



Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

MAESTRIA EN INGENIERIA BIOMEDICA

**PROBLEMA INVERSO EN
EL ANÁLISIS DE LOS
SONIDOS RESPIRATORIOS**

**PRESENTADO POR:
JOAQUÍN CRUZ GARCÍA**

**ASESOR:
SONIA CHARLESTON VILLALOBOS**

OCTUBRE 2003



Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

MAESTRÍA EN INGENIERÍA BIOMÉDICA

PROBLEMA INVERSO EN EL ANÁLISIS DE LOS
SONIDOS RESPIRATORIOS

SINODALES:

DR. JOHN GODDARD CLOSE
(PRESIDENTE)

DRA. SONIA CHARLESTON VILLALOBOS
(SECRETARIO)

DR. JOSE ROGELIO PÉREZ PADILLA
(VOCAL)

**PROBLEMA INVERSO EN
EL ANÁLISIS DE LOS
SONIDOS RESPIRATORIOS**

**JOAQUÍN CRUZ GARCÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA BIOMÉDICA
OCTUBRE 2003**



Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

MAESTRÍA EN INGENIERÍA BIOMÉDICA

PROBLEMA INVERSO EN EL ANÁLISIS DE LOS
SONIDOS RESPIRATORIOS

SINODALES:

DR. JOHN GODDARD CLOSE
(PRESIDENTE)

DRA. SONIA CHARLESTON VILLALOBOS
(SECRETARIO)

DR. JOSE ROGELIO PÉREZ PADILLA
(VOCAL)

A MIS PADRES,
POR EL APOYO BRINDADO EN TODO MOMENTO
Y
POR SUS PRINCIPIOS QUE HAN GOBERNADO MI VIDA.

AGRADECIMIENTOS

Especialmente quiero agradecer a la Dra. Sonia Charleston Villalobos, por dirigir el presente trabajo, a su gran paciencia y asesoría prestada en todo momento del desarrollo y estructuración de esta tesis.

Al Dr. Tomás Aljama Corrales, por su ayuda, comentarios y sugerencias en durante el desarrollo del presente trabajo.

Al Dr. Ramón González Camarena, por sus comentarios y ayuda prestada en algún momento del desarrollo de esta tesis.

A los doctores John Goddard Close y Rogelio Pérez Padilla por la revisión y comentarios hechos al presente trabajo.

A mis compañeros del posgrado por sus palabras de ánimo, gracias.

A todas aquellas personas que, aunque no las menciono, de alguna u otra manera hicieron posible la elaboración del presente trabajo.

Gracias a todos.

INDICE.

RESUMEN.	1.
CAPITULO I. INTRODUCCIÓN.	
1.1. Localización de Fuentes Sonoras.	3.
1.2. Planteamiento del Problema.	5.
1.3. Propuesta.	6.
CAPITULO II. ANTECEDENTES.	
2.1. Conceptos Básicos de Teoría Inversa.	8.
2.1.1. Introducción.	8.
2.1.2. Formulación del Problema Inverso.	9.
2.1.3. Sistemas Sobredeterminados.	10.
2.1.4. Mínimos Cuadrados Lineal.	11.
2.1.5. Sistemas Subdeterminados.	14.
2.1.6. Medición de Longitud Ponderada Como Información a Priori.	15.
2.1.7. Sistemas Mal Condicionados.	16.
2.2. El Problema Inverso en Otras Áreas de la Medicina.	18.
2.2.1. Problema Inverso en Biomagnetismo.	18.
2.2.1.1. Magnetoencefalografía.	19.
2.2.2. Problema Inverso en Campo Eléctrico.	23.
2.2.2.1. Electrocardiografía y Potenciales Evocados.	24.
2.3. Origen y Transmisión del Sonido Respiratorio.	27.
2.3.1. Origen del Sonido Respiratorio.	27.
2.3.2. Transmisión del Sonido Respiratorio.	34.
CAPITULO III. MÉTODOS DE SOLUCIÓN SELECCIONADOS PARA EL PROBLEMA INVERSO ACÚSTICO PULMONAR.	
3.1. Caso Sobredeterminado ($N < M$).	43.
3.1.1. Mínimos Cuadrados.	43.

3.1.2. Descomposición QR.	47.
3.2. Caso Subdeterminado ($M < N$).	50.
3.2.1. Mínimos Cuadrados de Norma Mínima.	51.
3.2.2. Mínimos Cuadrados Ponderados de Norma Mínima.	55.
3.2.2.1. Descomposición en Valores Singulares.	55.
3.3. Solución vía FOCal Underdetermined System Solver (FOCUSS).	59.
3.3.1. Algoritmo.	60.
3.3.2. Definición y Condición de Unicidad de la Solución Sparse.	61.
3.3.3. Convergencia.	63.
CAPITULO IV. METODOLOGÍA DE PRUEBA Y RESULTADOS.	
4.1. Metodología de Prueba de los Algoritmos Seleccionados.	65.
4.2. Caso de Simulación: Fuente Puntual.	69.
4.3. Caso de Simulación: Fuentes Puntuales Múltiples.	74.
4.4. Caso de Simulación: Fuentes No Puntuales Múltiples.	82.
4.5. Discretización y Número de Micrófonos.	86.
4.5.1. Caso de Simulación: Variación de la Discretización del Espacio de Reconstrucción.	87.
4.5.2. Caso de Simulación: Variación del Número de Micrófonos.	88.
4.6. Caso de Simulación: Fuentes No Puntuales Múltiples a Igual y Diferente Intensidad.	90.
4.6.1. Igual Intensidad.	90.
4.6.2. Diferente Intensidad.	94.
4.7. Caso de Simulación: Simulaciones con Ruido.	97.
CAPITULO V. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.	
5.1 Discusión y Conclusión.	101.
BIBLIOGRAFÍA.	108.

NOTACIÓN.

h	proporción de tejido en el parénquima pulmonar.
$(1 - h)$	proporción de gas en el parénquima pulmonar.
c	velocidad del sonido.
ρ	densidad del medio.
P_g	presión del gas.
γ	razón calor específico.
B_g	volumen de rigidez del gas.
B_t	volumen de rigidez del tejido.
ρ_g	densidad del gas.
ρ_t	densidad del tejido.
\vec{b}	matriz de datos de dimensión $M \times 1$.
\vec{x}	matriz de parámetros de dimensión $N \times 1$.
$[]^T$	matriz transpuesta.
$f(\vec{b}, \vec{x})$	función.
$f(\vec{b}, \vec{x}) = 0$	ecuación en \vec{x} .
$\vec{f}(\vec{b}, \vec{x})$	función vectorial
$\vec{f}(\vec{b}, \vec{x}) = 0$	sistema de ecuaciones, forma matricial.
F	matriz de $L \times (M+N)$.
$\vec{g}(\vec{x})$	función vectorial.
$A\vec{x} = \vec{b}$	sistema lineal de ecuaciones.
A	matriz base, matriz de transferencia o kernel de datos.
$\vec{e} = \vec{b} - A\vec{x}$	matriz error.
$E(x_1, \dots, x_N)$	función error.
$\frac{\partial E}{\partial x_i}$	derivada parcial.
A^T	matriz transpuesta de la matriz A .

$[]^{-1}$	inversa de una matriz.
$L_2 = \vec{x}^T \vec{x}$	norma euclidiana.
(\vec{x})	información a priori de los valores de los parámetros.
D_s	matriz de suavizamiento.
W_m, W_e	matriz de ponderación.
$G = A^{-g}$	inversa generalizada de A .
$\ C\ _\infty$	norma de la matriz C .
$K(C)$	número de condición de la matriz C .
I_0	intensidad acústica inicial.
$I(r) = I_0 e^{-N\sigma r}$	intensidad acústica a una distancia r .
\mathbf{R}	conjunto de números reales.
$\mathbf{R}^{M \times N}$	espacio de matrices de dimensión $M \times N$.
\mathbf{R}^M	espacio vectorial de dimensión M .
\mathbf{R}^N	espacio vectorial de dimensión N .
$\dim(R(A))$	dimensión del rango de la matriz A .
$\ \ $	norma de un vector.
$Null(A)$	espacio nulo de la matriz A .
$\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$	producto interno entre los vectores \vec{b} y \vec{a} .
$\nabla f(\vec{x})$	gradiente de la función $f(\vec{x})$.
\vec{v}	vector en \mathbf{R}^M .
V_0	subespacio de \mathbf{R}^M .
$P\vec{v}$	proyección ortogonal de \vec{v} sobre un subespacio
S	conjunto ortogonal de vectores.
$P = AA^T$	matriz de proyección.
R	matriz triangular superior.
Q	matriz con columnas ortonormales.
A^+	inversa generalizada de Moore-Penrose.
$\min(M, N)$	número mínimo entre M y N .

- I_M, I_N matriz identidad.
- O matriz neutro aditivo.
- U, V matrices en $\mathbf{R}^{N \times N}$ y $\mathbf{R}^{M \times M}$ respectivamente.
- Σ matriz diagonal real no negativa.
- \mathfrak{S} transformación lineal.
- URP propiedad de representación única.
- $L(\ddot{x}) = \prod_{i=1}^n |x_k(i)|$ función descendente en FOCUSS.
- Γ conjunto de puntos fijos.
- Ω vecindad de \ddot{x}^* .
- $\{\ddot{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ sucesión de puntos.

RESUMEN.

En diversas disciplinas el problema inverso es una área de investigación que intenta identificar fuentes no accesibles (o internas) a partir de mediciones disponibles de campos externos. El problema inverso está ligado a un problema directo cuya solución resulta en la predicción de datos basándose en un modelo y/o una serie de condiciones relevantes del problema en cuestión.

El problema inverso se encuentra presente en varias áreas, como por ejemplo en Electrocardiografía en donde se usa para la determinación de potenciales eléctricos sobre la superficie del corazón a partir de potenciales medidos en la superficie corporal. En el área de Neuromagnetismo se intenta determinar las distribuciones de corrientes eléctricas neuronales al interior del cerebro mediante mediciones externas.

Respecto al estudio de los sonidos respiratorios es probable que información adicional acerca de la ubicación de la fuente del sonido represente una ayuda para el diagnóstico médico, proporcionando información que no es posible obtener con métodos tradicionales de auscultación. Es importante señalar que desde hace algunas décadas el origen de los sonidos respiratorios ha sido objeto de investigación principalmente de tipo experimental; los modelos de producción y transmisión del sonido respiratorio son escasos.

Algunos estudios experimentales indican que posiblemente los sonidos se producen regionalmente dentro de cada lóbulo pulmonar. Otros estudios indican que el sonido inspiratorio se produce dentro del pulmón cercano al área auscultada aunque el sitio exacto no se ha establecido. Por otro lado, el origen del sonido espiratorio es más incierto, se asume que se genera en el glotis o dentro de las grandes vías aéreas como resultado del torrente de un flujo de aire convergente. Otra posibilidad es que el sonido pueda radiar directamente de las vías aéreas hacia sus alrededores, el parénquima pulmonar, y del parénquima hacia la pared torácica. De esta forma se supone que la generación del sonido es dependiente de las vías aéreas mientras que la transmisión lo es del parénquima pulmonar.

Entre las razones del interés en la ubicación de fuentes sonoras se tiene: la mejor comprensión del papel de los sonidos respiratorios en el diagnóstico de enfermedades

pulmonares y en el monitoreo de pacientes. Una segunda razón es que involucra las posibles mejoras o la generación de nuevas herramientas de diagnóstico no invasivo.

El presente trabajo explora la ubicación de fuentes de los sonido respiratorios mediante la solución de un problema inverso utilizando el registro simultáneo de señales acústicas sobre la superficie torácica. Se realizan una serie de simulaciones manipulando una fuente sonora sintética que se ubica dentro de un espacio tridimensional que representa al tórax, asumiendo un modelo de propagación uniforme del sonido respiratorio, es decir, se supone un medio homogéneo.

Uno de los objetivos del trabajo fue el de explorar el desempeño de diferentes algoritmos para la estimación de fuentes sonoras sintéticas. Una primera solución realizó una búsqueda en cada punto del espacio torácico con base en la premisa de que cualquier punto dentro del espacio torácico contiene información relevante de la fuente. Esta primera propuesta de solución implicó la solución de un sistema de ecuaciones lineal sobredeterminado empleando los métodos de Mínimos Cuadrados y de Descomposición QR para la reconstrucción de la fuente estimada.

Un segundo método de solución asumió a cada punto del espacio como una posible fuente. Esta suposición y el limitado número de mediciones generaron la solución de un sistema de ecuaciones lineal subdeterminado. La reconstrucción de la fuente estimada usando este sistema de ecuaciones se realizó con los métodos de Mínimos Cuadrados de Norma Mínima, Norma Mínima Ponderada y el *FOCUSS (FOCal Underdetermined System Solver)*. De estos métodos, el FOCUSS es un algoritmo de optimización recursivo que combina un número de características deseables en procedimientos inversos tales como el modelado de fuentes múltiples, una alta resolución para fuentes localizadas, fuentes de formas arbitrarias y presenta un buen desempeño en la estimación de fuentes profundas. A diferencia de métodos estándar aplicados al problema inverso en neuroelectromagnetismo y electrocardiografía, el FOCUSS no necesita suposiciones explícitas acerca del orden del modelo o forma y la magnitud de la fuente. El *FOCUSS* inicia con una solución parcial, que en esta tesis la proporciona el método de Mínimos Cuadrados de Norma Mínima Ponderados. El desempeño de cada uno de los algoritmos se analizó bajo un protocolo de simulaciones resultando en un desempeño aceptable del *FOCUSS* básico en la ubicación de fuentes sonoras sintetizadas en diversas condiciones.

CAPITULO I INTRODUCCIÓN.

1.1. Localización de Fuentes Sonoras.

Los signos clínicos utilizados por los médicos para valorar enfermedades pulmonares incluyen entre otros elementos el sonido generado durante la actividad respiratoria. Este sonido generado al interior del tórax está relacionado con el sonido escuchado sobre la superficie torácica mediante mecanismos de transmisión. La auscultación es un método clínico no invasivo que proporciona una valoración preliminar acerca de la condición pulmonar del sujeto. Las alteraciones en la estructura y función de los pulmones que ocurren en diversas patologías propician cambios en la producción y/o transmisión del sonido respiratorio, cambios que son valorados mediante la auscultación [1, 2, 3]. En consecuencia, los sonidos respiratorios llevan consigo información útil para el diagnóstico. Esta información podría estar disponible mediante el procesamiento y análisis de los sonidos respiratorios [4]. Sin embargo, también es posible que información adicional acerca de la ubicación de la fuente del sonido respiratorio represente un apoyo significativo al diagnóstico médico. Hay que señalar que el origen de los sonidos respiratorios sigue siendo objeto de investigación. Con el empleo de nuevas tecnologías y herramientas de procesamiento es posible realizar registros multi-micrófonos que proporcionen una estimación del sitio de producción de los sonidos respiratorios [4].

Estudios relacionados con la ubicación de la fuente del sonido respiratorio se han realizado en base a la amplitud y velocidad de transmisión del sonido. Uno de estos estudios fue realizado por Kraman y Austrheim [5] mediante la comparación de los patrones de amplitud del sonido respiratorio y de un sonido artificial introducido en la boca. La idea fue el comprender el origen de las diferencias entre la amplitud del sonido respiratorio y del sonido artificial transmitido desde la boca. Otros estudios respecto a velocidad de transmisión del sonido respiratorio fueron realizados por Rice en [6, 7] donde presenta evidencias de que el sonido viaja a través del parénquima y no a lo largo de las vías aéreas. Además, Rice indica que el parénquima pulmonar se comporta como un medio elástico continuo. Asumiendo que el parénquima pulmonar actúa como un medio poroso

compuesto de tejido (h) y gas ($1-h$), la velocidad del sonido se obtiene como $c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$, con

B representando el volumen de rigidez y ρ la densidad del medio (gas o tejido). La expresión de la velocidad combinando ambas fases del parénquima es:

$$c = \left[\left(\frac{1-h}{\gamma P} + \frac{h}{B_t} \right) \left((1-h)\rho_g + h\rho_t \right) \right]^{-1/2}. \text{ Por lo tanto, la velocidad del sonido depende no}$$

solamente del modo de propagación (onda longitudinal), sino también de las características del medio (mezcla homogénea de gas y tejido). Posteriormente, David y Janet Rice en [1] caracterizaron la propagación del sonido en pulmones intactos de caballo usando mediciones externas. Se registró el tiempo empleado por el sonido respiratorio en ir del centro a la periferia y se usaron propiedades del pulmón para cotejar resultados.

Con respecto al origen del sonido respiratorio se han realizado varios estudios que presentan diversas posibilidades acerca del sitio exacto de producción del sonido respiratorio. Kraman en [8] presenta un estudio en el cual utiliza una modificación de la técnica utilizada en fononeumografía. Sus hallazgos sugieren que la componente espiratoria del sonido respiratorio proviene de una posición más central que la componente inspiratoria y que los resultados apuntan a una fuente dominante en vías aéreas superiores. Por otro lado, aparentemente la componente principal del sonido inspiratorio es de origen más periférico que el tallo bronquial, sin embargo, no es claro. Posteriormente, Kraman en [9, 10] indica que la componente inspiratoria del sonido respiratorio es multicéntrica confinada a las grandes vías aéreas donde se sabe que existe un torrente de flujo convergente, pero que es probable que incluya el tallo bronquial y la tráquea. También, la componente espiratoria parece ser multicéntrica incluyendo al tallo bronquial y tráquea.

La exposición anterior muestra algunos esfuerzos que se han desarrollado con el propósito de ubicar las fuentes de sonido respiratorio para una mejor comprensión del funcionamiento pulmonar. El problema de localización de fuentes del sonido respiratorio es en esencia un problema inverso que no se ha analizado como tal en el estudio de los sonidos respiratorios. En un intento por localizar la fuente del sonido respiratorio el problema inverso se aborda en [4] Por el método de Mínimos Cuadrados sobre datos obtenidos con registros simultáneos de los sonidos respiratorios realizando una representación espacial de la fuente estimada. El problema de ubicar las fuentes de sonido

respiratorio en base al planteamiento de un problema inverso es un campo nuevo en el estudio de los sonidos respiratorios. A pesar de que en otras áreas médicas ya se ha trabajado el problema de localizar fuentes como un problema inverso, éste sigue siendo objeto de estudio. Entre estas áreas médicas se pueden mencionar la electroencefalografía, magnetoencefalografía y electrocardiografía en donde se han empleado diferentes métodos para localizar las fuentes de importancia de las actividades observadas.

1.2. Planteamiento del Problema.

El problema inverso es una de las áreas de investigación en el estudio de los sonidos respiratorios que ha permitido un desarrollo reciente, hasta ahora el esfuerzo principal se encuentra en [4]. En otras áreas el problema inverso ha tenido avances considerables, por ejemplo, en electrocardiografía es posible determinar los potenciales eléctricos sobre la superficie del corazón a partir de potenciales medidos en la superficie del cuerpo. El conocimiento de estos potenciales eléctricos en la superficie cardiaca puede ser usado clínicamente para determinar áreas anormales de conducción, ya sea lenta o rápida, y origen de arritmias ventriculares. Además, si el sitio de activación anormal puede determinarse antes de una cirugía, ésta puede ser menos costosa y de menor duración [11]. También, los potenciales estimados pueden apoyar la caracterización de isquemias o regiones infartadas o la caracterización de cambios en el estado eléctrico del corazón.

Otra área en donde el problema inverso ha tenido un gran desarrollo es en Neuroelectromagnetismo. El objetivo es estimar la distribución de corrientes neuronales en el interior del cerebro en base a la electroencefalografía (EEG) y/o magnetoencefalografía (MEG). La estimación de corrientes neuronales al interior del cerebro es de importancia en investigaciones y aplicaciones clínicas. Por ejemplo, el mapeo topográfico del registro de la actividad neuroeléctrica para modelar fuentes (espacio- temporal) representa un progreso significativo; el determinar patrones espaciales que mejoran o suprimen ritmos corticales y que son acompañados por procesos cognoscitivos o algunas condiciones patológicas; el correlacionar eventos que suceden dentro del cerebro y que ayudan a describir procesos fisiológicos en espacio-tiempo aportando más información a una imagen o una secuencia de imágenes, obteniendo información de la relación entre estructuras.

Es importante señalar, que la localización del origen de los sonidos respiratorios normales y adventicios es actualmente objeto de investigación. Aunque existen pocos modelos de producción y transmisión del sonido pulmonar, algunos estudios experimentales y consideraciones teóricas indican que al menos el sonido inspiratorio se producen regionalmente y posiblemente dentro de cada lóbulo pulmonar. Mientras que otras consideraciones teóricas sugieren que el sonido inspiratorio parece producirse dentro de grandes vías aéreas como resultado del torrente de un flujo convergente y transmitido hacia el tórax, sin embargo el sitio exacto no se ha establecido. El origen del sonido espiratorio parece ser menos incierto y se ha mostrado por varios experimentos que el sonido proviene de una posición más central que el sonido inspiratorio [8 - 10].

1.3. Propuesta.

La solución al problema inverso de ubicación de fuentes de sonidos respiratorios posiblemente proporcionaría la solución a algunas dudas respecto del sitio de producción. Además, parece ser posible medir, durante la producción y transmisión de los sonidos pulmonares, modificaciones en estructura y función pulmonar, permitiendo una mejor interpretación de los eventos respiratorios. Diversos estudios se han enfocado a ubicar el sitio de producción del sonido respiratorio y en este sentido, las herramientas que brinda la teoría inversa no han sido exploradas por completo. Un intento en esta dirección es el de Kompis y colaboradores usando el método de Mínimos Cuadrados [4]. Debido a la necesidad de estimar las fuentes de sonido respiratorio, se propone explorar en esta tesis este problema empleando herramientas que proporciona la teoría inversa mediante una serie de simulaciones con fuentes sonoras sintéticas en un medio de propagación homogéneo. Se espera que estos esfuerzos sean de utilidad para la solución del problema inverso con señales acústicas respiratorias.

Objetivo:

El objetivo principal del presente trabajo es explorar el problema inverso en la estimación de fuentes de sonido respiratorio utilizando fuentes sonoras sintéticas.

Objetivos específicos:

- 1) *Analizar el desempeño de diferentes algoritmos en la estimación de fuentes sonoras.*
- 2) *Analizar algunas variables que afectan la estimación de las fuentes sonoras como por ejemplo el número de micrófonos.*

Para tales propósitos, la investigación desarrollada en esta tesis se enfoca en trabajar con un modelo de propagación acústica considerando un medio homogéneo [2]. Las evaluaciones se realizan con señales simuladas que se asume son producidas por una o más fuentes sonoras sintéticas al interior de un espacio tridimensional que representa al espacio torácico. Para diferentes situaciones se simularon registros multi-micrófonos bajo un protocolo de pruebas que permite explorar el desempeño de algunos métodos usados en la teoría inversa, las limitaciones del modelo utilizado y la influencia del número de micrófonos usados en el registro del sonido respiratorio.

La tesis se ha estructurado en la forma siguiente: en un segundo capítulo se abordan algunos conceptos de la teoría inversa discreta y se realiza una exposición acerca del problema inverso en otras áreas médicas. Esta exposición se centra en los métodos que se emplean de la teoría inversa. Para concluir el capítulo que completa los antecedentes de la tesis se exponen diversos estudios que se han realizado para estimar las fuentes de sonido respiratorio.

En el capítulo tres se exponen los métodos matemáticos que se emplearán en las diferentes simulaciones para estimar las fuentes de sonido respiratorio como Mínimos Cuadrados, Mínimos Cuadrados de Norma Mínima ponderados, Descomposición de Valores Singulares, Descomposición QR y, finalmente, la exposición del FOCUSS (*FOCal Underdetermined System Solver*).

En el capítulo cuatro se expone la metodología de prueba utilizada en las simulaciones así como los resultados obtenidos con los diferentes métodos y bajo distintas situaciones de simulación. Finalmente, el capítulo cinco comprende la discusión y conclusiones obtenidas de un análisis de los resultados obtenidos.

CAPITULO II. ANTECEDENTES.

2.1. Conceptos Básicos de Teoría Inversa.

En esta sección se expondrán algunos conceptos básicos de la teoría inversa discreta. Conceptos como el problema directo e inverso, el problema inverso sobre determinado y subdeterminado, el problema inverso mal condicionado, el método de Mínimos Cuadrados así como el método de Mínimos Cuadrados de Norma Mínima.

2.1.1. Introducción.

La teoría inversa es un conjunto de métodos matemáticos que permite realizar inferencias de propiedades físicas a partir de observaciones. Las propiedades físicas se podrían dividir en dos categorías generales: a) aquellas que pueden describirse por parámetros discretos, y b) aquellas que son descritas por funciones continuas (temperatura o la intensidad de un campo eléctrico). La teoría inversa emplea diferentes técnicas (métodos) matemáticas para estas dos categorías de propiedades: la teoría de ecuaciones matriciales para parámetros discretos y la teoría de ecuaciones integrales para funciones continuas [12].

La teoría inversa se limita a observaciones (mediciones o datos) y a preguntas que puedan representarse numéricamente (y estadísticamente) de propiedades específicas del mundo físico, no necesariamente medibles directamente; a estas propiedades se les denomina modelo. El término teoría inversa se usa en contraste a la teoría directa, la cual se define como el proceso de predicción de datos (mediciones) basándose en algún modelo y en un conjunto específico de condiciones relevantes para el problema. Resumiendo ambos tipos de problemas [12]:

Problema directo:

Parámetros del modelo \Rightarrow Modelo \Rightarrow Predicción de datos.

Problema Inverso:

Datos \Rightarrow Modelo \Rightarrow Estimado de los Parámetros del Modelo.

Nótese que el papel de la teoría inversa es proporcionar información acerca de los parámetros desconocidos del modelo. Sin embargo, la teoría inversa proporciona los procedimientos para valorar un modelo o permite discriminar entre posibles modelos.

Los parámetros estimados del modelo pueden ser cantidades numéricas discretas hasta funciones continuas de una o más variables. En la teoría inversa discreta los parámetros del modelo son representados como un conjunto finito de valores numéricos. Esta limitación no excluye, en la práctica, el estudio de funciones continuas puesto que las funciones continuas pueden con frecuencia ser aproximadas adecuadamente por un número finito de parámetros discretos, produciendo cierto nivel de imprecisión en la teoría [12].

2.1.2. Formulación del Problema Inverso.

En principio, la mayoría de los problemas inversos inician con una descripción de datos. Una matriz proporciona un medio conveniente para la representación de estos datos numéricos; si se tienen M mediciones, cada una se puede considerar como un elemento de una matriz \ddot{b} de dimensión $M \times 1$. En forma similar, los parámetros del modelo pueden ser representados como elementos de una matriz \ddot{x} de dimensión $N \times 1$, es decir,

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{Datos} & \ddot{b} = [b_1, b_2, \dots, b_M]^T \\ \text{Parámetros} & \ddot{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T, \end{array}$$

en donde el supra-índice T indica la matriz transpuesta. Un problema inverso tiene como enunciado básico: 'los parámetros del modelo están de alguna forma relacionados a los datos' [12]. A esta relación se le denomina modelo; regularmente el modelo toma la forma de una o más fórmulas que se espera cumplan los datos y los parámetros; en una situación real, los datos y parámetros están relacionados de forma complicada. De manera general, los datos y parámetros pueden relacionarse por una o más ecuaciones implícitas como:

$$(2) \quad \begin{array}{l} f_1(\ddot{b}, \ddot{x}) = 0 \\ f_2(\ddot{b}, \ddot{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_L(\ddot{b}, \ddot{x}) = 0 \end{array} .$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial como $\ddot{f}(\ddot{b}, \ddot{x}) = 0$. El propósito de la teoría inversa es dar solución a este sistema de ecuaciones proporcionando un estimado de los parámetros.

Sin embargo, no se pretende que el sistema de ecuaciones (2) contengan información suficiente para especificar en forma única los parámetros del modelo o inclusive que este sistema de ecuaciones sea consistente, es decir que el sistema de

ecuaciones (2) presente una solución. Uno de los propósitos de la teoría inversa es solucionar esta clase de situaciones y proporcionar los medios para tratar con los problemas que ello implica.

Supongamos que la función $\ddot{f}(\ddot{b}, \ddot{x})$ es lineal para ambos, datos y parámetros, y que puede ser escrita como una ecuación matricial:

$$(3) \quad \ddot{f}(\ddot{b}, \ddot{x}) = 0 = F \begin{bmatrix} \ddot{b} \\ \ddot{x} \end{bmatrix},$$

con F matriz de L x (N + M). En ocasiones es posible separar los datos de los parámetros, y formar L = M ecuaciones lineales en los datos, pero no en los parámetros, relacionados a través de una función vectorial, $\ddot{g}(\ddot{x})$, de la forma:

$$(4) \quad \ddot{f}(\ddot{b}, \ddot{x}) = 0 = \ddot{b} - \ddot{g}(\ddot{x}).$$

Si la función $\ddot{g}(\ddot{x})$ fuese lineal, esto implicaría una ecuación matricial de M x N (donde L=M), denominada forma lineal explícita:

$$(5) \quad \ddot{f}(\ddot{b}, \ddot{x}) = 0 = \ddot{b} - A\ddot{x}.$$

Esta forma es equivalente a que la matriz F, en ecuación (3), sea diagonal

$$(6) \quad F = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Los problemas inversos simples y más comprensibles son los que se pueden representar mediante una ecuación lineal explícita:

$$(7) \quad A\ddot{x} = \ddot{b},$$

ecuación fundamental en el estudio de la teoría inversa discreta. La matriz A es llamada el kernel de datos en analogía a la teoría de ecuaciones integrales.

2.1.3. Sistemas Sobredeterminados.

Un tipo de problema inverso surge cuando se tienen más renglones que columnas en la matriz A. En tal caso, el número de observaciones independientes M es más grande que el número de incógnitas N, y el problema se denomina sobredeterminado. Se han desarrollado métodos para describir una aproximación apropiada a este tipo de problema inverso, el más común es el método de Mínimos Cuadrados [13].

Consideraciones adicionales a tomarse en cuenta en la solución de problemas inversos son las siguientes. Puesto que los datos contienen incertidumbres, los problemas inversos requieren que se examine el efecto de esas incertidumbres. Aunado a lo anterior, en la mayoría de los casos el modelo seleccionado no es consistente con los datos observados. Por lo limitado de nuestro conocimiento del problema físico, los datos pueden ser inconsistentes con el modelo. Un análisis inverso incluye el estudio de problemas sobredeterminados y subdeterminados con datos inexactos e inconsistentes [13].

2.1.4. Mínimos Cuadrados Lineal.

El término norma es usado como una referencia a alguna medida de longitud o tamaño, por ejemplo, $\|\ddot{a}\|$ es la norma del vector \ddot{a} . Las normas comúnmente usadas son las que se encuentran definidas en términos de la suma de alguna potencia de los elementos de un vector y reciben el nombre de norma L_p , donde p es la potencia:

$$\begin{aligned} \text{Norma } L_1: \|\ddot{a}\| &= \left[\sum_i |a_i|^1 \right] \\ \text{Norma } L_2: \|\ddot{a}\| &= \|\ddot{a}\|_2 = \left[\sum_i |a_i|^2 \right]^{1/2} \\ &: \\ &: \\ \text{Norma } L_p: \|\ddot{a}\|_p &= \left[\sum_i |a_i|^p \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

El método de mínimos cuadrados emplea la norma L_2 , (de orden 2) la elección de esta norma involucra la forma en como son ponderados los datos de aquellos que se alejan de la tendencia media, esto implica que los datos obedecen a una distribución estadística Gaussiana [12]. Si los datos son exactos, es importante conocer si una predicción se aleja en forma significativa del valor observado. En este sentido, una norma de potencia grande (orden alto) se usa para resaltar los errores grandes implicando que los datos obedecen a una distribución estadística de extremos amplios (cola amplia). De otra forma, si se espera que los datos se dispersen ampliamente alrededor de una tendencia, entonces no es conveniente resaltar algunos errores de predicción grandes. Una norma de potencia pequeña

(orden bajo) se usa para que los errores sean más parecidos implicando que los datos obedecen a una distribución estadística de extremos cortos (cola corta) [12].

Aunque muchas mediciones tienen aproximadamente una distribución Gaussiana, algunos datos son erróneos o espurios, su ocurrencia sin embargo prueba que la suposición de distribución Gaussiana no es correcta, especialmente en los extremos de la distribución. Si se aplica el método de Mínimos Cuadrados para obtener una solución a esta clase de problema, los parámetros estimados del modelo pueden ser erróneos. En estos casos, métodos basados en la norma L_1 pudieran ser más recomendables. Un ejemplo de problemas del tipo sobredeterminado es el siguiente. Se desea encontrar la mejor línea recta que se aproxime a un conjunto de datos, idealmente se quiere que la línea recta pase a través de todos los puntos. Esto normalmente no es posible con datos que contiene errores o porque la verdadera, y desconocida, relación funcional no es en realidad una línea recta. Un modelo posible es descrito por la ecuación lineal, $b_i = x_1 + x_2 z_i$. Tal expresión tiene $N = 2$ parámetros y típicamente existen más de dos datos $M > N$. Si la ecuación anterior no puede satisfacerse para cualquier i significa que el problema inverso es sobredeterminado, esto es, no tiene solución exacta. Sin embargo, se pueden estimar los parámetros x_1 y x_2 que dan una solución aproximada a la ecuación. La bondad de esta estimación esta caracterizada por el error total (suma de los cuadrados de los errores individuales) [12]:

$$(8) \quad E(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N e_i^2,$$

es el cuadrado de la norma euclidiana del vector error \ddot{e} : $E(x_1, x_2) = \ddot{e}^T \ddot{e}$.

El problema es ahora calcular el mínimo de la función $E(x_1, x_2)$ mediante la solución para x_1 y x_2 del siguiente sistema de ecuaciones:

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación (9) proporciona las fórmulas clásicas de mínimos cuadrados para problemas inversos lineales.

Otra manera de obtener un estimado de los parámetros, desde una perspectiva ligeramente diferente [13], es considerar una curva que se ajuste a los datos y en consecuencia obtener las siguientes igualdades, para los datos:

$$(10) \quad \begin{aligned} x_2 + x_1 z_1 &= b_1 \\ x_2 + x_1 z_2 &= b_2 \\ &\wedge \\ x_2 + x_1 z_M &= b_M. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores son el enunciado de nuestro problema. Escribiendo este sistema de ecuaciones en forma matricial, con matriz de coeficientes, A, no cuadrada, se tiene (ecuación 7):

$$A\ddot{x} = \ddot{b},$$

en donde se define a las matrices A, \ddot{x} y \ddot{b} como:

$$(11) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ \wedge & \wedge \\ 1 & z_M \end{bmatrix}, \quad \ddot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \wedge \\ b_M \end{bmatrix}.$$

La solución de este sistema no se puede obtener por métodos estándares. Lo que se puede hacer es transformarlo a un sistema cuadrado estrechamente relacionado al sistema original. Lo anterior se puede realizar multiplicando ambos lados de la ecuación (7) por la matriz transpuesta de A:

$$(12) \quad A^T A \ddot{x} = A^T \ddot{b}.$$

Se puede verificar que si se desarrolla el álgebra asociada a la multiplicación de matrices en (12) se obtienen las fórmulas clásicas de mínimos cuadrados para problemas inversos lineales.

Cuando se analizan problemas inversos, frecuentemente se encuentran sistemas de ecuaciones no cuadrados, y el procedimiento anterior representa una alternativa para tratar estos sistemas de ecuaciones. En la práctica, sin embargo, la matriz del sistema de ecuaciones normalmente es mal condicionada y esto puede resultar en una pobre estimación de los parámetros x_1 y x_2 .

Este método puede ser generalizado a un problema inverso lineal de manera directa. Nuevamente, calculando la derivada del error E con respecto a cada parámetro del modelo x_q , e igualando a cero:

$$E = e^T e = (\ddot{b} - A\ddot{x})^T (\ddot{b} - A\ddot{x})$$

Realizando la multiplicación:

$$E = \sum_k^N \sum_j^N x_k x_j \sum_i^N A_{ij} A_{ik} - 2 \sum_j^N x_j \sum_i^M A_{ij} b_i + \sum_i^M b_i b_i$$

Derivando a E respecto de cada x_q resulta:

$$\frac{\partial E}{\partial x_q} = 2 \sum_k^N x_k \sum_i^M A_{iq} A_{ik} - 2 \sum_i^M A_{iq} b_i$$

En forma matricial

$$A^T A \ddot{\mathbf{x}} - A^T \ddot{\mathbf{b}} = 0.$$

Suponiendo que $(A^T A)^{-1}$ existe para el problema inverso, $A \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{b}}$, la solución es

$$(13) \quad \ddot{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \ddot{\mathbf{b}}.$$

2.1.5. Sistemas Subdeterminados.

Un segundo tipo de problema inverso se presenta cuando en la ecuación (7) el número de renglones es menor al número de columnas de A. Tales problemas pueden surgir cuando cierto número de ecuaciones, K, que tengan el propósito de ser independientes, en realidad comparten la misma información. Entonces se tendrán N incógnitas pero sólo N-K ecuaciones. Este tipo de problema inverso puede poseer una infinidad de soluciones y son frecuentemente denominados subdeterminados [13].

Asúmase que el problema inverso, $A \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{b}}$, es subdeterminado, es decir, existen un número limitado de ecuaciones que parámetros del modelo además, no existe inconsistencia en las ecuaciones. Entonces es posible encontrar más de una solución al problema inverso cuyo error de predicción es cero (de hecho se ha demostrado que este tipo de problemas tienen un número infinito de dichas soluciones). Aunque los datos proporcionan información acerca de los parámetros del modelo, no es suficiente para determinar la unicidad de los parámetros, por lo tanto se tendría que seleccionar una solución que parezca ser la mejor para algún problema en particular [12].

Para obtener una solución a un problema inverso subdeterminado de entre un número infinito de soluciones con error de predicción, E, cero se debe contar con un mecanismo para obtener una solución a un problema específico. Para lograrlo se debe añadir alguna información, no contenida en la ecuación (7). Esta información previa se le denomina información a priori y puede tomar diversas formas que cuantifiquen las

expectativas que se tienen acerca del carácter de la solución. La importancia de la información a priori depende en gran medida del uso que tiene para estimar los parámetros del modelo. Por ejemplo, si se quiere simplemente una solución al problema entonces la elección de la información a priori no es importante. Sin embargo, si se quiere desarrollar argumentos que dependen de la unicidad de los estimados, la validez de la información asumida es de gran importancia.

Una primera clase de información a priori es considerar que la solución que se espera obtener de un problema inverso sea simple. La noción de simplicidad es cuantificada por alguna medida de longitud de la solución. Un tipo de medida de simplicidad es la longitud Euclidiana de la solución, $L = \ddot{x}^T \ddot{x} = \sum x_i^2$ [12]. Por consiguiente, una solución es definida simple si es pequeña, cercana al cero, cuando se mide con la norma L_2 .

2.1.6. Mediciones de Longitud Ponderada Como Información a Priori.

En diversos casos $L = \ddot{x}^T \ddot{x}$ no es una buena medida de simplicidad de la solución a un problema inverso. Por ejemplo, si se desea encontrar una solución con una cercanía a un valor promedio de alguna propiedad de un medio la generalización de L es la forma apropiada de medir la simplicidad de la solución definida, es decir, L se define por la siguiente expresión:

$$(14) \quad L = (\ddot{x} - (\ddot{x}))^T (\ddot{x} - (\ddot{x})),$$

donde (\ddot{x}) es el valor asumido como información a priori de los valores para los parámetros del modelo [12].

En ocasiones la idea de longitud como medida de simplicidad es inapropiada. Por ejemplo, se podría pensar que la solución es simple si es suave, es decir, no existen discontinuidades. Estas medidas pueden ser apropiadas cuando los parámetros del modelo representan una función continua discretizada, es decir, en cierto casos se espera que los parámetros del modelo varíen lentamente. Afortunadamente, propiedades tales como la suavidad de una función pueden ser fácilmente cuantificables por medidas que son generalizaciones de longitud [12]. Por ejemplo, la norma de la primera derivada de una función continua en el espacio puede proporcionar esta propiedad. En modelos de parámetros discretos la derivada puede aproximarse por una diferencia entre parámetros

el estimado de los parámetros del modelo es controlado por alguna matriz que opera sobre los datos. Por lo tanto, es importante enfocar el estudio a la matriz G para aprender acerca de las propiedades de los problemas inversos. En los problemas inversos, $A\ddot{x} = \ddot{b}$, donde la inversa de la matriz A que soluciona el problema frecuentemente se denominan inversa generalizada. La forma exacta de la matriz inversa generalizada depende del problema en cuestión. La matriz inversa generalizada de un problema inverso sobredeterminado de Mínimos Cuadrados es $G = A^{-g} = (A^T A)^{-1} A^T$, y para el problema inverso subdeterminado de longitud mínima es $G = A^{-s} = A^T (A A^T)^{-1}$ [12].

Un sistema $A\ddot{x} = \ddot{b}$ es llamado mal condicionado si un cambio pequeño en el lado derecho del sistema resulta en grandes cambios en la matriz solución. Es decir, si la solución no depende continuamente de los datos. Matemáticamente un problema inverso, $A\ddot{x} = \ddot{b}$, se dice que es estable si la solución depende continuamente de los datos e inestable si esto no sucede. En términos simples; un sistema mal condicionado significa que para todo conjunto de datos próximo a un conjunto particular de soluciones el sistema falla. Este concepto fue introducido por Hadamard en 1902 en relación con el estudio de problemas de valores de frontera y se designó como problemas inestables (mal condicionados) [14].

Lo mal condicionado del problema $A\ddot{x} = \ddot{b}$ es una propiedad que depende de los coeficientes de la matriz, y es independiente de los valores numéricos en la matriz del lado derecho del sistema. El número de condición de una matriz es usado para cuantificar lo mal condicionado de una matriz. Se define la norma $\|C\|_{\infty}$ de una matriz C de $N \times N$ en términos de las magnitudes de los renglones y columnas de la matriz C , es decir,

$$(18) \quad \|C\| = \max_{i=1, \dots, N} \left\{ \sum_{j=1}^N |c_{i,j}| \right\}.$$

El número de condición $K(C)$ es el producto de la norma de C y la norma de la matriz inversa, C^{-1}

$$(19) \quad K(C) = \|C^{-1}\| \|C\|.$$

Si el número de condición es menor o igual a uno, entonces la matriz se dice que es bien condicionada. Si el número de condición es más grande que uno, entonces la matriz es

mal condicionada. Al número de condición se le considera una medida de crecimiento del error en el vector de datos que aparece en el vector solución. Rigurosamente hablando, si el número de condición es cercano a uno, entonces los errores en la solución serán alrededor del mismo tamaño que los errores en el vector de datos. Si el número de condición es muy grande, entonces el error en el vector solución puede ser mucho más grande que el error en el vector de datos. El número de condición es solamente definido para matrices no singulares, puesto que no podemos obtener una inversa única para matrices singulares [13].

2.2. El Problema Inverso en Otras Areas de la Medicina.

2.2.1. Problema Inverso en Biomagnetismo.

El problema inverso en biomagnetismo es un área de investigación que intenta identificar las fuentes internas de un campo magnético, medido desde el exterior del organismo, producido por corrientes iónicas y material magnético en organismos biológicos. Uno de los objetivos de los investigadores en esta área es realizar mediciones de magnetización para identificar la cantidad de ferrita o magnetita y obtener información acerca de los niveles de hierro relacionados a enfermedades o función pulmonar [15]. Sin embargo, las investigaciones van desde la localización de focos epilépticos hasta el estudio de procesos cognoscitivos. Aunque son de continuo interés las fuentes provenientes de ojos, músculos de los miembros, y otras más; la mayoría de las investigaciones se enfocan al cerebro humano [15]. Las investigaciones biomagnéticas de la actividad cerebral ofrece ventajas importantes, por ejemplo: (1) el método es totalmente no invasivo, (2) proporciona información de tipo funcional, (3) el cráneo es magnéticamente transparente y las mediciones de campos magnéticos están directamente relacionadas a las principales fuentes neuronales.

Varios investigadores coinciden en que uno de los grandes problemas sin resolver son los métodos empleados para identificar fuentes, corrientes iónicas o la distribución de un campo magnético, a partir de registros externos. En principio, el problema inverso es insoluble porque por ejemplo existen distribuciones de corriente que no generan una señal magnética externa. En la práctica, se puede proveer de una posible solución al problema usando modelos de fuentes y geometría sencillos. Estos modelos pueden contener pocos parámetros, en cuyo caso los algoritmos solucionan el problema inverso, pero

probablemente la solución es limitada; o el modelo puede considerar muchos parámetros y la solución es fisiológicamente más aceptable sin embargo, el mejor algoritmo de solución del problema inverso converge lentamente [15].

2.2.1.1. Magnetoencefalografía.

La imagenología de fuentes magnéticas (MSI) especifica la distribución de corriente eléctrica dentro de un cuerpo conductor que puede ser deducida a partir de mediciones de patrones de un campo magnético en su superficie. Las soluciones a este problema tradicionalmente introducen explícitamente modelos de fuente tales como un dipolo de corriente o la distribución de un pequeño número de dipolos. La tarea es determinar los valores de los parámetros que mejor predicen el patrón del campo magnético medido. Mientras los patrones del campo magnético sobre el cuero cabelludo, como los producidos por la actividad neuronal en respuesta a un sonido, con frecuencia se pueden explicar o justificar por una o más fuentes de corriente dipolar, la ambigüedad intrínseca a la solución inversa introduce incertidumbres acerca de la validez de los modelos con dipolos múltiples; Wang y colaboradores [16] proporcionan un método para eliminar sustancialmente esta ambigüedad y reducir incertidumbres.

Se conoce que un componente dipolar de corriente normal a la superficie de una esfera de conductividad uniforme no contribuye al campo magnético fuera de la superficie. La razón es que los límites del medio conductor distorsionan el patrón generado por el volumen de corriente del dipolo de tal forma que el campo proveniente del componente normal del volumen de corriente y el campo del dipolo se cancelan exactamente. Es por esta razón que los modelos lineales tienen la característica singular de agregar una familia de soluciones para el sistema homogéneo de ecuaciones produciendo a una solución inversa no única. La condición de norma mínima elimina esta ambigüedad en favor de las soluciones con un valor de intensidad cuadrática media mínima. En la práctica, los estimados de norma mínima son generalmente inestables con respecto a errores del modelo y mediciones con ruido. Un método alternativo es la expansión espectral [14] que no presenta esta dificultad, y es equivalente al método de norma mínima permitiendo además otras opciones [16]. El método puede ser aplicado a una gran variedad de situaciones bajo restricciones de carácter fisiológico. Por ejemplo, una de las suposiciones principales es que

las fuentes neuronales que producen campos magnéticos extracraneales se encuentran limitadas a ciertas regiones específicas del cerebro. La aproximación de Wang y colaboradores descansa en la construcción de un modelo lineal basado en una configuración geométrica de la superficie imagen donde se busca la solución inversa. La inversa generalizada de Moore-Penrose se usa para obtener una solución por mínimos cuadrados de norma mínima para la distribución de fuentes de corriente, suponiendo que la superficie imagen coincide con la superficie fuente. La superficie fuente es la superficie en donde se especifica la localización actual de las fuentes de corriente primaria mientras que la superficie imagen es la superficie donde se busca la solución inversa. Esta solución es única para el modelo lineal dado en [16, 17].

Los errores que contribuyen a soluciones inversas inapropiadas aparte del ruido aditivo en las observaciones experimentales son, por ejemplo, la falta de precisión para determinar las posiciones donde se proporcionaron los valores estimados de la fuente. El mismo modelo introduce un error, por ejemplo, en la selección de la rejilla para representar una fuente continua. En el caso de simulaciones por computadora existe un error debido al cálculo en la máquina, porque los errores de redondeo son inevitables cuando se usa aritmética de punto flotante.

La resolución espacial para fuentes localizadas libres de ruido depende del intervalo de muestreo del campo, de la profundidad de la fuente, y el tamaño de la rejilla de la superficie imagen. En general, la resolución es mejor para fuentes poco profundas [16, 17]. La calidad de la imagen, sin la presencia de ruido, mejora cuando el intervalo de muestreo del campo decrece para capturar más a detalle la información. Una característica muy similar ocurre en presencia de ruido. Sin embargo, para establecer el método de norma mínima en la práctica es necesario estudios adicionales para definir diferentes aspectos como por ejemplo el intervalo de muestreo óptimo, para un tipo de sensores, y el efecto del ruido en la calidad de la imagen. Los resultados en [16] bajo condiciones específicas de simulación indican que varias configuraciones de fuentes pueden ser deducidas por el método de mínimos cuadrados de norma mínima sin tener un modelo de fuente explícito [16, 17].

En [17] Wang localiza la corteza o superficie fuente dentro de una esfera (superficie de observación). Se adopta una forma de “L” para representar la corteza plegada. La

estructura en forma de “L” es llamada la superficie fuente dado que en ella se localiza la actividad neuronal importante. Wang estudia la influencia del error de posición donde se proporcionan los valores estimados de la fuente. En estudios anteriores se omitía asumiendo coincidentes la superficie imagen (en donde se busca la solución inversa) y la superficie fuente. Sin embargo, el determinar la posición de la superficie imagen produce errores inevitables como consecuencia de la reconstrucción de la imagen por resonancia magnética. También, Wang realiza un análisis del número de sensores contra la calidad de la imagen mostrando que la aproximación por mínimos cuadrados de norma mínima es robusta pero requiere un número importante de sensores. Wang indica que la densidad en los sensores podría ser reducida con una reducción en detalle sobre la imagen.

En 1994 Wang en [18] mejora su estudio usando nuevamente un modelo esférico para la cabeza; para la superficie fuente emplea planos con cierta curvatura que modelan la pared de la fisura cerebral y utiliza los tres componentes de la fuente de corriente, este procedimiento es más general y aplicable a una cabeza real. La justificación de esta nueva superficie fuente es el hecho de que dos terceras partes de la corteza cerebral esta contenida en las fisuras, donde diferentes actividades neuronales pueden ser encontradas en paredes opuestas de la fisura. Posteriormente, en 1995 Wang y colaboradores [19] incorporan información temporal a la distribución espacial y realizan una extensión del estudio realizado por Wang en [18]. Añadiendo el tiempo logra demostrar que esta nueva dimensión no afecta las características espaciales que se relacionan a la calidad de la imagen y no hay un límite en el número de muestras que pueden ser usadas, siempre y cuando no se afecte la capacidad de cálculo.

Una modificación a la solución del problema inverso en biomagnetismo es propuesta por Matsura y Okabe en [20]. Ellos proponen un nuevo método de estimación de dipolos múltiple que proporciona soluciones “sparse” (solución principalmente caracterizada por energía localizada) utilizando el método de mínimos cuadrados selectivo. Este método consiste en seleccionar aleatoriamente un subconjunto de variables llamadas variables básicas (momentos bipolares) forzando a las variables restantes a cero. Las soluciones son altamente dependientes del subconjunto seleccionado sin embargo, una solución aceptable se obtiene por medio de programación lineal.

En modelos 1-D y 3-D el método tiene dos ventajas: primera, no se necesita especificar el número de dipolos; segunda, usando programación lineal, la solución por norma mínima selectiva con la norma L_1 puede obtenerse rápidamente y en forma única.

Aunque la solución del problema inverso en biomagnetismo por norma mínima proporciona una solución única, ésta es sólo una de entre un conjunto de soluciones factibles. En especial esta solución ocupa una región extensa de la corteza. Srebro en [21] presenta un método para descubrir una solución factible de norma mínima para la cual la corriente cortical sea generada en una región restringida. Para encontrar este tipo de solución emplea una aproximación por norma mínima para definir una región de interés, dentro de esta región se busca otra solución factible. La aproximación por norma mínima es usada iterativamente y la región de búsqueda se reduce proporcionando evidencias sobre la posición de la región activa. Sin embargo, este método tiene dos inconvenientes: primero, si la actividad cortical es contigua pero muy extendida el método puede subestimar la extensión de la región activa; segundo, si dos regiones activas se encuentran separadas con una profundidad significativa, la región más profunda puede ser difícil de detectar.

Por otra parte Grave y asociados en [22] investigaron la viabilidad de reconstruir una tomografía tridimensional de fuentes neuronales por métodos de reconstrucción lineal bajo condiciones ideales con datos exactos. Proponen una solución que intenta reconstruir corrientes promedios usando el concepto de kernels de resolución para evaluar soluciones para el caso de corrientes de distribución arbitraria e introducen el concepto de matriz de resolución como la base para evaluar la solución inversa. También, para evaluar “lo que se espera” y “lo que se logra” en calidad para la reconstrucción proporcionada por una solución lineal, define dos medidas: visibilidad e identificabilidad de la fuente.

Grave y asociados concluyen que las soluciones lineales inversas no son adecuadas para estimar distribuciones de corriente arbitraria en muchos sitios del cerebro. Las soluciones mediante promedios y suavizados son mejores que los estimados de norma mínima para una fuente puntual pero subestiman la amplitud o intensidad para regiones profundas del cerebro. Finalizan indicando que sus resultados muestran que los estimados de una fuente puntual pueden ser mejorados. Aunque no se puede decir lo mismo acerca del desempeño de las soluciones en presencia de distribución de corrientes arbitrarias.

Gorodnitsky y colaboradores en [23] proponen un nuevo algoritmo de reconstrucción de fuentes para EEG/MEG el cual produce soluciones localizadas conservando la generalidad y la facilidad de aplicación a procedimientos tomográficos. Como un método de reconstrucción el algoritmo FOCUSS (FOCal Underdetermined System Solver) usa un modelo directo que asigna una corriente a cada elemento dentro de la región de reconstrucción predeterminada, formulación que preserva la naturaleza lineal del problema físico. Esta aproximación no tiene la necesidad de hacer suposiciones acerca del orden del modelo o la forma o extensión de las fuentes. El FOCUSS tiene la característica de ser una técnica no paramétrica de alta resolución, además proporciona soluciones compactas para áreas de activación de forma arbitraria en la cabeza, encontrando la verdadera extensión de la fuente localizada; el FOCUSS también resuelve correctamente fuentes profundas. El FOCUSS como un algoritmo dependiente de una inicialización trata también el problema de la no-unicidad en la solución inversa y es un procedimiento recursivo de estimación lineal basado en la solución por pseudo-inversa ponderada. El algoritmo no requiere de información “a priori” o restricciones y en su lugar puede restringirse la solución basada únicamente en las mediciones; si se desea el algoritmo puede fácilmente aceptar restricciones adicionales, por ejemplo restricciones de tipo anatómicas.

2.2.2. Problema Inverso en Campo Eléctrico.

En esta área un problema directo significa calcular la distribución de potenciales del campo eléctrico sobre la superficie de un volumen conductor generado por fuentes eléctricas de posición y configuración conocida dentro del volumen conductor mientras que un problema inverso consiste en calcular las fuentes dentro de un volumen conductor dado el campo de potencial en la superficie. Como se indicó anteriormente, sin información adicional, un problema inverso es matemáticamente mal condicionado y no tiene solución única. Sin embargo, si las condiciones sobre el problema inverso se restringen haciendo suposiciones acerca de la geometría y conductividad del medio, número y forma de las fuentes, entonces se puede obtener una aproximación a la solución usando técnicas numéricas [24].

2.2.2.1. Electrocardiografía y Potenciales Evocados.

La solución del problema inverso en electrocardiografía consiste en reconstruir eventos eléctricos dentro del corazón mediante mediciones obtenidas en la superficie del cuerpo. Oster and Yoram en [25] evalúan el efecto de introducir el tiempo de progresión del proceso de excitación cardiaca en la solución inversa usando el procedimiento de regularización de Tikhonov modificado (Técnica de Twomey). Se considera que el proceso de excitación cardiaca es continuo en el tiempo para proporcionar una estimación “a priori” de la solución. Evaluando el método para reconstruir potenciales epicardicos se encontró que el método proporciona una mejora en la solución inversa cuando se incorpora información “a priori”.

El problema se establece a partir de la ecuación $AV_E = V_T$, donde V_E es el vector de potenciales epicardicos, V_T el vector de potenciales en la superficie del torso, y A es la matriz de transferencia entre el torso y el corazón que depende únicamente de la geometría.

La regularización de Tikhonov implica calcular $\min_{V_E} \left[\|AV_E - V_T\|^2 + \alpha \|RV_E\|^2 \right]$, donde α es el parámetro de regularización, y R puede ser la matriz identidad (Tikhonov de orden cero). Mientras que la regularización de Twomey implica calcular $\min_{V_E} \left[\|AV_E - V_T\|^2 + \alpha \|V_E - P\|^2 \right]$. Es decir, en lugar de colocar restricciones sobre la magnitud de la solución o sobre sus derivadas, la regularización de Twomey minimiza la diferencia entre la solución y algún estimado, P , de la solución a un tiempo dado. La solución del problema inverso dada por Twomey esta apoyada principalmente con la medición de valores epicardicos para construir un estimado de la solución.

Los resultados demuestran que aunque los potenciales epicardicos pueden ser reconstruidos con una buena aproximación usando la técnica de inversión de Tikhonov, mejorando los estimados cuando se incorpora el tiempo de progresión en el procedimiento de regularización.

Shahidi realizó un estudio para evaluar la exactitud de la solución inversa mediante la comparación con potenciales epicardicos medidos durante una cirugía de arritmia en el cual también se obtuvieron datos anatómicos [26]. Se estudio los efectos de las restricciones sobre el proceso de optimización, asumiendo que las propiedades eléctricas del tejido que constituyen el tórax humano son únicamente resistivas debido a que se

despreciaron los efectos inductivos y de capacitancias. El tórax es modelado con el método de elemento finito como un volumen conductor irregular seccionalmente homogéneo, donde la distribución del potencial eléctrico satisface la ecuación de Laplace. Las condiciones de frontera que son impuestas por el modelo fueron: condiciones de distribución de potenciales sobre la superficie epicárdica (Dirichlet) y la desaparición de componentes normales de densidad de corriente sobre la superficie del cuerpo (Neumann). La solución inversa se obtuvo mediante métodos de optimización de Restricción de Norma Acotada (BNC), Composición Residual y Operador de Suavizamiento (CRESO) y Criterio de Akaike (AIC) basados en la regularización de Tikhonov y por control en la dimensión (regularización-truncamiento) [26].

Se encontró que la calidad de los mapas epicardicos obtenidos mediante la solución inversa son dependientes de la complejidad de los mapas epicardicos medidos. Cuando la distribución de potenciales epicardicos medidos fue compleja, ninguno de los métodos fue capaz de recuperar los patrones complejos en múltiples sitios. Por otra parte, el BNC proporcionó el mejor resultado para ambos métodos de estabilidad, regularización de Tikhonov y control de dimensión, cuando los mapas fueron analizados visualmente.

El método de valor singular truncado (TSVD) y la regularización de Tikhonov (TIK) son las técnicas más populares de entre varias para estimar numéricamente los potenciales epicardicos. Throne y colaboradores en [11] desarrollaron una modificación al método de eigensistema generalizado (tGES) como una técnica alternativa de expansión por eigenvector. Comparan el tGES con el SVD y TIK para modelos de esferas concéntricas con medios de propagación homogéneos y no homogéneos, involucrando errores en la conductividad y en la geometría. En cada caso el tGES mostró tener el error relativo más pequeño sobre un rango amplio de errores de modelado.

Throne y asociados en [11] extienden la comparación de estas técnicas a un modelo realista del corazón-torso e utilizan datos experimentales. Con este modelo el GES y tGES proporcionan el error relativo más pequeño entre los potenciales verdaderos y los potenciales derivados numéricamente. Los mapas isopotenciales recuperados usando GES y tGES parecen ser más exactos que los mapas recuperados usando TSVD y TIK, aunque ambos, TSVD y TIK, producen resultados similares si utilizan el método de elemento finito. El análisis anterior fue hecho únicamente con el error relativo como medida de

desempeño, sin embargo se indica que esto no necesariamente es indicativo de como cada técnica analiza la forma del verdadero patrón del potencial epicárdico por lo que es necesario buscar otras medidas de desempeño.

Por otra parte, para potenciales evocados se han hecho intentos por especificar la fuente de los registros. Se han mostrado evidencias mediante una variedad de aproximaciones a este problema, incluyendo estudios de topografía, análisis de los efectos de una lesión y registros intracraneales. Wood [24] estudió la aplicación cuantitativa de dos métodos de localización dipolar derivados de la teoría de campo eléctrico al problema de identificación de la fuente en potenciales evocados con el objetivo de ilustrar el valor y sus limitaciones. Concluye que los métodos de localización dipolar proporcionan un buen estimado de la posición y orientación del dipolo equivalente. La estabilidad de las distribuciones de potenciales evocados en el cuero cabelludo y las soluciones de los métodos correspondientes tienen implicaciones importantes sólo para la componente definida por los potenciales evocados, y que puede ser atribuida a una sola fuente o a un conjunto de fuentes en sincronía.

Lo expuesto antes indica algunos esfuerzos que se han realizado por encontrar solución al problema inverso en otras áreas de la medicina. Uno de los problemas a que se han enfrentado, y que aun sigue abierto, son los métodos que son utilizados para localizar fuentes a partir de registros externos; de los métodos más utilizados se encuentra el norma mínima que elimina la ambigüedad de solución inversa no única. Método ha sido aplicado a variadas situaciones bajo restricciones fisiológicas en donde se usa la inversa generalizada de Moore-Penrose para obtener una solución inversa por mínimos cuadrados de norma mínima. Al utilizar este método se ha encontrado que la resolución espacial para fuentes localizadas libres de ruido depende del intervalo de muestreo del campo, la profundidad de la fuente y el tamaño de la rejilla de la superficie imagen. Indicando, que la resolución es mejor para fuentes poco profundas y que la calidad de la imagen mejora cuando el intervalo de muestreo del campo decrece para obtener una información con más detalle. También se menciona que en ciertas condiciones de simulación varias configuraciones de fuentes pueden ser deducidas por el método de mínimos cuadrados de norma mínima sin un modelo de fuente explícito. La solución por norma mínima requiere un número significativo de sensores pero este puede ser reducido mediante una reducción en detalle sobre la imagen.

Los aspectos que afectan frecuentemente a las soluciones inversas son la falta de precisión en las posiciones donde se encuentran los valores estimados de las fuentes, el modelo utilizado, la selección de la rejilla para representar una fuente continua, el número de sensores y los errores de redondeo al usar aritmética de punto flotante. Además de que, las soluciones por norma mínima ocupan una región extensa; con el fin de resolver este problema se han generado métodos que den una solución factible de norma mínima sobre una región restringida. Uno de ellos es el FOCUSS que produce soluciones localizadas y que usa un modelo directo que asigna un valor de corriente a cada elemento dentro del espacio de reconstrucción preservando la naturaleza lineal del problema y no se tiene necesidad de hacer suposiciones acerca del orden del modelo, forma o extensión de las fuentes y que resuelve correctamente para fuentes profundas. El FOCUSS es una técnica no paramétrica de alta resolución que no requiere de información ‘a priori’ y que puede ser restringido únicamente a las mediciones externas.

2.3. Origen y Transmisión del Sonido Respiratorio.

Hay que hacer notar que las propiedades acústicas del tórax son complejas y que sólo se conocen parcialmente. El tórax consiste de tres componentes acústicamente diferentes: tejido sólido (hueso), vías aéreas y parénquima pulmonar. En esta sección se realiza una exposición de diferentes investigaciones enfocadas a caracterizar la transmisión del sonido respiratorio por medio de su amplitud. También, se describe el esfuerzo por calcular la velocidad del sonido en el parénquima así como la contribución del sonido originado en la laringe al sonido vesicular (sonido respiratorio escuchado en cualquier parte de la superficie torácica) y la determinación del sitio de producción del sonido respiratorio inspiratorio y espiratorio.

2.3.1. Origen del Sonido Respiratorio.

Con respecto del sitio de producción del sonido respiratorio vesicular Kraman empleó la técnica de sustracción fononeumográfica [8]. Realizó registros simultáneos de sonidos respiratorios en dos sitios diferentes sobre la pared torácica para determinar la distancia relativa de la fuente de sonido; se mezclaron las señales adquiridas en un

amplificador sumador, inicialmente con una de las señales sujeta a inversión de fase (sustracción) y después, sin inversión de fase (adición). La razón señal de sustracción a señal de adición se definió como el índice de intensidad de sustracción, SII. Posteriormente, con un análisis de regresión lineal de los valores de SII en función de la distancia entre micrófonos, se determinó si: a) las señales adquiridas representaban el mismo sonido, b) un sonido similar transmitido hacia cada micrófono por una o más fuentes distantes, c) sonidos no similares transmitidos por fuentes localizadas cerca de los micrófonos. Se encontró que en inspiración la pendiente de la línea de regresión es mayor que la pendiente en espiración a distintas distancias entre micrófonos (variando de 0 a 10 cm). También, se observó que utilizando un sonido vocalizado, si los micrófonos se colocaban sobre segmentos homólogos de los pulmones, al menos ocurría el 50% de cancelación del sonido en todos los sitios, indicando trayectoria y características de transmisión del sonido similar entre las cuerdas vocales y cada micrófono.

La interpretación de los datos fue realizada basándose en las siguientes suposiciones: (1) la forma de onda del sonido vesicular es compleja e irregular, y cualquier cancelación que ocurra es resultado de sonidos que fueron transmitidos a cada micrófono en fase y no a sonidos que accidentalmente están en fase, (2) la relación de fase de un sonido producido por una sola fuente que llega a dos áreas diferentes puede modificarse por alteraciones en su trayectoria de transmisión. Por lo tanto, aunque no exista cancelación no se puede descartar que no se trate de una sola fuente. Así también, si se establecen trayectorias de transmisión similares, a una frecuencia dada, en aéreas donde no se encuentra cancelación, sugiere pero no demuestra que el sonido respiratorio no emana de una misma fuente central.

Basándose en los patrones de cancelación encontrados se concluye que las pendientes del SII muestran consistentemente que al menos el sonido producido durante espiración se escucha en una área mayor que el producido en inspiración y por lo tanto, proviene de sitios más centrales. Se infiere la posición de al menos una fuente en un área por arriba de la carina principal cuando el sonido espiratorio es registrado sobre segmentos pulmonares homólogos y presenta algo de cancelación. El autor asume que una razón para explicar porqué los sonidos producidos por las cuerdas vocales se cancelan completamente es que sólo tienen ese origen, es decir, las cuerdas vocales, mientras que el sonido

espiratorio puede ser producido en varios sitios incluyendo las cuerdas vocales, la tráquea y las grandes vías. Como resultado, la componente más central de sonido, posiblemente el de mayor cancelación, puede ser parcialmente ocultada por sonidos periféricos en algunas áreas. Algo similar puede presentarse con la componente de vías aéreas superiores en inspiración.

La teoría de las vías aéreas superiores como fuente de sonido en espiración se justifica por el incremento en la pendiente del SII cuando el sonido se registra en un plano vertical y llega a ser similar a la pendiente de SII en inspiración cuando el sonido se registra en un plano horizontal. El comportamiento anterior se esperaba porque en el plano vertical un micrófono puede estar cercano a las vías aéreas superiores y registrar un sonido más intenso que en el otro micrófono que tiene más componente de vías aéreas inferiores.

Respecto a la posición de la fuente principal del sonido inspiratorio, aunque aparentemente es más periférica que el tallo bronquial, esto no es claro. Estudios previos para determinar el sitio donde se genera el sonido respiratorio no han sido consistentes. Algunos estudios sugieren que la componente inspiratoria del sonido vesicular se produce principalmente en vías aéreas intra-torácicas mientras que la componente espiratoria podría producirse de manera similar pero posiblemente con una componente adicional proveniente de las vías aéreas superiores [9].

Kraman no logró detectar algún componente de sonido inspiratorio en las vías superiores pero sí una componente espiratoria en [8]. Con la técnica de sustracción fononeumográfica sólo identificó aquellos sonidos producidos por arriba de la carina principal sin ningún intento de incluir o excluir a la laringe. Comúnmente se enseña que sonidos producidos en la laringe se transmiten a la periferia. En 1981 Kraman intenta verificar en [9] esta suposición, es decir, si el sonido laríngeo contribuye al sonido vesicular. La idea es la siguiente: una respiración forzada a volumen y flujo controlado resultará en un incremento en la amplitud del sonido vesicular si se presenta también una componente de sonido laríngeo en comparación con sonidos laríngeos y vesiculares durante respiración tranquila. Por otro lado, si un gran incremento en la componente de sonido laríngeo produce un incremento pequeño o ningún incremento en el sonido vesicular, se puede concluir que durante respiración tranquila no se escucha sonido laríngeo en la periferia.

El procedimiento incluyó el registro del sonido sobre la laringe arriba del nodo esternal mientras que los sonidos vesiculares fueron registrados sobre la pared torácica en cuatro sitios diferentes para cada sujeto a un mismo flujo. Los resultados indicaron que siempre que se producía una vocalización (fonema), ésta se acompañaba por un incremento en la amplitud del sonido registrado sobre la pared torácica. Por otro lado, cuando únicamente el sonido laríngeo, producido por una respiración forzada, estaba presente no existía un aumento consistente en el sonido vesicular en los sitios de registro sobre la pared torácica. El suceso se registró tanto para inspiración como para espiración. Se concluyó que cualquier energía del sonido laríngeo que pudiera registrarse sobre la pared torácica tendría que ser muy intensa en comparación con la producida en respiración normal, tanto para inspiración como espiración. Por lo tanto, se infiere que cualquier fuente de sonido por arriba de la carina que se transmita a la periferia durante respiración tranquila debe originarse en la tráquea, probablemente como resultado de turbulencias.

Kraman argumenta que éste y otros estudios previos refuerzan la idea de que la fuente del sonido vesicular inspiratorio es multicéntrica y esta confinada a las vías aéreas más grandes (más de 2 mm.), donde se sabe que existe turbulencia, excluyendo posiblemente el árbol bronquial principal y la tráquea. La componente espiratoria parece también ser de origen multicéntrica pero incluye el árbol bronquial principal y la tráquea. La laringe, aunque produce un sonido considerable, parece no tener parte en la producción de las componentes de sonido vesicular.

Kraman discute en [10] acerca del sitio de producción del sonido vesicular mencionando las investigaciones que se han realizado para ello. Evidencias experimentales sugieren que al menos la componente inspiratoria del sonido vesicular es producida regionalmente, esto es, en cada pulmón y probablemente dentro de cada lóbulo [5, 8, 9]. Las consideraciones teóricas sugieren que la componente inspiratoria del sonido vesicular es producida por turbulencias en grandes vías aéreas y transmitido a la pared torácica. La razón, explica el autor, es que los números de Reynolds (un número adimensional calculado a partir de la densidad, viscosidad, y velocidad del gas) suponen turbulencia, y presumiblemente flujo intenso, en grandes vías aéreas. Mientras que, en vías aéreas más periféricas se considera que ocurre un flujo laminar, de aquí que en teoría se suponga que el

sonido provenga de las grandes vías aéreas. Sin embargo, no se conocen evidencias experimentales que lo soporten.

Kraman también indica que la energía de disipación, y probablemente la generación de sonido, es dependiente fundamentalmente de la densidad del gas de tal forma que debe darse una disminución en la intensidad del sonido pulmonar cuando se respira He-O₂. Con este tipo de experimento se observó una gran disminución en la intensidad del sonido traqueal pero no en la intensidad del sonido registrado sobre el tórax. Kraman indica que otros procedimientos de análisis acústico han fracasado en la detección de algún cambio en las propiedades acústicas del pulmón que pudiera explicar estos resultados. Continúa: “los datos no son fáciles de interpretar pero sugieren que la producción del sonido inspiratorio no es simplemente el resultado de turbulencias en las grandes vías.”

Kraman menciona en [10] el estudio de Hardin y Patterson que trabajaron con modelos transparentes de vías aéreas pequeñas considerando bifurcaciones para demostrar que la producción de sonido ocurre como resultado de vórtices inestables. Los autores consideran que la inestabilidad de los vórtices da origen al sonido vesicular, y esto puede ocurrir teóricamente en vías aéreas periféricas relativamente pequeñas. Existe escasa evidencia experimental que soporte esta hipótesis.

Kraman indica que el origen de la componente espiratoria del sonido vesicular parece menos misterioso y cita el trabajo de Fahr en [10] donde se sugiere que el sonido espiratorio se origina en grandes vías aéreas en donde convergen corrientes rápidas de aire. Es así que, diversas investigaciones apuntan en el sentido de que el sonido espiratorio proviene de una posición más central que el sonido inspiratorio [8, 9].

Kompis, Pasterkamp y Wodicka en [4] realizan un estudio con registros simultáneos múltiples de sonidos respiratorios sobre la superficie torácica. Los sonidos respiratorios contienen información espacial con valor de diagnóstico dado que alteraciones en estructura que ocurren en procesos patológicos frecuentemente producen cambios que pueden medirse a través de la producción y transmisión de sonidos respiratorios [8]. Esta información no es accesible por los métodos actuales. Para acceder a esta información los autores desarrollaron un algoritmo para representar espacialmente el origen de los sonidos respiratorios. El algoritmo fue probado usando un modelo de gelatina del pulmón humano con el cual investigaron la influencia de diferentes factores de amortiguamiento para la

velocidad del sonido. El trabajo en [4] se enfocó a investigar la consistencia de las imágenes producidas con un limitado número de sujetos y con el conocimiento actual del sitio de producción de diferentes sonidos respiratorios. El algoritmo de representación espacial esta dividido en dos partes: (1) cálculo de un arreglo tridimensional de datos y (2) representación gráfica de este arreglo.

El arreglo tridimensional de datos se realizó probando, para cualquier punto dentro del tórax, la hipótesis de que el punto únicamente contiene la fuente acústica relevante. Mediante un procedimiento de estimación por mínimos cuadrados se calculó la señal de una fuente hipotética para explicar un máximo de la varianza de la señal en los micrófonos, como sigue: sea \ddot{y}_i ($i = 1, 2, \dots, 16$) la posición de 16 micrófonos sobre la superficie del tórax y $s_i(t)$ la señal registrada en cada micrófono, donde t representa el tiempo. Se asume un modelo con propagación uniforme del sonido a través del tórax con un factor de amortiguamiento, d , por unidad de longitud. La señal emitida por la fuente hipotética $r(\ddot{x}, t)$ en la posición \ddot{x} del volumen torácico se estimó mediante la solución del sistema lineal sobredeterminado usando un ajuste por mínimos cuadrados:

$$(20) \quad s_i \left(t - \frac{|\ddot{y}_i - \ddot{x}|}{c} \right) = d \cdot |\ddot{y}_i - \ddot{x}| \cdot \frac{r(\ddot{x}, t)}{|\ddot{y}_i - \ddot{x}|^2}, \quad i = 1, \dots, 16.$$

En la ecuación (20) el lado izquierdo representa la señal en cada micrófono con un tiempo de retardo entre la fuente hipotética y el micrófono, el lado derecho representa la señal de la fuente incluyendo la geometría del espacio y el amortiguamiento lineal. Asumiendo en diferentes sitios la fuente hipotética (\ddot{x}), y recorriendo el volumen torácico con un paso de un centímetro, la fuente hipotética se estima en cada posición.

Para representar espacialmente la intensidad de la fuente estimada en diferentes puntos se usaron niveles de grises. Cada valor almacenado en una tabla tridimensional fue representado usando una esfera en la posición correspondiente, figura 1. Valores altos, donde la fuente hipotética estimada es capaz de explicar más de la varianza de la señal en los micrófonos se representaron en color oscuro, mientras que para los valores bajos se utilizó un color claro. Se evitó representar valores al frente para no oscurecer valores en el fondo y únicamente el 30% de los valores más altos fueron representados en sus gráficas.

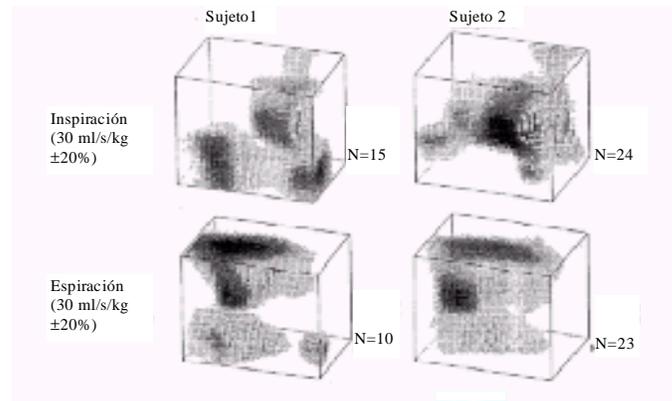


Figura 1 Representación espacial de sonidos torácicos: Los bloques representan el volumen torácico de dos sujetos. N es el número de segmentos de 0.1s de duración, sobre los cuales se promediaron los datos. Tomado de la referencia [4].

Los 16 micrófonos usados en el registro de sonidos respiratorios fueron colocados sobre la superficie torácica de los sujetos distribuidos en arreglos de 4 micrófonos horizontales por 2 micrófonos verticales a una distancia entre micrófono y micrófono de 10 cm, en ambas direcciones horizontal y vertical. Los otros 8 micrófonos fueron colocados en la parte posterior del tórax usando el mismo arreglo rectangular con igual separación. Ambos arreglos resultantes se centraron en el plano medio de cada sujeto en mismo nivel del tórax.

En la figura 1 se observa que en inspiración existen áreas con valores altos concentrados principalmente al frente del tórax. Una contribución mayor se observa en la parte superior de la mitad del tórax, justo a la izquierda del plano medio, en referencia al ángulo de vista utilizado (figura 2). Otro máximo más pequeño, parcialmente oculto por un máximo frontal, se encuentra en la parte posterior del tórax de ambos sujetos.

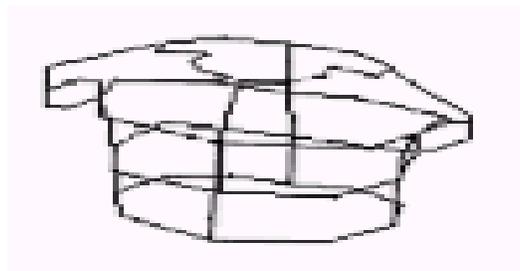


Figura 2. Ángulo de vista del tórax para representar espacialmente los sonidos respiratorios.
Tomado de la referencia [4].

Durante espiración se pueden observar áreas oscuras más centrales del tórax. Para ambos sujetos, el lugar de mayor contribución se encuentra en la parte frontal del tórax alrededor del segundo espacio intercostal, al lado derecho del hemitórax.

Las imágenes confirman según los autores la hipótesis de que los sonidos inspiratorios se producen predominantemente en la periferia del pulmón, mientras que sonidos espiratorios tienen un origen más central [8, 3].

2.3.2. Transmisión del Sonido Respiratorio.

La amplitud del sonido respiratorio vesicular (sonido respiratorio escuchado en cualquier parte de la superficie torácica) varía con diversos factores, entre estos el flujo de aire y el volumen pulmonar [8, 9]. Factores generales que determinan la intensidad del sonido están relacionados a los generadores de sonido y a las características del medio de transmisión [5].

Varios estudios han intentado separar los factores de transmisión de los factores de generación mediante mediciones de la amplitud de un sonido artificial transmitido desde la boca hasta la superficie torácica en comparación con la amplitud del sonido vesicular generado en actividad respiratoria normal. Estas investigaciones sugieren que una mayor amplitud del sonido se genera donde existe una ventilación importante pero que factores de transmisión afectan su registro en la superficie.

Kraman y Austrheim en [5] compararon los patrones de amplitud del sonido respiratorio en respiración normal con los patrones producidos por la introducción de un sonido artificial (ruido de color) en la boca. Lo anterior pretendía proporcionar el porqué de las variaciones de amplitud del sonido vesicular, que parecen no estar relacionadas con el grado de ventilación, así como determinar si el sonido transmitido desde la boca refleja la forma de transmisión del sonido torácico. Se encontró que la amplitud promedio del sonido respiratorio vesicular es aproximadamente bilateral mientras que la amplitud del sonido transmitido fue dos veces más intenso en el lado derecho que en el izquierdo. Se concluyó que el patrón de sonidos transmitidos se ve afectado por otros factores, además de las

propiedades intrínsecas de transmisión del sonido en pulmón y pared torácica. Los autores propusieron que una posible explicación anatómica para la asimetría encontrada en el sonido transmitido es el contacto directo de la tráquea con la superficie mediastinal de la pleura derecha. Por lo tanto, esta forma de transmisión es diferente a la forma para los sonidos respiratorios.

Los autores indican que las implicaciones de este estudio sobre la transmisión del sonido respiratorio vesicular no son claras; consideraciones teóricas y varias investigaciones experimentales soportan como origen del sonido respiratorio un lugar entre el eje bronquial principal y las vías aéreas pequeñas (de 2 mm de diámetro o menores) [8, 9]. Sin embargo, no puede eliminarse la posibilidad de que los sonidos emanen de vías aéreas más pequeñas. El camino por donde se transmite el sonido aún es más oscuro. El estudio realizado sugiere que el sonido puede radiar directamente a partir de las vías aéreas hacia los alrededores, el parénquima pulmonar y posteriormente, hacia la pared torácica, esquivando vías aéreas. Si esto es verdad, entonces la generación del sonido puede ser dependiente de las vías aéreas y la transmisión sería dependiente del parénquima.

Los sonidos audibles se propagan por las vías aéreas a una velocidad igual a la velocidad del sonido en campo libre, alrededor de 350 m/s, con una pequeña atenuación (Rice, 1980). Mientras, las velocidades del sonido en pulmón en vivo se reportan menores a 200 m/s para sonidos que provienen de fuentes sonoras en vías aéreas (Rice, 1976). Rice en [6] presenta evidencias del porqué velocidades bajas del sonido son el resultado de que el sonido viaje directamente a través del parénquima pulmonar. En seres humanos el parénquima representa un 90% del volumen total del pulmón.

Rice establece primeramente la expresión matemática para el cálculo de la velocidad de las ondas sonoras en un medio elástico continuo. La velocidad de un plano de compresión sonora en un medio elástico continuo esta dada por:

$$(21) \quad c = \sqrt{\frac{B}{\rho}},$$

donde c es la velocidad del sonido en m/s, B es el volumen de rigidez (compresibilidad volumétrica) en N/m^2 y ρ es la densidad del medio en Kg/m^3 . Un medio poroso de dos fases puede ser considerado como un medio continuo elástico si cumple: (1) la longitud de onda del sonido excede el tamaño de los poros y (2) los poros no se comunican entre ellos.

Asumiendo que el parénquima reúne estas características, se pueden promediar las propiedades del gas y del tejido con respecto al volumen para obtener las propiedades de un medio homogéneo continuo equivalente al parénquima.

Defínase la proporción volumétrica de tejido como h y la proporción de gas como $(1-h)$. La rigidez compuesta se encuentra mediante:

$$(22) \quad B = \left[(1-h)B_g^{-1} + hB_t^{-1} \right]^{-1},$$

donde los subíndices g y t se refieren al gas y tejido. La densidad promedio se obtiene mediante la expresión:

$$(23) \quad \rho = (1-h)\rho_g + h\rho_t.$$

Bajo condiciones adiabáticas $B_g = \gamma P_g$ donde γ representa a la razón de calor específico del gas y P_g representa a la presión del gas. La combinación de las ecuaciones (22) y (23) en la ecuación (21) permite calcular la velocidad del sonido:

$$(24) \quad c = \left[\left(\frac{1-h}{\gamma P_g} + \frac{h}{B_t} \right) \left((1-h)\rho_g + h\rho_t \right) \right]^{-1/2}.$$

Rice calculó densidades pesando pulmón de caballo con aire en su interior y dividiéndolo por su respectivo volumen. Rice usó pulmones de caballos dado que representan un buen modelo del pulmón humano, estos incluyen un árbol de vías aéreas, una zona de conducción y una región del intercambio de gases. En este estudio, Rice presenta evidencias de que las velocidades bajas pulmonares son resultado de que el sonido viaje directamente a través del parénquima.

La velocidad del sonido se estimó por medio de un análisis de regresión lineal de las mediciones de longitud de trayectoria contra tiempo transcurrido, donde la pendiente de la línea de regresión indica la velocidad del sonido. Con presiones transpulmonares entre 0 y 20 cm H₂O y densidades pulmonares entre 291 y 94 Kg/m³, la velocidad del sonido se estimó en un rango de 30 a 60 m/s. Además, se observó que la velocidad se incrementa cuando la densidad pulmonar disminuye. La correlación entre la trayectoria y el tiempo transcurrido fue en este caso de 0.96 a 0.99 y existió una clara concordancia entre los datos experimentales y la teoría (ecuación (24)), excepto para presiones altas. La correlación entre los valores teóricos y los medidos de velocidad del sonido fue de $r = 0.94$ para diferentes gases y para aire fue $r = 0.96$.

Rice concluye que el sonido audible puede viajar en el parénquima como una onda longitudinal. El parénquima y posiblemente el pulmón, puede ser considerado como un fluido continuo elástico isotrópico homogéneo. Por otro lado, la velocidad del sonido depende principalmente de la proporción relativa de las fases gas y tejido en el parénquima, y de la presión estática ambiental. La composición del gas presente en el pulmón tiene un efecto relativamente pequeño en la velocidad.

Rice expone en [7] que el sonido es una vibración mecánica que viaja con una velocidad característica en un medio. La velocidad del sonido depende de dos cosas: el modo de propagación y las características del medio. Con respecto al modo en que el sonido se propaga con frecuencia se observa que lo hace en forma de ondas longitudinales. Por otro lado, en relación con el medio, si éste no tiene frontera, la velocidad del sonido se conoce como la velocidad del sonido en campo libre y se puede calcular mediante la ecuación (21). La tabla 1 muestra la velocidad del sonido en algunos medios; la velocidad del sonido en tejido suave es cercana a la velocidad del sonido en agua, puesto que sus propiedades son similares, mientras que la velocidad del sonido en gas es dependiente de la temperatura, puesto que ρ es función de la temperatura. El sonido viaja lentamente en el parénquima pulmonar debido a que el pulmón es una mezcla homogénea de gas y tejido, con el gas contribuyendo a la compresibilidad y el tejido a la densidad. La velocidad del sonido se encuentra entre 25 y 60 m/s con densidades pulmonares entre 0.2 (capacidad pulmonar) y 0.5 (volumen residual) gr/ml.

Medio	Condición	Velocidad sonido (m/s)	Densidad (Kg/m ³)	Impedancia Acústica(rayl)
Hidrógeno	STP	1284	0.089	115
80% He, 20% O ₂	25 °C	653	0.39	255
Aire	STP	331	1.29	427
Espiración	BTPS	349	1.18	413
Pulmón	TLC	30-60	200	1.0x10 ⁵
Parénquima	RV	25	500	1.2x10 ⁵
Agua	25 °C	1500	998	1.5x10 ⁶
Tejido Suave	37 °C	1530	1003	1.5x10 ⁶

Tabla 1 [7]. Propiedades Acústicas en Algunos Medios: STP: Temperatura y Presión Estándar; BTPS: Temperatura corporal, Presión Saturada; TLC: Capacidad Pulmonar Total; RV: Volumen Residual.

Un modo de propagación importante en el estudio del sonido respiratorio es la propagación tubular, dado que se supone que la mayoría del sonido respiratorio es generado en las vías aéreas. La velocidad de propagación del sonido respiratorio depende en gran parte de la interacción de la pared de las vías aéreas con el sonido emitido. Este modo de propagación se ha caracterizado para grandes vías aéreas asumiéndolas rígidas, tanto en frecuencias bajas como altas. Se han desarrollado algunos modelos matemáticos con el fin de caracterizar la propagación del sonido en vías aéreas en un rango de frecuencias similar al rango de los sonidos respiratorios, incluyendo factores como la masa, elasticidad y el diámetro de las vías aéreas.

En 1987 David y Janet Rice caracterizaron la propagación del sonido en pulmón mediante mediciones externas [1]. Se midió el tiempo empleado por el sonido en ir del centro a la periferia y se emplearon dos distancias para el cálculo de la velocidad: a) la distancia en línea recta desde la carina hasta el punto de registro en la superficie pulmonar y b) la distancia desde la carina hasta el punto de registro pero recorriendo las vías aéreas que se encontraban entre ambos puntos mas la distancia que existía entre el fin de la vía aérea y la superficie pulmonar, esto es, a través del parénquima pulmonar. Los datos en la tabla 2 indican los resultados obtenidos. Sin embargo, para mejorar las estimaciones se dividió la longitud total de las vías aéreas en base a sus diámetros. Esto mejoró las predicciones de la velocidad en relación a las velocidades estimadas usando las distancias antes estimadas.

Velocidad del Sonido, m/s±95% limites de confianza			
Gas Humidificado	Velocidad tráquea y campo libre	Velocidad en Línea recta	Velocidad usando la distancia de las vías aéreas
Helio	960	775±60.5	741±55.0
Aire	345	282±23.5	274±22.0
Dióxido de Carbono	270	219±25.5	198±26.5
Hexafluoruro de Azufre	140	142±43.5	140±33.5

Tabla 2. Velocidad del sonido del centro a la periferia en pulmones de caballo [1].

Las velocidades estimadas fueron: en el parénquima de 189 ± 103 m/s con una profundidad promedio de 28.4 mm; para vías aéreas de 1-25 mm con una trayectoria de 148 mm, la velocidad fue de 268 ± 44 m/s; y para vías mayores a 25 mm, la velocidad fue de 150 ± 83 m/s con una trayectoria de 124 mm de longitud. Los autores indican que es

razonable suponer que el sonido viaje cierta distancia a lo largo de las vías aéreas y cierta distancia a través del parénquima. En contraste, sus resultados indican en [6] que la velocidad del sonido en el parénquima, a capacidad pulmonar total, es alrededor de 60 m/s y de 350 m/s en grandes vías aéreas con aire (Rice, 1983). Los autores en [1] indican que las velocidades estimadas para el parénquima presentan un sesgo importante debido a problemas de tipo experimental, por lo que los valores deben utilizarse con gran precaución.

Se concluye que el modo dominante de transmisión del sonido, central hacia la periferia, es la propagación a lo largo de las vías aéreas. Esto se justifica porque la velocidad varía con la composición del gas y porque con el modelo estadístico empleado, dependiente del diámetro de las vías aéreas, se obtienen predicciones mejores que con otro modelo. El lugar por donde el sonido emerge de las vías aéreas hacia el parénquima es de interés. El análisis no mostró que vías pequeñas tuvieran velocidades menores; considerando lo anterior, no es probable que el punto de emanación del sonido se encuentre en vías mayores a 1 mm de diámetro. Sin embargo, es probable encontrar en grandes vías aéreas puntos de transferencia de sonido más energéticos hacia el parénquima. Dado que las vías aéreas grandes se encuentran más alejadas de la pleura, la energía puede llegar a los micrófonos un tiempo más tarde.

La mayoría de los modelos predicen que el sonido que viaja a lo largo de las vías aéreas es fuertemente dependiente de las características de sus paredes. En [1] se encontró que la velocidad del sonido difiere para algunos diámetros de vías aéreas y que la velocidad del sonido en vías aéreas lobulares fue menor que la velocidad del sonido en campo libre.

Aproximaciones teóricas sobre la transmisión del sonido respiratorio son una extensión e integración de investigaciones anteriores sobre las propiedades acústicas del tracto respiratorio y de la dinámica del modelo de burbujas en un fluido. Un modelo teórico de la transmisión acústica en el sistema respiratorio humano, desde el interior del tracto respiratorio hacia la pared torácica, debido al movimiento de las paredes de las grandes vías aéreas fue expuesto por Wodicka y colaboradores en [2]. Este modelo permitió cuantificar y realizar comparaciones entre observaciones experimentales y predicciones teóricas. Wodicka y colaboradores utilizan un modelo acústico de la tráquea, tracto vocal y las primeras 5 generaciones de bronquios mediante un circuito eléctrico equivalente a

frecuencias desde 100 a 600 Hz, que permite medir la magnitud del movimiento en las paredes de las grandes vías aéreas como respuesta a una perturbación acústica en la boca.

En el modelo propuesto cada segmento de vía aérea es modelado como un cilindro del cual radia el sonido hacia el parénquima circundante, representado como una mezcla homogénea de burbujas de aire en agua, análogo a gas y tejido. Se representó a la pared torácica como una frontera a la propagación de las ondas cilíndricas y se incluyó una atenuación del sonido en el parénquima debido a efectos térmicos y de absorción. La velocidad del sonido en la mezcla de gas y líquido que representa el parénquima es aproximadamente 2300 cm/s, siendo consistente con las mediciones del tiempo de propagación del sonido entre la tráquea extra-torácica y la superficie superior del tórax.

La intensidad acústica $I(r)$ a una distancia r sobre el parénquima con una intensidad inicial I_0 para N burbujas por unidad de volumen está dada por la expresión:

$$(25) \quad I(r) = I_0 e^{-N\sigma r},$$

en donde σ es el área de un plano transversal al sonido incidente que intercepta una potencia igual a la pérdida de potencia debido a la absorción.

El modelo de transmisión fue usado para estimar la aceleración en 4 sitios: sobre la tráquea, por arriba del corte supraexternal, y sobre el lado posterior derecho de la pared torácica, 5 cm lateralmente del centro de la espina dorsal, a nivel de la 3^a, 5^a y 7^a vértebras torácicas.

Esta aproximación no excluye la posibilidad de otros modos de propagación además del acoplamiento directo del sonido desde las grandes vías aéreas al parénquima. La suposición de que cada segmento de vía aérea radía una onda cilíndrica, función de la distancia radial del segmento, ignora la posible interacción entre ondas generadas por diferentes segmentos. La concordancia cualitativa entre las predicciones del modelo y las mediciones experimentales en sujetos sanos sugiere que la propagación de la onda cilíndrica es una proporción significativa de la aceleración observada en el tórax a frecuencias (100-600 Hz.).

Se ha propuesto que la estructura mediastinal tiene influencia en la propagación del sonido desde vías centrales y esto explica la asimetría de la intensidad de los sonidos respiratorios. Nótese que se ha considerado en la clínica que la asimetría esta asociada a cuadros patológicos. Datos preliminares indican una asimetría de los sonidos respiratorios

similares a aquellos reportados por la transmisión de sonidos artificiales en la parte anterior superior del tórax; también se ha indicado un dominio izquierdo de la intensidad de sonidos inspiratorios a frecuencias altas sobre la parte posterior inferior del pulmón [27]. Pasterkamp y colaboradores en [27] compararon la simetría de transmisión de un sonido artificial introducido desde la boca y los sonidos respiratorios. Los autores anticiparon una lateralización del sonido transmitido e hipotetizaron que los sonidos respiratorios siguen más estrechamente el patrón de transmisión del sonido artificial durante la espiración que durante la inspiración, debido a que se considera que el origen de los sonidos espiratorios es más central [8].

Sus resultados muestran una asimetría importante de los sonidos artificiales transmitidos y los sonidos respiratorios espiratorios a frecuencias bajas y medias, con dominio de la parte anterior derecha sobre la izquierda del tórax. Un dominio similar del lado derecho fue observado en frecuencias altas y medias durante el sonido respiratorio inspiratorio. Sobre la parte posterior del pulmón los sonidos espiratorios fueron de baja intensidad, limitados a las bajas frecuencias y no mostraron asimetría. En el caso de los sonidos inspiratorios, estos son significativamente más intensos en frecuencias medias sobre la base del lado izquierdo que derecho del tórax. Las observaciones confirman la asimetría de transmisión torácica en la parte superior del tórax [5] y es compatible con el concepto del origen central del sonido espiratorio, pero no así del inspiratorio [8]. Los autores hacen notar que los sonidos espiratorios registrados en sitios superiores no son únicamente sonidos transmitidos desde la tráquea, puesto que la potencia espectral a altas frecuencias no muestra patrones espectrales similares. Sin embargo, sugieren realizar estudios adicionales para clarificar la fuente de los sonidos espiratorios a altas frecuencias. También, observaron diferencias en la potencia del sonido inspiratorio sobre las bases de los pulmones a frecuencias medias, donde el flujo turbulento posiblemente sea el mecanismo del origen del sonido inspiratorio.

La localización de las fuentes del sonido respiratorio es en esencia un problema inverso que no ha sido analizado hasta ahora como tal. La ubicación de las fuentes de sonido respiratorio con base en la metodología que nos ofrece la solución de un problema inverso es un campo nuevo en el estudio y análisis de los sonidos respiratorios. Con lo expuesto en esta sección se encontró que la mayoría de los esfuerzos por ubicar las fuentes

de sonido respiratorio se han centrado en estudios experimentales en donde se han hecho aportaciones importantes respecto al origen, transmisión y velocidad de propagación del sonido respiratorio generando los modelos respectivos. Con respecto al origen del sonido respiratorio se han obtenido algunos resultados que indican que el origen del sonido respiratorio proviene de un sitio más central que el inspiratorio y que puede ser producido en sitios como las cuerdas vocales, la tráquea y las grandes vías. Mientras que la posición de la fuente principal del sonido inspiratorio no es tan claro y se considera que es más periférica que el tallo bronquial. Algunos estudios sugieren que el sonido inspiratorio se produce principalmente en vías aéreas intra-torácicas y que posiblemente, no resulte únicamente de turbulencias en las grandes vías. Mientras, el sonido espiratorio puede ser producido de manera similar pero con una componente adicional proveniente de las vías aéreas superiores donde convergen corrientes rápidas de aire.

Kraman argumenta que estudios previos refuerzan la idea de que la fuente del sonido inspiratorio es multicéntrica y confinada a vías aéreas grandes donde existe turbulencia excluyendo el árbol bronquial principal y la tráquea. La componente espiratoria también parece ser multicéntrica pero incluyendo el árbol bronquial principal y la tráquea. Otras evidencias experimentales sugieren que la componente inspiratoria es producida regionalmente, en cada pulmón y posiblemente en cada lóbulo.

CAPITULO III.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN SELECCIONADOS PARA EL PROBLEMA INVERSO ACÚSTICO PULMONAR.

En el presente capítulo se analizarán algunos métodos de la teoría inversa discreta seleccionados para la localización de las fuentes de sonido respiratorio mediante la solución del sistema de ecuaciones lineales, $A\ddot{x} = \ddot{b}$. En primer lugar consideraremos el caso sobredeterminado del sistema de ecuaciones lineales proporcionando algunos conceptos teóricos acerca de la existencia y unicidad de la solución al sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de mínimos cuadrados. También, se trata el concepto de la factorización QR de una matriz, usada en combinación con el método de mínimos cuadrados para dar solución al sistema de ecuaciones lineales.

En el caso de que el sistema de ecuaciones lineales sea subdeterminado se expone el método de mínimos cuadrados de norma mínima, la unicidad de la solución que proporciona este método. Conceptos relacionados con la existencia y unicidad de la pseudoinversa de una matriz; así como, resultados del uso de la factorización QR y la pseudoinversa de una matriz, pseudoinversa y una descomposición de valores singulares.

En la tercera parte del capítulo se expone el método de mínimos cuadrados ponderados de norma mínima recursivo (FOCUSS). Se explican algunos conceptos relacionados con el algoritmo, conceptos relacionados con la forma y unicidad de la solución que el FOCUSS y acerca de su convergencia.

3.1. Caso Sobredeterminado ($N < M$).

Con el propósito de evaluar el desempeño del método de mínimos cuadrados se proporcionan algunos conceptos teóricos del método seleccionado. El método fue utilizado en [4] en un número limitado de sujetos para investigar el sitio de producción de los sonidos respiratorios. La solución por mínimos cuadrados que se presenta en esta sección es para un sistema lineal sobredeterminado ($N < M$) utilizando una descomposición QR.

3.1.1. Mínimos Cuadrados.

Considere un sistema lineal de ecuaciones $A\ddot{x} = \ddot{b}$ donde $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$, $\ddot{b} \in \mathbf{R}^M$ y la dimensión del subespacio rango de A es $\dim(R(A)) = N$, $R(A) = \{A\ddot{x} : \ddot{x} \in \mathbf{R}^N\}$. Si \ddot{b} no se

encuentra en el espacio generado por las columnas de A , esto es, si $\vec{b} \notin R(A)$, entonces se dice que el sistema de ecuaciones es inconsistente o sobredeterminado [28]. En este caso, no existen soluciones al conjunto de ecuaciones, por lo tanto, el acierto es encontrar un vector \vec{x} que minimice $\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$.

Sea \vec{x}^* el vector que minimiza $\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$; esto es, para toda $\vec{x} \in \mathbf{R}^N$ se cumple:

$$(26) \quad \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 \geq \|A\vec{x}^* - \vec{b}\|^2.$$

El vector \vec{x}^* se dice es la solución de $A\vec{x} \approx \vec{b}$ por mínimos cuadrados. Para caracterizar las soluciones en el sentido de mínimos cuadrados es necesario el siguiente lema [28].

Lema 3.1: Sea $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$, $M > N$. Entonces $\dim(R(A)) = N$ si y sólo si $\dim(R(A^T A)) = N$ (es decir, la matriz cuadrada $A^T A$ es no singular).

Prueba: Asúmase que $\dim(R(A)) = N$. Demostrar que $\dim(R(A^T A)) = N$ es equivalente a demostrar que el espacio nulo de $A^T A$ contiene únicamente al vector cero, $\text{Null}(A^T A) = \{\vec{0}\}$. Para esto tomemos un elemento \vec{x} en $\text{Null}(A^T A)$, es decir $A^T A\vec{x} = \vec{0}$. Sin embargo:

$$(27) \quad \|A\vec{x}\|^2 = \vec{x}^T A^T A\vec{x} = 0.$$

Lo cual implica que $A\vec{x} = \vec{0}$ y como $\dim(R(A)) = N$, se tiene que $\vec{x} = \vec{0}$.

Ahora, asuma que $\dim(R(A^T A)) = N$, esto es, $\text{Null}(A^T A) = \{\vec{0}\}$. Demostrar que $\dim(R(A)) = N$, es equivalente a demostrar que el espacio nulo de la matriz A sólo contiene al cero, $\text{Null}(A) = \{\vec{0}\}$. Tomando un \vec{x} en el espacio nulo de la matriz A , $\vec{x} \in \text{Null}(A)$ implica que $A\vec{x} = \vec{0}$. Por lo tanto $A^T A\vec{x} = \vec{0}$, y esto implica que $\vec{x} = \vec{0}$. ■

Teorema 3.2: Existe un único vector \vec{x}^* que minimiza a $\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$, dado por la solución a la ecuación $A^T A\vec{x}^* = A^T \vec{b}$, es decir:

$$(28) \quad \vec{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

Prueba: Sea $\vec{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$. Primero obsérvese que:

$$\begin{aligned} \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 &= \|A(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + (A\ddot{x}^* - \ddot{b})\|^2. \\ \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 &= [A(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + (A\ddot{x}^* - \ddot{b})]^T [A(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + (A\ddot{x}^* - \ddot{b})]. \\ (29) \quad \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 &= \|A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)\|^2 + \|A\ddot{x}^* - \ddot{b}\|^2 + 2[A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)]^T [A\ddot{x}^* - \ddot{b}]. \end{aligned}$$

Se demostrará que el último término de la ecuación (29) es cero. Es más, sustituyendo en el último término de la ecuación (29) \ddot{x}^* se tiene:

$$\begin{aligned} (A(\ddot{x} - \ddot{x}^*))^T (A\ddot{x}^* - \ddot{b}) &= (\ddot{x} - \ddot{x}^*)^T A^T [A(A^T A)^{-1} A^T - I_n] \ddot{b} \\ (A(\ddot{x} - \ddot{x}^*))^T (A\ddot{x}^* - \ddot{b}) &= (\ddot{x} - \ddot{x}^*)^T [(A^T A)(A^T A)^{-1} A^T - A^T] \ddot{b} \\ (30) \quad (A(\ddot{x} - \ddot{x}^*))^T (A\ddot{x}^* - \ddot{b}) &= (\ddot{x} - \ddot{x}^*)^T (A^T - A^T) \ddot{b} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 = \|A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)\|^2 + \|A\ddot{x}^* - \ddot{b}\|^2$.

Si $\ddot{x} \neq \ddot{x}^*$, entonces $\|A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)\|^2 > 0$, dado que la $\dim(R(A)) = N$. Por lo tanto, se tiene lo siguiente

$$(31) \quad \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 > \|A\ddot{x}^* - \ddot{b}\|^2.$$

Así $\ddot{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \ddot{b}$ es el único que minimiza a $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$ [28]. ■

Nótese que las columnas de A son el conjunto generador del subespacio rango de A , $R(A)$, éste es un subespacio N -dimensional de \mathbf{R}^M . La ecuación $A\ddot{x} = \ddot{b}$ tiene solución si y sólo si \ddot{b} se encuentra en este subespacio. Si $M = N$ siempre se cumple que $\ddot{b} \in R(A)$ y la solución es $\ddot{x}^* = A^{-1} \ddot{b}$. Suponiendo que $M > N$, se espera que la probabilidad de que $\ddot{b} \in R(A)$ sea pequeña puesto que el subespacio de generado por las columnas de A es pequeño. Sin embargo, suponiendo que \ddot{b} no se encuentra en $R(A)$, se trata de encontrar a un vector \ddot{h} que pertenece a $R(A)$ y que este próximo a \ddot{b} . Geométricamente el punto \ddot{h} será tal que el vector $\ddot{e} = \ddot{h} - \ddot{b}$ sea ortogonal al subespacio $R(A)$ [28].

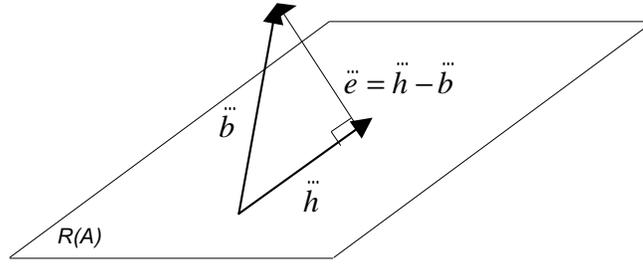


Figura 3. Proyección ortogonal de \vec{b} sobre el subespacio $R(A)$.

Se denominará a \vec{h} la proyección ortogonal de \vec{b} sobre el subespacio generado por las columnas de A , es decir, se tiene la siguiente relación $\vec{h} = A\vec{x}^* = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$. El vector $\vec{h} \in R(A)$ que minimiza a $\|\vec{b} - \vec{h}\|$ es exactamente la proyección ortogonal de \vec{b} sobre $R(A)$. En otras palabras, el vector \vec{x}^* que minimiza a $\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$ es exactamente el vector que hace que $A\vec{x} - \vec{b}$ sea ortogonal a $R(A)$.

Proposición 3.3: Sea $\vec{h} \in R(A)$ tal que $\vec{h} - \vec{b}$ es ortogonal al subespacio $R(A)$ generado por las columnas de A , entonces $\vec{h} = A\vec{x}^* = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$.

Prueba: Suponiendo que $\vec{h} \in R(A)$, entonces \vec{h} es combinación lineal de los elementos del conjunto generador del subespacio $R(A)$, $\vec{h} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_N \vec{a}_N$, donde $x_1, \dots, x_N \in \mathbf{R}$ y $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N\}$ es el conjunto generador del subespacio $R(A)$. Para encontrar las x_i consideremos que $\vec{e} = \vec{h} - \vec{b}$ es ortogonal al conjunto generador del subespacio $R(A)$, esto es, para toda \vec{a}_i , $i = 1, \dots, N$ se tiene:

$$(32) \quad \langle \vec{h} - \vec{b}, \vec{a}_i \rangle = 0,$$

o equivalentemente $\langle \vec{h}, \vec{a}_i \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a}_i \rangle$. Sustituyendo a \vec{h} como combinación lineal de los \vec{a}_i se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$(33) \quad \langle \vec{a}_1, \vec{a}_i \rangle x_1 + \dots + \langle \vec{a}_N, \vec{a}_i \rangle x_N = \langle \vec{b}, \vec{a}_i \rangle, \quad i = 1, \dots, N.$$

En forma matricial el sistema de ecuaciones (33) es representado como:

$$(34) \quad \begin{pmatrix} \langle \ddot{a}_1, \ddot{a}_1 \rangle & \backslash & \langle \ddot{a}_N, \ddot{a}_1 \rangle \\ \wedge & & \wedge \\ \langle \ddot{a}_1, \ddot{a}_N \rangle &] & \langle \ddot{a}_N, \ddot{a}_N \rangle \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \wedge \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \ddot{b}, \ddot{a}_1 \rangle \\ \wedge \\ \langle \ddot{b}, \ddot{a}_N \rangle \end{bmatrix}$$

$$(35) \quad A^T A \ddot{x} = A^T \ddot{b}.$$

Como la $\dim(R(A)) = N$, entonces $A^T A$ es no singular, y se concluye que $\ddot{x} = (A^T A)^{-1} A^T \ddot{b} = \ddot{x}^*$. ■

Otra forma de calcular \ddot{x}^* por mínimos cuadrados es escribir a $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$ en función de \ddot{x} , esto es, $f(\ddot{x}) = \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$. Desarrollando esta expresión se obtiene:

$$(36) \quad \begin{aligned} f(\ddot{x}) &= (A\ddot{x} - \ddot{b})^T (A\ddot{x} - \ddot{b}) \\ f(\ddot{x}) &= \frac{1}{2} \ddot{x}^T (2A^T A) \ddot{x} - \ddot{x}^T (2A^T \ddot{b}) + \ddot{b}^T \ddot{b}. \end{aligned}$$

Esta es una función cuadrática y el término cuadrático es definido positivo porque la $\dim(R(A)) = N$. El único mínimo de la función es obtenido mediante la expresión:

$$(37) \quad \nabla f(\ddot{x}) = 2A^T A \ddot{x} - 2A^T \ddot{b} = 0$$

con solución $\ddot{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \ddot{b}$.

3.1.2. Descomposición QR.

Un camino para encontrar la \ddot{x} que minimice a $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$ es tomar a \ddot{x} como solución del sistema $A^T A \ddot{x}^* = A^T \ddot{b}$. Sin embargo, el cálculo de $A^T A$ y la solución del sistema de ecuaciones frecuentemente produce errores cuando los cálculos se realizan en aritmética de punto flotante. La descomposición QR proporciona un camino para eliminar esta dificultad [29]. En esta sección se expone la descomposición QR y el procedimiento de Gram-Schmidt.

Supongamos V_0 un subespacio de \mathbf{R}^M generado por el conjunto ortogonal de vectores $S = \{\ddot{v}_1, \ddot{v}_2, \backslash, \ddot{v}_N\}$ y \ddot{v} es otro vector en \mathbf{R}^M . Se desea calcular la proyección

ortogonal de \ddot{v} sobre V_0 , $P\ddot{v} = \alpha_1 \ddot{v}_1 + \dots + \alpha_N \ddot{v}_N$ donde $\alpha_i = \frac{\langle \ddot{v}_i, \ddot{v} \rangle}{\langle \ddot{v}_i, \ddot{v}_i \rangle}$. Suponiendo que S es

un conjunto ortonormal, se define una matriz A de $M \times N$ de la forma:

$$(38) \quad A = [\ddot{v}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad \dots \quad \ddot{v}_N].$$

Calculando $A^T A$ se encuentra que $A^T A = [\ddot{v}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad \dots \quad \ddot{v}_N]^T [\ddot{v}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad \dots \quad \ddot{v}_N]$ tiene como elementos $A^T A(i, j) = \ddot{v}_i^T \ddot{v}_j$, es igual a 1 si $i = j$ y cero si $i \neq j$. Esto es $A^T A = I$ es una consecuencia del hecho de que S es ortonormal. Respecto al cálculo de $P\ddot{v}$:

$$(39) \quad P\ddot{v} = \alpha_1 \ddot{v}_1 + \dots + \alpha_N \ddot{v}_N$$

para las α_i adecuadas. En forma matricial la expresión para la proyección ortogonal es

$$P\ddot{v} = A\ddot{\alpha} \quad \text{donde} \quad \ddot{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_N]^T \quad \text{donde las} \quad \alpha_i = \frac{\langle \ddot{v}_i, \ddot{v} \rangle}{\langle \ddot{v}_i, \ddot{v}_i \rangle} = \ddot{v}_i^T \ddot{v}, \quad \text{en forma}$$

matricial:

$$(40) \quad \ddot{\alpha} = A^T \ddot{v}.$$

Por lo anterior, se tiene $P\ddot{v} = AA^T \ddot{v}$. Se observa que en general $AA^T \neq I_M$; A^T es inversa izquierda de A , $A^T A = I_N$, pero en general no es inversa derecha. La proyección, $P\ddot{v}$, ortogonal no es más que una multiplicación de la matriz AA^T , llamada matriz de proyección, esto es $P = AA^T$ [29].

Ahora supóngase que solamente $S = \{\ddot{v}_1, \ddot{v}_2, \dots, \ddot{v}_N\}$ forma un conjunto generador del subespacio V_0 . Sin embargo, mediante el procedimiento de Gram-Schmidt se puede formar una base ortogonal partiendo del conjunto generador S . Definiendo un conjunto de vectores columnas \ddot{u}_i de la siguiente manera: $\ddot{u}_1 = \ddot{v}_1$ y para cada $2 \leq i \leq N$ se define

$$\ddot{u}_i = \ddot{v}_i - \alpha_{1,i} \ddot{u}_1 - \dots - \alpha_{i-1,i} \ddot{u}_{i-1} \quad \text{con} \quad \alpha_{ji} = \frac{\langle \ddot{u}_j, \ddot{v}_i \rangle}{\langle \ddot{u}_j, \ddot{u}_j \rangle} \quad \text{para} \quad \ddot{u}_j \neq \ddot{0} \quad \text{y} \quad \alpha_{ji} = 0 \quad \text{si} \quad \ddot{u}_j = \ddot{0}. \quad \text{A partir}$$

de la definición de los vectores \ddot{u}_j se tiene:

$$(41) \quad \ddot{v}_i = \ddot{u}_1 \alpha_{1i} + \ddot{u}_2 \alpha_{2i} + \dots + \ddot{u}_{i-1} \alpha_{i-1i} + \ddot{u}_i.$$

La ecuación (41) en notación matricial se escribe como:

$$(42) \quad [\ddot{v}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad] \quad \ddot{v}_N] = [\ddot{u}_1 \quad \ddot{u}_2 \quad] \quad \ddot{u}_N] \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} &] & \alpha_{1,N} \\ 0 & 1 &] & \alpha_{2,N} \\] &] &] &] \\ 0 & 0 &] & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $Q_0 = [\ddot{u}_1 \quad \ddot{u}_2 \quad] \quad \ddot{u}_N]$, R_0 la matriz superior unitaria y $A = [\ddot{v}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad] \quad \ddot{v}_N]$ de tal forma que la ecuación (42) puede ser escrita como:

$$(43) \quad A = Q_0 R_0,$$

donde Q_0 tiene columnas ortogonales, algunas pueden ser cero. Sean Q y R construidas a partir de Q_0 y R_0 mediante la eliminación de columnas de ceros de Q_0 y de los renglones correspondientes en R_0 , y dividiendo cada columna de Q_0 distinta de cero entre su norma y multiplicando cada renglón de R_0 por la misma norma, entonces:

$$(44) \quad A = QR,$$

con R triangular superior y Q con columnas ortonormales. La tarea es proporcionar una forma matricial para calcular un conjunto generador ortogonal partiendo de un conjunto generador general.

Teorema 3.4: Sea $A_{M \times N}$ una matriz de rango igual a k . Entonces

a) A puede escribirse en su descomposición $Q_0 R_0$ no normalizada en donde:

- 1). Q_0 es $M \times N$ y tiene columnas ortogonales (de las cuales k son diferentes de cero y $N - k$ son cero) que generan el espacio columna de A .
- 2). R_0 es $N \times N$, triangular superior unitaria y no singular.
- 3). La norma de la i -ésima columna de Q_0 es igual a la distancia de la i -ésima columna de A al espacio generado por las primeras $i - 1$ columnas de A .

b) A puede escribirse en su descomposición normalizada como $A = QR$, donde

- 1). Q es $M \times k$ y tiene columnas ortonormales que generan el espacio columna de A .
- 2). R es triangular superior de $k \times N$ y tiene rango igual a k .
- 3). Si $k = N$, entonces el valor absoluto del elemento en la i -ésima columna y en el i -ésimo renglón, $|(R)_{ii}|$, es igual a la distancia desde la i -ésima columna de A hasta el espacio generado por las primeras $i - 1$ columnas de A .

Considérense las ecuaciones

$$(45) \quad A^T A \ddot{x}^* = A^T \ddot{b} \quad \text{cuando } A = QR$$

Al sustituir A por QR resulta $(QR)^T (QR) \ddot{x}^* = (QR)^T \ddot{b}$, esto es, $R^T Q^T QR \ddot{x}^* = R^T Q^T \ddot{b}$.

Recordando que Q tiene columnas ortonormales, $Q^T Q = I_k$, entonces la ecuación queda:

$$(46) \quad R^T R \ddot{x}^* = R^T Q^T \ddot{b}.$$

Puesto que el rango de R y R^T es k , R^T tiene inversa izquierda. Entonces multiplicando por la inversa de R^T en la ecuación (46) se obtiene $R \ddot{x}^* = Q^T \ddot{b}$, si y sólo si $R^T R \ddot{x}^* = R^T Q^T \ddot{b}$.

Por lo tanto, \ddot{x}^* resuelve el problema de mínimos cuadrados si y sólo si $R \ddot{x}^* = Q^T \ddot{b}$. Lo anterior se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 3.5: (*QR y mínimos cuadrados*) Sea $A = QR$ una descomposición QR normalizada de la matriz A . Entonces, la solución al problema de mínimos cuadrados de encontrar una \ddot{x}^* que minimice a $\|A \ddot{x}^* - \ddot{b}\|^2$ se puede obtener aplicando la sustitución hacia atrás para resolver $R \ddot{x}^* = Q^T \ddot{b}$.

Corolario 3.6: (*Mínimos Cuadrados*) Todo problema de mínimos cuadrados $A \ddot{x} \approx \ddot{b}$ tiene solución, y se puede encontrar mediante la descomposición QR normalizada de A [29].

Además se puede probar que si A es una matriz real de $M \times N$, de rango igual a k , y que $A = QR$, en donde Q es de $M \times k$ y tiene columnas ortonormales mientras que R es $k \times N$, triangular superior y de rango igual a k , entonces las columnas de Q forman una base ortonormal para el espacio de columnas de A , y $P = QQ^T$ representa una proyección (matriz de proyección) ortogonal sobre el espacio de columnas de A [29].

3.2. Caso Subdeterminado ($M < N$).

Para el caso de un sistema lineal subdeterminado ($M < N$) se expone el método de mínimos cuadrados de norma mínima, método que proporciona un estimado de baja resolución muy popular, que es utilizado cuando no se cuenta con información a priori y que se considera que no presenta sesgo hacia alguna solución en particular [16 – 19]. La solución proporcionada por el método de norma mínima [16 - 19, 20, 21] se obtiene para el caso de que exista la inversa de la matriz del sistema lineal, y para el caso general, cuando la matriz del sistema lineal no tiene inversa, se calcula la pseudoinversa de la matriz del sistema mediante la descomposición en valores singulares y mediante la factorización QR .

3.2.1. Mínimos Cuadrados de Norma Mínima.

Considerando el sistema de ecuaciones lineales $A\ddot{x} = \ddot{b}$ se obtendrá su solución minimizando la norma de $\|\ddot{x}\|$. Nuevamente $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$, $\ddot{b} \in \mathbf{R}^M$, suponiendo $M < N$ y $\dim(R(A)) = M$. Nótese que el número de ecuaciones no es más grande que el número de incógnitas. En consecuencia, se puede presentar un número infinito de soluciones para este sistema de ecuaciones. Sin embargo, existe sólo una solución de la ecuación $A\ddot{x} = \ddot{b}$ que es próxima al origen donde la norma $\|\ddot{x}\|$ es mínima. Sea \ddot{x}^* la solución, esto es $A\ddot{x}^* = \ddot{b}$ y $\|\ddot{x}^*\| \leq \|\ddot{x}\|$ para algún \ddot{x} tal que $A\ddot{x} = \ddot{b}$. En otras palabras \ddot{x}^* es la solución al problema:

$$(47) \quad \begin{aligned} & \text{Minimizar } \|\ddot{x}\| \\ & \text{Sujeto a } A\ddot{x} = \ddot{b}. \end{aligned}$$

Teorema 3.7: La única solución \ddot{x}^* a $A\ddot{x} = \ddot{b}$ que tiene norma mínima $\|\ddot{x}\|$ esta dada por:

$$\ddot{x}^* = A^T(AA^T)^{-1}\ddot{b}$$

Prueba: Sea $\ddot{x}^* = A^T(AA^T)^{-1}\ddot{b}$. Observe que:

$$(48) \quad \begin{aligned} \|\ddot{x}\|^2 &= \|(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + \ddot{x}^*\|^2 \\ \|\ddot{x}\|^2 &= [(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + \ddot{x}^*]^T [(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + \ddot{x}^*] \\ \|\ddot{x}\|^2 &= \|\ddot{x} - \ddot{x}^*\|^2 + \|\ddot{x}^*\|^2 + 2\ddot{x}^{*T}(\ddot{x} - \ddot{x}^*). \end{aligned}$$

Se puede probar que $\ddot{x}^{*T}(\ddot{x} - \ddot{x}^*) = 0$ [29], de tal forma que:

$$(49) \quad \|\ddot{x}\|^2 = \|\ddot{x}^*\|^2 + \|\ddot{x} - \ddot{x}^*\|^2.$$

Pero como para toda $\ddot{x} \neq \ddot{x}^*$, se tiene $\|\ddot{x} - \ddot{x}^*\| > 0$ lo cual implica que:

$$(50) \quad \|\ddot{x}\| > \|\ddot{x}^*\|. \quad \blacksquare$$

Una aproximación general a la solución de $A\ddot{x} = \ddot{b}$ involucra la definición de una pseudoinversa o inversa generalizada de la matriz $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$, que tiene el mismo papel que A^{-1} , cuando la matriz A tiene inversa (A es una matriz cuadrada). La inversa generalizada, A^+ , esta dada por la inversa de Moore-Penrose. Para analizar este caso considere lo siguiente. Cualquier matriz de rango igual a r diferente de cero puede ser expresada como

el producto de una matriz de rango *completo-columna* r y otra matriz de rango *completo-renglón* r . A tal factorización se le denomina *factorización de rango completo* [28]. Establecida en el siguiente lema.

Lema 3.8: Sea $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$, tal que $\dim(R(A)) = r \leq \min(M, N)$. Existen matrices $B \in \mathbf{R}^{M \times r}$ y $C \in \mathbf{R}^{r \times N}$ tal que $A = BC$, donde $\dim(R(A)) = \dim(R(B)) = \dim(R(C)) = r$.

Prueba: Como $\dim(R(A)) = r$ existen r columnas linealmente independientes en A definidas como $\ddot{a}_1, \ddot{a}_2, \dots, \ddot{a}_r$. Las otras columnas de A se pueden expresar como combinación lineal de las \ddot{a}_i , $i = 1, \dots, r$ columnas. Por lo tanto, una posible elección de las matrices B y C es:

$$(51) \quad \begin{aligned} B &= [\ddot{a}_1, \dots, \ddot{a}_r] \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{r,N} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde las entradas $c_{i,j}$ son de tal forma que, para cada $j = r+1, \dots, N$, $\ddot{a}_j = c_{1,j}\ddot{a}_1 + \dots + c_{r,j}\ddot{a}_r$ de manera tal que $A = BC$.

Observe que si $M < N$ y $\dim(R(A)) = M$, entonces se puede tomar a B y C de la forma $B = I_M$, $C = A$. ■

Ahora se definirá la inversa de Moore – Penrose, su existencia y unicidad. Para esto, considere primero la ecuación $AXA = A$, donde $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$ es la matriz dada y $X \in \mathbf{R}^{N \times M}$ es una matriz a determinar. Si la matriz A es no singular la solución de la ecuación es $X = A^{-1}$ mientras que si es singular se define la inversa de Moore-Penrose.

Definición 3.9: Dada $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$, una matriz $A^+ \in \mathbf{R}^{N \times M}$ es llamada una pseudoinversa de la matriz A si:

$$(52) \quad AA^+A = A$$

y existen matrices $U \in \mathbf{R}^{N \times N}$, $V \in \mathbf{R}^{M \times M}$ tal que:

$$(53) \quad \begin{aligned} A^+ &= UA^T \\ A^+ &= A^TV. \end{aligned}$$

Estas condiciones se pueden interpretar como que cada renglón de la matriz A^+ es una combinación de los renglones de A^T , y cada columna de A^+ es una combinación lineal de las columnas de A^T . Para el caso en que $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$ con $M > N$ y $\dim(R(A)) = N$ se

puede probar que la pseudoinversa de A es $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ donde $A^+ A = I_N$. Para el caso en que la matriz $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$ con $M < N$ y $\dim(R(A)) = M$ se puede verificar que la matriz pseudoinversa de A es $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$ cumpliéndose $A A^+ = I_M$ [30].

Teorema 3.10: Sea $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$, si la pseudoinversa de la matriz A existe, entonces es única.

Prueba: Sean A^+ y Y pseudoinversas de la matriz A . Mostraremos que $A^+ = Y$. De la definición $A A^+ A = A Y A = A$, y existen matrices $U_1, U_2 \in \mathbf{R}^{N \times N}$, $V_1, V_2 \in \mathbf{R}^{M \times M}$ tal que

$$(54) \quad \begin{aligned} A^+ &= U_1 A^T = A^T V_1 \\ Y &= U_2 A^T = A^T V_2 \end{aligned}$$

Sea $D = Y - A^+$, $U = U_2 - U_1$, $V = V_2 - V_1$. Entonces se tiene, usando la ecuación (54), que

$$(55) \quad O = ADA, \quad D = UA^T = A^T V$$

Usando las ecuaciones de (55) obtenemos la expresión:

$$(56) \quad (DA)^T DA = A^T V^T ADA = O$$

Entonces tenemos de la ecuación (56) que $DA = O$. Considerando que:

$$(57) \quad DD^T = DAU^T = O$$

el cual implica que $D = Y - A^+ = O$ y entonces $A^+ = Y$ [28]. ■

La pseudoinversa de la matriz A siempre existe [28], de hecho esta dada por $A^+ = C^+ B^+$ donde B^+ y C^+ son la pseudoinversas de las matrices B y C , respectivamente, de la factorización de rango completo de la matriz A , es decir $A = BC$ con:

$$(58) \quad \begin{aligned} B^+ &= (B^T B)^{-1} B^T \\ C^+ &= C^T (C C^T)^{-1} \end{aligned}$$

Teorema 3.11: Sea $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$ matriz, que tiene una factorización de rango completo, $A = BC$, con $\dim(R(A)) = \dim(R(B)) = \dim(R(C)) = r$, $B \in \mathbf{R}^{M \times r}$, $C \in \mathbf{R}^{r \times N}$. Entonces $A^+ = C^+ B^+$.

Prueba: Se mostrara que $A^+ = C^+ B^+$ satisface la definición de matriz pseudoinversa 3.9 con

$$(59) \quad \begin{aligned} C^+ &= C^T (C C^T)^{-1} \\ B^+ &= (B^T B)^{-1} B^T \end{aligned}$$

Obsérvese que $AC^+B^+A = BCC^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^TBC = BC = A$. defínase las matrices U y V como:

$$(60) \quad \begin{aligned} U &= C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}(CC^T)^{-1}C \\ V &= B(B^TB)^{-1}(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T \end{aligned}$$

Se puede comprobar que las matrices U y V satisfacen $A^+ = C^+B^+ = UA^T = A^TV$. Entonces $A^+ = C^+B^+$ es la pseudoinversa de la matriz A [29]. ■

Un caso importante se deriva de la descomposición QR normalizada, que es precisamente la forma requerida en el teorema anterior donde $B = Q$ y $C = R$.

Corolario 3.12: (QR y pseudoinversa) Supóngase que A una matriz de $M \times N$ de rango r tiene una descomposición normalizada, $A = QR$, de modo que Q es de $M \times r$ con columnas ortonormales y R es de $r \times N$ de rango igual a r y triangular superior. Entonces $A^+ = R^T(RR^T)^{-1}Q^T$ [29].

Teorema 3.13: Considere el sistema de ecuaciones $A\ddot{x} = \ddot{b}$, $A \in \mathbf{R}^{M \times N}$ y $\dim(R(A)) = r$. El vector $\ddot{x}^* = A^+\ddot{b}$ minimiza $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$ en \mathbf{R}^N . De todos los vectores que minimizan a $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$, el vector $\ddot{x}^* = A^+\ddot{b}$ es el único vector con la mínima norma.

Prueba: Se demostrará primero que $\ddot{x}^* = A^+\ddot{b}$ minimiza $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$ sobre \mathbf{R}^N . Para tal fin, observemos que para cualquier $\ddot{x} \in \mathbf{R}^N$,

$$(61) \quad \begin{aligned} \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 &= \|A(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + A\ddot{x}^* - \ddot{b}\|^2 \\ \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 &= \|A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)\|^2 + \|A\ddot{x}^* - \ddot{b}\|^2 + 2[A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)]^T(A\ddot{x}^* - \ddot{b}). \end{aligned}$$

Se puede demostrar que $[A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)]^T(A\ddot{x}^* - \ddot{b}) = 0$. De tal manera que se tiene:

$$(62) \quad \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 = \|A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)\|^2 + \|A\ddot{x}^* - \ddot{b}\|^2.$$

Si $\ddot{x} \neq \ddot{x}^*$, $\|A(\ddot{x} - \ddot{x}^*)\|^2 \geq 0$ y por lo tanto se deduce que $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 \geq \|A\ddot{x}^* - \ddot{b}\|^2$ y así \ddot{x}^* minimiza $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$.

Ahora se mostrará que de entre todos las \ddot{x} que minimizan $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$, el vector $\ddot{x}^* = A^+\ddot{b}$ es el único vector de norma mínima. Sea \ddot{x} un vector que minimiza $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$. Consideremos

$$(63) \quad \begin{aligned} \|\ddot{x}\|^2 &= \|(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + \ddot{x}^*\|^2 \\ \|\ddot{x}\|^2 &= \|\ddot{x} - \ddot{x}^*\|^2 + \|\ddot{x}^*\|^2 + 2\ddot{x}^{*T}(\ddot{x} - \ddot{x}^*). \end{aligned}$$

Se puede probar que $\ddot{x}^{*T}(\ddot{x} - \ddot{x}^*) = 0$. Esto implica que $\|\ddot{x}\|^2 = \|\ddot{x}^*\|^2 + \|\ddot{x} - \ddot{x}^*\|^2$.

Para toda $\ddot{x} \neq \ddot{x}^*$, tenemos $\|\ddot{x} - \ddot{x}^*\|^2 > 0$ y entonces $\|\ddot{x}\|^2 > \|\ddot{x}^*\|^2$ o equivalentemente

$$(64) \quad \|\ddot{x}\| > \|\ddot{x}^*\|. \quad \blacksquare$$

Entonces, entre todos los vectores que minimizan $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$, el vector $\ddot{x}^* = A^+\ddot{b}$ es el único vector con norma mínima [28].

3.2.2. Mínimos Cuadrados Ponderados de Norma Mínima.

El cálculo de la pseudoinversa tanto para sistemas de ecuaciones sobredeterminados como para subdeterminados mediante $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ y $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$, respectivamente, es correcto cuando las matrices $A A^T$ y $A^T A$ son no singulares [30]. Pero con frecuencia las matrices anteriores son singulares y no existe su inversa. En tales casos cuando se requiere calcular la inversa generalizada, el método de descomposición de valores singulares es una alternativa para el cálculo de la inversa, que con frecuencia es computacionalmente menos costoso [17, 31].

3.2.2.1 Descomposición en Valores Singulares.

Toda matriz A de $M \times N$ se puede descomponer como $A = U \Sigma V^T$, en donde U es una matriz ortogonal de $M \times M$, V es una matriz ortogonal de $N \times N$, y Σ es una matriz diagonal de $M \times N$ con $(\Sigma)_{ii} = \sigma_i$ real y no negativo. Si lo anterior es cierto, se observa primero que $AV = U\Sigma$ significa que $A\ddot{v}_i = \sigma_i \ddot{u}_i$ para $1 \leq i \leq \min\{M, N\}$, en donde las columnas de U y V son \ddot{u}_i, \ddot{v}_i . También:

$$(65) \quad A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V (\Sigma^T \Sigma) V^T,$$

donde $\Sigma^T \Sigma = D_V = V^T (A^T A) V$ es $N \times N$ y diagonal con elementos reales no negativos en su diagonal principal. Esto significa que: “Los eigenvectores de $A^T A$ forman a V , con los eigenvalores (reales no negativos) asociados a la diagonal de $D_V = \Sigma^T \Sigma$ ” [29].

De un modo similar se encuentra:

$$(66) \quad AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T,$$

donde $\Sigma\Sigma^T = D_U = U^T(AA^T)U$ es $M \times M$ y diagonal con elementos reales no negativos en su diagonal principal, lo que significa que: “Los eigenvectores de AA^T forman a U , con los eigenvalores asociados en la diagonal de $D_U = \Sigma\Sigma^T$ ”. Los elementos de $\Sigma^T\Sigma$ y $\Sigma\Sigma^T$ son las σ_i^2 , quizá con algunos ceros agregados [29, 31].

Teorema 3.14: (Descomposición en Valores Singulares) Sea A una matriz de $M \times N$:

a) Existe una matriz U ortogonal de $M \times M$, una matriz V ortogonal de $N \times N$ y una matriz de $M \times N$ diagonal Σ con $(\Sigma)_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $(\Sigma)_{ii} = \sigma_i \geq 0$ siendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$, en donde $r = \min\{M, N\}$, tal que la descomposición en valores singulares:

$$(67) \quad A = U\Sigma V^T$$

es válida.

b) Los números σ_i^2 conforman los eigenvalores de $A^T A$ (quizá con algunos ceros), y los eigenvectores asociados son las columnas de $\ddot{v}_i \in V$; igualmente, los σ_i^2 conforman los eigenvalores de AA^T , y los eigenvectores asociados son las columnas $\ddot{u}_i \in U$. Los σ_i se llaman valores singulares de A , los \ddot{u}_i se llaman vectores singulares izquierdos de A ; y los \ddot{v}_i vectores singulares derechos de A , que se relacionan por $A\ddot{v}_i = \sigma_i\ddot{u}_i$ para $1 \leq i \leq r$.

Corolario 3.15: Sea A matriz de $M \times N$

a) El rango de A es igual al número de valores singulares de A diferentes de cero.

b) Los primeros k vectores singulares izquierdos $\ddot{u}_1, \dots, \ddot{u}_k$ forman una base ortonormal para el espacio de columnas de A , esto es, para el contradominio de \mathfrak{S} definida por $\mathfrak{S}(\ddot{v}) = A\ddot{v}$.

c). Los últimos $N - k$ vectores singulares derechos $\ddot{v}_{k+1}, \dots, \ddot{v}_N$ forman una base ortonormal para el espacio nulo de \mathfrak{S} .

Suponga que $A = U\Sigma V^T$ es la descomposición en valores singulares del teorema (3.14) para la matriz A de rango k . Considerando el problema de hacer mínima a $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$ con respecto de \ddot{x} y utilizando la descomposición para A es posible escribir:

$$(68) \quad \|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2 = \|U\Sigma V^T \ddot{x} - \ddot{b}\|^2 = \|\Sigma\ddot{y} - U^T \ddot{b}\|^2,$$

en donde $\ddot{y} = V^T \ddot{x}$ que es la nueva variable respecto de la cual se esta minimizando. Por lo tanto, \ddot{x} minimiza a $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|^2$ si y sólo si \ddot{y} hace mínima a $\|\Sigma\ddot{y} - \ddot{b}'\|^2$ con $\ddot{b}' = U^T \ddot{b}$. Pero

$$(69) \quad \|\Sigma\ddot{y} - \ddot{b}'\|^2 = |\sigma_1 y_1 - b'_1|^2 + |\sigma_k y_k - b'_k|^2 + |b'_{k+1}|^2 + |b'_M|^2.$$

Donde $y_i = (\ddot{y})_i$ y $b'_i = (\ddot{b}')_i$. Esta ecuación se minimiza haciendo cero tantos términos como sea posible: $y_i = \frac{b'_i}{\sigma_i}$, para $1 \leq i \leq k$ y y_i arbitraria para $k+1 \leq i \leq N$. Como

$\|\ddot{x}\| = \|V \ddot{y}\| = \|\ddot{y}\|$, la \ddot{x} que tiene la mínima norma entre todas las soluciones al problema de mínimos cuadrados proviene de $y_i = 0$ para $k+1 \leq i \leq N$. Todas las demás soluciones se pueden obtener agregando a esa \ddot{x} una combinación lineal arbitraria de $\ddot{v}_{k+1}, \dots, \ddot{v}_N$, las últimas $N - k$ columnas de V . Lo anterior puede resumirse en el siguiente procedimiento para resolver problemas de mínimos cuadrados.

Encontrar la descomposición en valores singulares de $A = U\Sigma V^T$:

- 1) Calcular $\ddot{b}' = U^T \ddot{b}$.
- 2) Calcular \ddot{y} con $y_i = \frac{b'_i}{\sigma_i}$, para $1 \leq i \leq k$; en otro caso $y_i = 0$.
- 3) Calcular $\ddot{x}^* = V\ddot{y}$.
- 4) \ddot{x}^* es la solución al problema de mínimos cuadrados, y tiene la menor norma entre todas las soluciones; cualquier otra \ddot{x} será una solución sí y sólo sí es igual a \ddot{x}^* más una combinación lineal de las últimas $N - k$ columnas de V [29].

Teorema 3.16: (Mínimos Cuadrados y Valores Singulares) Supóngase que $A = U\Sigma V^T$ es la descomposición en valores singulares de la matriz A de rango k , y que $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ es la llamada pseudoinversa de A , en donde $(\Sigma^+)_{ii} = \frac{1}{\sigma_i}$ para $1 \leq i \leq k$ y en otro caso cero.

Entonces:

- a). $\ddot{x}^* = A^+ \ddot{b}$ hace mínima a $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|$ con respecto a \ddot{x} .
- b). Entre todas las \ddot{x} que hacen mínima a $\|A\ddot{x} - \ddot{b}\|$, \ddot{x}^* tiene la norma mínima.

c). \bar{x}' hace mínima a $\|A\bar{x} - \bar{b}\|$ si y sólo si $\bar{x}' = \bar{x}^* + \bar{v}$, donde \bar{v} es una combinación lineal arbitraria de las $N - k$ columnas finales de V y $\bar{x}^* = A^+ \bar{b}$.

Hasta ahora se ha logrado con el método de mínimos cuadrados obtener una solución, \bar{x}^* , al problema $A\bar{x} = \bar{b}$ de tal manera que \bar{x}^* tiene norma mínima y minimiza la distancia $\|A\bar{x}^* - \bar{b}\|$, es decir el error. Ponderando el error cuadrático de esta aproximación para algunas entradas del vector \bar{b} da origen al método de mínimos cuadrados ponderados, de la manera siguiente. Considere a \bar{b} un vector de N observaciones y supóngase que se quiere aproximar a \bar{b} con un vector $\hat{\bar{b}}$ que pertenece a algún subespacio de \mathbf{R}^N (antes el vector $\hat{\bar{b}}$ se escribía como $A\bar{x}^*$). Entonces la suma de cuadrados de los términos del error, al aproximar \bar{b} con $\hat{\bar{b}}$ es:

$$(70) \quad \left\| \bar{b} - \hat{\bar{b}} \right\|^2.$$

Suponiendo que las mediciones que generaron a \bar{b} no son todas confiables, resulta adecuado ponderar los errores cuadráticos de manera que realcen las mediciones más confiables [12, 31]. Si se denotan los pesos por w_1, \dots, w_N , entonces la suma ponderada para el error cuadrático es:

$$(71) \quad w_1^2 (b_1 - \hat{b}_1)^2 + \dots + w_N^2 (b_N - \hat{b}_N)^2$$

Esto es, el cuadrado de la longitud de $\bar{b} - \hat{\bar{b}}$ obtenida mediante el producto interior definido como:

$$(72) \quad \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = w_1^2 u_1 v_1 + \dots + w_N^2 u_N v_N.$$

Algunas veces conviene transformar un problema de mínimos cuadrados ponderados en un problema ordinario de mínimos cuadrados equivalente. Sea W una matriz diagonal con w_1, \dots, w_N (positivos) en su diagonal, de modo que

$$(73) \quad W\bar{b} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 b_1 \\ w_2 b_2 \\ \vdots \\ w_N b_N \end{pmatrix}$$

$$(74) \quad W\hat{\hat{b}} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 &] & 0 \\ 0 & w_2 &] & 0 \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \\ 0 & 0 &] & w_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \wedge \\ \hat{b}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\hat{b}_1 \\ w_2\hat{b}_2 \\ \wedge \\ w_N\hat{b}_N \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que el término j-ésimo del cuadrado de la diferencia se puede escribir como:

$$(75) \quad w_j^2(b_j - \hat{b}_j)^2 = (w_j b_j - w_j \hat{b}_j)^2.$$

Se sigue que el error cuadrático ponderado es el cuadrado de la longitud de $W\ddot{b} - W\hat{\hat{b}}$, esto es:

$$(76) \quad \left\| W\ddot{b} - W\hat{\hat{b}} \right\|^2.$$

Asuma que el vector de aproximación $\hat{\hat{b}}$ se va a construir con las columnas de la matriz A.

Entonces se busca un \ddot{x}^* que haga a $A\ddot{x}^* = \hat{\hat{b}}$ tan cerca a \ddot{b} como sea posible. Sin embargo, la medida de cercanía es el error ponderado:

$$(77) \quad \left\| W\ddot{b} - W\hat{\hat{b}} \right\|^2 = \left\| W\ddot{b} - WA\ddot{x}^* \right\|^2.$$

Entonces \ddot{x}^* es la solución (ordinaria) por mínimos cuadrados de la ecuación:

$$(78) \quad WA\ddot{x}^* \approx W\ddot{b}.$$

La ecuación normal para la solución por mínimos cuadrados ponderados es:

$$(79) \quad (WA)^T WA\ddot{x}^* = (WA)^T W\ddot{b}.$$

Observe que si se supone que los errores son variables aleatorias independientes con medias cero y varianzas de $\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2$, entonces los pesos apropiados son $w_i^2 = \frac{1}{\sigma_i^2}$. A mayor varianza del error, menor peso.

3.3. Solución vía “FOCal Underdetermined System Solver”. (FOCUSS)

Finalmente se expone el algoritmo FOCUSS (FOCal Underdetermined System Solver), método recursivo dependiente de un estimado inicial. Al igual que los métodos de modelación de dipolos múltiples de corriente, produce soluciones de alta resolución que son apropiadas para fuentes altamente localizadas, como en los métodos de estimación

lineal, en el método FOCUSS se pueden asumir fuentes de forma arbitraria y se preserva la generalidad y fácil aplicación que es característico en estos métodos [23]. Además, el método FOCUSS no necesita de información acerca del orden del modelo. Los problemas inversos lineales de gran escala, como por ejemplo modelos de la cabeza en base a elemento finito 3D, resultan ser altamente subdeterminado y el número de soluciones posibles para un conjunto de mediciones resulta ser infinito. El método FOCUSS como técnica no paramétrica proporciona soluciones que representan regiones de estimación compactas y de forma arbitraria. Además, delimita la extensión de las fuentes localizadas y resuelve correctamente la profundidad de las fuentes. También, logra contender con la no unicidad del conjunto de soluciones de energía localizada [23, 32].

3.3.1. Algoritmo.

El algoritmo propuesto en [23, 32] encuentra la solución del sistema $A\ddot{x} = \ddot{b}$ recursivamente iniciando con un estimado de la solución que puede ser por ejemplo la solución proporcionada por el esquema de norma mínima. Posteriormente, en una serie de pasos mejora la solución inicial. El algoritmo no utiliza información adicional acerca de la solución excepto que asume que la fuente no es demasiado dispersa (“Sparse Condition”).

La estrategia numérica para calcular recursivamente la solución en el algoritmo FOCUSS es el método de mínimos cuadrados ponderado de norma mínima. La solución se basa en la pseudoinversa de una matriz, que incluye una restricción adicional, o ponderación, sobre la solución. La solución esta dada por

$$(80) \quad \ddot{x}^* = W(AW)^+ \ddot{b}$$

W es una matriz de $N \times N$ que restringe o pondera la solución, por mínimos cuadrados, produciendo que algunos de los elementos en \ddot{x}^* diferentes de cero sean realzados [23, 32]. El algoritmo FOCUSS emplea sólo matrices diagonales W , pero otras aplicaciones del algoritmo pueden incorporar matrices no diagonales W [23, 32]. En cada paso del algoritmo FOCUSS varía únicamente la matriz W . Para mejorar algunos de los elementos ya prominentes, W es construida directamente de las amplitudes de elementos de \ddot{x}^* de los pasos anteriores [23, 32].

Las matrices W contienen factores de escalamiento que de acuerdo a como se seleccionen pueden producir diferentes esquemas recursivos. El esquema más simple es

construir a W tomando los elementos de la iteración del paso previo como sus elementos diagonales, como sigue:

$$(81) \quad W_k = \begin{pmatrix} x_{1_{k-1}}^* & 0 &] & 0 \\ 0 & \backslash & & \wedge \\ \wedge & & & 0 \\ 0 &] & 0 & x_{N_{k-1}}^* \end{pmatrix},$$

donde $x_{1_{k-1}}^*$ representa el i -ésimo elemento del vector \ddot{x}^* en la $k - 1$ iteración, y k es el índice de la iteración. A esta forma se le conoce como la versión básica.

Otra versión puede ser obtenida tomando a la matriz W_k como el producto de las soluciones anteriores. Este puede ser calculado tomando el producto de W_{k-1} con la matriz mostrada arriba:

$$(82) \quad W_k = W_{k-1} \begin{pmatrix} x_{1_{k-1}}^* & 0 &] & 0 \\ 0 & \backslash & & \wedge \\ \wedge & & & 0 \\ 0 &] & 0 & x_{N_{k-1}}^* \end{pmatrix}.$$

Esta forma es denominada versión acumulada del algoritmo. De acuerdo a la experiencia de los autores en [23, 32] ambas versiones trabajan de manera similar, pero la versión acumulada es más rápida y más robusta en términos de inducir soluciones lejanas a la inicialización.

El algoritmo FOCUSS puede resumirse en los siguientes pasos:

- 1) Construir una matriz W con los elementos correspondientes de la solución previa.
- 2) Calcular la solución de norma mínima ponderada usando a W del paso (1).

Los pasos 1-2 se repiten hasta que la solución \ddot{x}^* no cambia, indicando que el método ha logrado la convergencia [23, 32].

3.3.2. Definición y Condición de Unicidad de la Solución Sparse.

Se define una señal de energía localizada o señal ‘sparse’ como señales que son cero en todas partes excepto sobre un soporte mínimo del espacio de solución. Este tipo de soluciones forman las bases para la representación mínima de la señal [32]. Una definición matemática de una solución sparse es la siguiente:

Definición 3.17: Una solución “sparse” se define como una solución con M o menos términos diferentes de cero.

Este tipo de soluciones surgen también en problemas de programación lineal y problemas de minimización de norma L_1 donde se usa la siguiente terminología [32].

Definición 3.18: Para un conjunto de M ecuaciones lineales con N incógnitas, sea B una submatriz no singular de $M \times M$ extraída de las columnas de la matriz A , del sistema $A\ddot{x} = \ddot{b}$. Entonces, si todos los $N - M$ componentes de \ddot{x} no asociados con las columnas de B son igualados a cero, la solución al conjunto resultante de ecuaciones se dice que es una solución básica a $A\ddot{x} = \ddot{b}$ con respecto a la base B . Los componentes de \ddot{x} asociados con las columnas de B son llamadas las variables básicas. Si una o más de las variables básicas en una solución básica tiene valor cero, la solución se dice que es una solución básica degenerada.

Las soluciones sparse son equivalentes a las soluciones básicas o soluciones básicas degeneradas. En ocasiones se les denomina como soluciones de baja dimensión [32].

Los siguientes resultados de unicidad o no-unicidad son aplicables para los sistemas que satisfacen la siguiente propiedad:

Propiedad de Representación Unica (URP) 3.19: El sistema $A\ddot{x} = \ddot{b}$ se dice que presenta la URP si cualquiera M columnas de A son linealmente independientes.

La URP básicamente garantiza que cualquier componente principal (base) de una señal real sea representada en forma única por una columna de A . Esta propiedad se puede lograr empleando un muestreo suficientemente denso para crear un vector \ddot{b} que capture todos los componentes de la señal real [32].

Los siguientes resultados proporcionan los límites sobre la dimensión de una única solución básica degenerada [32].

Teorema 3.20: Dado un sistema lineal, $A\ddot{x} = \ddot{b}$, que satisface la URP y que contiene una solución de p -dimensión, con $p < M/2$ -dimensional, no puede existir otra solución con dimensión menor que $r = M - p + 1$. Una solución unidimensional es la única solución básica degenerada para el sistema dado.

Corolario 3.21: Un sistema lineal que satisface la URP puede tener como mínimo una solución de dimensión menor que $M/2$. Esta solución es maximalmente “sparse”.

Corolario 3.22: Para sistemas que satisfacen la URP, la señal real siempre puede encontrarse como la única solución maximalmente “sparse” donde el número de datos muestreados M excede la dimensión de la señal por un factor de 2. En este caso, si se encuentra una solución con una dimensión menor que $M/2$, esto garantiza que represente a la señal real.

En resumen, soluciones generales “sparse”, incluyendo las soluciones con menos de M términos diferentes de cero, no son únicas. Las restricciones que conducen a una solución única son la de “maximalmente sparse” o el requerimiento de que la solución “tenga menos de $M/2$ términos diferentes de cero”. El algoritmo FOCUSS puede favorecer a una solución maximalmente sparse, esto es, puede converger a esta solución desde un conjunto grande de puntos iniciales cuando la dimensión de esta solución sea relativamente pequeña en comparación al tamaño de \vec{b} . Cuando la dimensión de esta solución crece, el FOCUSS gradualmente comienza a favorecer soluciones cercanas a su inicialización. Así, el FOCUSS proporciona una transición suave entre dos propiedades deseadas de convergencia: una es converger a la solución maximalmente “sparse” cuando las condiciones del corolario 3.22 se cumplen, y la otra es converger a una solución sparse cercana a la inicialización cuando el corolario 3.22 no se cumple.

3.3.3. Convergencia.

Para que un algoritmo sea una herramienta útil de estimación, debe converger a soluciones puntuales a partir de un número significativo de inicializaciones y no exhibir divergencias u oscilaciones. El análisis de convergencia global del FOCUSS se presenta en [32].

Iniciaremos esta sección con algunos conceptos. Se precisa en [32] que el término “convergencia global” a veces implica convergencia a un mínimo global y por lo tanto, para evitar confusiones los autores utilizan el término “convergencia a un punto fijo” o “convergencia absoluta” para describir las propiedades de convergencia del FOCUSS.

Un *espacio fase* es una colección de trayectorias de la evolución temporal de un algoritmo no lineal desde diferentes puntos iniciales. Los puntos en los cuales un algoritmo no lineal es estacionario son llamados *puntos fijos*. Estos pueden ser *puntos fijos estables*, para los cuales el algoritmo converge desde cualquier punto que se encuentre dentro de una vecindad alrededor de tales puntos o *puntos fijos silla*, para los cuales el algoritmo converge únicamente a lo largo de algunas trayectorias especiales. El tercer tipo de puntos es conocido como *puntos fijos inestables*, son puntos estacionarios de los cuales un algoritmo se aleja dada una perturbación. La vecindad más grande de puntos para el cual el algoritmo converge a un punto fijo estable es llamada *cuenca de atracción* que contiene al punto fijo estable. Idealmente, los puntos fijos estables de un algoritmo forman un conjunto de soluciones válidas, tal como las soluciones sparse en nuestro caso. En un caso desafortunado de que un algoritmo llegue a fijarse a un punto fijo silla o inestable se puede resolver eligiendo una diferente inicialización.

Teorema 3.23: El algoritmo FOCUSS es absolutamente convergente, es decir, para cualquier punto inicial \ddot{x}_0 , éste converge asintóticamente a un punto fijo. La función descendente asociada con el algoritmo es $L(\ddot{x}) = \prod_{i=1}^n |x_k(i)|$. El conjunto de puntos fijos $\ddot{x} \in \Gamma$ del algoritmo son soluciones a $A\ddot{x} = \ddot{b}$ que poseen uno o más valores iguales a cero.

La convergencia absoluta del FOCUSS significa que el algoritmo produce un punto solución a partir de cualquier solución inicial, pero este punto puede ser estable, silla o un punto fijo inestable. El teorema siguiente muestra que las soluciones sparse del FOCUSS son los puntos fijos estables del algoritmo.

Teorema 3.24: Sea \ddot{x}^ una solución localizada de $A\ddot{x} = \ddot{b}$. Para cualquier \ddot{x}^* , existe una vecindad Ω alrededor de éste tal que para cualquier $\ddot{x}_0 \in \Omega$, el FOCUSS genera una sucesión $\{\ddot{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a \ddot{x}^* . La razón de convergencia local para el algoritmo básico es al menos cuadrática [32].*

CAPITULO IV

METODOLOGÍA DE PRUEBA Y RESULTADOS.

4.1. Metodología de Prueba de los Algoritmos Seleccionados.

El problema de localización de fuentes del sonido respiratorio es en esencia un problema inverso y como tal, se encuentra asociado a la definición de un modelo, el denominado el problema directo, que explique la amplitud del sonido respiratorio adquirido en la superficie torácica. Los factores generales que determinan la intensidad del sonido en la superficie torácica, tal y como se analizó en el capítulo II, son dos: los generadores del sonido y las características del medio de transmisión [5]. Con respecto a los generadores del sonido respiratorio se ha estimado, a través de investigaciones de tipo experimental, diferentes fuentes para el sonido inspiratorio y para el espiratorio. En ambos casos, parece ser que ambos sonidos provienen de fuentes multicéntricas, con un componente del árbol bronquial principal y de tráquea para el sonido espiratorio. También, las investigaciones sugieren que una mayor amplitud del sonido se genera donde existe una ventilación importante.

Los estudios realizados indican además, que el sonido respiratorio puede radiar directamente a partir de las vías aéreas hacia el parénquima pulmonar, y de ahí hacia la pared torácica. El lugar por donde el sonido emerge de las vías aéreas hacia el parénquima es de interés. Por lo tanto, se sugiere que la generación del sonido puede ser dependiente de las vías aéreas y la transmisión, del parénquima pulmonar. En diversas investigaciones el parénquima pulmonar se considera como un fluido continuo elástico isotrópico homogéneo modelado como una mezcla homogénea de burbujas de aire en agua, análogo a gas y tejido, donde el sonido respiratorio sufre una atenuación de su intensidad por diversos mecanismos.

La metodología de prueba para los diferentes algoritmos seleccionados toma en cuenta las investigaciones analizadas en el capítulo II y en especial, se simulan los siguientes aspectos. Con respecto a las fuentes generadoras del sonido respiratorio, las pruebas incluyen fuentes sintéticas únicas o múltiples, ya sea puntuales o no, con la idea de simular aspectos de flujo turbulento en las ramificaciones del árbol bronquial. Además, se

incrementa gradualmente la dificultad de la prueba para llegar a estimar fuentes del tipo multicéntrico.

En las simulaciones realizadas se considera que existe un acoplamiento directo del sonido, desde las vías aéreas hacia el parénquima pulmonar, y que el sonido sufre una atenuación al viajar por el parénquima. Para simular el comportamiento de la intensidad de la fuente del sonido respiratorio al interior del tórax se consideró el modelo propuesto por Wodicka y colaboradores en [2], $I(r) = I_0 e^{-N\sigma r}$, que establece la intensidad acústica del sonido respiratorio a cierta distancia de la fuente que presenta una intensidad en su posición original I_0 . En base a este modelo y con el espacio de reconstrucción discretizado se generó la matriz A , que contiene la geometría del espacio de reconstrucción asumiendo que el tórax es un medio de propagación acústica homogéneo. Es decir, las columnas de A se forman a partir del modelo directo en base a las investigaciones experimentales mencionadas. Por lo tanto, A se define de la forma:

$$(83) \quad A = \begin{bmatrix} I_0 e^{-N\sigma r_{1,1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{1,2}} &] & I_0 e^{-N\sigma r_{1,N-1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{1,N}} \\ I_0 e^{-N\sigma r_{2,1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{2,2}} &] & I_0 e^{-N\sigma r_{2,N-1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{2,N}} \\ \wedge & &] & & \wedge \\ I_0 e^{-N\sigma r_{M-1,1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{M-1,2}} &] & I_0 e^{-N\sigma r_{M-1,N-1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{M-1,N}} \\ I_0 e^{-N\sigma r_{M,1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{M,2}} &] & I_0 e^{-N\sigma r_{M,N-1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{M,N}} \end{bmatrix}$$

Cada elemento de A tiene una ponderación que especifica la contribución en amplitud por una fuente de sonido respiratorio situada en algún punto al interior del espacio de reconstrucción. El elemento $A_{i,j}$ corresponde al j -ésimo componente de la fuente situado en la j -ésima posición del espacio de reconstrucción y al i -ésimo sensor en la superficie del tórax.

La estimación de la fuente sintetizada de sonido respiratorio se realiza a partir de mediciones sonoras en un instante de tiempo, que corresponde a la amplitud de la fuente en ese instante después de recorrer una cierta distancia. La amplitud y posición, desconocidas ambas, de la fuente o de las fuentes al interior del espacio de reconstrucción están representadas en un vector \vec{x} de dimensión $N \times 1$, la incógnita a resolver, donde cada entrada de \vec{x} corresponde a una columna de la matriz A . El vector \vec{x} , que contiene los valores de las intensidades de las fuentes sintetizadas del sonido respiratorio colocadas al interior del

espacio de reconstrucción, se relaciona linealmente con las mediciones externas; la relación lineal se puede expresar en una ecuación matricial de la forma:

$$(84) \quad \begin{bmatrix} I_0 e^{-N\sigma r_{1,1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{1,2}} &] & I_0 e^{-N\sigma r_{1,N-1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{1,N}} \\ I_0 e^{-N\sigma r_{2,1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{2,2}} &] & I_0 e^{-N\sigma r_{2,N-1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{2,N}} \\ \wedge & &] & & \wedge \\ I_0 e^{-N\sigma r_{M-1,1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{M-1,2}} &] & I_0 e^{-N\sigma r_{M-1,N-1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{M-1,N}} \\ I_0 e^{-N\sigma r_{M,1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{M,2}} &] & I_0 e^{-N\sigma r_{M,N-1}} & I_0 e^{-N\sigma r_{M,N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \wedge \\ \wedge \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \wedge \\ \wedge \\ b_{M-1} \\ b_M \end{bmatrix},$$

donde \vec{b} es el vector de $M \times 1$ que contiene las M mediciones en los M sensores colocados sobre las superficies frontal y posterior del tórax en arreglos rectangulares, simuladas por la superficies frontal (SF) y posterior (SP) del espacio de reconstrucción. La “medición” de la señal sonora en cada sensor es producida por la combinación lineal de todos los componentes, algunos de los cuales pueden ser cero, indicando que no hay presencia de fuente alguna en esa posición.

El sistema a resolver para \vec{x} es:

$$(85) \quad A\vec{x} = \vec{b}.$$

En las simulaciones también se consideró el aspecto de que existe una mayor amplitud del sonido donde la ventilación es importante. Para ello se consideraron fuentes sonoras sintéticas de igual y de diferente intensidad.

Además, en términos de la investigación bibliográfica del problema inverso en otras áreas de la medicina, también analizado en el capítulo II, se estudiaron los efectos de los factores siguientes: profundidad de la fuente (acercamiento o alejamiento de la o las fuentes a la superficie frontal o posterior), número de micrófonos y discretización del espacio de reconstrucción. Otro de los factores que limitan la ubicación de las fuentes es el ruido. Se presentan algunas pruebas para una señal sonora sintetizada contaminada con ruido.

El problema de localización de fuentes del sonido respiratorio es en esencia un problema inverso que inicia su estudio como tal en [4]. En [4] se intenta localizar la fuente del sonido respiratorio mediante la representación espacial de la solución proporcionada por un algoritmo que emplea el método de mínimos cuadrados para resolver un sistema de ecuaciones sobredeterminado con registros simultáneos. Es así que, el problema de ubicar las fuentes del sonido respiratorio es un campo nuevo en el estudio de los sonidos

respiratorios desde el punto de vista de un problema inverso. En el presente capítulo se presentan las simulaciones que demuestran el desempeño de cada uno de los métodos tratados en el capítulo tres: mínimos cuadrados, mínimos cuadrados de norma mínima y FOCUSS. En particular, en este capítulo se presentan los resultados obtenidos con una metodología similar a la utilizada por Kompis y colaboradores en [4] para un sistema lineal sobredeterminado, que se refiere en esta tesis por el título de mínimos cuadrados con factorización QR (LS-QR).

En todas las simulaciones que se realizaron se usó una paleta de colores que va desde el negro (valor cero de intensidad) hasta un rojo intenso (valor normalizado máximo de intensidad de la fuente). En las simulaciones fue considerado un espacio de reconstrucción de 24x30x24 cm, volumen que representa al volumen torácico de un sujeto y donde se utilizó una formulación discreta considerando 2 cm entre punto y punto del espacio, como aproximación al modelo continuo, con la premisa de que todo punto del tórax contiene información relevante de la fuente del sonido respiratorio. En la figura 4 se observa como se presenta el espacio de reconstrucción dentro del cual se colocaran las fuentes sintetizadas. En la figura se observan diferentes perspectivas del espacio de reconstrucción y en cada una de ellas se indican la superficie frontal (F) y la superficie posterior (P). Como puede observarse el espacio se divide en planos paralelos a las superficies frontal y posterior del espacio. También, se han colocado dos planos ortogonales a los planos indicados anteriormente, de tal forma que tanto las fuentes sintetizadas como las fuentes estimadas se visualicen adecuadamente.

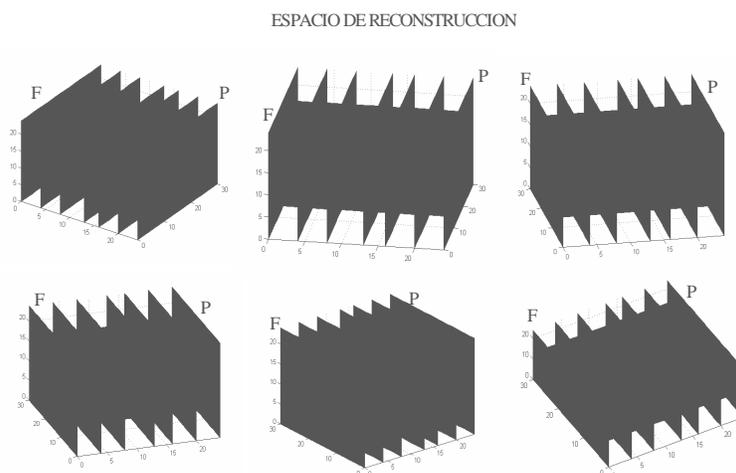


Figura 4

A continuación se presentan los resultados obtenidos con cada uno de los métodos estudiados para la solución del problema inverso: Mínimos Cuadrados (Sistema Lineal Sobredeterminado), Mínimos Cuadrados de Norma Mínima y el FOCUSS (Sistema Lineal Subdeterminado). La forma de presentar los resultados incluye el espacio de reconstrucción en donde se localiza la fuente o las fuentes simuladas (o sintetizadas) a ser ubicadas (parte superior izquierda de las siguientes figuras) y los resultados obtenidos por los diferentes métodos para la o las fuentes estimadas.

4.2. Caso de Simulación: Fuente Puntual.

En este caso las simulaciones se realizaron primeramente utilizando 16 micrófonos colocados en dos arreglos rectangulares de 2x4, como en [4], para estimar una fuente puntual colocada en diferentes posiciones del espacio de reconstrucción, que simula al espacio torácico. Posteriormente, se estimó la fuente en las mismas posiciones utilizando 40 micrófonos colocados en dos arreglos de 4x5 micrófonos.

4.2.1. 16 Micrófonos.

Se usaron 16 micrófonos colocados en dos superficies del espacio de reconstrucción, que representan la parte frontal y posterior del tórax, para adquirir la señal sonora sintetizada. Los micrófonos se colocaron en ambas superficies en arreglos rectangulares de 2x4 siguiendo el arreglo de [4]. En una primera prueba la fuente fue colocada en (12, 16, 12), posición central respecto al espacio de reconstrucción. En la figura 5 se muestran estos resultados obtenidos por los diferentes métodos: Mínimos Cuadrados con factorización QR (LS-QR), Mínimos Cuadrados de Norma Mínima con factorización QR (NMLS-QR), Mínimos Cuadrados de Norma Mínima con Descomposición en Valores Singulares (NMLS-SVD), FOCUSS Básico (FOCUSS-B) y FOCUSS Acumulado (FOCUSS-A). Así también, en la figura se muestra en la esquina superior izquierda la fuente puntual sintetizada a ser estimada.

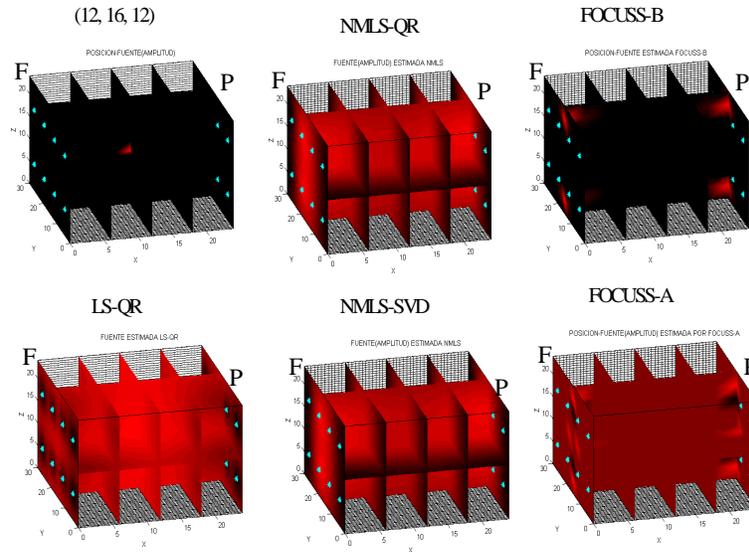


Figura 5

En la figura 5 se observa que el método de LS-QR estima una fuente bastante dispersa sobre gran parte del espacio de reconstrucción. Mientras que los métodos de NMLS resuelven un poco mejor para una fuente puntual, sin embargo aún la fuente estimada es dispersa en una región central bastante significativa, pero en una región menor en comparación con el método LS-QR. Se observa que el FOCUSS-B estima una fuente múltiple hacia las superficies frontal y posterior. El método que resuelve mejor para una fuente puntual es el NMLS-SVD (y QR), notándose que la región de la fuente estimada se extiende de la superficie posterior hacia la superficie frontal, tendiendo hacia la parte central del espacio de reconstrucción. También se observa que el método que proporciona el peor resultado con 16 micrófonos es el FOCUSS-A.

Manteniendo el número de micrófonos se colocó la fuente puntual en la posición (6, 16, 12), es decir más cercana a una de las superficies (frontal). Los resultados se muestran en la figura 6 para cada uno de los métodos estudiados.

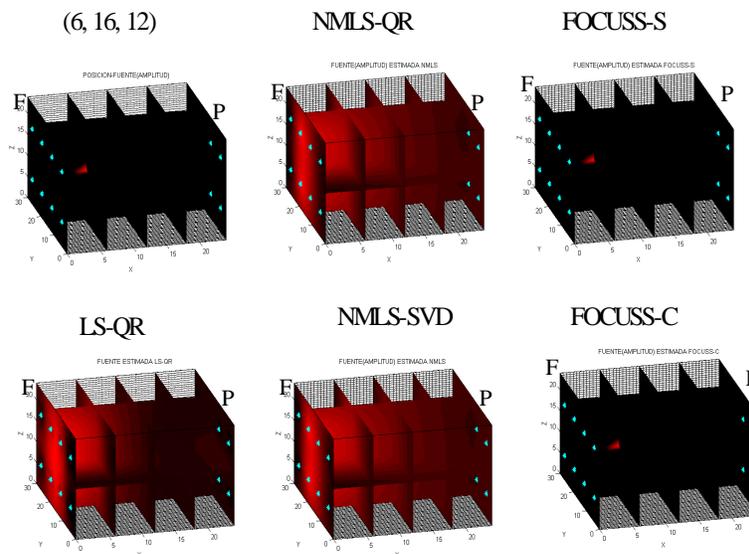


Figura 6

El método que mejor desempeño tiene en la localización de la fuente y en la estimación de su intensidad, de hecho localiza óptimamente la fuente, es el FOCUSS, en sus dos versiones. Para esta posición de la fuente se observa que el método de Mínimos Cuadrados (LS-QR) resuelve mejor para esta posición de la fuente, en comparación con los métodos de Norma Mínima, observándose que la región donde se localiza la fuente es menos dispersa y cercana a una de las superficies del espacio de reconstrucción alrededor de la posición verdadera de la fuente. Mientras que en los métodos de Norma Mínima la región donde se ubica la fuente estimada es más dispersa y se extiende a lo largo de la superficie donde se ubican la mitad de los sensores y hacia la otra superficie del espacio de reconstrucción, atenuándose conforme se aleja de la posición verdadera de la fuente.

Los resultados que se muestran en la figura 7 son de dos fuentes colocadas en (6, 16, 18) y (4, 16, 12), muy próximas a una de las superficies del espacio de reconstrucción (frontal). La condición de simulación pretende analizar los métodos en condiciones en donde la fuente puntual se encuentra cada vez más cercana a una de las superficies en donde se localizan los micrófonos. En el primer grupo de imágenes (primer renglón de la figura 7) se observa que el método LS-QR estima mejor a la fuente que los métodos de NMLS; incluso se puede observar, para los métodos de Norma Mínima, que hay cierta intensidad en la parte inferior del espacio de reconstrucción mientras que con el método LS-QR únicamente se puede observar mínima intensidad para una región cercana a la superficie posterior. Para el segundo grupo de imágenes (segundo renglón de la figura 7)

los métodos de NMLS resuelven de manera similar para la fuente estimada y mejor que el método de LS-QR, observándose regiones más oscuras en el espacio de reconstrucción en el estimado por los métodos de Norma Mínima que en el estimado por el método LS-QR y con una región de estimación desde la superficie frontal hasta la posterior. Sucede algo similar para el resultado obtenido por el método de LS-QR pero con una región de estimación más dispersa hacia las caras laterales en comparación con la mostrada por los métodos de Norma Mínima.

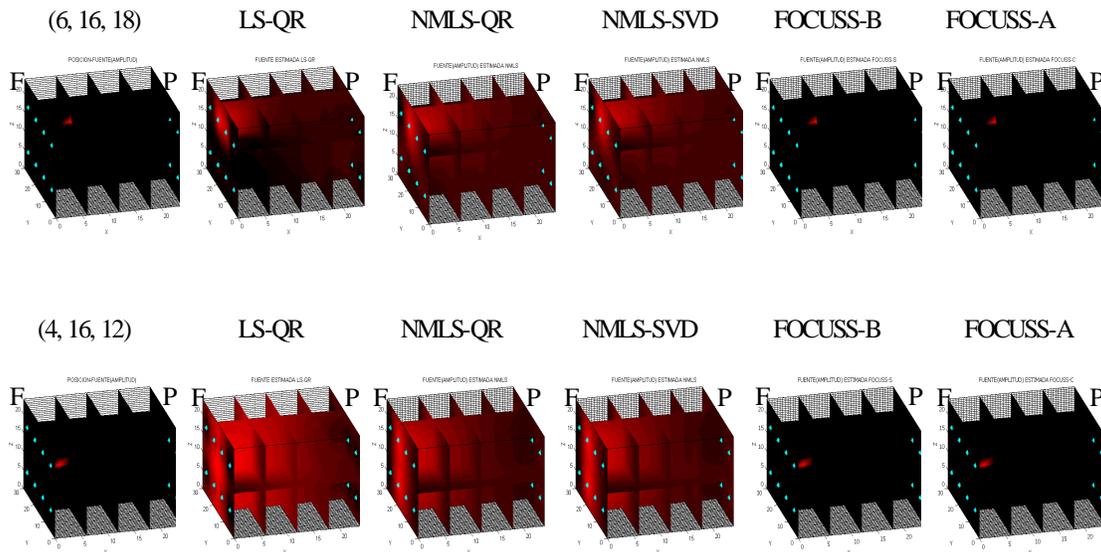


Figura 7

Con respecto al método FOCUSS este estima bien para las dos posiciones de la fuente puntual y no se observan diferencias significativas, de intensidad y posición, entre la fuente sintetizada y la estimada (figura 7).

4.2.2. 40 Micrófonos.

Para analizar el efecto del número de micrófonos se utilizó nuevamente una fuente puntual colocada en diferentes posiciones del espacio pero se incremento drásticamente el número de micrófonos. Se utilizaron 40 micrófonos para adquirir la señal sonora simulada colocados sobre las superficies, que representan a la parte frontal y posterior del tórax. Los micrófonos se colocaron igualmente espaciados sobre ambas superficies en arreglos rectangulares de 4x5.

Una primer prueba se efectuó con una fuente colocada en $(12, 16, 12)$, posición central respecto al espacio de reconstrucción, que simula al espacio torácico. En dos pruebas adicionales, la fuente puntual fue colocada cerca a una de las superficies donde están ubicados los micrófonos, en las posiciones $(6, 16, 12)$ y $(4, 16, 12)$. En la figura 8 se muestran estos resultados obtenidos por los diferentes métodos: Mínimos Cuadrados con factorización QR (LS-QR), Mínimos Cuadrados de Norma Mínima con factorización QR (NMLS-QR), Mínimos Cuadrados de Norma Mínima con Descomposición en Valores Singulares (NMLS-SVD), FOCUSS Básico (FOCUSS-B) y FOCUSS Acumulado (FOCUSS-A).

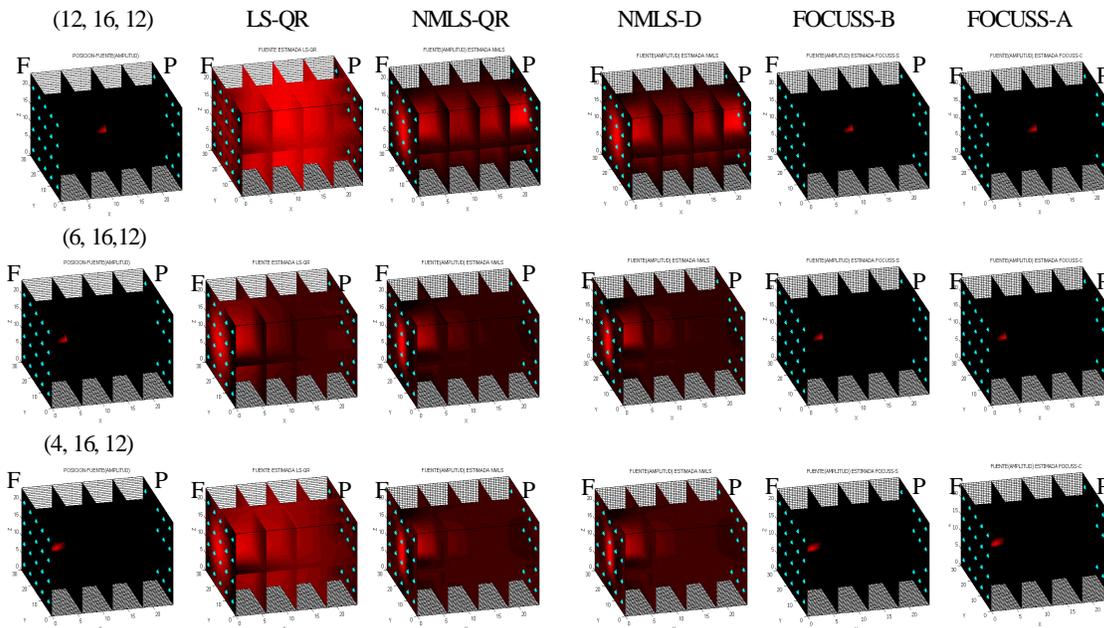


Figura 8

Se puede observar en la figura que a diferencia de la estimación de una fuente puntual utilizando 16 micrófonos, el método FOCUSS logra ubicar la fuente en cualquiera de las tres posiciones. Además, con el incremento del número de micrófonos en ambas superficies del espacio de reconstrucción se puede observar una reducción en la región de intensidad estimada para la fuente por los métodos de NMLS y de LS-QR. Para esta cantidad de micrófonos, el método de LS-QR no proporciona un estimado adecuado de la fuente. Para la fuente localizada en $(6, 16, 12)$ la estimación por el método LS-QR es la mejor. Se observa que mejora el estimado de la fuente simulada, para las tres posiciones,

proporcionado por los métodos de NMLS. Sin embargo, el método FOCUSS, en ambas versiones, resuelve de manera óptima para la fuente puntual en las tres posiciones. Es necesario hacer notar que el estimado proporcionado por el método FOCUSS inicia con el estimado proporcionado por el método NMLS-SVD. También nótese que el método FOCUSS en estas condiciones no presenta el mismo problema para una fuente puntual a la mayor profundidad del espacio torácico, es decir, el centro del espacio de reconstrucción.

4.3. Caso de Simulación: Fuentes Puntuales Múltiples.

4.3.1. Cinco Fuentes.

En la figura 9 se muestra un conjunto de cinco fuentes puntuales de igual intensidad colocadas en los puntos $(12, 12, 8)$, $(12, 16, 10)$, $(12, 14, 12)$, $(12, 18, 14)$, $(12, 14, 16)$ del espacio de reconstrucción, y agrupadas en un plano paralelo a las superficies donde se colocaron los micrófonos. Dados los resultados obtenidos para los casos en la sección 4.2, se utilizaron 40 micrófonos colocados sobre las superficies, que representan a la parte frontal y posterior del espacio torácico simulado, para estimar la posición de estas fuentes. Los micrófonos fueron colocados en ambas superficies de tal manera que quedaron igualmente espaciados en arreglos rectangulares de 4×5 . También, en la figura 9 se puede notar que el método NMLS-QR no aparece. Este método se ha excluido debido a que el método FOCUSS, al utilizar el estimado proporcionado por este método, no logra la convergencia en pocas iteraciones como sucede con el método NMLS-SVD.

En la figura 9 se aprecia que el método que peor estima las fuentes es el LS-QR debido a que su estimado se extiende a una región que ocupa todo el espacio excepto las superficies donde se encuentran los micrófonos, donde se observan valores de menor intensidad.

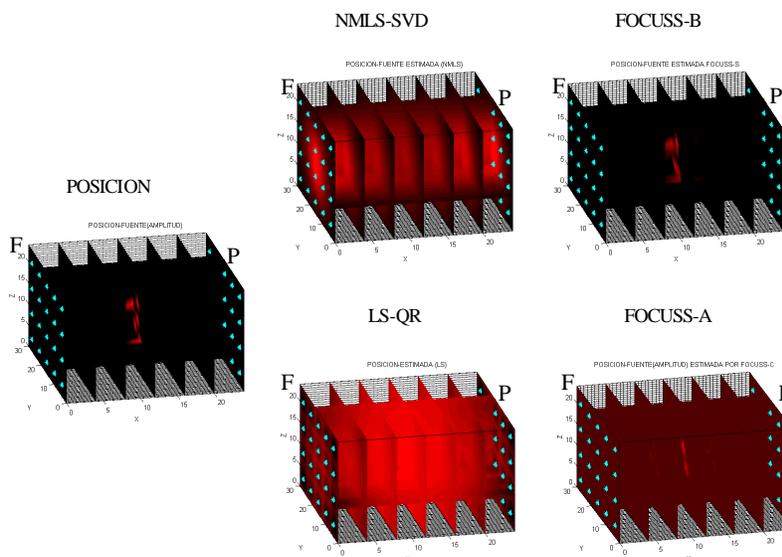


Figura 9.

En la figura 9 se observa que el mejor estimado de la fuente lo proporciona el método FOCUSS básico. Este inicia con el estimado de baja resolución proporcionado por el método NMLS-SVD que, como puede verse en la figura 9, no distingue las fuentes únicamente proporciona la idea de ser una fuente central. El estimado por el método NMLS-SVD presenta una región de estimación que se extiende a lo largo del espacio de reconstrucción, de forma cilíndrica y centrada. Con respecto al estimado por el método FOCUSS básico, aunque no logra hacer una estimación adecuada de la intensidad de todas las fuentes puntuales, si proporciona una adecuada estimación de la posición donde se encuentran el grupo de fuentes.

Respecto a la estimación del grupo de fuentes que proporciona el método FOCUSS acumulado se observa que no logra hacer la distinción de todas las fuentes. Solamente distingue dos fuentes que aparecen como pequeñas regiones de mayor intensidad colocadas sobre el mismo plano donde se colocaron al grupo de fuentes sintetizadas. La versión del método FOCUSS acumulado no logra la convergencia hacia las fuentes sintetizadas presentando en su estimado valores negativos y como consecuencia, en todo espacio de reconstrucción se presente esa tonalidad en color rojo.

Cuando se acercan las fuentes hacia una de las caras donde se encuentran los micrófonos, en los puntos (4, 12, 8), (4, 16, 10), (4, 14, 12), (4, 18, 14), (4, 14, 16), puede observarse en la figura 10, que la región donde se localiza la fuente estimada por el método NMLS-SVD se reduce en extensión y presenta una mayor intensidad hacia la superficie que

se encuentra más cerca de las fuentes. Esta observación no se mantiene para el estimado proporcionado por el método LS-QR..

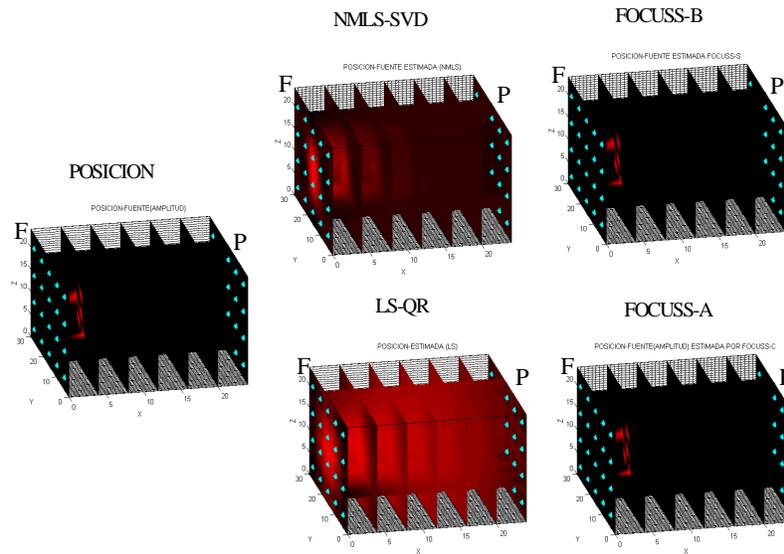


Figura 10.

También se observa que si la fuente se encuentra próxima a los micrófonos la región donde el método NMLS-SVD estima las fuentes es más pequeña, a diferencia de cuando se colocan las fuentes a una profundidad mayor (al centro del espacio de reconstrucción).

Con respecto al método FOCUSS se observa en la figura 10 que este resuelve de manera óptima, en ambas versiones. Esto es, se aprecia que la forma, intensidad y posición de cada una de las fuentes estimadas son similares a las características de las fuentes sintetizadas. Lo anterior implica que bajo estas condiciones de simulación la estimación proporcionada por el método FOCUSS mejora cuando las fuentes no se encuentran alejadas de los micrófonos.

La simulación siguiente establece que ahora las fuentes puntuales múltiples sean colocadas no en un plano paralelo a las superficies donde se encuentran los micrófonos sino en los alrededores del centro del espacio de reconstrucción en las posiciones (12, 12, 12), (8, 8, 12), (14, 10, 12), (10, 14, 12), (16, 16, 12) y bajo las mismas condiciones de simulación que en el caso anterior.

Se puede observar en la figura 11 que la peor estimación la proporciona el método LS-QR mientras que la estimación proporcionada por el método NMLS-SVD se presenta en una región que se extiende a lo largo del espacio de reconstrucción sesgándose hacia uno de los costados. Sin embargo, las fuentes no se pueden distinguir una de otra.

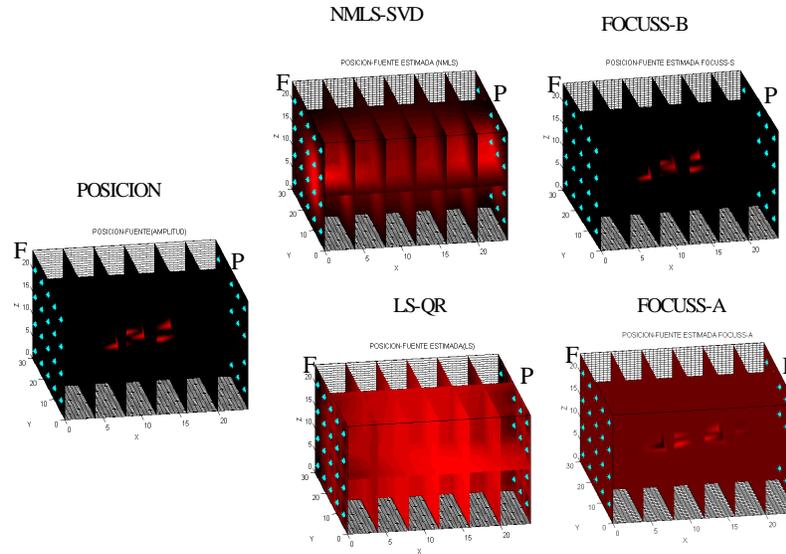


Figura 11

La estimación proporcionada por el método NMLS-SVD es suficiente para que el método FOCUSS básico resuelva y estime adecuadamente la posición de las fuentes sintetizadas. Sin embargo, se observa que no logra estimar de manera óptima la intensidad de todas las fuentes, tal es el caso de las fuentes localizadas en $(12, 12, 12)$ y $(10, 14, 12)$.

En lo que respecta al método FOCUSS acumulado, éste no logra converger a las fuentes sintetizadas presentando en su estimado valores negativos, de magnitud aproximada a la intensidad de las fuentes sintetizadas, en posiciones cercanas a las posiciones verdaderas de las fuentes. Se observa un color rojo oscuro que cubre todo el espacio de reconstrucción. Sin embargo, se logra observar un color rojo más intenso en algunas posiciones donde se ubican las fuentes sintetizadas. A partir del resultado del método FOCUSS acumulado se puede decir que el método proporciona una estimación de las posiciones de las fuentes sintetizadas, incluso se distinguen algunas fuentes.

A continuación, las cinco fuentes sintetizadas de la figura 12 de la simulación anterior son colocadas en las proximidades del centro del espacio de reconstrucción ligeramente más separadas, colocadas en las posiciones $(8, 8, 12)$, $(12, 12, 14)$, $(14, 10, 12)$, $(16, 16, 14)$ y $(10, 14, 12)$, bajo las mismas condiciones de prueba que las fuentes mostradas en la figura 11. La figura 12 muestra los resultados obtenidos por los métodos LS-QR, NMLS-SVD y FOCUSS.

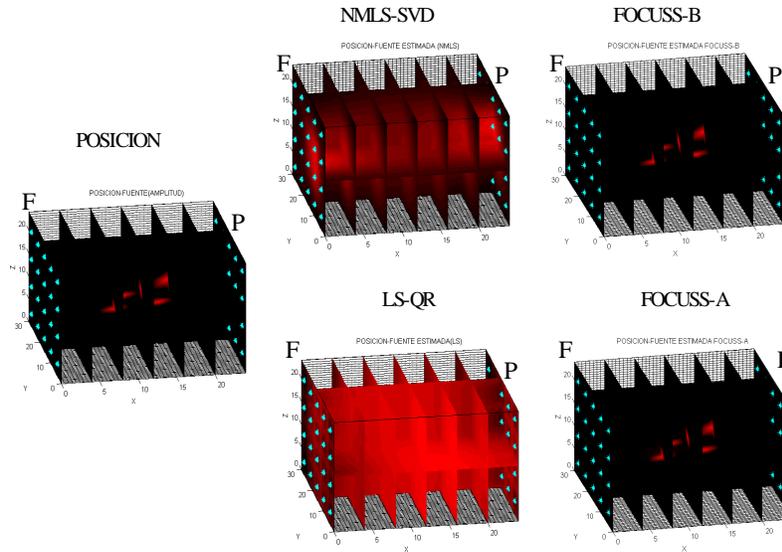


Figura 12.

El estimado proporcionado por el método FOCUSS en ambas versiones resuelve bastante bien para estas fuentes, a diferencia del método LS-QR cuya estimación es pobre. El método FOCUSS además logra distinguir perfectamente a todas las fuentes. Si se comparan los resultados que proporciona el método NMLS-SVD cuando las fuentes se colocaron con una menor separación entre ellas, figura 11, con los resultados obtenidos para fuentes con una mayor separación entre ellas se puede observar que la región de estimación para las fuentes decrece, esto es disminuye la región en tonalidad roja. Por consiguiente su estimado es mejor, y en consecuencia el método FOCUSS logra converger a las fuentes sintetizadas, en ambas versiones, teniendo una muy buena resolución para cada una de las fuentes, en posición e intensidad.

4.3.2. *Cúmulos de Fuentes Puntuales.*

Veamos ahora el desempeño de los métodos LS-QR, NMLS-SVD y el FOCUSS básico y acumulado para fuentes puntuales agrupadas en dos cúmulos de 5 fuentes cada uno. Las fuentes puntuales tienen igual intensidad y fueron colocadas al centro del espacio de reconstrucción, es decir, a la máxima profundidad, y sobre un plano paralelo a las superficies que contienen a los micrófonos como se muestra en la figura 13. Estas fuentes se encuentran localizadas en los siguientes puntos del espacio de reconstrucción:

Cúmulo 1:	Cúmulo2:
(12, 26, 12)	(12, 12, 14)
(12, 22, 12)	(12, 8, 14)
(12, 18, 12)	(12, 4, 14)
(12, 22, 16)	(12, 8, 18)
(12, 22, 8)	(12, 8, 10)

En la estimación de las fuentes fueron utilizados 40 micrófonos colocados sobre las superficies frontal y posterior del espacio torácico simulado en dos arreglos rectangulares de 20 micrófonos igualmente espaciados, es decir en arreglos de 4x5 micrófonos.

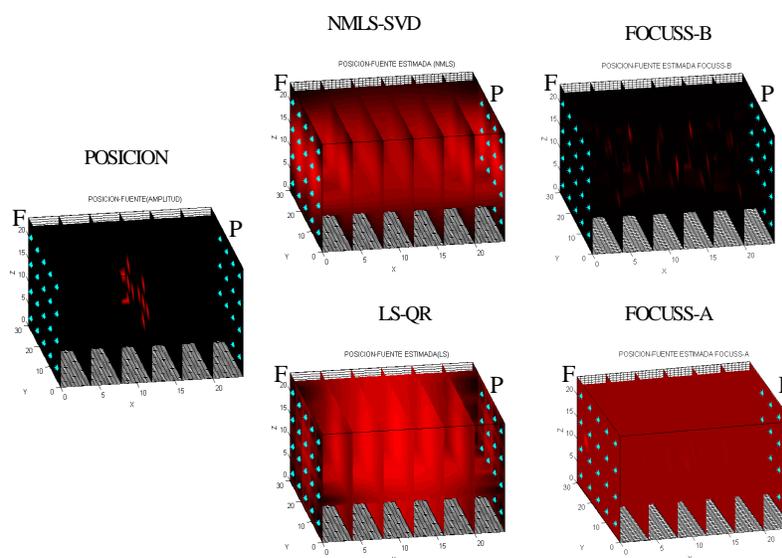


Figura 13

En la figura 13 se puede observar que el estimado proporcionado por del NMLS-SVD para estas fuentes es una región que se dispersa a todo el espacio de reconstrucción. La región se extiende desde la superficie frontal hacia la superficie posterior presentando zonas de tonalidades oscuras en la parte superior e inferior del espacio de reconstrucción. Con respecto al estimado proporcionado por el método LS-QR, se observan valores estimados más intensos al centro del espacio; se observa una región que se extiende hacia los costados con tonalidades oscuras hacia las superficies frontal y posterior del espacio, y que tiene un volumen aproximado a la región que se estima con el método NMLS-SVD.

Con respecto al desempeño del FOCUSS básico, este no logra converger a las fuentes sintetizadas, estima fuentes en posiciones erróneas en diferentes planos y de baja intensidad. En consecuencia, el FOCUSS en su versión acumulada no converger a las

fuentes sintetizadas, generando un estimado con valores negativos, indicado por la tonalidad roja que se observa en todo el espacio, e incluso se alcanza a observar una zona pequeña de intensidad máxima sobre una de las superficies de los micrófonos.

En la simulación que se describe a continuación se acerca uno de los cúmulos de la simulación anterior hacia una de las superficies que contiene el arreglo de micrófonos, figura 14. Ahora las fuentes se localizan en las siguientes posiciones del espacio: cúmulo 1: (8, 20, 14), (8, 16, 14), (8, 12, 14), (8, 16, 18), (8, 16, 10), cúmulo 2: (12, 16, 18), (12, 12, 18), (12, 8, 18), (12, 12, 22), (12, 12, 14).

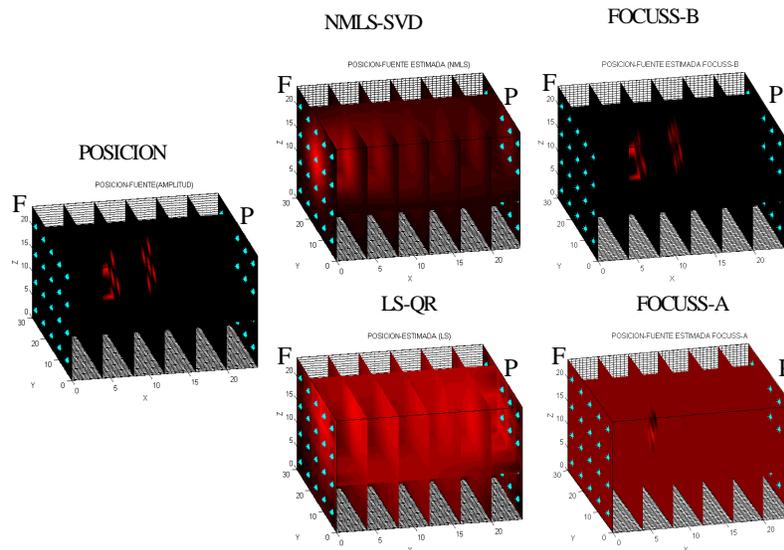


Figura 14.

Se puede observar una mejoría en la resolución de las fuentes por el método FOCUSS básico en comparación con la colocación de los cúmulos al centro del espacio, figura 13. Aunque no logra distinguir entre una y otra fuente adecuadamente en el cúmulo más profundo, sí logra proporcionar una ubicación bastante aceptable de la ubicación de cada cúmulo de fuentes. Respecto al estimado proporcionado por el método NMLS-SVD, estimado de las fuentes con que inicia la reconstrucción de las fuentes el método FOCUSS, presenta una región que se dispersa desde la parte frontal, mayor intensidad, hacia la superficie posterior, de menor intensidad, del espacio de reconstrucción. El estimado se concentra principalmente hacia la parte superior del espacio. El método FOCUSS acumulado, que aún no logra la convergencia hacia las fuentes sintetizadas, sí genera un estimado que proporciona alguna noción de la ubicación del cúmulo de fuentes cercanas a la superficie frontal. La tonalidad roja que se presenta en todo el espacio de reconstrucción

en la solución proporcionada por el método FOCUSS acumulado se debe a que contiene valores negativos de magnitud aproximada a la intensidad de las fuentes sintetizadas.

A continuación, se agrega un cúmulo más, formado por cinco fuentes puntuales, a los cúmulos de la simulación anterior, y con una posición más cercana a la superficie posterior de micrófonos como se muestra en la figura 15. Las fuentes fueron colocadas en los siguientes puntos del espacio de reconstrucción:

Cúmulo 1:	Cúmulo 2:	Cúmulo 3:
(8, 26, 10)	(12, 16, 18)	(16, 12, 12)
(8, 22, 10)	(12, 12, 18)	(16, 8, 12)
(8, 18, 10)	(12, 8, 18)	(16, 4, 12)
(8, 22, 14)	(12, 12, 22)	(16, 8, 16)
(8, 22, 6)	(12, 12, 14)	(16, 8, 8)

El estimado generado por el método NMLS-SVD es ligeramente mejor que el proporcionado por el método LS-QR. La región estimada se dispersa desde la superficie frontal, costado inferior izquierdo, a la superficie posterior, costado superior derecho, del espacio de reconstrucción. El estimado presenta tonalidades de color negro hacia los costados del espacio de reconstrucción y tiende a concentrarse hacia el centro del espacio donde se observa un tono de color rojo más intenso.

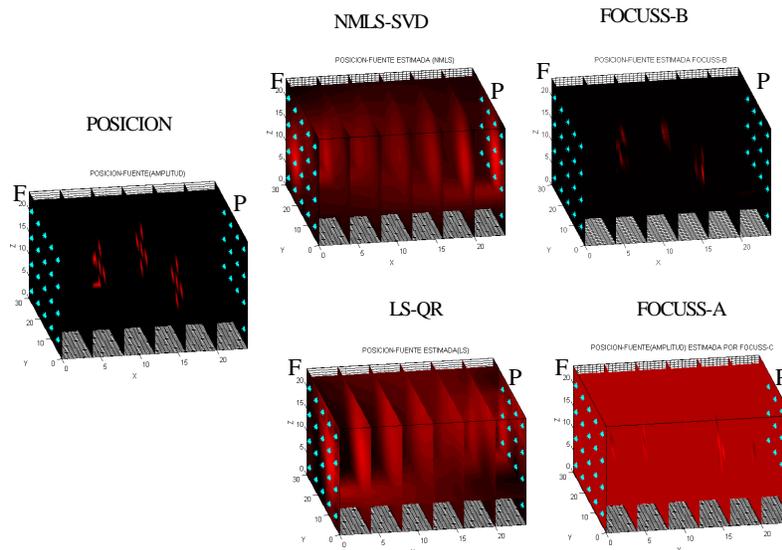


Figura 15.

A pesar de que el estimado proporcionado por el método FOCUSS básico no converge a las fuentes sintetizadas, este método si proporciona una noción de la posición

de los tres cúmulos sintetizados. En el estimado se distinguen de dos a tres fuentes para cada cúmulo que se encuentra más cercano a las superficies frontal y posterior que contienen los micrófonos sin embargo, su intensidad es menor comparada con la intensidad de las fuentes sintetizadas.

La solución que proporciona el método FOCUSS acumulado no es un buen estimado de las fuentes sintetizadas puesto que, además de no converger, presenta valores negativos de magnitud aproximada a la intensidad de las fuentes que se refleja en una tonalidad extendida de color rojo en todo el espacio de reconstrucción. Se observa también en la figura 15 que existen regiones de mayor intensidad cercanas a la posición verdadera de los cúmulos.

4.4. Caso de Simulación: Fuentes No Puntuales Múltiples.

4.4.1. Dos Fuentes.

El desempeño de los diferentes métodos para estimar dos fuentes no puntuales a intensidades iguales se presenta en la figura 16. Las fuentes simuladas fueron colocadas en las posiciones (8, 12, 14) y (12, 14, 18) del espacio de reconstrucción como se muestra en la figura 16 en la parte izquierda. Para estimar a estas fuentes se utilizaron 40 micrófonos colocados sobre las superficies frontal y posterior del espacio torácico simulado de tal forma que quedaron igualmente espaciados formando arreglos rectangulares de 4x5.

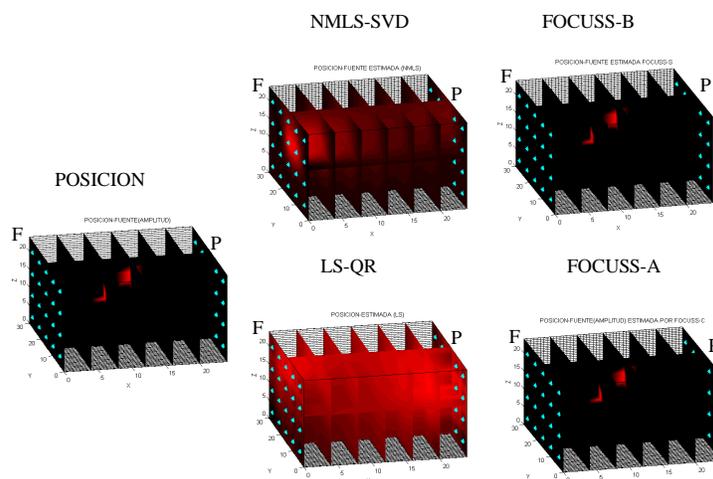


Figura 16

Se observa en la figura 16 que el método LS-QR no logra estimar la posición ni la intensidad de las fuentes simuladas, de hecho es el método que peor estima a las fuentes, y proporciona una región de estimación que se extiende a todo el espacio de reconstrucción.

El método de NMLS no logran diferenciar a las fuentes y proporcionan un estimado de la fuente en una región con menor dispersión que la proporcionada por el método LS-QR pero que se extiende a lo largo del espacio de reconstrucción desde la superficie frontal hasta la superficie posterior. También se observa que la región estimada proporcionada por el método NMLS es cercana a la cara superior y se encuentra por arriba de la mitad del espacio de reconstrucción, y presentando una región oscura en la mitad inferior del espacio de reconstrucción. El estimado a través del método NMLS-SVD es suficiente para que el FOCUSS en ambas versiones estime con una buena aproximación ambas fuentes, tanto su posición como intensidad.

4.4.2. *Tres Fuentes.*

Los diferentes métodos fueron valorados utilizando tres fuentes a intensidades iguales. Las fuentes fueron colocadas dentro del espacio de reconstrucción en las posiciones (12, 10, 14), (12, 14, 18) y (8, 12, 14) como se puede observar en la figura 17. Para estimar la posición de estas fuentes nuevamente se utilizaron 40 micrófonos para “adquirir” la señal. Los micrófonos fueron colocados sobre las superficies que representan a la parte frontal y posterior del tórax de tal forma que quedaron igualmente espaciados en arreglos rectangulares de 4x5.

Se puede observar en la figura 17, que al igual que para dos fuentes, el método de LS-QR no proporciona un buen estimado de las fuentes simuladas, generando una región de estimación que se extiende a todo el espacio de reconstrucción. En comparación, el método de NMLS proporcionan una región de estimación con menor dispersión a lo largo del espacio de reconstrucción, de extremo a extremo donde se localizan los micrófonos, rodeando la posición verdadera de las fuentes simuladas. EL método de NMLS muestran un estimado que se encuentran en la mitad superior del espacio torácico simulado, pero sin lograr distinguir una fuente de la otra.

La región que proporciona el NMLS-SVD es bastante buena como inicialización para que el método FOCUSS, en ambas versiones, logre la convergencia y resuelva bien las

tres fuentes en cuestión. Nótese que la estimación de la intensidad y posición, para las tres fuentes, proporcionada por el método FOCUSS es óptima.

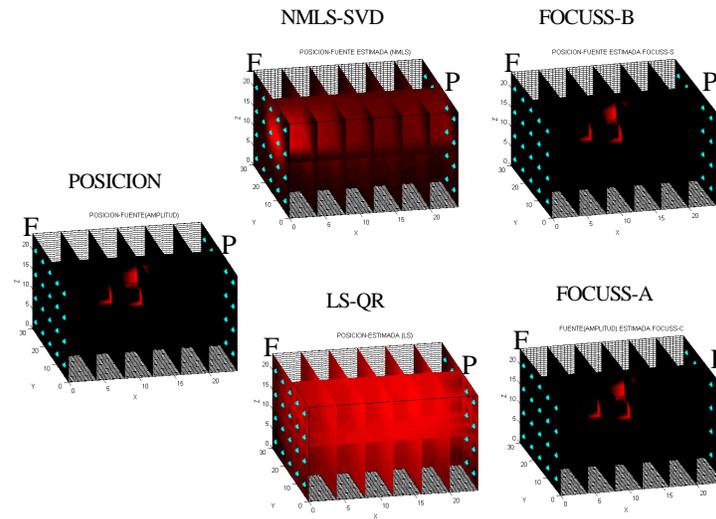


Figura 17.

4.4.3. Cinco fuentes.

El desempeño de los métodos de LS-QR, NMLS-SVD y el FOCUSS se puede ver en la figura 18 utilizando cinco fuentes a igual intensidad, cada fuente esta compuesta de dos puntos del espacio discretizado a excepción de una de ellas que se compone de tres puntos cuya posición es (8, 16, 14). Las otras fuentes fueron colocadas en las posiciones (12, 14, 10), (12, 14, 18), (16, 10, 12) y (16, 14, 16) del espacio de reconstrucción. Para estimar la posición de estas fuentes fueron utilizados 40 micrófonos para adquirir la señal. Los micrófonos fueron colocados sobre las superficies, que representan a la parte frontal y posterior del tórax de tal forma que quedaron igualmente espaciados en arreglos rectangulares de 4x5.

Se observa en la figura 18 que el mejor estimado lo proporciona el FOCUSS básico, aunque resuelve bien para la posición y el número de fuentes, se puede ver que la intensidad de algunas fuentes es menor que la intensidad de las fuentes sintetizadas. En cuanto al FOCUSS acumulado, este no llega a converger a las fuentes sintetizadas, dado que la solución presenta valores negativos cerca de la posición de las fuentes sintetizadas, y por ello se observa una tonalidad roja en todo el espacio de reconstrucción, de menor intensidad que en algunos sitios donde las fuentes sintetizadas se localizan.

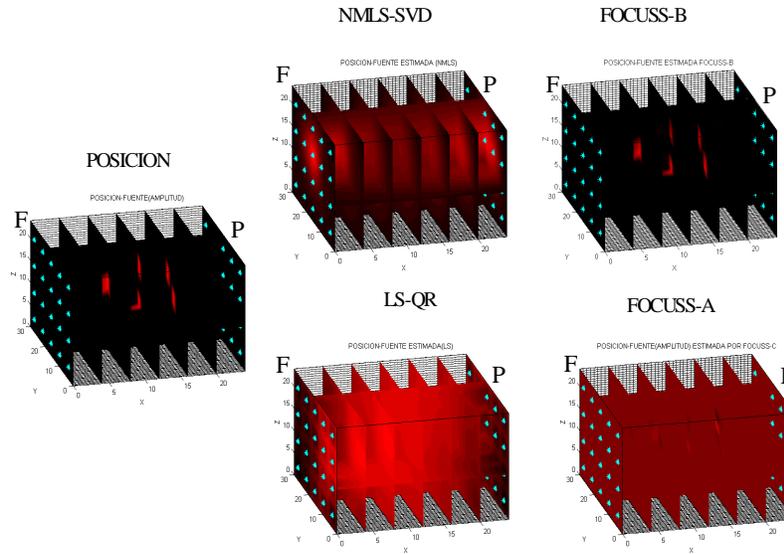


Figura 18.

El estimado proporcionado por el método NMLS-SVD, donde inicia el método FOCUSS la reconstrucción de las fuentes, se extiende en una región a lo largo del espacio de reconstrucción y ligeramente por arriba del centro del espacio de forma aproximadamente cilíndrica. La estimación proporcionada por el método NMLS-SVD no distingue el número de fuentes sintetizadas dentro del espacio, resuelve como si se tratará de una sola fuente. El estimado proporcionado por el método de LS-QR se extiende hacia los costados del espacio y hacia los micrófonos en donde se aprecian tonos oscuros, este resultado representa la peor estimación.

4.4.4. Seis Fuentes.

El desempeño de los métodos para fuentes a igual intensidad y que no se encuentran agrupadas se muestra en la figura 19. Las fuentes sintetizadas fueron colocadas en los puntos (8, 12, 14), (12, 14, 18), (16, 12, 12), (8, 18, 10), (12, 10, 14) y (16, 8, 8) del espacio de reconstrucción. La estimación de estas fuentes fue realizada en las mismas condiciones de prueba con las que se estimaron las cinco fuentes de la figura 18.

En la figura 19 se aprecia que la peor estimación de las fuentes la proporciona el método LS-QR generando una región estimada dispersa.

La región donde el método NMLS-SVD estima la fuente no es tan dispersa, el estimado se observa con tonalidades en rojo más intenso hacia el centro del espacio de reconstrucción y a los costados de menor intensidad, en tonalidades oscuras. Este

comportamiento que presenta el estimado por el método NMLS-SVD se extiende desde la superficie frontal hacia la superficie posterior, donde se localizan los micrófonos. En base al estimado por el método NMLS-SVD, las fuentes que logra estimar el método FOCUSS básico no se observan de la misma intensidad que las fuentes sintetizadas sin embargo, la posición estimada es la correcta.

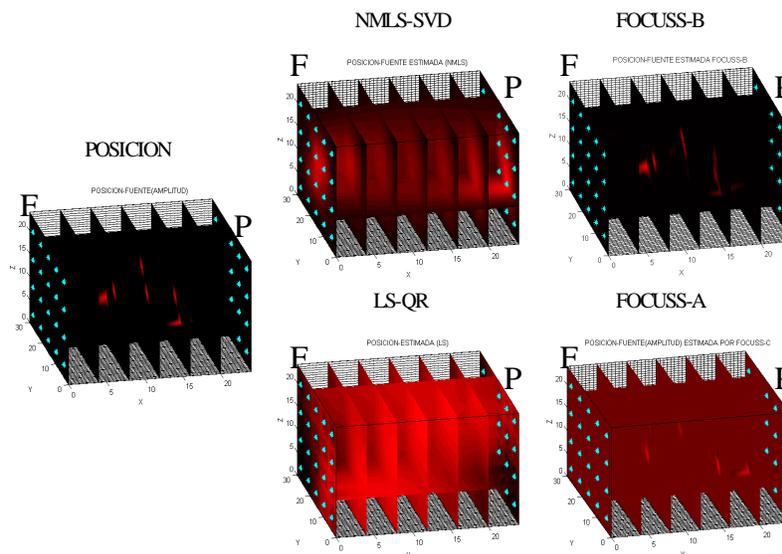


Figura 19.

En cuanto al método FOCUSS acumulado este presenta una solución similar al FOCUSS básico proporcionando intensidades mayores para algunas posiciones de las fuentes sintetizadas, (8, 12, 14), (12, 14, 18) y (16, 8, 8). Sin embargo, también presenta intensidades importantes en posiciones erróneas, como puede observarse en la figura 19, inclusive su estimado presenta valores negativos que se reflejan en la tonalidad en rojo que presenta el espacio. En consecuencia, el estimado dado por el método NMLS-SVD no es suficiente para que el FOCUSS acumulado logre converger a las fuentes sintetizadas.

4.5. Discretización y Número de Micrófonos.

En esta sección se analizará la influencia del número de micrófonos sobre el desempeño de los métodos de estimación así como el efecto que causa el cambio de la discretización del espacio de reconstrucción. La modificación de estas dos variables permitirá definir el número adecuado de micrófonos para las dimensiones del espacio y la relación que guarda con la discretización del espacio.

4.5.1. Caso de Simulación: Variación de la Discretización del Espacio de Reconstrucción.

En la figura 20 se muestran los resultados al variar la discretización de 3 cm a 2 cm manteniendo un número constante de micrófonos, estos se colocaron en arreglos rectangulares de 4x5 micrófonos sobre la superficie frontal y posterior del espacio de reconstrucción. Se utilizaron tres fuentes no puntuales sintéticas en las posiciones (12, 16, 12), (12, 12, 18) y (6, 18, 6).

Se observa en la figura 20 que el estimado por el método de LS-QR para una discretización del espacio de 3 cm presenta regiones de tonalidad ligeramente más oscuras que el estimado utilizando una discretización del espacio de 2 cm. Esta diferencia de tonalidad se aprecia aún más para los estimados proporcionados por el método NML-SVD, esto es, el estimado por el método NML-SVD usando una discretización de 3 cm tiene una tonalidad ligeramente más oscura que el estimado usando una discretización de 2 cm.

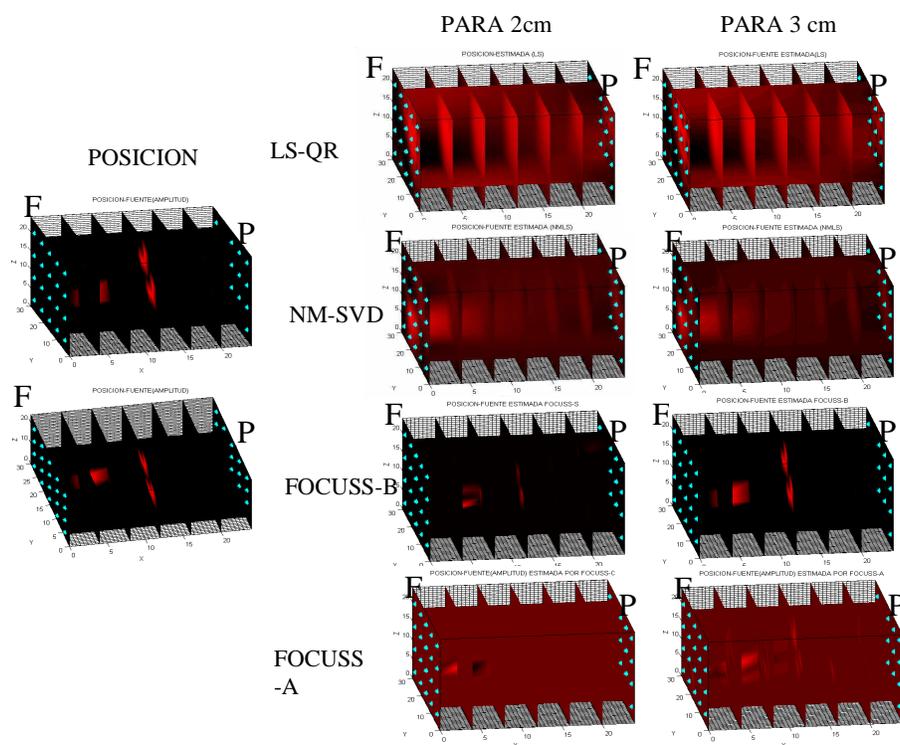


Figura 20.

En el estimado proporcionado por el método FOCUS básico se puede observar que para una discretización de 3 cm las fuentes a las cuales converge representan un mejor estimado que para una discretización de 2 cm. Esto es, el método define mejor a las fuentes sintetizadas, observándose que, para ambos casos de discretización, ubican bien las

posiciones de las fuentes sintetizadas pero en cuanto a la intensidad de las fuentes, la estimación es mucho mejor para una discretización de 3 cm. En el caso del estimado proporcionado por el método FOCUSS acumulado se observa que, para ambos casos de discretización, no logra converger a un estimado que represente adecuadamente a las fuentes sintetizadas pero se observa que proporciona un mejor estimado para una discretización de 3 cm. La tonalidad roja que se observa en todo el espacio de reconstrucción, en ambos casos de discretización, se debe a que el estimado proporcionado por el método FOCUSS acumulado presenta valores negativos.

4.5.2. Caso de Simulación: Variación del Número de Micrófonos.

En la figura 21, en la esquina superior izquierda se observan tres fuentes no puntuales colocadas en las posiciones (12, 10, 14), (12, 14, 18) y (8, 12, 14). En la figura 21 también se presentan a las fuentes sintetizadas desde diferentes ángulos de observación. Para cada número de micrófonos utilizados en cada estimación se mantuvo siempre la misma discretización y dimensión del espacio de reconstrucción.

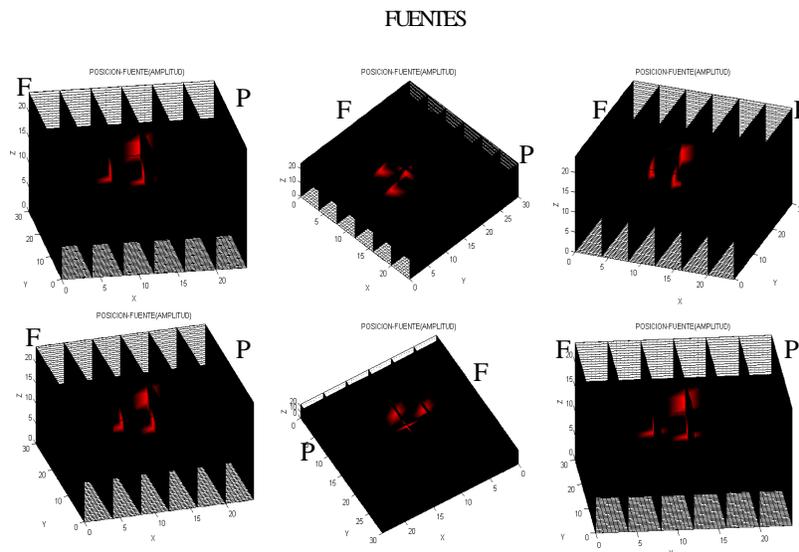


Figura 21.

Para el método LS-QR se observa en las figuras 22 y 23 que a partir de los 36 micrófonos hasta los 60 micrófonos la región estimada donde se ubica la fuente no disminuye significativamente de manera tal que logre un estimado de la fuente aceptable con respecto al estimado obtenido utilizando 16 micrófonos. En cuanto al método NMLS-SVD se logra percibir en la figura 23 la diferencia entre el estimado de las fuentes

utilizando cada vez más micrófonos. Se observa tanto en la figura 22, como en la figura 23, que se incrementan las regiones con tonalidades en negro al incrementar el número de micrófonos, reduciéndose la región de tonos en color rojo cercana a las posiciones de las fuentes sintetizadas. Las fuentes estimadas por el método FOCUSS básico reflejan de manera bastante aceptable a las fuentes reales respecto a la posición e intensidad para un número de micrófonos igual a 24 colocados en arreglos rectangulares de 3x4 sobre las superficies frontal y posterior del espacio de reconstrucción.

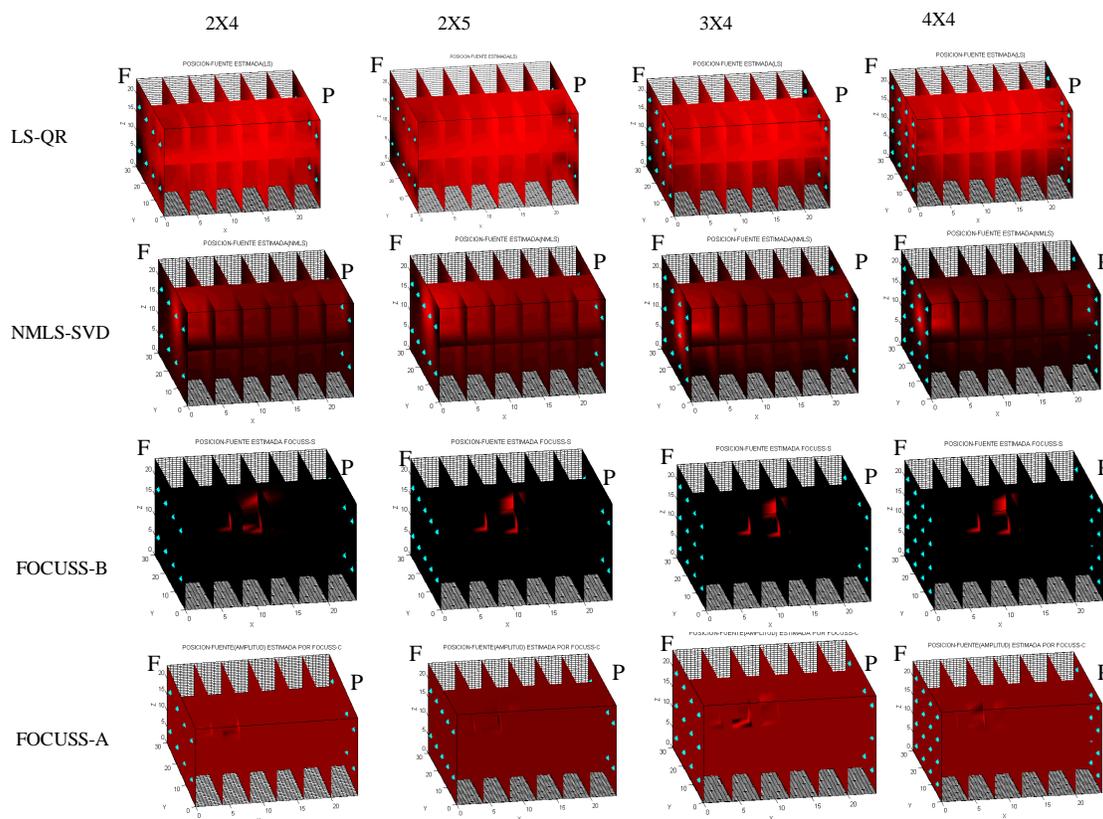


Figura 22.

También en la figura 22 se observa que el estimado por el método FOCUSS básico utilizando 16 micrófonos no define adecuadamente cada una de las fuentes pero si proporciona una ubicación de las fuentes sintetizadas bastante aceptable. Sin embargo, el estimado por el método FOCUSS acumulado proporciona una idea errónea de las posiciones de las fuentes sintetizadas. Con el incremento del número de micrófonos, de 16 a 32 micrófonos, el método FOCUSS básico logra una mejor resolución de las fuentes y el método FOCUSS acumulado alcanza a definir una posición más cercana a las fuentes sintetizadas.

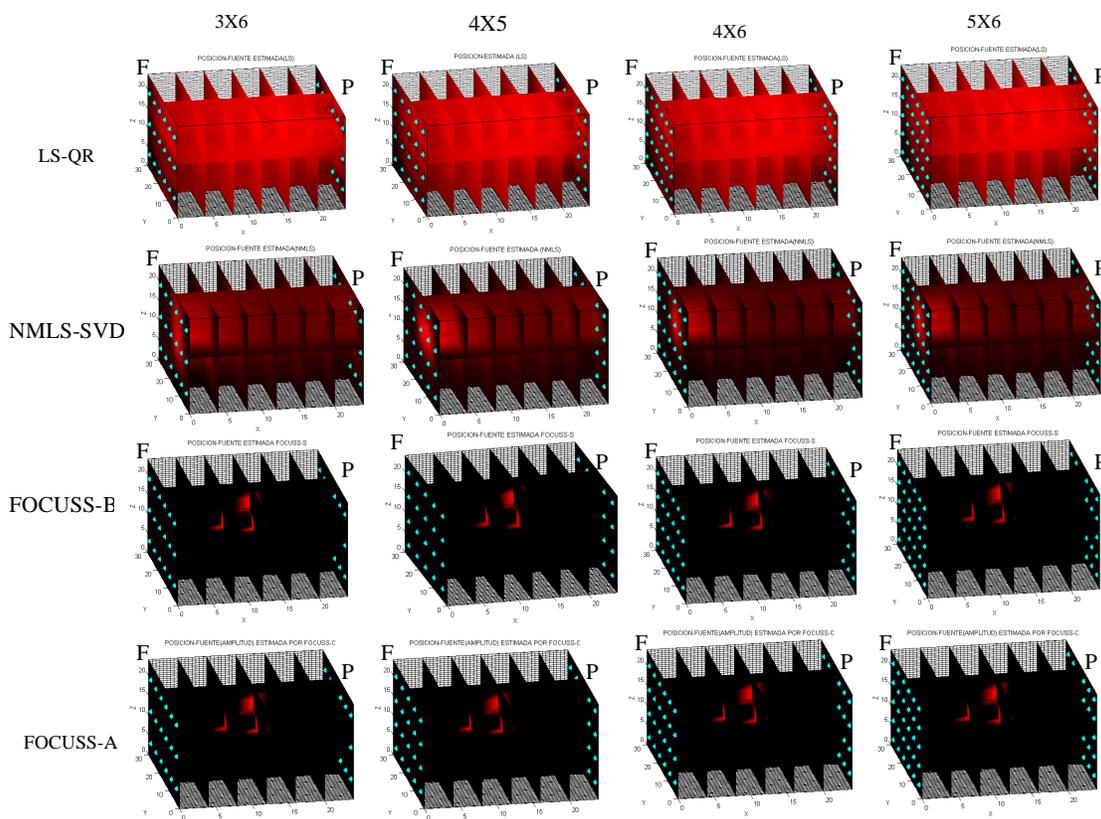


Figura 23.

En cuanto a los resultados obtenidos por el FOCUSS en ambas versiones, a partir de 36 micrófonos se estiman de manera óptima a las fuentes sintetizadas, como puede observarse en la figura 23.

4.6. Caso de Simulación: Fuentes No Puntuales Múltiples a Igual y Diferente Intensidad.

4.6.1. Igual Intensidad.

En estas simulaciones se incremento el tamaño de las fuentes sintetizadas y se analizó el desempeño de los métodos a igual y diferente intensidad de las fuentes. La figura 24 presenta la estimación de dos fuentes, cada una compuesta de 8 puntos del espacio discretizado, ambas a igual intensidad. Las fuentes tienen una posición que es referida a los puntos (8, 12, 14) y (12, 14, 18) dentro del espacio de reconstrucción. En la figura únicamente se presentaron los métodos NMLS-SVD y FOCUSS, en su versión básica y acumulada, para los cuales se usaron 40 micrófonos colocados en dos arreglos de 4x5 sobre dos superficies del espacio, parte frontal y posterior. La anterior selección se debe al pobre

desempeño del método LS-QR. Se observa que de estos tres métodos el que mejor resuelve, en forma, ubicación e intensidad, para estas fuentes es el FOCUSS básico. Aunque el FOCUSS acumulado no converge a una solución que refleje de manera adecuada a las dos fuentes sintéticas si proporciona una idea de donde se localizan estas fuentes. Se observa como en algunos casos de simulación anteriores una tonalidad roja en todo el espacio de reconstrucción debido a que la solución que proporciona presenta valores negativos de magnitud significativa, y que se encuentran suficientemente cercanos a las posiciones de las fuentes sintéticas.

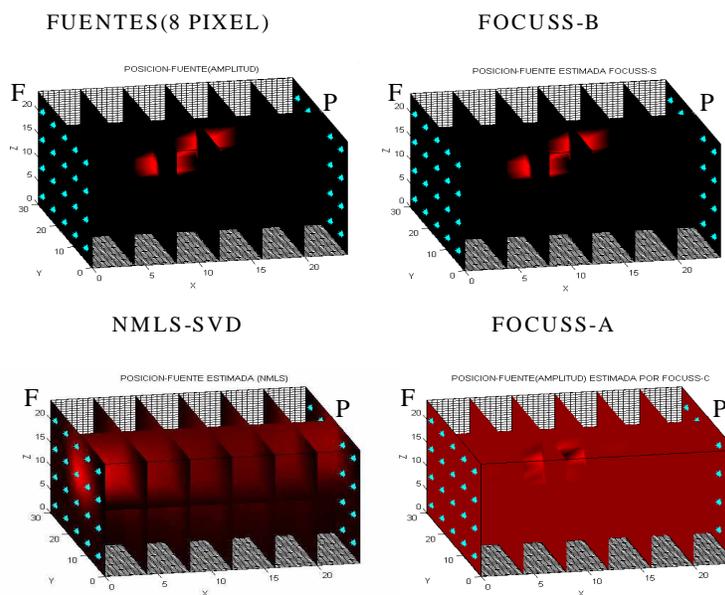


Figura 24.

La figura 25 muestra a tres fuentes, compuestas cada una de 5 puntos del espacio discretizado, a igual intensidad. Estas fuentes se colocaron en las posiciones referidas a los puntos (12, 10, 14), (12, 14, 18) y (8, 12, 14) del espacio de reconstrucción. La estimación de las fuentes se realizó bajo las mismas condiciones de prueba que para estimar las dos fuentes mostradas en la figura 24.

Para este tipo de fuentes se observa que el estimado por el método FOCUSS acumulado no logra converger a las fuentes sintetizadas con este número de micrófonos mientras que el método FOCUSS básico si logra resolver las fuentes de manera adecuada, incluso logra diferenciar a las tres fuentes de manera óptima. Esto es, el método FOCUSS básico sigue siendo el mejor método, de los utilizados bajo estas condiciones de prueba para localizar a las fuentes sintéticas.

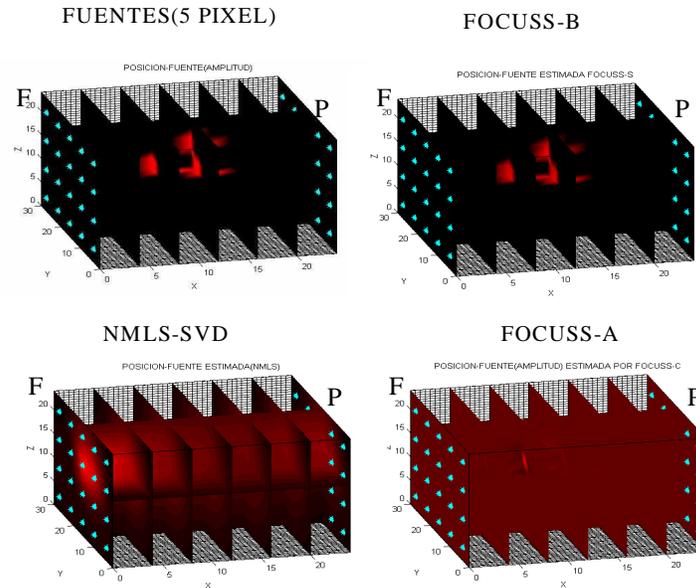


Figura 25.

La siguiente simulación pretende analizar el caso de estimar a dos fuentes, cada una compuesta de 13 puntos del espacio discretizado, a igual intensidad y colocadas al centro del espacio de reconstrucción, es decir a la máxima profundidad. Estas fuentes fueron colocadas en las posiciones referidas por los puntos (12, 8, 14) y (12, 22, 12) y se encuentran sobre un plano paralelo a las superficies de los micrófonos. Su estimación se realizó usando 40 micrófonos colocados en la superficie frontal y posterior del espacio de reconstrucción en arreglos de 4x5.

Por la forma que se observa el estimado proporcionado por el método NMLS-SVD, figura 26, sobre las superficies donde se colocaron los micrófonos se podría decir que se trata de dos fuentes. Sin embargo, la solución que nos proporcionan ambas versiones del método FOCUSS no estima la forma y ni la posición de las fuentes sintetizadas. Esto es, no logran converger a un estimado adecuado. Es decir, bajo las mismas condiciones con las que hasta ahora se estimaron las fuentes no se logra resolver para este tipo de fuentes a la máxima profundidad del espacio de reconstrucción. Sin embargo, el estimado proporcionado por el FOCUSS básico indica que se trata de fuentes profundas.

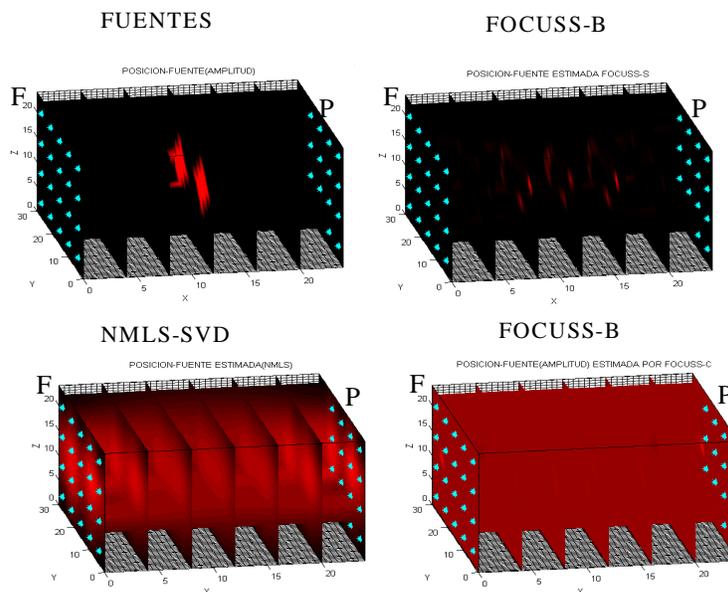


Figura 26.

En la figura 27 se observa cinco fuentes, compuestas cada una de 3 puntos del espacio discretizado, a una misma intensidad y colocadas dentro del espacio de reconstrucción en referencia a los puntos $(8, 8, 12)$, $(14, 10, 12)$, $(10, 14, 12)$, $(12, 12, 14)$ y $(16, 16, 14)$. Su estimación se realizó bajo las mismas condiciones de simulación que para las fuentes anteriores mostradas en las figuras 24, 25 y 26.

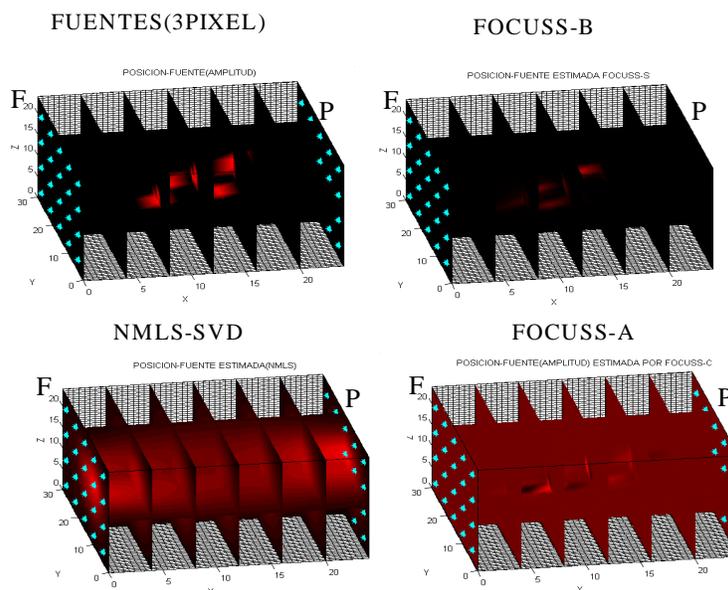


Figura 27.

Se observa en la figura 27 que el FOCUSS básico proporciona el mejor estimado de las fuentes, resolviendo adecuadamente para la posición de algunas de las fuentes, no así

para la intensidad. Respecto al FOCUSS acumulado, aunque no converge a una solución adecuada, proporciona la idea de la posición de las fuentes sintetizadas. El FOCUSS acumulado bajo estas mismas condiciones sigue aún presentando valores negativos en su solución como consecuencia de ésto se presenta una tonalidad roja en todo el espacio de reconstrucción.

4.6.2. Diferente Intensidad.

La figura 28 muestra a dos fuentes con diferente intensidad compuestas cada una de 8 puntos del espacio discretizado. Las fuentes fueron colocadas en las posiciones referidas a los puntos (8, 12, 14) y (12, 14, 18) del espacio de reconstrucción.

En la figura se puede observar que el método NMLS-SVD proporciona una región de estimación que se extiende de extremo a extremo del espacio de reconstrucción y a la altura de las posiciones de las fuentes sintetizadas. Esta estimación de las fuentes proporcionada por el método NMLS-SVD es suficiente para que el FOCUSS básico logre la convergencia a las fuentes sintetizadas resolviendo bastante bien su forma e intensidad y ubicándolas de manera óptima. No sucede así para el estimado proporcionado por el método FOCUSS acumulado, este resuelve para fuentes en una ubicación próxima a la posición real de las fuentes sintetizadas.

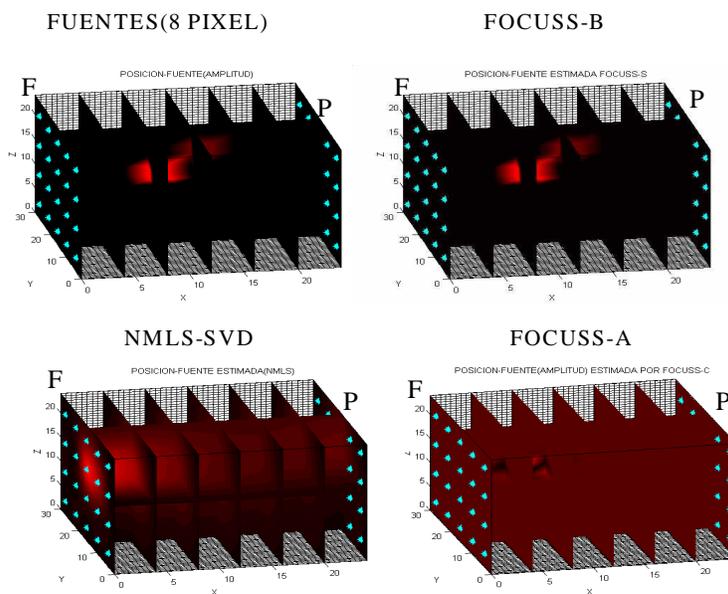


Figura 28.

La figura 29 muestra al desempeño del FOCUSS para tres fuentes no puntuales a diferente intensidad y compuestas cada una de 5 puntos del espacio discretizado. Las tres fuentes fueron colocadas en las posiciones referidas a los puntos (12, 10, 14), (12, 14, 18), (8, 12, 14) del espacio de reconstrucción. La estimación de las fuentes se realizó bajo las mismas condiciones de simulación de las secciones anteriores.

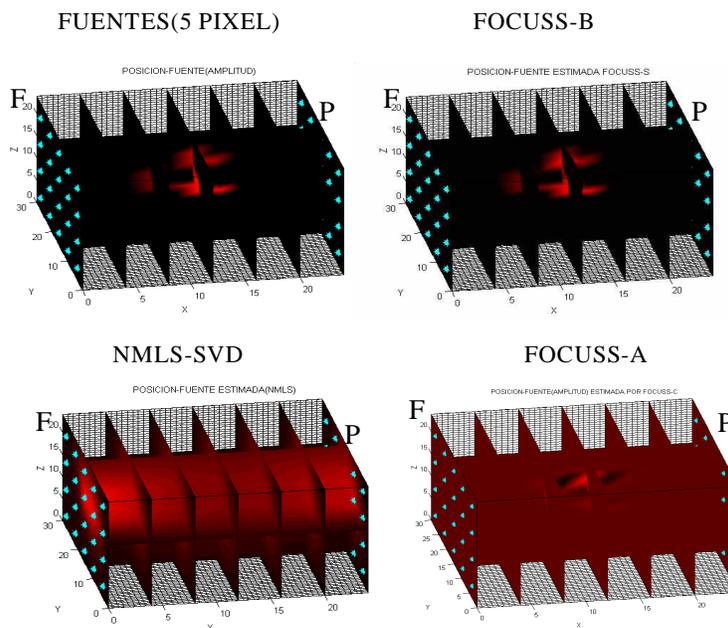


Figura 29.

En la figura 29 se puede observar que el FOCUSS en su versión básica proporciona una estimación óptima de las fuentes sintetizadas, resolviendo bien para las tres fuentes con respecto a su ubicación y a su intensidad.

Puede observarse que en el estimado proporcionado por el método NMLS-SVD no se distinguen las diferentes fuentes sintéticas sin embargo, la estimación es suficiente para que el método FOCUSS básico logre la convergencia a las fuentes sintetizadas. No sucede así con el método FOCUSS acumulado, que proporciona un estimado con componentes negativos, como puede observarse en la figura 29. Sin embargo, el estimado del método FOCUSS acumulado proporciona una idea de donde se encuentran las fuentes sin distinguir adecuadamente su forma y número.

La figura 30 muestra los resultados obtenidos por los métodos NMLS-SVD y FOCUSS en sus dos versiones. Estos métodos son usados para estimar cinco fuentes compuestas cada una de tres puntos del espacio discretizado que simulan a una fuente de

sonido respiratorio multicéntrica. La posición de las fuentes se encuentra referida a los puntos (8, 8, 12), (14, 10, 12), (10, 14, 12), (12, 12, 14) y (16, 16, 14). También se puede observar en la figura que las fuentes presentan diferente intensidad.

El estimado proporcionado por el método NMLS-SVD se puede interpretar como una única fuente que colocada al centro del espacio de reconstrucción, esto es, no se logra diferenciar a las fuentes sintetizadas. Sin embargo, el método FOCUSS utiliza este estimado para converger de manera óptima a las fuentes sintetizadas, en posición, intensidad y número. En comparación, el método FOCUSS acumulado no logra converger a las fuentes sintetizadas, presentado en su estimado valores negativos. Sin embargo, si proporciona la idea de que se trata de una fuente multicéntrica al observarse pequeñas regiones de tonalidad rojo intenso cercanas a la posición de las fuentes sintetizadas.

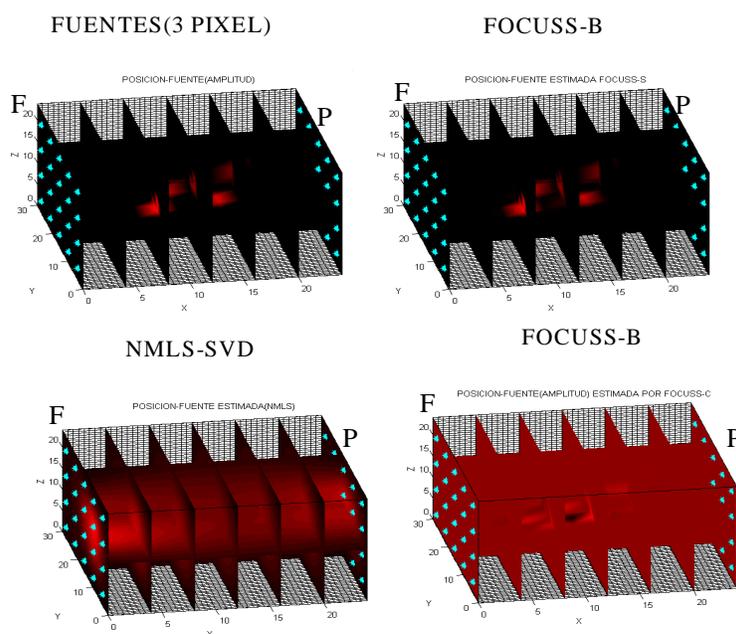


Figura 30.

En la figura 31 se muestran dos fuentes no puntuales, cada una compuesta de 7 puntos del espacio discretizado, a diferente intensidad y colocadas al centro del espacio de reconstrucción, referidas a los puntos (12, 8, 14) y (12, 22, 12).

Se observa que el estimado que se genera con el método NMLS-SVD proporciona una idea de que se trata de dos fuentes, una de mayor intensidad que la otra que es poco distinguible sobre las superficies frontal y posterior del espacio de reconstrucción.

Puede observarse que el estimado proporcionado por el método FOCUSS, bajo estas condiciones, en ambas versiones no converge a las fuentes sintetizadas o a un estimado aceptable que las refleje. Sin embargo, se observa en el estimado que proporciona el método FOCUSS básico presenta una región de mayor intensidad cercana a la posición verdadera de las fuentes sintetizadas.

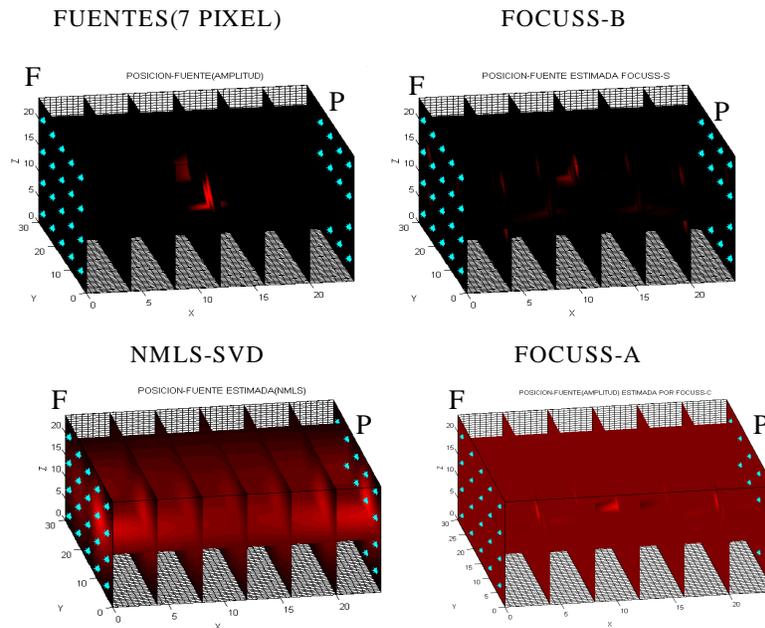


Figura 31.

4.7. Caso de Simulación: Simulaciones con Ruido.

En la figura 32 se observa a una fuente multicéntrica compuesta de cinco fuentes a igual intensidad. Las fuentes se encuentran dentro del espacio de reconstrucción en las posiciones $(12, 12, 12)$, $(8, 8, 12)$, $(14, 10, 12)$, $(10, 14, 12)$ y $(16, 16, 12)$. Usando a estas fuentes sintetizadas se verificó el desempeño del FOCUSS básico usando 40 micrófonos colocados en dos arreglos rectangulares sobre las superficies frontal y posterior del espacio de reconstrucción a una discretización de 2 cm. También se incluyó en la simulación que la información que se generan en cada uno de los micrófonos se encuentra contaminada con ruido blanco aleatorio para diferentes razones señal a ruido: 107.89 dB, 96.82 dB, 80.94 dB y 73.45 dB.

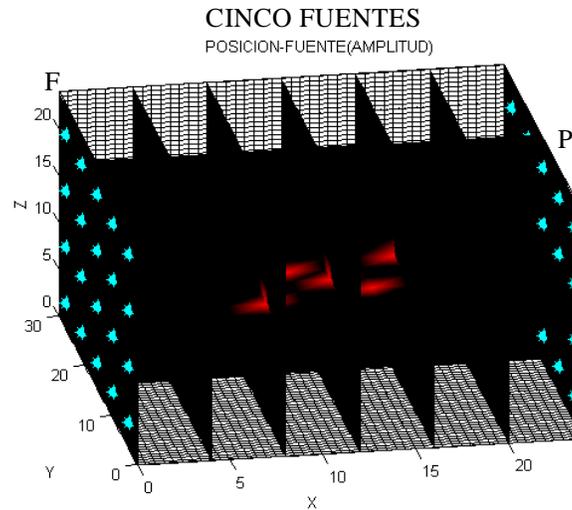


Figura 32.

Para este tipo de fuentes y una señal contaminada con ruido a una SNR igual 73.45 dB se observa en la figura 33 que el FOCUSS básico no logra converger a las fuentes sintetizadas. Sin embargo, el estimado proporcionado por este método no muestra región alguna de intensidad importante en las superficies del espacio de reconstrucción pero si una cercana a una de las fuentes, que se encuentra más cercana a la superficie frontal del espacio de reconstrucción.

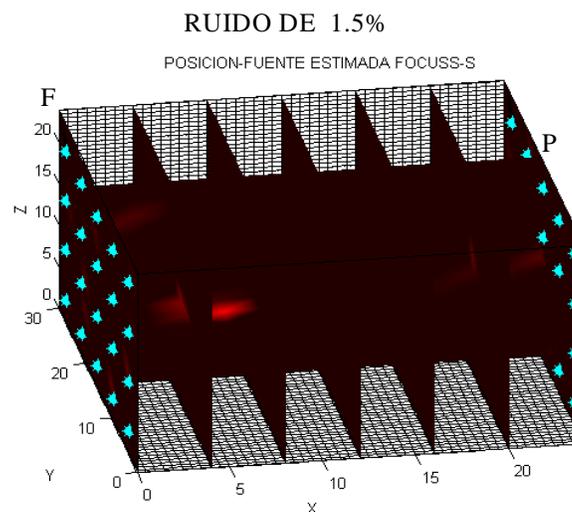


Figura 33.

Para una razón señal a ruido de 80.94 dB se observa que el estimado al cual converge el método FOCUSS básico tiene una ubicación dentro del espacio de reconstrucción en las cercanías de las posiciones de las fuentes sintetizadas. Se observan a

tres regiones de intensidades importantes cercanas a las posiciones de las fuentes sintetizadas, localizándose el estimado al centro del espacio con un ligero sesgo hacia la superficie posterior.

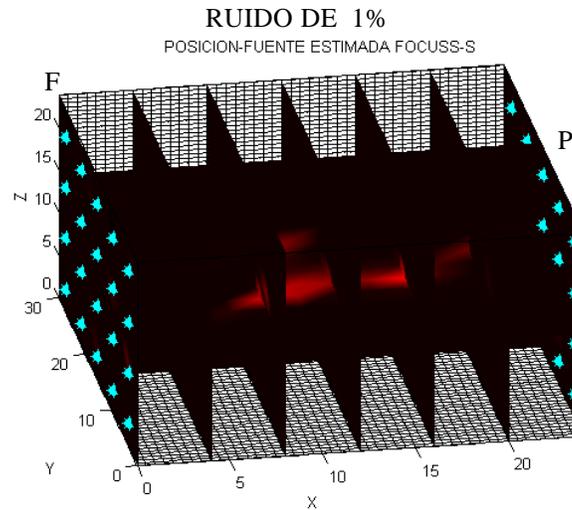


Figura 34.

Para el caso de una razón señal a ruido de 96.82 dB se observa en la figura 35 que el estimado proporcionado por el FOCUSS básico se compone de dos regiones. Cada una de las regiones se encuentra cercana a una de las posiciones de las fuentes sintetizadas más cercanas a las superficies frontal y posterior del espacio. Se observa que con respecto a una SNR de 80.94 dB el desempeño del método FOCUSS es mejor en el sentido de la posición de las fuentes sintetizadas.

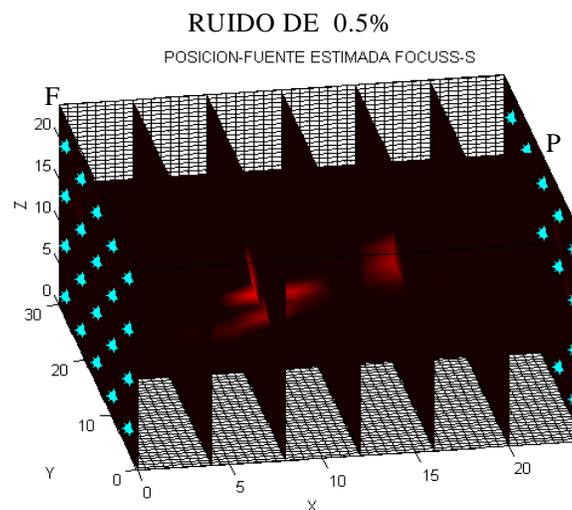


Figura 35.

En el caso de una razón señal a ruido de 107.89 dB se observa en la figura 36 que el FOCUSS básico no logra converger a las fuentes sintetizadas. Sin embargo, el estimado proporcionado por el FOCUSS básico muestra una región de intensidad importante en las cercanías de las posiciones de las fuentes sintetizadas y una región de menor intensidad hacia el centro del espacio de reconstrucción donde se colocaron las fuentes sintetizadas.

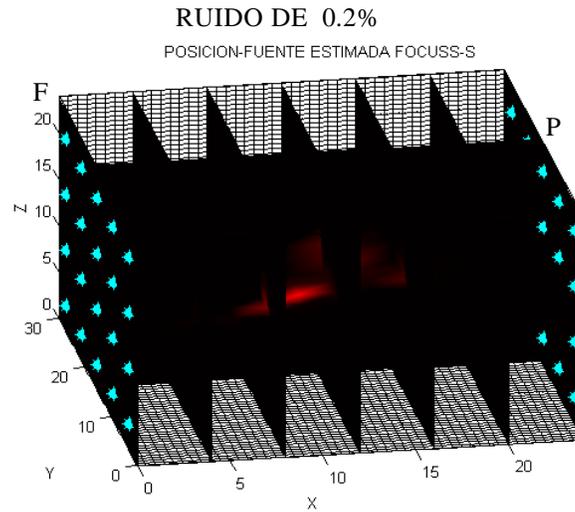


Figura 36.

CAPITULO V.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.

5.1. Discusión y Conclusión.

Con el propósito de explorar el problema inverso en la localización de fuentes del sonido respiratorio, en este trabajo se uso una computadora pentium 4 a una velocidad de 1.8 GHz y una memoria RAM de 256 MB para evaluar el desempeño de algunos métodos de la teoría inversa discreta seleccionados a partir de una revisión bibliográfica y que se basan en el método de mínimos cuadrados. Los métodos permiten estimar fuentes sonoras a partir del registro simultáneo de señales acústicas sobre la superficie torácica, originadas a partir de una o más fuentes. La evaluación de los métodos se realizó mediante la simulación en MATLAB de diferentes fuentes sonoras ubicadas dentro de un espacio tridimensional que representa al tórax, asumiendo un modelo de propagación uniforme del sonido en un medio homogéneo compuesto de burbujas de aire en líquido.

En otras áreas de la medicina el problema inverso no es una línea de investigación reciente. Uno de los grandes retos es mejorar el desempeño de los métodos utilizados para ubicar las fuentes [15]. Se han generado métodos que tratan de eliminar la ambigüedad e incertidumbres debidas al modelo así como la no unicidad de la solución para modelos lineales. Los métodos que se están evaluando en esta tesis son métodos que se han utilizado para localizar fuentes en otras áreas de la medicina, como en neuroimagen y magnetoencefalografía, donde el espacio de reconstrucción es más pequeño que el espacio de reconstrucción que se utilizó para ubicar las fuentes del sonido respiratorio. De estas investigaciones han surgido conclusiones acerca de los aspectos que afectan la resolución espacial de las fuentes estimadas en condiciones libres de ruido como: el intervalo de muestreo, la profundidad de la fuente, el número de sensores así como su posición y el tamaño de la rejilla de la superficie imagen (tamaño del espacio y discretización) [16, 17].

En términos de las conclusiones de investigaciones en otras áreas, y dado que el problema inverso es reciente en el campo de los sonidos respiratorios, las simulaciones realizadas en el capítulo IV se enfocaron a analizar el desempeño de los métodos seleccionados en relación a: a) tipo de fuentes, b) profundidad de las fuentes, c) número de fuentes, d)

intensidad de las fuentes, e) discretización del espacio de reconstrucción, f) número de micrófonos y g) influencia de ruido aditivo en la estimación.

Es importante mencionar que las investigaciones, de tipo experimental principalmente, en el campo de los sonidos respiratorios indican que el sonido inspiratorio y espiratorio provienen de fuentes multicéntricas pero el sonido espiratorio incluye elementos más centrales. Algunas investigaciones sugieren que la fuente principal del sonido inspiratorio posiblemente sea más periférica que el tallo bronquial principal, y que posiblemente se produce principalmente en grandes vías aéreas como resultado de turbulencias. En cuanto al sonido espiratorio, se indica que puede producirse de manera similar pero incluyendo al tallo bronquial principal y la tráquea, es decir, vías aéreas superiores donde convergen corrientes rápidas de aire. Por lo tanto, en base a las evidencias experimentales acerca del origen del sonido respiratorio las condiciones de simulación propuestas en el capítulo IV para las fuentes sintetizadas también reflejan condiciones relacionadas a la extensión de las mismas.

Los resultados para los diferentes tipos de fuentes utilizadas en las simulaciones realizadas, utilizando 40 micrófonos y con una discretización del espacio de reconstrucción de 2 cm, son afectados por la forma de la fuente o fuentes a estimar. Para las diferentes fuentes que se propusieron en este trabajo se puede apreciar que tanto para una fuente puntual como para dos y tres fuentes no puntuales libres de ruido la región de estimación proporcionada por el método de mínimos cuadrados es más extensa que la región proporcionada por los métodos de norma mínima. El método FOCUSS no tiene problemas para estimar a las fuentes en intensidad, extensión y posición.

Cuando se modificó la forma de la fuente y se trabajó con un cúmulo de fuentes puntuales cercanas entre sí, y colocadas a la máxima profundidad, el método de norma mínima así como el de mínimos cuadrados generan una región de estimación muy extensa. En contraste, el método FOCUSS en la versión básica genera un estimado muy próximo a las fuentes sintetizadas pero sin una estimación óptima en intensidad y número. Mientras el método FOCUSS acumulado converge a una solución que proporciona una idea de la posición del cúmulo de fuentes, resolviendo erróneamente para la intensidad y número de fuentes.

En el resultado obtenido con cinco fuentes en los alrededores del centro del espacio de reconstrucción, que podrían simular a una fuente multicéntrica, se observó que los métodos de NMLS presentan una región de estimación muy similar a la región estimada para una fuente puntual, es decir, proporciona una región de estimación que se extiende de la superficie frontal a la superficie posterior del espacio de reconstrucción. Mientras, el método FOCUSS básico genera un estimado de las fuentes sintetizadas aceptable en posición, extensión e intensidad; no sucede así con el FOCUSS acumulado, cuya solución únicamente proporciona una idea de la posición de las fuentes sintetizadas. Sucede algo interesante al separar ligeramente a estas fuentes esto es al colocar más valores de intensidad cero entre ellas cuyo término apropiado sería hacerla más localizadas [32]. El método FOCUSS, en ambas versiones, converge a las fuentes sintetizadas.

En la figura 13 la separación entre cada cúmulo no es significativa y las fuentes así colocadas se pueden considerar como una fuente extendida. Para este tipo de fuentes el método FOCUSS no converge a las fuentes sintetizadas generando un estimado inadecuado. Sin embargo, cuando ambos cúmulos son separados una cierta distancia, que pudieran considerarse ambos cúmulos como dos fuentes, el estimado proporcionado por el método FOCUSS básico converge a una solución cuya posición, intensidad y número son cercanos a las fuentes sintetizadas, pero sin resolver adecuadamente cada una de las fuentes. Por otro lado, que el estimado por el método FOCUSS acumulado converge a una solución que genera una región de estimación cercana a la posición de uno de los cúmulos. Al incrementar el número de cúmulos (tres), figura 15, con una separación significativa entre uno y otro cúmulo de fuentes puntuales, el método FOCUSS básico proporciona una idea de la posición de los cúmulos de fuentes pero proporciona una pobre resolución en intensidad y número de fuentes.

También un incremento en la extensión de las fuentes, región del espacio de reconstrucción ocupada por las fuentes, afecta en cierta medida al estimado proporcionado por el método FOCUSS como se puede observar en las figuras 18 y 19 dado que se subestiman las posiciones e intensidades de las fuentes sintetizadas. Para este tipo de fuentes se hace más difícil su localización porque se enfatizan dos factores: uno, la extensión de las fuentes, dos, fuentes con escasa separación entre ellas. Esto es, la extensión de la fuente o las

fuentes es un factor que afecta los resultados y puede apreciarse aún más en los resultados mostrados en las figuras 26 y 27.

Se puede observar en las simulaciones realizadas en el capítulo IV que para una fuente puntual colocada a la máxima profundidad la región estimada por los métodos de mínimos cuadrados y de norma mínima es bastante extensa. También, se observó que, utilizando 16 micrófonos, para una fuente puntual ubicada a la máxima profundidad el método FOCUSS no converge a la fuente sintetizada. Sin embargo, la región estimada por los métodos de mínimos cuadrados y de norma mínima tiene una menor extensión para una fuente colocada cerca de las superficies de los micrófonos y el método FOCUSS, en ambas versiones, converge de manera óptima a la fuente puntual. Las diferentes simulaciones para una fuente puntual libre de ruido muestran que la estimación de la fuente sintetizada depende de su profundidad.

Esta influencia que tiene la profundidad de las fuentes en el estimado proporcionado por los métodos se hace más evidente en los resultados mostrados por las figuras 9 y 10 para un cúmulo de fuentes puntuales. La región estimada por el método de norma mínima es menor para una fuente que se encuentra cercana a los micrófonos que para una fuente que se encuentra en el centro del espacio de reconstrucción. El estimado proporcionado por el método FOCUSS, en ambas versiones, resuelve de manera óptima en extensión, intensidad y posición para las fuentes colocadas cerca de los micrófonos que para las fuentes colocadas al centro del espacio. Sin embargo, el FOCUSS básico proporciona una idea bastante buena del tipo de fuentes cuando estas se encuentran a la máxima profundidad. Otro ejemplo de la influencia de la profundidad de las fuentes en la estimación se presenta en la figura 13, que muestra una estimación errónea de las fuentes en comparación con los resultados obtenidos al mover uno de los cúmulos hacia una de las superficies de los micrófonos, figura 14. También se observa que el método FOCUSS básico genera el estimado más aceptable respecto de las posiciones de los cúmulos de las fuentes sintetizadas.

El número de fuentes se varió desde una hasta cinco fuentes, para las cuales el método FOCUSS básico en algunos casos logró la convergencia de manera óptima a las fuentes sintetizadas; no sucede lo mismo para el método FOCUSS acumulado ya que en algunos casos de cinco fuentes no puntuales no se logra la convergencia. Con el incremento del

número de fuentes libres de ruido colocadas sobre una región más extensa del espacio de reconstrucción el método FOCUSS posiblemente requiere de más información (un número mayor de micrófonos) para converger de manera óptima a las fuentes sintetizadas. En las simulaciones se subestiman las intensidades y el número de las fuentes haciéndose más notorio esto en el caso de seis fuentes, figura 19, y para fuentes agrupadas en cúmulos, figuras 14 y 15. La localización de estas fuentes se hace más difícil porque se combinan tres aspectos: uno, las fuentes se distribuyen en una región más extensa; dos, se presentan fuentes múltiples, con escasa separación entre ellas; tres, algunas fuentes se encuentran a la máxima profundidad. Sin embargo, en todos los casos el FOCUSS básico proporciona una idea del tipo de fuentes y su posición.

El método FOCUSS básico presenta en su estimado una mejoría en la resolución de las fuentes (cinco fuentes) a diferentes intensidades que cuando las fuentes se estimaron a una misma intensidad, figuras 27 y 30. Nuevamente se obtiene una subestimación del método FOCUSS en cuanto a la posición e intensidad de las fuentes al combinar aspectos como profundidad, extensión y a una escasa separación entre ellas, figura 32.

Las diferentes simulaciones para fuentes libres de ruido muestran que la estimación de las fuentes sintetizadas depende de la profundidad de las fuentes y del número de micrófonos que se utilizan para estimar a la fuente. Respecto a la dependencia del número de micrófonos esta se hace más notoria en los estimados proporcionados por los métodos de NMLS y FOCUSS porque al incrementar el número, de 16 a 40, micrófonos la estimación mejora apreciándose una reducción en la región estimada proporcionada por los métodos NMLS. El método FOCUSS logra una estimación adecuada, en posición, intensidad y extensión de la fuente con un incremento en el número de micrófonos consiguiendo eliminar la influencia de la profundidad de la fuente, figura 5 y 8. Por consiguiente, es posible mejorar la resolución de las fuentes en intensidad, posición, número y extensión al incrementar la densidad de los micrófonos sobre las superficies frontal y posterior del espacio de reconstrucción, figura 22.

Con respecto a la no unicidad en la solución esta se elimina introduciendo la condición de norma mínima. Esta condición de norma mínima empleada por el método de mínimos cuadrados genera una aproximación robusta que requiere un número importante de sensores [17]. Aun y cuando la solución por norma mínima representa una solución única, una

solución de entre un conjunto de soluciones factibles, ésta provee una región de estimación bastante extensa. Este hecho se aprecia aún mejor en los resultados obtenidos para tres fuentes no puntuales cuando el número de micrófonos se varía desde 16 hasta 60 micrófonos. A partir de los 36 micrófonos la estimación de las fuentes proporcionada por el método FOCUSS, en ambas versiones, es aceptable y el método de norma mínima presenta una reducción significativa en la región estimada, figura 22.

En un análisis del número de sensores contra la calidad de la imagen realizado en [17] se indica que se puede reducir el número de sensores con una reducción de detalle en la imagen. Lo anterior concuerda con los resultados presentados en el capítulo IV al mantener constante la discretización, 2 cm, y al variar el número de micrófonos. La observación es en sentido contrario cuando se mantiene constante el número de micrófonos, 40, y se modifica la discretización de 3 cm a 2cm. La resolución de las fuentes, tanto en número como en intensidad, mejora con el incremento de los micrófonos, figuras 22 y 23. Mientras que la resolución de las fuentes estimadas empeoró cuando se utilizó una discretización de 2 cm del espacio con respecto a la resolución de las fuentes al utilizar una discretización de 3 cm, figura 20. Esto es, los métodos proporcionan una mejor resolución de las fuentes estimadas para una discretización de 3 cm.

Por lo tanto, la falta de resolución en la fuente estimada que presenta el método FOCUSS puede mejorarse con el incremento del número de micrófonos o reduciendo detalle en la imagen, con una discretización del espacio más gruesa.

En las tablas 3 y 4 contienen un resumen del desempeño de los métodos para los distintos tipos de fuentes y las diferentes variables que afectan el desempeño de los métodos utilizados en este trabajo. Puede observarse que el método que ha tenido un mejor desempeño en estimar a las fuentes libres de ruido es el FOCUSS en su versión básica.

La simulación de señal con ruido es de interés porque las señales acústicas respiratorias podrían estar contaminadas. En los resultados correspondientes, para diferente razón señal a ruido, el estimado por el método FOCUSS básico proporciona una idea errónea de la intensidad, posición y número de las fuentes sintetizadas a partir de un nivel de ruido. Las fuentes estimadas por el FOCUSS básico se observó se encuentra en las cercanías de las posiciones verdaderas de las fuentes sintetizadas.

Como se ha demostrado en [25,19] el incorporar información temporal no afecta las características que se relacionan a la calidad de la imagen, es muy probable que la mejore, y además no existe un límite en el número de muestras siempre y cuando no se afecte la capacidad de cálculo. En este sentido es necesario incorporar la información temporal para mejorar el desempeño de los métodos en condiciones de ruido.

El método que mejor desempeño presentó en las simulaciones propuestas fue el método FOCUSS básico que posee las propiedades siguientes: a) depende de un estimado de baja resolución como el método de norma mínima, que elimina la no unicidad en la soluciones, b) usa un modelo directo que asigna una intensidad de sonido a cada punto de la región de reconstrucción, c) no necesita hacer suposiciones acerca del número de fuentes (orden del modelo) o forma de las fuentes, d) resuelve correctamente para fuentes profundas, e) sus soluciones se pueden restringir únicamente a la información generada en los micrófonos, es decir, no requiere de información a priori, f) proporciona soluciones óptimas para fuentes compactas de forma arbitraria. La selección del método FOCUSS para ubicar a las fuentes de sonido respiratorio en esta tesis se debe a que las propiedades que presenta son probablemente las más adecuadas de acuerdo con las evidencias experimentales del origen multicéntrico del sonido respiratorio, es decir, una fuente múltiple profunda. El método FOCUSS se basa en una restricción tipo sparse, como se mencionó en el capítulo III.

Adicionalmente, otra perspectiva inmediata al trabajo desarrollado en esta tesis es el de probar el desempeño del FOCUSS utilizando herramientas de regularización y eliminar así el sesgo que se genera al estimar las fuentes de sonido respiratorio en condiciones de ruido. También, se debe continuar mejorando los modelos que ayuden a resolver el problema directo en esta área de investigación.

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] David Rice & Janet Carol Rice; Central to Peripheral Sound Propagation in Excised Lung; J. Acoust. Soc. Am; 82(4), 1987; 1139 - 1144.
- [2] George R. Wodicka; Kenneth N. Stevens; Howard L. Golub; Ernest G. Cravalho; Daniel C. Shannon.; A Modelo of Acoustic Transmisión in the Respiratory System: IEEE Transaction on Biomedical Engineering; vol 36; No 9, pp. 925 - 933; 1989.
- [3] Martin Kompis; Hans Pasterkamp; Yuns Oh; George R. Wodicka; Distribution of Inspiratory and Expiratory Respiratory Sound intensity on the Surface of the Human Thorax; Proceedings-19th International Conference-IEEE/EMBS, 1997, Chicago; pp. 2047 - 2050.
- [4] Martin Kompis; Hans Pasterkamp; Yuns oh; Yuichi Motai; George R. Wodicka; Spatial Representation of Thoracic Sounds; Proceedings – 20th Annual Int. Conference, 1998, Hong Kong; pp. 1661 - 1664.
- [5] Steve S. Kraman & Owen Austrheim; Comparison of Lung Sound and Transmitted Sound Amplitude in Normal Men. American Review of Respiratory Disease, 1983, 128:451-454.
- [6] David A. Rice; Sound Speed in Pulmonary Parenchyma; J. Appl. Physiol; American Physiological Society; 1983;.54(1); 304-308
- [7] David A. Rice, Transmission of Lung Sounds; Seminars in Respiratory Medicine; 1985; vol. 5, No.3; pp. 166 - 170.
- [8] Steve S. Kraman; Determination of the Site of Production of Respiratory Sounds by Subtraction Phonopneumography; American Review of Respiratory Disease; 1980; vol. 122; pp. 303 - 309.

[9] Steve S. Kraman; Does Laryngeal Noise Contribute to the Vesicular Lung Sound?; American Review of Respiratory Disease, 1981, 124:292-294.

[10] Steve S. Kraman; Vesicular(normal) Lungs Sounds: How are They Made Where do They Come From, and What do They Mean; Seminars in respiratory medicine; vol 6 No 3 (1985); pp. 183 - 191.

[11] Robert d.Throne, Lorraine G. Olson, Terry J. Hrabik, John R. Windle; Generalized Eigensystem Techniques for the Inverse Problem of Electrocardiography Applied to a Realistic Heart-Torso Geometry; IEEE Transactions on Biomedical Engineering; Vol. 44, no. 6, 1997; pp. 447 - 454.

[12] William Menke; Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory; Academic Press. Inc.; 1989.

[13] Edward Hensel; Inverse Theory and Applications for Engineers. Prentice Hall; Englewood Cliffs, New Jersey, 1991

[14] Robert L. Parker; Understanding Inverse Theory; Ann. Rev. Earth Planet Sci.; 1977; 5:35-64.

[15] S. J. Swithenby; Biomagnetism and Biomagnetic Inverse Problem; Phys. Med. Biol., 1987, vol. 32, No. 1, 3 - 4.

[16] Jia-Zhu Wang, Samuel J. Williamson and Lloyd Kaufman; Magnetic Source Images Determined by a Lead-Field Analysis: The Unique Minimum-Norm Least-Squares Estimation; IEEE Transaction on Biomedical Engineering; Vol. 39, No. 7 July 1992; pp. 665 - 675.

[17] Jia-Zhu Wang; Minimum-Norm Least-Squares Estimation: Magnetic Source Images for a Spherical Model Head; IEEE Transaction on Biomedical Engineering; Vol. 40, No. 4, 1993; pp. 387 - 396.

[18] Jia-Zhu Wang; MNLS Inverse Discriminates Between Neuronal Activity on Opposite Walls of a Simulated Sulcus of The Brain; IEEE Transaction on Biomedical Engineering; Vol. 41, No. 5, 1994; pp. 470 - 479.

[19] Jia-Zhu Wang, Samuel J. Williamson, and Lloyd Kaufman; Kinetic Images of Neuronal Activity of The Human Brain Based on The Spatio-Temporal MNLS Inverse: a Theoretical Study; Brain Topography, Vol. 7, No. 3, 1995; pp. 193 - 200.

[20] Kanta Matsuura and Yoichi Okabe; Selective Minimum-Norm Solution of The Biomagnetic Inverse Problem; IEEE Transaction on Biomedical Engineering; Vol. 42, No. 6, 1995; pp. 608 - 615.

[21] Richard Srebro; Iterative Refinement of The Minimum Norm Solution of Bioelectric Inverse Problem; IEEE Transaction on Biomedical Engineering; Vol. 43, No. 5, 1996; pp. 547 - 552.

[22] Rolando Grave de Peralta-Menendez and Sara L. Gonzalez Andino; A Critical Analysis of Linear Inverse Solutions to The Neuroelectromagnetic Inverse Problem; IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. 45, No. 4, 1998; pp. 440- 448.

[23] Irina F. Gorodnitsky, John S. George, Bhaskar D. Rao; Neuromagnetic Source Imaging with FOCUSS: a Recursive Weighted Minimum Norm Algorithm; Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 95 (1995), 231-251.

[24] Charle C. Wood; Application of Dipole Localization Methods to Source Identification of Human Evoked Potentials; Annals New York Academy of Sciences.; 1982; 139-155.

- [25] Howard S. Oster and Yoram Rudy; The Use of Temporal Information in the Regularization of the Inverse Problem of Electrocardiography; IEEE Transactions on Biomedical Engineering; vol. 39; No. 1; 1992; pp. 65 - 75.
- [26] A. Vahid Shahidi, Pierre Savard and Réginald Nadeau; Forward and Inverse Problems of Electrocardiography: Modeling and Recovery of Epicardial Potentials in Humans; IEEE Transactions on Biomedical Engineering; Vol. 41, no. 3, 1994; pp. 249 - 256.
- [27] H. Pasterkamp; S. Patel; G. R. Wodicka; Asymmetry of Respiratory Sounds and Thoracic Transmisión; 1997; Med & Biol Eng& Comput; pp. 103 - 106.
- [28] Edwin K. P. Chong & Stanislaw H. Żak; An Introduction to Optimization; John Wiley & Sons; 1996; pp: 22-38, 166-190.
- [29] Ben Noble & James W. Daniel; Álgebra Lineal Aplicada; Prentice-Hall; 1989; pp: 252-269, 375-390.
- [30] Simon Haykin; Adaptive Filter Theory; Prentice-Hall; 1996; pp: 516-532
- [31] David C. Lay; Álgebra Lineal y Sus Aplicaciones; Prentice-Hall; 2001; pp: 365-476.
- [32] Irina F. Gorodnitsky and Bhaskar D. Rao; Sparse Signal Reconstruction From Limited Data Using FOCUSS: A Re-Weighted Minimum Norm Algorithm; IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 45, No. 3, 1997; pp. 600 - 616.