UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD-IZTAPALAPA

Construcción de Procesos Markovianos de Salto

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas), Presenta:

Fernando Guerrero Poblete

Asesor: Dr. Julio Cesar García Corte

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POSGRADO EN MATEMÁTICAS

México

Noviembre de 2009

Introducción

El estudio de lo Procesos Markovianos de Salto es un asunto que ocupa un lugar relevante en la teoría de los Procesos Estocásticos, y donde el estudio de la existencia de tales procesos se hace a través de una óptica constructivista en la que la literatura hace escasa referencia. El objeto de este trabajo es el de presentar un estudio minucioso de la construcción que hace Gikhman [12], Ethier-Kurtz [9], Stoock [25] y otros, principalmente en que el proceso construido sea en efecto, de Markov y en que tenga un generador infinitesimal de la forma en que se afirma. No obstante, la prueba de la propiedad de Markov, no se hace siguiendo a Ethier-Kurtz, principalmente porque no se pudo probar que un cierto proceso tuviera las mismas distribuciones finito dimensionales que un Proceso de Poisson Compuesto, se hace desarrollando con detalle la muy escueta demostración que presenta Stroock.

El aporte de este trabajo es el de presentar una prueba completa y a detalle de tal propiedad, además de partir un poco más atrás que Ethier-Kurtz, es decir no suponemos que exista una Cadena de Markov con tal distribución, sino que la construimos a través del desarrollo de algunas ideas presentadas en Williams [27], camino más elemental que el Teorema de Consistencia de Kolmogorov, pero que proporciona un método para hacer simulaciones computacionales ya que el algoritmo que representa la construcción misma, es de fácil implementación (Durrett [6]). Probar la propiedad de Markov, es un trabajo altamente delicado sobre la medibilidad de cierto eventos, y un empleo industrial de teoremas fuertes, como los son el Lema de las

Clases Monótonas, Teorema de Convergencia Monótona y otros, por lo que se vuelve una prueba muy larga cuando se presenta a detalle, razón por la que presentada de esta manera, no tendría cabida en un libro de texto.

En el primer capítulo se hace una revisión de los preliminares necesarios para el desarrollo de este trabajo. La primera parte esta dedicada a revisar las nociones fundamentales de la teoría de Procesos Estocásticos, comenzando con una definición rigurosa así como formas alternativas de pensar en un proceso estocástico, seguimos con la Teoría de Martingalas y tópicos relacionados, tales como los tiempos de paro y sus propiedades.

En el segundo capítulo se hace una revisión de teoría concerniente a las Cadenas de Markov, con énfasis en la relación que guardan estas con la teoría de martingalas y las funciones armónicas, enfoque bien conocido pero poco tratado en los libros de texto. La parte central de este capitulo, es la construcción de las Cadenas de Markov vía representación de Skorokhod. Presentamos también, algunos ejemplos que ilustran las técnicas aprendidas.

El tercer capítulo lo iniciamos con una revisión de las nociones fundamentales de la Teoría de Semigrupos; la relación que guarda éste con el resolvente y el generador infinitesimal y el hecho de que este último caracteriza unívocamente al semigrupo; sin olvidar el teorema de Hille-Yosida; la exposición de la Teoría de Semigrupos se hace siguiendo a [18]. En la segunda parte damos algunas definiciones estándar, seguidas de la Construcción de Procesos Markovianos de Salto, la prueba de la markovianidad de tales procesos y el cálculo del su generado infinitesimal a través de la Solución Minimal. Finalizamos con un par de ejemplos.

Deseo agradecer a la Universidad Autónoma Metropolitana, en particular al departamento de matemáticas de la unidad Iztapalapa por el espacio brindado; personalmente al Dr. Julio César García Corte, quien dirigió este trabajo y por todo su aporte, también al Dr. Raul Montes de Oca y a la Dra. Ana Meda Guardiola por su amable revisión.

.

A la memoria de mi padre Nicolás y de mi hermano Eder Enrique.

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo, hacemos una revisión de la teoría probabilística necesaria para el desarrollo de este trabajo. La primera parte esta dedicada a la teoría general de Procesos Estocásticos, empezando por una definición rigurosa, así como formas alternativas de pensar en un proceso estocástico y el Teorema de Consistencia de Kolmogorov; continuamos con la teoría de martingalas y tópicos relacionados, tales como la noción de tiempo de paro y sus propiedades.

1.1 Procesos Estocásticos

Definición. 1.1.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio medible y sea* T *cualquier conjunto.*
Un proceso estocástico con espacio base $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *y con parámetro de tiempo* T*, es una familia* $\{X_t : t \in T\}$ *de variables aleatorias -v.a.-* $X_t : \Omega \to E$*.*

Generalmente, E *es un espacio métrico, en muchos ejemplos* $E = \mathbf{R^d}$ *y* $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E) = \sigma$*-álgebra de Borel de* E*.*

$T \subset \mathbb{R}, \mathbf{R}^+, \mathbf{R^n}$*. En el caso de que* $T \subset \mathbf{R^n}$*, decimos que es un campo aleatorio, si* $T = \mathbb{R}$ *o un intervalo en* $\mathbb{R}$*, decimos que el proceso estocástico* *está a tiempo continuo y si* $T \subset \mathbb{R}$ *a lo más numerable entonces decimos que el proceso estocástico está a tiempo discreto.*

Formas equivalentes de pensar en un proceso estocástico:

1. *Consideremos* $X : \Omega \times T \to E$
   $X(\omega, t) = X_t(\omega)$
   con la propiedad de que para toda $t \in T$ *fija, la función*

   $$\omega \longmapsto X(\omega, t) \quad \textit{es una v.a.}$$

2. *Para todo* $\omega \in \Omega$ *considere la función:* $t \longmapsto X(\omega, t)$. *Para todo* $\omega \in \Omega$, *se le asocia un elemento* $E^T = \{f : T \to E; f es función\}$

   $$X : \Omega \to E^T$$

   para todo $\omega \in \Omega$, *la función* $t \longmapsto X(\omega, t)$ *se llama la trayectoria del proceso asociada a* ω, *o bien* ω*-trayectoria.*

Sea $X : \Omega \to E^T$ *un proceso estocástico.*

$$P_X : \mathcal{E}^T \to [0, 1]$$

Un proceso estocástico es simplemente una medida de probabilidad sobre una σ*-álgebra* $\mathcal{E}^T$.

Definición. 1.1.2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y sea* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio medible. Sea* $X : \Omega \to E$ *v.a. La distribución de* X *es:*

$$P_X : \mathcal{E} \to [0, 1]$$

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(X \in (A)), \qquad A \in \mathcal{B}(E)$$

Notación probabilista:

$$X^{-1}(A) = \{w \in \Omega : X(w) \in A\}$$

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(X \in (A))$$

Definición. 1.1.3. *Sea $L \subset T$, L finito. Sea $X : \Omega \to E^T$ un proceso estocástico.* La distribución finito dimensional*, basada en L de X.*

$$P_L : \mathcal{E}^L \to [0,1] \quad donde \quad L = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

y

$$P_L(A) = P((X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})^{-1}(A))$$

$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) : \Omega \to E^L$

Motivación: *Pensemos al conjunto T como el tiempo. $T = [0, \infty)$. Sea un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $L = \mathbb{N}_0 \subset T$, donde $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. $X : \Omega \to E^T$, sea $L \subset T$. Sea $\Pi_L : E^T \to E^L$. Es decir, si $f \in E^T$ entonces $\Pi_L(f) = f \mid_L \in E^L$.*
$\Pi_L =$ *Proyección al* tiempo *L.*

Proposición. 1.1.4. Propiedad de consistencia de las distribuciones finito dimensionales. *Dados $L \subset M \subset T$, L y M finitos, entonces:*

$$P_L = P_M \circ (\Pi_L^M)^{-1} \tag{1.1}$$

Prueba.

$$P_M \circ (\Pi_L^M)^{-1} = P \circ X_M^{-1} (\Pi_L^M)^{-1}$$

$$= P \circ (\Pi_M \circ X)^{-1} \circ (\Pi_L^M)^{-1} = P \circ X{-1} \circ (\Pi_M^{-1} \circ (\Pi_L^M)^{-1})$$

$$= P \circ (X^{-1} \circ \Pi_L^{-1}) = P \circ X_L^{-1} = P_L$$

donde:

$$\Pi_M : E^T \to E^M \quad y \quad \Pi_L^M : E^M \to E^L$$

entonces

$$\Pi_L^M \circ \Pi_M = \Pi_L \quad y \text{ por lo tanto} \quad \Pi_L^{-1} = \Pi_M^{-1} \circ (\Pi_L^M)^{-1}$$

Proposición. 1.1.5. *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ *espacios de probabilidad. Sea* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio medible. Sea* T *cualquier conjunto. Sean* $X : \Omega \to E^T$, $Y : \Omega' \to E^T$. *Supóngase que* X *y* Y *tienen las mismas distribuciones finito dimensionales, es decir para todo* $L \subset T$ *finito*

$$P \circ X_L^{-1} = P \circ Y_L^{-1} : \mathcal{E}^L \to [0, 1]$$

entonces $P_X = P_Y$.

Observación: *Las distribuciones finito dimensionales determinan completamente a la distribución del proceso.*

Prueba. *Sea* $\mathcal{A} = \{\Pi_L^{-1}(C) : L \subset T,\ finito,\ C \in \mathcal{E}^L\}$. *Sabemos que* $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}^T$. *Hay que demostrar que para todo* $D \in \sigma^T$, $P_X(D) = P_Y(D)$. *Supongamos primero que* $D \in \mathcal{A}$, *por lo tanto existe* $L \subset T$ *finito, y existe* $C \in \mathcal{E}^L$ *tal que* $D = \Pi_L^{-1}(C)$, *por lo tanto*

$$P_X(D) = P_X(\Pi_L^{-1}(C)) = P \circ \Pi_L^{-1}(C) = P \circ X^{-1} \circ \Pi_L^{-1}(C)$$

$$= P \circ X_L^{-1}(C) P \circ Y_L^{-1}(C) = P \circ Y^{-1} \circ \Pi_L^{-1}(C)$$

$$= P_Y \circ \Pi_L^{-1}(C) = P_Y(\Pi_L^{-1}(C)) = P_Y(D)$$

Entonces P_X *y* P_Y *coinciden en* $\mathcal{A}$ *que es una* σ*-álgebra que genera a* $\mathcal{E}^T$, *por lo tanto* $P_X = P_Y$ *en todo* $\mathcal{E}^T$.

Definición. 1.1.6. *Sea* $(E_t, \mathcal{E}_t)_{t \in T}$ *una familia de espacios medibles. Para cada* $L \subset T$, *con* L *finito, sea* P_L *una probabilidad sobre* $\mathcal{E}^L$. *El sistema*

$$\mathcal{L} = \{E^L, \mathcal{E}^L, P_L, \Pi_L^M\}$$

con $L \subset M \subset T$, L *y* M *finitos, se dice que es* proyectivo, *si cumple con la condición de consistencia (1.1).*

Definición. 1.1.7. *Dado un sistema proyectivo*

$$\mathcal{L} = \{E^L, \mathcal{E}^L, P_L, \Pi_L^M\}$$

con $L \subset M \subset T$*,* L *y* M *finitos, diremos que una probabilidad* P *sobre* $\mathcal{E}^T$ *es* limite proyectivo *del sistema* $\mathcal{L}$ *si*

$$P \circ \Pi_L^{-1} = P_L \qquad \textit{para todo } L \subset T, \ L\textit{finito}$$

Teorema. 1.1.8. *Teorema de Consistencia de Kolmogorov. Sea* $(E_t, \mathcal{E}_t)_{t \in T}$ *una familia de espacios medibles, donde cada* E_t *es un espacio topológico y* $\mathcal{E}_t = \mathcal{B}(E_t)$*. Para cada* $L \subset T$*, con* L *finito, sea* P_L *una probabilidad sobre* $\mathcal{E}^L$*. Supongamos que se cumple*

1. *Para cada* $A \in \mathcal{B}(E)$ *se tiene la igualdad*

$$P_L(A) = \sup\{P_L(K) : K \subset A, \ K\textit{compacto}\}$$

2. *El sistema*

$$\mathcal{L} = \{E^L, \mathcal{E}^L, P_L, \Pi_L^M\}$$

con $L \subset M \subset T$*,* L *y* M *finitos, es proyectivo.*

Entonces, $\mathcal{L}$ *tiene un límite proyectivo único.*

Para una prueba, véase [26], pp $25, 25$ *y* 27*.*

Teorema. 1.1.9. *La Construcción de Kolmogorov. Sea* E *un espacio topológico, tal que* E *cumple con alguna de las siguientes condiciones*

1. E *es a lo más numerable (dotado con la topología discreta).*

2. E *es un espacio localmente compacto con base numerable.*

3. E *es un espacio métrico completo y separable.*

Para todo $L \subset T$, con L finito. Sea P_L una medida de probabilidad en $\mathcal{E}^L$ tal que el sistema

$$\mathcal{L} = \{E^L, \mathcal{E}^L, P_L, \Pi_L^M\}$$

con $L \subset M \subset T$, L y M finitos, sea proyectivo.

Entonces, sobre $\mathcal{E}^T$ existe P, medida de probabilidad única, tal que el proceso canónico $(E^T, \mathcal{B}(E)^T, P, \{\Pi_t\}_{t\in T})$ satisface

$$P \circ \Pi_L^{-1} = P_L \qquad \textit{para todo } L \subset T, \ L\textit{finito}$$

Para una prueba, véase [26], p 28.

1.2 Esperanza Condicional y Martingalas

El concepto de esperanza condicional es de importancia central en el estudio de las martingalas; presentamos su definición y enunciamos sin demostración algunas de sus propiedades; para una prueba vease[5] o bien [27].

Esperanza Condicional.

Definición. 1.2.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea X v.a tal que $E(| X |) < \infty$. Sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Entonces existe una v.a. Z tal que*

1. *Z es $\mathcal{G}$-medible*
2. *$E(| Z |) < \infty$*
3. *Para todo $G \in \mathcal{G}$ se tiene que*

$$\int_G Z dP = \int_G X dP$$

Una variable aleatoria con las propiedades antes mencionadas es llamada una versión de la esperanza condicional *de $E(X \mid \mathcal{G})$ y se denota como $Z = E(X \mid \mathcal{G})$. Si W es otra v.a con las mismas propiedades, entonces $Z = W$ casi seguramente -c.s.-, es decir $P(Z = W) = 1$.*

Proposición. 1.2.2. *Sea X, Y v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $E(\mid X \mid) < \infty$ y $E(\mid Y \mid) < \infty$. Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Entonces*

1. *Si $X \geq 0$ entonces $E(X \mid \mathcal{G}) \geq 0$ c.s. (Positividad)*
2. *$E(aX + bY \mid \mathcal{G}) = aE(X \mid \mathcal{G}) + bE(Y \mid \mathcal{G})$ c.s. para todo $a, b \in \mathbb{R}$ (Linealidad)*
3. *Si Z es una versión de $E(X \mid \mathcal{G})$ entonces $E(Z) = E(X)$*
4. *Si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $E(X \mid \mathcal{G}) = X$ c.s.*
5. *Si $0 \leq X_n \nearrow X$, entonces $E(X_n \mid \mathcal{G}) \nearrow E(X \mid \mathcal{G})$ c.s (Convergencia Monótona)*
6. *Si $\mid X_n(\omega) \mid \leq V(\omega)$, para todo n, con V v.a. con esperanza finita y $X_n \to X$ c.s., entonces $E(X_n \mid \mathcal{G}) \to E(X \mid \mathcal{G})$ c.s (Convergencia Dominada)*
7. *Si $X_n \geq 0$ para toda n, entonces $E(\liminf X_n \mid \mathcal{G}) \leq \liminf E(X_n \mid \mathcal{G})$ c.s. (Lema de Fatou)*
8. *Para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa con $E(\mid f(X) \mid) < \infty$ se cumple*

   $$E(f(X) \mid \mathcal{G}) \geq f(E(X \mid \mathcal{G})) \text{ c.s.} \quad \textit{(Jensen)}$$

9. *Si $\mathcal{H}$ es sub-σ-álgebra de $\mathcal{G}$ entonces*

   $$E(E(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = E(X \mid \mathcal{H}) \text{ c.s.} \quad \textit{(Propiedad Proyectiva)}$$

10. *Si Z es v.a. $\mathcal{G}$-medible y acotada, entonces*

    $$E(ZX \mid \mathcal{G}) = ZE(X \mid \mathcal{G}) \text{ c.s.}$$

11. *Si $\mathcal{H}$ es independiente de $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$, entonces*

    $$E(X \mid \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = E(X \mid \mathcal{G}) \text{ c.s.} \quad \textit{(Independencia)}$$

    En particular, si X es independiente de $\mathcal{H}$, entonces $E(X \mid \mathcal{H}) = E(X)$ c.s.

Proposición. 1.2.3. *Sean* $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{R})$ *dos espacios medibles. Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad. Sean* $X : \Omega \to E$, $Y : \Omega \to F$ *v.a. Sea* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *sub-*σ*-álgebra de* $\mathcal{F}$. *Supóngase que* Y *es* $\mathcal{G}$*-medible y que* X *es independiente de* $\mathcal{G}$. *Sea* $f : E \times F \to \mathbb{R}$ *medible y acotada, entonces*

$$E(f(X,Y) \mid \mathcal{G}) = g \circ Y$$

donde $g : F \to \mathbb{R}$, $g(a) = E(f(X,a))$

Prueba.

Paso 1. *Supóngase que* f *es de variables separadas, es decir* $f(x,y) = h(x)j(y)$ *con* $h : E \to \mathbb{R}$ *y* $j : F :\to \mathbb{R}$ *medibles y acotadas, entonces*

$$g(a) = E(f(X,a)) = E(h(X)j(a)) = j(a)E(h(X))$$

por lo tanto $g(Y) = j(Y)E(h(X))$. *Por otra parte*

$$E(f(X,Y) \mid \mathcal{G}) = E(h(X)j(Y) \mid \mathcal{G}) = j(Y)E(h(X))$$

Paso 2. $f = \chi_C$ *con* $C \in \mathcal{E} \times \mathcal{R}$. *Sean*

$$\mathcal{L} = \{C \in \mathcal{E} \times \mathcal{R} : \chi_C \text{ cumple con la conclusión de la proposición}\}$$

$$\Pi = \{A \times B : A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{R}\}$$

Con $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$ *entonces, por el paso* 1, $A \times B \in \mathcal{L}$, *por lo tanto* $\Pi \subset \mathcal{L}$.
$E \times F \in \Pi \subset \mathcal{L}$
$A, B \in \mathcal{L}$, $A \subset B$. *Entonces* $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$, *luego*

$$E(\chi_{B\setminus A}(X,Y) \mid \mathcal{G}) = E(\chi_B(X,Y \mid \mathcal{G}) - E(\chi_A(X,Y) \mid \mathcal{G})$$

$$= g_B \circ Y - g_A \circ Y = (g_B - g_A) \circ Y$$

donde

$$g_B(a) = E(\chi_B(X,a)) \qquad y \qquad g_A(a) = E(\chi_A(X,a))$$

por lo tanto $B \backslash A \in \mathcal{L}$.
Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A_i \in \mathcal{L}$ *con* $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, *entonces*

$$E(\chi_A(X,Y) \mid \mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(\chi_{A_n}(X,Y) \mid \mathcal{G})$$

$$= \lim_{n\to\infty} g_n(Y)$$

donde $g_n(a) = E(\chi_{A_n})(X,a)$. *Por lo tanto y por el Teorema de Convergencia Monótona*

$$0 \leq g_n \leq g_{n+1} E(\chi_A(X,a))$$

por lo tanto $A \in \mathcal{G}$, *por lo tanto* $\mathcal{L}$ *es un* λ*-sistema que contiene a* Π, *por lo tanto* $\mathcal{E} \times \mathcal{R} = \sigma(\Pi) \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{E} \times \mathcal{R}$, *por lo tanto* $\mathcal{L} = \mathcal{E} \times \mathcal{R}$.

Definición. 1.2.4. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio medible,* T *un conjunto ordenado. Una* filtración *en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *es una familia* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *tal que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *es sub-*σ*-álgebra;* $s,t \in T$, $s < t$, *entonces* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Definición. 1.2.5. *Un proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\in T}$, $X_T : \Omega \to (E, \mathcal{E})$ *se dice* adaptado *a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, *si para todo* $t \in T$, X_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible.* $X_t : (\Omega, \mathcal{F}_t) \to (E, \mathcal{E})$.

Definición. 1.2.6. *Dados* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *espacio de probabilidad,* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *una filtración en* $(\Omega, \mathcal{F})$, $\{X_t\}_{t\in T}$ *un proceso estocástico con espacio de estados* E. *Decimos que* $\{X_t\}_{t\in T}$ *es una martingala, -sub-martingala, super-martingala- respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *si para todo* $t \in T$, $X_t \in \mathbf{L^1}(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ *y dados* $s,t \in T$ *con* $s < t$

1. $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *martingala*

2. $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ *sub-martingala*

3. $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ *super-martingala*

La definición de una martingala cuando el espacio parametral $T = \mathbb{N}_0$, es en esencia la misma, el proceso $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ debe estar adaptado a una familia creciente de sub-σ-álgebras $\{\mathcal{F}_n\}$, y cada variable X_n debe ser integrable y

$$E(X_{n+m} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \qquad c.s.$$

Con $E(X_{n+m} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$ o $E(X_{n+m} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$, cuando el proceso es sub-martingala o super-martingala, respectivamente.

Definición. 1.2.7. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ un proceso estocástico. Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una filtración. Decimos que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es* previsible *respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ si para todo $n \in \mathbb{N}$, X_n es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible.*

Definición. 1.2.8. *Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ una filtración. Un tiempo de paro respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una v.a. $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$ con la siguiente propiedad:*

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \{T \leq n\} := \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

Proposición. 1.2.9. *$T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$ es tiempo de paro respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$*

Prueba. *Véase [26].*

Ejemplo. 1.2.10. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ un proceso adaptado a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sea $T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$ = tiempo de la primer entrada al conjunto B. Entonces, T es tiempo de paro respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Prueba.

$$\{T = n\} = \{X_0 \notin B, X_1 \notin B, \ldots, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n$$

Definición. 1.2.11. *Dado un proceso $\{X_n\}$ adaptado a $\{\mathcal{F}_n\}$. Dado un tiempo de paro T respecto a $\{\mathcal{F}_n\}$. Sea X^T el proceso definido por*

$$X_n^T(\omega) = X_{T(\omega) \wedge (n)}(\omega)$$

A X^T se le llama proceso detenido al tiempo *T.*

Proposición. 1.2.12. *Sea τ un tiempo de paro respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Sea*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap (\tau \leq n) \in \mathcal{F}_n, \forall n \geq 0\}$$

Entonces, $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra y recibe el nombre de σ-álgebra detenida en τ. $\mathcal{F}_\tau$ es la σ-álgebra de los eventos que ocurren hasta el tiempo τ.

Proposición. 1.2.13. *Sea τ un tiempo de paro respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Sea*

$$\mathcal{F}_{\tau^-} = \sigma\{\mathcal{F}_0 \cup (A \cap (n < \tau)) : A \in \mathcal{F}_n, \forall n \geq 0\}$$

Entonces, $\mathcal{F}_{\tau^-}$ es una σ-álgebra y esta formada por los eventos ocurridos estrictamente antes de τ.

Propiedades de los tiempo de paro. *Sean τ_1 y τ_2 tiempos de paro, entonces*

1. *$\tau_1 \wedge \tau_2$ y $\tau_1 \vee \tau_2$ son tiempos de paro.*
2. *Si $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de tiempos de paro, entonces $\bigvee_n \tau_n$, $\bigwedge_n \tau_n$, $\liminf_n \tau_n$ y $\limsup_n \tau_n$ son tiempos de paro.*
3. *Si $\tau_1 \leq \tau_2$, entonces $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$*
4. *$\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$*
5. *τ es $\mathcal{F}_{\tau^-}$-medible y $\mathcal{F}_{\tau^-} \subset \mathcal{F}_\tau$*
6. *Si $\tau_1 \leq \tau_2$, entonces $\mathcal{F}_{\tau_1^-} \subset \mathcal{F}_{\tau_2^-}$*

Una prueba de lo anterior, se puede consultar en [3].

Teorema. 1.2.14. *Teorema de Paro de Doob. Sea $\{X_n\}$ una supermartingala respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Sean τ_1, τ_2 tiempos de paro respecto a la misma filtración, con $\tau_1 \leq \tau_2$, acotados; entonces*

$$E(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \leq X_{\tau_1}$$

y si $\{X_n\}$ es martingala, se tiene la igualdad.

Capítulo 2

Cadenas de Markov

La existencia de las Cadenas de Markov, es crucial en la construcción de los Procesos Markovianos de Salto, de aquí la razón de este capítulo. Comenzamos con una introducción a las Cadenas de Markov, definiciones y algunos ejemplos clásicos. La parte principal de este capítulo es la construcción de las Cadenas de Markov, la novedad es que no se hace vía Teorema de Consistencia de Kolmogorov (1.1.8) sino a través de la representación de Skorokhod y del desarrollo de algunas ideas sobre la existencia de una infinidad de variables aleatorias independientes con una cierta distribución y que vivan en $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$*, donde* $\lambda =$ *medida de Lebesgue. Seguimos con los teoremas estándar en el estudio de las Cadenas de Markov, y una visión alternativa en el estudio de la recurrencia (que es a través de la conexión con la teoría de martingalas y de las funciones armónicas), y que se expone con el modelo de la Caminata Aleatoria Simple y Simétrica. Continuamos con medidas invariantes y ejemplos.*

2.1 Definiciones Básicas y Ejemplos

Definición. 2.1.1. *Sea* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio medible. Una* función de transición estacionaria *en* $(E, \mathcal{E})$*, es un mapeo de* $p : [0, \infty) \times E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$*, que* *cumple con:*

1. *Para cada x en E y para cada $t \geq 0$, $p_t(x, \cdot)$ es una medida en $(E, \mathcal{E})$, con $p_t(x, E) \leq 1$*

2. *Para todo A en $\mathcal{E}$ y para todo $t \geq 0$, $p_t(\cdot, A)$ es una función medible de E a $\mathbb{R}$*

3. *Ecuación de Chapman-Kolmogorov. Es decir, para todo x en E, para todo A en $\mathcal{E}$ y $s, t \geq 0$*

$$p_{s+t}(x, A) = \int_E p_s(x, dy) p_t(y, A)$$

Definición. 2.1.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ una filtración. Sea $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible. Para todo $A \in \mathcal{E}, x \in E$. Un proceso estocástico $X : \mathbb{N}_0 \times \Omega \to E$, se llama Cadena de Markov respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$, con función de transición estacionaria p, distribución inicial μ y espacio de estados E, si:*

1. *X esta adaptado a $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

2. *$\mu : \mathcal{E} \to [0, 1]$ es medida de probabilidad. $p : \mathbb{N}_0 \times E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ es función de transición estacionaria.*

3. *Para cada A en $\mathcal{F}$, n, m en $\mathbb{N}_0$*

$$P(X_{n+m} \in A \mid \mathcal{F}_n) = P(X_{n+m} \in A \mid X_n) = p_m(X_n, A)$$

4. *$P(X_0 \in A) = \mu(A)$*

Ejemplos.

Cadena de Nacimiento y Muerte. *Sea $E = \{0, 1, \ldots\}$. Imaginemos un sistema que evoluciona en los enteros no negativos y que dada una condición al tiempo n, $(X_n = i)$, el sistema al tiempo $n + 1$, solo puede estar en el* *estado $i-1$ -en cuyo caso se dice que ha habido una muerte- con probabilidad q_i, en el estado $i+1$ -en cuyo caso se dice que ha habido un nacimiento- con probabilidad p_i o bien permanecer en el estado i con probabilidad $r_i = 1 - p_i - q_i$. La función de transición está dada por la siguiente expresión:*

$$p(i,j) = \begin{cases} p_i & si \quad j = i+1 \\ r_i & si \quad j = i \qquad\qquad donde \quad p_i, q_i, r_i \geq 0 \\ q_i & si \quad j = i-1 \qquad q_0 = 0 \quad y \quad p_i + q_i + r_i = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Supongamos que el espacio de estados E es finito, digamos $E = \{0, 1, \ldots, n\}$, en este caso podemos pensar en una matriz $T_{n+1\times n+1}$ cuya entrada i,j-ésima es $p(i,j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$; a la matriz T se le conoce como matriz de transición*, la cual cumple con $p(i,j) \geq 0$ para todo $i,j \in E$ y $\sum_{j\in E} P(i,j) = 1$. La idea sigue siendo valida con E numerable.*

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \ldots & p(i-1,j-1) & p(i-1,j) & p(i-1,1,j+1) & \ldots \\ \ldots & p(i,j-1) & p(i,j) & p(i,j+1) & \ldots \\ \ldots & p(i+1,j-1) & p(i+1,j) & p(i+1,j+1) & \ldots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Para la Cadena de Nacimiento y Muerte la matriz de transición tiene la forma

$$T = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Caminata Aleatoria. *Sea $E = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$. Una Caminata Aleatoria, es un sistema en el cual la probabilidad de transitar de un estado i al estado $i-1$ o $i+1$, no depende del estado inicial, es decir $p(i, i+1) = p$ y*

$p(i, i-1) = q$ para todo i en E; si además $r_i = r = 0$, decimos que la Caminata Aleatoria es simple; en el caso particular en que $p = q = \frac{1}{2}$, decimos que la Caminata Aleatoria es simple y simétrica. La función de transición de la Caminata Aleatoria Simple esta dada por la siguiente expresión:

$$p(i,j) = \begin{cases} p & si \quad j = i+1 \\ q & si \quad j = i-1 \end{cases} \qquad donde \quad p, q \geq 0 \quad y \quad p + q = 1$$

Su matriz de transición T

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & q & 0 & p & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Cadena de Ramificación. *Imaginemos un proceso que cuenta el número total de individuos presentes en un sistema en unidades de tiempo discretas, para mayor simplicidad supongamos que el i-ésimo individuo de la generación n-ésima, tiene una cierta prole de acuerdo a una variable aleatoria $X_{n,i}$, y que el tiempo de vida de cada individuo es de exactamente una unidad de tiempo, por lo que al tiempo $n+1$, sólo contará la prole de los individuos de la generación n.*
Sea $\{X_{n,i} : n \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{N}\}$ v.a.i.i.d. con distribución F. donde $X_{n,i} =$ número de hijos que tiene el i-ésimo individuo de n-ésima generación.
Sea Z_0 v.a. con valores en $\mathbb{N}$ e independiente de $\{X_{n,i}\}$. Habiendo definido Z_n con $n \geq 0$. Sea

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

$\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ se llama Cadena de Ramificación.

Linea de Espera. *Supongamos que en un servicio se atiende a un solo cliente por unidad de tiempo, si es que hay alguno en espera de ser atendido y que la cantidad de clientes que arriban por unidad de tiempo es una sucesión de variables aleatorias* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *independientes e idénticamente distribuidas,* $(P(\xi = k) := p_k)$. *A*

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - 1) + \xi_n & si \quad X_n \neq 0 \\ \xi_n & si \quad X_n = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

se le llama Cadena de Markov de Linea de Espera, el valor de esta al tiempo n, *representa la cantidad de clientes en espera de ser atendidos y su su función de transición, para* $x = 0$ *es*

$$p(0, z) = P(X_{n+1} = z \mid X_n = 0) = P(\xi = z) = p_z$$

y para $x \neq 0$

$$p(x, z) = P(X_{n+1} = z \mid X_n = x) = P(X_n - 1 + \xi_n = z \mid X_n = x)$$

$$= P(x - 1 + \xi_n = z) = P(\xi = z - x + 1) = \begin{cases} p_{z-x+1} & si \ z = x - 1, x \ldots \\ 0 & si \ z = 0, \ldots, x - 2 \end{cases}$$

matricialmente

$$T = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

2.2 Construcción de las Cadenas de Markov.

Si bien, el problema de la existencia de las Cadenas de Markov queda resuelto con el Teorema de Consistencia de Kolmogorov, la idea en este trabajo es la de construir explícitamente tales objetos.

PRIMERO. *Dadas* $F_1, F_2, \ldots$ *funciones de distribución ¿Como podemos encontrar un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y* $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i =$

$1, 2, \ldots$ *v.a.i que cumplan con* $F_{X_i} = F_i$*?.*

Teorema. 2.2.1. *Sea* $F_1, F_2, \ldots$ *funciones de distribución dadas. Entonces en el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$*, donde* λ*=medida de Lebesgue, existen* $X_1, X_2, \ldots$ *v.a.i. tales que* $F_{X_i} = F_i$*, para* $i = 1, 2, \ldots$

Prueba. *Procedamos por etapas*

Etapa 1. *De manera constructiva, teniendo como punto de partida las funciones de Rademacher. Definamos en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *una sucesión de v.a.i.i.d con distribución Bernoulli de parámetro* $1/2$*, de la manera siguiente:*
$X_1 = \chi_{\{[0,\frac{1}{2})\}}, \ \ldots, X_n = \chi_{\{[0,\frac{1}{2^n})\cup\ldots\cup[\frac{2i}{2^n},\frac{2i+1}{2^n})\cup\ldots\cup[\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n})\}}, \ \ldots$
Claramente $P(X_n = 1) = P(X_n = 0) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \lambda\big([\frac{2i}{2^n}, \frac{2i+1}{2^n})\big) = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2}$ *por lo que* $X_n \sim$ *Bernoullli*$(\frac{1}{2})$*. Debemos mostrar ahora que son independientes, es decir:*

$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n) = \frac{1}{2^n}; \quad a_i = \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Basta probar que $(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n) = [\frac{b_n}{2^n}, \frac{b_n+1}{2^n})$*, donde* $b_n = b(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 2^n - 1 - \sum_{i=1}^n a_i 2^{n-i}$*.*
Procedamos por inducción; para $n = 2$*,* $a_1 = 1$ *y* $a_2 = 1$ *nos produce* $b_2 = 0$*. Entonces*

$$(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \big([0, \frac{1}{2}) \cap ([0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}))\big) = ([0, \frac{1}{4}))$$

Los casos $a_1 = 1, a_2 = 0$*;* $a_1 = 0, a_2 = 1$ *y* $a_1 = 0, a_2 = 0$ *son análogos. Supongamos ahora que se cumple para* n*. Entonces*

$$(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n, X_{n+1} = a_{n+1})$$

$$= ([\frac{b_n}{2^n}, \frac{b_n+1}{2^n}) \cap \chi^{-1}_{\{\cup_{i=1}^{2^n}[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}})\}}(a_{n+1}))$$

$$= \begin{cases} \left([\frac{b_n}{2^n}, \frac{b_n+1}{2^n}) \cap (\cup_{i=1}^{2^n}[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}))\right) & si\ a_{n+1} = 1 \\ \left([\frac{b_n}{2^n}, \frac{b_n+1}{2^n}) \cap (\cup_{i=1}^{2^n}[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}))\right) & si\ a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

analicemos el caso cuando $a_{n+1} = 1$. *Observemos que el intervalo* $[\frac{b_n}{2^n}, \frac{b_n+1}{2^n}) = [\frac{2b_n}{2^{n+1}}, \frac{2b_n+2}{2^{n+1}}) = [\frac{2b_n}{2^{n+1}}, \frac{2b_n+1}{2^{n+1}}) \cup [\frac{2b_n+1}{2^{n+1}}, \frac{2b_n+2}{2^{n+1}})$. *Entonces*

$$(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n, X_{n+1} = a_{n+1})$$

$$= \left(([\frac{2b_n}{2^{n+1}}, \frac{2b_n+1}{2^{n+1}}) \cup [\frac{2b_n+1}{2^{n+1}}, \frac{2b_n+2}{2^{n+1}})) \cap (\cup_{i=1}^{2^n}[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}))\right) \quad (2.5)$$

Obsérvese que $b_n \leq 2^n$, *por lo que debe ser uno de los i en la unión y que* $2b_n + 1$ *es impar, por lo que* $[\frac{2b_n+1}{2^{n+1}}, \frac{2b_n+2}{2^{n+1}}) \subset (\cup_{i=1}^{2^n}[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}))^c$. *Luego* $2b_n = 2i - 2$ *si y sólo si* $i = b_n + 1$ *por lo que 2.5 es simplemente*

$$= ([\frac{2(b_n+1)-2}{2^{n+1}}, \frac{2(b_n+1)-1}{2^{n+1}})) = ([\frac{2b_n}{2^{n+1}}, \frac{2b_n+1}{2^{n+1}}))$$

$$= ([\frac{2(2^n - 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i})}{2^{n+1}}, \frac{2(2^n - 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}) + 1}{2^{n+1}}))$$

$$= ([\frac{2^{n+1} - 1 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i 2^{n+1-i}}{2^{n+1}}, \frac{2^{n+1} - 1 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i 2^{n+1-i}) + 1}{2^{n+1}}))$$

$$= ([\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{b_{n+1}+1}{2^{n+1}}))$$

el caso $b_{n+1} = 0$ *es análogo.*

Etapa 2.

Proposición. 2.2.2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *espacio de probabilidad y sean* $X_1, X_2 \ldots$ *v.a.i.i.d* $\sim$ *Bernoulli*$(\frac{1}{2})$, *entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{2^i} \sim Unif(0,1) \quad (2.6)$$

Prueba. *primero mostraremos que*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i} \sim \textit{uniforme discreta en}\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n} \dots \frac{2^n-1}{2^n}\}$$

procedamos por inducción, para $n = 1$ *tenemos* $\frac{X_1}{2}$*, entonces el conjunto de posibles valores para* $Y_1 = \frac{X_1}{2}$ *es* $\{0, \frac{1}{2}\}$ *y*

$$P(Y_1 = i) = \frac{1}{2} \quad \textit{para } i \textit{ en el soporte de } Y_1$$

supongamos se cumple para n*, para* $n+1$ *tenemos que el soporte de* $Y_{n+1} =$ *sop* $Y_n + \{0, \frac{1}{2^{n+1}}\} = \{0, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\}$*, entonces, para* $\frac{k}{2^{n+1}}$ *en el soporte de* Y_{n+1}

$$P(Y_{n+1} = \frac{k}{2^{n+1}}) = \sum_{i=0}^{1} P(Y_n = \frac{k-i}{2^{n+1}}, \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{i}{2^{n+1}})$$

$$= \sum_{i=0}^{1} P(Y_n = \frac{\frac{k-i}{2}}{2^n}, \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{i}{2^{n+1}})$$

para que $\frac{k-i}{2}$ *tome valores en* $\{0, 1 \dots, 2^n - 1\}$*, si* k *es par* i *debe ser* 0*, y si* k *impar,* i *debe ser* 1*, por lo que en cada caso solo queda un sumando, de lo que se sigue que*

$$\sum_{i=0}^{1} P(Y_n = \frac{\frac{k-i}{2}}{2^n}, \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{i}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

por lo tato $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i} \sim$ *uniforme discreta con soporte en el conjunto* $\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n} \dots \frac{2^n-1}{2^n}\}$.
Consideremos una función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$*, entonces*

$$E(f(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i})) = \sum_{j=0}^{2^n-1} f(\frac{j}{2^n})\frac{1}{2^n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 f(x)dx = \int_{[0,1]} f d\lambda$$

en la segunda igualdad tenemos la suma de Riemann de la función f*, la cual converge a la esperanza de la función* f *respecto a la medida de Lebesgue, y por el teorema de convergencia débil tenemos (2.6).*

Etapa 3. *Tenemos ya* $X_1, X_2, \ldots$ *v.a.i.i.d* $\sim$ *Bernoulli*$(\frac{1}{2})$*, y tenemos por la proposición anterior que* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{2^i} \sim$ *Unif*$(0,1)$*. Sea* $p_1 < p_2 < \ldots$ *una enumeración de los primos; Sea* $A_k =$ *potencias positivas de* $p_k = \{p_k^i : i \in \mathbb{N}\}$ *y* $A_0 = \mathbb{N} \setminus \cup_{k \geq 0} A_k$*. Claramente* $A_0, A_1, A_2, \ldots$ *forman una partición de los naturales y cada* A_k *tiene una infinidad de elementos. Sea*

$$Y_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_{p_k^i}}{2^i}$$

por la proposición (2.6) tenemos que $Y_0, Y_1, \ldots$ *es una familia de v.v.i.i.d* $\sim$ *unif*$(0,1)$.

Etapa 4.

Proposición. 2.2.3. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *espacio de probabilidad y sean* X *v.a.*$\sim$ *unif*$(0,1)$*, sea* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *una función de distribución dada, entonces existe* $G : (0,1) \to \mathbb{R}$ *Borel-medible tal que* $G \circ X$ *tiene por función de distribución a* F.

Prueba. *Definamos*

$$G(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > t\}$$

Debemos mostrar que G *es medibles y que* $G \circ X$ *tiene por distribución a* F.
Primero: Observemos que G *es monótona creciente. Así que si* $t \in [0, F(a))$ *entonces* $t < F(a)$*; por lo que sí* $a \geq G(t)$, $t \in (G^{-1}(-\infty, a])$*, y* $t \leq F(G(a)) \leq F(a)$*; es decir* $t \in [0, F(a)]$*; lo cual nos produce las contenciones*

$$[0, F(a)) \subset (G^{-1}(-\infty, a]) \subset [0, F(a)] \tag{2.7}$$

como el primero y el tercero de los conjuntos difieren en un punto,
$(G^{-1}(-\infty, a])$ *es ya sea uno u otro, lo que muestra que es un conjunto de Borel.*
Segundo:

$$F_{G \circ X}(a) = P(G \circ X \leq a) = P((G \circ X)^{-1}((-\infty, a]))$$

$$= P(X^{-1}G^{-1}((-\infty,a])) = P_X(G^{-1}((-\infty,a])) = \lambda(G^{-1}(-\infty,a])$$

y de (2.7) se tiene que

$$F(a) = \lambda([0,F(a))) \leq \lambda(G^{-1}(-\infty,a]) \leq \lambda([0,F(a)]) = F(a)$$

por lo tanto $F_{G\circ X}(a) = F(a)$.
Aplicando 2.2.3 a cada par F_i, X_i, *tenemos finalmente la prueba de 2.2.1.*

SEGUNDO. *Tenemos un* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *en donde vive* $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *v.a. independientes.*
Definamos

$$X_{n+1} = f_{n+1}(X_n, \xi_{n+1})$$

y mostremos que este proceso es Cadena de Markov.
Formalmente

Teorema. 2.2.4. *Si* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son v.a.i. definidas sobre algún espacio de probabilidad* $(\Omega,\mathcal{F},P)$, *y con valores en algún espacio medible* $(F,\mathcal{S})$. *Sea* X_0 *v.a. definida en* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *con valores en otro espacio medible* $(E,\mathcal{E})$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $f_n : E \times F \to E$, $\mathcal{E}\bigotimes\mathcal{S}$*-medible. Sea* $\{X_n : n = 1,2,\ldots\}$ *la sucesión definida como*

$$X_{n+1} = f_{n+1}(X_n, \xi_{n+1}) \quad n = 0,1,\ldots$$

con

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(X_0), \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\xi_1,\ldots,\xi_n) \quad n \geq 1$$

Entonces, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es Cadena de Markov respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Prueba. *Claramente* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es un proceso adaptado a* $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$, *ya que* X_0 *es* $\mathcal{F}_0$*-medible y si* X_n *fuera* $\mathcal{F}_n$*-medible, entonces para cada* A *en* $\mathcal{E}$, $(X_{n+1} \in A) = (X_{n+1}^{-1}(A)) = ((X_n,\xi_{n+1})^{-1}f_{n+1}^{-1}(A)) = ((X_n,\xi_{n+1}) \in f_{n+1}^{-1}(A)) \in \mathcal{F}_{n+1}$, *ya que* f_{n+1} *es* $\mathcal{E}\bigotimes\mathcal{S}$*-medible. Como* ξ_{n+1} *es* $\mathcal{F}_{n+1}$*-medible y por hipótesis* X_n *es* $\mathcal{F}_n$*-medible, entonces el par* (X_n,ξ_{n+1}) *es* $\mathcal{F}_{n+1}$*-medible,* *por lo tanto* $((X_n, \xi_{n+1}) \in f_{n+1}^{-1}(A)) \in \mathcal{F}_{n+1}$*. Para probar la propiedad de Markov, observemos que*

$$P(X_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n) = P(X_{n+1} \in A \mid \sigma(X_0, \xi_1, \ldots, \xi_n))$$

$$= P((X_n, \xi_{n+1}) \in f_{n+1}^{-1}(A) \mid \sigma(X_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)) = g_{n+1}(X_n)$$

donde $g_{n+1} : E \to \mathbb{R}^+$ *esta definida por* $g_{n+1}(a) = P((a, \xi_{n+1}) \in f_{n+1}^{-1}(A))$*. Aquí hemos usado el hecho de que* X_n *es* $\sigma(X_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$*-medible,* ξ_{n+1} *es independiente de* $\sigma(X_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ *y la Proposición 1.2.3.*

Observemos además, que la distribución del proceso puede calcularse explícitamente

$$P(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = E(\chi_{\{y\}} \circ X_{n+1} \mid X_n = x)$$

$$= E(\chi_{\{y\}}(f_{n+1}(X_n, \xi_{n+1})) \mid X_n = x) = E(\chi_{\{y\}}(f_{n+1}(x, \xi_{n+1})))$$

$$= P(f_{n+1}(x, \xi_{n+1}) = y)$$

Recíprocamente toda Cadena de Markov tiene esta forma

Para construir la Cadena de Markov tomemos en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *una colección de variables aleatorias independientes* $\{X_0, \xi_{x,n} : x \in E, n \in \mathbb{N}\}$*, tal que* X_0 *tiene distribución* μ *y* $P_\mu(\xi_{x,n} = y) = p(x, y)$*.*

$$X : E \times \mathbb{N} \times \Omega \to E$$

con n, ω *fijos*

$$\xi(\cdot, n, \omega) : E \to E$$

$$\omega \longmapsto^{T} (X_{n-1}(\omega), \xi(\cdot, n, \omega)) \longmapsto^{\Pi} E$$

donde

$$\Pi : E \times E^E \to E, \qquad \Pi(e, f) = f(e)$$

entonces

$$\Pi \circ T(\omega) = \Pi(X_{n-1}(\omega), \xi(\cdot, n, \omega)) = \xi(X_{n-1}(\omega), n, \omega) = X_n$$

para probar la medibilidad de T, veamos

$$T^{-1}(\{e_0\} \times \Pi_e^{-1}(e_1)) = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \in \{e_0\} \times \Pi_e^{-1}(e_1)\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : (X_{n-1}(\omega), \xi(\cdot, n, \omega)) \in \{e_0\} \times \Pi_e^{-1}(e_1)\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : X_{n-1}(\omega) = e_0 \ \cap \ (\xi_n, n, \omega)) \in \Pi_e^{-1}(e_1)\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : X_{n-1}(\omega) = e_0 \ \cap \ \xi(e, n, \omega) = e_1\}$$

donde

$$(X_n = e) \cap (Y(e, n, \cdot)) \quad \in \mathcal{F}$$

por otra parte

$$X_{n+1}(\omega) = \Pi(X_n(\omega), \xi(\cdot, n, \omega)))$$

luego

$$P(\Pi(x, \xi(\cdot, n, \cdot)) = y)$$

$$= P(\xi(x, n, \cdot) = y) = p(x, y)$$

2.3 Recurrencia y Transitoriedad

En el estudio de las Cadenas de Markov existe una terminología más o menos estándar, la cual se desprende de las definiciones que a continuación se enuncian

Definición. 2.3.1. *Sea $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ una Cadena de Markov con función de transición estacionaria p. Supongamos que $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un proceso coordenado, $\Omega = E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{F} = \mathcal{E}^{\mathbb{N}_0}$ y $X_n : \Omega \to E$, $X_n(\omega) = \omega_n$.*

1. *Sea $y \in E$. Sea $T_y^0 = 0$. Supóngase definido a T_y^{k-1}, entonces se define*

   $$T_y^k := \inf\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\}$$

   Es decir T_y^k = el tiempo de la k-ésima visita al estado y. Nótese que $T_y^1 \geq 1$, además, si no se da la visita al estado y, $\inf \emptyset = \infty$. Convenimos denotar $T_y^1 := T_y$.

2. *Sea* $\rho_{xy} := P(T_y < \infty \mid X_0 = x) = P_x(T_y < \infty) = P_x(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = y\})$

3. *Sea* $y \in E$. *Si* $\rho_{yy} = 1$ *decimos que* y *es un estado recurrente, y si* $\rho_{yy} < 1$ *decimos entonces que* y *es estado transitorio.*

4. *Sea* $R = \{y \in E : y \text{ es recurrente}\}$ *y* $T = R^c = \{y \in E : y \text{ es transitorio}\}$ *entonces* $R \cap T = \emptyset \quad y \quad R \cup T = E$
   De la definición anterior se desprende inmediatamente que si $y \in R$, *entonces para todo* $k \geq 1, \quad P_y(T_y^k < \infty) = 1$.

5. *Para toda* $y \in E$ *, se define* $N(y) := \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{X_n=y\}}$. *Es decir,* $N(y)$ *es el número total de visitas que se hacen al estado* y.

6. *Sean* $x, y \in R$, *decimos que* x *se comunica con* y, *y lo denotamos* $x \sim y$, *si* $\rho_{xy} > 0$.
   Observación: $\sim$ *es una relación de equivalencia en* R.

7. *Sea* $\{X_n\}$ *Una Cadena de Markov con espacio de estados* E. *Sea* $C \subset E$. *Decimos que* C *es cerrado si para* $x, y \in C$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $p^{n_o} \geq 0$. *Decimos que* C *es irreducible, si para cualesquiera* $x, y \in C$, $\rho_{xy} > 0$, *de lo contrario decimos que* C *es reducible.*

El siguiente teorema es un resultado bien conocido, y del cual podemos encontrar una prueba en la mayoría de los libros de texto, como por ejemplo [5] o [14].

Teorema. 2.3.2. *Sea* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una Cadena de Markov con función de transición estacionaria* p. *Entonces*

1. *Para* $x, y \in E$ *y para toda* $k \geq 1$, *se tiene que*

$$P_x(T_y^k < \infty) = \rho_{xy}\rho_{yy}^{k-1}$$

2. *Si* $y \in T$, *entonces para toda* $x \in E$

$$E_x N(y) = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}}$$

3. *$y \in R$ si y sólo si $E_y N(y) = \infty$.*

4. *Si $x \in R$, $y \in E$ y $\rho_{xy} > 0$, entonces $y \in R$ y $\rho_{yx} = 1 = \rho_{xy}$.*

5. *Sean $x, y, z \in E$. Supongamos que $\rho_{xy} > 0$ y $\rho_{yz} > 0$, entonces $\rho_{xz} > 0$.*

6. *Sea $C \subset E$ cerrado. Entonces, para toda $x \in C$ y para toda $n \geq 0$*

$$P_x(X_n \in C) = 1$$

7. *Sea $x \in C$ y $y \in E$ tal que $\rho_{xy} > 0$. Entonces $y \in C$.*

El teorema anterior es de estudio estándar en un curso de Cadenas de Markov. Ahora introducimos algunos teoremas relativos a la teoría de martingalas, los cuales nos darán un herramienta alternativa para determinar la recurrencia o transitoriedad de una Cadena de Markov.

Definición. 2.3.3. *Sea $p : E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ un núcleo estocástico. Sea $f : E \to \mathbf{R}$ medible. Decimos que f es superarmónica respecto a p si $pf \leq f$; del mismo modo si $pf = f$ o $pf \geq f$ entonces decimos que f es armónica o subarmónica respectivamente.*

Proposición. 2.3.4. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ Una Cadena de Markov con función de transición p. Sea $f : E \to \mathbf{R}$, medible y acotada. Entonces*

1. *f es subarmónica si y sólo si $\{f(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es submartingala.*

2. *f es armónica si y sólo si $\{f(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es martingala.*

3. *f es superarmónica si y sólo si $\{f(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es supermartingala.*

Observación: *La conclusión vale para cualquier distribución inicial μ.*

Prueba. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una Cadena de Markov con función de transición p. Sea μ una distribución inicial cualesquiera, entonces*

$$E_\mu[f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = pf(X_n) \geq f(X_n)$$

La igualdad se debe a la forma en que la función de transición actúa sobre las funciones.

$$pf(X_n) = \sum_{j \in E} P(X_{n+1} = j \mid X_n) f(j) = E(f(X_{n+1}) \mid X_n)$$

Análogo para los otros dos casos.
Veamos ahora algunos ejemplos de funciones armónicas en el contexto de Cadenas de Markov.

Proposición. 2.3.5. *Sea $\{X_n\}_{n=o}^{\infty}$ Cadena de Markov con espacio de estados E y función de transición p. Sean $i, j \in E$, $C \in \mathbb{B}(E)$ cerrado y $f : E \to \mathbb{R}$. Sí f esta definida por*

1. $f_j(i) = \rho_{ij} = P_i(T_j < \infty)$
   entonces f_j es superarmónica respecto a p.

2. $f_C(i) = \chi_C(i)$
   entonces f_C es subarmónica respecto a p.

3. $f_j(i) = k \quad$ *con k constante*
   entonces f_j es armónica respecto a p.

Prueba.

1.

$$f_j(i) = \rho_{ij} = P_i(T_j < \infty) = \sum_{l \in E} P_i(X_1 = l) P_i(T_j < \infty \mid X_1 = l)$$

$$= p(i,j) P_i(T_j < \infty \mid X_1 = j) + \sum_{l \neq j} p(i,l) P_i(T_j < \infty \mid X_1 = l)$$

$$= p(i,j) + \sum_{l \neq j} p(i,l) P_i(T_j < \infty \mid X_1 = l) = p(i,j) + \sum_{l \neq j} p(i,l) \rho_{ij} \quad (2.8)$$

$$\geq p(i,j)\rho_{jj} + \sum_{l \neq j} p(i,l)\rho_{lj} = \sum_{l \in E} p(i,l)\rho_{lj}$$

$$= \sum_{l \in E} p(i,l) f_j(l) = (pf_j)(i)$$

Por lo tanto f_j es superarmónica respecto a p.

2.

$$pf_C(i) = p\chi_C(i) = \sum_{j \in E} p(i,j)\chi_C(j)$$

$$= \sum_{j \in C} p(i,j)\chi_C(j) = \begin{cases} 1 & si \quad i \in C \\ \geq 0 & si \quad i \notin C \end{cases} \geq \chi_C(i) = f_C(i)$$

Por lo tanto f_C es subarmónica respecto a p.

3.

$$pf_j(i) = pk(i) = \sum_{j \in E} p(i,j)k = k = f_j(i)$$

Por lo tanto f_j es armónica respecto a p.

Teorema. 2.3.6. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ Una Cadena de Markov con espacio de estados E y función de transición p, entonces la cadena es irreducible y recurrente si y sólo si las únicas funciones $h : E \to \mathbb{R}^+$ medibles que cumplen con $ph \leq h$, son las constantes.*

Prueba. *Probemos primero la necesidad. Sea $h : E \to \mathbb{R}^+$ superarmónica. Sea $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Entonces para cualquier distribución inicial μ. $\{h(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$, es supermartingala. Sean $i, j \in E$. Sea $T_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$, como la cadena es irreducible y recurrente, se tiene que $\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty) = 1$, entonces $T_j < \infty$ P_i c.s. y $X_{T_j} = j$ P_i c.s. Entonces $h(j) = h(X_{T_j}) = E_i(h(X_{T_j}))$ y por el Teorema de Paro de Doob 1.2.14, $E_i(h(X_{T_j})) \leq E_i(h(X_0)) = E_i(h(i)) = h(i)$, por lo tanto $h(j) \leq h(i)$. Invirtiendo los roles de i, j llegamos a que $h(i) \leq h(j)$, por lo tanto $h(i) = h(j)$, es decir h es constante.*

Para probar el recíproco observemos que $p\chi_{C^c} = p(1-\chi_C) = 1 - p\chi_C \leq 1 - \chi_C = \chi_{C^c}$. *Es decir,* χ_{C^c} *es superarmónica y por hipótesis es constante, por lo tanto* $C^c = \emptyset$ *o* $C^c = E$*, en particular* $R = \emptyset$ *o* $R = E$ *porque* R *es cerrado. Sea* $C_i = \{j \in E : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^n(i,j) > 0\}$, C_i *es cerrado porque si* $j \in C_i$ *y* $j \to k$, $i \to j$ *y* $j \to k$ *entonces* $i \to k$ *por lo tanto* $k \in C_i$ *y* $C_i = \emptyset$ *o* $C_i = E$. *Para todo* $i \in E$, $\sum_{j\in E} p(i,j) = 1$ *entonces* $C_i \neq \emptyset$, *y por lo tanto la cadena es irreducible.*

Ejemplos. *Determinemos la recurrencia o transitoriedad de la Caminata Aleatoria Simple y Simétrica, utilizando el criterio de las funciones superarmónicas.*

Caminata Aleatoria Simple y Simétrica. *La función de transición de esta cadena esta dada por*

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad j = i+1 \quad o \quad j = i-1 \\ 0 & o.c \end{cases}$$

Su matriz de transición T *tiene la forma:*

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Sea $f : E \to \mathbf{R}_+$ *superarmónica. Sean* $x, y \in E$, *claramente* $x \sim y$ *por lo que la cadena es irreducible.*

$$pf(i) = \int_E p(i,dj)f(j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(i,j)f(j) = \frac{1}{2}(f(i+1) + f(i-1)) \leq f(i)$$

en forma equivalente

$$\frac{1}{2}(f(i+1) + f(i-1)) \leq \frac{1}{2}f(i) + \frac{1}{2}f(i)$$

si y sólo si

$$\frac{1}{2}(f(i+1)-f(i))-\frac{1}{2}(f(i)-f(i-1))\leq 0$$

o bien

$$(f(i+1)-f(i))-(f(i)-f(i-1))\leq 0 \tag{2.9}$$

Sea $\Delta f_i := f(i+1)-f(i)$*, con esta notación (2.9) se expresa como* $\Delta f_i - \Delta f_{i-1} \leq 0$*, para toda* $i \in \mathbb{Z}$*, o bien,* $\Delta f_i \leq \Delta f_{i-1}$*, para toda* $i \in \mathbb{Z}$*. Supóngase que existe* i_0 *tal que* $\Delta f_{i_0} < 0$*. Por lo tanto para toda* $j < i_0$ *se tiene que* $\Delta f_j \leq \Delta f_{i_0} < 0$*. Luego*

$$f(j)-f(i_0) = -\sum_{l=j}^{i_0}\Delta f_l \quad \textit{entonces} \quad f(j)=f(i_0)-\sum_{l=j}^{i_0}\Delta f_l$$

y

$$f(j-1)=f(i_0)-\sum_{l=j-1}^{i_0}\Delta f_l = f(i_0)-\sum_{l=j}^{i_0}\Delta f_l - \Delta f_{j-1}$$

$$= f(j)-\Delta f_{j-1} > f(j) \quad \textit{para toda } j < i_0$$

Por lo tanto f *es monótona para toda* $j < i_0$*. Sea* $g = \lim_{j\to-\infty} f(j)$ *ya que* f *es acotada. Entonces*

$$\sum_{-\infty}^{i_0}(-\Delta f_l) < \infty \quad \textit{por lo tanto} \quad \Delta f_l \quad \xrightarrow[l\to-\infty]{} \quad 0$$

$\Delta f_{i_0-1} \leq \Delta f_{i_0} < 0$*. Por lo tanto para todo* $i_0 \in \mathbb{Z}$*,* $\Delta f_{i_0} \geq 0$*. De manera análoga para toda* $i \in \mathbb{Z}$*,* $\Delta f_i \leq 0$*, por lo tanto* $\Delta f_i = 0$*. Es decir* f *es constante.*

Cadena de Ramificación. *Nótese primeramente que la Cadena de Ramificación no es irreducible y que de hecho el único estado recurrente es el 0, sin embargo es de interés el estudio de las condiciones bajo las cuales la población del sistema se extinguirá con toda seguridad.*

Definición. 2.3.7. *Sea X v.a. discreta no negativa, sea una función $\phi_X : [0,1] \to [0,1]$, definida como*

$$\phi_X(\theta) = E(\theta^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k P(X = k)$$

A $\phi_X(\theta)$ se le llama función generadora de probabilidades o función generadora de momentos factoriales de la v.a. X.

Es fácil verificar que
$\phi_X(0) = P(X = 0) \quad y \quad \phi'(1) = \sum_k kP(X = k) = E(X) = \mu$

Definición. 2.3.8. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Z_n = 0) =$ *extinción.*

Observe que $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$, para toda $n \geq 0$ y que $\lim_{n\to\infty}(Z_n = 0) = E$.

Teorema. 2.3.9. *Sea ϕ_X la función de momentos factoriales de la v.a. X con $E(X) = \mu \leq \infty$, entonces la ecuación*

$$\phi_X(t) = t$$

1. *Tiene como único punto fijo en $[0,1]$ al 1, si $\mu \leq 1$*
2. *Tiene un punto fijo en $(0,1)$ si $\mu > 1$*

Si bien este teorema es puramente de análisis, su prueba puede encontrarse en numerosos textos de probabilidad, como por ejemplo [14] o [11]. Las siguientes proposiciones tienen como objetivo mostrar que si $\mu \leq 1$ entonces $P(E) = 1$ y si $\mu > 1$ entonces $0 < P(E) < 1$.

Proposición. 2.3.10. *Sea $\theta \in [0,1]$. Sea $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ una Cadena de Ramificación. Sea X v.a con la misma distribución que $\{X_{n,i} : n, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ y $\phi_X = \phi$, entonces*

1. *$E[\theta^{Z_{n+1}}|Z_n] = (\phi(\theta))^{Z_n}$*

2. $E[\theta^{Z_n}|Z_m] = (\phi \circ \cdots \circ \phi(\theta))^{Z_m}$ *para toda* $n \geq m \geq 0$ *y donde* ϕ *esta compuesta consigo misma* $n - m$ *veces.*

3. *Si* $\mu < \infty$*, entonces*

$$E[Z_{n+1}|Z_0, \ldots, Z_n] = E[Z_{n+1}|Z_n] = Z_n\mu$$

Prueba.

1.

$$E[\theta^{Z_{n+1}}|Z_n] = E[\theta^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i}}|Z_n]$$

$$= E[\prod_{i=1}^{Z_n} \theta^{X_{n+1,i}}|Z_n] = h(Z_n)$$

donde

$$h(k) = E(\prod_{i=1}^{k} \theta^{X_{n+1,i}}) = \prod_{i=1}^{k} E\theta^{X_{n+1,i}} = \prod_{i=1}^{k} E\theta^{X} = (\phi(\theta))^k$$

Por lo tanto $E[\theta^{Z_{n+1}}|Z_n] = (\phi(\theta))^{Z_n}$

2. *Procedamos por inducción sobre* $n - m$*. Si* $n - m = 1$*, entonces*

$$E[\theta^{Z_{n+1}}|Z_n] = (\phi(\theta))^{Z_n}$$

Supongamos $E[\theta^{Z_n}|Z_m] = (\phi \circ \cdots \circ \phi(\theta))^{Z_m}$ *con* ϕ *compuesta consigo misma* $n - m$ *veces, entonces*

$$E[\theta^{Z_{n+1}}|Z_m] = E[E[\theta^{Z_{n+1}}|Z_0, \ldots, Z_n]|Z_m] = E[E[\theta^{Z_{n+1}}|Z_n]|Z_m]$$

$$= E[(\phi(\theta))^{Z_n}|Z_m] = (\phi \circ \cdots \circ (\phi(\theta)))^{Z_m} = (\phi \circ \cdots \circ \phi(\theta))^{Z_m}$$

donde ϕ *esta compuesta consigo misma* $n + 1 - m$ *veces.*

3. *Si* $\mu < \infty$

$$E[Z_{n+1}|Z_0,\ldots,Z_n] = \sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_{n+1}=j|Z_0,\ldots,Z_n)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} jP(Z_{n+1}=j|Z_n) = E[Z_{n+1}|Z_n]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i}|Z_n] = h(Z_n)$$

donde $h(k) = E(\sum_{i=1}^{k} X_{n+1,i}) = \sum_{i=1}^{k} E(X_{n+1,i}) = k\mu$

Por lo tanto

$$E[Z_{n+1}|Z_0,\ldots,Z_n] = E[Z_{n+1}|Z_n] = Z_n\mu$$

Corolario. 2.3.11. 1. $E[\theta^{Z_n}|Z_0] = (\phi\circ\cdots\circ\phi(\theta))^{Z_0}$

2. *Definamos* $\Pi_n^{Z_0} := P(Z_n=0|Z_0)$ *y* $\Pi_n := P(Z_n=0|Z_0=1)$.
   Entonces

   $\Pi_n^{Z_0} = (\phi\circ\cdots\circ\phi(0))^{Z_0}$ *donde* ϕ *se compone consigo misma* n *veces*

3. *Definamos* $\Pi^{Z_0} := P(E|Z_0)$ *y* $\Pi := P(E|Z_0=1)$.
   Entonces

$$\Pi^{Z_0} = \lim_{n\to\infty} \Pi_n^{Z_0} \quad y \quad \Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi_n$$

Prueba.

1. *Inmediato*

2.

$$\Pi_n^{Z_0} = P(Z_n=0|Z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k P(Z_n=k|Z_0)\mid_{\theta=0}$$

$$= E[\theta^{Z_n}|Z_0]\mid_{\theta=0} = (\phi\circ\cdots\circ\phi(0))^{Z_0}$$

con ϕ *compuesta consigo misma* n *veces; en particular*

$$P[Z_n=0|Z_0=1] = \Pi_n = \phi\circ\cdots\circ\phi(0)$$

3. *Dado que* $\bigcup_{n=1}^{\infty}(Z_n = 0)$ *es una sucesión de conjuntos creciente*

$$\Pi^{Z_0} = P(E|Z_0) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Z_n = 0)|Z_0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0|Z_0) = \lim_{n\to\infty} \Pi_n^{Z_0}$$

En particular

$$\Pi = P(E|Z_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0|Z_0 = 1)$$

Por ultimo

Proposición. 2.3.12. 1. $\Pi_{n+1} = \phi(\Pi_n)$

2. $\Pi = \phi(\Pi)$

Prueba.

1. *Del corolario anterior tenemos que*

$$\Pi_n = \phi \circ \cdots \circ \phi(0)$$

Luego

$$\Pi_{n+1} = \phi \circ \cdots \circ \phi(\theta) = \phi(\phi \circ \cdots \circ \phi(\theta)) = \phi(\Pi_n)$$

2.
$$\Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \phi(\Pi_n)$$
$$= \phi(\lim_{n\to\infty} \Pi_n) = \phi(\Pi)$$

Con lo que podemos concluir que Π *es punto fijo de la ecuación* $\phi(t) = t$. *Entonces por el Teorema 2.3.9, podemos concluir que si* $E(X_{n,i}) = \mu \leq 1$ *entonces* $\Pi := P(E|Z_0 = 1) = 1$ *con lo que* $\Pi^{Z_0} = 1$*, es decir bajo cualquier condición inicial la extinción tiene probabilidad* 1. *en el otro sentido, si* $\mu > 1$ *entonces* $\Pi := P(E|Z_0 = 1) < 1$ *con lo que* $0 < P(E) < 1$.

2.4 Convergencia al Equilibrio y Medidas Invariantes

Para esta sección, enunciamos el siguiente teorema cuya prueba podemos encontrar en [5], [14], [15].

Teorema. 2.4.1. *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *Cadena de Markov con función de transición estacionaria* p*, distribución inicial* μ *y espacio de estados* E*.*

1. *Sean* $y \in R$ *y* $x \in E$ *tal que* $\rho_{xy} = 1$*. Sean*

   $$T_y^0 \equiv 0, T_y^1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}, \dots, T_y^k = \inf\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\}, \dots$$

   Definamos

   $$R^1 = T_y^1, R^2 = T_y^2 - T_y^1, \dots, R^k = T_y^k - T_y^{k-1} \dots$$

   Entonces, con respecto a P_x*, se tiene que* $\{R^1, R^2, R^3, \dots\}$ *son v.a.i.i.d.*

2. *Sean* $x \in E$*,* $y \in R$ *tal que* $\rho_{xy} = 1$*. Sea*

   $$N_x^n(y) = \sum_{j=1}^{n} I_{(X_j = y)}$$

   Es decir $N_x^n(y)$ *es el número total de visitas al estado* y *hasta el tiempo* n*, y dada la condición inicial* $X_0 = x$*. Sea* $m_y := E_y T_y$*, donde* $T_y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}$*. Entonces*

   (a) $\frac{N_x^n(y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{m_y}$ P_x *c.s.*

   (b) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p^{(j)}(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{m_y}$

   En donde $\frac{N_x^n(y)}{n}$ *es el promedio de visitas al estado* y *partiendo del estado* x *en* n *unidades de tiempo.*

3. *Para todo* $x, y \in E$

   (a) $\frac{N_n(y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} I_{\{T_y<\infty\}}\frac{1}{m_y}$ P_μ*-c.s.*

(b) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p^{(j)}(x,y) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\rho_{xy}}{m_y}$

Definición. 2.4.2. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cadena de Markov con función de transición estacionaria p. Sea $\mu : \mathcal{E} \to \mathbf{R}^+$ una medida. Decimos que μ es invariante o que es estacionaria, si $\mu p = \mu$. Si μ es medida de probabilidad invariante, la llamaremos distribución invariante o bien distribución estacionaria.*

Proposición. 2.4.3. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una Cadena de Markov con espacio de estados numerable E y distribución estacionaria μ. Sea $y \in E$ tal que $\mu(y) := \mu(\{y\}) > 0$. Entonces*

1. *$y \in R$*
2. *Si la Cadena de Markov es irreducible y μ es distribución estacionaria, entonces*
   $R = E$

Prueba. *Véase [5].*

Definición. 2.4.4. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una Cadena de Markov con matriz de transición asociada P. Sea μ una medida, se dice que están en balance detallado o bien, que cumplen con la condición de balance detallado si*

$$\mu_i p(i,j) = \mu_j p(j,i) \quad \text{para toda } i,j \in E \tag{2.10}$$

Proposición. 2.4.5. *Si P y μ cumplen con la condición de balance detallado, entonces μ es una medida invariante para P.*

Prueba.

$$(\mu P)_i = \sum_{j\in E} \mu_j p(j,i) = \sum_{j\in E} \mu_i p(i,j) = \mu_i$$

2.5 Existencia de Medidas Invariantes

Definición. 2.5.1. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cadena de Markov con espacio de estados E y función de transición estacionaria p.*

1. *Si $x \in R$. Decimos que x es recurrente positivo si $m_x = E_x T_x < \infty$, y si $m_x = \infty$, entonces decimos que x es recurrente nulo.*

2. *Sea $x \in E$. Sea $I_x = \{n \geq 1 : p^{(n)}(x,x) > 0\} \subset \mathbb{N}$. Sea $d_x =$ m.c.d. de los elementos de I_x. A d_x se le llama el periodo de x. Si $d_x = 1$, decimos que x es un estado aperiódico.*

Teorema. 2.5.2. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cadena de Markov con espacio de estados E y función de transición estacionaria p.*

1. *Sea $x \in R$. Sea $\gamma_x : E \to \mathbb{R}^+$, definida como: $\gamma_x(y) = E_x(\sum_{j=0}^{T_x - 1} I_{\{X_j = y\}})$, donde $T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$; es decir $\gamma_x(y)$ es el número esperado de visitas al estado y antes del primer regreso a x.*
   $\gamma_x : 2^E \to \mathbb{R}^+, \quad \gamma_x = \sum_{y \in E} \gamma_x(y)$.
   Entonces, γ_x es medida invariante σ-finita.

2. *Si la Cadena es irreducible y recurrente, entonces todas las medidas σ-finitas son múltiplos de la medida γ_x.*

3. *Si $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es recurrente, con distribución estacionaria π, entonces*
$$\pi_x = \frac{1}{m_x} \quad \text{donde } m_x = E_x(T_x)$$

4. *Sea $x \in R$ tal que $p_{xy} > 0$, entonces $d_x = d_y$.*
   Observación: *Si la Cadena de Markov es irreducible y recurrente, entonces d_x es el mismo para toda $x \in E$. Sea $d_x = d$, a d se llama el periodo de la cadena, cuando este es igual a 1 se dice que la Cadena es aperiódica.*

5. *Si $n, m \in I_x$, entonces $n + m \in I_x$.*

6. *Si $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es irreducible, recurrente y aperiódica, entonces*

$$p^{(n)}(x,y) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{m_y}$$

7. *Si la Cadena de Markov tiene distribución estacionaria π, entonces para todo $x, y \in E$*

$$p^{(n)}(x,y) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \pi(y)$$

8. *Si $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene distribución invariante π y periodo $d > 1$, se tiene que para todo $(x,y) \in E \times E$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq r < d$ y $p^{(n)}(x,y) \to 0$ a menos que $n \equiv r$, en cuyo caso*

$$p^{(nd+r)}(x,y) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad d\pi(y).$$

Para una prueba de 2.5.2, véase [5].

Teorema. 2.5.3. *Condición de Reversibilidad de Kolmogorov para la Existencia de Medidas Invariantes.*
Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una Cadena de Markov irreducible, con espacio de estados numerable E, y función de transición p. Entonces, la cadena tiene una medida invariante μ de balance detallado, tal que $\mu(x) > 0$ para toda $x \in E$, si y sólo si

1. *$p(x,y) > 0$ si y sólo si $p(y,x) > 0$.*

2. *Para cualquier sucesión finita de estados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ con $x_n = x_0$, y $\prod_{i=1}^{n} p(x_i, x_{i-1}) > 0$, se tiene que*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} = 1$$

Prueba. *Necesidad.*

1. *Si* $p(x,y) > 0$ *entonces* $p(y,x) = \frac{\mu(x)p(x,y)}{\mu(y)} > 0$ *pues* $\mu(x), \mu(y) > 0$. *Intercambiando los roles de* x *e* y *se tiene el recíproco.*

2. *Para una sucesión de estados* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *donde* $x_n = x_0$ *y* $\prod_{i=1}^{n} p(x_i, x_{i-1}) > 0$, *entonces*
$$\frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} = \frac{\mu(x_i)}{\mu(x_{i-1})}$$
por lo que
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_{x_i}}{\mu_{x_{i-1}}} = \frac{\mu_{x_n}}{\mu_{x_0}} = \frac{\mu_{x_0}}{\mu_{x_0}} = 1$$

Suficiencia.
Sean a, z *cualesquiera dos estados en* E. *Sean* $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = z$ *y* $y_0 = a, \ldots, y_k = z$ *dos sucesiones finitas de estados que empiezan en* a *y terminan en* z *y que* $\prod_{j=1}^{n}(p(x_j, x_{j-1})) > 0$, $\prod_{i=1}^{k}(p(x_i, x_{i-1})) > 0$. *Afirmamos que*
$$\prod_{j=1}^{n} \frac{p(x_{j-1}, x_j)}{p(x_j, x_{j-1})} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p(y_{i-1}, y_i)}{p(y_i, y_{i-1})}$$
Para probarlo, sea
$$w_l = \begin{cases} y_l & si \quad 0 \leq l \leq k \\ x_{k+n-l} & si \quad k < l \leq k+n \end{cases}$$
Entonces, $w_0, \ldots, w_{k+n}$ *es una sucesión finita de estados tal que* $w_0 = w_{k+n} = a$ *y*
$$\prod_{l=1}^{k+n} p(w_l, w_{l-1}) = \prod_{i=1}^{k} p(y_i, y_{i-1}) \prod_{j=1}^{n} p(x_j, x_{j-1}) > 0$$
Por lo tanto, y debido a la propiedad 2
$$1 = \prod_{l=1}^{k+n} \frac{p(w_l, w_{l-1})}{p(w_{l-1}, w_l)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p(y_{i-1}, y_i)}{p(y_i, y_{i-1})} \prod_{l=1}^{n} \frac{p(x_{k+n-l+1}, x_{k+n-l})}{p(x_{k+n-l}, x_{k+n-l+1})}$$

Por lo que

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{p(x_{j-1}, x_j)}{p(x_j, x_{j-1})} = \prod_{l=1}^{n} \frac{p(x_{k+n-l}, x_{k+n-l+1})}{p(x_{k+n-l+1}, x_{k+n-l})} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p(y_{i-1}, y_i)}{p(y_i, y_{i-1})}$$

Así pues, si definimos $\mu(a) = 1$ *y*

$$\mu(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p(y_{i-1}, y_i)}{p(y_i, y_{i-1})}$$

entonces $\mu : E \to \mathbb{R}^+$ *esta bien definida como función, pues no depende de la forma como se conectan* a *y* z *y se puede extender a una medida sobre* 2^E*, tal que* $\mu(z) > 0$ *para toda* $z \in E$*. Sea* $y \in E$*, si* $p(z, y) = 0$ *entonces* $p(y, z) = 0$ *por la condición 1 y es claro que* $\mu(z)p(z, y) = 0 = \mu(y)p(y, z)$*. Si* $p(z, y) > 0$ *entonces* $p(y, z) > 0$ *y*

$$\frac{\mu(z)p(z, y)}{p(y, z)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(y_{i-1}, y_i)}{p(y_i, y_{i-1})} \frac{p(z, y)}{p(y, z)}$$

$$= \frac{p(a_0, y_1) \cdots p(y_{n-1}, z)p(z, y)}{p(y, z)p(z, y_{n-1}) \cdots p(y_1, a_0)} = \mu(y)$$

Por lo tanto $\mu(z)p(z, y) = \mu(y)p(y, z)$*. En cualquier caso* μ *cumple la condición de balance detallado.*

Ejemplos.

Cadena de Nacimiento y Muerte. *Cuando una medida invariante existe, es a menudo fácil encontrarla resolviendo la ecuación de balance detallado como lo es en el caso de la Cadena de Nacimiento y Muerte, ya que a partir de un estado* i *solo podemos transitar a los estados* i*,* $i + 1$ *o* $i - 1$*. Tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mu_i p(i, i) & = & \mu_i p(i, i) \\ \mu_i p(i, i-1) & = & \mu_{i-1} p(i-1, i) \\ \mu_i p(i, i+1) & = & \mu_{i+1} p(i+1, i) \end{array}\right\} \quad \textit{para toda } i \in E$$

de la segunda y tercera ecuaciones, tenemos

$$\left.\begin{array}{l}\mu_i q_i = \mu_{i-1} p_{i-1} \\ \mu_i p_i = \mu_{i+1} q_{i+1}\end{array}\right\} \quad \text{para toda } i \in E$$

Observemos la redundancia de las mismas, así que de la segunda ecuación tenemos

$$\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} = \frac{p_i}{q_{i+1}}$$

Ahora, multiplicamos desde $i = 0$ hasta n

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{\pi_{n+1}}{\pi_n} = \prod_{i=0}^{n} \frac{p_n}{q_{n+1}}$$

en forma desarrollada

$$\frac{\pi_1}{\pi_0} \cdot \frac{\pi_2}{\pi_1} \cdots \frac{\pi_{n+1}}{\pi_n} = \frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_n}{q_{n+1}}$$

de donde

$$\pi_{n+1} = \frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_n}{q_{n+1}} \cdot \pi_0$$

ahora, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_{n-1}}{q_n} \cdot \pi_0 = 1$$

de este modo, se tiene que

$$\pi_{n+1} = \frac{\frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_n}{q_{n+1}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_{n-1}}{q_n}}$$

Hemos utilizado la ecuación de balance detallado para encontrar la medida invariante de la Cadena de Nacimiento y Muerte, sin embargo no todas las cadenas cumplen con tal condición, un ejemplo de ello es la Cadena de la Línea de Espera (2.3), ya que para $x, z \in E$ con $z > x$ y $\mid z - x \mid > 1$; $p(x,z) > 0$ pero $p(z,x) = 0$, y sin embargo es posible dar condiciones para la existencia de la distribución invariante, calculándola de manera más o menos explícita, Siguiendo a Coleman [4]

Resolvamos la ecuación $\mu P = \mu$, de 2.4

$$\mu(k) = \mu(0)p_k + \sum_{j=1}^{k+1} \mu(j)p_{k+1-j} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.11}$$

Definamos las siguientes funciones de momentos factoriales

$$\phi_\xi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k p_k, \qquad \phi_\mu(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \mu(k)$$

multiplicamos (2.11) por θ^k y sumamos de $k = 0$ en adelante, para obtener del lado izquierdo a la función generadora de momentos factoriales de la de la distribución invariante, y del lado izquierdo

$$\mu(0)\phi_\xi(\theta) + \frac{1}{\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1} \mu(j)\theta^j p_{k+1-j}\theta^{k+1-j}$$

$$= \mu(0)\phi_\xi(\theta) + \frac{1}{\theta}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(j)\theta^j \sum_{r=k+1-j=0}^{\infty} p_r\theta^r = \mu(0)\phi_\xi(\theta) + \frac{1}{\theta}(\phi_\xi(\theta) - \mu(0))\phi_\xi(\theta)$$

por lo tanto

$$\phi_\mu(\theta) = \frac{\mu(0)(1-\theta)\phi_\xi(\theta)}{\phi_\xi(\theta) - \theta} \tag{2.12}$$

Ahora, tomamos el límite cuando $\theta \to 1^-$ y con el uso de la regla de $L'H\hat{o}pital$

$$1 = \lim_{\theta \to 1^-} \frac{\mu(0)(1-\theta)\phi_\xi(\theta)}{\phi_\xi(\theta) - \theta} = \mu(0)\frac{-1}{E(\xi) - 1}$$

de donde $\mu(0) = 1 - E(\xi)$, valor que sustituimos en (2.11)

$$\phi_\mu(\theta) = \frac{(1 - E(\xi))(1-\theta)\phi_\xi(\theta)}{\phi_\xi(\theta) - \theta}$$

La condición para la existencia de la distribución invariante es que $E(\xi) < 1$, ya que si $E(\xi) = 0$, entonces $\phi_\mu(\theta) = 0$ y si $E(\xi) > 1$ entonces $\mu(0) < 0$ lo cual no es una probabilidad. Si $E(\xi) > 1$ ya que por unidad de tiempo se atiende a un cliente y en promedio llega mas de uno, la cola tendera a crecer sin límite.

Ejemplo. 2.5.4. *Sea* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una Cadena de Markov con espacio de estados* $E = \{0,1\}$ *y matriz de transición asociada*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando las potencias de T

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

Es claro que la cadena es irreducible por lo que $I_0 = I_1 = \{n \geq 1 : p^{(n)}(x,x) > 0\} = 2$*, es decir, el periodo de la cadena es* 2*.*

Ejemplo. 2.5.5. *Sea* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una Cadena de Markov con espacio de estados* $E = \{0,1\}$ *y matriz de transición asociada*

$$T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

La cadena es irreducible si y sólo si $p > 0$*, y la cadena es aperiódica e irreducible sí y sol sí* $p < 1$*.*
Diagonalizando la matriz es fácil verificar que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} + (1-(p+q))^n \begin{pmatrix} \frac{p}{p+q} & \frac{-p}{p+q} \\ \frac{-q}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$$

Si $p = q = 1$*, que es el caso periódico, tenemos que:*

$$T^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya que la cadena cumple con la condición de balance detallado $\mu(i)p(i,j) = \mu(j)p(j,i)$*, con* $i = 0, j = 1$ *y* $j = 0, i = 1$ *tenemos* $\mu(0)p = \mu(1)q$*, además* $\mu(0) + \mu(1) = 1$*, entonces* $\mu(0) + \frac{p}{q}\mu(0) = 1$ *y se sigue que* $\mu(0) = \frac{1}{1+\frac{p}{q}} = \frac{q}{p+q}$ *y también* $\mu(1) = \frac{p}{p+q}$*. En el caso periódico* $p = q = 1$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Construcción de Procesos Markovianos de Salto

Este capítulo es el resultado de una revisión de minuciosa de la construcción de los Procesos Markovianos de Salto que se da en algunos libros de texto como Gikhman [12] y Ethier-Kurtz [9], básicamente en que el proceso así construido posea la la propiedad de Markov y sobre la forma del generador infinitesimal. La prueba de la posesión de la propiedad de Markov, no se hace siguiendo a Ethier-Kurtz, principalmente porque no se pudo probar que un cierto proceso tuviera las mismas distribuciones finito dimensionales que un Proceso de Poisson Compuesto. Revisando en la literatura nos encontramos con una prueba que ofrece Resnick [22], que por una parte es totalmente directa y por otra, es de una notación sumamente pesada, además de tener errores tipográficos y un par de igualdades que no pudimos justificar; finalmente encontramos la prueba que se ofrece en Stroock [25], que si bien lo hace en un par de plumazos, deja bastante trabajo al lector.

El objetivo central de este trabajo es ofrecer una prueba completa y a detalle de la propiedad de Markov, cosa que no es trivial a pesar de que casi siempre se por sentada y hay escasa literatura en este sentido. La prueba es un trabajo altamente delicado sobre la medibilidad de cierto eventos, y un *empleo industrial de teoremas fuertes, como los son el Lema de las Clases Monótonas, Teorema de Convergencia Monótona y otros. La prueba de que el proceso construido tenga un generador infinitesimal de una cierta forma se hace a través de la Solución Minimal (Feller [10]), lo que representa un plus en este trabajo.*

Iniciamos el capitulo con una revisión de las nociones fundamentales de la teoría de semigrupos; la relación que guarda éste con el resolvente y el generador infinitesimal y el hecho de que este último caracteriza unívocamente al semigrupo; sin olvidar el teorema de Hille-Yosida, el cual caracteriza a aquellos operadores que son resolventes de semigrupos.
Continuamos con algunas definiciones estándar, seguidas de la construcción de los Procesos Markovianos de Salto, el trabajo antes mencionado y un par de ejemplos.

A través de este capítulo tendremos que E *es un espacio métrico,* $F(E)$ *es el conjunto de las funciones reales, Borel-medibles en* E *y* $C(E) \subseteq F(E)$ *es el espacio de funciones continuas y acotadas.* $C(E)$ *es un espacio de Banach con respecto a la norma del supremo,* $\| f \| = \sup_{x \in E} | f(x) |$*. La exposición de la Teoría de Semigrupos se hace siguiendo a [18].*

3.1 Teoría de Semigrupos

Denotaremos de aquí en adelante con $\mathbf{V}$*, a un espacio de Banach arbitrario sobre los numeros reales, y* $\| \cdot \|$ *denota la norma en* $\mathbf{V}$*.*

Definición. 3.1.1. *Sea* $\{T_t\}$*,* $t,s \in \mathbb{R}^+$*, una familia de operadores lineales en* $\mathbf{V}$*, entonces* $\{T_t\}$ *es un semigrupo de contracciones a un parámetro, sí*

1. $||T_t x|| \leq ||x||$ *para todo* $x \in \mathbf{V}$
2. $T_{t+s} = T_t T_s$ *para toda* $t, s \geq 0$
3. $\lim_{t \to 0^+} ||T_t x - x|| = 0$ *para todo* $x \in \mathbf{V}$

Si $\{T_t\}$ cumple con las condiciones anteriores, diremos simplemente que $\{T_t\}$ es un semigrupo.

Definición. 3.1.2. *Sea $\{T_t\}$ un semigrupo, definimos*

$$\mathbf{D} = \{x \in \mathbf{V} : \lim_{t \to 0^+} \frac{T_t x - x}{t} \quad existe\}$$

y una aplicación $A : \mathbf{D} \to \mathbf{V}$, definida por

$$A(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{T_t x - x}{t}$$

Al operador A se le llama el generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t\}$ y su dominio es el conjunto $\mathbf{D}$ al que denotaremos para mayor precisión como $\mathbf{D_A}$.

Observación: *Es fácil ver que $\mathbf{D_A}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$ y que A es un operador lineal.*

Proposición. 3.1.3. *Sea $x \in \mathbf{D_A}$, entonces $T_t x \in \mathbf{D_A}$ y*

$$\frac{d}{dt}(T_t x) = A(T_t x) = T_t(Ax)$$

Prueba. *Primero consideremos el caso en que $t > 0$, entonces*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T_{t+h}x - T_t x}{h} = T_t \lim_{h \to 0^+} \frac{T_h x - x}{h} = T_t(Ax)$$

por otro lado

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T_{t+h}x - T_t x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{T_h - I}{h} T_t x$$

lo que muestra que $T_t \in \mathbf{D_A}$ y que $A(T_t x) = T_t(Ax)$. Ahora el caso en que $h < 0$ pero $t + h > 0$

$$||\frac{T_{t+h}x - T_t x}{h} - T_t Ax|| = ||\frac{-T_{t+h}x + T_{t+h+|h|}x}{-h} - T_{t+h+|h|}Ax||$$

en la segunda desigualdad hemos usado el hecho de que $h < 0$ y por lo tanto $h+ \mid h \mid = 0$, luego

$$= ||T_{t+h}[\frac{T_{|h|}x - x}{|h|} - T_{|h|}Ax]|| \leq ||\frac{T_{|h|}x - x}{|h|} - T_{|h|}Ax||$$

$$= ||\frac{T_{|h|}x - x}{|h|} - T_{|h|}Ax + Ax - Ax||$$

$$\leq ||\frac{T_{|h|}x - x}{|h|} - Ax|| + ||Ax - T_{|h|}Ax||$$

y ya que ambos sumandos en la última desigualdad tienden a 0 *cuando* $h \to 0$*, se concluye que* $T_t x$ *tiene derivada igual a* $T_t Ax$*.*

Definición. 3.1.4. *Sea* $\{T_t\}$ *un semigrupo, para* $\lambda \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$*, definimos al operador* R_λ *como sigue*

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x dt \qquad \textit{para todo} x \in \mathbf{V}, \lambda > 0.$$

la familia de operadores $\{R_\lambda : \lambda > 0\}$ *es llamada el* resolvente *del semigrupo* $\{T_t\}$*.*

La integral de arriba es en el sentido usual de Riemann, en este caso el de una función de variable real con valores en un espacio de Banach[1]*.* $\{R_\lambda : \lambda > 0\}$ *es una familia de operadores lineales, además* R_λ *es también acotado para todo* $\lambda > 0$*, ya que*

$$||R_\lambda x|| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}||T_t x||dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}||x||dt = \frac{||x||}{\lambda}$$

En el caso en que A *es un generador acotado de* $\{T_t\}$*, se tiene que*

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} dt = \int_0^\infty e^{[t(A-\lambda I)]} dt$$

$$= e^{[t(A-\lambda I)]}(\lambda I - A)^{-1} \mid_0^\infty = (\lambda I - A)^{-1}$$

Teorema. 3.1.5. *Sea* $\{T_t\}$ *un semigrupo con generador* A*. para cada* $\lambda > 0$*,* $(A - \lambda I)$ *es un mapeo uno a uno de* $\mathbf{D_A}$ *sobre* $\mathbf{V}$*, y el mapeo inverso* $\mathbf{V}$ *sobre* $\mathbf{D_A}$ *es el operador resolvente* R_λ*.*

---

[1] Una referencia a esto, podemos verla en el apéndice C de [8], que en una manera más general habla de la integral de Bochner, también podemos revisar [20], o bien un tratamiento extensivo del tema puede encontrarse en [13].

Prueba. *Aplicando el operador A a $R_\lambda y$*

$$T_h R_\lambda y = T_h \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t y dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_{t+h} y dt$$

$$= e^{-\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda u} T_t y du = e^{-\lambda h} R_\lambda y - e^{-\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda u} T_u y du$$

lo que nos da

$$\frac{T_h - I}{h} R_\lambda y = \frac{e^{\lambda h} - I}{h} R_\lambda y - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{\lambda u} T_u y du$$

haciendo que $h \to 0^+$ vemos que el límite existe y por lo tanto $\in \mathbf{D_A}$ y

$$A(R_\lambda y) = \lambda R_\lambda y - y$$

Es decir $x = R_\lambda y$ es solución de la ecuación

$$\lambda x - Ax = y \quad \textit{para todo } y \in \mathbf{V}$$

Así que $(\lambda I - A)$ aplica el rango de R_λ sobre $\mathbf{V}$. Para completar la prueba, falta ver que $x - Ax = y$ tiene solución única x para cada $\lambda > 0$, $y \in \mathbf{V}$, para ello supongamos x_1 y x_2 en el dominio de A son ambas soluciones de $\lambda x - Ax = y$, entonces $z = x_1 - x_2 \in \mathbf{D_A}$ y satisface $\lambda z = Az$ y

$$\frac{d}{dt}(T_t z) = T_t(Az) = A(T_t z)$$

así que

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} T_t z) = -\lambda e^{-\lambda t} T_t z + e^{-\lambda t} T_t(Az) = e^{-\lambda t}(-\lambda T_t z + T_t(Az))$$

$$= e^{-\lambda t}(-T_t \lambda z + T_t(Az)) = e^{-\lambda t}(-T_t(Az) + T_t(Az)) = 0$$

entonces $e^{-\lambda t} T_t z$ es constante para $t > 0$, y ya que la norma tiende a 0 cuando $t \to 0$

$$0 = \lim_{t \to 0^+} e^{-\lambda t}(-T_t z) = z$$

Tenemos entonces que $x_1 = x_2$ lo que prueba la unicidad, además de que $(\lambda I - A)$ es uno a uno en $\mathbf{D_A}$ y como sabemos que $Ran(R_\lambda) \subset \mathbf{D_A}$ y $(\lambda I - A)$ aplica el rango de A sobre $\mathbf{V}$, concluimos que el rango de A es igual a $\mathbf{D_A}$.

Corolario. 3.1.6. *Para todo $x \in \mathbf{V}$ se tiene*

$$x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda x$$

y se sigue que $\mathbf{D_A}$ es denso en $\mathbf{V}$.

Prueba. *La densidad de $\mathbf{D_A}$ se sigue del corolario del Teorema 3.1.5, ya que todo vector en el rango de R_λ pertenece a $\mathbf{D_A}$. Ahora obsérvese que*

$$\begin{aligned} ||x - \lambda R_\lambda x|| &= ||x - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x dt|| \\ &= || \int_0^\infty e^{-u}(x - T_{\frac{u}{\lambda}} x) du|| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-u} ||(x - T_{\frac{u}{\lambda}} x)|| du \end{aligned}$$

para cada $u \geq 0$, $||x - T_{\frac{u}{\lambda}} x|| \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$ y el integrando esta acotado por $2e^{-u}||x||$. De aquí y por el teorema de convergencia dominada $||x - \lambda R_\lambda x|| \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.

El siguiente teorema es de importancia central en el estudio de los semigrupos a través de su generador, pues nos dice de la unicidad del semigrupo dado un generador A.

Teorema. 3.1.7. *Si dos semigrupos $\{T_t\}$ y $\{T_t^*\}$ tienen el mismo operador A con dominio $\mathbf{D_A}$ como su generador, entonces $\{T_t\}$ y $\{T_t^*\}$ son el mismo semigrupo. Es decir: $T_t = T_t^*$ para toda $t \geq 0$.*

Para la demostración, necesitamos primeramente el siguiente resultado

Lema. 3.1.8. *Sea $u : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{V}$ continua y acotada, tal que*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t) dt = 0 \qquad \text{para todo } \lambda > 0$$

Entonces $u(t) = 0$ para toda $t \geq 0$.

Prueba. *Sea* $\mathbf{V}^*$ *el espacio conjugado de* $\mathbf{V}$*. Si* $x^* \in \mathbf{V}^*$ *entonces* $x^*(u(t))$ *es una función real continua y acotada, mas aun*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} x^*(u(t))dt = x^*(\int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t)dt) = 0 \qquad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Entonces $x^*(u(t)) = 0$ *para toda* t *dada la unicidad de la transformada de Laplace de funciones reales*[2]*. Ya que esto es cierto para todo* $x^* \in \mathbf{V}^*$ *tenemos que* $u(t) = 0$ *para cada* $t \geq 0$

Prueba. *Por el Teorema 3.1.5. sabemos que* $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ *para todo semigrupo, así que si* $\{T_t\}$ *y* $\{T_t^*\}$ *tienen el mismo generador, también tienen el mismo resolvente. Entonces para cada* $x \in \mathbf{V}$ *y todo* $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t x - T_t^* x)dt = R_\lambda x - R_\lambda^* x = 0$$

y por el lema anterior concluimos que $T_t x - T_t^* x = 0$ *para toda* t*. Así, el generador determina unívocamente al semigrupo.*

Teorema. 3.1.9. *Sea* $\{T_t\}$ *un semigrupo con generador* A*, para* $x \in \mathbf{D_A}$ *la función* $u(x) = T_t x$ *es la única solución de la ecuación diferencial*

$$\frac{du}{dt} = Au$$

sujeto a las condiciones

1. $u(t)$ *es continuamente diferenciable para* $t > 0$
2. $||u(t)|| \leq Ce^{mt}$ *para algún* $C, m < \infty$
3. $u(t) \to x$ *cuando* $t \to 0^+$

[2]Una prueba de ello la podemos encontrar en [27].

Prueba. *Sabiendo ya que $u(x) = T_t x$ es solución y que cumple con las condiciones antes señaladas, falta entonces la unicidad. Supóngase que u_1 y u_2 son ambas soluciones y que satisfacen las condiciones antes señaladas, hagamos $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$, entonces v es una solución que satisface las dos primeras condiciones y tiende a 0 cuando $t \to 0^+$. Hagamos $w(t) = e^{-\lambda t} v(t)$, tomando $\lambda > \max\{m_1, m_2\}$ y ya que $v(t)$ satisface $\frac{du}{dt} = A(u)$ tenemos entonces que*

$$\frac{d}{dt} w(t) = \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} v(t))$$
$$= -\lambda w(t) - e^{-\lambda t} A v(t) = -R_\lambda^{-1}$$

es decir

$$w(t) = -R_\lambda^{-1} \frac{dw(t)}{dt}$$

integrando de 0 a s ambos lados de la igualdad

$$\int_0^s w(t)dt = \int_0^s -R_\lambda^{-1} \frac{dw(t)}{dt} dt$$
$$= -R_\lambda \int_0^s -R_\lambda^{-1} \frac{dw(t)}{dt} dt = -R_\lambda w(s)$$

ya que R_λ conmuta con la integración y $w(0) = 0$. Pero cuando $s \to \infty$ el lado izquierdo tiende a la transformada de Laplace de v, mientras que el lado derecho tiende a 0 dada la suposición de la segunda condición y la elección de λ, así la transformada de Laplace de $v(t)$ se va a cero para cada $\lambda > 0$ y por el Lema 3.1.8. $v(t) = 0$, con lo que queda mostrada la unicidad.

Corolario. 3.1.10. *Si el generador A de $\{T_t\}$ es acotado, entonces*

$$T_t = e^{tA}$$

Prueba. *Hemos visto que si A es acotado entonces $u(t)$ satisface $\frac{du}{dt} = A(u)$ además de las condiciones 1 y 3 del Teorema 3.1.9. El hecho de que la serie exponencial converge también, muestra que*

$$||e^{tA} x|| \leq e^{(t||A||)} ||x||$$

así que la condición 2 se cumple también, por lo que $e^{tA}x = T_t x$ *para cada* $x \in \mathbf{D_A}$ *o en este caso para todo* $x \in \mathbf{V}$.

Hasta aquí hemos revisado algunas de las propiedades básicas de los semigrupos, la relación que guardan los semigrupos el generador y el resolvente y también hemos visto que el generador determina unívocamente al semigrupo. Por otra parte tenemos la pregunta siguiente ¿Cuando un operador A es el generador de algún semigrupo y que condiciones debe de cumplir para serlo? Esta pregunta tiene respuesta en el siguiente teorema debido a Hille-Yosida y que es uno de los mas importantes en la teoría básica de semigrupos.

Teorema. 3.1.11. Hille-Yosida. *Sea* A *un operador lineal con valores en* $\mathbf{V}$ *y dominio* $\mathbf{D_A}$. *A fin de que* A *sea el generador de un semigrupo de contracciones a un parámetro en* $\mathbf{V}$, *es necesario y suficiente que* A *satisfaga las siguientes condiciones*

1. $\mathbf{D_A}$ *es denso en* $\mathbf{V}$
2. *para cada* $\lambda > 0$, $y \in \mathbf{V}$ *la ecuación*

   $$\lambda x - Ax = y$$

   tiene solución única para cada $x \in \mathbf{D_A}$
3. *la solución en el inciso anterior cumple con*

   $$||x|| \leq \frac{||y||}{\lambda}$$

Prueba. *Véase el apéndice.*

3.2 Definiciones Básicas

Definición. 3.2.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad. Sea* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *una filtración. Sea* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio medible.* $\{X\}_{t\geq 0}$ *es un Proceso de Markov con distribución inicial* μ *y función de transición estacionaria* p *si:*

1. $\{X\}_{t\geq 0}$ *esta adaptado a* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

2. $\mu : \mathcal{E} \to [0,1]$ *es medida de probabilidad.*

3. $P(X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_t^X) = p_s(X_t, A)$

Observación: P_μ =*Distribución del proceso cuando la condición inicial tiene distribución* μ, *para toda* $x \in E, P_x = P_{\delta_x}$, *donde*

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Además, denotaremos a la filtración natural con $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$.

Sea p_t *una función de transición estacionaria en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$. *Para* $f \in C(E)$ *se define*

$$(T_t f)(x) = \int_E p_t(x, dy) f(y) \tag{3.1}$$

Por otra parte, sea $M(E)$ *el espacio de medidas finitas signadas en* $(E, \mathcal{E})$ *con la norma de la variación total, para* $\mu \in M(E)$, *de define*

$$(U_t \mu)(A) = \int_E \mu(dx) p_t(x, A) \tag{3.2}$$

Las anteriores ecuaciones son la manera en que la función de transición induce a dos semigrupos, uno que actúa sobre las funciones y otro sobre las medidas, los que más tarde conoceremos como evolución hacia adelante -medidas- y hacia atrás -funciones-.

Definición. 3.2.2. *Un proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados* E, *se dice que es gobernado por la función de transición* p, *si para alguna medida* $\mu : E \to [0,1]$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ *y* $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(E)$ *se tiene*

$$P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n)$$
$$= \int_{y_n \in B_n} \cdots \int_{y_1 \in B_1} \int_{x \in E} \mu(dx) p_{t_1}(x, dy_1) \cdots p_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n)$$

Teorema. 3.2.3. *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso estocástico con espacio de estados* E*, el cual es gobernado por una función de transición Markoviana, entonces* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es un* Proceso Markoviano.

Para una prueba, vease[18].

Definición. 3.2.4. *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso Markoviano de salto con espacio de estados* E*. Suponga que el proceso empieza en un estado* x*, el* tiempo de estancia *en el estado* x*, denotado por* τ_x*, es una v.a definida por*

$$\tau_x = inf\{t \geq 0 : X_t \neq x\}$$

Definición. 3.2.5. *Definamos* $T_0 = 0$ *y* T_n*= tiempo de estancia en el n-ésimo estado visitado, para* $n \in \mathbb{N}$*. Sea* $S_n = T_0 + T_1 + \ldots + T_n$ *para* $n \in \mathbb{N}_0$*; de donde se tiene que* $S_{n+1} - S_n = S_n + T_{n+1} - S_n = T_{n+1}$*.*

Sea $S_\infty := \lim_{n\to\infty} S_n$*. Si* $S_\infty < \infty$*, decimos entonces que el proceso explota, es decir, ocurre una infinidad de transiciones en un tiempo finito, y si*

$$P_i(S_\infty = \infty) = 1 \qquad \textit{para toda } i \in E$$

decimos entonces, que el proceso es regular.

Definición. 3.2.6. *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso de Markov. El tiempo* ζ*, en el cual el proceso explota esta dado por*

$$\zeta = \sup_n S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

3.3 Construcción del Proceso Markoviano de Salto

Teorema. 3.3.1. *Sea* $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una Cadena de Markov con espacio de estados numerable* E*, distribución inicial* μ *y función de transición* q*, esto es*

$$P(Y_0 \in A) = \mu(A)$$

y

$$P(Y_{k+1} \in A \mid Y_1, \dots, Y_k) = q(Y_k, A)$$

Sean $\Delta_1, \Delta_2 \dots$ *v.a.i.i.d* $\sim$ *exponenciales con parámetro* 1*, e independientes de* $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Sea* $\lambda \in C(E)$ *positiva. Para toda* $A \in \mathcal{B}(E)$ *y* $k = 0, 1 \dots$

$$X_t = \begin{cases} Y_0 & si \quad 0 \le t < \frac{\Delta_0}{\lambda(Y_0)} \\ Y_k & si \quad \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Delta_j}{\lambda(Y_j)} \le t < \sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta_j}{\lambda(Y_j)} \end{cases} \tag{3.3}$$

Denotemos $T_n = \frac{\Delta_{n-1}}{\lambda(Y_{n-1})}$ *y* $S_n = \sum_{j=1}^{n-1} T_j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_j}{\lambda(Y_j)}$

Si $P(S_n \to \infty) = 1$*, entonces el proceso definido en (3.3) tiene la propiedad de Markov respecto a la filtración* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{F}_t^X = \sigma(\mathcal{F}_t^N \cup \mathcal{F}_t^X)$*, donde* $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_\tau : \tau \in [0,t])$*,* $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_\tau : \tau \in [0,t])$ *y* $N_t = \sup\{n \ge 0; S_n \le t\}$*; y su generador infinitesimal esta dado por*

$$Af(x) = \lambda(x) \int_E q(x, dz)(f(z) - f(x))$$

Prueba. *Claramente el proceso así construido es continuo por la derecha y constante a pedazos; la existencia de la Cadena de Markov se ha ya discutido en el capítulo anterior, por lo que falta entonces probar que el proceso es en efecto, de Markov y que tiene tal generado infinitesimal.*

Para probar que (3.3) posee la propiedad de Markov basta con demostrar que para toda $A \in \mathcal{F}_s$ *con* $A \subset (X_s = x)$*, se cumple*

$$P((X_{s+t} = y) \cap A) = p_t(x, y) P(A) \tag{3.4}$$

ya que para un $B \in \mathcal{F}_s$*, la igualdad*

$$P((X_{s+t} = y) \cap B) = \int_B P(X_{s+t} = y \mid \mathcal{F}_s) dP$$

$$= E(P((X_{s+t} = y) \cap B \mid \mathcal{F}_s)) = \int_B p_t(X_s, y) dP \tag{3.5}$$

nos dice que $p_t(X_s, y)$ *es una versión de la esperanza condicional de* $P(X_{s+t} = y \mid \mathcal{F}_s)$*.*

Admitamos momentáneamente (3.4) y probemos (3.5)

$$P((X_{s+t} = y) \cap B) = \sum_{x \in E} P((X_{s+t} = y) \cap B \cap (X_s = x))$$

con el uso de (3.4) y $A = B \cap (X_s = x)$*, lo anterior es iguala a*

$$\sum_{x \in E} p_t(x, y) P((X_s = x) \cap B)$$

por otra parte

$$\int_B p_t(X_s, y) dP = \int_\Omega \chi_B p_t(X_s, y) dP$$

$$= \sum_{x \in E} \int_{(X_s = x)} \chi_B p_t(X_s, y) dP = \sum_{x \in E} \int_{(X_s = x)} \chi_B p_t(x, y) dP$$

$$= \sum_{x \in E} p_t(x, y) \int_{(X_s = x)} \chi_B dP = \sum_{x \in E} p_t(x, y) P((X_s = x) \cap B)$$

lo cual prueba la igualdad.
Para probar (3.4), procedamos por etapas

Etapa 1.

Proposición. 3.3.2. *1.* $\{A \cap B \cap (N_t = l) : A \in \mathcal{F}_t^N, B \in \mathcal{F}_l^Y, l = 0, 1 \ldots\}$*, donde* $\mathcal{F}_l^Y = \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_l)$*, es un* π*-sistema que genera a* $\mathcal{F}_t$

2. Cada S_n *es tiempo de paro respecto a* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$

3. $\mathcal{F}_{S_n^-} = \sigma(Y_0, S_1, \ldots, Y_{n-1}, S_n)$

4. $\sigma(Y_0, S_1, \ldots, Y_{n-1}, S_n) = \sigma(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1})$

Prueba.

1. *véase [9] p. 164.*

2. $\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\} \in \mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t$

3. *Procedamos por inducción. Si* $n = 1$, *entonces*

$$\mathcal{F}_{S_1^-} = \sigma(\mathcal{F}_0, D \cap (S_1 > t) : t \geq 0, D \in \mathcal{F}_t)$$

Observemos que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^N \vee \mathcal{F}_0^X = \{\emptyset, \Omega\} \vee \mathcal{F}_0^X = \mathcal{F}_0^X = \sigma(X_0) = \sigma(Y_0)$ *por lo que* Y_0 *es* $\mathcal{F}_{S_1^-}$*-medible, y puesto que* S_n *es* $\mathcal{F}_{S_n^-}$*-medible ([3] Prop. 1.5 c), entonces* $\sigma(Y_0, S_1) \subset \mathcal{F}_{S_1^-}$*-medible; para probar la otra contención, sea* $t \geq 0$ *y* $A \in \mathcal{F}_t$. *Supongamos que* D *tiene la forma* $D = A \cap B \cap (N_t = l)$ *con* $A \in \mathcal{F}_t^N$, $B \in \mathcal{F}_l^Y$. *entonces si* $l \neq 0$

$$D \cap (S_1 > t) = A \cap B \cap (N_t = l) \cap (S_1 > 0) = \emptyset$$

y si $l = 0$, *entonces* $D \cap (S_1 > t) = A \cap B \cap (N_t = l) \cap (S_1 > 0) \in \sigma(Y_0, S_1)$ *ya que* $B \in \mathcal{F}_0^Y = \sigma(Y_0) = \sigma(X_0)$ *y sin perdida de generalidad podemos suponer que* $A = \cap_{i=1}^n (N_{t_i} = l_i)$ *con* $t_i < t$, *así que* $A \cap (S_1 > t) = \emptyset$ *en caso de que algún* $l_i \neq 0$ *y* $A \cap (S_1 > t) = (S_1 > t) \in \sigma(S_1)$ *si* $l_i = 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$. *Aquí hemos usado que el evento* $(S_1 > t)$ *significa que al tiempo* t *no ha habido saltos, por lo que* $N_\mu = 0$ *para todo* $\mu \leq t$. *Esto prueba que* $\sigma(X_0, S_1) = \mathcal{F}_{S_1^-}$. *Supongamos que para algún* $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(\mathcal{F}_{S_n^-}) = \sigma(Y_0, S_1, \ldots, Y_{n-1}, S_n)$. *Como* $Y_{n+1} = X_{S_{n+1}}$, *entonces* Y_{n+1} *es* $\mathcal{F}_{S_{n+1}^-}$*-medible ([3] Prop. 3.17 y Prop. 2.7) y puesto que* S_{n+1} *es* $\mathcal{F}_{S_{n+1}^-}$*-medible, entonces*

$$\sigma(Y_0, S_1, \ldots, Y_{n-1}, S_n, Y_n, S_{n+1}) = \sigma(\mathcal{F}_{S_n^-}, Y_n, S_{n+1})$$

$$\subset \sigma(\mathcal{F}_{S_n}, Y_n, S_{n+1}) \subset \mathcal{F}_{S_n^-}$$

Aquí hemos usado que $\mathcal{F}_{S_n^-} \subset \mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}_{S_{n+1}^-}$ *([3] Prop. 1.7) y la hipótesis de inducción.*

Para verificar la contención opuesta, es claro que como en la base de la inducción, $\mathcal{F}_0 = \sigma(X_0) = \sigma(Y_0) \subset \sigma(Y_0, S_1, \ldots, Y_n, S_{n+1})$. Sea $t \geq 0$ y $D = A \cap B \cap (N_t = l)$ con $A \in \mathcal{F}_t^N$, $B \in \mathcal{F}_l^Y$ con $l = 0, 1 \ldots$ Para simplificar supongamos además que $A = (N_s = j)$ con $j \in \mathbb{N}_0$ y $s \leq t$, $B = (Y_k \in C)$, con $C \in E$, $k \leq l$, entonces

$$A \cap B \cap (N_t = l) \cap (S_{n+1} > t) = (N_s = j) \cap (Y_k \in C) \cap (N_t = l) \cap (S_{n+1} > t)$$

$$= (S_j \leq s < S_{j+1}) \cap (Y_k \in C) \cap (S_l \leq t < S_{l+1}) \cap (S_{n+1} > t)$$
$$= \begin{cases} \emptyset & si\ l \geq n+1\ o\ j \geq n+1 \\ (S_j \leq s < S_{j+1}) \cap (Y_k \in C) \cap & si\ l < n+1\ y\ j < n+1 \\ (S_l \leq t < S_{l+1}) \cap (S_{n+1} > t) & \end{cases}$$

que en cualquier caso, es un elemento de $\sigma(\mathcal{F}_{S_n^-}, Y_n, S_{n+1})$ pues $k \leq l < n+1$ y $j < n+1$. Esto prueba que

$$\mathcal{F}_{S_{n+1}^-} \subset \sigma(\mathcal{F}_{S_n^-}, Y_n, S_{n+1}) = \sigma(Y_0, S_1 \ldots, Y_n, S_{n+1}) \subset \mathcal{F}_{S_{n+1}^-}$$

4. *Evidente de la relación $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_j}{\lambda(Y_j)}$*

Etapa 2. *Consideremos*

$$\varphi(t, e_0, \ldots, e_n \ldots, y_0, \ldots, y_n \ldots) = y \quad para\ \mathfrak{S}_n \leq t < \mathfrak{S}_{n+1} \tag{3.6}$$

donde e_i es el valor que toma la v.a. Δ_i, para $i = 0, 1, \ldots$ y
$\mathfrak{S}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e_j}{\lambda(y_j)}$.
El proceso construido es función de los tiempos de salto y de la cadena, esto es

$$X_t = \varphi(t, \Delta_0, \ldots, \Delta_n \ldots, Y_0, \ldots, Y_n \ldots) \quad para\ 0 \leq t < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n}{\lambda(Y_n)}$$

Obsérvese que para $\mathfrak{S}_n \leq s < \mathfrak{S}_{n+1}$, (3.6) en $s+t$ es iguala a

$$\varphi(s+t, e_0, \ldots, e_n \ldots, y_0, \ldots, y_n \ldots) = \varphi(t, e_n - \lambda(y_{n-1})(s - \mathfrak{S}_n), e_{n+1}, \ldots, y_{n-1} \ldots) \tag{3.7}$$

Hagamos

$$A_n = A \cap (S_n \leq s < S_{n+1}) = A \cap (S_n \leq s) \cap (s - S_n < \frac{\Delta_n}{\lambda(x)})$$

$$= A \cap (S_n \leq s) \cap (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n))$$

Afirmamos que existe un B_n *medible respecto a* $\sigma(\Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_n) = \mathcal{F}_{S_n^-} \vee \sigma(Y_n)$ *tal que*

$$A_n = (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n)) \cap B_n \tag{3.8}$$

Etapa 3. *Queremos probar que* B_n *definido en la anterior etapa, es medible respecto a* $\mathcal{F}_{S_n^-} \vee \sigma(Y_n)$. *Definamos para ello*

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F}_s : A \subset (X_s = x),\ \textit{existe}\ \ B_n \subset (S_n \leq s),$$

$$B_n \in \mathcal{F}_{S_n^-} \vee \sigma(Y_n),\ A_n = (s < S_{n+1}) \cap B_n\}$$

y probemos que $\mathcal{G}$ *es una* σ*-álgebra en* $(X_s = x)$

1. $(X_s = x) \in \mathcal{G}$

$$(X_s = x) \in \mathcal{F}_s, \quad A_n = (X_s = x) \cap (S_n \leq s < S_{n+1})$$

$$= (Y_n = x) \cap (S_n \leq s < S_{n+1}) = (s < S_{n+1}) \cap ((Y_n = x) \cap (S_n \leq s))$$

donde $(Y_n = x) \in \mathcal{F}_{S_n^-} \vee \sigma(Y_n)$ *y* $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_j}{\lambda(Y_j)} \in \mathcal{F}_{S_n^-} \vee \sigma(Y_n)$

2. *Si* $A \in \mathcal{G}$, *entones* $(X_s = x) \backslash A \in \mathcal{G}$

$$((X_s = x) \backslash A)_n = (X_s = x) \cap A^c \cap (S_n \leq s < S_{n+1})$$

$$= (Y_n = x, S_n \leq s < S_{n+1}) \backslash A_n$$

$$= (s < S_{n+1}) \cap (Y_n = x, S_n \leq s) \backslash ((s < S_{n+1}) \cap B_n)$$

$$= (s < S_{n+1}) \cap ((Y_n = x, S_n \leq s) \backslash B_n)$$

3. *Sean* $A^1, A^2, \ldots \in \mathcal{G}$ *y sean* $B_n \in \mathcal{F}_{S_n^-} \vee \sigma(Y_n)$ *con* $B_n \subset (S_n \leq s)$ *y* $(A^j)_n = (s < S_{n+1}) \cap B_n^j$. *Mostremos que,* $A = \cup_{j=1}^{\infty} A^j \in \mathcal{G}$

$$A_n = A \cap (S_n \leq s < S_{n+1}) = (\cup_{j=1}^{\infty} A^j) \cap (S_n \leq s < S_{n+1})$$

$$= \cup_{j=1}^{\infty} (A^j)_n = \cup_{j=1}^{\infty} ((s < S_{n+1}) \cap B_n^j) = (s < S_{n+1}) \cap (\cup_{j=1}^{\infty} B_n^j)$$

donde $(\cup_{j=1}^{\infty} B_n^j) \in \mathcal{F}_{S_n^-} \vee \sigma(Y_n)$ *y* $(\cup_{j=1}^{\infty} B_n^j) \subset (S_n \leq s)$

Etapa 4. *Comencemos con la prueba de (3.4); de (3.8)*

$$P((X_{s+t} = y) \cap A) = \sum_{n=0}^{\infty} P((X_{s+t} = y) \cap A_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P((X_{s+t} = y) \cap (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n)) \cap B_n) \tag{3.9}$$

sumando a sumando

$$P((X_{s+t} = y) \cap (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n)) \cap B_n) =$$

$$P(\varphi(t, \Delta_{n+1} - \lambda(Y_n)(s - S_n), \Delta_{n+2}, \ldots, Y_n \ldots) = y \cap (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n)) \cap B_n)$$

Consideremos a la medida de probabilidad $Q_x(A) = P(A \mid Y_n = x)$, *entonces,* $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n, \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *son* Q_x *independientes de* $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2}, \ldots$, *luego y por la Proposición 1.2.3*

$$Q_x(\varphi(t, \Delta_{n+1} - \lambda(Y_n)(s - S_n), \Delta_{n+2}, \ldots, Y_n \ldots) = y$$

$$\cap (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n)) \mid \mathcal{F}_{S_n^-} \vee \sigma(Y_n)) \tag{3.10}$$

$$= g_{xy}^{st}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n, \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$$

donde

$$g_{xy}^{st}(y_0, y_1, \ldots, y_n, e_0, e_1, \ldots, e_n) = Q_x(\varphi(t, \Delta_{n+1} - \lambda(x)(s - \mathfrak{S}_n),$$

$$\Delta_{n+2}, \ldots, x, Y_{n+1} \ldots) = y \cap (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - \mathfrak{S}_n))) \tag{3.11}$$

y por 5.7

$$= e^{-\lambda(x)(s-\mathfrak{S}_n)} Q_x(\varphi(t, \Delta_{n+1}, \ldots, x, Y_{n+1}, \ldots) = y)$$

por lo tanto

$$P(\varphi(t, \Delta_{n+1} - \lambda(Y_n)(s - S_n), \Delta_{n+2}, \ldots, Y_n \ldots) = y \cap (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n))$$

$$\cap B_n \mid Y_n = x) = \int_{B_n} g_{xy}^{st}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n, \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n) dQ_x$$

por lo tanto

$$P(\varphi(t, \Delta_{n+1} - \lambda(Y_n)(s - S_n), \Delta_{n+2}, \ldots, Y_n \ldots) = y \cap (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n)) \cap B_n)$$

$$= \int_{B_n} g_{xy}^{st}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n, \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n) dQ_x P(Y_n = x)$$

$$= \int_{B_n} e^{-\lambda(x)(s-S_n)} dQ_x[Q_x((t, \Delta_{n+1}, \ldots, x, Y_{n+1}, \ldots) = y)]$$

$$= \int_{B_n} e^{-\lambda(x)(s-S_n)} dQ_x P((t, \Delta_{n+1}, \ldots, x, Y_{n+1}, \ldots) = y)$$

$$= P(X_t = y \mid X_0 = x) E(e^{-\lambda(x)(s-S_n)}, B_n) \tag{3.12}$$

pero, ya que $A_n = (\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n) \cap B_n)$, *entonces*

$$P(A_n) = E(\chi_{\{\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s-S_n)\}}, \chi_{B_n})$$

$$= E(E(\chi_{\{\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s-S_n)\}}, \chi_{B_n}) \mid \Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_n)$$

$$= E(\chi_{B_n} E(\chi_{\{\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s-S_n)\}}) \mid \Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_n)$$

$$= \int_{B_n} P(\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n) \mid \Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_n) dP$$

en la tercera igualdad hemos usado el inciso 10 *de (1.2.2), dado que* B_n *es medible respecto a* $\sigma(\Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_n)$; *y por la Proposición (1.2.3)*

$$\int_{B_n} P(\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s - S_n) \mid \Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_n) dP = \int_{B_n} g(S_n) dP$$

donde $g(a) = E(\chi_{\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s-a)}) = e^{-\lambda(x)(s-a)}$*, y*
$g(S_n) = E(\chi_{\Delta_{n+1} > \lambda(x)(s-S_n)}) = e^{-\lambda(x)(s-S_n)}$*. Entonces*

$$P(A_n) = \int_{B_n} e^{-\lambda(x)(s-S_n)} dP = E(e^{-\lambda(x)(s-S_n)}, B_n)$$

y se sigue que (3.12) es igual a

$$P(X_t = y \mid X_0 = x) P(A_n) = p_t(x,y) P(A_n)$$

sumando en n*, obtenemos finalmente (3.4).*

Calculemos al generado infinitesimal por medio de la Solución Minimal*, definamos*

$$p_t^n(x,A) = P_x(X_t \in A, N_t \leq n)$$

donde

$$N_t = \max\{n : \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_j}{\lambda(X_j)} \leq t\}$$

entonces

$$p_t^{n+1}(x,A) = P_x(X_t \in A, N_t \leq n) = e^{-\lambda(x)t}\delta_x(A) + \sum_{k=1}^{n+1} P_x(X_t \in A, N_t = k)$$

$$= e^{-\lambda(x)t}\delta_x(A) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{z \in E} P_x(X_t \in A, N_t = k, Y_1 = z)$$

$$= e^{-\lambda(x)t}\delta_x(A) + \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z \in E} q(x,z) P_z(X_{t-s} \in A, N_{t-s} \leq n) ds$$

$$= e^{-\lambda(x)t}\delta_x(A) + \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z \in E} q(x,z) p_{t-s}^n(z,A) ds$$

Lo que establece una relación de recurrencia. Ahora para $f \in C(E)$*, con* $f \geq 0$*, definamos*

$$(T_t^n f)(x) = \int_E p_t^n(x,dy) f(y)$$

En particular para $n = 0$

$$(T_t^0 f)(x) = \int_E p_t^0(x,dy) f(y)$$

como $p_t^0(x,A) = P_x(X_t \in A, N_t = 0) = P_x(X_t \in A \mid N_t = 0)P_x(N_t = 0) = e^{-\lambda(x)t}\delta_x(A)$, *entonces*

$$(T_t^0 f)(x) = \int_E e^{-\lambda(x)t}\delta_x(dy)f(y) = e^{-\lambda(x)t}f(x)$$

Al igual que con la medida, también hay una relación de recurrencia con los operadores

$$(T_t^{n+1} f)(x) = \int_E p_t^{n+1}(x,dy)f(y)$$

$$= \int_E [e^{-\lambda(x)t}\delta_x(dy) + \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)s}\sum_{z\in E} q(x,z)p_{t-s}^n(z,dy)ds]f(y) \quad (3.13)$$

Supongamos que

$$\int_E \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)s}\sum_{z\in E} q(x,z)p_{t-s}^n(z,dy)ds f(y)$$

$$= \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)s}\sum_{z\in E} q(x,z)\int_E p_{t-s}^n(z,dy)f(y)ds \quad (3.14)$$

entonces

$$(3.13) = e^{-\lambda(x)t}f(x) + \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)s}\sum_{z\in E} q(x,z)\int_E p_{t-s}^n(z,dy)f(y)ds$$

$$= (T_t^0 f)(x) + \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)s}\sum_{z\in E} q(x,z)(T_{t-s}^n f)(z)ds$$

Para probar que la ecuación (3.14) se vale, precedamos de la manera usual, para f *igual a la indicadora de un conjunto, después para simples, para positivas y por ultimo tomando la parte positiva y negativa de la función* $f = f^+ - f^-$, *hagamos el primer caso, supongamos* $f = \chi_A$, *entonces*

$$\int_E \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)s}\sum_{z\in E} q(x,z)p_{t-s}^n(z,dy)ds f(y)$$

$$= \int_E \int_0^t \lambda(x)e^{-\lambda(x)s}\sum_{z\in E} q(x,z)p_{t-s}^n(z,dy)ds \chi_A(y)$$

$$= \int_A \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z) p_{t-s}^n(z,dy)ds$$

y por Convergencia Monótona

$$= \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z) \int_A p_{t-s}^n(z,dy)ds$$

$$= \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z) \int_E p_{t-s}^n(z,dy)\chi_A(y)ds$$

$$= \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z) \int_E p_{t-s}^n(z,dy)f(y)ds$$

Además, $(T_t^{n+1}f)(x)$ *esta acotado por* $||f||_\infty$*. Procedamos por inducción, para* $n = 0$

$$(T_t^0 f)(x) = e^{-\lambda(x)t} f(x) \leq ||f||_\infty$$

ya que $\lambda(x) > 0$ *para toda* $x \in E$*, supongamos la desigualdad se vale para* n*, entonces*

$$(T_t^{n+1}f)(x) = (T_t^0 f)(x) + \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z)(T_{t-s}^n f)(z)ds$$

$$\leq ||f||_\infty e^{-\lambda(x)t} + \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z)||f||_\infty ds$$

$$= ||f||_\infty e^{-\lambda(x)t} + ||f||_\infty \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} ds$$

$$= ||f||_\infty \big(e^{-\lambda(x)t} + \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} ds\big) = ||f||_\infty$$

como se vale para toda n*, también se vale en el infinito y podemos definir*

$$(T_t f)(x) = \lim_{n\to\infty} (T_t^{n+1} f)(x) \tag{3.15}$$

De la definición y (3.15), se tiene

$$Af(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[T_t f(x) - f(x)] = \frac{d}{dt}(T_t f)(x) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} (T_t^{n+1} f)(x) \mid_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda(x)t} f(x) + \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z)(T^n_{t-s} f)(z) ds \mid_{t=0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} e^{-\lambda(x)t} f(x) + \int_0^t \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z)(T^n_{t-s} f)(z) ds \mid_{t=0}$$

con la regla de Leibniz

$$= \lim_{n\to\infty} [-\lambda(x) e^{-\lambda(x)t} f(x) + \lambda(x) e^{-\lambda(x)t} \sum_{z\in E} q(x,z)(T^n_{t-t} f)(z)$$

$$+ \int_0^t \frac{d}{dt} \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z)(T^n_{t-s} f)(z) ds] \mid_{t=0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} [-\lambda(x) e^{-\lambda(x)t} f(x) + \lambda(x) e^{-\lambda(x)t} \sum_{z\in E} q(x,z) f(z)$$

$$+ \int_0^t \frac{d}{dt} \lambda(x) e^{-\lambda(x)s} \sum_{z\in E} q(x,z)(T^n_{t-s} f)(z) ds] \mid_{t=0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} [-\lambda(x) f(x) + \lambda(x) \sum_{z\in E} q(x,z) f(z)] = -\lambda(x) f(x) + \lambda(x) \sum_{z\in E} q(x,z) f(z)$$

$$= \lambda(x) [\sum_{z\in E} q(x,z) f(z) - f(x)] = \lambda(x) [\int_{z\in E} q(x,dz) f(z) - \int_{z\in E} q(x,dz) f(x)]$$

$$= \lambda(x) \int_{z\in E} q(x,dz)(f(z) - f(x))$$

3.4 Ejemplos

Ejemplo. 3.4.1. *Una definición sencilla del Proceso de Poisson es como sigue:*

Proposición. 3.4.2. *Sean $T_1, T_2 \ldots$ v.a.i.i.d como exp(λ). Sea $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico cuyo valor al tiempo t es*

$$N_t = \max\{n \geq 0 : \sum_{j=0}^{n} T_j \leq t\} \tag{3.16}$$

entonces, $\{N_t\}_{t\geq 0}$ esta gobernado por la función de transición

$$p_t(x, \{x+n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Ahora, el Proceso de Poisson Compuesto, esta definido como un proceso con función de transición $p(x, A)$ pero cuyos tiempos de salto están gobernados por un Proceso de Poisson de tasa λ, esto es

$$X_t = \sum_{k=0}^{N_t} X_k$$

La función de transición del proceso es

$$p_t(x, A) = P_x(X_t \in A) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_{N_t} \in A, N_t = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n \in A \mid X_0 = x)P(N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} p^n(x, A) \qquad (3.17)$$

Ya que para el Proceso de Poisson Compuesto de tasa λ conocemos explícitamente a la función de transición, podemos obtener la forma del generador infinitesimal. Para $f \in C(E)$ de De la definición y de (3.1) se tiene

$$Af(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[\int_E p_t(x, dy)f(y) - f(x)] = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_E p_t(x, dy)(f(y) - f(x)) \qquad (3.18)$$

luego, de (3.17)

$$Af(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} p^n(x, dy)(f(y) - f(x))$$

$$= \int_E \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} p^n(x, dy)(f(y) - f(x))$$

$$= \int_E \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} [\delta_x(y)e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} p(x, dy) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{k} p^n(x, dy)](f(y) - f(x))$$

$$= \int_E \lambda\ p(x, dy)(f(y) - f(x)) = \lambda \int_E p(x, dy)(f(y) - f(x))$$

Proposición. 3.4.3. *El generador infinitesimal del Proceso de Nacimiento y Muerte con espacio de estados E esta dado por*

$$Af(x) = \lambda(x) \int_E (f(y) - f(x))p(x, dy)$$

Ejemplo. 3.4.4. *Consideremos el proceso de Nacimiento y Muerte con $E = \{0, 1\}$, de la proposición anterior*

$$Af(x) = \lambda(x) \int_E (f(y) - f(x))p(x, dy)$$

$$= \lambda(x)(f(0) - f(x))p(x, 0) + \lambda(x)(f(1) - f(x))p(x, 1)$$

si $x = 0$

$$Af(0) = \lambda(0)(f(1) - f(0))$$

y si $x = 1$

$$Af(1) = \lambda(1)(f(0) - f(1))$$

matricialmente

$$Af(x) = \begin{pmatrix} -\lambda(0) & \lambda(0) \\ \lambda(1) & -\lambda(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$$

por lo que el generador infinitesimal tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda(0) & \lambda(0) \\ \lambda(1) & -\lambda(1) \end{pmatrix}$$

En este caso elemental, podemos calcular el semigrupo resolviendo la ecuación hacia atrás $T_t' = AT_t$; la solución es de la forma

$$T_t = e^{A(t)}$$

Diagonalizando al generador, vemos que los valores propios son 0 *y* $-(\lambda_0 + \lambda_1)$, *con vectores propios* $(1, 1)$ *y* $(\lambda_0, -\lambda_1)$. *Finalmente*

$$T_t = \begin{pmatrix} 1 & \lambda(0) \\ 1 & -\lambda(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\lambda(0)+\lambda(1))t} \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda(0) + \lambda(1)} \begin{pmatrix} \lambda(1) & \lambda(0) \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda(0) + \lambda(1)} \begin{pmatrix} \lambda(1) + \lambda(0)e^{-(\lambda(0)+\lambda(1))t} & \lambda(0) - \lambda(0)e^{-(\lambda(0)+\lambda(1))t} \\ \lambda(1) - \lambda(1)e^{-(\lambda(0)+\lambda(1))t} & \lambda(0) + \lambda(1)e^{-(\lambda(0)+\lambda(1))t} \end{pmatrix}$$

Capítulo 4

Comentarios Finales

Como ya lo hemos señalado, el principal aporte de este trabajo es el detallar la construcción de los Proceso Markovianos de Salto que da Ethier-Kurtz, Gikhman, Stoock y otros, desde la construcción de la Cadena de Markov, hasta el calculo del generado infinitesimal, pasando por un prueba rigurosa y completa de la propiedad de Markov. Como se ha visto, el estudio de la medibilidad es un asunto delicado que por si mismo da para mucho material; sin embargo, lo que usualmente se estudia en la teoría de los Procesos Markovianos de Salto, son temas como: condiciones para la no explosión, recurrencia y transitoriedad, existencia y calculo de medidas invariantes, rapidez de convergencia a la medida invariante...

En general, lo que usualmente se tiene es al generador infinitesimal y se procede a calcular al semigrupo, cosa que casi nunca se puede, por lo que el estudio de la recurrencia, condiciones de no explosión, medida invariante y esas cosas, se hace a través del generador infinitesimal, ya que contiene gran parte de la información relevante de proceso, como lo muestra la relación

$$A_{xy} = \begin{cases} -\lambda(x) & si \quad x = y \\ \lambda(x)q(x,y) & si \quad x \neq y \end{cases}$$

Obsérvese que la función $\lambda(x)$, $x \in E$ *y* q *determinan al generador* A *y este,* *a su vez, determina a* $\lambda(x)$ *y a* q*, ya que para* $x \neq y$

$$q(x,y) = -\frac{A_{xy}}{A_{xx}}$$

Las condiciones usuales para la no explosión, son

1. E *es finito*

2. *sup* $A_{ii} < \infty$

3. $X_0 = i$ *con* i *recurrente para la cadena encajada*

pero no son suficientes, existen otras condiciones sobre el generador infinitesimal para la no explosión y que es un tema amplio por si mismo.

La existencia de medidas invariantes puede abordarse en algunos casos, a través del estudio de las condiciones de balance detallado; lo cual representaría una extensión ala caso continuo de las técnicas estudiadas 2.10.

Como continuación de este trabajo podemos citar

1. *Estudio de las condiciones sobre el generador infinitesimal que garanticen la no explosión de proceso.*

2. *Existencia de medidas invariantes.*

3. *Calculo de medidas invariantes.*

4. *Rapidez de convergencia al equilibrio.*

Capítulo 5

Apéndice

Teorema de Hille-Yosida

Enunciamos nuevamente el teorema de Hille-Yosida, y reproducimos la demostración del mismo, que se encuentra en el capitulo 7 de [18].

Teorema. 5.0.5. Hille-Yosida. *Sea A un operador lineal con valores en $\mathbf{V}$ y dominio $\mathbf{D_A}$. A fin de que A sea el generador de un semigrupo de contracciones a un parámetro en $\mathbf{V}$, es necesario y suficiente que A satisfaga las siguientes condiciones*

1. $\mathbf{D_A}$ *es denso en* $\mathbf{V}$

2. *para cada* $\lambda > 0$, $y \in \mathbf{V}$ *la ecuación*

$$\lambda x - Ax = y$$

   tiene solución única para cada $x \in \mathbf{D_A}$

3. *la solución en el inciso anterior cumple con*

$$||x|| \leq \frac{||y||}{\lambda}$$

Prueba. *La prueba del teorema de Hille-Yosida tiene el siguiente desarrollo:*

1. *Encontramos operadores acotados A_λ que aproximen a A para $x \in \mathbf{D_A}$ cuando λ sea grande.*

2. *construimos semigrupos haciendo*

$$T_t^\lambda x = e^{(tA_\lambda)} x$$

3. *definimos*

$$T_t = \lim_{\lambda \to \infty} T_t^\lambda x$$

y probamos que $\{T_t\}$ es un semigrupo con generador A.

Del desarrollo de la teoría, sabemos de la necesidad de las condiciones anteriores, por lo que solo resta probar la suficiencia. Supongamos que se cumplen las condiciones arriba mencionadas, de la condición 2 es claro que el operador $\lambda I - A$ es invertible, denotemos $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ anticipando que R_λ será el resolvente del semigrupo que planeamos construir. Entonces para cada $\lambda > 0$, R_λ aplica $\mathbf{V}$ sobre $\mathbf{D_A}$ y por la condición 3 tenemos que $||R_\lambda|| \leq \frac{1}{\lambda}$.
Definamos ahora $A_\lambda = \lambda A(R_\lambda)$, $\lambda > 0$, elección motivada por el corolario del Teorema 3.1.5. Ahora ya que

$$A_\lambda = \lambda A(R_\lambda) + \lambda R_\lambda - \lambda R_\lambda$$

$$= \lambda[-(\lambda - A)R_\lambda + R_\lambda] = \lambda[\lambda R_\lambda - I] \tag{5.1}$$

vemos que A_λ es continua y que $||A_\lambda|| \leq 2\lambda$. Ahora probaremos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax \qquad \text{para todo } x \in \mathbf{D_A} \tag{5.2}$$

Para ello se probara primero que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda A x = x \quad \text{para todo } x \in \mathbf{D_A} \tag{5.3}$$

Como A conmuta con R_λ

$$\lambda R_\lambda x - x = A(R_\lambda x) = R_\lambda(Ax)$$

por lo tanto

$$||\lambda R_\lambda x - x|| = ||(R_\lambda(Ax)|| \leq \frac{||Ax||}{\lambda} \to 0 \quad cuando \quad \lambda \to \infty$$

lo cual prueba (5.3). Para extenderlo a todo $\mathbf{V}$*, para todo x y $\epsilon > 0$, podemos escoger $y \in \mathbf{D_a}$ tal que $|| \ x - y \ || \leq \epsilon$. Entonces*

$$|| \ \lambda R_\lambda x - x \ || \leq || \ \lambda R_\lambda y - y \ || + || \ \lambda R_\lambda(x-y) \ || + || \ x - y \ || \leq || \ \lambda R_\lambda y - y \ || + 2\epsilon$$

Cuando $\lambda \to \infty$, $\limsup || \ \lambda R_\lambda x - x \ || \leq 2\epsilon$ *por (5.3), así que (5.3) se cumple para todo $x \in \mathbf{V}$. Finalmente si $x \in \mathbf{D_A}$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda A x = Ax \tag{5.4}$$

ya que (5.3) se cumple para Ax, lo que prueba (5.2). Por otra parte esto nos dice que el operador acotado A_λ aproxima a A para λ grande. Consideremos ahora los semigrupos T_t^λ los cuales de hecho son un semigrupo contractivo, ya que de (5.1)

$$T_t^\lambda = e^{(t\lambda^2 R_\lambda - t\lambda I)} = e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 R_\lambda}$$

así que

$$||T_t^\lambda x|| \leq e^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!} ||(\lambda R_\lambda)^n x|| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda} ||x||$$

Ahora mostraremos que T_t^λ tiene límite cuando $\lambda \to \infty$, para ello probaremos que

$$\lim_{\lambda,\mu\to\infty} ||T_t^\lambda x - T_t^\mu x|| = 0 \quad para\ todo\ x \in \mathbf{D_A}$$

Para λ, μ fijos y $x \in \mathbf{D_A}$ denotemos $f(x) = T_t^\lambda x - T_t^\mu x$, cuya derivada es

$$f'(t) = A_\lambda T_t^\lambda x - A_\mu T_t^\mu x = A_\lambda T_t^\lambda + A_\lambda T_t^\mu - A_\lambda T_t^\mu - A_\mu T_t^\mu x$$

$$= A_\lambda (T_t^\lambda - T_t^\mu) + (A_\lambda - A_\mu) T_t^\mu = A_\lambda f(t) + (A_\lambda - A_\mu) T_t^\mu$$

si denotamos $(A_\lambda - A_\mu)T_t^\mu x = g(t)$*, entonces* $f'(t) = A_\lambda f(t) + g(t)$*. Luego*

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA_\lambda} f(t)) = e^{-tA_\lambda} g(t)$$

pero ya que $f(0) = 0$

$$e^{-tA_\lambda} f(t) = \int_0^t e^{-sA_\lambda} g(s) ds$$

o bien

$$f(t) = \int_0^t e^{(t-s)A_\lambda} g(s) ds = \int_0^t T_{t-s}^\lambda T_s^\mu (A_\lambda - A_\mu) x ds$$

Luego

$$||f(t)|| \leq \int_0^t ||T_{t-s}^\lambda T_s^\mu (A_\lambda - A_\mu) x|| ds \leq t||(A_\lambda - A_\mu)x|| \quad \xrightarrow[\lambda,\mu\to\infty]{} \quad 0.$$

De (5.4). Nótese que la convergencia es uniforme para t *acotada. Definamos ahora*

$$T_t x = \lim_{\lambda\to\infty} T_t^\lambda x \quad \textit{para } x \in \mathbf{D_A} \tag{5.5}$$

Ya que la convergencia es uniforme en t*,* $T_t x$ *es continua en* t*, y* $\lim_{t\to 0} T_t x = x$*, para* $x \in \mathbf{D_A}$ *y*

$$||T_t x|| \leq ||T_t^\lambda x|| + ||T_t^\lambda x - T_t x|| \leq ||x||$$

ya que T_t^λ *es contracción y de (5.5). Finalmente debemos probar que* A *es el generador del semigrupo construido, en todo caso el semigrupo tiene un generador, digamos* A'*. Calculemos* $A'x$ *para* $x \in \mathbf{D_A}$*. Tenemos*

$$\frac{d}{dt} T_t^\lambda x = T_t^\lambda A_\lambda x$$

así que

$$T_t^\lambda x - x = \int_0^t T_s^\lambda A_\lambda x ds \tag{5.6}$$

Luego

$$||T_t^\lambda A_\lambda x - T_t A x|| \leq ||T_t A x - T_t^\lambda A x|| + ||T_t^\lambda A x - T_t^\lambda A_\lambda x||$$

En la ultima desigualdad el primer termino tiende a cero cuando $\lambda \to \infty$ *para* t *finito, y el segundo termino esta acotado por* $||Ax - A_\lambda x||$*, cota que tiende a cero cuando* $\lambda \to \infty$*, por lo tanto*

$$\lim_{\lambda \to \infty} T_t^\lambda A_\lambda x = T_t A x$$

se cumple para toda $x \in \mathbf{D_A}$ *y la convergencia es uniforme en* t*, de aquí que podemos pasar al límite en (5.6) para obtener*

$$T_t x - x = \int_0^t T_s A x ds$$

dividiendo entre t *y haciendo que esta se vaya a cero*

$$A'x = \lim_{t \to 0^+} \frac{T_t x - x}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T_s A x ds = Ax$$

De aquí que $\mathbf{D_A} \subset \mathbf{D_{A'}}$ *y* $A'x = Ax$ *para* $x \in \mathbf{D_A}$*, es decir* A' *es una extensión de* A*. Ya que* A' *es el generador de* $\{T_t\}$*,* $\lambda I - A$ *aplica* $\mathbf{D_{A'}}$ *sobre* $\mathbf{V}$*, y dado que* $\lambda I - A$ *es igual a* $\lambda I - A'$ *en* $\mathbf{D_A}$ *el cual aplica sobre* $\mathbf{V}$*, se sigue que* $\mathbf{D_{A'}} = \mathbf{D_A}$*, por lo tanto* $A' = A$*.*

Una Propiedad Interesante en una Variable Aleatoria Exponencial

Una variable aleatoria distribuida como exponencial con parámetro $\lambda = 1$*, posee una propiedad poco conocida y que sin embargo es de importancia central en la prueba de la propiedad de Markov del Proceso de Salto construido.*

Proposición. 5.0.6. *Sea* X *v.a* $\sim exp(1)$*, entonces, para toda función medible y acotada,* $f \geq 0$ *y* $a \in \mathbb{R}^+$

$$E(f(X), X > a) = e^{-a} E(f(a + X)) \tag{5.7}$$

Prueba.

$$E(f(X), X > a) = \int_{X>a} f(X)dP = \int_{\Omega} (f \circ X)\chi_{(a,\infty)} \circ XdP$$

$$= \int_{(a,\infty)} f \circ XdP_X = \int_{(a,\infty)} f(x)e^{-x}dx = \int_{(0,\infty)} f(x+a)e^{-(x+a)}dx$$

$$= e^{-a} \int_{(0,\infty)} f(x+a)e^{-x}dx = e^{-a}E(f(a+X))$$

Bibliografía

[1] Asmussen, Søren. 1987. Aplied Probability and Queues. Great Britain, John Wiley & Sons.

[2] Bhattacharya, R. N. and Waymire, E. C. 1990. Stochastic Processes with Applications. New York, Wiley. p 228.

[3] Bojdechi, Tomasz. 1985. Teoría General de Procesos e Integración Estocástica. México, Universidad Nacional Autónoma de México (Monografías del Instituto de Matemáticas Vol. 16.).

[4] Coleman, Rodney. 1976. Procesos Estaocásticos. México, Editorial Limusa.

[5] Durrett, Richard. 1991. Probability: Theory and Examples. California, Wadsworth.

[6] Durrett, Richard. 1999. Essentials of Stochastic Processes. New York, Springer-Verlag.

[7] Durrett, Richard. 1996. Stochastic Calculus: A Practical Introduction. Boca Raton FL, CRC Press.

[8] Engel, Klaus-Jochen and Nagel, Rainer. 2000. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, Springer-Verlag.

[9] Ethier, N. Stewart and Kurtz, G. Thomas. 1986. Markov Processes: Characterization and Convergence. New York, Wiley.

[10] Feller, William. 1968. An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. 2. New York, Wiley.

[11] García, Miguel Ángel. 2005. Introducción a la Teoría de la Probabilidad: Segundo Curso. México, Fondo de Cultura Económica.

[12] Gikhman, I.I and Skorokhod, A.V. 1969. Introduction to the Theory of Random Processes. U.E, W.B Saunders Company.

[13] Hille, E. and Phillips, R.S. 1974. Functional Analysis and Semigroups. Amer. Math. Ann. 207. pp 315-335.

[14] Hoel, Paul. Port, Sidney and Stone Charles. 1972. Introduction to Stochastic Processes. Illinois, Waveland Press.

[15] Karlin, Samuel. 1966. A First Course in Stochastic Processes. New York, Academic Press.

[16] Karlin, Samuel and Taylor, Howard M. 1981. A Second Course in Stochastic Processes. New York, Academic Press.

[17] Kifer, Yu. 1986. Ergodic Theory of Random Transformations. Boston, Birkhäuser. p 8.

[18] Lamperti, John. 1977. Stochastic Processes. New York, Springer-Verlag.

[19] Lawler, Gregory F. 2006. Introduction to Stochastic Processes. Second Edition. U.E, Chapman & Hall/CRC.

[20] Medina, S. Jorge. 1991. La Integral de Bochner y la Propiedad de Radon-Kikodym. Tesis para obtener el título de matemático. Facultad de Ciencias, UNAM.

[21] Norris, J.R. 1997. Markov Chains. United Kingdom, Cambridge University Press.

[22] Resnick, Sidney. 1992. Adventures in Stochastic Processes. Boston, Birkhäuser.

[23] Ross, Sheldon. 1980. Introduction to Probability Models. Second Edition. Orlando, Florida, Academic Press.

[24] Ross, Sheldon. 1996. Stochastic Processes. Second Edition. U.E, John Wiley & Sons.

[25] Stroock, W. Daniel. 2005. An Introduction to Markov Processes. Berlin, Springer-Verlag.

[26] Tudor, Constantin. 1994. Procesos Estocásticos. México, Sociedad Matemática Mexicana (Serie de Textos Avanzados Vol. 2.).

[27] Williams, David. 1991. Probability with Martingales. Great Britain, Cambridge University Press. chapter 16, pp 175-177.

[28] Williams, David. 1991. Stochastic Processes. Great Britain, Cambridge University Press. chapter 16, pp 175-177.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD-IZTAPALAPA

Construcción de Procesos Markovianos de Salto

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas), Presenta:

Fernando Guerrero Poblete

Asesor: Dr. Julio Cesar García Corte

Julio César G.

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POSGRADO EN MATEMÁTICAS

México

Noviembre de 2009