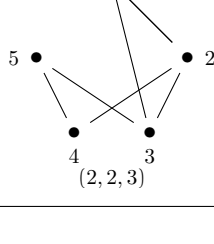
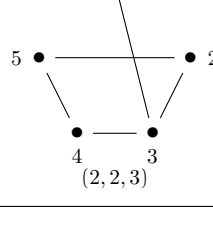
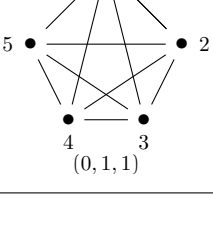
$$v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_{C_n}) = v(J_{C_n}) = v(\text{in}_{\prec}(J_{C_n})) = n - 2 = \text{reg}(S/J_{C_n}) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_{C_n})).$$

Se muestran algunos resultados que dan soporte a la conjetura, los cuales pudimos demostrar basándonos principalmente en Teoremas de [11, 12, 15, 18].

Haciendo uso del Código 1 podemos verificar que para toda gráfica conexa con 4 y 5 vértices, se satisface la desigualdad de la Conjetura del final de la Sección 3.2, es decir, $v(J_G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G)$. Esto lo podemos ver en las siguientes tablas donde cada triada de números representa $(v(J_G), v(\text{in}_{\prec}(J_G)), \text{reg}(S/J_G))$.

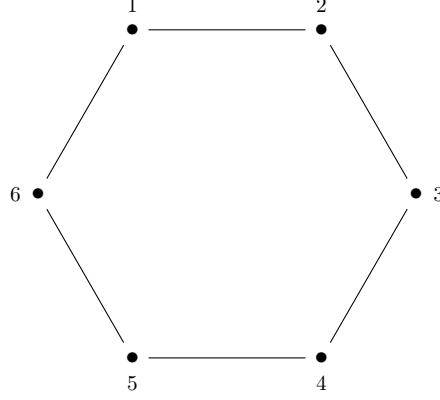
Gráficas conexas con 4 vértices			
 (2, 3, 3)	 (1, 2, 2)	 (2, 3, 3)	 (1, 1, 2)
 (2, 2, 2)	 (0, 1, 1)		

⁷Una *gráfica cíclica* o simplemente un *ciclo* de orden $n \geq 3$ es una gráfica en que los vértices se pueden enumerar en un orden $v_1, v_2, \dots, v_n$ tal que las aristas son las $\{v_i, v_{i+1}\}$ donde $i = 1, 2, \dots, n - 1$, más la arista $\{v_n, v_1\}$.

Gráficas conexas con 5 vértices			
 (3, 3, 3)	 (1, 1, 2)	 (2, 2, 2)	 (1, 1, 2)
 (1, 2, 2)	 (1, 1, 2)	 (1, 2, 2)	 (1, 2, 2)
 (2, 2, 3)	 (1, 2, 2)	 (1, 2, 3)	 (1, 1, 2)
 (2, 3, 3)	 (2, 3, 3)	 (1, 1, 2)	 (2, 4, 4)
 (2, 3, 3)	 (2, 2, 2)	 (2, 2, 3)	 (2, 2, 3)
 (0, 1, 1)			

Algo que podemos notar en las tablas anteriores, es que para los ciclos $G = C_4, C_5$ de orden 4 y 5 respectivamente obtenemos las igualdades $v(J_G) = v(\text{in}_{\prec}(J_G)) = \text{reg}(S/J_G)$. En el siguiente ejemplo, podemos verificar que estas igualdades se satisfacen.

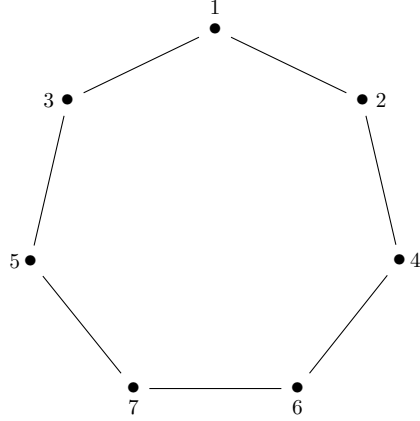
Ejemplo 4.1. Sea J_{C_6} el ideal binomial de aristas del ciclo de orden 6.



Usando el Teorema 2.20 y el Código 1 obtenemos

$$v_{J_{\mathcal{K}_6}}(J_{C_6}) = v(J_{C_6}) = v(\text{in}_{\prec}(J_{C_6})) = 4 = \text{reg}(S/J_{C_6}) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_{C_6})).$$

Similarmente, para C_7



obtenemos

$$v_{J_{\mathcal{K}_7}}(J_{C_7}) = v(J_{C_7}) = v(\text{in}_{\prec}(J_{C_7})) = 5 = \text{reg}(S/J_{C_7}) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_{C_7})).$$

Estos cálculos, más los obtenidos antes para C_4 y C_5 sugieren que, para cualquier ciclo C_n con $n \geq 4$, se tiene que

$$v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_{C_n}) = v(J_{C_n}) = v(\text{in}_{\prec}(J_{C_n})) = n - 2 = \text{reg}(S/J_{C_n}) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec}(J_{C_n})).$$

A continuación, se presentan algunos resultados que dan soporte a esta conjetura. Sin embargo, para la primera igualdad de esta cadena, hemos encontrado un contraejemplo 4.10, el cual se muestra posteriormente. Como primer lugar, se darán resultados que son nuestra aportación a este tema de investigación.

Observación 4.2. Consideramos sólo ciclos de orden $n \geq 4$ pues notemos que si $n = 3$ entonces $C_3 = \mathcal{K}_3$ y del Teorema 2.20 sabemos que $v(J_{C_3}) = v(J_{\mathcal{K}_3}) = 0$, lo cual no cumple lo sugerido antes. No consideramos $n = 1, 2$ ya que no son ciclos, en su defecto, son gráficas completas y por lo tanto $v(J_{\mathcal{K}_1}) = v(J_{\mathcal{K}_2}) = 0$.

Proposición 4.3. Sea $G = C_n$ un ciclo de orden $n \geq 4$. Entonces $v(J_{C_n}) \leq n - 2 = v_{J_{C_n}}(J_{C_n})$.

Demostración. Si $G = C_n$ es un ciclo, y $V(C_n) = [n]$ su conjunto de vértices. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} < i_n$ tal que $\{i_s, i_{s+1}\}, \{i_1, i_n\} \in E(C_n)$ para toda $1 \leq s \leq n - 1$. Consideremos el siguiente subconjunto $T_1 = \{i_1, \dots, i_{n-2}\} \subset [n]$, el cual es el CDS con cardinalidad mínima. Basta probar que $T'_1 = T_1 \setminus \{i_s\}$, para todo $i_s \in T_1$, ya no es un CDS. En efecto, ya que si $i_s \in T$, con $s \neq 1, n - 2$ entonces $T'_1 = T \setminus \{i_s\}$ no es un CDS pues $G_{T'_1}$ no es conexa. Si $s = 1$ entonces no existe un $i_{s'} \in T'$ tal que $\{i_{s'}, i_n\} \in E(G)$. Similarmente, si $s = n - 2$ entonces no existe un $i_{s'} \in T'_1$ tal que $\{i_{s'}, i_{n-1}\} \in E(G)$. Por lo tanto T_1 es un CDS de cardinalidad mínima, es decir, $\gamma_c(C_n) = n - 2$, así por el Teorema 2.20 obtenemos que $v_{J_{C_n}}(J_{C_n}) = n - 2$, esto implica que $v(J_{C_n}) \leq v_{J_{C_n}}(J_{C_n}) = n - 2$. $\square$

Proposición 4.4. Si $G = C_n$ es un ciclo de orden $n \geq 3$. Entonces $n - 2 \leq \text{reg}(S/J_{C_n}) \leq n - 1$.

Demostración. Consideremos el camino $P : i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ que es el camino inducido más largo de C_n . En efecto, pues cualquier subcamino de P es también un camino inducido pero ya no es el más largo, y $P' : i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n$ es un camino más largo que P pero no es inducido ya que $G_{T_2} = C_n$, con $T_2 = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n\}$. Es decir, $\ell_G = n - 2$, por lo tanto, del Teorema 1.41 obtenemos que $n - 2 \leq \text{reg}(S/J_{C_n}) \leq n - 1$. $\square$

En la Proposición 4.4 obtuvimos que $n - 2 \leq \text{reg}(S/J_{C_n}) \leq n - 1$, sin embargo, nos gustaría que $\text{reg}(S/J_{C_n}) = n - 2$. Kazunori Matsuda y Satoshi Murai proponen [15, Conjetura 3.10] que si $\text{reg}(J_G) = n$ entonces G es un camino de longitud $n - 1$. Si dicha Conjetura es cierta, entonces tendríamos también el resultado deseado.

Por otro lado, como vimos con la gráficas cerradas, el ideal inicial (con respecto al orden lexicográfico) de J_G para una gráfica cerrada G coincide con el ideal de aristas de una gráfica bipartita H_G , a la que denominamos gráfica inicial. Similarmente, si ahora $G = C_n$ es un ciclo de orden $n \geq 4$, entonces su ideal inicial, con respecto al orden lexicográfico, también coincide con el ideal de aristas de una gráfica bipartita H_G respecto a un etiquetado adecuado. Así, tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.5. Sea $G = C_n$ un ciclo con vértices $[n]$ de orden $n \geq 4$ con conjunto de aristas

$$E(C_n) = \left\{ \{2k, 2k + 2\}, \{2k - 1, 2k + 1\} : 1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1 \right\} \cup \left\{ \{1, 2\}, \{n - 1, n\} \right\}$$

si n es par; o conjunto de aristas

$$E(C_n) = \left\{ \{2k, 2k + 2\}, \{2k - 1, 2k + 1\} : 1 \leq k \leq \frac{n-3}{2} \right\} \cup \left\{ \{1, 2\}, \{n - 1, n\} \right\}$$

si n es impar y H_{C_n} su gráfica inicial. Entonces $A = \{y_j, v_{a_1}, \dots, v_{a_s}, x_i\} \in \mathcal{A}_{H_{C_n}}$ es de cardinalidad $n - 2$, donde $j = 2, 3$, cada v_{a_s} es uno de los vértices de las aristas disjuntas en H_{C_n} y con $i = n - 2, n - 1$.

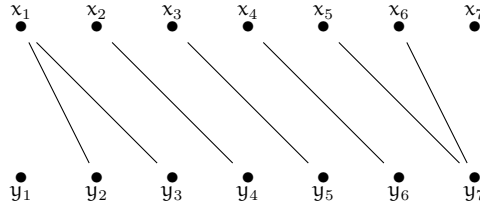
Demostración. Sea H_{C_n} la gráfica inicial de C_n y notemos que independientemente de la paridad de n , por las definición del conjunto de aristas de C_n , todas las aristas en H_{C_n} son disjuntas a excepción de $\{x_1, y_2\}, \{x_1, y_3\}$ y $\{x_{n-1}, y_n\}, \{x_{n-2}, y_n\}$. Sea el conjunto $A = \{y_j, v_{a_1}, \dots, v_{a_s}, x_i\}$ donde cada v_{a_s} es uno de los vértices de las aristas disjuntas en H_{C_n} , es decir, para toda s tenemos que $v_{a_s} \neq x_1$ y $v_{a_s} \neq y_n$. Notemos que como hay $n - 4$ aristas disjuntas, entonces hay $n - 4$ vértices v_{a_s} más los vértices x_i, y_j , así la cardinalidad de A es $n - 2$.

Ahora, por las definición de las aristas $E(C_n)$, para toda $v_{a_s}, v_{a_r} \in A$, con $s \neq r$, se tiene que $\{v_{a_s}, v_{a_r}\} \notin E(H_{C_n})$, además tenemos que x_j y y_i no son adyacentes con ningún vértice de A . Entonces A es un conjunto estable. Por último, consideremos $N_{H_{C_n}}(A) = \{x_1, u_{a_1}, \dots, u_{a_s}, y_n\}$. Como H_{C_n} es bipartita, entonces los vértices u_{a_s} cubren las aristas $\{v_{a_s}, u_{a_s}\} \in E(H_{C_n})$, el vértice x_1 cubre las aristas $\{x_1, y_2\}$ y $\{x_1, y_3\}$, mientras que el vértice y_n cubre las aristas $\{x_{n-1}, y_n\}$ y $\{x_{n-2}, y_n\}$. Así $N_{H_{C_n}}(A)$ es una cubierta de vértices y por inciso (b) del Lema 2.25, se tiene que $N_{H_{C_n}}(A)$ es cubierta mínima, por lo tanto $A \in \mathcal{A}_{H_{C_n}}$. $\square$

Proposición 4.6. Sea $G = C_n$ un ciclo con vértices $[n]$ de orden $n \geq 4$ con conjunto de aristas como en el Lema 4.5 y H_{C_n} su gráfica inicial. Entonces, con respecto al orden lexicográfico $v(\text{in}_\prec(J_{C_n})) = n - 2$.

Demostración. Consideremos el conjunto $A = \{y_2, x_2, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}\}$. Por el Lema 4.5 tenemos que $A \in \mathcal{A}_{H_{C_n}}$ y además $|A| = n - 2$. Sea $A' = A \setminus \{v\}$ con $v \in A$. Notemos que $A' \notin \mathcal{A}_{C_n}$, pues $N_{H_{C_n}}(A')$ ya no cubierta porque existe al menos la arista $\{v, u\}$ de H_{C_n} que no la cubren los vértices de $N_{H_{C_n}}(A')$, pues $u \notin N_{H_{C_n}}(A')$, es decir, A es un conjunto de cardinalidad mínima tal que $A \in \mathcal{A}_{H_{C_n}}$. Por lo tanto, como $I(H_{C_n}) = \text{in}_\prec(J_{C_n})$ y del Teorema 2.26 obtenemos que $v(\text{in}_\prec(J_{C_n})) = n - 2$, como se quería. $\square$

Ejemplo 4.7. El etiquetado propuesto en la demostración del Lema 4.5 es como el ciclo C_7 del Ejemplo 4.1. La gráfica inicial H_{C_7} que le corresponde a este ciclo es:



donde, el ideal inicial de J_{C_7} es

$$\text{in}_\prec(J_{C_7}) = I(H_{C_7}) = \langle x_1y_2, x_2y_4, x_4y_6, x_1y_3, x_3y_5, x_5y_7, x_5y_7 \rangle.$$

Un conjunto estable de cardinalidad mínima está dado por $A = \{y_2, y_4, y_5, y_6, x_5\}$ y $N_{H_{C_n}}(A) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_7\}$ que es una cubierta (mínima). Así $A \in \mathcal{A}_{H_{C_n}}$, y por lo tanto $v(\text{in}_\prec(J_{C_7})) = 5$.

Teorema 4.8. [18, Teorema 4.5] Sea G una gráfica bipartita con conjunto de vértices $[n] = X \cup Y$ tal que $X \cap Y = \emptyset$ y con $I(G)$ el ideal de aristas de G . Entonces $v(I(G)) \leq \text{im}(G)$. Además, tenemos

$$v(I(G)) \leq \text{reg}(S/I(G)).$$

Demostración. Sea $X_1 \subseteq X$ tal que $N_G(X_1) = N_G(X)$ y

$$|X_1| = \min\{|X'| : X' \subseteq X \text{ y } N_G(X') = N_G(X)\}.$$

Entonces, como X_1 es un conjunto estable en G , pues X lo es por ser G bipartita, y $N_G(X)$ es una cubierta mínima de vértices de G , y así por [18, Teorema 2.3] tenemos que $v(I(G)) \leq |X_1|$ y del [18, Teorema 4.4] obtenemos

$$v(I(G)) \leq |X_1| \leq \text{im}(G).$$

Por lo tanto, de [14, Lema 2.2] y [7, Teorema 2.1] tenemos

$$v(I(G)) \leq \text{im}(G) \leq \text{reg}(S/I(G)). \quad \square$$

Corolario 4.9. Sea $G = C_n$ un ciclo de orden $n \geq 4$ y conjunto de aristas como el Lema 4.5. Entonces, respecto al orden lexicográfico

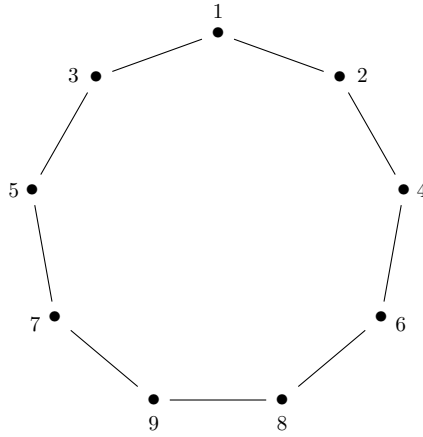
$$n - 2 \leq \text{reg}(S/\text{in}_\prec(J_{C_n})).$$

Demostración. Sea H_{C_n} la gráfica inicial de C_n . Como H_{C_n} es bipartita, entonces del Teorema 4.8 se sigue que $v(I(H_{C_n})) \leq \text{reg}(S/I(H_{C_n}))$, además se tiene que $\text{in}_\prec(J_{C_n}) = I(H_{C_n})$ y de la Proposición 4.6 $v(\text{in}_\prec(J_{C_n})) = n - 2$. Por lo tanto

$$n - 2 \leq \text{reg}(S/\text{in}_\prec(J_{C_n})). \quad \square$$

Como vimos en la Proposición 4.3, $v(J_{C_n}) \leq n - 2$. Sólo bastaría probar que $n - 2 \leq v(J_{C_n})$ para poder verificar el v -número de gráficas cíclicas. Sin embargo, haciendo uso del código 1, y como lo mencionamos anteriormente, hemos encontrado un Contraejemplo para esto, el cual se describe a continuación.

Ejemplo 4.10 (Contraejemplo). Sea $G = C_n$ con $n = 9$.



El ideal binomial de aristas de la gráfica es

$$J_{C_9} = \langle x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_4 - x_4y_2, x_3y_5 - x_5y_3, x_4y_6 - x_6y_4, x_5y_7 - x_7y_5, x_6y_8 - x_8y_6, x_7y_9 - x_9y_7, \\ x_8y_9 - x_9y_8, x_1y_3 - x_3y_1 \rangle.$$

Con el Código 1 se verifica que $v(J_{C_9}) = 6 \neq 9 - 2$, esto es,

```
i1 : vnumber = method(TypicalValue => ZZ);
i2 : Código 1
o2 = FunctionClosure[stdio:3:19-17:1]
o2 : FunctionClosure
i3 : R=QQ[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7,y8,
      y9,y10];
o3 = R
o3 : PolynomialRing
i4 : I = ideal (x1*y2-x2*y1, x2*y4-x4*y2, x3*y5-x5*y3, x4*y6-x6*y4,
      x5*y7-x7*y5, x6*y8-x8*y6, x7*y9-x9*y7, x8*y9-x9*y8,
      x1*y3-x3*y1);
o4 : Ideal of R
i5 : vnumber(I)
o5 : = 6
```

Con los resultados de esta Sección obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 4.11. Sea $G = C_n$ un ciclo con vértices $[n]$ de orden $n \geq 4$ y H_{C_n} su gráfica inicial. Entonces,

$$v(J_{C_n}) \leq v_{J_{C_n}}(J_{C_n}) = v(\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(J_{C_n})) = n - 2 \leq \text{reg}(S/J_{C_n}) \leq \text{reg}(S/\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(J_{C_n})).$$

Demostración. La primera desigualdad se sigue de la Proposición 4.3, la igualdad es implicación de la Proposición 4.6, la penúltima desigualdad se tiene por Proposición 4.4 y la última desigualdad se sigue del Corolario 4.9. $\square$

Como pudimos notar en el Contraejemplo 4.10, la Conjetura que trabajamos no se cumple para $n = 9$. Más aún, muy recientemente, Deblina Dey, A. V. Jayanthan y Kamalesh Saha [2] estudiaron el mismo problema de gráficas cíclicas pero bajo otra perspectiva. Ellos demuestran que, [2, Corolario 4.10], para toda n se cumple $v(J_{C_n}) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

De la Proposición 4.3 y [2, Corolario 4.10], se verifica el siguiente corolario.

Corolario 4.12. Sea $G = C_n$ una gráfica cíclica. Entonces

$$v(J_{C_n}) \leq \begin{cases} n-2 & \text{si } 4 \leq n \leq 8 \\ \lceil \frac{2n}{3} \rceil & \text{si } n \geq 9. \end{cases}$$

Demostración. De la Proposición 4.3 tenemos que $v(J_{C_n}) \leq n-2$ y de [2, Corolario 4.10] tenemos $v(J_{C_n}) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Para $n = 4, 5$ se tiene que $n-2 < \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, para $n = 6, 7, 8$ la igualdad se cumple, es decir, $n-2 = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ y para $n \geq 9$ obtenemos $\lceil \frac{2n}{3} \rceil < n-2$. $\square$

De igual manera, en [2] se conjetura que $v(J_{C_n}) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, para $n \geq 6$. Al combinar esta conjetura con la que hemos estado trabajando a lo largo de este Capítulo, podemos formular una Conjetura más general.

Conjetura 4.13.

Sea $G = C_n$ un ciclo de orden n . Entonces

$$v(J_{C_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3 \\ n-2 & \text{si } 4 \leq n \leq 8 \\ \lceil \frac{2n}{3} \rceil & \text{si } n \geq 9. \end{cases}$$

Con lo estudiado en este Capítulo podemos notar que la Conjetura citada al final de la Sección 3.2 se sigue cumpliendo y la cual sigue abierta.

Conclusión. Este trabajo tuvo como objetivo estudiar el v -número de ideales binomiales generados por aristas J_G del anillo de polinomios $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ asociados a una gráfica simple G . Los principales resultados fueron:

- El Teorema 2.20, el cual calcula el v -número de J_G localmente en uno de sus ideales primos mínimos $J_{\mathcal{K}_n}$. Este Teorema implica directamente una cota superior para $v(J_G)$, es decir, $v(J_G) \leq v_{J_{\mathcal{K}_n}}(J_G)$.
- El Teorema 2.31, el cual afirma que si G es una gráfica cerrada conexa, obtenemos

$$v(J_G) < \theta(G) \leq v(\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G) = \text{reg}(S/\text{in}_{\prec_{\text{lex}}}(J_G)),$$

donde $\theta(G)$ es el número de cubierta de clanes.

- La Proposición 3.3, la cual nos dice explícitamente el valor del v -número de J_G cuando $G = \mathcal{K}_{a_1, \dots, a_r}$ es una gráfica r -partita completa.
- La Conjetura propuesta por Delio Jaramillo y Lissa Seccia sobre gráficas cíclicas, propuesta [11] es falsa. El Contraejemplo 4.10 lo verifica.
- El Teorema 4.11, el cual nos da una cadena de desigualdades para el v -número de J_G cuando $G = C_n$ es una gráfica cíclica de orden $n \geq 4$. Este resultado es nuestra aportación a este tema de investigación.

Estos resultados inspiran a una Conjetura para gráficas simples más generales, esta es,

$$v(J_G) \leq v(\text{in}_{\prec}(J_G)) \leq \text{reg}(S/J_G)$$

para gráficas no necesariamente cerradas o cíclicas.

Trabajo a futuro: Como trabajo a futuro se propone seguir trabajando en la Conjetura 4.13, además de la Conjetura citada en la Sección 3.2.

REFERENCIAS

- [1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley. (Citado en la página 27.)
- [2] Dey, D., A. V. Jayanthan, and Kamalesh Saha. *On the v -number of binomial edge ideals of some classes*. <https://arxiv.org/pdf/2405.15354v1> (Citado en las páginas 4, 49 y 50.)
- [3] Caro, Y., West, D.B., Yuster, R.: *Connected domination and spanning trees with many leaves*. *SIAM J. Discrete Math.* 13(2), 202-211 (2000). (Citado en las páginas 35 y 36.)
- [4] Cooper, S. M., Seceleanu A., Tohaneanu, S. O., Vaz Pinto, M. and Villarreal R. H. *Generalized minimum distance functions and algebraic invariants of Geramita ideals*. *Adv. in Appl. Math.*, 112:101940, 34, 2020. (Citado en las páginas 1 y 23.)
- [5] Ene, V. and Zarojanu, A. *On the regularity of binomial edge ideals*. *Math. Nachr.*, 288(1):19-24, 2015. (Citado en la página 22.)
- [6] Grifo, A., *Commutative Algebra and Homological Algebra*. University of California, Riverside. February 28, Math 224 Spring 2021. (Citado en las páginas 17 y 18.)
- [7] Hà, H. T., *Regularity of squarefree monomial ideals, Connections between algebra, combinatorics, and geometry*, Springer Proc. Math. Stat., 76, Springer, New York, 251-276 (2014). (Citado en la página 48.)
- [8] Herzog, J. and Hibi, T. *Monomial ideals*, volume 260 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2011. (Citado en las páginas 6, 27 y 36.)
- [9] Herzog, J., Hibi, T., Hreinsdóttir, F., Kahle, T., and Rauh, J. *Binomial edge ideals and conditional independence statements*. *Adv. in Appl. Math.*, 45(3):317-333, 2010. (Citado en las páginas 6, 15 y 16.)
- [10] Herzog, J., Hibi, T., and Ohsugi, H. *Binomial ideals*, volume 279 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2018. (Citado en las páginas 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 31 y 41.)
- [11] Jaramillo, D. and Seccia, L. *Connected domination in graphs and v -numbers of binomial edge ideals*. *Collect. Math.* (2023), <https://doi.org/10.1007/s13348-023-00412-w>. (Citado en las páginas 1, 3, 23, 26, 31, 33, 34, 35, 38, 39, 40, 41, 42, 44 y 51.)
- [12] Jaramillo, D. and Villarreal, R. H. *The v -number of edge ideals*. *J. Combin. Theory Ser. A*, 177:Paper No. 105310, 35, 2021. (Citado en las páginas 2, 24, 36, 37, 38 y 44.)
- [13] Jayanthan, A.V., Narayanan, N., Raghavendr, R., B.V.: *Regularity of binomial edge ideals of certain block graphs*. *Proc. Math. Sci.* 129(3), 36 (2019). (Citado en las páginas 6 y 23.)
- [14] Katzman, M., *Characteristic-independence of Betti numbers of graph ideals*, *J. Combin. Theory Ser. A* 113, no. 3, 435-454 (2006). (Citado en la página 48.)
- [15] Matsuda K. and Murai S. *Regularity bounds for binomial edge ideals*. *J. Commut. Algebra*, 5(1):141-149, 2013. (Citado en las páginas 2, 6, 17, 18, 22, 44 y 47.)
- [16] Mohammadi, F. and Sharifan, L. *Hilbert function of binomial edge ideals*. *Comm. Algebra*, 42(2):688-703, 2014. (Citado en las páginas 23, 26, 27 y 30.)
- [17] Ohtani, M.: *Binomial edge ideals of complete multipartite graphs*. *Commun. Algebra* 41(10), 3858-3867 (2013). (Citado en las páginas 41 y 42.)
- [18] Saha, K., Sengupta, I.: *The v -number of monomial ideals*. *J. Algebraic Combin.* 56(3), 903-927 (2022). (Citado en las páginas 4, 39, 44 y 48.)
- [19] Villarreal, R. H., *Monomial Algebras*, Second Edition, Monographs and Research Notes in Mathematics, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2015. (Citado en la página 37.)

ÍNDICE ALFABÉTICO

- árbol, 23
 - de expansión, 35
- anillo
 - graduado, 18
- apareamiento
 - inducido, 24
- bases de Gröbner, 7
- camino
 - admisible, 30
 - en G , 11
 - inducido, 22
- clan, 38
- clutter, 37
- complejo
 - de cadenas, 18
 - mínimo, 19
- componentes
 - conexas de G , 11
- conjunto
 - de aristas, 11
 - de dominación conexa, 34
 - de vértices, 11
 - estable, 36
- cubierta
 - de clanes, 38
 - de vértices, 36
 - de vértices mínima, 36
- gráfica
 - r -partita completa, 41
 - bipartita, 11
 - cerrada, 15
 - completa, 11
 - conexa, 11
 - finita, 11
 - inicial, 24
 - simple, 11
- gráfica cíclica, 44
- ideal
 - binomial, 12
 - binomial de aristas, 12
 - de aristas, 24
 - inicial, 7
 - monomial, 6
 - primo mínimo, 14
- ideales
 - determinantales, 12
- lazo
 - de G , 11
- lema
 - de Dickson, 6
- monomio
 - inicial, 7
- número
 - de apareamiento inducido, 24
 - de Betti, 19
 - de dominación conexa, 34
 - máximo de hojas, 35
- orden
 - lexicográfico, 7
 - monomial, 7
- R -módulo
 - graduado, 18
 - libre, 18
 - proyectivo, 18
- regularidad
 - de Castelnuovo-Mumford, 21
- resolución
 - libre, 19
 - proyectiva, 18
- sizigia, 19
- soporte
 - de un polinomio, 7
- subgráfica
 - de G , 11
 - inducida de G , 11
- Teorema
 - Criterio de Buchberger, 9
- v -número, 23
- vértice
 - de corte, 11
- vecindad
 - de vértices, 36



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00241

Matrícula: 2222800108

Invariantes algebraicos de
ideales binomiales de
aristas.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas
del día 25 del mes de noviembre del año 2024 en la Unidad
Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los
suscritos miembros del jurado:

DR. RAFAEL HERACLIO VILLAREAL RODRIGUEZ
DR. YURIKO PITONES AMARO
DR. LUIS NUÑEZ BETANCOURT

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de
Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen
de Grado cuya denominación aparece al margen, para la
obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: LUIS EDUARDO PLATA CORREA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del
Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad
Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado
resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al
interesado el resultado de la evaluación y, en caso
aprobatorio, le fue tomada la protesta.



LUIS EDUARDO PLATA CORREA
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Roman Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

Rafael H. Villareal
DR. RAFAEL HERACLIO VILLAREAL
RODRIGUEZ

VOCAL

Yuriko Pitones Amaro
DR. YURIKO PITONES AMARO

SECRETARIO

Luis N. Betancourt
DR. LUIS NUÑEZ BETANCOURT