UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

EL TEOREMA DE MAPEO ESPECTRAL PARA LOS ESPECTROS COMBINADOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN MATEMATICAS

PRESENTA

ANGEL MARTINEZ MELENDEZ

DIRECTOR DE TESIS DR. ANTONI WAWRZYŃCZYK

MAYO DE 1996.

El teorema de mapeo espectral

para los espectros combinados

por

Angel Martínez Meléndez

Tesis de Maestría

Por todo el tiempo que debí haberles dedicado y no lo hice, por su comprensión y apoyo, dedico este trabajo a Ma. Cruz, Tania y Maydé

Agradezco al Dr. Antoni Wawrzyńczyk, su dedicación, su postura siempre amable y abierta, en la dirección de este trabajo. Gracias Dr. Antoni.

CONTENIDO

INTRODUCCION

Cuando se tiene un operador $T \in B(X)$, donde $B(X)$ es el álgebra de Banach de todos los operadores acotados que van de X en X, con X un espacio de Banach complejo, el espectro de T se define como

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \text{ no es invertible en } B(X)\}.$$

Se conocen muy bien sus propiedades como

i) $\sigma(T) \neq \emptyset$

ii) $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{C}$

iii) $\sigma(T)$ satisface la propiedad de mapeo espectral, es decir

$$p(\sigma(T)) = \sigma(p(T)),$$

donde p es un polinomio con coeficientes complejos.

También se define, para este espectro un cálculo operacional, a través de la expresión

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (T - \lambda I)^{-1} f(\lambda) d\lambda,$$

donde γ es una curva rectificable tal que $\sigma(T) \subset \gamma$ y f holomorfa.

En los años $50'as$, con los trabajos de R. Arens, A. Calderon y también de L. Waelbroeck, se generaliza el concepto de espectro para una n-ada de operadores y se inicia propiamente la teoría espectral multivariable. A partir de estos años aparecen varias clases de espectros (llamados espectros combinados), y se puede decir que hasta 1970, con los trabajos de J.L. Taylor, se inicia el "despegue" de esta teoría, pues su espectro permitió definir un cálculo operacional.

En este trabajo consideramos tres espectros combinados: El espectro puntual aproximativo τ, el espectro de Harte σ_H y el espectro de Taylor σ_T. Estos espectros, como veremos, cumplen propiedades similares a las del espectro de un sólo operador $\sigma(T)$. Así si σ_* es cualquiera de estos tres espectros tenemos que

i) $\sigma_*(T_1, T_2, \cdots, T_n) \neq \phi$ si $T_1, T_2, \cdots, T_n \in B(X)$ y conmutan entre sí.

ii) $\sigma_*(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{C^n}$.

iii) Si T es un sólo operador $\sigma_*(T) = \sigma(T)$.

iv) $\sigma_*(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ satisface la propiedad de mapeo espectral

$$p(\sigma_*(T_1, T_2, \cdots, T_n)) = \sigma_*(p(T_1, T_2, \cdots, T_n)),$$

donde $T_1, T_2, \cdots, T_n$, conmutan entre sí.

La propiedad de mapeo espectral, es de especial interés en este trabajo. Cuando A es un álgebra conmutativa con unidad, con la teoría de Gelfand se demuestra que

$$p(\sigma_H(a)) = \sigma_H(p(a)),$$

para toda $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^n$. Cuando A no es conmutativa el espectro de Harte puede ser vacío y la igualdad anterior no sería cierta, sin embargo, como lo demostramos en este trabajo, si los $a_1, a_2, \cdots, a_n$ conmutan entre sí la igualdad sigue siendo válida.

El espectro puntual aproximativo, en este trabajo lo definimos introduciendo el concepto de divisor topológico de cero, lo que nospermite demostrar de una manera más sencilla la importante contención

$$\partial(\sigma_H(a)) \subset \tau_I(a) \cap \tau_D(a),$$

donde τ_I y τ_D son los espectros puntual aproximativo izquierdo y derecho respectivamente y $a = a_1 \in A$. De hecho el primer capítulo lo dedicamos al estudio de los divisores topológicos de cero, como lo veremos en su momento es fundamental la demostración, que hacemos en este capítulo, de la equivalencia

$$\left\{ \begin{array}{ll} T \text{ es un divisor topológico común derecho de cero} & \Leftrightarrow \\ T' \text{ es un divisor topológico común izquierdo de cero,} & \end{array} \right.$$

donde T' es el conjugado de T.

La propiedad de mapeo espectral para el espectro puntual aproximativo, Harte no la demostró. Sin embargo podemos probar esto basados en que cumple la propiedad de proyección. Esta propiedad, que enunciamos a continuación, implica la propiedad de mapeo espectral. (ver apéndice).

Propiedad de proyección. Sea $P : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^k$ la función polinomial

$$P(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_k}),$$

y sea σ_* uno de los espectros σ_H, τ o σ_T, diremos que σ_* cumple la propiedad de proyección si

$$P(\sigma_*(a_1, a_2, \cdots, a_n)) = \sigma_*((a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_k})).$$

Para el espectro de Taylor demostramos la propiedad de proyección siguiendo el camino que siguieron Słodkowski y Żelazko (ver {14}), para una proyección particular, y luego la demostramos para cualquier proyección. De esta manera concluimos el teorema del mapeo espectral para el espectro de Taylor.

Como veremos, (Teorema 3.14), bajo ciertas restricciones el espectro de Taylor está contenido en el espectro de Harte, sin embargo, en general las contenciones $\sigma_T \subset \sigma_H$ y $\sigma_H \subset \sigma_T$ siguen siendo un problema aún no resuelto. La demostración de estas contenciones repercutiría sobre el cálculo operacional para el espectro de Harte y simplificaría muchas cuestiones sobre el espectro de Taylor, pues su tratamiento homológico hace que su desarrollo sea particularmente más complicado.

En el capítulo 1, como lo apuntamos previamente, estudiamos los divisores topológicos de cero. Los conceptos que presentamos así como resultados tan importantes como los teoremas 1.4, 1.5 y 1.12 o la equivalencia (1.13) son básicas en el desarrollo de los espectros de Harte y puntual aproximativo.

En el capítulo 2 se presentan, precisamente, los espectros de Harte y puntual aproximativo. Como habíamos dicho, sus propiedades similares a las del espectro usual de un elemento, son demostradas y queda de manifiesto la utilidad de la propiedad de proyección (Teoremas 2.15 y 2.16) como herramienta para demostrar el teorema de mapeo espectral.

En el capítulo 3 le toca turno al espectro de Taylor. Sus propiedades, también similares a las de los espectros anteriores, son más complicadas en su demostración y, nuevamente, el teorema de mapeo espectral es obtenido mediante la propiedad de proyección. (Teorema 3.40 y Corolario 3.41).

En la demostración del teorema de mapeo espectral mediante la propiedad de proyección se hace referencia al de Słodkowski-Żelazko. En el apéndice se presenta este teorema que nos permite justamente concluir el teorema de mapeo espectral mediante la propiedad de proyeccón.

Finalmente presentamos las conclusiones de este trabajo.

CAPITULO 1

DIVISORES TOPOLOGICOS DE CERO

Si A es un álgebra de Banach con unidad e y $a \in A$, la regularidad y singularidad de a dependen tanto de A como de a mismo. Cuando a es regular (izquierdo y derecho) y consideramos una subalgebra de Banach M de A, tal que a es un elemento de M, este puede perder su inversa y resultar singular en M. De igual forma si a es singular en A, podemos considerar A como una subalgebra de un álgebra N, entonces a puede resultar regular en N. Los divisores topológicos de cero, de A, son elementos que siempre son singulares independientemente de las subalgebras o superalgebras de A.

A menos que se diga lo contrario A siempre representará un álgebra de Banach compleja con unidad e.

1.1 Definición. Un elemento $a \neq 0$ de A se llama divisor topológico izquierdo de cero si

1.2 $$\inf_{||b||=1} ||ab|| = 0.$$

Notemos que si (1.2) es válida entonces para cada n entero positivo existe $b_n \in A$, tal que $||b_n|| = 1$ y $||ab_n|| < \frac{1}{n}$. Esto es existe una sucesión $\{b_n\} \subset A$ tal que $||b_n|| = 1$ y $\lim_{n\to\infty} ab_n = 0$. Recíprocamente, si esto último sucede, claramente la expresión (1.2) es válida. De esta manera la definición (1.1) es eqivalentemente, a que existe una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A tal que $||b_n|| = 1$ y $\lim_{n\to\infty} ab_n = 0$.
De manera similar definimos divisor topológico derecho de cero; un elemento el cual es divisor topologico de cero, izquierdo o derecho, se llama simplemente divisor topológico de cero.
Veamos el siguiente ejemplo.

1.3 Ejemplo. Sea $A = C[X]$ el espacio de las funciones continuas definidas en X, con $X = [0,1]$. A es un álgebra de Banach, con la norma

$$||f|| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

pues claramente se cumple que $||fg|| \leq ||f||||g||$.

Sea $g \in A$ dada por $g(t) = t$, y sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de elementos de A definida como

$$g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ -nt+1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Notemos que $||g_n|| = \max_{t\in[0,1]} ||g_n(t)|| = 1 \; \forall \, n$, y

$$(gg_n)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ -nt^2+t & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Entonces $\lim_{n\to\infty}(gg_n)(t) = 0$.
Por lo tanto $g(t)$ es un divisor topológico de cero.

1.4 Teorema. Todo divisor topológico de cero es no-invertible.

Demostración. Sea $a \in A$ un divisor topológico de cero y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $||b_n|| = 1$, $\forall \, n$ y tal que $\lim_{n\to\infty} ab_n = 0$. Si a fuera invertible existiría un elemento $a' \in A$ tal que $a'a = e$, luego multiplicando por b_n tenemos que $a'ab_n = b_n$, tomando límite cuando $n \to \infty$, tenemos que $b_n \to 0$, lo cual no es posible pues $||b_n|| = 1$. Por lo tanto a no es invertible.□

El recíproco de este teorema no es cierto como lo veremos un poco mas adelante, auxiliandonos con el siguiente resultado.

1.5 Teorema. Si h no es un divisor izquierdo de cero en A, entonces h no es un divisor topológico izquierdo de cero si y sólo si el ideal hA es cerrado.

Demostración. Sea T_h la transformación lineal de A sobre hA dada por $T_h(a) = ha$. Si $T_h(a) = 0$, entonces $ha = 0$, como h no es divisor de cero se tiene que $a = 0$, esto es T_h es inyectiva y por lo tanto $(T_h)^{-1}$ existe. Notemos que

$$||(T_h)^{-1}|| = \sup_{x \in hA} \frac{||(T_h)^{-1}x||}{||x||} = \sup_{a \in A} \frac{||a||}{||ha||}.$$

Esta doble igualdad nos permite demostrar que $(T_h)^{-1}$ es acotado si y sólo si h no es un divisor topológico izquierdo de cero. En efecto, supongamos que $(T_h)^{-1}$ es acotado. Si h es un divisor topológico izquierdo de cero, existe una sucesión b_n tal que $||b_n|| = 1$ para todo n y

$$\lim_{n \to \infty} hb_n = 0.$$

Pero $||(T_h)^{-1}|| > \frac{1}{||hb_n||}$, lo que implica que $(T_h)^{-1}$ no es acotado, contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto h no es un divisor topológico izquierdo de cero. Recíprocamente supongamos que h no es divisor topológico izquierdo de cero. Si $(T_h)^{-1}$ no es acotado entonces existe una sucesión b_n de elementos de A, no nulos, tal que

$$\frac{||b_n||}{||hb_n||} \to \infty,$$

o sea $\frac{1}{||h\frac{b_n}{||b_n||}||} \to \infty$. Por lo tanto $\frac{b_n}{||b_n||}$ es una sucesión tal que $h\frac{b_n}{||b_n||} \to 0$, lo que contradice el hecho de que h no es un divisor topológico izquierdo de cero. Por lo tanto $(T_h)^{-1}$ es acotado.
Ahora si demostremos la doble implicación de nuestro teorema.

($\Rightarrow$). Si h no es un divisor topológico izquierdo de cero, demostremos que $\overline{hA} \subseteq hA$.
Sea $x \in \overline{hA}$, entonces existe una sucesión $\{ha_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de hA tal que $ha_n \to x$. De esta manera y usando el hecho de que $(T_h)^{-1}$ es acotado se sigue que

$$\begin{aligned} ||a_n - a_m|| &= ||T_h^{-1}(ha_n) - T_h^{-1}(ha_m)|| = ||T_h^{-1}(ha_n - ha_m)|| \\ &\leq ||T_h^{-1}||||ha_m - ha_n|| \to 0, \end{aligned}$$

como A es un espacio de Banach, $\{a_n\}$ converge a un elemento $b_0 \in A$. Por lo tanto $ha_n \to hb_0$, y $x = hb_0$. O sea $x \in hA$, por lo cual hA es cerrado.

($\Leftarrow$). Supongamos que hA es cerrado, entonces T_h es un operador lineal acotado del espacio de Banach A sobre el espacio de Banach hA, por consiguiente $(T_h)^{-1}$ es acotado y por lo tanto h no es un divisor topológico izquierdo de cero.□

1.6 Ejemplo. Sea $A = H^\infty$, el espacio de las funciones holomorfas y acotadas en el disco unitario. H^∞ es un álgebra de Banach con las operaciones puntuales y la norma $||f|| = \sup|f(t)|$.
Sea $f \in H^\infty$ dado por $f(z) = z$. f no es invertible, no es divisor de cero en H^∞ y $zH^\infty = \{g \in H^\infty : g(0) = 0\}$ es cerrado. Por el teorema (1.5) $f(z) = z$ no es un divisor topológico izquierdo de cero. Esto es $f(z) = z$ no es invertible y no es un divisor topológico izquierdo de cero.

Aunque el teorema (1.5) está enunciado para divisores topológicos izquierdos de cero existe el análogo para los divisores derechos, de esta manera podemos decir que $f(z) = z$ no es un divisor topológico derecho de cero, por lo cual podemos concluir que el recíproco del teorema (1.4) no es cierto. Sin embargo el siguiente teorema establece la manera en que los divisores topológicos de cero estan distribuidos en el conjunto de los elementos no-invertibles.

1.7 Teorema. Sea S el conjunto de los elementos no-invertibles, si z pertenece a la frontera de S, entonces z es un divisor topológico de cero, izquierdo y derecho.

Demostración. Como se sabe el conjunto de los elementos regulares es abierto por lo tanto S es cerrado. Así pues si $z \in \partial S$, existe $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos regulares tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Veamos que z es un divisor topológico de cero.
Notemos que ${z_n}^{-1}z - e = {z_n}^{-1}(z - z_n)$. Ahora afirmamos que la sucesión $\{{z_n}^{-1}\}$ no es acotada, en efecto, pues en caso contrario tenemos que

$$||{z_n}^{-1}z - e|| \leq ||{z_n}^{-1}||||z - z_n|| \to 0,$$

lo que nos permite decir que existe k tal que

$$||{z_k}^{-1}z - e|| < 1.$$

Pero esto nos dice que $z_k{}^{-1}z$ tiene inversa y por consiguiente $z_k z_k{}^{-1} z = z$ también. Esto contradice que $z \in S$, entonces $\{z_n{}^{-1}\}$ no es acotada.
Sea

$$w_n = \frac{z_n{}^{-1}}{||z_n{}^{-1}||}.$$

Entonces $||w_n|| = 1$ y

$$zw_n = \frac{zz_n{}^{-1}}{||z_n{}^{-1}||} = \frac{1 + (z - z_n)z_n{}^{-1}}{||z_n{}^{-1}||} = \frac{1}{||z_n{}^{-1}||} + (z - z_n)w_n \to 0.$$

Similarmente $w_n z \to 0$, y así z es un divisor topológico izquierdo y derecho.□

La definición (1.1) se extiende para una n-ada de elementos de A, como lo vemos a continuación.

1.8 Definición. Sea $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^n$, a es un divisor topológico común izquierdo de cero si existe una sucesión $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, tal que $||b_k|| = 1, \forall k$ y

1.9 $$\lim_{k\to\infty} a_i b_k = 0,$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$.
Si por otro lado se cumple que $\lim_{k\to\infty} b_k a_i = 0, \forall\, i$, decimos que a es un divisor topológico común derecho de cero.

1.10 Definición. Sea $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^n$, definimos los números $\rho_I(a)$ y $\rho_D(a)$ como

a) $\rho_I(a) = \inf_{||z||=1} \sum_{i=1}^{n} ||a_i z||$.

b) $\rho_D(a) = \inf_{||z||=1} \sum_{i=1}^{n} ||z a_i||$.

Si el álgebra A es conmutativa, cualquiera de los dos números anteriores lo representaremos como $\rho(a)$.

1.11 Observación. Si $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A^n$ y $a' = (a_{\theta(1)}, \cdots, a_{\theta(n)})$, donde θ es cualquier permutación de $\{1, 2, \cdots, n\}$, entonces $\rho(a) = \rho(a')$.

Notemos también que a es un divisor topológico común izquierdo (respectivamente derecho) de cero, si y sólo si $\rho_I(a) = 0$ (respectivamente $\rho_D(a) = 0$).

El siguiente teorema caracteriza los divisores topológicos de cero para un sistema de operadores lineales acotados que van de un espacio de Banach en sí mismo.

1.12 Teorema. Si $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n) \in B[X]^n$, entonces

a) T es un divisor topológico común izquierdo de cero si y sólo si $\inf_{||x||=1} \sum_{j=1}^{n} ||T_j x|| = 0$.

b) T es un divisor topológico común derecho de cero si y sólo si $\sum_{j=1}^{n} T_j X \neq X$.

Demostración. a)($\Rightarrow$). Supongamos que T es un divisor topológico común izquierdo de cero. Existe una sucesión U_k de elementos de $B[X]$, $||U_k|| = 1$ para todo k tal que

$$\lim_{k\to\infty} T_j U_k = 0,$$

para cada $j = 1, 2, \cdots, n$.
Pero $||U_k|| = \sup_{||y||=1} ||U_k(y)||$ para todo k, por lo cual podemos construir una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $||y_k|| = 1$ y $||U_k y_k|| \geq \frac{1}{2}$. Sea

$$x_k = \frac{U_k y_k}{||U_k y_k||},$$

entonces $||x_k|| = 1$ y se verifica que

$$||T_j \frac{U_k y_k}{||U_k y_k||}|| \leq ||T_j U_k||\, ||\frac{y_k}{||U_k y_k||}|| \leq 2||T_j U_k|| \to 0,$$

para cada $j = 1, 2, \cdots, n$.
Por lo tanto $\inf_{||x||=1} \sum_{j=1}^{n} ||T_j x|| = 0$.

($\Leftarrow$). Supongamos ahora que $\inf_{||x||=1} \sum_{j=1}^{n} ||T_j x|| = 0$. Existe una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, tal que $||x_k|| = 1$, $\forall k$ y $||T_j x_k|| \to 0$, cuando $k \to \infty$, para cada

$j = 1, 2, \cdots, n$.
Por el teorema de Hahn-Banach, para cada k existe $f_k \in X'$ tal que $||f_k|| = 1$ y $|f_k(x_k)| = 1$.
Tomando $U_k = x_k \otimes f_k$, donde $U_k(y) = f_k(y)x_k$, se tiene que $U_k \in B[X]$ y también
$||U_k|| = \sup_{||y||=1} ||U_k(y)|| = \sup_{||y||=1} ||f_k(y)x_k|| = \sup_{||y||=1} |f_k(y)|||x_k||$. O sea $||U_k|| = ||f_k||||x_k|| = 1$.
Por otra parte tenemos
$||T_jU_k(y)|| = ||T_jf_k(y)x_k|| = |f_k(y)|||T_jx|| \leq ||f_k|| \, ||y|| \, ||T_jx_k|| \to 0$. Por lo tanto tenemos que $||T_jU_k|| \to 0$ y T es un divisor topológico común izquierdo de cero.

b) Para esta parte necesitamos demostrar la siguiente equivalencia.

$$
\textbf{(1.13)} \begin{cases} T \text{ es un divisor topológico común derecho de cero} & \Leftrightarrow \\ T' \text{ es un divisor topológico común izquierdo de cero} \end{cases}
$$

Si T es un divisor topológico común derecho de cero, existe una sucesión $\{U_k\}$ de operadores en $B[X]$ tal que $||U_k|| = 1, \forall k$ y $U_kT_j \to 0$, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$. Pero esto implica que $T_j'U_k' \to 0$ y como $||U_k'|| = 1$, T' es un divisor topológico común izquierdo de cero.
Recíprocamente si T' es un divisor topológico común izquierdo de cero, por el inciso a) de este teorema tenemos que

$$
\inf_{||f||=1} \sum_{j=1}^{n} ||T_j'f|| = \inf_{||f||=1} \sum_{j=1}^{n} ||f \circ T_j|| = 0.
$$

Entonces existe una sucesión $\{f_k\}$ de elementos de X' con $||f_k|| = 1$ y que cumple que $\sum_{j=1}^{n} ||f_k \circ T_j|| \to 0$, si $k \to \infty$, pero esto nos dice que $||f_k \circ T_j|| \to 0$, si $k \to \infty$, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$.
Tomando $U_k = x_0 \otimes f_k$, $x_0 \in A$, tal que $||x_0|| = 1$ dado por

$$
U_k(x) = f_k(x)x_0,
$$

tenemos que $\lim_{k\to\infty} U_kT_j = 0$. En efecto

$$
||U_kT_j|| = \sup_{||x||=1} ||U_k(T_j(x))|| = \sup_{||x||=1} |f_k(T_j(x))x_0| \leq \sup_{||x||=1} |f_k(T_jx)|.
$$

Esto es $||U_k T_j|| \leq ||f_k \circ T_j||$.
Como $||f_k \circ T_j|| \to 0$, cuando $k \to \infty$, entonces $U_k T_j \to 0$, cuando $k \to \infty$, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$. Como además $||U_k|| = ||f_k|| = 1$, concluimos que T es un divisor topológico común derecho de cero. La demostración de la eqivalencia (1.13) está terminada.

Usaremos esta equivalencia para demostrar el inciso b) de este teorema.

Sea $G : X^n \longrightarrow X$ dado por

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} T_j x_j, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

G es un operador lineal acotado con la norma $||x|| = \max_j |x_j|$. También observemos que

(1.14) $\sum_{j=1}^{n} T_j X = X$ si y sólo si G es sobre.

Ahora si demostremos la implicación ($\Rightarrow$). Supongamos que T es un divisor topológico común derecho de cero. Si $\sum_{j=1}^{n} T_j X = X$, por (1.14) G es sobre y por el teorema del mapeo abierto G es abierto por consiguiente existe $k > 0$ tal que para todo $y \in X$ existe $x \in X^n$ tal que $G(x) = y$ y $k||x|| \leq ||y||$.
Así suponiendo que $||y|| < 1$ se tiene que

$$ky = G(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ y } ||x|| = \max |x_i| \leq \tfrac{1}{k}||ky|| = ||y|| < 1.$$

esto es

$$\{ky : ||y|| < 1\} \subseteq \{G(x_1, x_2, \cdots, x_n) : ||x|| \leq 1\}.$$

En consecuencia si $f \in X'$,

1.15 $||f \circ G|| = \sup_{||x=1||} |f(Gx)| \geq \sup_{||y|| \leq 1} |f(ky)| = k||f||$.

Como $\sum_{j=1}^{n} ||f \circ T_j|| \geq ||\sum_{j=1}^{n} f \circ T_j|| = ||f \circ G||$, se sigue que

$$\inf_{||f||=1} \sum_{j=1}^{n} ||f \circ T_j|| > 0,$$

esto es $\inf_{||f||=1}\sum_{j=1}^{n}||T_j{}'f|| > 0$.
Por el inciso a) de este teorema tenemos que T' no es un divisor topológico común izquierdo de cero y por (1.13) T no es divisor topológico común derecho de cero, lo que contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto $\sum_{j=1}^{n} T_jX \neq X$.

($\Leftarrow$). Supongamos que $\sum_{j=1}^{n} T_jX \neq X$ y demostremos que T es un divisor topológico común derecho de cero. Si esta conclusión es falsa por (1.13) T' no es un divisor topológico común izquierdo de cero, luego por a) de este teorema tenemos que $\inf_{||f||=1}\sum_{j=1}^{n}||f \circ T_j|| \neq 0$.
Afirmamos que existe $k > 0$ tal que (1.15) se cumple. En efecto, pues en caso contrario para $k = \frac{1}{m}, m = 1, 2, \cdots$, existe una sucesión $\{f_m\} \subset X'$ tal que $||f_mG|| < \frac{1}{m}||f_m||$. Por lo tanto para $x \in X$, tenemos que

$$\begin{aligned} ||(f_mT_j)(x)|| &= ||f_m(T_1(0) + \cdots + T_j(x) + \cdots + T_n(0))|| \\ &= ||f_mG(0, \cdots 0, x, 0, \cdots, 0)|| \\ &< ||f_mG||||x||. \end{aligned}$$

Esto es $||(f_mT_j)(x)|| < \frac{1}{m}||f_m||||x||$.

Por lo tanto

$$||(\frac{f_m}{||f_m||}T_j)(\frac{x}{||x||})|| < \frac{1}{m}.$$

Como x fué arbitrario tenemos que $||\frac{f_m}{||f_m||}T_j|| < \frac{1}{m}$, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$.
En consecuencia

$$\sum_{j=1}^{n}||\frac{f_m}{||f_m||}T_j|| < \frac{n}{m},$$

de donde se sigue que $\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{n}||\frac{f_m}{||f_m||}T_j|| = 0$, pero esto implica que $\inf_{||f||=1}\sum_{j=1}^{n}||f \circ T_j|| = 0$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción muestra que efectivamente existe $k > 0$ tal que

$$||f \circ G|| \geq k||f||,$$

para toda $f \in X'$.
Esto es tenemos que $||G'f|| \geq k||f||$, para algún $k > 0$, por lo que G es sobre. (ver {20} T. 9.10). Ahora por (1.14) tenemos que $\sum_{j=1}^{n} T_jX = X$, pero esto

contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto T es un divisor topológico común derecho de cero.□

1.16 Definición. Sea A_1 un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad. Si A_1 contiene una subalgebra que a su vez contiene la unidad y es isomorfa a A, A_1 se llama extensión de A. Una extensión A_1 es llamada extensión isométrica si tal subalgebra es isométrica a A.

Si A es un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad, por una extensión apropiada todos sus divisores topológicos de cero pueden ser convertidos en divisores de cero, como se justificará en el siguiente desarrollo.

Sea $\tilde{A}_\infty$ el conjunto de todas las sucesiones $\{x_n\}$ de elementos de A tales que

1.17 $$\limsup_{n\to\infty} ||x_n|| < \infty.$$

Definimos una relación en $\tilde{A}_\infty$: $\{x_n\}$ es equivalente a $\{y_n\}$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = 0$. Esta relación es en efecto de equivalencia. Sea $A_\infty = [\tilde{A}_\infty]$ el conjunto de todas las clases de equivalencia y denotemos por $[x_n]$ la clase que contiene $\{x_n\}$. Esto es

$$A_\infty = \{\tilde{x} = [x_n] : \{x_n\} \in \tilde{A}_\infty\}.$$

A_∞ es un álgebra de Banach con unidad, bajo las operaciones

$$[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n],\ \alpha[x_n] = [\alpha x_n],\ [x_n][y_n] = [x_n y_n],$$

y la norma $||[x_n]|| = \limsup_n ||x_n||$. En efecto, demostremos que A_∞ es un espacio de Banach. Sea $\{\tilde{x}_k\} = [x_n{}^{(k)}]$ una sucesión de Cauchy en A_∞, por lo tanto para todo ϵ existe n_0 tal que

$$\limsup_n ||x_n{}^{(p)} - x_n{}^{(q)}|| < \epsilon,$$

con $p, q \geq n_0$. Por lo tanto, para cada k tomemos n_k tal que

1.18 $$||x_m{}^{(k)} - x_{n_k}{}^{(k)}|| < 2^{-k}, \text{ si } m > n_k.$$

Sea $\tilde{x}$ la clase que contiene la sucesión

$$\{x_{n_1}{}^{(1)}, x_{n_2}{}^{(2)}, \cdots, x_{n_k}{}^{(k)}, \cdots\}. \tag{1.19}$$

Denotemos también por $\tilde{x}^{(k)}_{n_k}$ la clase que contiene la sucesión

$$\{x_{n_k}{}^{(k)}, x_{n_k}{}^{(k)}, \cdots, x_{n_k}{}^{(k)}, \cdots\}.$$

Por lo tanto por (1.18)

$$||\tilde{x}_k - \tilde{x}^{(k)}_{n_k}|| = \limsup_{m} ||x_m{}^{(k)} - x_{n_k}{}^{(k)}|| \leq 2^{-k}.$$

Observemos que

$$||\tilde{x}^{(k)}_{n_k} - \tilde{x}^{(m)}_{nm}|| \leq ||\tilde{x}^{(k)}_{n_k} - \tilde{x}_k|| + ||\tilde{x}_k - \tilde{x}_m|| + ||\tilde{x}_m - \tilde{x}^{m}_{n_m}||.$$

$$\leq ||\tilde{x}_k - \tilde{x}_m|| + 2^{-k} + 2^{-m}.$$

Esto implica que (1.19) es una sucesión de Cauchy en A, como A es completo pertenece a A_∞. Por otra parte

$$||\tilde{x} - \tilde{x}_k|| \leq ||\tilde{x} - \tilde{x}^{(k)}_{n_k}|| + ||\tilde{x}^{(k)}_{n_k} - \tilde{x}_k||$$

$$\leq ||\tilde{x} - \tilde{x}^{(k)}|| + 2^{-k},$$

pero tambíen

$$||\tilde{x} - \tilde{x}^{(k)}_{n_k}|| = \limsup_{p} ||x_{n_p}{}^{(p)} - x_{n_k}{}^{(k)}|| \leq \limsup_{p} ||\tilde{x}_p - \tilde{x}_k|| + 2^{-k}$$

Por lo tanto se sigue que $\lim_{k\to\infty} ||\tilde{x} - \tilde{x}^{(k)}_{n_k}|| = 0$ y por consiguiente

$$\lim_{k\to\infty} ||\tilde{x} - \tilde{x}_k|| = 0.$$

Finalmente tenemos que

$$||[x_n][y_n]|| = \limsup_{n} ||x_n y_n|| \leq (\limsup_{n} ||x_n||)(\limsup_{n} ||y_n||).$$

Por lo cual

$$||[x_n][y_n]|| \leq ||[x_n]||||[y_n]||.$$

La unidad en A_∞ es $\tilde{1} = [\{e\}]$. $\{e\}$ la sucesión constante cuyos elementos son todos iguales a e.

Ahora bien si $x \in A$, sea $\{x\}$ la sucesión cuyos elementos son todos x, entonces la aplicación $\varphi : A \longrightarrow A_\infty$, $\varphi(x) = [x]$, es un isomorfismo isométrico de A en A_∞, es decir φ es un isomorfismo y además una isometría.

Si $[z_n]$ es un divisor toplógico derecho de cero en A_∞, existe una sucesión $[x_n{}^{(k)}]$ $k = 1, 2, \cdots$ en A_∞ tal que $|||[x_n{}^{(k)}]||| = 1$ y $|||[x_n{}^{(k)} z_n]||| < k^{-1}$, para cada k. Ahora para cada k tomamos n_k tal que $||x_{n_k}{}^{(k)}|| \geq 2^{-1}$ y $||x_{n_k}^{(k)}|| < k^{-1}$. Definimos $y_n = x_{n_k}{}^{(k)}$, para $n = n_k$, y $y_n = 0$ en otro caso. Tenemos entonces que $[y_n] \neq 0$ y también $||y_n z_n|| < k^{-1}$, para $n \geq n_k$, es decir $[y_n z_n] = 0$. O sea $[z_n]$ es un divisor derecho de cero en A_∞. De esta manera hemos justificado que con una extensión adecuada un divisor topológico de cero puede ser convertido en un divisor de cero.

1.20 Teorema. Sea A un álgebra conmutativa con unidad, y sea $a = (a_1, a_2. \cdots, a_n) \in A^n$, tal que $\rho(a) = 0$. Entonces para cada $x \in A$ existe $\lambda \in \mathbf{C}$, tal que $\rho(a') = 0$, donde $a' = (a_1, a_2, \cdots, a_n, x - \lambda e)$.

Demostración. Sea $\varphi : A \longrightarrow A_\infty$, el isomorfismo isométrico $\varphi(x) = [x]$. Como $\rho(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$ existe una sucesión $\{w_k\}$ de elementos de A tal que $||w_k|| = 1$, $\forall k$ y $\lim_{k\to\infty} ||w_k a_i|| = 0$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$

Sea $\tilde{w}_0 = [\{w_k\}]$ elemento de A_∞.

$$\tilde{w}_0 a_i = [\{w_k\}][\{a_i\}] = [\{w_k a_i\}] = 0,$$

en A_∞ y para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.
Ponemos ahora

$$J = \{\tilde{w} \in A_\infty : \tilde{w} a_i = 0, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n.\}.$$

J es un ideal cerrado en A_∞. En efecto, es evidente que J es un ideal, comprobemos que es cerrado. Sea $\tilde{w}^{(k)} = [x_n{}^{(k)}]$ una sucesión de elementos de J tal que converge a $\tilde{w} = [x_n]$. Entonces para cada k podemos elegir n_k tal que

$$||x_{n_k}{}^{(k)} - x_{n_k}|| < k^{-1} \text{ y } ||x_{n_k}{}^{(k)} a_i|| < k^{-1},$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Como además se tiene que

$$||x_{n_k} a_i|| \leq ||x_{n_k}{}^{(k)} a_i - x_{n_k} a_i|| + ||x_{n_k}{}^{(k)} a_i||,$$

entonces

$$||x_{n_k}a_i|| < k^{-1}||a_i|| + k^{-1}$$

Por lo tanto $||x_{n_k}a_i|| \to 0$, cuando $k \to \infty$, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Esto es $\tilde{w} = [x_n]$ pertenece a J, por lo que J es cerrado.

Para cada $x \in A$, ($[x] \in A_\infty$), sea $T_x : J \longrightarrow J$ dado por $T_x(\tilde{w}) = x\tilde{w}$. T_x es un operador lineal acotado. Existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que el operador

$$T_x - \lambda I = T_{x-\lambda e}$$

pertenece a la frontera del conjunto de elementos no-invertibles en $B[J]$, por lo que es un divisor topológico izquierdo de cero, (ver teorema 1.7). Por el teorema (1.12a) existe una sucesión $\{\tilde{w}_j\}$ de elementos de J, tal que $||\tilde{w}_j|| = 1, \forall j$ y $||T_{x-\lambda e}\tilde{w}_j|| \to 0$, cuando $j \to \infty$. O de otra manera $||(x-\lambda e)\tilde{w}_j|| \to 0$, cuando $j \to \infty$.

Pero esto nos dice que para cada entero $k > 0$, existe un entero $j(k) > 0$, tal que $||(x - \lambda e)\tilde{w}_{j(k)}|| < \frac{1}{k}$. De la definición de esta norma (ver 1.17), tenemos que existe $z_k \in \tilde{w}_{j(k)}$, tal que $||(x - \lambda e)z_k|| < \frac{1}{k}$, como además $||\tilde{w}_{j(k)}|| = 1$, z_k puede ser tal que $1 \geq ||z_k|| > 1 - \frac{1}{k}$. Pero $||a_i z_k|| < \frac{1}{k}$, pues $\tilde{w}_{j(k)}$ pertenece a J.

Así pues todo esto nos dice que existe una sucesión $\{z_k\}$ tal que $||z_k|| = 1$, $\lim_{k\to\infty}(x - \lambda e)z_k = 0$ y $\lim_{k\to\infty} a_i z_k = 0$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Esto es $a' = (a_1, a_2, \cdots, a_n, x - \lambda e)$ es un divisor topológico de cero, por lo tanto $\rho(a') = 0$, como x fué arbitrario el teorema esta totalmente demostrado.□

CAPITULO 2

ESPECTROS PUNTUAL APROXIMATIVO Y DE HARTE

La teoría espectral de varias variables que comenzó en los años $50's$ con G. Shilov, L. Waelbroeck, R. Arens y otros (ver {2}, {11} y {19}), arrojó varias clases de espectro combinado. En los años $60's$ y $70's$ se generaliza este concepto (de espectro combinado) para una n-ada de operadores. En esta unidad estudiamos todas las propiedades de dos espectros, el puntual aproximativo y el de Harte, como veremos estas propiedades son similares a las que posee el espectro que conocemos de un sólo operador.

Nuevamente, a menos que se diga lo contrario, A siempre representará un álgebra de Banach compleja con unidad e.

2.1 Definición. Sea $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^n$. El espectro puntual aproximativo izquierdo de a, $\tau_I(a)$, es el conjunto

$$\tau_I(a) = \{\lambda \in \mathbf{C^n} : a - \lambda \, \text{es un divisor topológico común izquierdo de cero}\},$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ y $a - \lambda = (a_1 - \lambda_1 e, a_2 - \lambda_2 e, \cdots, a_n - \lambda_n e)$.
El espectro puntual aproximativo derecho de a, $\tau_D(a)$ es el conjunto

$$\tau_D(a) = \{\lambda \in \mathbf{C^n} : a - \lambda \, \text{es un divisor topológico común derecho de cero}\}.$$

El espectro puntual aproximativo combinado de a se define como

$$\tau(a) = \tau_I(a) \cup \tau_D(a).$$

Es claro (ver observación (1.11)) que

$$\mathbf{2.2}\left\{\begin{array}{rl} \lambda \in \tau_I(a) & \text{(respectivamente en } \tau_D(a)) \Leftrightarrow \\ \rho_I(a-\lambda) = 0 & \text{(respectivamente } \rho_D(a-\lambda) = 0). \end{array}\right.$$

Procedemos a definir el espectro de Harte.

2.3 Definición. Sea $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^n$. Decimos que a es regular izquierdo si existe $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in A^n$ tal que

$$b \cdot a = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots b_n a_n = e.$$

Pero si $a \cdot b = e$ decimos que a es regular derecho. En base a esto definimos los espectros siguientes

El espectro izquierdo de a:

$$\sigma_I(a) = \{\lambda \in \mathbf{C}^n : a - \lambda \text{ no es regular izquierdo}\}.$$

El espectro derecho de a:

$$\sigma_D(a) = \{\lambda \in \mathbf{C}^n : a - \lambda \text{ no es regular derecho}\}.$$

El espectro de Harte de a:

$$\sigma_H(a) = \sigma_I(a) \cup \sigma_D(a).$$

En terminos de ideales podemos decir que $\lambda \in \sigma_I(a)$ si y sólo si el ideal generado por $a - \lambda$, $\sum_{j=1}^n A(a_j - \lambda_j)$, es propio. Similarmente para el espectro derecho.
Notemos que si $A^{\check{}}$ es el álgebra obtenida invirtiendo los productos en A, entonces

2.4 $$\sigma_D{}^A(a) = \sigma_I{}^{A^{\check{}}}(a),$$

en vista de lo cual se puede hacer todo para uno de los espectros (izquierdo o derecho) y usar (2.4) para deducir los resultados para el otro espectro.

Como sabemos el espectro de un elemento es un conjunto compacto, esta propiedad se extiende a estos dos espectros, es decir los espectros puntüal aproximativo y de Harte son subconjuntos compactos de $\mathbf{C}^n$. Antes de demostrar estas aseveraciones veamos algunos hechos importantes.

Para un sólo elemento $a = a_1$ de A se tiene que

2.5 $$\sigma_H(a) = \sigma(a),$$

donde $\sigma(a)$ es el espectro usual para un elemento.

Por otro lado tenemos que si $a \in A^n$ entonces

$$\textbf{2.6} \qquad \sigma_H(a) \subset \sigma_H(a_1) \times \sigma_H(a_2) \times \cdots \times \sigma_H(a_n).$$

La igualdad en (2.5) es inmediata, demostremos la contención (2.6). Si $\lambda \notin \sigma_H(a_1) \times \sigma_H(a_2) \times \cdots \times \sigma_H(a_n)$, entonces $\lambda_k \notin \sigma_H(a_k)$, para algún k. O sea $\lambda_k \notin \sigma_D(a_k)$ y $\lambda_k \notin \sigma_I(a_k)$, pero esto implica que $a_k - \lambda_k e$ es invertible.
Si $b_k = (a_k - \lambda_k)^{-1}$, y $b_j = 0$ para $j \neq k$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j - \lambda_j e)b_j = (a_k - \lambda_k e) = e,$$

y también

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(a_j - \lambda_j e) = b_k(a_k - \lambda_k e) = e.$$

Por lo cual $\lambda \notin \sigma_D(a)$ y $\lambda \notin \sigma_I(a)$, entonces $\lambda \notin \sigma_H(a)$, de esta manera (2.6) está demostrado.

Las condiciones (2.5) y (2.6) implican que

$$\textbf{2.7} \qquad \sigma_H(a) \subset \sigma(a_1) \times \sigma(a_2) \times \cdots \times \sigma(a_n).$$

2.8 Teorema. Para todo $a \in A^n$, $\sigma_H(a)$ es compacto.

Demostración. Como $\sigma(a_1) \times \sigma(a_2) \times \cdots \times \sigma(a_n)$ es compacto y teniendo en cuenta la contención (2.7) basta demostrar que $\sigma_H(a)$ es cerrado. Lo demostraremos para $\sigma_I(a)$, para $\sigma_D(a)$ es análogo. Sea $\lambda \in \mathbf{C^n}$, tal que $\lambda \notin \sigma_I(a)$. Existe $b \in A^n$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(a_j - \lambda_j) = e.$$

Si $\lambda' \in \mathbf{C^n}$ es suficientemente cercano a λ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} ||b_j|||\lambda_j' - \lambda_j| < 1,$$

Entonces $||e - \sum_{j=1}^{n} b_j(a_j - \lambda_j'e)|| = ||\sum_{j=1}^{n} b_j(\lambda_j' - \lambda_j)|| < 1$. Por lo tanto $\sum_{j=1}^{n} b_j(a_j - \lambda_j'e)$ es invertible en A.

Sea $\xi = \sum_{j=1}^{n} b_j(a_j - \lambda_j'e)$, entonces

$$\xi^{-1}b_1(a_1 - \lambda_1'e) + \xi^{-1}b_2(a_2 - \lambda_j'e) + \cdots + \xi^{-1}b_n(a_n - \lambda_n'e) = e,$$

por lo cual $\lambda' \notin \sigma_I(a)$.

Resumiendo, si λ' es suficientemente cercano a λ, entonces $\lambda' \notin \sigma_I(a)$, por lo cual $\sigma_I(a)$ es cerrado. □

La demostración de que $\tau(a)$ es compacto requiere el siguiente resultado

2.9 Teorema.. Para todo $a \in A^n$,

$$\tau(a) \subset \sigma_H(a)$$

Demostración. Lo haremos para los espectros izquierdos y por (2.4) se seguirá para los derechos.
Sea $\lambda \in \tau_I(a)$, entonces $a - \lambda$ es un divisor topológico común izquierdo de cero. Existe una sucesión $\{b_k\}$ de elementos de A tal que $\lim_{k\to\infty}(a_i - \lambda_i e)b_k = 0$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ y $||b_k|| = 1 \forall n$. Afirmamos que $\lambda \in \sigma_I(a)$, en efecto pues en caso contrario existe $(w_1, w_2, \cdots, w_n) \in A^n$ tal que

$$w_1(a_1 - \lambda_1) + w_2(a_2 - \lambda_2) + \cdots + w_n(a_n - \lambda_n) = e,$$

multiplicando por b_k esta igualdad, tenemos que

$$w_1(a_1 - \lambda_1)b_k + w_2(a_2 - \lambda_2)b_k + \cdots + w_n(a_n - \lambda_n)b_k = b_k.$$

Esta última igualdad implica que $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$, lo cual no es posible puesto que $||b_k|| = 1 \ \forall k$. Esta contradicción muestra que $\lambda \in \sigma_I(a)$, como queríamos demostrar. □

2.10 Teorema. Para todo $a \in A^n$, $\tau(a)$ es compacto.

Demostración. Por los teoremas (2.8) y (2.9) es suficiente demostrar que $\tau(a)$ es cerrado.

Supongamos que $\lambda \notin \tau(a)$, entonces $a - \lambda$ no es divisor topológico común izquierdo de cero (tampoco derecho), de la observación (1.11) se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $b \in A$, $\epsilon||b|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||(a_i - \lambda_i)b||$. Por tanto $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', \cdots, \lambda_n')$ es tal que $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \lambda_j'| < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} ||(a_j - \lambda_j'e)b|| &= \sum_{j=1}^{n} ||(a_j - \lambda_j e)b + (\lambda_j e - \lambda_j')b|| \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} ||(a_j - \lambda_j e)b|| - \sum_{j=1}^{n} ||(\lambda_j - \lambda_j')b||. \end{aligned}$$

Pero $||(\lambda_j - \lambda_j')b|| \leq |\lambda_j - \lambda_j'|||b||$, por lo cual

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} ||(a_j - \lambda_j)b|| &\geq \sum_{j=1}^{n} ||(a_j - \lambda_j)b|| - \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \lambda_j'|||b|| \\ &> \epsilon||b|| - \tfrac{\epsilon}{2}||b||. \end{aligned}$$

Esto es

$$\sum_{j=1}^{n} ||(a_j - \lambda_j'e)b|| > \frac{\epsilon}{2}||b||.$$

Por lo cual $\lambda' \notin \tau_I(a)$, consecuentemente $\tau_I(a)$ es cerrado.□

Si $a = a_1 \in A$, de (2.5) se sigue que $\sigma_H(a) \neq \phi$, sin embargo para un sistema de dos o mas elementos puede ser vacío, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

2.11 Ejemplo. Sea A el álgebra de las matrices complejas 2×2, y sea $a = (a_1, a_2)$, donde

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\sigma_H(a_1) = \sigma_H(a_2) = \{0\}$.
De (2.6) se sigue que $\sigma_H(a_1, a_2) \subseteq \{(0,0)\}$. Pero $a_2a_1 + a_1a_2 = e$, lo que implica que $(0,0) \notin \sigma_H(a_1, a_2)$, por lo tanto $\sigma(a) = \emptyset$.
Observemos que si $a = a_1$, de (2.5) y como consecuencia del teorema (2.9) tenemos que $\tau(a) \subset \sigma(a)$.

2.12 Teorema. Si $a = a_1$, $a_1 \in A$, entonces

$$\partial(\sigma_H(a)) \subset \tau_I(a) \cap \tau_D(a).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \partial(\sigma_H(a))$, existe una sucesión $\{\lambda_n\} \notin \sigma_H(a) \forall n$ tal que $\lambda_n \to \lambda$, entonces tenemos que $a - \lambda_n$ es invertible para toda n, por lo cual no pertenece a S para toda n. Por otra parte como σ_H es cerrado, $\lambda \in \sigma_H$, lo que nos dice que $a - \lambda \in S$. Es decir resumiendo tenemos que S es es cerrado, $\{a - \lambda_n\}$ es una sucesión de elementos que tal que $a - \lambda_n \notin S$, $\forall n$, $a - \lambda_n \to a - \lambda$ y $a - \lambda \in S$. Por lo tanto $a - \lambda \in \partial(S)$, luego por el teorema (1.7) $a - \lambda$ es un divisor topológico de cero izquierdo y derecho, por lo tanto $\lambda \in \tau_I(a) \cap \tau_D(a)$, como queríamos demostrar.□

Para un sistema de dos o mas elementos el espectro puntual aproximativo puede ser vacío (ver ejemplo (2.11)), de hecho este teorema no es cierto, como lo vemos en el siguiente ejemplo.

2.13 Ejemplo. Sea el álgebra de las matrices complejas 2×2 y $a = (a_1, a_2)$ donde

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\sigma_I(a_1) = \{0, 1\} \text{ y } \sigma_I(a_2) = \{0, 1\},$$

por lo tanto

$$\sigma_I(a_1, a_2) \subset \sigma_I(a_1) \times \sigma_I(a_2) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

Verificando cada elemento de este conjunto, llegamos a que $\sigma_I(a_1, a_2) = \{(1, 1)\}$.
Procediendo de igual forma se tiene que $\sigma_D(a_1, a_2) = \{(0,0)\}$. Entonces

$$\sigma_I(a_1, a_2) \cap \sigma_D(a_1, a_2) = \emptyset.$$

Por lo tanto $\tau_I(a) \cap \tau_D(a) = \emptyset$, pero

$$\partial(\sigma_H(a_1, a_2)) = \sigma_H(a_1, a_2) = \{(1,1), (0,0)\}.$$

Por lo que la afirmación del teorema (2.12) no se cumple para dos elementos

2.14 Definición. Si $a = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in A^n$, diremos que a es un sistema conmutativo, (de elementos de A) si

$$a_k a_j = a_j a_k \ (j, k = 1, 2, \cdots n).$$

Si $a \in A^n$ es un sistema conmutativo, los espectros de Harte y puntual aproximativo, siempre son no vacíos como lo veremos mas adelante. Así pues en lo sucesivo siempre $a \in A^n$ representará un sistema conmutativo.

En los siguientes resultados demostraremos una de las mas importantes propiedades que cumplen estos espectros: la del mapeo espectral. Para el espectro puntual aproximativo lo haremos usando la propiedad de proyección

2.15 Teorema. Sea $P : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C^k}$, la proyección $P(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots \lambda_{j_k})$, y $a \in A^n$ entonces

$$P(\tau(a_1, a_2, \cdots, a_n)) = \tau(a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_k}).$$

Demostración. Sea $(v_1, v_2, \cdots, v_k) \in P(\tau(a_1, a_2, \cdots, a_n))$, entonces

$$(v_1, v_2, \cdots, v_k) = P(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

con $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \tau(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Esto implica dos cosas: $(v_1, v_2, \cdots, v_k) = (\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_k})$, y

$$(a_1 - \lambda_1 e, a_2 - \lambda_2 e, \cdots, a_n - \lambda_n e),$$

es un divisor topológico común (digamos izquierdo) de cero. Entonces existe una sucesión $\{b_l\}$ de elementos de A tal que $||b_l|| = 1$, $\forall\, l$ y $\lim_{l\to\infty}(a_i - \lambda_i)b_l = 0$, para cada $i = 1, 2 \cdots, n$.
Como $v_i = \lambda_{j_i}\, i = 1, 2, \cdots, k$, entonces $\lim_{l\to\infty}(a_{j_i} - v_i)b_l = 0$ para cada $i = 1, 2, \cdots, k$, esto es $(a_{j_1} - v_1, a_{j_2} - v_2, \cdots, a_{j_k} - v_k)$ es un divisor topológico común izquierdo de cero, por lo tanto $(v_1, v_2, \cdots, v_k) \in \tau(a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_k})$.
Hemos demostrado entonces que $P(\tau(a_1, a_2, \cdots, a_n)) \subset \tau(a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_k})$.
Demostremos la contención contraria. Si $(v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_k}) \in \tau(a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots a_{j_k})$, entonces $(a_{j_1} - v_{j_1}e, a_{j_2} - v_{j_2}e, \cdots, a_{j_k} - v_{j_k}e)$ es un divisor topológico común (digamos izquierdo) de cero. De la observación (1.11) tenemos que

$$\rho_I(a_{j_1} - v_{j_1}e, a_{j_2} - v_{j_2}e, \cdots, a_{j_k} - v_{j_k}e) = 0.$$

Sea $\mathcal{A}$ el álgebra generada por $\{e, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. $\mathcal{A}$ es conmutativa con unidad. Tenemos entonces que

$$\rho^{\mathcal{A}}(a_{j_1} - v_{j_1}e, a_{j_2} - v_{j_2}e, \cdots, a_{j_k} - v_{j_k}e) = 0,$$

donde $\rho^{\mathcal{A}}$ es la misma definición del número ρ (ver 1.10) pero restringida al álgebra $\mathcal{A}$.
Tomemos $a_{j_{k+1}} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \setminus \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_k}\}$, por el teorema (1.20) existe un complejo $v_{j_{k+1}}$ tal que

$$\rho^{\mathcal{A}}(a_{j_1} - v_{j_1}e, a_{j_2} - v_{j_2}e, \cdots, a_{j_k} - v_{j_k}e, a_{j_{k+1}} - v_{j_{k+1}}e) = 0.$$

Nuevamente para $a_{j_{k+2}} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} - \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_k}, a_{j_{k+1}}\}$, existe un complejo $v_{j_{k+2}}$ tal que

$$\rho^{\mathcal{A}}(a_{j_1} - v_{j_1}e, a_{j_2} - v_{j_2}e, \cdots, a_{j_k} - v_{j_k}e, a_{j_{k+1}} - v_{j_{k+1}}e, a_{j_{k+2}} - v_{j_{k+2}}e) = 0.$$

Procediendo así sucesivamente concluimos que

$$\rho^{\mathcal{A}}(a_{j_1} - v_{j_1}e, a_{j_2} - v_{j_2}e, \cdots, a_{j_k} - v_{j_k}e, \cdots a_{j_n} - v_{j_n}e) = 0.$$

Como $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_n}\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, entonces (ver 1.11), se sigue que

$$\rho^{\mathcal{A}}(a_1 - v_1e, a_2 - v_2e, \cdots, a_n - v_ne) = 0.$$

Así (ver 1.11) $(a_1 - v_1e, a_2 - v_2e, \cdots, a_n - v_ne)$ es un divisor topológico de cero en $\mathcal{A}$ y por supuesto en toda el álgebra A, por lo tanto $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \tau(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, y como $P(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_n})$, por lo que $(v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_k}) \in P(\tau(a_1, a_2, \cdots, a_n))$, en consecuencia $\tau(a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_k}) \subset P(\tau(a_1, a_2, \cdots, a_n))$, y el teorema está totalmente demostrado.□

Como habíamos dicho, si $a \in A^n$ es un sistema conmutativo $\tau(a) \neq \emptyset$ y $\sigma_H(a) \neq \emptyset$, en efecto ya que si $\tau(a) = \emptyset$, tomemos $P : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C}$ como $P(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_j)$, la proyección sobre una coordenada. Usando el teorema (2.15) tenemos que $P(\emptyset) = \tau(a_j)$ lo que implica que $\tau(a_j) = \emptyset$, lo cual no es posible. Por lo tanto $\tau(a) \neq \emptyset$ y como consecuencia tenemos también que $\sigma_H(a) \neq \emptyset$.

2.16 Teorema.(Del mapeo espectral). Si $a \in A^n$ es un sistema conmutativo y $p : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C^k}$ cualquier función polinomial, entonces

$$p(\tau(a)) = \tau(p(a)).$$

Demostración. Sean los operadores $T_{a_i} : A \longrightarrow A$,

$$T_{a_i}(b) = a_i b,$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Estos operadores lineales continuos cumplen que $T_{a_i}T_{a_j} = T_{a_j}T_{a_i}$, para $i = 1, 2, \cdots, n$ y $j = 1, 2, \cdots, n$ ya que $a_i a_j = a_j a_i$. Esto es los operadores T_{a_i} conmutan entre sí. Demostremos que

$$\tau(a) = \tau(T_a),$$

donde $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ y $T_a = (T_{a_1}, T_{a_2}, \cdots, T_{a_n})$. Sea $\lambda \in \tau(a)$, entonces $a - \lambda$, es un divisor topológico común (digamos izquierdo) de cero. Sea $\{b_k\}$ una sucesión de elementos de A tal que $||b_k|| = 1$, $\forall\ k$ y

$$\lim_{k \to \infty} (a_i - \lambda_i e) b_k = 0,$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Tomemos la sucesión de operadores $\{T_{b_n}\}$ y observemos que

$$||T_{b_k}|| = \sup_{||x||=1} ||T_{bk}x|| = \sup_{||x||=1} ||b_k x|| \doteq 1,$$

y también que

$$||(T_{a_i} - \lambda_i I)T_{b_k}x|| = ||(a_i - \lambda_i e)b_k)x|| \leq ||a_i - \lambda_i e||\,||x||,$$

por lo que $||(T_{a_i} - \lambda_i I)T_{b_k}|| \to 0$, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Esto es $T_a - \lambda = (T_{a_1} - \lambda_1 I, \cdots, T_{a_n} - \lambda_n I)$, es un divisor topológico común izquierdo de cero, por lo tanto $\lambda \in \tau(T_a)$. El recíproco es consecuencia inmediata del teorema (1.12a), por lo que la igualdad está demostrada. Notemos ahora que

$$\begin{aligned} p(T_a)y &= (p_1(T_a)y, p_2(T_a)y, \cdots, p_k(T_a)y) \\ &= (p_1(a)y, p_2(a)y, \cdots, p_k(a)y) = (T_{p_1(a)}y, T_{p_2(a)}y, \cdots, T_{p_k(a)}y) \\ &= T_{p(a)}y, \end{aligned}$$

para todo $y \in A$. Por lo que $p(T_a) = T_{p(a)}$. Ahora si, este desarrollo y los teoremas (2.9) y de Słodkowski-Żelazko (ver apéndice), justifican las siguientes igualdades

$$p(\tau(a)) = p(\tau(T_a)) = \tau(p(T_a)) = \tau(T_{p(a)}) = \tau(p(a)).\square$$

Para demostrar el teorema de mapeo espectral para el espectro de Harte se requiere de algunos resultados previos y de algunas precisiones.
Así por ejemplo si $A = B[X]$ y $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n) \in B[X]^n$ es consecuencia inmediata del teorema (1.12) que

2.17 $\tau_I(T) = \{\lambda \in \mathbf{C^n} : \inf_{\|x\|=1} \sum_{j=1}^{n} \|(T_j - \lambda_j I)x\| = 0\}$

2.18 $\tau_D(T) = \{\lambda \in \mathbf{C^n} : \sum_{j=1}^{n} [(T_j - \lambda_j I)X] \neq X\}.$

También si $p : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C^k}$ es cualquier función polinomial, esto es si

$$p(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (p_1(z_1, z_2, \cdots, z_n), p_2(z_1, z_2, \cdots, z_n), \cdots p_k(z_1, z_2, \cdots z_n)),$$

donde los p_j son polinomios de n variables con coeficientes complejos, esta función polinomial induce un mapeo de A^n en A^k dado por

$$p(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (p_1(a_1, a_2, \cdots a_n), p_2(a_1, a_2, \cdots, a_n), \cdots p_k(a_1, a_2, \cdots a_n))$$

Habiendo precisado esto denotaremos por $\mathcal{P}(A^n)^k$ el conjunto de tales funciones. Estas funciones "polinomiales" cumplen un teorema del residuo, como vemos a continuación.

2.19 Teorema. Si $f \in \mathcal{P}(A^n)^1$ y $\lambda \in \mathbf{C^n}$, existen f' y f'' en $\mathcal{P}(A^n)^n$ tales que

$$f(a) - f(\lambda) = f'(a) \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda) \cdot f''(a),$$

donde $(\cdot)$ es el producto definido en (2.3).

Demostración. Se hará por casos

i) Si f es la función constante $f(a_1, a_2, \cdots a_n) = e$, sean f' y f'' dados por

$$f'(a) = f''(a) = (0, 0, \cdots 0),$$

y la conclusión es evidente.

ii) Si f es la función $f(a_1, a_2, \cdots a_n) = (a_j)$ $j \in \{1, 2, \cdots n\}$, sean f' y f'' dados por

$$f'(a_1, a_2, \cdots a_n) = f''(a_1, a_2, \cdots a_n) = (0, \cdots 0, e^{(j)}, 0, \cdots 0).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(a) - f(\lambda) = a_j - \lambda_j &= (0, \cdots, 0, e^{(j)}, 0, \cdots, 0) \cdot (a - \lambda) \\ &= (a - \lambda) \cdot (0, \cdots, 0, e^{(j)}, 0, \cdots, 0), \end{aligned}$$

donde $e^{(j)}$ significa e en el lugar j

iii) Si $f = g + h$ donde g y h satisfacen este teorema, entonces existen g', g'', $h' h'' \in \mathcal{P}(A^n)^n$ tales que

$$g(a) - g(\lambda) = g'(a) \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda) \cdot g''(a),$$

$$h(a) - h(\lambda) = h'(a) \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda) \cdot h''(a).$$

De aquí obtenemos que

$$g(a) + h(a) - [g(\lambda) + h(\lambda)] = g'(a) \cdot (a - \lambda) + h'(a) \cdot (a - \lambda),$$

$$g(a) + h(a) - [g(\lambda) + h(\lambda)] = (a - \lambda) \cdot g''(a) + (a - \lambda) \cdot h''(a).$$

Por lo tanto tomando

$$f_j'(a) = g_j'(a) + h_j'(a) \text{ y } f_j''(a) = g_j''(a) + h_j''(a),$$

para $j = 1, 2, \cdots, n$ el teorema se cumple para este caso.
iv). Si ahora $f = gh$, con g y h que cumplen este teorema, existen entonces g', g'', h', $h'' \in \mathcal{P}(A^n)^n$ tales que

$$\textbf{2.20} \qquad \begin{cases} g(a) - g(\lambda) = g'(a) \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda) \cdot g''(a). \\ h(a) - h(\lambda) = h'(a) \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda) \cdot h''(a). \end{cases}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} f(a) - f(\lambda) &= g(a)h(a) - g(\lambda)h(\lambda). \\ &= g(a)h(a) - g(\lambda)h(\lambda) + g(a)h(\lambda) - g(a)h(\lambda). \\ &= [g(a) - g(\lambda)]h(\lambda) + g(a)[h(a) - h(\lambda)]. \end{aligned}$$

Como $h(\lambda)$ es un "escalar", conmuta con $g(a) - g(\lambda)$ tenemos entonces que

$$f(a) - f(\lambda) = h(\lambda)[g(a) - g(\lambda)] + g(a)[h(a) - h(\lambda)].$$

De manera análoga obtenemos la igualdad

$$f(a) - f(\lambda) = [g(a) - g(\lambda)]h(a) + [h(a) - h(\lambda)]g(\lambda).$$

Usando (2.20) tenemos que

$$\begin{aligned} f(a) - f(\lambda) &= h(\lambda)[g'(a) \cdot (a - \lambda)] + g(a)[h'(a) \cdot (a - \lambda)] \\ &= [h(\lambda)g'(a)] \cdot (a - \lambda) + [g(a)h'(a)] \cdot (a - \lambda), \end{aligned}$$

y también que

$$f(a) - f(\lambda) = (a - \lambda) \cdot [g''(a)h(a)] + (a - \lambda) \cdot [h''(a)g(\lambda)].$$

Entonces tomando

$$\begin{aligned} f_j'(a) &= h(\lambda)g_j'(a) + g(a)h_j'(a), \\ f_j''(a) &= g_j''(a)h(a) + g(\lambda)h_j''(a), \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \cdots, n$ concluimos que el teorema se cumple para este caso. Finalmente como toda $f \in \mathcal{P}(A^n)^1$ es una combinación de sumas y productos de constantes y funciones coordenadas el teorema está totalmente demostrado. □

Esta teorema del residuo permite obtener el teorema del mapeo espectral.

2.21 Teorema. Si $a \in A^n$ y $f \in \mathcal{P}(A^n)^m$, entonces

$$f(\sigma_H(a)) \subset \sigma_H(f(a)).$$

Demostración. Sea $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in f(\sigma_H(a))$, entonces $b = f(\lambda)$, $\lambda \in \sigma_H(a) = \sigma_I(a) \cup \sigma_D(a)$. Supongamos que $\lambda \in \tau_I(a)$. (Para el caso $\lambda \in \tau_D(a)$ el procedimiento es el mismo.) Afirmamos que $b \in \sigma_H(f(a))$. En efecto pues en caso contrario $f(a) - b = f(a) - f(\lambda)$ es regular izquierdo, entonces existe $d = (d_1, d_2, \cdots, d_m) \in A^m$ tal que

$$d \cdot [f(a) - f(\lambda)] = e$$

Es decir

2.22 $$\textstyle\sum_{j=1}^{m} d_j[f_j(a) - f_j(\lambda)] = e.$$

Ahora a cada $f_j \in \mathcal{P}(A^n)^1$, $j = 1, 2, \cdots, m$ le aplicamos el teorema (2.19), entonces existen f_j', $f_j'' \in \mathcal{P}(A^n)^n$, tal que

$$f_j(a) - f_j(\lambda) = f_j'(a) \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda) \cdot f_j''(a),$$

para $j = 1, 2, \cdots, m$.
Si consideramos que $f_j' = ((f'_1)^j, (f'_2)^j, \cdots, (f'_n)^j)$ entonces

$$f_j(a) - f_j(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (f'_k)^j(a)(a_k - \lambda_k).$$

Sustituyendo en (2.22) tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{k=1}^{n} ({f'}_k)^j(a)(a_k - \lambda_k) = e.$$

O similarmente

$$\sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} d_j ({f'}_k)^j(a))(a_k - \lambda_k) = e.$$

Esta igualdad nos dice que $\lambda \notin \sigma_l(a)$, lo que contradice nuestra suposición inicial. Esta contradicción nos permite concluir que $b \in \sigma_H(f(a))$ y por lo tanto que $f(\sigma_H(a)) \subset \sigma_H(f(a))$, como queríamos demostrar. □

La igualdad

2.23 $$\sigma_H(f(a)) = f(\sigma_H(a)).$$

no es cierta bajo las condiciones del teorema (2.21) como lo vemos en el siguiente ejemplo.

2.24 Ejemplo. Sea A el algebra de todas las matrices complejas 2×2 y sea $a = (a_1, a_2)$ con

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $f = f_1$ en $\mathcal{P}(A^2)^1$, como vimos en el ejemplo (2.11) $\sigma_H(a) = \emptyset$, entonces $f(\sigma_H(a)) = f(\emptyset) = \emptyset$ y $\sigma_H(f(a)) \neq \emptyset$.

En diferentes situaciones es posible obtener la igualdad (2.23), por ejemplo si $m = n = 1$ es obvio que si, pero veamos el siguiente teorema.

2.25 Teorema. Sea $a \in A^n$, entonces $f(\sigma_H(a)) = \sigma_H(f(a))$ para $f \in \mathcal{P}(A^n)^m$ que satisface una de las siguientes condiciones.
i) $m = n$ y $g(f(z)) = z = f(g(z))$ para algún $g \in \mathcal{P}(A^n)^n$.
ii) $m > n$ y $f(z) = (z, g(z))$ para algún $g \in \mathcal{P}(A^n)^{m-n}$.

Demostración. i) Supongamos que $m = n$ y $g(f(z)) = z = f(g(z))$

para algún $g \in \mathcal{P}(A^n)^n$, entonces

$$\sigma_H(f(a)) = (fg)(\sigma_H f(a)) \subset f\sigma_H(gf)(a) = f\sigma_H(a) \subset \sigma_H f(a).$$

(Aplicando dos veces el teorema (2.19)).
ii) Supongamos que $m > n$ y $f(z) = (z, g(z))$ para algún $g \in \mathcal{P}(A^n)^{m-n}$. Si $a \in A^n$ y $b \in A^{m-n}$, por el teorema (2.7) tenemos que

$$\sigma_H(a, b) \subset \sigma_H(a) \times \sigma_H(b).$$

Por lo tanto

2.26 $$\sigma_H(f(a)) = \sigma_H(a, g(a)) \subset \sigma_H(a) \times \sigma_H(g(a)).$$

Demostremos que $\sigma_H(f(a)) \subset f(\sigma_H(a))$. Sea $\xi \in \sigma_H(f(a))$, por (2.26) tenemos que $\xi = (\lambda, \beta)$, con $\lambda \in \sigma_H(a)$ y $\beta \in \sigma_H(g(a))$. Debemos probar que $\xi \in f(\sigma_H(a))$, pero

$$f(\sigma_H(a)) = \{(\alpha, g(\alpha)) : \alpha \in \sigma_H(a)\},$$

por lo que es suficiente demostrar que $\beta = g(\lambda)$. Definimos $h \in \mathcal{P}(A^m)^{m-n}$ como

$$h(a, b) = b - g(a). (a \in A^n,\ b \in A^{m-n}).$$

Ahora vemos que

$$\beta - g(\lambda) = h(\lambda, \beta) \in h\sigma_H(a, g(a)) \subset \sigma_H h(a, g(a)) = \sigma_H 0 = 0.\square$$

Cuando el álgebra A es conmutativa, la igualdad (2.23) es válida para cualquier sistema $a \in A^n$ y cualquier $f \in \mathcal{P}(A^n)^m$. Obtendremos este resultado para un sistema $a \in A^n$ conmutativo y A no necesariamente conmutativa.

Si $a \in A^n$, $b \in A^m$, y $\lambda \in \mathbf{C}^n$, escribimos el siguiente conjunto

2.27 $$\sigma_{a=\lambda} = \{t \in \mathbf{C}^m : (\lambda, t) \in \sigma_H(a, b)\}.$$

2.28 Teorema. Si $a \in A^n$ es un sistema conmutativo y conmuta con $b \in A^m$, esto es

$$b_k a_j = a_j b_k,\ (j = 1, 2, \cdots, n. k = 1, 2, \cdots, m),$$

entonces

$$\sigma_H(b) = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}^n} \sigma_{a=\lambda}(b).$$

Demostración. $\sigma_{a=\lambda}(b) \subset \sigma_H(b)$ para toda $\lambda \in \mathbf{C}^n$. En efecto, si $t \in \sigma_{a=\lambda}(b)$, entonces $(\lambda, t) \in \sigma_H(a,b) \subset \sigma_H(a) \times \sigma_H(b)$, por lo que $t \in \sigma_H(b)$, consecuentemente $\bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}^n} \sigma_{a=\lambda}(b) \subset \sigma_H(b)$.
Probemos ahora que

2.29 $$\sigma_H(b) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}^n} \sigma_{a=\lambda}(b).$$

Demostraremos esta contención para el espectro izquierdo; usaremos inducción sobre n

Sea $n = 1$, demostremos que $\sigma_I(b) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}} \sigma_{a=\lambda}(b)$.

Sea $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \sigma_I(b)$, si $a \in A$ tal que $||a - e|| < 1$ entonces a es invertible. Como $b - t$ es regular izquierdo a no pertenece al ideal izquierdo

$$\mathcal{I} = \sum_{k=1}^{m} A(b_k - t_k.)$$

Esto es tenemos la siguiente observación.

Observación. Ningún elemento $a \in A$, tal que $||a - e|| < 1$ pertenece a $\mathcal{I}$.

Sea el ideal izquierdo cerrado

$$N = \overline{\mathcal{I}} = \overline{\sum_{k=1}^{m} A(b_k - t_k)}.$$

Si $e \in N$, existe $b \in I$, tal que $||b - e|| < 1$, por la observación anterior $b \notin \mathcal{I}$, pero esto contradice justamente que $b \in \mathcal{I}$, esta contradicción muestra que $e \notin N$.
Sea M el subespacio cerrado

$$M = \{c \in A : (b_k - t_k)c \in N,\ k = 1, 2, \cdots, m.\}$$

Como N es ideal izquierdo, y $c \in N$, entonces $(b_k - t_k)c \in N$ para todo $k = 1, 2, \cdots, m$, es decir $N \subset M$, pero además como $e \in A$, $e(b_k - t_k) =$

$(b_j - t_k)e \in I \subset N$, por lo tanto $e \in M$. Por otro lado si $a = a_1 \in A$ conmuta con b_k para todo $k = 1, 2, \cdots, m$, entonces $aM \subset M$, en efecto si $s = am \in aM \Rightarrow (b_k - t_k)m \in N$, entonces

$$(b_k - t_k)s = (b_k - t_k)am = a(b_k - t_k)m \in aN \subset N,$$

por lo cual $s \in M$. De esta manera podemos considerar el operador lineal $L_a : M/N \longrightarrow M/N$ dado por

$$L_a(c + N) = ac + N,$$

con el álgebra $\mathcal{B} = L(M/N, M/N)$ de todos los operadores acotados en el espacio cociente M/N. Puesto que

$$||L_a(c + N)|| = ||ac + N|| \leq ||a||||c + N||,$$

por lo que $L_a \notin \mathcal{B}$ y tiene espectro no vacío.
Ahora si $\lambda \in \partial(\sigma_H(L_a))$, por el teorema (2.12) $\lambda \in \tau_I(L_a)$ y por la relación (2.17) tenemos que

2.30 $$\inf_{||c+N||=1} ||(L_a - \lambda I)(c + N)|| = \inf_{||c+N||=1} ||(a - \lambda)c + N|| = 0.$$

Se sigue que el ideal izquierdo $A(a - \lambda) + \sum_{k=1}^{m} A(b_k - t_k)$ es propio, pues en caso contrario existen $a' \in A$ y $b' \in A^m$ tal que

$$1 = a'(a - \lambda) + b' \cdot (b - t).$$

Si $c \in M$, arbitrario, tenemos que

$$c = a'(a - \lambda)c + \sum_{k=1}^{m} b'_k(b_k - t_k)c,$$

pertenece a $a'(a - \lambda)c + N$, entonces

$$||c + N|| = ||a'(a - \lambda)c + N|| \leq ||a'||||(a - \lambda)c + n||.$$

Pero esto contradice (2.30). Por lo tanto el ideal $A(a - \lambda) + \sum_{k=1}^{m} A(b_k - t_k)$ es propio. Es decir hemos demostrado que si $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \sigma_I(b)$ $(\lambda \in \partial\sigma_H(L_a))$, entonces el ideal $A(a - \lambda) + \sum_{k=1}^{m} A(b_k - t_k)$ es propio, esto es $(\lambda, t) \in \sigma_I(a, b)$, o de otra manera $t \in \sigma_{I a=\lambda}(b)$, esto es $\sigma_I(b) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}} \sigma_{I a=\lambda}(b)$.

La demostración para el espectro derecho es análoga y por lo tanto tenemos la contención (2.29) para el caso $n = 1$.
Supongamos que para $n = k$ la contención (2.29) es cierta. Sean $n = k + 1$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}) \in A^{k+1}$ y $a' = (a_2, a_3, \cdots, a_k, a_{k+1}) \in A^k$

Demostremos que
$$\sigma_H(b) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}^{\mathbf{k+1}}} \sigma_{a=\lambda}(b).$$

Sea $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \sigma_H(b)$. Por la hipótesis de inducción existe $\lambda' \in \mathbf{C}^{\mathbf{k}}$, tal que $t \in \sigma_{a'=\lambda'}(b)$, esto es $(\lambda', t) \in \sigma_H(a', b)$, ahora aplicando el resultado para $n = 1$ y puesto que $a_1 \in A$ se tiene que

$$\sigma_H(a', b) \subset \bigcup_{\beta \in \mathbf{C}} \sigma_{a_1=\beta}(a', b),$$

por lo que existe $\beta \in \mathbf{C}$ tal que $(\lambda', t) \in \sigma_{a_1=\beta}(a', b)$. Por lo tanto $(\beta, (\lambda', t)) \in \sigma_H(a_1, (a', b)) \Rightarrow (\beta, \lambda', t) \in \sigma_H(a_1, a', b)$. Pero esto implica $(\lambda, t) \in \sigma_H(a, b)$, con $\lambda = (\beta, \lambda') \in \mathbf{C}^{\mathbf{k+1}}$ y $a = (a_1, a')$. Por lo tanto $t \in \bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}^{\mathbf{k+1}}} \sigma_{a=\lambda}(b)$ y la demostración está completa. □.

Ahora si, el teorema de mapeo espectral se sigue rápidamente.

2.31 Teorema. Si $a \in A^n$ es un sistema conmutativo de elementos y $f \in \mathcal{P}(A^n)^m$ entonces
$$\sigma_H f(a) = f(\sigma_H(a)).$$

Demostración. Recordemos que la contención $f(\sigma_H(a)) \subset \sigma_H f(a)$ ya esta demostrada, (Teorema 2.21), demostremos la contención contraria.
Sea $t \in \sigma_H f(a)$, $t = (t_1, t_2, \cdots, t_m) \in \mathbf{C}^{\mathbf{m}}$, por el teorema (2.28) existe $\lambda \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}}$, tal que $t \in \sigma_{a=\lambda}(f(a)) \Rightarrow (\lambda, t) \in \sigma_H(a, f(a))$. Si consideramos $h : A^n \longrightarrow A^{m+n}$ dado por $h(a) = (a, f(a))$. Por el teorema (2.25(ii)) tenemos que
$$h(\sigma_H(a)) = \sigma_H(h(a)) = \sigma_H(a, f(a)).$$

Por lo tanto se sigue la siguiente cadena de implicaciones $(\lambda, t) \in h(\sigma_H(a)) \Rightarrow (\lambda, t) = h(\beta)$, $\beta \in \sigma_H(a) \Rightarrow (\lambda, t) = (\beta, f(\beta)) \Rightarrow \lambda = \beta$, $t = f(\beta)$. Por lo tanto $\lambda \in \sigma_H(a)$ y $t = f(\lambda)$, esto es $t \in f(\sigma_H(a))$. Concluimos entonces que $\sigma_H f(a) \subset f(\sigma_H(a))$.□.

CAPITULO 3

EL ESPECTRO DE TAYLOR

Los dos articulos de J.L. Taylor publicados en 1970 (ver {17} y {18}), pueden considerarse como el despegue de la teoría espectral multivariable, pues su espectro combinado permitió la construcción de un cálculo funcional.

En este capítulo estudiaremos el espectro de Taylor con todas sus propiedades, propiedades que como veremos son análogas a los espectros ya estudiados.

Denotaremos por $\Delta(s)$ el álgebra exterior compleja generada por los indeterminados $s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$, entonces

$$\Delta(s) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Delta^p(s),$$

donde $\Delta^p(s)$ es el conjunto de todos los elementos de grado p en $\Delta(s)$.
Sea X un espacio de Banach complejo, entonces denotaremos como $\Delta(s, X) = X \otimes \Delta(s)$ y $\Delta^p(s, X) = X \otimes \Delta^p(s)$. Escribiremos $xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge s_{i_3} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}$ en lugar de $x \otimes s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_n}$, de esta manera los elementos de $\Delta^p(s, X)$ son de la forma

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} x_{i_1 i_2 \cdots i_p} s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p},$$

donde $x_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in X$.

Podemos identificar entonces $\Delta^p(s, X)$ con la suma directa

$$\bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} X,$$

de $\binom{n}{p}$ copias del espacio X, el cual es un espacio de Banach con la norma

$$\| \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} x_{i_1 i_2 \cdots i_p} s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \| = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} \|x_{i_1 i_2 \cdots i_p}\|.$$

De acuerdo a esto $\Delta^n(s,X)$ y $\Delta^0(s,X)$ son isomorfos a X y, consideraremos $\Delta^{n+1}(s,X) = \Delta^{-1}(s,X) = 0$.

3.1 Definición. Sea $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n)$ un sistema conmutativo de elementos de $B(X)$. Definimos el operador $\delta_T : \Delta(s,X) \longrightarrow \Delta(s,X)$ como

$$\textbf{3.2} \quad \begin{cases} \delta_T(xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}) & = \sum_{j=1}^n (T_j x) s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}, \\ \quad\quad\quad\quad \text{y}, \ \ {\delta_T}^p & = \delta_T|_{\Delta^p(s,X)}. \end{cases}$$

3.3 Teorema. Para cada p se tiene que

$${\delta_T}^p {\delta_T}^{p-1} = 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} {\delta_T}^p {\delta_T}^{p-1}(xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}) &= \textstyle\sum_{j=1}^n (T_j x) s_j \wedge S_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n T_k (T_j x) s_k \wedge s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}} \\ &= \textstyle\sum_{1 \le k < j \le n} (T_k T_j - T_j T_k) x s_k \wedge s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}. \end{aligned}$$

Puesto que $T_k T_j - T_j T_k = 0$, tenemos que

$${\delta_T}^p {\delta_T}^{p-1}(xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}) = 0.$$

□

De esta manera la cadena

$$\textbf{3.4} \qquad 0 \to \Delta^0(s,X) \overset{{\delta_T}^0}{\to} \Delta^1(s,X) \overset{{\delta_T}^1}{\to} \cdots \overset{{\delta_T}^{n-1}}{\to} \Delta^n(s,X) \to 0,$$

es una cadena compleja llamada el complejo de Koszul para la n-ada T y representada por $\mathcal{K}(T)$.

En lo sucesivo siempre consideraremos que $T \in [B(X)]^n$, como un sistema conmutativo.

3.5 Definición. Sea $T \in [B(X)]^n$, decimos que T es Taylor-regular si el complejo de Koszul $\mathcal{K}(T)$ es exacto, esto es si

$$\text{Im}\, {\delta_T}^{p-1} = \text{Ker}\, {\delta_T}^p,$$

para $p = 0, 1, 2 \cdots, n$. El espectro de Taylor se define como el conjunto

3.6 $$\sigma_T = \{\lambda \in \mathbf{C}^n : \mathcal{K}(T-\lambda) \text{ no es Taylor-regular}\},$$

donde $T - \lambda = (T_1 - \lambda_1 I, T_2 - \lambda_2 I, \cdots, T_n - \lambda_n I)$.

Notemos que si existe la exactitud en la cadena (3.4) se sigue que

3.7 $$\text{Ker}\, {\delta_T}^0 = 0$$

3.8 $$\text{Im}\, {\delta_T}^{n-1} = X.$$

La condición (3.7) la llamaremos como la exactitud en el *lugar cero*, y (3.8) como la exactitud en el *lugar n* de la cadena (3.4).

3.9 Teorema. Sea $T \in [B(X)]^n$ entonces
i) $\mathcal{K}(T)$ es exacta en el *lugar cero* si y sólo si $\bigcap_{j=1}^n \text{Ker}\, T_j = \{0\}$ para $j = 1, 2, \cdots, n$.
ii) $\mathcal{K}(T)$ es exacta en el *lugar n* si y sólo si $\sum_{j=1}^n \text{Im}\, T_j = X$.

Demostración. i)

$$\begin{aligned} {\delta_T}^0(x) &= \sum_{j=1}^n (T_j x) s_j = (T_1 x) s_1 + (T_2 x) s_2 + \cdots + (T_n x) s_n \\ &= (T_1 x, T_2 x, \cdots, T_n x). \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$${\delta_T}^0(x) = 0 \text{ si y sólo si } T_j(x) = 0,$$

para todo $j = 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto se sigue el resultado.

ii) ($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{K}(T)$ es exacta en el *lugar n*. Sea $y \in X$, por (3.8) tenemos que

$$y = {\delta_T}^{n-1}\Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \le n} x_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}} s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{n-1}} \Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq n} (T_j x_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}}) s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{n-1}}$$

$$= (T_1 x_{\hat{1}23\cdots n}) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n + (T_2 x_{1\hat{2}3\cdots n}) s_2 \wedge s_1 \wedge s_3 \wedge \cdots \wedge s_n$$

$$+ (T_3 x_{12\hat{3}4\cdots n}) s_3 \wedge s_1 \wedge s_2 \wedge s_4 \wedge \cdots \wedge s_n + \cdots$$

$$\cdots + (T_n x_{12\cdots \hat{n}}) s_n \wedge s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_{n-1}$$

$$= (T_1 x_{\hat{1}2\cdots n}) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n - (T_2 x_{1\hat{2}3\cdots n}) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n$$

$$+ (T_3 x_{12\hat{3}4\cdots n}) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} (T_n x_{12\cdots \hat{n}}) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n.$$

Es decir

$$y = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} T_j x_{12\cdots \hat{j} \cdots n} s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n,$$

donde $12\cdots\hat{j}\cdots n = 12\cdots j-1 j+1 \cdots n$. Por lo tanto $y \in \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} T_j$, entonces

$$X = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} T_j.$$

($\Leftarrow$). Notemos que se ha demostrado

$$\delta_T{}^{n-1}\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq n} x_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}} s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{n-1}} \Big) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} T_j x_{12\cdots \hat{j} \cdots n} s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n,$$

así si $y \in X$, y como $\Delta^n(s, X)$ es X se tiene que

$$y = T_1 x_1 s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n - T_2(-x_2) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n + T_3 x_3 s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n$$

$$-T_4(-x_4) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n + \cdots + (-1)^{n-1} T_n((-1)^{n-1} x_n) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n$$

por lo cual esta última igualdad puede expresarse como

$$y = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} T_j (x_{12\cdots \hat{j} \cdots n}) s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n,$$

con $x_{12\cdots\hat{j}\cdots n} = (-1)^{j-1} x_j$, lo que implica que $y \in \operatorname{Im} \delta_T{}^{n-1}$, por lo cual $\mathcal{K}(T)$ es exacta en el *lugar* n, como queríamos demostrar.□

Veamos algunos ejemplos que nos ilustran el concepto de exactitud.

3.10 Ejemplo.. Sea $T = (T_1, T_2) \in [B(X)]^2$, entonces $\mathcal{K}(T)$ es

$$0 \to X \overset{\delta_T{}^0}{\to} X \oplus X \overset{\delta_T{}^1}{\to} X \to 0.$$

$\delta_T{}^0(x) = (T_1 x, T_2 x)$.

$\delta_T{}^1(x_1, x_2) = T_1 x_2 - T_2 x_1$.

De esta manera la exactitud en $X \oplus X$, significa que si $T_1 x_2 = T_2 x_1$, entonces existe $z \in X$ tal que $T_1 z = x_1$ y $T_2 z = x_2$

Podemos relacionar la exactitud con algunas cuestiones de mecánica, como lo vemos en el siguiente ejemplo.

3.11 Ejemplo. Sean $X = C^\infty(\Omega)$ y Ω un abierto en $\mathbf{R}^3$. Sea

$$T = (T_1, T_2, T_3) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}).$$

Sea la cadena

$$0 \to \Delta^0(s, X) \overset{\delta_T{}^0}{\to} \Delta^1(s, X) \overset{\delta_T{}^1}{\to} \Delta^2(s, X) \overset{\delta_T{}^2}{\to} \Delta^3(s, X) \to 0.$$

Mediante (3.2) y haciendo el desarrollo correspondiente obtenemos que

$\delta_T{}^0(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = \text{Grad}\, f$

$\delta_T{}^1(f_1, f_2, f_3) = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}) = \text{Rot}\, f$

$\delta_T{}^2(f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \text{Div}\, f$

De esta manera la exactitud en $\Delta^1(s, X)$ significa que si $\text{Rot}\,(f_1, f_2, f_3) = 0$, existe $g \in X$ tal que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f_1, \ \frac{\partial g}{\partial y} = f_2, \ \frac{\partial g}{\partial z} = f_3.$$

Y la exactitud en $\Delta^2(s,X)$ significa que si $\operatorname{Div} f = 0$ existe $G = (g_1, g_2, g_3)$ tal que $\operatorname{Rot} G = f$.

A continuación empezamos a demostrar las propiedades del espectro de Taylor.

3.12 Teorema. Si $T = T_1 \in B(X)$, entonces

$$\sigma_T(T) = \sigma(T)$$

Demostración. Sea la cadena

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{T} X \longrightarrow 0.$$

$0 \notin \sigma_T(T)$ si y sólo si $\mathcal{K}(T)$ es exacta, si y sólo si $\operatorname{Ker} T = 0$ e $\operatorname{Im} T = X$ si y sólo si $0 \notin \sigma(T)$. □

Para ver que el espectro de Taylor es compacto, demostremos primero que es acotado.

3.13 Lema de Taylor. Sea $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n) \in [B(X)]^n$. Si existen operadores $U_1, U_2 \cdots, U_n \in B(X)$, que conmutan con cada T_j $j = 1, 2, \cdots n$ tal que $U_1T_1 + U_2T_2 + \cdots + U_nT_n = I$, entonces T es Taylor-regular.

Demostración. Debemos demostrar que la cadena

$$0 \to \Delta^0(s,X) \xrightarrow{\delta_T{}^0} \Delta^1(s,X) \xrightarrow{\delta_T{}^1} \cdots \xrightarrow{\delta_T{}^{n-1}} \Delta^n(s,X) \to 0,$$

es exacta, esto es que $\operatorname{Im} \delta_T{}^{p-1} = \operatorname{Ker} \delta_T{}^p$, para $p = 0, 1, \cdots, n$.
Demostremos la exactitud en el *lugar* 0 y en el *lugar* n.

i) $\bigcap_{j=1}^n T_j = \{0\}$. En efecto, pues en caso contrario existe $x \neq 0$ tal que $T_jx = 0$ para $j = 1, 2, \cdots n.$, pero esto es imposible ya que $\sum_{j=1}^n T_j(U_jx) = x$. Esto demuestra la exactitud en el *lugar* 0.

ii) Puesto que $\sum_{j=1}^n T_j(U_j)x = x$ tenemos que $\sum_{j=1}^n \operatorname{Im} T_j = X$, por lo que se tiene la exactitud en el *lugar* n.

Resta demostrar que Im ${\delta_T}^{p-1}$ = Ker ${\delta_T}^p$, para $p = 1, 2, \cdots, n-1$, pero del teorema (3.3) es claro que Im ${\delta_T}^{p-1} \subset$ Ker ${\delta_T}^p$, demostremos la contención contraria. Sea $y = xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \in$ Ker ${\delta_T}^p$, entonces

$$ {\delta_T}^p(y) = \sum_{j=1}^{n} (T_j x) s_j \wedge s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} = 0, $$

por lo tanto $T_j x = 0$, para toda $j \notin \{i_1, i_2, \cdots i_p\}$, así si

$$ z = \sum_{k=1}^{p} (U_{i_k} x)(-1)^{k-1} s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{s_{i_k}} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}. $$

$z \in \Delta^{p-1}(s, X)$ y se sigue que

$$ \begin{aligned} {\delta_T}^{p-1}(z) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (T_j U_{i_k} x) s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{s_{i_k}} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \\ &= \textstyle\sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (T_{i_l} U_{i_k} x) s_{i_l} \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{s_{i_k}} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (T_{i_k} U_{i_k} x) s_{i_k} \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{s_{i_k}} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (U_j T_j) s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \\ &= x s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} = y. \end{aligned} $$

Por lo tanto $y \in$ Im ${\delta_T}^{p-1}$, y la demostración está completa.□

3.14 Teorema. Sea $T \in [B(X)]^n$ y sea $\mathcal{A}$ el álgebra generada por $\{I, T_1, T_2, \cdots, T_n\}$. Entonces

$$ \sigma_T(T) \subset {\sigma_H}^{\mathcal{A}}(T) $$

Demostración. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \notin {\sigma_H}^{\mathcal{A}}$, entonces podemos decir que $(T_1 - \lambda_1 I, T_2 - \lambda_2 I, \cdots, T_n - \lambda_n I)$ es izquierdo regular. Existen $U_1, U_2, \cdots, U_n$ en $\mathcal{A}$ tal que

$$ U_1(T_1 - \lambda_1 I) + U_2(T_2 - \lambda_2 I) + \cdots + U_n(T_n - \lambda_n I) = I $$

Ahora el lema (3.13) implica que $T - \lambda I$ es Taylor-regular, por lo tanto $\lambda \notin \sigma_T(T)$.□

3.15 Corolario. $\sigma_T(T)$ es acotado.

Probaremos ahora que el espectro es cerrado.

3.15 Teorema. Sea

$$X \xrightarrow{\alpha_0} Y \xrightarrow{\beta_0} Z,$$

una cadena exacta de espacios de Banach y operadores. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

es una cadena compleja que satisface $\max\{||\alpha - \alpha_0||, ||\beta - \beta_0||\} < \epsilon$, entonces es exacta en Y, es decir $\mathrm{Im}\, \alpha = \mathrm{Ker}\, \beta$.

Demostración. Sea el diagrama conmutativo

3.16

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "q"'] & Im\alpha_0 \\ X/\mathrm{Ker}\, \alpha_0 \arrow[ur, "\tilde{\alpha_0}"'] & \end{tikzcd}$$

donde q es el mapeo canónico $q(x) = x + \mathrm{Ker}\, \alpha_0$ y $\tilde{\alpha_0}(x + \mathrm{Ker}\, \alpha_0) = \alpha_0(x)$. $\tilde{\alpha_0}$ es un isomorfismo sobre.($X/\mathrm{Ker}\, \alpha_0 \approx \mathrm{Im}\, \alpha_0$. Primer teorema sobre isomorfismo.), por lo tanto existe $(\tilde{\alpha_0})^{-1}$ y es cerrado, luego por el teorema del mapeo cerrado es acotado, entonces tenemos

$$||(\tilde{\alpha_0})^{-1}y|| = \inf\{||x + x'|| : x' \in \mathrm{Ker}\, \alpha_0,\ y = \alpha_0(x)\},$$

$$||(\tilde{\alpha_0})^{-1}|| = \sup_{||y|| \leq 1} ||(\tilde{\alpha_0})^{-1}y||.$$

Repitiendo este procedimiento para el operador β_0 tenemos

$$(\tilde{\beta_0})^{-1} : \mathrm{Im}\, \beta_0 \longrightarrow Y/\mathrm{Ker}\, \beta_0 \ \ y$$

$$||(\tilde{\beta_0})^{-1}z|| = \inf\{||y + y'|| : y' \in \mathrm{Ker}\, \beta_0,\ z = \beta_0(y)\},$$

$$||(\tilde{\beta_0})^{-1}|| = \sup_{||z|| \leq 1} ||(\tilde{\beta_0})^{-1}z.||$$

Tomando $r > 0$ tal que

3.17 $$||(\tilde{\beta_0})^{-1}|| < r \text{ y } ||(\tilde{\alpha_0})^{-1}|| < r,$$

y $\epsilon > 0$ tal que

3.18 $$r\epsilon < \tfrac{1}{6},$$

probaremos que Ker β = Im α.

Nuevamente la contención Im $\alpha \subset$ Ker β es inmediata, demostremos la otra contención. Sea $y \in$ Ker β, supongamos que hemos demostrado que existe $x_1 \in X$ y $y_1 \in$ Ker β tal que

$$y = y_1 + \alpha(x_1), \ ||y_1|| \le \frac{1}{2}||y|| \text{ y } ||x_1|| \le 2r||y||,$$

entonces como $y_1 \in$ Kerβ existen $x_2 \in X$ y $y_2 \in$ Kerβ tal que $y_1 = y_2 + \alpha(x_2)$, $||y_2|| \le \frac{1}{2}||y_1||$ y $||x_2|| \le 2r||y_1||$. Por lo tanto tenemos que

$y = y_2 + \alpha(x_2) + \alpha(x_1) = y_2 + \alpha(x_2 + x_1)$.

$||y_2|| \le \frac{1}{2}||y_1|| \le \frac{1}{4}||y|| = \frac{1}{2^2}||y||$.

$||x_2|| \le 2r||y_1|| \le 2r(\frac{1}{2}||y||) = \frac{r}{2^0}||y||$.

Procediendo así sucesivamente construimos dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ tal que

3.19 $$y = y_n + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k), \ ||y_n|| \le \frac{1}{2^n}||y||, \text{ y } ||x_k|| \le \frac{r}{2^{k-2}}||y||.$$

Notemos que $||y_n|| \to 0$, entonces

$$||y - \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k)|| = ||y - \alpha(\sum_{k=1}^{n} x_k)|| \to 0,$$

por lo que $y = \alpha(x)$ con $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, y además por (3.19) se tiene que

$||x|| \le \sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r}{2^{k-2}} = r||y|| \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k-2} = 4r||y||.$

Esto es concluimos que $y \in \operatorname{Im}\alpha$ y la demostración esta terminada. Necesitamos pues determimar x_1 y y_1
Recordemos que $y \in \operatorname{Ker}\beta$ y por hipótesis $||\beta_0 - \beta|| < \epsilon$, entonces

$$\textbf{3.20} \qquad ||\beta_0(y)|| = ||\beta_0(y) - \beta(y)|| \leq ||\beta_0 - \beta||\,||y|| < \epsilon||y||.$$

Por lo tanto

$$||\beta_0(\frac{y}{\epsilon||y||})|| \leq 1.$$

Ahora como $\beta_0(y) \in \operatorname{Im}\beta_0$ y $\tilde{\beta}_0(y + \operatorname{Ker}\beta_0) = \beta_0(y)$, entonces $y + \operatorname{Ker}\beta_0 = (\tilde{\beta}_0)^{-1}(\beta_0(y))$, y por (3.17) y (3.20) se tiene

$$||y + \operatorname{Ker}\beta_0|| = ||(\tilde{\beta}_0)^{-1}(\beta_0(y))|| \leq ||(\tilde{\beta}_0)^{-1}||\,||\beta_0(y)|| \leq r\epsilon||y||,$$

puesto que $||y + \operatorname{Ker}\beta_0|| = \inf_{y' \in \operatorname{Ker}\beta_0} ||y - y'||$, existe $y' \in \operatorname{Ker}\beta_0$ tal que

$$\textbf{3.21} \qquad ||y - y'|| \leq r\epsilon||y||.$$

Por otra parte tenemos que $\beta_0(y - y') = \beta_0(y)$, (3.18) y (3.21) justifican la siguiente serie de desigualdades

$$||y'|| \leq ||y|| + ||y - y'|| \leq (1 + \epsilon r)||y|| < \frac{7}{6}||y|| < \frac{3}{2}||y||.$$

Ahora como $y' \in \operatorname{Ker}\beta_0 = \operatorname{Im}\alpha_0$, existe $x' \in X$ tal que $\alpha_0(x') = y'$ pero $q(x') = (\tilde{\alpha}_0)^{-1}\tilde{\alpha}_0(x)$ y como (3.16) es conmutativo $\tilde{\alpha}_0(q(x')) = \alpha_0(x')$, por lo que

$$||q(x')|| \leq ||(\tilde{\alpha}_0)^{-1}||\,||\alpha_0(x')|| = ||(\tilde{\alpha}_0)^{-1}||\,||y'|| \leq \frac{3}{2}r||y||.$$

Tomemos $x_1 \in X$, tal que $x_1 - x' \in \operatorname{Ker}\alpha_0$ y $||x_1|| \leq ||q(x')|| + \frac{1}{2}r||y||$, entonces

$$\textbf{3.22} \qquad ||x_1|| \leq \tfrac{3}{2}r||y|| + \tfrac{1}{2}r||y|| = 2r||y||,$$

puesto que

$$0 = \alpha_0(x_1 - x') = \alpha_0(x_1) - \alpha_0(x') = \alpha_0(x_1) - y',$$

$y' = \alpha_0(x_1)$. Sea $y_1 = y - \alpha(x_1)$, se cumple entonces que $y = y_1 + \alpha(x_1)$, $y \in \operatorname{Ker} \beta$. Finalmente (3.18),(3.21),(3.22) y el hecho de que $||\alpha - \alpha_0|| < \epsilon$, justifican la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} ||y_1|| &= ||y - \alpha_0(x_1) + \alpha_0(x_1) - \alpha(x_1)|| = ||y - y' + (\alpha_0 - \alpha)x_1|| \\ &\leq ||y - y'|| + ||(\alpha_0 - \alpha)|| ||x_1|| \leq r\epsilon||y|| + \epsilon 2r||y|| \\ &= 3r\epsilon||y|| \leq \tfrac{1}{2}||y||. \square \end{aligned}$$

3.23 Teorema. Si $T \in [B(X)]^n$, entonces el conjunto

$$W = \{\lambda \in \mathbf{C^n} : \mathcal{K}(T - \lambda I) \text{ es exacta } \},$$

es un conjunto abierto. (Por consiguiente $\sigma_T(T)$ es cerrado.)

Demostración. Sea $\lambda \in W$, $\epsilon > 0$ y $\lambda' \in \mathbf{C^n}$ tal que $||\lambda - \lambda'|| < \epsilon$ y sea $U = T - \lambda I$ y $U' = T - \lambda' I$. Sabemos que la cadena

$$0 \to \Delta^0(s, X) \stackrel{\delta_U{}^0}{\to} \Delta^1(s, X) \stackrel{\delta_U{}^1}{\to} \cdots \stackrel{\delta_U{}^{n-1}}{\to} \Delta^n(s, X) \to 0,$$

es exacta. Sea la cadena

$$\Delta^{p-1}(s, X) \stackrel{\delta_{U'}{}^{p-1}}{\to} \Delta^p(s, X) \stackrel{\delta_{U'}{}^{p}}{\to} \Delta^{p+1}(s, X),$$

con $p = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ y

$\delta_{U'}{}^{p-1}(xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}) = \sum_{j=1}^n (U_j{}'x)s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}$.

$\delta_U{}^{p-1}(xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}) = \sum_{j=1}^n (U_j x)s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}$.

Entonces

$$||(\delta_U{}^{p-1} - \delta_{U'}{}^{p-1})(xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}})|| = ||\sum_{j=1}^n (U_j - U_j{}')xs_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}||$$

$$= \sum_{j=1}^n ||(U_j - U_j{}')x|| \leq \sum_{j=1}^n ||U_j - U_j{}'|| ||x|| = \sum_{j=1}^n ||\lambda_j - \lambda_j{}'|| ||x|| = ||\lambda - \lambda'|| ||x||.$$

Por lo tanto

$$||\delta_U{}^{p-1} - \delta_{U'}{}^{p-1}|| \leq ||\lambda - \lambda'|| < \epsilon.$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos que

$$||\delta_U{}^p - \delta_{U'}{}^p|| \leq ||\lambda - \lambda'|| < \epsilon.$$

Tenemos entonces las hipótesis del teorema (3.15) por lo cual concluimos que

$$\Delta^{p-1}(s,X) \stackrel{\delta_{U'}{}^{p-1}}{\longrightarrow} \Delta^p(s,X) \stackrel{\delta_{U'}{}^p}{\to} \Delta^{p+1}(s,X),$$

es exacta en $\Delta^p(s,X)$ para $p = 1, 2, \cdots, n-1$, por lo que $\lambda' \in W$ y por lo tanto W es abierto.□

Hemos demostrado que $\sigma_T(T)$ es un conjunto compacto en $\mathbf{C}^n$, resta probar que posee la propiedad del mapeo espectral, esto lo obtendremos demostrando la propiedad de proyección. En esta dirección vamos.

3.24 Lema. Sean $T \in B(X)$, $alg(T)$ la subalgebra de $B(X)$ generada por T e I y $\wp$ una seminorma en $alg(T)$ tal que

i) $\wp(UV) \leq \wp(U)||V||$, U y V en $alg(T)$.

ii) $\forall\ \lambda \in \mathbf{C}$ existe $\epsilon_\lambda > 0$, tal que $\forall\ U \in alg(T)$

$$\wp((T - \lambda I)U) \geq \epsilon_\lambda \wp(U).$$

Entonces $\wp = 0$ en $alg(T)$.

Demostración. Supongamos que $\wp \not\in 0$ en $alg(T)$. Por la condición i) $\wp$ es continua y por lo tanto $\mathrm{Ker}\ \wp$ es un subespacio cerrado de $alg(T)$, entonces el espacio cociente $alg(T)/\mathrm{Ker}\ \wp$ es un espacio normado. Definimos $||\cdot||_* : alg(T)/\mathrm{Ker}\ \wp \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$||U + \mathrm{Ker}\ \wp||_* = \wp(U).$$

$||\cdot||_*$ esta bien definida. En efecto $||U_1 + \mathrm{Ker}\ \wp|| = \wp(U_1)$ y si U_2 es tal que $U_2 - U_1 \in \mathrm{Ker}\,\wp$, entonces $\wp(U_2 - U_1) = \wp(U_2) - \wp(U_1) = 0 \Rightarrow \wp(U_2) = \wp(U_1)$.

$||\cdot||_*$ es una norma. En efecto si

$$U_1 + \mathrm{Ker}\ \wp \neq 0 \ \Rightarrow\ U_1 \not\in \mathrm{Ker}\ \wp\ \wp(U_1) \neq 0 \ \Rightarrow\ ||U_1 + \mathrm{Ker}\ \wp||_* \neq 0.$$

Tenemos entonces que $alg(T)/\text{Ker }\wp$ es un espacio normado con la norma $||\cdot||_*$.
Sea Y un espacio de Banach complejo tal que es la completación del espacio cociente $alg(T)/\text{Ker }\wp$. La norma $||\cdot||_*$ induce en Y otra norma que expresaremos como $||\cdot||_{**}$. Consideremos ahora $\varphi : alg(T)/\text{Ker }\wp \longrightarrow Y$, la proyección canónica y el operador $\omega : alg(T)/\text{Ker }\wp \longrightarrow alg(T)/\text{ker }\wp$ dado por

$$\omega(U + \text{Ker }\wp) = TU + \text{Ker }\wp.$$

Notemos que $||TU + \text{ker }\wp||_* = \wp(TU) \leq \wp(T)||U||$, por lo cual ω es continua por consiguiente tiene una extensión $\hat{\omega} \in B(Y)$. Tenemos que

$$||(\hat{\omega} - \lambda I)\varphi(U + \text{Ker }\wp)||_{**} = ||(\omega - \lambda I)(U + \text{Ker }\wp)||_{**}$$

$$= ||TU + \text{Ker }\wp - \lambda(U + \text{Ker }\wp)||_{**} = ||TU + \text{Ker }\wp - \lambda U - \lambda\text{Ker }\wp||_{**}$$

$$= ||(T - \lambda I)U + \text{Ker }\wp - \lambda\text{Ker }\wp||_{**} \geq ||(T - \lambda I)U + \text{Ker }\wp||_{**} - ||\lambda\text{Ker }\wp||_{**}$$

$$= ||(T - \lambda I)U + \text{Ker }\wp||_* - ||\lambda||||\text{Ker }\wp||_* = \wp((T - \lambda I)U) - ||\lambda||\wp(0)$$

$$= \wp((T - \lambda I)U).$$

Por ii) tenemos que

$$\begin{aligned} ||(\hat{\omega} - \lambda I)\varphi(U + \text{Ker}\wp)||_{**} &= \wp((T - \lambda I)U) \geq \epsilon_\lambda\wp(U) \\ &= \epsilon_\lambda||U + \text{Ker }\wp||_* \\ &= \epsilon_\lambda||U + \text{Ker }\wp||_{**} \\ &= \epsilon_\lambda||\varphi(U + \text{Ker }\wp)||_{**}. \end{aligned}$$

Es decir tenemos que

$$||(\hat{\omega} - \lambda I)\varphi(U + \text{Ker }\wp)||_{**} \geq \epsilon_\lambda||\varphi(U + \text{Ker }\wp)||_{**},$$

para todo $U \in alg(T)$ y todo $\lambda \in \mathbf{C}$. Como $alg(T)/\text{Ker }\wp = \text{Im }\varphi$ es denso en Y, tenemos que para todo $y \in Y$ y $\lambda \in \mathbf{C}$

$$||(\hat{\omega} - \lambda I)y||_{**} \geq \epsilon_\lambda||y||_{**}.$$

Pero esto implica que $\tau_I(\hat{\omega}) = \emptyset$ (ver 2.16) y por el teorema (2.12) $\partial(\sigma_H(\hat{\omega})) = \emptyset$, lo que no es posible. Esta contradicción permite concluir que $\wp = 0$ como queríamos demostrar.□

3.25 Teorema. Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z_0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "T_0"'] & Z \arrow[d, "T"] \\ Z_0 \arrow[r, "d"] & Z \end{tikzcd}$$

con Z y Z_0 espacios de Banach complejos, d, T_0 y T operadores que conmutan entre sí, y $d(Z_0) \neq Z$. Entonces existe un número complejo λ tal que

3.26 $$d(Z_0) + (T - \lambda I)(Z) \neq Z.$$

Demostración. Denotemos $T_\lambda = T - \lambda I$ y supongamos que (3.26) no es cierta. Entonces para toda λ se cumple la igualdad

$$d(Z_0) + (T - \lambda I)(Z) = Z.$$

Esto significa que el operador

$$(z, z_0) \to T_\lambda z + dz_0 : Z \oplus Z_0 \longrightarrow Z$$

es un epimorfismo, por consiguiente el operador adjunto $W : Z^* \longrightarrow Z^* \times {Z_0}^*$ dado por

$$W(w) = ({T_\lambda}^* w, d^* w)$$

es una inmersión isomorfica, es decir existe $\epsilon_\lambda > 0$ tal que

3.27 $$||{T_\lambda}^* w|| + ||d^* w|| \geq \epsilon_\lambda ||w||,$$

para todo $w \in Z^*$. De la hipótesis $d(Z_0) \neq Z$ se sigue que d^* no es una inmersión isomorfica, por consiguiente existe una sucesión $\{w_k\}$ de elementos de Z^* tal que

3.28 $$||w_k|| = 1, \ \forall \ k$$

3.29 $$d^*w_k \xrightarrow{k} 0.$$

Sea $alg(T^*)$ la subalgebra de $B(Z^*)$ generada por T^* e I. Sea

$$\wp(U) = \limsup_{k\to\infty} ||Uw_k||, \quad U \in alg(T^*)$$

Mediante la relación (3.27) obtenemos que

3.30 $$||T_\lambda{}^*Uw_k|| + ||d^*Uw_k|| \geq \epsilon_\lambda ||Uw_k||, \; U \in alg(T^*)$$

Pero todo elemento U en $alg(T^*)$ es de la forma $U = v(T^*)$ donde v es un polinomio. Por lo tanto

3.31 $$\lim_{k\to\infty} d^*Uw_k = \lim_{k\to\infty} d^*v(T^*)w_k = \lim_{k\to\infty} v(T_0{}^*)d^*w_k,$$

pues $T_0{}^*d^* = d^*T^*$ y por (3.29). Ahora por (3.30) se sigue que

$$\limsup_{k\to\infty} ||T_\lambda{}^*Uw_k|| + \limsup_{k\to\infty} ||d^*Uw_k|| \geq \epsilon_\lambda \limsup_{k\to\infty} ||Uw_k||,$$

Por (3.31) obtenemos que

$$\wp((T^* - \lambda I)U) \geq \epsilon_\lambda \wp(U).$$

Por otra parte tenemos que para $U, V \in alg(T^*)$

$$\wp(UV) = \limsup_{k\to\infty} ||UVw_k|| \leq \limsup_{k\to\infty} ||V|| ||Uw_k|| = \wp(U)||V||$$

De esta manera $\wp$ es una seminorma definida en $alg(T^*)$ y satisface las condiciones del teorema (3.24). Por lo tanto $\wp = 0$, pero $\wp(I) = \limsup_{k\to\infty} ||w_k|| = 1$ y tenemos una contradicción. Por lo tanto concluimos que (3.26) es válida para algún λ, como queríamos demostrar.□

Recordemos que nuestro objetivo es demostrar que el espectro de Taylor satisface la propiedad de proyección, ya estamos cerca de este resultado, siguiendo el camino que siguió Słodkowski.

3.32 Definición. sea $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n) \in [B(X)]^n$ y sea $\mathcal{K}(T - \lambda I)$ el complejo de Koszul de $T - \lambda I$, definimos el siguiente conjunto

$$\Sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbf{C}^n : \mathcal{K}(T - \lambda I) \text{ no es exacta en } \Delta^p(s, X) \; p = 0, 1, \cdots, n\}.$$

Es evidente que

$$\sigma_T(T) = \bigcup_{p=0}^{n} \Sigma_p(T).$$

Explicaremos ahora como consideraremos el complejo de Koszul para la $(n+1)$-ada de operadores $(T_1, T_2 \cdots, T_n, T_{n+1})$, la idea de esto es hacer las demostraciones más sencillas sin recurrir a herramienta de álgebra homológica. Consideremos el complejo de Koszul para T en la forma

$$0 \rightarrow X_0 \stackrel{\delta_T{}^0}{\rightarrow} X_1 \stackrel{\delta_T{}^1}{\rightarrow} X_2 \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow X_{p-1} \stackrel{\delta_T{}^p}{\rightarrow} X_p \rightarrow \cdots \stackrel{\delta_T{}^{n-1}}{\rightarrow} X_n \rightarrow 0$$

donde $X_p \cong \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_p \leq n} X$. Entonces por el complejo de Koszul de $T^+ = (T_1, T_2, \cdots, T_n, T_{n+1})$ entenderemos

$$0 \rightarrow Y_0 \stackrel{\delta_{T^+}{}^0}{\rightarrow} Y_1 \stackrel{\delta_{T^+}{}^1}{\rightarrow} Y_2 \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow Y_{p-1} \stackrel{\delta_{T^+}{}^{p-1}}{\rightarrow} Y_p \rightarrow \cdots \stackrel{\delta_{T^+}{}^n}{\rightarrow} Y_{n+1} \rightarrow 0$$

donde

$$Y_p = X_p \oplus X_{p-1}, \quad p = 0, 1, 2 \cdots, n+1.$$

También

$$X_{-1} = X_{n+1} = 0, \quad X_p \cong \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} X, \quad X_{p-1} \cong \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{p-1} < n+1.\ (i_p = n+1)} X,$$

y $\delta_{T^+}{}^p : Y_p \longrightarrow Y_{p+1}$ debe estar definido como

$$\delta_{T^+}{}^p(x_p, x_{p-1}) = (\delta_T{}^p x_p, \delta_T{}^{p-1} x_{p-1} + (-1)^p T_{n+1} x_p).$$

En efecto, veamos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
&\delta_{T^+}{}^p(x_p s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} + x_{p-1} s_{j_1} \wedge s_{j_2} \wedge \cdots \wedge s_{j_{p-1}} \wedge s_{n+1}) \\
&= \delta_{T^+}{}^p(x_p s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}) + \delta_{T^+}{}^p(x_{p-1} s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_{p-1}} \wedge s_{n+1}) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} (T_k x_p) s_k \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} + \sum_{l=1}^{n+1} (T_l x_{p-1}) s_l \wedge s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_{p-1}} \wedge s_{n+1} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (T_k x_p) s_k \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} + \sum_{l=1}^{n} (T_l x_{p-1}) s_l \wedge s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_{p-1}} \wedge s_{n-1} \\
&\quad + (T_{n+1} x_p) s_{n+1} \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \wedge s_{n+1} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (T_k x_p) s_k \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} + \sum_{l=1}^{n} (T_l x_{p-1}) s_l \wedge s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_{p-1}} \wedge s_{n+1} \\
&\quad + (-1)^p (T_{n+1} x_p) s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{n+1} \\
&= \delta_T{}^p(x_p s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}) + \\
&\quad + [\delta_T{}^{p-1}(x_{p-1} s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_{p-1}}) + (-1)^p (T_{n+1} x_p) s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}] \wedge s_{n+1}
\end{aligned}$$

El siguiente teorema es esencial para demostrar la propiedad de proyección.

3.33 Teorema. Sean $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n)$ y $T^+ = (T_1, T_2 \cdots, T_n, T_{n+1})$ donde $T_1, T_2 \cdots, T_n, T_{n+1}$ son elementos en $B(X)$ que conmutan entre sí, y sea $P : \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}^n$, la proyección canónica sobre las primeras n-coordenadas. Entonces para todo entero $p = 0, 1, 2, \cdots, n+1$ se tiene que

i) $P\Sigma_p(T^+) \subset \Sigma_{p-1}(T) \cup \Sigma_p(T)$.
ii) $\Sigma_p(T) \subset P\Sigma_{p+1}(T^+)$.

(Consideraremos que $\Sigma_{-1}(T) = \Sigma_{n+1}(T) = \Sigma_{n+2}(T^+) = \emptyset$.)

Demostración. i) Supongamos que $p = 0$, y sea $\lambda \in P\Sigma_0(T^+)$, entonces $\lambda = P(\lambda^+)$ con $\lambda^+ \in \Sigma_0(T^+)$. De esta manera si $\lambda \notin \Sigma_0(T)$ entonces $\mathcal{K}(T - \lambda I)$ es exacta en el *lugar* 0 por lo que tenemos la implicación

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker}\,(T_j - \lambda_j I) = 0 \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n+1} \mathrm{Ker}\,(T_j - \lambda_j I) = 0,$$

por lo que $\mathcal{K}(T - \lambda^+ I)$ es exacta en el *lugar* 0 y $\lambda^+ \notin \Sigma_0(T^+)$, pero esto contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto $\lambda \in \Sigma_0(T)$ y se tiene el resultado para $p = 0$.
Si ahora $p = n + 1$, procediendo como en el caso anterior y notando que

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Im}\,(T_j - \lambda_j I) = X \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{Im}\,(T_j - \lambda_j I) = X,$$

se sigue el resultado para este caso. Supongamos ahora que $p \in \{1, 2, \cdots, n\}$, es suficiente demostrar la implicación

3.34 $\mathrm{Im}\,\delta_T{}^{p-2} = \mathrm{Ker}\,\delta_T{}^{p-1}$ e $\mathrm{Im}\,\delta_T{}^{p-1} = \mathrm{Ker}\,\delta_T{}^{p} \Rightarrow \mathrm{Im}\,\delta_{T^+}{}^{p-1} = \mathrm{Ker}\,\delta_{T^+}{}^{p}$.

En efecto sopongamos que hemos demostrado esta implicación, entonces si $\lambda \notin \Sigma_{p-1}(T) \cup \Sigma_p(T)$ entonces $\mathcal{K}(T - \lambda I)$ es exacta en X_{p-1} y X_p, es decir

$$\mathrm{Im}\ \delta_{T-\lambda i}{}^{p-2} = \mathrm{Ker}\ \delta_{T-\lambda I}{}^{p-1} \text{ e } \mathrm{Im}\ \delta_{T-\lambda I}{}^{p-1} = \mathrm{Ker}\ \delta_{T-\lambda I}{}^{p}.$$

Por (3.34) se sigue que

$$\mathrm{Im}\ \delta_{T^+-\lambda^+ I}{}^{p-1} = \mathrm{Ker}\ \delta_{T^+-\lambda^+ I}{}^{p},$$

por lo cual $\mathcal{K}(T^+ - \lambda^+ I)$ es exacta en Y_p. Por lo que si λ fuera de la forma $\lambda = P(y)$ con $y \in \Sigma_p(T^+)$, entonces $y = \lambda^+$ y $\mathcal{K}(T^+ - \lambda^+ I)$ no es exacta en Y_p y tenemos una contradicción. Por lo tanto $\lambda \notin P\Sigma_p(T^+)$.
Demostremos entonces la implicación (3.34). Si $x \in \operatorname{Ker} \delta_{T^+}{}^p$, entonces $\delta_{T^+}(x) = 0$, con $x = (x_p, x_{p-1}) \in Y_p = X_p \oplus X_{p-1}$, así pues

$$\delta_{T^+}{}^p(x_p, x_{p-1}) = (\delta_T{}^p x_p, \delta_T{}^{p-1} x_{p-1} + (-1)^p T_{n+1} x_p) = 0,$$

entonces

$$\delta_T{}^p x_p = 0 \text{ y } \delta_T{}^{p-1} x_{p-1} + (-1)^p T_{n+1} x_p = 0.$$

Como $x_p \in \operatorname{Ker} \delta_T{}^p = \operatorname{Im} \delta_T{}^{p-1}$, existe $x_{p-1}' \in X_{p-1}$ tal que $x_p = \delta_T{}^{p-1}(x_{p-1}')$, por lo cual

$$\delta_T{}^{p-1} x_{p-1} + (-1)^p T_{n+1} \delta_T{}^{p-1}(x_{p-1}') = 0,$$

o sea

$$\delta_T{}^{p-1}(x_{p-1} + (-1)^p T_{n+1} x_{p-1}') = 0,$$

es decir $x_{p-1} + (-1)^p T_{n+1} x_{p-1}'$ pertenece a $\operatorname{Ker} \delta_T{}^{p-1} = \operatorname{Im} \delta_T{}^{p-2}$, por lo cual existe x_{p-2}'' tal que

$$x_{p-1} + (-1)^p T_{n+1} x_{p-1}' = \delta_T{}^{p-2}(x_{p-2}'').$$

Notemos ahora que

$$(x_p, x_{p-1}) = (\delta_T{}^{p-1} x_{p-1}', \delta_T{}^{p-2} x_{p-2}'' + (-1)^{p-1} T_{n+1} x_{p-1}').$$

por lo tanto

$$x = \delta_{T^+}{}^{p-1}(x_{p-1}', x_{p-2}''),$$

esto es $x \in \operatorname{Im} \delta_{T^+}{}^{p-1}$.
Hemos demostrado que $\operatorname{Ker} \delta_{T^+}{}^p \subset \operatorname{Im} \delta_{T^+}{}^{p-1}$ y como la otra contención es inmediata la implicación (3.34) esta totalmente demostrada.

ii) Demostremos ahora que $\Sigma_p(T) \subset P\Sigma_{p+1}(T^+)$.
Probemos primero que si $\operatorname{Im} \delta_T{}^{p-1} \neq \operatorname{Ker} \delta_T{}^p$, existe un número complejo λ tal que

$$\operatorname{Im} \delta_*{}^p \neq \operatorname{Ker} \delta_*{}^{p+1},$$

con

$$0 \to Y_0 \xrightarrow{\delta_*{}^0} Y_1 \xrightarrow{\delta_*{}^1} Y_2 \to \cdots \to Y_{p-1} \xrightarrow{\delta_*{}^{p-1}} Y_p \to \cdots \xrightarrow{\delta_*{}^n} Y_n \to 0,$$

el complejo de koszul, $\mathcal{K}_*$, para la $n+1$-ada $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n, T_{n+1} - \lambda I)$. Supongamos que tal λ no existe, entonces para todo $x \in \operatorname{Ker} \delta_T{}^p$, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_*{}^{p-1}(0,x) &= (\delta_T{}^{p+1}(0), \delta_T{}^p x + (-1)^p (T_{n+1} - \lambda I)(0)) \\ &= (0, \delta_T{}^p x) = (0,0). \end{aligned}$$

Entonces $(0,x) \in \operatorname{Ker} \delta_*{}^{p+1}$, por lo cual existe $(x_p{}', x_{p-1}{}'') \in Y_p$ tal que

$$(0,x) = \delta_*{}^p (x_p{}', x_{p-1}{}'').$$

Esto implica que

$$\delta_T{}^p x_p{}' = 0 \text{ y } x = \delta_T{}^{p-1} x_{p-1}{}'' + (-1)^p (T_{n+1} - \lambda I) x_p{}',$$

Por lo tanto $x \in (T_{n+1} - \lambda I) \operatorname{Ker} \delta_T{}^p + \operatorname{Im} \delta_T{}^{p-1}$, por lo tanto tenemos

3.35 $\qquad (T_{n+1} - \lambda I)(\operatorname{Ker} \delta_T{}^p) + \operatorname{Im} \delta_T{}^{p-1} = \operatorname{Ker} \delta_T{}^p.$

Sea $Z_0 = X_{p-1}$ y $Z = \operatorname{Ker} \delta_T{}^p$ y sea el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z_0 \arrow[r, "\delta_T{}^{p-1}"] \arrow[d, "T_{n+1}"'] & Z \arrow[d, "T_{n+1}"] \\ Z_0 \arrow[r, "\delta_T{}^{p-1}"] & Z \end{tikzcd}$$

Este diagrama es conmutativo y junto con (3.35) tenemos las condiciones del teorema (3.25) por lo que existe un complejo λ tal que (3.35) no es válida, por consiguiente $\operatorname{Im}\delta_*{}^p \neq \operatorname{Ker}\delta_*{}^{p+1}$. Regresemos a nuestro problema de demostrar

$$\Sigma_p(T) \subset P\Sigma_{p+1}(T^+)$$

Sea $x \in \Sigma_p(T)$ entonces $\mathcal{K}(T - xI)$ no es exacta en X_p, esto es $\operatorname{Im} \delta_{T-xI}{}^{p-1} \neq \operatorname{Ker} \delta_{T-xI}{}^p$, entonces existe un complejo λ tal que $\operatorname{Im} \delta_*{}^p \neq \operatorname{Ker} \delta_*{}^{p+1}$ donde $\mathcal{K}_*$ es el complejo de Koszul para $(T_1 - x_1 I, T_2 - x_2 I, \cdots, T_n - x_n I, T_{n+1} - \lambda I)$, con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Si ahora $y = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)$, es claro que $y \in \Sigma_{p+1}(T^+)$ y $x = P(y)$, por lo tanto $x \in P(\Sigma_{p+1}(T^+))$. □

3.36 Corolario. Si $P : \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}^n$ es la proyección sobre las primeras n-cordenadas, $T_1, T_2, \cdots, T_n, T_{n+1}$ elementos en $B(X)$, que conmutan entre sí, entonces

$$P(\sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n, T_{n+1})) = \sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n).$$

Demostración. Por el teorema (3.33) tenemos que

$$\sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n) = \bigcup_{p=0}^{n} \Sigma_p(T) \subset \bigcup_{p=0}^{n} P\Sigma_{p+1}(T^+) \subset P(\bigcup_{p=0}^{n+1} \Sigma_{p+1}(T^+))$$

$$= P(\sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n, T_{n+1})) \subset \bigcup_{p=0}^{n+1} P\Sigma_{p+1}(T^+) \subset \bigcup_{p=0}^{n+1} [\Sigma_p(T) \bigcup \Sigma_{p+1}(T)]$$

$$= \sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n). \square$$

Generalizaremos ahora el corolario (3.36) para cualquier proyección $P : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^k$, para lo cual necesitamos el siguiente teorema, pero antes la siguiente

3.37 Notación y Definición. Sea Θ el conjunto de permutaciones de $\{1, 2, \cdots, n\}$ y $T \in [B(X)]^n$. Para $\theta \in \Theta$ denotamos el operador $T_\theta \in [B(X)]^n$, como

$$T_\theta = (T_{\theta(1)}, T_{\theta(2)}, \cdots, T_{\theta(n)})$$

3.38 Teorema. Sea $T \in [B(X)]^n$, Entonces T es Taylor-regular si y sólo si T_θ es Taylor-regular para todo $\theta \in \Theta$.

Demostración. Basta demostrar las siguientes equivalencias

i) $\operatorname{Ker} {\delta_T}^0 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} {\delta_{T_\theta}}^0 = 0$.

ii) $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} T_j = X \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} T_{\theta(j)} = X$.

iii) $\operatorname{Im} {\delta_T}^{p-1} = \operatorname{Ker} {\delta_T}^p \Leftrightarrow \operatorname{Im} {\delta_{T_\theta}}^{p-1} = \operatorname{Ker} {\delta_{T_\theta}}^p$.

con $p = 1, 2, \cdots, n-1$ y $\theta \in \Theta$ fija.

i) Notemos que

$$x \in {\delta_{T_\theta}}^0 \Leftrightarrow {\delta_{T_\theta}}^0(x) = 0 \Leftrightarrow T_{\theta(i)}(x) = 0 \ \forall\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Leftrightarrow T_j(x) = 0 \;\forall\; j \Leftrightarrow {\delta_T}^0(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } {\delta_T}^0$$

por lo tanto se sigue que

$$\text{Ker } {\delta_T}^0 = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } {\delta_{T_\theta}}^0 = 0.$$

ii) Ahora notemos que $x \in \sum_{j=1}^n \text{Im}T_j \Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^n T_j(y_j) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n T_{\theta(j)}(y_{\theta(j)}) \Leftrightarrow$ $x \in \sum_{j=1}^n ImT_{\theta(j)}$. por lo tanto se sigue que

$$\sum_{j=1}^n \text{Im } T_j = X \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \text{Im } T_{\theta(j)} = X.$$

iii) ($\Rightarrow$) Supongamos que $\text{Im}\, {\delta_T}^{p-1} = \text{Ker}\, {\delta_T}^p$ y demostremos que $\text{Im}\, {\delta_{T_\theta}}^{p-1} =$ $\text{Ker } {\delta_{T_\theta}}^p$
Como ya sabemos es suficiente demostrar la contención $\text{Ker}\, {\delta_{T_\theta}}^p \subset \text{Im } {\delta_{T_\theta}}^{p-1}$.
Observemos que

$$\bar{x} \in \text{Ker } {\delta_{T_\theta}}^p \Leftrightarrow {\delta_{T_\theta}}^p(\bar{x}) = {\delta_{T_\theta}}^p(xs_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}) =$$

$$\sum_{j=1}^n (T_{\theta(j)}x)s_{\theta(j)} \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} = \sum_{j=1}^n (T_jx)s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \in \text{Ker } {\delta_T}^p.$$

De esta manera si $\bar{x} \in \text{Ker } {\delta_{T_\theta}}^p \Rightarrow \bar{x} \in \text{Ker } {\delta_T}^p = \text{Im } {\delta_T}^{p-1} \Rightarrow \bar{x} =$ ${\delta_T}^{p-1}(ys_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}) = \sum_{j=1}^n (T_jy)s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}} = \sum_{j=1}^n (T_{\theta(j)}y)s_{\theta(j)} \wedge$ $s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}} = {\delta_{T_\theta}}^{p-1}(y) \Rightarrow \bar{x} \in \text{Im}\, {\delta_{T_\theta}}^{p-1}$. Por lo tanto la contención queda demostrada.
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\text{Ker } {\delta_{T_\theta}}^p = \text{Im } {\delta_{T_\theta}}^{p-1}$. Si $\bar{x} \in \text{Ker } {\delta_T}^p \Rightarrow$ $\bar{x} \in \text{Ker } {\delta_{T_\theta}}^p = \text{Im } {\delta_{T_\theta}}^{p-1}$, por lo que

$$\bar{x} = {\delta_{T_\theta}}^{p-1}(ys_{i_1} \wedge s_{i-2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}) = \sum_{j=1}^n (T_{\theta(j)}y)s_{\theta(j)} \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}$$

$$\sum_{j=1}^n (T_jy)s_j \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}} = {\delta_T}^{p-1}(ys_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_{p-1}}$$

$\Rightarrow \bar{x} \in \text{Im } {\delta_T}^{p-1}$.
Por lo tanto $\text{Ker } {\delta_T}^p \subset \text{Im } {\delta_T}^{p-1}$.□

Este teorema implica que

3.39 $$\lambda \in \sigma_T(T) \Leftrightarrow \lambda_\theta \in \sigma_T(T_\theta),\ \theta \in \Theta,$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ y $\lambda_\theta = (\lambda_{\theta(1)}, \lambda_{\theta(2)}, \cdots, \lambda_{\theta(n)})$.

Ahora si procedemos a demostrar la propiedad de proyección.

3.40 Teorema. El espectro de Taylor σ_T posee la propiedad de la proyección.

Demostración. Sea $T \in [B(X)]^n$, un sistema conmutativo y $P : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C^k}$ la proyección dada como en el teorema (2.15), demostremos que

$$P(\sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n)) = \sigma_T(T_{j_1}, T_{j_2}, \cdots, T_{j_k}).$$

Sea $(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_k}) = P(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ con $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n)$, por (3.39) tenemos que

$$(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_k}, \alpha_{j_{j+1}}, \cdots, \alpha_{j_n}) \in \sigma_T(T_{j_1}, T_{j_2}, \cdots, T_{j_k}, T_{j_{k+1}}, \cdots, T_{j_n}),$$

mediante el corolario (3.36) proyectando sucesivamente sobre las primeras coordenadas hasta llegar a el lugar k tenemos que

$$(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_k}) = (\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_k}) \in \sigma_T(T_{j_1}, T_{j_2}, \cdots, T_{j_k}).$$

Esto es

$$P(\sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n)) \subset \sigma_T(T_{j_1}, T_{j_2}, \cdots, T_{j_k}).$$

Recíprocamente si $(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_k}) \in \sigma_T(T_{j_1}, T_{j_2}, \cdots, T_{j_k})$, nuevamente por el corolario (3.36) tenemos que

$$\sigma_T(T_{j_1}, T_{j_2}, \cdots, T_{j_k}) = P_k(\sigma_T(T_{j_1}, \cdots, T_{j_k}, T_{j_{k+1}})).$$

Entonces

$$(\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_k}) = P_k(\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_k}, \lambda_{j_{k+1}}),$$

donde $(\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_k}, \lambda_{j_{k+1}}) \in \sigma_T(T_{j_1}, \cdots, T_{j_k}, T_{j_{k+1}})$ y P_k, la proyección sobre las primeras k-componentes. Aplicando otra vez el corolario (3.36), existe pero por (3,39) $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n)$, y ya que $P(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_{j_1}, \cdots \lambda_{j_k})$, se sigue que $(\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_k}) \in P(\sigma_T(T_1, T_2 \cdots, T_n))$. Esto es

$$\sigma_T(T_{j_1}, T_{j_2}, \cdots, T_{j_k}) \subset P(\sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n)),$$

y la demostración esta terminada.□

3.41 Teorema. (Del mapeo espectral) Sea $T \in [B(X)]^n$ un sistema conmutativo y $p : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C^k}$ cualquier función polinomial, entonces

$$p(\sigma_T(T)) = \sigma_T(p(T)).$$

Demostración. Recordemos que $\sigma_T(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{C^n}$ y junto con los teoremas (3.12) y (3.40) se tienen las condiciones del teorema de Słodkowski-Żelazko, por lo que, el teorema (3.14) implica el resultado.□

3.42 Corolario. Si $T \in [B(X)]^n$ entonces $\sigma_T(T) \neq \emptyset$

Demostración. Si $\sigma_T(T) = \emptyset$, consideramos $P : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C}$ la proyección $P(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_j)$. Entonces $P(\sigma_T(T_1, T_2, \cdots, T_n) = \sigma_T(T_j)$, por lo que $\sigma_T(T_j) = \emptyset$, lo cual no es posible. Por lo tanto $\sigma_T \neq \emptyset$, que es lo que queríamos demostrar.□

APENDICE

EL TEOREMA DE SŁODKOWSKI-ŻELAZKO

El teorema de mapeo espectral, evidentemente implica la propiedad de proyección, sin embargo el recíproco en general no es cierto. El teorema de Słodkowski-Żelazko proporciona condiciones bajo las cuales la propiedad de proyección implica el teorema de mapeo espectral. El objetivo de este apéndice es precisamente demostrar el teorema de Słodkowski-Żelazko, en alguna parte de la demostración utilizaremos un resultado obtenido por J.P. Kahane junto con W. Żelazko y de manera independiente por A.M. Gleason. Este será nuestro primer resultado.

A1 TEOREMA DE GLEASON-KAHANE-ŻELAZKO. Sea A un álgebra de Banach compleja con unidad e. Entonces un funcional lineal f en A es funcional lineal multiplicativo si y sólo si

A2 $$f(a) \in \sigma(a),$$

para todo $a \in A$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es un funcional lineal multiplicativo, si existe $a_0 \in A$ tal que $f(a_0) \notin \sigma(a_0)$, entonces $a_0 - f(a_0)e$ es invertible, por lo que existe $b_0 \in A$ tal que

$$b_0(a_0 - f(a_0)e) = e,$$

de donde se sigue que

$$f(e) = f(b_0)(f(a_0) - f(a_0)) = 0,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto $f(a) \in \sigma(a)$, para todo $a \in A$.

($\Leftarrow$) supongamos que (A2) es válida, entonces se sigue fácilmente que $f(e) = 1$. Por otro lado sea $a \in A$ y consideremos el elemento $\exp(\lambda a)$, donde λ es una variable compleja. Sea

A3 $$\varphi(\lambda) = f[\exp(\lambda a)].$$

$\varphi(\lambda)$ es una función entera, por A2 se sigue que $\varphi(\lambda) \neq 0$, entonces podemos escribir que

$$\varphi(\lambda) = \exp[\psi(\lambda)],$$

para alguna función entera $\psi(\lambda)$.
Observemos que

$$|\varphi(\lambda)| \leq ||f|| \exp(|\lambda|||a||),$$

lo que implica que $\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$, para algunos α y β complejos. Como $\varphi(0) = f(\exp 0) = 1$ se sigue que $\psi(\lambda) = \alpha\lambda$, por lo tanto tenemos que

$$\varphi(\lambda) = \exp(\alpha\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \lambda^n.$$

y por otro lado usando A3 tenemos que

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a^n)}{n!} \lambda^n,$$

igualando los coeficientes de ambas expansiones tenemos que

$$f(a^n) = \alpha^n = f(a)^n,$$

para todo n. De esta manera para todo $a, b \in A$ tenemos que

$$f(ab) = f(\frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]) = \frac{1}{2}[f(a+b)^2 - f(a)^2 - f(b)^2]$$
$$= \tfrac{1}{2}([f(a) + f(b)]^2 - f(a)^2 - f(b)^2) = f(a)f(b).$$

Por lo tanto f es un funcional lineal multiplicativo.□

Ahora si procedemos a demostrar el teorema de Słodkowski-Żelazko.

A4 TEOREMA. Sea X un espacio de Banach complejo y sea $\mathcal{C}(X)$ la familia de subconjuntos de elementos de $B(X)$ que consisten de operadores que conmutan mutuamente y sea σ^* un espectro definido en $\mathcal{C}(X)$ tal que cumple lo siguiente

a) $\sigma^*(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{C^n}$.

b) Para un sólo elemento T, $\sigma^*(T) \neq \emptyset$ y $\sigma^*(T) \subset \sigma(T)$.

c) σ^* posee la propiedad de proyección.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

i) Para cualquier par de operadores T_1, T_2 en $B(X)$ que conmutan y para cualquier par de complejos α, β se tiene que

$$\sigma^*(T_1, T_2, \alpha T_1 + \beta T_2) \subset \{(z_1, z_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \in \mathbf{C^3} : (z_1, z_2) \in \mathbf{C^2}\}.$$

ii) Para tres operadores arbitrarios T_1, T_2, T_3 en $B(X)$ que conmutan entre sí

$$\sigma^*(T_1, T_2, T_3) \subset \sigma_H{}^{[T_1,T_2,T_3]}(T_1, T_2, T_3),$$

donde $[T_1, T_2, T_3]$ es el álgebra generada por T_1, T_2, T_3 e I.

iii) Para cualquier sistema conmutativo $T = (T_1, T_2, \cdots, T_n)$ de elementos de $B(X)$ y cualquier función polinomial $p : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C^m}$. se tiene que

$$p(\sigma^*(T)) = \sigma^*(p(T)).$$

Demostración. Demostremos primero las implicaciones mas sencillas iii)$\Rightarrow$ i) y ii)$\Rightarrow$i). Efectivamente

iii)$\Rightarrow$i). Sea $p : \mathbf{C^3} \longrightarrow \mathbf{C^3}$ dado como

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2),$$

entonces

$$\sigma^*(p(T_1, T_2, T_3)) = \sigma^*(T_1, T_2, \lambda T_1 + \beta T_2) \text{ y } \sigma^*(p(T_1, T_2, T_3)) = p(\sigma^*(T_1, T_2, T_3)).$$

Sea $(z_1, z_2, z_3) \in \sigma^*(T_1, T_2, \lambda T_1 + \beta T_2)$, entonces $(z_1, z_2, z_3) \in p(\sigma^*(T_1, T_2, T_3))$ $\Rightarrow$ $(z_1, z_2, z_3) = p(a, b, c)$, con $(a, b, c) \in \sigma^*(T_1, T_2, T_3)$, por lo cual tenemos que $(z_1, z_2, z_3) = (a, b, \alpha a + \alpha b) \Rightarrow z_1 = a, z_2 = b, z_3 = \alpha a + \beta b$. Esto es $z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2$, por lo tanto $\sigma^*(T_1, T_2, T_3) \subset \{(z_1, z_2, \alpha z_1 + \alpha z_2) \in \mathbf{C}^3 : (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2\}$

ii)$\Rightarrow$ i). Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \sigma^*(T_1, T_2, \alpha T_1 + \beta T_2)$. Por hipótesis

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in {\sigma_H}^{[T_1, T_2, \alpha T_1 + \beta T_2]}(T_1, T_2, \alpha T_1 + \beta T_2) = {\sigma_H}^{[T_1, T_2]}(T_1, T_2, \alpha T_1 + \alpha T_2),$$

pero

$${\sigma_H}^{[T_1, T_2]} = \{(f(T_1), f(T_2), \alpha f(T_1) + \beta f(T_2)) : f \in \mathcal{M}([T_1, T_2])\},$$

donde $\mathcal{M}([T_1, T_2])$ es el espacio de los funcionales lineales multiplicativos definidos en $[T_1, T_2]$. Por lo tanto

$$\alpha_1 = f(T_1)\ \alpha_2 = f(T_2) \text{ y } \alpha_3 = \alpha f(T_1) + \beta f(T_2) = \alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2.$$

Esto es $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \{(z_1, z_2, \alpha z_1 + \beta z_2) : (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2\}$. Por lo tanto esta implicación esta terminada.

i)$\Rightarrow$ii). Sea $\mathcal{A} = [T_1, T_2, T_3]$. La propiedad de proyección implica fácilmente que $\sigma^*(U_1, U_2, \cdots, U_n) \neq \emptyset$ para $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathcal{A}$. También la propiedad de proyección y la hipótesis b) implican que

$$\sigma^*(U_1, U_2, \cdots, U_n) \subset \Pi_{j=1}^n \sigma(U_j).$$

Sea

$$K = \Pi_{U \in \mathcal{A}} \sigma(U).$$

Este conjunto es no vacío y compacto, por ser producto de conjuntos no vacíos y compactos (con respecto a la topología producto). Fijemos un elemento $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \sigma^*(T_1, T_2, T_3)$ y definamos el conjunto

$$K(U_1, U_2, \cdots, U_n) = \{\lambda = (\lambda_U) \in K : \lambda_{T_1} = \lambda_1, \lambda_{T_2} = \lambda_2, \lambda_{T_3} = \lambda_3 \text{ y }$$

$$(\lambda_{U_1}, \cdots, \lambda_{U_n}) \in \sigma^*(U_1, \cdots, U_n)\},$$

$K(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ cumple las siguientes condiciones, que probaremos una a continuación de otra.

• Es no vacío. Efectivamente sabemos que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \sigma^*(T_1, T_2, T_3)$. Así si P_j es la proyección sobre la j-esima coordenada $P_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_j)$, entonces

$$\lambda_j = P_j((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \in P_j(\sigma^*(T_1, T_2, T_3)) = \sigma^*(T_j),$$

para $j = 1, 2, 3$.
Por otra parte como $\sigma^*(U_1, U_2, \cdots, U_n) \neq \phi$, sea $(\lambda_{U_1}, \lambda_{U_2}, \cdots, \lambda_{U_n}) \in \sigma^*(U_1, U_2, \cdots, U_n)$, entonces definimos la función $f : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{A}} \sigma(U)$ tal que

$$f(T_j) = \lambda_j \; j = 1, 2, 3 \text{ y } f(U_j) = \lambda_{U_j} \; j = 1, 2, \cdots, n.$$

Esto es f pertenece a $K(U_1, U_2, \cdots, U_n)$.
• Es compacto. En efecto $K(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ es un subconjunto cerrado del conjunto compacto K.
• $K(U_1, U_2, \cdots, U_n, V_1, V_2, \cdots, V_m) \subset K(U_1, U_2, \cdots, U_n) \cap K(V_1, V_2, \cdots, V_m)$.
En efecto si

$$(\lambda_{U_1}, \lambda_{U_2}, \cdots, \lambda_{U_n}, \lambda_{V_1}, \lambda_{V_2}, \cdots, \lambda_{V_m}) \in \sigma^*(U_1, U_2, \cdots, U_n, V_1, V_2, \cdots, V_m).$$

Si $P_1 : \mathbf{C^{n+m}} \longrightarrow \mathbf{C^n}$ es la proyección

$$P_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

y $P_2 : \mathbf{C^{n+m}} \longrightarrow \mathbf{C^m}$ es

$$P_2(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots \alpha_m) = (\alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_m),$$

entonces por la propiedad de proyección se sigue que

$$(\lambda_{U_1}, \lambda_{U_2}, \cdots, \lambda_{U_n}) = P_1(\lambda_{U_1}, \cdots, \lambda_{U_n}, \lambda_{V_1}, \cdots, \lambda_{V_m}) \in \sigma^*(U_1, U_2, \cdots, U_n),$$

y también

$$(\lambda_{V_1}, \lambda_{V_2} \cdots, \lambda_{V_m}) = P_2(\lambda_{U_1}, \cdots, \lambda_{U_n}, \lambda_{V_1}, \lambda_{V_2} \cdots, \lambda_{V_m}) \in \sigma^*(V_1, V_2, \cdots, V_m).$$

Por lo tanto la contención se sigue inmediatamente.
Tenemos entonces una familia de compactos $\{K(U_1, U_2, \cdots, U_n)\}$, $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathcal{A}$ que tiene la propiedad de intersección finita, por lo tanto

$$\bigcap_{U_i \in \mathcal{A}} K(U_1, U_2, \cdots, U_n) \neq \phi.$$

Tomando $\lambda = (\lambda_U) \in \bigcap_{U_i \in \mathcal{A}} K(U_1, U_2, \cdots, U_n)$, definimos $\varphi(U) = \lambda_U$, entonces $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ y cumple que $\varphi(T_1) = \lambda_1$, $\varphi(T_2) = \lambda_2$ y $\varphi(T_3) = \lambda_3$. De esta manera

$$(\varphi(T_1), \varphi(T_2), \varphi(\alpha T_1 + \beta T_2)) \in \sigma^*(T_1, T_2, \alpha T_1 + \alpha T_2),$$

y por i) se sigue que

$$\varphi(\alpha T_1 + \beta T_2) = \alpha\varphi(T_1) + \beta\varphi(T_2).$$

Esto es φ es un funcional lineal en el álgebra $\mathcal{A}$. Notemos que

$$\lambda_T = \varphi(T) \in \sigma^*(T) \subset \sigma(T) \subset \sigma^{\mathcal{A}}(T).$$

Por el teorema de Gleason-Kahane-Zelazko obtenemos que φ es un funcional lineal multiplicativo. Por lo tanto hemos demostrado que

$$\sigma^*(T_1, T_2, T_3) = \{(\varphi(T_1), \varphi(T_2), \varphi(T_3)) : \varphi \in \mathcal{M}\},$$

donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de los funcionales multiplicativos en $\mathcal{A}$. Sabemos que

$$\sigma_H{}^{\mathcal{A}}(T_1, T_2, T_3) = \{(\varphi(T_1), \varphi(T_2), \varphi(T_3)) : \varphi \in \mathcal{M}\}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\sigma^*(T_1, T_2, T_3) \subset \sigma_H{}^{\mathcal{A}}(T_1, T_2, T_3).$$

i)$\Rightarrow$iii) Usando los mismos argumentos que en la implicación anterior se sigue que si $T_1, T_2, \cdots, T_n \in B(X)$ y conmutan entre sí, entonces

$$\sigma^*(T_1, T_2, \cdots, T_n) = \{(\varphi(T_1), \varphi(T_2), \cdots, \varphi(T_n)) : \varphi \in \mathcal{N}\},$$

donde $\mathcal{N}$ es el subconjunto de $\mathcal{M}$ de todos los funcionales lineales de la forma $\varphi(U) = \lambda_U$, con $U \in \mathcal{A}$. Entonces si $p : \mathbf{C^n} \longrightarrow \mathbf{C^m}$ es una función polinomial tenemos que

$$p(\sigma^*(T_1, T_2, \cdots, T_n)) = p(\{(\varphi(T_1), \varphi(T_2), \cdots, \varphi(T_n)) : \varphi \in \mathcal{N}\}$$

$$= \{p((\varphi(T_1), \varphi(T_2), \cdots, \varphi(T_n))) : \varphi \in \mathcal{N}\}$$

$$= \{(p_1(\varphi(T_1), \cdots, \varphi(T_n)), \cdots, p_m(\varphi(T_1), \cdots, \varphi(T_n))) : \phi \in \mathcal{N}\}$$
$$= \{(\varphi(p_1(T_1, T_2, \cdots, T_n)), \cdots, \varphi(p_m(T_1, T_2, \cdots, T_n))) : \varphi \in \mathcal{N}\}$$

$$= \sigma^*(p_1(T_1, T_2, \cdots, T_n), p_2(T_1, T_2, \cdots, T_n), \cdots, p_m(T_1, T_2, \cdots, T_n))$$

$$= \sigma^*(p(T_1, T_2, \cdots, T_n)). \square$$

CONCLUSIONES

La propiedad de la proyección es fundamental, no sólo por el hecho de obtener de una manera más sencilla la propiedad del mapeo espectral, como lo hemos visto en este trabajo, sino que además podemos decir que un espectro que posee esta propiedad es más probable que se le pueda construir un cálculo operacional y, por supuesto este espectro siempre será distinto del vacío.

De los espectros estudiados en este trabajo, el puntual aproximativo (τ) y el de Taylor (σ_T) están en el caso de que el teorema del mapeo espectral es obtenida a partir de la propiedad de la proyección.

Para el espectro τ se hace usando el concepto de divisor topológico de cero. Por este camino el teorema 1.7, que establece como se distribuyen los divisores topológicos de cero en el conjunto de los elementos no-invertibles nos ha permitido demostrar de una manera sencilla y diferente la contención $\partial(\sigma_H(a)) \subset \tau_I(a) \cap \tau_D(a)$ (Teorema 2.12). Pero además la introdución de los números ρ_I y ρ_D (Definición 1.10), así como la caracterización de los divisores topológicos de cero para un sistema de operadores lineales acotados (Teorema 1.12) nos permiten demostrar la propiedad de la proyección (Teorema 2.15) y mediante un sencillo "artificio" hemos obtenido el teorema del mapeo espectral para un sistema conmutativo para cualquier álgebra de Banach.

Para el espectro σ_T, la propiedad de la proyección la hemos hecho siguiendo el camino que siguió Słodkowski-Żelazko (ver {14}), donde se demuestra esta propiedad para una proyección particular (Corolario 3.36) y luego lo hemos generalizado para cualquier proyección (Teorema 3.40). El espectro de Harte (σ_H) recibe un trato diferente, al introducir ciertas funciones polinomiales (ver {5}) y demostrando un "teorema del residuo" (Teorema 2.19). Este teorema del residuo nos permite concluir el teorema del mapeo espectral para ciertas funciones polinomiales (Teorema 2.25), y finalmente lo extendemos para un sistema conmutativo en un álgebra de Banach en general (Teorema 2.31)

Existen desde luego otros espectros combinados, podemos mencionar el espectro de Słodkowski o Espectro Escindible (σ_S) (ver {8}) y el *Espectro A* (σ_A), recientemente propuesto por Wawrzyńczyk A.. El Espectro Escindible está muy relacionado con el espectro de Taylor, de hecho se cumple que $\sigma_T \subset \sigma_S$. Aunque quizá la propiedad de proyección sea la excepción, sus demás propiedades se demuestran de una manera muy similar a las del espectro de Taylor. También, podemos decir que no se ha demostrado si es posible encontrar un sistema conmutativo $T \in B(X)^n$, tal que $\sigma_T(T) \neq \sigma_S(T)$.

El *Espectro A*, que se define de una manera muy parecida al espectro puntual aproximativo, es un espectro que contiene al espectro puntual aproximativo y está contenido en el de Harte. La propiedad de la proyección de este espectro aun no se tiene demostrada, resulta que el *Espectro A* tiene la propiedad de la proyección si y sólo si es válido el siguiente resultado:
En un álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$, cada ideal compuesto de divisores topológicos de cero está contenido en un ideal que es maximal en $\mathcal{A}$ y está también compuesto de divisores topológicos de cero.

REFERENCIAS

{1} **Arens, R.** The analytic functional calculus in commutative topological algebras. Pacific J. Math. 11 (1961), 405-429.

{2} ——, **Calderón, A.P.** Analytic functions of several Banach algebra elements. Annals of Math. 62 (1955), 204-216.

{3} **Choi, M.D., Davis, C.** The spectral mapping theorem for joint approximate point spectrum. Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 317-321.

{4} **Curto R.E.** Applications of several complex variables to multiparameter spectral theory, in: Surveys of Some Recent Results in Operator Theory. Vol. II, Y.B. Conway and B.B. Morell (Editors), Pitman Research Notes in Mathematics Series 192, Longman, Harlow, Essex, New York 1988, 25-90.

{5} **Goldberg, S.** Unbounded linear operators. McGraw-Hill(1966).

{6} **Harte, R.E.** Spectral mapping theorems. Proc. Ray Irish Acad. Sect. A 72 (1972), 89-107.

{7} **Kahane, J.P., Żelazko, W.** A characterization of maximal ideals in conmutative Banach algebras. Studia Math. 29 (1968), 339-343.

{8} **Kordula, K., Müller, V.** Vasilescu-Martinelli formula for operators in Banach spaces. Preprint.

{9} **Müller, V.** The Słodkowski spectra and higher Shilov boundaries. Studia Math. 105(1) (1993), 69-75.

{10} **Rickart, C.E.** Banach Algebras. D. Van Nostrand company Inc. (1960).

{11} **Shilov, G.** On the descomposition of a normed ring into a direct sum of ideals. Amer. Math. Soc. Transl. 1 (1955), 37-48.

{12} **Simmons, G.F.** Introduction to topology and modern analysis. McGraw-Hill (1965).

{13} **Słodkowski, Z.** An infinite family of joint spectra. Studia Math. 61 (1977), 239-255.

{14} **Słodkowski, Z., Żelazko, W.** On joint spectra of commuting families of operators. Studia Math. 50 (1974), 127-148.

{15} **Sołtysiak, A.** Some Recent Results in Multivariable Spectral Theory. Publicación de la UAM-Iztapalapa. (1993).

{16} **Taylor, A.E., Lay, D.C.** Introduction to functional analysis. John Wiley & sons (1979).

{17} **Taylor, J.L.** A joint spectrum for several commuting operators. J. Funct. Anal. 6 (1970), 172-191.

{18} —— The Analytic-functional calculus for several commuting operators. Acta Math. 125 (1970), 1-38.

{19} **Waelbroeck, L.** Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. J. Math. Pures et Appl. (9) 33 (1954), 147-186.

{20} **Wawrzyńczyk, A.** Introducción al Análisis Funcional. Libros de texto UAM-Iztapalapa. (1993).

{21} **Żelazko, W.** Banach algebras. PWN-Polish scientific publishers (1973).

{22} —— On ideal theory in Banach and topological algebras. Monografías del Instituto de Matemáticas (UNAM). 15 (1984).