

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Matemáticas

***“COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO Y CONTROL DE ALGUNOS
PROCESOS ESTOCÁSTICOS NO-MARKOVIANOS”***

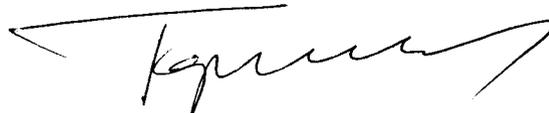
Tesis que presenta la alumna

Rosa María Flores Hernández

Matrícula: 96359043

Para la obtención del Grado de

Maestra en Ciencias (Matemáticas)



Asesor: /Dr. Evgueni I. Gordienko

Abril, 2000.

**“COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO Y CONTROL
DE ALGUNOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS NO-
MARKOVIANOS”**

POR

Lic. Rosa María Flores Hernández

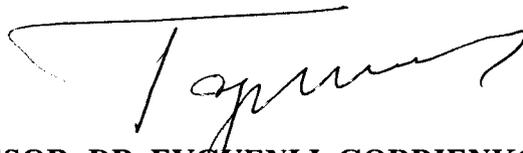
TESIS DE MAESTRÍA.

**COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO Y CONTROL DE ALGUNOS
PROCESOS ESTOCÁSTICOS NO-MARKOVIANOS**

TESIS QUE PRESENTA

Rosa María Flores Hernández

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)



ASESOR: DR. EVGUENI I. GORDIENKO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ABRIL DE 2000.

Índice

Introducción	4
1 UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO DE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS NO-MARKOVIANOS.	11
1.1 Un proceso de transmisión de mensajes en redes de comunicaciones.	11
1.2 Un problema de almacenamiento óptimo.	22
1.3 Planteamiento del problema.	30
2 CÁLCULO ANALÍTICO DEL COSTO PROMEDIO.	34
2.1 Estudio analítico de la convergencia de $\{Z_t\}$	35
2.2 Una convergencia en distribución.	42
2.3 ¡Existe el límite del valor esperado de la función de costo!. . .	44
2.4 Expresión analítica para el costo promedio.	46
3 RESULTADOS NUMÉRICOS.	47
3.1 Convergencia numérica de Z_t	47
3.1.1 $\varphi(z) = z$ tiene una raíz.	51
3.1.2 $\varphi(z) = z$ tiene tres raíces.	56
3.2 Optimización computacional del costo promedio.	61
3.3 ¿La solución óptima obtenida es estable?	67
Conclusiones	72
Apéndice	74
A. Programas Computacionales	74
B. Teoremas auxiliares utilizados	78
Bibliografía	79

AGRADECIMIENTOS

Le doy gracias a Dios por su invaluable presencia en mi vida, pero sobre todo, en aquéllos momentos cuando parece no haber salida y Él me tiende su mano.

Agradezco a mis papás (Meli y Rafael), a mis hermanas (Geno, Oli y Anita), a mi prima Guille, a mi tía Juana y a mi sobrino Oscar Alí, su cariño, comprensión y apoyo incondicional, con los cuales siempre he contado; pero sobre todo, les agradezco la confianza que me tienen.

Deseo expresar mi agradecimiento a la familia Pluma-García (Sra. Inelda, Sr. Gonzálo, Ara, Gonzalyn, Danny, Gerzaín, Katia y Mario) por haber compartido su hogar y su vida conmigo. Por la preocupación y tolerancia que han demostrado hacía mí en estos 3 años.

Reconozco a CONACyT su apoyo al otorgarme una beca para realizar mis estudios de Maestría y para desarrollar este trabajo de Tesis.

Va mi gratitud al personal del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, por la aceptación con la que me recibieron, lo que ha permitido que esté a gusto en esta Institución y ha motivado mi rendimiento profesional; especialmente al Dr. Evgueni I. Gordienko, mi asesor de Tesis, sin cuyo apoyo y asesoría no habría podido concluir este trabajo.

Quiero agradecer a mis compañeros de Maestría: Héctor, Sr. Javier, Ricardo, Julia, Sandra, Agustín, Martha e Ismael, la amistad que me brindan, así como también, el apoyo que de ellos he recibido.

Por último, agradezco a los profesores: Dra. Patricia Saavedra, Dr. Roberto Quezada, Dr. Carlos Ibarra, Dr. Raúl Montes de Oca, Dra. Ma. José Arroyo y Dr. Francisco Javier Sánchez Bernabé los conocimientos que me transmitieron en esta Institución, por los sabios consejos y motivación que me brindaron, dándome las bases suficientes para terminar este trabajo de investigación. Asimismo, agradezco al Dr. César Villarreal y al Dr. Roberto S. Acosta Abreu su disposición para revisar y corregir este trabajo. Gracias al M.C. Saúl Cano por las facilidades que me otorgó para realizar estos estudios.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo, con mucho cariño

A mi familia

A la familia Pluma-García

A mis alumnos de 6° Semestre de Matemáticas Aplicadas (UAT).

Introducción

Actualmente, la teoría de procesos de control de Markov de tiempo-discreto y sus aplicaciones son temas bien desarrollados (ver por ejemplo, las referencias en los nuevos libros [7, 10]). Los métodos conocidos para optimización de las políticas de control, tales como programación dinámica (en particular ecuaciones de optimalidad), programación lineal, etc. (veáse [1, 7, 10]) usan esencialmente la estructura Markoviana de los procesos (que, en particular se realizan al aplicar políticas de control Markovianas). Sin embargo, casi no existen trabajos que contengan las extensiones de métodos de control óptimo a procesos estocásticos que no tienen la propiedad de Markov para alguna política de control razonable. Por esta razón, en este trabajo consideraremos el problema de control óptimo para una clase particular de los procesos estocásticos no-Markovianos (a tiempo discreto) para mostrar los siguientes puntos:

- 1) Métodos de optimización de control de procesos Markovianos no aplicables aquí directamente. Por ejemplo, la optimización de control no se reduce a “optimización por un paso” (como en las ecuaciones de optimalidad de programación dinámica), sino que el control óptimo depende del comportamiento asintótico de “toda la trayectoria del proceso”. Lo último se observa en una situación muy simple - cuando el control es una constante que no depende ni del tiempo ni del estado del proceso, y, asintóticamente el proceso se comporta como un proceso Markoviano.
- 2) En la clase de los procesos considerados aquí el problema de control óptimo depende esencialmente del comportamiento asintótico del proceso (de tipo de leyes de los grandes números), y en casos particulares, la solución (los controles óptimos) se obtiene en forma cerrada como un problema de programación no-lineal (con restricciones no lineales).
- 3) Dependiendo del tipo de restricciones mencionadas, el problema de control óptimo puede ser no estable (no robusto). Es decir, si se encuentra un control óptimo para el proceso “perturbado” (con “pequeñas” perturbaciones de probabilidades de transición) y este control se aplica al proceso original, entonces el costo promedio obtenido puede ser mucho mayor en comparación con el costo óptimo (obtenido por aplicación del control óptimo para el proceso original); y esto ocurre a pesar del uso

de “pequeñas” perturbaciones de probabilidades de transición del proceso original. En nuestra opinión este fenómeno se debe a la estructura no-Markoviana de los procesos (puesto que las aplicaciones de los controles “cercanos” pueden provocar el comportamiento de los procesos cualitativamente distinto).

Ya que no existen métodos analíticos de control óptimo para los procesos considerados en este trabajo, solamente una parte de los resultados los hemos obtenido por métodos analíticos (esperamos con un enfoque nuevo); la otra parte del estudio (en particular el problema de estabilidad mencionado en 3)) se hizo por experimentos en computadora (simulaciones de los procesos y optimización numérica) con uso del paquete de programación “Mathematica”.

En conclusión, este trabajo es una iniciación del estudio del problema de control en una clase de los procesos no-Markovianos.

Ahora describiremos brevemente la clase de procesos de control contemplados y algunos resultados obtenidos.

En este trabajo consideramos un proceso de control estocástico no-Markoviano X_t en tiempo discreto $t = 0, 1, \dots$ dado en el espacio de estados $[0, \infty) \times [0, \infty)$ con la siguiente estructura de probabilidades de transición.

Si consideramos a $a \in A := [0, \theta]$ un número dado interpretado aquí como un control y suponemos que $\{F_z\}$, $z \in [0, 1]$ es alguna familia dada de funciones de distribución con soporte en $[0, \infty)$ (*i.e.* a cada $z \in [0, 1]$ le corresponde la función de distribución F_z de una *v.a.* (variable aleatoria) no negativa), entonces definimos la sucesión aleatoria $\{Z_t\}$ y las probabilidades de transición condicionales para el proceso X_t por las siguientes relaciones recurrentes:

1. $Z_0 = z_0 \in [0, 1]$, es una constante fija, y $X_0 = (X_0^{(1)}, X_0^{(2)})$ es el vector aleatorio con función de distribución conjunta $F_{Z_0}(x)F_{Z_0}(y)$;
2. para cada $t \geq 1$, si X_0, X_1, \dots, X_{t-1} son realizaciones del proceso X_t entonces

$$Z_t := \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} I_{\{X_i^{(1)} > a\}}; \quad (1)$$

3. $P(X_t \leq \vec{x} \mid X_0, X_1, \dots, X_{t-1}) := F_{Z_t}(x)F_{Z_t}(y)$ con $\vec{x} = (x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$.

En las secciones 1.1 y 1.2 de este trabajo se describen dos ejemplos aplicados de los procesos de este tipo, el primero corresponde a un proceso de transmisión de mensajes en una red especial de comunicaciones y el segundo a un problema nuevo de almacenamiento óptimo. Ambos procesos son no-Markovianos con comportamiento similar al proceso general descrito anteriormente.

Para comparar controles suponemos que la función de costo $\mathcal{C}(a, X_t)$ está definida y es una función continua no negativa en $[0, \theta] \times [0, \infty) \times [0, \infty)$ con $\sup_{a \in A} \mathcal{C}(a, X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) \leq K_1 + K_2(X_t^{(1)} + X_t^{(2)})$ con $K_1, K_2 < \infty$. Así que considerando la clase más simple de políticas estacionarias no dependientes de los estados, definimos el costo promedio $\mathfrak{S}(a, z_0)$, en un horizonte de planeación infinito, como

$$\mathfrak{S}(a, z_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E \mathcal{C}(a, X_k).$$

Denotando $\overline{F}_z(a) := 1 - F_z(a)$, en la sección 2.1 demostramos que si la $\frac{d^2}{dz^2} \overline{F}_z(a)$ existe y está acotada y además la $\frac{d}{dz} \overline{F}_z(a) < 1$, para todo $z \in [0, 1]$, entonces $\{Z_t\}$ converge casi seguramente a z_* ($Z_t \xrightarrow{c.s.} z_*$) cuando $t \rightarrow \infty$, donde z_* es un único punto fijo de la aplicación $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como $z \rightarrow \overline{F}_z(a)$ (con a fijo). Este resultado nos sirve para probar la convergencia débil del proceso X_t a $X_\infty = \{X_\infty^{(1)}, X_\infty^{(2)}\}$, donde el vector aleatorio X_∞ tiene la función de distribución $F_{z_*}(x)F_{z_*}(y)$ (ver en sección 2.2). Luego, tal convergencia junto con la suposición de que para algún $p > 1$, $\sup_{z \in [0, 1]} \int_0^\infty x^p$ $dF_z(x) < \infty$, nos permite demostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} E \mathcal{C}(a, X_t) = E \mathcal{C}(a, X_\infty)$ (sección 2.3) y utilizando el promedio de Cesáro concluimos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(a, z_o) &= E C(a, X_\infty) & (2) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty C(a, x, y) dF_{z_*}(x) dF_{z_*}(y) \\
&= : \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*)
\end{aligned}$$

con lo cual tenemos una expresión analítica del costo promedio, que como puede observarse depende del comportamiento asintótico de la sucesión $\{Z_t\}$.

Entonces, para hallar el control óptimo a_* es decir, a_* tal que $\mathfrak{S}(a_*, z_o) = \inf_{a \in A} \mathfrak{S}(a, z_o)$, deberíamos resolver el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{aligned}
& \underset{a \in A}{\text{Minimizar}} \quad \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*) \\
& \text{sujeto a} \quad \bar{F}_{z_*}(a) = z_*.
\end{aligned}$$

Por resultados que aparecen en [4], sabemos que tal solución óptima es estable con respecto a perturbaciones de la familia $\{\bar{F}_z(a)\}$.

En el caso cuando para un a fijo tenemos que la $\frac{d}{dz} \bar{F}_z(a) > 1$ en algunos puntos $z \in [0, 1]$ y la $\frac{d^2}{dz^2} \bar{F}_z(a)$ no está acotada, no podemos usar el teorema general sobre la convergencia de sucesiones recurrentes dado en [3], para probar el resultado clave de que $\{Z_t\}$ converge *c.s.*, bajo las hipótesis escritas arriba. Por eso, utilizamos herramientas computacionales para analizar qué sucede en estos casos. Primero, estudiamos numéricamente (*i.e.* mediante la simulación de los procesos usando el paquete de programación “Mathematica”) el comportamiento asintótico de $\{Z_t\}$ (*i.e.* cuando $t \rightarrow \infty$ esto es, la ley de los grandes números en (0.1)) cuando tenemos dos situaciones que no teníamos en el caso analítico (*i.e.* cuando la $\frac{d}{dz} \bar{F}_z(a) > 1$ para algunos subintervalos de $[0, 1]$):

1. La aplicación $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ tiene un punto fijo z_* , para a fijo (Ver Figura 1): Exhibiremos resultados numéricos en los que si la $\frac{d}{dz} \bar{F}_z(a) < 1$, en una vecindad de z_* , entonces $\{Z_t\}$ se aproxima a z_* cuando t es suficientemente grande, pero que tal convergencia depende de la derivada que $\bar{F}_z(a)$ tenga en tal vecindad; mientras más cercana sea esta derivada a cero, mayor rapidez de convergencia obtendremos.

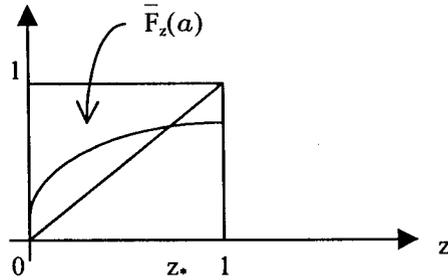


Figura 1: $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ tiene un punto fijo (z_*), para a fijo.

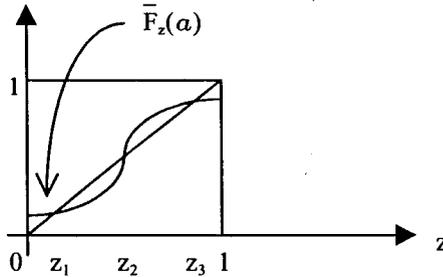


Figura 2: $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ tiene 3 puntos fijos (z_1, z_2 y z_3), para a fijo.

2. La aplicación $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ tiene 3 puntos fijos, z_1, z_2 y z_3 , para a fijo; $\frac{d}{dz}\bar{F}_{z_1}(a) = \frac{d}{dz}\bar{F}_{z_3}(a) < 1$ con $\frac{d}{dz}\bar{F}_{z_2}(a) > 1$ (Ver Figura 2). En estas condiciones obtuvimos que $\{Z_t\}$ se aproxima a z_1 o a z_3 con t suficientemente grande y muy raramente lo hace a z_2 . Además, para z_o - un valor inicial - con $z_o = \frac{z_1+z_3}{2}$ la probabilidad de convergencia a z_1 es casi igual a la probabilidad de convergencia a z_3 . Pero en general, la probabilidad de convergencia de $\{Z_t\}$ a cualquiera de las raíces z_1 y z_3 depende del valor inicial z_o : la probabilidad mayor corresponderá a la raíz más cercana al valor z_o .

Para hallar numéricamente el costo promedio consideramos una familia de aplicaciones $\{z \rightarrow \bar{F}_z(a)\}$ tal que para cada $a \in A$, $\bar{F}_z(a)$ tiene uno (z_*) o tres puntos fijos (z_1, z_2 y z_3), es una función creciente y con derivada menor que 1 en alguna vecindad de z_* o de z_1 y z_3 , según sea el caso, por

lo que le dimos una nueva expresión al costo promedio que, numéricamente observamos, en el caso de una raíz z_* , no depende de z_o y si de z_* .

Los experimentos numéricos muestran que en el caso de una raíz z_* de la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$, la condición $\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) < 1$ en una vecindad de z_* garantiza la convergencia de $Z_t \xrightarrow{c.s.} z_*$ cuando $t \rightarrow \infty$ y el costo promedio $\mathfrak{S}(a, z_o)$ está dado por $\tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*)$ en (2).

Obsérvese que los experimentos numéricos los hacemos con costo por un paso de la forma $\mathcal{C}(a, x, y) = \min(x, a + y)$ que es una forma natural en el ejemplo del proceso de transmisión de mensajes en una red especial de comunicaciones (veáse §1.1).

En el caso de tres raíces de la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{S}(a, z_o) \\ &= \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_o, z_1, z_3) \\ &= P_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{C}(a, x, y) dF_{z_1}(x) dF_{z_1}(y) \\ & \quad + P_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{C}(a, x, y) dF_{z_3}(x) dF_{z_3}(y) \end{aligned}$$

donde $P_1 = P(Z_t \rightarrow z_1)$ y $P_2 = P(Z_t \rightarrow z_3) = 1 - P_1$, donde P denota probabilidad, y z_1 y z_3 son raíces estables (con $\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) < 1$, veáse la Figura 2). Como lo muestran nuestros resultados numéricos (en el §3.1.2), P_1 y P_3 dependen de z_o , de ahí que $\mathfrak{S}(a, z_o)$ dependa de z_o , a diferencia del caso de una raíz, así como también de z_1 y z_3 .

De esta forma, el control óptimo a_* se puede hallar al resolver numéricamente el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{aligned} & \underset{a \in A}{\text{Minimizar}} \quad \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_o, z_1, z_3) \\ & \text{sujeto a} \quad \bar{F}_{z_1}(a) = z_1, \bar{F}_{z_3}(a) = z_3 \end{aligned}$$

$$z_1 < z_3, z_1 \neq z_2 \text{ y } z_3 \neq z_2.$$

Al resolver nuestro problema (cuando el número de raíces puede depender de a) para el proceso controlable original (*i.e.* dado por la familia de funciones de distribución $\{F_z\}$, $z \in [0, 1]$) y para el proceso “perturbado” (dado por una familia $\{\tilde{F}_z\}$, $z \in [0, 1]$, de funciones de distribución que es una “pequeña perturbación” de $\{F_z\}$) mostraremos numéricamente que si la aplicación $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ cambia el número de sus puntos fijos (con el cambio de a), entonces el problema de optimización del control a puede ser *no* estable (cuando el control óptimo a_* sucede “cerca” del punto de bifurcación es decir, el valor a donde el mapeo $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ cambia el número de sus puntos fijos, veáse §3.3).

Capítulo 1

UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO DE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS NO-MARKOVIANOS.

Antes de dar el planteamiento del problema, iniciaremos este estudio mencionando un par de ejemplos en los que pueden tener aplicación los resultados obtenidos en este trabajo.

1.1 Un proceso de transmisión de mensajes en redes de comunicaciones.

Las redes de comunicación de datos, se han extendido por miles en todo el mundo a fin de mejorar la capacidad de comunicación de datos entre los usuarios de la red. Estos sistemas van desde pequeñas redes que interconectan terminales y computadoras dentro de uno o más edificios, hasta redes con amplia distribución geográfica, que cubren países enteros, y en algunos casos, todo el planeta.

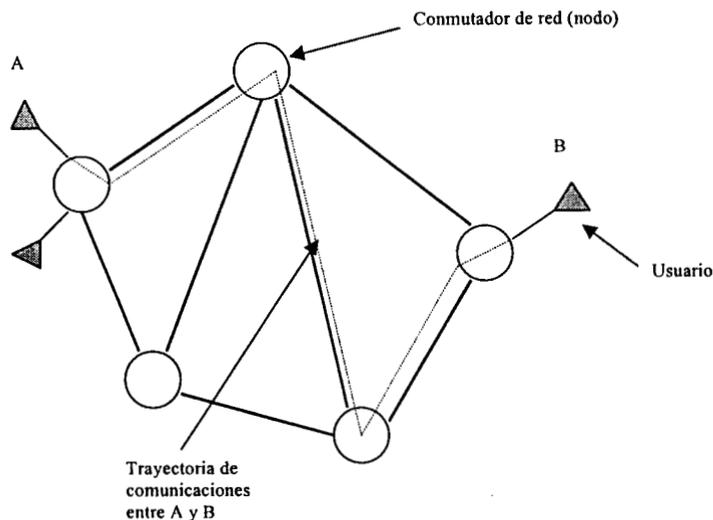


Figura 1.1: Una red simple.

Algunas redes usan tecnología de *conmutación de paquetes* en las cuales se transmiten, de una fuente a un destino, bloques de datos llamados paquetes. Las fuentes y los destinos pueden ser terminales, computadoras, impresoras o cualquier otro dispositivo de comunicación o manipulación de datos.

Una red esencialmente está formada por conmutadores de red o nodos, interconectados por medio de enlaces de transmisión. Estos enlaces pueden ser vía alambre, cable, radio, satélite o fibra óptica. En la Figura 1.1 se da un ejemplo de una red simple.

Nótese que una red de este tipo tiene capacidad para una gran cantidad de usuarios, tantos como el conmutador pueda manejar. Los usuarios que deseen comunicarse deben tener una conmutación o dirección de tráfico independiente a través de los nodos sobre una trayectoria apropiada de la red. La red puede estar dedicada a transmisión de voz (red telefónica), de datos (mensajes), o de ambos. Una red, como la de la Figura anterior, permite que muchos usuarios se interconecten de forma rentable, además de que ofrece servicios y funciones de los cuales de otra forma los usuarios individualmente no podrían disponer.

Existen en el mercado diferentes procesos de transmisión de mensajes en redes, pero una de las cosas que permiten considerar de calidad cada uno de estos procesos es el tiempo que debe esperar un usuario para recibir respuesta cuando ha enviado un mensaje a otro usuario.

La disminución del tiempo de respuesta es muy importante en algunas redes de comunicación militares (donde los mensajes pueden ser órdenes para una actividad militar). Una tecnología conocida para aumentar la confiabilidad y disminuir el tiempo de respuesta en tales redes es mandar copias repetidas del mismo mensaje. Pero el problema de elegir un intervalo de repetición del mando puede ser no trivial en ciertas situaciones por ejemplo, en una guerra cuando parte de los nodos de comunicación podrían ser destruidos y muchas repeticiones (copias) podrían sobrecargar la red y por lo tanto aumentar el tiempo de transmisión.

Consideremos entonces una red de comunicaciones a la que están conectados N usuarios en la cual existe un flujo de mensajes constante. También suponemos que el envío de mensajes (o paquetes) entre el usuario i y el usuario j no es directo es decir, que existen ciertos nodos que están conectados entre sí y donde cada usuario tiene conexión con al menos uno de ellos, de tal manera que un mensaje para llegar a su destino debe realizar un recorrido por algunos de estos nodos como lo ilustra la Figura 1.2 que esquematiza el envío de un mensaje del usuario i al usuario j . Observemos que los mensajes que van de una estación a otra pueden hacerlo por diferentes caminos.

Como más de un mensaje puede estar circulando por los nodos puede ocurrir que en éstos se estén formando colas de mensajes lo cual provoca una demora en la llegada de un mensaje a su destino y por consiguiente un mayor tiempo de recepción de respuesta; también puede suceder que éste se pierda y por lo tanto, el tiempo de espera de respuesta será infinito.

Ahora bien, para la i -ésima estación, t - representa los momentos discretos en los que se envían mensajes, $\xi_t^{(1)}$ - es el tiempo de espera de respuesta correspondiente e introducimos un parámetro controlable denominado **control**, $a \in [0, \theta]$ (θ es un número dado finito), cuya función es la siguiente: La i - *ésima* estación manda su t - *ésimo* mensaje y espera durante un cierto tiempo a para recibir respuesta, si la respuesta llega en un cierto tiempo $\xi_t^{(1)}$

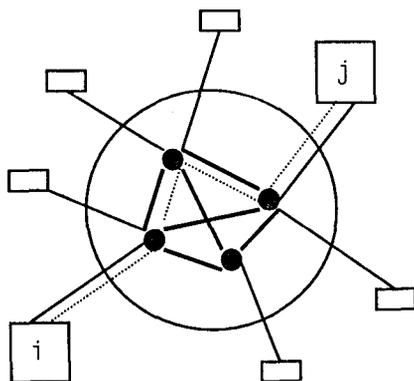


Figura 1.2: Envío de un mensaje del usuario i al usuario j .

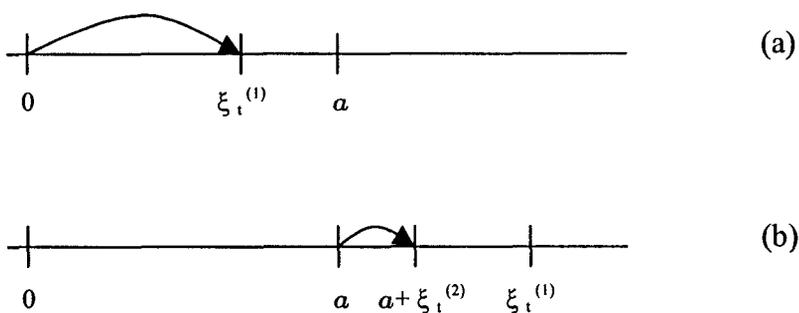


Figura 1.3: (a) $\xi_t^{(1)} \leq a$, (b) $\xi_t^{(1)} > a$.

$< a$ no se envía otra vez el mensaje, ver Figura 1.3 (a), pero si no es así (*i.e.* $\xi_t^{(1)} \geq a$), la “copia” se manda después de a unidades de tiempo pasadas del instante de envío del mensaje “original”, y en este caso, el tiempo de recepción de respuesta será el $\min\{\xi_t^{(1)}, a + \xi_t^{(2)}\}$, donde $\xi_t^{(2)}$ es el tiempo de espera de respuesta, que corresponde al $t - \text{ésimo}$ mensaje enviado por segunda vez, como se muestra en la Figura 1.3 (b); en otras palabras, $\xi_t^{(1)}$ es el tiempo aleatorio de espera de respuesta al “original” $t - \text{ésimo}$ mensaje, mientras que $\xi_t^{(2)}$ es el tiempo de espera de respuesta a su “copia” (si se manda).

Ahora, si introducimos

$$\begin{aligned}
I_{\{\xi_t^{(1)} > a\}} &= \begin{cases} 1, & \xi_t^{(1)} > a \\ 0, & \xi_t^{(1)} \leq a \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{si debe repetirse el mensaje} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}
\end{aligned}$$

se tiene que

$$Z_t = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} I_{\{\xi_i^{(1)} > a\}} \quad (1.1)$$

es la frecuencia de repetición de mensajes hasta el momento t a lo que denominamos “carga del sistema”; observemos que $Z_t \in [0, 1]$. Teniendo en cuenta que todas las N estaciones (clientes, suponiendo que N es “suficientemente grande”) proceden del mismo modo es decir, mandan sus mensajes en “tactos” $t = 0, 1, 2, \dots$ y usan el mismo parámetro de repetición $a \in [0, \theta]$ entonces, el valor de $Z_t = 1$ corresponde al aumento del flujo de mensajes en dos veces.

Ahora bien, el enviar un mensaje por segunda vez cuando no se ha recibido respuesta después de un cierto tiempo a nos sirve para lo siguiente:

- El mensaje enviado por primera vez puede estar detenido en algún nodo que tiene una cola muy grande de mensajes, debido a que varias estaciones pueden haber enviado mensaje, de tal manera que si el mensaje enviado por segunda vez siguiera un camino distinto $a + \xi_t^{(2)}$ podría ser menor que $\xi_t^{(1)}$, lo que permitiría conocer una respuesta en un menor tiempo.
- Si el mensaje se ha perdido, $\xi_t^{(1)}$ será infinito es decir, nunca se obtendrá contestación; sin embargo, si se envía nuevamente el mensaje después de un cierto tiempo a , aunque esto no nos garantiza que $a + \xi_t^{(2)} < \infty$, al menos nos da otra posibilidad de obtener respuesta.

Desde estos puntos de vista, para disminuir la espera (aleatoria) de respuesta igual al $\min\{\xi_t^{(1)}, a + \xi_t^{(2)}\} \leq \xi_t^{(1)}$ parece razonable escoger un valor

“pequeño” del parámetro a (en el caso límite, tomar $a = 0$). Sin embargo, si varias estaciones repiten el envío de mensajes con mucha frecuencia, esto provoca que la carga del sistema se incremente es decir, crea un problema de saturación de la red, que se manifiesta como un incremento en la pérdida de mensajes o como un aumento en el tiempo de recepción de respuesta; tal situación puede tener lugar en algunas redes de comunicación durante una guerra cuando parte de los nodos y canales son destruidos.

Uno de los parámetros que determina dicha frecuencia es a , por ello, para reducir la pérdida de mensajes y disminuir el tiempo de recepción de respuesta, debemos optimizar su valor es decir, hallar un valor de a que permita que la carga del sistema sea una cantidad “razonable” y que al mismo tiempo *minimice, en promedio, el tiempo de recepción de respuestas y la cantidad de mensajes perdidos*. Por ejemplo, si $a = 0$ para todas las estaciones, siempre hay que enviar los mensajes por segunda vez y ello crea la máxima carga del sistema y por lo tanto, el peor problema de saturación que pueda existir y en lugar de disminuir el tiempo deseado obtendríamos mayores tiempos de recepción de respuestas que los esperados cuando no se usa este parámetro. Sin embargo, si a es muy grande para todas las estaciones comparado con el tiempo promedio de recepción de respuestas, aunque disminuye bastante la carga del sistema, no sería de mucha utilidad el uso de este parámetro en nuestras consideraciones, ya que entonces el $\min\{\xi_t^{(1)}, a + \xi_t^{(2)}\} \approx \xi_t^{(1)}$.

Hasta el momento hemos considerado que la $P(\xi_t^{(1)} = \infty) = \alpha > 0$ es decir, que existe la posibilidad de que se pierdan los mensajes como lo muestra la Figura 1.4, en donde la función de distribución de la variable $\xi_t^{(1)}$ ($F_z(x)$, como se indica mas adelante), tiene límite infinito diferente de 1. Sin embargo, en esta etapa, para simplificar las cosas suponemos que siempre se obtiene respuesta es decir, $\alpha = 0$.

Ahora, necesitamos de alguna manera formalizar el concepto de dependencia de las distribuciones de retardos de respuestas $\xi_t^{(1)}$ y $\xi_t^{(2)}$ de la “carga” de la red, que medimos en los terminos de la frecuencia de repeticiones, Z_t , definida en (1.1) y lo hacemos como sigue.

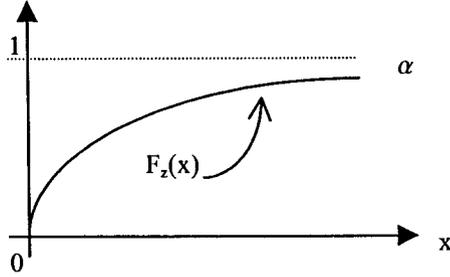


Figura 1.4: La probabilidad de que se pierdan mensajes es $\alpha > 0$.

Iniciaremos por considerar que el par de variables aleatorias $\xi_t^{(1)}$ y $\xi_t^{(2)}$ tienen distribución conjunta condicional, dada por la siguiente fórmula ($\vec{x} = (x_1, x_2)$)

$$\begin{aligned}
 F_{\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}}(x_1, x_2 \mid Z_t = z) &= P(\xi_t^{(1)} \leq x_1, \xi_t^{(2)} \leq x_2 \mid Z_t = z) \\
 &= P(\xi_t^{(1)} \leq x_1 \mid Z_t = z) P(\xi_t^{(2)} \leq x_2 \mid Z_t = z) \\
 &= F_z(x_1) F_z(x_2).
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

En particular (1.2), suponemos que $\xi_t^{(1)}$ y $\xi_t^{(2)}$ son independientes condicionalmente (dada la “frecuencia pasada” Z_t).

Pero es más importante la parte derecha de (1.2) porque para cada $z \in [0, 1]$, $F_z(x)$, con $x \in [0, \infty)$ es la función de distribución condicional (dado $Z_t = z$) de la variable aleatoria $\xi_t^{(1)}$ (y de $\xi_t^{(2)}$).

Supongamos que la familia de funciones de distribución $\{F_z(\cdot)\}$, $z \in [0, 1]$ está definida de antemano, mas o menos arbitrariamente, pero que satisface la siguiente condición: Para cada $x \geq 0$ fijo los valores de $F_z(x)$ dependen del parámetro $z \in [0, 1]$ de manera no-creciente.

Para este ejemplo ésta es una hipótesis natural. De hecho, a menor “carga” $Z_t = z_1$ (comparada con la “carga” $Z_t = z_2 > z_1$) corresponden “menores” *v.a.*s $\xi_t^{(1)}$ y $\xi_t^{(2)}$ (tiempos más cortos de espera de respuesta), es decir, debe ser

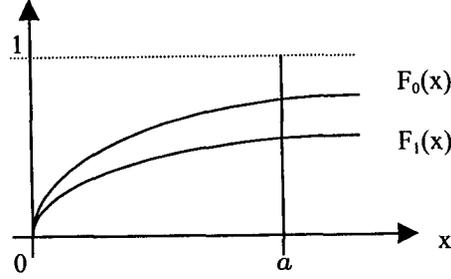


Figura 1.5: $\{F_z(x)\}$ depende de z de manera no-creciente ($x \geq 0$ es fijo).

$$P(\xi_t^{(1)} \leq x \mid Z_t = z_1) \geq P(\xi_t^{(1)} \leq x \mid Z_t = z_2)$$

para cada $x \geq 0$, que por (1.2) resulta que

$$F_{z_1}(x) \geq F_{z_2}(x).$$

En particular, si $x = a$, entonces $P(\xi_t^{(1)} \leq a \mid Z_t = z)$ representa la probabilidad de “no mandar la copia del t -ésimo mensaje” dada la “carga” z . En los casos extremos $z = 0$ y $z = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} F_1(a) &= P(\xi_t^{(1)} \leq a \mid Z_t = 1) \\ &\leq P(\xi_t^{(1)} \leq a \mid Z_t = 0) \\ &= F_0(a). \end{aligned}$$

Esta situación se ilustra en la Figura 1.5. Al definir $\bar{F}_z(x)$ como $1 - F_z(x)$ ($\bar{F}_z(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$) tenemos que $\{\bar{F}_z(x)\}$ es una familia de z creciente (i.e. $z_1 < z_2 \Rightarrow \bar{F}_{z_1}(x) < \bar{F}_{z_2}(x)$) (ver Figura 1.6) y para cada a fijo, $\bar{F}_z(a)$ es una función de z creciente (véase la Figura 1.7).

Si consideramos funciones crecientes $\varphi(z) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que tengan el mismo comportamiento que $\bar{F}_z(a)$, con a fijo, mostraremos, bajo algunas condiciones, analítica y numéricamente que si $\varphi(z) = \bar{F}_z(a) = z$ tiene una

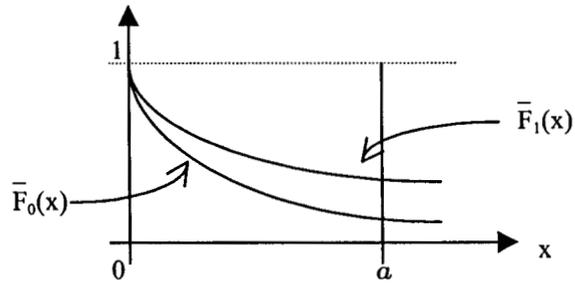


Figura 1.6: $\{\bar{F}_z(x)\}$ depende de z en forma creciente ($x \geq 0$ es fijo).

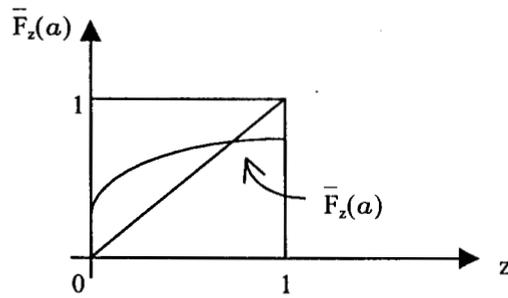


Figura 1.7: Para cada a fijo, $\bar{F}_z(a)$ es una función de z creciente.

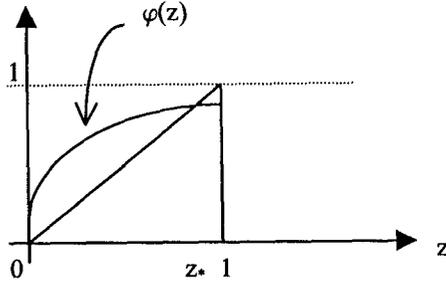


Figura 1.8: $\varphi(z) = \bar{F}_z(a) = z$ tiene una sola raíz (z_*).

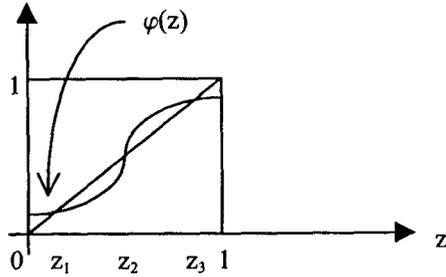


Figura 1.9: $z \rightarrow \varphi(z)$ tiene 3 puntos fijos (z_1 , z_2 y z_3).

sola raíz digamos z_* , como se puede ver en la Figura 1.8, entonces la sucesión de v.a.'s $\{Z_t\}$ converge a z_* cuanto $t \rightarrow \infty$. Y si la aplicación $z \rightarrow \varphi(z)$ tiene 3 puntos fijos, digamos z_1 , z_2 y z_3 , como se observa en la Figura 1.9, por medio de resultados numéricos mostraremos que $Z_t \rightarrow z_1$, cuando $t \rightarrow \infty$, con una probabilidad que depende de z_o , digamos $P(z_o)$, y de las propiedades de $\varphi(z)$, y que $Z_t \rightarrow z_3$, cuando $t \rightarrow \infty$, con una probabilidad $1 - P(z_o)$, donde z_1 y z_3 son raíces estables, y casi nunca converge a la raíz no estable z_2 .

Ahora, introducimos el proceso $X_t := (\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})$, $t = 0, 1, 2, \dots$ (véase la definición formal en el planteamiento del problema), que es un proceso no-Markoviano porque Z_t depende de todos los estados anteriores del proceso y

como $\xi_t^{(1)}$ y $\xi_t^{(2)}$ tienen distribución condicional F_{Z_t} , ello implica que $\xi_t^{(1)}$ y $\xi_t^{(2)}$ dependen del valor de Z_t y por lo tanto de toda la historia del proceso. La función $\mathcal{C}(a, X_t) := \min(\xi_t^{(1)}, a + \xi_t^{(2)})$ - tiempo de respuesta correspondiente al t -ésimo mensaje - sirve en este ejemplo como el “costo” pagado en el momento t cuando el “estado” del proceso es X_t y se aplica el “control” a . El valor promedio $E \mathcal{C}(a, X_t)$ depende obviamente de t , y por eso no puede usarse para comparar valores del parámetro controlable a . Sin embargo, si suponemos un funcionamiento de la red durante un “periodo largo”, lo que proponemos como un criterio usado para encontrar el mejor valor de a , es el siguiente “costo promedio en el intervalo infinito”

$$\mathfrak{S}(a, z_o) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E \mathcal{C}(a, X_k) \quad (1.3)$$

donde $a \in [0, \theta]$ con θ un número dado finito y z_o es la “carga” de la red inicial. La terminología se originó de la teoría de procesos de Markov controlables, véase [1, 7].

Y, una política a_* es óptima si satisface que

$$\mathfrak{S}(a_*, z_o) = \inf_{a \in [0, \theta]} \mathfrak{S}(a, z_o). \quad (1.4)$$

Más adelante daremos una expresión analítica para $\mathfrak{S}(a, z_o)$. También, vamos a demostrar que si para cada $a \in [0, \theta]$ la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$ tiene una única raíz $z_* = z_*(a)$, entonces el problema (1.4) se reduce al siguiente problema de programación no lineal

$$\underset{a \in [0, \theta]}{\text{Minimizar}} \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, a + y) dF_z(x) dF_z(y)$$

$$\text{sujeto a } \bar{F}_z(a) = z.$$

En particular, para cada a fijo el valor de $\mathfrak{S}(a, z_o)$ en (1.3) no depende de z_o , pero se determina por la raíz $z_*(a)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(a, z_o) &= \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*(a)) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, a + y) dF_{z_*(a)}(x) dF_{z_*(a)}(y). \end{aligned}$$

1.2 Un problema de almacenamiento óptimo.

Un inventario consiste de recursos utilizables, pero que están ociosos. Estos recursos pueden ser de cualquier tipo; por ejemplo: hombres, materiales, máquinas o dinero. Cuando dicho recurso es material, o artículos en cualquier etapa de su acabado, el inventario generalmente se menciona como “existencias en almacén”.

Existe un problema de inventario si el volumen de recursos está sujeto a control y si hay, cuando menos, un costo que disminuya al aumentar el inventario.

Normalmente, el objetivo es minimizar el costo total (real o esperado). Sin embargo, si el inventario afecta la demanda (el volumen solicitado por los clientes o usuarios), el objetivo puede ser maximizar las utilidades (reales o esperadas).

Las variables que se pueden controlar, separadamente o en combinación son las siguientes.

1. **La cantidad adquirida** (por compra, producción o algún otro medio); o sea, *cuánto*. Esto se puede fijar para cada tipo de recurso en forma separada o para todos colectivamente.
2. **La frecuencia o tiempo de abastecimiento** es decir, *qué tan a menudo o cuándo*.

El tomador de decisiones puede tener control sobre ambos o solamente uno de estos tipos de variables controlables. En el modelo de nuestro ejemplo se considera solo un producto y un único parámetro controlable: la cantidad adquirida (denotada por a) al principio de cada periodo establecido (no controlable), denotado por $t = 0, 1, \dots$ (puede ser un día, una semana, un mes, etc.).

En los problemas de inventario, algunas de las *variables no controlables* que deben ser incluidas en la función de costo agregado son:

1. **Costos de mantenimiento de inventario:** Costos que se incrementan en proporción directa al crecimiento del inventario y al tiempo que

van a permanecer almacenados los artículos. El componente más obvio y que es estrictamente proporcional al nivel de existencia y al tiempo es el costo del capital invertido. Otras componentes importantes del costo de mantenimiento del inventario son:

- a) *Costos de manejo*: estos incluyen los costos de la labor de mover las existencias, grúas de capacidad media, armazones para soportar barriles, montacargas y otro equipo utilizado para este propósito.
 - b) *Costos de almacenamiento*: renta de local o interés y depreciación de nuestro propio local.
 - c) *Seguro e impuestos*.
 - d) *Costos de depreciación, deterioro y obsolescencia*: estos son particularmente importantes para artículos antiguos o que cambian químicamente durante el almacenamiento, tales como los alimentos.
2. **Costos de déficit o multas**: son costos que surgen cuando algún artículo que se demanda no se tiene en existencia.
3. **Demanda**: el número de artículos que se requieren para cada periodo. Obsérvese que esto no necesariamente es la cantidad vendida, debido a que parte de la demanda puede no satisfacerse por déficit o demoras. En efecto, sería la cantidad que se vendería, si todo lo que se necesitará estuviera disponible.

En toda literatura sobre modelación de los procesos de almacenamiento (veáse por ejemplo [1, 9]) la demanda se considera como una componente del modelo no controlable (mas típico como la sucesión de las *v.a.*'s independientes e idénticamente distribuidas (*i.i.d.*) en los modelos de tiempo discreto). Esto es natural ya que la demanda se determina por los clientes y no depende de la administración del almacén. Sin embargo en nuestro modelo permitimos que la demanda en el periodo t pueda depender de algunos parámetros del proceso de almacenamiento observado hasta el instante t (más preciso, de la frecuencia de las demandas no satisfechas). Tal suposición resulta del hecho de que la demanda puede depender del parámetro controlable - nivel de producto adquirido. Ésta es la característica importante que hace a este

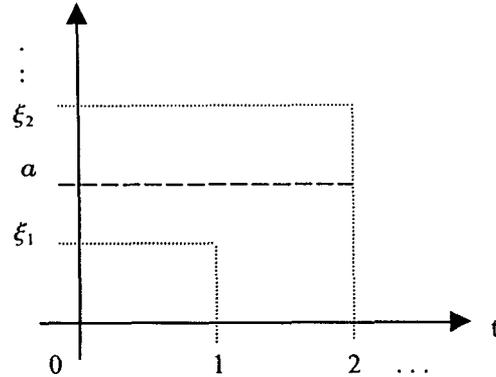


Figura 1.10: Cantidad de producto demandada en cada periodo de tiempo.

modelo diferente de los modelos considerados en literatura (veáse por ejemplo [1, 9]) y resulta un proceso de control no-Markoviano.

La siguiente descripción es un ejemplo de un modelo de almacenamiento muy particular, y por eso no es muy realista. Sin embargo este ejemplo tiene algunas características distintas de los modelos clásicos (veáse [1, 7]), a saber, carácter no-Markoviano del proceso estocástico subyacente. Lo último resulta de la insuficiencia de los enfoques de la solución estándar.

Ahora bien, el problema de almacenamiento óptimo que estudiaremos es el siguiente: Supongamos que una empresa produce cierto artículo y que al principio de cada periodo de tiempo (una semana, un mes, etc.) la empresa cuenta con una cantidad fija $X_0 = a$ de este producto y sean ξ_1, ξ_2, \dots las demandas de tal producto en los periodos de tiempo primero, segundo, ... de tal manera que al final del periodo t -ésimo la cantidad en existencia del producto es el $\max\{0, a - \xi_t\}$ como se ilustra en la Figura 1.10. Si el $\max\{0, \xi_t - a\}$ es 0 (i.e. $\xi_t \leq a$), eso significa que la demanda fue satisfecha, pero sobró cierta cantidad de producto $a - \xi_t$ en la empresa. Si el $\max\{0, \xi_t - a\} > 0$ eso indica que la demanda no fue satisfecha en su totalidad es decir, $a < \xi_t$.

Nuevamente suponemos que ξ_t tiene distribución condicional

$$P(\xi_t \leq x \mid Z_t) = F_{Z_t}(x) \quad (1.5)$$

para $t = 0, 1, \dots$ donde

$$Z_t = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} I_{\{\xi_i > a\}}$$

es la frecuencia de periodos de tiempo en los que la demanda no se satisface en su totalidad.

De este modo intentamos describir la dependencia de la demanda de la frecuencia de los periodos (en el pasado) con demandas no satisfechas. Básicamente la suposición es la siguiente: Un cliente que ha encontrado algunas veces su demanda no satisfecha podría cambiar esta empresa (tienda) por otra alternativa. De lo dicho resulta que el aumento de la frecuencia de los periodos con demanda no satisfecha debe bajar la demanda futura. Como en el ejemplo anterior, la parte derecha de (1.5) se define por una familia dada de funciones de distribución $\{F_z(x)\}$, $z \in [0, 1]$, ($x \in [0, \infty)$) (*i.e.* para cada z tenemos una función de distribución $F_z(x)$ en $[0, \infty)$), pero al contrario del ejemplo anterior, ahora para cada $x \in [0, \infty)$ fijo, $\{F_z(x)\}$, $z \in [0, 1]$, es una familia *no - decreciente* (*i.e.* el aumento de la frecuencia de demandas Z_t no satisfechas \Rightarrow la disminución de la demanda \Rightarrow el aumento de la probabilidad $P(\xi_t \leq x \mid Z_t = z) = F_z(x)$). Esto es, $z_1 < z_2$ implica que

$$\begin{aligned} F_{z_1}(x) &= P(\xi_t \leq x \mid Z_t = z_1) \\ &\leq P(\xi_t \leq x \mid Z_t = z_2) \\ &= F_{z_2}(x). \end{aligned}$$

Considerando los casos extremos: $Z_t = 0$ (la demanda siempre es satisfecha) y $Z_t = 1$ (la demanda nunca se ha satisfecho), tenemos

$$\begin{aligned} F_0(a) &= P(\xi_t \leq a \mid Z_t = 0) \\ &\leq P(\xi_t \leq a \mid Z_t = 1) \\ &= F_1(a). \end{aligned}$$

Tal situación se muestra en la Figura 1.11.

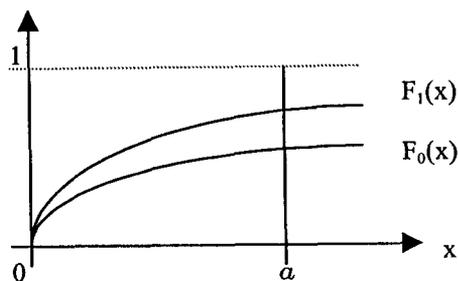


Figura 1.11: $\{F_z(x)\}$ depende de z de manera no-decreciente ($x \geq 0$ es fijo).

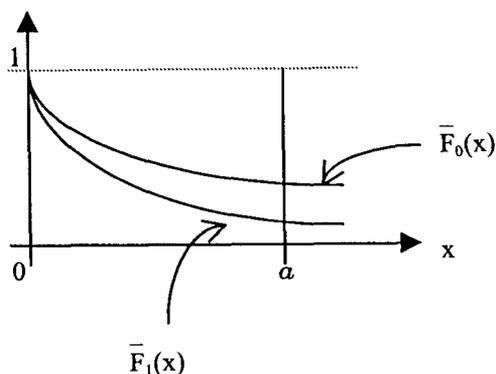


Figura 1.12: $\{\bar{F}_z(x)\}$ depende de z en forma decreciente ($x \geq 0$ es fijo).

Fijando un x definimos la función de z : $\bar{F}_z(x) := 1 - F_z(x)$ ($\bar{F}_z(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$). Según los argumentos de arriba la función $\bar{F}_z(a)$ es decreciente (veánse las Figuras 1.12 y 1.13). En particular, la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$ tiene una única raíz $z_* = z_*(a)$.

Haciendo un estudio similar al comentado en el ejemplo anterior es posible mostrar que $Z_t \rightarrow z_*$ bajo ciertas condiciones, donde $\bar{F}_{z_*}(a) = z_*$.

Obsérvese que el hecho de que una demanda pueda o no ser satisfecha depende excesivamente de la cantidad de producto existente al inicio de cada periodo, es decir del valor de a ; si éste es pequeño comparado con el promedio de la cantidad de producto demandada por unidad de tiempo, la demanda

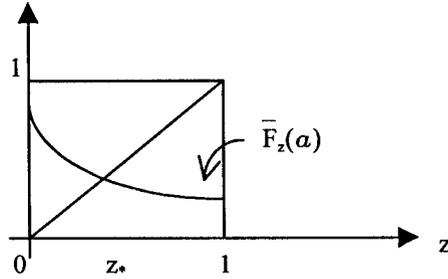


Figura 1.13: Para cada a fijo, $\bar{F}_z(a)$ es una función de z decreciente.

no será satisfecha en su totalidad con mucha frecuencia lo cual obviamente genera menos ganancias para la empresa de las que podría obtener y puede provocar una disminución en la compra del producto. Sin embargo, un valor de $a \gg E(\xi_t)$ tampoco es bueno, ya que la cantidad en existencia del producto estará por encima de la demanda y esto a la larga crea un problema financiero, ya que hay dinero detenido en la empresa.

Ahora, nuestro principal objetivo es *maximizar la ganancia de la empresa*, considerando a a como un parámetro controlable. Esto significa optimizar el parámetro a con respecto al criterio introducido abajo.

Definamos entonces, el proceso $X_t := \xi_t$ que corresponde a la demanda del t –ésimo periodo. Entonces las probabilidades condicionales que hacen que este proceso defina un proceso estocástico no-Markoviano (ξ_t depende de todas las demandas anteriores a ella) están dadas por

$$\begin{aligned} P(X_t \leq x \mid Z_t = z) \\ &\equiv P(\xi_t \leq x \mid Z_t = z) \\ &= F_z(x). \end{aligned}$$

Con una familia dada de funciones de distribución $\{F_z(\cdot)\}$, $z \in [0, 1]$.

En trabajos encontrados en [6, 9, 11] la sucesión de flujo de demandas en diferentes periodos, ξ_1, ξ_2, \dots son *v.a.'s i.i.d.*, en nuestro trabajo no, ya que ξ_t depende de todas las demandas anteriores a ella.

También, introduzcamos la función de costo $g(a, X_t)$ en el t -ésimo periodo ($x^+ := \max(0, x)$, $x \in \Re$) definida como

$$g(a, X_t) := d(a) + \psi((a - \xi_t)^+) + f((\xi_t - a)^+) - h(\min(\xi_t, a)) + b$$

donde,

$d(a)$ - Es el gasto que se hace al producir la cantidad de producto en existencia al principio de cada periodo de tiempo;

$\psi((a - \xi_t)^+)$ - Es la cantidad de dinero detenido en la empresa es decir, el valor de la cantidad de producto que no se vende en un periodo de tiempo;

$f((\xi_t - a)^+)$ - Es la cantidad de dinero adicional que se podría tener, pero no es así, porque no se puede vender lo que no se tiene;

$h(\min(\xi_t, a))$ - Es la ganancia por venta del producto.

b - es una constante escogida de tal manera que permite trabajar con costos no-negativos; tal b siempre existe si todas las funciones escritas son acotadas.

De manera que si consideramos como el criterio de optimización el costo promedio en un intervalo infinito

$$\mathfrak{S}(a, z_o) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} E g(a, X_k)$$

donde $a \in [0, \theta]$ y z_o es el parámetro en F_{Z_o} (la distribución inicial de demanda). Es interesante, como en el ejemplo anterior, hallar una política óptima a_* es decir, una política que satisfaga

$$\mathfrak{S}(a_*, z_o) = \inf_{a \in [0, \theta]} \mathfrak{S}(a, z_o).$$

De nuestros resultados se sigue que para cada a , $\mathfrak{S}(a, z_o)$ no depende de z_o y se determina únicamente por la raíz $z_* = z_*(a)$ de la ecuación $\overline{F}_z(a) = z$; a saber, $\mathfrak{S}(a, z_o) = \int_0^\infty g(a, x) dF_{z_*}(a)$.

Por lo tanto, el problema de optimización de a (*i.e.* de minimización de $\mathfrak{S}(a, z_o)$) se reduce a

$$\text{Minimizar}_{a \in [0, \theta]} \int_0^\infty g(a, x) dF_z(a)$$

$$\text{sujeto a } \overline{F}_z(a) = z.$$

1.3 Planteamiento del problema.

En el caso de la red de comunicaciones hemos definido el proceso X_t como

$$X_t := (\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}), \quad t = 0, 1, \dots$$

Para el problema de almacenamiento también podemos considerar

$$X_t := (\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}), \quad t = 0, 1, \dots$$

donde $\xi_t^{(2)}$ sirve como variable adicional que realmente no está involucrada en el modelo, pero es necesaria para unificar las notaciones en el planteamiento general.

Describamos estos y otros ejemplos posibles en el siguiente esquema: Supongamos que $\{F_z\}$, $z \in [0, 1]$, es alguna familia de funciones de distribución con soporte en $[0, \infty)$ (i.e. la v.a. correspondiente toma valores no-negativos en ese intervalo con probabilidad 1). Sea $z_o \in [0, 1]$ arbitrario pero fijo, $a \in A = [0, \theta]$ llamado “parámetro controlable”, un número, $\xi_k^{(1)}$ es la primera componente del proceso $X_k = (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)})$ y, si X_0, X_1, \dots, X_{t-1} han ocurrido definimos la sucesión aleatoria $\{Z_t\}$ de la siguiente forma

$$Z_t = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} I_{\{\xi_k^{(1)} > a\}}. \quad (1.6)$$

El valor inicial y las probabilidades de transición condicionales para el proceso $\{X_t\}$ están dadas por las siguientes relaciones recurrentes:

1. $Z_0 = z_o \in [0, 1]$; $X_0 = (\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)})$ es el vector aleatorio con la función de distribución conjunta $F_{Z_o}(x)F_{Z_o}(y)$;
2. Para cada $t \geq 1$ si X_0, X_1, \dots, X_{t-1} son realizaciones del proceso $\{X_t\}$ hasta $t - 1$, entonces para $\vec{x} = (x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$

$$\begin{aligned}
P(X_t \leq \vec{x} \mid X_0, X_1, \dots, X_{t-1}) & \quad (1.7) \\
= P(\xi_t^{(1)} \leq x, \xi_t^{(2)} \leq y \mid X_0, X_1, \dots, X_{t-1}) \\
: & = P(\xi_t^{(1)} \leq x, \xi_t^{(2)} \leq y \mid Z_t) \\
: & = F_{Z_t}(x) F_{Z_t}(y)
\end{aligned}$$

es decir, $\xi_t^{(1)}$ y $\xi_t^{(2)}$ son independientes condicionalmente.

Observamos que los valores de Z_t dependen del valor controlable a es decir, nuestro proceso en un sentido está relacionado con los procesos controlables de tiempo discreto [1, 7], en donde las probabilidades de transición $P(X_t \in B \mid X_{t-1}, a_t)$ dependen del estado anterior X_{t-1} y del control a_t .

La sucesión a_t , $t = 0, 1, \dots$ (a_t depende de alguna manera de todos los estados y controles anteriores al momento t) se llama *política de control* [10]. Cuando el control a_t depende solamente del último estado es decir, $a_t = a(X_{t-1})$ las probabilidades de transición $P(X_t \in B \mid X_{t-1}, a(X_{t-1}))$ definen un *proceso de Markov*. Pero en nuestro trabajo los procesos son no-Markovianos para cualquier política de control. Nos restringimos a la clase más simple de las políticas determinísticas y programadas esto es, a_t es constante (que no depende del tiempo ni de los estados). Claro tales políticas son Markovianas, pero en nuestro modelo ellas no resultan ser un proceso de Markov.

Entonces, fijando z_o y a las relaciones (1.6) y (1.7) definen las funciones de transición $P(X_t \leq \vec{x} \mid X_0, X_1, \dots, X_{t-1}, a)$ para cada $t = 0, 1, 2, \dots$ (Aquí a está escrita para subrayar la dependencia de Z_t , de a). Según el bien conocido teorema de Ionescu-Tulcea (véase Apéndice B) estas funciones de transición definen el proceso estocástico X_t de tiempo discreto $t = 0, 1, \dots$. Por lo tanto, a cada z_o y a cada control $a \in [0, \theta]$ corresponde el único proceso estocástico X_0, X_1, X_2, \dots

Para comparar controles, suponemos que la **función de costo** $\mathcal{C}(a, X_t)$ está definida, y es una función medible no negativa en $[0, \theta] \times [0, \infty) \times [0, \infty)$. La función $\mathcal{C}(a, X_t)$ mide el costo que hay que pagar en el instante t si el proceso toma el valor X_t y se usa el control a . Considerando la clase más

simple de políticas estacionarias no dependientes de los estados, definimos el **costo promedio** (en el intervalo infinito) $\mathfrak{S}(a, z_o)$ como:

$$\mathfrak{S}(a, z_o) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E \mathcal{C}(a, X_t) \quad (1.8)$$

el cual siempre existe, puede ser finito o infinito, porque \mathcal{C} es no negativa (el límite puede o no existir).

Esta definición corresponde al planteamiento tradicional en la teoría de los procesos controlables con horizonte de planeación infinito (que sirve para aproximar los sistemas controlables con “funcionamiento largo”).

Entonces la versión (una de las más simples) del control óptimo es buscar a_* tal que

$$\mathfrak{S}(a_*, z_o) = \inf_{a \in A} \mathfrak{S}(a, z_o). \quad (1.9)$$

Este es nuestro planteamiento del problema de optimización. Como vamos a ver, su solución depende del comportamiento de $\bar{F}_z(a)$ como función del parámetro $z \in [0, 1]$.

Al hacer el estudio analítico y experimentos numéricos, que mostraremos más adelante, observamos que $\mathfrak{S}(a, z_o)$ no depende, en general, de z_o y si depende del número y de los valores de las raíces de la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$, donde $\bar{F}_z(a) = 1 - F_z(a)$ y a es fijo. En el caso de la única raíz $z_* = z_*(a)$ encontraremos (bajo algunas hipótesis adicionales) la expresión analítica para $\mathfrak{S}(a, z_o) \equiv \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*(a))$, que reduce el problema de minimizar \mathfrak{S} al siguiente problema de programación no lineal

$$\underset{a \in A}{\text{Minimizar}} \quad \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*)$$

$$\text{sujeto a} \quad \bar{F}_z(a) = z.$$

La clave para obtener este resultado es que para promedios aritméticos Z_t en (1.6), se cumple la ley fuerte de los grandes números: $\{Z_t\}$ converge c.s. a una constante cuando $t \rightarrow \infty$ y esa constante es $z_*(a)$.

En el caso de más de una raíz la situación no es tan simple. Los métodos analíticos usados aquí (veáse [3]) no son aplicables, entonces el problema de optimización de a se ataca por métodos numéricos (en computadora). También, por experimentos de cómputo estableceremos que el problema de optimización planteado puede ser no estable (*i.e.* no robusto). La causa es que la ecuación $\overline{F}_z(a) = z$ puede tener distintos números de raíces para valores de a muy cercanos (bifurcación).

Capítulo 2

CÁLCULO ANALÍTICO DEL COSTO PROMEDIO.

En este capítulo, consideramos que $a \in [0, \theta]$ es fijo.

Nuestro siguiente trabajo consiste en dar una expresión analítica para el costo promedio

$$\mathfrak{S}(a, z_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E C(a, X_t)$$

y para hallar el valor de este límite procederemos de la siguiente forma:

1. Bajo algunas condiciones, mostraremos en forma analítica que $Z_t \rightarrow z_*$ cuando $t \rightarrow \infty$, con z_* un punto fijo de la aplicación $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ (la sucesión $\{Z_t\}$ está definida en (1.6)).
2. El resultado anterior nos servirá para probar que X_t converge débilmente a X_∞ ($X_t \xrightarrow{d} X_\infty$), donde el vector aleatorio X_∞ tiene distribución $F_{z_*}(x)F_{z_*}(y)$.
3. Tal convergencia se utilizará para probar que el $\lim_{t \rightarrow \infty} E C(a, X_t) = E C(a, X_\infty)$, para C acotada y para C no acotada pero con ciertas propiedades.
4. Utilizando el resultado del inciso anterior y el promedio de Cesáro concluiremos que el $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E C(a, X_t) = E C(a, X_\infty)$.

2.1 Estudio analítico de la convergencia de $\{Z_t\}$.

Para entender las notaciones del siguiente teorema recordemos algunos conceptos:

1. El **producto interno** en el espacio vectorial (*e.v.*) real \mathfrak{R}^k es un mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{R}^k \times \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$ definido de la siguiente forma: Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^k$ es decir, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ky_k.$$

2. La **norma** de un vector $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^k$ es un mapeo $\| \cdot \| : \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$ definido como $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$.
3. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ σ -álgebras contenidas en \mathcal{F} , tales que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ entonces $\{\mathcal{F}_n\}$ se denomina **filtración**.

Ahora bien, supongamos que (Ω, \mathcal{F}, P) es un espacio de probabilidad con una filtración $\{\mathcal{F}_n\} \subset \mathcal{F}$. Supongamos también que hemos definido los siguientes objetos:

1. Una sucesión de variables aleatorias $\{Z_n\}$ donde Z_n está adaptada a $\mathcal{F}_n \forall n$ (i.e. Z_n es medible con respecto a $\mathcal{F}_n \forall n$), y toma valores en Γ , un subconjunto dado del espacio Euclideo \mathbb{R}^k ;
2. Una sucesión de variables aleatorias $\{\gamma_n\}$ tal que γ_n es una *v.a.* adaptada a $\mathcal{F}_n \forall n$, $\gamma_n \geq 0$, $\sum \gamma_n = \infty$ y $\sum \gamma_n^2 < \infty$, casi seguramente;
3. Una serie de perturbaciones $\{\varepsilon_n\}$ tal que la variable aleatoria $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^k$ está adaptada a $\mathcal{F}_n \forall n$.

Para una función continua h , con dominio en $\bar{\Gamma}$ (cerradura del conjunto Γ), suponemos que los valores de Z_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ se relacionan mediante la siguiente ecuación recurrente:

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_n h(Z_n) + \gamma_n \varepsilon_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Una pregunta natural es la siguiente: ¿Cuándo la $\{Z_{n+1}\}$ converge con probabilidad 1? La respuesta nos la da el siguiente teorema, cuya formulación y demostración están en [3].

De hecho, luego aplicaremos un caso particular del siguiente resultado, pero preferimos dar la formulación general teniendo en mente las generalizaciones posibles de los modelos controlables considerados en este trabajo.

Teorema 1. *Perturbación por un ruido* (tomado de [3]).

Sea una función $V : G \rightarrow \mathfrak{R}^+ = [0, \infty)$ donde G es un subconjunto abierto convexo de \mathfrak{R}^k tal que $\bar{\Gamma} \subset G$. Supongamos que Γ está acotada o que el $\lim_{x \in \Gamma} V(x) = \infty$. Además hacemos las siguientes suposiciones: (*const* significa constante)

a) $\|h(z)\|^2 \leq \text{const}(V(z) + 1), \quad z \in \text{conv}(\bar{\Gamma});$

b) $V \in C^1(G)$, su gradiente, ∇V , satisface la condición de Lipschitz en la $\text{conv}(\bar{\Gamma})$ es decir,

$$\|\nabla V(z) - \nabla V(y)\| \leq \text{const} \|z - y\| \quad \forall z, y \in \text{conv}(\bar{\Gamma});$$

c) $\langle \nabla V, h \rangle \leq 0$ en Γ ;

d) $\{ \|\varepsilon_{n+1}\|^2 | \mathcal{F}_n \} = O(1 + V(Z_n))$, (i.e. $\left\{ \frac{E[\|\varepsilon_{n+1}\|^2 | \mathcal{F}_n]}{1+V(Z_n)} \right\}$ es una sucesión acotada);

e) $E[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$ c.s..

Entonces ocurren las siguientes propiedades:

1. Casi seguramente $\{V(Z_n)\}$ converge y $\sum \gamma_n \langle \nabla V(Z_n), h(Z_n) \rangle$ converge.
2. Si existe un punto $z_* \in \bar{\Gamma}$ tal que $h(z_*) = 0$ y el $\langle h, \nabla V \rangle < 0$ en $\bar{\Gamma} \setminus z_*$ entonces $V(Z_n) \xrightarrow{\text{c.s.}} V(z_*)$.
3. Si $V(z_*) = 0$ y $V(z) > 0$ para $z \in \bar{\Gamma} \setminus z_*$ entonces $\{Z_n\} \xrightarrow{\text{c.s.}} z_*$. Tal punto z_* se dice que es **fuertemente atractivo**.

Verifiquemos que en nuestro caso la sucesión Z_t definida en (1.6) satisface todas las hipótesis del teorema, bajo algunas condiciones adicionales (veáanse Suposiciones 1, 2 y 3, abajo), con $V(z) = (\bar{F}_z(a) - z)^2$, $z \in [0, 1]$, definida para $z \in \mathfrak{R} \setminus [0, 1]$ en una manera arbitraria, pero tal que $V \in C^1(\mathfrak{R})$ y está acotada.

Tenemos (veáse (1.6)) que para $Z_0 = z_o \in [0, 1] = \Gamma = \bar{\Gamma} = \text{conv}(\bar{\Gamma})$:

$$\begin{aligned}
Z_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n I_{\{\xi_i^{(1)} > a\}} \\
&= \frac{n}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n I_{\{\xi_i^{(1)} > a\}} \\
&= \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{\xi_i^{(1)} > a\}} \right) + \frac{1}{n+1} I_{\{\xi_n^{(1)} > a\}} \\
&= \frac{n}{n+1} Z_n + \frac{1}{n+1} I_{\{\xi_n^{(1)} > a\}} \\
&= Z_n - \frac{1}{n+1} Z_n + \frac{1}{n+1} I_{\{\xi_n^{(1)} > a\}} - \frac{1}{n+1} P(\xi_n^{(1)} > a \mid Z_n) \\
&\quad + \frac{1}{n+1} P(\xi_n^{(1)} > a \mid Z_n) \\
&= Z_n + \frac{1}{n+1} (P(\xi_n^{(1)} > a \mid Z_n) - Z_n) \\
&\quad + \frac{1}{n+1} (I_{\{\xi_n^{(1)} > a\}} - P(\xi_n^{(1)} > a \mid Z_n)) \\
&= Z_n + \frac{1}{n+1} (\bar{F}_{Z_n}(a) - Z_n) + \frac{1}{n+1} (I_{\{\xi_n^{(1)} > a\}} - \bar{F}_{Z_n}(a)).
\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene porque la $P(\xi_n^{(1)} > a \mid Z_n) = 1 - P(\xi_n^{(1)} \leq a \mid Z_n) = 1 - F_{z_n}(a) = \bar{F}_{Z_n}(a)$, ya que $\xi_n^{(1)}$ tiene distribución condicional F_{Z_n} .

Al comparar esta nueva expresión de Z_{n+1} con la ecuación (2.1) tenemos que se cumple lo siguiente:

- Z_n es medible con respecto a $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, $\forall n$;

- $\gamma_n := \frac{1}{n+1}$ está adaptada a \mathcal{F}_n , $\forall n$ (son constantes). También, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n > 0$, la $\sum \gamma_n = \sum \frac{1}{n+1} = \infty$ y la $\sum \gamma_n^2 = \sum \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 < \infty$;
- $\varepsilon_{n+1} := I_{\{\xi_n^{(1)} > a\}} - \overline{F}_{Z_n}(a)$ es una v.a. adaptada a $\mathcal{F}_n \forall n$.

Además,

- Γ es un conjunto acotado;
- $h : \overline{\Gamma} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $h(z) = \overline{F}_z(a) - z$, $z \in [0, 1]$, es una función continua (por la suposición 1, dada más adelante).

Verifiquemos ahora que se cumplen los incisos del teorema anterior.

a) ¿ $\|h(z)\|^2 \leq \text{const} (V(z) + 1)$, $z \in [0, 1]$? Sí, porque

$$\begin{aligned} \|h(z)\|^2 &= |h(z)|^2 \\ &= h^2(z) \\ &= V(z) \\ &\leq V(z) + 1. \end{aligned}$$

b) ¿ $V \in C^1(G)$ y el ∇V satisface la condición de Lipschitz? Sí, por la

Suposición 1: $\frac{d^2}{dz^2} \overline{F}_z(a)$ existe y está acotada en $[0, 1]$.

Así, $V \in C^1(G)$ ya que la $\frac{d^2}{dz^2} \overline{F}_z(a)$ existe y como,

$$V(z) = (\overline{F}_z(a) - z)^2$$

tenemos que

$$\nabla V(z) = V'(z) = 2(\overline{F}_z(a) - z) \left(\frac{d}{dz} \overline{F}_z(a) - 1 \right),$$

luego, por el teorema del valor medio se cumple, $\forall z, y \in [0, 1]$, que

$$|V'(z) - V'(y)| = |V''(c)| |z - y| \leq \sup_{c \in [0, 1]} |V''(c)| |z - y|$$

entonces V' satisface la condición de Lipschitz porque

$$V''(z) = 2(\overline{F}_z(a) - z) \left(\frac{d^2}{dz^2} \overline{F}_z(a) \right) + 2 \left(\frac{d}{dz} \overline{F}_z(a) - 1 \right)^2$$

existe y está acotada, por la suposición 1 (tal suposición implica que la

$\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a)$ es continua en el compacto $[0, 1]$ y por eso es acotada). Finalmente,
 $\sup_{z \in [0,1]} |V''(z)| < \infty$.

c) ¿ $\langle \mathbf{V}', \mathbf{h} \rangle \leq 0$ en Γ ? Sí, si hacemos la siguiente

Suposición 2: $\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) \leq 1 \quad \forall a \in [0, \theta] \quad y \quad z \in [0, 1]$.

ya que,

$\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) \leq 1$ es decir, $\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) - 1 \leq 0$, implica que
 $2(\bar{F}_z(a) - z)^2 \left(\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) - 1\right) \leq 0$.

d) ¿ $E[\|\varepsilon_{n+1}\|^2 | \mathcal{F}_n] = O(1 + V(Z_n))$?

Es decir, ¿la $\left\{ \frac{E[\|\varepsilon_{n+1}\|^2 | \mathcal{F}_n]}{1+V(Z_n)} \right\}$ es una sucesión acotada? Sí, porque las ε_n 's
 $= I_{\{\xi_{n-1}^{(1)} > a\}} - \bar{F}_{Z_{n-1}}(a)$ están acotadas.

e) ¿ $E[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$ c.s.? Sí, porque

$E[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[I_{\{\xi_n^{(1)} > a\}} | \mathcal{F}_n] - E[\bar{F}_{Z_n}(a) | \mathcal{F}_n]$. Pero la v.a. $\bar{F}_{Z_n}(a)$
es medible con respecto a la σ -álgebra $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ (ya que Z_n
es función de X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) entonces, $E[\bar{F}_{Z_n}(a) | \mathcal{F}_n] = \bar{F}_{Z_n}(a)$. Luego,
por la propiedad para funciones características, $E[I_{\{\xi_n^{(1)} > a\}} | \mathcal{F}_n] = P(\xi_n^{(1)} > a | \mathcal{F}_n) = P(\xi_n^{(1)} > a | Z_n) = \bar{F}_{Z_n}(a)$. Por lo tanto, el $E[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$ c.s..

Ahora para aplicar la conclusión 3 del teorema anterior hacemos la última suposición

Suposición 3: La ecuación $\bar{F}_z(a) = z$ tiene la única raíz denotada por z_* .

Esta suposición implica que $V(z_*) = (\bar{F}_{z_*}(a) - z_*)^2 = 0$ y $V(z) > 0$ para $z \neq z_*$. Por lo tanto tiene lugar el siguiente resultado.

Proposición 1.

Bajo las Suposiciones 1-3, $Z_t \xrightarrow{c.s.} z_*$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde z_* es el único punto fijo de la aplicación $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ con a fijo.

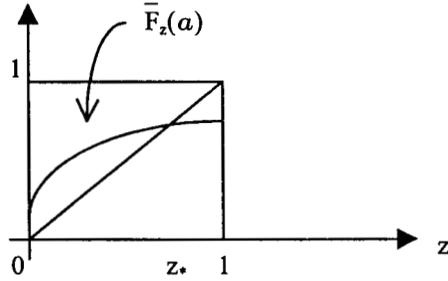


Figura 2.1: $\bar{F}_z(a) = z$ tiene la única raíz z_* .

Observación 1.

La Suposición 3 se cumple automáticamente si en lugar de la Suposición 2 usamos su versión más fuerte: $\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) < 1$, $z \in [0, 1]$.

Lo último implica que la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$ tiene la única raíz (denotada por z_* , véase la Figura 2.1).

En el siguiente capítulo analizaremos numéricamente el comportamiento asintótico de $\{Z_t\}$, donde las Suposiciones 1, 2 y 3 no se cumplen en su totalidad.

2.2 Una convergencia en distribución.

Definición 1. *Convergencia débil.*

Los k -vectores aleatorios X_n convergen en distribución o débilmente al vector aleatorio X si para toda $f(X) \in C_o$ (con C_o la clase de todas las funciones continuas y acotadas en \mathfrak{R}^k) se tiene que $E f(X_n) \rightarrow E f(X)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto se escribe como $X_n \xrightarrow{d} X$.

Proposición 2.

Supongamos que para cada $x \geq 0$ la función $z \rightarrow F_z(x)$ es continua, $Z_t \xrightarrow{c.s.} z_*$, donde z_* es un punto fijo de $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ y $X_t = (\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})$, definido en (1.7), entonces $X_t \xrightarrow{d} X_\infty = (\xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)})$ donde el vector aleatorio $(\xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)})$ tiene la función de distribución $F_{z_*}(x)F_{z_*}(y)$.

Demostración:

Para que $X_t \xrightarrow{d} X_\infty$ es suficiente que la función de distribución conjunta $F_{\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}}(x, y)$, converja para cada $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$. Así tenemos que

$$\begin{aligned}
 F_{\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}}(x, y) &= P \left\{ \xi_t^{(1)} \leq x, \xi_t^{(2)} \leq y \right\} \\
 &= E \left\{ P(\xi_t^{(1)} \leq x, \xi_t^{(2)} \leq y \mid Z_t) \right\} \\
 &\quad \text{(esperanza condicional)} \\
 &= E \left\{ P(\xi_t^{(1)} \leq x \mid Z_t) P(\xi_t^{(2)} \leq y \mid Z_t) \right\} \\
 &\quad \text{(por la indep. cond. dada en (1.7))} \\
 &= E \{ F_{Z_t}(x) F_{Z_t}(y) \} \\
 &\quad \text{(por (1.7))} \\
 &\rightarrow E \{ F_{z_*}(x) F_{z_*}(y) \} \\
 &\quad (F_{Z_t}(x) \xrightarrow{c.s.} F_{z_*}(x) \\
 &\quad (F_{Z_t} \text{ función continua de } Z_t \text{ y } Z_t \xrightarrow{c.s.} z_*) \\
 &\quad \text{y por Teorema de Convergencia} \\
 &\quad \text{de Lebesgue [2])} \\
 &= F_{z_*}(x) F_{z_*}(y) \quad \text{(ya que no es v.a.)}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_t = (\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}) \xrightarrow{d} X_\infty = (\xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)})$ y el vector aleatorio límite $X_\infty = (\xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)})$ tiene la función de distribución $F_{z_*}(x)F_{z_*}(y)$. Lo anterior también prueba que las *v.a.*'s $\xi_\infty^{(1)}$ y $\xi_\infty^{(2)}$ son independientes y cada una tiene la función de distribución F_{z_*} . ■

2.3 ¡Existe el límite del valor esperado de la función de costo!

Para probar este resultado utilizamos los siguientes dos lemas:

Lema 1. [2].

Sea $\{Y_n\}$ una sucesión de *v.a.*'s no negativas y supongamos que

1. $Y_n \xrightarrow{d} Y$ y
2. $\exists p > 1$ tal que $\sup_n E Y_n^p < \infty$

entonces $E Y_n \rightarrow E Y$.

Lema 2.

$\forall a, b, c \geq 0$ y $p \geq 1$,
 $(a + b + c)^p \leq M(p) [a^p + b^p + c^p]$.

Proposición 3. $\lim_{t \rightarrow \infty} E C(a, X_t) = E C(a, X_\infty)$.

Supongamos que:

1. $X_t = (\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}) \xrightarrow{d} X_\infty = (\xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)})$ donde las *v.a.*'s $\xi_\infty^{(1)}$ y $\xi_\infty^{(2)}$ son *i.i.d.* con distribución F_{z^*} ;
2. $C(a, \vec{x}) = C(a, x, y) \forall a$ y $\vec{x} \in \mathfrak{R}_+^2$, es una función continua en x & y , además existen $K_1, K_2 < \infty$ tal que $\sup_{a \in A} C(a, x, y) \leq K_1 + K_2(x + y) \forall \vec{x} \in \mathfrak{R}_+^2$;
3. $\exists p > 1$ tal que $\sup_{z \in [0,1]} \int_0^\infty x^p dF_z(x) < \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} E C(a, \xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}) &\rightarrow E C(a, \xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)}) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty C(a, x, y) dF_{z^*}(x) dF_{z^*}(y). \end{aligned}$$

Demostración:

Sea $Y_t = C(a, \xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})$ y $Y = C(a, \xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)})$. Verifiquemos que $Y_t \xrightarrow{d} Y$ es decir, para toda función ϕ continua y acotada se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} E \phi(Y_t) = E \phi(Y)$:

$$\begin{aligned} E \phi(Y_t) &= E \phi(C(a, \xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})) \\ &= E (\phi \circ C)(a, \xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} E (\phi \circ C)(a, \xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)}) \\ &= E \phi(C(a, \xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)})) \\ &= E \phi(Y). \end{aligned}$$

Tal convergencia ocurre debido a que $\phi \circ C$ es una función continua de \mathfrak{R}^2 en \mathfrak{R} (por ser composición de funciones continuas), acotada, ya que ϕ es acotada y porque $(\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}) \xrightarrow{d} (\xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)})$.

Además, si $p > 1$, como en la hipótesis 3, entonces

$$\begin{aligned} E Y_t^p &= E [C(a, \xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})]^p \\ &\leq E \left\{ \sup_{a \in A} [C(a, \xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})]^p \right\} \\ &\leq E \{K_1 + K_2(\xi_t^{(1)} + \xi_t^{(2)})\}^p \text{ (hipótesis 2)} \\ &\leq M(p) (K_1^p + K_2^p E(\xi_t^{(1)})^p + K_2^p E(\xi_t^{(2)})^p) \\ &< \infty \end{aligned}$$

las dos últimas desigualdades se siguen del lema 2 y del hecho de que $E(\xi_t^{(i)})^p = E \{E(\xi_t^{(i)})^p | Z_t\} = E \int_0^\infty x^p dF_{Z_t}(x) \leq \sup_{z \in [0,1]} \int_0^\infty x^p dF_z(x) < \infty$,

$i = 1, 2$, por la hipótesis 3.

Como se cumplen las hipótesis del lema 1 tenemos que $E(C(a, \xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})) = E(Y_t) \rightarrow E(Y) = E(C(a, \xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)}))$. ■

2.4 Expresión analítica para el costo promedio.

Proposición 4. $\mathfrak{S}(a, z_o) \equiv \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*) = E \mathcal{C}(a, X_\infty)$.

Bajo las Suposiciones 1-3 y las hipótesis 2 y 3 de la Proposición 3 se cumple que

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(a, z_o) &= E \mathcal{C}(a, X_\infty) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{C}(a, x, y) dF_{z_*}(x) dF_{z_*}(y) \end{aligned}$$

donde z_* es la única raíz de la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$.

Demostración:

La Proposición 1 implica que $Z_t \xrightarrow{c.s.} z_*$ y por la Proposición 2, $X_t \xrightarrow{d} X_\infty$. Aplicando la Proposición 3 tenemos que $E \mathcal{C}(a, X_t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E \mathcal{C}(a, X_\infty)$. Entonces (veáse la Definición de \mathfrak{S} en (1.8))

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(a, z_o) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E \mathcal{C}(a, X_t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} E \mathcal{C}(a, X_t) \text{ (ver Apéndice B)} \\ &= E \mathcal{C}(a, X_\infty). \end{aligned}$$

Finalmente, en la Proposición 2 hemos demostrado que las componentes $\xi_\infty^{(1)}$ y $\xi_\infty^{(2)}$ del vector aleatorio X_∞ son independientes y tienen la función de distribución F_{z_*} . Entonces

$$\begin{aligned} E \mathcal{C}(a, X_\infty) &\equiv E \mathcal{C}(a, \xi_\infty^{(1)}, \xi_\infty^{(2)}) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{C}(a, x, y) dF_{z_*}(x) dF_{z_*}(y). \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

RESULTADOS NUMÉRICOS.

En este capítulo mostramos los resultados que obtuvimos al hacer uso de la computadora para los casos en los cuales no tenemos información teórica.

3.1 Convergencia numérica de Z_t .

En esta sección mencionamos algunos resultados del estudio numérico de la sucesión de las *v.a.*'s $\{Z_t\}$ definida en (1.6).

Sabemos por la Proposición 1, de la sección 2.1, que si la $\frac{d^2}{dz^2}\overline{F}_z(a)$ existe y está acotada y si la $\frac{d}{dz}\overline{F}_z(a) < 1$ entonces $Z_n \xrightarrow{c.s.} z_*$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde z_* es el único punto fijo de la aplicación $z \rightarrow \overline{F}_z(a)$, con a fijo.

Sin embargo, nos propusimos investigar el comportamiento asintótico de Z_t , con t suficientemente grande, cuando no todas las hipótesis de esta Proposición se cumplen. Consideramos los siguientes dos casos:

1. Funciones de z , $\overline{F}_z(a)$ con a fijo y $z \in [0, 1]$ cuya segunda derivada existe pero no está acotada, la aplicación $z \rightarrow \overline{F}_z(a)$ tiene sólo un punto fijo (z_*), y la primera derivada de $\overline{F}_z(a)$ es mayor que 1 para algunos intervalos que no contienen a z_* (y no está acotada), como se muestra en la Figura 3.1.

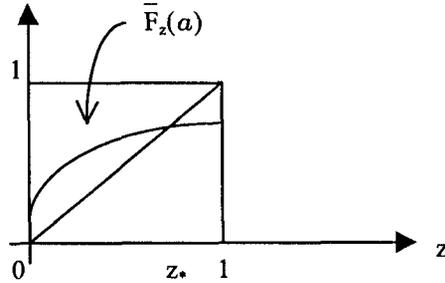


Figura 3.1: Aplicación que tiene derivada < 1 en alguna vecindad de su punto fijo.

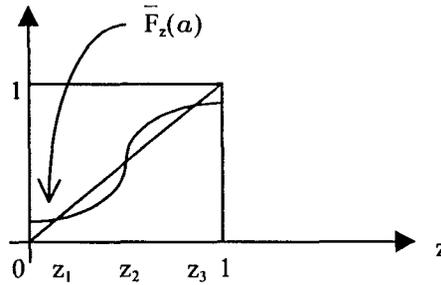


Figura 3.2: Aplicación con dos raíces estables y una inestable.

2. También la primera derivada de $\bar{F}_z(a)$ es mayor que 1 en alguna parte del intervalo $[0, 1]$ pero ahora, $z \rightarrow \bar{F}_z(a)$ tiene 3 puntos fijos (*i.e.* hay 3 raíces de la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$), como se observa en la Figura 3.2.

El procedimiento que seguimos fue el siguiente: Primero observamos que Z_t puede ser expresado como

$$\begin{aligned}
 Z_{t+1} &= \frac{1}{t+1} \sum_{k=0}^t I_{\{\xi_k^{(1)} > a\}} \\
 &= \frac{1}{t+1} \frac{t}{t} \left(\sum_{k=0}^{t-1} I_{\{\xi_k^{(1)} > a\}} + I_{\{\xi_t^{(1)} > a\}} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{t+1} Z_t + \frac{1}{t+1} I_{\{\xi_t^{(1)} > a\}}$$

la cual es una forma recursiva para hallar valores de Z_t , con $t = 0, 1, \dots$ ($Z_0 \in [0, 1]$). Así Z_{t+1} depende sólo del valor de Z_t y del valor de $I_{\{\xi_t^{(1)} > a\}}$ donde,

$$I_{\{\xi_t^{(1)} > a\}} = \begin{cases} 1, & \xi_t^{(1)} > a \\ 0, & \xi_t^{(1)} \leq a \end{cases}$$

y, la $P(\xi_t^{(1)} > a) = \bar{F}_{Z_t}(a) = 1 - F_{Z_t}(a) = 1 - P(\xi_t^{(1)} \leq a)$.

Por ejemplo, para $t = 0$,

$$\begin{aligned} Z_1 &= I_{\{\xi_0^{(1)} > a\}} \\ &= \begin{cases} 1, & \xi_0^{(1)} > a \\ 0, & \xi_0^{(1)} \leq a \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{con } P(Z_1 = 1) = q = \bar{F}_{Z_0}(a) \\ 0, & \text{con } P(Z_1 = 0) = p = F_{Z_0}(a) \end{cases} \end{aligned}$$

donde $Z_0 = z_0 \in [0, 1]$ es un número fijo (valor inicial elegido).

Al programar este algoritmo iterativo para hallar el valor de Z_t , con t suficientemente grande, fue necesario considerar funciones $\varphi(z)$ que tuvieran un comportamiento similar al de la función $\bar{F}_z(a)$, $z \in [0, 1]$, discutido en la sección 1.1 es decir, introducimos la nueva notación (para a fijo), más corta, $\varphi(z) \equiv \bar{F}_z(a)$. Primero estudiamos la convergencia de $\{Z_t\}$ para funciones $\varphi(z) \equiv \bar{F}_z(a)$ que tienen las siguientes características:

- i) $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- ii) φ es una función creciente en su dominio.
- iii) La ecuación $\varphi(z) = z$ tiene sólo una raíz denotada por z_* (véase la Figura 3.1).
- iv) $\varphi'(z) \geq 1$ en alguna parte del intervalo $[0, 1]$ que no contiene a la raíz z_* .

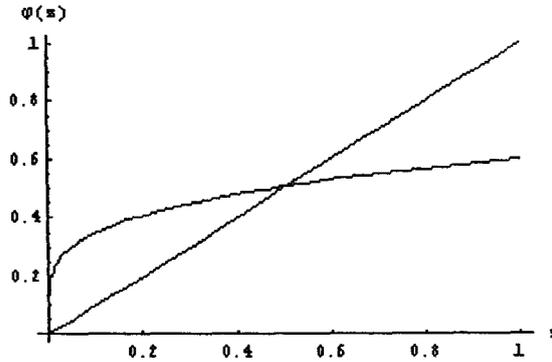


Figura 3.3: $\varphi'(z) \geq 1$, para algunos $z \in [0, 1]$.

v) $\varphi''(z)$ existe en $[0, 1]$ pero no está acotada.

Concretamente consideramos la función $\varphi(z) = c + bz^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, cuya gráfica se muestra en la Figura 3.3.

Y, en nuestro programa (realizado en el Lenguaje de Programación “Mathematica”), para decidir qué valor tomaba $I_{\{\xi_t^{(1)} > a\}}$ hicimos lo siguiente: Definimos $\overline{F}_{Z_t}(a) := \varphi(Z_t)$ y

1. Evaluamos $\varphi(Z_t)$;
2. Generamos un número pseudo-aleatorio ($random[]$) uniformemente distribuido en $[0, 1]$;
3. Comparamos $random[]$ con $\varphi(Z_t)$; si $random[] \leq \varphi(Z_t)$ entonces tenemos que $I_{\{\xi_t^{(1)} > a\}} = 1$ en caso contrario, $I_{\{\xi_t^{(1)} > a\}} = 0$.

Del mismo modo procedimos para ver numéricamente cuál era el comportamiento asintótico de $\{Z_t\}$ cuando la aplicación $z \rightarrow \varphi(z)$, con $\varphi(z) \equiv \overline{F}_z(a)$, tiene 3 puntos fijos (*i.e.* la ecuación $\varphi(z) = z$ tiene 3 raíces - dos estables y una inestable). Observamos que en este caso las hipótesis de la Proposición 1 seguramente no se cumplen (la derivada $\varphi'(z)$ debe ser mayor que 1 en algún subintervalo (o subintervalos) del intervalo $[0, 1]$ -

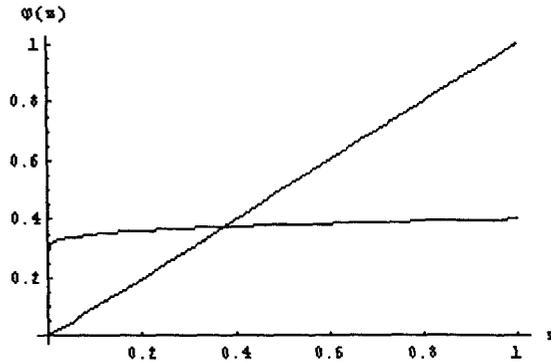


Figura 3.4: $\varphi(z) = 0.3 + 0.1 z^{0.3}$. Su único punto fijo es $z_* = 0.374478$.

veáse la Figura 3.2). Específicamente trabajamos con la función $\varphi(z) = -2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95)$ cuya gráfica se muestra en la Figura (3.12).

Veamos los resultados obtenidos en cada caso.

3.1.1 $\varphi(z) = z$ tiene una raíz.

Aquí hemos considerado funciones de la forma $\varphi(z) = c + bz^\alpha$, con $\alpha \in [0, 1]$. Por ejemplo, si $c = 0.3$, $b = 0.1$ y $\alpha = 0.3$, la función $\varphi(z)$ correspondiente se muestra en la Figura 3.4 para la cual, $z_* = 0.374478$ (punto fijo de $z \rightarrow \varphi(z)$). La Figura 3.5 corresponde a la gráfica de $\varphi'(z)$. Obsérvese que en este ejemplo la derivada de la función $\varphi(z)$ en una vecindad de z_* es casi cero y no está acotada superiormente en $[0, 1]$.

La Figura 3.6 muestra el comportamiento asintótico de $\{Z_t\}$ con $t = 0, 1, \dots, 10000$, donde $z_0 = 0$.

En la Figura 3.7 aparece el $error = |Z_t - z_*|$ que es menor a 0.005 a partir de $t \approx 6500$, que puede ser interpretado como la convergencia suficiente rápida de $\{Z_t\}$ (debido a que $\varphi'(z_*) \approx 0$).

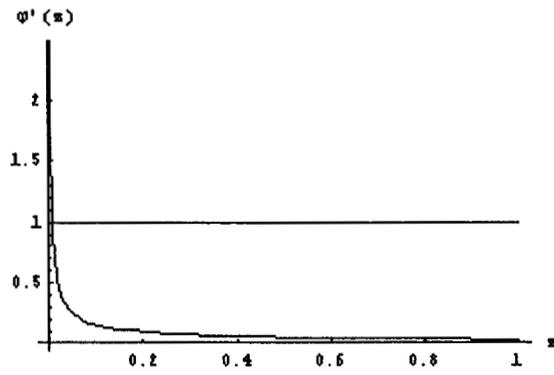


Figura 3.5: $\varphi'(z) \approx 0$, con $z \in B(z_*, r)$.

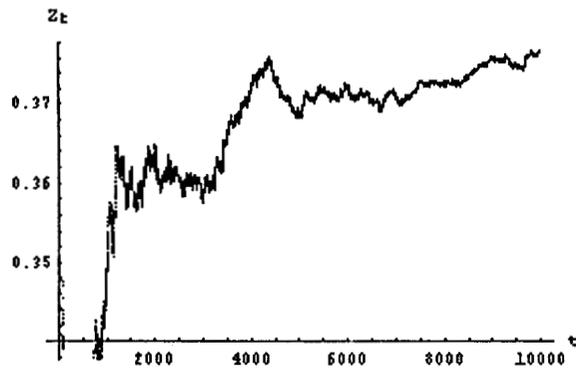


Figura 3.6: $\{Z_t\}$ se aproxima a $z_* = 0.374478$ cuando t crece ($z_o = 0$).

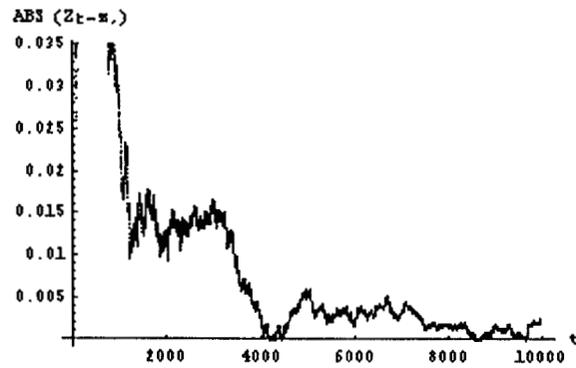


Figura 3.7: $error = |Z_t - z_*| < 0.005$ a partir de $t \approx 6500$.

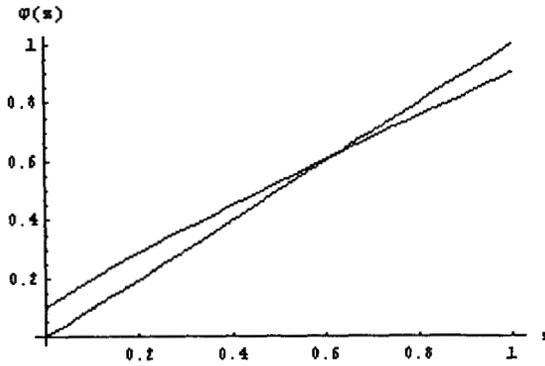


Figura 3.8: $\varphi(z) = 0.1 + 0.8 z^{0.9}$. Su único punto fijo es $z_* = 0.62117$.

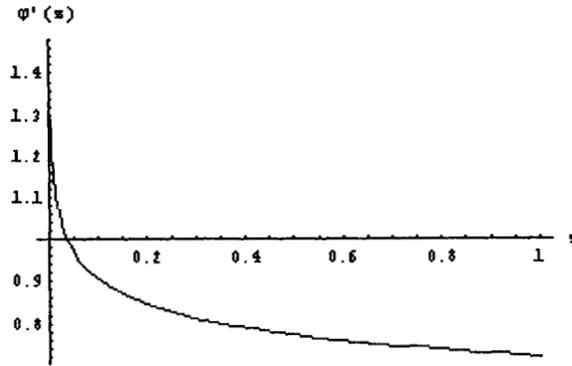


Figura 3.9: $\varphi'(z) \approx 1$, con $z \in B(z_*, r)$.

Observamos que la rapidez de convergencia no depende del valor inicial z_0 . Sin embargo, nos dimos cuenta que ésta sí depende de la derivada de la función en una vecindad del punto fijo z_* . Por ejemplo, en la Figura 3.8 mostramos una función cuya $\varphi'(z) \approx 1 \forall z$ en alguna vecindad de $z_* = 0.62117$, para la cual consideramos $c = 0.1$, $b = 0.8$ y $\alpha = 0.9$. La Figura 3.9 corresponde a la gráfica de $\varphi'(z)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Observemos en la Figura 3.10 el comportamiento de $\{Z_t\}$ cuando t toma valores de 0 a 10000 para $z_0 = 0$; En la Figura 3.11 se aprecia el *error* $|Z_t - z_*|$ correspondiente.

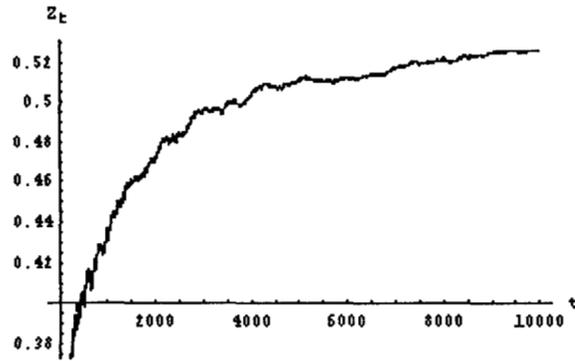


Figura 3.10: El proceso $\{Z_t\}$ se aproxima menos rápido a la raíz de la función.

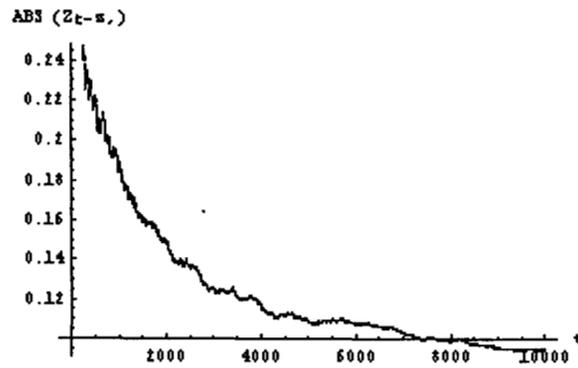


Figura 3.11: $error = |Z_t - z_*| > 0.09$ en $t = 10000$.

Y Podemos observar que en $t = 10000$ se tiene todavía un *error* superior a 0.09, mayor que cuando $\varphi'(z) \approx 0$, con z en alguna vecindad del punto fijo de la aplicación $z \rightarrow \varphi(z)$.

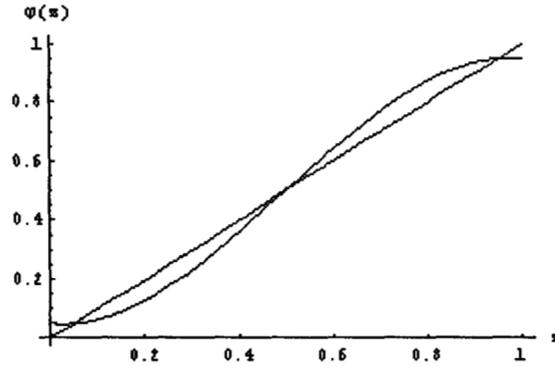


Figura 3.12: $\varphi(z) = -2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95)$, (tiene 3 raíces: $z_1 = 0.05$, $z_2 = 0.5$ y $z_3 = 0.95$).

Resumiendo, en el caso analítico, la convergencia de $\{Z_t\}$ al único punto fijo z_* de la aplicación $z \rightarrow \overline{F}_z(a)$ está garantizada si $\frac{d}{dz}\overline{F}_z(a)$ existe y está acotada y si $\frac{d}{dz}\overline{F}_z(a) < 1$, sin embargo, hemos considerado funciones $\varphi(z)$ para las cuales las dos derivadas $\varphi'(z)$ y $\varphi''(z)$ existen, y no están acotadas; pero, $\varphi'(z) < 1$ en alguna vecindad de z_* , pudiendo ser mayor o igual que 1 en puntos fuera de tal vecindad, en el interior del intervalo $[0, 1]$, y los resultados numéricos que obtuvimos muestran que también se tiene un comportamiento asintótico de $\{Z_t\}$ a la recta horizontal z_* , pero que esta convergencia es más rápida o más lenta dependiendo del valor de $\varphi'(z)$ para z en una vecindad de z_* contenida en el intervalo $[0, 1]$, lo cual era lo que intuitivamente esperábamos porque obsérvese en las gráficas 3.4 y 3.8 cuál es el camino que debe recorrer $\{Z_t\}$ partiendo de $z_0 = 0$ para llegar a z_* ; éste es mucho más fácil cuando $\varphi'(z) \approx 0$, porque es menos inclinado que cuando $\varphi'(z) \approx 1$.

3.1.2 $\varphi(z) = z$ tiene tres raíces.

Para analizar este caso consideramos específicamente la función $\varphi(z) = -2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95)$, tal que $\varphi(z) = z$ tiene 3 raíces: $z_1 = 0.05$, $z_2 = 0.5$ y $z_3 = 0.95$, cuya gráfica es la Figura 3.12.

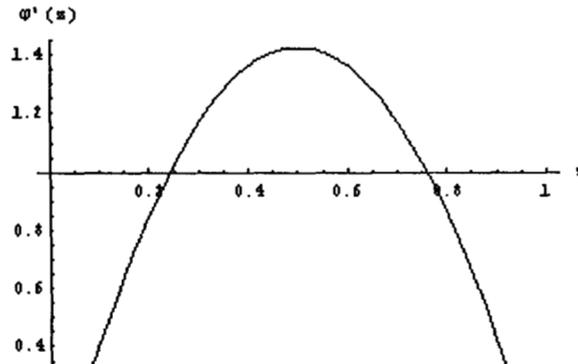


Figura 3.13: Dos de sus raíces son estables y la otra es inestable.

En la Figura 3.13 se puede observar su derivada: $\varphi'(z_2) > 1$ esto es, z_2 es una **raíz inestable**; además, $\varphi'(z_1), \varphi'(z_3) < 1$ es decir, z_1 y z_3 son **raíces estables** y en nuestro ejemplo $\varphi'(z_1) = \varphi'(z_3)$.

Realizando varias corridas de nuestro programa hemos observado que $\{Z_t\}$ se aproxima a z_1 o a z_3 , raíces estables (variando t en el intervalo $0, 1, \dots, 10000$), pero casi nunca lo hace a la raíz no estable z_2 (veáse la Figura 3.14). Así que consideramos de interés comparar las probabilidades de convergencia de $\{Z_t\}$ a cada una de las raíces estables y observamos que éstas dependen del valor inicial de z_o . Por lo tanto, realizamos 100 corridas del programa para hallar el valor de Z_t para $t = 0, 1, \dots, 10000$ y contamos el número de veces que $Z_t \rightarrow z_1$ y lo denotamos por *cont*, entonces la probabilidad de convergencia de $\{Z_t\}$ a z_1 es estimada por $\frac{\text{cont}}{100}$, por lo que $P(Z_t \rightarrow z_3) = 1 - P(Z_t \rightarrow z_1) = 1 - \frac{\text{cont}}{100}$.

La Figura 3.14 muestra la convergencia de $\{Z_t\}$ a las raíces z_1 y z_3 cuando $z_o = 0.5$, un punto medio entre dichas raíces. Obtuvimos que $P(Z_t \rightarrow z_1) = \frac{43}{100}$, luego $P(Z_t \rightarrow z_2) = \frac{57}{100}$, lo que nos permite concluir que para $z_o = 0.5$, $P(Z_t \rightarrow z_1) \approx P(Z_t \rightarrow z_3)$ (que es lo que naturalmente se esperaba por razones de la simetría).

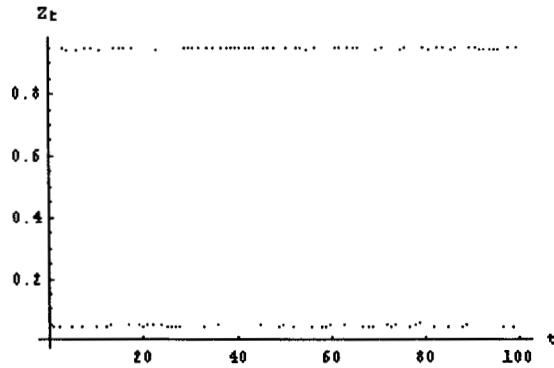


Figura 3.14: El proceso tiende a las raíces estables cuando t crece.

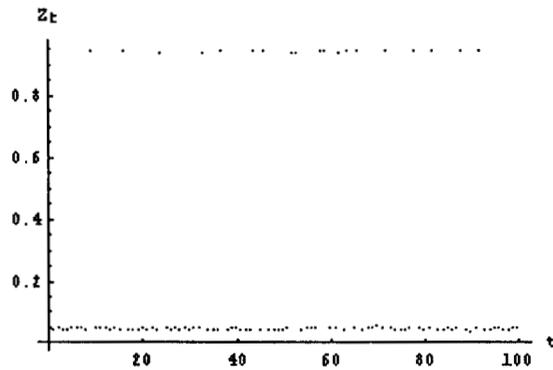


Figura 3.15: Mayor probabilidad de convergencia a la raíz $z_1 = 0.05$.

También observamos que si z_o es más cercano a z_1 que a z_3 entonces $P(Z_t \rightarrow z_1) > P(Z_t \rightarrow z_3)$ como lo muestra la Figura 3.15 donde la $P(Z_t \rightarrow z_1) = \frac{81}{100}$ y $P(Z_t \rightarrow z_3) = \frac{19}{100}$ cuando $z_o = 0.3$, más cercano a z_1 .

Si z_o es más cercano a z_3 que a z_1 , $P(Z_t \rightarrow z_1) < P(Z_t \rightarrow z_3)$; en particular, la Figura 3.16 muestra el caso cuando $z_o = 0.7$ donde $P(Z_t \rightarrow z_1) = \frac{11}{50}$ y $P(Z_t \rightarrow z_3) = \frac{39}{50}$.

Este comportamiento también es justificable porque a partir de cada punto inicial z_o , $\{Z_t\}$ se va a mover en la dirección en la cual disminuya más rápido la pendiente.

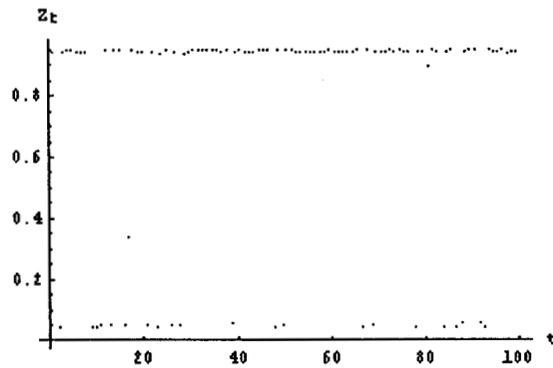


Figura 3.16: Mayor probabilidad de convergencia a la raíz $z_3 = 0.95$.

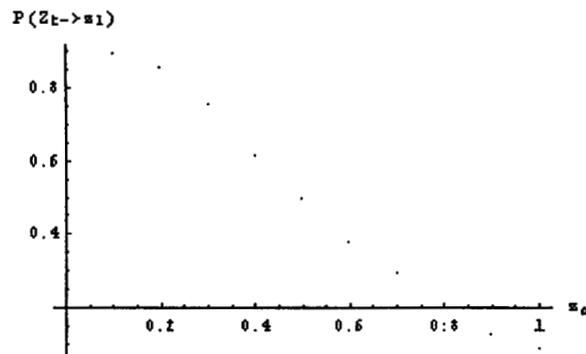


Figura 3.17: Probabilidades de convergencia a la raíz z_1 para diferentes valores iniciales (z_0) del proceso $\{Z_t\}$.

Finalmente, graficamos en la Figura 3.17 las probabilidades de convergencia de $\{Z_t\}$ a z_1 para 10 valores diferentes de z_0 en $[0, 1]$ y observamos un comportamiento decreciente, que está de acuerdo con nuestra intuición.

Los programas que realizan estos cálculos y gráficas se muestra en el Apéndice A de este trabajo.

Resumiendo, en este caso no hay resultados teóricos, pero tenemos los siguientes resultados numéricos: Si consideramos aplicaciones $z \rightarrow \varphi(z)$ que tienen 3 puntos fijos por decir, z_1 , z_2 y z_3 tal que las raíces z_1 y z_3 de $\varphi(z) = z$ son raíces estables y z_2 es una raíz inestable, se puede verificar que la sucesión $\{Z_t\}$ converge asintóticamente a las raíces estables mencionadas con probabilidades que dependen del valor inicial z_0 , donde la probabilidad mayor corresponde a la raíz más cercana a z_0 y muy raramente lo hace a la raíz inestable (Lo último se puede explicar por el hecho de que la computadora no genera números aleatorios “verdaderos” sino sólo pseudoaleatorios).

3.2 Optimización computacional del costo promedio.

Supongamos ahora que para cada $a \in A$ la aplicación $z \rightarrow \overline{F}_z(a)$ tiene un único punto fijo $z_* = z_*(a)$. Al aplicar la Proposición 4 de la sección 2.4 obtuvimos una expresión analítica para el costo promedio $\mathfrak{S}(a, z_o)$ en un intervalo infinito dado (suponiendo las hipótesis de tal Proposición):

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{S}(a, z_o) \\
 \equiv & \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*) \\
 = & E \min \left\{ \xi_\infty^{(1)}, a + \xi_\infty^{(2)} \right\} \\
 = & \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, a + y) dF_{z_*}(x) dF_{z_*}(y)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde z_* es la raíz de la ecuación $z = \overline{F}_z(a)$.

El nuevo símbolo $\tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*)$ lo usamos para subrayar que en esta situación \mathfrak{S} no depende del valor inicial z_o , pero se determina por z_* .

Observación 1. En éste y en los capítulos anteriores consideramos el costo por una etapa dado por la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(a, \overrightarrow{x}) & \equiv \mathcal{C}(a, x, y) \\
 & = \min(x, a + y).
 \end{aligned}$$

(Esta forma viene del ejemplo 1 dado en la sección 1.1).

Para hallar el valor óptimo de a es decir, a_* , definido en (1.9) debemos resolver el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{aligned}
 & \underset{a \in A}{\text{Minimizar}} \quad \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*) \\
 & \text{sujeto a} \quad \overline{F}_{z_*}(a) = z_*
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

(con la función $\tilde{\mathfrak{S}}(a, z_*(a))$ dada en (3.1)); es decir, debemos minimizar el costo promedio sobre todos los valores de $a \in A$ donde $z_* = z_*(a)$ es la raíz de la ecuación $\overline{F}_z(a) = z$.

Cuando la familia de funciones de distribución $\{F_z\}$, $z \in [0, 1]$ (con propiedades descritas en el §1.1) está dada, el último problema puede ser resuelto por algún método estándar de programación no lineal (veáse por ejemplo [8]).

Sin embargo, en el caso general (y más interesante) el número de raíces de la ecuación $\overline{F}_z(a) = z$ en el intervalo $[0, 1]$ puede depender del valor de a que tratamos de optimizar (y por eso lo variamos). En este caso, el problema no se reduce a (3.2) (puesto que el costo $\mathfrak{S}(a, z_0)$ no se expresa por (3.1)) y además, el problema de optimización del control a puede ser no estable (por “bifurcación” - el cambio del número de raíces de $\overline{F}_z(a) = z$ con el cambio de a ; ver §3.3).

Para ver qué pasó en este caso y como encontrar el control óptimo a_* (definido en (1.9) para el costo promedio) numéricamente consideramos el ejemplo particular de la familia de funciones de distribución $\{F_z\}$, $z \in [0, 1]$ de la forma

$$F_z(x) = 1 - e^{-\lambda(z)x}, \quad x \geq 0 \quad (3.3)$$

con el exponente $\lambda(z)$ elegido como la función de $z \in [0, 1]$ de tal manera que para $a \in [0, \theta]$

$$\overline{F}_z(a) = 1 - F_z(a) = e^{-\lambda(z)a} = [\psi(z)]^a \quad (3.4)$$

donde las gráficas de la función $[\psi(z)]^a$ para distintos valores de a están dibujadas en la Figura 3.18 (específicamente $\psi(z) = -2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95)$, $z \in [0, 1]$, $a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2, 2.2$). En este ejemplo es importante que para $a = 0$ la ecuación $\overline{F}_z(a) = z$ (o bien, $[\psi(z)]^a = z$) tiene la única raíz $z_* = z_*(a) \approx 1$, luego con el incremento de a la ecuación $[\psi(z)]^a = z$ sigue teniendo una única raíz $z_*(a)$ (menor, localizada “cerca de 1”) pero para un cierto valor de a (el primer punto de “bifurcación”) aparecen tres raíces de $[\psi(z)]^a = z$ (dos estables - cercanas a 0 y a 1, y una inestable entre ellas), véase la Fig. 3.18. Al seguir aumentando

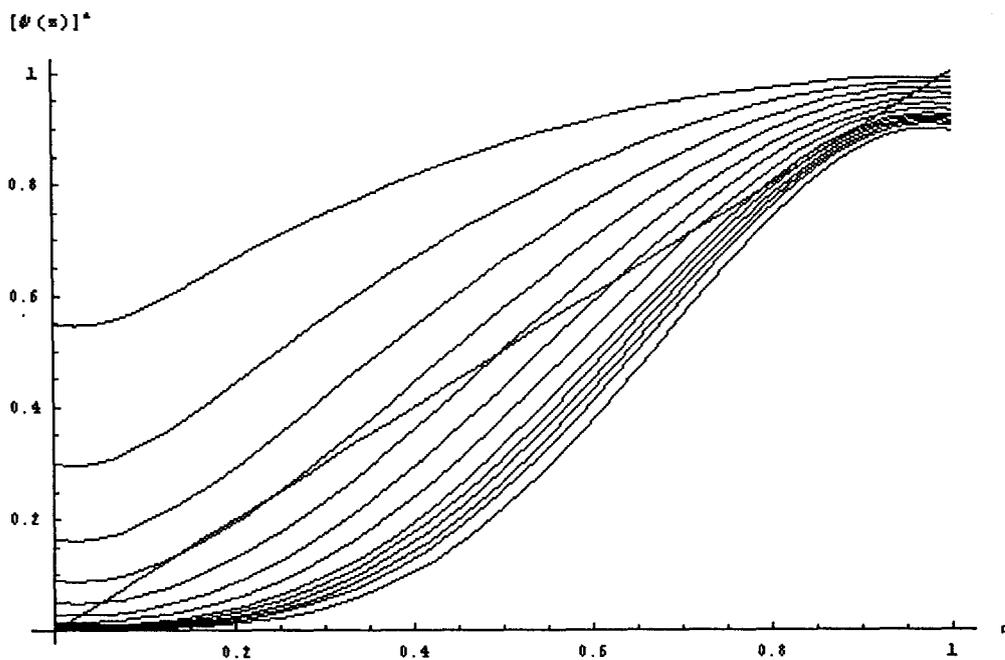


Figura 3.18: $[\psi(z)]^a = [-2.1(z-0.05)(z-0.5)(z-0.95)]^a$, $z \in [0, 1]$, $a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2, 2.2$.

el valor de a desaparecen las dos raíces (“el segundo punto de bifurcación”) y nuevamente la ecuación $[\psi(z)]^a = z$ tiene solo una raíz $z_*(a)$ (localizada cerca de 0).

Para realizar la optimización numérica del control (variando a y calculando los valores correspondientes $\mathfrak{S}(a, z_0)$ del costo promedio), podríamos usar la fórmula (3.1) para valores de a correspondientes a una raíz. Mientras que para valores de a correspondientes a dos raíces estables de $\overline{F}_z(a) = z$, usando las mismas hipótesis acerca de la función de costo como en la Proposición 3 y la fórmula de “esperanza condicional” podríamos (repetiendo los argumentos de la demostración de la Proposición 4) establecer lo siguiente:

Si para un $a \in A$ fijo la ecuación $\overline{F}_z(a) = z$ tiene solo dos raíces estables $z_1 = z_1(a)$ y $z_3 = z_3(a)$, $\frac{d}{dz}\overline{F}_z(a) < 1$ en algunas vecindades de z_1 y z_3 y además $P_1(z_0) + P_2(z_0) = 1$, donde $P_1(z_0) = P(Z_t \rightarrow z_1)$ y $P_2(z_0) = P(Z_t \rightarrow z_3)$ entonces,

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{S}(a, z_o) \\
& \equiv \tilde{\mathfrak{S}}(a, z_o, z_1, z_3) \tag{3.5} \\
& = P_1 E \left[\min \{ \xi_{1,\infty}^{(1)}, a + \xi_{1,\infty}^{(2)} \} \right] + P_2 E \left[\min \{ \xi_{2,\infty}^{(1)}, a + \xi_{2,\infty}^{(2)} \} \right]
\end{aligned}$$

donde el vector aleatorio $(\xi_{1,\infty}^{(1)}, \xi_{1,\infty}^{(2)})$ (con componentes independientes) tiene la función de distribución $F_{z_1}(x)F_{z_1}(y)$ y el vector aleatorio (con componentes independientes) $(\xi_{2,\infty}^{(1)}, \xi_{2,\infty}^{(2)})$ tiene la función de distribución $F_{z_3}(x)F_{z_3}(y)$.

Subrayamos que en el caso de tres raíces el valor del costo promedio depende del valor inicial z_o de nuestro proceso (¡lo contrario al caso de una raíz!). De hecho, los resultados del experimento escritos en el §3.1 muestran que las probabilidades P_1 y P_2 (de convergencia de $\{Z_t\}$ a las raíces correspondientes z_1 y z_3) dependen de los valores de z_o .

Al escribir (3.5) de otra forma tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{S}(a, z_o) \\
& = P_1(z_o) \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, a+y) dF_{z_1}(x) dF_{z_1}(y) \tag{3.6} \\
& \quad + P_2(z_o) \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, a+y) dF_{z_3}(x) dF_{z_3}(y).
\end{aligned}$$

La última expresión nos permite calcular $\mathfrak{S}(a, z_o)$ numéricamente en tres etapas (teniendo los valores de a y z_o fijos):

1. Para éste a dado determinamos cuántas raíces tiene la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$ y calculamos el valor $z_*(a)$ (en el caso de una raíz) o los valores $z_1(a)$ y $z_3(a)$ de las raíces estables (en el caso de tres raíces).
2. Por simulación del proceso en computadora calculamos los valores de $P_1(z_o)$ y $P_2(z_o)$ (veáse el §3.1.2), si hay 3 raíces.
3. Calculamos numéricamente (por computadora) las integrales en (3.1) o en (3.6) (dependiendo del número de raíces), usando por ejemplo la siguiente aproximación de la integral de Riemann-Stieljes (sumas dobles)

a) (para a que corresponde a una raíz)

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{F}(a, z_o) \\
& \equiv \tilde{\mathfrak{F}}(a, z_*(a)) \\
& \approx \sum_{j=0}^{100} \sum_{i=0}^{100} \min(x_i, a + y_j) (F_{z_*}(x_i) - F_{z_*}(x_{i-1})) (F_{z_*}(y_j) - F_{z_*}(y_{j-1}))
\end{aligned}$$

b) (para a que corresponde a dos raíces estables)

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{F}(a, z_o) \\
& \equiv \tilde{\mathfrak{F}}(a, z_o, z_1(a), z_3(a)) \\
& = P_1 \sum_{j=0}^{100} \sum_{i=0}^{100} \min(x_i, a + y_j) (F_{z_1}(x_i) - F_{z_1}(x_{i-1})) (F_{z_1}(y_j) - F_{z_1}(y_{j-1})) \\
& \quad + P_2 \sum_{j=0}^{100} \sum_{i=0}^{100} \min(x_i, a + y_j) (F_{z_3}(x_i) - F_{z_3}(x_{i-1})) (F_{z_3}(y_j) - F_{z_3}(y_{j-1})).
\end{aligned}$$

Aquí, según (3.3) y (3.4) $F_z(x) = 1 - e^{-\lambda(z)x} = 1 - [\psi(z)]^x$ y $\psi(z) = -2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95)$.

Realizamos corridas de nuestro programa (que se muestra en el Apéndice A de este trabajo) cuando a toma los valores de 0.2, 0.4, ..., 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2, 2.2 y la Figura 3.18 muestra las funciones $\overline{F}_z(a)$ para los valores de a mencionados (según (3.4), $\overline{F}_z(a) = [\varphi(z)]^a = [-2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95)]^a$).

Asimismo, elaboramos una gráfica de los valores de $\mathfrak{F}(a, z_o)$ para los diferentes valores de a , considerando en cada caso $z_o = 0.5$, la cual se muestra en la Figura 3.19. En donde podemos apreciar que la función $\mathfrak{F}(a, z_o)$ alcanza un mínimo cuando $a_* = 1.8$, y sucede precisamente cuando $\overline{F}_z(a)$ cambia el número de sus raíces: de tener 3 raíces pasa a tener sólo una raíz (a

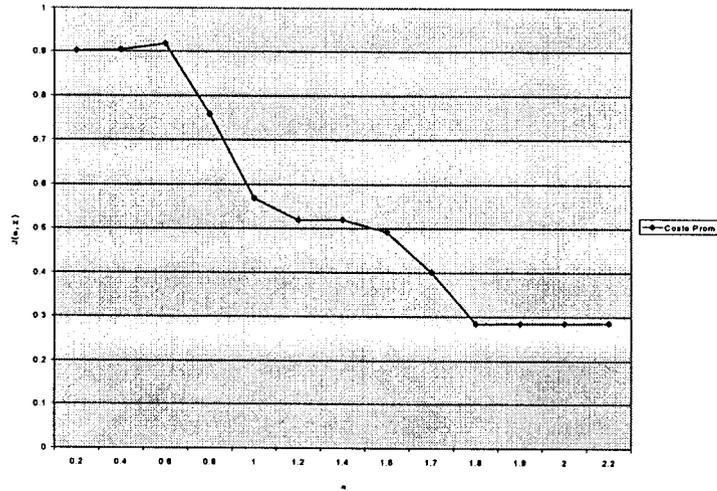


Figura 3.19: Costo promedio para diferentes valores de a .

la derecha de $a_* = 1.8$ el costo promedio $\mathfrak{S}(a, z_o)$ crece ligeramente (y la ecuación $\overline{F}_z(a) = z$ tiene solo una raíz cercana a 0 - en este caso, el aumento de $\mathfrak{S}(a, z_o)$ parece ser debido al aumento del costo por un paso: $\min(\xi_t^{(1)}, a + \xi_t^{(2)})$)).

Lo que resta, es analizar la estabilidad o inestabilidad del resultado obtenido, lo cual hacemos en la siguiente sección.

3.3 ¿La solución óptima obtenida es estable?

El problema de estimar la estabilidad del control óptimo de nuestro sistema dinámico se interpreta como sigue:

Sea la calidad del control $a \in A$ del proceso no-Markoviano X_t medido por el funcional $\mathfrak{S}(a, z_o)$ (el costo promedio definido en (1.8)) y sea a_* el control óptimo es decir, $\mathfrak{S}(a_*, z_o) = \inf_{a \in A} \mathfrak{S}(a, z_o)$, con un $z_o \in [0, 1]$ fijo. Nuestra tarea es hallar el control óptimo a_* es decir, estamos interesados en la optimización del control del proceso $X_t, t = 0, 1, \dots$ definido por las relaciones (1.6) y (1.7) con el uso de la familia de funciones de distribución $\{F_z(\cdot)\}, z \in [0, 1]$. Llamaremos a este proceso X_t el “proceso original”. Ahora supongamos que hay que buscar una aproximación para el control óptimo de arriba a_* en la situación cuando no conocemos exactamente la familia de funciones de distribución $\{F_z\}$ es decir, tenemos a nuestra disposición una aproximación $\{\tilde{F}_z\}$ para $\{F_z\}$ que podríamos usar para buscar una aproximación para a_* . Una manera natural es proceder como sigue. Usando la familia $\{\tilde{F}_z\}$ definimos mediante las fórmulas (1.6) y (1.7) el proceso $\tilde{X}_t, t = 0, 1, \dots$ (con valores iniciales como en X_t), llamado el “proceso aproximado” (o perturbado). Supongamos que la familia $\{\tilde{F}_z\}$ es tal que las ecuaciones $\tilde{F}_z(a) = z, a \in [0, \theta]$, tienen comportamiento de cambio de raíces (número y ubicación) parecido al comportamiento de las raíces de las ecuaciones $\overline{F}_z(a) = z, a \in A$, considerado en el ejemplo numérico del Capítulo 3, §3.2. Entonces por métodos similares a los del Capítulo 2, §2.4, hallamos el control óptimo \tilde{a}_* que minimiza el costo promedio para el proceso \tilde{X}_t es decir,

$$\mathfrak{S}'(\tilde{a}_*, z_o) = \min_{a \in A} \mathfrak{S}'(a, z_o)$$

donde el costo promedio $\mathfrak{S}'(a, z_o)$ para \tilde{X}_t se define (análogamente al costo $\mathfrak{S}(a, z_o)$ para X_t) como

$$\mathfrak{S}'(a, z_o) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E C(a, \tilde{X}_t).$$

Luego, vamos a considerar el control \tilde{a}_* como una aproximación razonable para a_* es decir, vamos a aplicar el control \tilde{a}_* al “proceso original” X_t . En este

caso, el costo promedio (obtenido por aplicación de \tilde{a}_*) es $\mathfrak{S}(\tilde{a}_*, z_o)$ (veáse la definición de $\mathfrak{S}(a, z_o)$ en (1.8)). Para estimar la “calidad” de aproximación \tilde{a}_* es natural comparar el valor $\mathfrak{S}(\tilde{a}_*, z_o)$ con el valor óptimo (mínimo) $\mathfrak{S}(a_*, z_o)$ del costo promedio para el proceso original X_t .

El valor no-negativo $\Delta(z_o)$ definido como

$$\Delta(z_o) := \mathfrak{S}(\tilde{a}_*, z_o) - \mathfrak{S}(a_*, z_o)$$

se llama “índice de estabilidad” (veáanse [4, 5]).

Decimos que el problema de optimización es estable (con respecto a la métrica ρ), si

$$\Delta(z_o) \rightarrow 0 \text{ cuando } \rho(F_z, \tilde{F}_z) \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Donde ρ es una métrica en el espacio de las funciones de dos variables $F_z(x)$, $z \in [0, 1]$, $x \geq 0$.

En el Artículo [4] ha sido demostrado que si para cada $a \in [0, \theta]$, $\frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) \in C^1[0, 1]$ y $0 < \frac{d}{dz}\bar{F}_z(a) < 1 \forall z \in [0, 1]$ (en particular las ecuaciones $\bar{F}_z(a) = z$ tienen sólo una raíz, veáanse los resultados sobre este caso en el §2.1), entonces el problema de optimización es estable, si usamos por ejemplo, la siguiente métrica

$$\rho(F_z(x), \tilde{F}_z(x)) := \sup_{z \in [0, 1], x \in [0, \infty]} |F_z(x) - \tilde{F}_z(x)|. \quad (3.8)$$

Sin embargo, la cuestión de estabilidad no se encontró en los casos más complicados (cuando la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$ puede tener más de una raíz).

Una tarea en este trabajo es mostrar numéricamente que en la situación del ejemplo del §3.2 donde la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$ tiene una o tres raíces (dependiendo de $a \in A$) el problema de optimización puede ser inestable (con respecto a la métrica definida en (3.8)). Los resultados numéricos de abajo ilustran esta propiedad. La clave (para entender la causa de inestabilidad) es que el valor mínimo de $\mathfrak{S}(a, z_o)$ se alcanza en el punto a_* donde el número de raíces de la ecuación $\bar{F}_z(a) = z$ se cambia de 3 a 1, y en el punto a_* la función

$\mathfrak{S}(a, z_o)$ tiene un salto (discontinuidad) (con valores mayores para $a < a_*$, en el caso de tres raíces, y con menores valores para $a > a_*$, en el caso de una raíz, veáse la siguiente Figura). Por otro lado, el valor \tilde{a}_* (que da el mínimo para el costo correspondiente $\mathfrak{S}'(a, z_o)$) puede ser muy cercano a a_* (si $\{F_z\}$ y $\{\tilde{F}_z\}$ son muy cercanas), pero, se cumple en nuestro ejemplo que $\tilde{a}_* < a$ y al aplicar \tilde{a}_* para X_t obtenemos tres raíces de la ecuación $\overline{F}_z(\tilde{a}_*) = z$ y el valor correspondiente de $\mathfrak{S}(\tilde{a}_*, z_o)$ es mucho mayor que el valor óptimo $\mathfrak{S}(a_*, z_o)$.

Más específicamente, en estos cálculos usamos la familia de funciones de distribución $F_z(x) = 1 - e^{-\lambda(z)x} = 1 - [\psi(z)]^x$ con $\psi(z) = -2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95)$ definida en el ejemplo del §3.2 (donde buscamos el valor óptimo a_* numéricamente). Las “versiones perturbadas” $\{\tilde{F}_z\}$ de $\{F_z\}$ las hemos escogido como

$$\tilde{F}_z(x) = 1 - [\psi(z) e^{-\varepsilon}]^x \quad (3.9)$$

con ciertos valores de ε , pero “pequeños” (mas exacto, $\varepsilon = 0.001$). Es claro que si $\varepsilon = 0$ en (3.9) entonces $\tilde{F}_z \equiv F_z$ (el “proceso original”). Aplicando los métodos numéricos descritos en el §3.2 obtuvimos valores de $\mathfrak{S}(a, z_o)$ (cuando $\varepsilon = 0$) y de $\mathfrak{S}'(a, z_o)$ (cuando $\varepsilon = 0.001$), donde el valor de $z_o = 0.5$.

Los resultados de los cálculos se ilustran en la Figura 3.20 y corresponden a los datos de la tabla siguiente a la gráfica.

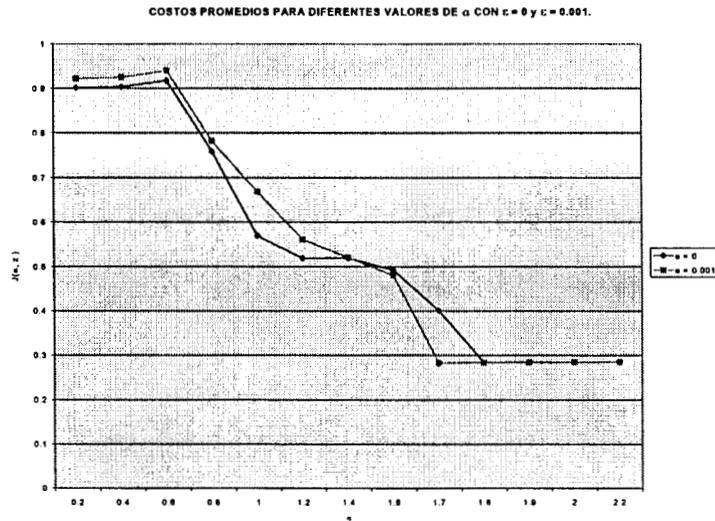


Figura 3.20: La solución del problema de optimización puede ser no estable.

a	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.001$
0.2	0.901328	0.922222
0.4	0.903349	0.924942
0.6	0.917354	0.940054
0.8	0.758026	0.781375
1.0	0.568880	0.668449
1.2	0.519068	0.560971
1.4	0.519914	0.520862
1.6	0.492392	0.480592
1.7	0.401452	0.283094*
1.8	0.283873*	0.283768
1.9	0.284398	0.284291
2.0	0.284800	0.284693
2.2	0.285338	0.285230

Entonces, $a_* = 1.8$ con $\mathfrak{S}(a_*, z_o) = 0.283873$ y $\tilde{a}_* = 1.7$ con $\mathfrak{S}'(\tilde{a}_*, z_o) = 0.283094$, donde a_* y \tilde{a}_* son los controles óptimos y $\mathfrak{S}(a_*, z_o)$ y $\mathfrak{S}'(\tilde{a}_*, z_o)$ son los valores mínimos del costo promedio.

La perturbación ε es igual a 0.001 y $\Delta(z_o) = \mathfrak{S}(\tilde{a}_*, z_o) - \mathfrak{S}(a_*, z_o) = 0.401452 - 0.283873 = 0.117579$, lo cual es aproximadamente 117 veces mayor que la perturbación ε lo cual nos permite concluir que la solución obtenida es inestable: pequeñas perturbaciones de $\{F_z\}$ producen la gran diferencia entre el valor óptimo del costo promedio $\mathfrak{S}(a_*, z_o)$ y el costo $\mathfrak{S}(\tilde{a}_*, z_o)$ obtenido por aplicación del control aproximado \tilde{a}_* (que es óptimo para el proceso perturbado \tilde{X}_t).

Conclusiones

Nuestro objetivo principal fue desarrollar métodos para hallar un control óptimo para una clase particular de los procesos estocásticos no-Markovianos y estudiar su problema de estabilidad.

Hemos hallado una expresión analítica para el costo promedio $\mathfrak{J}(a, z_0)$ definido en este texto cuando la función de z , $\overline{F}_z(a)$, cumple lo siguiente: su segunda derivada existe y está acotada, su primera derivada es menor que 1 en el intervalo $[0, 1]$ y la aplicación $z \rightarrow \overline{F}_z(a)$ tiene un sólo punto fijo z_* , siendo la base de este análisis el hecho de que la sucesión de variables aleatorias $Z_t \xrightarrow{c.s.} z_*$ en el sentido de la ley fuerte de los grandes números. Por lo tanto, hemos podido reducir el problema de optimización a un problema de programación no lineal para hallar el costo óptimo y por resultados existentes sabemos que su solución es estable respecto a perturbaciones de la familia $\{\overline{F}_z(a)\}$.

Sin embargo, en el caso cuando la aplicación $z \rightarrow \overline{F}_z(a)$ tiene uno (z_*) o tres puntos fijos (z_1, z_2 y z_3), la derivada de $\overline{F}_z(a)$ es menor que 1 en una vecindad de z_* , o de z_1 y z_3 , y $\overline{F}_z''(a)$ existe pero no está acotada en $[0, 1]$, numéricamente (con ayuda de la computadora) hemos comprobado que la sucesión $\{Z_t\}$ converge a z_* (dependiendo la rapidez de convergencia de la derivada de $\overline{F}_z(a)$ en dicha vecindad) o a las raíces estables z_1 y z_3 (dependiendo la probabilidad de convergencia del valor inicial dado z_0).

Así, habiendo seleccionado una familia de funciones crecientes, $\{\overline{F}_z(a)\}$, tal que para cada a fijo $\overline{F}_z(a) = z$ tiene una o tres raíces fue posible dar una expresión analítica para el costo promedio que numéricamente observamos en el caso de una raíz no depende de z_0 pero sí de z_* , a diferencia del caso de tres raíces en el que éste sí depende de z_0 . También, se obtuvo el problema de programación no lineal correspondiente para hallar el control óptimo. Asimismo, hemos planteado un ejemplo del problema de optimización de control cuando la aplicación $z \rightarrow \overline{F}_z(a)$ cambia el número de sus puntos fijos (con el cambio de a). Por el estudio numérico observamos que en este caso el problema de optimización puede ser no estable (cuando el control óptimo a_* sucede cerca del punto de bifurcación es decir, donde ocurre el cambio de número de puntos fijos.)

De esta forma, hemos cumplido con los objetivos planteados al inicio de esta exposición.

Apéndice

A. Programas computacionales.

En este apartado, se muestran los programas que nos permiten hallar los resultados numéricos mencionados en el Capítulo 3.

Tales programas se elaboraron utilizando el paquete computacional MATHEMATICA, Versión 3.0, ya que como lenguaje de programación de alto nivel, nos permite visualizar el comportamiento gráfico de los resultados y también es útil por su compatibilidad con nuestro editor de textos.

*PROGRAMA PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO
ASINTOTICO DE Z_t Y EL error = $abs(Z_t - z_*)$ CON $\varphi(z) = c + bz^\alpha$,
PARA DIFERENTES VALORES DE $\varphi'(z)$ Y DE z_0 .*

En este programa debemos darle valores a los parámetros c , b y α , dependiendo de qué valor de $\varphi'(z)$ queremos en el intervalo $[0, 1]$. También debemos introducir el valor de la raíz z_* de $\varphi(z) = z$, el cual se debe de calcular primero utilizando MATHEMATICA. Finalmente, hay que dar un valor inicial z_0 , denotado en el listado por $z[0]$.

El resultado obtenido es el comportamiento del proceso Z_t para $t = 0, 1, \dots, 10000$ así como el error cometido.

```
c =?;
b =?;
α =?;
z* =?;
n = 10000;
Array[z, n];
z[0] =?;
For[t = 0, t <= n - 1, t ++, fi = c + b * z[t]α;
  If[Random[] <= fi, η = 1, η = 0];
  z[t + 1] = t * z[t]/(t + 1) + η/(t + 1);
u = Table[z[t], {t, n}];
ListPlot[u];
v = Table[Abs[z* - z[t], {t, n}];
ListPlot[v];
```

PROGRAMA PARA OBTENER LA CONVERGENCIA DE Z_t
A LA RAÍZ z_1 PARA DISTINTOS VALORES DE z_0 Y
 $\varphi(z) = -2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95) + z.$

La única información que hay que introducir es el valor inicial del proceso Z_t , z_0 . El programa calcula 100 valores del proceso Z_t con $t = 0, 1, 10000$, contando el número de veces (*cont*, en el programa) en que Z_t se aproxima a la raíz z_1 ; al final, se divide esta cantidad *cont* entre 100 y el resultado es la probabilidad de convergencia de Z_t a z_1 .

```
nc = 100;
n = 10000;
cont = 0;
Array[r, nc];
For[i = 1, i <= nc, i ++, z = ?;
  For[t = 0, t <= n - 1, t ++, fi = -2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95) + z;
    If[Random[] <= fi, η = 1, η = 0];
    z = t * z / (t + 1) + η / (t + 1)];

  r[i] = z;
  If[z < 0.5, cont = cont + 1]];
pcr1 = cont / nc;
Print[pcr1]
s = Table[r[t], {t, nc}];
ListPlot[s];
```

PROGRAMA PARA CALCULAR EL COSTO PROMEDIO $\mathfrak{S}(a, z^*)$
PARA DISTINTOS VALORES DE a .

Como información para la corrida del programa, sólo debemos introducir en cada corrida el valor del control a , denotado con p en el listado y de ε (perturbación).

Lo que hace el programa es primero hallar las raíces de la función $[\varphi(z)]^a = z$, luego, si $\varphi(z)$ tiene 3 raíces, obtiene la probabilidad de convergencia a la primera de ellas, finalmente calcula el valor del costo promedio, para cada valor de a dado y para $z_0 = 0.5$ en cada caso.

```

p = ?;
ε = ?;
nc = 100;
n = 10000;
cont = 0;
Solve[((-2.1(x-0.05)(x-0.5)(x-0.95)+x)^p)*Exp[-ε*p]-x == 0, x]
v = x/.%;
b = Length[%];
s = 1;
For[t = 1, t <= b, t ++,
  If[Head[v[[s]]]! = Complex&&v[[s]] <= 1,
    Print[t, v = Delete[v, s], s = s + 1]]
v
Length[v];
If[Length[v] == 1, z1 = v[[1]], z2 = v[[3]]]
If[Length[v] == 3, z1 = v[[1]]]
If[Lenght[v] == 3,
  For[i = 1, i <= nc, i ++, z = ?;
    For[t = 1, t <= n, t ++,
      fi = ((-2.1(z-0.05)(z-0.5)(z-0.95)+z)^p)*Exp[-ε*p];
      If[Random[] <= fi, eta = 1, eta = 0];
      z = t * z/(t + 1) + eta/(t + 1)];
    If[z < 0.5, cont = cont + 1]];
If[Length[v] == 1, p1 = 1, p1 = cont/nc]

```

$$\begin{aligned}
f[z_] &:= (-2.1(z - 0.05)(z - 0.5)(z - 0.95) + z) \star \text{Exp}[-\varepsilon]; \\
fz1 &= f[z1]; \\
fz2 &= f[z2]; \\
c &= 0.1; \\
d &= 0.2; \\
v1 &= p1 \star \sum_{j=0}^{100} ((fz1^{(j \star d)} - fz1^{(j \star d + d)}) \\
&\quad \star \sum_{i=0}^{100} (\text{Min}[i \star c, p + j \star d] \star (fz1^{(i \star c)} - fz1^{(i \star c + c)}))) \\
v2 &= (1 - p1) \star \sum_{j=0}^{100} ((fz2^{(j \star d)} - fz2^{(j \star d + d)}) \\
&\quad \star \sum_{i=0}^{100} (\text{Min}[i \star c, p + j \star d] \star (fz2^{(i \star c)} - fz2^{(i \star c + c)}))) \\
v1 + v2 &
\end{aligned}$$

B. Teoremas auxiliares utilizados.

Teorema 1. *Ionescu-Tulcea.*

Sean $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$, $j = 1, 2, \dots$ espacios medibles acotados; Sea $\Omega = \prod_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, $\mathcal{F} = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$. Supongamos que se da una medida de probabilidad arbitraria P_1 en \mathcal{F}_1 , y para cada $j = 1, 2, \dots$ y cada (w_1, \dots, w_j) damos una medida de probabilidad $P(w_1, \dots, w_j, \bullet)$ en \mathcal{F}_{j+1} . Consideramos que $P(w_1, \dots, w_j, C)$ es medible para cada $C \in \mathcal{F}_{j+1}$ fijo $(\prod_{i=1}^j \Omega_i, \prod_{i=1}^j \mathcal{F}_i) \rightarrow (\mathfrak{R}, \beta(\mathfrak{R}))$. Si $B^n \in \prod_{j=1}^n \mathcal{F}_j$ definimos

$$P_n(B^n) = \int_{\Omega_1} P_1(dw_1) \int_{\Omega_2} P(w_1, dw_2) \dots \int_{\Omega_{n-1}} P(w_1, \dots, w_{n-2}, dw_{n-1}) \int_{\Omega_n} I_{B^n}(w_1, \dots, w_n) P(w_1, \dots, w_{n-1}, dw_n).$$

Observemos que P_n es una medida de probabilidad en $\prod_{j=1}^n \mathcal{F}_j$.

Entonces existe una única medida de probabilidad $P \in \mathcal{F}$ tal que $\forall n$, P coincide con P_n en cilindros n -dimensionales es decir, $P(w \in \Omega : (w_1, \dots, w_n \in B^n)) = P_n(B^n) \forall n = 1, 2, \dots$ y toda $B^n \in \prod_{j=1}^n \mathcal{F}_j$.

Teorema 2. *Criterio de Cesáro.*

Si $X_n \rightarrow X$ entonces $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow X$.

Bibliografía

- [1] Bertsekas, D. P. and Shreve, S. E. (1978) **Stochastic Optimal Control. The Discrete Time Case.** Academic Press, New York.
- [2] Chung, Kai Lai (1979). **A Course in Probability Theory.** Academic Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich Publishers.
- [3] Duflo, M. (1997) **Random Iterative Models.** Springer, Berlin.
- [4] Gordienko, E. I. (1992) **An Estimate of the Stability of Optimal Control of Certain Stochastic and Deterministic Systems.** J. Soviet Math 59, 891-899.
- [5] Gordienko, E. I. (1994) **Lecture Notes on Stability Estimation in Markov Decision Processes.** UAM-I, México, D. F.
- [6] Gordienko, E. I., Isauro Martínez M. E. y Marcos Carrillo R. M. (1996) **Estimation of Stability in Controlled Storage Systems.** UAM-I, México, D. F.
- [7] Hernández-Lerma, O. and Laserra, J. B. (1996) **Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria.** Springer-Verlag, New York.
- [8] Mordecai Avriel (1976) **Nonlinear Programming. Analysis and Methods.** Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- [9] Prawda, Juan (1991) **Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Vol. 2 Modelos Estocásticos.** Edit. Limusa. Grupo Noriega Editores.
- [10] Puterman, M. L. (1994) **Markov Decision Processes.** Wiley, New York.

- [11] Ross, Sheldon M. (1992) **Applied Probability Models with Optimization Applications**. Dover Publications, Inc., New York.
- [12] Schwartz, Mischa (1994) **Redes de Telecomunicaciones**. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [13] Wolfram, Stephen (1996) **The MATHEMATICA Book**. Wolfram Media & Cambridge University Press.