



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**UN PROBLEMA DE INVERSIÓN
DE LA TRANSFORMADA DE RADON ATENUADA
CON INHOMEGENEIDAD ESPACIAL**

Tesis que presenta:

Isabel Martínez Castañeda

para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

(Matemáticas Aplicada e Industriales)

Directores de tesis:

Dr. Mario Gerardo Medina Valdez

Dr. José Héctor Morales Bárcenas

Jurado

Presidente: Dr. Joaquín Delgado Fernández

Secretario: Dr. Mario Gerardo Medina Valdez

Vocal: Dr. José Héctor Morales Bárcenas

Vocal: Dr. Luis Alberto Medina Velázquez

Dedicado a
Mi querida abuela, Doña Jose

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a mis padres, a mi papá Javier por enseñarme que para lograr lo que uno quiere solo hay que trabajar, pero trabajar con entusiasmo, disfrutando día a día todo lo que hacemos y hacer las cosas bien con amor y alegría, a mi mamá Lucia, por enseñarme que lo mas importante en la vida, es la amistad y la familia que no importa cuanto te equivoques siempre hay que seguir adelante, por enseñarme a perdonar y a pedir perdón, a respetarme a mi misma sin dejar de respetar a los demás, que la humildad es un valor único que nunca debemos olvidar.

También quiero agradecer a mis amigos (Lobo, Oso, Topo, Senki, Yog, Foca, Mary) por estar conmigo siempre, porque cuando me caí en lugar de darme la mano me dieron un patada para levantarme, por su gran amistad la que valoro y respeto por sobre todas las cosas y que estoy segura que siempre va a prevalecer, gracias por estar en los momentos malos y en lo peores, sin duda alguna son otra familia que se formo con los años, muchas gracias amigos.

A Martín por toda tu paciencia, por estar conmigo siempre apesar de los malos ratos, porque cuando me enojaba en lugar de irte me abrazabas, por demostrarme que soy muy importante para ti, por tus detalles, por hacerme sonreír siempre, por todo tu cariño, gracias, sin duda eres una de las personas mas importante en mi vida, te quiero.

También quiero agradecer a las personas que ya no están conmigo, al Dr. Alfredo Nicolas Carrizosa un excelente maestro pero mejor amigo, porque me impulsaste a seguir con este sueño, por acompañarme en este camino que aunque no lo terminamos juntos siempre estuviste ahí para apoyarme y recordarme que es muy importante seguir superándonos, por la humildad que siempre mostraste no solo conmigo sino con todos los que te rodeaban, sin duda un gran ejemplo a seguir.

Mi abuela Jose, que aunque ya no estas aquí estoy segura que me cuidas y me quieres, por hacerme valorar todo, por enseñarme que hay que ser agradecida por un día mas de vida y que la familia es lo mas importante para un ser humano, que cuando hay que trabajar, hay que darlo todo, que siempre hay que hacer las cosas bien y que por muy difícil que parezca hay que aprender a amar y a respetar a los demás. A mi amigo Fer por enseñarme que puedo ser bondadosa aunque aveces te encuentres en situaciones difíciles, que el trabajo es lo mas importante aunque no tengas la necesidad de hacerlo, por estar siempre de buenas para mi, te extraño mucho.

Agradezco a mis asesores Mario y Hector por todo su apoyo, al Dr. Luis Verde porque siempre que tuve una duda estuvo ahí para apoyarme y al Dr. Luis Alberto Medina, que gracias a sus observaciones puede mejorar por mucho este trabajo.

Índice general

Introducción	I
Objetivo	V
1. Antecedentes	1
1.1. Modelo matemático del proceso de radiación	1
1.2. Transformada directa e inversa de Radon	3
1.2.1. La transformada de Radon y sus aplicaciones	3
1.2.2. Notación y terminología	7
1.2.3. La transformada de Radon en espacios de Schwartz	10
1.2.4. Propiedades de la transformada de Radon	10
1.3. Fórmula de inversión de Radon	12
1.4. Transformada de Radon en \mathbb{R}^2	14
1.5. Transformada de Hilbert	17
1.6. Series de Fourier	18
1.7. Convolución circular	18
2. Desarrollo	21
2.1. Transformada atenuada directa e inversa de Radon	21
2.2. Derivación de la fórmula de inversión	21
2.3. Perturbación del coeficiente de atenuación	27
2.4. La aproximación de la inversión	29
2.5. Modelo computacional	32
2.6. Transformada de Radon	34
2.6.1. Método de retroproyección filtrada	34
2.7. Transformada de Radon atenuada	36
3. Resultados y discusión	39
3.0.1. Resultados para la transformada de Radon	39
3.0.2. Resultados para la transformada de Radon atenuada	46
4. Conclusiones	61
A. Reconstrucción por métodos iterativos	63

B. Código computacional	67
B.1. Transformada de Radon	69
B.2. Transformada de Radon inversa	70
B.3. Transformada de Radon atenuada	73
B.4. Transformada de Radon atenuada inversa	74

Introducción

La etimología de la palabra tomografía es griega y corresponde a las palabras *τομου* que significa corte o sección y *γραφικ* que significa imagen o gráfico. De esta forma, una tomografía es una imagen de un corte o sección de un objeto.

El objetivo de las distintas modalidades de la imagenología médica tales como Tomografía Computarizada con rayos X (CT por las siglas en inglés de Computed Tomography), es obtener imágenes de los órganos internos del cuerpo de una manera no invasiva, para obtener información estructural y anatómica. A partir de imágenes médicas de CT un paciente sin necesidad de recurrir a los métodos invasivos y diagnosticar diferentes situaciones patológicas del paciente para posteriormente aplicar un tratamiento adecuado.

Una imagen puede considerarse como una representación o mapa de la distribución espacial de algunas propiedades físico-químicas del tejido. La tomografía computarizada y la resonancia magnética son modalidades digitales; que utilizan muestreos de señales analógicas continuas para la formación de imágenes que permiten la reconstrucción de objetos a partir de proyecciones.

La reconstrucción de una imagen a partir de un conjunto infinito de proyecciones se conocía desde 1917, cuando Johann Radon publicó un artículo donde apareció la transformada que hoy lleva su nombre [13]. Esta transformada nos indica que la imagen de un objeto está precisamente determinada por el conjunto infinito de todas sus proyecciones; sin embargo, en la práctica, es imposible realizar un número infinito de mediciones.

Conociendo un conjunto finito de proyecciones se pueden reconstruir la imagen, de forma aproximada, usando la transformada inversa de Radon. Algunos algoritmos para obtener esta aproximación son: Métodos directos de Fourier, retroproyección y convolución en el espacio de la señal, retroproyección y convolución en el espacio de la frecuencia filtrada, métodos iterativos, entre otros.

La transformada de Radon atenuada es una variante de la transformada de Radon clásica, en la cual los rayos son integrados sobre líneas con respecto a un peso exponencial.

Otra modalidad de la imagenología médica es la emisión tomográfica (ET), también conocida como emisión tomográfica computarizada (ECT), la cual es una rama de la imagenología médica que agrupa dos técnicas principalmete: la emisión tomográfica de positrones (PET) y la tomografía computarizada de emi-

sión monofotónica (SPECT), en donde la emisión de radiación proviene desde el interior del cuerpo material, de sitios donde se presenta una acumulación de los radiofármacos (emisores de radiación). En un órgano vivo, la distribución de radiofármacos en su interior no son ni espacial ni temporalmente homogéneas, pero la intensidad de la emisión de fotones de esta distribución se supone proporcional a la densidad acumulada de dichos radiofármacos. Una distribución espacial particular está determinada por factores estructurales y pueden ser de origen físico, fisicoquímico o fisiológico del cuerpo. Por ejemplo, las imágenes ET pueden representar la distribución espacial del metabolismo de la glucosa, del flujo sanguíneo o concentración de receptores biomoleculares, etc. Así, la ET se puede emplear para detectar tumores, o localizar áreas afectadas del corazón debido a enfermedades de las arterias coronarias o identificar regiones cerebrales estimuladas por fármacos [14].

La ET se cataloga como una técnica de imagenología funcional para distinguirla de la tomografía computarizada de rayos X (CT), que al principio revela la arquitectura estructural (anatomía) del cuerpo. La imagenologías PET y CT se pueden complementar para obtener un mejor diagnóstico sobre enfermedades en el cuerpo.

Como sugiere el término emisión tomográfica, esta modalidad de imagenología contiene dos principios básicos: la obtención de imágenes por medio de emisiones gamma (radiación emitida por el radiofármaco) y la obtención volumétrica del interior del cuerpo (llamado tomografía). Otras dos categorías alternativas a los métodos de formación de imágenes se dividen dependiendo del proceso físico involucrado, en reflexión o difracción de la radiación por un objeto (como en las técnicas de ultrasonido) y de transmisión y atenuación de la radiación por medio de un objeto (como en los rayos X o rayos gamma).

Al contrario de la luz visible, los rayos gamma pueden atravesar el cuerpo con relativa facilidad. De esta forma, si nuestros ojos pudieran ver los rayos gamma, el cuerpo aparecería ante nosotros como translúcido pero oscuro, mientras que el radiotrazador parecería ser una sustancia resplandeciente y translúcida. Después de la inyección del radiotrazador, observaríamos el movimiento de este material debido al flujo sanguíneo, dando lugar a una distribución inhomogénea de su concentración en los tejidos, haciendo posible aparecer regiones más brillantes que otras.

En la ET existen dos formas principales para visualizar esta distribución del radiofármaco: por proyecciones y por tomografía. Podemos pensar que las proyecciones son la imagen puntual de un rayo visto desde el exterior del cuerpo por un observador. En contraste, una imagen tomográfica es una representación pictórica de una rebanada. Sin embargo, en este último caso, la imagen tomográfica no se puede obtener directamente, sino mediante un procesamiento que implica una multitud de proyecciones conocido como algoritmo de reconstrucción, [15].

En la ET, los datos registrados en el "hardware" están codificados en forma de proyecciones, como mencionamos. Las imágenes tomográficas son obtenidas en la computadora a partir del proceso o algoritmo de reconstrucción de

imágenes, el cual es el objeto de estudio de este trabajo, y se describe con detalle en el siguiente capítulo, en donde introducimos la transformada de Radon.

En este trabajo se estudiará el problema en donde un medio material (dominio Ω) contiene un subdominio V , que contiene una acumulación espacial heterogénea de los radiofármacos y, por lo tanto, pequeñas variaciones del factor de atenuación $\mu(x)$. La importancia de poder cuantificar las variaciones de $\mu(x)$, radica en que podemos calcular la *dosis* D que es la distribución del radiofármaco depositada en el medio material y en el medio en diagnóstico o tratamiento circundante para evaluar el impacto de utilizar determinado tipo de radiofármaco. En principio, si conocemos el *kernel puntual*, también conocido como *la función fuente de actividad* $f(x)$ del radiofármaco, entonces es posible calcular la dosis. La dosis se define como la cantidad de energía depositada en un medio material por unidad de masa.

Nuestro punto de partida es la ecuación de transporte del campo u dentro de un dominio abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\omega \cdot \nabla u(x, \omega) + \mu(x)u(x, \omega) = f(x), x \in \mathbb{R}^2, \omega \in S^1 \quad (1)$$

en donde u representa la densidad de fotones radiados y f es la fuente de dichos fotones. La función $\mu(x)$ es la absorción de fotones por el tejido biológico. S^1 es el disco unitario en \mathbb{R}^2 y el producto interno $x \cdot \omega = s$, con ω el ángulo de inclinación para la línea.

El problema directo consiste en calcular la Transformada de Radon para obtener lo que se conoce como sinogramas. El problema inverso consiste en reconstruir la forma o localizar a $\mu(x)$ a partir de mediciones incompletas de u sobre la frontera $\partial\Omega$ donde está definida la función μ . En este problema se conoce la fuente f y supondremos que dicha fuente presenta soporte compacto (cerrado y acotado); además, supondremos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x - s\omega, \omega) = 0. \quad (2)$$

En el problema directo, la ecuación de transporte (1) con la condición auxiliar (2) admite solución única por medio del método de características. En el problema inverso consideramos a la transformada inversa de Radon como la metodología para recuperar la función $\mu(x)$ a partir de mediciones parciales de u sobre la frontera $\partial\Omega$.

La transformada de Radon atenuada $\mathcal{R}\mu$ se define como:

$$(\mathcal{R}\mu f)(\omega, s) := \int_{x \cdot \omega = s} f(x) e^{-(D\mu(x, \omega^\perp))} dx,$$

donde dx se entiende como la media de Lebesgue en \mathbb{R}^2 e integramos sobre la línea $x \cdot \omega = s$, que representa la recta con

$$\omega^\perp = (-\text{sen } \varphi, \text{cos } \varphi) \quad \mathbf{y} \quad \omega = (\text{cos } \varphi, \text{sen } \varphi).$$

Objetivo

Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es implementar computacionalmente la transformada inversa atenuada de Radon en \mathbb{R}^2 en un medio material con una heterogeneidad espacial; es decir, el coeficiente de atenuación es perturbado y deja de ser constante. El disponer de un algoritmo para calcular la transformada inversa bajo estas condiciones es útil e importante en diferentes aplicaciones.

Objetivos específicos

- 1.- **Transformada atenuada directa e inversa de Radon:** Estudiaremos la transformada atenuada de Radon y analizaremos la fórmula de inversión para poder implementarla computacionalmente.
- 2.- **Perturbación en el coeficiente de atenuación:** A continuación perturbaremos el coeficiente de atenuación, es decir; el parámetro de atenuación $\mu(x)$, que caracteriza el medio material en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una constante μ_0 para todo punto $x \in \Omega$, excepto en una pequeña subregión $V \subset \Omega$, y por lo tanto $\mu(x)$ puede representarse de la forma $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 f(x)$, con las amplitudes $|\mu_1| \approx |\mu_0|$ y $x \in V$. El problema inverso consiste en determinar la localización espacial de la heterogeneidad μ_1 de la absorción a partir de la transformada inversa atenuada de Radon.
- 3.- **Código computacional:** Finalmente implementaremos computacionalmente la transformada atenuada directa e inversa de Radon, con perturbación en el coeficiente de atenuación, para poder mostrar los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se exponen los fundamentos matemáticos para definir el modelo matemático del proceso de radiación, de la transformada de Radon, comenzando con la definición de la transformada de Radon en espacios de Schwartz en \mathbb{R}^n . También se menciona algunas propiedades de la transformada de Radon, las cuales son importantes para establecer la relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier, para después probar la fórmula de inversión, y de esta manera definir la transformada de Radon en \mathbb{R}^2 que es la dimensión en la que se va a trabajar, daremos algunos ejemplos de la transformada directa e inversa de Radon en algunas funciones particulares. Además, se concluye este capítulo con la transformada de Hilbert, series de Fourier y convolución circular para poder probar la fórmula de inversión de la transformada atenuada de Radon y así implementar computacionalmente la transformada atenuada directa e inversa de Radon con perturbación en el coeficiente de atenuación.

1.1. Modelo matemático del proceso de radiación

Actualmente, la ET emplea diferentes tipos de radiación para la obtención de los datos que permiten reconstruir las imágenes dentro del cuerpo, en casi todos los casos la idea principal para obtener estos datos sigue esencialmente el mismo principio [18] y [19].

Este principio se apoya básicamente en el hecho de que el objeto irradiado absorbe parte de la radiación que lo atraviesa. La absorción de rayos de cada material es un hecho muy útil para la ET, la cual se cuantifica por medio de la función *coeficiente de atenuación*; como mencionamos anteriormente, juega un papel muy importante en la reconstrucción de imágenes dado que cada material tiene un coeficiente característico determinado por sus propiedades físicas. Por esta razón, nos concentraremos en la construcción de un modelo matemático que nos permita plantear, de manera precisa, el proceso de reconstrucción del coeficiente de atenuación de un material, a partir de sus proyecciones.

A continuación, describiremos un modelo de la ET para radiación de alta

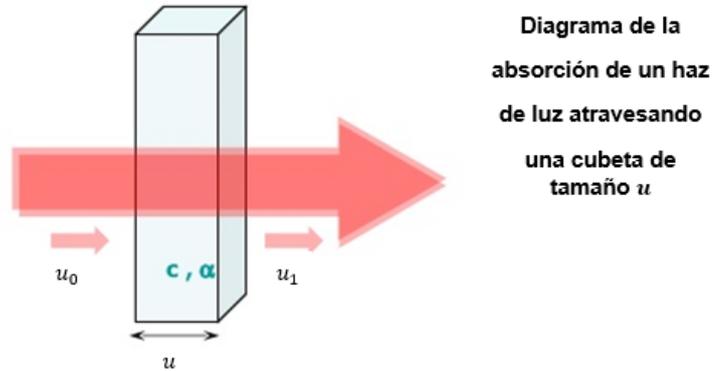


Figura 1.1: Si un haz monoenergético de fotones, incide perpendicularmente sobre un material se producirá una atenuación o disminución del número de fotones del haz.

energía (>100 kev), para ello tendremos en cuenta las siguientes suposiciones:

- 1.- Los fotones viajan en líneas rectas y los haces considerados son monoenergéticos.
- 2.- Al interactuar con la materia, los rayos X o γ se atenúan; es decir, su intensidad decrece.
- 3.- Cada material está caracterizado por su coeficiente de atenuación, μ .
- 4.- La intensidad u de cada haz de rayos X o γ se atenúan de acuerdo con la *ley de Atenuación*, (ver 1.1).

$$\frac{du}{ds} = -\mu u,$$

donde ds denota la longitud de arco de la trayectoria descrita por el haz.

Por ejemplo, consideremos un fuente de fotones que inciden en un objeto \mathcal{O} , el cual absorbe radiación de acuerdo con un coeficiente de atenuación μ , que supondremos constante. Si fijamos un sistema de coordenadas x, y , el coeficiente de atenuación de cada rebanada o corte transversal de \mathcal{O} estará dado por

$$\mu_c(x, y) = \mu(x, y)$$

con $c \in [a, b]$, fijo y $x, y \in \mathbb{R}$. Por simplicidad denotaremos

$$\mu_c(x, y) = f(x, y).$$

Al interactuar el haz de rayos X con la rebanada, de acuerdo con la ley de Beer, la intensidad I del haz satisface la ecuación diferencial

$$\frac{du}{ds} = -f(x, y)u.$$

Si denotamos con l a la trayectoria descrita por el haz de rayos X, con u_0 e u_1 sus respectivas intensidades, antes y después de atravesar el corte, entonces la atenuación promedio de la intensidad del haz al atravesar totalmente el corte está dada por

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{u} = - \int_l f(x, y) ds.$$

Por lo tanto,

$$\log \left(\frac{u_0}{u_1} \right) = \int_l f(x, y) ds,$$

cantidad que Radon denominó proyección de f a lo largo de l . Es importante notar que el valor que está a la izquierda de la igualdad anterior es justamente lo que se mide al irradiar el objeto estudiado con rayos X. Si estas mediciones se realizan en muchas direcciones, es natural preguntarse: ¿es posible determinar f si se conocen todas sus proyecciones?

La respuesta es afirmativa, pues como mencionamos anteriormente, Radon demostró que si f es continua y de soporte compacto, entonces está determinada de manera única por todas sus proyecciones, y dio una fórmula explícita para recobrar f ; sin embargo en la práctica no se conocen todas las proyecciones de f , ya que es imposible hacer una infinidad de mediciones; además, debido a que el exceso de radiación es dañino para el paciente, es recomendable minimizar la exposición del mismo a los rayos X.

Es importante notar que no se puede hallar una reconstrucción exacta del objeto, pues el modelo de atenuación antes descrito, es sólo una aproximación a la realidad y más aún, solamente se conoce un número finito de proyecciones. Sin embargo, este problema se ha resuelto de diferentes maneras con excelentes resultados [20]. Por ejemplo, la retroproyección filtrada, métodos iterativos, entre otros que se mencionarán posteriormente.

1.2. Transformada directa e inversa de Radon

1.2.1. La transformada de Radon y sus aplicaciones

La transformación que tiene proyecciones $1D$ de cada objeto en $2D$ en diferentes ángulos, de un mismo corte transversal o rebanada se llama, *transformada de Radon*. Teniendo un conjunto de proyecciones podemos reconstruir la

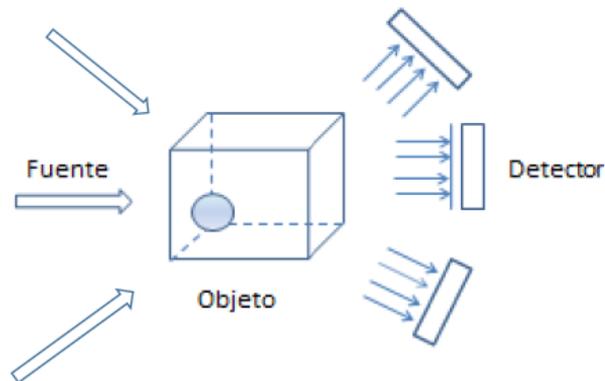


Figura 1.2: Geometría del arreglo fuente-objeto-detector: La información se obtiene adquiriendo proyecciones del órgano o región de interés desde distintos ángulos, que luego son utilizadas para la reconstrucción de la imagen.

sección transversal axial aproximadamente, la aplicación de esta transformada y su inversa se lleva a cabo tanto en PET, SPECT como en CT.

La medida fundamental requerida por un escáner de CT se mide mediante la cuantificación de la atenuación de los rayos X, a lo largo de una línea entre fuente, objeto y un detector, (ver Figura 1.2).

Por otro lado, los detectores de un tomógrafo PET están dispuestos en anillo alrededor del paciente. La modalidad PET está basada en la detección de la aniquilación de dos fotones de 511 KeV, los cuales se originan de fuentes de emisión beta (β). Los dos fotones son destacados, dentro de una ventana temporal de aproximadamente 12 ns, por el escáner y deben estar alineados sobre la línea de respuesta (LOR), que conecta el centro de los dos detectores. Para adquirir eventos coincidentes de aniquilación de fotones, se requieren tres pasos. Primero, la localización del par de detectores se determina por el evento coincidente por medio de la ventana de tiempo. Segundo, se verifica que la intensidad del pulso del foton detectado esté dentro del intervalo de energía de los 511 keV. Tercero, la posición del LOR se determina en términos de coordenadas polares para almacenar el evento en la memoria de la computadora.

Para la obtención de la imagen estos fotones detectados son convertidos en señales eléctricas. Esta información posteriormente se somete a procesos de filtrado y reconstrucción, gracias a los cuales se obtiene una imagen, (ver Figura 1.3).

Un escáner de CT estima el valor de μ en cada pixel dentro de una sección transversal. Sin embargo, diferentes equipos de CT tienen diferentes tubos de rayos X, que a su vez tiene diferentes energías efectivas, el mismo objeto

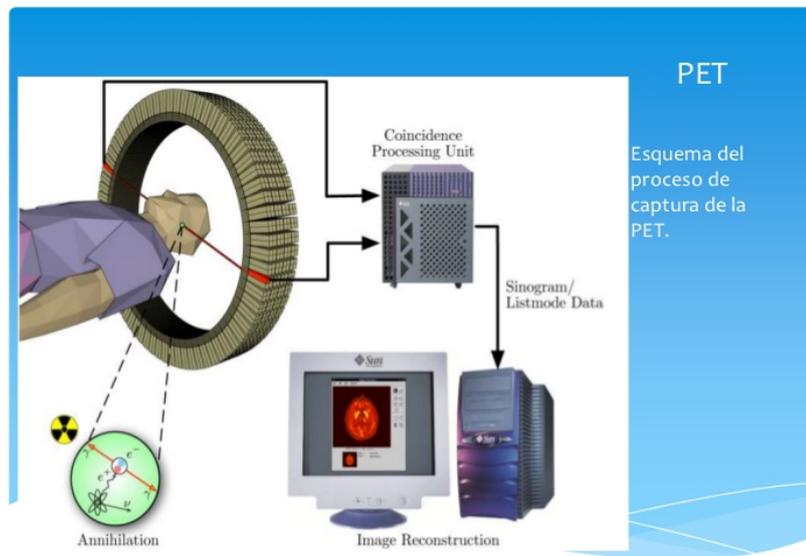


Figura 1.3: Esquema del proceso de captura de la PET: La imagen se obtiene gracias a que los tomógrafos son capaces de detectar los fotones gamma emitidos por el paciente. Estos fotones gamma de 511keV son el producto de una aniquilación entre un positrón, emitido por el radiofármaco, y un electrón cortical del cuerpo del paciente. Esta aniquilación da lugar a la emisión, fundamentalmente, de dos fotones. Para que estos fotones acaben por conformar la imagen deben detectarse "en coincidencia"; es decir, al mismo tiempo; en una ventana de tiempo adecuada (nanosegundos), además deben provenir de la misma dirección y sentidos opuestos, pero además su energía debe superar un umbral mínimo que certifique que no ha sufrido dispersiones energéticas de importancia en su trayecto (fenómeno de dispersión) hasta los detectores. Los detectores de un tomógrafo PET están dispuestos en anillo alrededor del paciente y, gracias a que detectan en coincidencia a los fotones generados en cada aniquilación, conformarán la imagen. Para la obtención de la imagen estos fotones detectados son convertidos en señales eléctricas. Esta información posteriormente se somete a procesos de filtrado y reconstrucción, gracias a los cuales se obtiene la imagen.

produce diferentes valores de μ en diferentes escáneres. Con el fin de comparar datos entre distintos escáneres se define el número CT a partir de los coeficientes de atenuación.

Por ejemplo;

$$CT = 1000 \times \frac{\mu - \mu_{agua}}{\mu_{agua}},$$

donde μ es el coeficiente de atenuación de la región de interés.

En la formación de imágenes planas convencional los eventos individuales son almacenados en una matriz de componentes x, y , en cambio, en el sistema PET se almacenan los eventos en forma de un *sinograma*. En el contexto de las tomografías la transformada de Radon se suele llamar sinograma [17], que es la representación gráfica de una matriz en la que el índice de las filas representa el ángulo que forman la línea de medida LOR con el eje x y el índice de las columnas determina la distancia t de la línea de la LOR al centro de coordenadas del sistema de detección. Consideremos, por ejemplo, que el evento de aniquilación ocurre en la posición (*) marcada sobre la figura (1.4). A el evento de coincidencia es detectado a lo largo de LOR indicado por un segmento de flecha azul en la figura. No se conoce a priori, a lo largo de la LOR dónde ocurrió el evento, por lo que su tiempo exacto de arribo no es comparable. La única información que poseemos es la posición de los dos detectores (dispuesto en un arreglo anular) que registran el evento; es decir, la localización del LOR se establece a partir de la posición (x, y) de los dos detectores. Muchos eventos de coincidencia pueden aparecer desde diferentes localizaciones a lo largo del LOR, y todos pueden ser detectados por el mismo par de detectores y almacenados en el mismo pixel.

A partir de los datos almacenados en sinogramas, cada LOR se determina por medio de una distancia t de esta línea al centro del campo de visión que se escanea y un ángulo θ de orientación del mismo LOR, (ver figura 1.4). Si graficamos la distancia t sobre el eje x y medimos el ángulo respecto al eje y , entonces el evento coincidente a lo largo del LOR(t, θ) asignará un punto sobre las coordenadas t, θ . Cuando se consideren todas las proyecciones alrededor del campo de decisión, la gráfica de los diferentes LORs resultará en el área sombreada que se muestra en la figura (1.4.B), alrededor de la recta marcada con la coordenada r , que es lo que llamaremos el sinograma.

Los datos de PET se adquieren directamente en sinogramas en una matriz que es, básicamente, un histograma bidimensional de los LORs en las coordenadas distancia-ángulo en un plano. Así, cada LOR (y por lo tanto, cada par de detectores) corresponde a un pixel particular (o elemento) en el sinograma, caracterizado por las coordenadas r y ϕ . El LOR está determinado de forma única por cada detección de un evento de coincidencia, el correspondiente pixel es localizado en el sinograma y la cuenta del evento se suma al pixel. Por lo tanto, la formación completa del sinograma habrá tomado en cuenta que en cada pixel, el total de eventos coincidentes detectados durante el tiempo de conteo por pares de detectores, se van sumando conforme determinamos distintos LORs

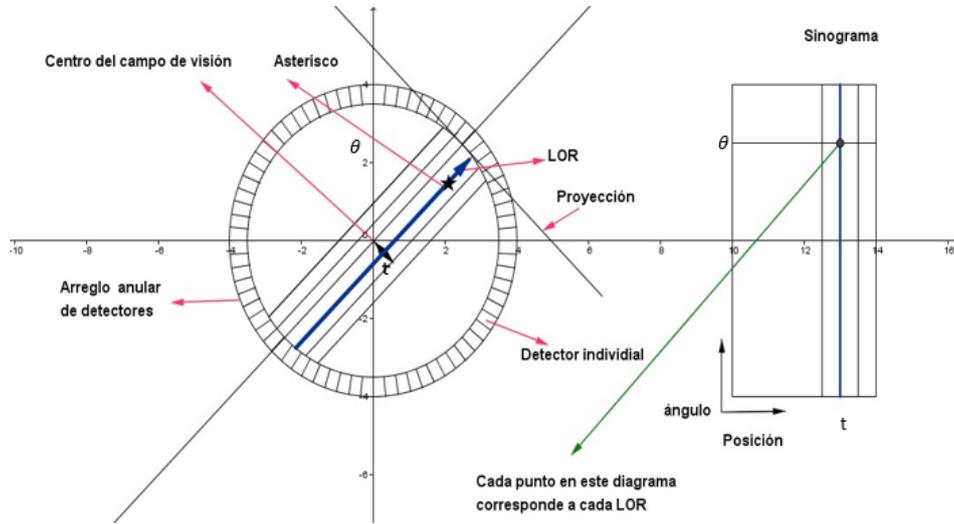


Figura 1.4: Los datos de adquisición de PET están dados en forma de sinograma, Cada dato LOR en A está dado en coordenadas (t, θ) . A cada valor de t y θ en A, le corresponde un valor en el sinograma dado en B.

[15]; es decir, variamos r y ϕ , obteniendo de esta forma, una imagen completa.

A continuación, se presentará la definición de la transformada de Radon, algunas de sus propiedades y la transformada de Radon inversa. Se dará una breve explicación de lo que es un sinograma en el contexto de esta transformada.

1.2.2. Notación y terminología

Plantaremos nuestro problema en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ elementos de \mathbb{R}^n , definimos el producto interno de x con y como

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

y la norma de x como

$$|x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}.$$

La esfera unitaria se define como

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Dados $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in S^{n-1}$ definimos el hiperplano $\mathcal{H}_{t,\omega}$ de \mathbb{R}^n por

$$\mathcal{H}_{t,\omega} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \omega = t\}, \quad (1.1)$$

y si elegimos vectores v_1, v_2, \dots, v_{n-1} tales que $\omega, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ sea una base ortonormal de \mathbb{R}^n , entonces $\mathcal{H}_{t,\omega}$ se describe como

$$\mathcal{H}_{t,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = t\omega + s_1v_1 + \dots + s_{n-1}v_{n-1}, s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{R}^n\}$$

Por lo tanto, si f es integrable sobre $\mathcal{H}_{t,\omega}$ entonces

$$\int_{\mathcal{H}_{t,\omega}} f d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t\omega + s_1v_1 + \dots + s_{n-1}v_{n-1}) d_{s_1} d_{s_2} \dots d_{s_{n-1}}.$$

Es importante notar que $\mathcal{H}_{t,\omega} = \mathcal{H}_{-t,-\omega}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathcal{S}^{n-1}$.

Todo vector unitario $\omega \in \mathcal{S}^1$ es de la forma $\omega = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, así que para $n = 2$, escribimos $l_{t,\theta}$ en lugar de $\mathcal{H}_{t,\omega}$. Así, cada línea $l_{t,\omega}$ está dada por

$$l_{t,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot \omega = t\}$$

y se parametriza como

$$l_{t,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = t\omega + s\omega^\perp, s \in \mathbb{R}\},$$

donde ω es ortogonal a $l_{t,\omega}$, $\omega^\perp = v_1 = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ y t es la distancia de $l_{t,\omega}$ al origen (ver figura 1.5).

Si f es integrable sobre $l_{t,\omega}$, la integral de f a lo largo de la línea $l_{t,\omega}$ está dada por

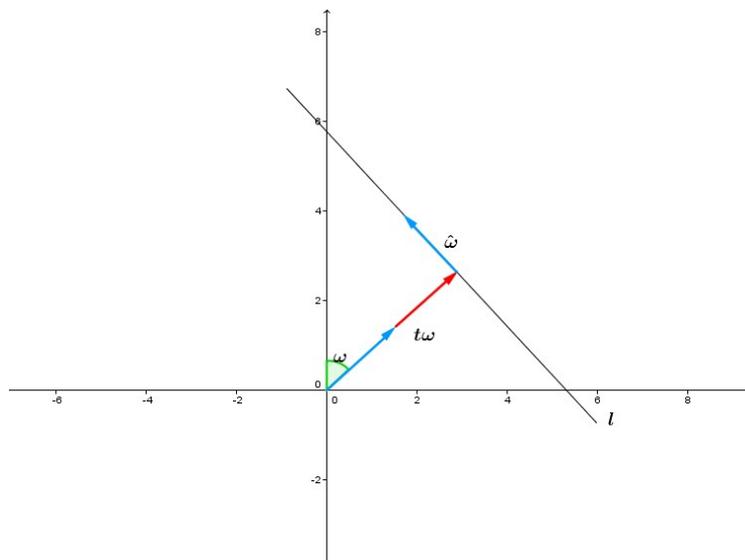
$$\begin{aligned} \int_{l_{t,\omega}} f ds &= \int_{\mathbb{R}} f(t\omega + s\omega^\perp) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \varphi - s \sin \varphi, t \sin \varphi + s \cos \varphi) ds \end{aligned} \quad (1.2)$$

Trabajaremos con funciones cuyas derivadas decrecen rápidamente, por lo que requerimos de los espacios de Schwartz. Para introducir la definición del espacio de Schwartz haremos uso de la siguiente notación. Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ una n -ada de enteros no negativos, usamos la notación

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad y \quad D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Si α y β son multi-índices y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos la seminorma $\|f\|_{\alpha,\beta}$ de f como

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|.$$

Figura 1.5: Descripción de la recta l

Definición 1.1. El espacio de Schwartz \mathcal{S}^n se define como el conjunto de funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} < \infty,$$

para todo α, β .

Se verifica fácilmente que el espacio de Schwartz es un subespacio vectorial [8] de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones medibles de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que su norma

$$\|f\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

norma obtenida a partir del producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \quad (1.3)$$

y de la norma dada por

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle,$$

en donde dos funciones $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ son equivalentes si el conjunto de los x tales que $f(x) \neq g(x)$ es de medida cero.

A continuación, presentamos la transformada de Radon definida para funciones en espacios de Schwartz, establecemos algunas de sus propiedades básicas y presentamos la solución de Radon al problema de reconstrucción.

1.2.3. La transformada de Radon en espacios de Schwartz

Definición 1.2. Si $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in S^{n-1}$ y $f \in S(\mathbb{R}^n)$, definimos la transformada de Radon de f como

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{\mathcal{H}_{t, \omega}} f d\sigma. \quad (1.4)$$

donde $d\sigma = d_{s_1} d_{s_2} \cdots d_{s_{n-1}}$.

Observemos que la integral en el lado derecho de (1.4) está bien definida, pues si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\sup_{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}} \{(1 + s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_{n-1}^2)^n |f(t\omega + s_1 v_1 + \cdots + s_{n-1} v_{n-1})|\} = C < \infty$$

Por lo tanto, para todo s_1, s_2, \dots, s_{n-1} se tiene que

$$|f(t\omega + s_1 v_1 + \cdots + s_{n-1} v_{n-1})| \leq \frac{C}{(1 + s_1^2 + \cdots + s_{n-1}^2)}$$

y como el lado derecho de esta última desigualdad es un elemento en $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, entonces también el lado izquierdo lo es.

A continuación, daremos un breve ejemplo para observar como opera la transformada de Radon

Ejemplo 1.3. Calcularemos la transformada de Radon para $f(x) = e^{-|x|^2}$, $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in S^{n-1}$.

Si $\omega, v_1, \dots, v_{n-1}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^n , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(t, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-(t^2 + s_1^2 + \cdots + s_{n-1}^2)} d_{s_1} \dots d_{s_{n-1}} \\ &= e^{-t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds \right)^{n-1} \\ &= \pi^{\frac{n-1}{2}} e^{-t^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde $s^2 = \sum_{j=1}^{n-1} s_j^2$.

1.2.4. Propiedades de la transformada de Radon

1.- La transformada de Radon es lineal [3]; esto es, $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\mathcal{R}(cf) = c\mathcal{R}f \quad \mathbf{y} \quad \mathcal{R}(f + g) = \mathcal{R}f + \mathcal{R}g$$

2.- La transformada de Radon es una función par [3]; es decir,

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \mathcal{R}f(-t, -\omega), t \in \mathbb{R}, \omega \in S^{n-1}$$

Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cada ω en S^{n-1} , definimos la transformada de Radon en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como $\mathcal{R}_\omega f(t) = \mathcal{R}f(t, \omega)$, para toda $t \in \mathbb{R}$. A la función $\mathcal{R}_\omega f$ se le conoce como la proyección de f en la dirección ω .

Lema 1.4. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\omega \in S^{n-1}$, entonces la función $\mathcal{R}_\omega f$ es un elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demostración. Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces para todo k y m en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que

$$\sup_{t, \dots, s_{n-1}} \left\{ (1 + |t|^k (1 + s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)^n \left| \frac{d^m}{dt^m} f(t\omega + \dots + s_{n-1}v_{n-1}) \right| \right\} = C < \infty.$$

Por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned} \left| t^k \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{R}_\omega f(t) \right| &= \left| t^k \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d^m}{dt^m} f(t\omega + s_1 v_1 + \dots + s_{n-1} v_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1} \right| \\ &\leq \frac{C|t|^k}{1+|t|^k} \int \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{(1+s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)^n} \\ &\leq C \int \frac{ds_1 \dots ds_{n-1}}{(1+s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)^n}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Como el lado derecho de (1.6) es un número positivo, independiente de t , entonces, para todo k y m en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^k \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{R}_\omega f(t) \right| < \infty;$$

es decir, $\mathcal{R}_\omega f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

A continuación, establecemos la relación entre las transformadas de Fourier y de Radon, la cual nos permitirá resolver el problema de inversión de la transformada de Radon [21].

Definición 1.5. Para $f \in \mathcal{S}^{n-1}$, definimos la transformada de Fourier de f como la función \hat{f} dada por

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-iy \cdot x} dx, \tag{1.7}$$

y la transformada inversa de Fourier de f como la función \check{f} dada por

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy \cdot x} dy \tag{1.8}$$

Teorema 1.6. *Teorema central de la rebanada.*

Si $r \in \mathbb{R}$, $\omega \in S^{n-1}$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\hat{\mathcal{R}}_\omega f(r) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(r\omega)$$

Demostración. En vista que $\mathcal{R}_\omega f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, para cada $\omega \in S^{n-1}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}_\omega f(r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(t, \omega) e^{irt} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t\omega + \sum s_j v_j) e^{-irt} d_{s_1} \dots d_{s_{n-1}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-irx \cdot \omega} dx \\
&= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(r\omega).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

En la primera igualdad empleamos la definición de transformada de Fourier en \mathbb{R} , luego la definición de transformada de Radon de f , finalmente, hicimos el cambio de variables $x = t\omega + \sum_{j=0}^{n-1} s_j v_j$, del cual se sigue que $t = x \cdot \omega$ □

1.3. Fórmula de inversión de Radon

Teorema 1.7. *Fórmula de inversión de Radon.*

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathcal{R}}_\omega f(r) e^{irx \cdot \omega} |r|^{n-1} dr d\omega. \tag{1.10}$$

Demostración. Por la fórmula de inversión de Fourier (1.8), si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{ix \cdot y} dy$$

Bajo el cambio de variables $y = r\omega$ en coordenada esféricas y usando el Teorema (1.6) tenemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \hat{f}(r\omega) e^{irx \cdot \omega} r^{n-1} dr d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \hat{\mathcal{R}}_\omega f(r) e^{irx \cdot \omega} r^{n-1} dr d\omega \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \hat{\mathcal{R}}_\omega f(r) e^{irx \cdot \omega} r^{n-1} dr d\omega,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

hemos usado la Propiedad 2 de la transformada de Radon para obtener la última igualdad. □

Por lo anterior, podemos observar que, si conocemos todas las proyecciones de f , entonces f se puede recuperar realizando las operaciones siguientes:

- 1.- Para cada ω se calcula la transformada de Fourier de la proyección $\mathcal{R}_\omega f$.

2.- Para cada ω se calcula la integral radial de la transformada de Fourier de la proyección obtenida en el punto anterior; es decir, se calcula

$$\hat{\mathcal{R}}f(t, \omega) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{R}_{\omega}f(r) e^{irt} |r|^{n-1} dr.$$

3.- Finalmente se recupera $f(x)$ realizando la proyección inversa

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} \hat{\mathcal{R}}f(x \cdot \omega, \omega) d\omega.$$

A partir de esta fórmula, de inversión de Radon se puede implementar un algoritmo y resolverlo computacionalmente.

Ejemplo 1.8. Encontrar la función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ cuya transformada de Radon está dada por

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \pi e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \omega \in S^2.$$

Al calcular la segunda derivada de $\mathcal{R}f(t, \omega)$ respecto de t , obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{R}f(t, \omega) = \pi(4t^2 - 2)e^{-t^2}.$$

En consecuencia

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} (4(x \cdot \omega)^2 - 2) e^{(x \cdot \omega)^2} \sin \varphi d\theta d\varphi,$$

donde $\omega = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$, por lo tanto, al hacer una rotación que transforma al vector $(0,0,1)$ en el vector ω se tiene

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (4|x|^2 \cos^2 \varphi - 2) e^{-|x|^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

integrando con respecto a θ obtenemos

$$f(x) = -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (4|x|^2 \cos^2 \varphi - 2) e^{-|x|^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\varphi.$$

Finalmente, haciendo $u = |x| \cos \varphi$, obtenemos $du = -|x| \sin \varphi d\varphi$, y

$$f(x) = -\frac{1}{2|x|} \int_0^{|x|} (4u^2 - 2) e^{-u^2} du = e^{-|x|^2}.$$

Observemos que la función obtenida para f coincide, salvo constantes, con el Ejemplo 1.3.

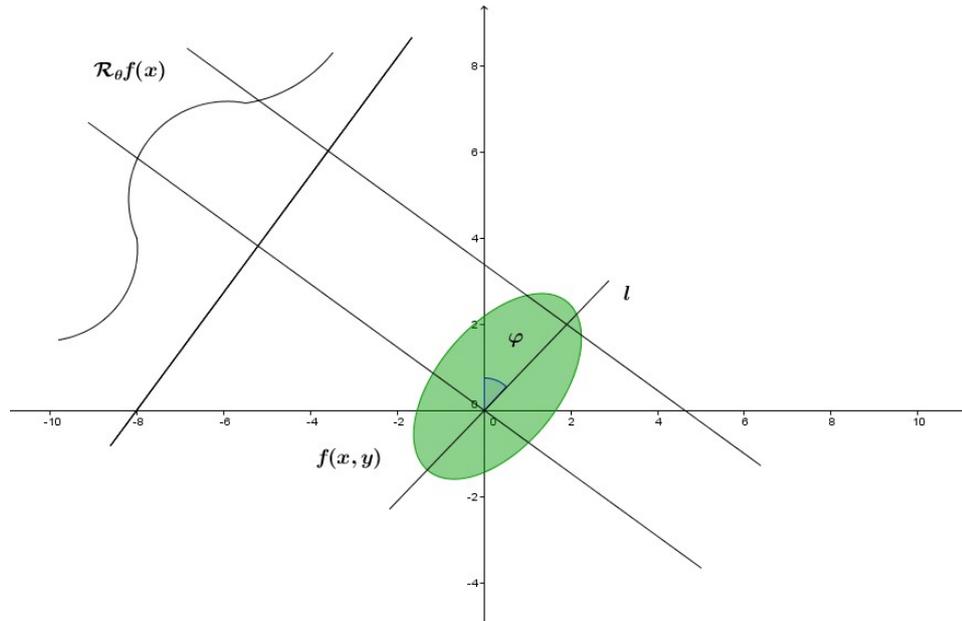


Figura 1.6: Transformada de Radon

1.4. Transformada de Radon en \mathbb{R}^2

En dos dimensiones, la transformada de Radon es definida como la integral de línea a lo largo de una línea inclinada con ángulo φ desde el eje x , y a una distancia t del origen, como se muestra en la Figura 1.6.

Matemáticamente, esto se escribe como

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - t) dx dy, \quad (1.12)$$

donde δ es la distribución delta de Dirac, $-\infty < t < \infty$, y $0 \leq \varphi < \pi$. Esta distribución indica el camino sobre la proyección. La función $\mathcal{R}f(t, \omega)$, es la transformada de Radon de $f(x, y)$; es decir, es la proyección en una dimensión de $f(x, y)$ a un ángulo φ [23] [24].

En términos de t y s , donde

$$\begin{aligned} x &= y \cos \varphi - s \sin \varphi, & t &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y &= t \sin \varphi - s \cos \varphi, & s &= y \cos \varphi + x \sin \varphi, \end{aligned}$$

la Ecuación (1.12) se puede expresar como

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \varphi - s \sin \varphi, t \sin \varphi + s \cos \varphi) ds = \int_{t, \omega} f(x, y) ds$$

Una imagen puede ser representada por una función $f(x, y)$ donde las coordenadas (x, y) indican la posición de un punto en la imagen y en el caso de la

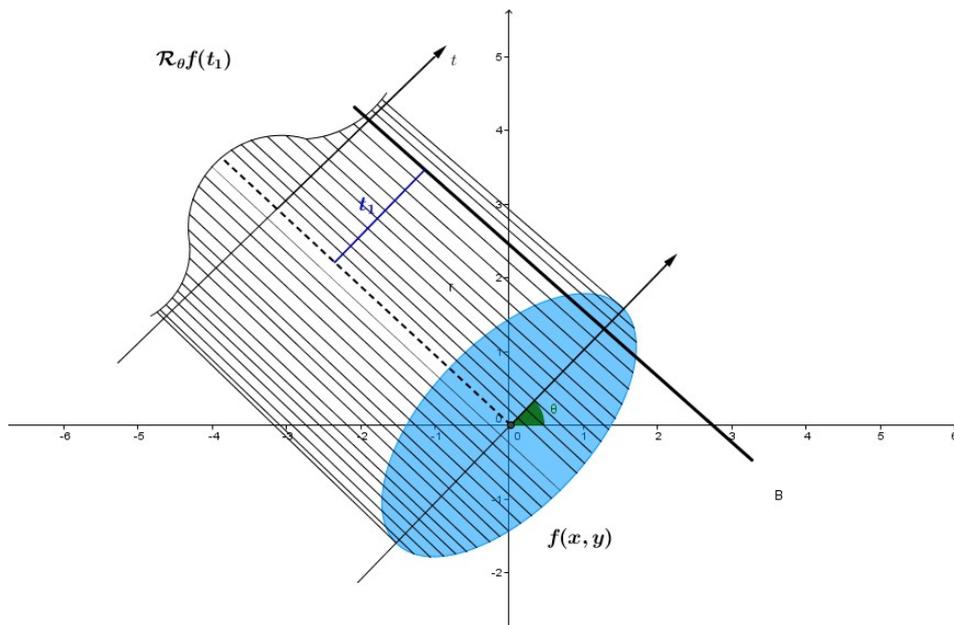


Figura 1.7: Perfil o proyección

tomografía de emisión ET, el valor de f es la distribución del radionúclido (emisor de radiación) en el espacio de interés. La suma de todas las atenuaciones del rayo en los diferentes puntos que atraviesa en la imagen, se superponen a un único valor que corresponde con la transformada de Radon en el punto t_1 y en la dirección θ , por ese motivo a $\mathcal{R}_\omega f(t_1)$ se le llama rayo suma. El conjunto de todos los rayos suma en una misma dirección se llama perfil o proyección general, (ver Figura 1.7).

A continuación, mostraremos algunos ejemplos de la transformada de Radon en \mathbb{R}^2

Ejemplo 1.9. Hallar la transformada de Radon de la función

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}.$$

Por definición de transformada de Radon, tenemos que

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \varphi - s \sin \varphi, t \sin \varphi + s \cos \varphi) ds,$$

sustituyendo f se tiene que

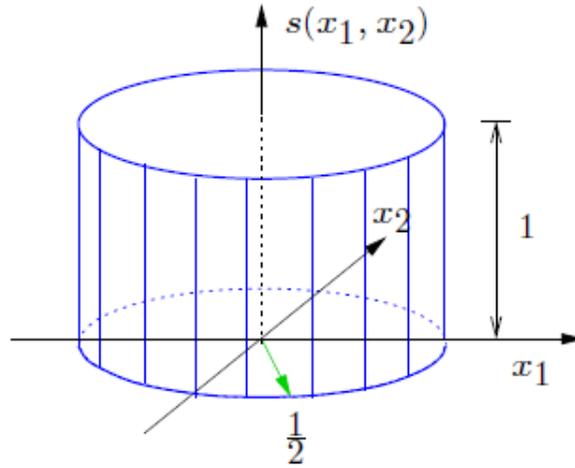


Figura 1.8: cilindro para el ejemplo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}f(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t \cos \varphi - s \sin \varphi)^2 - (t \sin \varphi + s \cos \varphi)^2} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 - s^2} ds \\
 &= e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \\
 &= \sqrt{\pi} e^{-t^2}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ejemplo 1.10. Sea $s(x, y) = \text{circ}(x, y)$, dada por, (ver Figura 1.8)

$$\text{circ}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como

$$\text{circ}(t \cos \varphi - r \sin \varphi, t \sin \varphi + r \cos \varphi) = \text{circ}(t, r)$$

Podemos decir que la transformada de Radon es independiente de θ , y $x^2 + y^2 = t^2 + r^2 \leq \frac{1}{4}$; es decir, $r \leq \sqrt{\frac{1}{4} - t^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4t^2}$, entonces la transformada de Radon esta dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}\text{circ}(t, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} \text{circ}(t, r) dr \\
 &= \int_{-\frac{1}{2} \sqrt{1-4t^2}}^{\frac{1}{2} \sqrt{1-4t^2}} dr \\
 &= \sqrt{1 - 4t^2}, t \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Por lo tanto,

$$\text{circ}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - 4t^2} & \text{si } t \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

la cual es independiente de φ .

1.5. Trransformada de Hilbert

Comúnmente la funciones o señales se definen completamente en el dominio del tiempo o de la frecuencia, y la transformada de Fourier realiza un cambio de la función o señal de un dominio a otro. La transformada de Hilbert, \mathcal{H} , conforma la señal con la mitad de la información en el dominio de tiempo y la otra mitad en el dominio de la frecuencia a continuación daremos la definición de la transformada de Hilbert.

Para una función o señal $s(t)$, la transformada de Hilbert se define por medio de la convolución de $s(t)$ y $\frac{1}{\pi t}$ obteniendo $\hat{s}(t)$. Por lo tanto, la transformada de Hilbert se puede interpretar como la salida de un sistema LTI (Linear Time-Invariant) o sistema lineal e invariante en el tiempo, con entrada $s(t)$ y respuesta al impulso $\frac{1}{\pi t}$. Entonces,

$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}s(t) = (h * s)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

donde $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ y considerando la integral como el valor principal (*vp*), lo que evita la singularidad $t = \tau$. Dicha fórmula es equivalente a una rotación de $\pi/2$ en la fase de cada componente armónica de la señal analítica de $s(t)$ como

$$s_a(t) = s(t) + i\hat{s}(t)$$

donde la parte real de $s_a(t)$ es la señal en el tiempo, mientras la parte imaginaria $\hat{s}(t)$ es la señal en la frecuencia.

La transformada de Hilbert posee una respuesta dada por la Transformada de Fourier:

$$H(\omega) = \hat{h}(\omega) \begin{cases} +j & \text{si } \omega < 0 \\ -j & \text{si } \omega > 0 \end{cases}$$

o de manera equivalente:

$$H(\omega) = \hat{h}(\omega) = -j \cdot \text{sgn}(\omega)$$

donde j es la unidad imaginaria.

Y como:

$$\hat{\hat{s}}(\omega) = H(\omega) \cdot \hat{s}(\omega),$$

la transformada de Hilbert produce es efecto de desplazar la componente de frecuencias negativas de $s(t) + 90^\circ$. También tenemos que $H^2(\omega) = -1$, por lo que multiplicando la ecuación anterior por $-H(\omega)$, obtenemos:

$$\hat{s}(\omega) = -H(\omega) \cdot \hat{\hat{s}}(\omega),$$

de donde obtenemos la transformada inversa de Hilbert,

$$s(t) = -(h * \hat{s})(t) = -\mathcal{H}(\hat{s}(t)).$$

1.6. Series de Fourier

Las series de Fourier reciben su nombre en honor a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que hizo importantes contribuciones al estudio de las series trigonométricas, que previamente habían sido consideradas por Leonhard Euler, Jean le Rond d'Alembert y Daniel Bernoulli, Fourier introdujo las series con el propósito de resolver la ecuación de calor.

Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples.

El área de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos.

A continuación daremos la definición de la serie de Fourier.

Si $f(t)$ es una función periódica y su período es T , la serie de Fourier asociada a $f(t)$ es:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right],$$

donde a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de Fourier que toman los valores:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt.$$

Por la identidad de Euler las formulas anteriores se pueden expresar también en su forma compleja [11]:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T}t}, \quad (1.15)$$

los coeficientes ahora serían:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{2\pi i \frac{n}{T}t} dt. \quad (1.16)$$

1.7. Convolución circular

Dada una secuencia periódica $f(n)$ de longitud N a convolucionar con otra secuencia periódica $g(n)$ también de longitud N , el proceso de convolución exige $N \times N$ productos e igual cantidad de sumas. Empleando una operación conocida como FFT1 para calcular la convolución, se logra reducir este número a un múltiplo de $N \log_2 N$.

Dado que la FFT es una operación que se aplica a señales periódicas, es lógico pensar que los operandos de la convolución por FFT también son periódicos. Por consecuencia, a la convolución lograda por FFT se le conoce como

convolución cíclica o *convolución circular*. Hay algunas diferencias fundamentales que deben considerarse como son:

- La convolución circular opera sobre secuencias periódicas.
- Ambas secuencias a convolucionar tiene la misma longitud.
- La longitud de una secuencia periódica se refiere a la longitud de un periodo.
- El origen de ambas secuencias a convolucionar es forzosamente el primer elemento listado.

Definición 1.11. Secuencia periódica

Sea la secuencia periódica f con longitud $N = 3$ tal como se ilustra a continuación (note que en la ecuación hay un origen definido)

$$f = [\dots, f(0), f(1), f(2), f(0), f(1), f(2), \dots] \quad (1.17)$$

Esta secuencia también puede escribirse con índices no periódicos de la forma siguiente

$$f = [\dots, f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \dots] \quad (1.18)$$

Ambas formas, la periódica y la no periódica se consideran equivalentes y serán usadas para demostrar la convolución circular.

Definición 1.12. El origen de una secuencia periódica será el primer elemento listado en la secuencia.

Definición 1.13. *Desplazamiento hacia adelante de una secuencia periódica* Un desplazamiento hacia adelante implica un corrimiento hacia la izquierda de los elementos de la secuencia. En este caso, el elemento más a la izquierda sale por la izquierda e ingresa por la derecha; es decir,

$$\begin{aligned} x(n) &= [x(0), x(1), x(2)] \\ x(n+1) &= [x(1), x(2), x(0)] \end{aligned} \quad (1.19)$$

Definición 1.14. *Desplazamiento hacia atrás de una secuencia periódica* Cuando una secuencia periódica se atrasa un paso, el elemento más a la derecha sale por la derecha e ingresa por la izquierda; es decir,

$$\begin{aligned} x(n) &= [x(0), x(1), x(2)] \\ x(n+1) &= [x(2), x(0), x(1)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

A continuación daremos la definición de la convolución circular de dos secuencias periódicas.

Teorema 1.15. *Dada la secuencia periódica $f(n)$ de longitud N y dada la secuencia $g(n)$ también periódica y de longitud N . La convolución queda representada como:*

$$h_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k g[j - k], \quad [j - k] := j - k \bmod N$$

Capítulo 2

Desarrollo

2.1. Transformada atenuada directa e inversa de Radon

Sean μ una función suficientemente suave en \mathbb{R}^2 y $x \in \mathbb{R}^2, \omega \in S^1$, definimos la integral de μ a lo largo de la recta por x en la dirección ω a partir del punto x , como

$$(D\mu)(x, \omega) = \int_0^\infty \mu(x + t\omega) dt. \quad (2.1)$$

La transformada atenuada de Radon \mathcal{R}_μ está definida por

$$\mathcal{R}_\mu f = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) e^{-(D\mu)(x, \omega^\perp)} dx, \quad (2.2)$$

donde dx es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 , $x \cdot \omega = s$ y

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \text{sen } \varphi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \omega^\perp = \begin{pmatrix} -\text{sen } \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Para $\mu = 0$, \mathcal{R}_μ es la transformada de Radon definida en 1.12. La transformada atenuada de Radon es la integral adecuada para estudiar la tomografía por emisión de positrones [25]. En emisión tomográfica, f representa la distribución de la actividad de un radiofármaco dentro del cuerpo y μ es el coeficiente de atenuación de un tejido. El problema consiste en recuperar f a partir de $g = \mathcal{R}_\mu f$, donde μ es conocida. Para $\mu = 0$ el problema se resuelve por la fórmula de inversión de Radon.

Cuando μ es constante en un conjunto convexo, el problema se puede reducir a la transformada exponencial de Radon, (Transformada atenuada de Radon) para la cual debemos hallar una fórmula de inversión.

2.2. Derivación de la fórmula de inversión

Sea

$$h = \frac{1}{2}(I + i\mathcal{H})\mathcal{R}_\mu, \quad (2.3)$$

donde \mathcal{R} es la transformada de Radon y \mathcal{H} es la transformada de Hilbert (ver apéndice 1.5) dada por

$$\mathcal{H}g(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{s-t} dt,$$

que actúa sobre la segunda variable de \mathcal{R}_μ .

Lema 2.1. Sean $\omega = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ y $u(x, \omega) = h(\omega, x \cdot \omega) - (D - \mu)(x, \omega^\perp)$, entonces $u_l(x)$,

$$u(x, \omega) = \sum_{l > 0 \text{ impar}} u_l(x) e^{il\varphi}.$$

Demostración. De acuerdo a la expansión de Fourier de una función periódica en su forma compleja (ver 1.15) se propone la expansión de Fourier para D_μ y h como

$$D\mu(x, \omega^\perp) = \sum_l p_l(x) e^{il\varphi}, \quad (2.4)$$

con

$$\begin{aligned} p_l(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{il\varphi} D_\mu(x, \omega^\perp) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{il\varphi} \left(\int_0^\infty \mu(x + t\omega) dt \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} (-1)^l \int_0^\infty \mu(x + t\omega) dt, \end{aligned}$$

con el cambio de variable $y = -t\omega$ obtenemos

$$\begin{aligned} p_l(x) &= \frac{1}{2\pi} (1)^l \int_{\mathbb{R}^2} \mu(x - y) v_1(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} (-1)^l (\mu * v_l)(x), \end{aligned}$$

donde $v_l(r\omega) = \frac{1}{r} e^{il\varphi}$, $r > 0$. Por otro lado, tenemos que

$$h(\omega, x \cdot \omega) = \sum_l q_l(x) e^{il\varphi}, \quad (2.5)$$

donde

$$q_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega, x \cdot \omega) e^{-il\varphi} d\varphi$$

de (2.4) y (2.5) tenemos que

$$u(x, \omega) = \sum_{l > 0 \text{ impar}} u_l(x) e^{il\varphi}.$$

□

Lema 2.2. Dados $\omega = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ y $\frac{x^\perp}{|x|} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$ se tiene que,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega}{x \cdot \omega} e^{il\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & l \text{ impar}, \\ 2\pi x / |x|^2, & l = 0, \\ -2\pi i e^{i\psi} / |x|^2, & l > 0 \text{ par}. \end{cases}$$

Como la integral es impropia, pues no converge en \mathbb{R} , se debe entender como el valor principal de Cauchy.

Demostración. Para cada entero l ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega}{x \cdot \omega} e^{il\varphi} d\varphi = -\frac{1}{|x|} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \frac{e^{il\varphi} d\varphi}{\sin(\varphi - \psi)}.$$

Usando un cambio de variable, $\varphi = \varphi + \psi$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\omega}{x \cdot \omega} e^{il\varphi} d\varphi &= -\frac{1}{|x|} e^{il\psi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(\varphi + \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \right) \frac{e^{il\varphi}}{\sin \varphi} d\varphi \\ &= -\frac{1}{|x|} e^{il\psi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi}{\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi} \right) \frac{e^{il\varphi}}{\sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Calcularemos la integral componente a componente, y para diferentes valores de l . Para $l = 0$, la primera integral de la primera componente se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\omega}{x \cdot \omega} d\varphi &= -\frac{1}{|x|} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi}{\sin \varphi} d\varphi \\ &= -\frac{1}{|x|} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \varphi} d\varphi}_{(1)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \psi d\varphi}_{(2)} \right]. \end{aligned}$$

La integral (1) es igual a cero, pues el integrando es una función impar. Tomamos el valor principal de Cauchy ¹, para la integral (2) tenemos que

¹Valor principal de Cauchy: La definición de integral impropia se puede escribir en la forma:

$$\oint_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx \right). \quad (2.6)$$

Cuando este límite existe se dice que la integral es convergente en el sentido de Cauchy; el valor de este límite es el valor principal de Cauchy. También es conveniente compara (2.6) con la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx. \quad (2.7)$$

La convergencia de la integral implica, la convergencia (hacia el mismo valor) en sentido de Cauchy; sin embargo, la recíproca no es cierta, por ejemplo,

$$\int_{-R}^R 2x dx = x^2 \Big|_{-R}^R = 0$$

y por lo tanto el límite (2.6) es 0, en cambio, ninguno de los límites de (2.7) existe.

Observemos que en este ejemplo la función $f(x) = 2x$ es impar; es decir, $f(-x) = -f(x)$. Siempre que la función sea impar el valor principal de Cauchy es 0.

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \psi d\varphi = 2\pi \operatorname{sen} \psi.$$

Entonces,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos \psi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi = -2\pi \operatorname{sen} \psi,$$

de la misma forma obtenemos la integral para la segunda componente está dada por

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega}{x \cdot \omega} d\varphi = -\frac{2\pi}{|x|} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} = \frac{2\pi x}{|x|^2}.$$

Para $l \neq 0$ nuevamente calculamos la integral componente a componente. Para la primera componente tenemos que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{|x|} e^{il\psi} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \cos \psi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi) \frac{e^{il\varphi}}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi \\ &= -\frac{1}{|x|} e^{il\psi} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos \psi e^{il\varphi}}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi}_{(3)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \psi e^{il\varphi} d\varphi}_{(4)} \right]. \end{aligned}$$

Para la integral (3) tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos \psi e^{il\varphi}}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos \psi (\cos l\varphi + i \operatorname{sen} l\varphi)}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos l\varphi \cos \psi}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi + i \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos \psi \operatorname{sen} l\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi \\ &= \cos \psi \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos l\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi}_{(3_1)} + i \cos \psi \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} l\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi}_{(3_2)} \\ &= i \cos \psi 2\pi. \end{aligned} \tag{2.8}$$

La integral (3₁) es igual a cero, nuevamente pues tomamos a la integral como el valor principal de Cauchy; y la integral (3₂) es igual a 2π , para l par, de acuerdo al la fórmula 3.612 de [26].

Por otro lado, para la integral (4) tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \psi e^{il\varphi} d\varphi &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \psi (\cos l\varphi + i \operatorname{sen} l\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \psi \cos l\varphi d\varphi + i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} l\varphi d\varphi \\ &= \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} l\varphi + i \operatorname{sen} \psi \cos l\varphi \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Así de (2.8) y (2.9) obtenemos el resultado para la primera componente; ahora bien, al integrar la segunda componente del mismo modo obtenemos el resultado final de la siguiente manera:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega}{x \cdot \omega} d\varphi = -\frac{1}{|x|} e^{il\psi} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \text{sen } \psi \end{pmatrix} 2\pi i, \quad (2.10)$$

por lo tanto, de (2.10), para $l > 0$ par se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega}{x \cdot \omega} e^{il\varphi} d\varphi = -\frac{2\pi i}{|x|} e^{il\psi} \frac{x^\perp}{|x|}.$$

□

Lema 2.3. Con la distribución δ de Dirac tenemos

$$\text{div} \frac{x}{|x|^2} = 2\pi \delta(x).$$

Demostración. Tenemos que demostrar que si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{|x|^2} \cdot \nabla f(x) dx = -2\pi f(0); \quad (2.11)$$

es decir,

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} g \cdot \nabla f dx = - \int_{|x| \geq \varepsilon} f \text{div} g dx + \int_{|x|=\varepsilon} f g \cdot \nu ds$$

donde $\nu = \frac{-x}{|x|}$ y ds la medida de superficie en $|x| = \varepsilon$. Como $g = x/|x|^2$, entonces tenemos que $\text{div} g = 0$ para $x \neq 0$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x}{|x|^2} \cdot \nabla f(x) dx &= - \int_{|x|=\varepsilon} f \frac{x}{|x|^2} \cdot \frac{x}{|x|} ds \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x|=\varepsilon} f(x) ds, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tomando el limite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se sigue la igualdad (2.11) □

Ahora podemos probar nuestra formula de inversión.

Teorema 2.4. Sean $g = \mathcal{R}_\mu f$ y h la función (2.3). Entonces,

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \text{Re} \left\{ \text{div} \int_S \omega e^{(D_\mu)(x, \omega^\perp)} (e^{-h} \mathcal{H} e^h g)(\omega, x \cdot \omega) d\omega \right\} \quad (2.13)$$

Demostración. Es suficiente probar el teorema para $f(x) = \delta(x - y)$ ya que la transformada de radon atenuada es una función par, además haciendo $y = t\omega + r\omega^\perp$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{H} e^h g)(\omega, s) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s-t} e^{h(\omega, t)} \int_{x \cdot \omega = t} e^{-(D-\mu)(x, \omega^\perp)} \delta(x - y) dx dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{s - \omega \cdot y} e^{h(\omega, \omega \cdot y) - (D_\mu)(y, \omega^\perp)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{s - \omega \cdot y} e^{u(y, \omega)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

con u definida en el Lema 2.1 obtenemos

$$\omega e^{D\mu(x, \omega^\perp)}(e^{-h\mathcal{H}} - e^h g)(\omega, x \cdot \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{\omega}{(x-y) \cdot \omega} e^{u(y, \omega) - u(x, \omega)} dy$$

Debemos demostrar que

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{S^1} \frac{\omega}{(x-y) \cdot \omega} e^{u(y, \omega) - u(x, \omega)} d\omega \right\} = 2\pi \frac{x-y}{|x-y|^2} \quad (2.15)$$

teniendo a $\omega = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Por el lema (2.1) se tiene que

$$u(y, \omega) - u(x, \omega) = \sum_{l > \text{impar}} (u_l(y) - u_l(x)) e^{il\varphi}.$$

De ahí, con ciertas funciones $u_l(x, y)$,

$$\cosh(u(y, \omega) - u(x, \omega)) = 1 + \sum_{l > 0 \text{ par}} u_l(x, y) e^{il\varphi},$$

$$\sinh(u(y, \omega) - u(x, \omega)) = \sum_{l > 0 \text{ impar}} u_l(x, y) e^{il\varphi}.$$

Por el Lema 2.2, tenemos que $\frac{(x-y)^\perp}{|x-y|} = (\cos \psi, \sin \psi) = \omega$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\omega}{(x-y) \cdot \omega} \cosh(u(y, \omega) - u(x, \omega)) d\varphi \\ &= 2\pi \frac{x-y}{|x-y|^2} - 2\pi i \sum_{l > 0 \text{ par}} u_l(x, y) e^{il\psi} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \\ &= 2\pi \frac{x-y}{|x-y|^2} - 2\pi i (\cosh(u(y, \omega) - u(x, \omega)) - 1) \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}, \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega}{(x-y) \cdot \omega} \sinh(u(y, \omega) - u(x, \omega)) d\varphi = 0$$

dado que $x \cdot \omega = y \cdot \omega$ tenemos,

$$\begin{aligned} u(y, \omega) - u(x, \omega) &= -(D\mu)(y, \omega^\perp) + (D\mu)(x, \omega^\perp) \\ &= -\int_y^x \mu ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

Integramos a lo largo de la recta que une a y y x , por lo tanto,

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(x-y) \cdot \omega} e^{u(y, \omega) - u(x, \omega)} d\varphi \right\} = 2\pi \frac{x-y}{|x-y|^2}.$$

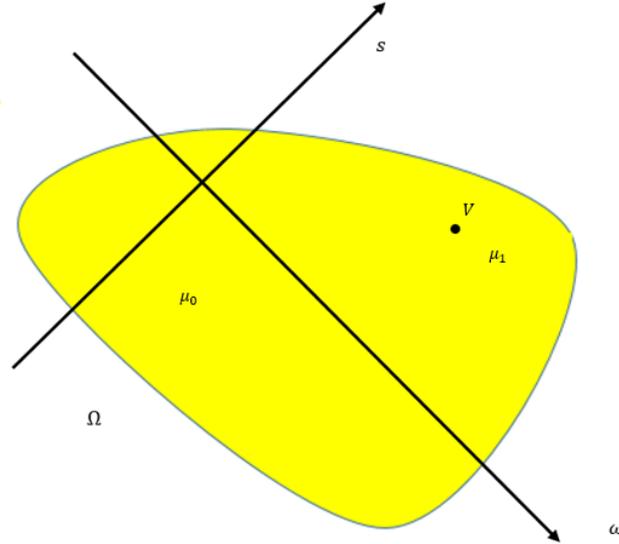


Figura 2.1: Coeficiente de atenuación con perturbación $\mu(x)$.

Ahora, de (2.15) y el Lema 2.3, siguiendo la notación de Novikov (ver [?]), se tiene que

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{div} \int_{S^1} \omega e^{-(D\mu)(x, \omega^\perp)} (e^{h\mathcal{H}} e^{h\check{g}})(\omega, x \cdot \omega) d\omega \right\}, \quad (2.17)$$

donde $\check{g}(\omega, s) = (\mathcal{R}_\mu f)(-\omega, -s)$ y así obtenemos la fórmula de inversión para la transformada atenuada de Radon. \square

De acuerdo al objetivo de este trabajo, nos interesa obtener el valor de μ cuando deja de ser constante; es decir, $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 f(x)$ con $\mu(x) \subset \mathbb{R}^n$ y $|\mu_0| \approx |\mu_1 f(x)|$, como se muestra, en la figura 2.1. En otras palabras, cuando el coeficiente de atenuación depende de la inhomogeneidad de la región que se está estudiando, dado que en la realidad no todo el medio material posee el mismo valor en μ ; así entonces, μ dependerá de x y de la región que es estudiada.

Por otra parte, no todos los medios materiales compuestos tienen el mismo coeficiente de atenuación, por lo que necesitaremos hacer una estimación del mismo coeficiente para poder emplear la transformada de Radon atenuada y su inversa, que nos permitirá reconstruir la imagen.

2.3. Perturbación del coeficiente de atenuación

A continuación introducimos la transformada de Radon atenuada con una perturbación; es decir, el coeficiente de atenuación deja de ser constante en el

disco unitario de la siguiente manera:

$$\mu = \mu_0(s\omega + \tau\omega^\perp) + \mu_1\delta((s - s_0)\omega + (\tau - \tau_0)\omega^\perp).$$

En donde la delta de Dirac ² indica la localización de la perturbación. Daremos una aproximación a la formula de inversión en este caso particular.

Consideremos una distribución bidimensional de radioisótopos o radiofármacos en un medio material compuesto. Queremos recuperar la distribución de $f(x)$, a partir de mediciones de la radiactividad fuera del medio [22]. Denotamos el coeficiente de atenuación del tejido por $\mu(x)$. Nuestras mediciones nos proporcionan las integrales de línea. En \mathbb{R}^2 definimos, para las funciones con soporte compacto, la transformada atenuada de Radon como

$$\mathcal{R}_\mu f(s, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp) e^{-\int_t^\infty \mu_0(s\omega + \tau\omega^\perp) + \mu_1\delta((s-s_0)\omega + (\tau-\tau_0)\omega^\perp) d\tau} dt \quad (2.18)$$

para la constante de atenuación μ que es exacta hasta $\mathcal{O}(\mu^4)$ [27], para algunos valores de t , $\omega = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ y $\omega^\perp = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ [28].

Si suponemos que el coeficiente de atenuación $\mu(x) = \mu_0(s\omega + \tau\omega^\perp) + \mu_1\delta((s - s_0)\omega + (\tau - \tau_0)\omega^\perp)$ dentro del medio; es decir, $\mu(x) = \mu_0(s\omega + \tau\omega^\perp) + \mu_1\delta((s - s_0)\omega + (\tau - \tau_0)\omega^\perp)$ en el disco unitario y $f = 0$ fuera del disco, entonces tenemos que encontrar los valores de $-\int_t^\infty \mu_0(s\omega + \tau\omega^\perp) + \mu_1\delta((s - s_0)\omega + (\tau - \tau_0)\omega^\perp) d\tau$. Separamos esta integral en dos integrales

$$\mu(s\omega + \tau\omega^\perp) = \underbrace{\int_t^\infty \mu_0(s\omega + \tau\omega^\perp) d\tau}_{(1)} + \underbrace{\int_t^\infty \mu_1\delta((s - s_0)\omega + (\tau - \tau_0)\omega^\perp) d\tau}_{(2)}.$$

Para la integral (1) el valor máximo para t debe cumplir que $s^2 + \tau^2 = 1$: despejando a τ obtenemos que $\tau = \sqrt{s^2 - 1}$, entonces la integral (1) queda dada por

$$\int_t^{\sqrt{s^2-1}} \mu_0(s\omega + \tau\omega^\perp) d\tau = \mu_0(\sqrt{s^2-1} - t).$$

Para la integral (2) debemos hacer lo mismo es decir, $(s-s_0)^2 + (\tau-\tau_0)^2 = 1$, despejando a τ usando formula general obtenemos que el valor máximo es $\tau = \tau_0 + 2\sqrt{1 - (s - s_0)^2}$, entonces la integral (2) queda de la siguiente manera

$$\int_t^{\tau_0 + 2\sqrt{1 - (s - s_0)^2}} \mu_1\delta((s - s_0)\omega + (\tau - \tau_0)\omega^\perp) d\tau = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } t < \tau_0 < \tau_0 + 2\sqrt{1 - (s - s_0)^2}, \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

²La delta de Dirac es una distribución (función generalizada) introducida por primera vez por el físico inglés Paul Dirac, en tanto que distribución define un funcional en forma de integral sobre un cierto espacio de funciones.

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } a < x_0 < b \\ 0 & \text{si } x_0 < a, x_0 > b \end{cases}$$

es decir,

$$\int_t^{\tau_0 + 2\sqrt{1-(s-s_0)^2}} \mu_1 \delta((s-s_0)\omega + (\tau-\tau_0)\omega^\perp) d\tau = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } t < 2\sqrt{1-(s-s_0)^2}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Por lo tanto, de la integral (1) y (2) tenemos que la transformada de Radon atenuada, con perturbación en el coeficiente de atenuación está dada por

$$\mathcal{R}_\mu f(t, \omega) = e^{-\mu_0\sqrt{1-t^2} + \mu_1} \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp) e^{\mu_0 t} dt.$$

Nuestros datos son

$$g_\mu(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp) e^{\mu t} dt.$$

El objetivo es expresar a f en términos de g . Lo que se muestra en [27] es que tal expresión puede ser una ecuación integral de segunda especie. El objetivo es expresar f en términos de g ; por lo que debemos convertir la ecuación $\mathcal{R}_\mu f = g$ en una ecuación integral de segunda especie que puede resolverse numéricamente.

2.4. La aproximación de la inversión

A continuación vamos a aproximar la fórmula de inversión de la transformada de Radon atenuada con perturbación en el coeficiente de atenuación. Para empezar generalicemos el "teorema de la proyección" para el caso $\mu \neq 0$. Utilizamos la notación \hat{f} para la transformada de Fourier bidimensional de la función $f \in \mathbb{R}^2$ y \hat{g} la transformada de Fourier unidimensional con respecto a la primera variable si g es una función de la forma $g = g(s, \omega)$ [29].

Teorema 2.5. Para $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(\sigma\omega + i\mu\omega^\perp) = (2\pi)^{1/2} \hat{g}_\mu(\sigma, \omega)$$

Demostración. dado que $x = s\omega + t\omega^\perp$ para $x \in \mathbb{R}^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{f}(\sigma\omega + i\mu\omega^\perp) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\sigma\omega + i\mu\omega^\perp) \cdot x} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\sigma\omega + i\mu\omega^\perp) \cdot (s\omega + t\omega^\perp)} f(s\omega + t\omega^\perp) ds dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma s} \int_{\mathbb{R}} e^{\mu t} f(s\omega + t\omega^\perp) dt ds \quad . \quad (2.19) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma s} g_\mu(s, \omega) ds \\ &= (2\pi)^{1/2} \hat{g}_\mu(\sigma, \omega), \end{aligned}$$

□

El teorema de proyección nos proporciona los valores de \hat{f} en una superficie de dos dimensiones, F_μ , en el espacio \mathbb{C}^2 de variables complejas $z_1 = \xi_1 + i\eta_1, z_2 = \xi_2 + i\eta_2$.

Pero la fórmula de inversión de Fourier "que nos da f en términos de \hat{f} " integra sobre F_0 , donde F_0 es la primera línea donde se integra. Emplearemos el teorema integral de Cauchy en dos variables complejas para calcular esta integral sobre F_0 [29].

Para ello consideremos lo siguiente: sea G una superficie cerrada en \mathbb{R}^3 y $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ un mapeo uno a uno y suficientemente suave.

Sea F una superficie en dos dimensiones complejas $F = S(G) \in \mathbb{C}^2$, además asumimos que $w(z_1, z_2)$ es analítica en \mathbb{C}^2 ; es decir,

$$\int_F w(z_1, z_2) dz_2 = 0.$$

En el caso que G es un cilindro hueco con radio interior r , radio exterior R y altura 1, denotamos la superficie lateral interior, la superficie lateral exterior, la parte superior y la parte inferior de G por G_r, G_R, G_1 y G_0 respectivamente.

Con el fin de obtener la orientación correcta de las componentes de G , describimos a G por una representación de parámetros. Con ξ_1, ξ_2, ξ_3 las coordenadas en \mathbb{R}^3 , entonces tenemos:

$$G_r : \begin{array}{l} \xi_1 = r \cos \varphi \\ \xi_2 = r \varphi \\ \xi_3 = \theta, \end{array} \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

$$G_R : \begin{array}{l} \xi_1 = R \cos \varphi \\ \xi_2 = R \varphi \\ \xi_3 = \theta, \end{array} \quad (\theta, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

$$G_1 : \begin{array}{l} \xi_1 = \sigma \cos \varphi \\ \xi_2 = \sigma \varphi \\ \xi_3 = 1, \end{array} \quad (\varphi, \sigma) \in [0, 2\pi] \times [r, R]$$

$$G_0 : \begin{array}{l} \xi_1 = \sigma \cos \varphi \\ \xi_2 = \sigma \varphi \\ \xi_3 = 0. \end{array} \quad (\sigma, \varphi) \in [r, R] \times [0, 2\pi]$$

De esta manera obtenemos el mapeo $z = S\xi, \xi \in \mathbb{R}^3$ definido por:

$$z_1 = \xi_1 - i\mu\xi_2\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2},$$

$$z_2 = \xi_2 - i\mu\xi_1\xi_3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2},$$

La representación de G nos da la representación de F . Daremos esta representación por partes como: $F_r = S(G_r), F_R = S(G_R), F_1 = S(G_1), F_0 = S(G_0)$, junto con los jacobianos:

$$\begin{aligned}
F_r : z &= r\omega + i\mu\theta\omega^\perp, & \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\varphi, \theta)} &= \mu^2\theta, \\
F_R : z &= R\omega + i\mu\theta\omega^\perp, & \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\theta, \varphi)} &= -\mu^2\theta, \\
F_1 : z &= \sigma\omega + i\mu\theta\omega^\perp, & \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\varphi, \sigma)} &= -\sigma, \\
F_0 : z &= \sigma\omega, & \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(\sigma, \varphi)} &= \sigma,
\end{aligned}$$

donde usamos la notación vectorial $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Ahora, por el teorema de Cauchy para funciones analíticas,

$$w(z) = e^{ix \cdot z} \hat{f}(z).$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
\int_F w(z) dz &= \int_{F_r} w(z) dz + \int_{F_R} w(z) dz + \int_{F_1} w(z) dz + \int_{F_0} w(z) dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{irx \cdot \omega - \mu\theta x \cdot \omega^\perp} \hat{f}(r\omega + i\mu\theta\omega^\perp) \mu^2 \theta d\varphi d\theta \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{iRx \cdot \omega - \mu\theta x \cdot \omega^\perp} \hat{f}(R\omega + i\mu\theta\omega^\perp) \mu^2 \theta d\varphi d\theta \\
&\quad - \int_r^R \int_0^{2\pi} e^{i\sigma x \cdot \omega - \mu x \cdot \omega^\perp} \hat{f}(\sigma\omega + i\mu\theta\omega^\perp) \sigma d\varphi d\sigma \\
&\quad + \int_r^R \int_0^{2\pi} e^{i\sigma x \cdot \omega} \hat{f}(\sigma\omega) \sigma d\varphi d\sigma \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

por el Lema de Riemann-Lebesgue decimos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \hat{f}(R\omega + i\mu\theta\omega^\perp) \right| d\varphi \rightarrow 0,$$

uniformemente en θ para $0 \leq \theta \leq 1$. Tomando $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-\mu\theta x \cdot \omega^\perp} \hat{f}(i\mu\theta\omega^\perp) \mu^2 \theta d\varphi d\theta \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{i\sigma x \cdot \mu x \cdot \omega^\perp} \hat{f}(\sigma\omega + i\mu\omega^\perp) \sigma d\varphi d\sigma \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i\sigma x \cdot \omega} \hat{f}(\sigma\omega) \sigma d\varphi d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Usando el Teorema 2.5 en la segunda integral y la fórmula de inversión de Fourier en la tercera integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) - \mu^2 f_2(x), \\
f_1(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int_0^{2\pi} e^{-\mu x \cdot \omega^\perp} \int_0^\infty e^{i\sigma x \cdot \omega} \sigma \hat{g}_\mu(\sigma, \omega) d\sigma d\varphi,
\end{aligned}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-\mu\theta x \cdot \omega^\perp} \hat{f}(i\mu\theta\omega^\perp) \theta d\varphi d\theta,$$

f_1 puede ser evaluada por un algoritmo de convolución:

$$f_1(x) = \int_0^{2\pi} e^{-\mu x \cdot \omega^\perp} q_\mu(x \cdot \omega, \omega) d\varphi,$$

$$\hat{q}_\mu(\sigma, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sigma_+ \hat{g}_\mu(\sigma, \omega), \quad \sigma_+ = \max(\sigma, 0).$$

Desafortunadamente la integral que define f_2 contiene valores de $\hat{f}(i\omega\theta\omega^\perp)$ para $0 \leq \theta \leq 1$, pero estos valores están disponibles sólo para $\theta = 1$. Por lo tanto, podemos calcular una aproximación $f_2(x)$ de nuestros datos. Usando la formula;

$$e^{-\mu\theta x \cdot \omega^\perp} \hat{f}(i\mu\theta\omega^\perp) = \hat{f}(i\mu\omega^\perp) + \mu\omega^\perp \cdot a + \mathcal{O}(\mu^2),$$

con $a = i(\theta - 1)\nabla\hat{f}(0) - \theta\hat{f}(0)x$, que se obtiene a partir de la expansión de Taylor para la aproximación del integrando en $f_2(x)$, para obtener

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{f}(i\mu\omega^\perp) \omega d\varphi d\theta + \mathcal{O}(\mu^2) \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-3/2} \int_0^{2\pi} \hat{g}_\mu(0, \omega) d\varphi + \mathcal{O}(\mu^2) \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-3/2} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_\mu(s, \omega) ds d\varphi + \mathcal{O}(\mu^2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Podemos observar que el factor de μ^2 en nuestra fórmula de inversión aproximada es, básicamente, el valor de los datos que queremos calcular; es decir, el valor de μ .

Si en lugar de que μ estuviera definido en un punto, como en la sec.3.2.1, lo estuviera en una región $V \subseteq \Omega$ como un conjunto de puntos como se muestra, (ver figura 2.2), con μ_i para cada punto y $|\mu_0| \approx |\mu_i|$, entonces la transformada de Radon atenuada la podemos expresar como

$$\mathcal{R}_{\mu_i}(s, \omega) = \sum_{i=1}^M e^{-\mu_i X_{[t, \max \tau]}} \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp) e^{-\mu_0 t} dt,$$

por la propiedad de linealidad de la transformada de Radon.

Dados estos resultados podemos decir que si el coeficiente de atenuación se perturba, entonces la intensidad va a disminuir en forma exponencial.

A continuación desarrollaremos el modelo computacional para la transformada de Radon directa e inversa y para la transformada de Radon atenuada directa e inversa con perturbación en la atenuación.

2.5. Modelo computacional

En el siguiente capítulo desarrollamos paso a paso como hacer la implementación computacional para la transformada de Radon y su inversa desde

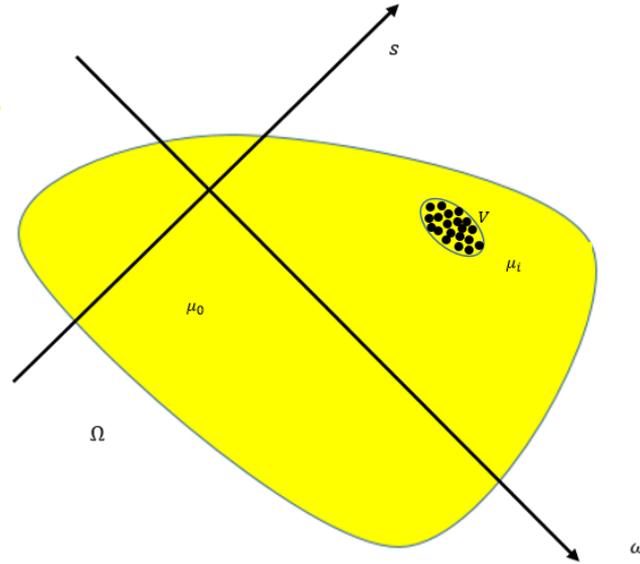


Figura 2.2: Coeficiente de atenuación con perturbación de varios puntos.

cero, (no usamos la transformada de radon que esta implementada en matlab) esto nos facilitará la implementación para la transformada atenuada con perturbación, para esta es importante describir con detalle dicha implementación.

Los métodos de inversión analíticos en la ET se basan en datos de proyección completa [12], en la práctica tenemos que discretizar el modelo de observación directamente y dar una aproximación de la solución del problema computacional.

Consideremos el caso de dos dimensiones, se pueden utilizar funciones similares en 3 dimensiones. Supongamos que tenemos una función no negativa $f \in \mathbb{R}^2$ cuyo soporte compacto está contenido en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$. Dividimos el área de la imagen en $N \times N$ pixeles y aproximamos la densidad por una función constante por segmentos;

$$f(p) = f_{ij}, \text{ donde } p \in P_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$$

donde P_{ij} denota el pixel

$$(j-1)/N < p_1 < j/N, (i-1)/N < 1-p_2 < i/N$$

la imagen está dada por la matriz de valores f_{ij} .

Para describir los datos de los rayos en forma vectorial, apilamos las entradas de la matriz f_{ij} en un vector x de longitud N^2 de manera que;

$$x((j-1)N + i) = \mu_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$$

Sean L_1, \dots, L_M las líneas correspondientes a los rayos que pasan a través del objeto, para la línea m-esima, L_m

$$y_m = \int_{L_m} \mu(p) dp = \sum_{i,j=1}^N |L_m \cap P_{ij}| \mu_{ij} = \sum_{k=1}^{N^2} A_{mk} x_k$$

donde $|L_m \cap P_{ij}|$ denota la longitud de la intersección de la línea L_m y el pixel P_{ij} y denotamos.

$$A_{mk} = |L_m \cap P_{ij}|, k = (j - 1)N + i$$

la definimos como el elemento de la matriz donde se interseca la línea L_m y el pixel $p_{i,j}$.

El modelo discretizado ([30]) para la formación de imágenes de los rayos se puede escribir en la forma:

$$Ax = y.$$

Por lo tanto, el problema de los rayos se puede resolver como un problema de matriz normalmente de tamaño grande, pero también con una matriz con muy pocos valores dependiendo del número de proyecciones que hagamos.

En el caso de ET de ángulo limitado, la matriz A tiene un gran espacio nulo y el problema inverso se torna severamente indeterminado.

En primer lugar daremos una aproximación numérica de la transformada de Radon mediante el método de Retroproyección filtrada usando el código que hicimos, posteriormente haremos lo mismo con la transformada de Radon atenuada.

2.6. Transformada de Radon

2.6.1. Método de retroproyección filtrada

El principio planteado por Radon y posteriormente mejorado por Cormack y Hounsfield es el siguiente: supongamos que tenemos un cuerpo convexo el cual tiene una masa de densidad variable dada por una función $f(x, y, z)$. Pensemos además que K , un cuerpo convexo, es atravesado por una radiación cualquiera cuya trayectoria sea una recta l y de la cual se puede medir su intensidad de entrada y de salida. La diferencia entre estas intensidades será la absorción del rayo por la materia en el interior de K y dependerá de la recta l , por donde el rayo transita es posible medir experimentalmente esta función del rayo, que se llamara $F(S)$ y a partir de ésta reconstruir $f(x, y, z)$ ([31]).

El procedimiento práctico (discreto) consiste en dividir el objeto en secciones planas y resolver el problema sección por sección para después integrar a todo el cuerpo. Al dividir el objeto en secciones planas tenemos que la función f , dependiente inicialmente de la tripla de coordenadas (x, y, z) , se reduce temporalmente a las coordenadas (x, y) . Posteriormente se sobrepone una cuadrícula imaginaria a cada sección planar quedando así hipotéticamente dividido en

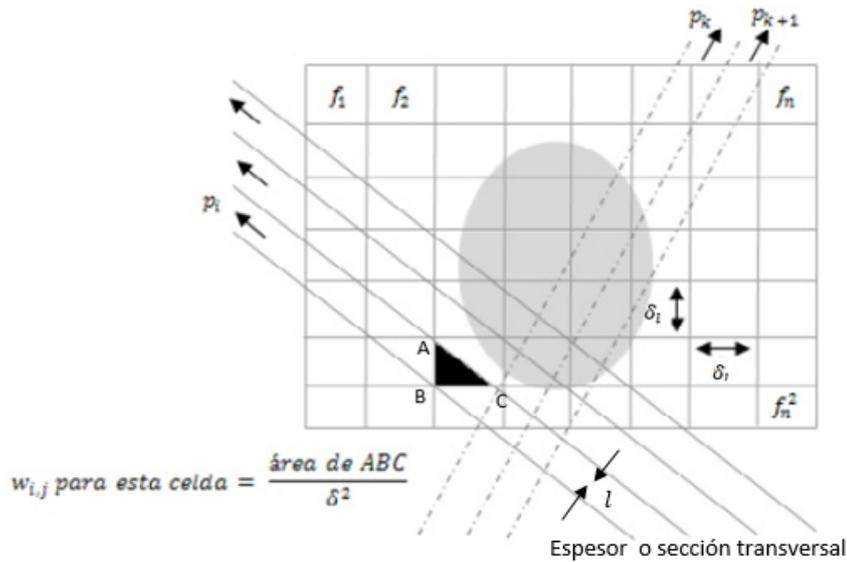


Figura 2.3: Proyección presentada por una banda sobre una malla donde cada celda en particular la podemos ver como el área sombreada ABC y cada rayo esta definido por p_i .

celdas, a cada celda le corresponde una masa de densidad promedio las cuales constituirán las incógnitas de nuestro problema a estudiar. Las proyecciones se convierten entonces en sumas de muchos términos sobre direcciones en la cuadrícula. En consecuencia, cada término (de la sumatoria que forma una proyección) es el producto de un factor de peso multiplicado por la densidad del cuadro que es la incógnita.

Los correspondientes valores de peso para cada cuadro son conocidos y están determinados por la geometría del caso, esto es: ancho del haz de irradiación, ángulo de irradiación y tamaño de la cuadrícula; es así como a partir de las proyecciones es posible establecer un conjunto de ecuaciones simultáneas que se deben resolver.

La figura 2.3 ilustra una malla sobrepuesta a una imagen desconocida, si la malla posee n -celdas de cada lado, el número total de celdas es $n \times n = N$; supongamos además que al objeto se la ha realizado un barrido por un conjunto de rayos con sección transversal (espesor) que corren paralelos, haciendo un ángulo de inclinación con respecto a uno de los ejes de la cuadrícula imaginaria. En este caso, un rayo cualquiera j_i puede ser representado como una delgada banda que cruza la cuadrícula.

Basados en esta representación definimos la proyección del rayo como

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} f_j = p_i; i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.23)$$

Donde M es el número total de rayos y ω_{ij} es un factor de peso que corresponde a la fracción de área correspondiente a cada celda interceptada por un rayo en particular. El triangulo sombreado (ABC) en la figura indica esta área para una celda en particular. Las f_j son las incógnitas del problema cuya solución consiste en determinar sus valores, sin embargo la solución presenta cierta complejidad debido a que si se tienen N celdas, el número de rayos M , como mínimo, debe ser igual a N . Ahora bien, si hacemos a los segmentos δl infinitesimales ds el límite de la sumatoria de la ecuación 2.23 se convierte en una integral de línea a lo largo de la trayectoria del rayo gamma. Esto es;

$$\rho = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) ds$$

Esta función ρ definirá a la proyección del haz sobre una línea de proyección la cual coincide con la transformada bidimensional de Radon de la función $f(x, y)$. Dado que en una aplicación de este tipo los detectores determinan los cambios de intensidad en los rayos emitidos; es decir, las proyecciones de ρ , el problema se restringe a la aproximación de la función $f(x, y)$, la cual se realiza mediante la transformada inversa de Radon.

2.7. Transformada de Radon atenuada

La implementación de la formula de inversión de la transformada de Radon atenuada es una extensión de la familia del algoritmo de retroproyección filtrada para tomografía computarizada, que veremos a continuación.

Primero, tenemos que calcular la función

$$g_{\mu} = \text{Re} \{ e^{-h} \mathcal{H} e^h g \},$$

donde $h = \frac{1}{2}(\mathcal{I} + i\mathcal{H})\mathcal{R}_{\mu}$. Si $h = h_1 + ih_2$, $h_1 = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\mu}$, $h_2 = \mathcal{H}\mathcal{R}_{\mu}$ entonces, tenemos

$$g_{\mu} = e^{-h} (\cos h_2 \mathcal{H} e^{h_1} \cos h_2 + \text{sen } h_2 \mathcal{H} e^{h_1} \text{sen } h_2) g.$$

La transformada de Hilbert \mathcal{H} se puede calcular por convolución con la transformada de Fourier

$$\hat{g}(\sigma) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma} g(s) ds.$$

Así tenemos que

$$(\hat{\mathcal{H}}_g)(\sigma) = \frac{\text{sgn}(\sigma)}{i} \hat{g}(\sigma).$$

Para hacer los cálculos necesarios y obtener la transformada atenuada de Radon necesitaremos de los siguientes prerequisites.

Nos enfocaremos en una forma de calcular la convolución y derivados utilizando la transformada de Fourier (FFT). La FFT es una forma rápida del cálculo de la transformada discreta de Fourier de un vector de tamaño N . cuya expresión de la fórmula y su inversa están dadas de la siguiente forma:

$$\tilde{x}_k := DFT(x)_k = \sum_{j=1}^N x_j \omega^{-(j-1)(k-1)}, \quad \omega := e^{\frac{2i\pi}{N}}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$x_j = IDFT(\tilde{x})_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{x}_k \omega^{(j-1)(k-1)}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Estos operadores requieren $O(N^2)$ operaciones flotantes, sin embargo cuando N es un número compuesto (el mejor de los casos $N = 2^p$ para alguna valor de p), reacomodando estas operaciones, este número se puede reducir a $O(N \log N)$, este proceso es conocido como el *algoritmo de Cooley y Tuche* ver [32]. Además, definimos la convolución circular (Ver apéndice 1.7) $h = f \star g$ de dos vectores discretos $f = \{f_j\}_{j=1}^N$ y $g = \{g_j\}_{j=1}^N$ de la siguiente manera:

$$h_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k g[j-k], \quad [j-k] := j - k \bmod N,$$

el número $O(N^2)$ de operaciones que requiere este proceso también se puede reducir a $O(N \log N)$ usando FFT y el hecho de que

$$h = \text{IFFT}(\text{FFT}(f) \cdot \text{FFT}(g)).$$

Al igual que para una convolución, cualquier operador que puede ser representado por un multiplicador de Fourier incluyendo diferenciación ik , o e^{isk} convolución con alguna $g(\tilde{g}_k)$, o la transformada de Hilbert ($-i \text{sign}(k)$), puede ser calculado por el método anterior. En la variable x , esta cantidad aplica el mismo operador en el nivel de una función continua que interpola los datos de la manera más suave posible sin dejar de ser la banda más limitada.

Esta interpolación es llamada *interpolación espectral*. Para los datos $f = \{f_m\}_{m=1}^N$ dados en una subdivisión $\{x_m\}_{m=1}^N$ de $[0, 2\pi]$, la interpolación espectral está dada por

$$f(x) = \sum_{m=1}^N f_m S_N(x - x_m), \quad S_N(x) := \frac{\text{sen}(\pi x/h)}{(2\pi/h) \tan(x/2)}. \quad (2.24)$$

La función S_N , mejor conocida como la función seno periódica, es el único polinomio trigonométrico cuya transformada de Fourier es 1 en cada frecuencia discreta y cero en otro caso, por esto tiene sentido que la convolución (2.24) sale de la señal discreta sin cambios en los puntos de la malla.

Al pasar al dominio de Fourier, o equivalentemente al usar interpolación espectral, el orden de convergencia del método para cada h no depende del método en sí, si no de la regularidad de la función donde se están haciendo las

aproximaciones, ver [33]. En este caso los métodos basados en FFT se utilizan sobre todo cuando hay que aplicar la transformada de Hilbert, esto pasa cada vez que se invierte la transformada de Radon atenuada.

A continuación daremos una discretización de la transformada de Radon atenuada (AtRT) y después la invertiremos numéricamente.

Primero trataremos el problema directo que consiste en resolver la ecuación (2.2). Una vez más se puede hacer mediante la rotación de imagen: para cada θ requerido en las imágenes (mapas construidos con la función `mymap` usada en el código), de tal manera que el eje θ se alinee con el eje x , como se mostró anteriormente, entonces se puede calcular la integral

$$\int_{-1}^1 f_{\theta}(t, y) e^{D_{\mu}(t, \theta)}$$

se puede obtener sumando las entradas a lo largo de las filas.

Capítulo 3

Resultados y discusión

A continuación mostraremos algunos resultados obtenidos con el código computacional implementado en matlab. En primer lugar daremos algunos ejemplos de la reconstrucción de una imagen con la transformada de Radon simple, posteriormente se presentaran algunos ejemplos para la reconstrucción de la transformada de Radon atenuada con perturbación en la atenuación.

3.0.1. Resultados para la transformada de Radon

En nuestro código computacional, para cada dirección θ rotamos la imagen para que el eje θ se alinee con las direcciones del eje x , de modo que el cálculo de sus integrales de línea a lo largo de esta dirección se reduce a una simple suma de las entradas a lo largo de cada fila de la imagen girada.

A continuación daremos un ejemplo y se presentaran paso a paso las figuras mostrando como es que se lleva a cabo la reconstrucción de una imagen dada.

- * **Primer paso:** Daremos una imagen inicial que nos servirá de referencia para hacer todo el procedimiento de reconstrucción.
- * **Segundo paso:** calculamos la transformada de Radon para cada dirección, entonces lo hacemos calculando la retroproyección filtrada (es decir, se multiplica por una función con ciertas características en el dominio de Fourier), para x que pertenece a un punto de la malla bidimensional y $\{\theta_i\}$ una subdivisión equidistante de S^1 , para calcular $g(x \cdot \theta_i, \theta_i)$ se hace mediante interpolación lineal en el eje s , ya que suponemos conocer rebanadas de la transformada de Radon en las direcciones $\{\theta_i\}$ para calcular la transformada de Radon hacemos uso de la función `myRadon`, (ver figura 3.2), donde observamos la imagen inicial y la transformada de Radon que se representa como un sinograma.
- * **Paso tres:** Calculamos la transformada inversa de Radon con la función `myIRadon`, obteniendo así la reconstrucción de la imagen, (ver figura 3.1),

imagen inicial, max = 1

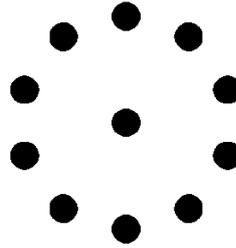


Figura 3.1: Imagen inicial

donde tomamos un valor de n que es el número de ángulos que rotará la imagen.

- * **Paso cuatro:** Del mismo modo mostraremos un gráfica donde tomamos un valor de θ y variamos el valor de t para la imagen inicial y la imagen reconstruida para observar la diferencia entre ellas y poder decir si es o no una buena aproximación entre ellas.
- * **Paso cinco:** Para dar una estimación de que tan buena es la reconstrucción calculamos el error relativo y presentamos la gráfica.
- * **Paso seis:** Finalmente, generamos el histograma para indicar como se encuentran distribuidos los valores de la discrepancia entre la imagen original y la reconstruida, también estimaremos la media y la desviación estándar.

Ejemplo 3.1. Tomamos una imagen inicial, (ver 3.1) es una imagen que consta solo de puntos.

Calculamos la transformada de Radon y obtenemos el sinograma (ver 3.2)

Dado el sinograma calculamos la transformada inversa de Radon y obtenemos la reconstrucción de la imagen, en la figura 3.3 podemos observar la imagen inicial, la reconstrucción y al superponer las dos imágenes obtenemos un error que se muestra en la parte C) de la figura, lo cual nos muestra que puede ser una buena aproximación de la imagen inicial.

Para poder observar de una forma mas gráfica la aproximación mostramos la figura donde para un valor de θ y variando el valor de t graficamos la imagen inicial y la imagen reconstruida

Del mismo modo presentamos la gráfica que representa el error relativo entre los datos originales y los reconstruidos figura 3.5.



Figura 3.2: En la imagen A) observamos la imagen inicial y en la imagen B) podemos observar el sinograma de la imagen A) que no es otra cosa que la representación gráfica de la transformada de Radon.

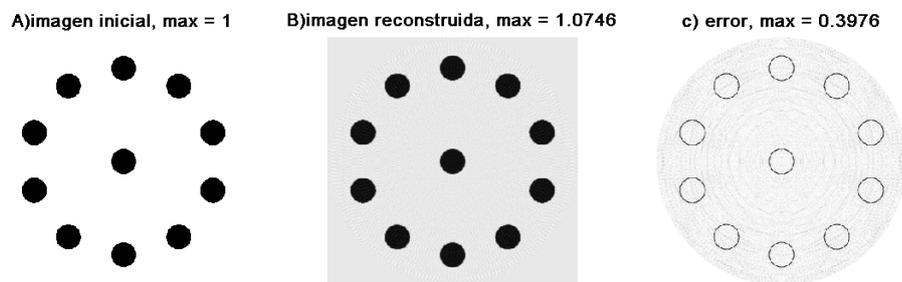


Figura 3.3: En la imagen A) observamos la imagen inicial y en la imagen B) podemos observar la imagen reconstruida que no es otra cosa que calcula la transformada de Radon inversa y finalmente C) es el error entre la imagen inicial y la imagen reconstruida.

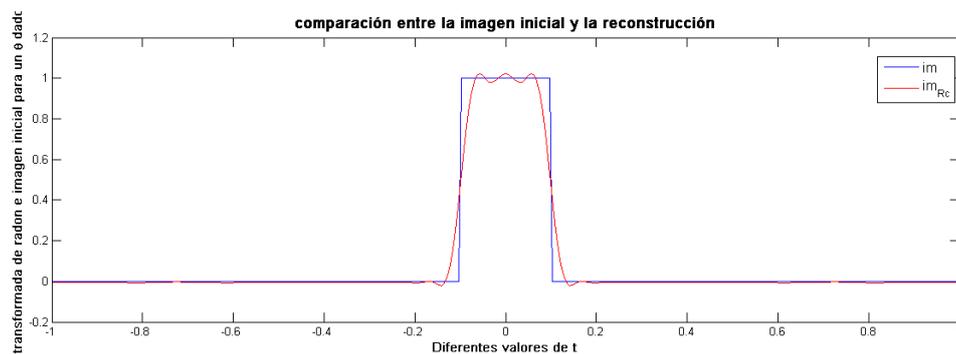


Figura 3.4: En la gráfica podemos observar la aproximación de las dos imágenes para un cierto valor de θ y diferentes valores para t .

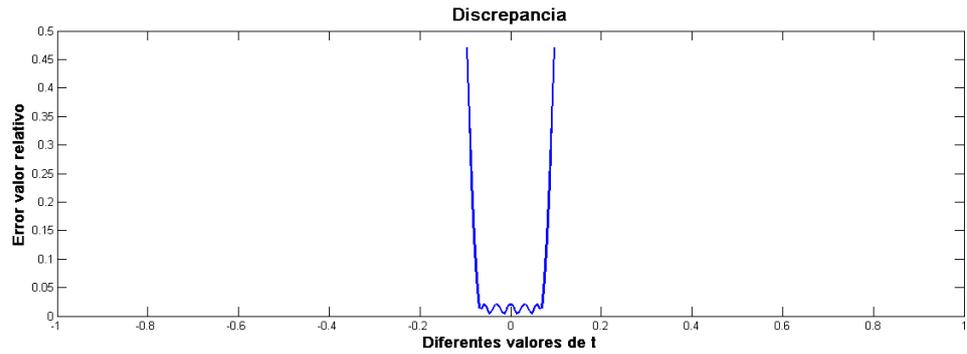


Figura 3.5: En la gráfica mostramos el error relativo entre la imagen inicial y la imagen reconstruida.

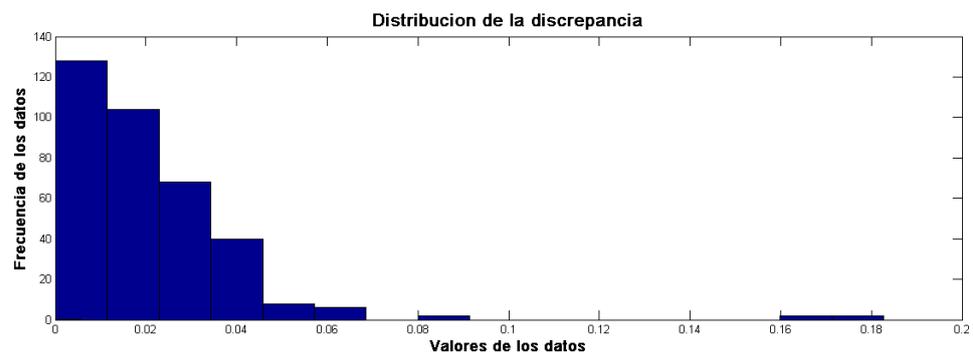


Figura 3.6: En esta figura mostramos un histograma de la distribución de los valores de la discrepancia entre los datos originales y los reconstruido. El valor medio de esta distribución está dado por 0.0212 y una desviación estándar de 0.0221

Finalmente, mostraremos el histograma generado con el código implementado en matlab, para observar la distribución entre los datos originales y los reconstruidos, también damos el valor medio de la distribución y la desviación estándar para darnos una idea de donde se concentran los datos, como se puede observa en la figura 3.6.

Con lo anterior podemos decir que tenemos una buena aproximación.

Ejemplo 3.2. Daremos otro ejemplo en esta ocasión la imagen inicial será algo mas real.

Calculamos la transformada de Radon y obtenemos el sinograma (ver 3.8)

Dado el sinograma calculamos la transformada inversa de Radon y obtenemos la reconstrucción de la imagen, en la figura 3.9 podemos observar la imagen inicial, la reconstrucción y al superponer las dos imágenes obtenemos

imagen inicial, max = 1.1992

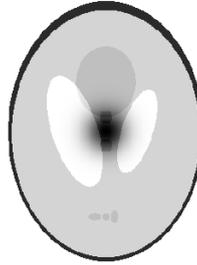
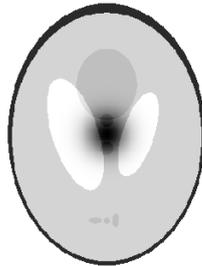


Figura 3.7: Imagen inicial

A) imagen inicial, max = 1.1992



B) Transformada de Radon o sinograma, max = 0.76807

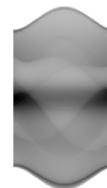


Figura 3.8: En la imagen A) observamos la imagen inicial y en la imagen B) podemos observar el sinograma de la imagen A) que no es otra cosa que la representación gráfica de la transformada de Radon.

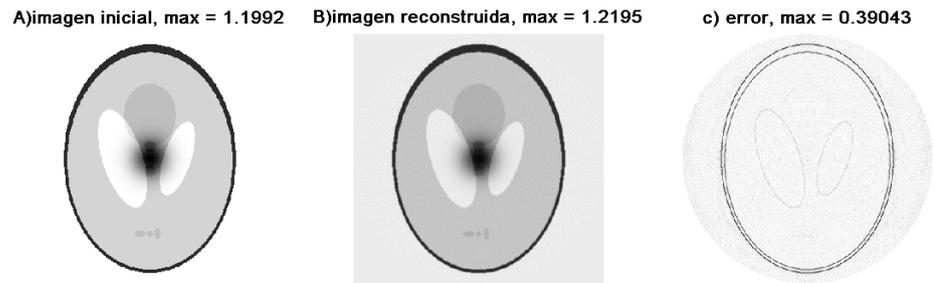


Figura 3.9: En la imagen A) observamos la imagen inicial y en la imagen B) podemos observar la imagen reconstruida que no es otra cosa que calcula la transformada de Radon inversa y finalmente C) es el error entre la imagen inicial y la imagen reconstruida.

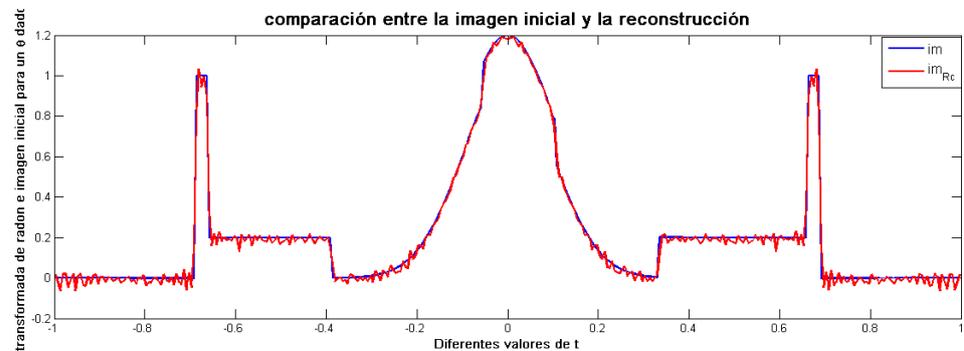


Figura 3.10: En la gráfica podemos observar la aproximación de las dos imágenes para un cierto valor de θ y diferentes valores para t .

un error que se muestra en la parte C) de la figura, lo cual nos muestra que puede ser una buena aproximación de la imagen inicial.

Para poder observar de una forma más gráfica la aproximación mostramos la figura donde para un valor de θ y variando el valor de t graficamos la imagen inicial y la imagen reconstruida, ver 3.10.

En la gráfica mostramos el error relativo; es decir, $|im - im_{Rc}|/|im|$, para un θ fijo y para todo t . Se puede observar una buena aproximación que cuantificamos en la siguiente figura 3.11.

Finalmente, generamos el histograma para observar como están distribuidos los valores de la discrepancia entre los valores originales y los reconstruidos como se observa en la figura 3.12.

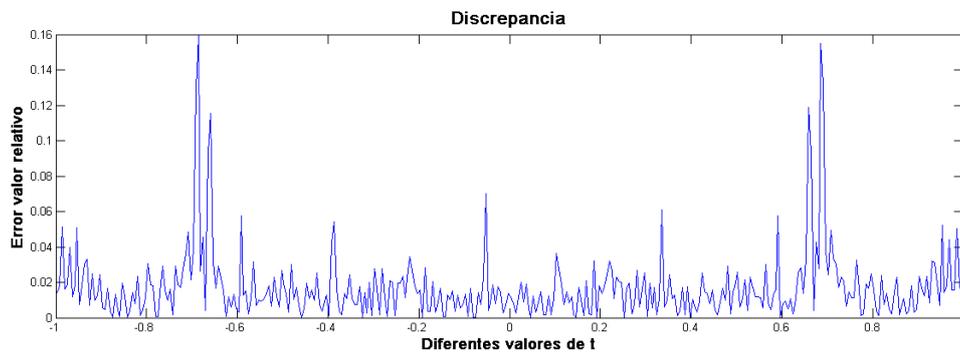


Figura 3.11: En la gráfica mostramos el error relativo entre la imagen inicial y la imagen reconstruida.



Figura 3.12: En esta figura mostramos un histograma de la distribución de los valores de la discrepancia entre los datos originales y los reconstruido. El valor medio de esta distribución está dado por 0.0173 y una desviación estándar de 0.0204

3.0.2. Resultados para la transformada de Radon atenuada

Para poder hacer un análisis de los resultados obtenidos con nuestro código implementado en matlab necesitamos hacer lo siguiente:

- * **Primer paso:** Daremos una imagen inicial que en este caso presentara una perturbación, es decir; tendrá un coeficiente de atenuación y esta nos servirá de referencia para hacer todo el procedimiento de reconstrucción.
- * **Segundo paso:** calculamos la transformada de Radon atenuada hacemos uso de la función `atRT`, donde observamos la imagen inicial y la transformada de Radon atenuada que se representa como un sinograma.
- * **Paso tres:** Hacemos una inversión para f conociendo μ y $g = \mathcal{R}_\mu f$ usando la versión discreta de la fórmula 2.17, una manera de implementarla es calcular la parte real analíticamente, entonces escribimos $h = h_1 + ih_2$, lo que nos da

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \int_{S^1} \omega e^{D_\mu(x, \omega^\perp)} g_\mu(\omega, x \cdot \omega),$$

$$g_\mu := e^{-h_1} (\cos h_2 \mathcal{H}(e^{h_1} \cos h_2 \mathcal{R}_\mu f) + \sin h_2 \mathcal{H}(e^{h_1} \sin h_2 \mathcal{R}_\mu f)).$$

De esta manera se calcula el problema inverso, es decir, calcular la transformada inversa atenuada de Radon mediante la función `iAtRt` dada en el código.

- * **Paso cuatro:** Para ver que tan buena es la reconstrucción tomamos nuevamente un rayo, o $y = 0$ con valores de t y graficamos los valores de f (la imagen dada originalmente) y los valores de la transformada inversa atenuada de Radon (reconstrucción de la imagen aproximada)
- * **Paso cinco:** Para dar una estimación de que tan buena es la reconstrucción calculamos el error relativo y presentamos la gráfica.
- * **Paso seis:** Generamos el histograma y calculamos la desviación estándar y la media de la distribución de la discrepancia entre los datos originales y los reconstruidos para ver si es una buena aproximación.

Ejemplo 3.3. Elegimos una imagen inicial y la atenuación con la que está se perturba como podemos ver en la siguiente figura 3.13:

Resolviendo el problema directo; es decir, calculando la transformada atenuada de Radon mediante la función `atRT`, proporcionada en el código, obtenemos el sinograma que es la representación geométrica de la transformada de Radon atenuada, (ver figura 3.14).

A continuación hacemos la inversión para la imagen inicial perturbada conociendo μ y $g = \mathcal{R}_\mu f$. De esta manera se calcula el problema inverso, es decir,

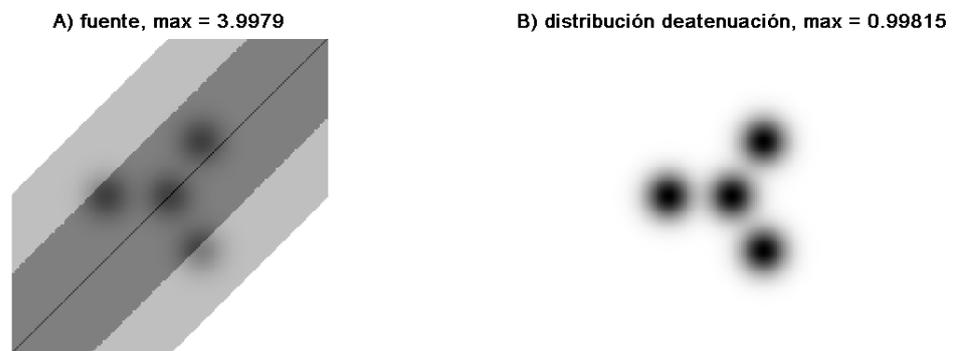


Figura 3.13: A) imagen de origen y B) es la distribución de atenuación con la que se esta perturbando el objeto.

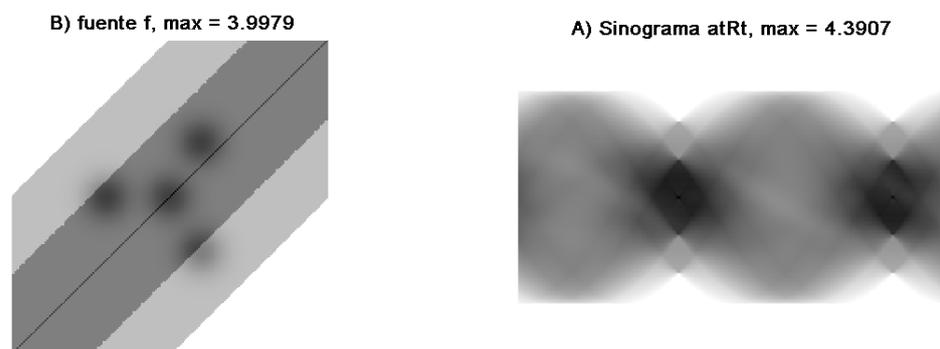


Figura 3.14: A) muestra la imagen inicial con perturbación y en B) mostramos el sinograma que es la representación gráfica de la transformada atenuada de Radon.

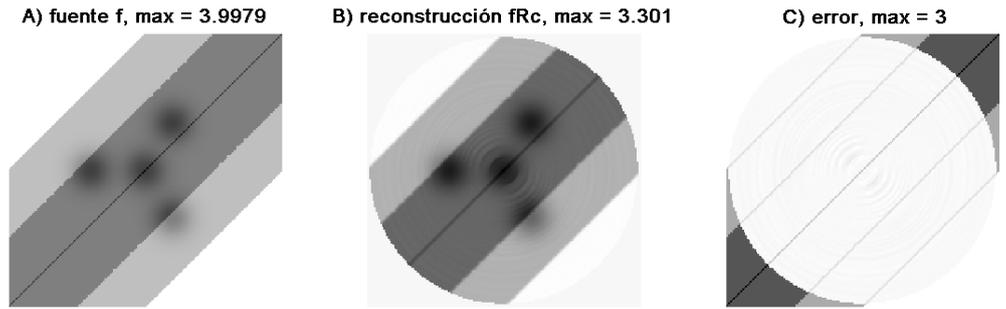


Figura 3.15: A) representa la imagen inicial (objeto de estudio), B) muestra la imagen reconstruida a partir de la transformada de Radon (sinograma) mediante la transformada atenuada inversa de Radon y finalmente, C) representa el error al sobreponer las dos imágenes.

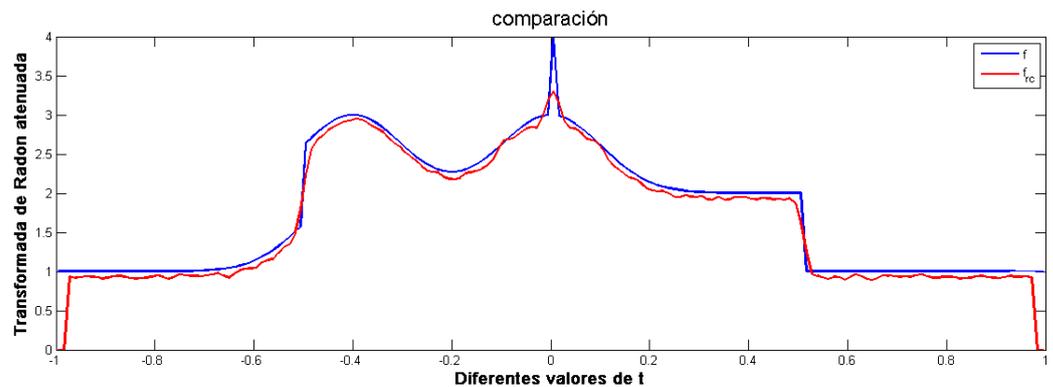


Figura 3.16: comparación entre la imagen original y la imagen reconstruida

calcular la transformada inversa atenuada de Radon mediante la función $iAtRt$ dada en el código, como se puede ver en la figura 3.15.

Para ver que tan buena es la reconstrucción tomamos nuevamente un rayo, o $y = 0$ con valores de t y graficamos los valores de f (la imagen dada originalmente) y los valores de la transformada inversa atenuada de Radon (reconstrucción de la imagen aproximada), como podemos ver en la figura 3.16.

También en la gráfica mostramos el error relativo; es decir, $|im - im_{Rc}|/|im|$, para un θ fijo y para todo t . Se puede observar una buena aproximación que cuantificamos en la siguiente figura 3.17.

Finalmente, mostraremos el histograma generado con el código implementado en matlab, para observar la distribución entre los datos originales y los reconstruidos, también damos el valor medio de la distribución y la desviación

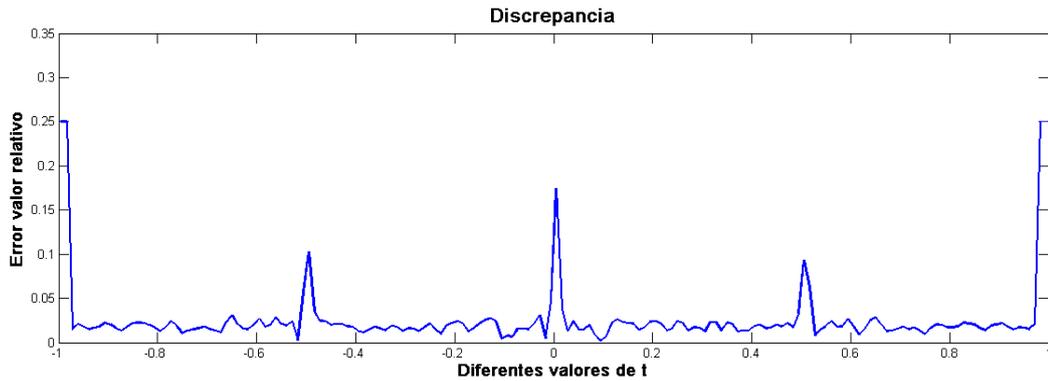


Figura 3.17: Calculamos el error relativo entre la imagen inicial y la imagen reconstruida.

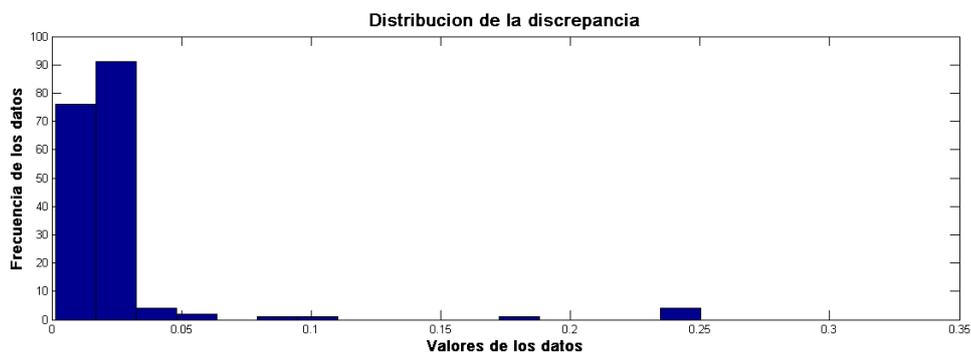


Figura 3.18: En esta figura mostramos el histograma de la distribución de los valores de la discrepancia entre los datos originales y los reconstruido. El valor medio de esta distribución está dado por 0.0255 y una desviación estándar de 0.0375

estándar para darnos una idea de donde se concentran los datos, como se observa en la figura 3.18.

Mostraremos los resultados obtenidos con imágenes diferentes.

Ejemplo 3.4. Damos una imagen inicial y la atenuación con la que está se perturba como podemos ver en la siguiente figura 3.19:

Resolviendo el problema directo, es decir, calculando la transformada atenuada de Radon mediante la función at_{RT} , proporcionada en el código, obtenemos el sinograma que es la representación geométrica de la transformada de Radon atenuada, (ver figura 3.20).

A continuación hacemos la inversión para la imagen inicial perturbada conociendo μ y $g = \mathcal{R}_\mu f$. De esta manera se calcula el problema inverso, es decir,

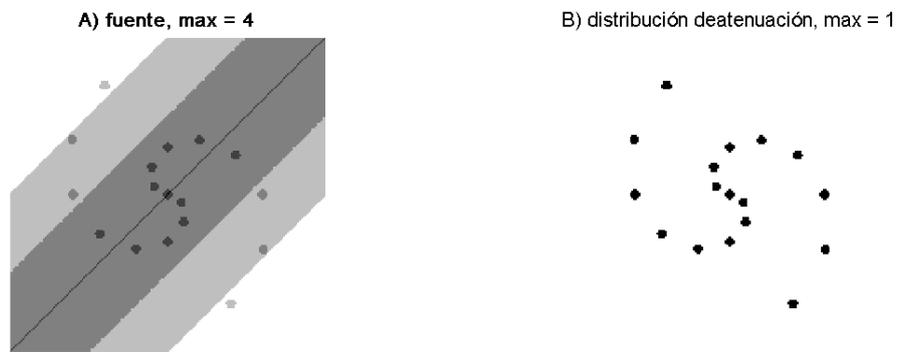


Figura 3.19: A) imagen de origen y B) es la distribución de atenuación con la que se esta perturbando el objeto.

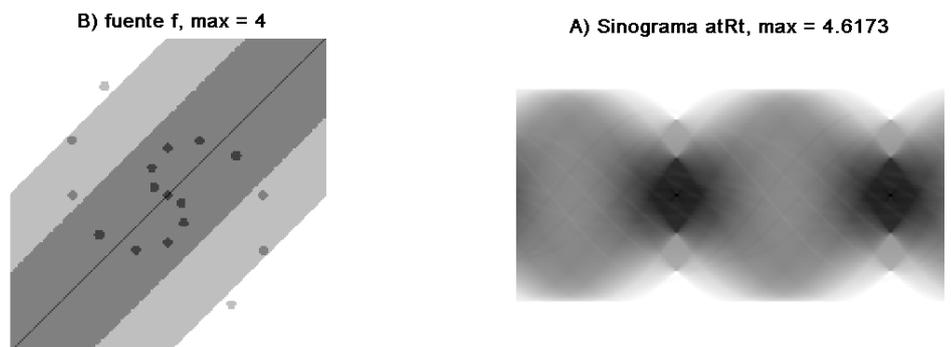


Figura 3.20: A) muestra la imagen inicial con perturbación y en B) mostramos el sinograma que es la representación gráfica de la transformada atenuada de Radon.

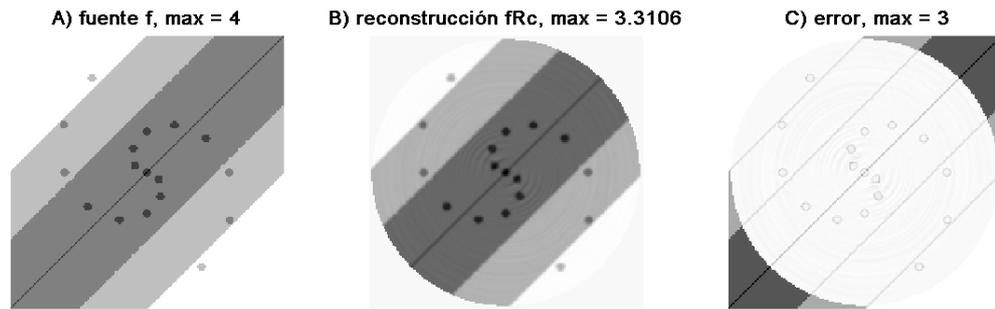


Figura 3.21: A) Representa la imagen inicial (objeto de estudio), B) muestra la imagen reconstruida a partir de la transformada de Radon (sinograma) mediante la transformada atenuada inversa de Radon y finalmente C) representa el error al sobreponer las dos imágenes.

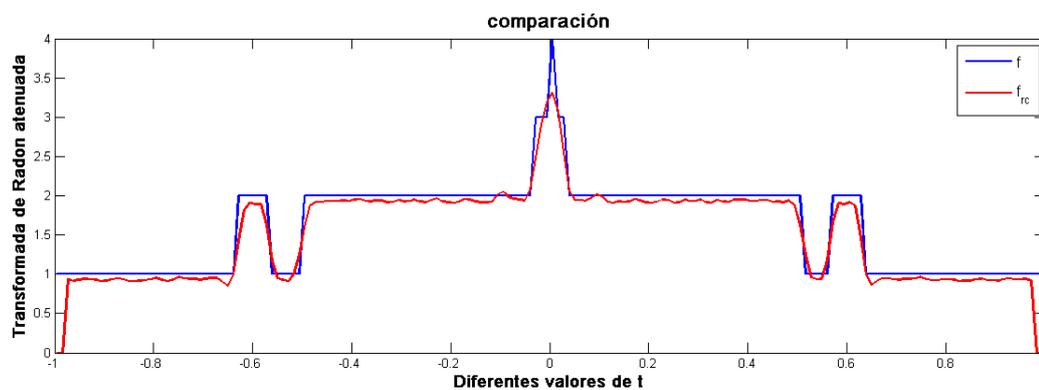


Figura 3.22: Comparación entre la imagen original y la imagen reconstruida

calcular la transformada inversa atenuada de Radon mediante la función $iAtRt$ dada en el código, como se observa en la figura 3.21.

Para ver que tan buena es la reconstrucción tomamos nuevamente un rayo, o $y = 0$ con valores de t y graficamos los valores de f (la imagen dada originalmente) y los valores de la transformada inversa atenuada de Radon (reconstrucción de la imagen aproximada) esto lo podemos observar en la figura 3.34.

Ahora tenemos la gráfica en la que mostramos el error relativo; es decir, $|im - im_{Rc}|/|im|$, para un θ fijo y para todo t . Se puede observar una buena aproximación que cuantificamos en la siguiente figura 3.23.

Finalmente, mostraremos el histograma generado con el código implementado en matlab, para observar la distribución entre los datos originales y los

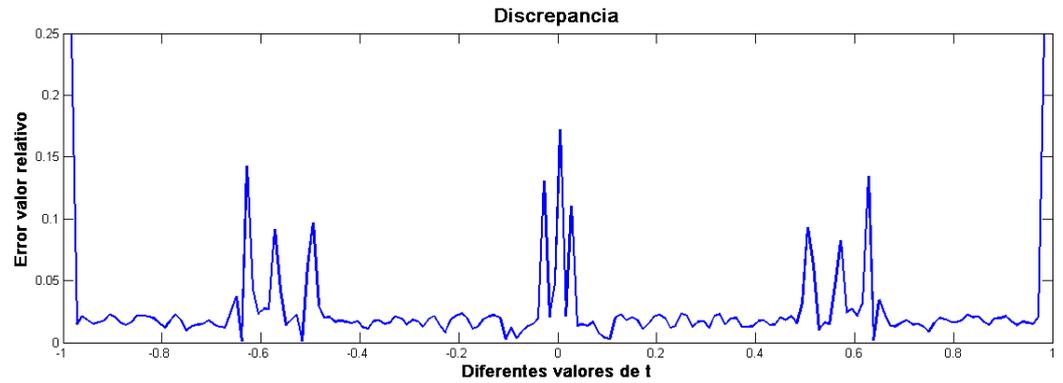


Figura 3.23: Calculamos el error relativo entre la imagen inicial y la imagen reconstruida.



Figura 3.24: En esta figura mostramos un histograma de la distribución de los valores de la discrepancia entre los datos originales y los reconstruidos. El valor medio de esta distribución está dado por 0.0284 y una desviación estándar de 0.0412.

reconstruidos, también damos el valor medio de la distribución y la desviación estándar para darnos una idea de donde se concentran los datos, como se puede observa en la figura 3.24.

A continuación mostramos otros ejemplos pero en esta ocasión nuestra imagen de referencia es una imagen con bordes suaves, como pudimos observar en los ejemplos anteriores era muy drástico el cambio de tonalidades y cuando teníamos la gráfica con el error en algunos lugares el error era mucho mayor, veamos que sucede con los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3.5. Damos una imagen inicial en este caso con tonalidades mas suaves y la atenuación con la que está se perturba como podemos ver en la siguiente figura 3.25:

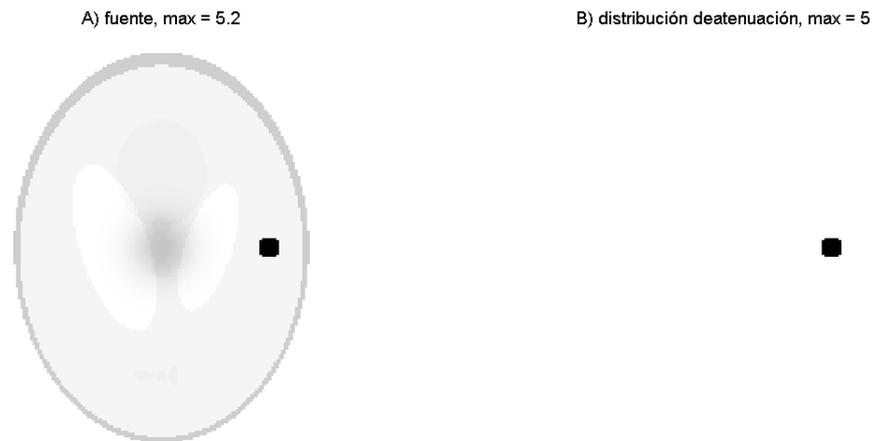


Figura 3.25: A) imagen de origen y B) es la distribución de atenuación con la que se esta perturbando el objeto.

Resolviendo el problema directo, es decir, calculando la transformada atenuada de Radon mediante la función $atRT$, proporcionada en el código, obtenemos el sinograma que es la representación geométrica de la transformada de Radon atenuada, (ver figura 3.26).

A continuación hacemos la inversión para la imagen inicial perturbada conociendo μ y $g = \mathcal{R}_{\mu}f$. De esta manera se calcula el problema inverso, es decir, calcular la transformada inversa atenuada de Radon mediante la función $iAtRt$ dada en el código, lo podemos ver en la figura 3.27.

Para ver que tan buena es la reconstrucción tomamos nuevamente un rayo, o $y = 0$ con valores de t y graficamos los valores de f (la imagen dada originalmente) y los valores de la transformada inversa atenuada de Radon (reconstrucción de la imagen aproximada), (ver figura 3.28).

En seguida mostramos la gráfica del error relativo; es decir, $|im - im_{Re}|/|im|$, para un θ fijo y para todo t . Se puede observar una buena aproximación que cuantificamos en la siguiente figura 3.29.

Finalmente, generamos el histograma para observar como están distribuidos los valores de la discrepancia entre los valores originales y los reconstruidos como se observa en la figura 3.30.

Con lo que podemos concluir que en esta imagen con bordes suaves el error es mucho mas pequeño por lo tanto; la aproximación es mucho mejor.

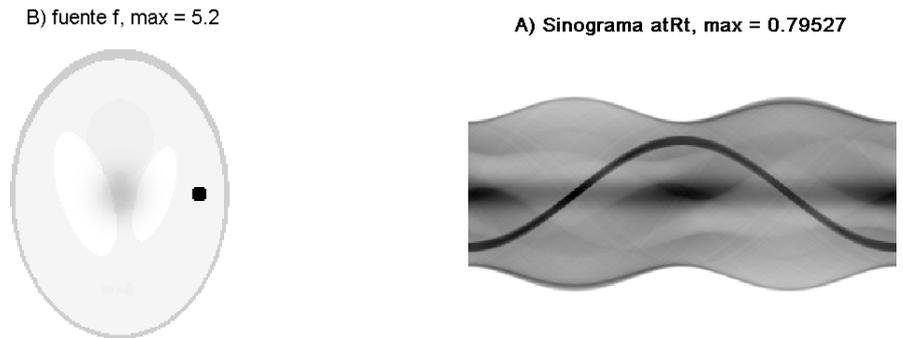


Figura 3.26: A) muestra la imagen inicial con perturbación y en B) mostramos el sinograma que es la representación gráfica de la transformada atenuada de Radon.

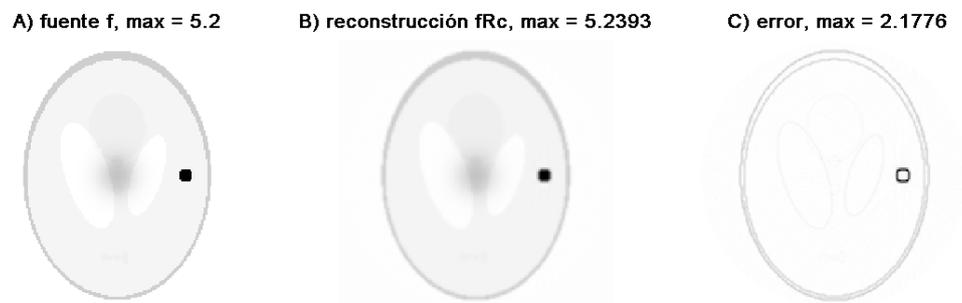


Figura 3.27: A) representa la imagen inicial (objeto de estudio), B) muestra la imagen reconstruida a partir de la transformada de Radon (sinograma) mediante la transformada atenuada inversa de Radon y finalmente C) representa el error al sobreponer las dos imágenes.

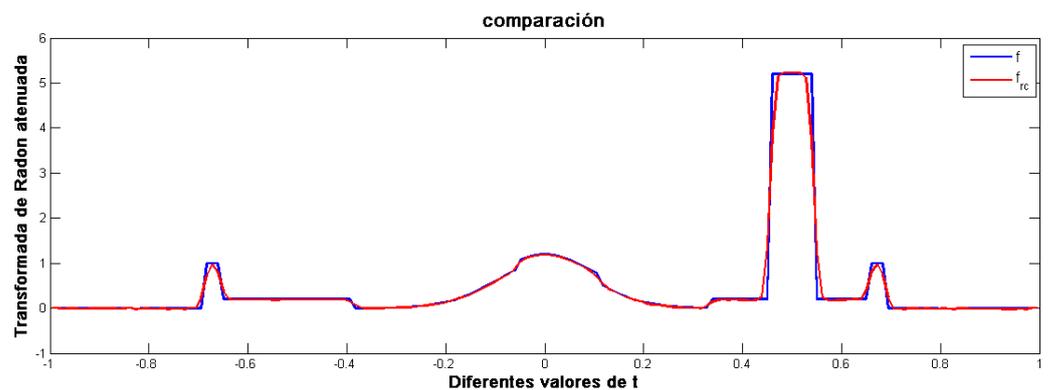


Figura 3.28: Comparación entre la imagen original y la imagen reconstruida

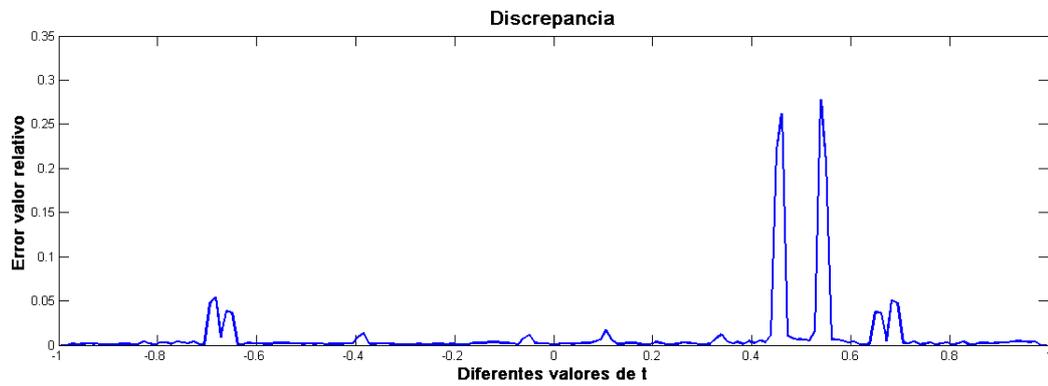


Figura 3.29: Calculamos el error relativo entre la imagen inicial y la imagen reconstruida

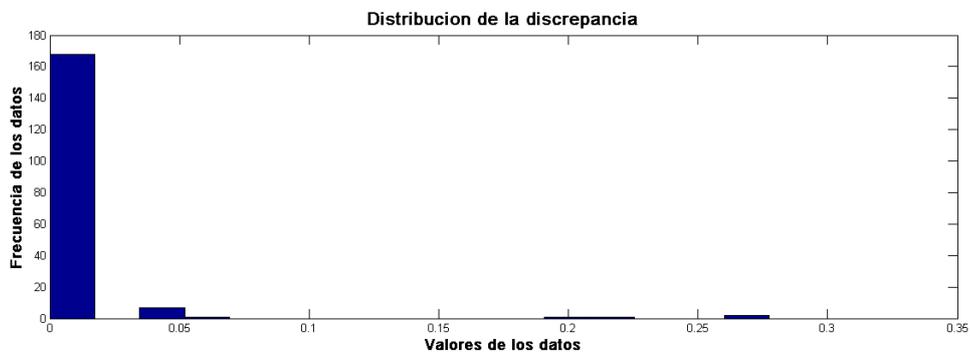


Figura 3.30: En esta figura mostramos un histograma de la distribución de los valores de la discrepancia entre los datos originales y los reconstruido. El valor medio de esta distribución está dado por 0.0098 y una desviación estándar de 0.0365.

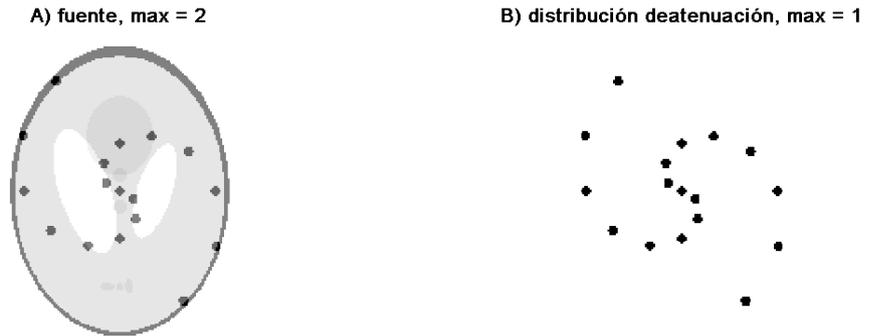


Figura 3.31: A) imagen de origen y B) es la distribución de atenuación con la que se esta perturbando el objeto.

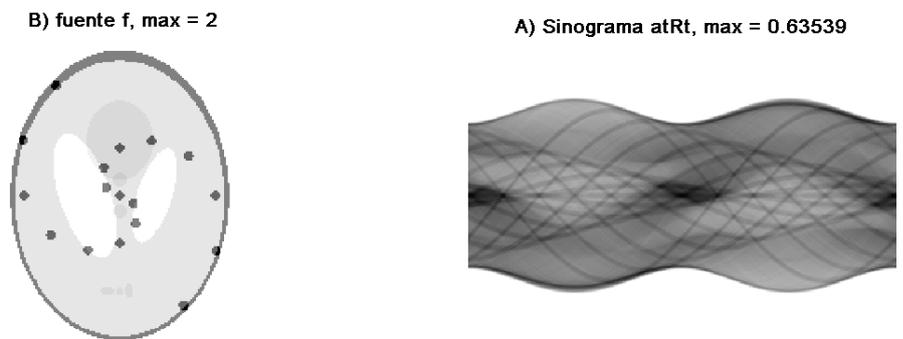


Figura 3.32: A) muestra la imagen inicial con perturbación y en B) mostramos el sinograma que es la representación gráfica de la transformada atenuada de Radon.

Daremos un ejemplo mas, donde la imagen tiene bordes suaves y la perturbación es mayor.

Ejemplo 3.6. Damos una imagen inicial en este caso con tonalidades mas suaves pero la atenuación presenta mayor perturbación como podemos ver en la siguiente figura 3.31:

Resolviendo el problema directo, es decir, calculando la transformada atenuada de Radon mediante la función $atRT$, proporcionada en el código, obtenemos el sinograma que es la representación geométrica de la transformada de Radon atenuada, lo podemos ver en la figura 3.32.

A continuación hacemos la inversión para la imagen inicial perturbada conociendo μ y $g = \mathcal{R}_\mu f$. De esta manera se calcula el problema inverso, es decir, calcular la transformada inversa atenuada de Radon mediante la función $iAtRt$

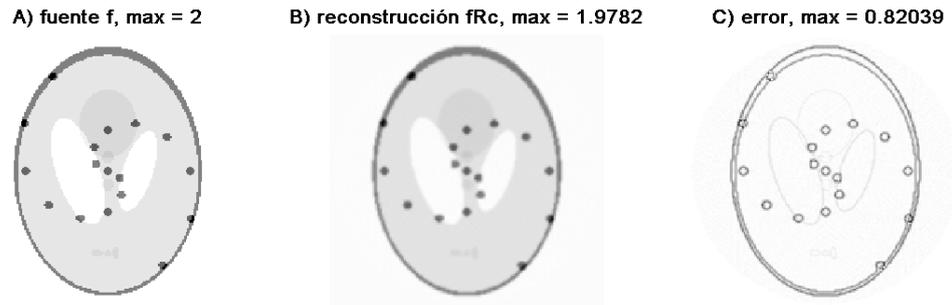


Figura 3.33: A) representa la imagen inicial (objeto de estudio), B) muestra la imagen reconstruida a partir de la transformada de Radon (sinograma) mediante la transformada atenuada inversa de Radon y finalmente C) representa el error al sobreponer las dos imágenes.

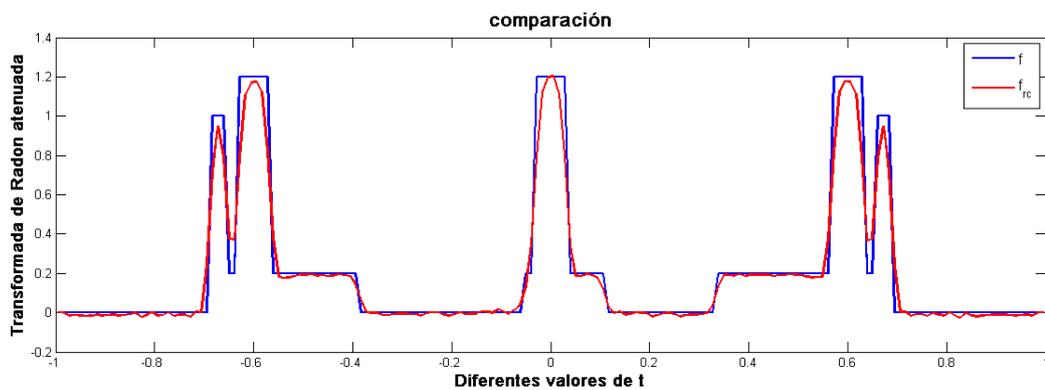


Figura 3.34: comparación entre la imagen original y la imagen reconstruida

dada en el código, y esto lo podemos ver en la figura 3.33.

Para ver que tan buena es la reconstrucción tomamos nuevamente un rayo, o $y = 0$ con valores de t y graficamos los valores de f (la imagen dada originalmente) y los valores de la transformada inversa atenuada de Radon (reconstrucción de la imagen aproximada), (ver figura 3.34).

Ahora en la gráfica mostramos el error relativo; es decir, $|im - im_{Rc}|/|im|$, para un θ fijo y para todo t . Se puede observar una buena aproximación que cuantificamos en la siguiente figura 3.35.

Finalmente, generamos el histograma para observar la distribución de los valores de la discrepancia entre los datos de la imagen original y los de la imagen reconstruida, obtenemos también el valor medio y la desviación estándar

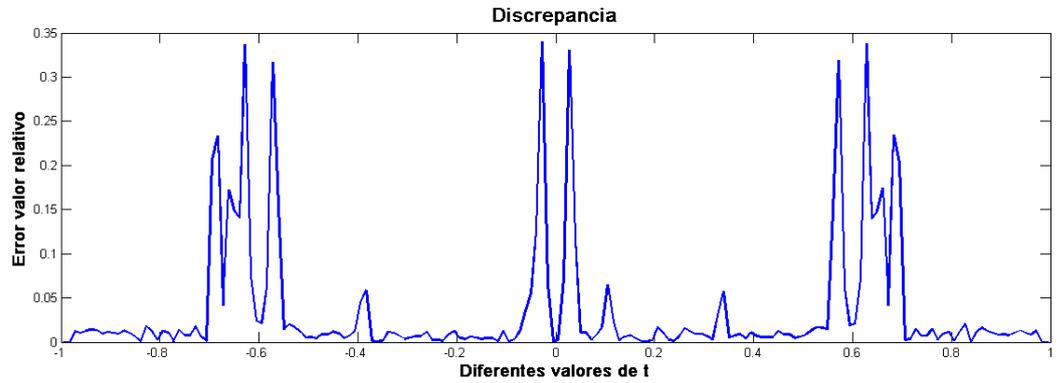


Figura 3.35: Calculamos el error relativo entre la imagen inicial y la imagen reconstruida.

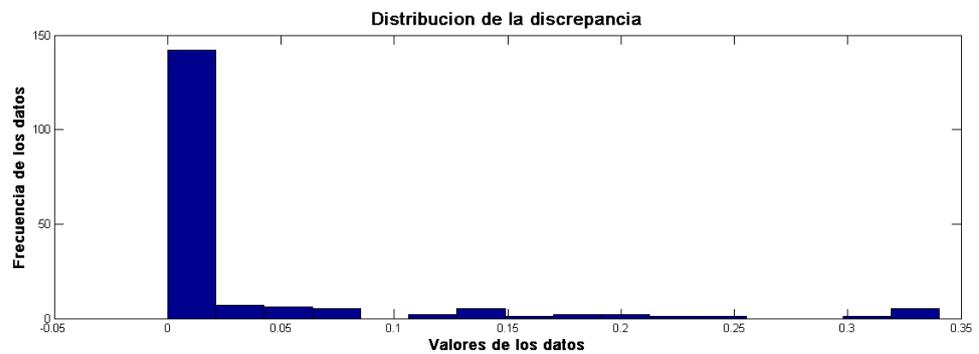


Figura 3.36: En esta figura mostramos un histograma de la distribución de los valores de la discrepancia entre los datos originales y los reconstruido. El valor medio de esta distribución está dado por 0.0355 y una desviación estándar de 0.0711.

ver la figura B.1.

Como pudimos observar, aunque la perturbación era mayor, para este ejemplo el error aún sigue siendo muy pequeño, lo que nos indica que es una buena reconstrucción.

Capítulo 4

Conclusiones

1. Matemáticamente, el problema de reconstrucción de imágenes es un problema complicado, en donde convergen conocimientos de distintas áreas científicas y matemáticas, entre ellas el análisis funcional, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y análisis de Fourier. En las aplicaciones destacan los problemas que provienen de otras disciplinas tales como la medicina, la química, las ciencias de la computación y la física, por mencionar algunas.
2. Dada la complejidad de la fórmula de inversión de la transformada de Radon atenuada, se investigan nuevos métodos de inversión, entre ellos la retroproyección, que fue utilizado en este trabajo, aunque también destacan los métodos iterativos, cuya finalidad es disminuir el costo de cómputo a final de cuentas.
3. El problema de reconstrucción de una función f a partir de su transformada de Radon atenuada, tiene solución sólo si se conoce $\mathcal{R}(f)$ de forma completa. Sin embargo, dado que en la práctica sólo se pueden obtener un número finito de proyecciones (mediciones), se recurre entonces a algoritmos de reconstrucción que realizan aproximaciones del objeto de estudio. De ahí la necesidad de mejorar y seguir investigando sobre algoritmos de reconstrucción cada vez más eficientes, computacionalmente hablando.
4. En los ejemplos dados en este trabajo, cuando se tomaron imágenes con bordes suaves, el código dio buenos resultados, lo que indica que la reconstrucción es una buena aproximación; sin embargo, sería deseable implementar el mismo código con imágenes que proviene de mediciones reales.
5. Un problema abierto en este mismo sentido, es el investigar sobre la solución de problemas de reconstrucción de imágenes en otro tipo de geometrías, inclusive la reconstrucción sobre variedades compactas sigue siendo un tema de investigación por su aplicabilidad en situaciones realistas.

6. Otro problema a considerar es investigar sobre la combinación entre la estimación estadística (bayesiana) y la de la metodología de Radon.

Apéndice A

Reconstrucción por métodos iterativos

Los algoritmos iterativos comienzan por proponer un objeto f^i , por ejemplo, con distribución homogénea de atenuaciones. A continuación, se calculan las proyecciones p^i , correspondientes al objeto propuesto y se comparan con las proyecciones originales medidas en el detector p^0 . El objeto propuesto f^{i+1} se actualiza, con base en la diferencia de las proyecciones. Matemáticamente, este proceso se podría expresar así:

$$p^i = Af^i + e \quad (\text{A.1})$$

donde A corresponde a una matriz que depende de la geometría del sistema, la respuesta del detector y otros parámetros físicos del tomógrafo en cuestión; y e corresponde al error inducido por el ruido (por ejemplo en el detector). Con este proceso iterativo, se produce una secuencia de distribuciones de atenuación f_1, f_2, \dots, f_n ; hasta que converge a un valor óptimo f_{opt} , basado en una regla de optimización comparando p^i con p^0 .

En el método ART, se supone una distribución homogénea de atenuaciones f para finalizar el proceso de iteración y se ignora la naturaleza estadística del problema. El proceso iterativo respectivo se ejemplifica, (ver figura A.1)

Es importante destacar que los métodos iterativos convencionales o de retroproyección son aproximaciones. A medida que los métodos son más complejos y toman en cuenta factores físicos como el ruido, endurecimiento del rayo o la dispersión, se pueden obtener mejores aproximaciones. Algunas de las ventajas de contar con métodos iterativos estadísticos, incluyen la posibilidad de disminuir dosis de radiación y un mejor manejo de otros problemas, como los artefactos debido a metales [5] [6], si bien estrategias para reducir artefactos metálicos usando FBP también han sido propuestas [7].

Uno de los métodos estadísticos empleados para resolver el problema de la reconstrucción de imágenes por procedimientos iterativos, es el de Máxima Verosimilitud (MV). Este comienza expresando el Máximo a posteriori (MAP) que se basa en la regla de Bayes:

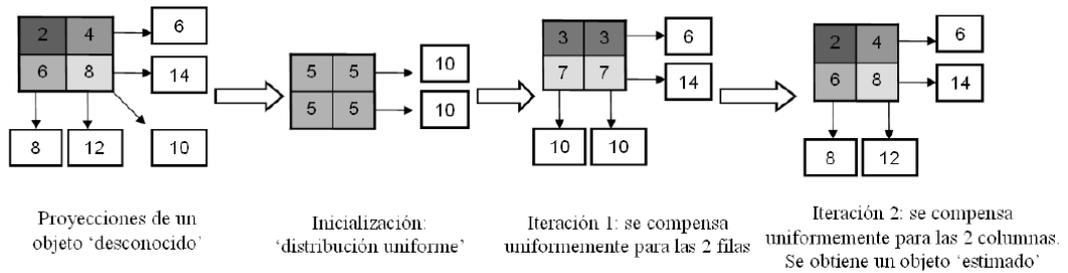


Figura A.1: Ejemplo del método ART 2×2 . Un objeto compuesto de 4 atenuaciones distintas (2,4,6, y 8), es proyectado en 3 ángulos diferentes $\theta = \theta^\circ, 45^\circ$ y 90° , obteniendo cinco valores (cuadros blancos). Para la reconstrucción, sólo se cuenta con las proyecciones, que indican que hay un total de '20 HU' ($2+4+6+8$) para distribuir en 4 píxeles. Se empieza por asumir que la distribución es homogénea (5 HU por píxel). Cuando se compara con las proyecciones en las filas, se observa que sobran 4 HU en la primera fila y faltan 4 HU en la segunda. De nuevo, se asume que las filas se distribuyen uniformemente (iteración 1). Para este momento, se observa que los valores de las filas ya satisfacen los valores de las proyecciones que se miden en las filas (6 HU y 14 HU); pero, si se observan las proyecciones de las columnas, se notan algunas diferencias. Análogamente a la iteración 1, se asume que la iteración es uniforme, con lo que a cada elemento de la primera columna se le resta 1 HU, mientras que se le suma 1 HU a la segunda. Como resultado, se obtiene una distribución de atenuaciones estimada del objeto, cuyas proyecciones satisfacen aquellas que habían medido en el detector.

$$P(f | p) = \frac{P(p | f)P(f)}{P(p)} \quad (\text{A.2})$$

donde, dado el conjunto de proyecciones p , debe encontrarse la distribución de atenuaciones f que maximice la probabilidad $P(f | p)$. Cuando no se tiene información *a priori* acerca de la imagen (lo que elimina el termino $P(f)$) y se omite el termino $P(p)$ asumiendo que es independiente de f , el problema se reduce a optimizar $P(p | f)$, y se obtiene precisamente el método MV.

Ahora si se asume que las variaciones estadísticas son mutuamente independientes, la probabilidad P puede ser escrita de la siguiente manera:

$$P(p | f) = \prod_{i=1}^I P(p_i | f) \quad (\text{A.3})$$

Es conocido que la mayor fuente de incertidumbre (ruido) en la tomografía proviene de la naturaleza cuántica de los fotones de rayos X, y su conteo se modela con una distribución Poisson [9]: Una distribución de Poisson para p , donde \hat{p} es el valor esperado de ocurrencias en el intervalo de observación, puede expresarse como:

$$P(p | \hat{p}) = \frac{\hat{p}^p e^{-\hat{p}}}{p!} \quad (\text{A.4})$$

Como la probabilidad de p_i dependerá sólo de la estimación de \hat{p}_i , con base en la imagen f , se puede reescribir la ecuación A.3 de la siguiente manera:

$$L = \ln[P(p | \hat{p})] = \ln \left[\prod_{i=1}^I e^{-\hat{p}_i} \frac{\hat{p}_i^{p_i}}{p_i!} \right] \quad (\text{A.5})$$

Notése que, en lugar de maximizar la función monotónica. Para resolver A.5 se utilizan diversos métodos numéricos, y su elección depende de la velocidad con que se puede converger a una imagen [6] [10]. La reconstrucción iterativa es utilizada en medicina nuclear (PET y SPECT), donde la cantidad de datos a procesar es significativamente menor a la requerida por la tomografía computarizada de rayos X [10]. Actualmente, existe un gran interés en poder utilizar la reconstrucción iterativa en tomografía y, consecuentemente, numerosos grupos de investigación y empresas emplean diversas estrategias para implementarla de una manera más rápida. En general, pueden identificarse tres enfoques: mejora en los algoritmos, la utilización de hardware dedicado (FPGAs o tarjetas gráficas), o procesamiento en paralelo.

Apéndice B

Código computacional

```
function mat = myMap(type ,N, sig ,x ,y)

%creamos una imagen una imagen, tendremos diferentes ejemplos para probar
switch type
    case 'phantom'
        mat = phantom('Modified Shepp–Logan',N);
    case 'noise'
        mat = rand(N);
    case 'isa'
        temp = myMapElem('disk',N,0.24,0,0.2) - ...
            myMapElem('disk',N,0.2,0,0);

    case 'mickey'
        temp = myMapElem('disk',N,0.24,0,0.2) - ...
            myMapElem('disk',N,0.28,0,0);
        temp = temp.*double(temp>=0);
        mat = myMapElem('disk',N,0.2,-0.3,-0.2)+ ...
            myMapElem('disk',N,0.2,0.3,-0.2)+ ...
            myMapElem('disk',N,0.4,0,0.2) - temp;
        mat = mat-myMapElem('disk',N,0.02,-0.16,0.06) - ...
            myMapElem('disk',N,0.02,0.16,0.06);
    case 'nicedisks' %x es #discos, y = distancia del centro
        mat = myMapElem('zero',N,0.12,0.55,0.6);
        pts = [0., y*exp(2*pi*i*(1/2/x:1/x:1-1/2/x))];
        for j=1:x+1,
            mat = mat + myMapElem('disk',N,sig,real(pts(j)),imag(pts(j)));
        end
    case 'nicebumps' %x es #golpes o bullto (no se como llamarlo), y = dis
        mat = zeros(N);
        pts = [0.,y*exp(2*pi*i*(1/2/x:1/x:1-1/2/x))];
        for j=1:x+1,
            mat = mat + myMapElem('gaussian',N,sig,real(pts(j)),imag(pts(j))
```

```

        end
    case 'disks'
        mat = zeros(N);
        for j=1:size(x,2),
            mat = mat + myMapElem('disk',N,sig,x(j),y(j));
        end
    case 'gaussians'
        mat = zeros(N);
        for j=1:size(x,2),
            mat = mat + myMapElem('gaussian',N,sig,x(j),y(j));
        end
    case 'stripes'
        mat = myMapElem('line',N,sig,0,0);
        mat = mat + myMapElem('line',N,sig,0,0.5);
        mat = mat + myMapElem('line',N,sig,0,-0.5);
    case 'potatoes'
        mat = myMapElem('potatoe',N,sig,x(1),y(1));
        for j=2:size(x,2),
            mat = mat + myMapElem('potatoe',N,sig,x(j),y(j));
        end
    case 'spiral'
        mat = myMapElem('disk',N,sig,0.,0.);
        for j=1:8,
            mat = mat + myMapElem('disk',N,sig,j/10*cos(j*pi/6),j/10*
            mat = mat + myMapElem('disk',N,sig,-j/10*cos(j*pi/6),-j/10
        end

    otherwise
        mat = myMapElem(type,N,sig,x,y);
end

end

end

%-----
function mat = myMapElem(type,N,sig,x,y)

%crea imagenes predeterminadas
%x,y: coorsdenadas en la región [0,1]x[0,1]
%N: tamaño de la imagen resultante
%sig: radio y ancho que debe cruzar...

xs = -1+1/N:2/N:1.-1/N;
[X,Y] = meshgrid(xs,xs);

```

```

switch type
    case 'one'
        mat = ones(N);
    case 'gaussian'
        mat = exp(-((X-x).^2 +(Y-y).^2)/2/ sig ^2);
    case 'disk'
        mat = double(((X-x).^2+(Y-y).^2)<= sig ^2);
    case 'square'
        mat = double(abs(X)<=0.5).*double(abs(Y)<=0.5);
    case 'sines'
        mat = 1. + sin(2*pi*X).*sin(2*pi*Y);
    case 'cross' %sig en este caso es el valor de theta
        mat = double(abs(cos(sig)*X +sin(sig)*Y)<0.01)+ ...
            double(abs(-sin(sig)*X+cos(sig)*Y)<0.01);
        mat = mat.*double((X.^2+Y.^2)<0.04);
        mat = mat + double((X.^2+Y.^5)<1);
    case 'y'
        mat = Y;
    case 'line'
        mat = double(abs(X-x + Y-y)<=sig);
    case 'yline'
        mat = double(abs(X-x)<=sig);
    case 'potatoe'
        %(x,y) posicionen el centro
        %sig = [r0, r1, .., rn; 0, t1, .., tn]
        ncoeffs = size(sig,2)-1;
        Z = X-x + i*(Y-y);
        argZ = angle(temp)/2/pi;
        rs = sig(1,1)*ones(N);
        for j=1:ncoeffs,
            rs = rs + sig(1,j+1)*cos(2*pi*j*(argZ-sig(2,j+1)));
        end
        mat = double(abs(Z)<=rs);
    otherwise
        mat = zeros(N);
end
end
end

```

B.1. Transformada de Radon

```

function RT = myRadon(im, thetas, rotMethod)
%
% calcula la transformada de Radon de una image dentro de un
% cuadrado [-1,1]^2.

```

```

%datos de entrada: im      – imagen inicial
%                   thetas  – num de angulos para calcular la transf
%                   Radon
%                   rotMethod – método usado para rotar la imagen
% datos de salida: RT      – los datos de Radon
% ver también ROTATEIMAGE, MYRADON

```

```

n = size(im,1); %tamaño de la imagen
nth = size(thetas ,2); %numero de angulos
RT = zeros(n, nth); %inicializar transformada de Radon

%para cada angulo \theta , rotamos la imagen de modo que las filas
%estén alineadas con la direccion
%\theta ^\perp = (-\sin\theta , \cos\theta), y sumar a traves de las fil

for th=1:nth,
    RT(:,th) = (2/n)*sum(rotatelmage(im,thetas(th)+pi/2,rotMethod),2)
end

%llenamos de ceros de modo que el rango de t es [-\sqrt(2),\sqrt(2)]
zp = ceil( (sqrt(2)-1)*n/2 );
RT = [zeros(zp,nth); RT; zeros(zp,nth)];

end

```

B.2. Transformada de Radon inversa

```

function [imRc,H] = mylRadon(RT, filter , thetas , d, n)
%calcula la transformada inversa de Radon, por ahora solo usaremos
%interpolación lineal
%
% datos de entrada: RT      – datos de Radon para invertir
%                   filter –tipo de filtro: 'ram-lak', 'shepp-logan
%                   'cosine', 'hann', 'hamming'
%                   thetas – angulos correspondientes a las proyec
%                   d      – en [0,1], corte de la frecuencia norma
%                   n      – tamaño de la imagen reconstruida
% datos de salida: imRc – imagen reconstruida
%                   H      – filtros usadosn en frecuencia y dominio

%— filtrar cada proyeccion

```

```

[RT,H] = filterProjections(RT, filter , d);

imRc = zeros(n); %— asignamos memoria para la imagen

%definie una rejilla para la construcción
x = -1+1/n:2/n:1-1/n;
x = repmat(x, n, 1);

y = (1-1/n:-2/n:-1+1/n).';
y = repmat(y, 1, n);

costhetas = cos(thetas); sinthetas = sin(thetas);

dtheta = thetas(2)-thetas(1);

nr = size(RT,1);

%— Retroproyeccion - vectirizada en (x,y), iteracion sobre theta
%contador = 1;
for i=1:length(thetas)
    proj = RT(:,i);
    t = x.*costhetas(i) + y.*sinthetas(i);
    t = (t-(-nr/n+1/n))*n/2+1;
    a = floor(t);

    temp = (t-a).*proj(a+1) + (a+1-t).*proj(a);
    %%%%%%%%%%%%%%%

    imRc = imRc + temp;
end

imRc = (dtheta/2)*imRc;

%— llevara a cabo la parte exterior del disco unitario
imRc = (n/2)*imRc.*double(x.^2+y.^2<=1);

end

%=====
function [p,H] = filterProjections(p_in, filter , d)

p = p_in;

%diseñamos el filtro
len = size(p,1);

```

```

H = designFilter(filter , len , d);

if strcmpi(filter , 'none')
    return;
end

p(length(H),1)=0;

p = fft(p);    %p tiene fft de proyecciones

for i = 1:size(p,2)
    p(:,i) = p(:,i).*H; %filtrado de dominio de la frecuencia
end

p = real(iff(p));    %p son las proyecciones filtradas
p(len+1:end,:) = []; %runca las proyecciones filtradas

end
%-----

%=====
function filt = designFilter(filter , len , d)
%regresa el valor de la transformada de Fourier del filtro , que sera
%utilizado para filtrar cada una de las proyecciones .
%
%datos de entrada:  filter – especifica el tipo de filtro que utiliz
%                   len   – longitud de las proyecciones
%                   d     – nos indica la fracción de frecuencias
%                           debajo de la de Nyquist que queremos pa
%
%datos de salida:  filt  – filtro que se utiliza en las proyecciones

order = max(64,2^nextpow2(2*len));

if strcmpi(filter , 'none')
    filt = ones(1, order);
    return;
end

%primero tomamos un filtro de rampon y luego tomamos la potencia mas
%que es 2

filt = 2*( 0:(order/2) )./order;
w = 2*pi*(0:size(filt,2)-1)/order;    %eje de frecuencia hasta Nyquist

```

```

switch filter
    case 'ram-lak'

    case 'shepp-logan'

        filt(2:end) = filt(2:end) .* (sin(w(2:end)/(2*d))./(w(2:end)/(2*d)))
    case 'cosine'
        filt(2:end) = filt(2:end) .* cos(w(2:end)/(2*d));
    case 'hamming'
        filt(2:end) = filt(2:end) .* (.54 + .46 * cos(w(2:end)/d));
%case 'hann'
%    filt(2:end) = filt(2:end) .* (1+cos(w(2:end)./d)) / 2;
    otherwise
        eid = sprintf('Images:%s:filtro invalido ',mfilename);
        msg = 'la seleccion del filtro no es valida.';
        error(eid,'%s',msg);
end

filt(w>pi*d) = 0; %corta la respuesta de frecuencia
filt = [filt' ; filt(end-1:-1:2)']; %simetria del filtro

end
%_____

```

B.3. Transformada de Radon atenuada

```

function RT = atRt(a,f,thetas,rotMethod)
%Transformada atenuada de Radon
%calcula la transformada de Radon de f multiplicado por el termino de
%atenuacion a
%argumentos:
%- a: funcion de atenuación atenuacion
%- f: imagen sobre la que se esta trabajando
%- thetas: numero de angulos
%- rotMethod: metodo de rotacion , '4pt' o 'spectral'

n = size(a,1); h = 2/n;
nth = size(thetas,2);
RT = zeros(n, nth);

for th=1:nth,
    %calcula Da(.,theta) siempre que gire la imagen

```

```

    Darot = fliplr( exp(-h*cumsum( fliplr( rotatelmage(a,thetas(th)+pi/2,rotMethod),
    %calcula R_a f(., theta)
    RT(:,th) = h*sum(Darot.*rotatelmage(f,thetas(th)+pi/2,rotMethod),
end

%rellenamos con ceros
zp = ceil( (sqrt(2)-1)*n/2 );
RT = [zeros(zp,nth); RT; zeros(zp,nth)];

end

```

B.4. Transformada de Radon atenuada inversa

```

function fRc = iAtRt(a, atRT, thetas, rotMethod, filter, d)

%inversion de la transformada de Radon atenuada
%argumentos de entrada: a          : atenuación
%                        atRT       : datos de la transformada atenuada
%                        thetas      : the angles corresponding to each
%                        rotMethod   : metodo de rotación
%                        filter      : filtro que se usara para la tran
%                        hilber
%                        d           : ancho de banda
%
%argumentos de salida: fRc        : imagen reconstruida
%

n = size(a,1); h = 2/n;

x = -1+1/n:h:1-1/n;
x = repmat(x, n, 1);

y = (1-1/n:-2/n:-1+1/n).';
y = repmat(y, 1, n);

nr = size(atRT,1);

%transformada de radon de a (coeficinet de atenuación)
RTa = myRadon(a, thetas, rotMethod);

h1 = .5*RTa;
h2 = .5*hilbTrans(RTa, filter, d);

```

```

ga = zeros(size(h1));
for j=1:size(ga,2),
    ga(:,j) = exp(-h1(:,j)).*( ...
        cos(h2(:,j)).*hilbTrans(exp(h1(:,j)).*cos(h2(:,j)).*atRT(:,j),filter
        sin(h2(:,j)).*hilbTrans(exp(h1(:,j)).*sin(h2(:,j)).*atRT(:,j),filter
end

%retroproyeccion
tempx = zeros(n,n); tempy = zeros(n,n);

for th=1:length(thetas),
    %calcula exp(Da(x,\theta^\perp))
    Da = exp(h*flip1r(cumsum(flip1r(rotatImage(a,thetas(th)+pi/2,rotMethod
    Da = rotatImage(Da,-thetas(th)-pi/2,rotMethod);

    %integral dentro de S1
    proj = ga(:,th);
    t = x.*cos(thetas(th)) + y.*sin(thetas(th));
    t = (t-(-nr/n+1/n))*n/2+1;
    ft = floor(t);

    tempx = tempx + cos(thetas(th))*Da.*((t-ft).*proj(ft+1) + (ft+1-t).*pro
    tempy = tempy + sin(thetas(th))*Da.*((t-ft).*proj(ft+1) + (ft+1-t).*pro
end

%
tempx = tempx*2*pi/length(thetas)/(4*pi);
tempy = tempy*2*pi/length(thetas)/(4*pi);

fRc = divergence(x,y,tempx,tempy);

%— llevará a cabo la parte exterior del disco unitario
fRc = fRc.*double(x.^2+y.^2<=0.95);

end

```



UN PROBLEMA DE INVERSTON DE LA TRANSFORMADA DE RADON ATENUADA CON INHOMEGENEIDAD ESPACIAL

En la Ciudad de Mexico, se presentaron a las 15:00 horas del día 31 del mes de mayo del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ
- DR. JOSE HECTOR MORALES BARCENAS
- DR. LUIS ALBERTO MEDINA VELAZQUEZ
- DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ



ISABEL MARTINEZ CASTAÑEDA
ALUMNA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)
DE: ISABEL MARTINEZ CASTAÑEDA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

REVISO



LIC. JULIO CÉSAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISION DE CBI



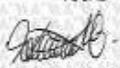
DR. JOSÉ GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE



DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

VOCAL



DR. JOSÉ HECTOR MORALES BARCENAS

VOCAL



DR. LUIS ALBERTO MEDINA VELAZQUEZ

SECRETARIO



DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ

Figura B.1: Acta examen de grado.

Bibliografía

- [1] Deans, S.R, The Radon Transform: and some of its Applications, Vol 1, New York: John Wiley and Sons, 1983.
- [2] Ludwig, D, The Radon Transform on Euclidean Space, Vol 19, Comm. Pure Appl. Math, 1966.
- [3] Amed Alfonso C. Rojas Lucio Ricardo de Armas, *El problema de la tomografía local enfoque wavelets*, Revista de la Facultad de Ingeniería ? Año 13 ? n.º 26, julio-diciembre de 2012.
- [4] Valenzuela, H., Distribuciones de Green y Aplicaciones, Hermosillo, Sonora, México, 2001.
- [5] Liu X., Shaw C.C., Altunbas M.C., Wang T, An alternate line erasure and readout (ALER) method for implementing slot-scan imaging technique with a flat-panel detector-initial experiences, IEEE Trans Med Imaging, 2006.
- [6] DeMan B, *Iterative Reconstruction for Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomography*, Tesis doctoral por: KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN FACULTEIT TOEGEPASTE WETENSCHAPPEN DEPARTEMENT ELEKTROTECHNIEK (ESAT), AFDELING PSI, 2001.
- [7] Rinkel J., Dillon W.P., Funk T., Gould R., Prevrhal S, *Computed tomographic metal artifact reduction for the detection and quantitation of small features near large metallic implants: a comparison of published methods*, J Comput Assist Tomogr, 2008 Jul-Aug, 32(4):621-9, doi: 10.1097/RCT, 0b013e318149e215.
- [8] Abia Vian José A, Matemáticas I: Álgebra lineal, Anexo: demostraciones (Espacios vectoriales), I.T.I en Electricidad, [http : //mate.dm.uba.ar/jeronimo/algebra_lineal/Capitulo8.pdf](http://mate.dm.uba.ar/jeronimo/algebra_lineal/Capitulo8.pdf)
- [9] Hsieh J, *Adaptive streak artifact reduction in computed tomography resulting from excessive x-ray photon noise*, Med Phys, 1998 Nov;25(11):2139-47.
- [10] Matej S., Fessler J.A., Kazantsev I.G, *Iterative tomographic image reconstruction using Fourier-based forward and back-projectors*, IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol 23, 2004.

- [11] M. R. Spiegel, J. Liu, L. Abellanas, *Fórmulas y tablas de matemáticas aplicadas*, Serie Schaum. Mc Graw-Hill, 2003.
- [12] Jerry L. Prince, *Medical Imaging Signals and Systems*, Springer Science-Business Media, 2006.
- [13] J. Radon, "On the determination of functions from their integral values along certain manifolds," in *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 5, no. 4, pp. 170-176, Dec. 1986.
- [14] M.N. Wernick and J. N. Aarsvold, *Emission Tomography: The fundamentals of PET and SPECT*, Elsevier, 2004.
- [15] G.B. Saha, *Basic of PET Imaging*, Springer, 2005.
- [16] Scott AM, Poon AMT, PET imaging of brain tumors, Ell PJ, Gambhir SS, eds. *Nuclear Medicine in Clinical Diagnosis and Treatment*, 3rd ed, Philadelphia, Pa: Elsevier Churchill-Livingstone, 2004.
- [17] Fernández, J.L., Alberdi, J., Barcala, J.M, *Desarrollo de algoritmos de reconstrucción de imágenes en tomografía de capacitancia eléctrica*, Ministerio de educación, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario.
- [18] C. L. Epstein, *Introduction to the Mathematics of medical Imaging*, Pearson Prentice Hall, 2003.
- [19] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, SIAM, 2001.
- [20] Galindo S, *Principios matemáticos de la reconstrucción de imágenes tomográficas*, Revista ciencia-Ergo Sum, Vol 10, 2003-2004.
- [21] Meyer PT, Rijntjes M, Weiller C, Neuroimaging: Functional neuroimaging, Daroff RB, Fenichel GM, Jankovic J, Mazziotta JC, eds. *Bradley's Neurology in Clinical Practice*, 6th ed., Philadelphia, Elsevier Saunders, 20012.
- [22] Natterer, F. (Frank), *The mathematics of computerized tomography*, Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 0-89871-493-1, 1986.
- [23] Reddy, B. D, *Introductory Functional Analysis with Applications to Boudary Value Problems and Finite Elements*, Springer-Verlag New York, Vol 46, 1998.
- [24] Valenzuela, H, *Distribuciones de Green y Aplicaciones*, Universidad de Sonora, QA324.V34, 2001.
- [25] Kak, A.C. and Slaney, M, *Principles of Computerized Tomography*, IEEE Press, 1987.

- [26] Gradshteyn I S and Ryzhik I M, Table of Integrals, and Products, New York: Academic, 1965.
- [27] F. Natterer, *On the Inversion of the Attenuated Radon Transform*, Numr. Math, 0-7803-8701- IEEE, 1979.
- [28] Budinger, T.F., Gullberg, G.T, *Transverse Section Reconstruction of Gamma-Ray Emitting Radionuclides in Patients* In: Reconstruction Tomography in Diagnostic Radiology and Nuclear Medicine, University Park Press, 1977.
- [29] Ludwig, D, *The Radon Transform on Euclidean Space*, Comm. Pure Appl. Math, Vol 19, 1966.
- [30] Kaipio J., Somersalo E, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer, 2005.
- [31] Corbo P, *Tomografía Axial Computarizada*, Ponencias del XII seminario de ingeniería biomédica, Montevideo: Universidad de la República oriental de Uruguay, 2004.
- [32] Juan Manuel Ramirez Cortes, Ma. del pilar Gomez, David Baez, *Transformada rápida de Fourier y su controvertido origen*, Ciencia y desarrollo, Vol XXIV, Marzo- Abril 1998.
- [33] L.Trefethen, *Spectral Methods in MatLab*, SIAM, Philadelphia, 2000.