



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Julio 17 de 1995

**LIC. GUILLERMO NIEVES MAYEN
JEFE DE LA BIBLIOTECA
P R E S E N T E**

De acuerdo al punto 3 de los Lineamientos Particulares para presentar el examen de grado en los programas de posgrado de la División de C.B.I.- Iztapalapa, adjunto le envío a usted 2 (dos) copias de la tesis doctoral que presentó el (la) alumno (a) :

HILDA NOEMI NUÑEZ YEPEZ

"SOLUCIONES EXACTAS Y CAOS EN LAS COSMOLOGIA DE JORDAN BRANS DICKE"

para que formen parte del acervo de la Biblioteca.

Sin otro particular, le envío un cordial saludo.

Atentamente
"CASA ABIERTA AL TIEMPO"

**DR. ELEUTERIO CASTAÑO T.
COORDINADOR DEL DOCTORADO EN CIENCIAS**

**UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DIRECCION**

Av. Michoacán y La Purísima, Col. Vicentina, Iztapalapa, D.F. C.P. 09340

Julio 17 de 1995

**LIC. GUILLERMO NIEVES MAYEN
JEFE DE LA BIBLIOTECA
P R E S E N T E**

De acuerdo al punto 3 de los Lineamientos Particulares para presentar el examen de grado en los programas de posgrado de la División de C.B.I.- Iztapalapa, adjunto le envío a usted 2 (dos) copias de la tesis doctoral que presentó el (la) alumno (a) :

HILDA NOEMI NUÑEZ YEPEZ

"SOLUCIONES EXACTAS Y CAOS EN LAS COSMOLOGIA DE JORDAN BRANS DICKE"

para que formen parte del acervo de la Biblioteca.

Sin otro particular, le envío un cordial saludo.

Atentamente
"CASA ABIERTA AL TIEMPO"

**DR. ELEUTERIO CASTAÑO T.
COORDINADOR DEL DOCTORADO EN CIENCIAS**



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

SOLUCIONES EXACTAS Y CAOS EN LA
COSMOLOGÍA DE JORDAN BRANS DICKE

Tesis que presenta

Hilda Noemí Núñez Yépez

Para la obtención del grado de

Doctora en Ciencias

Julio de 1995

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Física

UNIDAD IZTAPALAPA

Avenida Michoacán y La Purísima s/n. Iztapalapa 09340 México, D. F., A.P. 55-534. Fax (5) 724-4611 Tel. 724-4623

Agradecimientos

La idea para este trabajo surgió en una noche de insomnio, que como en la mayoría de las ocasiones son ideas poco convencionales o descabelladas para algunos, por lo que era difícil de llevar a cabo: Reunir dos temas, en los que había estado trabajado desde hace tiempo, aparentemente muy distantes uno del otro y tan cercanos a la vez, que esa conexión era prácticamente invisible, la cosmología y la dinámica no lineal.

Este trabajo fué posible gracias a las amplias perspectivas que se vislumbraban, ya que ambos campos han sido y son de interés para la investigación, y aún dentro del Departamento de Física de la UAM-I, existen proyectos en estas direcciones. La realización en particular de esta tesis se debió al Dr. Chauvet quién, a pesar de todo, accedió a orientar el trabajo.

Agradezco al ICN-UNAM y al IF-UNAM por todo el apoyo brindado, ya sea directa o indirectamente, a este trabajo; agradezco tanto las pláticas de café con sus miembros, que a veces son las más productivas, como en el uso de sus instalaciones, donde se hicieron la mayoría de los cálculos.

También quiero expresar mi agradecimiento al Laboratorio de Cuernavaca IF-UNAM y en especial a la Dra. Cisneros quién, al igual que otros de mis profesores, me ha apoyado en los momentos cruciales en el desarrollo del trabajo presentado aquí.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Salas quien siempre tiene: la frase adecuada, el comentario preciso, y sobre todo la sensibilidad para motivar; o en su caso, aclarar conceptos, ideas o crear nuevas líneas tanto para buscar problemas como para resolverlos.

Agradezco a los profesores del Departamento de Física, su apoyo y consejos referentes a este trabajo. Un agradecimiento en particular para la Dra. Velazco, por sus comentarios tan acertados en un momento crucial en el desarrollo del trabajo.

Manifiesto mi agradecimiento a los sinodales: Dr. Pablo Chauvet Alducín, Dr. Joaquín Delgado Fernández, Dr. Eduardo Piña Garza, Dr. José Luis de Río Correa, Dr. Roberto Alan Sussman Livovsky, quienes haciendo a un lado sus múltiples ocupaciones accedieron a revisar y hacer sugerencias que, completaron y redondearon el trabajo.

En especial quiero agradecer al Dr. Sussman la dedicación y el apoyo tan grande que me brindó en la revisión del manuscrito preliminar del trabajo, y sus comentarios, sugerencias y críticas que contribuyeron notablemente a mejorarlo.

También agradezco al Dr. Piña, al Dr. del Río y al Dr. Delgado evaluadores de este trabajo, quienes han sugerido varias líneas de investigación por donde este trabajo se puede continuar. Su apoyo y comprensión fueron importantes en las etapas finales de la escritura. Finalmente mi agradecimiento al Dr. Chauvet sin el cuál este trabajo no se hubiera podido llevar a cabo.

Por último un agradecimiento muy especial a F.D. Micha, N. Humita, G. Pinto, A. Terek, F.C. Bonito, N. Minina, M. Osita, M. Koshka, Ch. Shat, T. Tomi, y M. Mina. A todos mis gatos, mi más profundo agradecimiento ya que me han ayudado en los momentos más difíciles de mi vida, me han mostrado el camino a seguir para conseguir lo que desean, siempre insistentes y tenaces, sin dejar de estar mimados, consentidos, hermosos y sobre todo conservando ese porte tan elegante que los caracteriza siempre; mas sin embargo, nunca estan en desventaja puesto que nunca dejarán de ser terribles asesinos.

A la memoria de F.D. Micha (25/IX/87 – 6/I/94)

Índice

Agradecimientos	i
Índice	iii
Introducción	1
Capítulo 1	
Dinámica no lineal	5
1. Fundamentos	6
2. Características de los sistemas dinámicos	9
3. Métodos de análisis	13
4. Pies de figuras	17
5. Figuras	19
Capítulo 2	
Modelos cosmológicos de Brans–Dicke	23
1. Teorías de la gravitación	23
2. Ecuaciones de la teoría JBD	26
3. Soluciones exactas en cosmología	29
4. Grupos de isometrías	31
5. Modelos Bianchi en JBD	33
6. Pies de tablas	36
7. Tablas	37
Capítulo 3	
Soluciones exactas	41
1. Modelos resolubles	43
2. Modelos irresolubles	55
3. Modelos que colapsan en vacío	56
4. Singularidades	57
5. Interpretación de las soluciones	59

6. Pies de figuras	66
7. Pie de tabla	70
8. Figuras	71
9. Tabla	88
Capítulo 4	
Comportamiento caótico en JBD	91
1. Ecuaciones del modelo cosmológico	93
2. Condiciones iniciales	95
3. Evidencia numérica de caos	96
4. Cambio de escala	102
5. Pies de figuras	104
6. Pie de tabla	105
7. Figuras	106
8. Tabla	115
Conclusiones	116
Contribución de este trabajo	117
Referencias	118

Introducción

En la actualidad existen varias teorías para la gravitación, la fuerza que parece dominar la estructura del universo a gran escala. De todas esas, la teoría de Einstein (RG) y la de Jordan, Brans y Dicke (JBD) son dos de las teorías clásicas que han encontrado aceptación. Según muchos investigadores, RG basta para explicar el universo observado y mucha de su evolución. Para otros, ello no basta, pues, la teoría escalar tensorial propuesta por Brans y Dicke emplea no sólo los grados de libertad tensoriales de RG sino también un campo escalar que supusieron responsable de llevar la información del estado de movimiento de las masas lejanas en el universo a toda otra masa presente para así influir en sus propiedades inerciales y podría dar cuenta de la llamada hipótesis de los “grandes números” avanzada por Dirac (1937, 1938). El papel del campo escalar de JBD en cierta forma acaba aquí pues, dado que no deseaban abandonar el principio de equivalencia, Brans y Dicke propusieron que únicamente el tensor métrico, y no el campo escalar, apareciera en las ecuaciones de movimiento para la materia en su teoría (Brans y Dicke 1961). En todo caso, de las alternativas propuestas a RG, la teoría JBD es la que ha sido mejor fundamentada y también la que puede explicar muchas observaciones del estado actual del universo (Aguilar *et al.* 1992a, 1992b).

Este trabajo se basa en la teoría JBD. Una razón para esta elección se

puede encontrar en que hoy en día existe un renacimiento del interés en las teorías que involucren grados de libertad escalares para la gravitación. Como lo mencionaremos en el capítulo 4 de este trabajo, algunos de nuestros resultados podrían ser importantes dentro del marco de la llamada inflación extendida (Carretero-González *et al.* 1994b, Steinhardt 1993), que es una de las razones para tal renacimiento.

Se debe enfatizar que éste debe considerarse como un trabajo totalmente clásico dentro del campo de la cosmología. Se ha tratado de encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de la teoría en modelos con interés cosmológico, *i.e.* modelos que pudiesen representar la estructura actual en gran escala del universo y, posiblemente, algo de su evolución. Específicamente se trató con los llamados modelos de tipo Bianchi en vacío, éstos son modelos espacialmente homogéneos que admiten un grupo transitivo máximo G_3 en sus hipersuperficies espaciales de homogeneidad (Stephani 1982). Como se verá, en estos casos, las ecuaciones de JBD se reducen a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para los factores de escala de los modelos como función del tiempo síncrono t .

Para resolver las ecuaciones diferenciales a que conducen los modelos de Bianchi en el vacío, se introduce un reescalamiento en el tiempo síncrono que involucra al campo escalar, lo que permite definir un nuevo tiempo, Φ , al que se le ha llamado intrínseco. Al introducir este nuevo tiempo se consigue desacoplar las ecuaciones, lo que permite manipularlas para encontrar de manera explícita la solución para cada uno de los factores de escala como función del tiempo intrínseco. A esto es a lo que se ha llamado una solución exacta para los modelos.

Aunque sea imposible encontrar en general la forma analítica de la solución en función del tiempo síncrono t (exceptuando el caso del modelo I en donde ésto si es posible) siempre se pueden invertir numericamente las relaciones que se encuentran, si se desea la solución en t .

El esquema explicado arriba no funciona para dos de los modelos (Bianchi VIII y Bianchi IX), en donde a pesar de todos los esfuerzos invertidos, no fué posible encontrar soluciones exactas. Lo que sólo resulta posible si se imponen constricciones suplementarias “a dedo.” Dado ésto y considerando que las ecuaciones para los factores de escala definen un sistema dinámico no lineal, se decidió intentar técnicas de la dinámica no lineal para tratar de extraer algo de información de ellas. Así, en este trabajo se investigó numericamente las soluciones al modelo Bianchi IX descubriendo que se comporta caoticamente. En algún sentido, que se explica en el capítulo 4, se ha reducido el estudio de las propiedades de un modelo cosmológico al estudio de la dinámica tridimensional de una “partícula” ficticia cuyas coordenadas son los factores de escala del modelo.

El trabajo está organizado de la siguiente forma. En el capítulo 1 se ofrecen algunos antecedentes que pueden ser útiles para lectores que no estén familiarizados ni con los métodos ni con la terminología de la dinámica no lineal; establecer tales antecedentes es el único propósito del capítulo. El capítulo 2 introduce las ideas básicas de la teoría JBD y su lugar cosmológico. En él se discute, aunque de manera breve, sobre las soluciones exactas en la teoría y su importancia cosmológica. También se discurre brevemente sobre la noción de isometría, para llegar naturalmente a la clasificación de los modelos de tipo Bianchi. El capítulo 3 contiene todas las soluciones exactas que se lograron obtener para los modelos de Bianchi en vacío, comparándolos, en los casos en

que fué posible, con otras soluciones publicadas y analizando la posible existencia de singularidades. En el capítulo 4, se exponen los resultados obtenidos con el análisis del modelo de Bianchi IX en vacío, usando ideas tomadas de la dinámica no lineal; se concluye que el modelo es caótico y se mencionan algunas consecuencias cosmológicas del hecho. Al final se ofrecen algunas conclusiones generales, lo que incluye una descripción sucinta de la contribución original de este trabajo.

Capítulo 1

Dinámica no lineal

Los fenómenos naturales que ocurren a nuestro alrededor casi siempre tienen un comportamiento que se puede describir como errático. Los ejemplos abundan, la trayectoria de hojas llevadas por el viento, el comportamiento de las gotas que escurren de un grifo mal cerrado, o la impredecibilidad (a pesar del mucho esfuerzo invertido para lograrlo) del clima. Aún sistemas mecánicos aparentemente muy simples, como una moneda que se lanza en un volado, son prototipos de lo azaroso. Las razones detrás de este comportamiento se pueden encontrar en la naturaleza no lineal de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de estos sistemas y que produce una enorme respuesta a cambios muy pequeños en el estado inicial. Los conceptos necesarios para entender este comportamiento irregular en el marco de los, aparentemente, regulares y predecibles modelos de la física clásica, están actualmente en desarrollo (Schuster 1984, Bergé *et al.* 1984, Rasetti 1986, Berry *et al.* 1987, Ottino 1989, Tabor 1989). Cuando aparecen estas características de impredecibilidad en un modelo determinista se habla de la existencia de caos (Ford 1983, Jensen 1987). Estos son algunos de los fenómenos que estudia la *dinámica no lineal*.

Aún el comportamiento del universo se podría considerar como aleatorio, en el sentido mencionado antes, ya que las ecuaciones que se han propuesto y que (se espera) gobiernan su evolución son profundamente no lineales y, como se exhibe en este trabajo, el modelo cosmológico de Bianchi tipo IX es caótico en la teoría escalar tensorial de Jordan, Brans y Dicke (JBD). El caos ocurre debido a la sensibilidad extrema a pequinísimos cambios en las condiciones iniciales que presentan la gran mayoría de los sistemas naturales.

Este capítulo tiene el propósito único de introducir algunas ideas básicas que se requieren para describir la aparición del caos determinista en sistemas físicos; se

pretende sólo como introducción a ideas que no son familiares para la comunidad relativista y, por lo tanto, no contiene resultados nuevos.

1. Fundamentos

En esta primera sección se describe en forma muy general la aparición de caos en sistemas dinámicos y algunas de sus características.

1.1 Sistemas dinámicos

Para comenzar, se introduce una abstracción que ha resultado útil al referirse a cualquier sistema que evolucione en el tiempo: la noción de sistema dinámico. Esencialmente, un sistema dinámico es cualquier proceso que se desarrolla a través del tiempo. Si se describe el estado del sistema por N “coordenadas” X_r , el sistema dinámico no es más que la especificación de la ley de evolución para éstas. Para fijar ideas, se puede pensar en un sistema que evoluciona continuamente en el tiempo, *i.e.* un sistema dinámico continuo. El sistema dinámico queda *definido* por el conjunto de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (1.1)$$

donde \mathbf{X} es un vector formado con las X_r , a la función \mathbf{F} se le llama el campo vectorial asociado al sistema, y t es el tiempo. Estas ecuaciones, junto con las condiciones iniciales $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, determinan, en principio, la evolución subsecuente del sistema. Por ello, a éstos se les llama sistemas deterministas.

1.2 Movimientos regulares y caóticos

Los sistemas dinámicos pueden tener soluciones que muestren comportamiento regular: soluciones periódicas, o cuasiperiódicas. Pero sus movimientos pueden ser mucho más complejos, con trayectorias que se entrelazan tan errática y turbulentamente que resulta imposible toda predicción detallada para tiempos grandes; cuando ello ocurre se habla de comportamiento caótico, turbulento o estocástico. La característica importante de un sistema caótico es su extrema sensibilidad a

las condiciones iniciales (Núñez-Yépez *et al.* 1990); lo que significa que trayectorias posibles, muy próximas entre sí en el instante inicial, pueden separarse exponencialmente, sin que medie ninguna influencia externa. Entonces, al querer reproducir un comportamiento cualquiera de este sistema, una pequeña falla al dar las condiciones iniciales lo colocará en una trayectoria totalmente diferente a la que se quería reproducir lo que eventualmente llevará a un desconocimiento total del estado final del sistema. También es posible que para cierta condición inicial el sistema evolucione regularmente y que una pequeñísima variación en la condición inicial permita que se comporte caóticamente, *i.e.* en un mismo sistema pueden ocurrir movimientos tanto regulares como caóticos (Ruelle 1980, 1989, Ford 1983, Berry *et al.* 1987, Ozorio de Almeida 1988). Ello puede ocurrir en sistemas con solo dos grados de libertad e, incluso, con uno solo si se encuentra sometido a una fuerza externa dependiente del tiempo. Un ejemplo de éste es el péndulo, frecuentemente representación de lo regular, que se puede comportar de modo caótico si se le somete a una fuerza que varíe periódicamente con el tiempo (D’Humieres *et al.* 1982, Koch *et al.* 1983, Núñez-Yépez *et al.* 1990).

1.3 Espacio de estados

El movimiento de los sistemas dinámicos (*i.e.* sus trayectorias dinámicas) se sitúa en un espacio matemático llamado el espacio de estados del sistema. A cada punto de éste le corresponde una situación física bien determinada, las coordenadas de este espacio son las variables X_r , y \dot{X}_r , $r = 1, 2, \dots, N$, y su dimensión es el doble del número de grados de libertad del sistema; en el caso del sistema descrito por la ecuación (1.1) la dimensionalidad es obviamente N . Se llama trayectoria del sistema a toda curva en este espacio ligada a cierta condición inicial \mathbf{X}_0 . El espacio de estados, o espacio de fases, como también se le llama, contiene en forma geométrica toda la información dinámica del sistema. La principal ventaja que presenta el espacio de estados está ligada precisamente a este hecho.

1.4 Determinismo y predecibilidad

La descripción del movimiento de los sistemas dinámicos se hace mediante

ecuaciones diferenciales o de diferencias. Estas ecuaciones tienen, usualmente, infinitas soluciones que corresponden a sus infinitos movimientos posibles pero, de todas ellas, sólo una corresponde al movimiento particular que se estudia, éste queda determinado por las condiciones iniciales. Conocida la ley de evolución y dadas las condiciones iniciales, queda fija la evolución posterior del sistema. En otras palabras, tanto el futuro como el pasado parecen quedar determinados por el presente. Cuando se empezó a trabajar con sistemas de muchos grados de libertad, como un gas, ya no fué posible usar las ecuaciones de movimiento para predecir el comportamiento del sistema. Sin embargo, se encontró que podían hacerse predicciones estadísticas de su comportamiento, lo que dió lugar al desarrollo de la mecánica estadística. Se debe notar que nunca se supuso que los sistemas perdieran su carácter predecible; aunque se tuvieran que describir probabilísticamente, esta descripción solo resultaba conveniente dado el enorme número de grados de libertad que se debían manejar. Implícito en este esquema quedaba la idea que toda la complejidad era producto del gran número de interacciones. Sin embargo, esta idea está equivocada, bastan dos grados de libertad para que la mayoría de los sistemas se puedan volver impredecibles, ahora se sabe que muchos sistemas presentan tanto movimientos regulares como caóticos, dependiendo solo de las condiciones iniciales que se elijan. En otros casos, la aparición de los movimientos irregulares depende del valor de alguna magnitud característica del sistema, como un parámetro de acoplamiento o de la energía. Un ejemplo apropiado es lo que ocurre en los fluídos, que pueden moverse en régimen laminar (regular) o turbulento (caótico) dependiendo del valor del número de Reynolds.

Lo anterior indica que el determinismo de las ecuaciones básicas de un sistema no garantiza que se pueda predecir la evolución de éste; para ello, es necesario, además, que al variar ligeramente las condiciones iniciales no cambie mucho la trayectoria; cuando sucede ésto, siempre se puede construir una solución al problema que permita hacer predicciones a largo plazo. Así, se puede decir que todo sistema predecible es determinista pero no que todo sistema determinista es predecible. El término caos determinista denota el movimiento irregular producto de la sensibilidad a cambios en el estado inicial, que puede ocurrir en sistemas no

lineales cuyas leyes dinámicas determinan de manera unívoca la evolución en el tiempo de un estado del sistema a partir del conocimiento de un estado previo. El caos determinista “explica” la aparición de movimientos aparentemente al azar en sistemas dinámicos deterministas.

2. Características de los sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos se pueden agrupar en varias clases no necesariamente excluyentes: discretos, continuos, conservativos y disipativos.

2.1 Sistemas discretos

Los sistemas discretos son aquellos en los que las variables evolucionan a saltos en el tiempo; sus órbitas consisten de un conjunto numerable (y posiblemente infinito) de puntos. Los valores que toman las variables en cada paso de la secuencia están determinados por aquellos que tomaron en instantes anteriores; a esto se le conoce como generación paso a paso, como mapeo, o se dice que el sistema obedece una ecuación de diferencias. Así la evolución de estos sistemas se determina por ecuaciones del tipo

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_t), \quad (1.2)$$

donde \mathbf{X} y \mathbf{F} son vectores de N dimensiones, y t el tiempo discreto. Ecuaciones como éstas han sido muy importantes en el desarrollo de los conceptos necesarios para describir la transición entre el comportamiento regular y el irregular, que ocurre en muchos sistemas. Hay dos ejemplos que vienen inmediatamente a la memoria al pensar en estos términos (figura 1.1): la ecuación logística y el mapeo estándar.

La ecuación logística corresponde a un modelo unidimensional para un sistema disipativo (ver sección 2.3); está definida por

$$X_{t+1} = \mu X_t(1 - X_t) \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

el parámetro $\mu \in [0, 4]$ mide el grado de no linealidad en el sistema. En el modelo

(1.3) ocurre una transición al caos siguiendo la ruta de bifurcaciones subarmónicas, como se representa en la figura 1.2.

El mapeo estándar se define por la pareja de ecuaciones

$$X_{n+1} = X_n + Y_n + k\text{sen}(X_n) \quad (1.4a)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + k\text{sen}(X_n), \quad (1.4b)$$

donde k es un parámetro que controla la no linealidad; este modelo se ha convertido en un paradigma para sistemas hamiltonianos (Piña y Jiménez Lara 1987, Tabor 1989). Según lo ilustra la figura 1.1b, en el sistema ocurre una transición al caos similar a la que se observa en muchos sistemas hamiltonianos.

2.2 Sistemas continuos

Los sistemas continuos (a cuyas soluciones se les llama flujos) son aquellos en los que las variables son funciones continuas del tiempo que obedecen ecuaciones diferenciales. Su evolución se describe en forma

$$\frac{dX_r}{dt} = F_r(\mathbf{X}, t) \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (1.5)$$

Si el campo vectorial \mathbf{F} no depende explícitamente del tiempo, se habla de un sistema autónomo; si hay dependencia explícita con el tiempo entonces se dice que el sistema no es autónomo. De los primeros trata una parte importante del trabajo: el establecer la existencia de comportamiento caótico en un sistema dinámico con cuatro grados de libertad que describe la evolución de un modelo de universo vacío en la teoría de Jordan, Brans y Dicke.

Un ejemplo típico de sistema dinámico disipativo es el modelo de oscilador con masa variable para el grifo goteante (Sánchez-Ortiz y Salas-Brito 1995a, 1995b); las ecuaciones que lo describen son:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (1.6a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(x+y)}{m} - g, \quad (1.6b)$$

$$\frac{dm}{dt} = f \quad (1.6c)$$

junto con la condición

$$\Delta m = h m(t)y(t), \quad (1.6d)$$

que complementa a la ecuación (1.6c) simulando el desprendimiento de una gota cuando $x(t) = 1$; en estas ecuaciones f , g y h son parámetros reales. Este sistema de ecuaciones es capaz de describir comportamiento caótico y tiene varios atractores extraños. Uno de ellos, el llamado ECG que aparece para $g = 0.34$, $h = 7$, y $f = 0.10$, se ilustra en la figura 1.3d.

Aunque la evolución de un sistema discreto pareciera diferir en mucho de la de un sistema continuo, esta diferencia no es ni con mucho absoluta, pues para simplificar el análisis de un sistema continuo, muchas veces se le substituye por un mapeo discreto equivalente (Koch *et al.* 1983, Schuster 1984, Carretero *et al.* 1994a); el mapeo se construye eligiendo intervalos apropiados de tiempo y evaluando la solución únicamente en esos instantes, lo que proporciona las variables discretas.

2.3 Sistemas conservativos y disipativos

Una manera de clasificar a los sistemas dinámicos es mediante el valor de la divergencia del campo vectorial \mathbf{F} , véase la ecuación (1.1), característico del sistema; si aquella es cero, se dice que el sistema es *conservativo*, mientras que si es diferente de cero se dice que el sistema *no es conservativo*. Si adicionalmente esta divergencia es estrictamente menor que cero, entonces decimos que el sistema es *disipativo*.

Las propiedades dinámicas de los sistemas disipativos son en muchas formas opuestas a las de los conservativos. Estos sistemas no se pueden describir mediante hamiltonianos independientes del tiempo y su energía no se conserva. Los sistemas

disipativos pueden tener un régimen evolutivo más complicado que un simple decaimiento, especialmente cuando la dinámica incluye el efecto de amortiguamiento y un mecanismo que mantenga el movimiento. El oscilador amortiguado es un buen ejemplo de un sistema que no es conservativo.

Un distintivo especial de los sistemas disipativos es la existencia de atractores, soluciones a las que llega el sistema independientemente de las condiciones iniciales, después de transcurrido un tiempo mas o menos grande. En terminología clásica, un atractor no es mas que una solución estacionaria a la que se llega después del decaimiento de los transitorios.

En la figura 1.3 se esquematizan los diferentes tipos de atractores. Para fijar ideas, se puede considerar un péndulo oscilante: si se le permite evolucionar sin ningún mecanismo adicional, su trayectoria eventualmente llegará a su posición de equilibrio, este estado estacionario se comporta como un punto fijo. Si ahora se hace que el péndulo sea capaz de mantener su movimiento, introduciéndole energía por algún mecanismo, cualquiera que sea su amplitud inicial evolucionará hacia un estado periódico único en el que la frecuencia es casi la de la excitación externa (piénsese en un reloj), lo que se traduce en una convergencia de las trayectorias dinámicas hacia una única curva cerrada recorrida periódicamente por el punto representativo del péndulo en el espacio de estados. Esta curva cerrada representativa de un régimen periódico estacionario es otro ejemplo de atractor al que se le denomina ciclo límite. El punto fijo y este ciclo límite se ilustran en las figuras 1.3a y 1.3b, respectivamente. La figura 1.3c muestra otro tipo de atractor; éste representa un movimiento biperiódico, cuya trayectoria yace sobre la superficie de un toro en el espacio de estados del sistema disipativo.

Se conocen otro tipo de atractores, los llamados atractores extraños que se caracterizan por tener una subestructura muy compleja, en la que la evolución del sistema muestra todas las características de un proceso azaroso (Ruelle 1989). Así, la aparición de atractores extraños es una de las manifestaciones del caos en los sistemas disipativos. No se dará una definición precisa de lo que se entiende por atractor extraño, pero se menciona que debe reflejar dos tendencias antagónicas, la atracción de las trayectorias dentro de la cuenca y la divergencia de trayectorias

muy próximas entre sí. La atracción está ligada al carácter disipativo del sistema, bajo el efecto del rozamiento las trayectorias tienden a coincidir en el atractor; mientras que la divergencia procede de la gran sensibilidad a las condiciones iniciales. La coexistencia de la atracción y la divergencia es una restricción mucho más fuerte cuando las trayectorias tienen que describirse con continuidad en un espacio confinado. Dado lo anterior, podemos comenzar a visualizar el origen de la compleja estructura de un atractor extraño. Para ello, se puede ver lo que ocurre en una sección bidimensional “perpendicular” a las trayectorias. Elijiendo en este plano un conjunto de condiciones iniciales contenidas, por ejemplo, en un rectángulo; la atracción de las trayectorias se traducirá en un “achataamiento” del rectángulo en una dirección y en consecuencia, una disminución de su superficie pero, bajo el efecto de la divergencia de las trayectorias, el rectángulo también se estirará en una dirección distinta a la primera; y por último, para asegurar el confinamiento de las trayectorias y mantenerlas en una porción limitada y finita del espacio de estados, el rectángulo también se plegará sobre si mismo. La figura 1.4a ilustra este proceso. Bajo el efecto simultáneo de estas tres operaciones —contracción, estiramiento y plegado— el rectángulo se va transformando en una herradura que a su vez, se achata, estira y pliega, dando lugar a una estructura en forma de sujetapapeles y así sucesivamente. Estos atractores se “construyen” de modo semejante al que se utiliza para amasar; no es de extrañar que presenten una estructura laminar autosimilar, ésto es, que usualmente, sean objetos fractales (Ruelle 1980, Mandelbrot 1987, Barnsley 1988). Dadas las propiedades peculiares de estos atractores, se le llamó extraños; la figura 1.3d ilustra uno de ellos, el atractor ECG.

3. Métodos de análisis

Hay varias maneras de analizar un sistema para investigar las propiedades del flujo que genera y, en particular, para saber si es o nó caótico.

3.1 Mapeos de Poincaré

Visualizar el comportamiento de un sistema dinámico siguiendo sus órbitas o trayectorias en el espacio de estados puede ser extremadamente complejo, sobre todo cuando el sistema tiene más de un grado de libertad y, por lo tanto, su espacio de estados es de dimensión mayor que dos. Obviamente los problemas desaparecerían si el sistema en cuestión fuese integrable, pues entonces podríamos disponer de expresiones analíticas para los flujos; lamentablemente esto casi nunca ocurre y en la mayoría de los casos se debe recurrir a otros métodos para estudiar el conjunto de soluciones en el espacio de estados. Una técnica muy poderosa fue propuesta por Poincaré, la que se describe a continuación (Hénon 1982, Parker y Chua 1989).

Un mapeo de Poincaré reemplaza al flujo de un sistema continuo con N grados de libertad, por un sistema discreto de orden $2N - 1$. La utilidad de esta técnica estriba tanto en la reducción del orden, como en que nos provee de una conexión entre sistemas discretos y continuos. Para ejemplificar, esta técnica se aplicará en el caso de sistemas hamiltonianos conservativos con dos grados de libertad.

Llamando q_1 , q_2 , p_1 , y p_2 a las coordenadas en el espacio de fases (con q las coordenadas generalizadas y p los momentos conjugados correspondientes), como el sistema se pidió conservativo, automáticamente las variables se reducen a tres cualesquiera. Se pueden escoger q_1 , q_2 , y p_1 (p_2 se puede calcular de la expresión para la energía) lo que permite una visualización de la trayectoria en sólo tres dimensiones a condición de fijar la energía; pero si, además, se fija arbitrariamente una de ellas, haciendo $q_2 = \text{constante}$, lo que define un plano S en el espacio de fases, podremos estudiar el comportamiento del flujo analizando sus intersecciones con ésta. Así, el estudio del flujo hamiltoniano se ha reducido al análisis de los puntos de intersección con el plano S , *i.e.* al estudio de un mapeo discreto equivalente. Ello se ilustra en la figura 1.5; la posición del plano se elige para que la trayectoria pueda intersectarlo varias veces, dando lugar a una sucesión de puntos $P_0, P_1, P_2 \dots$. Una elección apropiada del plano S permite que las secciones sean analizables con mayor facilidad. A este conjunto de puntos sobre S se le llama sección de Poincaré, en ella se puede “leer” muchas de las características del flujo. Por ejemplo, si el movimiento es cuasiperiódico, la sección contendrá un

conjunto de puntos que forman una curva suave (Lichtenberg y Lieberman 1992, Carretero–González *et al.* 1994a).

La transformación T que permite pasar de un punto sobre S al siguiente, es un mapeo discreto de S conocido como mapeo de Poincaré (figura 1.5). Como la solución es única, el punto P_0 determina completamente y de manera única al punto P_1 que a su vez determina al punto P_2 y así sucesivamente; si este proceso se puede invertir y P_2 determina P_1 , etcétera, entonces se dice que T es un mapeo invertible de S en si mismo. Las secciones de Poincaré reemplazan la evolución continua en el tiempo con un mapeo discreto; los intervalos de tiempo entre punto y punto sobre el plano no necesariamente son constantes.

El problema cosmológico que se analiza en este trabajo tiene 4 grados de libertad y en consecuencia el espacio de fases en el que se debe trabajar es de 8 dimensiones, lo que dificulta en extremo fijar coordenadas para elegir un buen plano de Poincaré y vuelve a este método inapropiado.

3.2 Exponentes de Liapunov

Los exponentes de Liapunov juegan un papel muy importante en la dinámica no-lineal. Los que proveen una medida cuantitativa de la estocasticidad de una trayectoria; además, hay una estrecha relación entre los exponentes de Liapunov y otras medidas de la aleatoriedad como con la entropía de Kolmogorov–Sinai (KS).

Los exponentes de Liapunov para una trayectoria dada, caracterizan la razón exponencial promedio de la divergencia de las trayectorias alrededor de ésta. Definiendo los exponentes de Liapunov para el flujo generado por un sistema autónomo de primer orden. Para ello se considera una trayectoria en el espacio de estados M -dimensional $\mathbf{x}(t)$ y otra trayectoria muy cercana a ésta $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$, donde $\mathbf{w}(t)$ es un vector que vive en el espacio tangente al espacio de estados de la trayectoria original. La separación entre ambas $d(t) = \|\mathbf{w}(t)\|$ dependerá del tiempo según lo indican las ecuaciones variacionales de Jacobi (Salas–Brito 1984, Do Carmo 1993)

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathcal{M}(t) \cdot \mathbf{w}, \quad (1.7)$$

en donde $\mathcal{M}(t)$ es la matriz de derivadas de $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ (veáse la eq. 1.1) evaluada en una trayectoria específica. Calculando ahora la tasa promedio de divergencia entre estas dos trayectorias en el límite en que la separación entre éstas tiende a cero (ver la figura 1.6)

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \log \frac{d(t)}{d(0)}. \quad (1.8)$$

Esta expresión define a los exponentes característicos de Liapunov λ . Hay un exponente independiente por cada dimensión del espacio de estados. Una vez calculados los exponentes característicos de Liapunov, se puede evaluar la entropía KS, h , mediante la relación (Pesin 1976):

$$h = \int_P \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i d\mu, \quad (1.9)$$

la que representa la suma de todos los exponentes característicos de Liapunov positivos promediados sobre alguna región del espacio de estados (P) con medida $d\mu$ (Pesin 1976, Lichtenberg y Lieberman 1992).

Para terminar, se debe mencionar que el objetivo general de este trabajo es investigar la dinámica de los modelos de Bianchi en la teoría JBD en vacío. Después de obtener algunas soluciones exactas para la mayoría de ellos, y para el resto se requirió de un análisis aplicando algunas de las ideas presentadas en este capítulo. Lo que hicimos es estudiar numericamente el modelo cosmológico Bianchi IX en la teoría JBD, un sistema dinámico. El análisis incluyó el seguimiento de la evolución de los factores de escala y del campo escalar ϕ . Se calculó su exponente de Liapunov mas grande para concluir finalmente con la aseveración de que el modelo es caótico. Lo que permite explicar las dificultades para obtener una solución exacta al modelo e ilustra la utilidad de aplicar ideas como las aquí descritas a la cosmología.

Pies de figuras

Capítulo 1

Figura 1.1

a) Mapeo logístico. Se grafica x_{n+1} contra x_n , para valores de n , empleando el mapeo logístico para diferentes valores de μ : 1.5, 3.3, 3.5, 3.8, respectivamente (Núñez Yépez *et al.* 1989).

b) Mapeo estandar, también conocido como mapeo de Chirikov. Estas figuras se obtienen iterando el mapeo estandar para varias condiciones iniciales (x_0, y_0) graficándose los puntos sucesivos (x_n, y_n) . Se muestran las secciones de Poincaré para diferentes valores de k : 0, 0.5, 1, 2, respectivamente; de ellas se puede apreciar fácilmente la transición de su comportamiento regular al caótico al aumentar k (Jensen 1987).

Figura 1.2

El diagrama de bifurcaciones muestra el comportamiento del mapeo logístico descrito por la ecuación (1.3), se grafica x_n contra μ para tiempos grandes, haciendo variar el parámetro μ entre 3.5 y 4, (Jensen 1987). Este diagrama también muestra una transición del comportamiento regular al caótico, pero similar, en este caso, al que ocurre en un sistema disipativo.

Figura 1.3

Se ilustran los tipos de atractores en el espacio de estados: a) punto fijo, b) ciclo límite c) atractor biperiódico, y d) un atractor extraño; a éste en particular se le conoce como atractor ECG.

Figura 1.4

El rectángulo inicial (a), se estira por un factor 2 en una dirección y se contrae por un factor 4 en otra (b). El nuevo rectángulo se pliega para formar la imagen del primero bajo la transformación (c) y así sucesivamente (d, e).

Figura 1.5

Sección de Poincaré. La trayectoria Γ en el espacio de estados intersecta al plano S (con $\dot{z} \leq 0$) en los puntos sucesivos P_0, P_1, P_2, \dots . Estos puntos pertenecen a la sección de Poincaré de Γ con el plano S .

Figura 1.6

Definición de los exponentes característicos de Liapunov; $\mathbf{w}(t) = \Delta\mathbf{x}(t)$ es un vector tangente.

a) Dos condiciones iniciales muy cercanas que se separan al evolucionar el sistema.

b) Representación esquemática del espacio tangente al espacio de estados de un sistema dinámico. Cualquier vector \mathbf{w} que no sea tangente a la trayectoria L , define la dirección de una posible perturbación a ésta útil para el cálculo de algún exponente de Liapunov $\lambda(\mathbf{w}) = \lambda_k$ (Benettin y Strelcyn 1978).

c) Cálculo numérico del exponente característico de Liapunov máximo, donde $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w}$, y τ es el intervalo finito de tiempo al que se renormaliza la perturbación (Lichtenberg y Lieberman 1992).

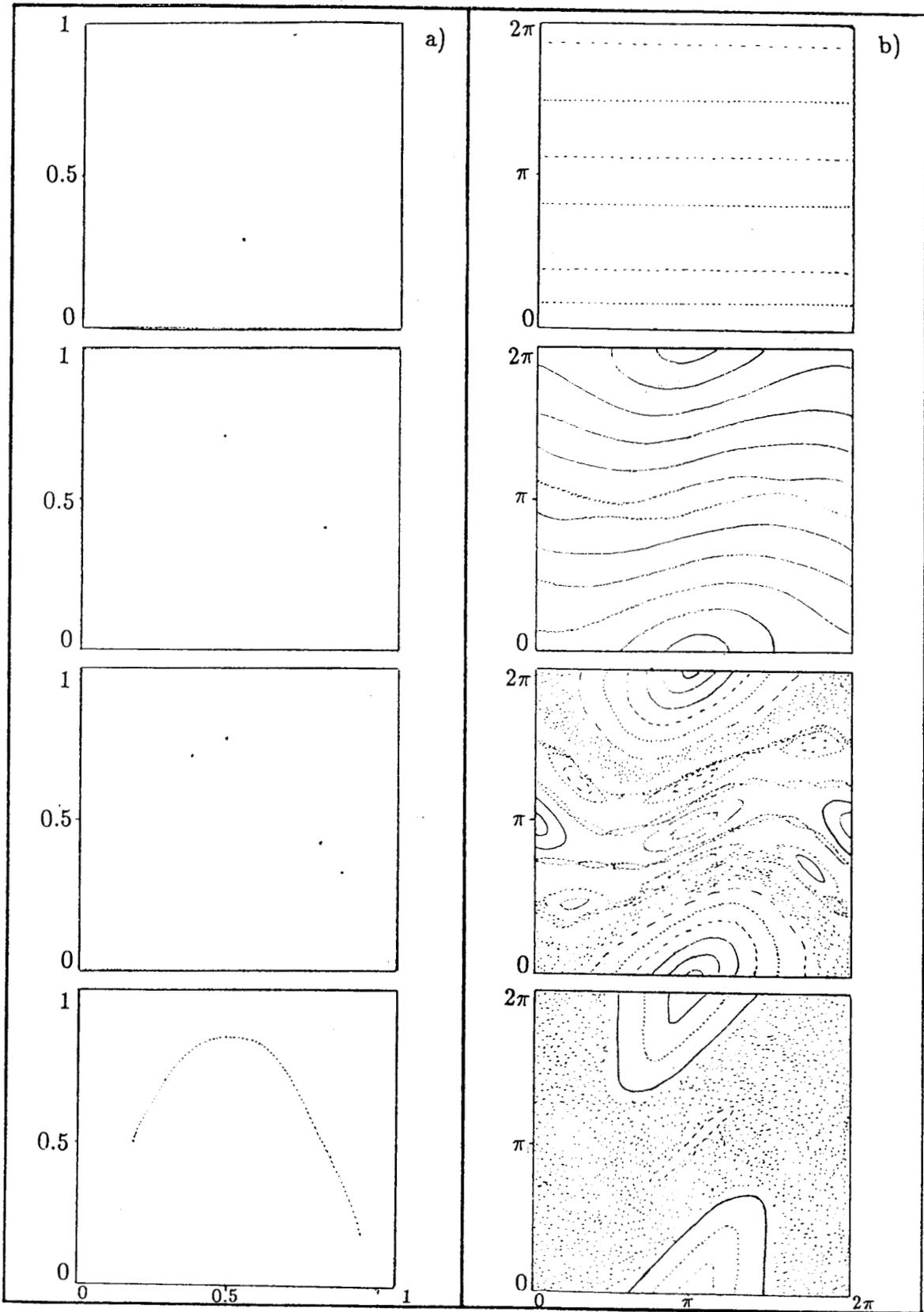


Figura 1.1

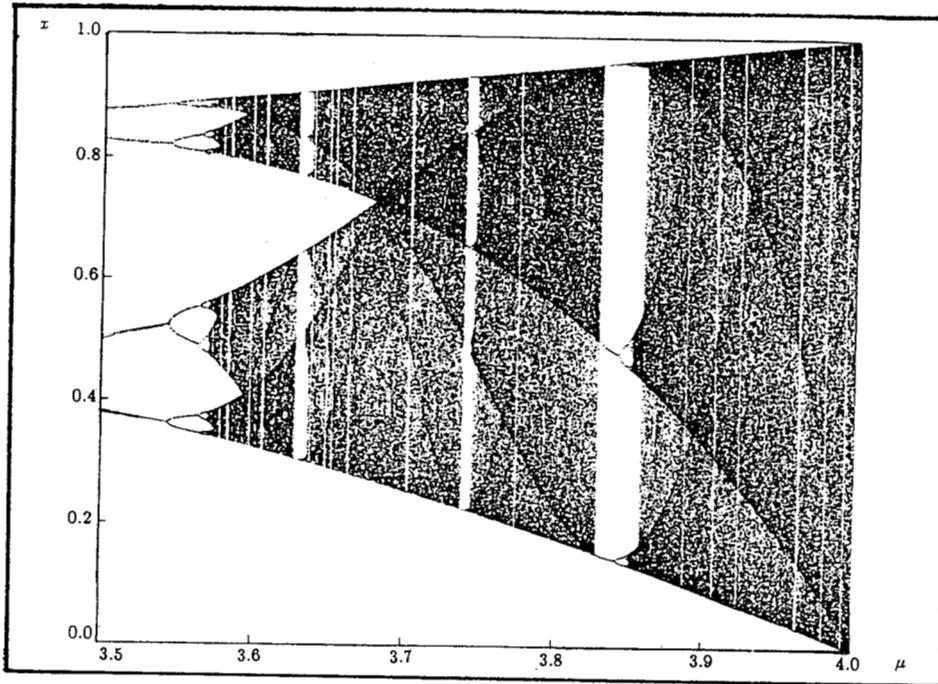


Figura 1.2

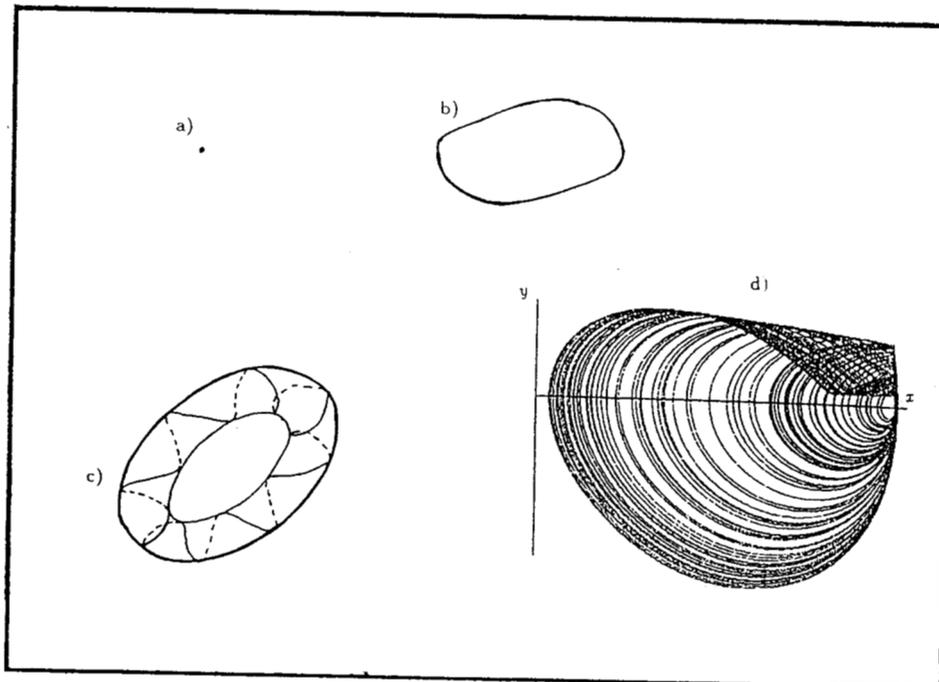


Figura 1.3

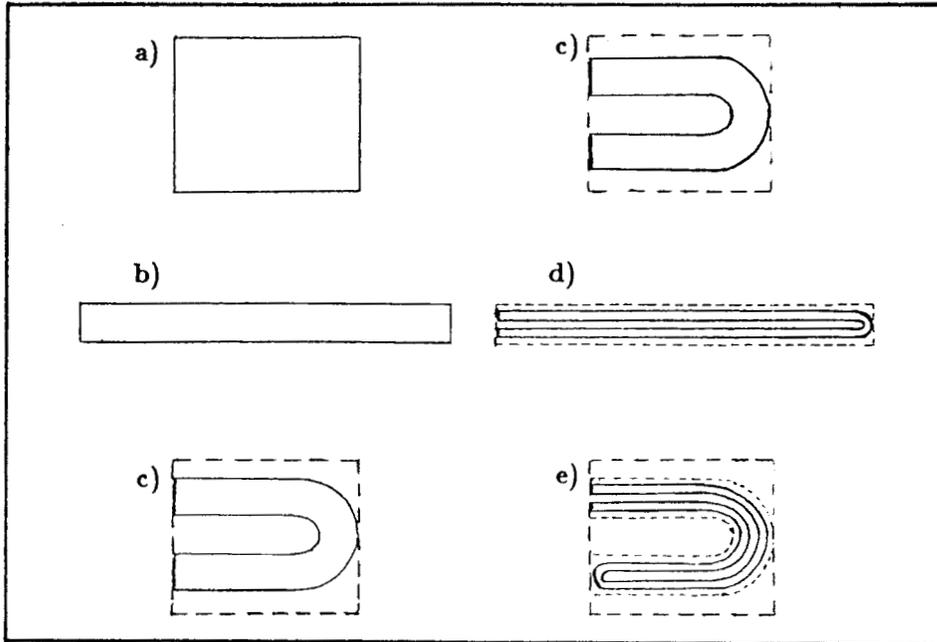


Figura 1.4

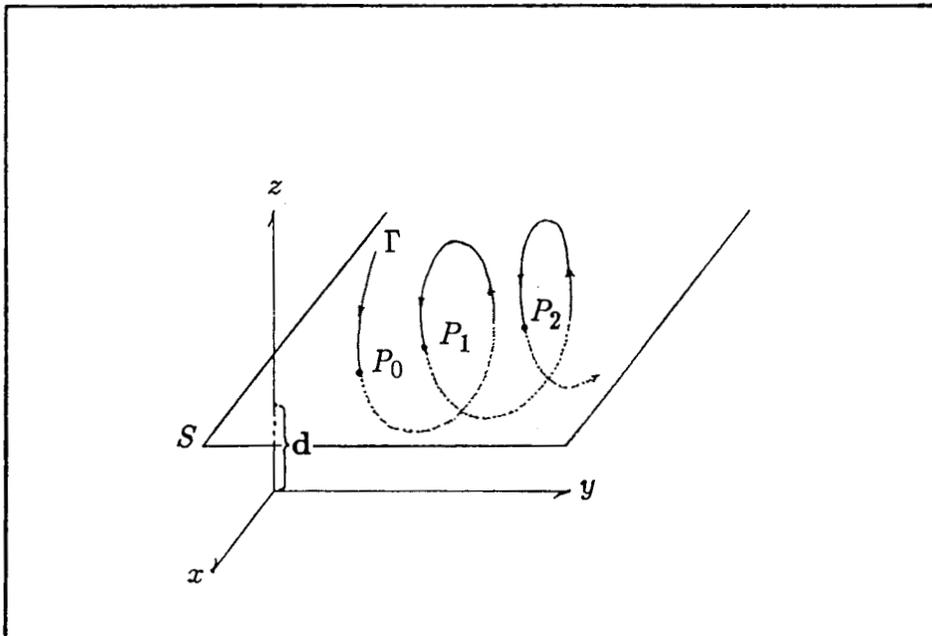


Figura 1.5

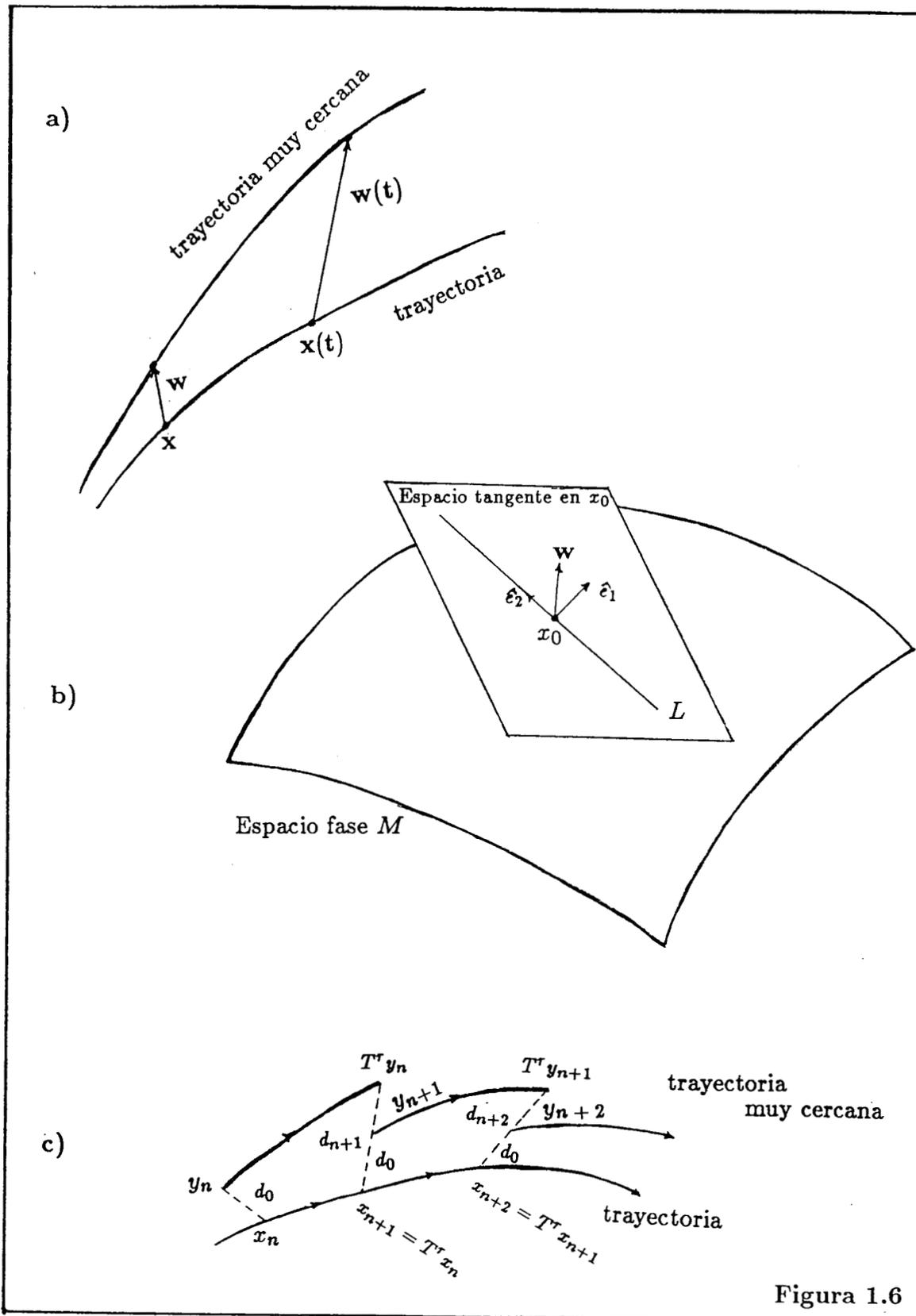


Figura 1.6

Capítulo 2

Modelos cosmológicos de Brans–Dicke

Los conceptos newtonianos de la estructura del espacio y del tiempo, permanecieron inalterables hasta el desarrollo de la teoría electromagnética en el siglo XIX. Dadas las preguntas que surgieron en esa época, fué necesario introducir al éter como un medio en el cual se pudieran propagar las ondas electromagnéticas, lo que daba lugar al concepto de espacio absoluto. Fué en 1905 cuando Einstein propuso la teoría especial de la relatividad, en la que ni el espacio ni el tiempo eran absolutos, sino se les consideró entremezclados como coordenadas en un espaciotiempo tetradimensional. En esta teoría, la estructura del espaciotiempo se caracterizaba por la métrica de Minkowski, la que determinaba distancias o intervalos de tiempo entre dos eventos de manera aceptable.

No fué sino hasta el año de 1915, con el desarrollo de la teoría general de la relatividad, realizado por el mismo Einstein, la que fué reconocida como un concepto más revolucionario que substituyó al campo gravitacional por la estructura geométrica del espaciotiempo. Aunque se pensaba que los campos gravitacionales no podrían ser tan intensos para que hubiera gran diferencia entre sus predicciones y las hechas con la teoría newtoniana.

1. Teorías de la gravitación

Aunque la teoría general de la relatividad (RG) ha sido bien aceptada, desde varios puntos de vista, existe una amplia variedad de teorías alternativas a ésta. Estas teorías alternativas han surgido durante muchos años y se pueden agrupar en dos grandes clases. La primera clase consiste de teorías de la gravitación que contienen solamente campos gravitacionales dinámicos; mientras que la segunda clase consiste de teorías que contienen propiedades geométricas absolutas *i.e.* que

contienen campos absolutos o sin dinámica. Estos conceptos se discuten con todo detalle en Thorne *et al.* (1973), también puede ser de utilidad consultar a Anderson (1967), Misner *et al.* (1973), Singh y Rai (1983).

De entre las teorías alternativas a la RG, encontramos a la escalar para la gravitación propuesta por Pascual Jordan (1959) y las que incluyen campos escalares y tensoriales, éstas contienen en general a la métrica \mathbf{g} , a un campo escalar ϕ , a una función de autointeracción Λ y una función de acoplamiento arbitraria $\omega(\phi)$ que determina la intensidad relativa del campo escalar respecto de los modos tensoriales. Un caso especial de estas teorías es la de Brans y Dicke (1961) en la que $\omega(\phi)$ es simplemente una constante (Will 1979) y $\Lambda = 0$. Las ideas de esta “nueva” teoría surgieron al tratar de incluir el principio de Mach (1872, 1883, Brans y Dicke 1961, Singh y Rai 1983) en RG y de la existencia de que la geometría espacial de RG se viera afectada por la distribución de materia muy lejana. En ésta se ha logrado encontrar una clase de modelos cosmológicos análogos a los de FRW en RG (Brans y Dicke 1961) y ha logrado hacerse de un lugar relevante en consideraciones cosmológicas. Esta es la teoría que guiará este trabajo.

En la teoría de Brans y Dicke, mientras el valor de ω es mas grande, el efecto del campo escalar es menor y en el límite $\omega \rightarrow \infty$ y $\phi = \text{constante}$, hace a la teoría indistinguible de la de RG y reproduce todas sus predicciones (Will 1979). El campo escalar ϕ , como causante de la fuerza gravitacional que gobierna la expansión cósmica (Ryan y Shepley 1975), juega un papel análogo al del inverso de una “constante gravitacional” variable en RG, *i.e.* $\phi \sim 1/G$. Este campo determina así el valor local de la “constante” de la gravitación G , y se puede considerar como adicional a los grados de libertad tensoriales en las ecuaciones básicas de JBD.

Esta teoría escalar tensorial se ha estudiado desde hace mucho tiempo y existe una amplia bibliografía sobre ella. Algunos trabajos realizados en JBD son:

Brill (1962) calculó la radiación de una onda escalar desde una órbita planetaria, encontrando que en la aproximación monopolar la radiación es proporcional a e^2 , donde e es la eccentricidad de la órbita.

Morganstern (1967) analizó la radiación gravitacional que se produce por el movimiento orbital relativo de un sistema de dos cuerpos acoplados gravitacionalmente.

Will (1977) realizó cálculos computacionales de la radiación debida a los términos dipolares que surgen de la variación de G , para campos escalares y tensoriales.

Davis (1979) encontró expresiones cuadripolares para la radiación gravitacional usando la aproximación de campo débil y aplicó sus resultados al pulsar 1913+16.

La solución de las ecuaciones de campo escalar tensoriales en vacío han sido estudiada por Lun y McIntosh (1973) para el caso en que el tensor de Weyl es un tipo de Petrov N.

Bandyopadhyay (1978) obtuvo una solución para las ecuaciones de campo en JBD para el caso de una distribución de polvo con simetría cilíndrica con rotación rígida. La solución exacta mostró la existencia de líneas temporales cerradas así como densidades infinitas de materia a una distancia finita del eje de simetría. También analizó el problema suponiendo la misma simetría pero sin suponer que la rotación fuera rígida (Bandyopadhyay 1979).

Raychaudhuri and Bandyopadhyay (1978) investigaron la distribución de polvo con carga estática en equilibrio. Mostrando que como en el caso de RG, el cociente de densidad de carga a la densidad de masa no es constante para una distribución de carga en equilibrio. Al considerar una distribución con simetría cilíndrica y rotación rígida, encontraron que los resultados obtenidos en JBD eran considerablemente más complicados que los correspondientes obtenidos de un estudio similar en RG hecho previamente por Som y Raychaudhuri (1968).

Aguilar *et al.* (1992a) realizaron sus análisis usando los modelos de espacio plano y de espacio cerrado en esta teoría. Encontraron que algunas consecuencias observacionales en el modelo plano reproducen las predichas por el modelo de Friedmann Robertson Walker en RG, y que cuando el parámetro de acoplamiento de esta teoría es $\omega \sim 500$, hace indistinguibles las consecuencias astrofísicas de

ambas. Para el modelo cerrado no existe el límite de RG y cuando $\omega \sim 500$, predice consecuencias que contradicen las observaciones del universo actual. También estudiaron la distribución de radiación del cielo nocturno (Aguilar *et al.* 1992b), encontrando esencialmente la misma distribución espectral en el modelo plano que la predicha por RG mientras el modelo cerrado predice una intensidad tres ordenes de magnitud por arriba de la generada por el espacio plano. Ambos modelos concuerdan en predecir un cielo oscuro de noche.

Steinhardt (1993) ha analizado algunos de los mecanismos que llevan a la inflación extendida, en particular las fluctuaciones de la densidad espectral, y las ondas gravitacionales producidas durante la inflación, las que pueden contribuir al trasfondo cosmológico anisótropo y permitir la verificación del escenario cosmológico inflacionario.

2. Ecuaciones de la teoría JBD

Se puede decir que la teoría JBD surge, además de ciertas consideraciones físicas y del principio de Mach, de la simple observación de que características fundamentales del universo cumplen relaciones simples. En efecto, se sabe que el radio y la masa del universo visible son, respectivamente, $R \simeq 2 \times 10^{29}$ cm y $M \simeq 2 \times 10^{57}$ g, de donde se puede obtener

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1, \quad (2.1)$$

en donde $c = 3 \times 10^{10}$ cm s⁻¹ es la rapidez de la luz y $G = 6.7 \times 10^{-8}$ cm³ g⁻¹ s⁻² es la constante de la gravitación (Misner *et al.* 1973). De aquí que

$$\phi \sim G^{-1} \sim \frac{M}{Rc^2}. \quad (2.2)$$

Si se supone, como hicieron Sciama (1953), Brans y Dicke (1961), que esta relación es mas que una coincidencia numérica y que se deben incluir los efectos de toda la materia conectada causalmente con el punto de observación, una simple extensión nos permite suponer en general que

$$\phi \sim \sum_i \frac{M_i}{R_i c^2}. \quad (2.3)$$

en donde M_i es la masa y R_i la distancia a los objetos dentro del universo visible. Lo anterior proporciona heurísticamente la dependencia que se debe esperar para el campo escalar en casos sencillos, y sugiere que la contribución de éste a la densidad lagrangiana de la teoría debe tener la forma apropiada para producir una ecuación que admita soluciones de la forma (2.3).

Para derivar las ecuaciones de campo en JBD, se puede comenzar con el principio variacional usual de RG (Landau y Lifshitz 1962), a partir del cual se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\delta \int d^4x (R + \alpha G L_m) (-g)^{1/2} = 0 \quad (2.4)$$

en donde $\alpha = 16\pi/c^4$, R es el escalar de curvatura y L_m es la densidad lagrangiana de los campos de materia. Ahora dividiendo entre G y usando (2.2) y (2.3) se obtiene —hay que enfatizar que esto no pretende ser un método riguroso ni mucho menos, solo ofrecemos una justificación heurística, para mas detalles se puede consultar a Misner *et al.* (1973)— el principio variacional de la teoría escalar tensorial (principio variacional de JBD)

$$\delta \int d^4x \left(\phi R + \alpha L_m - \omega \frac{\phi'^i \phi_{,i}}{\phi} \right) (-g)^{1/2} = 0. \quad (2.5)$$

Nótese la introducción de un término en la densidad lagrangiana que tiene la estructura apropiada para obtener una ecuación del tipo de la de ondas para ϕ y de una nueva constante adimensional ω que describe el acoplamiento de los grados de libertad tensoriales de la teoría con el grado de libertad escalar. La ecuación (2.5) se puede considerar como una modificación a la (2.4) que incluye al campo escalar ϕ acoplándolo con la geometría (el término ϕR) y un término dinámico para ϕ ; nótese la suposición de que L_m no queda acoplado con el campo escalar directamente. Se hace notar también que las dimensiones de los campos son $[\phi] = \text{ML}^{-3}\text{T}^2$, $[g^{ab}] = \text{L}^2$, $[R] = \text{L}^{-2}$; de aquí es fácil ver que el factor ϕ^{-1} en la densidad lagrangiana se introdujo para hacer que ω fuese adimensional. Como se puede ver

claramente de las ecuaciones (2.6) y (2.7) del siguiente párrafo, el límite en que $\omega \rightarrow \infty$ desacopla ϕ de R por lo que, este límite se puede hacer corresponder JBD con RG. De acuerdo a la evidencia actual, $|\omega| \geq 500$, Este valor obviamente no es aplicable si se estudia el comportamiento temprano del universo en el que $|\omega| \lesssim 25$ (Steinhardt 1993).

La ecuación de onda para ϕ se obtiene al realizar las variaciones indicadas en (2.5), suponiendo que g_{ab} y ϕ son variables independientes, dando

$$\frac{2\omega}{\phi(-g)^{1/2}} [(-g)^{1/2} \phi',^a]_{,a} - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{,a} \phi'^a + R = 0, \quad (2.6)$$

y

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{\phi c^4} T_{ab} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{,a} \phi_{,b} - \frac{1}{2} g_{ab} \phi_{,c} \phi'^c \right) + \frac{1}{\phi} \left(\phi_{,a;b} - \frac{g_{ab}}{(-g)^{1/2}} [(-g)^{1/2} \phi',^a]_{,a} \right) \quad (2.7)$$

en donde

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \quad (2.8)$$

es el tensor de Einstein. En el lado derecho de la ecuación (2.7), el primer término corresponde al tensor de energía momento de la materia y es el mismo término que aparece en RG pero multiplicado por la variable gravitacional ϕ^{-1} , el segundo término es el tensor de energía momento de un campo escalar sin masa, también multiplicado por la variable gravitacional ϕ^{-1} . El último término es el adicional (según RG) y resulta de la presencia de la segunda derivada del tensor métrico en R en la ecuación (2.5). Cuando domina el primer término, el lado derecho de la ecuación (2.7) difiere de las ecuaciones de campo de Einstein únicamente por la presencia de un parámetro gravitacional variable (ϕ^{-1}). Además se tiene

$$T_{ab} \equiv \frac{2}{(-g)^{1/2}} \frac{\partial [(-g)^{1/2} L_m]}{\partial g_{ab}} \quad (2.9)$$

que es el tensor de energía-momento. Como en RG, éste cumple obviamente que

$$T^{ab}{}_{;b} = 0. \quad (2.10)$$

Estas ecuaciones se pueden reescribir para que, en la ecuación para ϕ , el término en el lado derecho de la ecuación involucre únicamente a la traza del tensor de energía-momento: $T \equiv T^a{}_a$. Lo que se consigue contrayendo la ecuación (2.7) y combinando el resultado con la ecuación (2.6) (Misner *et al.* 1973, Singh y Rai 1983), de esta forma se obtiene

$$\square \phi = \frac{8\pi T}{(3 + 2\omega)c^4}. \quad (2.11)$$

En esta ecuación se ve que en el límite $\omega \rightarrow \infty$, y $\phi = \text{constante}$, se desacopla al campo escalar de la materia. De tomarse este límite, el campo deja de tener efectos dinámicos en la teoría. De aquí que éste sea el límite Einsteiniano de JBD.

3. Soluciones exactas en cosmología

El propósito de esta sección es discutir la importancia que las soluciones exactas a las ecuaciones de la gravitación tienen para la cosmología, las técnicas utilizadas para encontrarlas y describir algunos de los modelos que se han empleado para obtenerlas.

La cosmología tiene aún muchos problemas abiertos, por ejemplo, la formación de galaxias y su evolución es algo que todavía no está bien estudiado y aunque se tienen datos, éstos no han sido suficientes para descifrar completamente todos sus elementos. Entre los diversos objetos que proporcionan información, pensando en la problemática descrita, se encuentran las fuentes emisoras en radio, que se supone aparecieron en la época de la generación de estrellas masivas, una época en que también resulta factible la formación de galaxias. Sin embargo, el problema básico es estudiar el origen y evolución del universo. Durante los últimos 40 años se han utilizado diversas soluciones exactas a las ecuaciones de la gravitación (principalmente de RG aunque también se han empleado algunas en JBD (Ruban y Finkelstein 1975)) como modelos para el universo como un todo tratando de que la evolución predicha por éstos esté de acuerdo a lo observado actualmente.

Se conoce sólo un grupo reducido de soluciones exactas de interés cosmológico. La familia de modelos más conocida es la llamada modelos cosmológicos estandar, o modelos de universo de Friedmann (Friedmann 1922, Lemâitre 1927, Robertson 1929, Walker 1935) conocidos también como modelos FLRW. En los casos más sencillos se puede suponer un fluido perfecto que describa el contenido de materia del universo. Como una generalización de FLRW se tienen los modelos de Bianchi (Ryan y Shepley 1975), muchos de los cuales se han podido resolver exactamente sus correspondientes ecuaciones de campo, para otros se requieren simetrías adicionales como se muestra en el capítulo 3. Además de estos modelos, hay otros que también generalizan a los modelos FLRW, una clasificación detallada de las soluciones cosmológicas exactas, excepto para los modelos de Bianchi y de Kantowski–Sachs, se encuentra en Krasiński (1993).

Existen también soluciones perturbativas que incluyen restricciones adicionales sobre las condiciones físicas y geométricas de los modelos, así que, lo que se obtiene es la solución de un modelo ligeramente perturbado. En cambio las soluciones exactas de los modelos pueden proveer información completamente diferente a la obtenida bajo la perturbación. Sin embargo, en ambos casos (solución perturbada y solución exacta) se ofrecen predicciones sobre la evolución del modelo y en particular, permiten el estudio de procesos astrofísicos o bien la predicción teórica de relaciones que pueden compararse directamente con las observaciones; por ejemplo, el tamaño angular galáctico y el corrimiento al rojo (Aguilar *et al.* 1992a), la existencia de procesos de agrupamiento de materia (MacCallum 1993), o hasta para intentar analizar procesos que ocurren en las superficies estelares (Ellis 1993).

Al resolver de manera exacta las ecuaciones de la gravitación, es necesario suponer de antemano ciertas propiedades algebraicas de la curvatura o algunas que imponen los grupos de isometrías (Weinberg 1972, Misner *et al.* 1973, Ryan y Shepley 1975, Kramer *et al.* 1980). Los modelos espacialmente homogéneos son los más factibles para intentar resolverlos exactamente, entre éstos se cuentan los modelos de Bianchi, que fueron clasificados mediante grupos de isometrías (Bianchi 1897).

4. Grupos de isometrías

A una transformación que deja invariante la métrica en un espaciotiempo se le conoce como isometría. Las isometrías infinitesimales se especifican por vectores de Killing (Killing 1892), de los que se dice que generan a aquellas. Consideremos una variedad cuya métrica sea invariante bajo un conjunto de isometrías, se puede demostrar que este conjunto tiene una estructura de grupo (Jacobson 1962, Weinberg 1972, Ryan y Shepley 1975), este grupo es el grupo de simetrías de la variedad. Las isometrías se obtienen de los vectores de Killing en la misma forma en que se obtienen los elementos de un grupo continuo a partir de los generadores infinitesimales, los que forman el álgebra de Lie del grupo. Los conmutadores de los generadores infinitesimales del grupo definen las constantes de estructura para él.

Se dice que una variedad de dimensión n es invariante bajo un grupo de Lie, si la variedad admite $m \leq n$ vectores de Killing que obedezcan las relaciones de conmutación del álgebra de Lie del grupo. Un grupo de dimensión m se llama simplemente transitivo si los vectores de Killing son linealmente independientes. A un grupo en el que la dimensión de su subconjunto invariante en la variedad sea menor que m , se le llama grupo múltiplemente transitivo (Ryan y Shepley 1975, Wald 1984).

De la clasificación que puede surgir, se puntualizarán los siguientes casos. a) Una variedad de dimensión 4 con un grupo simplemente transitivo definido sobre ella, en el que la dimensión del grupo es también 4; entonces se dice que la variedad es homogénea en el espacio y en el tiempo. b) Cuando la variedad es de dimensión 4, pero el grupo simplemente transitivo sobre ella tiene dimensión 3, entonces tal grupo genera un conjunto de hipersuperficies invariantes y se dice que la variedad es espacialmente homogénea. Algunas de los subconjuntos pueden no ser espaciales, pero formar una variedad que depende de un sólo parámetro; la métrica sólo depende de una variable en este caso, siendo independiente de la posición en las hipersuperficies. c) Este caso contempla que el grupo sea múltiplemente transitivo sobre la variedad y que genere hipersuperficies invariantes tridimensionales. Si este es el caso la variedad es también espacialmente homogénea.

El modelo FLRW tiene un grupo de isometrías de 6 dimensiones, conteniendo dos subgrupos tridimensionales, uno isótropo y otro simplemente transitivo que actúa sobre hipersuperficies espaciales. Los modelos de Bianchi son una generalización de los modelos de FLRW que también tienen un grupo de isometrías de 6 dimensiones. Bianchi (1897) clasificó a estos grupos en nueve tipos diferentes. Si un espacio es espacialmente homogéneo y tiene un grupo de Bianchi de tipo N ($N = I, \dots, IX$) como grupo de isometrías simplemente transitivas, entonces se dice que el modelo es homogéneo de tipo N (Wald 1984). El grupo de tipo I es isomorfo al grupo de traslaciones tridimensional; un modelo FLRW plano es homogéneo de tipo I. El grupo de tipo V es un subgrupo simplemente transitivo de un modelo FLRW abierto. El grupo de tipo IX es isomorfo a $SO(3, \mathbb{R})$, el grupo especial de las matrices ortogonales de 3×3 con coeficientes reales; el universo cerrado de FLRW es homogéneo de tipo IX.

Los modelos de Bianchi en RG han sido usados ampliamente para diversos problemas, por ejemplo:

Barrow (1981) ha usado los modelos de Bianchi para modelar las posibles desviaciones, de la región de microondas de la isotropía de la radiación de fondo. También Barrow *et al.* (1983) han observado que el grado de isotropización es muy intenso, además investigado estas dependencias con gran detalle han construido modelos de inhomogeneidades, concibiéndolas como una combinación de resultados de modelos homogéneos; el patrón completo de temperaturas podría tener una distribución cuadripolar.

Los modelos de Bianchi también se han empleado para el cálculo de la polarización de la radiación de fondo en la región de las microondas (Matzner y Tolman 1982).

Se puede decir, de acuerdo a lo anterior, que las soluciones exactas juegan un papel muy importante en el desarrollo de nuestro conocimiento del universo.

5. Modelos Bianchi en JBD

Ya que en cosmología una parte importante del interés es describir la evolución del universo, y que para ello es necesario resolver las ecuaciones de JBD (2.7) y (2.11) —un trabajo imposible en general—, se acostumbra proponer simetrías que simplifiquen la tarea. Una simetría particularmente útil es la de homogeneidad espacial (sección 4.), característica de los modelos de Bianchi que permite “desacoplar” la parte espacial de la temporal en la métrica y reducir las ecuaciones (2.7) y (2.11) a ecuaciones diferenciales ordinarias. Al considerar que los modelos son espacialmente homogéneos con hipersuperficies espaciales foliadas generadas por las isometrías asociadas a los grupos Bianchi, se puede considerar a la coordenada temporal como definida por las líneas de universo ortogonales a tales hipersuperficies de homogeneidad (Stephani 1982), a la coordenada así definida se le llama el “tiempo síncrono” t . Este trabajo emplea esta consideración. En cualquier modelo espacialmente homogéneo el elemento de línea es

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} \omega^i \omega^j \quad (2.12)$$

donde las ω^i son 1-formas asociadas al grupo de isometrías (MacCallum 1980, Stephani 1982) y la g_{ij} es la llamada “métrica espacial” (Ryan y Shepley 1975, MacCallum 1980). Podemos elegir g_{ij} como una matriz diagonal expresada como

$$g_{ij}(t) = \text{diag}(a_1^2(t), a_2^2(t), a_3^2(t)) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

a los $a_i(t)$ se les llama factores de escala del modelo.

Usando las métricas específicas para cada modelo de Bianchi, donde se supone que la única dependencia es con el tiempo síncrono t y empleando las ecuaciones (2.7) y (2.11) en vacío, se pueden obtener las ecuaciones de campo específicas para los modelos de Bianchi en la teoría JBD. Se usarán las siguientes definiciones: a_i es el factor de escala i -ésimo, $\beta_i \equiv (a_i/2 a_j a_k)^2$, $a^3 \equiv a_1 a_2 a_3$ y $(\dot{}) \equiv \partial_t$. Las ecuaciones de campo para cada factor de escala en todos los modelos de Bianchi en JBD, se pueden expresar de manera general (Chauvet *et al.* 1992) como

$$\begin{aligned}
(\ln a_i)'' + (\ln a^3)'(\ln a_i)' + (\ln a_i)' \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) & \quad i = 1, 2, 3 \\
+ \mathcal{A}_i a_1^{-2} + \mathcal{B}_i a_2^{-2} + \mathcal{C}_i a_3^{-2} + \mathcal{D}_i \beta_1 + \mathcal{E}_i \beta_2 + \mathcal{F}_i \beta_3 & = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Adicionalmente, se cumple lo que se ha llamado la ecuación de constricción

$$\begin{aligned}
(\ln a_1)'(\ln a_2)' + (\ln a_1)'(\ln a_3)' + (\ln a_2)'(\ln a_3)' + (\ln a^3)' \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 \\
+ \mathcal{A}_4 a_1^{-2} + \mathcal{B}_4 a_2^{-2} + \mathcal{C}_4 a_3^{-2} + \mathcal{D}_4 \beta_1 + \mathcal{E}_4 \beta_2 + \mathcal{F}_4 \beta_3 & = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

\mathcal{A}_i , \mathcal{B}_i , \mathcal{C}_i , \mathcal{D}_i , \mathcal{E}_i , y \mathcal{F}_i son coeficientes constantes que dependen de cada modelo en particular y que están dados en la tabla 2.1. Los coeficientes que aparecen en la ecuación (2.15) son la semisuma de algunos de los coeficientes que aparecen en la ecuación (2.14), como se puede comprobar en la tabla 2.1.

La ecuación para el campo escalar ϕ en todos los modelos en vacío es

$$[\dot{\phi} a^3]' = 0. \tag{2.16}$$

Algunos modelos conducen a ecuaciones que proporcionan relaciones adicionales entre los factores de escala, éstas surgen de la forma propuesta para la métrica y de la ausencia de materia e ilustran las simetrías de cada modelo en particular. Los modelos que exhiben este tipo de relaciones son IV, VI_h y VII_h, éstas serán relevantes en el momento de resolver específicamente a esos modelos, lo que se realizará en el siguiente capítulo.

De la ecuación (2.16) se obtiene trivialmente

$$a^3 \dot{\phi} = \phi_0, \tag{2.17}$$

donde ϕ_0 es una constante de integración. Ahora se puede definir una nueva variable Φ como $\Phi \equiv \phi/\phi_0$, y de este modo obtener

$$\partial_t = a^{-3} \partial_\Phi. \quad (2.18)$$

la nueva variable Φ es una función monótona de t y se usará como reparametrización de la variable temporal. Empleando la notación $(\)' \equiv \partial_\Phi$ y definiendo las H_i como $H_i \equiv (\ln a_i)'$, se pueden reescribir las ecuaciones (2.14) y (2.15) obteniendo

$$H_i' + \frac{H_i}{\Phi} + \mathcal{G}_i a_1^4 + \mathcal{J}_i a_2^4 + \mathcal{K}_i a_3^4 + \mathcal{L}_i a_1^2 a_2^2 + \mathcal{M}_i a_1^2 a_3^2 + \mathcal{N}_i a_2^2 a_3^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

y para la restricción se obtiene

$$H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3 + \frac{(\ln a^3)'}{\Phi} - \frac{\omega}{2\Phi^2} + \mathcal{G}_4 a_1^4 + \mathcal{J}_4 a_2^4 + \mathcal{K}_4 a_3^4 + \mathcal{L}_4 a_1^2 a_2^2 + \mathcal{M}_4 a_1^2 a_3^2 + \mathcal{N}_4 a_2^2 a_3^2 = 0. \quad (2.20)$$

Los coeficientes constantes también han cambiado debido a la reparametrización y se pueden consultar en la tabla 2.2. La relación entre los coeficientes de la ecuación (2.20) y la semisuma de los correspondientes en la ecuación (2.19) se sigue conservando. Las relaciones adicionales que aparecen en algunos modelos no cambian de forma al realizar la reparametrización temporal. La solución a las ecuaciones así obtenidas será el tema del siguiente capítulo.

Pies de tablas

Capítulo 2

Tabla 2.1

Para el modelo Bianchi I las ecuaciones (2.14) y (2.15) tienen todos los coeficientes iguales a cero. En el Bianchi II el primer renglón corresponde a la ecuación (2.14) para $i = 1$, el segundo para $i = 2, 3$, y el tercero a la ecuación (2.15). En el Bianchi IV el primer renglón corresponde a la ecuación (2.14) para $i = 2$, el segundo a $i = 1, 3$, y el tercero a la ecuación (2.15). Para el resto de los modelos Bianchi los tres primeros renglones corresponden a la ecuación (2.14) para $i = 1, 2, 3$ respectivamente, mientras que el cuarto y último proporciona los coeficientes de la ecuación (2.15).

En el Bianchi VI_h , cuando se hace $h = 0$, $h = 1$ y $h = -1$ se obtienen los modelos III, V, y VI_0 , respectivamente. Para el modelo Bianchi VII_h , donde $M^2 = 1 - (h^2/4)$ sucede algo similar, cuando $h = 0$, obtenemos el modelo VII_0 . Todo esto es según la convención de Ryan y Shepley (1975) como se ha utilizado a lo largo de este trabajo.

Tabla 2.2

Los coeficientes para el Bianchi I en las ecuaciones (2.19) y (2.20) son cero. Para el modelo Bianchi II los dos primeros renglones corresponden a la ecuación (2.19) para $i = 1$, y para $i = 2, 3$, respectivamente, mientras que el tercero corresponde a la ecuación (2.20). En el Bianchi IV el primer renglón corresponde a la ecuación (2.19) para $i = 2$, el segundo a $i = 1, 3$, y el tercero a la ecuación (2.20). Para el resto de los modelos Bianchi tenemos cuatro renglones, los tres primeros corresponden a la ecuación (2.19) para $i = 1, 2, 3$, respectivamente, y el último a la ecuación (2.20). Se obtienen los modelos III, V y VI_0 del modelo VI_h cuando h toma los valores 0, 1 y -1 , respectivamente; el modelo VII_0 se obtiene del VII_h cuando $h = 0$.

Tabla 2.1

Coeficientes constantes para las ecuaciones como función de t						
	A	B	C	D	\mathcal{E}	\mathcal{F}
I	0	0	0	0	0	0
II	0	0	0	2	0	0
	0	0	0	-2	0	0
	0	0	0	-1	0	0
IV	-2	0	0	0	2	0
	-2	0	0	0	-2	0
	-3	0	0	0	-1	0
VI_h	$-(h^2 + 1)$	0	0	0	0	0
	$-(h + 1)$	0	0	0	0	0
	$-(h^2 + h)$	0	0	0	0	0
	$-(h^2 + h + 1)$	0	0	0	0	0

Tabla 2.1
Continuación

Coeficientes constantes para las ecuaciones como función de t						
	A	B	C	D	\mathcal{E}	\mathcal{F}
VII _h	$4M^2 - \frac{5}{2}$	0	0	0	-2	-2
	$4M^2 - \frac{9}{2}$	0	0	0	2	-2
	0	0	0	0	-2	2
	$4M^2 - \frac{7}{2}$	0	0	0	-1	-1
VIII	1	0	0	2	-2	-2
	0	-1	0	-2	2	-2
	0	0	-1	-2	-2	2
	1/2	-1/2	-1/2	-1	-1	-1
IX	1	0	0	2	-2	-2
	0	1	0	-2	2	-2
	0	0	1	-2	-2	2
	1/2	1/2	1/2	-1	-1	-1

Tabla 2.2

Coeficientes constantes para las ecuaciones como función de Φ						
	\mathcal{G}	\mathcal{J}	\mathcal{K}	\mathcal{L}	\mathcal{M}	\mathcal{N}
I	0	0	0	0	0	0
II	1/2	0	0	0	0	0
	-1/2	0	0	0	0	0
	-1/4	0	0	0	0	0
IV	0	1/2	0	0	0	-2
	0	-1/2	0	0	0	-2
	0	-1/4	0	0	0	-3
VI_h	0	0	0	0	0	$-(h^2 + 1)$
	0	0	0	0	0	$-(h + 1)$
	0	0	0	0	0	$-(h^2 + h)$
	0	0	0	0	0	$-(h^2 + h + 1)$

Tabla 2.2

Continuación

Coeficientes constantes para las ecuaciones como función de Φ						
	\mathcal{G}	\mathcal{J}	\mathcal{K}	\mathcal{L}	\mathcal{M}	\mathcal{N}
VII _h	0	-1/2	-1/2	0	0	$4M^2 - (5/2)$
	0	1/2	-1/2	0	0	$4M^2 - (9/2)$
	0	-1/2	1/2	0	0	0
	0	-1/4	-1/4	0	0	$4M^2 - (7/2)$
VIII	1/2	-1/2	-1/2	0	0	1
	-1/2	1/2	-1/2	0	-1	0
	-1/2	-1/2	1/2	-1	0	0
	-1/4	-1/4	-1/4	-1/2	-1/2	1/2
IX	1/2	-1/2	-1/2	0	0	1
	-1/2	1/2	-1/2	0	1	0
	-1/2	-1/2	1/2	1	0	0
	-1/4	-1/4	-1/4	1/2	1/2	1/2

Capítulo 3

Soluciones exactas en Brans–Dicke

Uno de los objetivos de este trabajo es obtener soluciones analíticas en vacío para los modelos cosmológicos de universos homogéneos y anisótropos de tipo Bianchi en la teoría escalar tensorial de Jordan, Brans y Dicke (JBD). El propósito de este capítulo es reportar lo que se pudo avanzar en ese propósito y argüir porque creemos que no es posible avanzar más sin recurrir a restricciones adicionales sobre los modelos.

La obtención de soluciones cosmológicas significa que, dadas ciertas suposiciones razonables sobre las simetrías y propiedades del universo, se debe obtener, partiendo de la expresión para la métrica que cumpla con aquellas, la forma funcional de los factores de escala involucrados y, como trabajamos en teorías escalar tensoriales, también la forma funcional del campo escalar. En ocasiones, el hacer algún reescalamiento del parámetro temporal facilita la obtención de soluciones. Si comenzamos a partir de las suposiciones usuales, es decir, del Principio Cosmológico, el Universo es homogéneo y anisótropo, o al menos eso es lo que sabemos hasta la fecha (Ellis 1993). Esto se entiende en el sentido de que a escalas suficientemente grandes no hay en el universo posición o dirección preferencial. Ello además nos permite suponer que el potencial escalar es función únicamente de la coordenada temporal.

Han sido varias las razones por las cuales se ha tenido interés en estudiar modelos espacialmente homogéneos, una de ellas es que los modelos son suficientemente simples y aún así pueden reflejar características del universo observado, ello ha permitido tratar ciertos problemas, como estimar el contenido de materia en el universo que provocaría “ilusiones ópticas” de naturaleza cosmológica al permitir rayos de luz que circunnavegaran el universo en un tiempo finito, o problemas conectados con la paradoja de Olbers (Aguilar *et al.* 1992b). Además,

debido a sus grandes simetrías, es posible resolver algunos exactamente y ya, en el capítulo 2, apuntamos la importancia de las soluciones exactas. En un modelo espacialmente homogéneo se puede concebir al espacio-tiempo como un conjunto de hipersuperficies invariantes; así, es posible especificar la métrica de forma tal que solo sea función del parámetro temporal t al que entonces se le llama *tiempo síncrono*.

Actualmente se conocen muchas soluciones exactas sin restricciones para modelos espacialmente homogéneos en la teoría de Relatividad General (RG), entre algunos de ellos se encuentran los modelos de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker (FLRW), los modelos de Bianchi en sus diferentes tipos (Kramer *et al.* 1980) etcétera. Sin embargo, son relativamente pocas las soluciones exactas conocidas para el mismo tipo de modelos en la teoría escalar tensorial de JBD. Ello posiblemente debido a que es una teoría mas reciente y menos estudiada que RG. Analizando los modelos de Bianchi en vacío en la teoría escalar tensorial de JBD, se clasificaron en, resolubles, irresolubles e inviábiles en vacío. Los inviábiles son aquellos modelos en que las simetrías impuestas por la métrica introducen restricciones demasiado drásticas que se reflejan en el poco sentido físico de la solución final.

Uno de los propósitos de este trabajo es encontrar soluciones a los modelos, y en esta sección se presentan en forma unificada un conjunto de soluciones exactas para los modelos Bianchi de tipo II, III, V, VI_h y VII_0 . Los modelos Bianchi de los tipos I y VI_0 aunque resolubles exactamente, tienen soluciones que no caen dentro del esquema general presentado. Los modelos Bianchi de tipo VIII y IX sólo se pueden englobar dentro del esquema mencionado cuando se imponen restricciones adicionales sobre el comportamiento de los factores de escala. Finalmente, los modelos Bianchi IV y VII_h (con $h \neq 0$), aunque resolubles en principio, dadas las simetrías contenidas en sus métricas, imponen relaciones entre sus factores de escala que obligan al menos a uno de ellos a anularse. Así, decimos que son inviábiles en vacío.

En los casos en que no fué posible obtener soluciones exactas de manera general y como hasta la fecha no existen reportadas soluciones para ellos,

se sospecha que las ecuaciones que gobiernan su dinámica pudieran no admitir solución analítica y, por lo tanto, manifestar comportamiento caótico. Esta manera de pensar recibía cierto apoyo tangencial en los descubrimientos recientes de soluciones caóticas en RG, en especial en modelos de los llamados “mixmaster” (variante del Bianchi IX, en el que existen envolventes de geodésicas nulas que alisan las inhomogeneidades en todas direcciones (Misner *et al.* 1973, Ryan y Shepley 1975)). El descubrimiento de evidencia numérica de que ocurre según se sospechó, es el tema del capítulo 4.

1. Modelos resolubles

Las soluciones a estos modelos se pueden dividir en dos, las soluciones explícitas, clase que solo contiene al Bianchi I, y aquellas que se reducen a cuadraturas, a la que pertenecen todos los demás modelos Bianchi. El modelo VI_0 es el más simple de este segundo grupo, las soluciones a los modelos II, III, V, VI_h y VII_0 se pueden englobar en una sola forma general, diferenciadas únicamente por valores que toman ciertas constantes características. Se agruparon por separado a los modelos VIII y IX, ya que para obtener sus soluciones analíticas hay que restringir el comportamiento de los factores de escala. Entonces, las soluciones que se obtienen también se engloban en la forma general de cuadraturas características del resto de los modelos.

1.1 Solución explícita

En el modelo Bianchi I, los coeficientes constantes que aparecen en la ecuación (2.19) son iguales a cero en todos los casos, con lo que cada uno de los factores de escala se pueden encontrar en forma independiente. Esto facilita encontrar el “elemento de volumen” $a_1 a_2 a_3 \equiv V = V_0 \Phi^C$, necesario para expresar a los a_i como función de t (ecuación 3.3), donde C es una combinación de las constantes que ocurren en el modelo. La expresión general (*i.e.* independiente del modelo) para t es:

$$t + t_0 = \int V d\Phi, \quad (3.1)$$

donde t_0 es una constante de integración que, como haremos en el resto del trabajo, puede elegirse como cero ($t_0 = 0$) pues la ecuación (2.18) es autónoma. Este modelo es el único que permite obtener explícitamente a Φ como función de t , al escribir esta expresión se obtienen dos posibilidades que dependen del valor de C ,

$$\Phi = \begin{cases} \exp(t), & C = -1 \\ [(C+1)(t)]^{1/(C+1)}. & C \neq -1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Los factores de escala como función de t son

$$a_i = \begin{cases} a_{i0} \exp[c_i(t)], & C = -1 \\ a_{i0} [(C+1)(t)]^{c_i/(C+1)}, & C \neq -1 \end{cases} \quad i=1, 2, 3 \quad (3.3)$$

donde a_{i0} y c_i son constantes de integración y $C = c_1 + c_2 + c_3$. Por otro lado, siempre se puede elegir $V_0 \equiv a_{10} a_{20} a_{30} = 1$ y, por último, de la ecuación de constricción (2.20) obtenemos la relación

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \begin{cases} -1 - \omega, & C = -1 \\ C(C+2) - \omega. & C \neq -1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Las soluciones para este modelo fueron obtenidas por vez primera por Ruban y Finkelstein (1975).

1.2 Solución en cuadraturas

Para los modelos analizados aquí, no es posible expresar a Φ como función de t como ocurrió en la sección anterior. Se pueden separar las soluciones en tres grupos, dependiendo de la forma de la solución. El primer grupo incluye únicamente al modelo Bianchi VI₀. Al segundo grupo pertenecen la mayoría de los modelos, agrupados así por la forma general de la solución. Al tercer y último grupo

pertenecen aquellos modelos donde es necesario imponer restricciones adicionales a los factores de escala para que sean resolubles.

1.2.a) Grupo I

Para el modelo VI₀, los coeficientes constantes que aparecen en la ecuación (2.19) son iguales a cero solo para dos de los factores de escala, con lo que a_2 y a_3 se pueden obtener de manera inmediata. La ecuación para el factor restante es

$$[\Phi (\ln a_1)']' = c\Phi^D, \quad (3.5)$$

donde $c = 2a_{20}^2 a_{30}^2$, y $D = 2(c_2 + c_3) + 1$ son constantes. Al resolver (3.5) hay dos posibilidades para D ; la expresión para los factores de escala queda

$$a_1 = \begin{cases} A_3 \Phi^{A_1} \exp[(\ln \Phi)^2], & D = -1 \\ A_3 \Phi^{A_1} \exp[2(D+1)^{-2} \Phi^{D+1}], & D \neq -1 \end{cases} \quad (3.6)$$

y

$$a_i = a_{i0} \Phi^{c_i}, \quad i = 2, 3 \quad (3.7)$$

donde a_{i0} , y c_i son constantes de integración, y el “elemento de volumen” (elemento local en la superficie de homogeneidad) es

$$V = \begin{cases} A_0 \Phi^{(A_1+c_2+c_3)} \exp[(\ln \Phi)^2], & D = -1 \\ A_0 \Phi^{(A_1+c_2+c_3)} \exp[2(D+1)^{-2} \Phi^{D+1}]. & D \neq -1 \end{cases} \quad (3.8)$$

donde $A_0 = A_3 a_{20} a_{30}$. Por lo que la expresión para evaluar el tiempo síncrono es

$$t = \begin{cases} \int \{A_0 \Phi^{(A_1+c_2+c_3)} \exp[(\ln \Phi)^2]\} d\Phi, & D = -1 \\ \int \{A_0 \Phi^{(A_1+c_2+c_3)} \exp[2(D+1)^{-2} \Phi^{D+1}]\} d\Phi. & D \neq -1 \end{cases} \quad (3.9)$$

donde A_1 y A_3 son constantes de integración. La ecuación de constricción (2.20) nos proporciona algunas relaciones entre las constantes: $a_{20} = a_{30}$, $c_2 = c_3$, además hay otras que dependen del valor específico de D

$$4 a_{20}^4 + (3 + 2\omega) = 0, \quad D = -1 \quad (3.10a)$$

y

$$2[A_1(2c_2 + 1) + c_2(c_2 + 2)] - \omega = 0. \quad D \neq -1 \quad (3.10b)$$

Estas ecuaciones permiten la determinación de algunas constantes de integración al expresarlas como función de otras ya conocidas; en particular, al incluir el parámetro de acoplamiento ω se puede indicar que tan restrictivos son estos modelos en vacío.

1.2.b) Grupo II

Para este grupo de soluciones será conveniente definir varias ecuaciones con lo que se indica como constantes generales, las que permitirán adecuar la expresión a la de cada modelo en particular con definiciones específicas empleando a estas constantes o funciones de otras constantes.

La ecuación general que se resuelve contiene constantes características c , n y m que especifican a las expresiones para los factores de escala en cada modelo. La ecuación general es

$$[\Phi(\ln a_i)]' = c \Phi^n a_i^m, \quad (3.11)$$

la solución es una expresión que dependerá, obviamente, de los valores que tomen las constantes en la ecuación general (3.11). Por razones de economía en la escritura de las soluciones, definimos el símbolo ξ_p , donde p es siempre igual a $m/2$,

$$\xi_p(\Phi) = \begin{cases} g_+ \{\cos[Q_+ \ln(f\Phi^p)]\}^{-1/p} \Phi^{-1/p}, & \Delta > 0 \\ g_+ \{\sin[Q_+ \ln(f\Phi^p)]\}^{-1/p} \Phi^{-1/p}, & \Delta > 0 \\ g_0 [\ln(f\Phi^p)]^{-1/p} \Phi^{-1/p}, & \Delta = 0 \\ g_+ \{\cosh[-Q_- \ln(f\Phi^p)]\}^{-1/p} \Phi^{-1/p}, & \Delta < 0 \\ g_- \{\sinh[-Q_- \ln(f\Phi^p)]\}^{-1/p} \Phi^{-1/p}. & \Delta < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

donde $f > 0$ y \mathcal{B} son constantes de integración y se usan las definiciones $\Delta = -4(\mathcal{B} + N^2)$, $N = (n + 1)/m$, $Q_{\pm} = \sqrt{\mp(\mathcal{B} + N^2)}$, $g_{\pm}^m = [\mp(\mathcal{B} + N^2)]/2c$ y $g_0^m = m/2c$.

La dependencia de t como función de Φ se obtiene de la expresión (3.1) de acuerdo a cada modelo en especial dentro de este grupo y se puede escribir en la forma general

$$t = \begin{cases} A \int \{\cos[Q_+ \ln(f\Phi^a)]\}^b \Phi^d d\Phi, & \Delta > 0 \\ A \int \{\sin[Q_+ \ln(f\Phi^a)]\}^b \Phi^d d\Phi, & \Delta > 0 \\ E \int [\ln(f\Phi^a)]^b \Phi^d d\Phi, & \Delta = 0 \\ F_{\pm} \sum_{i=1}^{r-1} C_{r-1}^i [(-u)^i (u \pm u^{-1} \Phi^{-2a} Q_-)^{r+b-i}] (r+b-i)^{-1}, & \Delta < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

donde A , a , b , d , E , F_{\pm} , r , s y u son las constantes dependientes del modelo, algunas de las cuales se muestran en la tabla 3.1; las constantes $F_+ = Au^r/s$, $s = 2^{a+b}Q_-$, $u = f^{Q_-}$ son las mismas en todos los modelos, por lo que no se incluyen en la tabla. Se puede notar que tampoco en este caso es posible invertir

para expresar a Φ como función de t . Los dobles signos (\pm) en el último renglón de la ecuación (3.13) corresponden a las soluciones generadas por el coseno y el seno hiperbólicos, respectivamente. Todo lo que resta por hacer ahora es especializar las expresiones generales (3.12) y (3.13) al modelo específico que se desee resolver. Esto se hace a continuación.

Para el modelo II, los factores de escala se pueden expresar como

$$a_1 = \xi_2, \quad (3.14)$$

y

$$a_i = a_{i0} \Phi^{c_i} (\xi_2)^{-1}, \quad i = 2, 3 \quad (3.15)$$

donde a_{i0} y c_i son constantes de integración. Dados los factores de escala, el “elemento de volumen” se expresa como

$$V = \frac{a_{20} a_{30} \Phi^{c_2+c_3}}{\xi_2}. \quad (3.16)$$

El resultado de la integración (3.1) es de la forma (3.13) y los valores específicos para las constantes que aparecen en el resultado para este modelo se dan en la tabla 3.1.

Usando la ecuación de constricción, se pueden obtener las siguientes relaciones entre constantes

$$4Q_{\pm}^2 \pm 4(c_2 c_3 + c_2 + c_3) + 1 - 2\omega = 0, \quad \Delta \neq 0 \quad (3.17a)$$

y

$$4c_2(c_3 + 1) + 4c_3 + 1 - 2\omega = 0, \quad \Delta = 0 \quad (3.17b)$$

donde los signos superiores corresponden a $\Delta > 0$, mientras que los inferiores están relacionados a $\Delta < 0$. Cuando las constantes toman los valores particulares

$a_{i0} = 1$, $c_2 = k$, $c_3 = \alpha$ y $\mathcal{B} = 0$, reproducen la solución presentada por Guzmán (1991a) pero éste solamente considera el caso $\Delta < 0$.

Es útil mencionar ahora que la estructura del modelo Bianchi VI_h genera relaciones entre los factores de escala no sólo para él sino también para otros modelos si se elige apropiadamente el valor específico de h

$$(\ln a_1)'(h + 1) - (\ln a_2)' - (\ln a_3)'h = 0. \quad (h \neq 0, 1, y - 1) \quad (3.18)$$

Se debe notar que cuando h toma los valores 0, 1 y -1 , la expresión anterior se reduce a las relaciones correspondientes para los modelos III, V y VI_0 , respectivamente. El modelo VI_h también puede generar las ecuaciones de los otros tres de manera general, pero al resolverlos de manera individual se diferencian al tomar cada uno valores específicos para las constantes.

Para el modelo Bianchi III, caso particular del VI_h con $h = 0$, los factores de escala se pueden expresar de la siguiente manera:

$$a_1 = a_2 = \xi_1, \quad (3.19)$$

y

$$a_3 = a_{30} \Phi^{c_3}, \quad (3.20)$$

donde a_{30} y c_3 son constantes de integración. El “elemento de volumen” queda expresado por

$$V = a_{30} \Phi^{c_3} (\xi_1)^2. \quad (3.21)$$

El resultado de la integración (3.1) es de la forma (3.13) y los valores específicos para las constantes de este modelo se dan en la tabla 3.1.

De la ecuación de constricción (2.20) se obtiene que $a_{30} = 1$, $c_3 = 0$ además de las relaciones que incluyen al parámetro de acoplamiento ω

$$2Q_{\pm}^2 \pm (2 + \omega) = 0, \quad \Delta \neq 0 \quad (3.22a)$$

y

$$2 + \omega = 0. \quad \Delta = 0 \quad (3.22b)$$

donde los signos superiores corresponden a $\Delta > 0$ mientras que los signos inferiores corresponden a $\Delta < 0$ respectivamente.

El modelo Bianchi V, que se puede obtener al elegir $h = 1$ en las ecuaciones para el VI_h , los factores de escala en este caso se expresan de la siguiente manera

$$a_2 a_3 = \xi_1, \quad (3.23)$$

$$a_1 = a_{10} \Phi^{c_1} (\xi_1)^{1/2}, \quad (3.24)$$

y

$$a_i = a_{i0} \Phi^{-c_i} a_1, \quad i = 2, 3 \quad (3.25)$$

donde a_{i0} y c_i son constantes de integración con la restricción $c_2 = -c_3$. El “elemento de volumen” es

$$V = a_{10} \Phi^{c_1} (\xi_1)^{3/2}. \quad (3.26)$$

El resultado de la integración (3.1) es de la forma (3.13) y los valores específicos para las constantes de este modelo se dan en la tabla 3.1.

De la ecuación de constricción (2.20), se obtienen relaciones entre las constantes que incluyen al parámetro de acoplamiento

$$Q_{\pm}^2 = \mp \frac{1}{12} (4C_2^2 + 3 + 2\omega), \quad \Delta \neq 0 \quad (3.27a)$$

y

$$C_2^2 + \frac{1}{4}(3 + 2\omega) = 0, \quad \Delta = 0 \quad (3.27b)$$

los signos superiores corresponden a $\Delta > 0$ y los inferiores a $\Delta < 0$, respectivamente. Algunas soluciones para este modelo fueron publicadas por Lorenz–Petzold (1984a, 1984b) y Guzmán (1991b) pero únicamente contemplaron el caso $\Delta < 0$.

El modelo Bianchi VI_h se puede reducir a los modelos III y V, si se eligen h apropiadamente. En este caso, los factores de escala son

$$a_2 a_3 = \xi_1, \quad (3.28)$$

$$a_1 = A_3 \Phi^{A_1} (\xi_1)^{A_0}, \quad (3.29)$$

y

$$a_i = (A_4 \Phi^{A_2} a_1)^{c_i/(h^2+1)}, \quad i = 2, 3 \quad (3.30)$$

donde $A_1 = -A_2$, y $A_3 = A_4^{-1}$ son constantes de integración y $A_0 = (h^2 + 1)/(h + 1)^2$, $c_2 = h + 1$, $c_3 = h c_2$. El “elemento de volumen” queda

$$V = A_3 \Phi^{A_1} (\xi_1)^{A_0}. \quad (3.31)$$

El resultado de la integración (3.1) es de la forma (3.13) y los valores específicos para las constantes de este modelo se dan en la tabla 3.1.

La ecuación de constricción nos dice que A_1 vale cero, y nos proporciona relaciones para las restantes:

$$2(h^2 + h + 1)(Q_{\pm}^2 + 1) \pm (h + 1)^2 \omega = 0, \quad \Delta \neq 0 \quad (3.32a)$$

y

$$2(h^2 + h + 1) + (h + 1)^2 \omega = 0, \quad \Delta = 0 \quad (3.32b)$$

donde los signos superiores corresponden nuevamente a $\Delta > 0$ y los inferiores a $\Delta < 0$. Algunas soluciones para este modelo fueron publicadas por Lorenz-Petzold (1984a, 1984b) y Guzmán (1991b) pero unicamente contemplaron el caos $\Delta < 0$. Estas soluciones para el modelo VI_h incluyen a las correspondientes para los modelos III y V cuando $h = 0$ y $h = 1$, respectivamente. Aunque la ecuación general también incluyen al VI_0 cuando $h = -1$, la solución de éste no se puede obtener a partir de la forma (3.11) debido a que en el proceso de resolución hemos dividido entre $(h + 1) + (h^2 + h)$, que en este caso se anula. Es esta la razón por la que su solución ha sido clasificada en un grupo diferente (Chauvet *et al.* 1992).

En el modelo Bianchi VII_0 , se encuentran los factores de escala de la siguiente manera:

$$a_1 = \xi_2, \quad (3.33)$$

$$a_2 = c_0 \xi_2, \quad (3.34)$$

y

$$a_3 = 2^{-1/2} c_0 \xi_2, \quad (3.35)$$

donde c_0 es una constante de integración. El “elemento de volumen” es

$$V = \frac{c_0^2 (\xi_2)^3}{\sqrt{2}} \quad (3.36)$$

El resultado de la integración (3.1) es de la forma (3.13) y los valores específicos para las constantes de este modelo se dan en la tabla 3.1.

De la ecuación de constricción (2.20) obtenemos las relaciones

$$12Q_{\pm}^2 \pm (3 + 2\omega) = 0, \quad \Delta \neq 0 \quad (3.37a)$$

y

$$3 + 2\omega = 0. \quad \Delta = 0 \quad (3.37b)$$

donde los signos superiores corresponden a $\Delta > 0$ mientras que los signos inferiores corresponden a $\Delta < 0$ respectivamente.

Las soluciones en el caso $\Delta < 0$, obtenidas en la sección 1.2 de este capítulo, habían sido obtenidas previamente por Lorenz–Petzold (1984a, 1984b), con la salvedad de aquella para el modelo VII₀. Para el Bianchi II fueron publicadas por vez primera por Chauvet *et al.* (1991a). Guzmán también obtuvo soluciones sólo para el caso $\Delta < 0$, en el modelo II (Guzmán 1991a) y en el V (Guzmán 1991b).

1.2.c) Grupo III

Solo los modelos VIII y IX caen dentro de este grupo, imponiendo la restricción $a_2 = a_3$ para que sean integrables y poder aplicar el esquema mostrado aquí sin problema; no es posible integrarlos sin esta restricción. Imponiéndola, las constantes para la primera ecuación son $c = -1/2$, $n = 1$, y $m = 4$, igual para ambos modelos, de donde se puede obtener

$$a_1 = \xi_2, \quad (3.38)$$

y

$$a_2 = a_3 = \xi_1 (\xi_2)^{-1}, \quad (3.39)$$

donde estas a_i se obtiene de la ecuación análoga a la que da lugar a a_1 , en este caso las constantes son $c = \pm 1$, $n = 1$, y $m = 2$, el doble signo se refiere a los modelos VIII y IX, respectivamente. Con estos factores de escala podemos calcular el “elemento de volumen”

$$V = \frac{(\xi_1)^2}{\xi_2}. \quad (3.40)$$

Al integrar ésta, se obtiene una expresión del tipo de la ecuación (3.13) para la dependencia del tiempo t como función de Φ , así

$$t = \begin{cases} \left(\frac{m Q_{2\pm}^2}{2c} \right)^{2/m} \int a_1^{-1} \{ \cos[Q_{2+} \ln(f\Phi)] \}^{-2} \Phi^{-2} d\Phi, & \Delta > 0 \\ \left(\frac{m Q_{2\pm}^2}{2c} \right)^{2/m} \int a_1^{-1} \{ \sin[Q_{2+} \ln(f\Phi)] \}^{-2} \Phi^{-2} d\Phi, & \Delta > 0 \\ \left(\frac{m}{2c} \right)^{2/m} \int a_1^{-1} [\ln(f\Phi)]^{-2} \Phi^{-2} d\Phi, & \Delta = 0 \\ \left(\frac{-m Q_{2-}^2}{2c} \right)^{2/m} \int a_1^{-1} \{ \cosh[-Q_{2-} \ln(f\Phi)] \}^{-2} \Phi^{-2} d\Phi, & \Delta < 0 \\ \left(\frac{m Q_{2-}^2}{2c} \right)^{2/m} \int a_1^{-1} \{ \sinh[-Q_{2-} \ln(f\Phi)] \}^{-2} \Phi^{-2} d\Phi. & \Delta < 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

donde $Q_{2\pm}$ corresponde a Q_{\pm} pero generados por a_2 de la expresión (3.39).

Por último, substituyendo todos estos valores en la ecuación de constricción (2.20), se obtienen las relaciones entre las diferentes constantes, las expresiones son

$$4Q_{2\pm}^2 \pm (4Q_{1\pm}^2 + 3 + 2\omega) = 0, \quad \Delta \neq 0 \quad (3.42a)$$

donde $Q_{1\pm}$ corresponde a Q_{\pm} pero esta vez generados por a_1 de la expresión (3.38), además $\Delta > 0$ corresponde a los signos superiores en la ecuación previa, y $\Delta < 0$ a los inferiores. Para el caso que falta se tiene

$$3 + 2\omega = 0. \quad \Delta = 0 \quad (3.42b)$$

El desarrollo hecho en esta parte es igual para los dos modelos (VIII y IX) dada la elección hecha ($a_2 = a_3$).

Se pueden considerar elecciones diferentes para imponer la restricción en el modelo VIII, pero ello conduce necesariamente a expresiones que no son de la forma de la ecuación (3.11), y no se ha podido resolver. Ello es diferente en el modelo IX, donde no importa que pareja factores de escala se igualen, los resultados

son invariantes ante tal elección, la única condición para que se obtenga este resultado es que sólo dos de ellos se hagan iguales. Estas apreciaciones se pueden ver fácilmente en (3.43) y (3.44) que son las expresiones generales (sin restricción) que gobiernan los factores de escala y qué pueden mostrar las consecuencias de igualar dos de ellos. A continuación mencionamos el caso general sin restricciones.

2. Modelos irresolubles

Solo los modelos VIII y IX caen dentro de este grupo. Trabajando con sus ecuaciones

$$[\Phi(\ln a_1)]' + \frac{\Phi}{2}(a_1^4 - (a_2^2 - a_3^2)^2) = 0, \quad (3.43)$$

y

$$[\Phi(\ln a_i)]' + \frac{\Phi}{2}(a_i^4 - (a_j^2 \pm a_k^2)^2) = 0, \quad i = 2, 3 \quad (3.44)$$

de manera general no ha sido posible hasta la fecha resolverlas. La primera ecuación es válida para ambos modelos, mientras que el doble signo de la segunda corresponde a los modelos VIII y IX, respectivamente. De estas ecuaciones se puede ver claramente como el hecho de imponer $a_2 = a_3$ reduce las ecuaciones a una forma resoluble.

Aún para estos modelos podemos construir una ecuación para el “elemento de volumen”, aunque no se pueda resolver

$$[\Phi(\ln V)]' - \frac{\Phi}{2} \left\{ (a_2^2 - a_3^2)^2 + a_1^2 [a_1^2 \pm 2(a_2^2 + a_3^2)] \right\} = 0. \quad (3.45)$$

donde nuevamente el doble signo corresponde a los modelos VIII y IX, respectivamente. Tampoco es posible utilizar la expresión para la constricción como hicimos en los otros modelos.

Esto es lo más que se logró de manera analítica para estos dos modelos (VIII y IX). Una manera de continuar analizando su comportamiento es mediante el análisis numérico. En el siguiente capítulo se continúa con el estudio del modelo IX en particular, analizándolo usando las técnicas de la dinámica no-lineal. De hecho, al encontrar evidencia de que el modelo es caótico se estará corroborando el que no es posible encontrar una solución general exacta, pues se pone en evidencia también que el modelo no es integrable.

3. Modelos que colapsan en vacío

En algunos modelos, se tienen ecuaciones adicionales que proporcionan relaciones entre los factores de escala generados por la propia métrica, reflejando las simetrías y restricciones presupuestas en ellas. El modelo IV produce dos de ellas,

$$2(\ln a_1)' - (\ln a_2)' - (\ln a_3)' = 0, \quad (3.46)$$

y

$$\frac{a_2}{a_1^2 a_3} = 0. \quad (3.47)$$

de la primera ecuación, obtenemos la relación $a_1^2 = \nu a_2 a_3$ donde ν es una constante de integración; pero de la segunda emerge una restricción mucho mas fuerte, pues requiere que uno de los factores de escala se anule: $a_2 = 0$, y automáticamente al sustituirla en la primera, implica que $a_1 = 0$, con lo que a_3 pueda tomar cualquier valor. También se puede substituir la primera (3.46) en la segunda (3.47), así al simplificar, uno de los factores de escala debe ser $a_3 = \infty$. Con lo que tenemos los tres factores de escala por separado, en una solución exacta pero desprovista de sentido físico.

El modelo Bianchi VII_h genera dos relaciones de las mencionadas

$$(\ln a_1)' - (\ln a_2)' = 0, \quad (3.48)$$

y

$$\frac{h a_2}{2 a_1^2 a_3} = 0. \quad (3.49)$$

nótese que cuando $h = 0$, estas relaciones se reducen a las relaciones para el VII_0 . Es fácil ver que la primera ecuación nos proporciona la igualdad $a_1 = \nu a_2$ con ν una constante, pero que la segunda impone que $a_2 = 0$, lo que implica, usando la primera nuevamente, que $a_1 = 0$ y que, como en el caso anterior, a_3 pueda valer cualquier cosa. También se obtiene al substituir la primera (3.48) en la segunda (3.49), que el producto de los factores de escala debe ser $a_2 a_3 = \infty$. Para el caso particular $h = 0$ la segunda ecuación no tiene sentido independiente ya que solo es una identidad. Así, con solo la primera, es factible resolver el modelo. La solución cae dentro del grupo II de las soluciones en cuadraturas.

Ya que se pueden calcular los tres factores de escala, de alguna manera los modelos quedan resueltos exactamente y podríamos decir que son resolubles en vacío; lamentablemente las soluciones que se obtienen describen un universo colapsado por lo que, concluimos, no tiene mucho sentido estudiar estos modelos en vacío.

4. Singularidades

La existencia de singularidades es importante para describir las propiedades de un espaciotiempo; en esta sección se investigan singularidades presentes en los modelos de tipo Bianchi estudiados. Como existen muchos criterios para la detección de singularidades y, obviamente, las singularidades producidas por la elección de coordenadas no son de interés, elegimos analizar las singularidades de curvatura. Para afirmar la existencia de una de estas singularidades es necesario evaluar el escalar de Ricci $R = g^{ab} R_{ab}$. Si $R \rightarrow \infty$ a lo largo de una congruencia de geodésicas cuando el parámetro afín asociado con ella tiende a un valor finito se dice que existe una singularidad de curvatura. Un análisis de las singularidades que ocurren en espaciotiempos de tipo Bianchi en RG se encuentra con detalle

en Collins y Ellis (1979); un estudio sobre tipos específicos de singularidades lo realizan Goode y Wainright (1982). Sobre los criterios para detectar singularidades se puede consultar Ellis y Schmidt (1977) o Hawking y Ellis (1973).

Para los modelos de tipo Bianchi analizados aquí, el problema es escoger una congruencia de geodésicas apropiada pues se analizan los modelos en vacío. Se ha elegido como congruencia apropiada al conjunto de las líneas de universo de observadores de prueba (geodésicas temporales) cuyo parámetro afín es el tiempo síncrono t , ésta es la elección mas simple y que se presta a una caracterización invariante. Es posible expresar de manera unificada al escalar de curvatura para todos los modelos de Bianchi estudiados, la expresión general para él se puede escribir

$$R = 2 \left(\frac{\ddot{a}_1}{a_1} + \frac{\ddot{a}_2}{a_2} + \frac{\ddot{a}_3}{a_3} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 \right). \quad (3.50)$$

Ayudados por las ecuaciones (2.14-2.16) y del hecho que los modelos están en vacío, se puede reescribir a R en términos del parámetro de acoplamiento ω y del campo ϕ o del tiempo intrínseco y del volumen local en las hipersuperficies de homogeneidad,

$$R = -\omega \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 = -\omega \left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \Phi} \right)^2. \quad (3.51)$$

Es importante hacer notar que estas expresiones unificadas sólo son posibles gracias a la inexistencia de materia en los modelos. Cuando $R \rightarrow \infty$, esto es, cuando ocurre una singularidad en los modelos, ello es necesariamente consecuencia de que al menos uno de los factores de escala o el campo escalar tienda a cero a t finito, lo que sucede en los modelos IV y VII_h ya que allí uno de los factores de escala siempre se anula. El escribir R como en (3.51) muestra de manera explícita la dependencia con el parámetro de acoplamiento y permite visualizar algunas propiedades que no son del todo evidentes en la ecuación (3.50), además el tener a R expresado en diversas formas ayuda si se desea graficar R como función de Φ y eventualmente como función de t .

En los modelos de FLRW (isótopos) solo hay un factor de escala, cuando se presenta una singularidad, todas las distancias relativas se hacen cero; en contraste con lo que sucede en este trabajo, donde se tienen tres factores de escala que se comportan en forma anisótropa ya que evolucionan en forma diferente en general.

5. Interpretación de las soluciones

Al analizar las soluciones obtenidas para cada uno de los modelos y considerando las constantes que aparecen en ellos, algunas que han sido definidas en términos de otras para simplificar la apariencia de las expresiones y otras que son “libres” (*i.e.* constantes de integración), se obtienen intervalos de validez para el parámetro de acoplamiento (ω) y quedan determinadas relaciones entre otras de las constantes. Lo que ha permitido elegir casos particulares como representativos de cada modelo. Las figuras 3.1–3.9 muestran a los factores de escala y al correspondiente escalar de curvatura R como función del tiempo intrínseco Φ para cada caso típico seleccionado, también muestran la dependencia del tiempo síncrono t con Φ para cada modelo.

Bianchi I

Para este modelo se debe primero tomar en cuenta el valor que toma la constante C generada al realizar la evaluación descrita por (3.1). Como se puede ver de las ecuaciones (3.2–3.4), C depende de manera directa de los valores de las constantes c_i , las constantes a_{i0} quedan libres:

Cuando $C = -1$, dos de las constantes de integración c_i pueden ser positivas y una negativa (figuras 3.1 y 3.2); o bien, dos de ellas pueden ser negativas y una positiva. En ambos casos el parámetro de acoplamiento debe cumplir

$$\omega \leq -4, \tag{3.52a}$$

para evitar que alguna constante sea compleja. En el primer caso (dos constantes positivas) se tiene un espaciotiempo que colapsa en una dirección que evolucionará

hacia un universo “aplanado” (figuras 3.1, 3.2), mientras en el segundo caso (dos constantes negativas) el colapso del espaciotiempo es hacia una línea. Nótese que la figura 3.2 muestra la evolución del modelo *tanto* para el tiempo intrínseco Φ , (figura 3.2a y 3.2b) como para el tiempo síncrono t (figuras 3.2c y 3.2d). El comportamiento del modelo es similar en ambos tiempos y Φ crece monotonamente con t . Esto indica que se puede describir de forma correcta al espaciotiempo empleando cualquiera de los parámetros temporales. En este caso no existen singularidades (para t finito), aunque se puede apreciar (figura 3.2d) que cuando $t \rightarrow \pm\infty$ alguna de las a_i o ϕ tiende a cero con lo que $R \rightarrow \infty$ dando así condiciones para singularidad, pero en el futuro/pasado infinito.

Cuando $C \neq -1$ hay más libertad, ya que en este caso se pueden tener las tres constantes c_i positivas (universo en expansión), todas negativas (universo que colapsa a un punto), o alguna otra combinación (universo evolucionando hacia un plano o hacia una línea). Para casi todos estos casos se tiene que el parámetro de acoplamiento debe cumplir

$$\omega \geq -1, \quad (3.52b)$$

salvo en el caso especial en que una de las c_i sea el negativo de otra, debiéndose cumplir entonces que $\omega \leq 2C$. Tampoco existen singularidades a t finito.

Este es el único modelo de los aquí analizados en el que se obtienen los factores de escala como función de t por lo que no es muy importante la gráfica t vs Φ , la que aún así se muestra en la figura 3.10.

Bianchi VI₀

Como en el modelo anterior, en el Bianchi VI₀, el análisis depende del valor que tome la constante D (ecuaciones 3.6–3.10).

Cuando $D = -1$, se obtiene que las constantes $c_2 = c_3 = -1/2$ y el parámetro de acoplamiento queda determinado por ($a_{20} = a_{30}$)

$$\omega = - \left(\frac{4a_{20}^4 + 3}{2} \right). \quad (3.53a)$$

La región de validez para ω depende de lo que valga la constante a_{20} . La relación también se puede interpretar al revés, *i.e.* dada ω , a_{20} queda determinada. En las figuras (figura 3.3a y 3.3b) se puede apreciar que al evolucionar el universo habrá una contracción en una dirección pero sin llegar al colapso y que después se expandirá en todas direcciones. La figura 3.3c muestra la dependencia del tiempo síncrono t con el intrínseco Φ , observándose una función monótona creciente, de la figura 3.3d se puede ver que no hay singularidades para este caso.

Cuando $D \neq -1$, ya no es posible determinar explícitamente ninguna constante, todo queda en función del valor que tome D . En este caso, la constante $c_2 = c_3 = (D - 1)/4$, y el parámetro de acoplamiento apropiado también depende del valor que tome la constante A_1

$$\omega = A_1(D + 1) + \left(\frac{D - 1}{2}\right) \left(\frac{D + 7}{4}\right), \quad (3.53b)$$

que, como en el caso anterior, también puede servir para determinar una de las constantes en términos del parámetro de acoplamiento.

Bianchi II

En este modelo, al introducir las constantes apropiadas en la expresión (3.12) solo una de las soluciones es aceptable. Los casos $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, y $\Delta < 0$ aunque sólo el subcaso que corresponde al seno hiperbólico, no tienen interpretación física, ya que conducen a amplitudes de oscilación complejas, tienen algunos factores multiplicativos complejos o hacen algunos factores de escala negativos. La única solución que se puede considerar con significado físico, es la correspondiente a $\Delta < 0$, correspondiente al coseno hiperbólico (figura 3.4a y 3.4b). Al evolucionar, este modelo se expande en una de sus direcciones hasta un cierto valor máximo para después colapsar, mientras que en las otras dos direcciones siempre se expande. La figura 3.4c muestra la dependencia del tiempo síncrono t con el intrínseco Φ , representada por una función monótona creciente, de la figura 3.4d se puede ver que hay una región con $R \rightarrow \infty$ correspondiendo a $t \rightarrow 0$. En este caso se puede determinar que $\mathcal{B} > -1/4$. La región de validez para el parámetro de acoplamiento queda

$$\omega > \frac{1}{2} \left[1 - 4(c_2 c_3 + c_2 + c_3) \right], \quad (3.54)$$

mientras que las constantes c_2 , c_3 y f quedan libres.

Bianchi VI_h

Los casos $\Delta > 0$, en las soluciones de la ecuación (3.12) no tienen interpretación física, ya que conducen a factores de escala negativos. El resto de las soluciones proporcionadas son físicamente aceptables en este modelo. Al introducir las constantes apropiadas se obtienen las regiones de validez para el parámetro de acoplamiento de la teoría. Una de estas regiones de validez es

$$\omega = - \frac{2(h^2 + h + 1)}{(h + 1)^2}, \quad (3.55a)$$

la que corresponde al caso $\Delta = 0$ y la constante de integración $\mathcal{B} = -1$. La constante h del modelo puede tomar diversos valores, en particular cuando $h = 0$ se reproduce el caso del modelo Bianchi III, cuando $h = 1$ se reduce al modelo Bianchi V. Usando este modelo con h arbitraria se pueden calcular de manera simple los otros dos. Cuando $h = -1$ se obtiene el modelo VI₀ pero, como ya se había mencionado, de estas ecuaciones no se pueden obtener directamente las del modelo VI₀. La segunda región de validez para ω queda

$$\omega > \frac{2(h^2 + h + 1)}{(h + 1)^2}, \quad (3.55b)$$

ésta corresponde al caso $\Delta < 0$ con $\mathcal{B} > -1$. La constante de integración f queda libre.

Para este último caso ($\Delta < 0$) se ilustran los comportamientos evolutivos de los modelos: El modelo Bianchi III (figura 3.5a y 3.5b) donde dos direcciones se expanden hasta un cierto valor y luego se contraen hasta colapsar, mientras que en la tercera dirección se mantiene constante. La dependencia de t con Φ (figura 3.5c) muestra una función monótona creciente y del escalar de curvatura (figura 3.5d) se pueden ver regiones donde $R \rightarrow -\infty$ que corresponden a $t \rightarrow 0$ y a $t \sim 15$ tiempos síncronos finitos para ambas regiones. En el modelo Bianchi V (figura 3.6a

y 3.6b), en dos de sus direcciones se presenta expansión, en una de ellas lineal, y la otra sólo se expande hasta un cierto valor para después colapsar; en la tercera dirección se presenta una contracción permanente. La dependencia de t con Φ (figura 3.6c) representada por una función monótona creciente y del escalar de curvatura (figura 3.6d) se puede apreciar que hay regiones donde $R \rightarrow -\infty$ que corresponden a $t \rightarrow 0$ y $t \sim 2$ tiempos síncronos finitos. En el modelo Bianchi VI_h (figura 3.7a y 3.7b), las tres direcciones evolucionan de manera similar aunque no idéntica. Al contrario de lo que se había estado manifestando en algunas direcciones para varios de los modelos (II, III, V), en éste hay un colapso hasta un cierto instante, después del cual se expanden, como se presentó en el modelo VI_0 . La dependencia de t con Φ (figura 3.7c) muestra una función monótona creciente y del escalar de curvatura (figura 3.7d) se puede ver que $R \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow 0$ y $t \sim 5$ tiempos síncronos finitos.

En todos estos modelos se cumple $R \rightarrow \infty$ cuando el parámetro afín toma un valor finito $t \rightarrow 0$, por lo que satisface las condiciones para la existencia de singularidad en estos modelos.

Bianchi VII_0

Para este modelo, al igual que para el II, al introducir las constantes apropiadas en la expresión (3.12), solo una de las soluciones se puede interpretar físicamente. Los casos $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, y $\Delta < 0$ pero sólo en el subcaso correspondiente al seno hiperbólico, no se pueden considerar como soluciones físicas ya que conducen a amplitudes de oscilación complejas, tienen algunos factores multiplicativos complejos, o hacen algunos factores de escala negativos. La única solución que se puede considerar con significado físico es la correspondiente $\Delta < 0$ con el coseno hiperbólico (figura 3.8a y 3.8b). Al evolucionar este modelo, las tres direcciones tienen un comportamiento similar pero no idéntico. Las tres direcciones se expanden hasta ciertos valores (todos diferentes) para después contraerse hasta el colapso. La dependencia de t con Φ (figura 3.8c) muestra una función monótona creciente y del escalar de curvatura (figura 3.8d) se puede ver que se cumple la condición $R \rightarrow -\infty$ para los valores del tiempo síncrono $t \rightarrow 0$ y $t \sim 3.5$ por lo que se tiene singularidad en el modelo. En este caso se puede determinar $\mathcal{B} > -1/4$

mientras que la región de validez para los valores del parámetro de acoplamiento queda

$$\omega > -\frac{3}{2}, \quad (3.56)$$

en este caso quedan libres c_0 y f .

Bianchi VIII y IX

Estos modelos, aún con la restricción que se impuso de hacer dos de sus factores de escala iguales, son los mas complicados. Para el primer factor de escala (a_1 , igual en ambos modelos), al substituir las constantes apropiadas, solo tiene significado físico el caso de $\Delta < 0$ en el subcaso del coseno hiperbólico (figura 3.9a y 3.9b). Las otras soluciones (ecuación 3.12) no tienen interpretación física.

Al obtener la dependencia analítica para el tiempo t como función de Φ (ecuación 3.41), el caso $\Delta > 0$ de lugar a factores de escala negativos, y el caso $\Delta = 0$ a factores de escala complejos, pero sólo en el modelo IX en el que no tienen sentido físico, por lo que no se consideran. Así, se pueden escribir las restricciones para el parámetro de acoplamiento en cada caso

$$\omega = \begin{cases} -\frac{3}{2}, & \Delta = 0, \quad \mathcal{B}_2 = -1 \\ -2(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + 2). & \Delta < 0, \quad \mathcal{B}_2 > -1 \end{cases} \quad (3.57)$$

donde $\mathcal{B}_1 > -1/4$ para todos los casos. En esta última ecuación aparece el valor $\omega = -3/2$ que es un valor problemático en la teoría JBD con materia como se puede ver de la ecuación (2.11); sin embargo, al trabajar en vacío dicha ecuación se transforma en una identidad aún para ese valor de ω . Las figuras 3.9a y 3.9b muestran el comportamiento de ambos modelos para el caso $\Delta < 0$, correspondiente al coseno hiperbólico en ambos factores de escala. El comportamiento del universo indica que en dos direcciones hay una expansión hasta que se alcanza un cierto valor máximo para después colapsar, mientras que en la tercera hay una contracción hasta un valor mínimo para después expandirse de nuevo; los valores máximo y mínimo en los que cambia el comportamiento en las diferentes direcciones nunca son iguales en este caso específico. De la figura 3.9c se puede apreciar

nuevamente que la dependencia de t con Φ es monótona creciente. La expresión para el escalar de curvatura (figura 3.9d) muestra una región donde $R \rightarrow \infty$ que corresponde a valores finitos del parámetro afín $t(\sim \pm 2)$. La conclusión es que este modelo también presenta singularidades.

Pies de figuras

Capítulo 3

Figura 3.1

a) Se muestran los factores de escala de la expresión (3.2) para el modelo Bianchi I, como función del tiempo reescalado Φ . El parámetro de acoplamiento fué $\omega = -50/9$ y se usaron los valores $a_{i0} = 1$, $c_1 = 1/3$, $c_2 = 2/3$, $c_3 = -2$ y $C = -1$.

b) Se muestra el comportamiento global de los factores de escala. Por global queremos decir que se ha representado su comportamiento en un intervalo infinito, en este caso para Φ desde 0 hasta ∞ , al mapear su comportamiento, mediante la transformación $\arctan(x)$, al intervalo $(0, 1)$.

Figura 3.2

a) En el modelo Bianchi I con parámetro de acoplamiento $\omega = -500$ y valores para las constantes $a_{i0} = 1$, $c_1 = -1 - 3c_3$, $c_2 = 2c_3$, $c_3 = 5.75$ y $C = -1$, se grafican los factores de escala como función del tiempo reescalado Φ .

b) Se muestra el comportamiento global del modelo en las mismas condiciones de 3.2a. Comparando la evolución de los factores de escala mostrada aquí, con la evolución que muestran las figuras 3.1, podemos notar que ω juega un papel crucial.

c) Como éste es el único modelo en que podemos expresar el tiempo reescalado Φ como función del tiempo síncrono t , se muestran tanto los factores de escala a_i como el campo escalar ϕ , como función de t .

d) Se muestra el comportamiento global del modelo Bianchi I (tanto las a_i como ϕ) en función del tiempo síncrono t .

Figura 3.3

a) El modelo Bianchi VI₀ con parámetro de acoplamiento $\omega = -500$ y valores para las constantes $a_{20} = a_{30} = 3.97$, $c_2 = c_3 = -1/2$, $A_1 = A_3 = 1$ y $D = -1$, se

grafican los factores de escala como función del tiempo reescalado Φ .

b) Se muestra el comportamiento global del mismo modelo.

c) La dependencia del tiempo síncrono t como función del tiempo intrínseco Φ se presenta en esta figura, los valores que cubre son $-\infty < t < \infty$ y $0 < \Phi < \infty$, se hizo un cambio de variable para apreciar la figura.

d) Para el escalar de curvatura representado aquí se tiene $0 < R < \infty$ y $0 < \Phi < \infty$. No hay singularidad en este modelo.

Figura 3.4

a) En el modelo Bianchi II con parámetro de acoplamiento $\omega = -500$ se tomó el caso $\Delta < 0$ y valores para las constantes $a_{20} = a_{30} = 1$, $c_2 = 2c_3$, $c_3 = 10.48$, $\mathcal{B} = 3/4$, $g_+ = 1$ y $f = 1$, se graficaron los factores de escala como función del tiempo reescalado Φ .

b) Se muestra el comportamiento global del mismo modelo.

c) La dependencia del tiempo síncrono t como función del tiempo intrínseco Φ se presenta en esta figura, los valores permitidos para las variables son $0 < t < \infty$ y $0 < \Phi < \infty$, mostrando una función monótona creciente.

d) Para el escalar de curvatura representado aquí se tiene $0 < R < \infty$ y $0 < \Phi < \infty$, donde la función representada es monótona decreciente. La región de singularidad $R \rightarrow \infty$ corresponde a $t \rightarrow 0$, finito.

Figura 3.5

a) En el modelo Bianchi III con parámetro de acoplamiento $\omega = 500$ se tomó el caso $\Delta < 0$ y valores para las constantes $a_{30} = 0.5$, $c_3 = 0$, $c_0 = -1$, $\mathcal{B} = 250$, $g_+ = 11.20$ y $f = 1$, se graficaron los factores de escala como función del tiempo reescalado Φ .

b) Se muestra el comportamiento global del mismo modelo.

c) La dependencia del tiempo síncrono t como función del tiempo intrínseco Φ se muestra en esta figura, los valores permitidos para las variables son $0 < t < \sim 15$ y $0 < \Phi < \infty$, mostrando una función monótona creciente, sin embargo t se mantiene constante para $\Phi < 0.5$ y $\Phi > 1.5$.

d) Para el escalar de curvatura representado aquí se tiene $-\infty < R < 0$ y $0 < \Phi < \infty$. La región de singularidad $R \rightarrow -\infty$ corresponde a $t \rightarrow 0$ para Φ pequeñas y $t \sim 15$ para Φ grandes. La región para R es negativa debido a la elección del parámetro de acoplamiento ω .

Figura 3.6

a) El modelo Bianchi V con parámetro de acoplamiento $\omega = 500$ se tomó el caso $\Delta < 0$ y valores para las constantes $a_{20} = a_{30} = 1$, $c_2 = -c_3 = 1$, $\mathcal{B} = 333.33$, $g_+ = 6.46$, $a_{10} = c_1 = 1$ y $f = 1$, se graficaron los factores de escala como función del tiempo reescalado Φ .

b) Se muestra el comportamiento global del mismo modelo.

c) La dependencia del tiempo síncrono t como función del tiempo intrínseco Φ se muestra en esta figura, los valores permitidos para las variables son $0 < t < \sim 2$ y $0 < \Phi < \infty$, mostrando una función monótona creciente, sin embargo t se mantiene constante para $\Phi < 0.5$ y $\Phi > 1.5$.

d) Para el escalar de curvatura representado aquí se tiene $-\infty < R < 0$ y $0 < \Phi < \infty$. La región de singularidad $R \rightarrow -\infty$ corresponde a $t \rightarrow 0$ para Φ pequeñas y $t \sim 2$ para Φ grandes. La región para R es negativa debido a la elección del parámetro de acoplamiento ω .

Figura 3.7

a) Para el modelo Bianchi VI_h con parámetro de acoplamiento $\omega = 500$, se tomó el caso $\Delta < 0$ y valores para las constantes $c_2 = h+1$, $c_3 = hc_2$, $\mathcal{B} = [250(h+1)^2/(h^2+h+1)] - 2$, $g_+ = \sqrt{[250(h+1)^2 - h^2 - h - 1]/[2(h^2+h+1)(h+1)^2]}$, $A_0 = (h^2+1)/(h+1)$, $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$ y $f = 1$, se graficaron los factores de escala como función del tiempo reescalado Φ . En el caso particular que se muestra aquí usamos $h = 2$.

b) Se muestra el comportamiento global del mismo modelo.

c) La dependencia del tiempo síncrono t como función del tiempo intrínseco Φ se muestra en esta figura, los valores permitidos para las variables son $0 < t < \sim 5$ y $0 < \Phi < \infty$, mostrando una función monótona creciente, sin embargo t se mantiene constante para $\Phi < 0.5$ y $\Phi > 1.5$.

d) Para el escalar de curvatura representado aquí se tiene $-\infty < R < 0$ y $0 < \Phi < \infty$. La región de singularidad $R \rightarrow -\infty$ corresponde a $t \rightarrow 0$ para Φ pequeñas y $t \sim 5$ para Φ grandes. La región para R es negativa debido a la elección del parámetro de acoplamiento ω .

Figura 3.8

a) En el modelo Bianchi VII₀ con parámetro de acoplamiento $\omega = 500$, se tomó el caso $\Delta < 0$ y valores para las constantes $c_0 = 2$, $\mathcal{B} = 83.33$, $g_+ = 2.13$, y $f = 1$, se graficaron los factores de escala como función del tiempo reescalado Φ .

b) Se muestra el comportamiento global del mismo modelo.

c) La dependencia del tiempo síncrono t como función del tiempo intrínseco Φ se muestra en esta figura, los valores permitidos para las variables son $0 < t < \sim 3.5$ y $0 < \Phi < \infty$, mostrando una función monótona creciente, sin embargo t se mantiene constante para $\Phi < 0.5$ y $\Phi > 1.5$.

d) Para el escalar de curvatura representado aquí se tiene $-\infty < R < 0$ y $0 < \Phi < \infty$. La región de singularidad $R = -\infty$ corresponde a $t = 0$ para Φ pequeñas y $t \sim 3.5$ para Φ grandes. La región para R es negativa debido a la elección del parámetro de acoplamiento ω .

Figura 3.9

a) Factores de escala para los modelos Bianchi VIII y IX que mostramos en una sola gráfica, por su similitud en el caso de la restricción $a_2 = a_3$, impuesta “a dedo”. El parámetro de acoplamiento es $\omega = -500$, se muestra el caso $\Delta < 0$ con constantes: $\mathcal{B}_2 = 2\mathcal{B}_1 = 500$, $g_{1+} = 3.98$, $g_{2+} = 15.83$, y $f_1 = f_2 = 1$. Se muestran los factores de escala como función del tiempo reescalado Φ .

b) Se muestra el comportamiento global del mismo modelo. Si comparamos este comportamiento con el que mostramos en el capítulo 4 para el modelo IX, nos podemos dar cuenta que la imposición hecha no resulta plausible.

c) La dependencia del tiempo síncrono t como función del tiempo intrínseco Φ se muestra en esta figura, los valores permitidos para las variables son $-2 < t < 2$ y $0 < \Phi < \infty$, mostrando una función monótona creciente, sin embargo t se mantiene constante para $\Phi < 0.5$ y $\Phi > 1.5$. Aunque en este modelo se obtienen

intervalos de tiempos negativos t no es suficiente para representar con el tiempo Φ al tiempo síncrono.

d) Para el escalar de curvatura representado aquí se tiene $0 < R < \infty$ y $0 < \Phi < \infty$. La región de singularidad $R = \infty$ corresponde a $t \sim -2$ para Φ pequeñas y $t \sim 2$ para Φ grandes. La región para R es positiva debido a la elección del parámetro de acoplamiento ω como se puede ver de la ecuación (3.51).

Figura 3.10

La dependencia del tiempo síncrono t como función del tiempo intrínseco Φ se presenta en esta figura para el modelo Bianchi I, los valores que cubre son $-\infty < t < \infty$ y $0 < \Phi < \infty$, similar a la mostrada en la figura 3.2d (t vs ϕ) la escala está normalizada.

Pie de tabla

Capítulo 3

Tabla 3.1

Valores específicos para las constantes dependientes de cada uno de los modelos en la solución de t como función de Φ representados por la ecuación (3.13) del *Grupo II* de soluciones en cuadraturas.

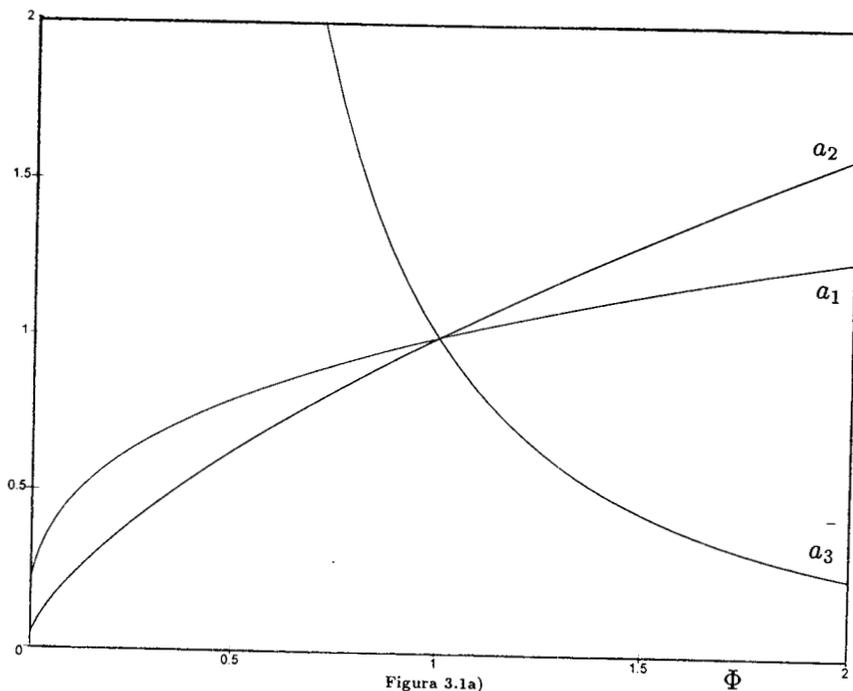


Figura 3.1a)

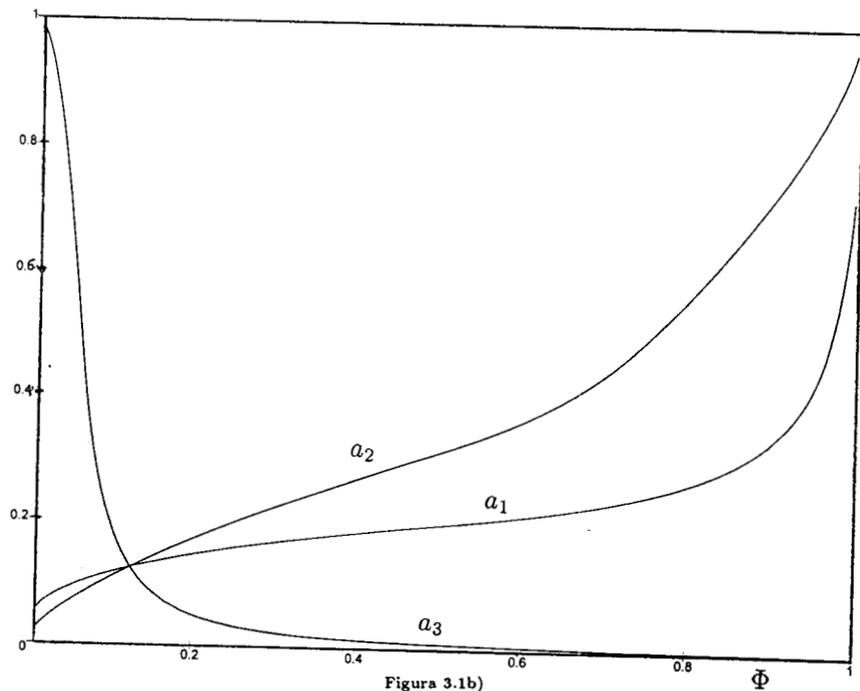
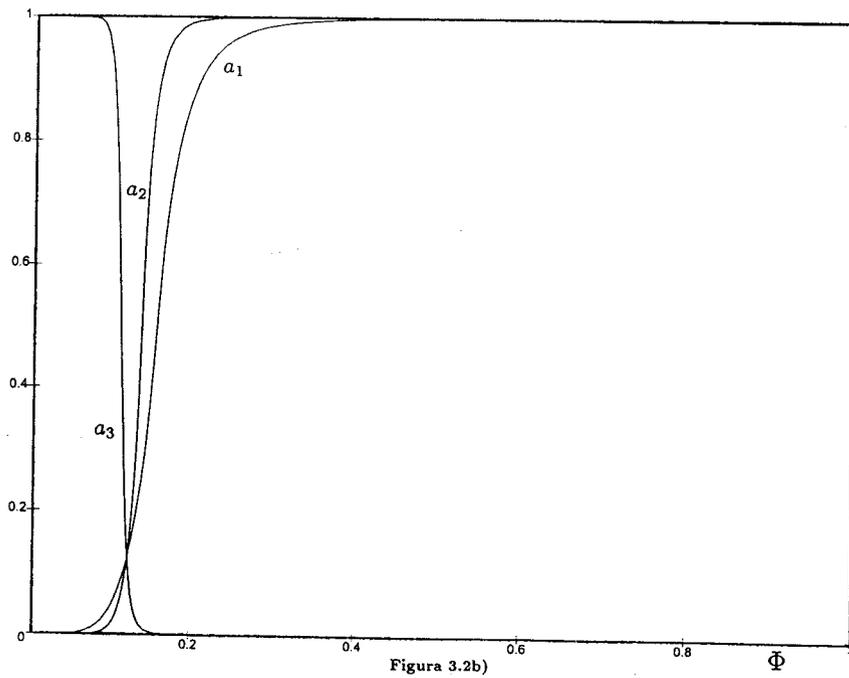
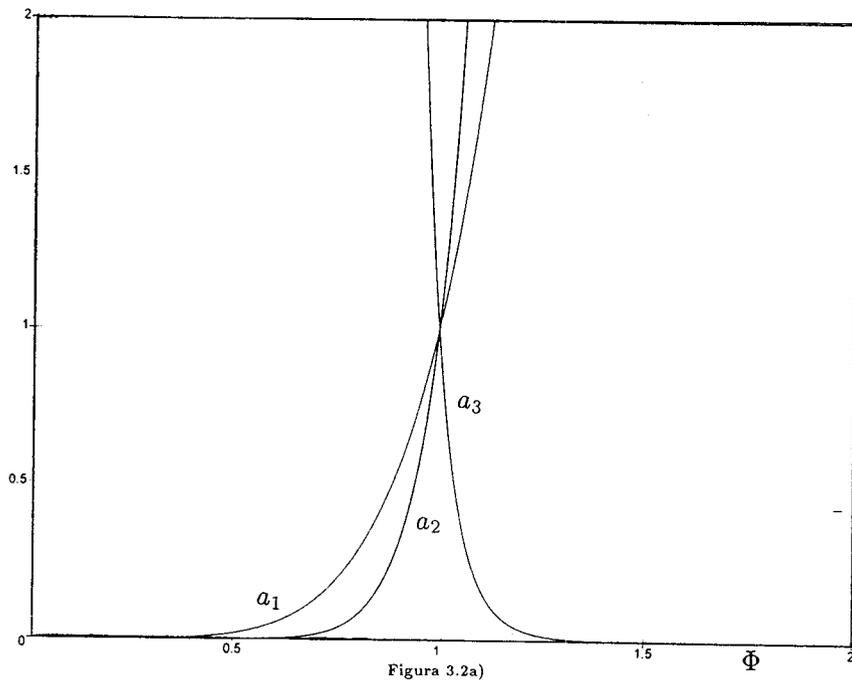
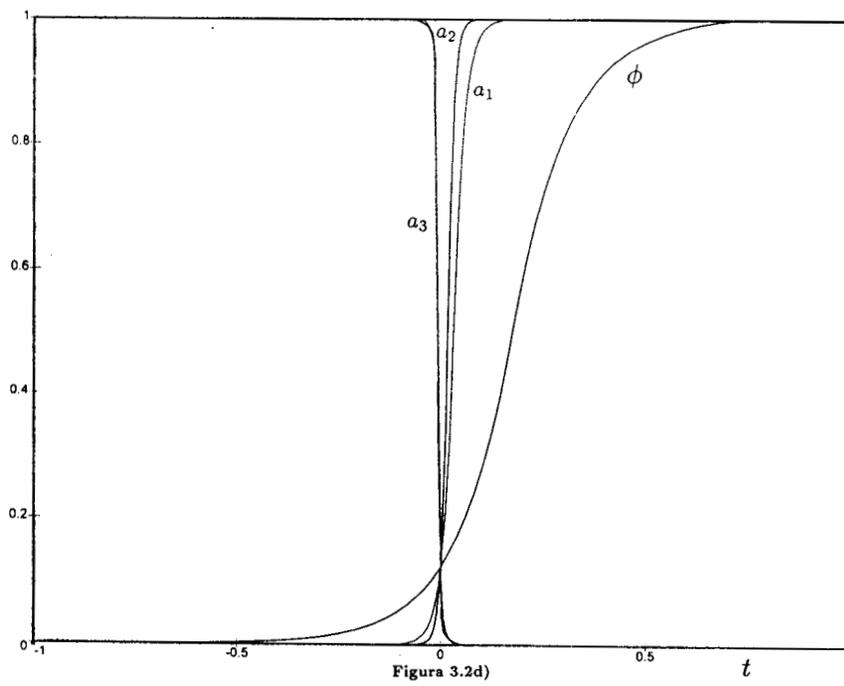
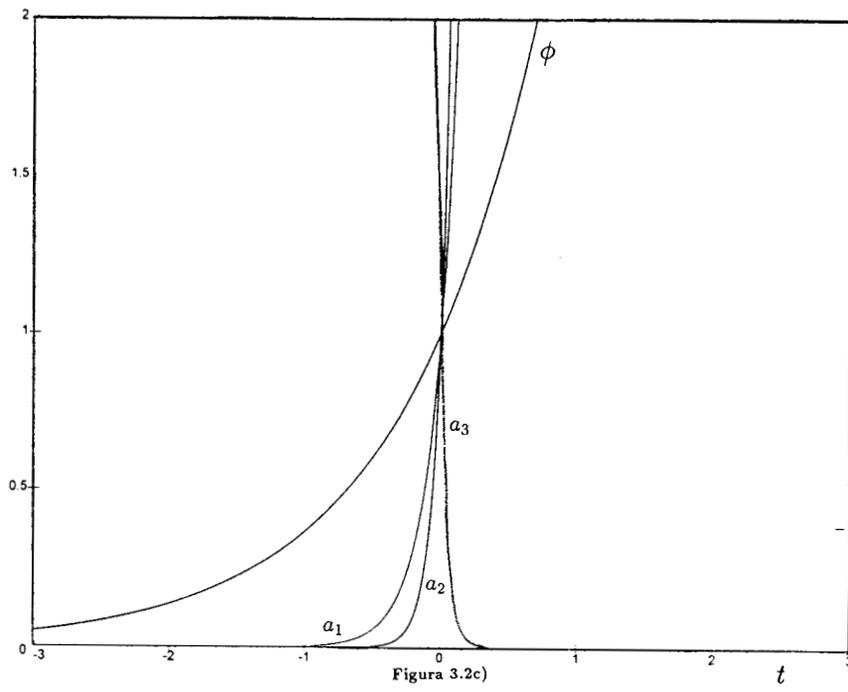


Figura 3.1b)





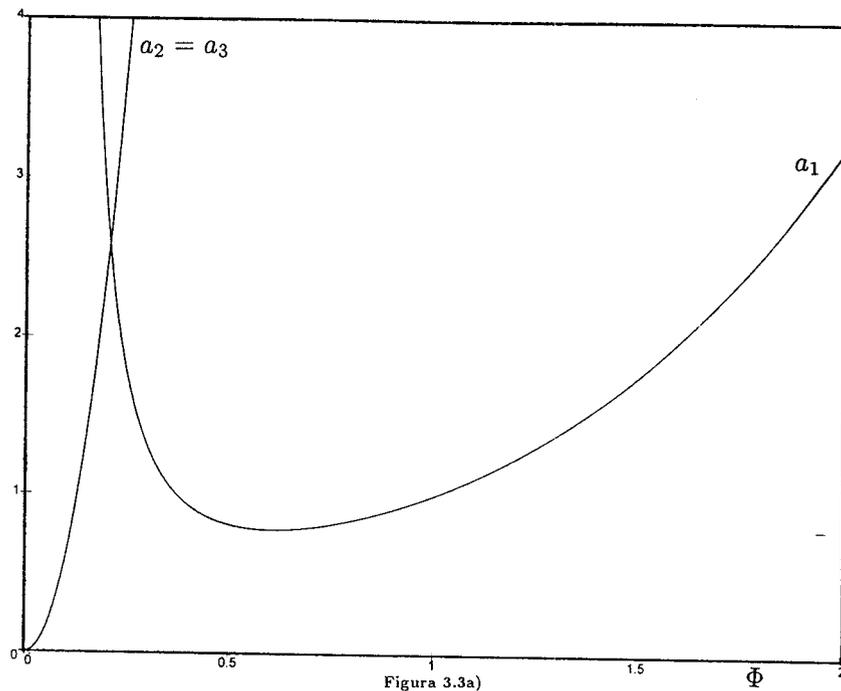


Figura 3.3a)

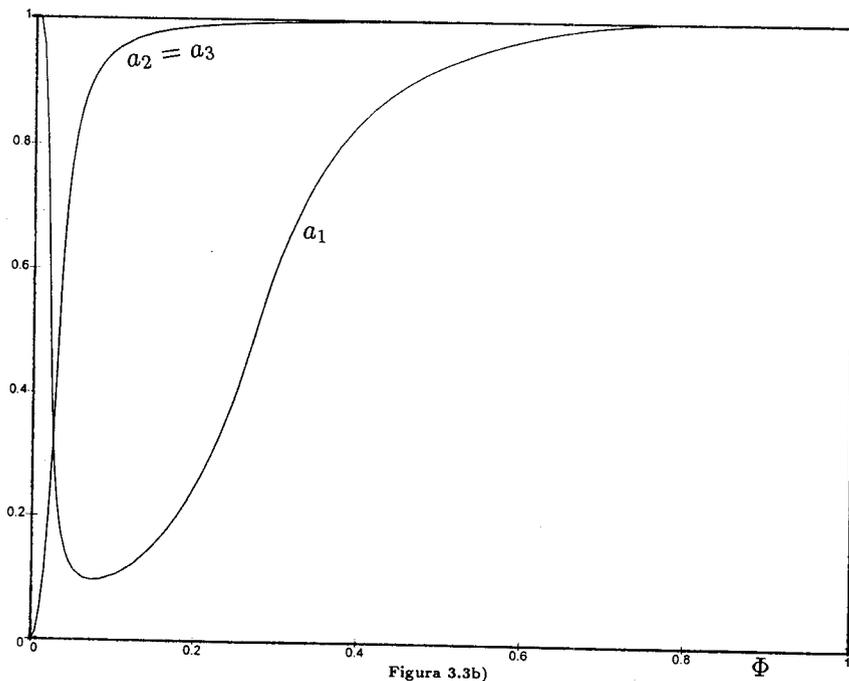


Figura 3.3b)

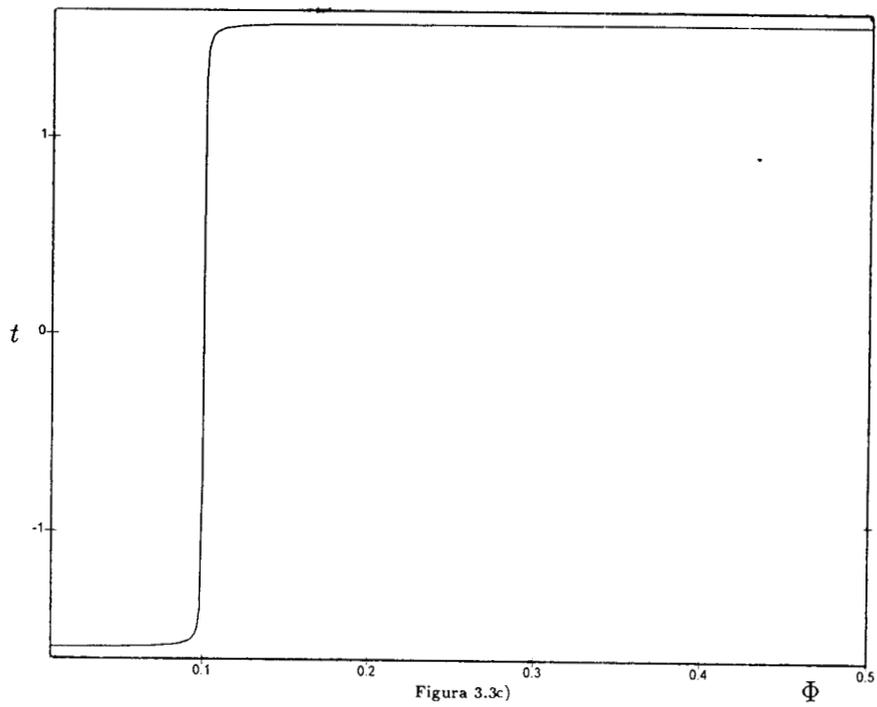


Figura 3.3c)

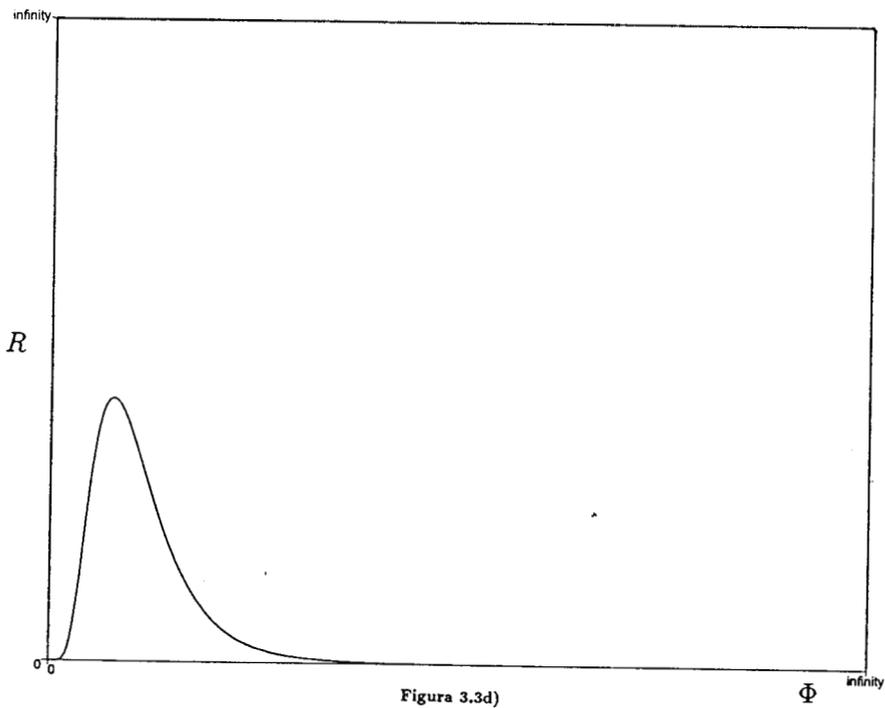
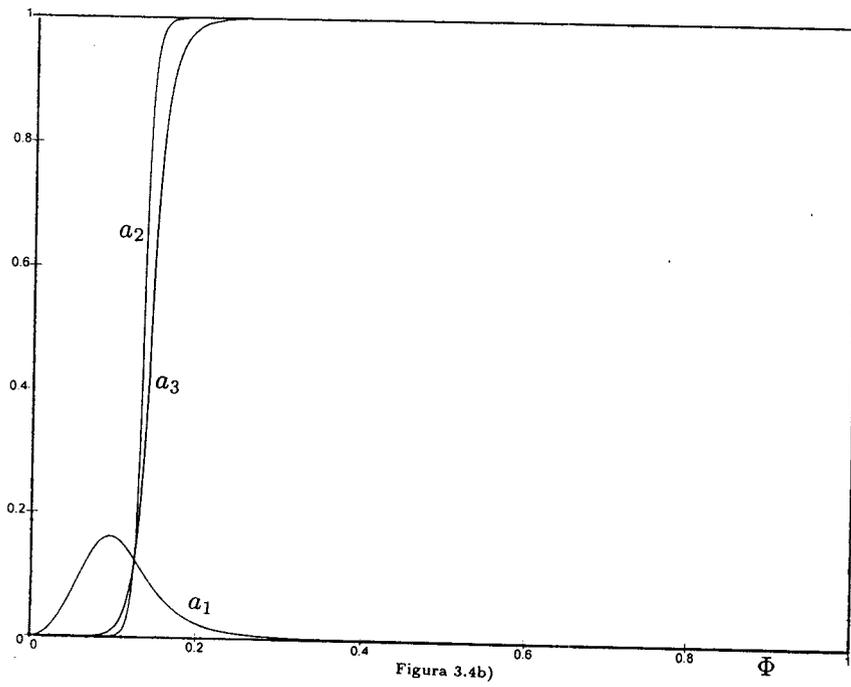
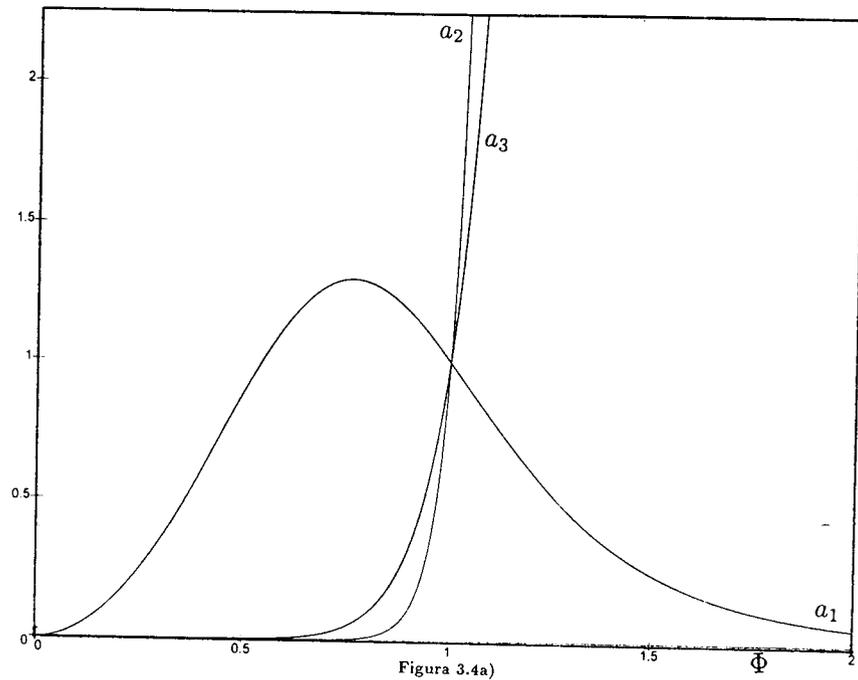


Figura 3.3d)



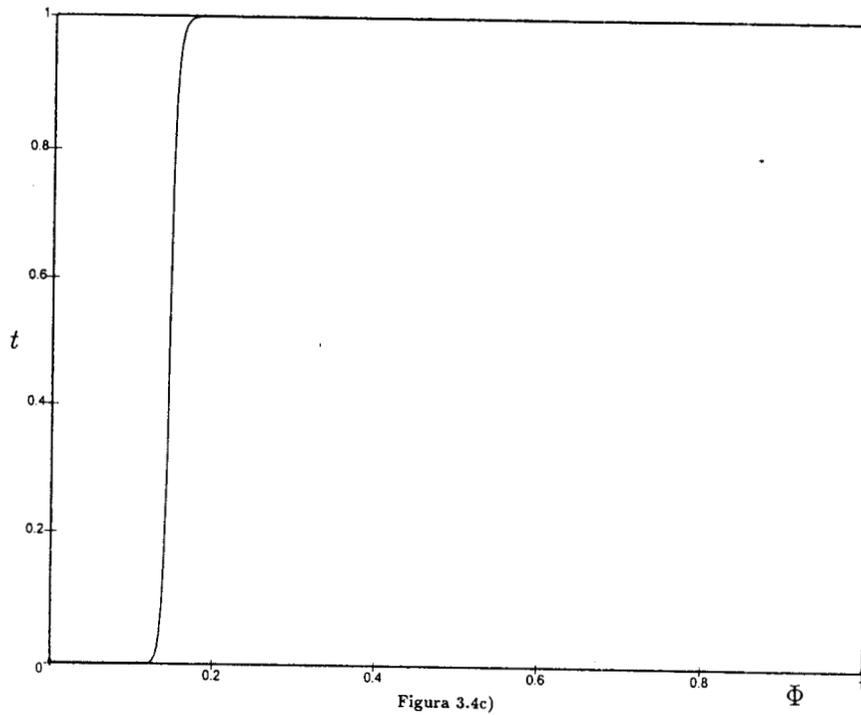


Figura 3.4c)

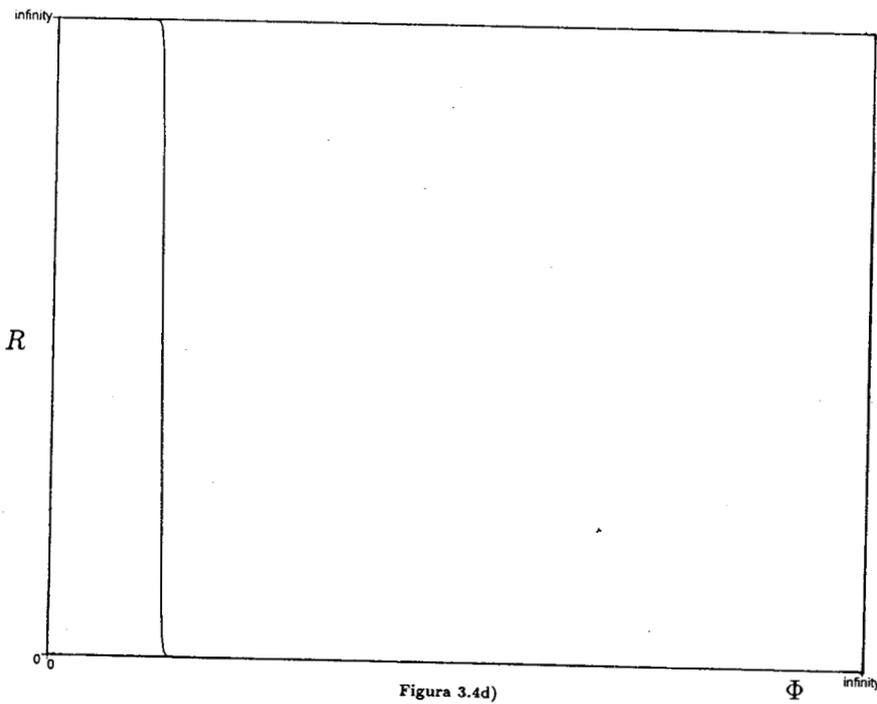
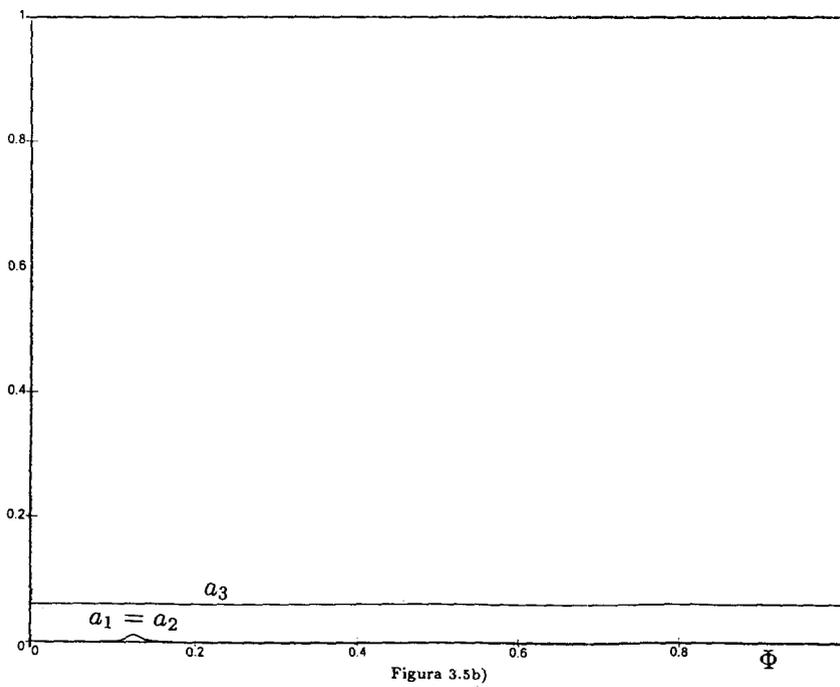
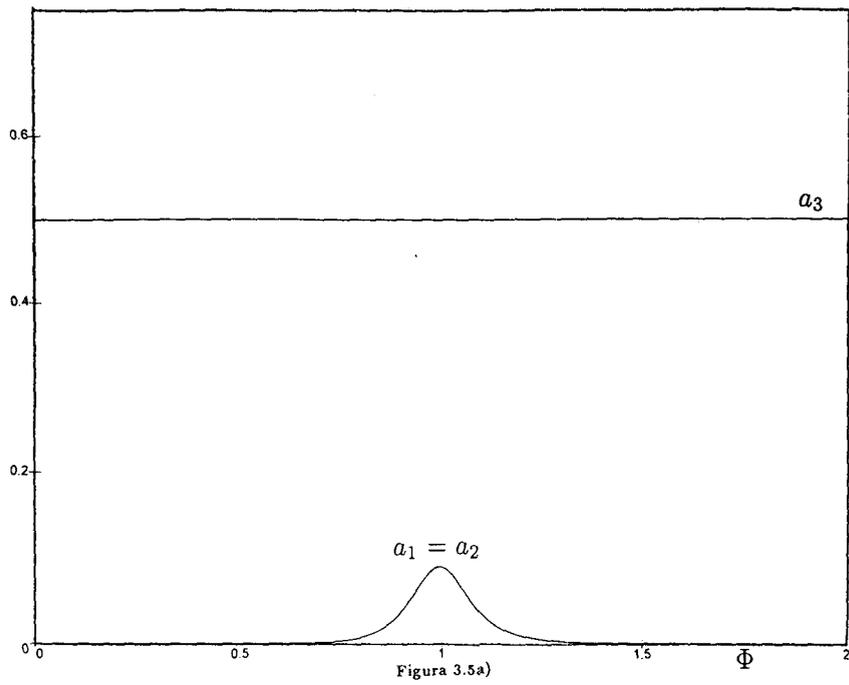


Figura 3.4d)



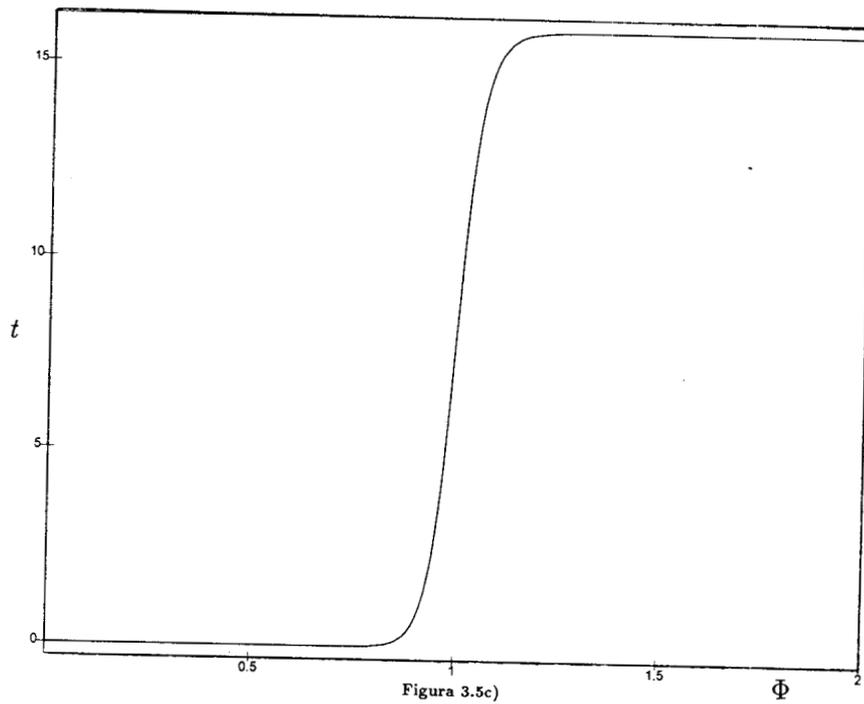


Figura 3.5c)

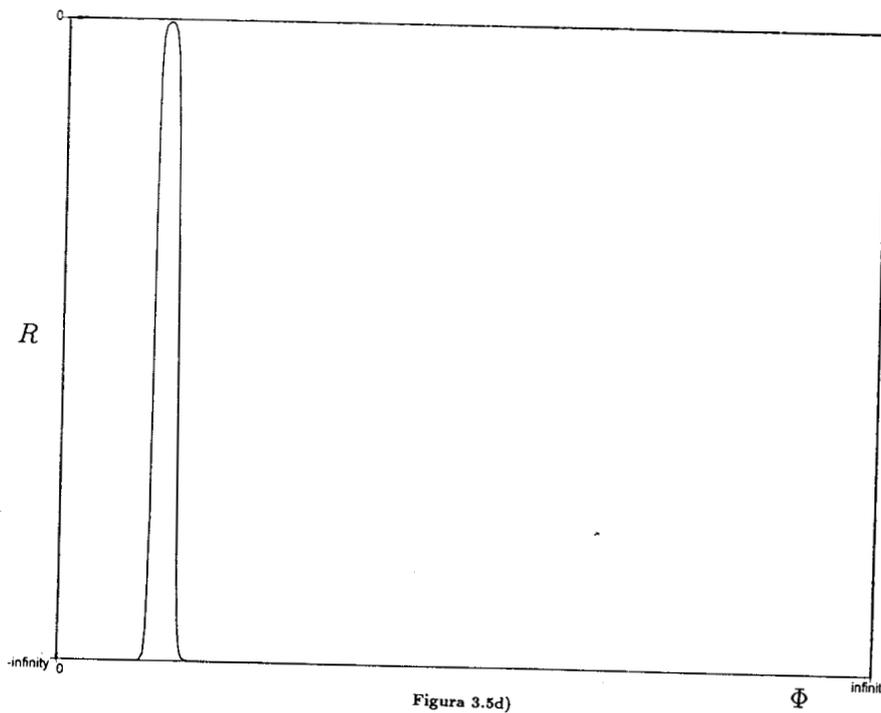


Figura 3.5d)

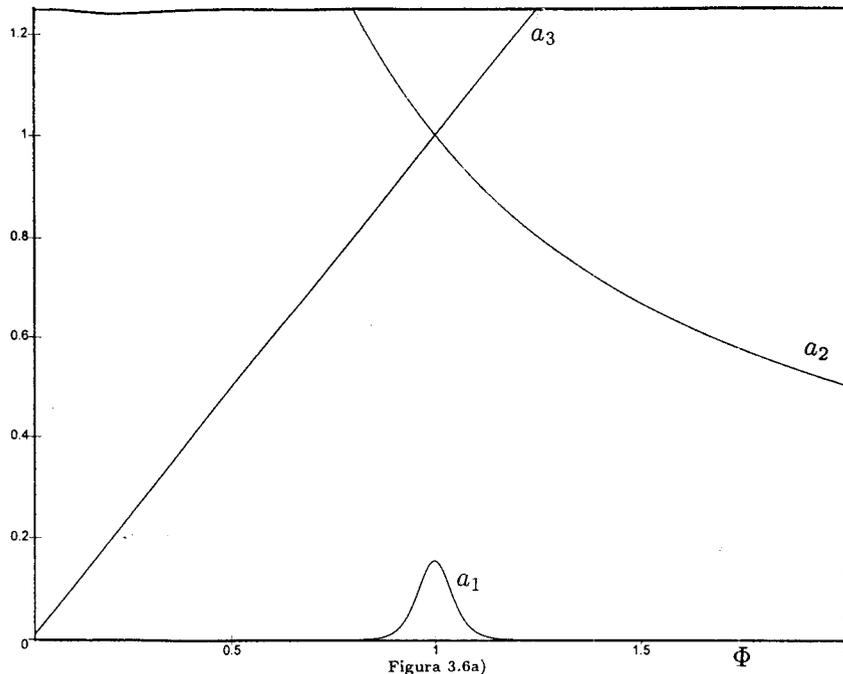


Figura 3.6a)

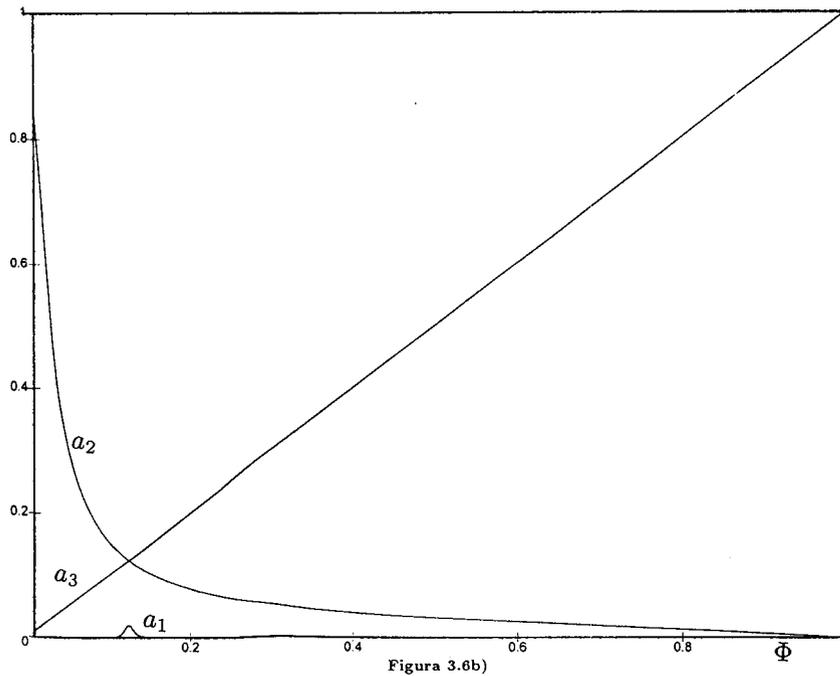


Figura 3.6b)

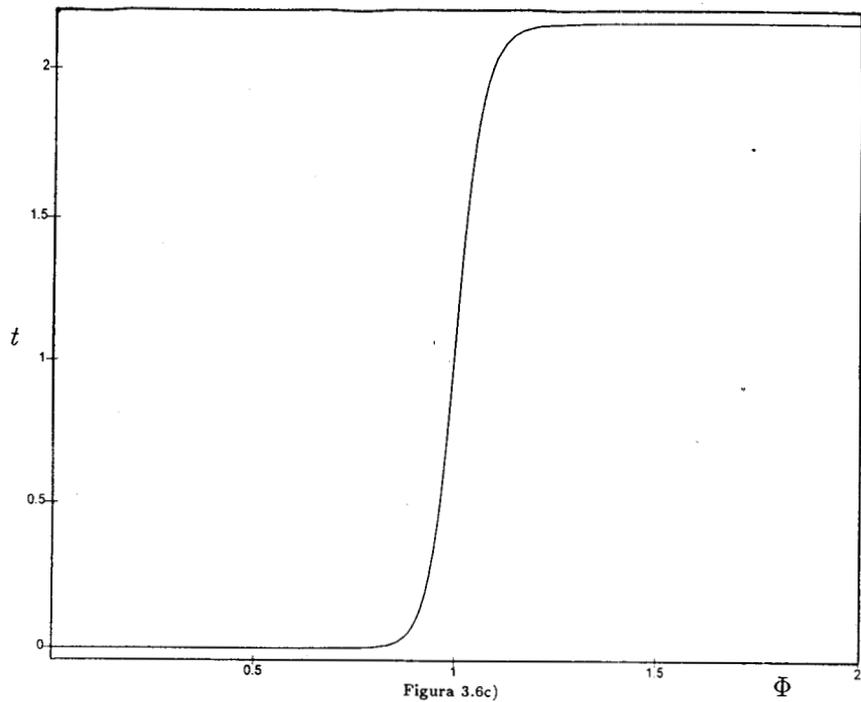


Figura 3.6c)

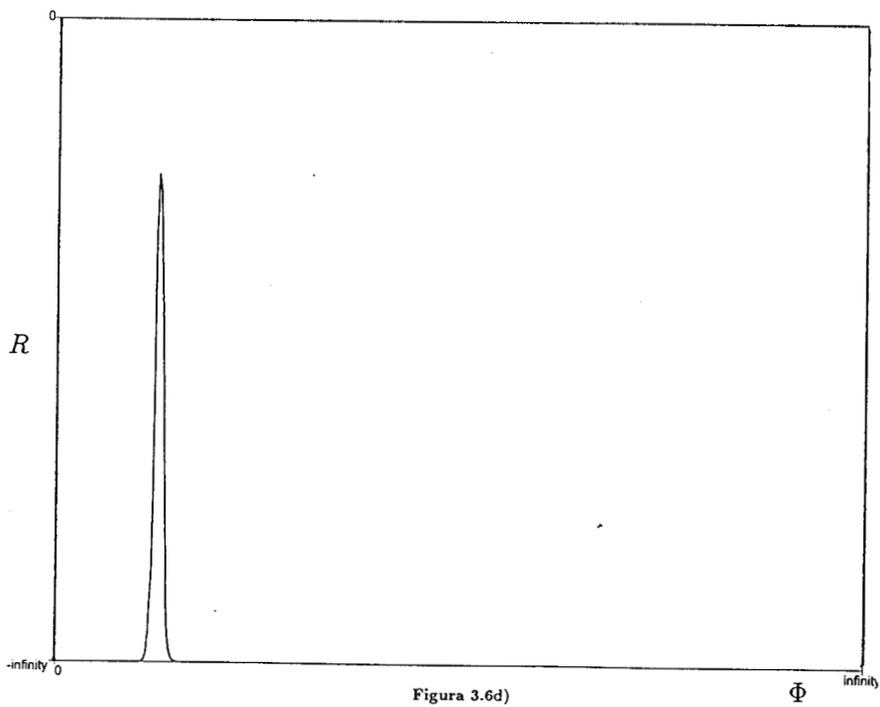


Figura 3.6d)

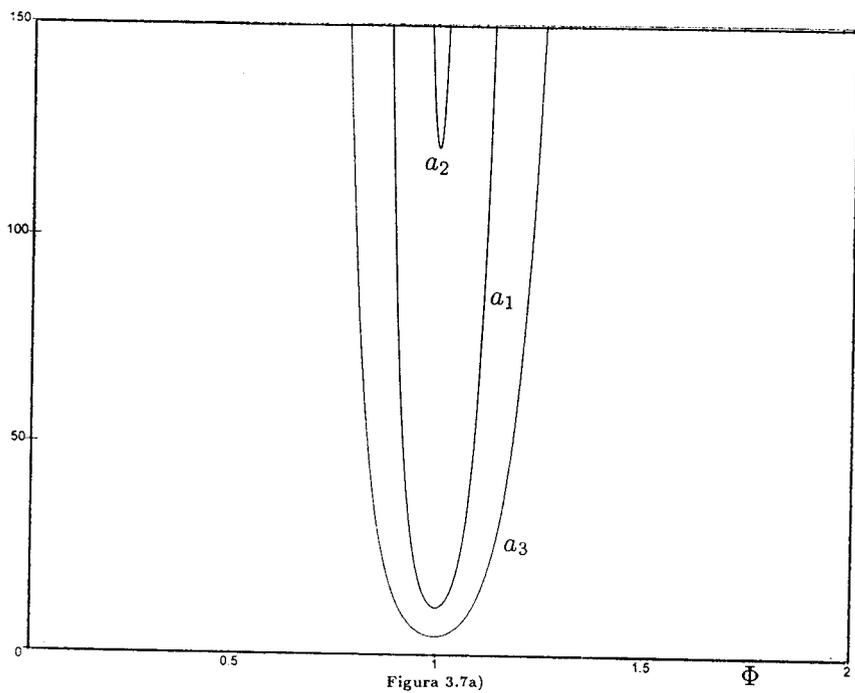


Figura 3.7a)

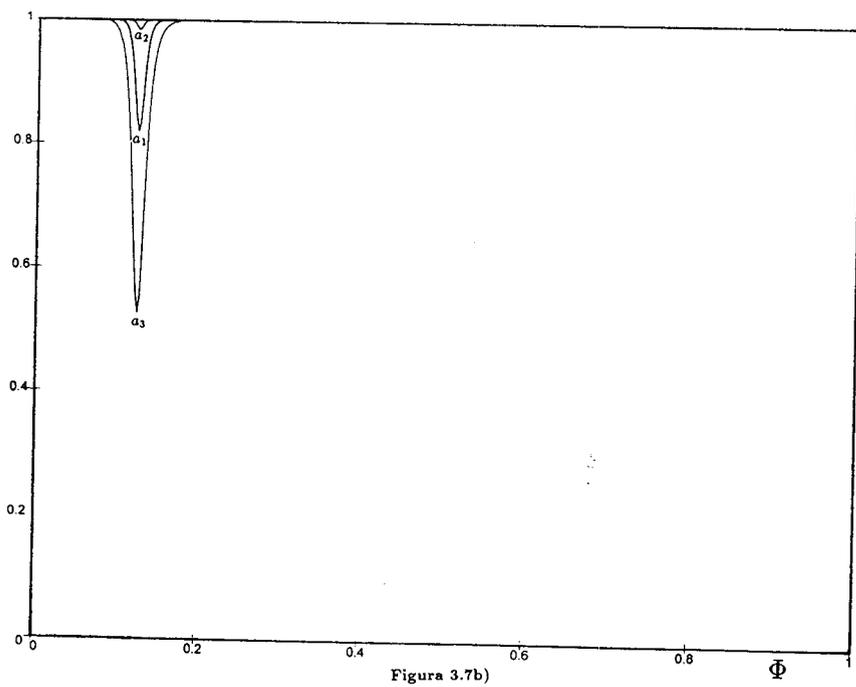


Figura 3.7b)

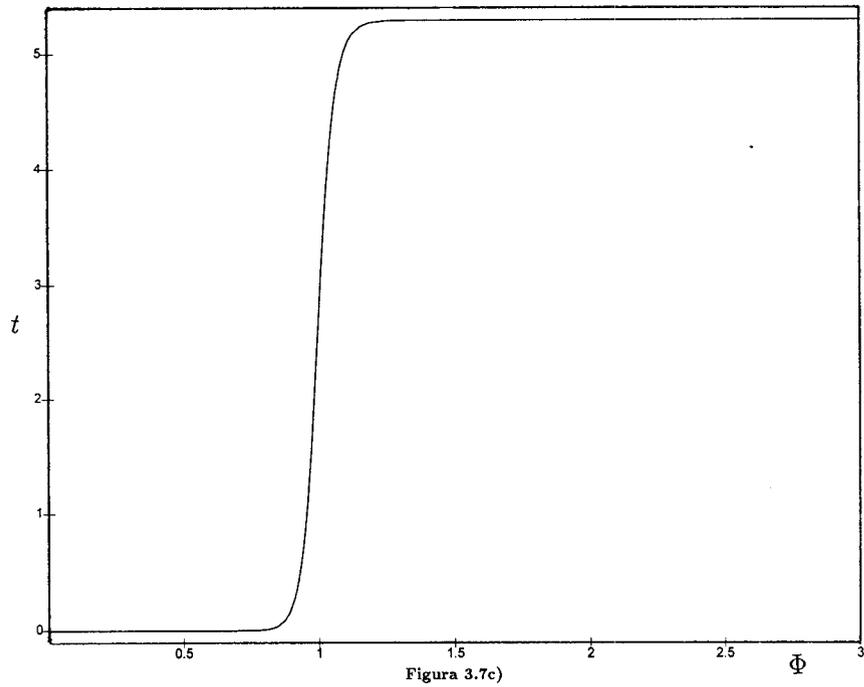


Figura 3.7c)

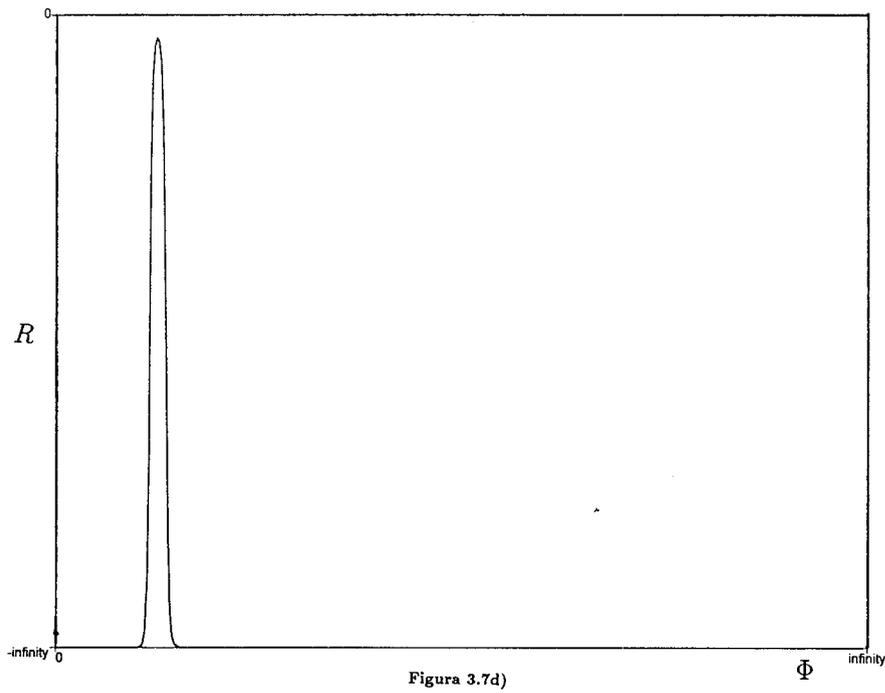
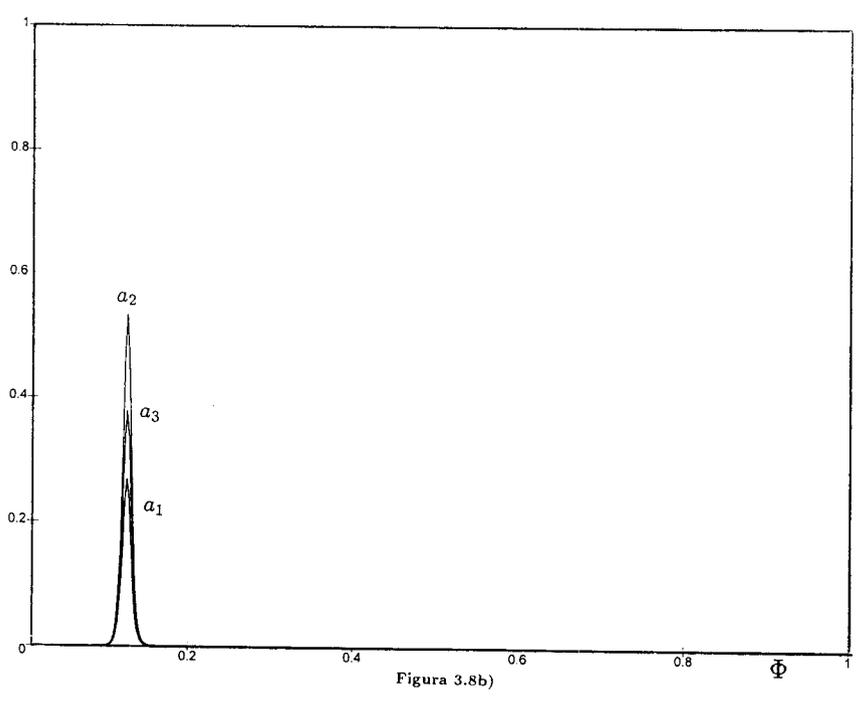
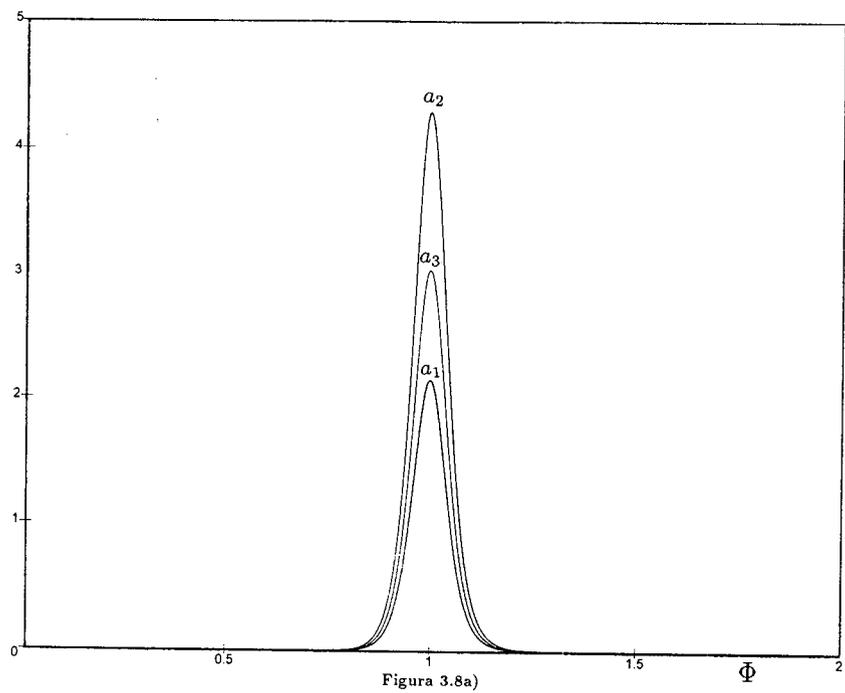
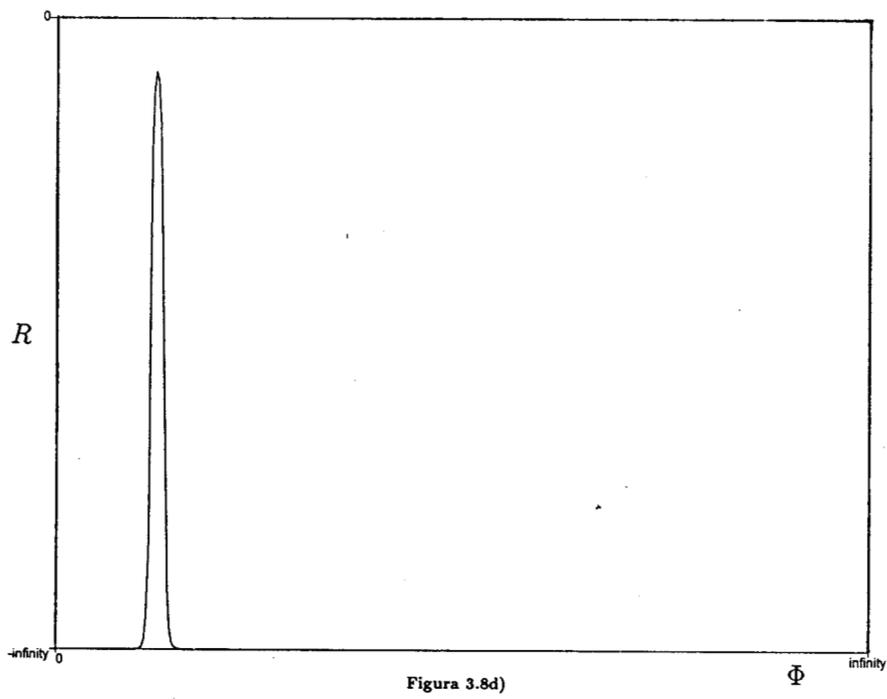
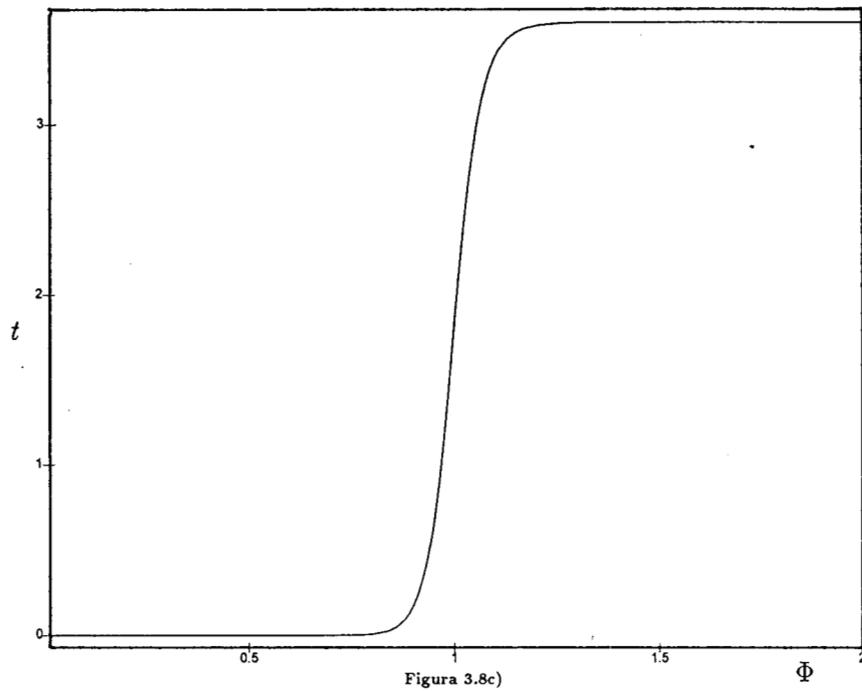
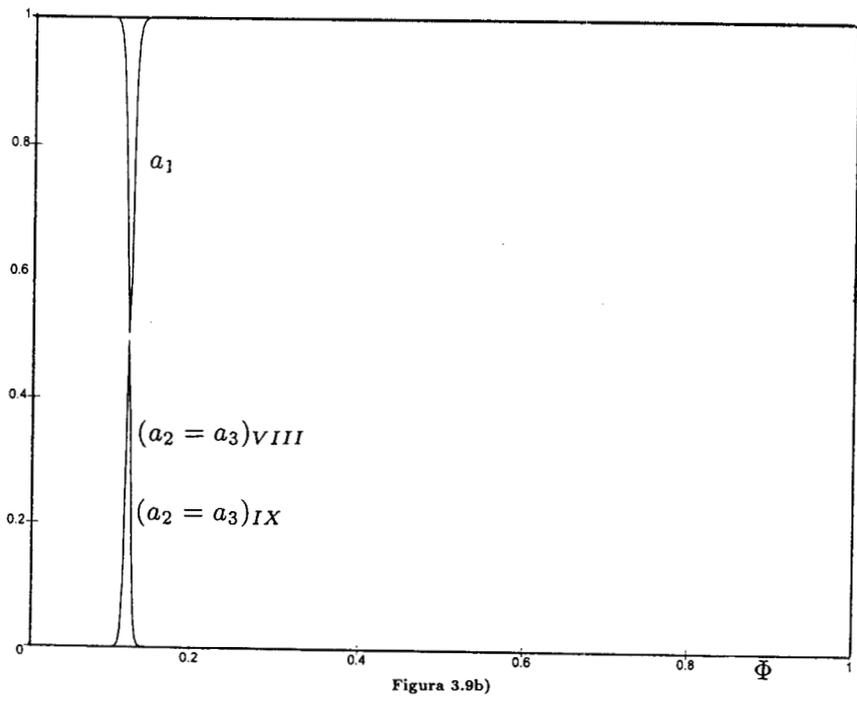
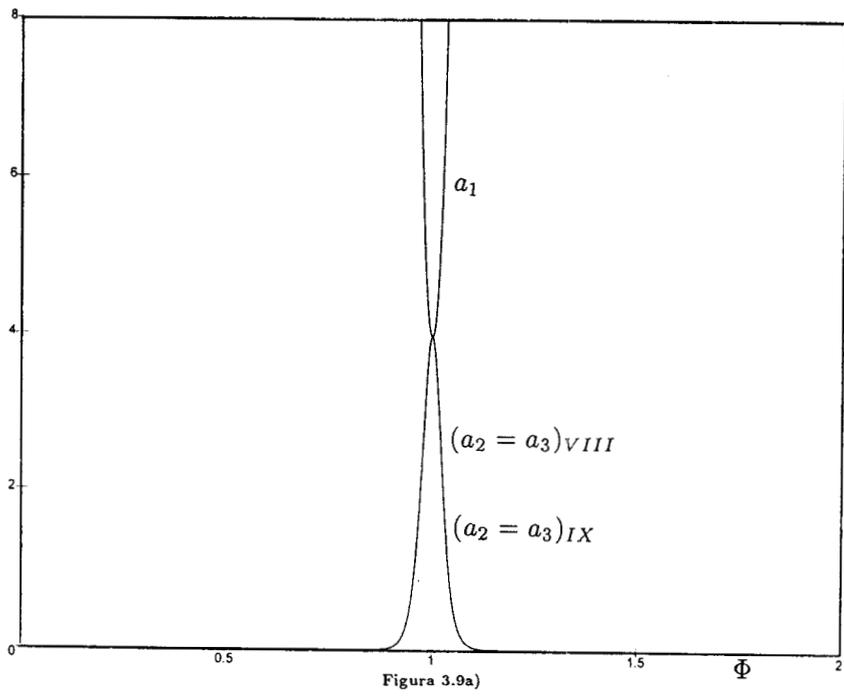


Figura 3.7d)







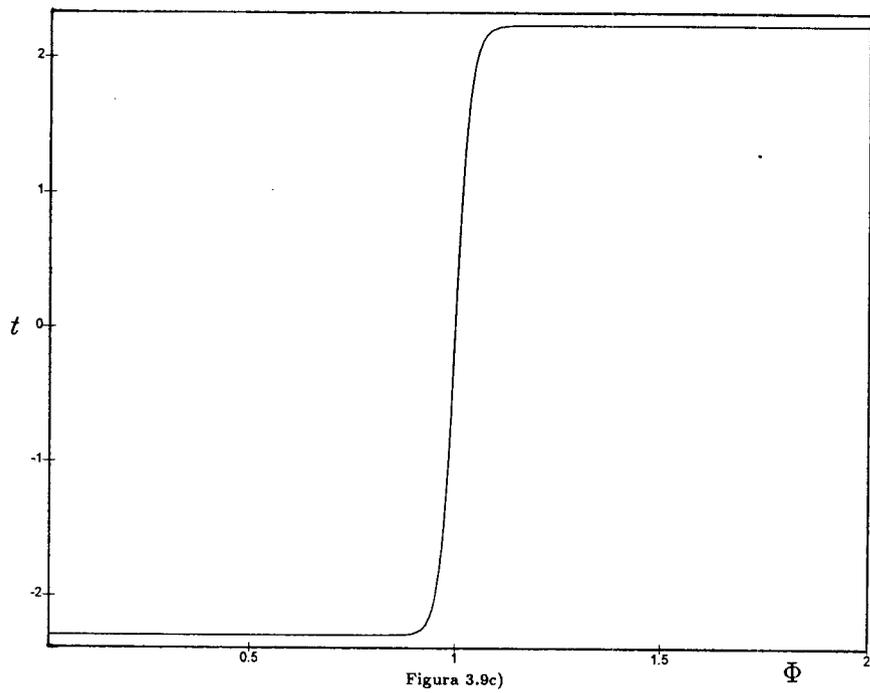


Figura 3.9c)

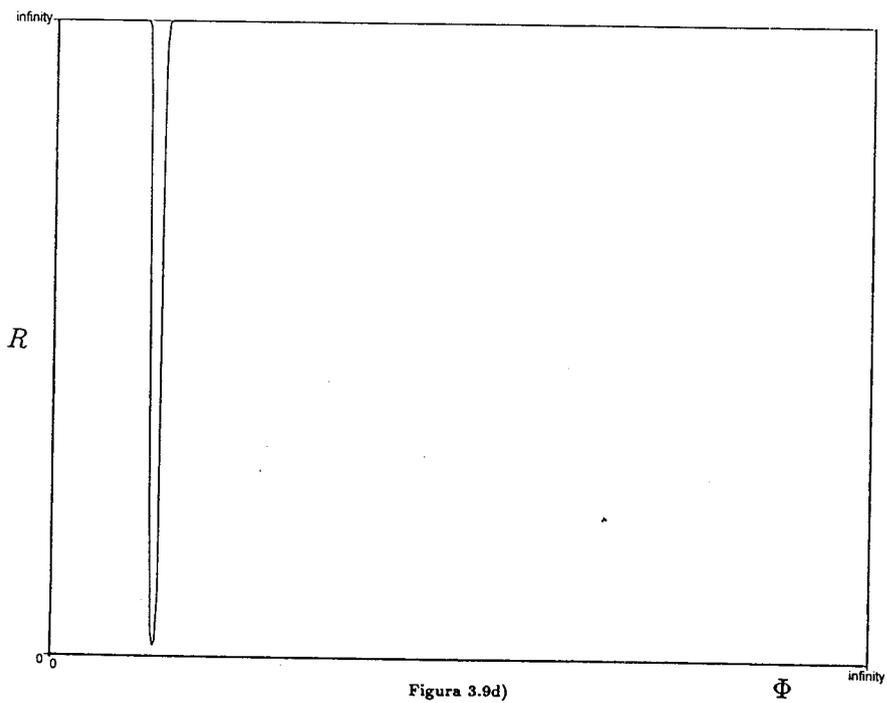


Figura 3.9d)

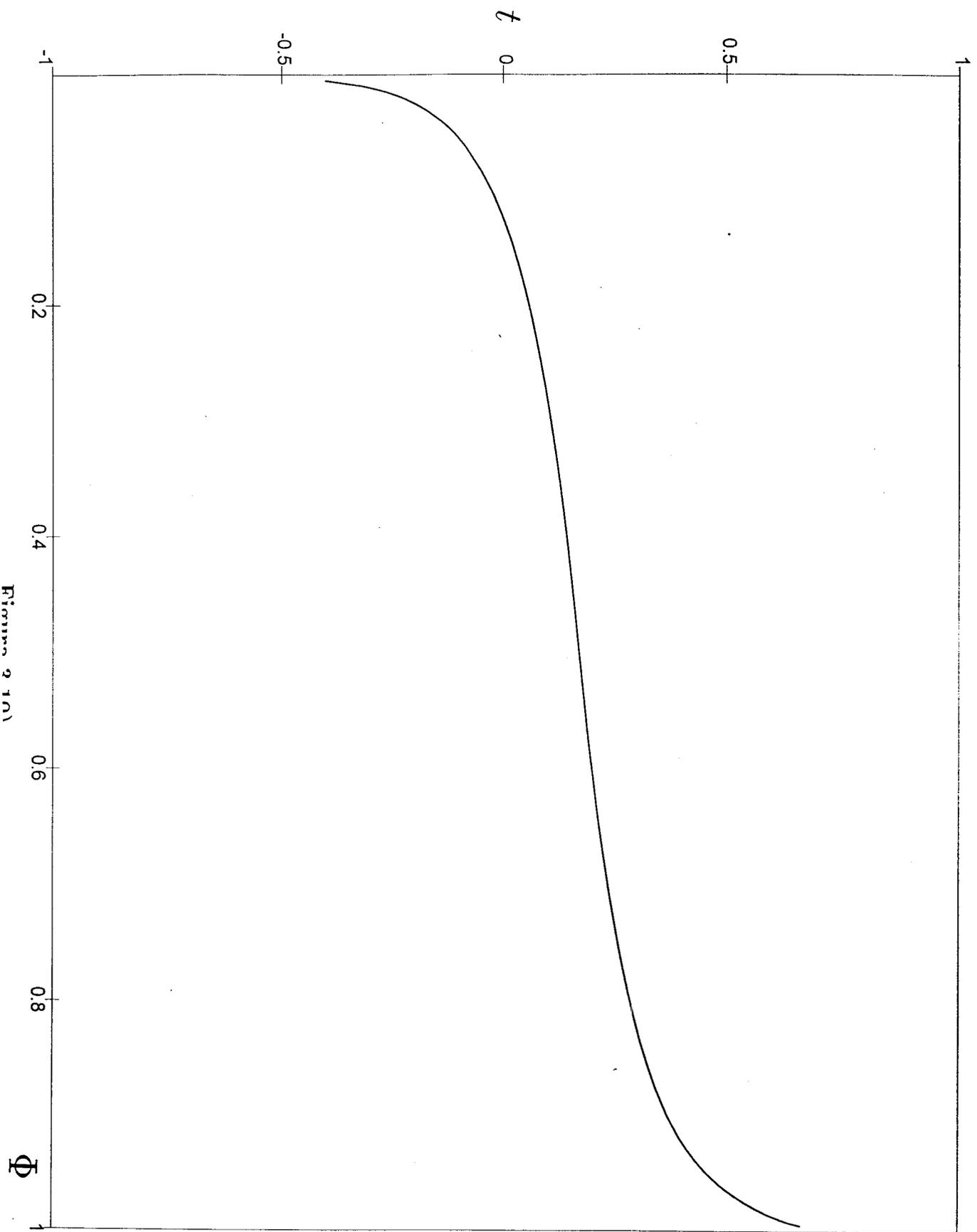


Figure 2 (a)

Tabla 3.1

Coeficientes constantes para la ecuación (3.13)			
	II	III	V
c	$-1/2$	a_{30}^2/c_0	4
n	1	$2c_3 + 1$	1
m	4	2	2
A	$a_{20}a_{30}/g_+$	$a_{30}g_+^2$	$a_{10}g_+^{3/2}$
a	2	1	1
b	$1/2$	-2	$-3/2$
d	$c_2 + c_3 + b$	$b - c_3$	$b + c_1$
E	$a_{20} a_{30}/g_0$	$a_{30}g_0^2/c_0$	$a_{10}g_0^{3/2}$
F ₋	$-(a_{20}a_{30}u)/(sg_-)$	$-(a_{30}ug_-^2)/(sc_0)$	$-a_{10}ug_-^{3/2}/s$
r	$-(Q_- + d + 1)/(4Q_-)$	$(2Q_- + 1 + c_3)/(2Q_-)$	$(3Q_- - 1)/(4Q_-)$

Tabla 3.1

Continuación

Coeficientes constantes para la ecuación (3.13)		
	VI_h	VII_0
c	$(h + 1)^2$	$-c_0^4/8$
n	1	1
m	2	4
A	$A_3 g_+^{A_0+1}$	$c_0^2 g_+^3 / 2^{1/2}$
a	1	2
b	$-(A_0 + 1)$	$-3/2$
d	$A_1 + b$	b
E	$A_3 g_0^{A_0+1}$	$c_0^2 g_0^3 / 2^{1/2}$
F ₋	$-A_3 u g_-^{A_0+1} / s$	$-(c_0^2 u g_-^3) / (s 2^{1/2})$
r	$(Q_- + A_0(Q_- + 1) - A_1) / (2Q_-)$	$(4Q_- + 1) / (4Q_-)$

Capítulo 4

Comportamiento Caótico en JBD

El interés especial por la posible existencia de comportamiento irregular o “turbulento” en modelos cosmológicos, data al menos de los trabajos de Barrow (1982). Posteriormente, se ha estudiado sistemáticamente la existencia de aleatoriedad en ciertas soluciones a las ecuaciones de campo para modelos cosmológicos tipo de “mixmaster” y se han reportado varios tipos de evidencia para concluir la existencia de comportamiento caótico en modelos cosmológicos basados en Relatividad General (RG) (Zardecki 1983, Halpern 1987, Rugh y Jones 1990, Pullin 1991). Estas conclusiones fueron obtenidas analizando el comportamiento de soluciones específicas a las ecuaciones diferenciales asociadas a los modelos (Khalatnikov *et al.* 1985, Francisco y Matsas 1988, Burd *et al.* 1990), o estudiando el mapeo discreto asociado (Barrow 1981, Berger 1993). Cabe aclarar en este punto que el término caos cosmológico se había venido usando en la literatura (Misner *et al.* 1973, Ryan y Shepley 1975) pero el sentido en el que se usó es completamente diferente.

Sin embargo, aunque se tienen elementos que indican comportamiento caótico, persiste una controversia alrededor de estas manifestaciones (Pullin 1991). La controversia se centra en la forma de caracterizar al caos en teorías gravitacionales y se manifiesta en la existencia de una contradicción aparente (Rugh y Jones 1990, Pullin 1991, Ferras *et al.* 1991). Existen soluciones aparentemente irregulares, en las que toda prueba o indicador cualitativo nos lleva a concluir que exhibe comportamiento caótico, y, a pesar de ello, ¡poseen un exponente de Liapunov que se anula! Este extraño comportamiento parece estar relacionado con la libertad de elegir una norma temporal específica.

Con lo antes mencionado y considerando que existe también un amplio interés por soluciones cosmológicas basadas en la teoría de Jordan Brans–Dicke

(JBD) (Chauvet *et al.* 1991a, 1991b, 1991c, Aguilar *et al.* 1992a, 1992b, Chauvet *et al.* 1992, Guzmán 1993). En este trabajo se ofrece evidencia numérica de que la teoría JBD predice comportamiento caótico para algunos modelos cosmológicos. En particular la evidencia exhibe la compleja dinámica a que da lugar el modelo Bianchi IX en JBD y evidencia, también, de caos en esta dinámica. Esto de algún modo “explica” el fracaso de los intentos que se han hecho para resolver exactamente este modelo. Se puede considerar que este capítulo extiende el enfoque del capítulo 3, ofreciendo una alternativa contemporánea a las soluciones exactas que se buscaban. Aunque aquí no se explota totalmente lo que ofrece esa alternativa, al menos se ha comenzado a explorar algunas propiedades cualitativas muy básicas del modelo y se ha establecido que no hay esperanza alguna de encontrar una solución general exacta (*i.e.* analítica) al modelo sin restricciones.

Incidentalmente, se hace notar que hasta la fecha no se habían investigado los posibles comportamientos caóticos en modelos cosmológicos basados en la teoría JBD. Por otra parte, la posibilidad de encontrar un comportamiento cualitativamente diferente en modelos similares en ambas teorías (*i.e.* JBD y RG) hizo de esta cuestión algo muy interesante; aunque al final de este análisis no logramos descubrir diferencias cualitativas. Se debe enfatizar, para evitar interpretaciones inadecuadas, que la caoticidad de un modelo en RG no implica trivialmente la existencia de comportamiento similar en modelos análogos en JBD (Bogoyavlensky 1985, Lichtenberg y Lieberman 1992). Por otro lado, como se ha puntualizado previamente, el problema de la caracterización del caos en teorías gravitacionales y la controversia que ello ha provocado, puede estar relacionado con la libre elección de la norma temporal. Tales problemas están presentes en nuestro tratamiento, como se ilustra explícitamente, mas adelante, en la sección 4.

En este capítulo se discute la posibilidad de observar comportamiento caótico en soluciones a las ecuaciones que describen la evolución de un modelo cosmológico en la teoría de la gravitación de JBD. Para lo que se usan los modelos de Bianchi (Chauvet *et al.* 1992). Analizando aquellos para los que no ha sido posible encontrar una solución exacta quizá sea posible evidenciar su comportamiento caótico. Esta sospecha se puede considerar apoyada, si se razona por analogía, por el he-

cho de que modelos análogos en RG han servido como ejemplos para el caos cosmológico. Al exhibir comportamiento caótico, ello proporcionaría un mecanismo para que el universo “olvidase” su estado inicial y así cabría la posibilidad de tratar de explicar el estado actual del universo sin involucrar condiciones iniciales especiales.

1. Ecuaciones del modelo cosmológico

Será, particularmente, el modelo cosmológico Bianchi IX el que se usará para desarrollar este trabajo. Se presentará evidencia numérica de la existencia de caos en el comportamiento del modelo cosmológico espacialmente homogéneo y anisótropo en JBD conocido como Bianchi IX. Este modelo se puede considerar como una versión JBD del llamado universo “mixmaster” de RG (Misner 1969). En un sistema síncrono de coordenadas este modelo está caracterizado por un elemento de línea de la forma (2.12) donde ω^i son 1-formas (Ryan y Shepley 1975) que expresan las propiedades de simetría del 3-espacio:

$$\begin{aligned}
 \omega^1 &= a_1(t)(-\text{senz } dx + \text{senz } x \cos z \, dy), \\
 \omega^2 &= a_2(t)(\cos z \, dx + \text{senz } x \text{senz } dy), \\
 \omega^3 &= a_3(t)(\cos z \, dy + dz), \\
 \omega^4 &= (dt),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

las a_i ($i=1, 2, 3$) son los llamados factores de escala del modelo, los que sólo son funciones del tiempo síncrono t . Procedemos ahora a calcular las ecuaciones de campo para el modelo. Para ello recordemos que

$$\begin{aligned}
 d\omega^a &= -\omega^a{}_b \wedge \omega^b, \\
 \Theta^a{}_b &= d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} \omega^c \wedge \omega^d, \\
 R &= g^{ab} R_{ab} = g^{ab} R^c{}_{acb},
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

para llegar finalmente a las expresiones (2.8) y (2.9). Si, además se supone un universo completamente lleno con un fluido barotrópico, $p = \beta\rho$, donde p es la presión hidrodinámica, ρ es la densidad local del fluido y β es una constante,

las ecuaciones diferenciales ordinarias de campo para el modelo de Bianchi IX en JBD (veáse también la ecuación (2.14) usando los coeficientes adecuados) permiten escribir explícitamente las tres ecuaciones diferenciales para los factores de escala como

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}_i}{a_i} - \left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}\right)^2 + \frac{\dot{a}_i}{a_i} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) \\ + \frac{1}{a_i^2} + \frac{a_i^2}{2a_j^2 a_k^2} - \frac{a_j^2}{2a_k^2 a_i^2} - \frac{a_k^2}{2a_i^2 a_j^2} = \mu, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde los símbolos $i, j, k = 1, 2, 3$, se deben tomar en orden cíclico, para obtener las ecuaciones correspondientes a los tres factores de escala, la notación con puntos sobre las variables indica derivadas con respecto al tiempo síncrono; $\mu \equiv \alpha[\rho + \omega(\rho - p)]/\phi$, $\alpha = 8\pi/(3 + 2\omega)$, y ω es el parámetro de acoplamiento de la teoría de JBD. La ecuación para el campo escalar ϕ (ver también (2.16)) al que se puede considerar proporcional al inverso de la “constante” gravitacional (ecuación (2.2)), se obtiene también en esta forma

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi} a_1 a_2 a_3) = \alpha(\rho - 3p)a_1 a_2 a_3. \quad (4.4)$$

Además de las 3 ecuaciones para los factores de escala y la ecuación para el campo escalar existe una relación adicional entre los factores de escala y ϕ a la que se le llamará ecuación de constricción (ver también la ecuación (2.15) con los coeficientes apropiados)

$$\begin{aligned} C := \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_3}{a_1 a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3}\right) - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_3^2 a_1^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Esta constricción la deben satisfacer las condiciones iniciales. En general, C tiene el valor de $8\pi\rho/\phi$, donde $\rho(x)$ es la densidad de materia presente en el punto de la hipersuperficie espacial x . La cantidad C se anula para el caso en que consideremos

un universo vacío y, cómo se puede verificar fácilmente al derivar C con respecto a t ,

$$\frac{dC}{dt} = -2 \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) C, \quad (4.6)$$

C es una primera integral del sistema (4.3-4.4) en vacío.

2. Condiciones iniciales

De las ecuaciones (4.3) y (4.4) se puede observar que para un modelo en vacío las ecuaciones de campo del modelo se reducen a tres ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden en los factores de escala más una para el campo escalar ϕ . Así, dando un conjunto de condiciones iniciales $(a_1, a_2, a_3, \phi, \dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3, \dot{\phi})$, las 4 ecuaciones se pueden resolver numericamente mediante algoritmos conocidos. Esto fué lo que se hizo para obtener evidencia de comportamiento estocástico en las soluciones para el modelo. Como prueba adicional, se utilizaron varios conjuntos de condiciones iniciales para eliminar la posibilidad de que el comportamiento ocurriese aisladamente para un conjunto específico de condiciones iniciales.

Para elegir las condiciones iniciales, se tomaron condiciones similares a las empleadas por Zardecki (1983) para el modelo cosmológico de Bianchi IX en RG, que han sido las condiciones iniciales usadas en los estudios realizados hasta la fecha sobre el comportamiento aleatorio en la evolución del universo (p. ej. Francisco y Matsas 1988, Rugh y Jones 1990). Originalmente se consideraron tres tipos posibles de condiciones iniciales:

Las condiciones A) a las que llama *libres* (Zardecki 1983); en este caso todos los factores de escala se eligen libremente haciendo caso omiso de la restricción (4.5). Estas condiciones no las consideramos promisorias pues al no cumplir con la restricción inicialmente, ésta tampoco se cumpliría posteriormente, y la solución numérica obtenida sería errónea. De hecho esta es una de las razones por la que los resultados de Zardecki son incorrectos.

Las condiciones B) a las que llama *anisótropas*, representan un universo de

este estilo. Si no fuese porque tampoco en este caso se cumple la ecuación (4.5), resultarían apropiadas para investigar la naturaleza de las “épocas de Kasner en JBD”.

Las condiciones C) a las que se les llama *de constricción*, son las que piden que las condiciones iniciales elegidas satisfagan la constricción (ecuación (4.5)), y no solo eso, sino también la deben satisfacer durante todo el proceso de evolución. Para el caso de un universo vacío tenemos que $C = 0$, lo que deben cumplir las condiciones iniciales y las variables dinámicas (a_i y ϕ) durante su evolución. Estas fueron las condiciones iniciales que elegimos para nuestro trabajo.

Por otro lado, tomando un solo tipo de condiciones iniciales y variando los valores de ω , se investigó el efecto de la variación del parámetro de acoplamiento en el comportamiento del modelo. Se usaron los valores, $\omega = -500$, para estar de acuerdo con la evidencia observacional actual (Reasenberg *et al.* 1979, Aguilar *et al.* 1992a), sin embargo, tomando en cuenta la posible utilidad de estos resultados para modelos de inflación extendida (Steinhardt 1994), se usaron también valores de $\omega = 0, -1, -5, -25, -50, -100, -250, -2500, -5000$. La dependencia de λ con el valor de ω se muestra en la figura 4.5. En los modelos de inflación extendida mencionados, los valores importantes son $|\omega| \leq 25$. Al ampliar el intervalo de valores, se consideró que la búsqueda de un comportamiento cualitativamente diferente al variar el valor de ω , podría, de haberse hallado, ser un resultado muy importante. No se usaron valores mayores, pues ello esencialmente reconstruiría lo ya sabido en RG. Claro que, en este estudio ω se introdujo exteriormente sin involucrar la dinámica, mientras que en inflación extendida al parámetro de acoplamiento se le considera como una variable dinámica (Steinhardt 1993).

3. Evidencia numérica de caos

Dados los fallidos intentos en resolver analíticamente el modelo cosmológico Bianchi IX en JBD, se eligió una técnica numérica para estudiarlo. Dado un conjunto de condiciones iniciales ($a_i(0), \phi, \dot{a}_i, \dot{\phi} \ i = 1, 2, 3$), se obtiene numericamente la evolución de los factores de escala y del campo ϕ . Existen resultados de varios

estudios numéricos del modelo Bianchi IX pero únicamente en RG (Francisco y Matsas 1988, Rugh y Jones 1990). Éstos han establecido la existencia de comportamiento estocástico en este modelo; lo que se muestra en este trabajo es que esta clase de comportamiento también ocurre en la teoría JBD. Se exhibe así evidencia de la compleja dinámica del modelo Bianchi IX.

Una de las maneras de caracterizar el caos en un sistema de ecuaciones como (4.3) y (4.4), es estableciendo que al menos uno de los exponentes de Liapunov es mayor que cero. El exponente máximo de Liapunov se puede evaluar, ver las ecuaciones 1.7, 1.8 y la figura 1.6 donde se ilustra el proceso, linealizando el sistema de primer orden equivalente a (4.3-4.4) (Lichtenberg y Lieberman 1992, Bogoyavlenskii 1985) alrededor de una solución específica $a_i^f(t)$, $\dot{a}_i^f(t)$, $\phi^f(t)$, $\dot{\phi}^f(t)$ de ella, resolviendo la ecuación de Jacobi (Do Carmo 1993) para las variaciones $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, 8$ ($\xi_i \equiv \delta a_i$, $i = 1, 2, 3$, $\xi_4 \equiv \delta \phi$, $\xi_i \equiv \delta \dot{a}_i$, $i = 5, 6, 7$, $\xi_8 \equiv \delta \dot{\phi}$) que “miden” la desviación entre la solución especificada y la perturbada.

Para el problema específico analizado en este trabajo, se necesita cambiar el sistema de ecuaciones de segundo grado (ecuaciones 4.3 y 4.4) a uno que solo sea de primero, para ello se introducen las variables:

$$\begin{aligned}
 q_i &= a_i, \\
 q_4 &= \phi, \\
 q_{i+4} &= \dot{a}_i, \\
 q_8 &= \dot{\phi},
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

con ello las ecuaciones (4.3) y (4.4) se pueden escribir como el sistema de primer orden

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i &= \dot{a}_i = q_{i+4}, \\
\dot{q}_4 &= \dot{\phi} = \frac{\phi_0}{q_1 q_2 q_3}, \\
q_{i+4} \dot{a}_i &= \ddot{a}_i = -q_i \left(\frac{q_{j+4}}{q_j} + \frac{q_{k+4}}{q_k} + \frac{q_8}{q_4} \right) \\
&\quad - q_i \left(\mathcal{A}_i q_1^{-2} + \mathcal{B}_i q_2^{-2} + \mathcal{C}_i q_3^{-2} + \mathcal{D}_i \beta_1 + \mathcal{E}_i \beta_2 + \mathcal{F}_i \beta_3 \right), \\
\dot{q}_8 &= \ddot{\phi} = -q_8 \left(\frac{q_5}{q_5} + \frac{q_6}{q_2} + \frac{q_7}{q_3} \right),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde los símbolos $i, j, k = 1, 2, 3$, se deben tomar en orden cíclico para generar las variables correspondientes a tres de las coordenadas, los coeficientes se pueden encontrar en la tabla 2.1. Además debemos calcular las ecuaciones de Jacobi para las “perturbaciones”

$$\begin{aligned}
\xi_i &= q_i' - q_i, \\
\xi_4 &= \phi' - \phi_i, \\
\xi_{i+4} &= \dot{\xi}_i, \\
\xi_8 &= \dot{\xi}_4,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

las que son

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_i &= \xi_{i+4}, \\
\dot{\xi}_4 &= -\frac{\phi_0}{q_1 q_2 q_3} \left(\frac{\xi_1}{q_1} + \frac{\xi_2}{q_2} + \frac{\xi_3}{q_3} \right), \\
\dot{\xi}_{i+4} &= \xi_4 \left(\frac{q_{i+4} q_8}{q_4^2} \right) + \xi_i \left(\frac{1}{q_i^2} - \frac{3}{2} \frac{q_i^2}{q_j^2 q_k^2} - \frac{1}{2} \frac{q_j^2}{q_k^2 q_i^2} - \frac{1}{2} \frac{q_k^2}{q_i^2 q_j^2} \right) \\
&\quad + \xi_j \left(\frac{q_{i+4} q_{j+4}}{q_j^2} + \frac{q_i}{q_j} \left(\frac{q_i^2}{q_j^2 q_k^2} + \frac{q_j^2}{q_k^2 q_i^2} - \frac{q_k^2}{q_i^2 q_j^2} \right) \right) \\
&\quad + \xi_k \left(\frac{q_{i+4} q_{k+4}}{q_k^2} + \frac{q_i}{q_k} \left(\frac{q_i^2}{q_j^2 q_k^2} - \frac{q_j^2}{q_k^2 q_i^2} + \frac{q_k^2}{q_i^2 q_j^2} \right) \right) \\
&\quad - \xi_{i+4} \left(\frac{q_{j+4}}{q_j} + \frac{q_{k+4}}{q_k} + \frac{q_8}{q_4} \right) - q_{i+4} \left(\frac{\xi_{j+4}}{q_j} + \frac{\xi_{k+4}}{q_k} + \frac{\xi_8}{q_4} \right), \\
\dot{\xi}_8 &= -\xi_1 \frac{q_8 q_5}{q_1^2} - \xi_2 \frac{q_8 q_6}{q_2^2} - \xi_3 \frac{q_8 q_7}{q_3^2} - q_8 \left(\frac{\xi_5}{q_1} + \frac{\xi_6}{q_2} + \frac{\xi_7}{q_3} \right) \\
&\quad - \xi_8 \left(\frac{q_5}{q_1} + \frac{q_6}{q_2} + \frac{q_7}{q_3} \right),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde los símbolos $i, j, k = 1, 2, 3$, se deben tomar en orden cíclico nuevamente para general las correspondientes ecuaciones a tres de las coordenadas. No se debe olvidar que hay una ecuación de constricción (ecuación 4.5) que se debe cumplir en cada paso de la integración tanto por la trayectoria original como por la ligeramente variada, y que al integrar simultáneamente estas ecuaciones se debe evaluar la cantidad numérica

$$\lambda_t = \frac{1}{2t} \log \frac{d_t(\xi)}{d_{t_0}(\xi)}, \tag{4.11}$$

en donde

$$d_t(\xi) \equiv \sum_{i=1}^8 \xi_i^2(t). \tag{4.12}$$

El exponente de Liapunov λ se define (Osedelec 1968) como el límite $t \rightarrow \infty$ de la ecuación (4.11), debemos hacer notar que es independiente de la métrica que se

le adscriba al espacio de estados. Si λ es mayor que cero, cualquier solución en la vecindad de la solución original divergirá exponencialmente de ella, implicando que ésta exhibe propiedades estocásticas (Barrow 1982). Aunque no se puede tomar numericamente el límite $t \rightarrow \infty$, el número λ sirve (Benettin *et al.* 1976, Bogoyavlensky 1985, Lichtenberg y Lieberman 1992) como estimador del exponente de Liapunov máximo. La tendencia que exhiba la cantidad λ_t al aumentar el tiempo de integración es crucial para obtener conclusiones. Lo que queda claramente ilustrado por las figuras 4.3 ($\lambda > 0$) y 4.4d ($\lambda = 0$).

Para comenzar se eligieron como valores iniciales $a_1 = 1.8540$, $a_2 = 0.4385$, $a_3 = 0.0854$, $\phi = 0.7129$, $\dot{a}_1 = -6.18191$, $\dot{a}_2 = -1.95165$, $\dot{a}_3 = 42.7131$, mientras $\dot{\phi}$ se calculó, para cada valor de ω , de la ecuación (4.5), ello garantiza que la restricción se cumpla. El valor de $\dot{\phi}$ siempre resultó cercano a ($\sim 0.18 \times 10^{-3}$) en todos los casos, aunque hay que hacer correcciones para asegurar que C efectivamente se anule en todos los casos. Todos los cálculos relacionados a ello se realizaron usando tanto Maple como Mathematica usando 30 dígitos, para tener algo de corroboración. El algoritmo utilizado para la integración numérica, fué un Runge-Kutta de quinto orden con pasos de integración típicos de entre 10^{-3} y 10^{-15} . La rutina (llamada Merson) que realizó el cálculo se obtuvo de la biblioteca numérica del CERN a través del Instituto de Física de la UNAM.

Los resultados numéricos obtenidos para los factores de escala a_i -s se muestran en la figura 4.1 (a-d) para valores correspondientes a $\omega = -5, -50, -500$ y -5000 . La evolución el campo escalar ϕ para los cuatro valores de ω se muestran en las figuras 4.2 (a-d). Como lo muestran las figuras 4.1, el comportamiento de los factores de escala en este modelo cosmológico muestra grandes “columpios” durante los cuales los factores de escala cambian en varios órdenes de magnitud y el campo escalar muestra grandes variaciones en intervalos de tiempo muy cortos; este comportamiento es especialmente notable en el tiempo reescalado Φ . Nótese la pequeñez del cambio relativo en ϕ cuando se le compara con el cambio en las a_i . En estas figuras se puede apreciar también la evidencia de un comportamiento similar al de las llamadas épocas de Kasner en RG (Rugh y Jones 1990, Francisco y Matsas 1988), en las que uno de los factores de escala gobierna las oscilaciones

de los otros dos.

También se ha investigado como cambia la dinámica del modelo al variar ω , ya que originalmente se sospechó de una fuerte dependencia con este parámetro. Se estudió el modelo empleando $\omega = 0, -1, -5, -25, -50, -100, -250, -500, -2500, -5000$, pero unicamente se encontraron similitudes entre los resultados para los diferentes valores en todo el intervalo estudiado. De aquí se puede aventurar la conclusión de que la existencia de comportamiento caótico está poco relacionada con el valor de ω . El valor de λ si depende de ω , como lo muestra la figura 4.5. Este parece ser también el caso al variar las condiciones iniciales, el caos ocurre con todas las que se han hasta ahora. Así, el comportamiento caótico parece dominar la dinámica del modelo cosmológico de Bianchi IX en JBD.

Se debe hacer notar los resultados obtenidos permiten sospechar de que en este modelo ocurre una singularidad de curvatura. Aunque no se dispone de una expresión explícita para R , el comportamiento siempre decreciente de ϕ (figura 4.2) mas los problemas para extender el cálculo numérico más allá de cierto intervalo en t , independientemente de los cambios de precisión y aún de método que se intentaron, nos sugieren fuertemente la existencia de una singularidad. Pero ello se debe analizar con mas cuidado antes de afirmar o negar absolutamente tal posibilidad.

Las estimaciones para el exponente de Liapunov más grande, λ , se muestra en la tabla 4.1 como una función de ω . El exponente máximo de Liapunov es siempre positivo. Por lo que el modelo, aunque determinista, se comporta caóticamente. No es posible entonces hacer predicciones ni siquiera numéricas para intervalos de tiempo arbitrariamente grandes. De acuerdo a este estudio, ello es independiente del valor seleccionado para el parámetro de acoplamiento. Cualquier incertidumbre en las condiciones iniciales crecería de manera exponencial con el tiempo, llenando el espacio fases accesible al modelo. En el contexto de un modelo más apropiado para el universo temprano en la cosmología de JBD, ello provocaría que cualquier fluctuación fuese amplificada lo que podría contribuir a la formación de estructuras macroscópicas. Las propiedades caóticas también ayudan a que el modelo pueda “olvidar” las condiciones iniciales.

Se debe puntualizar que la principal contribución a λ parece provenir de los “columpios”, en los que uno de los factores de escala decrece rápidamente. La parte del comportamiento en la cual este modelo de universo se contrae para expandirse después, es precisamente la que hace positivo al exponente de Liapunov. Esto se puede apreciar de las figuras 4.3 (a–d), al comparar los tiempos a los que ocurren los ciclos con los tiempos en los que se añade una contribución al exponente de Liapunov. De las gráficas que muestran ϕ como función de t (figura 4.2) se puede estimar que, antes de la supuesta singularidad, la curvatura escalar del modelo es siempre pequeña salvo durante los “columpios” en donde hay una fuerte contribución que provoca una gran variación en el valor de R . Una consideración más detallada de estos resultados, podría tener efectos importantes en el espectro de perturbaciones de la densidad, lo que es de interés para la cosmología inflacionaria (Börner 1992, Steinhardt 1993). Pero antes de poder hacer este tipo de consideraciones, primero se tendría que demostrar que este tipo de comportamiento es representativo de los efectos no lineales en la cosmología de JBD, esto es, debe estar presente en modelos cosmológicos más apropiados para describir la evolución del universo; cosa que aún no se ha hecho y queda abierta para continuar estudiando.

4. Cambio de escala

Todos los efectos que se han mencionado, ocurren en el tiempo síncrono t . Pero si se usara el llamado tiempo intrínseco Φ , definido por $d\Phi = (a_1 a_2 a_3)^{-1} dt$ (Chauvet y Guzmán 1986, Chauvet *et al.* 1991a), en lugar del tiempo síncrono t , el sistema se comportaría en forma diferente. Este hecho se puede entender mediante el siguiente argumento. Del comportamiento mostrado, se podría concluir que la relación entre los dos tiempos coordenados durante los regímenes similares al tipo Kasner (los columpios) es aproximadamente $t \sim \log \Phi$ (Zardecki 1983, Rugh y Jones 1990). Como el exponente máximo de Liapunov calculado en el tiempo síncrono $\lambda^{(\text{sinc})} = \alpha$ es positivo, para trayectorias cercanas se cumple que $d_t \sim \exp(\alpha t)$. Sin embargo, al usar el tiempo intrínseco, Φ , las trayectorias divergerían solamente como $d_\Phi \sim \Phi^\alpha$ y el exponente máximo de Liapunov calculado usando

Φ se anularía:

$$\lambda^{(\text{int})} = \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi} \log \frac{d_{\Phi}(y)}{d_{\Phi_0}(y)} \sim \lim_{\Phi \rightarrow \infty} \frac{\alpha \log \Phi}{\Phi} = 0. \quad (4.13)$$

Esta conclusión se corrobora fácilmente mediante un cálculo numérico, el que muestra que usando el tiempo intrínseco $\lambda \rightarrow 0$ (veáse la Figura 4.4d). Esta situación coincide con la encontrada en los modelos de RG (Rugh y Jones 1990, Ferraz *et al.* 1991). Sin embargo, es importante notar que este resultado *no* implica la integrabilidad del modelo cosmológico Bianchi IX en JBD y, ciertamente, tampoco elimina las consecuencias que tiene tal comportamiento en consideraciones cosmológicas. Los resultados presentados aquí corroboran una idea previa (Ferraz *et al.* 1991) sobre la estocasticidad en teorías geométricas de la gravitación. De acuerdo a este punto de vista, la estocasticidad en estas teorías es un concepto que depende de la escala de tiempo que se use para describir la dinámica. Se trabaja actualmente en una propuesta que podría resolver este problema (Núñez-Yépez *et al.* 1995).

Todos los cálculos numéricos se realizaron en una MicroVax 3900 empleando precisión extendida para minimizar errores de redondeo. El algoritmo que se usó fue un Runge–Kutta de quinto orden con un paso de integración que se mantuvo entre $\delta t = 1 \times 10^{-3}$ y $\delta t = 5 \times 10^{-15}$; se usaron entre 10^5 y 10^6 iteraciones.

Pies de figuras

Capítulo 4

Figura 4.1

Factores de escala a_1, a_2, a_3 contra el tiempo síncrono t . La gráfica se muestra en escala logarítmica. a) $\omega = -5$, b) $\omega = -50$, c) $\omega = -500$ y d) $\omega = -5000$.

Figura 4.2

El campo escalar ϕ contra el tiempo síncrono t . El comportamiento tipo escalera se debe parcialmente a la frecuencia de muestreo y a la escala de tiempo seleccionada. A pesar de ello, esto ilustra que ϕ permanece casi constante excepto por las regiones de “columpios”.

- a) corresponde a las condiciones de la figura 4.1a con $\omega = -5$.
- b) corresponde a las condiciones de la figura 4.1b con $\omega = -50$.
- c) corresponde a las condiciones de la figura 4.1c con $\omega = -500$.
- d) corresponde a las condiciones de la figura 4.1d con $\omega = -5000$.

Figura 4.3

Estimaciones del máximo exponente de Liapunov como función del tiempo síncrono de integración t . Las contribuciones positivas a λ provienen de las regiones de “columpios”.

- a) para las condiciones iniciales de la figura 4.1a.
- b) para las condiciones iniciales de la figura 4.1b.
- c) para las condiciones iniciales de la figura 4.1c.
- d) para las condiciones iniciales de la figura 4.1d.

Las gráficas muestran una tendencia claramente positiva de λ_t . Podemos concluir de estas gráficas que el modelo es caótico cuando su dinámica se estudia en el tiempo síncrono t .

Figura 4.4

a) Factores de escala a_1, a_2, a_3 contra el tiempo intrínseco Φ . La gráfica se muestra en escala logarítmica, $\omega = -500$.

b) Ampliación de la gráfica de los factores de escala de la figura 4.4a.

c) Ampliación de la gráfica de los factores de escala de la figura 4.4b, se nota cierta invariancia ante los cambios de escala.

d) Gráfica del exponente de Liapunov como función del tiempo intrínseco de integración Φ . A diferencia de la gráfica 4.3, se aprecia una clara tendencia de λ a decrecer; ello debido a la elección de la norma temporal. Para ésta gráfica se usó $\omega = -500$.

Figura 4.5

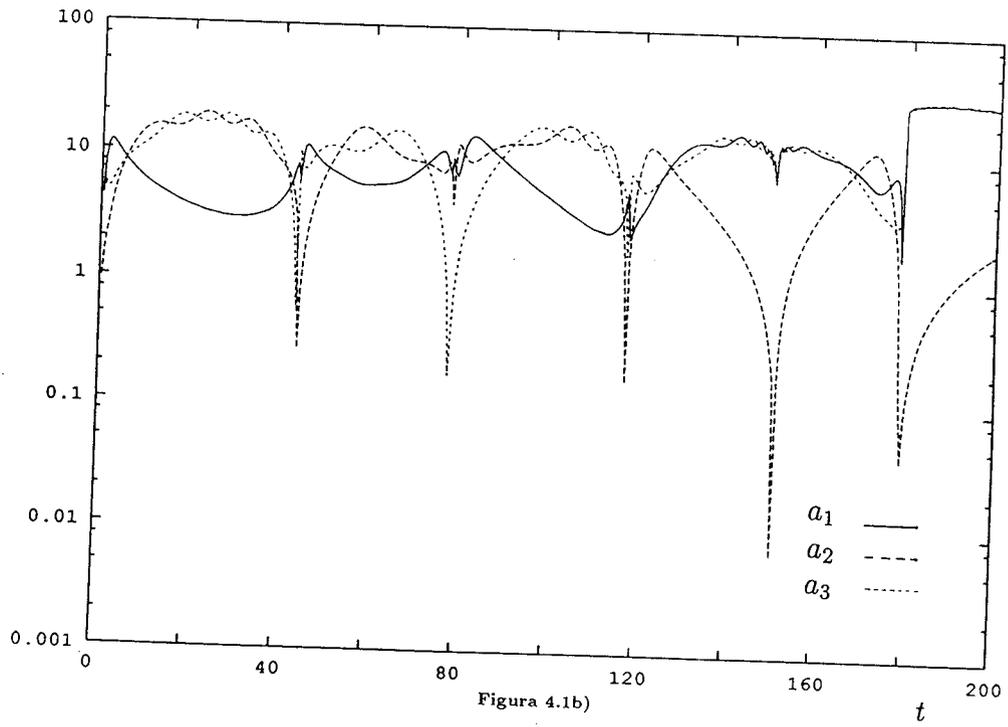
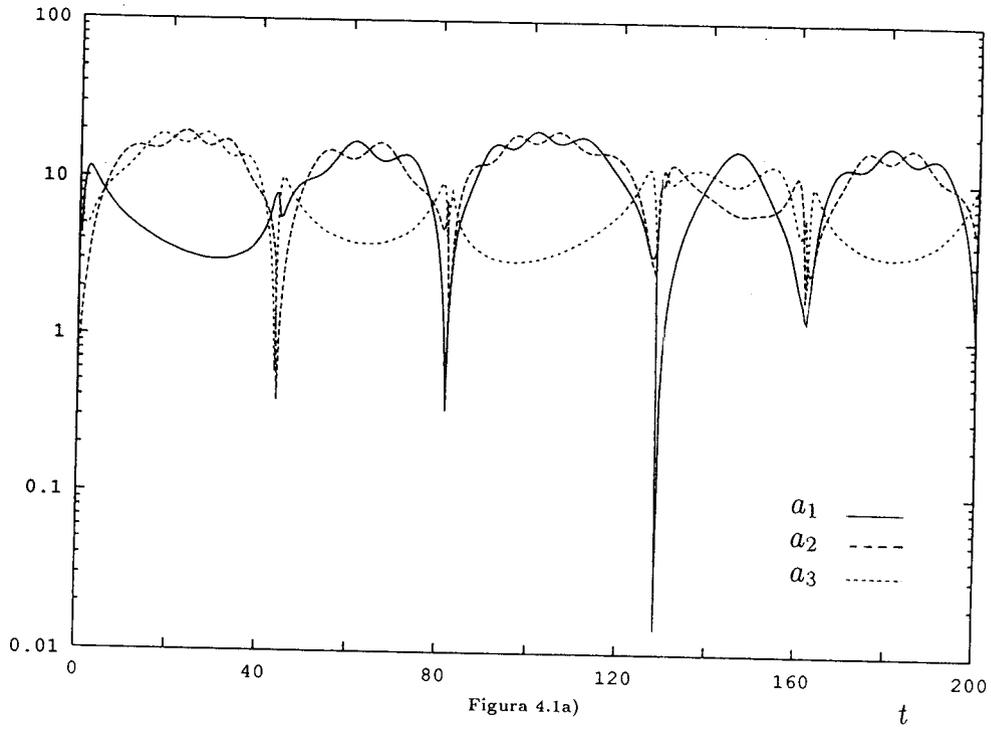
Máximo exponente de Liapunov, λ , como función de ω . La gráfica muestra λ vs. $\arctan(\omega)$. Existe variación con el parámetro, pero, en general, $\lambda > 0$ independientemente de ω .

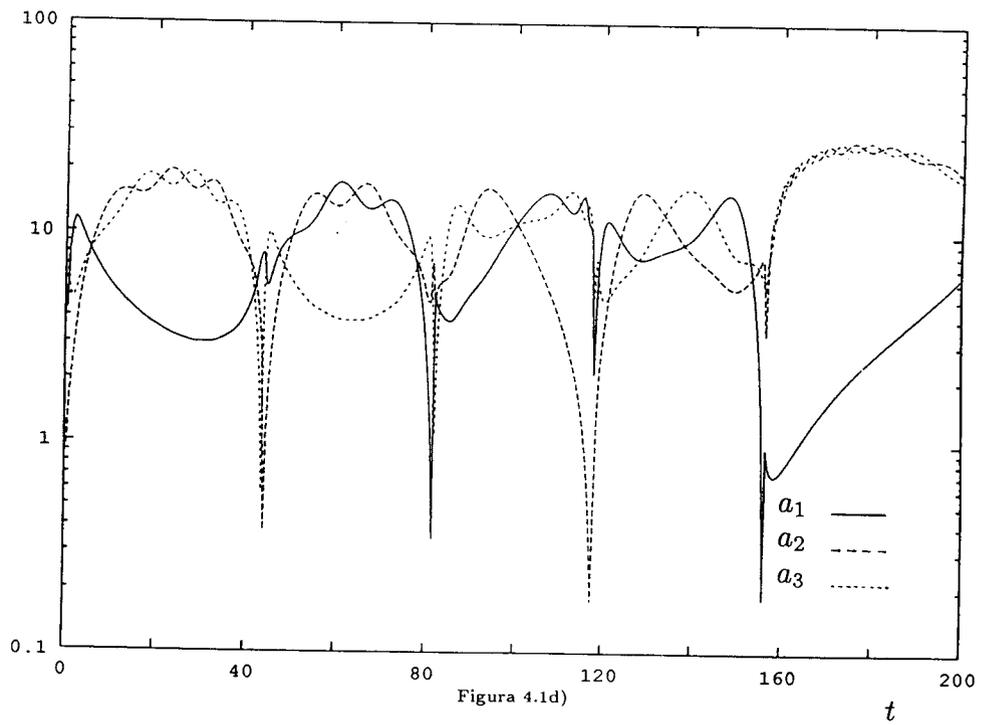
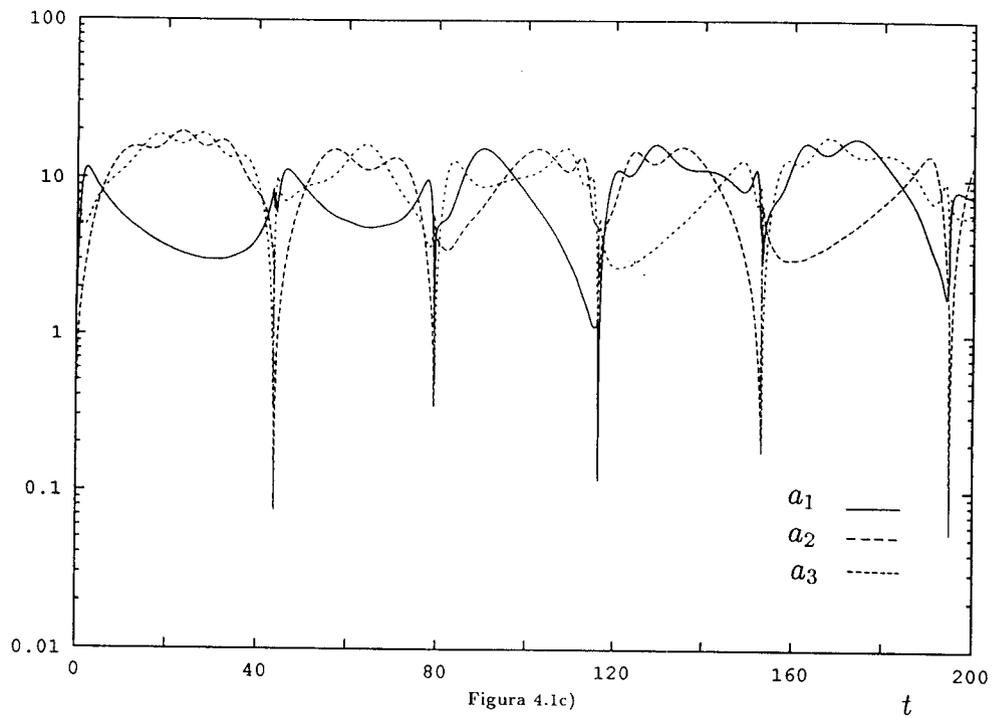
Pie de tabla

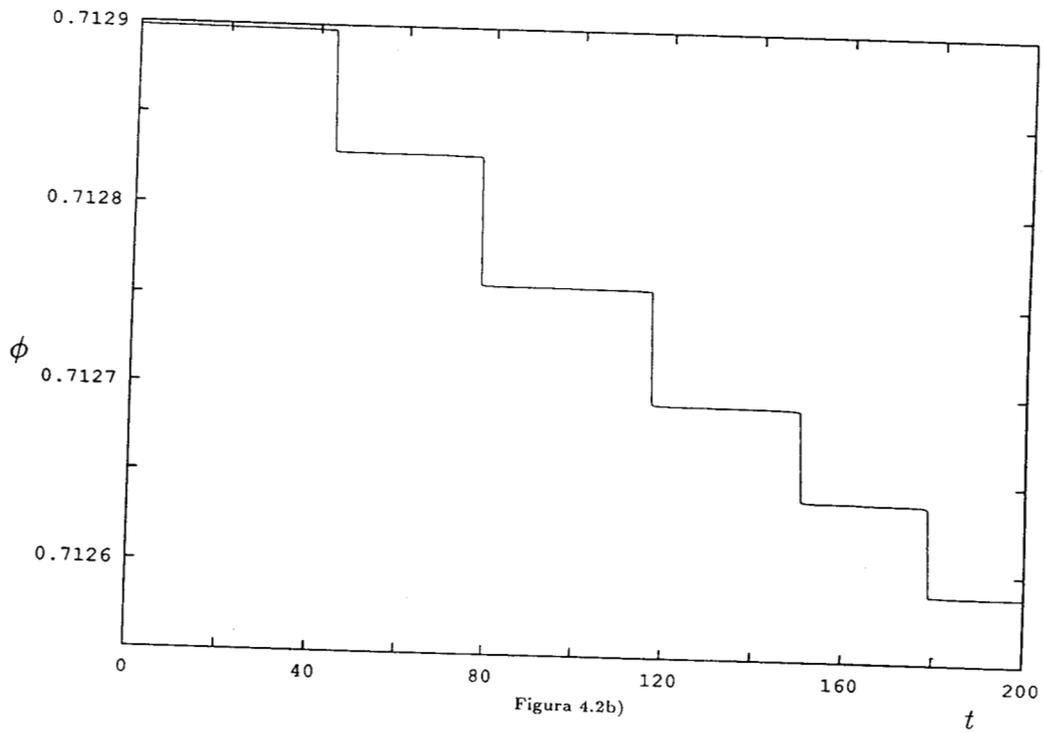
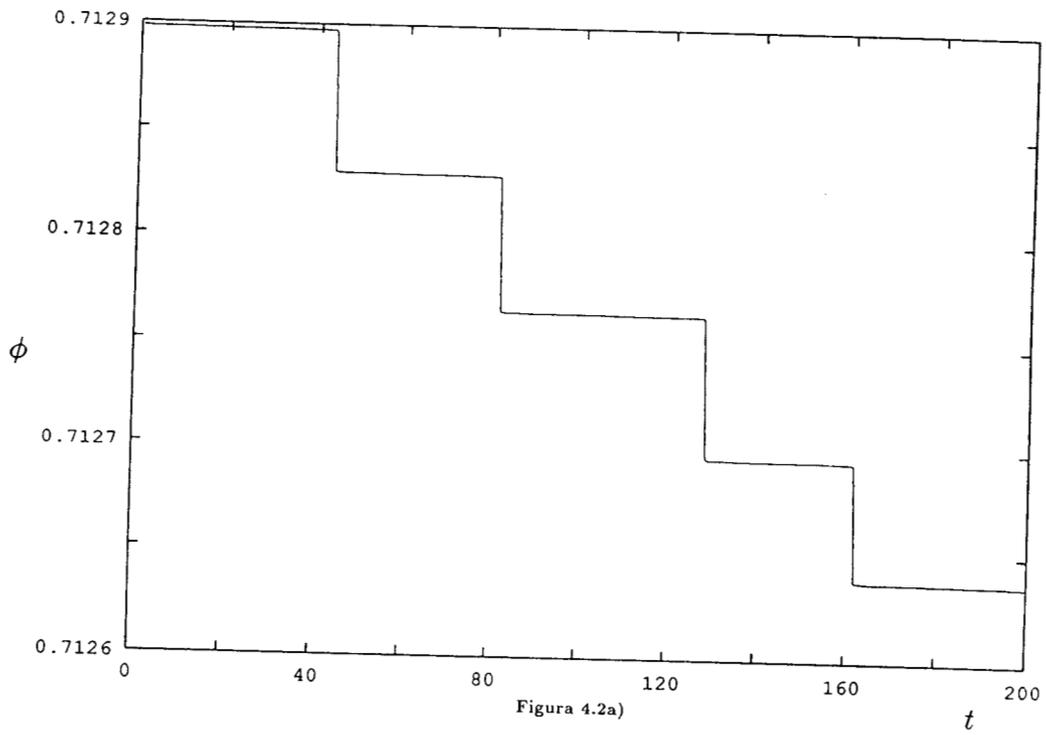
Capítulo 4

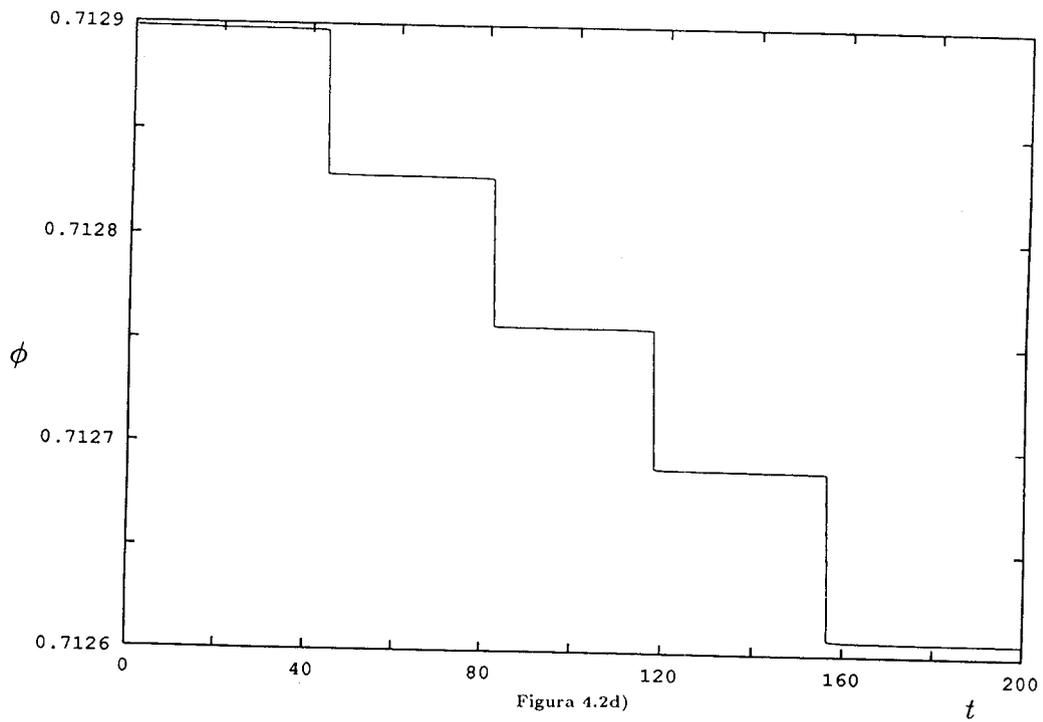
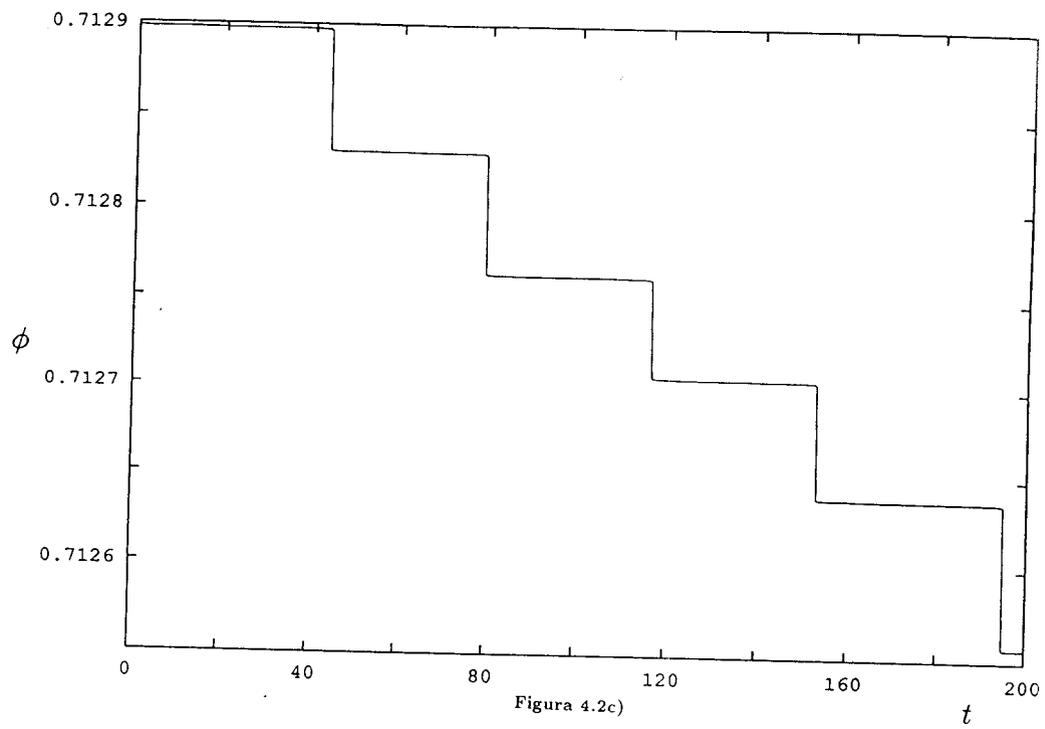
Tabla 4.1

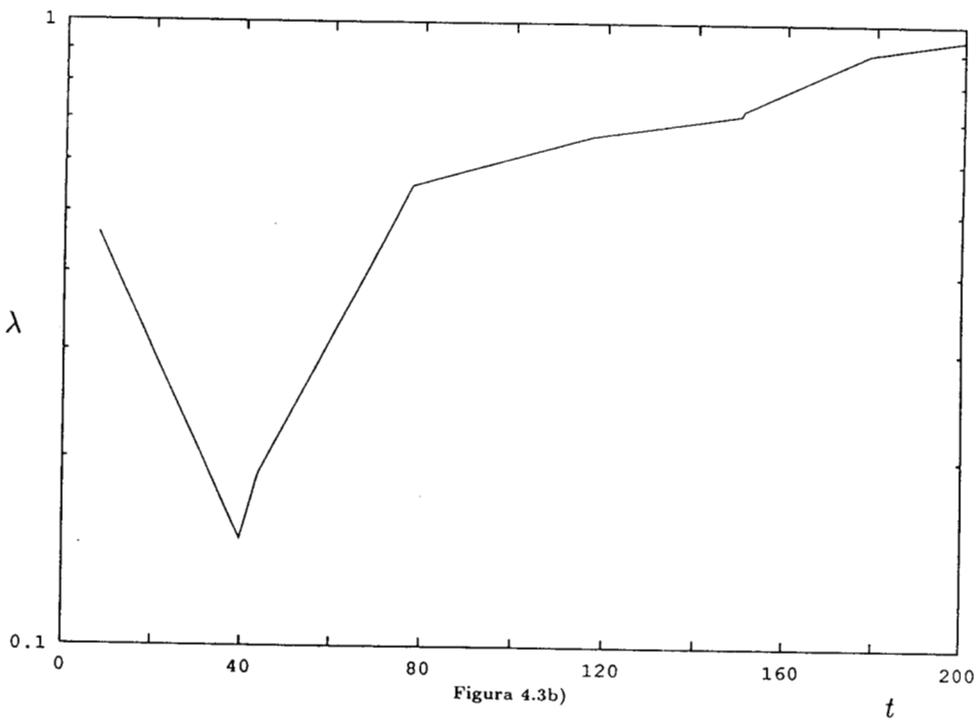
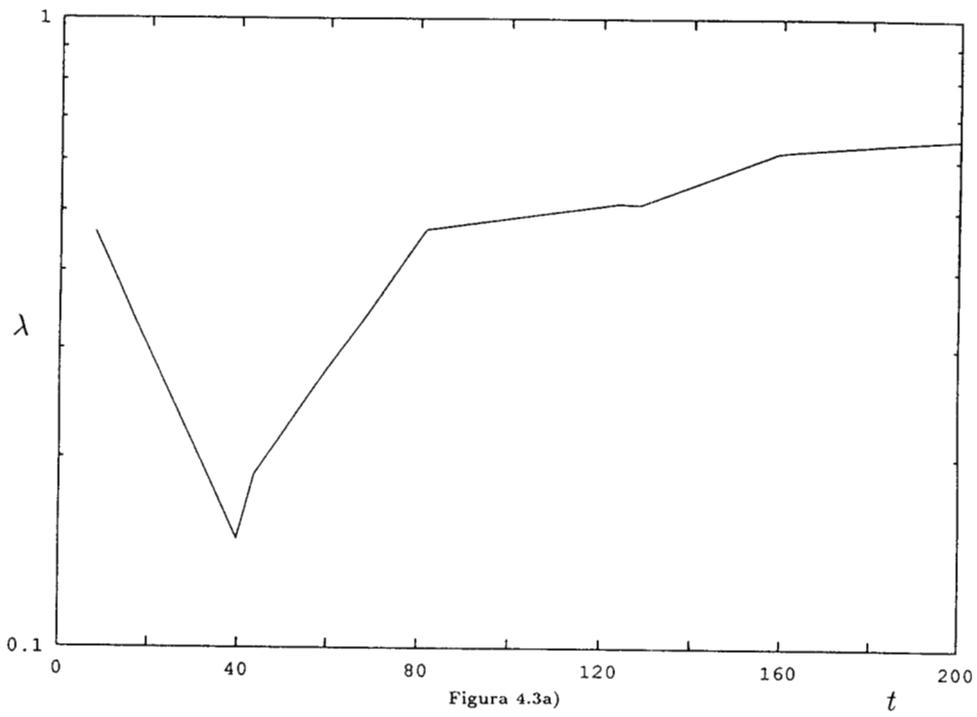
El exponente máximo de Liapunov, λ , calculado a diferentes valores para ω , para el modelo cosmológico de Bianchi IX.

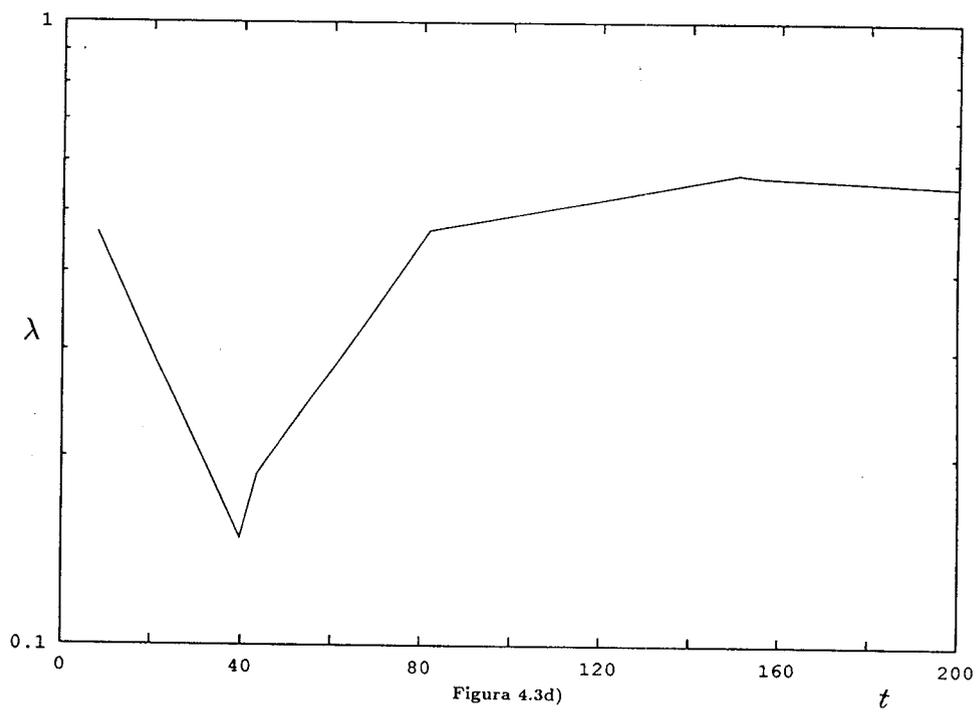
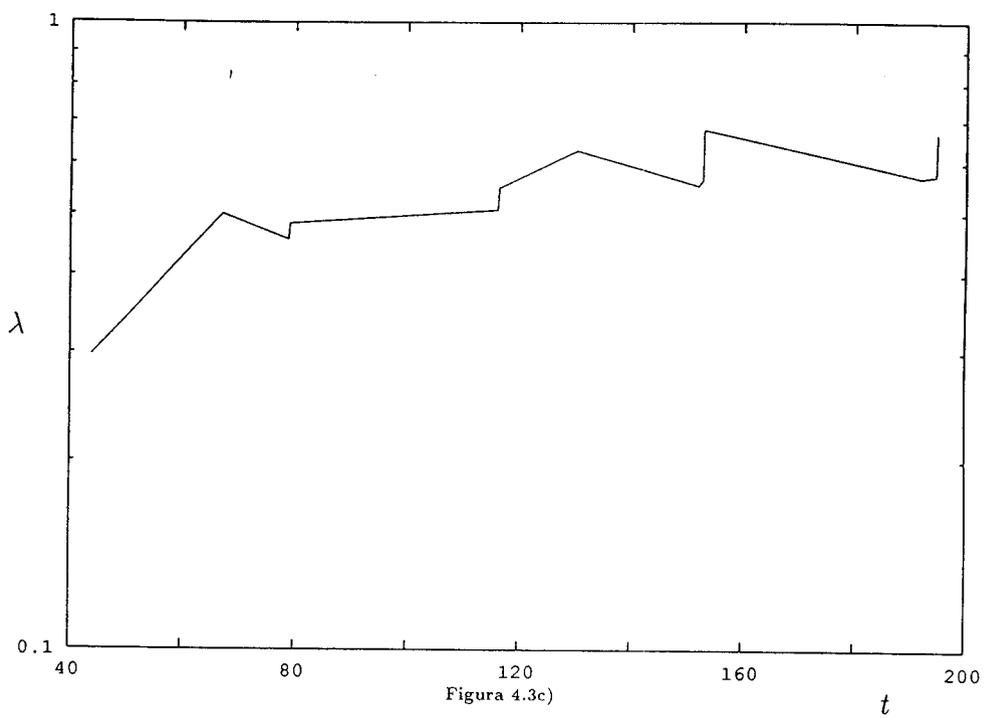












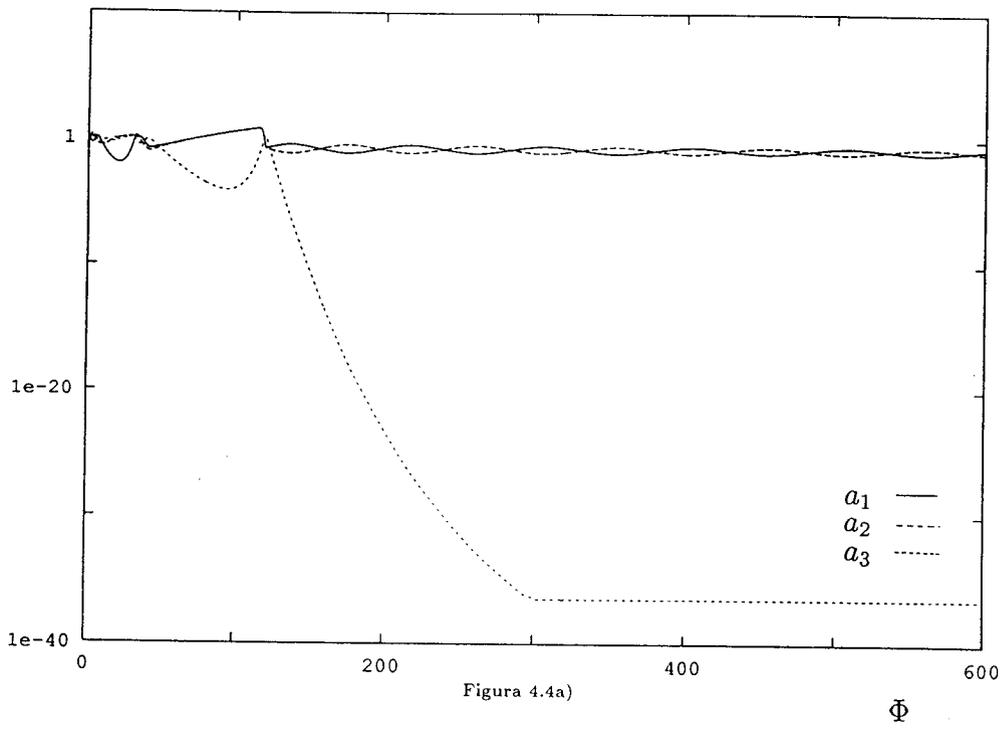


Figura 4.4a)

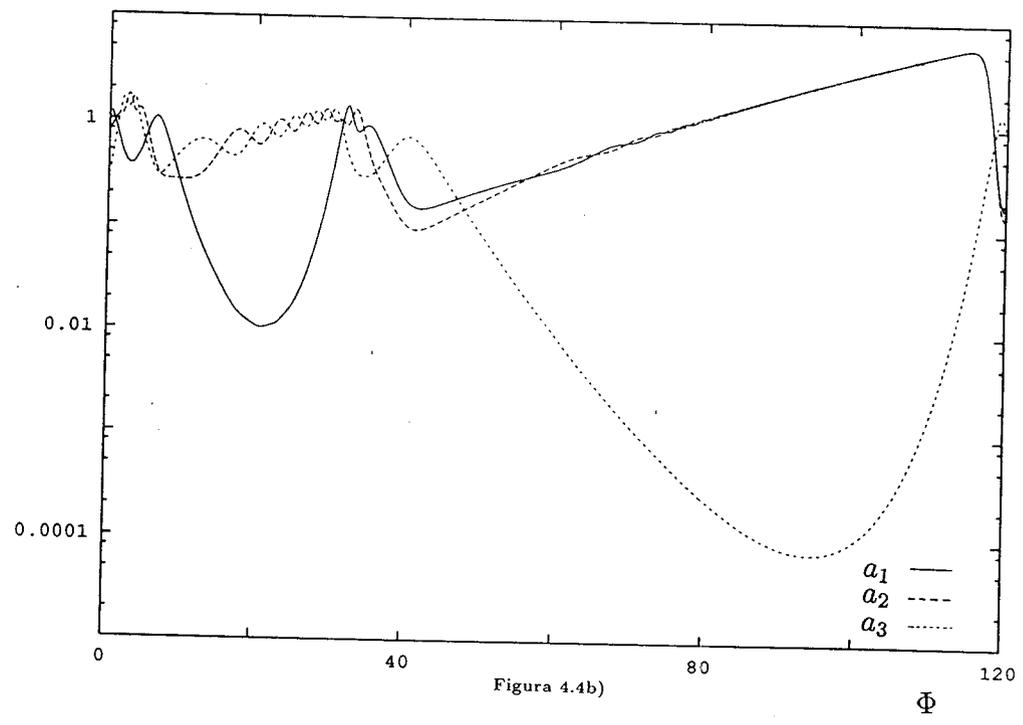
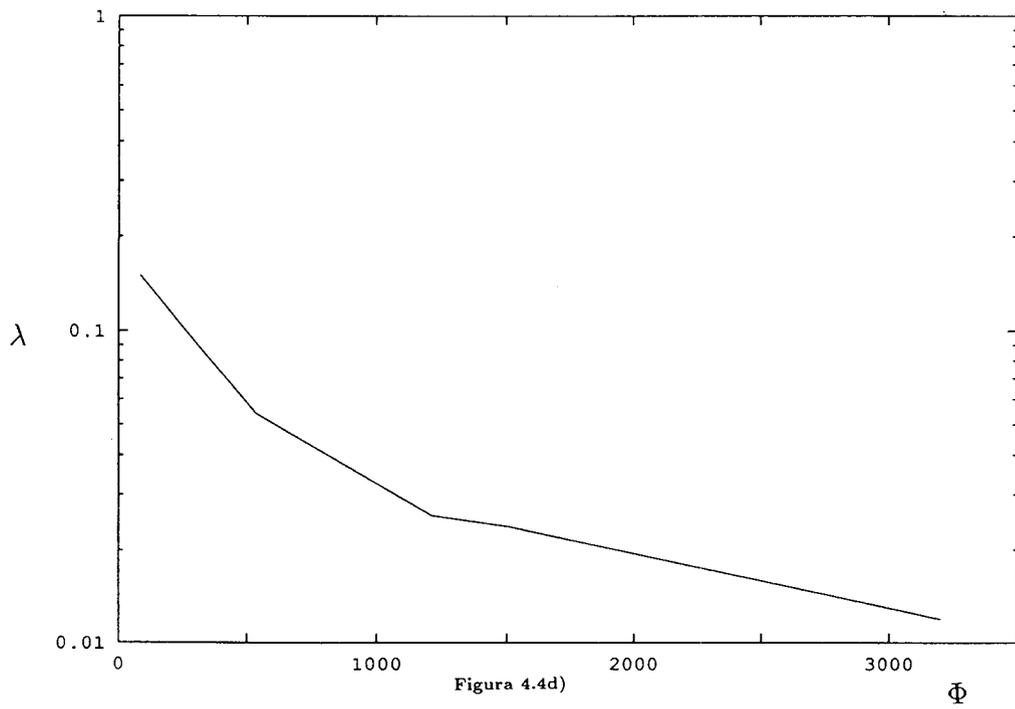
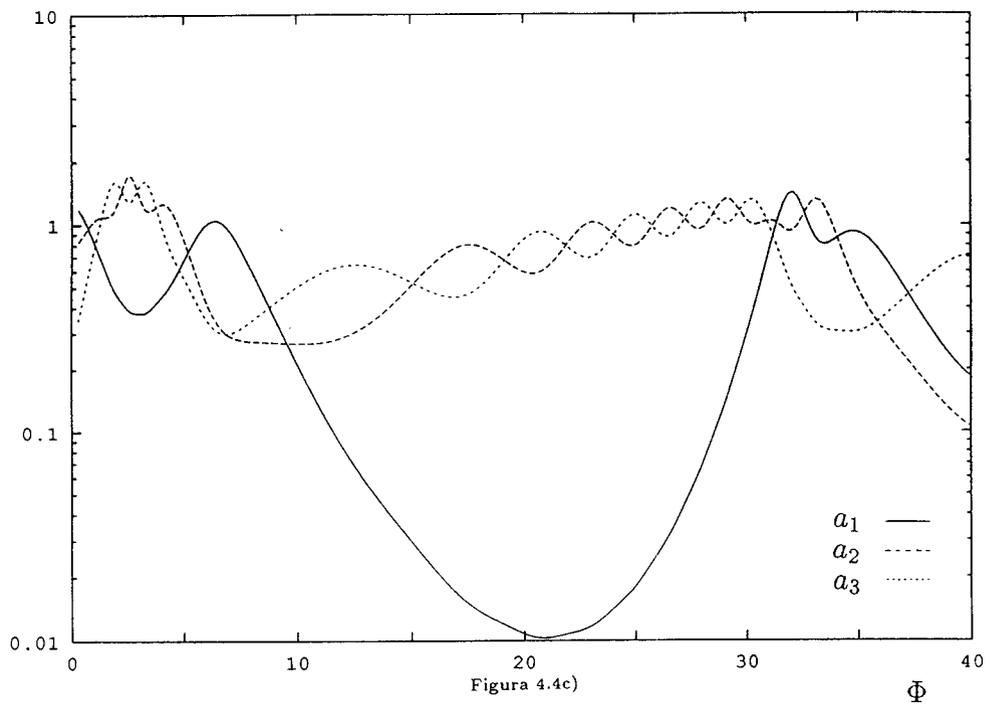


Figura 4.4b)



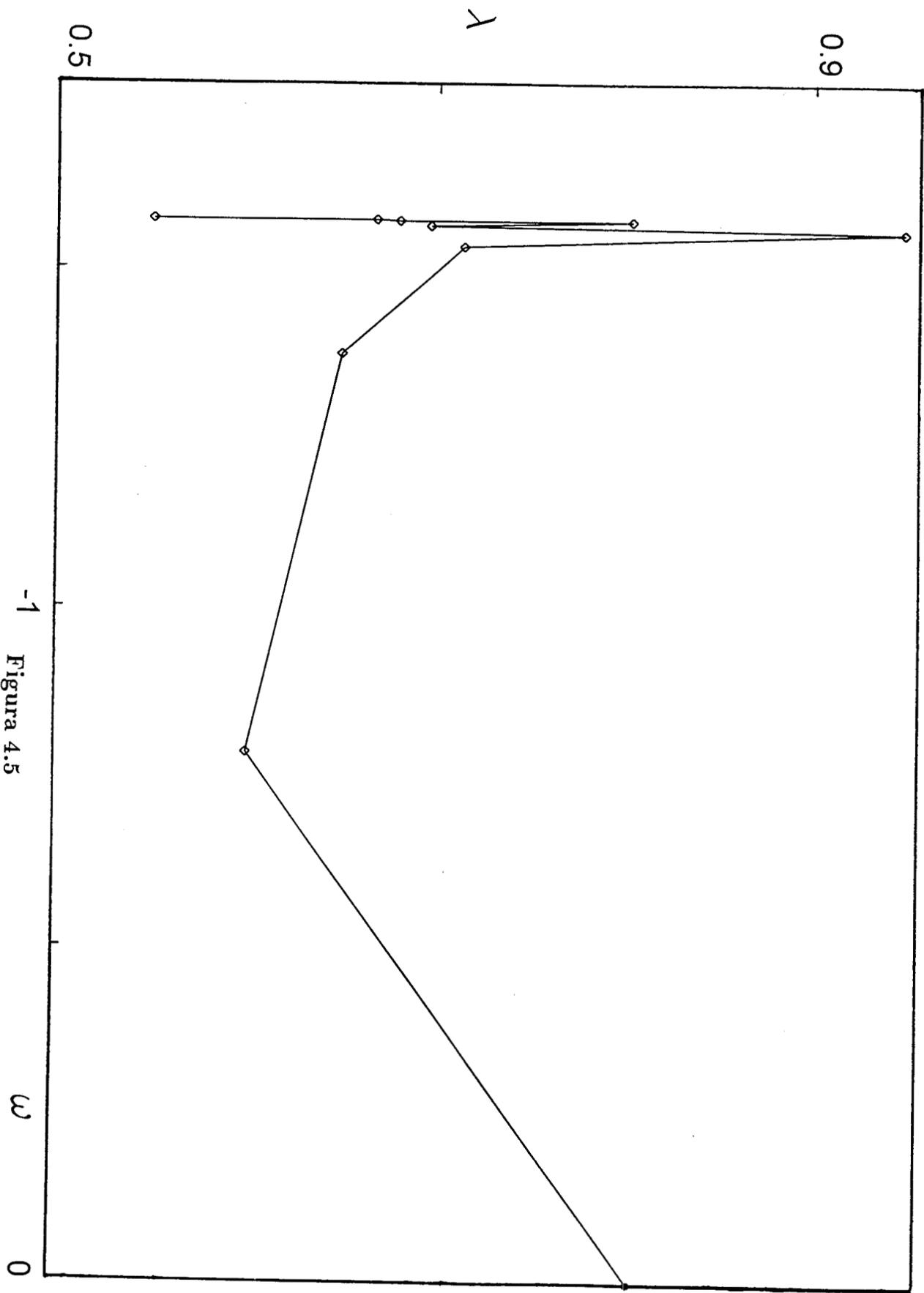


Figura 4.5

Tabla 4.1

ω	λ
0	0.807
-1	0.601
-5	0.650
-25	0.714
-50	0.947
-100	0.696
-250	0.803
-500	0.680
-2500	0.668
-5000	0.550

Conclusiones

Hemos obtenido todas las soluciones que pueden calcularse exactamente para los modelos de Bianchi en vacío en la teoría escalar tensorial de Jordan, Brans y Dicke incorporándolos a un esquema general de solución (Chauvet *et al.* 1991a, 1992). Ello nos ha permitido clasificar las soluciones. Encontramos que dos de estos modelos, aunque resolubles exactamente, predicen universos que colapsan al requerir que al menos uno de los factores de escala siempre se anule; ello los hace, desde nuestro punto de vista, inviables como modelos cosmológicos en vacío. Los modelos de Bianchi de tipos VIII y IX no pudieron ser resueltos exactamente sin imponer condiciones adicionales que limitasen su comportamiento. Ello nos llevo a sospechar que tales modelos no fuesen integrables (Núñez-Yépez y Salas-Brito 1992, 1993).

Para ofrecer evidencia tangible sobre las propiedades del modelo de cosmológico Bianchi IX, se estudiaron numéricamente las propiedades de su solución. Se obtuvieron soluciones numéricas que muestran oscilaciones irregulares de los factores de escala (Núñez-Yépez y Salas-Brito 1992, 1993, Carretero-González *et al.* 1993a, 1993b). Al estimar el exponente máximo de Liapunov correspondiente a estas soluciones, lo encontramos positivo; estos resultados ofrecen evidencia adicional sobre la falta de integrabilidad del modelo, e indican comportamiento caótico (Carretero-González *et al.* 1994b). Estos resultados parecen apuntar a que en el modelo Bianchi VIII ocurra algo similar.

Los resultados que aquí se presentan constituyen la primera evidencia conocida de comportamiento caótico en la cosmología de JBD. Posibles consecuencias para los estudios actuales sobre el universo primordial se han avanzado en Carretero-González *et al.* (1994b). Tomando en cuenta posibles usos posteriores de estos resultados (Steinhardt 1993), se ha considerado toda una gama de valores para el parámetro de acoplamiento de la teoría al realizar los cálculos; el intervalo de valores que se uso fué $\omega \in (-5000, 0)$. Con ello, se puede concluir, el comportamiento caótico domina la dinámica del modelo cosmológico Bianchi IX en la teoría JBD.

Contribución de este trabajo

Se encontraron soluciones exactas para la mayoría de los modelos cosmológicos Bianchi en la teoría JBD ofreciendo, además, un esquema general para la solución que permite clasificarlos. En los casos en que no fué posible encontrar una solución exacta, se ofrece evidencia de que los modelos no son integrables. Ofrecemos también evidencia del comportamiento caótico en la cosmología de Jordan, Brans y Dicke.

Lista de publicaciones asociadas con este trabajo

1. Carretero-González R, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1994b *Phys. Lett. A* **188** 48.
2. Chauvet P, Cervantes-Cota J y Núñez-Yépez H N 1992 *Class. Quantum Grav.* **9** 1923.
3. Chauvet P, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1991a *Astrophys. Sp. Sci.* **178** 165.
4. Carretero-González R, Chauvet P, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1993a en *Aspects of General Relativity and Mathematical Physics*, Eds. N Breton, R Capovilla y T Matos, (CINVESTAV-IPN, México) 204.
5. Carretero-González R, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1993b en *Gravitation: The spacetime structure* Eds. P S Letelier, W A Rodrigues Jr. (World Scientific, Singapore) 457.
6. Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1993 *Reporte de Investigación* 328 UAM-A.
7. Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1992 *Reporte de Investigación* 01.0104.I.-01.006.92 UAM-I.

Referencias:

- Aguilar A, Fuentes y Martínez G J, Núñez-Yépez H N y Obregón O 1992a *Cosmiticteskie Luchi, Observational consequences of two cosmological models in Jordan Brans-Dicke theory*, (in Russian) No. 2
- Aguilar A, Fuentes y Martínez G J, Núñez-Yépez H N y Obregón O 1992b *Cosmiticteskie Luchi, The night sky radiation: two cosmological models in Jordan Brans-Dicke theory*, (in Russian) No. 2
- Anderson J L 1967 *Principles of relativity physics*, (Academic Press: London, New York, EUA).
- Bandyopadhyay N 1978 *J. Math. Phys.* **19** 1423.
- Bandyopadhyay N 1979 *J. Math. Phys.* **20** 1494.
- Barnsley M 1988 *Fractals everywhere*, (Academic Press: New York, EUA).
- Barrow J D 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 963.
- Barrow J D 1982 *Phys. Rep.* **85** 1.
- Barrow J D, Juszkiewicz R y Sonoda D H 1983 *The structure of the cosmic microwave background*, (University of Sussex, preprint, EUA).
- Benettin G, Galgani L y Strelcyn J M 1976 *Phys. Rev. A* **14** 2338.
- Benettin G, y Strelcyn J M 1978 *Phys. Rev. A* **17** 773.
- Bergé P, Poneau Y, y Vidal Ch 1984 *L'Ordre dans le chaos*, (Hermann: Paris, Francia).
- Berger B K 1993 *Phys. Rev. D* **47** 3222.
- Berry M V, Percival I C, y Weiss N O editores 1987 *Dynamical chaos*, (The Royal Society: London, Reino Unido).
- Bianchi L 1897 *Mem. Soc. It. Della. Sc.* **11** 267.

- Bogoyavlensky O I 1985 *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics*, (Springer-Verlag: Berlin, Alemania).
- Börner G 1992 *The Early Universe*, (Springer-Verlag: New York, EUA) sección 11.4
- Brans C y Dicke R H 1961 *Phys. Rev.* **124** 925.
- Brill D R 1962 *Evidence for Gravitational Theories*, Enrico Fermi Course XX, Ed. Moller, C (Academic Press: New York, EUA).
- Burd A B, Buric N y Ellis G F R 1990 *Gen. Rel. Grav.* **22** 349.
- Carretero-González R, Chauvet P, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1993a in *Aspects of General Relativity and Mathematical Physics*, Eds. N Breton, R Capovilla y T Matos, (CINVESTAV-IPN: D.F, México) 204.
- Carretero-González R, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1993b in *Gravitation: The spacetime structure*, Eds. P S Letelier, W A Rodrigues Jr. (World Scientific: Singapore) 457.
- Carretero-González R, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1994a *Eur. J. Phys.* **14** 110.
- Carretero-González R, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1994b *Phys. Lett. A* **188** 48.
- Collins C V y Ellis G F R 1979 *Phys. Rep.* **56** 1976.
- Chauvet P y Guzmán E 1986 *Astrophys. Space Sci.* **126** 133.
- Chauvet P, Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1991a *Astrophys. Sp. Sci.* **178** 165.
- Chauvet P, Cervantes-Cota J y Núñez-Yépez H N 1991b in *Relativity and Gravitation: Classical and Quantum*, (World Scientific: Singapore) 480.
- Chauvet P, Cervantes-Cota J y Núñez-Yépez H N 1991c in *Relativity and Gravitation: Classical and Quantum*, (World Scientific: Singapore) 487.
- Chauvet P, Cervantes-Cota J y Núñez-Yépez H N 1992 *Class. Quantum Grav.* **9**

1923.

D'Humieres D, Beasley M R, Huberman B A y Libchaber A 1982 *Phys. Rev. A* **26** 3483.

Davis W F 1979 Ph. D tesis, Massachusetts Institute of Technology (EUA).

Dirac P A M 1937 *Nature, Lond.* **139** 323.

Dirac P A M 1938 *Proc. Roy. Soc. A* **165** 199.

Do Carmo M 1993 *Riemannian Geometry*, (Birkhäuser-Verlag: Boston, EUA).

Ellis G F R 1993 *The Renaissance of General Relativity and Cosmology*, Eds. Ellis G, Lanza A y Miller J (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido) 20.

Ellis G F R y Schmidt B G 1977 *Gen. Rel. Grav.* **8** 915.

Ferraz K, Francisco G y Matsas G E A 1991 *Phys. Lett. A* **156** 407.

Ford J 1983 *Phys. Today* **36** 40.

Francisco G y Matsas G E A 1988 *Gen. Rel. Grav.* **20** 1047.

Friedmann A A 1922 *Z. Phys.* **10** 377.

Goode S W y Wainright J 1982 *Phys. Rev. D* **26** 3315.

Guzmán E 1991a *Astrophys. Space Sci.* **179** 333.

Guzmán E 1991b *Gen. Rel. Grav.* **23** 1007.

Guzmán E 1993 *Astrophys. Space Sci.* **199** 289.

Halpern P 1987 *Gen. Rel. Grav.* **19** 73.

Hawking S W y Ellis G F R 1973 *The large scale structure of space time* (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido).

Hénon M 1982 *Physica D* **5** 412.

Jacobson N 1962 *Lie Algebras*, (Wiley-Interscience: New York, EUA).

Jensen R V 1987 *Am. Sci.* **75** 168.

- Jordan P 1959 *Z. Phys.* **157** 112.
- Khalatnikov I M, Lifshitz E M, Khanin K M, Shchur L N y Sinai Ya G 1985 *J. Stat. Phys.* **38** 97.
- Killing W 1892 *J. F. D. R. U. A. Math.* **109** 121.
- Koch B P, Leven R W, Pompe B y Wilke C 1983 *Phys. Lett. A* **96** 219.
- Kramer D, Stephani H, Herlt E y MacCallum M 1980 *Exact solutions of Einstein's field equations*, Ed. Schmutzer E (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido).
- Krasiński A 1993 *Physics in an inhomogeneous universe*, Polish Academy of Sciences, (Warszawa, Poland).
- Landau L D y Lifshitz E M 1962 *The Classical theory of fields*, (Pergamon Press: Oxford, Reino Unido).
- Lemâitre G 1927 *Ann. Soc. Sci. Brux A* **47** 49.
- Lichtenberg A J y Lieberman M A 1992 *Regular and chaotic dynamics*, (Springer-Verlag: Berlín, Alemania).
- Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130.
- Lorenz-Petzold D 1984a in *Solutions of Einstein's equations: Techniques and results*, (Springer-Verlag: Berlin, Alemania).
- Lorenz-Petzold D 1984b *Astrophys. Space Sci.* **98** 101.
- Lun A W C y McIntosh C B G 1973 *Gen. Rel. Grav.* **4** 475.
- MacCallum M A H 1980 in *General Relativity. An Einstein centenary survey*, Ed. Hawking S W e Israel W (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido) 533.
- MacCallum M A G 1993 *The Renaissance of General Relativity and Cosmology*, Eds. Ellis G, Lanza A y Miller J (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido) 213.
- Mach E 1872 *Conservation of Energy*, No. 1 (reimpreso por Open Court Publishing Company: Lasalle, Illinois, EUA 1911).
- Mach E 1883 *The Science of Mechanics*, (reimpreso por Open Court Publishing

- Company: Lasalle, Illinois, EUA 1902) Cap. II Sec. VI.
- Mandelbrot B B 1987 *The fractal geometry of nature*, (Freeman: San Francisco, EUA).
- Matzner R A y Tolman B W 1982 *Cosmological spatial curvature probed by microwave polarization*, (University of Texas: preprint, EUA).
- Misner C W 1969 *Phys. Rev. Lett.* **22** 1071.
- Misner C W, Thorne K S y Wheeler J A 1973 *Gravitation*, (Freeman: San Francisco, EUA).
- Morganstern R E 1967 *Phys. Rev.* **163** 1357.
- Núñez-Yépez H N, Salas-Brito A L, Vargas C y Vicente L 1989 *Eur. J. Phys.* **10** 99.
- Núñez-Yépez H N, Salas-Brito A L, Vargas C y Vicente L 1990 *Order-chaos-order transition in an extensible pendulum*, presentado en Dynamic Days-Texas, EUA.
- Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1992 *Reporte de Investigación* 01.0104.I.01.-006.92 UAM-I.
- Núñez-Yépez H N y Salas-Brito A L 1993 *Reporte de Investigación* 328 UAM-A.
- Núñez-Yépez H N, Salas-Brito A L y Sussman R 1995 *Reporte de Investigación* 01.0104.I.01.001.95 UAM-I.
- Osedelec V I 1968 *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** 197.
- Ottino J M 1989 *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*, (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido).
- Ozorio de Almeida A M 1988 *Hamiltonian systems: chaos and quantization*, (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido) parte I.
- Parker T S y Chua L O 1989 *Practical numerical algorithms for chaotic systems*, (Springer-Verlag: Berlín, Alemania).

- Pesin Ya B 1976 *Dokl. Akad. Nauk.* **226** 774.
- Piña E y Jiménez Lara L 1987 *Physica D* **26** 378.
- Pullin J 1991 in *Relativity and Gravitation: Classical and Quantum*, (World Scientific: Singapore) 189.
- Rasetti M 1986 *Modern methods in equilibrium statistical mechanics*, (World Scientific: Singapore).
- Raychaudhuri A K y Bandyopadhyay N 1978 *Phys. Rev. D* **18** 2756.
- Reasenberg R D, Shapiro I I, Mac Neil P E, Goldstein R B, Breidenthal J C, Brenkle J P, Cain D L y Kaufman T M 1979 *Astrophys. J.* **234** L219.
- Robertson H P 1929 *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** 822.
- Ruban V A y Finkelstein A M 1975 *Gen. Rel. Grav.* **6** 601.
- Ruelle D 1980 *La Recherche* **11** 132.
- Ruelle D 1989 *Chaotic evolution and strange attractors*, (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido / Academia Nazionale dei Lincei) parte I.
- Rugh S E y Jones B J T 1990 *Phys. Lett. A* **147** 353.
- Ryan M P y Shepley L C 1975 *Homogeneous relativistic cosmologies*, (Princeton U P: Princeton, EUA) 113, 267.
- Salas-Brito A. L. 1984 *Am. J. Phys.* **52** 1012.
- Sánchez-Ortiz G. I. y Salas-Brito A. L. 1995a *Phys. Lett. A* por aparecer.
- Sánchez-Ortiz G. I. y Salas-Brito A. L. 1995b *Physica D* por aparecer.
- Schuster H G 1984 *Deterministic chaos*, (Physik-Verlag: Berlin, Alemania).
- Sciama D W 1953 *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **113** 34.
- Singh T y Rai L N 1983 *Gen. Rel. Grav.* **15** 875.
- Som M M y Raychaudhuri A K 1968 *Proc. R. Soc. London* **A304** 81.
- Steinhardt P J 1993 *Class. Quantum Grav.* **10** S33.

- Steinhardt P J 1994 comunicación privada.
- Stephani H 1982 *General Relativity*, (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido).
- Tabor M 1989 *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, (Wiley-Interscience: New York, EUA).
- Thorne K S, Lee D L y Lightman A P 1973 *Phys. Rev.* **D7** 3563.
- Wald R M 1984 *General relativity*, (Chicago U P: Chicago, EUA).
- Walker A G 1935 *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **6** 81.
- Weinberg S 1972 *Gravitation and cosmology*, (Wiley-Interscience: New York, EUA).
- Will C M 1977 *Astrophys. J.* **214** 826.
- Will C M 1979 in *General relativity*, Ed. Hawking S W e Israel W (Cambridge U P: Cambridge, Reino Unido).
- Zardecki A 1983 *Phys. Rev. D* **28** 1235.