

SUPERFLUIDEZ:
UNA HERRAMIENTA PARA LA
CONSTRICCIÓN DE LA
RELACIÓN DE ENERGÍA-MOMENTO

TESIS QUE PRESENTA

SERGIO GUTIÉRREZ SOLÍS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS
FÍSICA

ASESOR

DR. ABEL CAMACHO QUINTANA

POSGRADO DE FÍSICA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**SUPERFLUIDEZ: UNA HERRAMIENTA
PARA LA CONSTRUCCIÓN DE
LA RELACIÓN DE ENERGÍA MOMENTO**

Tesis que presenta:
L. C. F. M. Sergio Gutiérrez Solís
Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)

Asesor:
Dr. Abel Camacho Quintana (UAM-I)

Jurado Calificador:

Presidente: **Dr. Hernando Quevedo Cubillos**

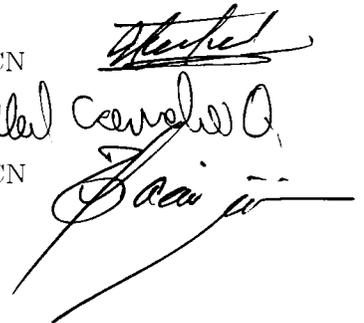
UNAM-ICN

Secretario: **Dr. Abel Camacho Quintana**

UAM-I

Vocal: **Dr. Darío Núñez Zúñiga**

UNAM-ICN



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**

A mis padres

*La pobreza y la ignorancia
son nuestros peores enemigos, y a nosotros
nos toca resolver el problema de la ignorancia.*

José Vasconcelos
UNAM 1920

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo que me brindan, en especial a mis padres Sergio y Guadalupe, que nunca han escatimado en esfuerzo y me han llevado a donde estoy ahora, por ello es que este logro en buena medida les pertenece. También debo agradecer a mi hermana Melissa por todos los buenos momentos, tan necesarios, que me ha dado durante todo este tiempo.

Dadas las particulares dificultades con las que inicié la maestría, debo decir que estoy en deuda con todos mis compañeros, sin su ayuda este habría sido un camino más arduo. Incluyo en este agradecimiento a mis amigos y a Victoria, por ayudarme a superar mis fracasos.

A mi asesor por todo el tiempo que ha dedicado a mi formación, por sus valiosas y detalladas respuestas y demostraciones. A los profesores sinodales por sus aportaciones y comentarios, que han enriquecido este trabajo de tesis.

Finalmente agradezco a CONACYT por la ayuda que nos otorga a los estudiantes.

Donde sea que estén, incluyo a Beethoven, Dvořák y Hendrix; por hacer de mis noches de trabajo una experiencia más llevadera.

Índice general

Resumen	III
Introducción	V
1. Rompimiento de la simetría de Lorentz	1
2. Superfluidez	3
2.1. Transformaciones de Bogoliubov	5
2.2. Criterio de Landau	16
3. Condensados de Bose-Einstein	21
3.1. Potencial tipo oscilador armónico isotrópico	21
3.1.1. Potencial atrapante	22
3.1.2. Energía y momento	24
4. Excitaciones elementales	29
4.1. Energía y momento de cuasipartícula	29
4.2. Velocidad crítica	33
5. Conclusiones	37
Bibliografía	38

Resumen

La presente tesis explora las posibilidades que la superfluidez ofrece en el contexto de fenomenología de gravedad cuántica.

Con la intención de presentar un planteamiento experimental que pudiese ser implementado a nivel terrestre, mediante el cual sería posible establecer cotas para los parámetros fenomenológicos, asociados a las propuestas existentes de deformaciones de la relación de dispersión.

Se propone el uso de condensados de Bose-Einstein como una opción en la búsqueda de efectos de gravedad cuántica. Considerando un condensado atrapado por un potencial tipo oscilador armónico (con interacción entre partículas), se calcula la energía y momento de las excitaciones elementales. Finalmente se hace uso del criterio de Landau para analizar los efectos en el rango de superfluidez del condensado e inferir las cotas sobre los parámetros correspondientes.

Introducción

El primer capítulo inicia exponiendo la motivación que hay detrás del presente trabajo. Se habla de la necesidad que hay en la actualidad para encontrar herramientas que permitan arrojar luz sobre los distintos parámetros que definen las teorías de gravedad cuántica y sus variados efectos, como el rompimiento de la simetría de Lorentz.

Se ha expuesto brevemente la teoría que hay detrás del surgimiento de las excitaciones elementales, que son las transformaciones Bogoliubov. Se ha procurado atender los detalles, ya que son elementos que enriquecen al lector, pues las transformaciones de Bogoliubov aparecen en otras teorías. El criterio de Landau es presentado y comentado, ya que es un elemento clave para llevar a cabo los cálculos del núcleo de la tesis.

Se definen las características del sistema a tratar, el cual consiste de un gas ultra frío atrapado por un potencial tipo oscilador armónico isotrópico. Se justifica en el texto el uso de esta aproximación, ya que se pretende comparar con datos reales experimentales.

Se muestra también la manera de obtener información del sistema, en particular la energía cinética, ya que juega un papel determinante para la correcta estimación teórica de la velocidad crítica de superfluidez del condensado.

Finalmente se muestra como todos estos elementos se involucran en una sucesión de cálculos y estimaciones, para poder obtener una expresión de la velocidad crítica, la cual se compara con mediciones experimentales. A través de los experimentos se propone establecer cotas sobre los parámetros de las relaciones de dispersión modificadas, lo cual permite, en principio, poner a prueba algunas predicciones de las teorías cuánticas de gravedad.

Capítulo 1

Rompimiento de la simetría de Lorentz

A la fecha, se ha realizado un amplio esfuerzo por consolidar las teorías de gravedad cuántica [1, 2], dicho esfuerzo ha producido nuevas herramientas teóricas y experimentales, que a pesar de sus refinadas estructuras matemáticas o sus exactas mediciones, no han podido resolver el problema.

Sin embargo, la misma variedad de teorías nos brinda una notable gama de efectos, los cuales aprovecha la fenomenología de gravedad cuántica [3, 4, 5] para evaluar, acotar o descartar, los parámetros que definen una teoría. Es decir, la fenomenología de gravedad cuántica adquiere un papel protagónico en la búsqueda de respuestas al problema de la gravedad cuántica.

Entre los problemas que surgen de las nuevas teorías, con frecuencia emerge el rompimiento de la simetría de Lorentz. Esta violación ataca directamente uno de los fundamentos de la física moderna, y es por eso que no puede pasar desapercibida. Se estima que los únicos efectos medibles de esa desviación, son los que corresponden a un orden lineal [1] y las contribuciones de mayor orden se alejan drásticamente de nuestras capacidades tecnológicas. La simetría de Lorentz ha sido sometida a pruebas y mediciones de alta precisión [6, 7, 8, 9] y no se ha logrado descartar una violación de la simetría de Lorentz; si bien la naturaleza del problema exige de un esfuerzo tecnológico considerado, la fenomenología nos brinda varios caminos por los cuales acechar el problema.

Son comunes las predicciones de efectos físicos tales como, una desviación de la forma del potencial $1/r$, la violación del principio de equivalencia o modificaciones en la relación de dispersión. Siendo esta última una de las

más frecuentes [10, 11, 12], nos motiva a centrar nuestro interés en este tipo de efectos, es decir, consideraremos una relación de dispersión modificada del tipo¹

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\mathbf{p}} + \alpha p^n, \quad (1.1)$$

con la esperanza de arrojar algo de luz sobre los parámetros α y n , los cuales dependerán de la teoría o modelo en cuestión. Es decir, buscamos obtener información acerca de la magnitud o el rango de valores posibles para dichos parámetros. Una vez estimadas las características de nuestros parámetros, podrían en principio descartarse modelos de gravedad cuántica que no resulten compatibles.

Los condensados de Bose-Einstein resultan ser una buena herramienta [13], ya que varios de los parámetros que definen dichos sistemas (longitud de dispersión, número de partículas, volumen, etc.), son accesibles y permiten su manipulación en un laboratorio.

De entre la variedad de propiedades que presenta un condensado, el fenómeno de superfluidez puede reflejar las repercusiones de una teoría cuántica de gravedad, por medio de la llamada velocidad crítica, la cual determina el límite por debajo del cual, la superfluidez se suscita. Para llevar a cabo este último análisis, es necesario introducir el criterio de Landau para hacer una estimación de la velocidad crítica²

$$v_c = \frac{\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}}}{\tilde{p}}. \quad (1.2)$$

Esperamos que el rango de velocidades permitidas para la superfluidez se vea afectado por los parámetros provenientes de la relación de dispersión (1.1). Una comparación con los resultados experimentales [14], en principio nos permitirá obtener información sobre los parámetros en cuestión.

En concreto, se busca dotar a la gravitación cuántica, con una herramienta que permita descartar algunos modelos cuya formulación implica una relación de dispersión modificada. Dicha herramienta se basa en las propiedades de superfluidez de los condensados de Bose-Einstein.

¹ $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ es la relación de dispersión usual.

²Las tildes hacen referencia a propiedades asociadas a cuasipartículas.

Capítulo 2

Superfluidez

Como paso previo al resto del capítulo, debemos establecer, dentro de los términos que conciernen a esta tesis, el concepto de superfluidez. Un desarrollo detallado del tema puede encontrarse en [15, 16, 17]. El estudio de la superfluidez se remonta hasta los experimentos de Kamerling Onnes [18], con helio líquido (He^4), que más tarde condujo a los trabajos de Allen y Misener [19] en Cambridge y Kapitza [20] en Moscú, quienes observaron (de manera independiente) superfluidez en helio líquido en 1937. Al año siguiente London [21] sugiere una posible conexión entre el fenómeno recién observado y el de condensados de Bose-Einstein. En la siguiente década, se publican los modelos hidrodinámicos de dos fluidos de Tisza [22] y de Landau [23].

Aquellos fluidos que pueden moverse sin exhibir la presencia de viscosidad o que no son afectados por fuerza de fricción alguna, y por lo tanto, pueden moverse sin perder velocidad, presentan superfluidez. El modelo de Landau plantea al fluido compuesto por dos partes, una que presenta la propiedad de superfluidez y la parte normal, que presenta viscosidad. Landau visualiza a la parte normal compuesta por excitaciones elementales, de forma que no interactúan entre sí y se mueven sobre un fondo formado por la componente de superfluido. Las excitaciones elementales son un punto clave en esta formulación y son el primer punto a tratar. Al final hablaremos del criterio de Landau y como se relacionan las excitaciones elementales con la superfluidez.

Consideramos gases diluidos con interacción entre las partículas que lo componen, esto significa que la distancia promedio entre partículas, supera el rango de interacción. Cuando la escala de la longitud de onda de las partículas, supera la longitud de dispersión, es posible considerar las interacciones entre partículas a través de un pseudo potencial constante [13]. Dicho pseudo

potencial lo escribimos como¹

$$V^{\text{pseudo}}(\mathbf{r}) = U_0 \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r, \quad (2.1)$$

en donde U_0 caracteriza el tipo e intensidad de la interacción

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (2.2)$$

denotamos con a la longitud de dispersión. La forma del pseudo potencial permite remover las singularidades del tipo $1/r$ en la función de onda; si en cambio la función no diverge o es regular en el origen, podemos escribir la ecuación (2.1) como

$$V^{\text{pseudo}}(\mathbf{r}) = U_0 \delta(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

las funciones de onda con las que trabajaremos más adelante no presentan estas dificultades y por lo tanto podemos adoptar la expresión (2.3) para nuestros cálculos.

Tomamos como punto de partida el hamiltoniano del sistema de N partículas

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V(\mathbf{r}_i) + \frac{U_0}{2} \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (2.4)$$

los términos que lo definen son la energía cinética, potencial y energía de interacción, en ese orden. Notemos que esta última energía es la suma de todas las combinaciones de pares, dividida por 2 para eliminar repeticiones.

Otra forma de caracterizar los gases diluidos es a través de lo siguiente. Aproximando la distancia promedio entre partículas como

$$d = \left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.5)$$

e imponiendo la condición $d \gg a$, tendremos como consecuencia que, para un gas diluido, se debe cumplir la relación

$$\frac{N}{V} a^3 \ll 1. \quad (2.6)$$

¹ $V^{\text{pseudo}}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = U_0 \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} (r\psi(\mathbf{r})).$

A continuación mostraremos como surgen las excitaciones elementales o cuasipartículas, a partir de la implementación de las transformaciones de Bogoliubov. Para ello usaremos el caso donde el potencial atrapante es del tipo caja. Cabe aclarar que casos más generales pueden requerir métodos numéricos (según [24]), para nosotros es suficiente considerar el potencial tipo caja para ilustrar algunos conceptos.

2.1. Transformaciones de Bogoliubov

Para hablar de las transformaciones de Bogoliubov, es necesario situarnos en el contexto de segunda cuantización. Para ello debemos escribir el hamiltoniano (2.4) en términos de los operadores de creación y aniquilación de partículas $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, que cumplen con las relaciones canónicas de conmutación

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.7)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad (2.8)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \quad (2.9)$$

También haremos uso del operador de campo

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.10)$$

(V es el volumen donde se encuentra el gas), que satisface las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.11)$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = 0, \quad (2.12)$$

$$[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0. \quad (2.13)$$

Podemos entonces escribir el hamiltoniano (2.4) en la forma de segunda cuantización

$$\hat{H} = \int \left[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{U_0}{2} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right] d^3x. \quad (2.14)$$

Al sustituir (2.10) en (2.14) obtenemos la respectiva expresión en términos de los operadores de creación y aniquilación

$$\int_V \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3x = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \frac{-\hbar^2}{2mV} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \int_V e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \nabla^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x \quad (2.15)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \frac{-\hbar^2}{2mV} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} k^2 \int_V e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \frac{-\hbar^2 k^2}{2mV} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} V \delta_{\mathbf{k}' \mathbf{k}}, \quad (2.16)$$

$$\int_V \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3x = - \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{U_0}{2} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3x &= \frac{U_0}{2V^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{k}', \mathbf{m}'} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{m}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{m}'} \times \\ &\int_V e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{m}' \cdot \mathbf{r}} d^3x \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$= \frac{U_0}{2V^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{k}', \mathbf{m}'} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{m}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{m}'} V \delta_{(\mathbf{k}+\mathbf{m})(\mathbf{k}'+\mathbf{m}')}. \quad (2.19)$$

El factor $\delta_{(\mathbf{k}+\mathbf{m})(\mathbf{k}'+\mathbf{m}')}$ implica la conservación de momento de las colisiones, es decir

$$\mathbf{k} + \mathbf{m} = \mathbf{k}' + \mathbf{m}', \quad (2.20)$$

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}' = -\mathbf{m} + \mathbf{m}' \equiv -\mathbf{n}, \quad (2.21)$$

de modo que

$$\int_V \frac{U_0}{2} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3x = \frac{U_0}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{m}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}}, \quad (2.22)$$

y finalmente

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{U_0}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}}, \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (2.24)$$

El segundo término del lado derecho de (2.23) lo podemos escribir como sigue

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} &= \hat{a}_0^{\dagger 2} \hat{a}_0^2 + \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}} \hat{a}_{-\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{m} \neq 0} \hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_0 \hat{a}_{\mathbf{m}} \\ + \sum_{\mathbf{m} \neq 0} \hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{m}} \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_0 \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \hat{a}_{-\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_0 \hat{a}_0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} &= \hat{a}_0^{\dagger 2} \hat{a}_0^2 + \hat{a}_0^{\dagger 2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} \\ &+ 4\hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_0^2 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tomando en cuenta que

$$\hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} = N, \quad (2.27)$$

y al tratarse de un condensado $\hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_0 = N_0 \approx N$, pues el estado base es el más poblado, lo que implica que el número de partículas en estados excitados

$$\sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} = N_e \ll N. \quad (2.28)$$

En un laboratorio el término N_e es del orden del 1% del total de partículas que componen el gas, esto se puede ver reflejado a partir de la expresión del número de partículas en estados excitados [13]

$$N_e = \frac{8}{3} N \sqrt{\frac{Na^3}{\pi V}}, \quad (2.29)$$

ya que junto con la condición (2.6), implica que $N_e \ll N$.

Considerando lo anterior, podemos escribir (2.26) despreciando los términos cuadráticos en N_e

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{m}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} &\approx \left(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right)^2 + \hat{a}_0^{\dagger 2} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} \\ &\quad + 2\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_0^2 \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.30)$$

En la aproximación de Bogoliubov [25], buscamos retener los términos que involucran \hat{a}_0^\dagger y \hat{a}_0 , pues son los que contribuyen la mayor parte en la suma (2.30) pues

$$\hat{a}_0^\dagger |N_0\rangle = \sqrt{N_0 + 1} |N_0 + 1\rangle, \quad (2.31)$$

$$\hat{a}_0 |N_0\rangle = \sqrt{N_0} |N_0 - 1\rangle, \quad (2.32)$$

y los términos como \hat{a}_0^\dagger y \hat{a}_0 , pueden ser aproximados por $\sqrt{N_0} \approx \sqrt{N}$, ya que al tratarse de números mucho mayores que 1, tenemos $N_0 \pm 1 \approx N$, así que

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{m}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{m}-\mathbf{n}} &= N^2 + N \left(\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bajo estas consideraciones escribimos el hamiltoniano (2.23) como

$$\hat{H} = \frac{U_0 n}{2} N + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \left[(\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{U_0 n}{2} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}}) \right], \quad (2.34)$$

donde $n = N/V$.

Es en esta parte donde introducimos las transformaciones de Bogoliubov. La intención detrás de estas transformaciones, es escribir el hamiltoniano de

manera que los términos que lo componen sean proporcionales al (nuevo) operador de número, lo cual resulta en un hamiltoniano diagonal.

Empecemos reescribiendo la expresión (2.34), modificando la suma y reduciéndola a la mitad del espacio de \mathbf{k}

$$\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} A_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}}^{k < 0} A_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{0}} A_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{0}} A_{-\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{0}} A_{\mathbf{k}}, \quad (2.35)$$

$$\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} A_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{0}} (A_{-\mathbf{k}} + A_{\mathbf{k}}), \quad (2.36)$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{U_0 n}{2} N + \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{0}} \left[(\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) \right. \\ & \left. + U_0 n \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nos concentraremos por el momento en la expresión dentro de la suma, definamos un operador que conserve la forma funcional de esa parte

$$\hat{h} = A_1 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} \right) + A_2 \left(\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \hat{a} \hat{b} \right), \quad (2.38)$$

definiendo $\hat{a}_{\mathbf{k}} \equiv \hat{a}$ y $\hat{a}_{-\mathbf{k}} \equiv \hat{b}$ cumplen con las siguiente reglas de conmutación

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1, \quad (2.39)$$

$$[\hat{a}, \hat{b}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{b}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger] = 0, \quad (2.40)$$

además

$$A_1 = \varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n, \quad (2.41)$$

$$A_2 = U_0 n. \quad (2.42)$$

Definimos nuevos operadores como una combinación lineal de \hat{a} y \hat{b} ,

$$\hat{c} = u \hat{a} + v \hat{b}^\dagger, \quad (2.43)$$

$$\hat{d} = u\hat{b} + v\hat{a}^\dagger, \quad (2.44)$$

e imponemos sobre ellos relaciones de conmutación análogas a (2.39) y (2.40)

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = [\hat{d}, \hat{d}^\dagger] = 1, \quad (2.45)$$

$$[\hat{c}, \hat{d}^\dagger] = [\hat{d}, \hat{c}^\dagger] = [\hat{c}, \hat{d}] = [\hat{c}^\dagger, \hat{d}^\dagger] = 0, \quad (2.46)$$

sin pérdida de generalidad podemos elegir u y v , como números reales pues podemos ajustar las fases a conveniencia. Calculemos entonces $[\hat{c}, \hat{c}^\dagger]$ para obtener una restricción sobre u y v

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = (u\hat{a} + v\hat{b}^\dagger)(u\hat{a}^\dagger + v\hat{b}) - (u\hat{a}^\dagger + v\hat{b})(u\hat{a} + v\hat{b}^\dagger) \quad (2.47)$$

$$= u^2(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}) + uv(\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}) + uv(\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger) + v^2(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger) \quad (2.48)$$

$$= u^2 + uv(0) + uv(0) + v^2(-1) = 1, \quad (2.49)$$

$$u^2 - v^2 = 1, \quad (2.50)$$

es decir, podemos escribir

$$u = \cosh(t), \quad (2.51)$$

$$v = \sinh(t). \quad (2.52)$$

También podemos encontrar las expresiones para \hat{c} y \hat{d} , en términos de \hat{a} y \hat{b}

$$\hat{a} = u\hat{c} - v\hat{d}^\dagger, \quad (2.53)$$

$$\hat{b} = u\hat{d} - v\hat{c}^\dagger. \quad (2.54)$$

Ahora calculamos la expresión para \hat{h} , en términos de los nuevos operadores usando (2.53) y (2.54)

$$\begin{aligned} \hat{h} &= A_1 \left((u\hat{c}^\dagger - v\hat{d}) (u\hat{c} - v\hat{d}^\dagger) + (u\hat{d}^\dagger - v\hat{c}) (u\hat{d} - v\hat{c}^\dagger) \right) \\ &+ A_2 \left((u\hat{c}^\dagger - v\hat{d}) (u\hat{d}^\dagger - v\hat{c}) + (u\hat{d} - v\hat{c}^\dagger) (u\hat{c} - v\hat{d}^\dagger) \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} &= A_1 \left(u^2\hat{c}^\dagger\hat{c} - 2uv\hat{c}^\dagger\hat{d}^\dagger - 2uv\hat{d}\hat{c} + v^2\hat{d}\hat{d}^\dagger + u^2\hat{d}^\dagger\hat{d} + v^2\hat{c}\hat{c}^\dagger \right) \\ &+ A_2 \left((u^2 + v^2) \hat{c}^\dagger\hat{d}^\dagger - 2uv\hat{c}^\dagger\hat{c} - 2uv\hat{d}\hat{d}^\dagger + (u^2 + v^2) \hat{d}\hat{c} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} &= A_1 \left(u^2\hat{c}^\dagger\hat{c} - 2uv\hat{c}^\dagger\hat{d}^\dagger - 2uv\hat{d}\hat{c} + v^2 \left(1 + \hat{d}^\dagger\hat{d} \right) + u^2\hat{d}^\dagger\hat{d} + v^2 \left(1 + \hat{c}^\dagger\hat{c} \right) \right) \\ &+ A_2 \left((u^2 + v^2) \left(\hat{c}^\dagger\hat{d}^\dagger + \hat{d}\hat{c} \right) - 2uv \left(\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hat{d}\hat{d}^\dagger \right) \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} &= 2v^2A_1 + A_1 \left((u^2 + v^2) \left(\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hat{d}^\dagger\hat{d} \right) - 2uv \left(\hat{c}^\dagger\hat{d}^\dagger + \hat{d}\hat{c} \right) \right) \\ &+ A_2 \left((u^2 + v^2) \left(\hat{c}^\dagger\hat{d}^\dagger + \hat{d}\hat{c} \right) - 2uv \left(\hat{c}^\dagger\hat{c} + \left(1 + \hat{d}^\dagger\hat{d} \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \hat{h} &= 2v^2A_1 - 2uvA_2 + [A_1(u^2 + v^2) - 2uvA_2] \left(\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hat{d}^\dagger\hat{d} \right) \\ &+ [A_2(u^2 + v^2) - 2uvA_1] \left(\hat{c}\hat{d} + \hat{d}^\dagger\hat{c}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Se exige que el término con el factor $\hat{c}\hat{d} + \hat{d}^\dagger\hat{c}^\dagger$ sea cero, pues queremos que el hamiltoniano sea diagonal, esta condición produce la siguiente ecuación

$$A_2(u^2 + v^2) - 2uvA_1 = 0, \quad (2.60)$$

sustituyendo las expresiones para u (2.51) y v (2.52)

$$A_2(\cosh^2(t) + \sinh^2(t)) - 2A_1\cosh(t)\sinh(t) = 0, \quad (2.61)$$

de donde resulta

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2\cosh(t)\sinh(t)}{\cosh^2(t) + \sinh^2(t)} = \frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}, \quad (2.62)$$

$$\tanh(2t) = \frac{A_2}{A_1}, \quad (2.63)$$

como

$$\tanh^2(x) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad (2.64)$$

entonces

$$\cosh(2t) = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}, \quad (2.65)$$

y usando la relación trigonométrica

$$\cosh(2x) = 2\sinh^2(x) + 1, \quad (2.66)$$

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} = 2\sinh^2(t) + 1, \quad (2.67)$$

de donde se obtiene

$$\sinh^2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} - 1 \right) = v^2, \quad (2.68)$$

y por lo tanto, según (2.50)

$$\cosh^2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} + 1 \right) = u^2. \quad (2.69)$$

Podemos ahora calcular $u^2 + v^2$ y uv , para luego sustituir en ecuación (2.59) y obtener una expresión para \hat{h} en términos de A_1 , A_2 y los nuevos operadores de creación y aniquilación

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} - 1 \right), \quad (2.70)$$

$$u^2 + v^2 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}, \quad (2.71)$$

$$uv = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.72)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2} - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1^2 - A_1^2 + A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}}, \quad (2.73)$$

$$uv = \frac{1}{2} \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}, \quad (2.74)$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{h} &= 2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} - 1 \right) \right) A_1 - 2 \left(\frac{1}{2} \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \right) A_2 \\ &+ \left[A_1 \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \right) A_2 \right] (\hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{d}^\dagger \hat{d}) \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A_1^2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} - A_1 - \frac{A_2^2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \\ &+ \left[\frac{A_1^2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} - \frac{A_2^2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \right] (\hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{d}^\dagger \hat{d}), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\hat{h} = \sqrt{A_1^2 - A_2^2} - A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2^2} (\hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{d}^\dagger \hat{d}). \quad (2.77)$$

Usemos entonces (2.43) y (2.44), para escribir el operador $\hat{h}_{\mathbf{k}} \equiv \hat{h}$ y luego sustituirlo en (2.37). Notemos primero lo siguiente

$$\hat{c}_{\mathbf{k}} = u \hat{a}_{\mathbf{k}} + v \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.78)$$

$$\hat{d}_{\mathbf{k}} = u \hat{a}_{-\mathbf{k}} + v \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.79)$$

es decir

$$\hat{c}_{\mathbf{k}} = \hat{d}_{-\mathbf{k}}, \quad (2.80)$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n)^2 - (U_0 n)^2} - (\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n_0) \\ &\quad + \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n)^2 - (U_0 n)^2} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}} \right), \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - U_0 n} \\ &\quad + \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}}} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}} \right), \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{U_0 n}{2} N + \sum_{\mathbf{k} > 0} \left[\sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}}} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - U_0 n} \right], \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{U_0 n}{2} N + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}}} \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - U_0 n} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

El último término de la ecuación anterior, es una suma que diverge, esto se debe a la aproximación que se ha hecho desde el inicio, con respecto al potencial efectivo con el que modelamos las interacciones entre las partículas, ya que solamente tomamos en cuenta interacciones de contacto y además su validez se restringe a valores pequeños del momento. La corrección para evitar este problema implica un cambio en la expresión del término de interacción, dicha corrección es de la forma [23]

$$U_0 \rightarrow U_0 \left(1 + \frac{U_0}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{m}{k^2 \hbar^2} \right), \quad (2.85)$$

entonces

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n - \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}}} \right] \rightarrow \\
& -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n - \frac{(U_0 n)^2}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} - \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}}} \right]. \quad (2.86)
\end{aligned}$$

La suma de la expresión anterior, podemos aproximar por medio una integral sobre los niveles energéticos, agregando un factor de densidad de estados por nivel energético [27]

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n - \frac{(U_0 n)^2}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} - \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}}} \right] \rightarrow \\
& -\frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^2 \hbar^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}} + U_0 n - \frac{(U_0 n)^2}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}}} \right) d\varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad (2.88)
\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable

$$x = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{U_0 n}}, \quad (2.89)$$

escribimos

$$\begin{aligned}
& -\frac{U_0 n}{2} N 2^{\frac{7}{2}} \left(\frac{na^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty x^2 \left(1 + x^2 - \frac{1}{2x^2} - x\sqrt{x^2 + 2} \right) dx \\
& = -\frac{U_0 n}{2} N 2^{\frac{7}{2}} \left(\frac{na^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{8}{15} \sqrt{2} \right) \quad (2.90)
\end{aligned}$$

$$= \frac{U_0 n}{2} N \frac{128}{15} \sqrt{\frac{na^3}{\pi}}, \quad (2.91)$$

de modo que (2.84) se escribe como

$$\hat{H} = \frac{U_0 n}{2} N \left(1 + \frac{128}{15} \sqrt{\frac{na^3}{\pi}} \right) + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n \varepsilon_{\mathbf{k}}} \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}}. \quad (2.92)$$

En esta última expresión el primer término del lado derecho corresponde a la energía del estado base E_0 . Los términos de la suma corresponden a las excitaciones elementales, donde $\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}}$ es el operador de número de cuasipartículas. El factor

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + 2U_0 n_0 \varepsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (2.93)$$

corresponde a la energía de las cuasipartículas² y

$$E_0 = \frac{U_0 n}{2} N \left(1 + \frac{128}{15} \sqrt{\frac{na^3}{\pi}} \right), \quad (2.94)$$

corresponde a la energía del estado base. Podemos encontrar la energía del sistema, calculando el valor esperado del operador \hat{H} , y cambiando la suma sobre \mathbf{k} a la suma sobre los niveles de energía, obtendremos

$$E = E_0 + \sum_{\varepsilon \neq 0} \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2NU_0}{V}} \langle \tilde{n}_\varepsilon \rangle, \quad (2.95)$$

donde $\langle \tilde{n}_\varepsilon \rangle$ es el número de ocupación de cuasipartícula con energía ε .

2.2. Criterio de Landau

Nuestra intención es calcular la expresión para la velocidad crítica, cuando se ha deformado la relación de dispersión de las partículas que conforman el condensado de Bose-Einstein. Hay experimentos que aportan evidencia de la existencia de esta velocidad crítica en condensados, incluso se han hecho algunas estimaciones de su valor [14]. Debemos entonces obtener una estimación teórica de la velocidad crítica, y una forma de hacerlo es utilizando el criterio de Landau [17].

²Denotaremos con una tilde a las propiedades correspondientes a cuasipartículas.

El criterio de Landau encierra información acerca de la naturaleza de la superfluidez y nos proporciona una manera para determinar un parámetro importante, que es la velocidad crítica. La velocidad crítica es la velocidad mínima a partir de la cual el fluido pierde la propiedad de superfluidez, y por lo tanto se mueve perdiendo velocidad. Visto desde el modelo del fluido compuesto de Landau, podemos decir que es la velocidad a partir de la cual la componente de superfluido empieza a reducirse.

Para entender el mecanismo que hay detrás de este criterio, debemos comprender el rol que juega la fricción o la viscosidad a este nivel, donde los efectos cuánticos son importantes. De manera cotidiana, podemos entender a la fricción como una fuerza capaz de restarle movimiento a los objetos. Es decir, la fricción se encarga de transformar la energía cinética de un objeto deslizante, en energía térmica. Sin embargo, a nivel de partículas o molecular, la energía térmica tiene una interpretación cinética de nueva cuenta: lo que se perdió como energía cinética del cuerpo macroscópico, se transformó en energía cinética de partículas microscópicas. Pero como ya mencionamos, a este nivel el comportamiento del sistema es gobernado por la mecánica cuántica y una de las facetas más importantes de esta última son las cantidades discretas de energía que puede tener un sistema cuántico. A diferencia de los sistemas clásicos, un sistema cuántico, como lo son las partículas que forman un condensado de Bose-Einstein, no pueden absorber o adquirir energía de manera continua y están limitados a recibir energía en pequeños paquetes, es decir, su espectro es discreto. Por ejemplo, a bajas temperaturas, los estados permitidos para las partículas en un condensado, están claramente diferenciados y, entre el estado base y el primer estado excitado, existe una diferencia de energía determinada. Para que una partícula pase del estado base al primer estado excitado, debe recibir exactamente esa diferencia de energía.

Consideremos ahora un fluido compuesto por partículas que se encuentran en el estado de mínima energía. Si dicho fluido experimenta fricción, poco a poco perderá su energía cinética, la cual se convertirá en energía térmica. Esta energía térmica se manifiesta en forma de vibraciones o fonones, y es absorbida por las partículas del estado base para pasar al primer estado excitado, es decir, el número de partículas en el estado base empieza a reducirse.

El criterio de Landau surge al analizar la energía de una excitación elemental vista desde distintos marcos de referencia, uno donde el fluido está en reposo y otro donde las paredes del contenedor o el marco del laboratorio,

están fijos. Si en un marco tenemos que el sistema consta de cierta energía E y tiene momento \mathbf{P} , entonces en otro marco que se mueve con velocidad \mathbf{v} con respecto al marco original, se observará la energía del sistema como

$$E' = E - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}Mv^2, \quad (2.96)$$

donde M es la masa que compone el sistema. Consideremos el caso particular en el que el primer marco se mueve junto con el fluido (a velocidad \mathbf{v}), que además se encuentra en el estado base y cuya energía denotamos por E_0 ; entonces el momento medido en ese marco de referencia será cero, pues el fluido no se puede con respecto al marco de referencia. De esta manera obtendremos (visto desde el marco del laboratorio o de las paredes)

$$E' = E_0 + \frac{1}{2}Mv^2. \quad (2.97)$$

Si en la situación anterior, surgen excitaciones elementales, la energía del sistema tendrá un término adicional

$$E = E_0 + \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}, \quad (2.98)$$

donde $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}$ es la energía de la excitación elemental, con momento $\tilde{\mathbf{p}}$, medido en el marco donde el fluido se encuentra en reposo. Entonces, en el segundo marco de referencia tendremos

$$E' = E_0 + \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}Mv^2, \quad (2.99)$$

el término adicional, en comparación con (2.97)

$$\tilde{\epsilon}' = \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.100)$$

es el cambio de la energía que aparece con el surgimiento de la excitación elemental, o visto de otra manera, como la energía necesaria para crear una excitación elemental visto desde el segundo marco. Este término debe ser negativo, pues la energía del fluido disminuye, como ya habíamos comentado antes, cada que hay presencia de excitaciones elementales

$$\tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} < 0. \quad (2.101)$$

Al observar la desigualdad (2.101), nos damos cuenta que debe existir alguna restricción para la velocidad, pues esa desigualdad debe mantenerse

para que exista la excitación elemental. La cota que obtenemos cuando $\tilde{\mathbf{p}}$ y \mathbf{v} son paralelos, es la menor de todas cuando se varía el ángulo que forman dichos vectores, así resulta

$$\frac{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\tilde{p}} < v. \quad (2.102)$$

Aquí es donde surge el criterio de Landau, pues la velocidad crítica, definida como

$$v_c = \min \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\tilde{p}} \right), \quad (2.103)$$

es la menor velocidad necesaria para que se produzca una excitación elemental. Por debajo de la velocidad crítica, no es posible que surjan excitaciones elementales a partir de la interacción del fluido con las paredes del contenedor. Recordemos que la velocidad de la que hemos estado hablando es la velocidad entre los marcos de referencia, de modo que esta velocidad representa también la velocidad del fluido con respecto al marco del laboratorio, o las paredes del contenedor. Podemos cambiar un poco la perspectiva y sustituir las paredes por un objeto o potencial que se mueve con esta velocidad dentro de un fluido estático, la situación es equivalente y esto es lo que hacen en el experimento [14] para estimar el valor de la velocidad crítica.

En dicho experimento atraviesan el condensado con un potencial electromagnético, producido por un láser. Mueven el potencial (aquí el láser juega el papel de las paredes del contenedor) a lo largo del condensado con distintas frecuencias y amplitudes, es decir, a distintas velocidades. Las mediciones que hacen del condensado es con respecto a la fracción del condensado, es decir, el cociente entre las partículas en el estado base y el total de partículas en el gas. Las mediciones indican la existencia de dos regímenes de disipación, uno donde es prácticamente nula y otro donde rápidamente decrece la fracción del condensado. La velocidad que marca la transición entre un régimen y otro, es la velocidad crítica.

Capítulo 3

Condensados de Bose-Einstein

Para poner a prueba nuestro trabajo, debemos tomar un sistema para desarrollar la teoría y obtener una predicción de sus propiedades. Dicho sistema debe acercarse a lo que se encuentra en los laboratorios, ya que buscamos hacer una comparación de buena calidad.

Los condensados creados en laboratorios, son atrapados mediante potenciales tipo oscilador armónico, no isotrópico, sino con un eje de simetría radial. Nosotros consideraremos un potencial armónico isotrópico como una primera aproximación con la cual contrastar.

3.1. Potencial tipo oscilador armónico isotrópico

A lo largo de este capítulo estaremos usando la aproximación de Hartree para la función de onda, la cual básicamente señala lo siguiente.

Podemos considerar la función de onda de un sistema de N cuerpos, como la función de onda de un solo cuerpo, siempre y cuando el sistema se encuentre a bajas temperaturas y el sistema sea bosónico. Pensemos en lo siguiente, a bajas temperaturas, un sistema de bosones tiende a condensar lo cual significa que todas las partículas tienden a estar en un mismo estado. Si todas se encuentran en un mismo estado, tiene sentido tratar N partículas con los parámetros correspondientes al estado de 1 partícula, ya que todas se encuentran en el mismo. Es decir, pasamos de representar a la función de onda del sistema

$$\Psi \equiv \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i), \quad (3.1)$$

con $\psi(\mathbf{r}_i)$ representando la función de onda de partícula individual a

$$\Psi \equiv \Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \psi(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

la representación de Hartree.

La función de onda de partícula individual está normalizada

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3x = 1, \quad (3.3)$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{r})|^2 d^3x = N. \quad (3.4)$$

3.1.1. Potencial atrapante

La solución del problema de una partícula en un potencial tipo oscilador armónico isotrópico se puede encontrar en [28] completamente desarrollada.

El potencial atrapante está dado por

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2). \quad (3.5)$$

La solución al mismo problema, considerando interacciones, se obtiene a partir de un método perturbativo [29], tomando como base la solución del problema sin interacción. La nueva solución es muy parecida, pero los parámetros cambian un poco funcionalmente, véase las ecuaciones (3.7) y (3.18), donde la expresión de la longitud característica, y por lo tanto la extensión de nube, se ve modificada; lo mismo sucede con la frecuencia de oscilación.

Lo anterior se puede entender de la siguiente manera. El efecto de las interacciones entre partículas se traduce en un cambio en la extensión del gas, así cuando las interacciones son repulsivas, dicho gas aumenta de volumen, y cuando las interacciones son atractivas, se contrae. La simetría de dicho gas no cambia, pues el potencial continúa siendo isotrópico, por lo tanto es de esperarse que las soluciones a la función de onda del sistema, sean parecidas

al caso ideal. Los parámetros que definen las nuevas soluciones, son funciones de los parámetros constantes que aparecían en la solución del caso ideal.

Las soluciones (en una dimensión) están dadas por

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\left(2^n n! \pi^{\frac{1}{2}} b\right)^{\frac{1}{2}}} H_n\left(\frac{x}{b}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right), \quad (3.6)$$

de donde

$$b = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{Na}{\ell}\right)^{\frac{1}{5}} \ell, \quad (3.7)$$

con ℓ la longitud característica del caso sin interacciones

$$\ell = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.8)$$

y $H_n(y)$ denota los polinomios de Hermite, de los cuales usaremos los dos primeros

$$H_0(y) = 1, \quad (3.9)$$

$$H_1(y) = 2y. \quad (3.10)$$

La solución para una partícula en tres dimensiones es de la forma

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \psi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y) \psi_{n_z}(z), \quad (3.11)$$

la cual está normalizada.

Usaremos la aproximación de Hartree para escribir la función de onda del condensado, concretamente cuando las partículas se encuentran en el estado base y cuando están en el primer estado excitado. Más allá de los primeros dos estados puede ser que dicha aproximación no sea buena.

La función de onda del condensado con N_0 partículas en el estado base es

$$\Psi_0(x, y, z) = \sqrt{N_0} \psi_{000}, \quad (3.12)$$

explícitamente

$$\Psi_0(x, y, z) = \left(\frac{N_0}{\pi^{\frac{3}{2}} b^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2b^2}\right), \quad (3.13)$$

y en el primer estado excitado

$$\Psi_1(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_{100} + \psi_{010} + \psi_{001}). \quad (3.14)$$

Toda la información asequible al sistema está contenida en la función de onda, por lo tanto, a partir de ella podemos calcular y estimar algunas de sus propiedades, como son la energía cinética, la energía de interacción y la potencial.

La energía cinética se calcula según

$$E^{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\Psi|^2 d^3x, \quad (3.15)$$

la energía de interacción

$$E^{\text{int}} = \frac{1}{2} U_0 \int_{\mathbb{R}^3} |\Psi|^4 d^3x, \quad (3.16)$$

la energía de la trampa

$$E^{\text{trap}} = \int_{\mathbb{R}^3} V(x, y, z) |\Psi|^2 d^3x. \quad (3.17)$$

3.1.2. Energía y momento

Tomando en cuenta que en el caso con interacción, la extensión de la nube se ve modificada, podemos aproximar el sistema como aquel atrapado por una potencial con una frecuencia efectiva ($\tilde{\omega}$) dada por

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar}{mb^2}, \quad (3.18)$$

en analogía con (3.8). Así podemos calcular la energía de una partícula como

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar\tilde{\omega}, \quad (3.19)$$

y por ejemplo, la energía total del sistema en el estado base sería

$$E_0 = N_0 \varepsilon_{000} = \frac{3}{2} N_0 \hbar\tilde{\omega}, \quad (3.20)$$

y en el primer estado excitado

$$E_1 = N_e \frac{5}{2} \hbar \tilde{\omega}. \quad (3.21)$$

Si tomamos en cuenta el volumen del gas como

$$V = \frac{4}{3} \pi b^3, \quad (3.22)$$

entonces

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{4\pi}{3V} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.23)$$

y encontramos que la energía por partícula en el primer estado excitado es

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{mV^{\frac{2}{3}}}, \quad (3.24)$$

fórmula que usaremos más adelante.

Otro elemento que será necesario calcular, es la expresión del momento de las partículas físicas en el primer estado excitado. Dicha expresión se encuentra a partir de la ecuación (3.15). La ecuación (3.15) se refiere a la energía cinética total de las partículas en la nube térmica, de modo que al dividir por el número de partículas obtendremos la energía cinética por partícula, i. e.

$$\varepsilon_1^{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2mN_e} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \Psi_1|^2 d^3x. \quad (3.25)$$

Usaremos la expresión para la función de onda (3.14) y la fórmula de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{(2k-1)!!}{(2a)^k} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (3.26)$$

en donde $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$, si $n = 2k + 1$, entonces la integral es cero.

Empezamos calculando la expresión del interior de la integral en (3.25)

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_1 = & \left(\frac{2N_e}{3\pi^{\frac{3}{2}} b^5} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2b^2}} \left[\left(1 - \frac{x}{b^2} (x+y+z) \right) \vec{e}_x \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{y}{b^2} (x+y+z) \right) \vec{e}_y + \left(1 - \frac{z}{b^2} (x+y+z) \right) \vec{e}_z \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$|\nabla\Psi_1|^2 = \frac{2N_e}{3\pi^{\frac{3}{4}}b^5} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}} \left[\left(1 - \frac{x}{b^2}(x+y+z)\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{b^2}(x+y+z)\right)^2 + \left(1 - \frac{z}{b^2}(x+y+z)\right)^2 \right], \quad (3.28)$$

falta entonces calcular la integral de la siguiente ecuación

$$\varepsilon_1^{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2mN_e} \left(\frac{2N_e}{3\pi^{\frac{3}{2}}b^5} \right) \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}} \left[\left(1 - \frac{x}{b^2}(x+y+z)\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{b^2}(x+y+z)\right)^2 + \left(1 - \frac{z}{b^2}(x+y+z)\right)^2 \right] d^3x \quad (3.29)$$

$$= \frac{\hbar^2}{3m\pi^{\frac{3}{2}}b^5} 3 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}} \left(1 - \frac{x}{b^2}(x+y+z)\right)^2 d^3x \quad (3.30)$$

$$= \frac{\hbar^2}{m\pi^{\frac{3}{2}}b^5} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}} \left[1 - \frac{2}{b^2}(x^2 + xy + xz) + \frac{x^2}{b^4}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz) \right] dV \quad (3.31)$$

$$= \frac{\hbar^2}{m\pi^{\frac{3}{2}}b^5} \left[(\sqrt{\pi}b)^3 - \frac{2}{b^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}b^3}{2} \right) (\sqrt{\pi}b)^2 + \frac{1}{b^4} \left(\left(\frac{3\sqrt{\pi}b^5}{4} \right) (\sqrt{\pi}b)^2 + \left(\frac{\sqrt{\pi}b^3}{2} \right)^2 (\sqrt{\pi}b) + \left(\frac{\sqrt{\pi}b^3}{2} \right)^2 (\sqrt{\pi}b) \right) \right] \quad (3.32)$$

$$= \frac{\hbar^2}{m\pi^{\frac{3}{2}}b^5} (\sqrt{\pi}b)^3 \left(\frac{5}{4} \right), \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_1^{\text{kin}} = \frac{5\hbar^2}{4mb^2}. \quad (3.34)$$

Usando la expresión para la energía cinética en términos del momento

$$\varepsilon_1^{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}, \quad (3.35)$$

y comparando con (3.34), obtenemos

$$p = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\hbar}{b}, \quad (3.36)$$

que a su vez podemos expresar en términos del volumen (3.22), de modo que

$$p = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.37)$$

Capítulo 4

Excitaciones elementales

En este capítulo introduciremos la relación de dispersión modificada en nuestro modelo y estudiaremos sus repercusiones sobre los elementos más relevantes.

Con el fin de aplicar el criterio de Landau y poder determinar la velocidad crítica de nuestro sistema, calcularemos la energía de las excitaciones elementales y su momento asociado.

Nos apoyaremos sobre algunos datos experimentales para contrastar nuestros resultados. Mostramos como obtener alguna cota sobre los parámetros involucrados en la relación de dispersión modificada.

4.1. Energía y momento de cuasipartícula

En esta sección nos concentraremos en el término correspondiente a la energía de las cuasipartículas de la ecuación (2.93). Debemos remarcar que hemos considerado que los únicos estados ocupados en el sistema son el estado base y el primer estado excitado, es decir todos los demás estados excitados se encuentran vacíos. Esto último es consecuencia directa de la expresión del número de ocupación

$$\langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/\beta}}, \quad (4.1)$$

ya que¹ $\beta = \kappa T$ y para temperaturas bajas (T) y niveles de energía altos (ε), el número de ocupación es prácticamente cero.

¹Aquí κ representa la constante de Boltzmann y tiene el valor de $1.38 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$.

Así el número de ocupación del primer estado excitado, representa el total de partículas en la nube térmica

$$\langle n_\varepsilon \rangle = N_e. \quad (4.2)$$

Si el número de partículas en estados excitados N_e es mucho mayor que 1, entonces es válido hacer la siguiente aproximación para el número de ocupación de cuasipartículas

$$\langle \tilde{n}_\varepsilon \rangle = \frac{\langle n_\varepsilon \rangle}{1 + \langle n_\varepsilon \rangle} \approx 1. \quad (4.3)$$

Usando los parámetros experimentales de [14], el número de partículas toma el rango $N \in [3 \times 10^6, 12 \times 10^6]$, nosotros usaremos el promedio² $N = 7.5 \times 10^6$. Además con una longitud de dispersión $a = 2.75 \times 10^{-9}$ m y las dimensiones del gas $\ell_1 = 22.5 \times 10^{-6}$ m, $\ell_2 = 22.5 \times 10^{-6}$ m y $\ell_3 = 75 \times 10^{-6}$ m, que corresponden a los radios de un elipsoide alargado. Como consecuencia el orden de $N_e \sim 10^4$ y la estimación en la ecuación (4.3) resulta adecuada.

Puesto que el primer estado excitado es el único que contiene partículas la suma de la ecuación (2.95) se reduce a un solo término

$$\tilde{E} = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2NU_0}{V}\varepsilon \langle \tilde{n}_\varepsilon \rangle}. \quad (4.4)$$

La expresión anterior corresponde en realidad a la energía de cuasipartícula individual, ya que el número de ocupación es 1, entonces

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2NU_0}{V}\varepsilon}. \quad (4.5)$$

Recordemos que las partículas de la nube térmica se encuentran bajo el efecto de un potencial armónico isotrópico, con una frecuencia efectiva $\tilde{\omega}$. Como ya se mencionó, podemos calcular rápidamente la energía de dichas partículas usando la ecuación (3.19)

$$\varepsilon = \frac{5}{2}\hbar\tilde{\omega}. \quad (4.6)$$

Nos interesa introducir la relación de dispersión (1.1), en la ecuación (4.5) para determinar la energía de las excitaciones elementales bajo este nuevo

²Según el artículo, al final de proceso de formación del condensado, el número de partículas se reduce al 60%.

régimen. Para ello es necesario revisar como se ven afectados cada uno de los elementos que componen dicha expresión.

En primer lugar, la expresión para la energía de cuasipartículas involucra la energía alterada de partícula física, es decir, la ecuación (4.6) se verá modificada como sigue

$$\varepsilon' = \frac{5}{2}\hbar\tilde{\omega} + \alpha p^n. \quad (4.7)$$

En segundo lugar, observemos que el número de ocupación de la ecuación (4.4), depende de la energía de partícula física y si ésta se ve modificada por una nueva relación de dispersión, vale la pena preguntarse ¿que sucede con el nuevo número de ocupación $\langle \tilde{n}_{\varepsilon'} \rangle$? Para responder a esta pregunta calcularemos la expresión para el número de ocupación, usando la relación de dispersión (1.1) en la expresión (4.1)

$$\langle n_{\varepsilon'} \rangle = \frac{1}{e^{(\varepsilon' - \mu)/\beta}} = \frac{1}{e^{\alpha p^n / \beta} e^{(\varepsilon - \mu)/\beta}}. \quad (4.8)$$

Pensemos ahora en lo siguiente: dado que los experimentos y observaciones realizadas para poder comprobar el posible rompimiento de simetría, han fallado, es razonable asumir que el parámetro α es lo suficientemente pequeño para haber eludido dichas pruebas. De modo que la cantidad $\exp(\alpha p^n / \beta) \approx 1$, así resultará

$$\langle n_{\varepsilon'} \rangle = e^{-\frac{\alpha p^n}{\beta}} \langle n_{\varepsilon} \rangle \approx \langle n_{\varepsilon} \rangle, \quad (4.9)$$

y, consecuentemente

$$\langle \tilde{n}_{\varepsilon'} \rangle \approx \langle \tilde{n}_{\varepsilon} \rangle. \quad (4.10)$$

Debido a lo anterior, podemos decir que la expresión para la energía de cuasipartícula modificada está dada por

$$\tilde{\varepsilon}' = \sqrt{\varepsilon'^2 + \frac{2NU_0}{V}\varepsilon'}. \quad (4.11)$$

Reescribimos la ecuación (4.11) usando (4.7), conservando únicamente los términos hasta primer orden en α (la mayor contribución es a primer orden en α , pues $\alpha^2 \approx 0$)

$$\tilde{\varepsilon}' = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2NU_0}{V}\varepsilon + 2\alpha p^n \left(\varepsilon + \frac{NU_0}{V} \right)}, \quad (4.12)$$

usando el teorema del binomio³ obtenemos

$$\tilde{\varepsilon}' = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2NU_0}{V}\varepsilon} + \alpha p^n \frac{\varepsilon + \frac{NU_0}{V}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2NU_0}{V}\varepsilon}}. \quad (4.13)$$

Usando la ecuación (3.24), junto con (2.2), nos permite escribir (4.13) como

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}' &= \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{20\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}} \\ &+ \alpha p^n \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{4\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt{\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{20\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

y dado que

$$\frac{5}{2} \ll \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{4\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.15)$$

$$\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \ll \frac{20\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.16)$$

escribimos

$$\tilde{\varepsilon}' \approx \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{20\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}} + \alpha p^n \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{4\pi Na}{5V^{\frac{1}{3}}}}, \quad (4.17)$$

y usando la expresión que obtuvimos para el momento (3.37), tendremos

$$\tilde{\varepsilon}' = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{20\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}} + \bar{\alpha} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{4\pi Na}{5V^{\frac{1}{3}}}}, \quad (4.18)$$

con

$${}^3(x+y)^{\frac{1}{2}} \approx x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

$$\bar{\alpha} = \alpha \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \hbar \right]^n. \quad (4.19)$$

Para calcular el momento asociado a la cuasipartícula hacemos $\alpha = 0$, pues la ecuación (4.18) debe reducirse al caso usual, es decir, $\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\varepsilon}$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\hbar^2 k}{2m} \sqrt{k^2 + \frac{16\pi Na}{V}}, \quad (4.20)$$

de donde concluimos que

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{5}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}}, \quad (4.21)$$

$$k = \sqrt{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{V^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.22)$$

y finalmente

$$\tilde{p} = \sqrt{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}}. \quad (4.23)$$

4.2. Velocidad crítica

Según el criterio de Landau (1.2), tenemos los elementos suficientes para calcular la velocidad crítica usando (4.18) y (4.23)

$$v_c = \frac{\left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{20\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}} + \bar{\alpha} \frac{1}{V^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{4\pi Na}{5V^{\frac{1}{3}}}}}{\sqrt{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}}}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\hbar}{m} \frac{1}{V^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{20\pi Na}{V^{\frac{1}{3}}}} \\ &+ \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{n-2}{3}} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}} \right)^{n-1} \sqrt{\frac{4\pi Na}{5V^{\frac{1}{3}}}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Podemos utilizar de nueva cuenta los parámetros experimentales de [14], en la ecuación (4.25) (con $\alpha = 0$) y contrastar con lo obtenido en el experimento, que fue una velocidad crítica

$$v_c^e = 1.6 \text{ mm/s.} \quad (4.26)$$

Obtenemos entonces la siguiente predicción para la velocidad crítica

$$v_c = 2.82 \text{ mm/s,} \quad (4.27)$$

con un error

$$\frac{|v_c^e - v_c|}{v_c} = 0.432. \quad (4.28)$$

que equivale al 43%. La predicción que obtenemos está en concordancia con los resultados de [30, 31], que son simulaciones numéricas del caso de un gas homogéneo descrito por la ecuación no lineal de Schrödinger.

Nos podemos dar cuenta rápidamente, que la velocidad crítica depende de tres parámetros experimentales: el número de partículas, el volumen y la longitud de dispersión; al variar estas cantidades podemos obtener distintos valores para la velocidad crítica. También podemos considerar la densidad ($\rho = N/V$) en lugar del número de partículas, como una variable, así observando la ecuación (4.25), podemos escribirla

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} + 20\pi a\rho} + \frac{\alpha}{\hbar\sqrt{5}} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{4\pi a\rho}{5}} \left[\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}} \right]^n. \quad (4.29)$$

Nos preguntamos ahora por el cambio de la velocidad crítica, conforme al cambio del volumen, manteniendo la densidad constante, es decir

$$\left(\frac{\partial v_c}{\partial V}\right)_\rho = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\hbar}{m} \left(\frac{-1}{3}\right) \frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{V^{\frac{5}{3}}} \left(\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} + 20\pi a\rho\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{2-n}{3}\right) \frac{\alpha}{\hbar\sqrt{5}} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{V^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{4\pi a\rho}{5}} \left[\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}} \right]^n, \quad (4.30)$$

haciendo

$$f \equiv \frac{15}{2} \frac{\hbar}{\sqrt{\pi a \rho}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial v_c}{\partial V} \right)_\rho$$

$$+ \frac{25\sqrt{5}}{8} \frac{\hbar^2}{m\sqrt{\pi a \rho}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{V^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} + 20\pi a \rho \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.31)$$

obtenemos la siguiente ecuación

$$f = \alpha (2 - n) \left[\left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}} \right]^n. \quad (4.32)$$

Cabe señalar que f es una función de parámetros experimentales y depende además del valor que se mida de la derivada de la velocidad crítica con respecto al volumen. De este modo se obtiene una relación directa entre los parámetros que definen la modificación de la relación de dispersión. Es conveniente entonces plantear una serie de experimentos, para medir los distintos valores de la velocidad crítica, variando el volumen y manteniendo ρ constante. Con esta medición se puede calcular el lado derecho de la expresión (4.31) de manera explícita (usando también los datos experimentales α , ρ y V) y consecuentemente, obtener una relación entre α y n , (4.32).

Podemos preguntarnos por el cambio de la velocidad crítica cuando variáramos la longitud de dispersión a , es decir

$$\left(\frac{\partial v_c}{\partial a} \right)_\rho = \frac{10}{\sqrt{5}} \frac{\hbar \pi a}{m} \left(\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} + 20\pi a \rho \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

$$+ \frac{\alpha}{\hbar 2\sqrt{5}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{-\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{4\pi \rho}{5a}} \left[\left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}} \right]^n, \quad (4.34)$$

y de nueva cuenta definimos un parámetro que depende solamente de datos experimentales, parte de este parámetro involucra la derivada de la velocidad crítica con respecto a la longitud de dispersión, lo cual involucraría de nueva cuenta, una serie de experimentos para medir este cambio de la velocidad crítica

$$g \equiv 5 \frac{\hbar}{V^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{a}{\pi\rho}} \left(\frac{\partial v_c}{\partial a} \right)_\rho$$

$$-10\sqrt{5} \frac{\hbar^2 \pi a}{m} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{a}{\pi\rho}} \left(\frac{25}{4} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{V^{\frac{2}{3}}} + 20\pi a \rho \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.35)$$

Obtendremos entonces la relación

$$g = \alpha \left[\left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar}{V^{\frac{1}{3}}} \right]^n, \quad (4.36)$$

la cual podemos sustituir en (4.32) a través de α , para obtener una relación para n , en términos de f , g y V

$$f = g(2 - n), \quad (4.37)$$

$$n = 2 - \frac{f}{g}. \quad (4.38)$$

Hemos logrado determinar una expresión para el parámetro n y en consecuencia, también una expresión para α , en términos de parámetros y mediciones experimentales.

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos logrado mostrar que el posible rompimiento de la simetría de Lorentz, a través de una relación de dispersión modificada, tiene consecuencias directas sobre el rango de superfluidez en un condensado de Bose-Einstein.

Ilustramos conceptos como el criterio de Landau, el cual ha resultado ser una herramienta útil y sencilla en la estimación de la velocidad crítica. También se expuso el concepto de superfluidez y la relación que guarda con las excitaciones elementales. Se logró una exposición del concepto de excitaciones elementales, el cual es un elemento fundamental en el área de condensados de Bose-Einstein y por lo mismo, invita a explorar este aspecto en una amplia diversidad de sistemas.

Se ha abordado un problema complejo como el de un gas ultra frío atrapado en un potencial isotrópico, donde existen interacciones. Dicho trabajo se pudo contrastar con resultados experimentales, lo cual nos proporciona una noción de lo acertado que han resultado los cálculos. También han salido a la luz una serie de puntos y detalles, en donde nuestro desarrollo podría ser refinado, ya que esta área del conocimiento recurre a una variedad de aproximaciones para tratar problemas que siguen abiertos.

Finalmente mostramos la manera en la que podemos obtener información acerca de los parámetros que definen la modificación de la relación de dispersión. Obtenemos una predicción para el valor de los parámetros α y n , sin recurrir a ningún tipo de estimación o suposición acerca de sus valores o magnitudes, únicamente hemos partido de la relación (1.1). Este resultado se distingue del tratamiento que se hace en trabajos como [32], donde en una primera instancia se establecen los posibles valores que puede tomar n y se procede a estimar cotas para α . Nuestro resultado se apoya fuertemente

en la medición de (4.31) y (4.35), lo cual nos motiva a proponer una serie de experimentos que nos permitan medir estos parámetros. Hemos de notar además que, la forma en la que se obtuvo el resultado (4.38) nos muestra que para poder determinar de manera exacta los parámetros α y n , es necesario obtener dos ecuaciones que relacionen dichas incógnitas, el hecho de que la velocidad crítica (4.25), dependa de varios parámetros experimentales, nos permite obtener ecuaciones suficientes para resolver el sistema. Esta es una clara ventaja de los condensados de Bose-Einstein, pues varios de los parámetros que influyen en las características de estos sistemas, son manipulables desde el punto de vista experimental, lo cual nos brinda una amplia variedad de posibilidades.

Es necesario señalar que el presente estudio agrega una nueva opción a la lista de experimentos [33] que pueden realizarse en un laboratorio, para probar el rompimiento de la simetría de Lorentz. Es decir, se sitúa a los condensados de Bose-Einstein (junto con la superfluidez), como una opción adicional a los experimentos con átomos a bajas velocidades [32, 34]. Surge además motivación suficiente para explorar efectos más allá del que tiene la relación de dispersión modificada, sobre la superfluidez en los condensados, es decir, explorar las repercusiones sobre otras propiedades que mantienen una dependencia con la relación de dispersión. Tal podría ser el caso de condensados atrapados por su propia gravedad, también llamados estrellas de bosones [35, 36, 37], se podría estudiar los efectos que tiene las excitaciones elementales sobre el radio de dichos objetos y como podría verse afectado al incluir una relación de dispersión modificada. El rango de posibilidades donde incluir este tipo de consideraciones parece ser amplio, con lo cual aumenta el terreno de la fenomenología de gravedad cuántica a través de los condensados de Bose-Einstein.

Bibliografía

- [1] C. N. Kozameh and M. F. Parisi, *Class. Quantum Grav.* **21**, 2617 (2004).
- [2] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction* (Cambridge University Press, 2007).
- [3] G. Amelino-Camelia et al, *Int. J. Mod. Phys. D* **19**, 2385 (2010).
- [4] G. Amelino-Camelia, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 35 (2002).
- [5] E. Fischbach and C. L. Talmadge, *The Search for Non-Newtonian Gravity* (Springer-Verlag, New York, 1999).
- [6] H. P. Robertson, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 378 (1949).
- [7] R. M. Mansouri and R. U. Sexl, *Gen. Rel. Grav.* **8**, 497 (1977).
- [8] C. Lämerzahl, *Class. Quant. Grav.* **15**, 13 (1998).
- [9] S. Schiller et al, *Phys. Rev. D* **69**, 27504 (2004).
- [10] G. Amelino-Camelia et al, *Nature* **393**, 763 (1998).
- [11] G. Amelino-Camelia, *Nature* **398**, 216 (1999).
- [12] G. Amelino-Camelia, *Int. J. Mod. Phys D* **12**, 1633 (2003).
- [13] M. Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation* (World Scientific Publishing Co., Singapore, 2010).
- [14] C. Raman et al, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2502 (1999).
- [15] I. M. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity* (Westview Press, Boulder, 2000).

- [16] A. Griffin, T. Nikuni, E. Zaremba, *Bose-condensed gases at finite temperatures* (Cambridge University Press, 2009).
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics. Vol. 9* (Pergamon Press, Oxford, 1981).
- [18] H. Kamerlingh Onnes, Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci. **13**, 1093 (1911).
- [19] J. F. Allen and A. D. Misener, Nature **141**, 75 (1938).
- [20] P. Kapitza, Nature **141**, 74 (1938).
- [21] F. London, Nature **141**, 643 (1938).
- [22] L. Tisza, Phys. Rev. **72**, 838 (1947).
- [23] L. D. Landau, J. Phys. USSR. **5**, 71 (1941).
- [24] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
- [25] N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947).
- [26] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics. Vol. 3* (Pergamon Press, Oxford, 1987).
- [27] R. K. Pathria and P. D. Beale, *Statistical Mechanics* (Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, 2011).
- [28] N. Zettili, *Quantum mechanics: concepts and applications* (Wiley, Chichester, 2009).
- [29] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [30] T. Frisch, Y. Pomeau, S. Rica, Phys. Rev. Lett. **69**, 1644 (1992).
- [31] T. Winiecki, J.F. MacCann, S.C. Adams, Phys. Rev. Lett. **82**, 5186 (1999).
- [32] G. Amelino-Camelia, Phys. Rev. Lett. **103**, 171302 (2009).
- [33] S. Liberati, Class. Quant. Grav. **30**, 133001 (2013).

- [34] F. Mercati et al, *Class. Quant. Grav.* **27**, 215003 (2010).
- [35] S. L. Liebling and C. Palenzuela, *Living Reviews in Relativity* **15**, 6 (2012).
- [36] P. H. Chavanis, *Phys. Rev. D* **84**, 043531 (2011).
- [37] P. H. Chavanis and L. Delfini, *Phys. Rev. D* **84**, 043532 (2011).