



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Física

Superconductividad y Dinámica no lineal

Tesis que presenta
Fís. Alberto Francisco Sandino Hernández
para obtener el grado de
Maestro en ciencias (Física)



Asesor:
Dr. José Luis del Río Correa

Jurado Calificador:
Dr. Gerardo Carmona Ruiz
Dr. Jesús Morales Rivas
Dr. Alberto Rubio Ponce

México, D.F. Julio de 2014



*A mis padres Salustia y Ramón por todo su amor, comprensión y apoyo sin condición ni medida.
A mi hermano y hermanas, por estar siempre conmigo en todo momento.
A mi sobrino Santiago por darme esperanza con su inocencia.
A todos mis alumnos del CCH Oriente por darme muchas alegrías al impartir clases de Física.
A ti Lilia, por estar conmigo en estos momentos de mi vida
y al fruto de nuestro amor que viene en camino.*



Resumen

En este trabajo se realiza una revisión de las teorías macroscópica y microscópica de la superconductividad, con el objetivo de comprender el efecto Josephson y realizar un análisis del mismo desde el punto de vista de un sistema dinámico. Primero se presenta, el estudio termodinámico del fenómeno superconductor demostrando que se trata de una transición de fase de segundo orden, luego se muestra la teoría electrodinámica de los hermanos London dando una explicación teórica al efecto Meissner, el cual es una de las características de la fase superconductor. Posteriormente, se expone la descripción cuántica de la superconductividad tomando como base la explicación didáctica dada por Richard Feymann.

Finalmente, se presenta una descripción teórica del efecto Josephson a través de la unión túnel así como también la representación de este dispositivo por medio de un circuito equivalente, cuya ecuación diferencial permite verlo como un sistema dinámico. Esta ecuación puede reescribirse en una expresión sin dimensiones por medio de un parámetro \underline{T} que hace adimensional al tiempo. Al seleccionar \underline{T} en dos formas distintas se encuentra el comportamiento del sistema cuando:

- a) La corriente de desplazamiento es despreciable con respecto a la corriente normal y a la supercorriente de los pares de Cooper,
- b) la corriente normal es pequeña comparada con la de desplazamiento y la supercorriente, y
- c) el caso general en donde las tres corrientes son del mismo orden de magnitud, mostrando la existencia de un ciclo límite.

En todos estos casos, el parámetro a variar es I/I_c que es la razón entre la corriente administrada por una fuente de potencial y la corriente crítica Josephson. Sin embargo, en el último caso se encuentra que al disminuir la razón entre las corrientes desde un valor mayor a 1 se produce una bifurcación homoclínica.



Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. José Luis Del Río Correa por sus enseñanzas, tiempo e ideas para la elaboración de este manuscrito. Al Dr. Abel Camacho Quintana, por su apoyo como coordinador del Posgrado en Física de la UAM Iztapalapa. Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por otorgarme una beca para la realización de mis estudios de maestría. A Miguel y Marisol por su sincera amistad.

Doy gracias al Dr. Jesús Morales Rivas y al Dr. Alberto Rubio Ponce, ambos de UAM Azcapotzalco, así como también al Dr. Gerardo Carmona Ruíz de la Facultad de Ciencias UNAM y al Dr. Tatsuo Akachi Miyazaki (QEPD) del Instituto de Investigaciones en Materiales UNAM por su tiempo para las observaciones y sugerencias realizadas a este trabajo.



Índice

Introducción	13
Capítulo 1	
Teoría macroscópica de la superconductividad.....	15
1.1 Introducción	15
1.2 Primera interpretación de la superconductividad	16
1.3 Experimento de Meissner-Ochsenfeld	17
1.4 Termodinámica de la transición del estado normal al superconductor.....	19
1.5 Electrodinámica del Estado Superconductor Puro.....	26
1.5.1 Modelo de líquido electrónico no viscoso.....	26
1.5.2 Teoría de London.....	31
1.5.3 Experimentos de Shoenberg.....	35
Referencias	37
Capítulo 2	
Transiciones de fase de segundo orden.....	39
2.1 Introducción	39
2.2 Teoría de Bragg-Williams	40
2.4 Modelo de Ising	48
2.5 Teoría de Landau.....	51
2.5.1 Teoría de Landau con campo externo nulo	51
2.5.2 Teoría de Landau con campo externo	53
2.6 Teoría de Ginzburg-Landau	60
2.6.1 Teoría de Ginzburg-Landau a campo nulo.....	60
2.6.2 Teoría de Ginzburg-Landau con campo externo.....	61
Referencias	64
Capítulo 3	
Teoría microscópica de la superconductividad.....	67
3.1 Introducción	67
3.2 Descripción clásica de una partícula en un campo electromagnético.	68
3.2.1 Función lagrangiana.....	68
3.2.2 Momento.....	71
3.2.3 Función hamiltoniana.....	72
3.3 Descripción cuántica de una partícula en un campo electromagnético	73
3.3.1 Ecuación de Schrödinger	73
3.3.2 Ecuación de conservación de la probabilidad	73



3.4 Significado de la función de onda	75
3.6 Pares de Cooper	75
3.6.1 Hamiltoniano de Frölich	75
3.6.2 Función de onda macroscópica	76
3.6.4 Densidad de corriente y momento.....	77
3.7 Características de la superconductividad	78
3.7.1 Efecto Meissner	78
3.7.2 Cuantización del flujo magnético.....	78
3.7.3 Banda prohibida superconductora	79
Referencias	83
Capítulo 4	
Efecto Josephson.....	85
4.1 Introducción	85
4.2 Tunelamiento.....	86
4.3 Las relaciones Josephson.....	86
4.4 Efectos Josephson DC y AC	89
4.4.1 Potencial nulo	89
4.4.2 Potencial constante.....	89
4.4.3 Potencial de muy alta frecuencia.....	90
4.5 La importancia del fenómeno de coherencia	91
4.6 Propiedades de la supercorriente	93
4.6.1 El estado estacionario	93
4.6.2 Almacenamiento de energía.....	93
4.6.3 Inductancia no lineal Josephson.....	94
4.6.4 Oscilaciones Josephson.....	94
4.7 Otras componentes de la corriente total	95
4.7.1 Corriente Normal I_n	95
4.7.2 Corriente de desplazamiento I_d	96
4.7.3. Corriente debida a fluctuaciones $I_f(t)$	98
Referencias	101
Capítulo 5	
La unión Josephson vista como un sistema dinámico	103
5.1 Introducción	103
5.2 Circuito eléctrico equivalente	103
5.3 Formulación adimensional.....	104
5.4 Caso conservativo	105
5.4.1 Grupo adimensional α y escala de tiempo T_1	105
5.4.2 Conservación de la energía	106
5.4.3 Diagramas fase y de energía potencial	108
5.6 Estado Resistivo (Caso amortiguado)	115
5.6.1 Matriz Jacobiana y puntos fijos	115
5.6.2 Bifurcación nodo-silla.....	116
5.6.3 Ciclos límite	117



5.6.4 Bifurcación homoclínica	121
5.6.5 Curva de corriente-voltaje.....	123
5.6.6 Diagramas fase con α variable.....	125
5.7 Estado altamente resistivo (Caso sobreamortiguado)	126
5.7.1 Grupo adimensional ε y escala de tiempo T_2	126
5.7.2 Puntos fijos y su estabilidad.....	127
5.7.2 Bifurcación nodo-silla.....	128
5.7.3 Solución analítica.....	129
5.7.4 Curva de corriente-voltaje para el limite sobreamortiguado	133
Referencias	134
Capítulo 6	
Conclusiones y perspectivas.....	135
Apéndice A	
Péndulo amortiguado dirigido por una torca constante	139
Ecuación de movimiento	139
Analogía con el circuito equivalente a la unión Josephson	140
Apéndice B	
Estabilidad de puntos fijos.....	141
Linealización de una ecuación en una dimensión	141
Linealización de un sistema de ecuaciones en dos dimensiones.....	142
Sistema lineal de ecuaciones.....	143
Clasificación de puntos fijos.....	144
Apéndice C	
Teoremas matemáticos.....	147
Teorema de Existencia y Unicidad	147
Teorema Poincaré-Bendixson	147
Apéndice D	
Códigos fuente.....	149
Figura 2.12.....	149
Figura 5.13.....	149
Figura 5.17.....	151
Figura 5.21.....	153
Apéndice E	
Artículos publicados y presentación en eventos especializados	155
Artículo académico	155
Artículos en extenso	155



Conferencias	155
Plática	155
Presentaciones murales	155
Bibliografía	159

Introducción

El fenómeno de la superconductividad fue descubierto hace más de cien años por el físico holandés Heike Kemmerlingh Onnes, al observar que una muestra de mercurio se comporta como un material sin resistencia eléctrica a una cierta temperatura crítica, lo cual despertó un enorme interés en la comunidad científica y motivó a la realización de una infinidad de estudios para dar una explicación tanto clásica como cuántica del fenómeno. Los primeros estudios realizados son desde el punto de vista termodinámico por parte de Keemson, Rutgers y Gorter, quienes demuestran que la transición de fase superconductor es una de segundo orden; y de la electrodinámica por parte de los hermanos London quienes dan una explicación al efecto Meissner, característico de la superconductividad. Posteriormente, se realizan estudios desde el punto de vista cuántico, dando origen a la teoría BCS enunciada por Bardeen, Cooper y Schrieffer, pionera en este aspecto y en la que se propone principalmente que el causante de la superconductividad es el apareamiento de electrones durante la fase superconductor.

En este trabajo se presenta una revisión teórica general de la transición superconductor con el objetivo de comprender el efecto Josephson y estudiarlo desde el punto de vista de un sistema dinámico, para mostrar la relación que existe entre la superconductividad y la dinámica no lineal. Para llevar a cabo esto, se realizó una investigación bibliográfica consultando fuentes tanto clásicas como actuales sobre la superconductividad, así como también se elaboraron cálculos matemáticos y programación computacional para la realización de gráficos. Todo esto con la intención de contribuir con material para promover la impartición de cursos sobre superconductividad en la carrera de Física de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa y motivar la formación de personal especializado que realice investigación en este campo dentro de la misma institución.

En el primer capítulo se aborda la teoría macroscópica de la superconductividad abarcando la termodinámica y la electrodinámica de este fenómeno. Mientras que en el segundo capítulo se hace referencia a las transiciones de fase de segundo orden, partiendo de la teoría de Bragg y Williams para aleaciones como ejemplo para poder entender los argumentos de la teoría de Landau para transiciones de fase y culminar con la teoría de Ginzburg-Landau que describe la transición superconductor. En el tercer capítulo, se presenta de manera cualitativa la teoría cuántica de la superconductividad para dar entrada al cuarto capítulo, donde se presenta la teoría relacionada al efecto Josephson. De manera concisa, este efecto consiste en el paso de corriente eléctrica a través de un dispositivo conocido como unión o juntura Josephson, el cual está compuesto de dos superconductores separados por una capa delgada de material aislante; el paso de la corriente a través del material aislante es debido al tunelamiento de electrones apareados. El quinto capítulo presenta un estudio de la unión desde el punto de vista de un sistema dinámico, ya que este dispositivo puede ser representado por un circuito equivalente cuyos elementos están asociados a cada una de las componentes que conforman la corriente total que circula en el mismo; esto permite que se pueda obtener una ecuación de movimiento y realizar un análisis de su comportamiento a partir de tres casos distintos: conservativo, amortiguado y sobreamortiguado. Gracias a este tipo de análisis es posible determinar la relación que existe entre el voltaje administrado y la corriente total que circula en la unión, la cual dista mucho de ser de tipo óhmica. Por último, el capítulo sexto presenta las conclusiones de este trabajo.



Capítulo 1

Teoría macroscópica de la superconductividad

1.1 Introducción

El descubrimiento de la superconductividad está asociado al interés de los físicos del siglo XIX por licuar todos los gases conocidos en ese tiempo, esto permitió estudiar los fenómenos que se presentan en los materiales a temperaturas menores a los cero grados centígrados. El primero en todo el mundo en obtener helio (He) líquido, el cual tiene una temperatura de ebullición de 4.22 K, fue Heike Kamerlingh Onnes en el Laboratorio de Leyden, Holanda durante el año de 1908, por el cual recibió el premio Nobel en 1913. Después de haber logrado esto, se dispuso a estudiar el comportamiento de la resistencia eléctrica en el

mercurio (Hg), ya que era el metal más puro que se podía obtener en esa época para descubrir la variación de esta propiedad con la temperatura. Sin embargo, la superconductividad como tal no se descubriría hasta 1911, cuando Kamerlingh Onnes observó que la resistencia eléctrica del mercurio desaparecía bruscamente al enfriarse a 4.15 K, a la que llamó *temperatura de transición* T_c . Él esperaba que la resistencia disminuyera gradualmente hasta el cero absoluto. También observó que no cambiaba este comportamiento si introducía impurezas a la muestra de mercurio. Así se dio cuenta de la existencia de un nuevo estado, al cual llamó *superconductor*[1][2][3].

En los primeros años después de haberse descubierto el fenómeno de la superconductividad, se aceptó que la transición de fase superconductor era irreversible, ya que aparentemente las supercorrientes inducidas por el campo decaerían con la producción de un calor de Joule cuando se destruyera la superconductividad. Esta supuesta irreversibilidad hacía muy dudosa la aplicación de la Termodinámica, sin embargo, Willem H. Keesom[4] en 1924, Arend Joan Rutgers[5] y Cornelius Jacobo Gorter[6] en 1933 aplicaron la termodinámica a la transición del estado normal al superconductor. La teoría termodinámica lograba excelentes acuerdos con las mediciones, concluyéndose que la transición debería ser reversible.

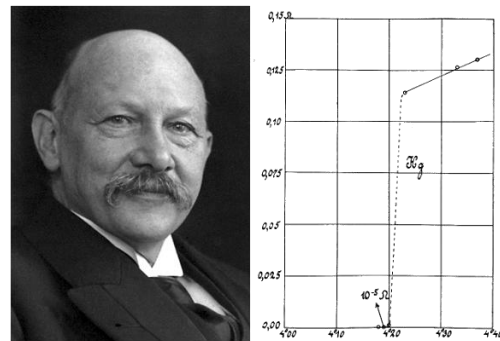


Figura 1.1 H. Kemmelingh Onnes y la resistencia eléctrica del mercurio



W. H. Keemson

A. J. Rutgers y H. B. G. Casimir

C. J. Gorter

Figura 1.2

El siguiente paso importante para entender a la superconductividad se produjo en 1933, cuando Walter Meissner y Robert Ochsenfeld[7] descubrieron que el campo magnético aplicado a una muestra en el estado superconductor se anula completamente en el interior del material, es decir, las líneas de campo son expulsadas de la muestra debido a la existencia de corrientes superficiales, por lo que se comporta como un material diamagnético perfecto. A este fenómeno se le conoce como *efecto Meissner* y es una de las propiedades que definen la superconductividad. Después del descubrimiento de Meissner y Ochsenfeld, ya no hubo duda alguna de que la transición del estado normal al superconductor es una transición de fase reversible similar a la transición de fase líquido-vapor.



Figura 1.3 W. Meissner y R. Ochsenfeld. Efecto Meissner

La primera teoría fenomenológica de la superconductividad fue la teoría de London, presentada por los hermanos Fritz y Heinz London[8] en 1935, poco después del descubrimiento del efecto Meissner. Un gran triunfo de las ecuaciones de esta teoría es su capacidad para explicar dicho efecto, ya que deducen que el campo aplicado penetra una pequeña longitud dentro del superconductor hasta anularse, esto debido a que la dependencia del campo magnético en el interior del material con la profundidad de penetración es de forma exponencial.

$$h \cong h_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$$



Figura 1.4 F. y H. London

con λ como la profundidad de penetración en el material. En este capítulo inicial se presentan a detalle las primeras ideas sobre la superconductividad, así como también la teoría termodinámica de Keemson-Rutgers-Gorter y la teoría electrodinámica de los hermanos London, con el propósito de introducir al lector en el estudio del fenómeno superconductor.

1.2 Primera interpretación de la superconductividad

Como se mencionó, Kamerlingh Onnes descubre el fenómeno de superconductividad en 1911, cuando a una temperatura de transición $T_c = 4.15$ K el mercurio (Hg) presentaba una resistencia muy pequeña imposible de medir. Esta propiedad es confirmada por la aparición de una supercorriente que nunca decae en un anillo[9]. Desde entonces se han encontrado más de 40 elementos con esta propiedad superconductor a diferentes temperaturas T_c . Posteriormente, Kamerlingh Onnes descubrió que este fenómeno es destruido cuando un campo magnético suficientemente fuerte se aplicaba a la muestra de Hg. El campo necesario para destruir la superconductividad, llamado campo crítico o campo de umbral H_c , depende de la temperatura y desaparece cuando la temperatura toma el valor de la temperatura T_c . La curva que representa el campo crítico H_c como una función de la temperatura (*curva de umbral*) ha sido medida para muchos superconductores. (Fig. 1.5)

Si la superconductividad se interpreta como una conductividad perfecta, es decir, σ toma un valor infinito en la ley de Ohm $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$, entonces el campo interno $\mathbf{E} = 0$ y por la ley de inducción $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, el campo magnético \mathbf{B} es constante en el tiempo. Así, cuando un conductor perfecto primero se enfría por debajo de su

temperatura crítica y posteriormente se somete a un campo magnético cambiante, se inducirán corrientes *superficiales o de apantallamiento* de tal forma que el campo magnético dentro del conductor se mantendrá constante. Como no hay resistencia para las corrientes de apantallamiento estas nunca decaen. El campo magnético externo es distorsionado por estas corrientes de tal manera que ninguna línea de campo entra al cuerpo (Caso I, Fig. A). En cambio, si el conductor se somete primero a un campo magnético externo y después se enfría a su temperatura de transición, el campo magnético dentro del material no cambia (Caso II, Fig. B). Cuando el campo externo se hace cero en ambas situaciones finales, en el caso I el flujo magnético no queda atrapado, caso contrario a la situación final del caso II donde si permanece “congelado” hasta que la temperatura se eleve arriba del punto de transición. Esta interpretación implica que el estado final del material depende de su pasado bajo las mismas condiciones externas. Durante muchos años parecía que todos los experimentos estaban perfectamente de acuerdo con este punto de vista, lo que era bastante plausible, una vez que se asumió la conductividad infinita. Sin embargo, esto no era del todo satisfactorio, debido a la posibilidad de obtener un número infinito de estados finales bajo las mismas condiciones externas y no todos puedan encontrarse en equilibrio térmico. Sin embargo, en los superconductores la situación es distinta y no fue hasta 1933 cuando se pudo establecer que este tipo de materiales no son conductores perfectos.

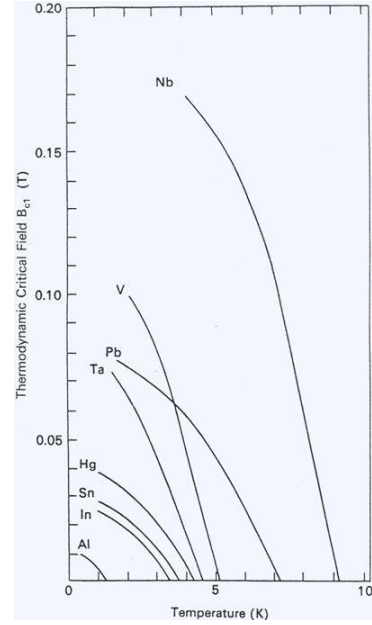


Figura 1. 5 Curvas umbral de distintos elementos

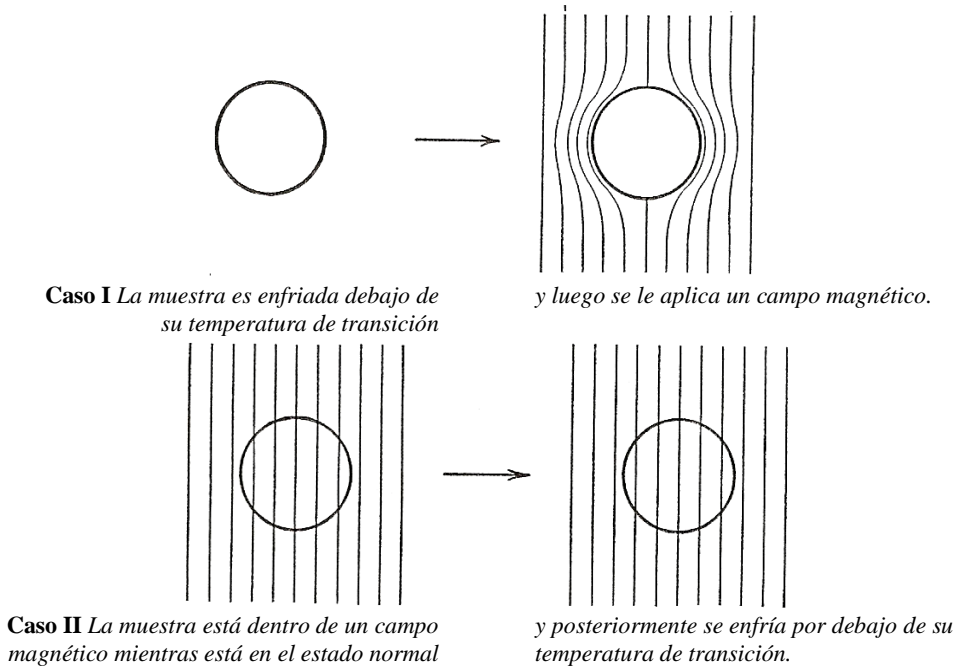


Fig. A Comportamiento esperado para una transición a un estado de conductividad perfecta. El estado final dependerá de la orden serial en el que la muestra se somete a las mismas condiciones externas.

1.3 Experimento de Meissner-Ochsenfeld

Antes de 1933, no se habían realizado medidas adecuadas del campo cercano a un superconductor dentro de un campo magnético, los experimentos de corrientes persistentes junto con los de Kamerlingh Onnes aparentemente corroboraban la teoría del conductor perfecto. Sin embargo, la sorpresa fue mayúscula cuando en ese mismo año Meissner y Ochsenfeld reportaron sus resultados que no concordaban con la interpretación ante-

rior. Ellos enfriaron una esfera sólida de estaño sumergida en un campo magnético y encontraron que la intensidad del campo fuera del material cambiaba repentinamente. Como si las líneas de campo fueran expulsadas del interior del superconductor cuando el espécimen se enfriaba hasta su punto de transición. La componente normal del campo en la superficie de la esfera es cero, indicando que el campo de inducción magnética se anulaba dentro de la misma. Esta situación hoy en día es conocida como *efecto Meissner-Ochsenfeld*. Un experimento similar fue realizado anteriormente por el equipo de Kamerlingh Onnes utilizando una esfera hueca, circunstancia importante por la cual no lograron el descubrimiento de este efecto, con el cual se desechó la idea de considerar solamente a los superconductores como conductores perfectos.

La Fig. B muestra que para un superconductor, el estado final del material no depende de su pasado bajo las mismas condiciones externas, es decir, si enfriamos la muestra hasta su punto de transición y luego le aplicamos un campo magnético o se le aplica primero un campo magnético y luego se enfría a hasta su punto de transición, en ambas situaciones el estado final se caracterizara en la expulsión del campo externo del interior de la muestra.

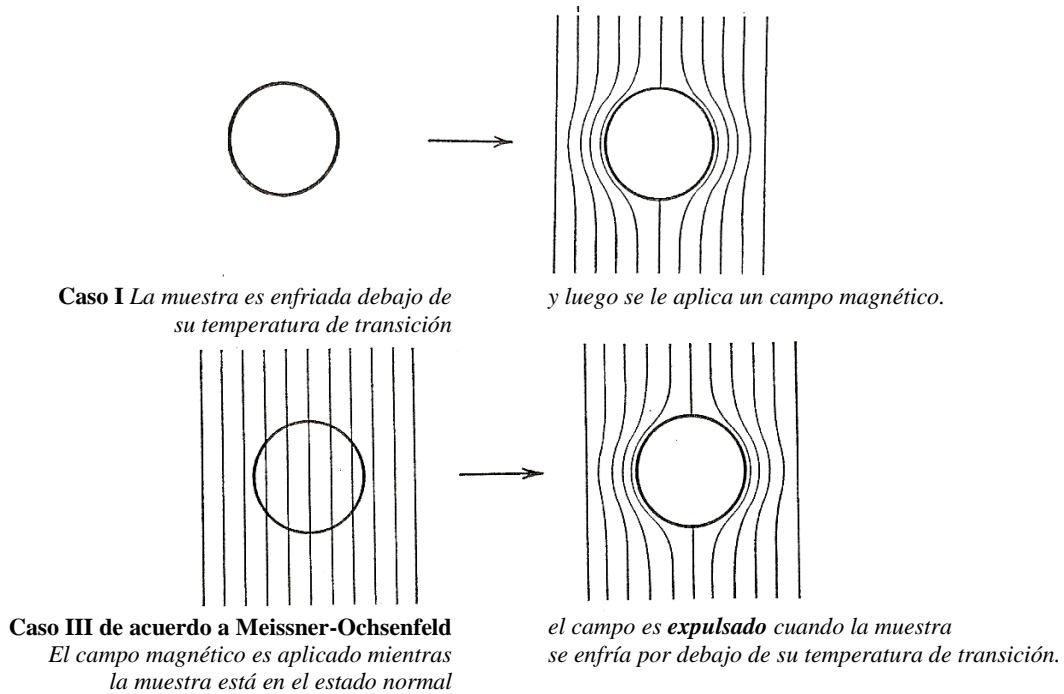


Fig. B. El superconductor, en contraste al conductor perfecto tiene un campo de inducción nulo independientemente de la manera en que se llega al estado superconductor.

Usando este efecto es posible hacer que un imán flote sobre una superficie superconductora a una temperatura debajo de T_c , ya que el peso del imán es balanceado con la presión magnética debida a las inhomogeneidades del campo \mathbf{B} que es expulsado de la superficie superconductora que se encuentra debajo del imán.

También, si a un anillo superconductor se le aplica un campo magnético \mathbf{B} débil y se disminuye la temperatura a un valor menor que T_c , debido al efecto Meissner el campo es expulsado del anillo. Cuando \mathbf{B} se reduce lentamente a cero, quedan líneas de flujo atrapadas por el anillo debido a la aparición de las corrientes superconductoras que también producen un momento magnético.

Las consecuencias del efecto Meissner son:

- a) El estado superconductor se caracteriza con $\mathbf{B} = 0$ dentro del material.
- b) El estado final es independiente de si el material primero se enfría y después se aplica el campo magnético o se hace el proceso inverso, de forma que se trata de un proceso reversible y la termodinámica es

aplicable al fenómeno de la superconductividad, entendiéndose como una transición de fase entre el estado normal y el estado superconductor.

Es importante señalar que no siempre aparece el efecto Meissner puro, lo cual es debido a impurezas o inhomogeneidades en el material, estas desviaciones pueden atribuirse a la presencia de una clase de mezclado entre las dos fases, una de ellas es el estado superconductor puro ($\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = 0$) y el otro el estado normal.

1.4 Termodinámica de la transición del estado normal al superconductor

Como se ha mencionado, Keesom, Rutgers y Gorter fueron los primeros realizar un estudio termodinámico de la transición del estado normal al superconductor. Después del descubrimiento del efecto Meissner no hubo duda alguna de que la transición superconductor era una transición de fase reversible en el plano $H-T$, similar a la transición de fase líquido-vapor en el plano $p-T$. La transición superconductor también depende de la presión p , por lo que, en general, la transición debe discutirse en el espacio $H-p-T$, sin embargo cuando la dependencia en p sea pequeña solo se considera el plano $H-T$.

Ahora determinaremos el potencial termodinámico en las variables $H-T$ y estableceremos las condiciones de equilibrio a lo largo de la curva de umbral.

Empecemos multiplicando escalarmente las ecuaciones de Maxwell con los factores indicados a la derecha:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} && \left| \cdot \left(-\frac{c\mathbf{E}}{4\pi} \right) \right. \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \left| \cdot \left(\frac{c\mathbf{H}}{4\pi} \right) \right. \end{aligned}$$

y sumando los resultados se obtiene el Teorema de energía:

$$\nabla \cdot \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

Esta es una ecuación de balance de energía de la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = \sigma_f \quad \text{con} \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad \sigma_f = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

con df como el incremento de la energía libre de Hemholtz por centímetro cúbico, que es la cantidad de trabajo isotérmico disponible por centímetro cúbico.

$$df = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B})$$

así, la densidad de energía libre f puede escribir en la forma:

$$f(\mathbf{B}, \mathbf{D}, T) = \frac{1}{4\pi} \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \phi(T) \quad (1.1)$$

donde $\phi(T)$ es función solo de la temperatura. Esto supone que \mathbf{E} y \mathbf{H} son funciones univaluadas de \mathbf{D} y \mathbf{B} , respectivamente. Para el

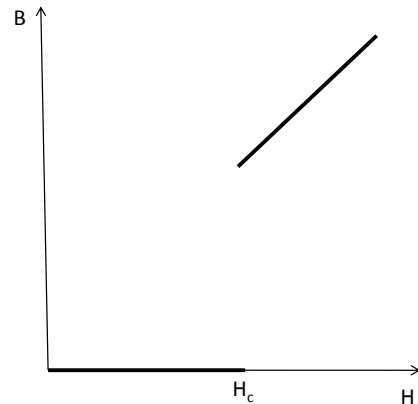


Figura 1. 6



análisis termodinámico, no consideramos efectos eléctricos y escogemos \mathbf{H} como variable independiente, ya que experimentalmente este se puede controlar y \mathbf{B} es una función de \mathbf{H} (Fig. 1.6).

Así como realizamos una transformada de Legendre para pasar de las variables V, T y la energía libre de Helmholtz $f(V, T)$ a las variables p, T y el potencial termodinámico de Gibbs $g(p, T)$ en el caso de un gas, lo mismo hacemos para intercambiar como variable independiente a \mathbf{B} por \mathbf{H} , y obtener así el potencial termodinámico g por centímetro cubico:

$$g(\mathbf{H}, T) = f - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} = \phi(T) + \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right] = \phi(T) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}(\mathbf{H}) \cdot d\mathbf{H} \quad (1.2)$$

donde asumimos que, cuando $\mathbf{H} = 0$ también $\mathbf{B} = 0$. Así, la forma diferencial de la energía libre de Gibbs está dada por:

$$dg = -sdT - pdv - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}$$

Por otra parte de acuerdo al efecto Meissner, asumimos que

$$\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \begin{cases} 0 & \text{para } |\mathbf{H}| < H_c \\ \mathbf{H} & \text{para } |\mathbf{H}| \geq H_c \end{cases} \quad (1.3)$$

Lo que implica que

$$g(\mathbf{H}, T) = \begin{cases} \phi(T) & \text{para } |\mathbf{H}| < H_c \\ \phi(T) - \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}^2 - H_c^2) & \text{para } |\mathbf{H}| \geq H_c \end{cases}$$

Introducimos la función de temperatura:

$$\phi_0(T) = \phi(T) + \frac{1}{8\pi} H_c^2(T)$$

para obtener

$$\begin{aligned} g_s &= \phi_0 - \frac{1}{8\pi} H_c^2(T) \quad \text{para el estado superconductor } (|\mathbf{H}| \leq H_c) \\ g_n &= \phi_0 - \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 \quad \text{para el estado normal } (|\mathbf{H}| \geq H_c) \end{aligned} \quad (1.4)$$

La gráfica de la energía libre de Gibbs se muestra en la Fig. 1.7.

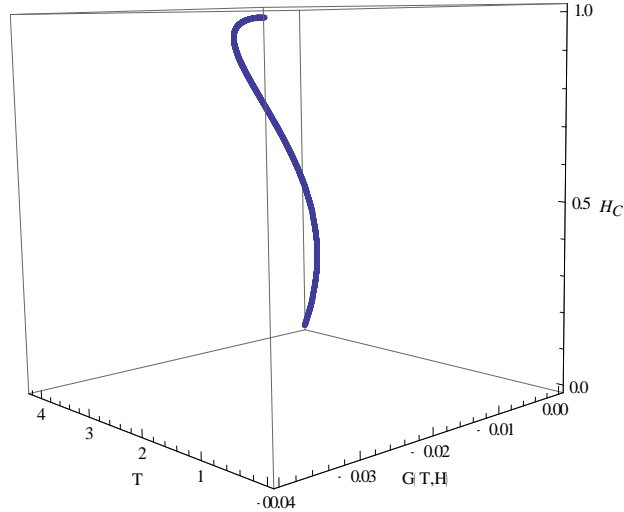


Figura 1. 7 Energía libre de Gibbs g

La entropía por centímetro cúbico es $s = -\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_H$, de la ecuación (1.4) se deduce que la entropía es discontinua a lo largo de la curva de umbral, es decir,

$$s_s - s_n = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial H_c^2}{\partial T} = \frac{1}{4\pi} H_c \frac{\partial H_c}{\partial T} \quad (1.5)$$

Durante la transición de fase la temperatura se mantiene constante y $dQ = TdS$, entonces el calor de transición por mol de la fase superconductor a la fase normal está dado por:

$$Q = T(s_s - s_n)V_m = \frac{T}{4\pi} H_c \frac{\partial H_c}{\partial T} V_m \quad (1.6)$$

donde V_m es el volumen molar. Como experimentalmente H_c decrece con el incremento de temperatura, Q será absorbido por el cuerpo cuando va del estado superconductor al estado normal. Q es cero para $T = T_c$, ya que $H_c(T = T_c) = 0$, mientras $\partial H_c/\partial T$ es finita. La relación (1.6) corresponde a la **ecuación de Clausius-Clapeyron** y su gráfica se muestra en la Fig. 1.8.

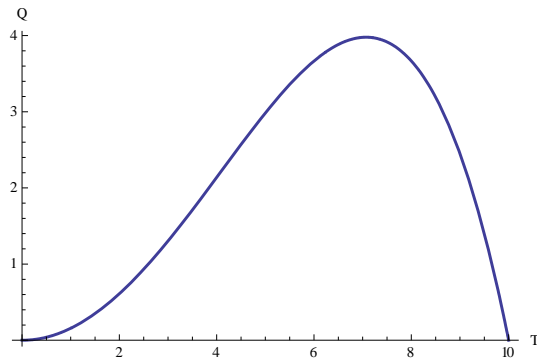


Figura 1. 8 Calor de transición Q

Como la diferencia de entropías $s_n - s_s$ es independiente de \mathbf{H} , implica que no sólo $s_n - s_s$ se refiere a la discontinuidad en la curva de umbral, sino también es la diferencia de entropía de los dos estados para cualquier campo \mathbf{H} . En consecuencia, mediante la diferenciación de (1.5) con respecto a T , se obtiene la diferencia de calor específico por mol:

$$C_n - C_s = -\frac{T}{8\pi} \frac{\partial^2 (H_c^2)}{\partial T^2} V_m = -\frac{T}{4\pi} \left(H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} + \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 \right) V_m \quad (1.7)$$

En la temperatura de transición T_c , donde el calor de transición se anula, de acuerdo a la expresión (1.6) el calor específico muestra una discontinuidad:



$$(C_n - C_s)_{T=T_c} = -\frac{T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2 V_m \quad (1.8)$$

que se muestra en la Fig. 1.9. La expresión (1.8) es conocida como la *fórmula de Rutgers* y es uno de los resultados conocidos anteriormente al descubrimiento del efecto Meissner. Cercano y por debajo del punto de transición, el calor específico del estado superconductor es mayor que el del estado normal. En alguna temperatura menor, el signo de la diferencia $C_n - C_s$ debe cambiar, ya que $s_n - s_s$ tiene un máximo.

Las relaciones (1.6) y (1.7) establecen una conexión interesante entre las propiedades calóricas de un superconductor y su curva de umbral magnética. Estas han sido corroboradas por muchas mediciones, y se ha encontrado una concordancia excelente.

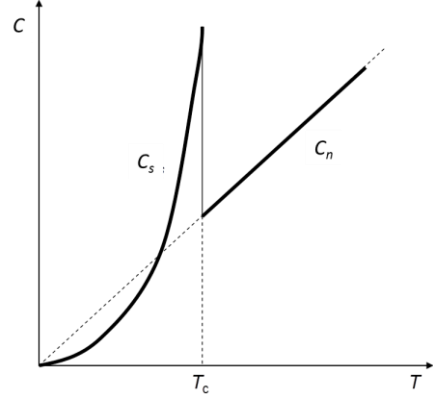


Figura 1.9 Discontinuidad del calor específico

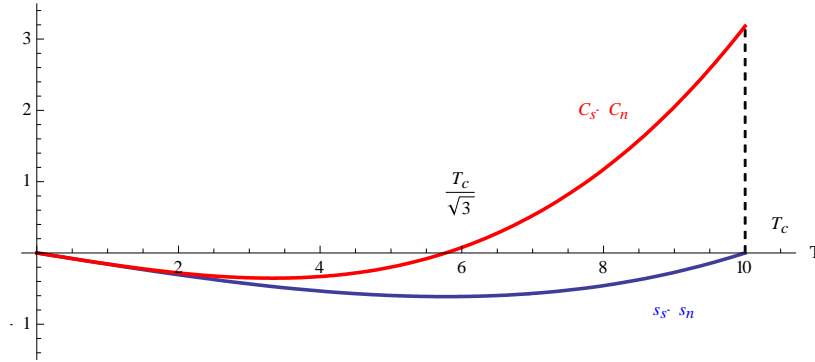


Figura 1.10 Diferencias de entropías $s_s - s_n$ y de calores específicos $c_s - c_n$

De la ecuación de Rutgers (1.8) se obtiene la pendiente de la curva H_c contra T en la temperatura de transición T_c :

$$\left(\frac{dH_c}{dT} \right)_{T=T_c} = \sqrt{\frac{4\pi}{V_m T_c} (C_s - C_n)_{T=T_c}} \quad (1.9)$$

El campo crítico H_0 a $T = 0$ se obtiene integrando la expresión (1.7), de $T = 0$ a $T = T_c$:

$$H_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{V_m} \int_0^{T_c} (C_s - C_n) dT} \quad (1.10)$$

La ecuación de Rutgers permite determinar los valores de $H_c(T = 0)$ y $H_c(T = T_c)$.

Para encontrar la ecuación de la curva umbral $H_c(T)$, recurrimos a la expresión (1.7) y haciendo uso de (1.5), se obtiene:

$$\frac{\partial H_c^2}{\partial T} = \frac{8\pi}{V_m} \int_0^T \frac{C_s - C_n}{T} dT = 8\pi (s_s - s_n) = \frac{8\pi Q}{V_m T} \quad (1.11)$$

donde usamos que para $T = 0$ K, $dH_c/dT = 0$. Volviendo a integrar sobre T , obtenemos la curva umbral:

$$H_c^2(T) - H_c^2(T = 0) = \frac{8\pi}{V_m} \int_0^T \int_0^{T'} \frac{C_s - C_n}{T} dT' dT \tag{1.12}$$

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Mendelssohn y Moore[10] midieron la dependencia del calor específico con la temperatura de una muestra de estaño que se mezclaba con 4% de bismuto. Para lograrlo, primero midieron el calor específico C de la muestra a $H = 0$ a temperaturas arriba de T_c y disminuyéndola hasta encontrar la discontinuidad del calor específico, según la fórmula de Rutgers que ocurre en T_c , posteriormente prosiguieron con el enfriamiento para determinar la forma en que C_s depende de T (Proceso 2, Fig. 1.11a). Por otro lado, aplicaron a la muestra un campo mayor que H_0 para encontrar la dependencia de C_n con la temperatura al disminuirla (Proceso 1, Fig. 1.11a).

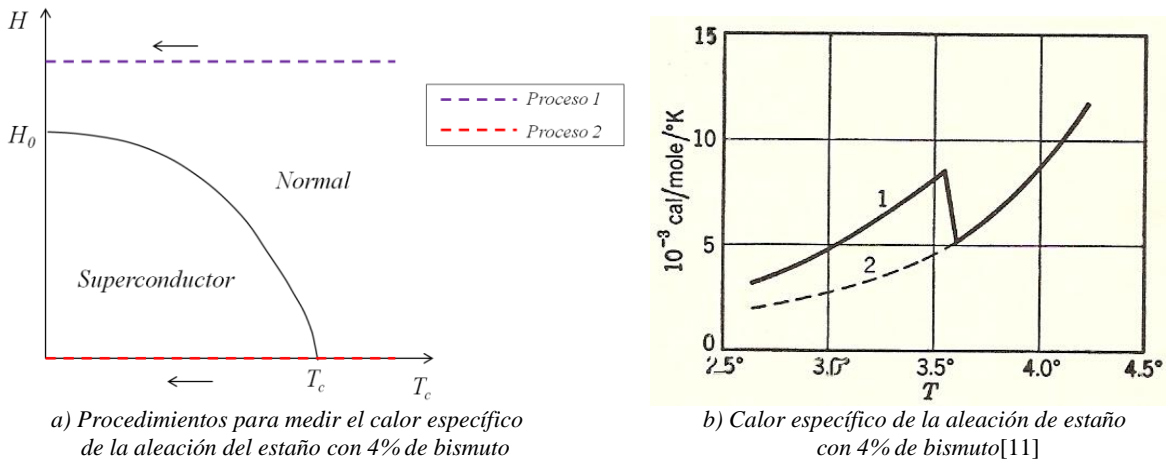


Figura 1. 11

En la Fig. 1.12 se muestran las mediciones de calor específico para estaño realizadas por Keesom y van Laer[11] en 1938 (círculos abiertos, superconductividad; cuadros abiertos, normal), y por Corak, Goodman, Satterthwaite y Wexler[12] en 1955 (círculos sólidos, superconductividad; cuadrados sólidos, normal). La temperatura se mide usualmente con un termómetro que contiene una resistencia de carbón o germanio que se inserta en la muestra, y el calor es suministrado por una corriente momentánea en una bobina calentada enrollada sobre la muestra.

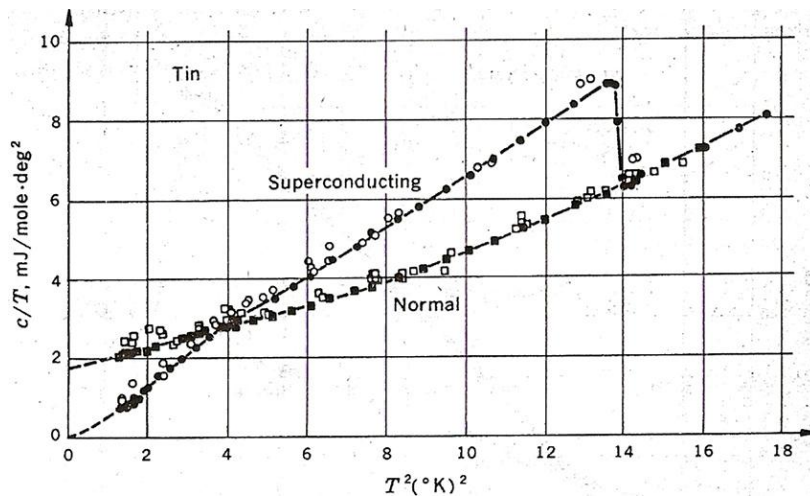


Figura 1. 12 Mediciones del calor específico de Keemson, van Laer, Corak, Satterthwaite y Wexler[13]



Keesom y Van Laer midieron el calor específico del estaño en el estado superconductor y en el estado normal para las mismas temperaturas, la superconductividad comienza a desaparecer por un campo magnético suficientemente fuerte. Excepto por la transición del estado normal al estado superconductor, se encontró que el calor específico es independiente del campo magnético. Para bajas temperaturas, $C_p = C_v = C$, Keesom y Van Laer mostraron que sus resultados para el estado superconductor pueden ser representados muy satisfactoriamente por una expresión cubica en T :

$$C_s = 464.5 \left(\frac{T}{140} \right)^3 \text{ cal / molK} \quad (1.13)$$

Sin embargo, para el estado normal esto es imposible y un término lineal tiene que ser agregado a la ley de T^3 para el calor específico de la red:

$$C_n = 464.5 \left(\frac{T}{185} \right)^3 + 4 \times 10^{-4} T \text{ cal / molK} \quad (1.14)$$

A continuación veremos las consecuencias termodinámicas de estos resultados experimentales. Las capacidades caloríficas para el estado normal y el superconductor dados por (1.13) y (1.14) tienen la siguiente forma: $C_n = aT + bT^3$ y $C_s = BT^3$, debido a que su diferencia está dada por la expresión (1.7), tenemos:

$$-\frac{d^2 H_c^2}{dT^2} = \frac{8\pi}{V_m T} [aT + (b-B)T^3] = \frac{8\pi}{V_m} [a + (b-B)T^2]$$

Al integrar esta expresión y tomar en cuenta que para $T = 0$, $dH_c/dT = 0$, obtenemos

$$-\frac{dH_c^2}{dT} = \frac{8\pi}{V_m} \left[aT + \frac{1}{3}(b-B)T^3 \right] \quad (1.15)$$

como el calor de transición está dado por la ecuación (1.6), tenemos

$$\frac{Q}{T} = -\frac{1}{4\pi} H_c \frac{dH_c}{dT} V_m = -\frac{1}{8\pi} \frac{dH_c^2}{dT} V_m = \left[aT + \frac{1}{3}(b-B)T^3 \right]$$

debido a que $Q = 0$ en la temperatura de transición $T = T_c$, se encuentra que:

$$\frac{1}{3}(b-B)T_c^2 = -a \quad (1.16)$$

Al sustituir (1.16) en la ecuación (1.15), obtenemos

$$\frac{dH_c^2}{dT} = \frac{8\pi a}{V_m} \left(\frac{T^3}{T_c^2} - T \right)$$

Al integrar esta última expresión, tenemos

$$H_c^2 = \frac{4\pi a}{V_m} \left(\frac{1}{2} \frac{T^4}{T_c^2} - T^2 \right) + H_0^2$$

donde H_0 es el campo crítico a $T = 0$. Como se sabe que para $T = T_c, H_c = 0$, tenemos que

$$a = \frac{V_m H_0^2}{2\pi T_c^2}$$

de manera que la razón H_0/T_c está determinada por las propiedades del estado normal, al utilizar este resultado en la expresión para el campo se obtiene:

$$H_c^2 = \frac{2H_0^2}{T_c^2} \left(\frac{1}{2} \frac{T^4}{T_c^2} - T^2 \right) + H_0^2$$

de donde es inmediato que:

$$H_c = H_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \tag{1.17}$$

Este resultado es conocido como la **fórmula de Gorter-Casimir** y es notable la relación entre T_c y H_0 . Esta expresión nos da la curva umbral H_c entre el estado superconductor y el estado normal (Fig.1.13) en el plano H - T .

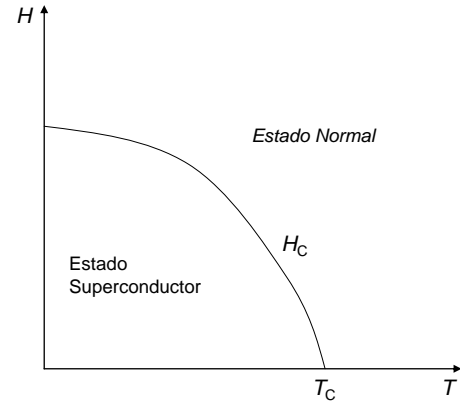


Figura 1.13 Curva umbral superconductor

Por otro lado, la expresiones (1.5) y (1.7) toman la forma:

$$s_n - s_s = \frac{H_0}{2\pi T_c} \left[\frac{T}{T_c} - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right] \tag{1.18}$$

y

$$C_n - C_s = \frac{H_0^2}{2\pi T_c} \left[\frac{T}{T_c} - 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right] V_m \tag{1.19}$$

En consecuencia, para bajas temperaturas, $s_n - s_s$ y $C_n - C_s$ son funciones lineales de la temperatura. Kok[14] sugirió que el término lineal puede corresponder al calor específico de los electrones en el estado normal, que de acuerdo a la teoría de metales de Sommerfeld (Estadística de Fermi) debe ser una función lineal de la temperatura.

Tabla 1.1

	$-\lim_{T \rightarrow 0} \frac{V_m}{8\pi} \frac{\partial^2 H_c^2}{\partial T^2} \times 10^4 \frac{cal}{deg^2}$	$\gamma \times 10^4 \frac{cal}{deg^4}$	Q
Sn	3.47 ¹	3.15	4
Hg	3.75 ¹	2.35	2
Pb	7.07 ¹	3.54	4
Zn	1.36 ²	1.80	2
Al	2.59 ²	2.18	3

¹ J. G. Daunt y K. Mendelssohn, *Proc. Roy. Soc.*, **A160**, 127 (1937).

² J. G. Daunt y C. V. Heer, *Phys. Rev.*, **76**, 1324 (1949).

En la Tabla 1 comparamos el coeficiente del término lineal de $C_n - C_s$, el cual es, según a la expresión (1.7),

$$-\lim_{T \rightarrow 0} \frac{V_m}{8\pi} \frac{\partial^2 H_c^2}{\partial T^2},$$

con el correspondiente coeficiente de calor específico de un gas de electrones libres. Bajo la suposición de que q electrones de valencia por átomo contribuye a este gas podemos escribir su calor específico para bajas temperaturas en la forma

$$C_v = \gamma T$$

donde $\gamma = 3.26 \times 10^{-5} q V_m^{2/3}$ cal deg⁻². Este coeficiente γ está enlistado en la Tabla 1[11], donde se muestra que el término lineal de $C_n - C_s$ es del orden de magnitud correcto para justificar su interpretación como el término de calor específico de Fermi-Sommerfeld. No se podía esperar otra mejor concordancia, debido a que la fórmula para γ no toma en cuenta el efecto de la red en el espectro de energía.

Los estudios de difracción de rayos X de la red cristalina de un metal antes y después de la transición superconductor no muestran cambios en las propiedades de la red. Por esta razón se supone que el metal tiene la misma temperatura de Debye Θ que en la fase normal. Restando la capacidad calorífica de la red de la capacidad calorífica superconductor se obtiene la contribución electrónica de los electrones superconductores:

$$C_s^{el} = C_s - \left(\frac{125}{\Theta}\right)^3 T^3 \quad (1.20)$$

Esta cantidad fue medida para el estaño por H. O. O'Neal y N. E. Phillips[13] en 1965, obteniendo la gráfica logarítmica de la razón $C_s^{el}/\gamma T_c$ contra T_c/T (Fig. 1.14) a muy bajas temperaturas muchos de los puntos experimentales se encuentran en una línea recta, lo que indica que la contribución electrónica a la capacidad térmica superconductor obedece el siguiente comportamiento:

$$C_{el}^s = \gamma' T_c a e^{-b \frac{T_c}{T}} \quad (1.21)$$

el cual tiene un importante significado teórico en términos de una banda de energía superconductor, que veremos en capítulos posteriores.

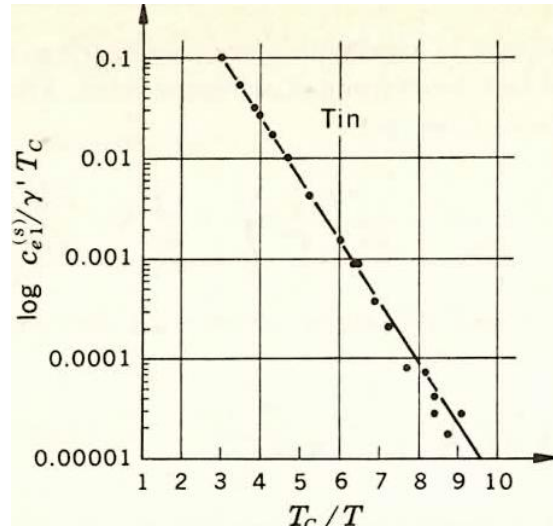


Figura 1. 14 Calor específico de estaño[13]

1.5 Electrodinámica del Estado Superconductor Puro.

1.5.1 Modelo de líquido electrónico no viscoso.

Si consideramos al superconductor como un conductor perfecto, podemos describirlo haciendo uso del modelo de líquido electrónico no viscoso, que fue utilizado como base por los hermanos London para elaborar su teoría electrodinámica. Comenzando con la presentación de este modelo, primero consideramos electrones libres, de carga q y masa m moviéndose sin fricción y sujetos solamente a la acción de un campo electromagnético \mathbf{E} , \mathbf{H} . La ecuación de movimiento de un solo electrón en este campo es:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left[\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \right] \quad (1.22)$$

Los electrones forman un campo de velocidades $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, cuya aceleración substancial, en el esquema de Lagrange, es la de una partícula de fluido, que está dada por la ecuación anterior. Así la ecuación de movimiento en forma euleriana es:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}]$$

sustituyendo (1.22) tenemos que la ecuación del campo de velocidades es:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{q}{m} \mathbf{E} = \left[\mathbf{v} \times \left(\nabla \times \mathbf{v} + \frac{q}{mc} \mathbf{H} \right) \right] \quad (1.23)$$

tomando el rotacional de ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] \quad \text{donde} \quad \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} + \frac{q}{mc} \mathbf{H} \quad (1.24)$$

Esta expresión tiene la propiedad de que si a $t = 0$ el estado inicial es $\mathbf{w} = 0$ (que se satisface si $\mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{H} = 0$), entonces también $\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} = 0$, para $t = 0$. Al integrar con respecto al tiempo implica que $\mathbf{w} = 0$ para todos los valores de t . Esto significa que si a un tiempo dado se cumple la ecuación

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} + \frac{q}{mc} \mathbf{H} = 0 \quad (1.25)$$

entonces se cumple para todo tiempo.

Cuando (1.25) se sustituye en (1.23), también se cumple a todo tiempo que:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{q}{m} \mathbf{E} = 0 \quad (1.26)$$

Claramente todos los campos y corrientes que satisfacen las ecuaciones (1.25) y (1.26) también cumplen con la ec. (1.23), sin embargo lo inverso no es cierto, ya que por ejemplo una solución de (1.23) es $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{H} = cte$, para esta solución $\mathbf{w} = cte$. y (1.25) no se satisface. Así la ecuación (1.23) describe el comportamiento de un superconductor suponiendo que este es un conductor perfecto, ya que el campo \mathbf{H} se “congela”, esta solución es incompatible con el efecto Meissner. Sin embargo, la solución particular $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{H} = 0$, que es compatible con el efecto Meissner, cumple tanto las ecuaciones (1.25) y (1.26), como la ecuación (1.23).

De manera que (1.23) es consistente con el de un conductor perfecto, en tanto que (1.25) y (1.26) satisfacen la condición $\mathbf{E} = 0$ y $\mathbf{H} = 0$.

Recordemos que cuando se supone que el superconductor es un conductor perfecto ($\mathbf{E} = 0$), su comportamiento cuando se parte de una situación inicial sin campo ($\mathbf{H} = 0$) y sin corriente ($\mathbf{v} = 0$) y después se aplica el campo, se llega al mismo estado final que cuando se considera que este cumple el efecto Meissner. Si traducimos este comportamiento al lenguaje del fluido electrónico no viscoso, esperamos obtener los estados reales partiendo del estado con $\mathbf{w} = 0$. Así tomaremos en cuenta el efecto Meissner reemplazando (1.23) por las ecuaciones más específicas (1.25) y (1.26).



Un punto importante que debe ser remarcado es el siguiente: cuando reemplazamos (1.23) por (1.25) y (1.26) introducimos un elemento contrario a la hidrodinámica clásica. Ya que no se está proponiendo solamente considerar una solución especial de (1.23), sino que se está proponiendo considerar a (1.25) y (1.26) como las ecuaciones básicas de la teoría. Aquellas soluciones de (1.23) que no satisfacen (1.25) y (1.26) se postula que no existen para el estado superconductor.

La reducción de (1.23) a (1.25) y (1.26) es un paso muy similar a la transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica. En resumen, la discusión anterior nos lleva a suponer las siguientes ecuaciones del superconductor:

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = -\frac{q}{mc} \mathbf{H} \quad (1.27)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}_s^2) = \frac{q}{m} \mathbf{E} \quad (1.28)$$

donde \mathbf{v}_s denota el campo de velocidades de la supercorriente. Además establecemos que la conexión entre \mathbf{v}_s y la supercorriente \mathbf{J}_s está dada por:

$$\mathbf{J}_s = qn_s \mathbf{v}_s \quad (1.29)$$

Donde $n_s(x,y,z,t)$ es el número de super-electrones por unidad de volumen.

Veremos que en la presencia de un campo externo, n_s se puede desviar de su valor n_{s0} sin campo. Así la densidad de carga

$$\rho = (n_s - n_{s0})q \quad (1.30)$$

no será necesariamente cero. Así podemos escribir las ecuaciones de Maxwell (despreciando la corriente normal) en la forma:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s + \frac{\dot{\mathbf{E}}}{c} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{E}} + 4\pi q n_s \mathbf{v}_s); \quad (1.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q (n_s - n_{s0})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\dot{\mathbf{H}}}{c};$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.32)$$

Las dos últimas ecuaciones de Maxwell se obtienen directamente de (1.27) y (1.28).

APROXIMACIÓN LINEAL DEL MODELO DE LÍQUIDO ELECTRÓNICO NO VISCOSO

El sistema de ecuaciones (1.27), (1.28), (1.29), (1.30) es no lineal debido a los términos $\nabla \left(\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right)$ y $n_s \mathbf{v}_s$. Veremos a continuación que tales términos no lineales son despreciable-mente pequeños.

Tomando el rotacional de la expresión (1.27), utilizando (1.31) y suponiendo condiciones estacionarias es posible omitir la corriente de desplazamiento, entonces se obtiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v}_s = -\frac{q}{mc} \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{4\pi n_s q^2}{mc^2} \mathbf{v}_s \quad (1.33)$$

Por otra parte tomando la divergencia de la ec. (1.28), usando (1.32) para $\nabla \cdot \mathbf{E}$, y usando (1.33) que implica que $\nabla \cdot \dot{\mathbf{v}}_s \propto \nabla \cdot \nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{v}}_s = 0$ se tiene:

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_s^2 = \frac{4\pi q^2}{m} (n_s - n_{s0}) \quad (1.34)$$

definiendo

$$\lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_{s0} q^2} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{n_s - n_{s0}}{n_{s0}}$$

las expresiones. (1.33) y (1.34) toman la forma:

$$\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}_s = -(1 + \eta) \mathbf{v}_s \quad (1.33b)$$

$$\lambda^2 \nabla \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{v}_s^2}{c^2} \right) = 2\eta \quad (1.34b)$$

Cuando η es pequeña comparada con 1, entonces $1 + \eta$ se puede considerar constante y (1.33b) toma la forma $\nabla^2 \mathbf{v}_s = \frac{(1 + \eta)}{\lambda^2} \mathbf{v}_s$, sabemos que esta ecuación tiene soluciones que decaen exponencialmente desde la superficie al interior, de la forma:

$$v_s \approx v_0 e^{-\frac{x}{\lambda} \sqrt{1 + \eta}} \quad \text{con} \quad v_s = |\mathbf{v}_s|$$

sustituyendo este resultado en (2.34b) tenemos

$$\eta \approx 2 \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 e^{-\frac{2x}{\lambda} \sqrt{1 + \eta}} \Rightarrow \eta < 2 \left(\frac{v_0}{c} \right)^2$$

Esto implica que η es relativísticamente pequeño, por lo que $1 + \eta$ es aproximadamente constante e igual a 1. Por otra parte, como por (1.27)

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = -\frac{q}{mc} \mathbf{H}$$

y \mathbf{h} en la superficie debe de ser menor que H_c , tenemos:

$$\frac{v_0}{\lambda} < \frac{|q|}{mc} H_c$$

y por lo tanto



$$\eta < 2 \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 < 2 \left(\frac{q\lambda}{mc^2} H_c \right)^2 \approx 10^{-10}$$

esto significa que $n_s - n_{s0} < 10^{-10} n_{s0}$ por lo que hay menos de un electrón de exceso por cada 10^{10} super-electrones.

Ahora estimaremos el campo electrostático ($\dot{\mathbf{v}}_s = 0$) dentro del superconductor por (1.28), tenemos:

$$\frac{m}{2q} \nabla (\mathbf{v}_s^2) = \mathbf{E}$$

de manera que la diferencia de potencial, $\Delta\phi$, está dada por:

$$\Delta\phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{2m} v_0^2$$

de donde se sigue que:

$$|\Delta\phi| < \frac{|q|}{2m} \left(\frac{\lambda}{c} H_c \right)^2 < 10^{-7} \text{ esu} = 3 \times 10^{-5} \text{ V}$$

A partir de estos resultados podemos concluir que los términos no lineales son tan pequeños que pueden despreciarse completamente. Bajo estas suposiciones el campo de velocidades toma la forma:

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = -\frac{q}{mc} \mathbf{H};$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \frac{q}{m} \mathbf{E};$$

$$\mathbf{J}_s = qn_{s0} \mathbf{v}_s$$

Expresando las dos primeras ecuaciones en términos de la supercorriente \mathbf{J}_s tenemos:

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) = -\frac{\mathbf{H}}{c};$$

$$\frac{\partial (\Lambda \mathbf{J}_s)}{\partial t} = \mathbf{E}$$

donde

$$\Lambda = \frac{m}{n_{s0} q^2}$$

de manera que:

$$n_{s0} = \frac{m}{\Lambda q^2} \tag{1.35}$$

nos da el número de super-electrones. Lo anterior corresponde al modelo de los dos fluidos.

1.5.2 Teoría de London

Para poder entender las consecuencias dinámicas del efecto Meissner, empecemos por considerar los siguientes casos:

- Al enfriar un superconductor en presencia de campo magnético externo, dentro de este $\mathbf{B} = 0$, lo que implica que aparece una corriente diamagnética \mathbf{J}_D que blindará al material.
- Cuando primero se enfría la muestra debajo de T_c , sin campo externo y después se aplica el campo magnético \mathbf{H} , aparece una corriente superconductor \mathbf{J}_s debido a que dentro del material $\mathbf{B} = 0$.

Como los estados finales en ambos casos son idénticos, entonces $\mathbf{J}_D = \mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s(\mathbf{H})$, por lo que la corriente superconductor solamente depende del campo \mathbf{H} . Los hermanos London proponen que esta dependencia satisfice las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\Lambda \mathbf{J}_s) &= -\frac{\mathbf{H}}{c}; \\
 \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \mathbf{J}_s) &= \mathbf{E}; \\
 \mathbf{J} &= \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_n; \\
 \mathbf{J}_n &= \sigma \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Cuyas dos primeras ecuaciones son consecuencia de una aproximación lineal al modelo del fluido electrónico no viscoso. En la tercera expresión se asume que la corriente total consiste de dos partes, una corriente superconductor y una corriente normal. Con las condiciones anteriores combinadas con las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{\dot{\mathbf{E}}}{c}; \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\dot{\mathbf{H}}}{c}; \\
 \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0; \\
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho
 \end{aligned}$$

se obtienen las ecuaciones de Maxwell-London:

$$\begin{aligned}
 c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{L}) + \frac{4\pi}{\Lambda} \mathbf{L} + 4\pi\sigma \dot{\mathbf{L}} + \ddot{\mathbf{L}} &= 0 \quad \text{Para } \mathbf{L} = \mathbf{H}, \mathbf{E} \text{ y } \mathbf{J}. \\
 \frac{4\pi}{\Lambda} \rho + 4\pi\sigma \dot{\rho} + \ddot{\rho} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

La solución de la ecuación escalar para la distribución de carga es:

$$\rho(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad \text{con } \tau_{1,2} = 2\pi\sigma \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\pi\Lambda\sigma^2}} \right) \tag{1.38}$$

Para escalas de tiempo $t > \tau_2 \cong 10^{-12}$ s, $\rho(t) \cong 0$, de manera que para estas escalas de tiempo:



$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\dot{\rho} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}$$

Usando la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{L}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{L}) - \nabla^2 \mathbf{L}$. Las ecuaciones de Maxwell-London para esta escala de tiempos son:

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{L} = \frac{4\pi}{\Lambda} \mathbf{L} + 4\pi\sigma \dot{\mathbf{L}} + \ddot{\mathbf{L}} \quad \text{para } \mathbf{L} = \mathbf{H}, \mathbf{E} \text{ y } \mathbf{J} \quad (1.39)$$

Schrödinger demostró usando las ecuaciones de Maxwell-London que las corrientes \mathbf{J}_s , \mathbf{J}_n y la corriente de desplazamiento $\mathbf{J}_d = \frac{\dot{\mathbf{E}}}{4\pi}$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$c \nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{J}_s \\ \mathbf{J}_n \\ \mathbf{J}_d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{H}}{c} \\ \sigma \dot{\mathbf{H}} \\ \frac{\ddot{\mathbf{H}}}{4\pi} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_s \\ \mathbf{J}_n \\ \mathbf{J}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{E}}{\Lambda} \\ \sigma \dot{\mathbf{E}} \\ \frac{\ddot{\mathbf{E}}}{4\pi} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Así, los tres primeros términos del lado derecho de (1.39) corresponden a las contribuciones de \mathbf{J}_s , \mathbf{J}_n y \mathbf{J}_d .

Para un campo alternante de frecuencia $\omega/2\pi$ la contribución de cada una de las tres corrientes está en la proporción:

$$|\mathbf{J}_s| : |\mathbf{J}_n| : |\mathbf{J}_d| = 1 : \Lambda\sigma\omega : \frac{\Lambda\omega^2}{4\pi}$$

Para frecuencias $\omega \ll \frac{1}{\sigma\Lambda}$, (tiempos grandes $t \gg \sigma\Lambda$), \mathbf{J}_n y \mathbf{J}_d son despreciables respecto a \mathbf{J}_s , en esta escala llamada cuasi-estacionaria las ecuaciones de Maxwell-London se reducen a:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{L}) + \frac{4\pi}{\Lambda c^2} \mathbf{L} = 0 \quad (1.41)$$

y finalmente para el caso estacionario $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\dot{\mathbf{H}}}{c} = 0$, que al sustituirse en (1.41) se obtiene que $\mathbf{E} = 0$.

En el estado estacionario, **no** hay campo eléctrico en el superconductor, sin embargo esto no implica la ausencia de corrientes eléctricas.

Veamos como las ecuaciones de London permiten describir el efecto Meissner. Bajo condiciones estacionarias la ecuación para \mathbf{H} está dada por:

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{4\pi}{\Lambda} \mathbf{H} \quad (1.41b)$$

La solución regular de esta ecuación decrece rápidamente cuando vamos desde la superficie al interior de la muestra:

$$H \cong H_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad \text{con} \quad \lambda = c \sqrt{\frac{\Lambda}{4\pi}} \quad (1.42)$$

con la cantidad λ llamada la profundidad de penetración. Por lo que \mathbf{H} no se anula discontinuamente en la superficie, sino que decrece rápidamente en una pequeña capa de grueso λ debajo de la superficie.

Para profundidades mayores a λ , el campo magnético es prácticamente cero, de forma que el resultado de Meissner está contenido dentro de la teoría de London.

Para cuerpos grandes comparados con λ :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{H}(\mathbf{r}) d^3 r = 0 \quad (1.43)$$

pero para superconductores pequeños puede entrar un flujo apreciable al cuerpo. Lo anterior nos da una forma de medir λ y en consecuencia la constante Λ .

COMPORTAMIENTO DE UNA ESFERA SUPERCONDUCTORA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Una aplicación importante de la teoría de London es determinar los campos y corrientes de una esfera superconductora de radio R en un campo magnético H_0 “débil” aplicado.

A distancias grandes el campo es homogéneo e igual a H_0 , en la vecindad de la esfera no será homogéneo ya que es perturbado por las corrientes inducidas en la esfera.

Fuera de la esfera las componentes esféricas del campo son:

$$\begin{aligned} H_r &= \left(H_0 + \frac{2M}{r^3} \right) \cos \theta; \\ H_\theta &= \left(-H_0 + \frac{M}{r^3} \right) \sin \theta; \\ H_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde M es el momento magnético inducido de la esfera.

Dentro de la esfera, se resuelven las ecuaciones de London para la corriente, encontrando que solamente las corrientes paralelas al ecuador son diferentes de cero:

$$\begin{aligned} J_r &= J_\theta = 0; \\ J_\phi &= \frac{A}{r^2} (\sinh \beta r - \beta r \cosh \beta r) \sin \theta \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde $\beta = \frac{4\pi}{\Lambda c^2}$. Usando la ecuación de London $\nabla \times \mathbf{J} = -\frac{\beta^2 c}{4\pi} \mathbf{H}$ se encuentra las componentes del campo dentro de la esfera:



$$\begin{aligned}
 H_r &= A' \frac{2}{\beta^2 r^3} (\sinh \beta r - \beta r \cosh \beta r) \cos \theta; \\
 H_\theta &= A' \frac{1}{\beta^2 r^3} \left((1 + \beta^2 r^2) \sinh \beta r - \beta r \cosh \beta r \right) \sin \theta; \\
 H_\phi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.46}$$

En la Fig. 1.15 se observa el comportamiento del campo magnético h_θ en la sección transversal del ecuador de una esfera superconductora. El campo penetra un poco más allá de la superficie de la esfera, pero a una profundidad un poco mayor que β^{-1} el campo es prácticamente cero.

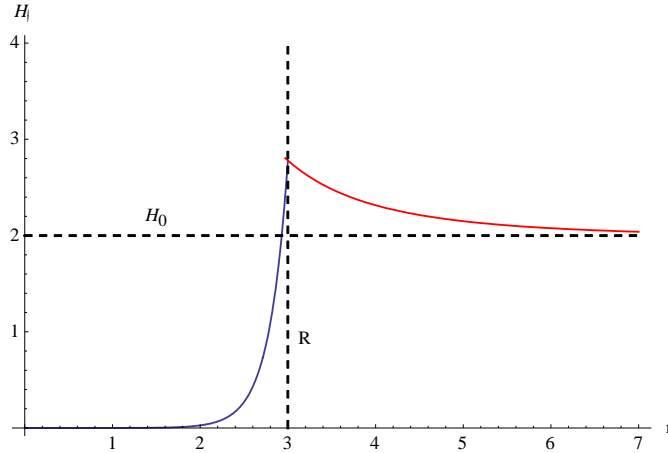


Figura 1. 15 Componente h_θ del campo magnético

También se encuentra, utilizando el hecho de que por condiciones a la frontera h_r y h_θ son continuos en $r = R$, que el momento magnético inducido M toma la forma asintótica mostrada en la Fig. 1.16 cuya expresión analítica junto con la de la constante A' es:

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{H_0 R^3}{2} \left(1 - \frac{3}{\beta R} \coth \beta R + \frac{3}{\beta^2 R^2} \right); \\
 A' &= -\frac{3H_0}{2} \frac{R}{\sinh \beta R}
 \end{aligned}
 \tag{1.47}$$

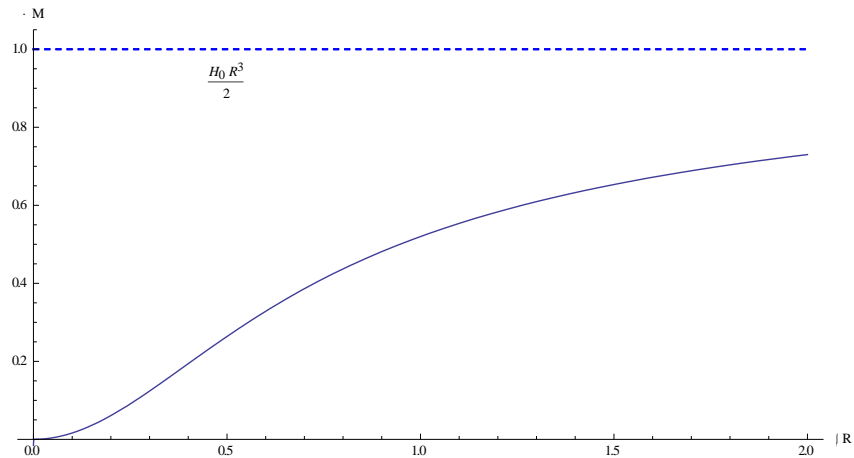


Figura 1. 16 Momento magnético inducido M

Para esferas grandes, $R \gg \beta^{-1}$:

$$M \approx -\frac{H_0}{2} (R - \beta^{-1})^3 \quad (1.48)$$

y para esferas pequeñas $R \ll \beta^{-1}$:

$$M = -\frac{H_0 R^3}{2} \left(\frac{\beta^2 R^2}{15} - \frac{2}{315} \beta^4 R^4 + \dots \right) \quad (1.49)$$

Estos resultados fueron utilizados posteriormente por Shoenberg para determinar experimentalmente la profundidad de penetración[15]. La profundidad de penetración definida por

$$\lambda = \beta^{-1} = c \sqrt{\frac{\Lambda}{4\pi}} \quad (1.50)$$

es una cantidad difícil de medir, sin embargo Shoenberg y colaboradores combinando dos experimentos independientes lograron estimar su valor. El primero de ellos consiste en determinar susceptibilidades magnéticas de esferas muy pequeñas y moderadamente grandes, que permiten conocer la razón de dos profundidades de penetración a diferentes temperaturas, y el segundo en medir los momentos magnéticos inducidos por cilindros de radio $R \gg \lambda$, que permite encontrar experimentalmente la diferencia entre las profundidades de penetración a dos temperaturas. Con estos resultados es posible estimar el valor de la profundidad de penetración en el cero absoluto.

1.5.3 Experimentos de Shoenberg

En el primer experimento se midió la susceptibilidad magnética de una preparación de mercurio (Hg) coloidal, encontrando que:

$$\frac{\kappa}{\kappa_\infty} = \frac{1}{15\lambda^2} \overline{R^2} = 0.009 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \quad (1.51)$$

donde el valor de $\overline{R^2}$ no es conocido.

En el segundo experimento se mide la susceptibilidad magnética de un cilindro de radio $R \gg \lambda$ dentro de un campo longitudinal. Mediante el uso de la teoría de Maxwell-London se encuentra que la magnetización inducida es:

$$M \approx -\frac{H_0 R^2}{4} \left(1 - \frac{2\lambda}{R} \right) \quad (1.52)$$

de manera que para dos temperaturas T y T_0 , se tiene:

$$\frac{M(T) - M(T_0)}{M(T_0)} = \frac{2[\lambda(T) - \lambda(T_0)]}{R} \quad (1.53)$$

en tanto que el método coloidal nos da:



$$\frac{\lambda(T)}{\lambda(T_0)} = \sqrt{\frac{T_c^4 - T_0^4}{T_c^4 - T^4}} \quad (1.54)$$

Combinando los resultados de ambos experimentos Désirant y Shoenberg estimaron que $\lambda_0 = \lambda(T = 0K) = 7.6 \times 10^{-6} \text{cm}$ [11]. Utilizando este resultado en (1.51) se encuentra:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}} \quad (1.55)$$

y por (1.42) se obtiene:

$$\Lambda = \frac{4\pi\lambda^2}{c^2} = \frac{0.81 \times 10^{-30}}{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4} \text{ s}^2 \quad (1.56)$$

de manera que en combinación con la expresión (1.35) tenemos:

$$n_{s0} = \frac{m}{\Lambda q^2} = \frac{mc^2}{4\pi q^2 \lambda^2} = \frac{mc^2}{4\pi q^2 \lambda_0^2} \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \right] = n_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \right] \quad (1.57)$$

el cual es el número de “super-electrones” como función de la temperatura.

El comportamiento del número de super-electrones cerca de la temperatura de transición, se encuentra al factorizar la expresión (1.57):

$$n_{s0} = n_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \right] = n_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right) \right] \left[1 + \left(\frac{T}{T_c}\right) \right] \left[1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \right] \quad (1.58)$$

Para $T \rightarrow T_c$, n_{s0} tiene el siguiente comportamiento:

$$n_{s0} \approx 4n_0 \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right) \quad (1.59)$$

Este comportamiento es similar al del parámetro de orden en la teoría de transiciones de segundo orden de Landau, que se presenta en el siguiente capítulo. En la Fig. 1.17 se muestra la gráfica de (1.58), donde se puede observar como disminuye el número de super-electrones cuando el valor de la temperatura se acerca al de la temperatura crítica.

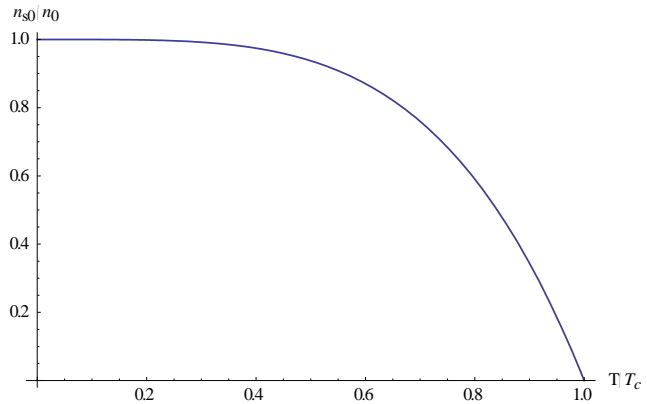


Figura 1. 17 Comportamiento de n_{s0}/n_0 con respecto a la temperatura

Referencias

- [1] Kamerlingh Onnes H. *Further experiments with liquid helium. D. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures, etc. V. The disappearance of the resistance of mercury.* Leiden Communications No. 122b, 1911.
- [2] Kamerlingh Onnes H. *Further experiments with liquid helium. G. On the electrical resistance of pure metals, etc. VI. On the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears.* Leiden Communications No. 124c, 1911.
- [3] Kamerlingh Onnes H. *Investigations into the properties of substances at low temperature physics, which led, amongst other things, the preparation of liquid helium.* Nobel Lecture. December. 1913.
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1913/onnes-lecture.pdf
- [4] Keesom W. H. Rapport et discours du quatrième conseil Solvay, p. 289, 1924.
- [5] Rutgers A. J. in Ehrenfest P., Leiden Communications, Suppl. 75b, 1933.
- [6] Gorter C. J. Arch. Teyler 7, 387. 1933.
- [7] Meissner W. and Ochsenfeld R. *Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit.* Naturwissenschaften Vol. 21, pp. 787-788, 1933.
- [8] London F. and London H. *Supraleitung und diamagnetismus.* Physica Vol. 2, pp. 341-354, 1935.
- [9] Kamerlingh H. Onnes and Tuyn W. *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, 25, 443 (1923).
- [10] Mendelssohn K. and Moore J. R. *Proc. Roy. Soc. London*, A152, 34, 1935.
- [11] London F. *Superfluids: Macroscopic Theory of Superconductivity, Vol. I.* Wiley, New York. 1950.
- [12] Keesom W. H. and Van Laer P. H. *Measurements of the atomic heats of tin in the superconductive and in the non-superconductive state.* Physica Vol. 5, pp. 193-201, 1938.
- [13] Zemansky M. W. *Heat and Thermodynamics.* 5th edition. McGraw-Hill. 1968.
- [14] Kok J. A. *Some remarks on supraconductivity and Fermi-Dirac statistics.* Physica Vol.1, pp. 1103-1106, 1934.
- [15] Shoenberg D. *Proc. Roy. Soc. London.* A175, 49, 1940.



Capítulo 2

Transiciones de fase de segundo orden

2.1 Introducción

Las transiciones de fase han sido motivo de estudio desde el siglo XIX, uno de los primeros en estudiar el fenómeno fue J. D. van der Waals, al presentar como parte de su tesis doctoral las correcciones a la ecuación de estado de los gases ideales considerando el volumen de las partículas y las interacciones entre estas. Otro suceso importante en el estudio de las transiciones de fases, fue el intento de clasificarlas, el primero que realizó esto fue Paul Ehrenfest al tomar en cuenta el cambio de algunas propiedades térmicas durante la transición y su relación con la energía libre de Gibbs G propuso una clasificación en la que el orden de la transición es el mismo que el de la derivada de G , que muestra una discontinuidad en el cambio de fase[1]. En la clasificación moderna, existen transiciones de fase de primer y segundo orden. En lo que respecta a la primera, dos estados de agregación distintos están en equilibrio (líquido-gas, líquido-sólido, etc.) y se produce un cambio abrupto en la simetría que se traduce en una discontinuidad en la entropía, por ejemplo, la fusión o ebullición del agua. Mientras que en la segunda, los estados de agregación de las dos fases son idénticos y la simetría cambia de una manera continua; además se caracterizan por la ausencia de calor latente y la existencia de una discontinuidad finita en el calor específico.



J.D. van der Waals

P. Ehrenfest

W. L. Williams

Figura 2. 1

En 1934, W. L. Bragg y E. J. Williams describieron una transición de fase de segundo orden observada en una aleación de cobre y zinc, la cual se manifiesta por la manera en que estos grupos de átomos están ordenados en una red cristalina. A través del uso de rayos X, encontraron que debajo de una cierta temperatura de transición, los átomos de zinc se encuentran en una red de simetría cúbica y los átomos de cobre se encuentran en otra, ambas intercaladas entre sí.

En una serie de artículos[2][3][4], ellos desarrollan una teoría para describir esta transición cuya idea principal es la de obtener una expresión para la entropía configuracional del sistema en términos de un parámetro que cuantifique el orden del sistema y su dependencia con la temperatura. Esta descripción teórica fue utilizada como base para varios estudios sobre fenómenos de transición.

Por otro lado, Lev Landau[5] presenta en 1937 su teoría general para las transiciones de fases, en la cual propone expresar la energía libre de Gibbs en serie de potencias de un parámetro de orden para describir el comportamiento de un sistema cerca del punto de transición. En 1950, Landau junto con Vitaly Ginzburg[6] retoman las ideas de esta teoría y dan origen a la Teoría de Ginzburg-Landau, la cual es un intento por describir la superconductividad y parte del hecho de desarrollar la energía libre de Gibbs en serie de potencias pares de

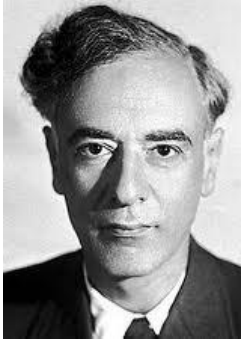


Figura 2. 3 Lev Landau

una función de onda como parámetro de orden alrededor de la temperatura crítica. Con esta teoría es posible obtener resultados congruentes con la Teoría de London.

En el capítulo anterior, se demostró que la transición de fase superconductor es una de segundo orden, ya que presenta una discontinuidad en el calor específico y ausencia de calor latente cuando $T = T_c$, por esta razón en este apartado nos enfocaremos en la descripción de las transiciones de fase de este tipo a partir de la teoría de Bragg-Williams, con el objetivo de comprender de una manera más sencilla los argumentos dados por Landau en su teoría para transiciones de fase y culminar con la teoría de Ginzburg-Landau que describe la transición superconductor desde el punto de vista cuántico.

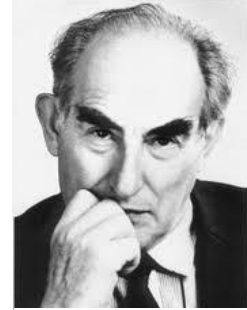


Figura 2. 2 Vitaly Ginzburg

2.2 Teoría de Bragg-Williams

EL ESTUDIO DE LAS ALEACIONES

El arreglo atómico en un cristal puede ser entendido a través de celdas unitarias, por ejemplo, el cobre cuyo arreglo de los átomos en la estructura cristalina se describe utilizando las celdas unitarias cúbicas centradas en las caras (face centred cubic: fcc) y su apilamiento en tres dimensiones. Un esquema de la celda unitaria fcc se muestra en la Fig.2.4 que consta de puntos en las ocho esquinas y seis centrados en las caras de un cubo, mediante la colocación de un átomo de cobre en cada uno de estos puntos, se obtiene la celda unitaria fcc de este elemento.

Por otro lado, el bronce es una aleación de cobre y estaño que puede obtenerse mediante la sustitución de manera aleatoria de algunos de los átomos de cobre por átomos de estaño en las celdas unitarias del cristal, tal aleación se comporta como una solución sólida de sustitución al azar.

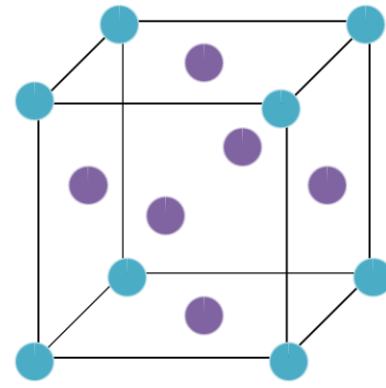


Figura 2. 4 Celda unitaria fcc

Si se mezclan átomos de oro al cobre para hacer una aleación de cobre y oro en la proporción de tres átomos de cobre a un átomo de oro, entonces, las esquinas del cubo de la celda unitaria son preferentemente ocupados por los átomos de oro, mientras que los sitios en los centros de las caras están ocupados por los de cobre. Estas aleaciones se denominan aleaciones ordenadas, y, también se sabe que dichas aleaciones al calentarlas pierden este orden y llegan a ser aleatorias a altas temperaturas. Esta transformación es conocida como la transformación orden-desorden.

El ordenamiento y su arreglo complementario de separación de fases pueden entenderse utilizando un modelo bidimensional con las siguientes consideraciones: supongamos una aleación que consta de dos tipos de átomos, A y B. En la aleación, como se muestra en la Fig. 2.5, hay tres tipos de vínculos que existen entre los dos tipos de átomos, es decir, AA, BB y AB.

Las energías de interacción de estos tres tipos de vínculos se denotan con V_{AA} , V_{BB} y V_{AB} respectivamente. Más adelante mostraremos que si $2V_{AB} - V_{AA} - V_{BB} < 0$, la configuración de mínima energía corresponde a que los átomos A(B) prefieren estar rodeados por átomos B(A), lo que conduce al ordenamiento. En cambio, si $2V_{AB} - V_{AA} - V_{BB} > 0$, entonces, los átomos A(B) prefieren estar rodeados por otros átomos A(B), lo que conduce a la separación de fases. En el segundo caso esta tendencia al orden o de separación de fases se pierde a medida que aumenta la temperatura, lo que incrementa la entropía configuracional del sistema, que provoca la disposición al azar de los átomos en todos los puntos de la red, sin preferencia a ninguna de las especies. Así, la contribución de la entropía a la energía libre aumenta y, por lo tanto, una aleación que se ordena o se separa en fases a bajas temperaturas se convertirá en una solución sólida de sustitución al azar.

Debido al cambio continuo en la simetría, estas transiciones de fase pueden ser descritas con un parámetro auxiliar conocido como **parámetro de orden** cuyas propiedades son: ser nulo para la fase más desordenada, y tomar valores distintos de cero (positivos o negativos) para la fase más ordenada. Este parámetro debe ser una función continua de la temperatura.

Una teoría que describe estas transformaciones fue desarrollada por Bragg y Williams cuya idea fundamental es cuantificar el ordenamiento de una estructura cristalina con la introducción del parámetro de orden η , que está relacionado con el número de puntos de la red ocupados por diferentes especies de átomos a distintas temperaturas. Así, la energía libre del sistema se describe en términos de este parámetro y, el equilibrio del sistema está determinado cuando minimizamos la energía libre con respecto al parámetro de orden.

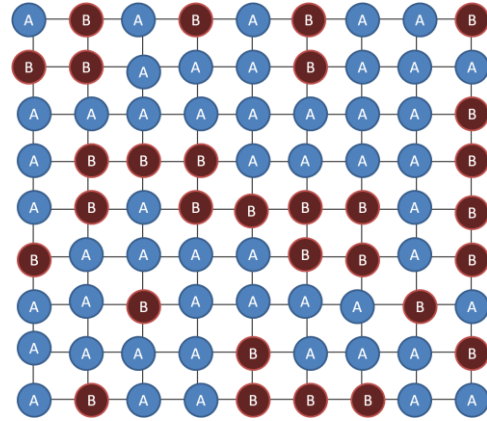


Figura 2.5 Modelo bidimensional de una celda

PARÁMETRO DE ORDEN

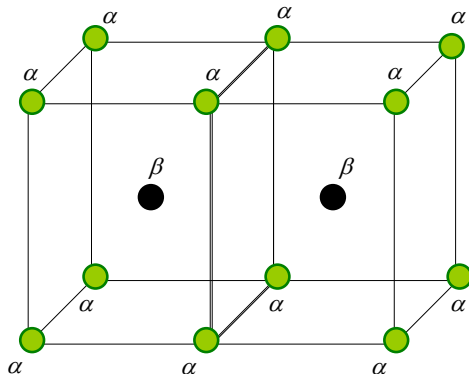


Figura 2.6

Supongamos que tenemos el mismo número de átomos distintos A y B, con dos tipos de sitios α y β . Cada sitio α está rodeado únicamente por sitios β y viceversa. Los sitios idénticos (α o β) son los vecinos más cercanos (Fig. 2.6a). Por lo que se tiene dos estructuras cúbicas caracterizada por sitios α y otra intercalada a la anterior caracterizada por sitios β .

Designemos la probabilidad de que un sitio α sea ocupado por un átomo A por $p_\alpha = \frac{N_A^\alpha}{\frac{N}{2}}$ y la probabilidad de que este sitio

sea ocupado por un átomo B por $w_\alpha = 1 - p_\alpha$; análogamente

$p_\beta = \frac{N_B^\beta}{\frac{N}{2}}$ y $w_\beta = 1 - p_\beta$ son las probabilidades de ocupación

asociadas a los sitios β . N es el número total de sitios, N_A^α el número de átomos A en un sitio α , N_B^β número de átomos B en un sitio β , N_A^β número de átomos A en un sitio β y N_B^α número de átomos B en un sitio α . A continuación, introducimos un parámetro de orden η :

$$\eta_\alpha = \frac{N_A^\alpha - N_B^\alpha}{N_A^\alpha + N_B^\alpha} = \frac{p_\alpha - w_\alpha}{p_\alpha + w_\alpha} = \frac{p_\alpha - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \text{sitios } \alpha$$

$$\eta_\beta = \frac{N_B^\beta - N_A^\beta}{N_A^\beta + N_B^\beta} = \frac{p_\beta - w_\beta}{p_\beta + w_\beta} = \frac{p_\beta - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \text{sitios } \beta$$
(2.1)

Sea N_A el número de átomos A y N_B el número de átomos B. Entonces, como $N_A = N_A^\alpha + N_A^\beta = \frac{N}{2}$, $p_\alpha = \frac{N_A^\alpha}{\frac{N}{2}}$

y $w_\beta = \frac{N_B^\beta}{\frac{N}{2}}$ se tiene que $p_\alpha + w_\beta = 1$; de manera que $p_\alpha = 1 - w_\beta = p_\beta$. Lo que implica que $\eta_\alpha = \eta_\beta = \eta$, por

lo que tenemos solo un parámetro de orden, donde hemos utilizado que $N_A = N_B = \frac{N}{2}$. El estado más ordenado corresponde a $\eta = \pm 1$, en el que todos los átomos A(B) se encuentran en los sitios α y todos los B(A) en los sitios β , en el estado de desorden total $p_\alpha = p_\beta = w_\alpha = w_\beta = \frac{1}{2}$ y el parámetro de orden es $\eta = 0$.

ENTROPÍA CONFIGURACIONAL

Ahora procederemos a evaluar la entropía configuracional; N_A^α , N_B^β , N_A^β y N_B^α se pueden expresar en términos del parámetro de orden η y de las probabilidades p_α , p_β , w_α y w_β de la siguiente manera:

$$N_A^\alpha = \frac{N}{2} p_\alpha = \frac{N}{4} (\eta + 1) \tag{2.2}$$

$$N_B^\beta = \frac{N}{2} p_\beta = \frac{N}{4} (\eta + 1)$$

$$N_A^\beta = \frac{N}{2} w_\beta = \frac{N}{4} (1 - \eta) \tag{2.3}$$

$$N_B^\alpha = \frac{N}{2} w_\alpha = \frac{N}{4} (1 - \eta)$$

El número de configuraciones W , es el número de maneras en que los átomos A y B pueden ser distribuidos en los sitios α y β , es dado por:

$$W = \left[\frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{N_A^\alpha! N_B^\alpha!} \right] \left[\frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{N_A^\beta! N_B^\beta!} \right] \tag{2.4}$$

$$= \frac{\left(\frac{N}{2}\right)! \left(\frac{N}{2}\right)!}{\left[\frac{N}{4}(\eta + 1)\right]! \left[\frac{N}{4}(1 - \eta)\right]! \left[\frac{N}{4}(1 - \eta)\right]! \left[\frac{N}{4}(1 + \eta)\right]!}$$

La entropía configuracional S está relacionada con W por medio de la ecuación de Boltzmann: $S = k \ln W$. Haciendo uso de la ecuación de Stirling para $N!$ obtenemos:

$$\frac{S}{k} = \frac{N}{2} \left\{ 2 \ln 2 - [(1 + \eta) \ln(1 + \eta) + (1 - \eta) \ln(1 - \eta)] \right\} \tag{2.5}$$

En el estado más ordenado $\eta = \pm 1$ (Fig. 2.7a), la entropía es nula. Mientras que en el estado de desorden total $\eta = 0$, la entropía es $S = kN \ln 2$, resultado semejante a la entropía de mezcla de gases[7].

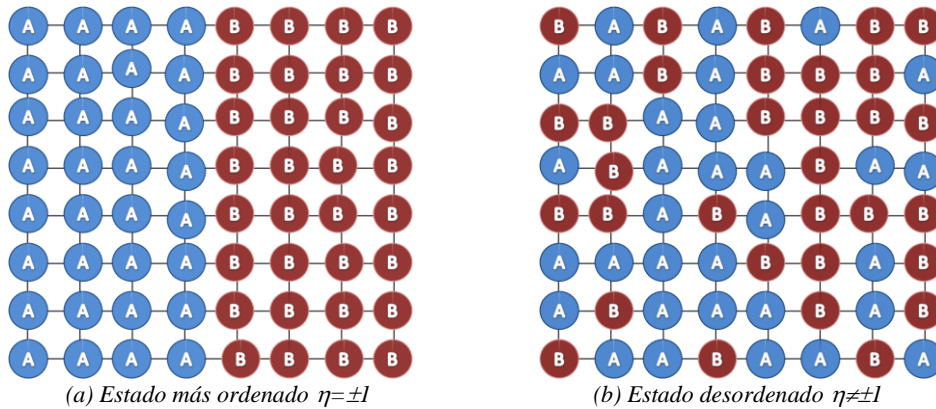


Figura 2.7

ENERGÍA LIBRE DE HELMHOLTZ

Para encontrar la forma en que depende el parámetro de orden de la temperatura, procedemos al cálculo de la energía libre de Helmholtz: $F = U - TS$, y utilizando el hecho de que en el estado de equilibrio F es un mínimo, determinaremos la dependencia de η con la temperatura.

La energía interna U del sistema está determinada por el número de vecinos más cercanos, así será función de las energías de interacción entre las especies y el parámetro de orden. A continuación nos enfocaremos a encontrar esta relación:

El número de coordinación z , está definido como el número de sitios β alrededor de un sitio α , debido a que la probabilidad de tener pares AA, BB en sitios cercanos es el producto de las probabilidades de ocupación de estos sitios veces z , así tenemos:

$$N_{AA} = \frac{z p_\alpha (1 - p_\beta) N}{2} = \frac{z N (1 - \eta^2)}{8} = N_{BB} \quad (2.6)$$

donde N_{AA} y N_{BB} son los números de pares AA y BB. Si consideramos una red cúbica centrada en el cuerpo ($z = 8$), tenemos:

$$N_{AA} = N_{BB} = N (1 - \eta^2) \quad (2.7)$$

Análogamente, el número de pares AB y BA están dados por:

$$N_{AB} = \left[p_\alpha p_\beta + (1 - p_\alpha)(1 - p_\beta) \right] z \frac{N}{2} = 2N (1 + \eta^2) \quad (2.8)$$

Para calcular U , consideramos solamente las interacciones entre vecinos más cercanos y que estas interacciones son independientes de entorno de los átomos. Entonces usando (2.7) y (2.8) la energía se expresa en términos del parámetro de orden como:

$$U = N_{AA} V_{AA} + N_{BB} V_{BB} + N_{AB} V_{AB} = U_0 + N \eta^2 V \quad (2.9)$$

donde

$$U_0 = N (V_{AA} + V_{BB} + 2V_{AB}) \quad (2.10)$$

$$V = 2V_{AB} - V_{AA} - V_{BB}$$

En nuestro caso $V < 0$, ya que entonces la configuración de mínima energía corresponde a que los átomos A(B) prefieren estar rodeados por átomos B(A), lo que conduce a una red de átomos A intercalada dentro de otra de átomos B, con $\eta = \pm 1$.

Así, utilizando (2.5) y (2.9) la energía libre de Helmholtz en términos del parámetro de orden es:

$$F = U_0 - TS_0 + VN \eta^2 - \frac{kTN}{2} \left\{ 2 \ln 2 - [(1 + \eta) \ln(1 + \eta) + (1 - \eta) \ln(1 - \eta)] \right\} \quad (2.11)$$

donde S_0 es la entropía de los átomos A y B en su red.

En el equilibrio termodinámico, F debe ser mínima, este mínimo se obtiene para valores de η que son solución a la expresión:



$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 2N\eta V + \frac{NkT}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} = 0 \quad (2.12)$$

Esta relación nos proporciona la dependencia del parámetro de orden con la temperatura.

Analicemos gráficamente la solución de la ecuación (2.12) expresándola en la siguiente forma:

$$\frac{4|V|}{kT} \eta = \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)$$

la función $\frac{4|V|}{kT} \eta$ es una recta de pendiente $\frac{4|V|}{kT}$ que cambia con la temperatura, en tanto que el término del lado derecho no depende de T , como se muestra en la Fig. 2.8. Para altas temperaturas la recta interseca a la función logaritmo solamente en el origen, obteniéndose la solución $\eta = 0$, que corresponde al estado desordenado; cuando se disminuye la temperatura la recta eventualmente interseca en tres puntos a la función logaritmo: $\eta = 0, \pm \eta^*$. Estos puntos de intersección entre la recta y la curva logaritmo son conocidos como **puntos fijos**. Claramente existe una temperatura crítica tal que para $T < T_c$ se obtienen tres soluciones y para $T > T_c$ una solución. Esta temperatura crítica está determinada por la pendiente de la recta en el origen a la función logaritmo, cuyo valor es:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right) \right\} \right|_{\eta=0} = 2$$

de manera que la temperatura crítica está determinada por la ecuación: $\frac{4|V|}{kT_c} = 2$, así:

$$T_c = \frac{2|V|}{k} \quad (2.13)$$

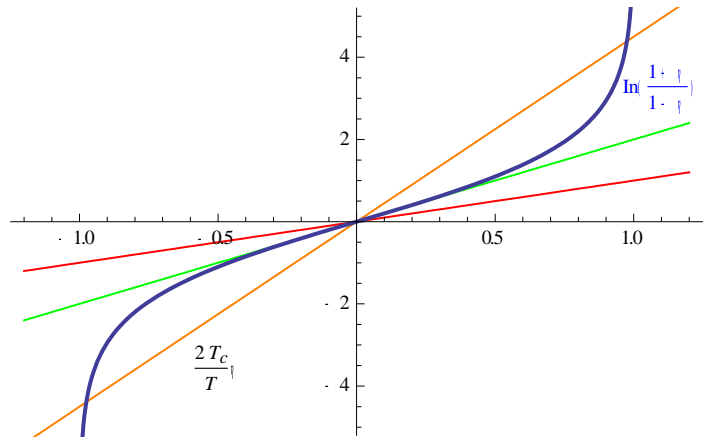


Figura 2.8

Entonces, la energía libre de Hemholtz (2.11) toma la forma:

$$F = F_0 - kTN \ln 2 + \frac{kN}{2} \left\{ -T_c \eta^2 + T \left[(1+\eta) \ln(1+\eta) + (1-\eta) \ln(1-\eta) \right] \right\} \quad (2.14)$$

y su derivada con respecto al parámetro de orden está dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{Nk}{2} \left[-2T_c \eta + T \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right] \quad (2.15)$$

Para determinar la estabilidad de las soluciones, que es equivalente a saber qué puntos fijos son máximos y mínimos, recurrimos a la segunda derivada de F con respecto a η . Derivando la ecuación (2.12) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = Nk \left(\frac{T}{1-\eta^2} - T_c \right) \quad (2.16)$$

Para $\eta = 0$, F tiene un mínimo si:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} = Nk(T - T_c) > 0,$$

esto sucede para $T > T_c$ y tiene un máximo si:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} = Nk(T - T_c) < 0$$

lo cual pasa cuando $T < T_c$.

Para $\eta = \pm \eta^*$, F tiene un mínimo si:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=\pm\eta^*} = NkT \left(\frac{1}{1-(\eta^*)^2} - \frac{T_c}{T} \right) = NkTB(\eta^*) > 0;$$

la forma explícita de $B(\eta^*)$ se obtiene al expresar T/T_c como función de η^* :

$$\frac{T_c}{T} = \frac{1}{2\eta^*} \ln \frac{1+\eta^*}{1-\eta^*} \quad (2.17)$$

que se encuentra al igualar a cero (2.15), de manera que la función $B(\eta^*)$ es:

$$B(\eta^*) = \frac{1}{1-\eta^{*2}} - \frac{1}{2\eta^*} \ln \frac{1+\eta^*}{1-\eta^*} \quad (2.18)$$

La gráfica de esta función está dada en la Figura 2.9, que muestra que $B(\eta^*)$ es una función simétrica y siempre positiva, esto implica que la energía libre de Helmholtz tiene dos mínimos simétricos en $\eta = \pm \eta^*$. Por lo tanto para $T < T_c$, F tiene un máximo en el origen y dos mínimos en $\eta = \pm \eta^*$, que se muestran en la Figura 2.10.

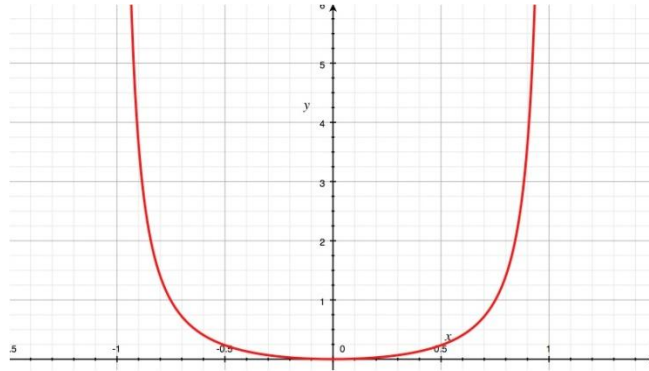


Figura 2. 9 Gráfica de la función $B(\eta^*)$

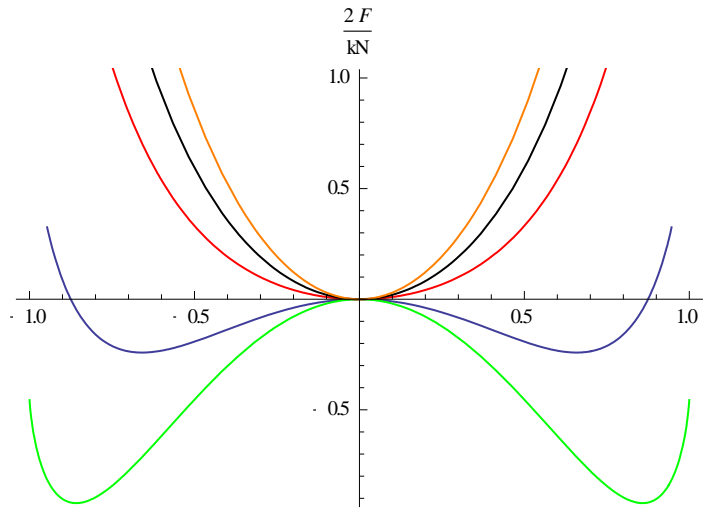


Figura 2. 10 Potencial F para distintas temperaturas

El parámetro de orden $\eta = \eta^*(T/T_c)$ es dado por la solución de la ecuación (2.12), cuya gráfica muestra una **bifurcación¹ de tipo trinche supercrítica** (Fig.2.11). Este tipo de bifurcación es común en problemas físicos que tienen una simetría[8].

La entropía como función de T/T_c se encuentra al sustituir $\eta = \eta^*(T/T_c)$ en la expresión (2.5). De la Fig. 2.11 vemos que para $T > T_c$, $\eta = 0$ de manera que $S = Nk \ln 2$, para $T < T_c$ se tiene que $S(\eta^*) = S(-\eta^*)$, y además la entropía es una función continua de η para cualquier valor del parámetro, en particular: $\lim_{T \rightarrow T_c^-} S(\eta) = \lim_{T \rightarrow T_c^+} S(\eta) = S(\eta = 0) = Nk \ln 2$. Por lo que es nulo el calor de transición para $T = T_c$.

¹ En sistemas dinámicos, la bifurcación es un proceso de *creación ó destrucción* de puntos fijos que provoca un cambio de estabilidad de los mismos, debido a la variación de un parámetro; se dice que una función $f(x)$ tiene puntos fijos x^* si $\dot{x} = f(x) = 0$.

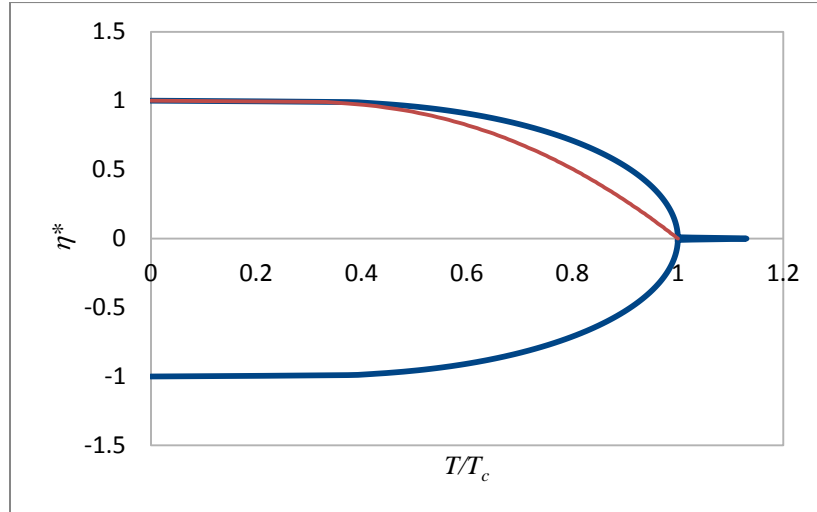


Figura 2. 11 Gráficas de η vs T/T_c (curva azul) y η^2 vs T/T_c (curva roja).

DISCONTINUIDAD FINITA EN EL CALOR ESPECÍFICO

A continuación mostraremos la existencia de una discontinuidad finita en el calor específico. Consideramos la entropía del sistema como $S' = S_0 + S$, donde S_0 es la entropía de los átomos en su red y S la entropía configuracional dada por la expresión (2.5). Para empezar, expresamos la definición de calor específico en términos del parámetro de orden:

$$C_p = T \left(\frac{\partial S'}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial S_0}{\partial T} \right)_p + T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = C_{p0} + T \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)_p \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_p \quad (2.19)$$

donde

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)_p = -\frac{Nk}{2} \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right), \quad (2.20)$$

Ahora relacionamos (2.20) con la solución de la expresión (2.12) dada por la ecuación (2.17), y obtenemos:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)_p = -Nk \frac{T_c}{T} \eta \quad (2.21)$$

Así, la derivada de la entropía con respecto a la temperatura es:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)_p \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_p = -Nk \frac{T_c}{T} \eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_p = -\frac{Nk}{2T} \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial (T/T_c)} \right)_p. \quad (2.22)$$

Por lo tanto, el calor específico es

$$C_p = C_{p0} - \frac{Nk}{2} \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial (T/T_c)} \right)_p \quad (2.23)$$



Como podemos observar en esta expresión, C_p está relacionada con la pendiente de la curva $\eta^2 = f\left(\frac{T}{T_c}\right)$ la cual se muestra en la Fig. 2.11 en color rojo. A partir de esto deducimos que para $T > T_c$, $\eta^2 = 0$ por lo que $C_p = C_{p0}$; en tanto que para $T \leq T_c$, la pendiente es negativa, de manera que el calor específico tiene una discontinuidad en $T = T_c$.

Gracias a la introducción del parámetro de orden η , Bragg y Williams demuestran que la transición orden-desorden en las aleaciones es una transición de fase de segundo orden. A continuación veremos que también es posible introducir un parámetro de orden para sistemas ferromagnéticos a través del modelo de Ising, siendo este una motivación para estudiar la teoría de Landau para transiciones de fase de segundo orden.

2.4 Modelo de Ising

El ferromagnetismo es la presencia de magnetización espontánea cuando no hay campo magnético externo. Se debe a que la mayoría de los momentos magnéticos (o espines) de los átomos se alinean en una misma dirección y sentido debido a la interacción entre los mismos, dando lugar a que la muestra se imante. Este alineamiento se produce únicamente por debajo de una temperatura característica llamada *temperatura de Curie*, T_c . Por encima de dicha temperatura los espines están orientados al azar, de forma que no hay un campo magnético neto. La transición ferromagnética es un ejemplo de transición de fase de segundo orden y se presenta en muchos metales ordinarios como el hierro y el níquel.

El modelo de Ising es un modelo sencillo para el estudio de la transición ferromagnética y en ciertas circunstancias tiene solución analítica exacta. Supongamos N partículas colocadas en una red cristalina de n dimensiones, en nuestro caso consideramos una red cúbica. Cada partícula tiene un momento magnético o espín s_i que puede tomar valores $+1$ ó -1 . El sentido del espín queda determinado mediante la interacción de la partícula con sus vecinas y por fluctuaciones térmicas. El hamiltoniano del sistema es de la forma:

$$\hat{H} = \sum_i H_i s_i - \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_{i,j,k} K_{ijk} s_i s_j s_k - \dots \quad (2.24)$$

en la que los coeficientes H , J , K , ... miden la energía de interacción entre el espín y el campo magnético externo h , entre par de espines, entre tres espines, etc.

A continuación realizaremos una simplificación de este modelo a través de la teoría de Bragg-Williams, para eso consideramos lo siguiente:

- $H_i = K_{ijk} = \dots = 0$,
- interacciones entre los vecinos más cercanos con $J_{ij} = J$,
- reemplazar s_i por el momento magnético promedio por partícula que es independiente de la posición

$$m = \frac{M}{N} = \langle s_i \rangle$$

Así, la energía interna de Bragg-Williams es:

$$U = \langle \hat{H} \rangle = -J \sum_{(i,j)} \langle s_i s_j \rangle = -J \sum_{\text{pares}} m^2 = -J \frac{Nz m^2}{2} \quad (2.25)$$

donde (i, j) indica la suma sobre espines contiguos y z es el número de coordinación entre ellos; este resultado es similar a la ecuación (2.9), con $V = -\frac{zJ}{2}$.

Si denotamos por N_{\uparrow} el número de espines hacia arriba, N_{\downarrow} al número de espines hacia abajo, la magnetización $M = N_{\uparrow} - N_{\downarrow}$ y el número de partículas $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$, entonces el momento magnético promedio por partícula es

$$m = \frac{M}{N} = \frac{N_{\uparrow} - N_{\downarrow}}{N_{\uparrow} + N_{\downarrow}} \quad (2.26)$$

A temperaturas por encima de T_c , se espera que $m = 0$, debido al comportamiento al azar de cada uno de los espines, mientras que por debajo de T_c , hay una tendencia de alineamiento de los espines en una misma dirección y sentido que lleva a $m \neq 0$. Por otro lado, N_{\uparrow} y N_{\downarrow} se pueden expresar en términos del parámetro m como:

$$N_{\uparrow} = \frac{N}{2}(1+m) \quad N_{\downarrow} = \frac{N}{2}(1-m) \quad (2.27)$$

La entropía del sistema es dada por el logaritmo del número de configuraciones microscópicas de N partículas que poseen el mismo valor de la magnetización:

$$S = k \ln \left[\frac{N!}{N_{\uparrow}! N_{\downarrow}!} \right] = k \ln \left(\frac{N!}{\left(\frac{N}{2}(1+m) \right)! \left(\frac{N}{2}(1-m) \right)!} \right) \quad (2.28)$$

Haciendo uso de la aproximación de Stirling para $N!$ se llega a:

$$S = kN \left(\ln 2 - \frac{1+m}{2} \ln(1+m) - \frac{1-m}{2} \ln(1-m) \right) \quad (2.29)$$

que es una expresión similar a la ecuación (2.5) con el parámetro de orden igual al momento magnético promedio.

Realizando un análisis similar al problema de aleaciones, obtenemos resultados idénticos para la energía libre de Helmholtz en términos del parámetro de orden m :

$$F(T, m) = F_0 + U - TS = F_0 - kTN \ln 2 + \frac{kN}{2} \left\{ -T_c m^2 + T \left[(1+m) \ln(1+m) + (1-m) \ln(1-m) \right] \right\} \quad (2.30)$$

donde $T_c = \frac{zJ}{k}$.

Si realizamos un desarrollo en serie de potencias para m pequeñas ($|m| \ll 1$), obtenemos:

$$F(T, m) = F_0 + k \left(-NT \ln 2 + \frac{1}{2} N (T - T_c) m^2 + \frac{1}{12} NT m^4 + \dots \right), \quad (2.31)$$

despreciando términos de orden mayor tenemos:

$$F = F_0 - NkT \ln 2 + \frac{1}{2} kN (T - T_c) m^2 + \frac{1}{12} kNT m^4 \quad (2.32)$$



La energía libre F es mínima si $\frac{\partial F}{\partial m} = 0$, por lo tanto

$$\frac{\partial F}{\partial m} = kN(T - T_c)m + \frac{1}{3}kNTm^3 = 0.$$

cuyas soluciones son

$$m^* = \begin{cases} 0 & \text{para } T \geq T_c \\ \pm \sqrt{3 \frac{T_c - T}{T}} & \text{para } T < T_c \end{cases} \quad (2.33)$$

La solución para $T \geq T_c$ corresponde a que los espines tienen una dirección y sentido arbitrarios. Mientras que para $T < T_c$, los espines tienden a alinearse en la misma dirección y sentido.

DISCONTINUIDAD EN EL CALOR ESPECÍFICO

La entropía S del sistema en la vecindad del punto de transición es dada por la derivada con respecto a la temperatura de la expresión (A):

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = S_0 + Nk \ln 2 - \frac{1}{2}kNm^2 - \frac{1}{12}kNm^4 \quad (2.34)$$

donde $\partial F/\partial T = -S_0$. Cuando $m^* = 0$ la entropía del sistema es $S = S_0 + kN \ln 2$, mientras que si $m^* = \pm \sqrt{3(T_c - T)/T}$, la entropía es

$$S = S_0 + Nk \ln 2 - \frac{3}{2}kN \left(\frac{T_c - T}{T} \right) - \frac{3}{4}kN \left(\frac{T_c - T}{T} \right)^2 \quad (2.35)$$

Es fácil observar que durante la transición de fase, la entropía es continua. Por último, demostraremos que existe una discontinuidad en la capacidad calorífica cuando $T = T_c$, obteniendo la derivada con respecto a T de la entropía. Cuando $m^* = 0$ se tiene que

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = T \left(\frac{\partial S_0}{\partial T} \right) = C_{p0} \quad (2.36)$$

En cambio, cuando $m^* = \pm \sqrt{3(T_c - T)/T}$ la capacidad calorífica es

$$C_p = C_{p0} + \frac{3}{2} \frac{kNT_c}{T} - \frac{3}{2} \frac{kNT_c}{T^2} \quad (2.37)$$

Así se concluye que en el punto de transición la capacidad específica sufre un salto, de la manera similar al caso de las aleaciones, por lo que se demuestra que la transición ferromagnética también es una transición de fase de segundo orden.

El mismo desarrollo en serie de la energía libre de Helmholtz F puede realizarse para el caso de las aleaciones y obtenemos un resultado idéntico en términos del parámetro de orden η . En ambos casos la energía libre F es una función par del parámetro de orden, por lo que η y $-\eta$ (ó m y $-m$) describen estados termodinámicos

equivalentes. El desarrollo del potencial termodinámico en serie de potencias de un parámetro de orden es la idea principal de la Teoría de Landau.

2.5 Teoría de Landau

2.5.1 Teoría de Landau con campo externo nulo

La continuidad del cambio de estado de una transición de fase se expresa matemáticamente por el hecho de que cerca de un punto de transición, η puede tomar valores arbitrariamente pequeños. Por lo tanto, realizamos un desarrollo en serie del potencial termodinámico $F(P, T, \eta)$, conocida como *expansión de Landau*, en la vecindad del punto de transición[5]:

$$F(P, T, \eta) = F_0 + \alpha\eta + A\eta^2 + B\eta^3 + C\eta^4 + \dots, \quad (2.38)$$

donde α, A, B, C son funciones de P y T . Sin embargo, debemos considerar que la presión y la temperatura pueden tener valores arbitrarios, pero el valor de η debe ser determinado posteriormente a partir de las condiciones de equilibrio térmico, es decir, F debe ser un mínimo para P y T dado.

Como se observó para los casos de las aleaciones y del ferromagneto, entre los estados $\eta = 0$ (ó $m = 0$) y $\eta \neq 0$ (ó $m \neq 0$) hay una simetría distinta. En particular, para $\eta \neq 0$, el parámetro de orden toma dos valores iguales en magnitud pero de signo contrario (Fig. 2.11). Por otro lado, la entropía es una función continua de η para cualquier valor del parámetro, por lo que la energía libre F también lo es y debe ser una función par de este parámetro, lo que nos lleva a deducir que los coeficientes de los términos con potencias impares son iguales a cero:

$$\alpha(P, T) = B(P, T) = \dots = 0 \quad (2.39)$$

de tal manera que el desarrollo en serie del potencial termodinámico es:

$$F(P, T, \eta) = F_0(P, T) + A(P, T)\eta^2 + C(P, T)\eta^4 + \dots \quad (2.40)$$

En el equilibrio termodinámico, F es mínima si $\partial F/\partial \eta = 0$, considerando términos hasta cuarto orden, se obtiene que

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \eta [2A(P, T) + 4C(P, T)\eta^2] = 0, \quad (2.41)$$

cuyos puntos fijos son: $\eta^* = 0, \pm \sqrt{-\frac{A(P, T)}{2C(P, T)}}$.

La estabilidad de estos puntos es dada por la segunda derivada con respecto a η de la energía libre F :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 2A(P, T) + 12C(P, T)\eta^2$$

que evaluada en los punto fijos tenemos:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} = 2A(P, T); \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=\pm\sqrt{-\frac{A}{2C}}} = -4A(P, T)$$



De la cual se deduce que en $\eta^* = 0$, F tiene un mínimo si $A > 0$ (fase desordenada) siendo el único punto fijo cuando $C > 0$. Si $A < 0$ (fase ordenada), F tiene una máximo en $\eta^* = 0$ y dos mínimos en $\eta^* = \sqrt{-\frac{A}{2C}}$ cuando $C > 0$. Resumiendo esto tenemos:

$$\eta^* = \begin{cases} 0 & A(P,T) > 0 \\ \sqrt{-\frac{A(P,T)}{2C(P,T)}} & A(P,T) < 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

El cambio de fase sucede cuando $A(P,T) = 0$, por lo que $A(P,T_c) = 0$ define una temperatura de transición entre fases. Si consideramos una región para un valor dado de P cercano al punto de transición cuya temperatura es T_c tenemos que

$$A(T) = a(T - T_c), \quad (2.43)$$

donde $a = \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_{T=T_c}$ y $C(T) = C(T_c)$ son constantes. Por lo tanto, se llega a una expresión general de la energía libre F , para un valor dado de P , similar a la obtenida para los casos de las aleaciones y del ferromagneto:

$$F(T, \eta) = F_0(T) + a(T - T_c)\eta^2 + C(T_c)\eta^4 + \dots \quad (2.44)$$

Por lo tanto, las expresiones de los puntos fijos de F dadas por (2.42), cerca del punto de transición toman la siguiente forma:

$$\eta^* = \begin{cases} 0 & \text{para } T > T_c \\ \sqrt{\frac{a}{2C}(T_c - T)} & \text{para } T < T_c \end{cases} \quad (2.45)$$

donde la primera solución corresponde a la fase más desordenada y la segunda solución corresponde a la fase ordenada.

Para determinar la entropía cerca del punto de transición despreciamos términos de orden mayor en el parámetro de orden y derivamos con respecto a la temperatura la expresión de la energía libre F :

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = S_0 - a\eta^2 \quad (2.46)$$

donde $S_0 = -\partial F_0/\partial T$ y el término asociado a $\partial\eta/\partial T$ se anula debido a que $\partial F/\partial\eta = 0$ (ecuación 2.41). En el estado de desorden total $\eta = 0$ y la entropía del sistema es $S = S_0$. Mientras que en la fase ordenada η es dada por la segunda expresión (2.42) y la entropía es:

$$S = S_0 + \frac{a^2}{2C}(T - T_c). \quad (2.47)$$

En el punto de transición esta expresión se reduce a $S = S_0$, por lo que la entropía es continua en este punto.

En cuanto a la capacidad calorífica $C_p = T(\partial S/\partial T)_p$ está determinada de la siguiente manera:

En la fase desordenada, el calor específico es:

$$C_p = T \left(\frac{\partial S_0}{\partial T} \right)_p = C_{p0}. \quad (2.48)$$

En cambio, en la fase ordenada se tiene que:

$$C_p = C_{p0} + \frac{a^2 T}{2C} \quad (2.49)$$

Así se concluye que en el punto de transición la capacidad específica sufre una discontinuidad, debido a que $C > 0$, C_p aumenta cuando pasa de la fase desordenada a la fase ordenada.

2.5.2 Teoría de Landau con campo externo

Ahora, consideraremos que se aplica un campo magnético externo h , por lo que debemos agregar un término lineal en η a la expresión de la energía libre F :

$$F(P, T, \eta) = F_0(P, T) + a(T - T_c)\eta^2 + C(P, T_c)\eta^4 + \dots - hV\eta \quad (2.50)$$

donde V es un volumen. Cuando existe un campo magnético externo para el caso ferromagnético, en la expresión de la energía interna U aparece un término $-hM = -h(Nm)$. Para el caso de las aleaciones consideramos al volumen V en vez de N y η en vez de m .

Realizamos un análisis similar al caso con ausencia de campo magnético comenzando con minimizar la energía libre hasta términos de cuarto orden y obtener los puntos fijos, es decir, los puntos donde es mínima F :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 2a(T - T_c)\eta + 4C\eta^3 - hV = 0$$

de la cual se obtiene que

$$hV = 2a(T - T_c)\eta + 4C\eta^3. \quad (2.51)$$

Primero analicemos gráficamente esta expresión, en un plano cartesiano la recta hV y la curva $2a(T - T_c)\eta + 4C\eta^3$ se intersectan, el número de intersecciones dependerá de la variación de los parámetros h y T_c .

Para $T > T_c$, la recta hV intersecta a la curva $2a(T - T_c)\eta + 4C\eta^3$ solamente en un punto, por lo que hay una única solución $\eta^* \neq 0$ (Fig. 2.12).

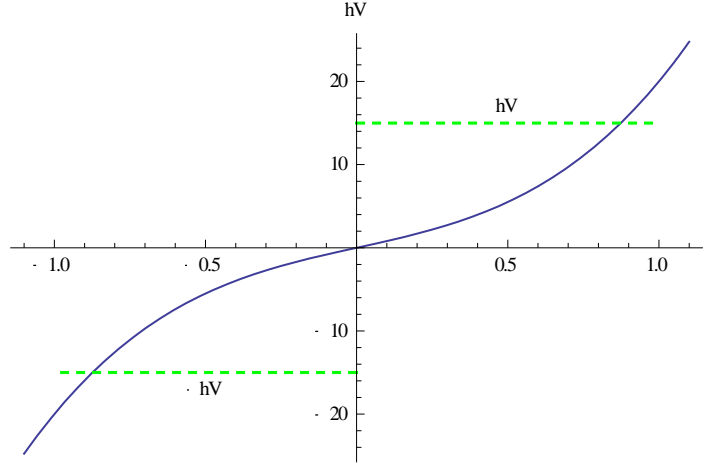


Figura 2. 12

En cambio, para $T < T_c$, la recta intersecta en tres puntos a la curva, dando tres soluciones $\eta^* \neq 0$, la cuales se encuentran dentro de la región $-h_c < h < +h_c$ (Fig. 2.13), fuera de esta región solamente existe una solución.

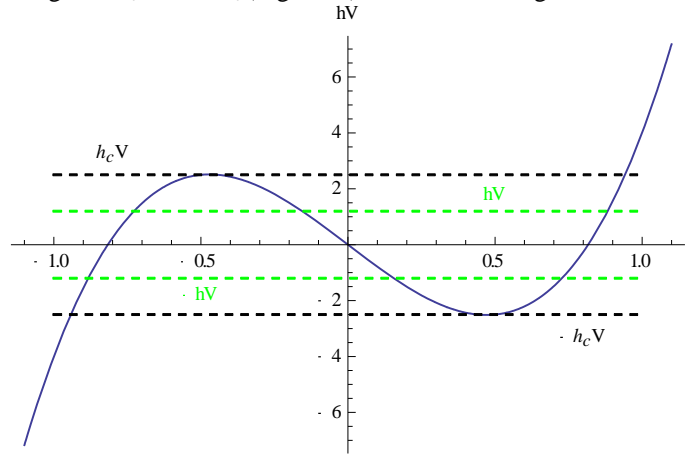


Figura 2. 13

Para obtener el campo característico h_c que limita a esta región, calculamos los puntos η' donde la curva $2a(T - T_c)\eta + 4C\eta^3$ es máxima y mínima, derivando la expresión (2.51) con respecto a η e igualarla a cero:

$$\frac{\partial(hV)}{\partial\eta} = 2a(T - T_c) + 12C\eta^2 = 0 \quad (2.52)$$

así obtenemos:

$$\eta' = \pm \sqrt{\frac{a(T_c - T)}{6C}} \quad (2.53)$$

Al sustituir este resultado en (2.51) se llega a una expresión para h_c :

$$h_c = \pm \frac{C}{V} \left[\frac{2a(T_c - T)}{3C} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (2.54)$$

donde se puede observar la dependencia de h_c con la temperatura. El comportamiento de la expresión (2.54) para un valor dado de T_c se puede observar en la Fig. 2.14, cuyas curvas son conocidas como **curvas de bifurcación** que tienden a un punto donde $T = T_c$ conocido como **punto cúspide** y dividen al plano en regiones que se etiquetan según el número de puntos fijos. La bifurcación, que es la creación o destrucción de puntos fijos, sucede a lo largo de la frontera entre regiones, por lo que cambia la estabilidad de los puntos de una región a otra.

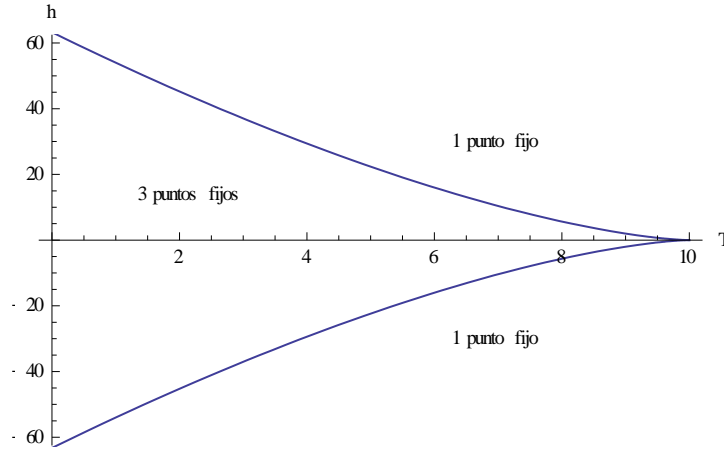


Figura 2.14 Curvas de bifurcación

El parámetro de orden $\eta = \eta^*(r/T_c)$ para un valor fijo del campo $h \neq 0$, es dado por la solución de la ecuación (2.51), cuyas raíces están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \eta_1^* &= u + v; \\ \eta_2^* &= -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u - v) \\ \eta_3^* &= -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u - v) \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde

$$u = \sqrt[3]{\frac{hV}{8C} + \sqrt{\left(\frac{hV}{8C}\right)^2 + \left(\frac{a(T-T_c)}{6C}\right)^3}}; \quad v = \sqrt[3]{\frac{hV}{8C} - \sqrt{\left(\frac{hV}{8C}\right)^2 + \left(\frac{a(T-T_c)}{6C}\right)^3}}$$

las cuales se obtienen analíticamente al obtener de manera general las raíces de una expresión cúbica a través de método de Cardano[9]. En las figuras 2.15 se muestra como al variar el parámetro h , la bifurcación de tipo trinche que aparece cuando $h = 0$, se rompe dando lugar a otra conocida como **bifurcación imperfecta**. El hecho de aplicar un campo externo rompe la simetría del sistema.

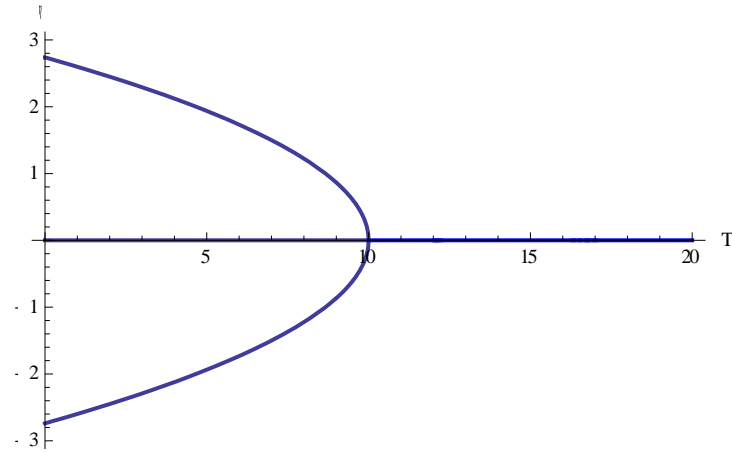
El discriminante de la expresión (2.51) es

$$D = -108 \left[\left(\frac{hV}{4C} \right)^2 + \left(\frac{a(T-T_c)}{6C} \right)^3 \right],$$

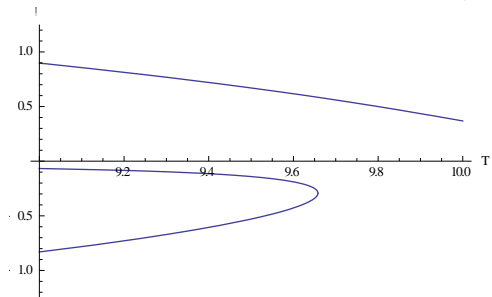
debido a que es de grado impar y de coeficientes reales, entonces existen tres posibilidades para sus raíces:



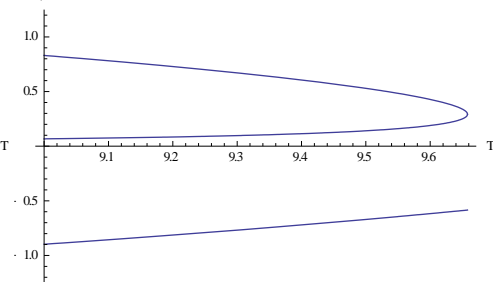
- Tiene tres raíces reales, si y solo si, $D > 0$.
- Tiene tres raíces reales y al menos dos iguales, si y solo si, $D = 0$.
- Tiene una raíz real y dos complejas conjugadas, si y solo si, $D < 0$.



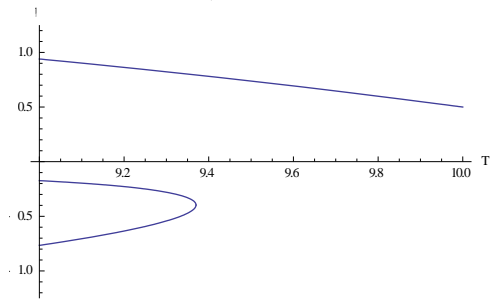
a) $h = 0$



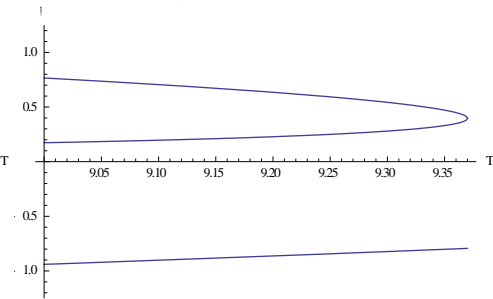
b) $0 < h < 1$



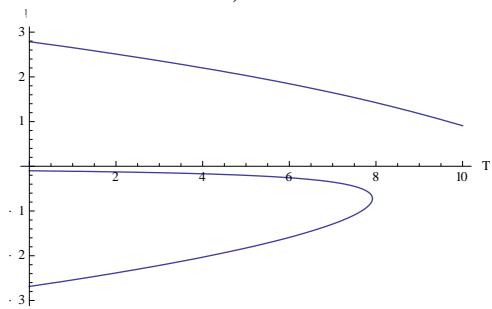
c) $-1 < h < 0$



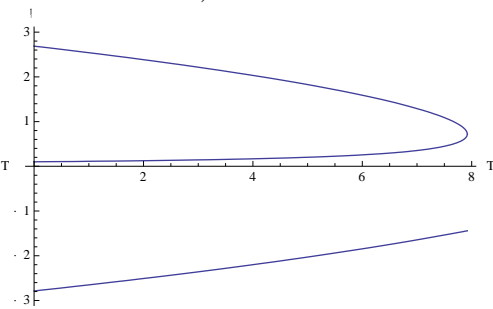
d) $h = 1$



e) $h = -1$



f) $h > 1$



g) $h < -1$

Figura 2.15 Curvas de puntos fijos η^*

Como ya se había mencionado, las dos primeras posibilidades suceden cuando $T < T_c$, mientras que la última posibilidad cuando $T > T_c$.

Las figuras 2.12 a 2.15 son solamente secciones transversales o proyecciones de una superficie en el espacio de parámetros (η, h, T) conocida como *catástrofe de cúspide*[10] que se muestra en la Fig. 2.16. Esta superficie se pliega sobre sí misma en cierta región, la proyección de este pliegue sobre el plano (T, h) son las curvas de bifurcación mostradas en Fig. 2.14. La Fig. 2.15 muestra secciones transversales de la sábana que se obtienen fijando el valor de h , mientras que las figuras 2.12 y 2.13 presentan secciones transversales obtenidas cuando el valor de T es fijo. Los estados que toma el sistema estarán sobre la esta sábana para distintos valores de los parámetros h, T y η .

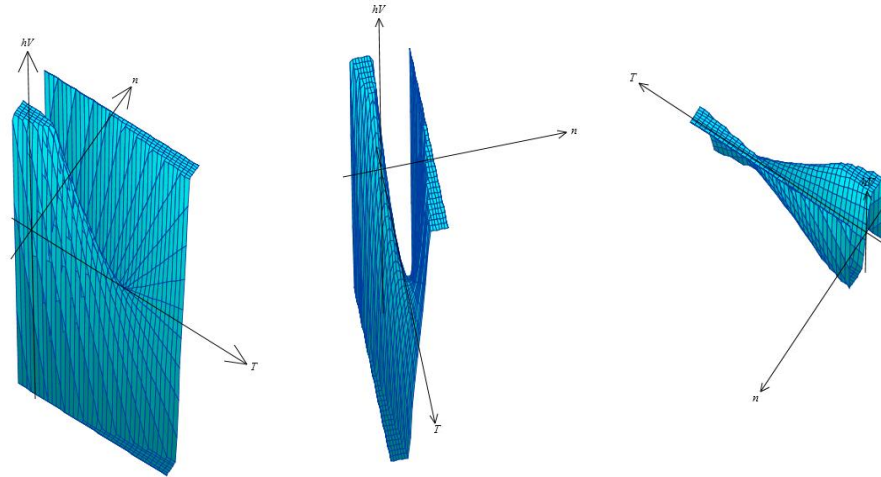


Figura 2. 16 Función $hV=2a(T-T_c)\eta+4C\eta^3$

En la parte inferior de la Fig. 2.17, se muestra el plano donde se proyectan las curvas de bifurcación, si nos movemos sobre la línea R dentro de este plano, el estado del sistema cambia suavemente a lo largo de la trayectoria R' sobre la superficie, esto sucede cuando se toma un valor fijo $T > T_c$ y se varia el parámetro h . Pero si ahora nos movemos por la línea Q de izquierda a derecha en el plano, sobre la sábana se recorre el camino Q' comenzando en la parte inferior del pliegue de tal manera que el estado del sistema cambie del punto p_1 al punto p_2 para después realizar un salto a la parte superior del mismo pliegue. Sin embargo, si recorremos de regreso el mismo camino Q' el estado ahora sufrirá un salto cuando llega a p_1 . Como se puede observar, sucede un fenómeno de *histéresis* en cual los saltos de la parte inferior a la superior y de la superior a la inferior no suceden en los mismos puntos, esto se lleva a cabo si se toma un valor fijo $T < T_c$ y se varia el parámetro h . Estos saltos pueden ser verdaderamente catastróficos para el equilibrio del sistema, de ahí el nombre de catástrofe para esta superficie y se ha desarrollado toda una teoría para este tipo de fenómeno[11], la cual no será objeto de revisión en este trabajo.

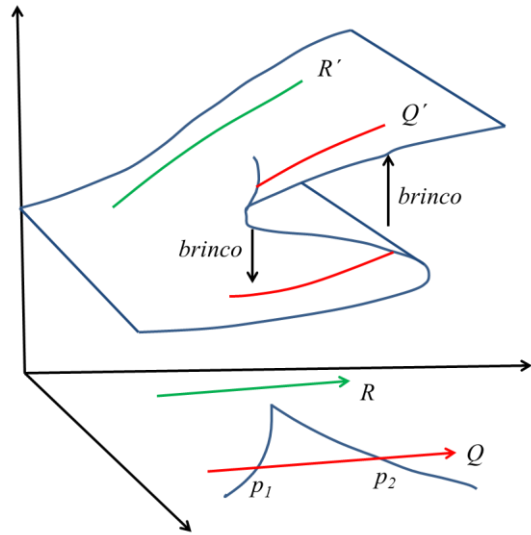


Figura 2. 17 Superficie de catástrofe cúspide y las curvas de bifurcación

Por último, para determinar la estabilidad de los puntos solución a (2.51), obtenemos la derivada de F con respecto a h e igualamos a cero:

$$\frac{\partial F}{\partial h} = [2a(T - T_c) + 12C\eta^2] \frac{\partial \eta}{\partial h} - V = 0$$

donde podemos observar que



$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 2a(T - T_c) + 12C\eta^2$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial h}\right) = V \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) = V \frac{1}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial h}\right)} = V \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)$$

Para $T > T_c$, F tiene un mínimo debido a que si observamos en la Fig. 2.12, $\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) > 0$, así

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) = V \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) > 0$$

Para $T < T_c$, tendremos dos situaciones según el valor de h :

- Si h no se encuentra en la región $[-h_c, +h_c]$, en la Fig. 2.18 $\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) > 0$, por lo que F tiene un mínimo si

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) = V \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) > 0$$

- Si $-h_c < h < +h_c$, en la Fig. 2.18, la región de la curva entre los puntos AC y entre los puntos DF, $\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) > 0$, por lo que F tiene dos mínimos si

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) = V \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) > 0$$

mientras que en la región CD, $\frac{\partial h}{\partial \eta} < 0$; entonces F tiene un máximo si

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) = V \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) < 0$$

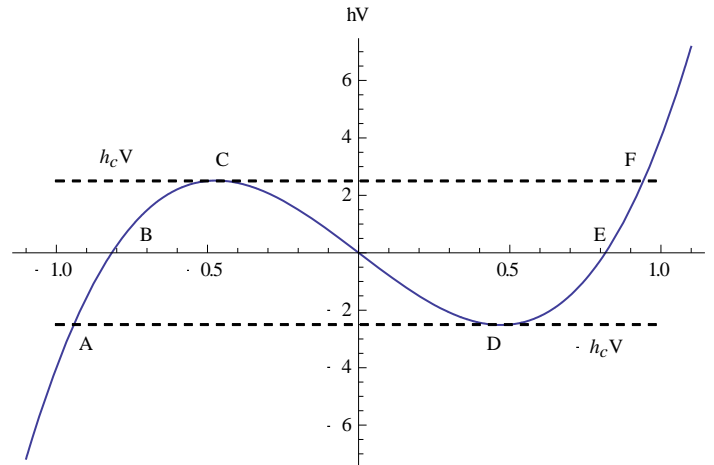


Figura 2. 18

En los puntos de las regiones AB y EF , $\frac{\partial h}{\partial \eta}$ tiende a ser más positiva que en las regiones BC y DE , así deducimos que de los dos mínimos que tiene la función F , uno de ellos es el mínimo global y se encuentra en la regiones AB ó EF . En la Fig. 2.19 podemos observar la representación gráfica de la energía libre F de Helmholtz con campo externo para distintas temperaturas.

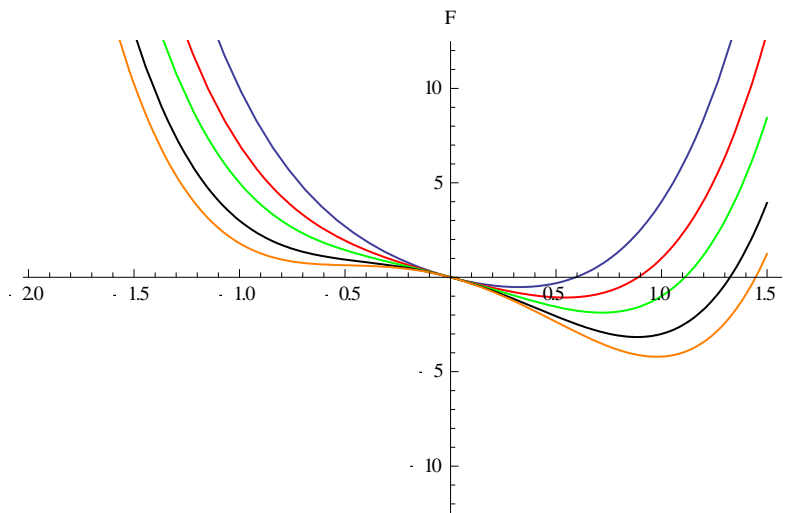


Figura 2. 19 Potencial F con campo externo aplicado a distintas temperaturas

Una vez realizado el análisis para los casos con y sin campo magnético, procedemos a realizar un comparativo entre ambos:

- Caso sin campo magnético externo:
 - Para $T > T_c$, hay un mínimo en $\eta = 0$,
 - Para $T < T_c$, hay dos mínimos en $\eta \neq 0$.
- Caso con campo magnético externo h :
 - Para $T > T_c$, hay un mínimo en $\eta \neq 0$,
 - Para $T < T_c$, hay dos mínimos en $\eta \neq 0$.



La interpretación que podemos dar a este comparativo es que la aplicación de un campo externo rompe la simetría del sistema y no hay más transición de fase, lo que para el caso de un superconductor significa que el fenómeno de superconductividad desaparece al aplicar un campo externo intenso.

2.6 Teoría de Ginzburg-Landau

2.6.1 Teoría de Ginzburg-Landau a campo nulo

En 1950, Ginzburg y Landau propusieron una teoría fenomenológica que describe las propiedades del estado superconductor cerca de la temperatura crítica T_c . Algunas de las ideas clave de la Teoría de Landau para las transiciones de fase de segundo orden se desarrollan en el contexto de la superconductividad. El punto de partida de esta teoría es realizar un desarrollo en serie del potencial termodinámico g en términos de un parámetro de orden que describa la transición superconductor, en vez del parámetro η de la Teoría de Bragg-Williams. Para esto, Ginzburg y Landau proponen el módulo de una función de onda como parámetro de orden

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\phi(\mathbf{r})} = \sqrt{n_s(\mathbf{r})} e^{i\phi(\mathbf{r})} \quad (2.56)$$

El módulo $|\psi(\mathbf{r})|^2$ de la función de onda se interpreta como el número de electrones superconductores n_s dentro de un volumen unitario en el punto \mathbf{r} . Cerca del punto de transición n_s es pequeña comparada con el número de electrones normales n_n . Entonces, podemos realizar el desarrollo en serie de la densidad de energía libre g en potencias pares de ψ

$$g = g_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \dots \quad (2.57)$$

donde g_n es la densidad de energía libre en el estado normal. Landau en su teoría para las transiciones de fase de segundo orden, deduce que el coeficiente α es una función de la temperatura cuyo comportamiento cerca de T_c es:

$$\alpha = a(T - T_c) \quad (2.58)$$

y el coeficiente $\beta > 0$. Los parámetros a y β dependen del material y se determinan experimentalmente, además son independientes de la temperatura.

Cerca del punto de transición, ψ es pequeña debido a $n_s < n_n$, considerando hasta potencias de cuarto orden, la diferencia de densidad de energía libre entre el estado normal y el estado superconductor es:

$$\Delta g(\mathbf{r}) = g_s - g_n = a(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \quad (2.59)$$

Integrando con respecto al volumen obtenemos la diferencia de energía libre de Gibbs:

$$\Delta G(\psi) = \int \Delta g dV = \int (g_s - g_n) dV = \int \left[a(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \right] dV \quad (2.60)$$

Para encontrar los puntos en los que ΔG es mínima, obtenemos la derivada variacional con respecto a ψ^* e igualamos a cero:

$$\frac{\delta \Delta G}{\delta \psi^*} = \left(a(T - T_c) + \beta |\psi|^2 \right) \psi = 0 \quad (2.61)$$

Esta expresión tiene las siguientes soluciones:

$$|\psi_0|^2 = \begin{cases} 0 & \text{para } T > T_c \\ -\frac{a(T-T_c)}{\beta} & \text{para } T < T_c \end{cases} \quad (2.62)$$

La primera solución corresponde al estado normal cuando $T > T_c$, mientras que la segunda corresponde al estado superconductor cuando $T < T_c$.

Si sustituimos (2.62) en (2.59), obtenemos la densidad de energía libre g en términos de la temperatura:

$$\Delta g = -\frac{a^2(T-T_c)^2}{2\beta} \quad (2.63)$$

De los resultados termodinámicos para la transición superconductor, sabemos que la diferencia de densidad de energía libre es proporcional al cuadrado del campo magnético crítico H_c , por lo tanto

$$\Delta g = -\frac{a^2(T-T_c)^2}{2\beta} = -\frac{H_c^2}{8\pi} \quad (2.64)$$

de la cual se observa que H_c tiene una dependencia con la temperatura T de la forma

$$H_c = \sqrt{\frac{4\pi a^2}{\beta}}(T-T_c) \quad (2.65)$$

Por último, la expresión (2.62) nos da la relación que hay entre la densidad de electrones superconductores n_s con la temperatura T :

$$n_{s0} = |\psi_0|^2 = \frac{aT_c}{\beta} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \quad (2.66)$$

Las expresiones (2.65) y (2.66) son consistentes con la teoría de London, donde n_{s0} está relacionada con la profundidad de penetración λ de la siguiente manera:

$$n_{s0} \propto \lambda^{-2} \propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right). \quad (2.67)$$

2.6.2 Teoría de Ginzburg-Landau con campo externo

Ahora, si aplicamos un campo externo H al superconductor, el cual penetra cierta longitud, debemos agregar a la densidad de la energía libre g de Gibbs un término asociado al campo magnético $\frac{1}{8\pi}H^2$ y otro asociado a la

energía cinética de los electrones superconductores $\frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2$, entonces:

$$g = g_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \dots + \frac{1}{8\pi}H^2 + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 \quad (2.68)$$



Por lo que la diferencia de la energía libre entre los estados superconductor y normal, considerando hasta términos de cuarto orden, es:

$$\Delta g(\mathbf{r}) = g_s - g_n = \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \dots + \frac{1}{8\pi} H^2 + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2$$

Si integramos con respecto al volumen se obtiene:

$$G(\psi) = \int \Delta g dV = \int (g_s - g_n) dV = \int \left[\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{8\pi} H^2 + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 \right] dV \quad (2.69)$$

Para deducir el comportamiento de la función de onda ψ y del potencial vectorial \mathbf{A} , recurrimos al hecho de que la energía libre debe ser mínima en el equilibrio termodinámico. Por lo tanto, realizamos la variación de la ecuación (2.69) con respecto a ψ y \mathbf{A} . Primero variamos con respecto a \mathbf{A} , tomando en cuenta que $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\frac{1}{4\pi} \int [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A})] dV + \int \left[-\frac{i\hbar q}{2mc} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) + \frac{q^2}{mc^2} |\psi|^2 \mathbf{A} \right] \cdot \delta \mathbf{A} dV = 0, \quad (2.70)$$

haciendo uso de la identidad vectorial $\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ con $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{b} = \delta \mathbf{A}$, el primer término toma la forma $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) = \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$, así la expresión (2.70) se escribe como:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \left[-\frac{i\hbar q}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A} \right] \quad (2.71)$$

la cual es la ecuación de Maxwell (ley de Ampere) $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$, donde la densidad de corriente \mathbf{J} está relacionada con la función de onda ψ , la carga del electrón e y su masa m :

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar q}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (2.72)$$

Ahora realizamos otra variación de (2.69) con respecto a la función de onda ψ^* :

$$\int \left[\alpha \psi \delta \psi^* + \beta |\psi|^2 \psi \delta \psi^* + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi \cdot \left(i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \delta \psi^* \right] dV = 0 \quad (2.73)$$

Para integrar el tercer término, recurrimos al teorema de Gauss $\int_V \nabla \cdot \mathbf{C} dV = \int_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S}$ para expresarlo como

$\frac{i\hbar}{2m} \int \delta \psi^* \mathbf{n} \cdot \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi dS + \frac{1}{2m} \int \delta \psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi dV$. Por lo tanto, la ecuación (2.73) toma la siguiente forma:

$$\int_V \left[\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \right] \delta \psi^* dV + \frac{i\hbar}{2m} \int_S \delta \psi^* \mathbf{n} \cdot \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi dS = 0 \quad (2.74)$$

La variación de $\delta\psi^*$ es arbitraria, si consideramos que $\delta\psi^* = 0$ en la superficie, obtenemos la siguiente ecuación para ψ :

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi = 0 \quad (2.75)$$

Por otro lado, si consideramos $\delta\psi^*$ arbitraria de tal manera que se anula la contribución volumétrica, se obtiene la siguiente condición a la frontera:

$$\mathbf{n} \cdot \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\psi|_s = 0 \quad (2.76)$$

donde $\psi|_s$ es la función de onda evaluada en la superficie.

Las ecuaciones (2.72), (2.75) y (2.76) son conocidas como las *ecuaciones de Ginzburg-Landau*.

RELACIÓN ENTRE LA LONGITUD DE COHERENCIA ξ Y LA LONGITUD DE PENETRACIÓN λ

Un resultado interesante es el caso unidimensional de la expresión (2.75) al considerar un campo externo despreciable, la expresión se reduce a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \quad (2.77)$$

Tomando en la condición a la frontera:

$$\psi(x=0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \psi_0 \quad (2.78)$$

se obtiene la solución

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}\xi} \quad (2.79)$$

donde

$$\xi^2(T) = -\frac{\hbar^2}{2m\alpha} = -\frac{\hbar^2}{2ma(T-T_c)} \quad (2.80)$$

y es conocida como la *longitud de coherencia de Ginzburg-Landau*.

Las condiciones de frontera consideradas para la solución de la expresión (2.77) representan la frontera entre el estado normal y el estado superconductor, los cuales pueden coexistir cuando hay un campo magnético en la región normal. En la solución (2.79) se observa que el parámetro ξ indica la extensión de la coherencia de la función de onda superconductor dentro de la región normal, de ahí el nombre del parámetro.

Para encontrar la relación entre la longitud de coherencia ξ y la longitud de penetración λ de London, sustituimos (2.62) en (2.80):



$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m\beta|\psi_0|^2} \quad (2.81)$$

Debido a que $n_{s0} = |\psi_0|^2$ y haciendo uso de la expresión (1.57), obtenemos:

$$\xi^2(T) = \frac{2\pi\hbar^2 e^2 \lambda^2(T)}{m^2 c^2 \beta}. \quad (2.82)$$

La expresión anterior nos da la razón adimensional de ambas longitudes características:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{mc}{q\hbar} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.83)$$

Este parámetro κ se utiliza para clasificar a los superconductores en dos tipos, así:

- Si $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (especialmente si $\kappa \ll 1$) entonces la energía superficial es positiva y el superconductor es de tipo I, los cuales no permiten en absoluto que penetre un campo magnético externo debido a la existencia de corrientes superficiales lo cual implica la ruptura brusca del estado superconductor si se supera la temperatura crítica, es decir, presentan el efecto Meissner; este tipo de superconductores son ampliamente explicados por la teoría BCS.
- Si $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (especialmente si $\kappa \gg 1$) entonces la energía del superconductor es entonces la energía superficial es negativa y el superconductor es de tipo II. Estos superconductores son *imperfectos*, en el sentido en que el campo magnético realmente penetra a través de pequeños canales denominados vórtices y no presentan una transición brusca sino gradual del estado normal al superconductor. Aleksey Alekseyevich Abrikósov, quien trabajó en el grupo de Landau, predijo la existencia de estos superconductores, pero él junto con Landau no tuvieron éxito en explicar por completo el comportamiento de los superconductores de este tipo hasta la llegada a Moscú en 1955 del artículo de Richard Feynman sobre las líneas de vórtice cuantizadas en el helio líquido, con el cual se predicen las líneas de flujo cuantizadas en este tipo de superconductores[12].

Referencias

- [1] Wio Beitelmajer, H. S. *Historia y Panorama de Investigación y Aplicaciones de la Física. Termodinámica y Física Estadística IV*. Instituto de Física de Cantabria, UC-CSIC, Santander. Presentación PDF. 2012.
http://www.ifca.unican.es/users/wio/Index_archivos/Talks/HistoriaFE-Clase-04.
- [2] Bragg W. L. and Williams E. J. *The effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys*. Proceedings of the Royal Society of London A, Vol. 145, pp. 699-730, 1934.
- [3] Bragg W. L. and Williams E. J. *The effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys. II*. Proceedings of the Royal Society of London A. Vol. 151, pp. 540-566, 1935.
- [4] Williams E. J. *The effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys. III*, Proceedings of the Royal Society of London A. Vol. 152, pp. 231-252, 1935.
- [5] Landau L. D. y Lifshitz E. M., *Física Teórica Vol. 9: Física estadística Parte 2*. Editorial Reverté, Madrid, 1986.
- [6] Ginzburg V. L. and Landau L. D. *K теории сверхпроводимости*. Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики Vol. 20 p. 1064, 1950.
- [7] García-Colín Scherer L. *Introducción a la Física Estadística*. El Colegio de México. México. 2011.



- [8] Strogatz S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [9] Couder Alonso, L. *Teoría de Ecuaciones Algebraicas*, Instituto Politécnico Nacional-Limusa Noriega Editores, México, 1998.
- [10] Del Río Correa J. L. y López García, J. *Bifurcación de Riemann-Hugoniot en un problema mecánico simple*. Memorias de Extensos de la XIII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas ESFM IPN, pp. 342-345, 2008.
- [11] Bulajich R., Martínez Enríquez R. *Teoría de catástrofes*. Revista Ciencias No. 20, Facultad de Ciencias UNAM, pp. 4-10, 1990.
- [12] Goodstein D. and Goodstein J. Richard Feynman and the History of Superconductivity. *Physics in Perspective* Vol. 2, pp. 30-47, 2000.



Capítulo 3

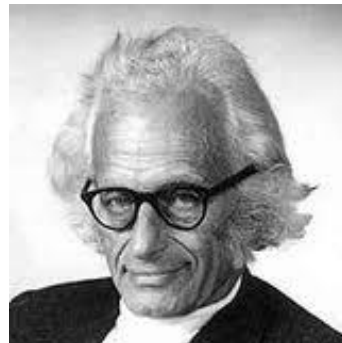
Teoría microscópica de la superconductividad

3.1 Introducción

Durante el periodo de la II Guerra Mundial se interrumpió el estudio sobre el comportamiento de los superconductores, y no fue hasta 1950 que Landau y Ginzburg presentaron su teoría de transición de fase superconductora cuando se retoma. El significado de la función de onda usada como parámetro de orden en esta teoría no fue explicado sino hasta 1957, cuando John Bardeen, Leon Cooper y John Robert Schrieffer[1] enunciaron su teoría microscópica de la superconductividad, ahora conocida como *Teoría BCS*. A Bardeen, Cooper y Schrieffer se les otorgó el premio Nobel de Física en 1972 por este trabajo, en el que retoman la idea de Herbert Fröhlich[2] sobre la existencia de electrones apareados debido a la interacción atractiva entre ellos inducida por un fonón². Estas parejas de electrones son ahora conocidas como pares de Cooper. Debido a la falta de comunicación entre científicos soviéticos y estadounidenses durante la Guerra Fría, Bardeen, Cooper y Schrieffer no tuvieron conocimiento de la teoría de Ginzburg y Landau, por lo que ambas teorías se desarrollaron de manera independiente[3].



Bardeen, Cooper y Schrieffer



H. Fröhlich

Figura 3.1

La idea de Fröhlich sobre electrones apareados surge debido a que él observa que los buenos conductores como el cobre y el oro al bajar la temperatura no tienden a convertirse en superconductores, a diferencia de los malos conductores, esto puede entenderse recordando que para este tipo de materiales la interacción entre los electrones y la red es mayor que en el caso de los conductores, por lo que, la superconductividad es causada por la interacción entre los electrones de conducción y las vibraciones de la red, así Fröhlich propone un hamiltoniano que ahora lleva su nombre *hamiltoniano de Fröhlich*, el cual incluye este tipo de interacciones y además toma en cuenta, de manera implícita, el efecto isotópico³.

² Un fonón es un modo cuantizado de vibración que se encuentra en las redes cristalinas. Las vibraciones de la red de un sólido se pueden explicar como un gas de fonones. De este modo el fonón no es una partícula como tal, sino una cuasipartícula.

³ El efecto isotópico consiste en que para un mismo elemento químico, la temperatura crítica varía de una manera que es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa del isótopo de ese elemento.

Continuando con la reseña histórica, es importante mencionar que durante la segunda mitad del siglo XX, se realizaron varios estudios sobre el fenómeno superconductor, dando origen a descubrimientos interesantes tales como el efecto Josephson en 1962, que describiremos a detalle en el siguiente capítulo, o los superconductores de alta temperatura crítica (o *alta T_c*) en 1986, por parte de J. G. Bednorz y K. A. Müller en los laboratorios IBM en Zurich, Suiza. Ellos anunciaron el descubrimiento de un nuevo material, el cual es un óxido metálico que contiene lantano, bario y cobre (($\text{La}_{1.9}\text{Ba}_{0.1}\text{CuO}_4$), que se comporta como un superconductor a una temperatura crítica de 30 K, muy elevada para la entonces conocida[4]. Desafortunadamente, este tipo de superconductores no será objeto de estudio durante este trabajo, debido a que no está contemplado dentro de nuestro objetivo.



Figura 3. 2 K.A. Müller y J.G. Bednorz

A continuación, presentamos primero un estudio del comportamiento clásico de una partícula en un campo electromagnético para obtener su función hamiltoniana, y posteriormente, llevaremos a cabo la descripción cuántica por medio de la ecuación de Schrödinger, obteniendo el operador hamiltoniano a través de uso del principio de correspondencia.

3.2 Descripción clásica de una partícula en un campo electromagnético.

3.2.1 Función lagrangiana

Como ya hemos mencionado, primero describiremos de manera clásica el comportamiento de una partícula en un campo electromagnético, esto debido a que los fenómenos de superconductividad están relacionados con campos electromagnéticos.

Consideremos una partícula de carga eléctrica q y masa m que se mueve a una velocidad \mathbf{v} en una región del espacio con campo eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} , la fuerza de Lorentz \mathbf{F} que actúa sobre dicha partícula es:

$$\mathbf{F} = q \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \right] \quad (3.1)$$

Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son funciones continuas del tiempo y la posición, ambos son derivables de un potencial escalar $\Phi(\mathbf{r},t)$ y potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ respectivamente, esto se demuestra por medio del uso de las dos ecuaciones de Maxwell siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

que implica

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.3)$$

y la ecuación

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.4)$$

que al sustituirla en la expresión (3.3) obtenemos:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.5)$$

lo que implica que

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad (3.6)$$

Entonces, podemos expresar \mathbf{E} en términos de Φ y \mathbf{A} de la siguiente manera:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Ya obtuvimos \mathbf{E} y \mathbf{B} en términos de los potenciales \mathbf{A} y Φ dados por las expresiones (3.4) y (3.7). Por lo tanto, la fuerza de Lorentz expresada en términos de estos potenciales es:

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) = q \left[-\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (3.8)$$

Ahora, expresaremos esta fuerza de manera tensorial. Dos vectores arbitrarios \mathbf{C} y \mathbf{D} se expresan por medio de tensores como:

$$\mathbf{C} = \sum_i C_i \hat{\mathbf{e}}_i = C_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad \mathbf{D} = \sum_i D_i \hat{\mathbf{e}}_i = D_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

donde el extremo derecho de estas expresiones son una abreviación de la sumatoria de las componentes del vector.

Si tomamos en cuenta las propiedades el tensor de Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{para dos índices repetidos,} \\ 1, & \text{si los índices están en orden cíclico,} \\ -1, & \text{si los índices están en orden no cíclico.} \end{cases}$$

podemos expresar de manera general el producto vectorial y el rotacional de ambos vectores como:

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = \varepsilon_{ijk} C_j D_k \hat{\mathbf{e}}_i, \\ \nabla \times \mathbf{C} = \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} C_m \hat{\mathbf{e}}_k, \quad \nabla \times \mathbf{D} = \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} D_m \hat{\mathbf{e}}_k$$

Así, el término $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ de la ecuación (3.8) se expresa como:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \varepsilon_{ijk} v_j \left(\varepsilon_{klm} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right) \hat{\mathbf{e}}_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} v_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (3.9)$$

Haciendo uso de la identidad $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ (donde δ_{ij} es la delta de Kronecker) tenemos:



$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \mathbf{e}_i \\
&= v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i - v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \frac{\partial (v_j A_j)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \\
&= \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

recordemos que $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}}$, por lo tanto

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.11}$$

Finalmente, la fuerza de Lorentz se expresa como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \\
&= q \left[-\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \left(\nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] \\
&= q \left[-\nabla \left(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Como Φ y \mathbf{A} son funciones de \mathbf{r} y t , reescribimos la fuerza \mathbf{F} como:

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla \left(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} \right) \right) \right] \tag{3.13}$$

donde

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} \right).$$

Ahora, calcularemos las proyecciones de la fuerza de Lorentz en cada uno de las direcciones de los vectores base unitarios de las coordenadas generalizadas q_i , para demostrar que la fuerza \mathbf{F} es derivable de un potencial. Estas proyecciones también son conocidas como las fuerzas generalizadas Q_i :

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

Así

$$\begin{aligned}
Q_i &= q \left[-\nabla \left(\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left(\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \right) \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \\
&= q \left[-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left(\frac{d}{dt} \left(\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \right) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \right] \\
&= q \left[-\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde se hizo uso de la identidad $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$. Las fuerzas generalizadas Q_i también pueden expresarse en términos del potencial dependiente de las velocidades generalizadas como:

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

A partir de esto, podemos definir a la energía potencial del sistema como $U = q \left(\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right)$. Así demostramos que la fuerza de Lorentz es derivable de un potencial generalizado. Entonces, es directo demostrar que la lagrangiana del sistema es:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - q \left[\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right]. \tag{3.15}$$

3.2.2 Momento

Una vez que conocemos la función lagrangiana, procedemos al cálculo del momento generalizado \mathbf{p} que es dado por la siguiente expresión

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \tag{3.16}$$

Para realizar el cálculo correspondiente, denotamos el vector velocidad como $\mathbf{v} = \dot{x}_i \hat{\mathbf{e}}_i$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{x}_i \dot{x}_i = \dot{x}_i^2$. Así

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - q \left[\Phi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right] \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 - q \left[\Phi - A_j \frac{\dot{x}_j}{c} \right] \right) \hat{\mathbf{e}}_i \\
&= \frac{1}{2} m \left(2 \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} \right) \hat{\mathbf{e}}_i - q \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} - \frac{A_j}{c} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\dot{x}_j}{c} \frac{\partial A_j}{\partial \dot{x}_i} \right) \hat{\mathbf{e}}_i
\end{aligned}$$

Recordando que Φ y \mathbf{A} son funciones de \mathbf{r} y t , así que no que dependen explícitamente de \dot{x}_i . Entonces



$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial A_j}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Por otro lado, tenemos que

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} \quad (3.17)$$

Si tomamos en cuenta las anteriores observaciones, obtenemos que

$$\mathbf{p} = \left(m \dot{x}_j \delta_{ji} + \frac{q}{c} A_j \delta_{ji} \right) \hat{\mathbf{e}}_i = \left(m \dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i \right) \hat{\mathbf{e}}_i \quad (3.18)$$

donde hemos usado la propiedad de la delta de Kronecker $x_i \delta_{ij} = x_j$. Por lo que, el momento de una partícula dentro de un campo magnético es

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad (3.19)$$

3.2.3 Función hamiltoniana

A continuación obtendremos la función hamiltoniana del sistema. Recordemos que esta función se define como

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L \quad (3.20)$$

Hemos calculado ya el momento \mathbf{p} , ahora expresaremos la función lagrangiana en términos de este. De la expresión (3.19) obtenemos lo siguiente

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \quad (3.21)$$

sustituyendo en la ecuación (3.15) se tiene

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - q \left[\Phi + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \cdot \mathbf{A} \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 - q \left[\Phi + \frac{1}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{A} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Introducimos las expresiones (3.19) y (3.22) en la expresión (3.20)

$$H = \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 + q \left[\Phi + \frac{1}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{A} \right]$$

realizando el álgebra correspondiente obtenemos la función hamiltoniana de una partícula en un campo electromagnético

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) + q\Phi \quad (3.23)$$

3.3 Descripción cuántica de una partícula en un campo electromagnético

3.3.1 Ecuación de Schrödinger

Una vez que conocemos la función hamiltoniana de una partícula (no relativista y sin espín) cargada en un campo electromagnético. Podemos obtener la ecuación de Schrödinger de dicha partícula, para esto hacemos uso del principio de correspondencia sobre la función hamiltoniana, recordemos que el operador momento se define como:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (3.24)$$

entonces nuestro operador hamiltoniano es dado de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) + q\Phi \quad (3.25)$$

Así la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para una partícula cargada es:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathbf{H}} \psi = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi + q\Phi \psi \quad (3.26)$$

3.3.2 Ecuación de conservación de la probabilidad

Ahora deseamos encontrar una ecuación de continuidad para el caso que estamos estudiando. Recordemos que la densidad de probabilidad $P(\mathbf{r}, t)$ está dada en términos de la función de onda de la partícula cargada ψ como

$$P(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (3.27)$$

Una partícula no puede desaparecer de una región y aparecer en otra sin que fluya algo entre ambas regiones. Supongamos que una región está rodeada por una superficie lo suficientemente alejada para que haya probabilidad cero de encontrar una partícula dentro. Recordemos que la probabilidad de encontrar una partícula en cualquier parte dentro de la superficie es la integral de volumen de P .

$$\frac{d}{dt} \iiint_V P dV = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial t} dV = - \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV \quad (3.28)$$

Esta expresión indica que el cambio de probabilidad con respecto al tiempo es proporcional al flujo de densidad de corriente de probabilidad \mathbf{J} en una región V limitada por una superficie S . Reescribiendo esta ecuación se obtiene:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV = 0. \quad (3.29)$$

De la cual obtenemos que



$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (3.30)$$

esta ecuación es conocida como la ecuación de continuidad para la probabilidad.

Nuestro objetivo principal es encontrar la forma de la corriente de probabilidad \mathbf{J} . Derivemos con respecto al tiempo la expresión (3.27)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \quad (3.31)$$

De la ecuación (3.26) es posible obtener $\partial\psi/\partial t$ así como su respectivo complejo conjugado

$$\begin{aligned} a) \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) + q\Phi \right\} \psi \\ b) \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) + q\Phi \right\} \psi^* \end{aligned} \quad (3.32)$$

sustituyendo estas expresiones en (3.31) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} \psi^* \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) + q\Phi \right\} \psi \\ &\quad + \frac{i}{\hbar} \psi \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) + q\Phi \right\} \psi^* \\ &= -\frac{i}{2m\hbar} \left\{ \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi - \psi \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Realizando el álgebra correspondiente, varios términos se cancelan y el resultado final es el siguiente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{1}{2m} \left\{ \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi - \psi \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \right\} \quad (3.34)$$

donde identificamos que la densidad de corriente de probabilidad es

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2m} \left\{ \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi - \psi \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \right\} \quad (3.35)$$

Si reescribimos esta expresión, obtendremos

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (3.36)$$

Si ψ es cero en la superficie la expresión (3.35) nos indica que \mathbf{J} es nula, por lo tanto, la probabilidad de encontrar en el interior una partícula no cambia con respecto al tiempo y podemos decir que se conserva localmente.

3.4 Significado de la función de onda

La función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ de una partícula cargada por sí sola no tiene significado físico, lo que si lo tiene es el cuadrado de la amplitud que da la probabilidad de encontrar un electrón en un lugar dado. Donde quiera que se encuentre el electrón estará con toda su carga.

Observamos que $\psi\psi^*$ tiene dimensiones de una densidad de probabilidad, si multiplicamos por q tendremos dimensiones de densidad de carga. Para nuestros propósitos introducimos este factor \sqrt{q} constante dentro de la función ψ y consideraremos a $\psi\psi^*$ como la densidad de carga. Así, la expresión (3.36) para la corriente de probabilidad \mathbf{J} pasa a ser directamente la densidad de corriente eléctrica \mathbf{J} dada por (2.72) que es una de las ecuaciones de Ginzburg-Landau.

La densidad de carga y la corriente eléctrica se pueden calcular directamente de la función de onda después de un proceso de medición, ya que esta toma un significado físico que se extiende a situaciones macroscópicas clásicas. Esto es posible debido a que construimos un ensemble cuántico cuyas partículas se encuentran en el mismo estado, por lo que solo basta definir una sola función de onda para todo el ensemble.

Sin embargo, la dificultad de construir un ensemble con electrones radica en que no se puede colocar a más de uno en el mismo estado cuántico, esto se debe a que los electrones son fermiones, es decir, partículas descritas por la estadística de Fermi-Dirac y cumplen con el Principio de exclusión de Pauli. Por esta razón, se creyó por mucho tiempo que no era factible construir un ensemble cuántico para electrones y que por lo tanto, la función de onda nunca tendría representación macroscópica para este tipo de partículas. En 1956, L. Cooper estudio el comportamiento de un gas de Fermi de electrones libres en presencia de una interacción atractiva a $T = 0$ y mostró que esta interacción produce un estado de paridad entre los electrones con energía menor a la energía de Fermi, lo cual implica un par ligado. Al año siguiente, él junto con Bardeen y Schrieffer publican un artículo[1] donde retoman la idea de Herbert Fröhlich sobre electrones apareados debido a la interacción atractiva entre ellos inducida por un fonón, lo que da origen a los *pares de Cooper* y la posibilidad de construir un ensemble cuántico con ellos.

3.6 Pares de Cooper

3.6.1 Hamiltoniano de Fröhlich

Resulta un problema complicado describir de forma completa la interacción electrón-electrón ($e - e$) dentro de un sólido, debido a que existen interacciones directas de tipo coulombiano, pero los electrones en un sólido también pueden interactuar indirectamente por medio de algunas excitaciones elementales; tal es el caso de la interacción entre electrones mediada por fonones, la cual está descrita por el hamiltoniano de Fröhlich:

$$H_F = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \mathbf{q}} M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (a_{-\mathbf{q}}^{\dagger} + a_{\mathbf{q}}) c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}'} \quad (3.37)$$

donde $c_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ y $c_{\mathbf{k}}$ son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, de un electrón con vector de onda \mathbf{k} ; mientras que $a_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ y $a_{\mathbf{q}}$ son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, de un fonón con vector de onda \mathbf{q} y $M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ son los elementos de matriz de la interacción electrón-fonón. El vector de onda del fonón, \mathbf{q} es igual a $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, lo cual simplemente expresa que el momento cristalino se conserva. Como se puede observar, los dos primeros términos de esta expresión representan el hamiltoniano H_0 , de un sistema de electrones y fonones que no interactúan entre sí y el tercer término corresponde a la interacción electrón-fonón $H_{e.f.}$

En los primeros dos términos del hamiltoniano los operadores de aniquilación $c_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{q}}$ quitan al sistema un electrón y un fonón respectivamente, si la partícula no existe, el operador no la puede quitar y el resultado es cero, mientras que los operadores de creación $c_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ y $a_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ restituyen al electrón y al fonón dejando al sistema

idéntico. El número de veces que se puede realizar la operación depende del número de partículas que haya en el sistema. Por otro lado, $\hbar\omega_q$ es la energía del fonón con momento \mathbf{q} y ϵ_k es la energía del electrón con vector de onda \mathbf{k} . Entonces, estos dos primeros términos del hamiltoniano contabilizan cuanta energía hay tanto en el sistema electrónico como en el fonónico.

En el caso del tercer término se describe la siguiente situación: un electrón en un estado \mathbf{k}' pasa a otro estado \mathbf{k} , al mismo tiempo que destruye ó crea un fonón con energía y momento igual a la diferencia entre los dos estados electrónicos. Para que se conserve la energía y el momento hay dos opciones:

- Crear un fonón con el operador $a_{-\mathbf{q}}^+$, entonces la situación es: se tenía \mathbf{k}' , generamos \mathbf{k} y $-\mathbf{q}$. Por lo tanto la suma de los dos últimos debe ser igual al primero: $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$.
- Destruir un fonón con el operador $a_{\mathbf{q}}$, así el proceso es: teníamos \mathbf{k}' , generamos \mathbf{k} y perdemos \mathbf{q} . Por lo tanto $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$.

Mientras que $M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ es un elemento de matriz que mide la probabilidad de cada uno de esos eventos ocurra.

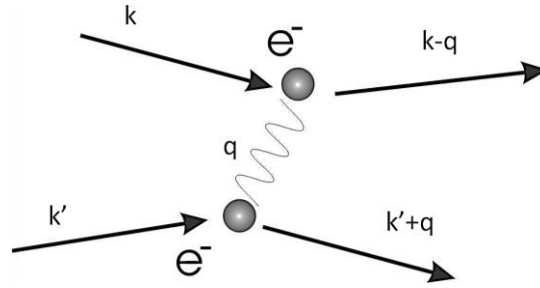


Figura 3.3 Interacción e-e a través del intercambio de un fonón.

El hamiltoniano de Fröhlich es posible obtenerlo a través de la aproximación adiabática, la cual consiste en suponer que la masa de los electrones m es muy pequeña comparada con la masa de los iones M , con $m/M \sim 10^{-3}$. Esto permite considerar a los electrones moviéndose en un campo de iones fijos que ocupan posiciones específicas en el espacio.

Si realizamos una transformación canónica del hamiltoniano de Fröhlich, se puede demostrar que:

$$H' = H_0 + \sum |M_q|^2 \frac{\hbar\omega_q}{(\epsilon_q - \epsilon_{k-q})^2 - (\hbar\omega_q)^2} c_{k'+q}^+ c_{k-q}^+ c_k c_{k'} + \dots \quad (3.38)$$

donde el resto de los términos en la ecuación contienen sólo productos de dos operadores de electrones. Para que obtengamos una interacción atractiva se debe cumplir que,

$$|\epsilon_k - \epsilon_{k-q}| < \hbar\omega_q \quad (3.39)$$

lo cual permite que pares de electrones formen estados ligados con menor energía que la correspondiente a dos electrones libres. Por lo tanto, los **pares de Cooper** son pares de electrones con vectores de onda y espines opuestos que forman un estado ligado, debido a la interacción de estos con la red cristalina por medio de fonones. La existencia de los pares de Cooper por debajo de una temperatura crítica es una de las causas microscópicas de la superconductividad y base de la teoría BCS.

3.6.2 Función de onda macroscópica

La ecuación de Schrödinger para un par de Cooper es similar a la ecuación (3.26), con la diferencia de que la carga q será dos veces la del electrón. Por otra parte, m es la masa efectiva del par en la red cristalina, que no necesariamente será dos veces la masa del electrón ($2m_e$). Por otro lado, la ecuación (3.26) puede ser ya no

válida para frecuencias muy altas, ya que la energía cinética que corresponde a funciones de onda que varían rápidamente puede ser tan grande como para romper los pares. A temperaturas distintas de cero siempre habrá algunos pares de electrones que se separen, la probabilidad de que se rompa un par es proporcional a $e^{-E_{par}/k_B T}$ donde la constante de Boltzmann $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K. No todos los electrones forman pares de Cooper, los cuales llamaremos *electrones normales*, y se mueven por el cristal en la forma acostumbrada. Por el momento despreciamos las complicaciones producidas por los electrones normales. Los pares de Cooper tienen un comportamiento bosónico, es decir, están descritos por la estadística de Bose-Einstein; cuando hay una gran cantidad de ellos en un estado dado hay una probabilidad grande de que otros pares se encuentren en el mismo estado. Por lo tanto, todos los pares estarán confinados a la energía más baja en exactamente el mismo estado (para más detalle ver [5]). Esta propiedad nos permite construir un ensamble de pares Cooper con la misma función de onda, conocida como la *función de onda macroscópica*.

Sea Ψ la función de onda de un par en el estado más bajo de energía, como $\Psi\Psi^*$ es proporcional a la densidad de carga ρ , podemos escribir a Ψ como la raíz cuadrada de la densidad de carga por algún factor de fase ϕ :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} \quad (3.40)$$

donde ρ y ϕ son funciones reales de \mathbf{r} y t . Desde la perspectiva de la teoría BCS (Bardeen, Cooper y Schrieffer) la función de onda Ψ puede ser vista como la función de onda de una partícula describiendo la posición del centro de masa de un par de Cooper. Como todos los pares de Cooper se encuentran en el mismo estado, basta una sola función de onda.

3.6.4 Densidad de corriente y momento

Nos interesa conocer el significado físico que tiene la fase ϕ de la función de onda. Para ello, sustituimos la expresión (3.40) en la (3.36) para expresar la densidad de corriente \mathbf{J} en términos de ρ y ϕ , considerando la masa y la carga de dos electrones ($m = 2m_e$ y $q = 2e$).

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= -\frac{i\hbar}{4m_e} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e}{m_e c} |\Psi|^2 \mathbf{A} \\ &= -\frac{i\hbar}{4m_e} \left((\sqrt{\rho} e^{i\phi})^* \nabla (\sqrt{\rho} e^{i\phi}) - (\sqrt{\rho} e^{i\phi}) \nabla (\sqrt{\rho} e^{i\phi})^* \right) - \frac{e}{m_e c} |\sqrt{\rho} e^{i\phi}|^2 \mathbf{A} \\ &= -\frac{i\hbar \sqrt{\rho}}{4m_e} \left\{ [\nabla \sqrt{\rho} + i\sqrt{\rho} \nabla \phi] - [\nabla \sqrt{\rho} - i\sqrt{\rho} \nabla \phi] \right\} - \frac{e\rho}{m_e c} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Realizando el álgebra correspondiente obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2m_e} \left(\nabla \phi - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \rho \quad (3.42)$$

La fase absoluta no es observable, sin embargo, el gradiente de la fase si lo es, lo que nos permite encontrar la fase hasta una constante, ya que

$$\phi = \int \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} + const \quad (3.43)$$

Para encontrar la cantidad física con la que está relacionada $\nabla \phi$ recordemos la relación de \mathbf{J} con la velocidad \mathbf{v} del flujo eléctrico, es decir



$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (3.44)$$

y comparemos las ecuaciones (3.42) y (3.43) para así obtener:

$$2m_e \mathbf{v} + 2e\mathbf{A} = \hbar \nabla \phi \quad (3.45)$$

Como se podrá observar, al comparar el lado derecho de esta expresión con (3.19) se concluye que el gradiente de la fase $\nabla \phi$ está relacionado con el momento \mathbf{p} del par de Cooper de la siguiente manera:

$$\mathbf{p} = \hbar \nabla \phi. \quad (3.46)$$

dándole un significado físico a la fase ϕ .

3.7 Características de la superconductividad

3.7.1 Efecto Meissner

A continuación demostraremos que la densidad de corriente de los pares de Cooper obedece la ecuación de London (1.41b). Primero, aplicamos el rotacional a la expresión (3.42):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{J} &= \frac{\hbar \rho}{2m_e} \left(\nabla \times \nabla \phi - \frac{2e}{\hbar c} \nabla \times \mathbf{A} \right) \\ &= -\frac{2n_s e^2}{m_e c} \mathbf{H} \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde se ha considerado ρ constante y se hizo uso de $\nabla \times \nabla \phi = 0$, $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\rho = 2en_{s0}$. Al tomar en cuenta las ecuaciones de Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$; $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$; así como también la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$ obtenemos la siguiente relación:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{8\pi n_s e^2}{m_e c^2} \mathbf{H} \quad (3.48)$$

cuya solución regular decrece rápidamente cuando vamos desde la superficie al interior de la muestra superconductora:

$$h \cong h_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{c}{2e} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi n_{s0}}}. \quad (3.49)$$

Así demostramos que la teoría cuántica de la superconductividad tiene relación con la teoría macroscópica.

3.7.2 Cuantización del flujo magnético

Otra característica importante de la superconductividad es la cuantización del flujo magnético, el cual es predicho por la ecuación (3.42). Consideremos un anillo en su fase superconductora, debido al efecto Meissner, \mathbf{B} y \mathbf{J} son cero en el interior, entonces se tiene de (3.42) que

$$\nabla\phi = \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \quad (3.50)$$

obteniendo la integral de línea de esta expresión a través de una trayectoria cerrada C en el interior del anillo:

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{2e}{\hbar c} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

llegamos a lo siguiente:

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2e}{\hbar c} \Phi \quad (3.51)$$

cuyo término del lado izquierdo se obtiene de $\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = \phi_2 - \phi_1$ y el término de lado derecho, del teorema de Stokes junto con la definición de flujo magnético $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$. Pedimos como requisito físico que la función de onda sea univaluada y que $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi n$, por lo que la expresión (3.51) se reescribe como:

$$\Phi = n \left(\frac{2\pi\hbar c}{2e} \right) = n\Phi_0 \quad (3.52)$$

donde definimos el cuanto de flujo magnético $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{2e} \cong 2.07 \times 10^{-7} \text{ gauss cm}^2$ también conocido como *fluxón*.

3.7.3 Banda prohibida superconductora

La teoría BCS muestra que dos electrones excitados por encima de la superficie de Fermi a $T = 0$, forman pares de Cooper en un estado ligado cuya energía está por debajo de ε_f . Parte de la energía del metal en el estado normal se transforma en energía interna de los pares, debido a esto el estado normal del gas de electrones es inestable con respecto a la formación de pares de electrones provocando la condensación del estado superconductor. A partir de estos conceptos la teoría BCS es capaz de construir la función de onda y evaluar las principales características del estado superconductor. El estado base es descrito por la función de onda

$$|\psi_G\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+) |\phi_0\rangle \quad (3.53)$$

donde $|\phi_0\rangle$ es un estado sin pares de Cooper y sin electrones libres, $|v_{\mathbf{k}}|^2$ es la probabilidad de que el par $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ este ocupado y $|u_{\mathbf{k}}|^2$ de que esté desocupado, entonces

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1 \quad (3.54)$$

La energía total del sistema se obtiene a partir del valor de expectación del hamiltoniano total:

$$E = \langle H_0 + H_1 \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \quad (3.55)$$



Al minimizar esta energía con respecto $v_{\mathbf{k}}$, teniendo en cuenta (3.54):

$$\frac{\partial E}{\partial v_{\mathbf{k}}} = 2\varepsilon_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} - (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} = 0 \quad (3.56a)$$

se obtiene[5]:

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{(\Delta_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}} \right] \quad (3.56b)$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ es la energía del electrón medida respecto al potencial químico,

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \quad (3.57)$$

es la brecha o banda de energía que separa el estado fundamental de las excitaciones del mismo y

$$E_{\mathbf{k}} = (\Delta_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2)^{1/2} \quad (3.58)$$

adquiere el significado de la energía de los electrones libres debido a la presencia del condensado superconductor. Si sustituimos (3.54) y (3.56) en (3.57) obtendremos lo siguiente:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \Delta_{\mathbf{k}'} \quad (3.59)$$

Esta es una ecuación no lineal para $\Delta_{\mathbf{k}}$ la cual puede ser expresada en su forma integral⁴ de la siguiente manera:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \int N(\varepsilon_F) V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}^2)^{1/2}} d\varepsilon_{\mathbf{k}'} \quad (3.60)$$

La solución trivial $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$ corresponde al estado normal, mientras que la solución $\Delta_{\mathbf{k}} \neq 0$ al estado superconductor. Esta solución no trivial puede calcularse de forma numérica, sin embargo, podemos obtener bastante información si realizamos las siguientes dos aproximaciones:

- los términos de interacción $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ en el hamiltoniano del sistema, responsables de la formación de pares son tales que

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} V_0 & \text{si } |\varepsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.61)$$

es decir, la interacción ocurre entre electrones en el entorno de la energía de Debye $\hbar\omega_D$.

⁴ Esto se puede realizar a través de la sustitución $\sum \rightarrow \int N(\varepsilon_F) d\varepsilon_{\mathbf{k}}$.

- Consideramos que $N(\varepsilon_F)$ es la densidad de estados de electrones con una orientación de espín en el nivel de Fermi

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Delta & \text{si } |\varepsilon_{\mathbf{k}}| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.62)$$

Haciendo uso de estas aproximaciones, la brecha ya no depende de \mathbf{k} sino únicamente de la energía ε . Así a $T = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{V_0}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \\ &\cong V_0 N(\varepsilon_F) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{(\Delta^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \\ &= V_0 N(\varepsilon_F) \sinh^{-1} \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Despejando Δ de esta expresión tenemos

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh \left(\frac{1}{N(\varepsilon_F)V_0} \right)} \quad (3.64)$$

Haciendo uso de otra aproximación conocida como *de acoplamiento débil*, es decir, $N(\varepsilon_F)V \ll 1$, entonces se llega a lo siguiente:

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{N(\varepsilon_F)V}} \quad (3.65)$$

Para el caso general $T \neq 0$ se puede demostrar (ver [5]) que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{V_0}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tanh \left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T} \right)}{E_{\mathbf{k}}} \\ &\cong V_0 N(\varepsilon_F) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{(\Delta^2(T) + \varepsilon^2)^{1/2}}{2k_B T} \right)}{(\Delta^2(T) + \varepsilon^2)^{1/2}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.66)$$

que determina la dependencia de la brecha de energía con la temperatura $\Delta = \Delta(T)$. La temperatura crítica del sistema se obtiene para $\Delta(T) = 0$, en ese caso $E_{\mathbf{k}} = |\varepsilon_{\mathbf{k}}|$ y

$$\frac{1}{N(\varepsilon_F)V_0} = \int_0^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}} \frac{\tanh x}{x} dx \quad (3.67)$$



Haciendo uso de la aproximación de acoplamiento débil: $\hbar\omega_D \gg k_B T_c$ se obtiene

$$k_B T_c = 1.13 \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{N(\epsilon_F) V_0}} \quad (3.68)$$

Esta expresión determina la temperatura crítica T_c de la teoría BCS. Si la comparamos con la expresión (3.65) se llega a la siguiente relación:

$$\Delta(0) = 1.764 k_B T_c \quad (3.69)$$

la cual muestra que la brecha de energía a $T = 0$ es comparable a $k_B T_c$. Por otro lado, cuando $T \rightarrow T_c$, es decir, cerca del punto crítico, $\Delta(T) \rightarrow 0$, por lo tanto la ecuación (3.66) puede expandirse en términos de $\Delta(T)$ y llegar a la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \cong 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} \quad T \cong T_c \quad (3.70)$$

La dependencia de la temperatura de esta expresión es consistente con los resultados que se han venido obteniendo en las distintas teorías superconductoras.

En el fenómeno de superconductividad, la existencia de una banda prohibida en el espectro de energías centrada en la energía de Fermi ϵ_F y cuyo tamaño es $E_g = 2\Delta(T)$ está relacionada con la energía necesaria para separar al par de Cooper. Si la energía aplicada es menor a E_g , no lograremos excitar al par y en consecuencia los electrones que lo conforman no se separaran. Si la energía es mayor a E_g , el par se rompe y la energía sobrante se convierte en energía cinética para los electrones.

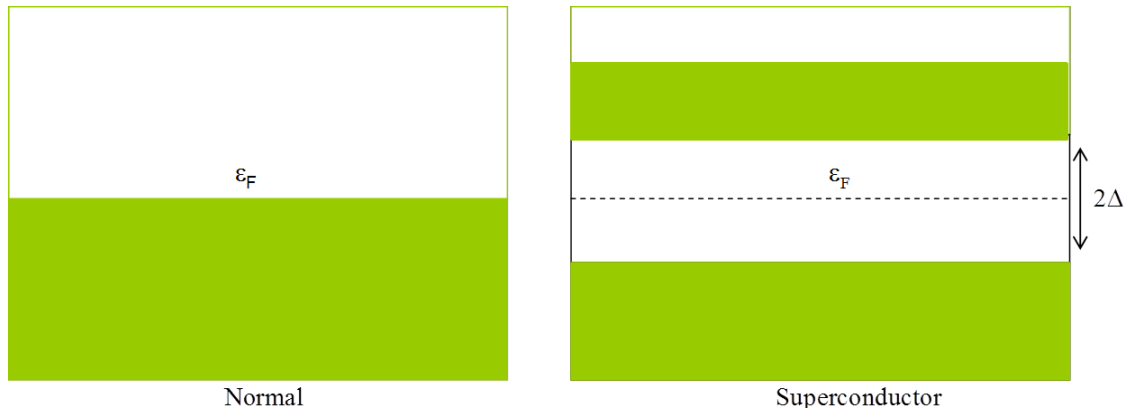


Figura 3. 4 Esquemas simple de los niveles de energía de un metal normal y un superconductor, respectivamente. En el segundo esquema se observa la banda superconductora.

Como se ha demostrado, el ancho de la brecha de energía depende de la temperatura. Su tamaño es comparable con $k_B T$ cuando $T = 0$ y va disminuyendo a medida que aumenta la temperatura hasta desaparecer cuando se ha alcanzado la temperatura crítica T_c . En la figura 3.4, se muestra un comparativo entre dos esquemas de niveles de energía de un metal en sus fases normal y superconductor, en ambos los estados ocupados se indican con regiones en color verde. En el caso de la fase superconductor, la banda prohibida se encuentra entre regiones de estados ocupados y centrada en ϵ_F . El hecho de que en esta banda esté prohibido tener estados ocupados tiene que ver con el proceso de “creación” y “aniquilación” de electrones y fonones tomado en cuenta en el hamiltoniano de Frölich.

Referencias

- [1] Bardeen J., Cooper, L. and Schrieffer J. R. *Theory of Superconductivity*. Physical Review 108, pp. 1175-1204, 1957.
- [2] Frölich H. *Interaction of electrons with lattice vibrations*. Proceedings of the Royal Society of London A, Mathematical and Physical Sciences Vol. 215, p. 291, 1952.
- [3] Goodstein D. and Goodstein J. *Richard Feynman and the History of Superconductivity*. Physics in Perspective Vol. 2, pp. 30-47, 2000.
- [4] Triscone J.-M. y Fisher O. *Las Superredes de Superconductores*. Mundo Científico No. 135, Vol. 13, pp. 438-445, 1993.
- [5] Navarro Chávez O. y Baquero Parra R. *Ideas Fundamentales de la Superconductividad*. UNAM. Morelia. 2007.



Capítulo 4

Efecto Josephson

4.1 Introducción

El físico británico Brian David Josephson predijo en 1962 un efecto muy peculiar, conocido como *efecto Josephson*[1][2], el cual consiste en el flujo de una corriente a través de un dispositivo (*unión o juntura Josephson*) aun cuando no se aplique una diferencia de potencial. Existen distintos tipos de uniones pero en este trabajo estudiaremos la de *tipo túnel*, que constan de dos superconductores separados por una conexión débil, la cual puede ser un aislante (superconductor-aislante-superconductor, SIS en inglés), un metal normal (superconductor-normal-superconductor, SNS), un semiconductor, un superconductor débil o cualquier otro material que se acople débilmente a los dos superconductores. El efecto Josephson que se presenta en este tipo de unión es debido al tunelamiento de los pares Cooper a través del material conector.

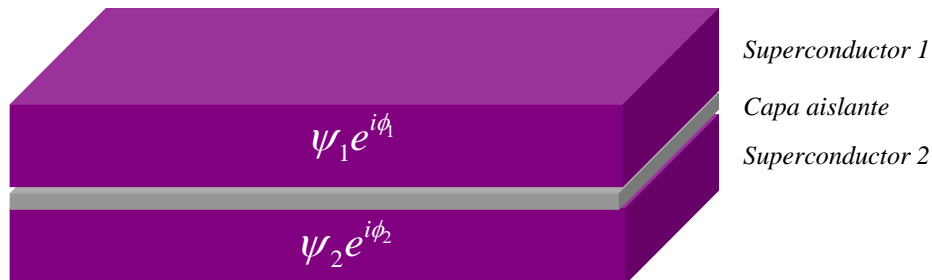


Figura 4. 1 Esquema simple de una unión Josephson

Cada una de las regiones superconductoras están caracterizadas por funciones de onda macroscópicas $\Psi_1 e^{i\phi_1}$ y $\Psi_2 e^{i\phi_2}$ respectivamente. Bajo condiciones adecuadas se observan efectos asociados a este fenómeno cuántico:

- *Efecto Josephson DC*: que consiste en una corriente continua que fluye a través de la unión en ausencia de un campo eléctrico o magnético.
- *Efecto Josephson AC*: que consiste en aplicar un voltaje fijo a través de la unión causando una corriente oscilante.

Esto dos tipos de efectos los describiremos posteriormente con más detalle. Por otro lado, las uniones Josephson son capaces de generar voltajes oscilatorios de alta frecuencia, por lo regular de 10^{10} – 10^{11} ciclos por segundo y detectan potenciales eléctricos de una cuatrillonésima parte de volt.

Josephson obtuvo el premio Nobel de Física en 1973 junto con Leo Esaki e Ivar Giaever gracias a la predicción de este efecto. Un año más tarde, las uniones fueron construidas por primera vez por P. W. Anderson y J. M. Rowell.

En este capítulo, se realiza una descripción teórica del efecto Josephson tomando como base la ponencia presentada por Richard Feynman en junio de 1964, durante el curso introductorio de física del Instituto Tecnológico de California (Caltech)[3], y posteriormente incluida en su libro *The Feynman Lectures on Physics*[4].



Figura 4. 2 B. D. Josephson

4.2 Tunelamiento

En física cuántica, el fenómeno de tunelamiento consiste en partículas que penetran una barrera de energía potencial, esto no es posible desde el punto de vista clásico, sin embargo, si la partícula es representada por medio de una función de onda cuántica, la función puede existir dentro de la barrera de potencial y posteriormente encontrarla del otro lado con probabilidad finita.

De manera general, el tunelamiento entre dos superconductores separados por una capa de material aislante, es posible si esta es lo suficientemente delgada. En esta situación, los dos superconductores tienden a alinear su energía de Fermi, ya que cada uno tiene su respectiva energía. El tunelamiento de partículas sucede cuando un par de Cooper se disocia en dos electrones independientes, permaneciendo uno de ellos en el primer superconductor como partícula excitada mientras que el otro electrón atraviesa la barrera hacia el segundo superconductor ocupando un estado excitado. Durante este proceso se conserva la energía (Fig. 4.3).

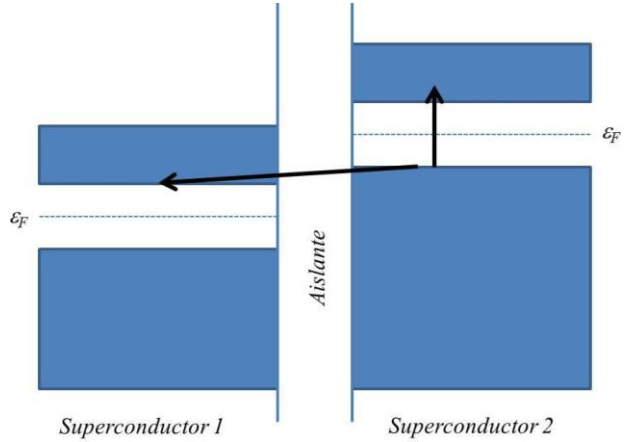


Figura 4. 3 Tunelamiento de un electrón (flecha negra) entre dos superconductores a través de una capa aislante.

En cambio, en el efecto Josephson se lleva a cabo un caso especial de tunelamiento, ya que se produce cuando los pares de Cooper atraviesan la capa que conecta a ambos superconductores sin disociarse, provocando una corriente de tunelamiento conocida como **corriente Josephson de pares** o **supercorriente**. Para que se lleve a cabo este efecto, el ancho de la capa debe ser del orden de magnitud de la longitud de coherencia ξ del superconductor (suponiendo que la unión está conformada por dos superconductores hechos del mismo material). La longitud ξ nos da una idea de la distancia promedio a la que se encuentran los dos electrones que conforman el par.

4.3 Las relaciones Josephson

A continuación, obtendremos las expresiones que describen al efecto Josephson. Para nuestro análisis, consideraremos un sistema simple y simétrico, es decir, que el material es el mismo en ambos lados de la unión y supondremos que no existe campo magnético. Sea Ψ_1 la amplitud de probabilidad para encontrar un par de Cooper de un lado y Ψ_2 la amplitud de probabilidad para encontrarlo en el otro lado. Dado que el acoplamiento entre los superconductores es muy débil, el vector de estado que describe al sistema acoplado se puede escribir en una forma simple

$$|\Psi\rangle = \Psi_1 |1\rangle + \Psi_2 |2\rangle \quad (4.1)$$

La densidad de carga ρ_i en el i -ésimo superconductor de la unión, descrito por el estado $|i\rangle$, está definida como

$$\rho_i = |\Psi_i|^2 = \langle i|\Psi\rangle\langle\Psi|i\rangle, \quad i=1,2. \quad (4.2)$$

La ecuación de Schrödinger para el vector estado $|\Psi\rangle$ es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle \quad (4.3)$$

con hamiltoniano

$$H = H_1 + H_2 + H_{\text{int}} \quad (4.4)$$

donde

$$H_i = U_i |i\rangle\langle i|, \quad i=1,2 \quad (4.5)$$

y el acoplamiento entre los superconductores está representado como

$$H_{\text{int}} = -K(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \quad (4.6)$$

Tomando en cuenta el producto interno de la ecuación (4.3) con los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ nos da las ecuaciones de movimiento de los dos superconductores débilmente acoplados.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= U_1 \Psi_1 + K \Psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= U_2 \Psi_2 + K \Psi_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

En el término de acoplamiento entre ambos lados, aparece la constante K que es la probabilidad de que pueda haber filtración de un lado a otro. Si K es nula, estas ecuaciones describirían simplemente el estado de energía más bajo (con energía U) de cada superconductor. Si conectamos los dos superconductores a las terminales de una batería para que haya una diferencia de potencial V en la unión, entonces, $U_1 - U_2 = 2eV$. Por conveniencia, definimos el cero de energía a la mitad de esta cantidad, entonces las ecuaciones (4.7) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= eV \Psi_1 + K \Psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= -eV \Psi_2 + K \Psi_1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Así obtenemos un sistema de ecuaciones acopladas para dos estados cuánticos. Tomando en cuenta la forma de la función de onda para cada estado

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1} \\ \Psi_2 &= \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde ϕ_1 , ϕ_2 son las fases y ρ_1 , ρ_2 son las densidades de carga de cada lado. Sustituimos las expresiones (4.9) en las ecuaciones (4.8) y obtenemos cuatro expresiones al igualar las partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= +\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \text{sen} \phi \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \text{sen} \phi \end{aligned} \quad (4.10)$$



$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= +\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \phi - \frac{eV}{\hbar} \\ \dot{\phi}_2 &= +\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \phi + \frac{eV}{\hbar}\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde denotamos por $\phi = \phi_2 - \phi_1$ a la diferencia de fase.

Las ecuaciones (4.10) describen el tipo de corriente que comenzaría a circular en la unión desde un lado al otro, la cual es simplemente $J_s = \dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$, es decir,

$$J_s = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \text{sen} \phi. \quad (4.12)$$

Esta densidad de corriente es debida a los pares de Cooper y la denotaremos como *densidad de supercorriente*. Una situación a considerar es que la supercorriente cargaría pronto un lado de la unión y descargaría al otro; para evitar esto y lograr un estado estacionario, ambos lados deben estar conectados a una fuente de potencial. La corriente debida a la fuente no han sido incluida en las ecuaciones, si la incluimos ρ_1 y ρ_2 no varían y la corriente a través de la unión continua siendo dada por la ecuación (4.12).

Como ρ_1 y ρ_2 permanecen constantes, decimos que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ y definimos la densidad de corriente crítica $J_c = 2K\rho_0/\hbar$. Así, la ecuación (4.12) la expresamos de la siguiente forma:

$$J_s = J_c \text{sen} \phi \quad (4.13)$$

que obtendrá valores comprendidos entre J_c y $-J_c$. Otra manera de expresar (4.13) es en términos de una corriente I_s y una corriente crítica I_c . Recordemos que en general la corriente está relacionada con la densidad de corriente J como

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

donde S es la superficie por la que atraviesa el flujo de densidad de corriente. Si consideramos que los vectores \mathbf{J} y $d\mathbf{S}$ tienen la misma dirección,

$$I_s = \iint_S J_s \, dS = \iint_S J_c \, dS \text{sen} \phi = I_c \text{sen} \phi,$$

entonces la expresión (4.13) puede describirse como

$$I_s = I_c \text{sen} \phi \quad (4.13a)$$

donde se ha denominado a la integral de superficie de J_c como la corriente crítica I_c . Cabe resaltar que I_c es un parámetro experimental importante del dispositivo que puede alterarse tanto por la temperatura como por un campo magnético aplicado.

Por otro lado, si definimos $\dot{\phi} = \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1$ y hacemos uso del segundo par de ecuaciones (4.11), llegamos a la siguiente expresión:

$$\dot{\phi} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (4.14)$$

donde $\frac{2e}{\hbar} = \frac{2\pi c}{\Phi_0}$ es conocida como la **constante de Josephson** y es inversamente proporcional al cuanto de flujo magnético Φ_0 ; la solución de (4.15) es

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t) dt \quad (4.15)$$

donde ϕ_0 es el valor de ϕ a $t = 0$.

Las ecuaciones (4.13a) y (4.14) son un resultado importante de la teoría para la unión entre superconductores y son conocidas como las **relaciones Josephson**.

4.4 Efectos Josephson DC y AC

A continuación, procederemos a analizar las consecuencias de las relaciones Josephson en el comportamiento de la unión cuando se aplica una diferencia de potencial en distintas formas dando origen a los efectos Josephson DC y AC.

4.4.1 Potencial nulo

El primer caso a analizar es aquel en cual no se aplica un voltaje V sobre la unión. Entonces, la diferencia de fase dada por (4.15) es

$$\phi(t) = \phi_0 \quad (4.16)$$

que al sustituir en (4.13), da como resultado que

$$I_s = I_c \text{sen} \phi_0, \quad (4.17)$$

es decir, aún en ausencia de una diferencia de potencial circula una supercorriente constante en la unión y obtendrá un valor comprendido entre I_c y $-I_c$, esta situación es conocida como **Efecto Josephson DC**.

4.4.2 Potencial constante

El segundo caso consiste en aplicar un potencial constante V_0 de corriente continua. La diferencia de fase dada por (4.15) es

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t \quad (4.18)$$

entonces, la expresión (4.13) se expresa como

$$\begin{aligned} I_s &= I_0 \text{sen} \left(\phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t \right) \\ &= I_0 \left\{ \text{sen} \phi_0 \cos \left(\frac{2e}{\hbar} V_0 t \right) + \cos \phi_0 \text{sen} \left(\frac{2e}{\hbar} V_0 t \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

cuya frecuencia de oscilación es $\omega_J = 2eV_0/\hbar$ y se le denomina como la **frecuencia Josephson**. Debido a que \hbar es una magnitud pequeña comparada con voltajes y tiempos transcurridos, el seno y el coseno oscilan muy



rápidamente y su promedio temporal⁵ durante un ciclo es cero, así la supercorriente promedio resultante es nula $\bar{I}_s = 0$. Sin embargo, esto no quiere decir que no circule corriente alguna en la unión, ya que a temperaturas distintas de cero habrá rompimiento de algunos pares de Cooper provocando una pequeña corriente debida a la conducción de *electrones normales*; conforme la temperatura vaya en aumento esta corriente ya no será despreciable y tendrá mayor presencia en la unión.

4.4.3 Potencial de muy alta frecuencia

Como tercer caso a estudiar es la aplicación un voltaje de muy alta frecuencia además del voltaje constante V_0 , es decir

$$V(t) = V_0 + v \cos \omega t \quad (4.20)$$

donde $v \ll V_0$. Así, la diferencia de fase ϕ obtenida por medio de la ecuación (4.15) se expresa como

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t + \frac{2ev}{\hbar \omega} \text{sen} \omega t \quad (4.21)$$

entonces la intensidad de supercorriente es

$$I_s = I_c \text{sen} \left(\phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t + \frac{2ev}{\hbar \omega} \text{sen} \omega t \right). \quad (4.22)$$

Para δx pequeño, la función seno de una suma de argumentos se puede expresar como $\text{sen}(x + \delta x) = \text{sen}x \cos \delta x + \text{sen} \delta x \cos x \approx \text{sen}x + \delta x \cos x$. Al aplicar esta aproximación a la expresión

(4.22) con $x = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t$ y $\delta x = \frac{2ev}{\hbar \omega} \text{sen}(\omega t)$ tenemos que

$$I_s \approx I_c \left[\text{sen} \left(\phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t \right) + \frac{2ev}{\hbar \omega} \text{sen}(\omega t) \cos \left(\phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t \right) \right] \quad (4.23)$$

El promedio temporal del primer término es cero, entonces lo depreciamos y hacemos uso de la identidad $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$, así

⁵ Sea una función $f = f(t)$, su promedio temporal se define como:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt$$

si $f(t)$ es periódica con periodo T , entonces $\tau = nT$, el promedio temporal esta dado como:

$$\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} n \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Así

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \langle f \rangle$$

Los paréntesis $\langle \rangle$ indican un promedio temporal de una función periódica.

$$\begin{aligned}
 I_s &\approx I_c \frac{2ev}{\hbar\omega} \text{sen}(\omega t) \cos\left(\phi_0 + \frac{2e}{\hbar}V_0t\right) \\
 &= I_c \frac{2ev}{\hbar\omega} \text{sen}(\omega t) \left[\cos\phi_0 \cos\left(\frac{2e}{\hbar}V_0t\right) - \text{sen}\phi_0 \text{sen}\left(\frac{2e}{\hbar}V_0t\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

A su vez, el promedio del término $I_c \frac{2ev}{\hbar\omega} \text{sen}(\omega t) \cos\phi_0 \cos\left(\frac{2e}{\hbar}V_0t\right)$ también es nulo pero el del término $-I_c \frac{2ev}{\hbar\omega} \text{sen}(\omega t) \text{sen}\phi_0 \text{sen}\left(\frac{2e}{\hbar}V_0t\right)$ no lo es, siempre y cuando

$$\omega = \frac{2e}{\hbar}V_0 = \omega_J \tag{4.25}$$

Esto quiere decir que para poder lograr que circule una supercorriente en la unión, es necesario que el voltaje V de la expresión (4.20) oscile a la misma frecuencia ω_J que la supercorriente, provocando un fenómeno de resonancia. También cabe mencionar que la expresión (4.25) nos dice que un fotón de energía $\hbar\omega = 2eV_0$ es emitido o absorbido cuando un par de Cooper atraviesa la barrera[5].

Los dos últimos casos estudiados dan origen al **Efecto Josephson AC**, debido a que se está aplicando un voltaje tal que circula una supercorriente oscilatoria en la unión.

4.5 La importancia del fenómeno de coherencia

Hemos visto a lo largo de este trabajo que a pesar de que la superconductividad fue descubierta en 1911, tuvo que pasar mucho tiempo para establecer el concepto moderno del estado superconductor de la materia. Los principales logros fueron el descubrimiento del efecto Meissner, la formulación de teorías fenomenológicas como la de los hermanos London y la de Ginzburg y Landau, así como también la deducción de la teoría microscópica por parte de Bardeen, Cooper y Schrieffer. Sin embargo, la predicción teórica y la observación experimental del **fenómeno de coherencia** (o "**cuántica macroscópica**") en los superconductores es factor determinante para la formulación final del concepto, debido a que una coherencia macroscópica de los pares de Cooper es la base de todas las propiedades inusuales observadas en los superconductores.

Para todo tipo de material, los portadores de carga se mueven de acuerdo a las leyes de la mecánica cuántica. Si consideramos una aproximación en la cual las partículas interactúan débilmente y los efectos de espín son despreciables, el movimiento puede ser descrito en términos de la ecuación ordinaria de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi \tag{4.26}$$

donde $\Psi = |\Psi(r,t)\rangle e^{i\hbar\phi(r,t)}$ es la función de onda de una partícula y H es un hamiltoniano. En el estado estacionario $|\Psi\rangle$ puede considerarse constante y H puede ser sustituido por la energía E de la partícula, esto nos lleva a una forma simple de (4.26):

$$\hbar \frac{d\phi}{dt} = -E \tag{4.27}$$

Así, el problema se reduce a la solución de una ecuación para la fase ϕ de la función de onda.

Recordemos que en un material superconductor, el par de Cooper es un estado ligado de dos electrones con momentos y espines opuestos. Su espín total es nulo, por lo que el par obedece la estadística de Bose-Einstein



y se condensan en el nivel más bajo de energía (básica) a bajas temperaturas. Como resultado, las razones $d\phi/dt$ son iguales para todas las partículas. Además, los pares de Cooper son de tamaño relativamente grande $\xi_0 \sim 10^{-4}$ cm, mucho más que la separación media entre los pares que es del orden de aproximadamente 10^{-7} [6]. En otras palabras, las funciones de onda de los pares de Cooper están fuertemente superpuestas.

Como resultado de estos dos factores, todos los pares en un punto dado dentro de un superconductor resultan estar **encadenados en fase** y pueden ser descritos por una función de onda Ψ única, conocida como parámetro de orden en la teoría de Ginzburg-Landau. En otras palabras, un **condensado coherente superconductor** más que ser un conjunto de pares de Cooper es el responsable de la corriente eléctrica en los superconductores. La fase ϕ de la función de onda no se anula durante la sumatoria sobre todas las partículas como en el caso de los materiales no superconductores, por lo que las variables macroscópicas, en particular la corriente, pueden depender de ϕ , que cambia de la manera cuántica planteada en (4.27) bajo la acción de un campo electromagnético que contribuye a E . Esta dependencia cuántica no sólo conduce a la resistividad nula del superconductor y al efecto Meissner, sino también a varios efectos coherentes muy específicos como la cuantización del flujo magnético y el efecto Josephson. Este último descrito por las relaciones Josephson:

$$\begin{aligned} a) I_s &= I_c \text{sen}\phi \\ b) \dot{\phi} &= \frac{2e}{\hbar} V \end{aligned} \quad (4.28)$$

Mostraremos que el efecto Josephson es una consecuencia directa de la coherencia del condensado cuántico superconductor, para ello, consideramos los puntos 1 y 2 dentro de cada uno de los dos superconductores que conforma la unión. La ecuación (4.27) para cada uno de los puntos es

$$\begin{aligned} \hbar \frac{d\phi_1}{dt} &= -E_1 \\ \hbar \frac{d\phi_2}{dt} &= -E_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

al restarlas se obtiene:

$$\hbar \frac{d\phi}{dt} = -(E_2 - E_1) \quad (4.30)$$

donde $\phi = \phi_2 - \phi_1$. El lado derecho de (4.30) es la diferencia de energía de los pares de Cooper colocados en los puntos 1 y 2, que solamente puede existir si hay una diferencia de potencial V entre estos puntos:

$$E_2 - E_1 = 2eV \quad (4.31)$$

si sustituimos (4.30) y (4.31), llegamos a la relación Josephson (4.28b).

Para obtener la relación Josephson (4.28a) por medio del argumento de la coherencia de superconductor condensado, supondremos que la corriente que circula a través de una unión Josephson depende de la densidad de pares de Cooper $|\Psi|^2$ en los electrodos (los superconductores que conforman la unión Josephson) y es lo suficientemente pequeña tal que $|\Psi|$ no cambia de manera considerable, sin embargo, las fases ϕ_1 y ϕ_2 pueden cambiar sin influir en el estado físico de los superconductores. Entonces, la corriente de pares de Cooper o supercorriente está relacionada únicamente con la diferencia de fase ϕ , de modo tal que $I_s = I_s(\phi)$. Esta función debe ser periódica en 2π debido a que si alguna de las fases ϕ_i ($i=1,2$) realiza un cambio durante este intervalo se obtiene exactamente la misma Ψ , es decir, el mismo estado físico de los electrodos, por lo que

$$I_s(\phi) = I_s(\phi + 2\pi)$$

Finalmente, en ausencia de supercorriente ambos electrodos se comportan como un solo superconductor no perturbado debido a que sus fases ϕ_1 y ϕ_2 son iguales, por lo tanto:

$$I_s(0) = I_s(2\pi n) = 0$$

donde se puede demostrar fácilmente que $I_s(\pi+2\pi n)$ también se anula. Estos argumentos muestran que es posible escribir I_s de la siguiente forma:

$$I_s = I_c \text{sen}\phi + \sum_{m=2}^{\infty} I_m \text{sen}(m\phi) \quad (4.32)$$

para el caso general. La teoría formal del efecto Josephson muestra que en la mayoría de los casos, todos los términos de la sumatoria en (4.32) se pueden despreciar, obteniéndose (4.28a).

4.6 Propiedades de la supercorriente

Las relaciones Josephson (4.28) son muy inusuales desde el punto de vista electrodinámico, debido a que la supercorriente presenta propiedades distintas a las de una corriente ordinaria, por esta razón realizaremos un análisis alternativo de estas relaciones para dejar más claro las propiedades básicas de la supercorriente.

4.6.1 El estado estacionario

Como hemos visto, aún en ausencia de un voltaje V habrá una supercorriente fija en la unión con una diferencia de fase constante

$$\phi = \phi_n = \arcsen\left(\frac{I_s}{I_c}\right) + 2\pi n$$

donde $-I_c \leq I_s \leq I_c$. Por lo tanto, si la supercorriente no es muy intensa no habrá una caída de voltaje a través de la unión. Esta situación es conocida como *estado estacionario* o *superconductor*.

4.6.2 Almacenamiento de energía

Debido a que en el estado estacionario el voltaje es nulo, la energía no se disipa y parte de ella se almacena dentro de la unión. Para conocer cuánta energía se almacena consideramos un proceso en el cual un sistema externo provoca un cambio en la diferencia de fase de ϕ_1 a ϕ_2 , realizando así un trabajo W sobre la supercorriente:

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} I_s V dt = \frac{\hbar I_c}{2e} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \text{sen}\phi d\phi \\ &= \frac{\hbar I_c}{2e} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) \\ &= E_p(\phi_2) - E_p(\phi_1) \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde se hizo uso de las relaciones Josephson (4.28). En la expresión (4.33) se puede observar que este trabajo solo depende de los valores inicial y final de la diferencia de fase y además sugiere que la energía potencial de la supercorriente es dada por



$$E_p(\phi) = \frac{\hbar I_c}{2e} \int_0^\phi \sin\phi d\phi = -\frac{\hbar I_c}{2e} (\cos\phi - 1) = E_c (1 - \cos\phi) \quad (4.34)$$

donde

$$E_c = \frac{\hbar I_c}{2e}. \quad (4.35)$$

4.6.3 Inductancia no lineal Josephson

La conservación y almacenamiento de energía en la unión apuntan a que se puede considerar la existencia de una **reactancia no lineal**. Para explicar el carácter de esta reactancia, se considera una pequeña variación de un proceso arbitrario $\phi(t)$ tal que $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, al sustituir esto en las relaciones Josephson (4.28) se encuentra:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\phi} &= \frac{2e}{\hbar} \delta V; \\ \delta I_s &= I_c \cos\phi \delta\phi \end{aligned}$$

combinando estas ecuaciones se llega a la siguiente relación:

$$\frac{d\delta I_s}{dt} = \delta\dot{I}_s = \frac{2eI_c}{\hbar} \cos\phi \delta V = \frac{1}{L_s} \delta V \quad (4.36)$$

de donde la relación entre las variaciones de voltaje y supercorriente está dada por

$$\delta I_s = \frac{1}{L_s} \int \delta V dt \quad (4.36b)$$

mostrando que la unión se comporta como una inductancia no lineal, donde

$$\frac{1}{L_s} = \frac{1}{L_c} \cos\phi, \quad \text{con } L_c = \frac{\hbar}{2eI_c} \quad (4.37)$$

Con esta expresión se muestra que para una señal débil la supercorriente es equivalente a una inductancia L_s que depende de los procesos básicos en la unión y que denominamos como **inductancia no lineal Josephson**. Una propiedad inusual de esta inductancia es que puede tomar valores negativos en los intervalos $\pi/2 + 2\pi n < \phi < 3\pi/2 + 2\pi n$.

4.6.4 Oscilaciones Josephson

El hecho de que la inductancia Josephson pueda tomar valores negativos la hace una característica muy especial frente a una inductancia normal. Una manera de mostrar la diferencia entre ambas inductancias es considerar un voltaje constante V_0 a través de la unión; de la expresión (4.28b) se encuentra que ϕ varía linealmente con el tiempo:

$$\phi = \frac{2e}{\hbar} V_0 t + \text{const} = \omega_J t + \text{const} \quad (4.38)$$

y (4.28a) muestra que la supercorriente oscila con una frecuencia ω_J que es proporcional a V_0 (ecuación (4.25)). En cambio, en una inductancia normal la corriente solamente puede incrementarse gradualmente. El

fenómeno de *oscilaciones Josephson* fue predicho en el artículo original de 1962[1][2] y se encuentran presentes en la mayoría de los procesos en la unión, por lo cual deben tomarse en cuenta para cualquier consideración dinámica. Cabe destacar que la razón entre frecuencia Josephson y voltaje es extremadamente alta, de acuerdo con la expresión (4.25):

$$\frac{\omega_J}{V_0} = \frac{2e}{\hbar} = \frac{1}{\Phi_0} \approx 483 \text{ MHz}/\mu\text{V} \quad (4.39)$$

donde la frecuencia ω_J es del orden de 10^9 a 10^{13} Hz a voltajes típicos de 10^{-6} a 10^{-2} V.

4.7 Otras componentes de la corriente total

En general, la corriente total que circula a través de la unión Josephson, no solamente está compuesta de la supercorriente I_s , sino también están presentes una corriente de desplazamiento I_d y una corriente ordinaria I_n debida a electrones libres, así como también de una corriente I_f debida a fluctuaciones. A continuación, daremos una descripción breve de cada una de estas contribuciones.

4.7.1 Corriente Normal I_n

Cuando la temperatura $T \neq 0$, siempre habrá movimiento térmico de cargas cuya energía es del orden de $k_B T_c$, donde k_B es la constante de Boltzmann. Este movimiento térmico provoca el rompimiento de algunos pares de Cooper aumentando la presencia de electrones libres en el sistema. Cuando la unión se encuentra en el estado estacionario, el voltaje a través de esta es nulo y los electrones libres no contribuyen a la corriente total. Sin embargo, cuando la diferencia de fase cambia con respecto al tiempo y el voltaje no es nulo, entonces aparece una corriente de electrones libres o corriente normal I_n , por lo que la unión se encuentra en un *estado resistivo*. Hay dos propiedades generales a considerar de esta corriente normal:

- 1) Cuando la temperatura T es menor pero cercana a la temperatura crítica T_c de un superconductor, la energía de acoplamiento de los pares Cooper $E_g = 2\Delta(T)$ es mucho menor a $k_B T$, dando como resultado la disminución de los pares y aumentando la concentración de electrones normales a un valor cercano al del estado normal cuando $T > T_c$. Como se ha discutido al final del capítulo 3.
- 2) Si el voltaje a través de la unión es mucho mayor que el voltaje asociado a la energía de la brecha

$$V_g = \frac{|\Delta_1(T) + \Delta_2(T)|}{e}, \quad (4.40)$$

entonces los pares de Cooper que se encuentran en uno de los electrodos de la unión se rompen, y uno de los electrones pertenecientes a cada uno de los pares rotos pasan al otro lado, produciéndose así una corriente de tunelamiento.

En ambos casos, si T aumenta acercándose a T_c la concentración de electrones libres continuará en aumento y el comportamiento de la unión tenderá a uno de tipo óhmico, es decir, por lo que la relación entre la corriente total y el voltaje suministrado es cercana a la ley de Ohm:

$$I_n = \frac{V}{R}. \quad (4.41)$$

Esto permite definir un voltaje característico de la unión como el producto

$$V_c = R I_c. \quad (4.42)$$



Usando la teoría microscópica del efecto Josephson, se encuentra que el máximo valor del voltaje característico es del orden de $\frac{3k_B T_c}{e}$ que es cercano a 3 mV para superconductores típicos que se utilizan en las uniones

Josephson como el plomo (Pb) o el niobio (Nb). También podemos definir con este voltaje V_c , una **frecuencia característica** f_c a partir de la expresión (4.25):

$$\omega_c = \frac{2e}{\hbar} V_c = \frac{2\pi}{\Phi_0} V_c = 2\pi f_c \quad (4.43)$$

donde

$$f_c = \frac{V_c}{\Phi_0} \quad (4.44)$$

cuyo valor se encuentra ligeramente por encima de 10^{12} Hz para superconductores típicos. Si reescribimos (4.43) usando (4.37), demostramos que ω_c es igual al inverso del tiempo de relajación de un circuito eléctrico conformado por dos elementos con resistencia R e inductancia L_c respectivamente:

$$\omega_c = \frac{2eRI_c}{\hbar} = \frac{R}{L_c} \Rightarrow T_{relax} = \omega_c^{-1} = \frac{L_c}{R} \quad (4.45)$$

4.7.2 Corriente de desplazamiento I_d

La corriente de desplazamiento puede ser de gran importancia en situaciones donde no solamente V sea nula sino también \dot{V} . Aunque esta corriente no fluya directamente a través de la unión, debe tomarse en cuenta junto con las corrientes I_n y I_s . Además la unión Josephson, en cierta medida, forma un condensador de placas paralelas superconductoras separadas por un material aislante o normal el cual desempeña el rol de dieléctrico, por lo que tiene sentido hablar de una corriente de desplazamiento I_d como una aportación a la corriente total, y que se representa como

$$I_d = C\dot{V}. \quad (4.46)$$

La capacitancia C de este dispositivo es la misma tanto en la fase normal como en la fase superconductoras y es dada por la siguiente expresión, en coordenadas gaussianas:

$$C = \epsilon_r \frac{A}{4\pi d} \quad (4.47)$$

donde ϵ_r es la constante dieléctrica relativa de la capa que separa a los dos superconductores, A el área de las placas superconductoras y d la separación entre ellas. Recordemos que d debe ser del orden de magnitud de la longitud de coherencia ξ de los superconductores (suponiendo que ambos son del mismo material), para que se lleve a cabo el tunelamiento de los pares Cooper a través del “dieléctrico”.

En la práctica, la magnitud relativa de la corriente de desplazamiento es más importante que el valor de la capacitancia. Esto se hace evidente, si realizaremos una estimación de las amplitudes de la corriente normal, la corriente de desplazamiento y la supercorriente en un proceso con frecuencia ω para compararlas entre sí. De (4.36b) se tiene que cuando $\delta V = V_0 \cos \omega t$, la supercorriente está dada por

$$\delta I_s = \frac{V_0}{L_c \omega} (-\text{sen} \omega t) = \frac{1}{L_c \omega} V_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.48)$$

de manera que $I_s \leq \frac{V_0}{\omega L_c}$.

Por otra parte, para la corriente normal tenemos que por la ecuación (4.41)

$$I_n = \frac{1}{R} V_0 \cos \omega t \quad (4.49)$$

por lo que $I_n \leq \frac{V_0}{R}$

y la expresión (4.46) dentro de esta estimación toman la siguiente forma

$$I_d = C \omega V_0 (-\text{sen} \omega t) = C \omega V_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.50)$$

Por (4.48) y (4.50) tenemos:

$$\frac{I_s}{I_d} = \frac{1}{\omega^2 L_c C} = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2$$

donde hemos definido la frecuencia del plasma de la unión como

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_c C}} = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}} \quad (4.51)$$

de manera que cuando

$$\omega_p > \omega, \quad (4.52)$$

la supercorriente es mayor que la corriente de desplazamiento.

Por (4.49) y (4.50) tenemos que:

$$\frac{I_n}{I_d} \approx \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{\omega\tau}$$

donde $\tau_n = RC$ es la constante de tiempo de un circuito eléctrico RC. De forma que cuando

$$\omega\tau_n < 1, \quad (4.53)$$

la corriente normal es mayor que la corriente de desplazamiento.

De las definiciones anteriores y la definición de la frecuencia característica dada por la ecuación (4.45) obtenemos:

$$\tau_n = RC = \frac{\omega_c}{\omega_p^2}. \quad (4.54)$$



Las expresiones (4.52) y (4.53) nos muestran la forma de caracterizar el efecto de la capacitancia en todas las frecuencias hasta ω_c , a partir de esto se define el siguiente parámetro adimensional

$$\beta = \frac{\omega_c^2}{\omega_p^2} = \omega_p \tau_n = \omega_c RC = \frac{2e}{\hbar} I_c R^2 C \quad (4.55)$$

introducido por primera vez por McCumber y Stewart. Cuando $\beta \ll 1$, la unión tiene una capacitancia pequeña, o dicho en términos dinámicos, una alta amortiguación. En cambio, $\beta \gg 1$ se refiere a una unión con capacitancia grande o bajo amortiguamiento. En el siguiente capítulo discutiremos con más detalle sobre estas situaciones.

Por último, si la diferencia de fase ϕ cambia con el tiempo y $V \neq 0$, entonces la energía debida al campo eléctrico es:

$$E_E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \frac{2eI_c}{\hbar \omega_p^2} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\omega_p^2} \frac{\hbar I_c}{2e} = \frac{1}{2} \frac{E_c}{\omega_p^2} \dot{\phi}^2 \quad (4.56)$$

donde se hizo uso de (4.28b), (4.35) y (4.51).

4.7.3. Corriente debida a fluctuaciones $I_f(t)$

La corriente $I_f(t)$ está asociada a las fluctuaciones aleatorias debidas al carácter resistivo de la corriente normal I_n , tales como el ruido térmico y el ruido de disparo. El primer tipo de ruido se origina por la agitación térmica de los electrones, mientras que el segundo aparece cuando el número de electrones es lo suficientemente pequeño para dar lugar a fluctuaciones estadísticas. Las corrientes I_s e I_d son de carácter reactivo y por lo tanto no contribuyen a estos tipos de ruido. Las fluctuaciones o ruidos pueden tomarse en cuenta usando el método de Langevin, que consiste en incluir en la ecuación del sistema una corriente aleatoria adicional que describa a las fluctuaciones. Para el caso de la unión de Josephson, la ecuación de Langevin surge de la suma de todos los componentes de la corriente total junto con la corriente fluctuación $I_f(t)$.

Entre los valores de $I_f(t)$ a diferentes tiempos existe una correlación, esto significa que los valores de $I_f(t)$ afectan la probabilidad de los diferentes valores de la corriente al tiempo $t + \tau$, esta correlación temporal se caracteriza por el valor medio del producto $I_f(t)I_f(t + \tau)$. El promedio es tomado sobre las probabilidades de todos los valores que la corriente puede tomar al tiempo t y al tiempo $t + \tau$. De esta manera, la cantidad obtenida cuando las fluctuaciones son estacionarias solamente depende de τ , que designaremos como la función de correlación $c(\tau)$:

$$c(\tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle \quad (4.57)$$

Por otro lado, la transformada de Fourier para la variable I se define como:

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{i\omega t} dt \quad (4.58)$$

y su relación inversa es entonces:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I_\omega e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.59)$$

Utilizando esta expresión dentro de (4.57) se encuentra:

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I_{\omega} I_{\omega'} \rangle e^{-i(\omega t + \omega' t')} d\omega d\omega' \quad (4.60)$$

Como el proceso es estacionario, el lado derecho de esta ecuación debe de ser una función de $\tau = t' - t$, lo cual se cumple solamente cuando el integrando contiene una función δ de $\omega + \omega'$, esto requiere que:

$$\langle I_{\omega} I_{\omega'} \rangle = \langle I^2 \rangle_{\omega} \delta(\omega + \omega') \quad (4.61)$$

Esta relación define la cantidad I_{ω}^2 que es real a pesar de que I_{ω} y $I_{\omega'}$ son complejas. Introduciendo esta ecuación en la función de correlación y realizando la integración con respecto a ω' , tenemos:

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle I^2 \rangle_{\omega} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (4.62)$$

En particular, $c(0)$ es el valor cuadrático medio de la corriente fluctuante, o sea:

$$c(0) = \langle I^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle I^2 \rangle_{\omega} d\omega \quad (4.63)$$

Por otra parte, de (4.62) vemos que la transformada de Fourier de la función de correlación es la cantidad:

$$\langle I^2 \rangle_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (4.64)$$

Al considerar la corriente $I(t)$ como función del tiempo, estamos suponiendo que tiene un comportamiento clásico. Sin embargo, las expresiones obtenidas pueden escribirse de tal manera que son aplicable a cantidades cuánticas. Para esto, en vez de considerar $I(t)$ tomamos en cuenta su respectivo operador cuántico \hat{I} y su componente de Fourier:

$$\hat{I}_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}(t) e^{i\omega t} dt \quad (4.65)$$

Los operadores $\hat{I}(t)$ y $\hat{I}(t')$, por lo general no conmutan, por lo que la relación de correlación debe definirse como:

$$c(\tau) = \frac{1}{2} \langle \hat{I}(t) \hat{I}(t') + \hat{I}(t') \hat{I}(t) \rangle \quad (4.66)$$

donde los paréntesis indican promedio respecto de las probabilidades cuánticas. La magnitud I_{ω}^2 se introduce por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \langle \hat{I}_{\omega} \hat{I}_{\omega'}^* + \hat{I}_{\omega'}^* \hat{I}_{\omega} \rangle = \langle I^2 \rangle_{\omega} \delta(\omega - \omega') \quad (4.67)$$

Con esto las expresiones (4.62), (4.63) y (4.64) conservan su forma.



En resumen, la intensidad de $I_f(t)$ está caracterizada por la correlación $\langle I_{\omega} I_{\omega'}^* \rangle$ de sus componentes de Fourier, donde el paréntesis indica el promedio estadístico sobre todo el ensemble y el asterisco señala el complejo conjugado. De acuerdo a la transformada de Fourier, la densidad espectral de un proceso estacionario es

$$S_I(\omega)\delta(\omega-\omega') = \frac{1}{2} \langle I_{\omega} I_{\omega'}^* + I_{\omega'}^* I_{\omega} \rangle \quad (4.68)$$

que está definida para frecuencias tanto positivas como negativas, de manera que el valor cuadrático medio en un intervalo $d\omega$ para frecuencias físicas (frecuencias positivas) es

$$\langle I^2 \rangle_{d\omega} = S_I(\omega)d\omega + S_I(-\omega)d\omega = 2S_I(\omega)d\omega \quad (4.69)$$

Como se mencionó al inicio de esta sección, la corriente I_n es de carácter disipativa y responsable de al menos dos tipos de fluctuaciones clásicas: el ruido térmico y el ruido de disparo dentro las uniones Josephson. Nos enfocaremos en describir estos tipos de ruido para algunos casos límites sencillo, esto debido a que las expresiones exactas para las fluctuaciones pueden ser bastante complejas.

RUIDO TÉRMICO

Para las fluctuaciones térmicas la densidad espectral está dada por la fórmula Johnson-Nyquist[7].

$$S_I(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{k_B T}{R} = const \quad (4.70)$$

que es válida para el comportamiento óhmico dado por la expresión (4.41) con la condición adicional

$$k_B T \gg eV, \quad k_B T \gg \hbar\omega$$

La intensidad relativa de las fluctuaciones térmicas se puede caracterizar por el parámetro adimensional dado por la razón entre la energía térmica $k_B T$ y la energía E_c de la supercorriente:

$$\gamma = \frac{k_B T}{E_c} = \frac{2ek_B T}{\hbar I_c} = \frac{I_T}{I_c} \quad (4.71)$$

donde se ha definido una corriente térmica $I_T = (2e/\hbar)k_B T \approx (0.042 \mu\text{A/K})T$. Por lo tanto, si $I_c \gg I_T$, es decir, $I_c = 0.5 \text{ mA}$ a $T = 4 \text{ K}$, la influencia de las fluctuaciones térmicas será pequeña.

RUIDO DE DISPARO

Ahora, si el voltaje a través de la unión es grande, tal que

$$eV \gg k_B T, \quad eV \gg \hbar\omega,$$

es decir, $V \geq 0.5 \text{ mV}$ a $T = 4 \text{ K}$, entonces el ruido de disparo adquiere mayor importancia y es posible utilizar la fórmula de Schottky[6].

$$S_I(\omega) = \frac{1}{2\pi} eI_n = const \quad (4.72)$$

RUIDO EXCEDENTE

A bajas frecuencias, aparece otro tipo de ruido conocido como excedente, ruido $1/f$ o efecto de parpadeo que puede llegar a adquirir la misma importancia junto con el ruido térmico y el de disparo, sin embargo, la naturaleza física de $1/f$ aún no está muy clara, incluso para los sistemas termodinámicos en equilibrio. Este tipo de ruido conviene describirlo por medio de las fluctuaciones de los parámetros del sistema que por una fuerza de Langevin $I_f(t)$. Para altas frecuencias entre decimas de Hz hasta cientos de kHz, el límite superior de $1/f$ es relativamente bajo, por lo que su efecto neto en la unión Josephson es insignificante comparado con los otros tipos de ruido. Cabe destacar que en la práctica, algunos dispositivos toman señales de salida útiles de las uniones Josephson a bajas frecuencias, por lo que estas pueden ser seriamente contaminadas por el ruido $1/f$ obligando a tomar algunas contramedidas, como la modulación de la señal.

RUIDO EXTERNO

Por último, algunas fuentes de ruido externas como las estaciones de radio y televisión, así como también las líneas de suministro de energía eléctrica contribuyen a la corriente de fluctuaciones I_f . Las frecuencias típicas de sus señales son, por lo regular, mucho menores que la frecuencia característica de la unión Josephson, lo que hace que el análisis de estas fluctuaciones se simplifique bastante. Para conocer la influencia de estas fluctuaciones de baja frecuencia sobre la unión, calculamos primero el promedio de una cantidad F como función de la corriente I suministrada por una fuente de potencial:

$$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(I_f, I_L) F(I + I_f) dI_f \quad (4.73)$$

Este promedio se realiza sobre todos los valores posibles de la corriente efectiva $I + I_f$. La función $\sigma(I_f, I_L)$ es la densidad de probabilidad de I_f , que por lo regular puede considerarse como una distribución gaussiana normal:

$$\sigma(I_f, I_L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}I_L} e^{-\frac{I_f^2}{2I_L^2}} \quad (4.74)$$

donde I_L es la amplitud efectiva del ruido externo.

Por otro lado se ha observado, de manera general, en montajes experimentales que

$$I_L \ll I_T$$

De tal manera que podemos desprestigiar el efecto de las fuentes externas sobre las uniones Josephson.

Referencias

- [1] Josephson B. D. *Possible New Effects in Superconductive Tunneling*. Physics Letters Vol. 1, No. 7, pp. 251-253, July 1962.
- [2] Josephson B. D. *The Discovery of Tunnelling Supercurrents*. Nobel Lecture. Dec. 1973. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1973/josephson-lecture_new.pdf
- [3] Goodstein D. and Goodstein J. *Richard Feynman and the History of Superconductivity*. Physics in Perspective Vol. 2, pp. 30-47, 2000.
- [4] Feynman R. *Física Vol. III, Mecánica Cuántica*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [5] Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1996.
- [6] Likharev, K. K. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*. Gordon and Breach Science Publishers. Glasgow. 1986.



- [7] Davenport W. B. and Root W. L. *An Introduction to the Theory Random Signals and Noise*. IEEE-Wiley Interscience. New York. 1987.

Capítulo 5

La unión Josephson vista como un sistema dinámico

5.1 Introducción

Para entender las propiedades inusuales de la supercorriente se buscan análogos mecánicos sencillos que desarrollen una mejor comprensión de la dinámica de las uniones Josephson. Un primer análogo es un péndulo mecánico plano en un campo gravitatorio uniforme, donde la diferencia de fase ϕ desempeña el papel de ángulo de oscilación del péndulo; en esta analogía la supercorriente es comparable a la torca y el voltaje V es proporcional a la velocidad angular del péndulo. Otra analogía útil es una partícula mecánica en movimiento a lo largo de la coordenada ϕ en un campo periódico con rapidez v proporcional al voltaje V . Sin embargo, hemos visto que la corriente total que circula a través de la unión Josephson no solo está compuesta de la supercorriente sino también de la corriente normal, la de desplazamiento y la de fluctuaciones. En el capítulo anterior realizamos un análisis de estas componentes y encontramos que existe una relación entre las frecuencias ω_c y ω_p con las cantidades características de los circuitos eléctricos como el tiempo de relajación L_c/R o la constante de tiempo RC , además se demostró que la supercorriente es equivalente a una inductancia no lineal en ciertas condiciones, por lo que todo esto nos conduce a un tercer análogo: un circuito eléctrico cuyos elementos están caracterizados por una resistencia R , una capacitancia C y una inductancia L_c . Los primeros en proponer esta analogía fueron W. C. Stewart y D. E. McCumber en 1968 y es conocida como **Resistively and Capacitively Shunted Junction (RCSJ)**[1][2][3], la cual consiste en un circuito eléctrico cuyos elementos están conectados en paralelo. Gracias a este modelo, es posible obtener la relación existente entre la corriente I y el voltaje V presentes en la unión. Para ello, realizaremos un análisis dinámico del efecto Josephson, a partir de este modelo para tres casos distintos: conservativo, resistivo y altamente resistivo.

5.2 Circuito eléctrico equivalente

Como se vio en el capítulo anterior, la corriente total I está conformada por cuatro componentes: la corriente normal I_n , la de desplazamiento I_d , la supercorriente I_s y la debida a fluctuaciones I_f . Por lo que las ecuaciones básicas de la unión Josephson son:

$$\begin{aligned} a) I &= I_s(\phi) + I_n(V) + I_d(\dot{V}) + I_f(t) \\ b) V &= \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Este conjunto de ecuaciones permiten calcular $I(t)$ siempre y cuando $V(t)$ sea conocida y viceversa. La solución de este sistema de ecuaciones ya no es un problema de la física del estado sólido sino un problema dinámico, en el cual nos enfocaremos en este capítulo. Para nuestro estudio dejaremos de lado cualquier tipo de ruido en la unión, es decir, consideramos $I_f(t)$ despreciable. Por lo tanto, expresamos la corriente total de la siguiente manera:

$$I = I_d(\dot{V}) + I_n(V) + I_s(\phi), \quad (5.2)$$

de la cual podemos deducir una ecuación de movimiento por medio de las leyes de Kirchhoff, ya que esta expresión sugiere que la unión puede representarse a través de un circuito equivalente cuyos elementos se encuentran conectados en paralelo (Fig. 5.1).

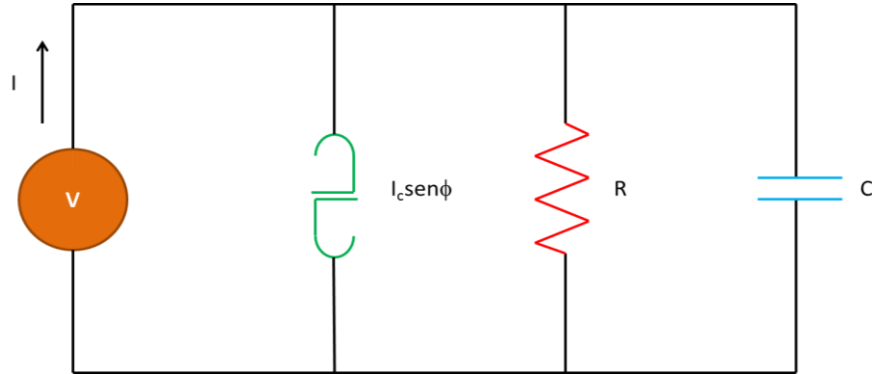


Figura 5.1 Esquema de una unión Josephson como un circuito eléctrico

En este tipo de circuito, la caída de voltaje en cada rama es igual al voltaje V administrado a la unión, sin embargo, las corrientes que circulan en cada elemento son distintas. Si sustituimos las expresiones (4.41), (4.46) y (5.1a) en (5.2) obtenemos lo siguiente:

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} + I_c \text{sen}\phi = I. \quad (5.3)$$

Esta ecuación puede ser reescrita en términos de la diferencia de fase ϕ , haciendo uso de la expresión (5.1b):

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + I_c \text{sen}\phi = I. \quad (5.4)$$

Gracias a esta expresión, podemos estudiar a la unión Josephson como un sistema dinámico no lineal y es similar a la ecuación de un péndulo amortiguado dirigido con una torca constante Γ (ver Apéndice A).

5.3 Formulación adimensional

Para facilitar nuestro estudio, vamos a adimensionalizar la ecuación (5.4), multiplicándola por I_c^{-1} , de esta manera obtenemos:

$$\frac{\hbar C}{2eI_c} \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eI_c R} \dot{\phi} + \text{sen}\phi = \frac{I}{I_c} \quad (5.5)$$

Si la expresamos en términos de las frecuencias ω_c y ω_p , tenemos:

$$\frac{\ddot{\phi}}{\omega_p^2} + \frac{\dot{\phi}}{\omega_c} + \text{sen}\phi = \frac{I}{I_c} \quad (5.5a)$$

Definimos ahora, un tiempo adimensional τ :

$$\tau = \frac{t}{T} \quad (5.6)$$

donde \underline{T} es un tiempo característico, que definiremos más adelante. Haciendo uso de la regla de cadena obtenemos las siguientes derivadas:

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\underline{T}} \frac{d\phi}{d\tau} \quad (5.7)$$

y

$$\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d\dot{\phi}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\underline{T}^2} \frac{d^2\phi}{d\tau^2} \quad (5.8)$$

Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación (5.5a), obtenemos la forma adimensional de (5.4):

$$\left(\frac{1}{\omega_p^2 \underline{T}^2} \right) \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \left(\frac{1}{\omega_c \underline{T}} \right) \frac{d\phi}{d\tau} + \text{sen}\phi = \frac{I}{I_c} \quad (5.9)$$

El término con $d^2\phi/d\tau^2$ está asociado con la corriente de desplazamiento, el término que incluye $d\phi/d\tau$ con la corriente ordinaria y $\text{sen}\phi$ es la supercorriente en su forma adimensional. Las cantidades dentro de los paréntesis son conocidas como **grupos adimensionales**.

La expresión (5.9) es una ecuación diferencial de segundo orden que no es fácil de resolver por lo que se requiere de métodos numéricos y cualitativos para obtener una solución aproximada. Uno de los pioneros en el estudio de esta ecuación fue Francesco Tricomi en 1933[4], mucho antes del descubrimiento del efecto Josephson y de la presentación del modelo RCSJ, logrando solamente una descripción cualitativa de la solución de la misma. A continuación realizaremos un análisis de la misma en tres casos distintos: conservativo, resistivo y altamente resistivo.

5.4 Caso conservativo

El primer caso que analizaremos es cuando la corriente normal I_n es despreciable con respecto a las demás corrientes. Recordemos que I_n es la corriente debida a electrones libres, por lo que está representa desde el punto de vista dinámico un amortiguamiento al sistema, mismo que provoca una disipación de energía. Cuando I_n es despreciable, el número de pares Cooper es mayor en comparación con el número de electrones libres y además la energía del sistema se conserva.

5.4.1 Grupo adimensional α y escala de tiempo \underline{T}_1

Para llevar a cabo el análisis de este caso, primero reescribiremos la ecuación (5.9) de tal manera que el segundo término sea despreciable con respecto a los otros, que a su vez se consideran del mismo orden de magnitud. Como las derivadas y el $\text{sen}\phi$ son de orden uno $O(1)$, requerimos que se cumpla lo siguiente:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{1}{\omega_p^2 \underline{T}^2} \approx O(1) \\ b) \quad & \frac{1}{\omega_c \underline{T}} \ll 1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

A partir del primer requisito igualado a 1 se define una escala de tiempo \underline{T}_1 en cual este caso conservativo es posible:



$$\frac{1}{\omega_p^2 (\underline{T}_1)^2} = 1 \Rightarrow \underline{T}_1 = \frac{1}{\omega_p}. \quad (5.11)$$

Si sustituimos \underline{T}_1 en el segundo requisito, se obtiene una condición entre las frecuencias ω_p y ω_c con la cual podemos considerar despreciable a la corriente I_n :

$$\frac{\omega_p}{\omega_c} \ll 1 \Rightarrow \omega_p \ll \omega_c, \quad (5.12)$$

A partir de esto, definimos el siguiente grupo adimensional:

$$\alpha = \frac{\omega_p}{\omega_c} = \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c R^2 C}}. \quad (5.13)$$

cuyos valores típicos dependen del tamaño, la geometría y los materiales utilizados en la unión. Así, la ecuación (5.9) toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi}{d\tau} + \text{sen}\phi = \frac{I}{I_c} \quad (5.14)$$

donde $\alpha > 0$ e $I/I_c \geq 0$. Este tratamiento de los grupos adimensionales nos permite despreciar el segundo término al considerar $\alpha \rightarrow 0$:

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \text{sen}\phi = \frac{I}{I_c}. \quad (5.15)$$

Esta expresión puede reescribirse como un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} a) \phi' &= y \\ b) y' &= \frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde la prima indica la derivada con respecto a τ . El espacio fase natural para este sistema es un cilindro, donde ϕ representa una variable angular mientras que y es un número real que representa una velocidad angular; a este tipo de espacio se le denomina como *cilindro fase*.

5.4.2 Conservación de la energía

A continuación, demostraremos que existe una primera integral de (5.15). Primero, multiplicamos la segunda expresión (5.16) por y para obtener:

$$yy' - \frac{I}{I_c} y + y \text{sen}\phi = 0. \quad (5.17)$$

que se puede expresar en la forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} y^2 - \cos\phi - \frac{I}{I_c} \phi \right) = 0 \quad (5.18)$$

Por lo que la primera integral está dada por:

$$\frac{1}{2}y^2 - \cos\phi - \frac{I}{I_c}\phi = cte \quad (5.19)$$

Una interpretación de esta primera integral, consiste en asociar el primer término con una energía cinética y el segundo con una energía potencial al definir la constante de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}y^2 - \cos\phi - \frac{I}{I_c}\phi = E - 1 \quad (5.19b)$$

Para identificar el término cinético, recordemos que al no haber disipación, la energía debida al campo eléctrico que se almacena en el condensador por (4.56) es

$$E_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{E_c}{\omega_p^2}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}E_c\phi'^2 = \frac{1}{2}E_c y^2.$$

donde también usamos las expresiones (5.7), (5.11) y (5.16a), por lo que el término cinético es:

$$K = \frac{E_E}{E_c} = \frac{1}{2}y^2 \quad (5.20)$$

donde $E_c = \frac{\hbar I_c}{2e}$. Para identificar la energía potencial calculamos el trabajo W que realiza una fuente de voltaje sobre el negativo de la corriente de desplazamiento, o sea sobre $I_s - I$, presentes en la unión que provoca un cambio en la diferencia de fase de ϕ_1 a ϕ_2 :

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} (I_s - I)V dt = \frac{\hbar I_c}{2e} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\phi d\phi - \frac{\hbar I}{2e} \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \\ &= \frac{\hbar I_c}{2e} (\cos\phi_1 - \cos\phi_2) + \frac{\hbar I}{2e} (\phi_1 - \phi_2) \\ &= E_p(\phi_2) - E_p(\phi_1) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Para este cálculo se hizo uso de las relaciones Josephson (4.28). El resultado (5.21) sugiere que la energía potencial es:

$$E_p(\phi) = \frac{\hbar I_c}{2e} \left[1 - \cos\phi - \frac{I}{I_c}\phi \right] = E_c \left[1 - \cos\phi - \frac{I}{I_c}\phi \right] \quad (5.22)$$

cuya forma adimensional es dada por:

$$U(\phi) = \frac{E_p(\phi)}{E_c} = 1 - \cos\phi - \frac{I}{I_c}\phi \quad (5.23)$$

de manera que se obtiene la **ley de conservación de la energía** dada por la relación (5.19b).

5.4.3 Diagramas fase y de energía potencial

A continuación describiremos el comportamiento de la unión Josephson a través de un análisis cualitativo de la energía total haciendo uso de los diagramas fase y de las gráficas de la energía potencial para distintos valores del parámetro I/I_c .

Para dibujar el diagrama fase del sistema, primero debemos obtener una expresión $y = y(\phi)$ que describa las trayectorias o **curvas integrales** que lo conforman, para ello reescribimos (5.19b) de la siguiente manera:

$$y(\phi) = \pm \sqrt{2 \left(\cos \phi + \frac{I}{I_c} \phi \right) + 2(E-1)}. \quad (5.24)$$

Existe una curva integral por cada valor distinto de E y su comportamiento depende del parámetro I/I_c .

Si $2 \left(\cos \phi + \frac{I}{I_c} \phi + E - 1 \right) > 0$, para un valor de ϕ , $y(\phi)$ adquiere dos valores que corresponden a dos puntos en el diagrama fase, en cambio si $2 \left(\cos \phi + \frac{I}{I_c} \phi + E - 1 \right) < 0$ la relación $y(\phi)$ adquiere valores imaginarios, mismos que no se encuentran sobre el diagrama. Gracias a la expresión (5.24), podemos dibujar el diagrama fase completo del sistema para un valor dado de I/I_c .

CASO $I/I_c = 0$

Comenzamos con el caso de una unión Josephson aislada, es decir, que no se encuentra conectada a una fuente de voltaje que le suministre una corriente I , sin embargo, en esta fluye una supercorriente $I_c \text{sen} \phi$. En el circuito equivalente solo están presente el condensador y el inductor Josephson conectados en paralelo, dando origen a un circuito tipo **tanque** en el cual se almacena energía y existe un intercambio de la misma entre ambos elementos (Fig. 5.2). En términos del efecto Josephson, esto puede interpretarse de la siguiente manera: inicialmente la unión tiene almacenada una cantidad de energía E , que en ausencia de una fuente de potencial comenzará a descargarse cediendo esta energía, de manera gradual, a los pares Cooper provocando así una supercorriente que circulará a través de este dispositivo. Al no haber disipación, la unión vuelve a cargarse cuando la supercorriente comienza a cederle energía paulatinamente justo después de que ha alcanzado el máximo de energía E , siendo esto un proceso periódico similar a las oscilaciones eléctricas en un circuito LC⁶. En esta situación, la expresión (5.19b) toma la siguiente forma:

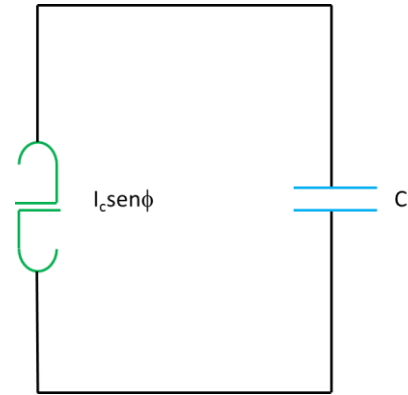


Figura 5. 2 Circuito tanque Josephson

$$\frac{1}{2} y^2 + 1 - \cos \phi = E \quad (5.25)$$

donde la energía potencial es

$$U(\phi) = 1 - \cos \phi. \quad (5.26)$$

⁶ En este tipo de circuito, el capacitor se descarga provocando una corriente que pasa por el inductor generando un campo magnético e induciendo una **fem**, misma que cargará al capacitor de nuevo sin pérdida de energía gracias a la ausencia de una resistencia.

La Fig. 5.3 muestra la gráfica de la energía potencial tanto en el plano como en el cilindro; en la primera se puede observar los puntos donde $U(\phi)$ es máxima y mínima, es decir,

máximos: $\phi_n^+ = \pm(2n+1)\pi$,

mínimos: $\phi_n^- = \pm 2n\pi$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ Como se puede observar tenemos un diagrama de energía potencial similar al de un péndulo simple.

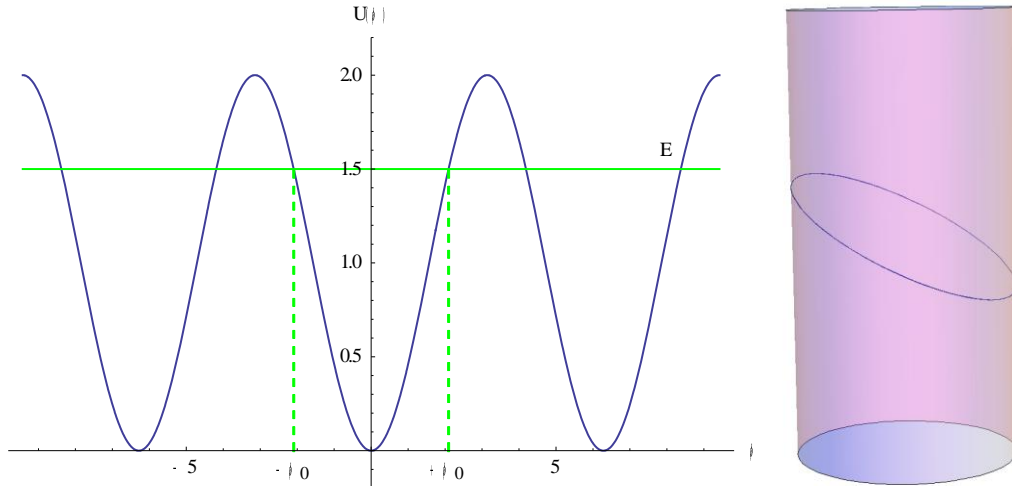


Figura 5.3 Energía potencial $U(\phi)$ para $I/I_c = 0$

El comportamiento del sistema dependerá del valor de E , que se representa en el diagrama del potencial con una línea verde. Ante esto, hay tres situaciones a considerar:

- Si $0 < E < 2$, la unión se encuentra totalmente descargada en $\phi = \pm\phi_0$, conocidos como puntos de retorno en el caso del péndulo simple, mientras que la supercorriente tiene una energía E menor a su máximo de energía potencial $U_{max} = 2$. Los puntos de retorno ϕ_0 están definidos de la siguiente manera:

$$U(\phi_0) = 1 - \cos \phi_0 = E \Rightarrow \phi_0 = \cos^{-1}(1 - E). \tag{5.27}$$

En los puntos mínimos del potencial ϕ_n^- , la unión está completamente cargada con energía $E = 1 - \cos \phi_0$ y la supercorriente se encuentra en su mínimo de energía potencial $U_{min} = 0$. El intercambio de energía entre la unión y la supercorriente se lleva a cabo dentro del intervalo $-\phi_0 < \phi < +\phi_0$. Durante este intervalo de energía, se llevan a cabo las **oscilaciones Josephson** que en términos dinámicos son conocidas como **movimientos periódicos de libración**, estos están representados en el diagrama fase (Fig. 5.4) por trayectorias cerradas de color rojo que son limitadas por dos curvas azules conocidas como separatrices. Junto con las trayectorias cerradas, las separatrices encierran a un punto de equilibrio estable denominado **centro** localizable en ϕ_n^- .

El caso $E = 0$ corresponde a la ausencia de oscilaciones Josephson que sucede cuando no hay energía almacenada en la unión, esto nos lleva a una situación física en la cual los dos electrodos de la unión se comportan como un solo superconductor, debido a que la corriente de tunelamiento I_s es nula. En el diagrama fase, este estado está representado por los puntos centros ϕ_n^- .

- Cuando $E = 2$, la supercorriente y la unión intercambian una energía $E = U_{max}(\phi) = 2$ y los **puntos silla** son dados por

$$\phi_0 = \cos^{-1}(1 - E) = \cos^{-1}(-1) = \pm(2n + 1)\pi = \phi_n^+, \tag{5.28}$$

los cuales son puntos de equilibrio inestable. En estos puntos, la supercorriente adquiere su máximo de energía potencial que es suficiente para mantener un *estado estacionario* donde la supercorriente permanece constante y no hay intercambio de energía con la unión. Al ser puntos inestables, basta una pequeña perturbación para cambiar el estado estacionario en el que se encuentra la unión tendiendo al otro punto silla, el cual alcanzaría solamente en un tiempo infinito.

- Si $E > 2$, las oscilaciones Josephson no llevan a cabo y se da pie a otro tipo de situación. Para este caso, la unión almacena mayor energía que la energía potencial máxima de la supercorriente, entonces se lleva a cabo un proceso de descarga parcial del dispositivo cediendo solamente a la supercorriente la cantidad de energía $U_{max} = 2$. Una vez que la supercorriente adquiere esta energía comienza a cederla paulatinamente a la unión siendo esto un proceso periódico sin puntos de retorno, es decir, no se presenta un estado estacionario donde la unión se descarga por completo y permanece constante la supercorriente. A este proceso lo llamaremos *rotación Josephson*, que en términos dinámicos está asociado a un *movimiento periódico del tipo rotación*, que en problema equivalente del péndulo significa que este tiene tanta energía que puede sobrepasar la posición vertical $\phi = \pi$ dando origen a rotaciones alrededor de su pivote. En el plano fase estas rotaciones son representadas con trayectorias de color rojo que se encuentran fuera de la región delimitada por las separatrices y que en el cilindro fase son curvas cerradas que lo rodean (Fig. 5.4).

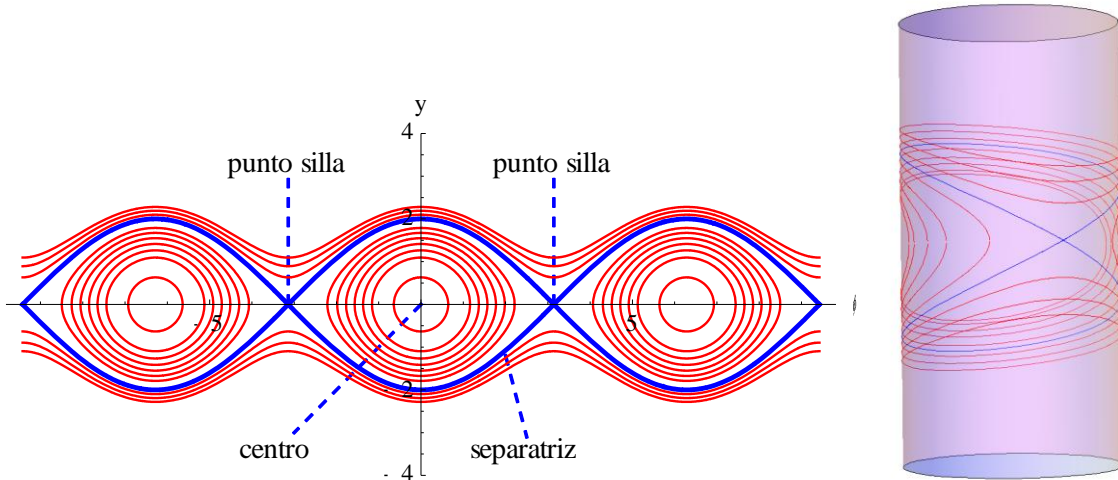


Figura 5.4 Plano y cilindro fase para $I/I_c = 0$

CASO $I/I_c < 1$

Para este caso, tenemos la presencia de un corriente I suministrada por una fuente de voltaje a la unión. Ahora el circuito equivalente consiste del condensador, del inductor Josephson y de la fuente de potencial (Fig. 5.5). La función de la corriente I en esta ocasión consiste en proporcionarle energía al condensador para que este no se descargue por completo aun cuando exista un intercambio de la misma con la supercorriente.

La energía potencial es dada por

$$U(\phi) = 1 - \cos \phi - \frac{I}{I_c} \phi \tag{5.29}$$

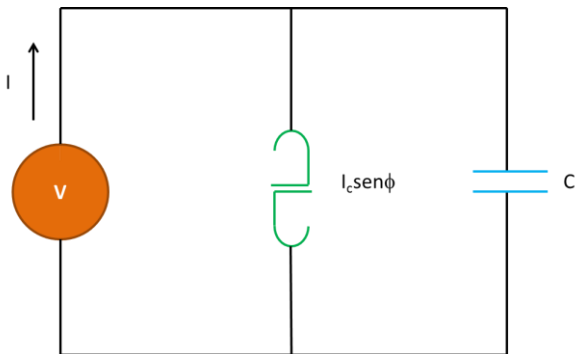


Figura 5.5 Circuito Josephson conservativo

cuyos puntos máximos y mínimos, se obtienen a partir de la siguiente condición:

$$\frac{dU(\phi)}{d\phi} = \text{sen}\phi - \frac{I}{I_c} = 0 \tag{5.30}$$

con soluciones:

$$\text{mínimos: } \phi_n^- = \text{sen}^{-1}\left(\frac{I}{I_c}\right) + 2\pi n, \tag{5.31}$$

$$\text{máximos: } \phi_n^+ = \pi - \text{sen}^{-1}\left(\frac{I}{I_c}\right) + 2\pi n.$$

La representación gráfica de $U(\phi)$, conocida como **potencial de lavadero**, es una curva cosenoidal cuyos nodos se encuentran a lo largo de la línea recta $(I/I_c)\phi$ (Fig. 5.6).

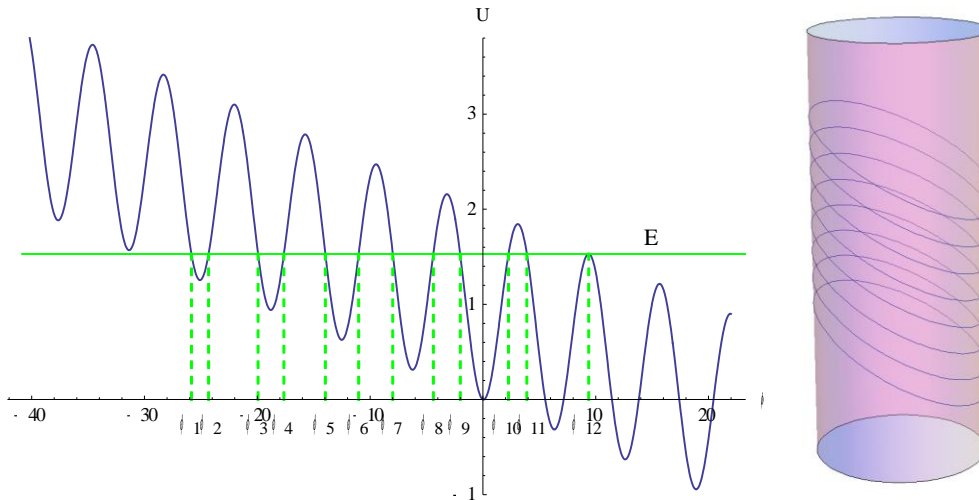


Figura 5.6 Energía potencial $U(\phi)$ para $I/I_c = 0.05$

El sistema puede realizar oscilaciones o rotaciones de tipo Josephson dependiendo del valor de E y de las condiciones iniciales. Si observamos de nuevo la Fig. 5.6, el sistema presentará oscilaciones Josephson si ϕ toma valores dentro de las zonas permitidas o pozos de potencial cuyos puntos de retorno están dados por la solución de:

$$U(\phi_i) = 1 - \cos\phi_i - \frac{I}{I_c}\phi_i = E; \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{5.32}$$

En cambio, si la condición inicial es tal que ϕ es un poco mayor a ϕ_{12} , se llevan a cabo rotaciones Josephson en el sistema.

El plano fase (Fig. 5.7) presenta cambios con respecto al anterior, ahora los puntos silla se localizan en $\phi = \phi_n^+$ y los centros en $\phi = \phi_n^-$ dados por (5.31) (en el cilindro fase solo tenemos la presencia de un punto silla y un centro), y desaparece el par de separatrices que unían a los puntos sillas contiguos y en su lugar aparece solo una separatriz que inicia y termina en el mismo punto silla el cual representa el estado estacionario en la unión. Las curvas dentro de esta nueva separatriz continúan siendo cerradas y corresponden a oscilaciones Josephson, sin embargo, las trayectorias que se encuentran fuera de la separatriz ya no forman un contorno cerrado alrededor del cilindro, por lo que las rotaciones ya no son periódicas, esto debido a que cada vez que ϕ aumenta por cada 2π , la función $y(\phi)$ no se recupera de su valor anterior, y aumenta en valor absoluto por

cada revolución. En términos de la unión Josephson, esto se debe a la presencia de la corriente I que contribuye al aumento de energía almacenada en la unión.

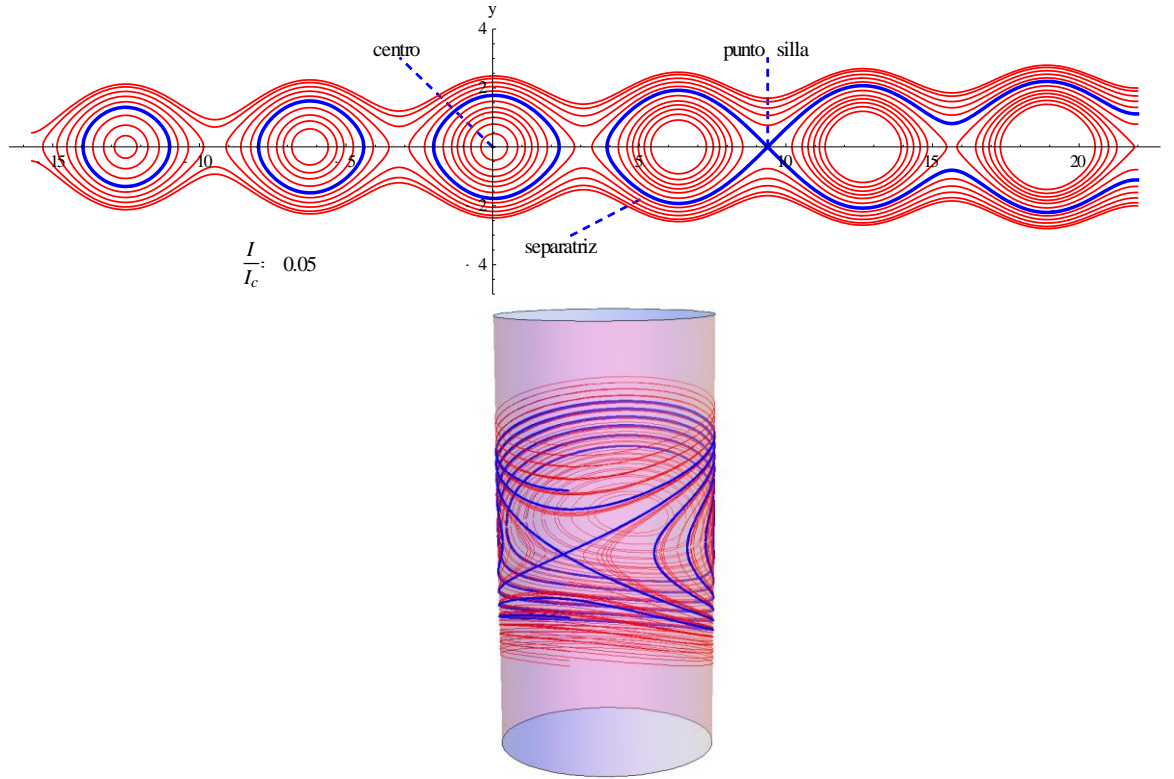


Figura 5. 7 Plano y cilindro fase para $I/I_c = 0.05$

CASO $I/I_c = 1$

En este caso, ya no se llevan a cabo las oscilaciones Josephson sino solamente rotaciones Josephson no periódica, esto debido a que el almacenamiento de energía en el dispositivo continúa en aumento gracias a la contribución que realiza la fuente de potencial, por lo que la energía potencial máxima de la supercorriente $U_{max} = 2$ resulta pequeña en comparación con la energía almacenada. Esta situación se ve reflejada en el diagrama fase (Fig. 5.9) a través de las trayectorias no cerradas que se extienden hacia las partes superior e inferior del mismo incluida la separatriz que pasa por un punto fijo de orden superior. Los centros han dejado de existir, lo que significa que la unión jamás llegará a un estado en el que la supercorriente sea nula y sus electrodos se comporte como un solo superconductor. La energía potencial $U(\phi)$ dada por (5.29) ya no tiene máximos ni mínimos (Fig. 5.8), solamente puntos de inflexión en $\phi_n = n\pi/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) donde todavía puede alcanzarse un estado estacionario.

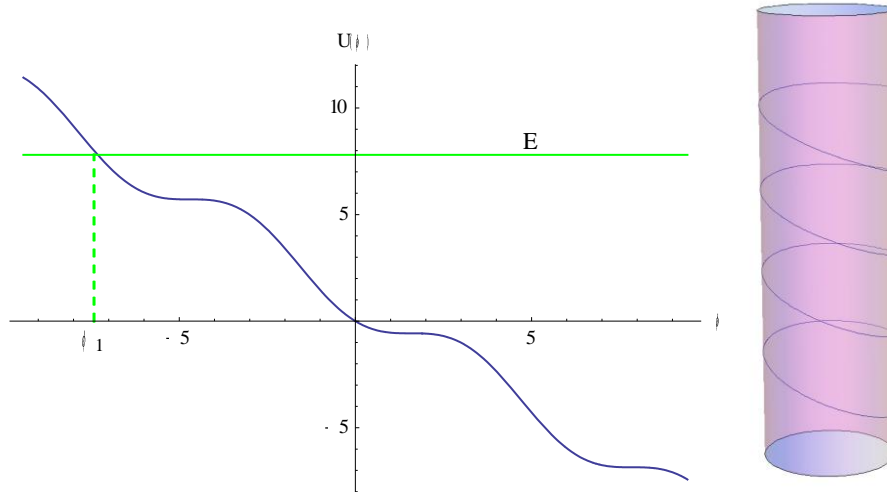


Figura 5. 8 Energía potencial $U(\phi)$ para $I/I_c = 1$

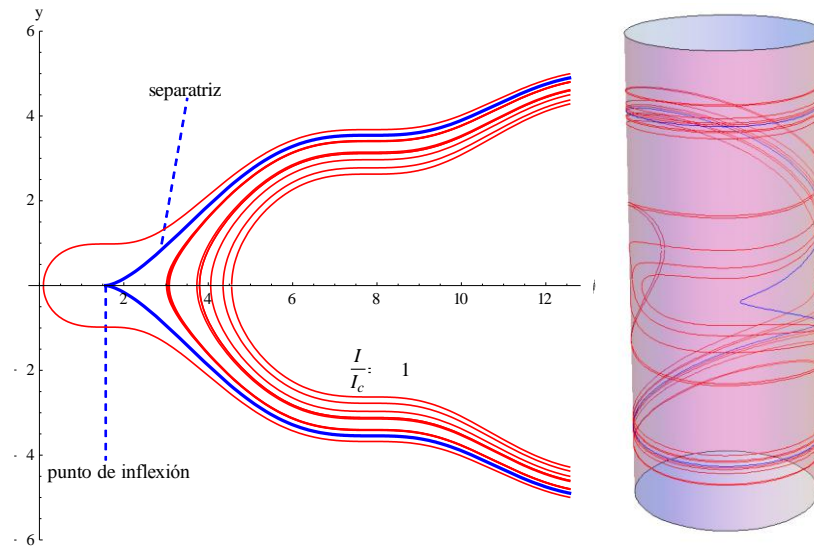


Figura 5. 9 Plano y cilindro fase para $I/I_c = 1$

CASO $I/I_c > 1$

En este último caso continúan presentes las rotaciones Josephson no periódicas así como el almacenamiento de energía debido a la corriente I . En cuanto a la energía potencial de la supercorriente dada por (5.29), ya no es tan significativa con respecto a la energía almacenada. La función $U(\phi)$ ya no tiene máximos ni mínimos y tampoco puntos de inflexión (Fig. 5.10) lo que significa que no es posible que el sistema presente, en alguno momento, un estado estacionario. Esto se ve reflejado en el diagrama fase donde no existen puntos sillares ni centros, y la separatriz ha desaparecido (Fig. 5.11). Todas las trayectorias continúan abriéndose y extendiéndose a lo largo de todo el diagrama.

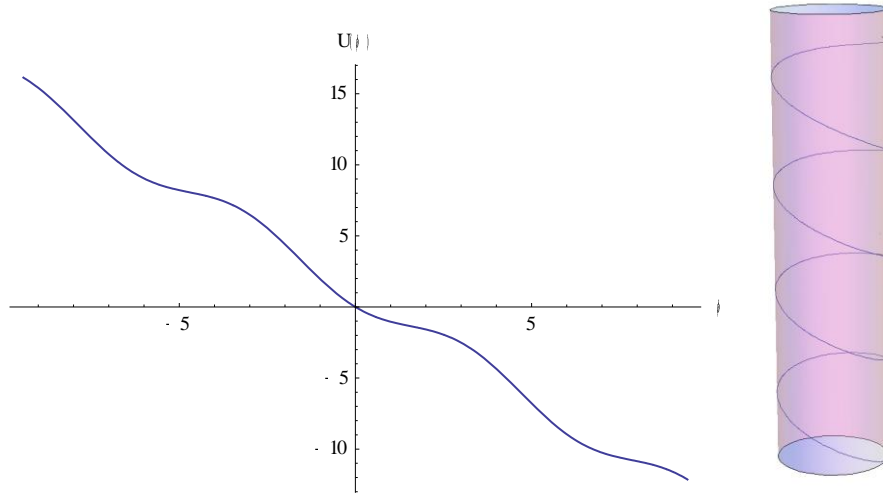


Figura 5.10 Energía potencial $U(\phi)$ para $I/I_c = 1.5$

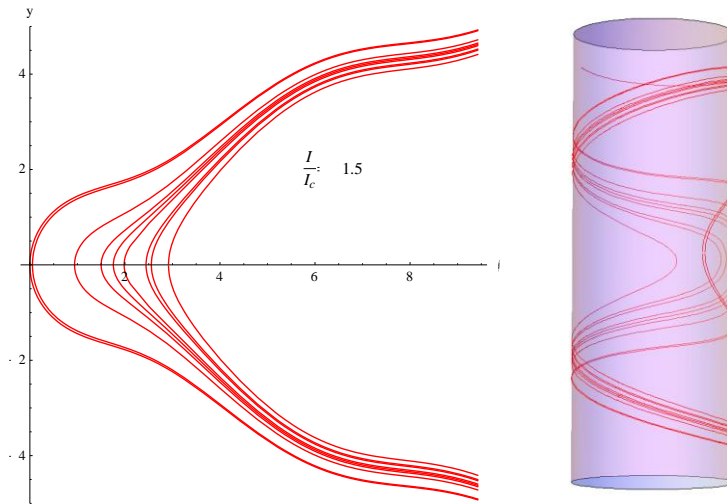


Figura 5.11 Plano y cilindro fase para $I/I_c = 1.5$

Cuando $I > I_c$, es probable que exista un rompimiento de pares de Cooper en los electrodos dando lugar a una corriente normal I_n , por lo que la unión deja de ser un sistema conservativo. Esto sucede si el voltaje V administrado a la unión es mucho mayor al voltaje asociado a la brecha de energía de los electrodos que conforman la unión:

$$V \gg \frac{|\Delta_1(T) + \Delta_2(T)|}{e}. \quad (5.33)$$

Recordemos también que hay rompimiento de pares de Cooper si la temperatura T es cercana a la temperatura crítica T_c de un superconductor, por lo que la energía asociada a la brecha es mucho menor a la energía térmica:

$$2\Delta(T) \ll k_B T. \quad (5.34)$$

Hasta aquí concluimos nuestro análisis para el caso conservativo, demostrando así que es posible dar una descripción cualitativa del comportamiento de la unión Josephson a través de estudio de la expresión (5.19b) para la energía total del sistema. Esto nos motiva a continuar con nuestro estudio dinámico de este dispositivo,

considerando ahora la presencia de la corriente normal I_n , lo que da lugar a un estado resistivo, o dicho en términos dinámicos, un amortiguamiento en el sistema.

5.6 Estado Resistivo (Caso amortiguado)

Ahora estudiaremos la situación cuando se presenta amortiguamiento en el sistema, es decir, cuando $\alpha \neq 0$ en la ecuación (5.14). En este caso tenemos completo el circuito equivalente mostrado en la Fig. 5.1. Como se ha comentado, la expresión (5.14) no tiene solución analítica, por lo que se recurrirá a técnicas cualitativas y al método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener información sobre su comportamiento. De la misma manera que en el caso estacionario, la expresión (5.14) puede reescribirse como un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} a) \phi' &= y \\ b) y' &= \frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi - \alpha y \end{aligned} \tag{5.35}$$

donde el término $-\alpha y$ está asociado a la corriente I_n , el término y' a la corriente de desplazamiento I_d , $\text{sen}\phi$ a la supercorriente I_s y ϕ' al voltaje administrado a la unión. Comenzaremos por analizar los puntos de equilibrio o puntos fijos del sistema a partir de la matriz jacobiana de (5.35) (ver Apéndice B), para conocer su influencia sobre el flujo en el diagrama fase, el cual será nuestra herramienta para describir el comportamiento del sistema en el estado resistivo.

5.6.1 Matriz Jacobiana y puntos fijos

Los puntos fijos son aquellos donde $y' = 0$ y $\phi' = 0$, por lo que satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned} a) \phi' &= y^* = 0; \\ b) y' &= \text{sen}\phi^* - \frac{I}{I_c} = 0 \Rightarrow \cos\phi^* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2} \end{aligned} \tag{5.36}$$

válidas solamente cuando $I/I_c \leq 1$ (Fig. 5.12). La matriz jacobiana \mathbf{A} del sistema de ecuaciones (5.35) es dada de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} & \frac{\partial \phi'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial \phi} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\phi & -\alpha \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

Al evaluar la matriz \mathbf{A} en estos puntos fijos:

$$\mathbf{A}|_{\phi^*, y^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\phi^* & -\alpha \end{pmatrix}, \tag{5.38}$$

se obtendrá información sobre la estabilidad de los mismos, gracias a la traza y al determinante de la matriz:

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{A} &= -\alpha < 0; \\ \det \mathbf{A} &= \cos\phi^* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2} \end{aligned} \tag{5.39}$$

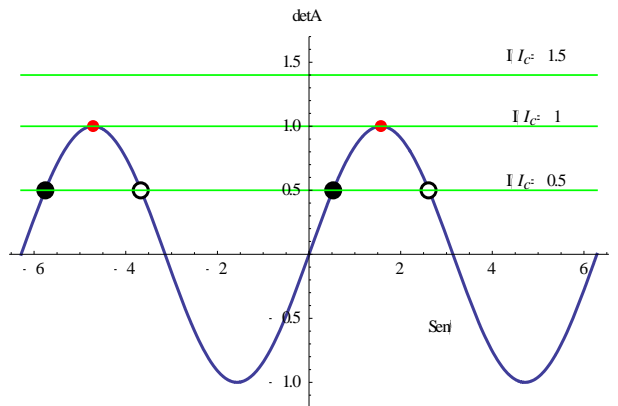


Figura 5. 12



La clasificación de los puntos fijos está determinada por la traza y el determinante así como del valor del parámetro I/I_c , teniendo los siguientes casos:

- Para $I/I_c < 1$:
 - a) Si $\det \mathbf{A} > 0$ y $(\text{tr} \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A} = \alpha^2 - 4[1 - (I/I_c)^2] > 0$ tenemos un nodo estable.
 - b) Si $\det \mathbf{A} < 0$ existe un punto silla.
- Para $I/I_c = 1$, $\det \mathbf{A} = 0$; el nodo estable y el punto silla se unen en una bifurcación de nodo-silla creando un punto semiestable.
- Para $I/I_c > 1$, no hay puntos fijos.

A diferencia del caso conservativo, en el caso resistivo no hay presencia de centros en el plano fase, por lo que difícilmente se llevarán a cabo oscilaciones Josephson uniformes Sin embargo, se tiene la presencia de los puntos silla acompañados ahora de nodos estables. Los nodos estables son conocidos como atractores debido a que atraen las trayectorias del diagrama fase hacia ellos cuando $t \rightarrow \infty$, haciendo que el sistema tienda a un estado estacionario estable, mientras que los puntos silla las repelen debido a que el sistema se encuentra en un estado estacionario inestable. En cuanto al punto semiestable, podemos decir que es aquel que se comporta como repulsor y atractor a la vez, esto depende de cómo nos acerquemos a él, es decir, depende de las condiciones iniciales, como el $\det \mathbf{A} = \cos \phi^*$ para valores $\phi^* < \pi/2$ el punto se comporta como un atractor en tanto que para $\phi^* > \pi/2$ como un repulsor.

En la Fig. 5.13 se muestran los retratos fase para distintos valores de I/I_c y con un valor fijo de α , donde los puntos fijos atractores están representados por puntos de color negro, los repulsores por puntos blancos y los semiestable por puntos rojos. También se grafican las nulclinas, las cuales son aquellas curvas que indican donde el flujo es puramente vertical ($\phi' = 0$) o puramente horizontal ($y' = 0$) y son dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 a) \quad y = 0 \quad \text{cuando} \quad \phi' = 0; \\
 b) \quad y = \alpha^{-1} \left(\frac{I}{I_c} - \text{sen} \phi \right) \quad \text{cuando} \quad y' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

Por la relaciones de Josephson (5.1), la primera expresión indica que cuando el voltaje V suministrado a la unión es nulo no circulará una corriente normal I_n , mientras que la segunda indica que cuando la corriente de desplazamiento I_d es nula, I_n es igual a la diferencia de la corriente I suministrada por la fuente de potencial con la supercorriente I_s . De manera que las nulclinas indican dentro del diagrama fase los puntos en los que se alcanzan estos estados.

5.6.2 Bifurcación nodo-silla

En la Fig. 5.13 podemos observar que los puntos fijos son los puntos de intersección entre ambas nulclinas, y al variar el parámetro I/I_c desde un valor menor a 1, habrá un desplazamiento vertical de la nulclina (5.40b), por lo que los puntos fijos se acercarán hasta “colisionar” creando un punto semiestable cuando $I/I_c = 1$ que posteriormente desaparece cuando $I/I_c > 1$. Este comportamiento dentro del diagrama fase es conocido como **bifurcación nodo-silla** debido a que el cambio de parámetro I/I_c provoca un cambio de estabilidad en los puntos fijos

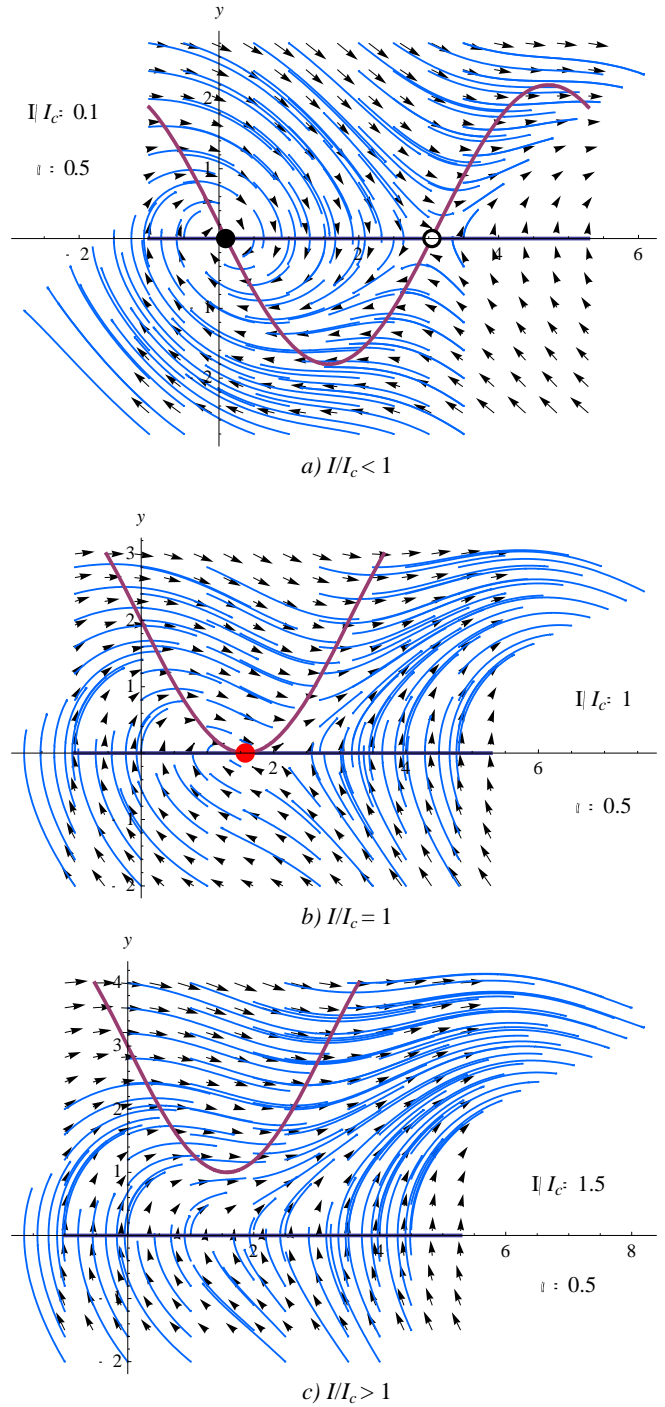


Figura 5. 13 Plano fase para distintos valores del parámetro I/I_c fijando α .

5.6.3 Ciclos límite

Cuando $I/I_c > 1$ no hay puntos fijos, significa que aparentemente la unión no presentará en ningún momento un estado estacionario y no existen movimientos periódicos, por lo que no se presentarían ni oscilaciones ni rotaciones de tipo Josephson, debido a la presencia de electrones libres a causa del rompimiento de los pares de Cooper al aumentar el voltaje V sobre la unión. El almacenamiento de energía se reduce ya que hay disipación de la misma a causa del aumento en la intensidad de la corriente normal.

Sin embargo, cuando $I/I_c > 1$ bajo ciertas condiciones existe un ciclo límite, que es una curva cerrada, que atrae o repele a otras órbitas del diagrama fase dependiendo de su estabilidad. La existencia de este ciclo límite, garantiza que el sistema realiza un movimiento periódico cuando $I/I_c > 1$. La estabilidad de los ciclos límite se clasifica de forma similar a la de los puntos fijos:

- Si las trayectorias se aproximan al ciclo límite, se dice que este es *estable* o *atractor*.
- El ciclo es *inestable* si las trayectorias próximas a él son repelidas.
- Si el ciclo es atractor y repulsor a la vez, se dice que es *semiestable*.

Lo anterior se ilustra en la Fig. 5.14. Cabe mencionar que los ciclos límites estables se presentan en sistemas que oscilan aún en ausencia de fuerzas periódicas externas, como es el caso de la unión Josephson que para un voltaje nulo circula una supercorriente dando origen a oscilaciones y rotaciones Josephson.

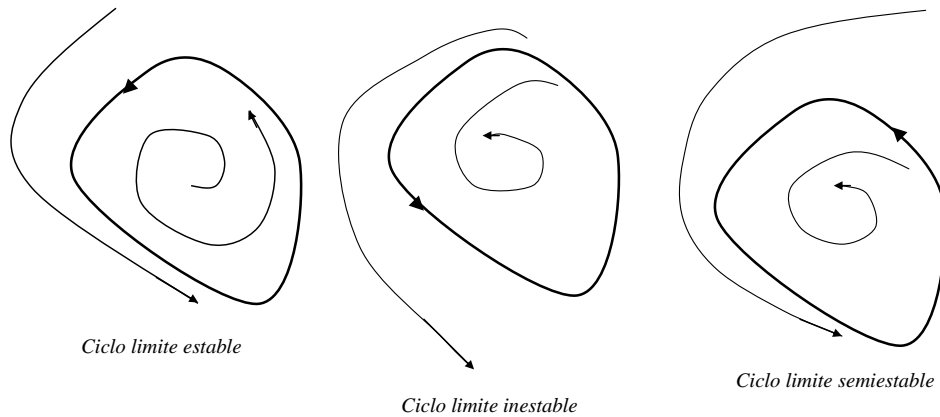


Figura 5. 14 Ejemplos de ciclos limites

EXISTENCIA DE UN CICLO LÍMITE

Para demostrar la existencia de un ciclo límite, consideremos la nulclina dada en (5.40b), que se muestra en la Fig. 5.15.

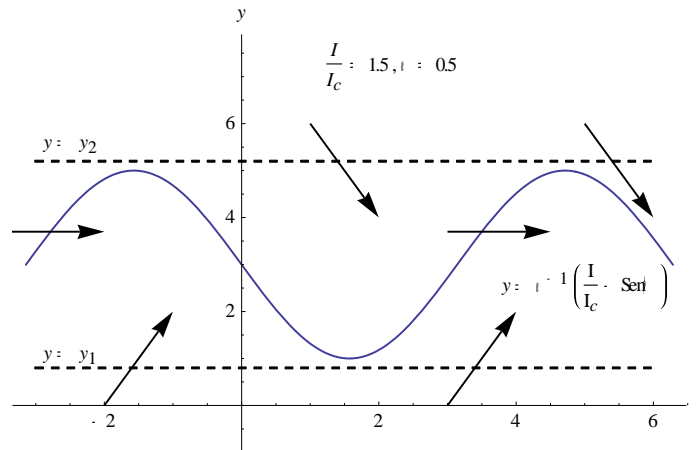


Figura 5. 15 Banda $y_1 < y < y_2$

En esta figura se muestra la región $y > 0$ del diagrama fase cuando $I/I_c > 1$ con la nulclina $y = \alpha^{-1}(I/I_c - \text{sen}\phi)$. Observamos que el flujo se dirige hacia abajo por encima de la nulclina y hacia arriba por debajo de esta, confinaremos nuestras trayectorias a la banda $y_1 < y < y_2$ donde que $0 < y_1 < \alpha^{-1}(I/I_c - 1)$ e $y_2 > \alpha^{-1}(I/I_c + 1)$, ya que todas entran a esta región, tanto por la parte superior como por la inferior. Dentro de esta banda, el flujo siempre es a la derecha ya que $y > 0$ implica que $\phi' > 0$. Como $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$ son equivalentes sobre el ci-

lindro fase, centramos nuestra atención en la región rectangular $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $y_1 \leq y \leq y_2$, vemos que todas las órbitas que entran al rectángulo no pueden salir de él, permaneciendo ahí durante un tiempo infinito. Este rectángulo contiene toda la información del comportamiento del flujo a tiempos grandes (Fig. 5.16). El Teorema Poincaré-Bendixson (ver Apéndice C), indica que cualquier órbita que permanezca en una región limitada del espacio fase de un sistema dinámico se acerca a una órbita cerrada, por lo que podemos asegurar la existencia de un ciclo límite.

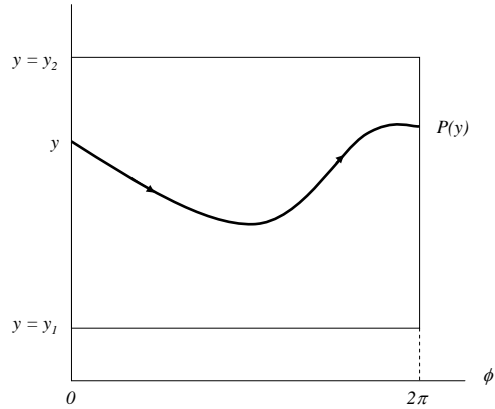


Figura 5. 16 Caja $0 < \phi < 2\pi$, $y_1 < y < y_2$

Ahora consideraremos una trayectoria que comienza en una altura y del lado izquierdo de la caja y termina en el lado derecho de la misma en una altura $P(y)$. La relación que existe entre $P(y)$ e y es conocido como el **mapeo de Poincaré** y nos indica cómo cambia la altura de una trayectoria después de una vuelta alrededor del cilindro. También es conocido como **mapeo de primer retorno** debido a que solo consideramos la primera vuelta que da la trayectoria sobre el cilindro.

No podemos calcular $P(y)$ explícitamente, pero si podemos mostrar que hay una altura y^* tal que $P(y^*) = y^*$, lo cual nos indica que dicha trayectoria es una órbita cerrada que representa un movimiento periódico. Para demostrar la existencia de y^* consideramos una trayectoria que inicia en $y = y_1$, $\phi = 0$. Deseamos que

$$P(y_1) > y_1.$$

Esto se cumple porque el flujo va estrictamente hacia arriba y la trayectoria no puede regresar a la línea $y = y_1$. Por un argumento similar

$$P(y_2) < y_2.$$

$P(y)$ es una función continua y monótonica, debido a que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (5.35) dependen continuamente de las condiciones iniciales, esto si el campo vectorial es lo suficientemente suave, y además está prohibido que dos o más trayectorias se crucen entre sí. Todo esto conlleva a que la función $P(y)$ tenga la forma mostrada en la Fig. 5.17. Por el teorema del valor intermedio, la gráfica de $P(y)$ debe intersectar a la línea recta de 45° en *algún lugar*. En esa intersección se encuentra la altura y^* deseada, con la que se demuestra al menos la existencia de una curva cerrada. Esta es una técnica que nos permite encontrar de manera numérica al menos un ciclo límite dentro de una región establecida, el código fuente de la Fig. 5.16 puede consultarse en el apéndice D. Otra manera de demostrar la existencia de una órbita cerrada de manera analítica es a través de método de Melnikov, el cual puede consultarse en la referencia[5].

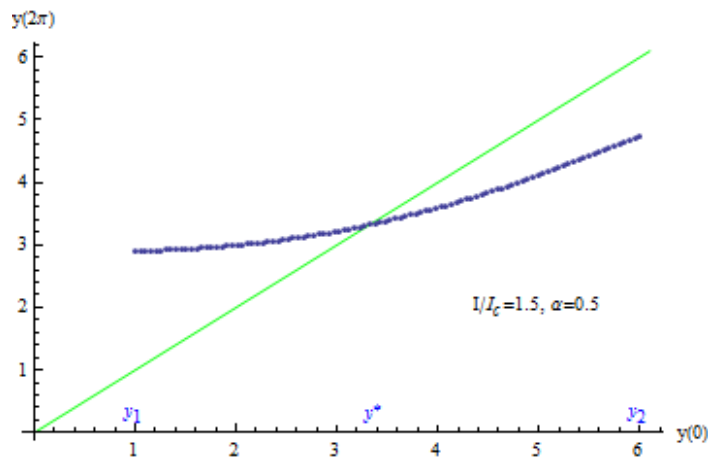


Figura 5. 17 Función $P(y)$ para $I/I_c = 1.5$ y $\alpha = 0.5$



UNICIDAD DEL CICLO LÍMITE

Hemos demostrado la existencia de un ciclo límite dentro de la región $(0 \leq \phi \leq 2\pi, y_1 < y < y_2)$, sin embargo, existe la posibilidad de que $P(y) = y$ represente una infinidad de trayectorias cerradas en esta región. Para demostrar que el ciclo límite es único, realizaremos un argumento por medio de la energía del sistema.

Sean $y_s(\phi)$ y $y_i(\phi)$ dos trayectorias cerradas que rodean al cilindro. Los subíndices s e i denotan superior e inferior respectivamente, por lo tanto, $y_s(\phi) > y_i(\phi)$. Para nuestra demostración, partimos de la siguiente expresión que está relacionada con la energía total del sistema:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} y^2 - \cos \phi - \frac{I}{I_c} \phi \right) = -\alpha y^2. \quad (5.44)$$

la cual se obtiene de manera similar a la ecuación (5.18). Rescribiendo (5.44) tenemos que

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} y^2 - \cos \phi \right) = \frac{I}{I_c} y - \alpha y^2. \quad (5.45)$$

donde se hizo uso de (5.35a). Denominamos $\frac{1}{2} y^2 - \cos \phi = E_1$, entonces

$$\frac{dE_1}{d\tau} = \frac{I}{I_c} y - \alpha y^2. \quad (5.46)$$

Usando la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{dE_1}{d\tau} = \frac{dE_1}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = y \frac{dE_1}{d\phi}, \quad (5.47)$$

sustituyendo (5.47) en (5.46) llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{dE_1}{d\phi} = \frac{I}{I_c} - \alpha y. \quad (5.48)$$

Durante una trayectoria de rotación $y(\phi)$ alrededor del cilindro, el cambio de energía ΔE_1 debe ser nulo. Entonces, integrando (5.48) en un periodo 2π tenemos

$$\Delta E_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dE_1}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{I}{I_c} - \alpha y \right) d\phi = 0 \quad (5.49)$$

de la cual se obtiene que:

$$\int_0^{2\pi} y(\phi) d\phi = \frac{2\pi I}{\alpha I_c} \quad (5.50)$$

donde $2\pi I / \alpha I_c$ es constante para un valor dado de I/I_c . Esto nos lleva a una contradicción, ya que suponíamos que $y_s(\phi) > y_i(\phi)$, sin embargo, la expresión (5.50) nos demuestra que solo debe existir una trayectoria cerrada $y(\phi)$ para $I/I_c > 1$, es decir,

$$\int_0^{2\pi} y_s(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} y_i(\phi) d\phi = \frac{2\pi I}{\alpha I_c},$$

así se demuestra que el ciclo es único.

ESTABILIDAD DEL CICLO LÍMITE

Una vez demostrada la existencia y unicidad del ciclo límite, ahora podemos determinar su estabilidad mediante la evaluación de su exponente característico h [6] a través de la siguiente expresión:

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial \phi'}{\partial \phi} + \frac{\partial y'}{\partial y} \right] d\tau \quad (5.51)$$

donde T es el periodo del movimiento. La estabilidad del ciclo depende del valor que adquiera este exponente:

- Si $h < 0$ el ciclo límite es estable.
- Si $h > 0$, el ciclo es inestable.

En nuestro caso, el exponente característico para el campo vectorial dado por las expresiones (5.35) sobre todo el diagrama fase es

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial \phi'}{\partial \phi} + \frac{\partial y'}{\partial y} \right] d\tau = -\alpha < 0 \quad (5.52)$$

lo que indica que el ciclo límite es estable debido a que estamos considerando para nuestro análisis $\alpha > 0$. En resumen, podemos afirmar la existencia de una órbita cerrada estable y única en $(0 \leq \phi \leq 2\pi, y_1 < y < y_2)$ dentro del diagrama fase, lo cual significa que la unión Josephson en su estado resistivo, tiene la posibilidad de llevar a cabo una rotación Josephson estable cuando $I/I_c > 1$.

5.6.4 Bifurcación homoclínica

Hemos visto que en el diagrama fase del sistema, se lleva a cabo una bifurcación nodo-silla entre puntos fijos cuando el parámetro I/I_c aumenta desde un valor $I/I_c < 1$ hasta 1. Posteriormente, los puntos fijos desaparecen cuando $I/I_c > 1$ y surge un ciclo límite estable que atrae a las trayectorias cercanas a él. Ahora supongamos que el valor del parámetro I/I_c decrece a partir de un valor mayor a 1, entonces la situación que se presenta es distinta. Inicialmente, se tiene la presencia del ciclo límite sin puntos fijos cuando $I/I_c > 1$, posteriormente, cuando se disminuye el valor del parámetro a un valor $I/I_c < 1$, coexistirá el ciclo límite junto con dos punto silla y un nodo como se muestra en la Fig. 5.18a, en esta situación decimos que el sistema es **biestable**. Conforme vayamos disminuyendo el valor del parámetro, el ciclo se acercará a una trayectoria naciente de un punto silla hasta que ambas se fusionan y crean una órbita homoclínica cuando $I/I_c = (I/I_c)_{\text{crítico}}$, es decir, desaparece el ciclo límite y surge una trayectoria que une a dos puntos fijos del mismo tipo, en este caso, los puntos silla (Fig. 5.18b). Cuando el parámetro toma valores $I/I_c < (I/I_c)_{\text{crítico}}$, tendremos solamente la presencia de los puntos nodo y silla (Fig. 5.18c). Este nuevo comportamiento es conocido como **bifurcación homoclínica** y solo es posible si α es bastante pequeño.

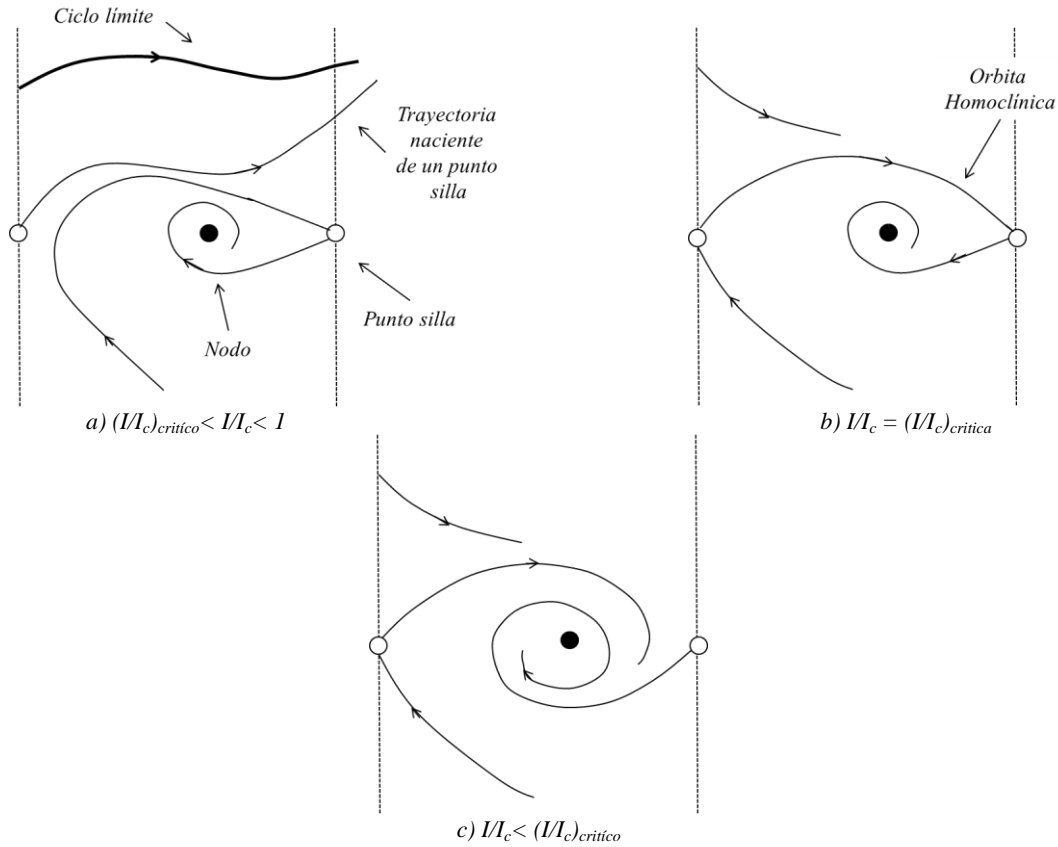


Figura 5. 18 Esquema de la bifurcación homoclínica

Físicamente podemos decir que al reducirse la intensidad de la corriente I suministrada por la fuente de potencial, a la unión se le complica mantener la rotación Josephson. Cuando $I = (I/I_c)_{\text{crítico}}$, la energía suministrada a la unión no es suficiente para compensar la energía disipada debido a la presencia de la corriente normal. Si continua disminuyendo la intensidad de I , el sistema tenderá a un estado estacionario.

HISTÉRESIS EN LA UNIÓN JOSEPHSON

La presencia de una bifurcación homoclínica en el plano fase se ve reflejada en la curva corriente-voltaje del sistema por medio de una histéresis. La Fig. 5.19 ilustra este proceso el cual consiste en lo siguiente: si aumentamos el parámetro I/I_c desde cero hasta 1, tendremos un voltaje promedio nulo, es decir, la unión se encuentra en un estado estacionario promedio. Cuando $I/I_c = 1$, existe un brinco a un valor de $\langle V \rangle$ distinto de cero, que aumenta cuando se incrementa I/I_c . Sin embargo, si disminuimos I/I_c desde un valor mayor 1, $\langle V \rangle$ disminuirá pero no volverá a dar un brinco a cero cuando $I/I_c = 1$, sino que continuará disminuyendo hasta cero cuando $I/I_c = (I/I_c)_{\text{crítico}}$. Esto se debe a que el sistema tiene inercia, es decir, a pesar de disminuir la intensidad de la corriente I , la unión continuará almacenado parcialmente energía a través de una rotación Josephson hasta llegar a un valor crítico $(I/I_c)_{\text{crítico}}$. Después de ese valor crítico, el sistema se encontrará en un estado estacionario promedio.

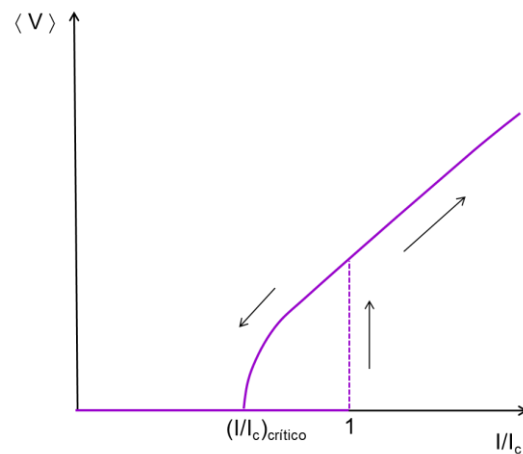
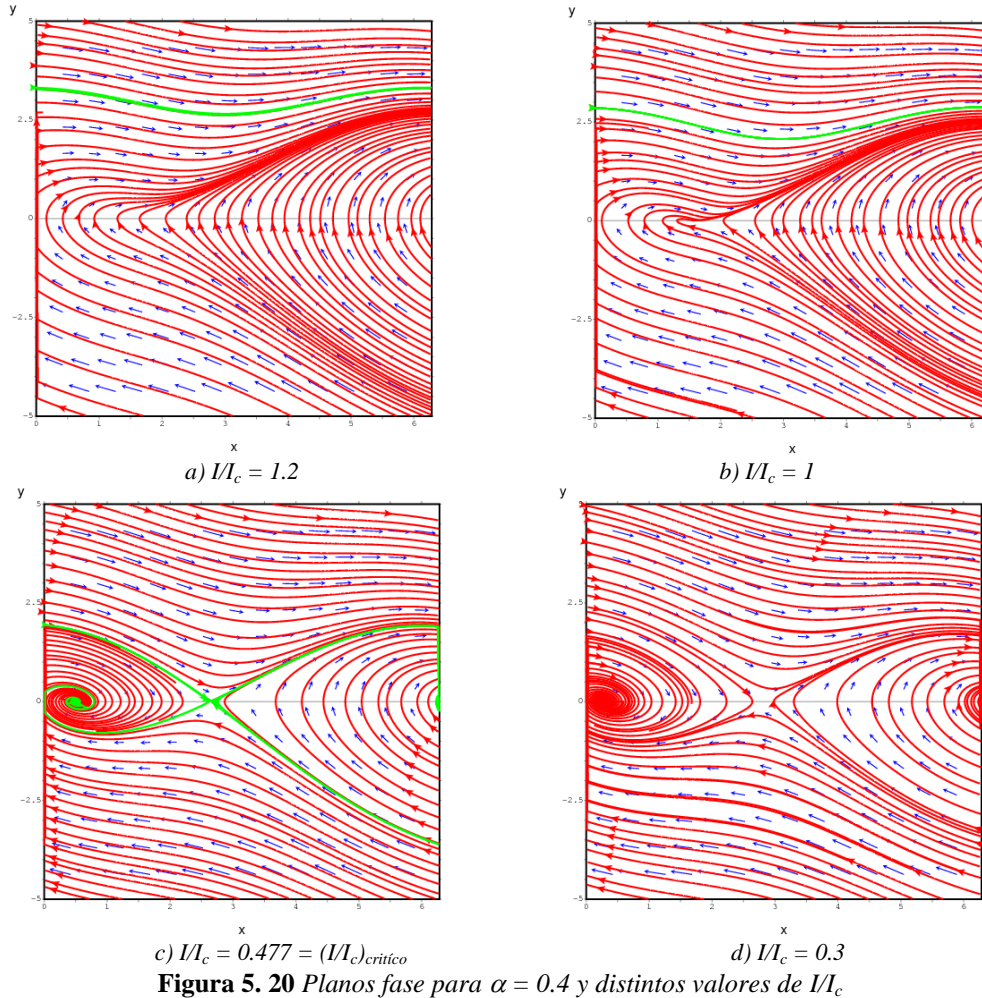


Figura 5. 19 Esquema de histéresis en la curva de corriente-voltaje

Antes de explicar cómo se obtiene esta curva corriente-voltaje, presentamos, como ejemplo, los planos fase para distintos valores de I/I_c obtenidos de manera numérica con α pequeño y fijo (Fig. 5.20). En las figuras 5.20a y 5.20b se puede observar el ciclo límite, el cual está indicado con la trayectoria de color verde, y su influencia en el comportamiento del flujo fase a través de las curvas fase que se acercan tan por arriba como por debajo de este. Como hemos visto, es posible localizar este por medio de técnicas como la mencionada para obtener la Fig. 5.17. La Fig. 5.20c muestra el momento justo en el que se lleva a cabo la bifurcación homoclínica, el valor $I/I_c = (I/I_c)_{\text{crítico}}$ se obtiene de manera numérica y se verá con mayor claridad en la curva de corriente-voltaje. Por último, la Fig. 5.20d muestra el plano fase cuando el ciclo límite ha desaparecido.



5.6.5 Curva de corriente-voltaje

Para obtener la curva corriente-voltaje del sistema para el caso resistivo, primero calculamos el voltaje promedio temporal de la relación Josephson (5.1b):

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar}{2e} \langle \dot{\phi} \rangle, \tag{5.53}$$

donde $\langle \dot{\phi} \rangle$ se obtiene a partir de la expresión (5.7):



$$\langle \dot{\phi} \rangle = \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\tau}{dt} \frac{d\phi}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{T_1} \langle \phi' \rangle; \quad (5.54)$$

recordemos que $d\tau/dt = T_1^{-1} = \omega_p^{-1} = (2eI_c/C\hbar)^{1/2}$ y $V_c = I_c R$. Al sustituir (5.54) en (5.53) obtenemos:

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{\hbar I_c}{2eC}} \langle \phi' \rangle = I_c R \alpha \langle \phi' \rangle = \alpha V_c \langle \phi' \rangle \quad (5.55)$$

donde

$$\langle \phi' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\phi}{d\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.56)$$

La expresión (5.55) nos permite obtener la curva corriente-voltaje para la unión Josephson, sin embargo, debido a que el sistema de ecuaciones (5.35) no tiene solución exacta, se recurren a métodos numéricos para su solución, entre ellos, el de Runge-Kutta de cuarto orden y el de integración numérica de Simpson (ver [7] y [8] para mayor detalle). La Fig. 5.21 muestra las curvas corriente-voltaje obtenidas por estos métodos para distintos valores de α . La variación del parámetro α modifica también el valor crítico $(I/I_c)_{\text{crítico}}$ en el que se lleva a cabo la bifurcación homoclínica. Cuando $\alpha \geq 1$, ya no se presenta un proceso de histéresis debido al alto amortiguamiento en el sistema, es decir, la intensidad de la corriente normal es mucho mayor que la de la supercorriente. En la siguiente sección daremos detalle de esta situación a la que denotaremos como **régimen altamente resistivo**. Las curvas corriente-voltaje presentadas en la Fig. 5.21 son acordes a lo observado experimentalmente, primero por Anderson y Rowell[9] y posteriormente por Shapiro[10] en 1963. El código fuente de estas figuras puede consultarse en el Apéndice D.

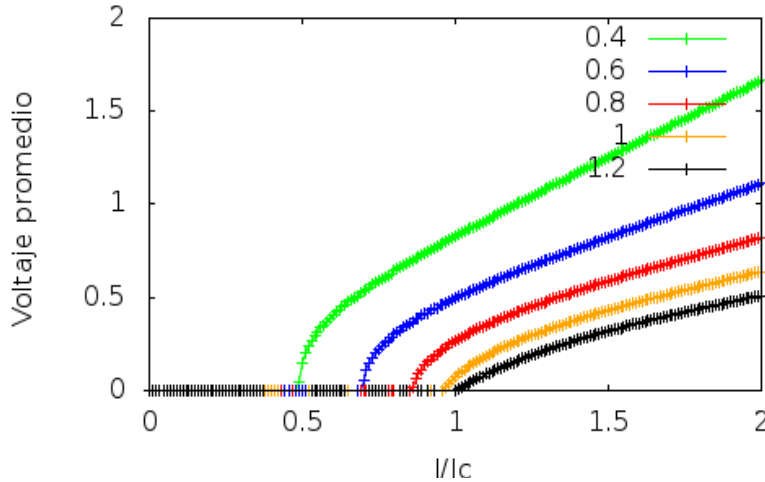


Figura 5. 21 Curvas corriente-voltaje para $\alpha = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ y 1.2

Por otro lado, también presentamos la gráfica del periodo T como función de la corriente I/I_c mostrada en la Fig.22, en la que se puede observar que si $I/I_c \gg (I/I_c)_{\text{crítico}}$, el periodo será mucho menor, es decir, la rotación Josephson se llevará a cabo en un tiempo menor. En cambio, cuando I/I_c tiende a $(I/I_c)_{\text{crítico}}$ por la derecha, $T \rightarrow \infty$, esto debido a la presencia tanto de puntos fijos como de la órbita homoclínica, haciendo tender al sistema a un estado estacionario.

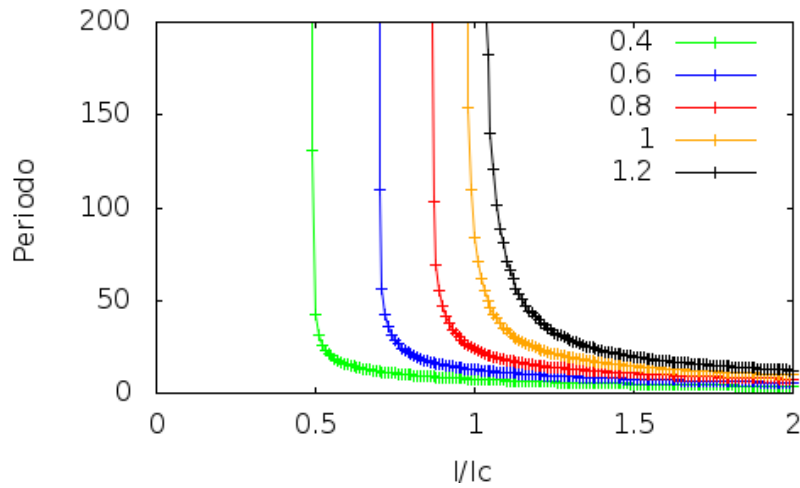


Figura 5. 22 Gráfica T vs. I/I_c para $\alpha = 0.4, 0.8, 1, 1.2$

5.6.6 Diagramas fase con α variable

Para terminar con el análisis del estado resistivo, presentamos el comportamiento de los diagramas fase cuando se varía el parámetro α y se deja fijo I/I_c . Estos diagramas se muestran en la Fig. 5.23 y son muy distintos a los presentados en la Fig. 5.20, sobre todo cuando el amortiguamiento es bastante significativo.

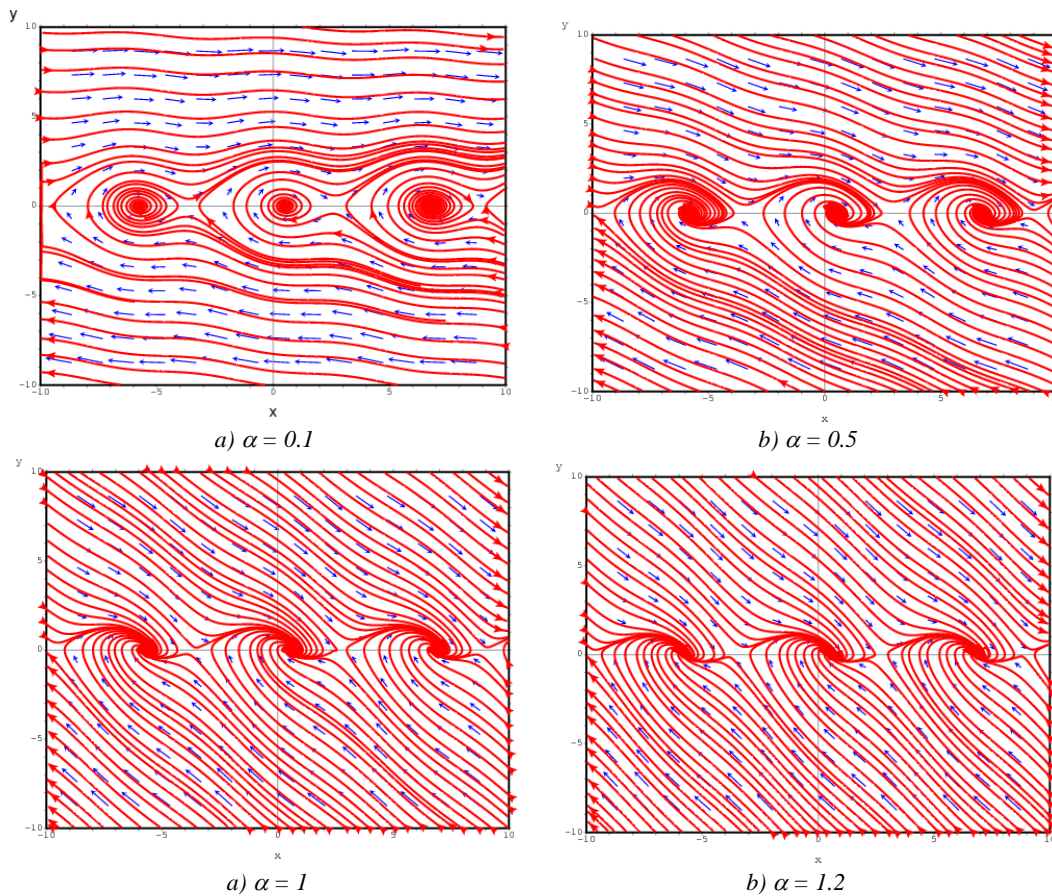


Figura 5. 23 Diagramas fase para distintos valores de $I/I_c = 0.5$



Cuando $\alpha \ll 1$, tenemos la presencia de los puntos fijos (nodo y silla) así como también del ciclo límite, pero conforme va en aumento el amortiguamiento en el sistema, el ciclo se rompe y junto con las demás trayectorias del diagrama fase son atraídas por los nodos, esto significa que la energía administrada por la fuente de potencial y la que almacena el sistema no es suficiente para lograr vencer el amortiguamiento, entonces los pares de Cooper tenderán a romperse aumentando la presencia de electrones libres y disminuyendo la posibilidad de oscilaciones y rotaciones Josephson cuando $\alpha \gg 1$. Si esto sucede, decimos que nos encontramos en el *régimen altamente resistivo o sobreamortiguado*, que describiremos en la siguiente sección.

5.7 Estado altamente resistivo (Caso sobreamortiguado)

La última situación a estudiar es el caso altamente resistivo, donde la intensidad de la corriente normal I_n es mucho mayor a las intensidades de las otras corrientes presentes en la unión, esto se debe a la presencia de un mayor número de electrones libres en comparación con los pares de Cooper. Para iniciar el análisis de este caso, realizaremos un tratamiento a los grupos adimensionales similar al caso conservativo para despreciar el término asociado a la capacitancia de la ecuación (5.9), esto implica considerar que la energía almacenada es depreciable comparada con la energía disipada en el sistema.

5.7.1 Grupo adimensional ε y escala de tiempo \underline{T}_2

Como se mencionó, nos interesa que el primer término de la ecuación (5.9) sea despreciable con respecto a los otros, que a su vez consideramos del mismo orden de magnitud. Como las derivadas y el $\text{sen}\phi$ son de orden unitario $O(1)$, requerimos que:

$$\begin{aligned} a) \frac{1}{\omega_c \underline{T}} &\approx O(1) \\ b) \frac{1}{\omega_p^2 \underline{T}^2} &\ll 1 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Al igualar el primer requisito a 1, se define la escala de tiempo \underline{T}_2 :

$$\frac{1}{\omega_c \underline{T}_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{T}_2 = \frac{1}{\omega_c}. \quad (5.58)$$

Si sustituimos \underline{T}_2 en (5.57b) obtenemos una condición para las frecuencias ω_c y ω_p para la cual la corriente de desplazamiento I_d es despreciable:

$$\frac{\omega_c^2}{\omega_p^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c \ll \omega_p, \quad (5.59)$$

A partir de esta expresión introducimos el *parámetro de McCumber*:

$$\beta = \frac{\omega_c^2}{\omega_p^2} = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar}$$

cuyo rango de valores se encuentra entre 10^{-6} y 10^6 , además depende del tamaño, la geometría y los materiales utilizados en la unión. Así, la ecuación (5.9) toma la siguiente forma:

$$\beta \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{d\phi}{d\tau} + \text{sen}\phi = \frac{I}{I_c} \quad (5.60)$$

Cabe destacar que β y T_2 están relacionadas con el parámetro α y la escala de tiempo T_1 del estado estacionario de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{1}{\alpha^2} \quad \text{y} \quad \frac{T_1^2}{T_2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c} = RC. \quad (5.61)$$

Una vez realizado el análisis dimensional de la expresión (5.9), ahora consideramos despreciable el término asociado a la corriente de desplazamiento al considerar $\beta \rightarrow 0$. Esto nos lleva a una ecuación diferencial de primer orden con solución analítica:

$$f(\phi) = \phi' = \frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi \quad (5.62)$$

donde la prima indica derivada con respecto a τ . Esta expresión tiene la estructura de una ecuación para un oscilador no uniforme $\phi' = \omega - a \text{sen}\phi$ con $\omega = I/I_c$ y $a = 1$.

5.7.2 Puntos fijos y su estabilidad

De la misma manera que en los casos anteriores, necesitamos conocer los puntos fijos (puntos de equilibrio del sistema) para saber cómo inciden en el comportamiento del flujo dentro del plano fase. En este caso sobreamortiguado los puntos fijos ϕ^* son aquellos que satisfacen $f(\phi^*) = 0$ (ver apéndice B), es decir,

$$f(\phi^*) = \frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\phi^* = \frac{I}{I_c} \quad (5.63)$$

la cual implica que:

$$\cos \phi^* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}. \quad (5.64)$$

por lo que solamente existirán puntos fijos para valores $I/I_c \leq 1$, como sucede en el caso resistivo, donde teníamos un punto silla y un nodo para un valor dado del parámetro. La estabilidad de los puntos fijos está determinada por

$$f'(\phi^*) = -\cos \phi^* = \mp \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}, \quad (5.65)$$

Cuando $f'(\phi^*) > 0$ el punto es inestable, si $f'(\phi^*) < 0$ decimos que es estable. La clasificación de los puntos fijos será la siguiente:

- Para $I/I_c < 1$ hay dos soluciones que cumplen lo siguiente:
 - a) $\phi_1^* < \pi/2$ y $f'(\phi_1^*) < 0$, por lo tanto ϕ_1^* es un atractor (nodo).
 - b) $\phi_2^* > \pi/2$ y $f'(\phi_2^*) > 0$, ϕ_2^* es un repulsor (punto silla).
- Para $I/I_c = 1$ solo existe un punto fijo en $\phi^* = \pi/2$ y es semiestable debido a que $f'(\phi^*) = -\cos\phi^* = 0$.

En la Fig. 5.24, se muestra la curva $f(\phi)$ junto con los puntos fijos para distintos valores de I/I_c , los atractores están representados por puntos de color negro, los repulsores por puntos blancos y los semiestable por puntos

rojos. Para mayor detalle sobre la estabilidad de los puntos fijos del sistema en una dimensión, ver el apéndice B.

5.7.2 Bifurcación nodo-silla

De la misma manera que en el caso resistivo, la aparición de puntos fijos en el plano fase depende del valor de I/I_c , que al variar su valor se logra un desplazamiento vertical de la curva $-\text{sen}\phi$ sobre el eje ϕ' (Fig. 5.24), provocando una bifurcación nodo-silla y un cambio de estabilidad en los puntos fijos.

DESCRIPCIÓN DEL FLUJO EN EL PLANO FASE

Otra forma de visualizar el comportamiento de los movimientos periódicos en el sistema es a través de diagramas circulares para distintos valores de I/I_c , mostrados en las Fig. 5.24 al lado derecho de sus respectivos planos fase.

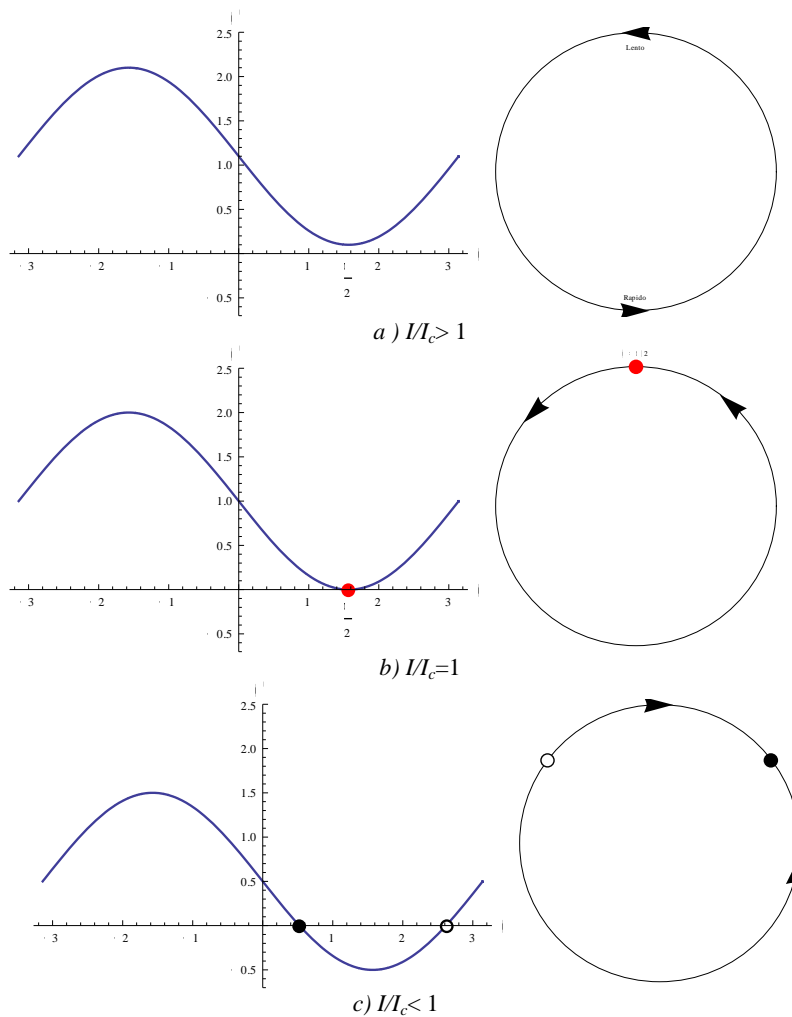


Figura 5. 24 Bifurcación nodo-silla. Flujo lineal y circular de la función $\phi'=I/I_c - \text{sen}\phi$

Una descripción detallada se desarrolla a continuación:

- Cuando $I/I_c < 1$ (Fig. 5.24c), tendremos dos puntos fijos: un nodo y un silla, es decir, hay puntos de equilibrio para esta situación. Todas las trayectorias serán atraídas al nodo cuando $\tau \rightarrow \infty$.

- Cuando $I/I_c = 1$ (Fig. 5.24b), el sistema deja de oscilar completamente, debido a que ha nacido un punto fijo semiestable en $\phi = \pi/2$.
- Finalmente, cuando I/I_c es ligeramente mayor que 1 (Fig. 5.24a), hay una rotación Josephson bastante no uniforme. En este caso, el punto fase $\phi(\tau)$ le toma bastante tiempo pasar por la zona cercana a $\phi = \pi/2$ conocida como *cuello de botella*. Una vez que pasa esta zona, recorre el resto del círculo en una escala de tiempo más rápida.

Todas estas situaciones pueden comprobarse a través de la obtención de las soluciones analíticas de la ecuación (5.62).

5.7.3 Solución analítica

Para obtener una solución exacta para el estado altamente resistivo, resolvemos de manera analítica la ecuación (5.62), por medio del método de separación de variables:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau = \int_{\phi_0}^{\phi(\tau)} \frac{d\phi}{\frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi} \quad (5.66)$$

De manera general, la solución analítica de la integral[11] es:

$$\int \frac{dx}{a + b \text{sen}x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left(\frac{a \tan\left(\frac{x}{2}\right) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right); & a > b \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left(\frac{b + a \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{b^2 - a^2}}{b + a \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{b^2 - a^2}} \right); & a < b \end{cases}$$

Para nuestro caso:

$$\tau(\phi) - \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\frac{I}{I_c} \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1}{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\frac{I}{I_c} \tan\left(\frac{\phi_0}{2}\right) - 1}{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}} \right) \right]; \quad \frac{I}{I_c} > 1$$

$$\tau(\phi) - \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}} \left[\ln \left(\frac{1 + \frac{I}{I_c} \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}}{1 + \frac{I}{I_c} \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}} \right) - \ln \left(\frac{1 + \frac{I}{I_c} \tan\left(\frac{\phi_0}{2}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}}{1 + \frac{I}{I_c} \tan\left(\frac{\phi_0}{2}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}} \right) \right]; \quad \frac{I}{I_c} < 1$$

(5.67)

De estas expresiones obtenemos $\phi(\tau)$ de manera algebraica:



$$\phi(\tau) = 2 \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{I}{I_c} \right)^{-1} \left(A(\tau) \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2} - 1 \right) \right\}; \quad \frac{I}{I_c} < 1 \quad (5.68)$$

$$\text{con } A(\tau) = \frac{\left(1 + e^{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2} (\tau - \tau_0)} \right) \left(1 + \frac{I}{I_c} \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) + \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2} \left(1 - e^{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2} (\tau - \tau_0)} \right)}{\left(1 - e^{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2} (\tau - \tau_0)} \right) \left(1 + \frac{I}{I_c} \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) + \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2} \left(1 + e^{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2} (\tau - \tau_0)} \right)}$$

$$\phi(\tau) = 2 \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{I}{I_c} \right)^{-1} \left(1 + B(\tau) \sqrt{\left(\frac{I}{I_c} \right)^2 - 1} \right) \right\}; \quad \frac{I}{I_c} > 1 \quad (5.69)$$

$$\text{con } B(\tau) = \tan \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c} \right)^2 - 1} (\tau - \tau_0)}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{\frac{I}{I_c} \tan \left(\frac{\phi_0}{2} \right) - 1}{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c} \right)^2 - 1}} \right) \right]$$

La Fig. 5.25c muestra la gráfica de la expresión (5.68), donde podemos observar como el sistema no alcanza a completar una oscilación, pero debido al exceso de amortiguamiento rápidamente se mantiene en una sola posición por un lapso grande de tiempo, lo cual reafirma la idea de que para el caso $I/I_c < 1$, todas las trayectorias tenderán al punto nodo permaneciendo un tiempo indefinido. En términos de la unión Josephson, esto quiere decir que el dispositivo comienza a cargarse absorbiendo energía de la supercorriente que a su vez también va perdiendo energía debida al exceso de corriente normal, lo cual provoca el rompimiento de pares Cooper. El dispositivo a no poder absorber más energía de la supercorriente dejará de cargarse pero no cederá de nuevo energía a la supercorriente por lo que no habrá una oscilación Josephson completa. En la Fig. 5.25b se muestra la falta de movimiento oscilatorio cuando $I/I_c = 1$, debido a la presencia del punto semiestable, lo que significa que no hay un intercambio de energía entre la unión y la supercorriente. Finalmente, cuando I/I_c es ligeramente mayor a 1 no existen puntos fijos, sin embargo, en la vecindad de $\phi = \pi/2$, continúa la presencia virtual del punto fijo semiestable, la cual denotaremos como *fantasma* de nodo-silla, que provoca un paso lento del flujo en esta zona conocida como cuello de botella, y que se muestra con mayor claridad en la gráfica de la expresión (5.69) (Fig. 5.25a). Una vez pasando el cuello de botella el flujo es mucho más rápido. En la juntura Josephson significa que la carga/descarga parcial se realiza en un lapso muy amplio de tiempo debido a la presencia de una corriente normal bastante intensa, pero cuando la diferencia de fase adquiere valores alejados a los del cuello de botella, la carga/descarga se realiza de una manera muy rápida, dando lugar a rotaciones Josephson no uniformes. Estas rotaciones todavía se llevan a cabo gracias a la presencia de la fuente de potencial que administra energía extra a la unión para almacenar y poder intercambiar con la supercorriente. En la Fig. 5.26 se muestra el comportamiento del flujo en el diagrama circular, donde se indica que zonas las recorre de manera rápida o de manera lenta para el caso en que aparece el cuello de botella.

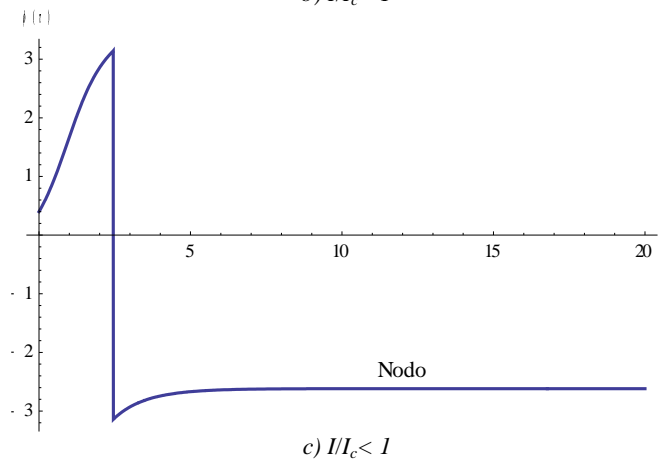
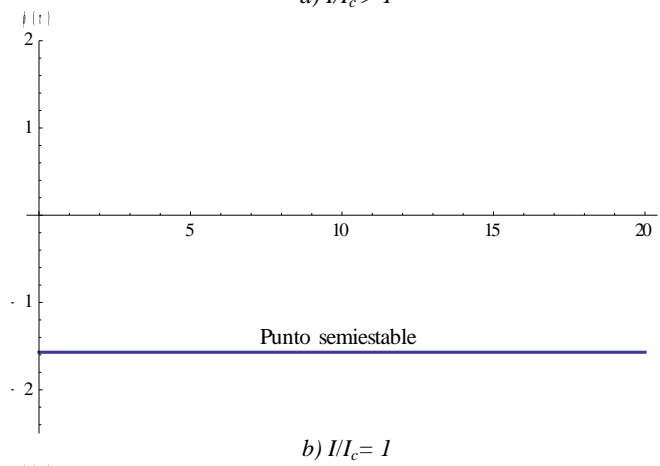
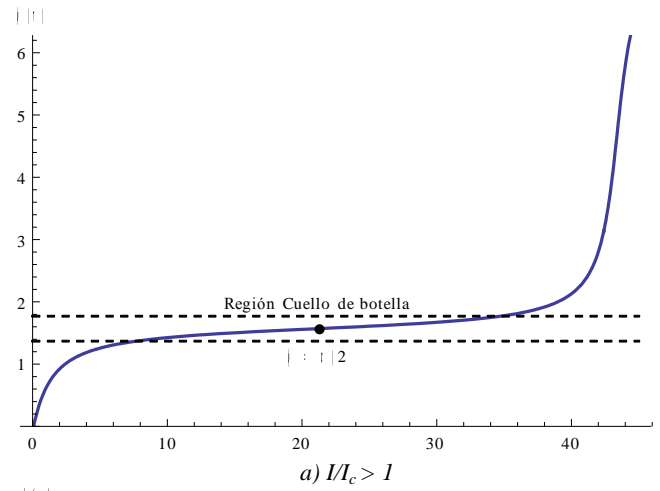


Figura 5. 25 Gráficas $\phi(\tau)$ para distintos valores de I/I_c

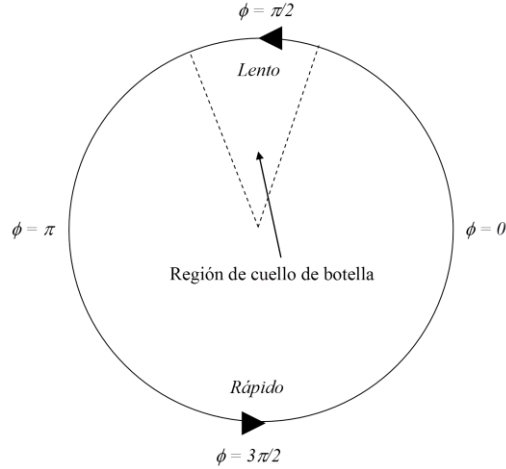


Figura 5. 26 Fenómeno de cuello de botella sobre el círculo

PERIODO DE OSCILACIÓN

En el caso cuando $I/I_c \leq 1$, las oscilaciones Josephson no se llegan a completar o simplemente no existen, por lo que no tiene sentido hablar de un periodo de oscilación. En cambio, para valores $I/I_c > 1$ el periodo de la rotación Josephson puede obtenerse analíticamente, de la siguiente manera:

$$T = \int d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi} \quad (5.70)$$

donde se hace uso de la ecuación (5.62) para sustituir $d\tau/d\phi$. El resultado de resolver la integral es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}} \quad (5.71)$$

En la Fig. 5.27 podemos observar la gráfica de esta expresión, observándose que para valores de I/I_c cercanos a 1 el periodo de rotación tiende a infinito, en cambio, si $I/I_c \gg 1$, el periodo tiene a cero, lo cual nos indica que las rotaciones tienden a ser más rápidas.

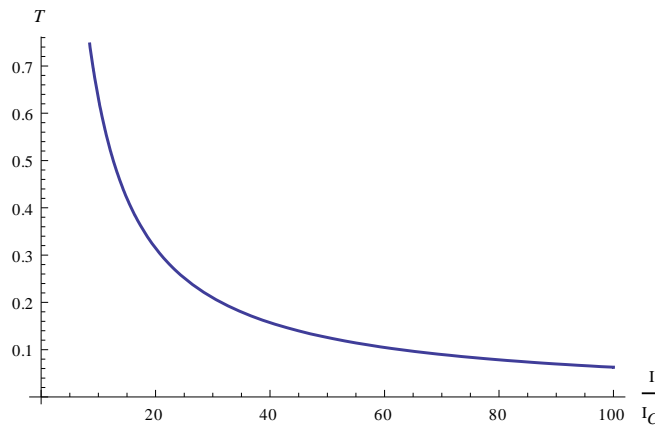


Figura 5. 27 Gráfica T vs. I/I_c

En cambio cuando I/I_c se aproxima a 1 por la derecha ($I/I_c \rightarrow 1^+$), el periodo diverge, acercándonos así a la región de cuello de botella. Para conocer la manera como T se va a infinito, realizamos el siguiente desarrollo:

$$\sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{I}{I_c} + 1} \sqrt{\frac{I}{I_c} - 1} \approx \sqrt{2} \sqrt{\frac{I}{I_c} - 1}$$

Así

$$T_{\text{cuello de botella}} \approx \sqrt{2} \pi \left(\frac{I}{I_c} - 1\right)^{-1/2} \quad (5.72)$$

donde se observa que satisface una ley de escalamiento la cual satisface una **ley de escalamiento de raíz cuadrada** $(a_c - 1)^{-1/2}$ característica de los sistemas que se acercan a la bifurcación nodo-silla.

5.7.4 Curva de corriente-voltaje para el limite sobreamortiguado

Para este caso altamente resistivo es posible obtener de manera analítica la curva de corriente-voltaje, a partir de la expresión (5.53). El promedio $\langle \dot{\phi} \rangle$ se calcula de manera similar al caso resistivo pero considerando la escala de tiempo T_2 :

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\tau}{dt} \frac{d\phi}{d\tau} \right\rangle = \frac{2eI_c R}{T_2} \langle \phi' \rangle \quad (5.73)$$

recordando que $d\tau/dt = T_2^{-1} = 2eI_c R/\hbar$ y $V_c = I_c R$. Por lo tanto

$$\langle V \rangle = I_c R \langle \phi' \rangle = V_c \langle \phi' \rangle \quad (5.74)$$

Hay dos situaciones a considerar:

- Cuando $I \leq I_c$, todas las soluciones de la ecuación de movimiento se aproximan a un punto fijo $\phi^* = \text{sen}^{-1}(I/I_c)$, donde $-\pi/2 \leq \phi^* \leq \pi/2$. De este modo, $\phi' = 0$ y $\langle V \rangle = 0$, por lo que se obtiene un estado estacionario.
- El otro caso es cuando $I > I_c$, todas las soluciones de la ecuación de movimiento son periódicas con periodo T dado por la ecuación (5.71). Calculamos $\langle \phi' \rangle$ tomando el promedio sobre un ciclo:

$$\langle \phi' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\phi}{d\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.75)$$

Sustituyendo (5.74) en (5.73) obtenemos el voltaje promedio para $I \geq I_c$:

$$\langle V \rangle = V_c \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1} \quad (5.76)$$

En resumen, el voltaje promedio esta dado como:

$$\langle V \rangle = \begin{cases} 0 & \text{para } I \leq I_c \\ V_c \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1} & \text{para } I > I_c \end{cases} \quad (5.77)$$

La curva voltaje-corriente se muestra en la Fig. 5.28, como se observa, el voltaje promedio permanece nulo para $I/I_c \leq 1$, debido a la ausencia de oscilaciones promedio. Cuando $I/I_c > 1$, $\langle V \rangle$ se incrementa paulatinamente hasta que la curva tiende asintóticamente aun comportamiento de tipo óhmico, es decir, $V \approx IR$ cuando $I/I_c \gg 1$, lo que significa que la supercorriente tenderá a desaparecer y solamente habrá presencia de la corriente normal, esto debido a rompimiento de pares de Cooper.

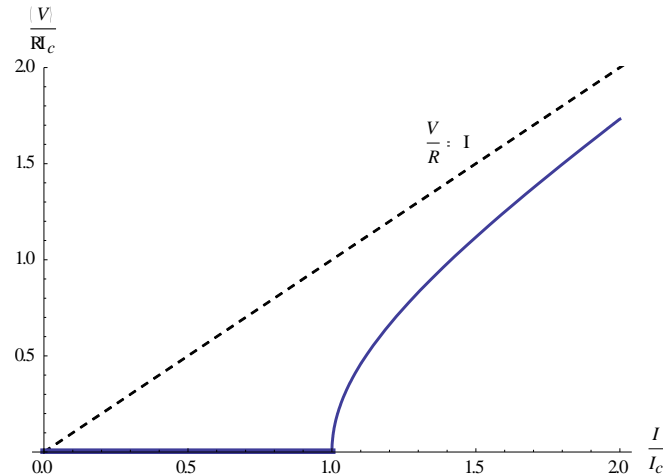


Figura 5. 28 Curva corriente-voltaje para el caso sobreamortiguado

Referencias

- [1] McCumber D. E. *Tunneling and Weak-Link Superconductor Phenomena Having Potential Device Applications*. Journal of Applied Physics Vol. 39, No. 6, pp. 2503-2508, May 1968.
- [2] McCumber D. E. *Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions*. Journal of Applied Physics Vol. 39, No. 7, pp. 3113-3118, June 1968.
- [3] Stewart W. C. *Current-Voltage Characteristics of Josephson Junctions*. Applied Physics Letters Vol. 12, No. 8, pp. 277-280, 1968.
- [4] Tricomi F. *Integrazione di un'Equazione Differenziale Presentatasi in Electrotecnica*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, Tome 2, No. 1, pp. 1-20, 1933.
- [5] Guckenheimer J. and Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer. New York. 1983.
- [6] Andronov A. A., Vitt A. A and S. E. Khaikin. *Theory of Oscillators*. Dover Publications Inc. New York. 1987.
- [7] Boyce W. E. y DiPrima R. C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Editorial Limusa. México. 2009.
- [8] Burden R. L. y Faires J. D. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana. México. 1985.
- [9] Anderson P. W. and Rowell J. M. *Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect*. Physical Reviews Letters Vol. 10 No. 6, pp. 230-232, March 1963.
- [10] Shapiro S. *Josephson Currents in Superconducting Tunnelling: The Effect of Microwaves and Other Observations*. Physical Reviews Letters Vol. 11 No. 2, pp. 80-82, July 1963.
- [11] Petit Bois G. *Tables of Indefinite Integrals*. Dover Publications Inc. New York. 1961. p. 117.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo de revisión se presentan herramientas teóricas, conceptuales y matemáticas sobre el estudio de la superconductividad, las cuales nos ayudaron a entender las causas y consecuencias del fenómeno desde los puntos de vista macroscópico y microscópico, lo que nos permite afirmar que este estudio concierne a distintas disciplinas de la Física. Se ha demostrado que, desde el punto de vista termodinámico, este fenómeno es una transición de fase de segundo orden la cual se logra al disminuir la temperatura del sistema a una temperatura crítica T_c . Desde el punto de vista electrodinámico, cuando el sistema se encuentra en el estado superconductor se presenta el efecto Meissner, el cual consiste en la expulsión de un campo magnético externo del interior de la muestra superconductor debido a corrientes superficiales. Por otro lado, en el campo de la mecánica cuántica y de la física del estado sólido, el sistema superconductor muestra una resistencia nula al paso de corriente eléctrica, debido al apareamiento de electrones, conocidos como pares de Cooper, que se lleva a cabo gracias a la interacción fonónica entre el par y la red. Además, el sistema superconductor puede ser caracterizado por una función de onda macroscópica, esto a causa de que los pares de Cooper tienen un comportamiento bosónico. Cabe recordar que los objetivos de los tres primeros capítulos es dar una introducción básica a la superconductividad para entender el efecto Josephson y crear material didáctico para promover la apertura de cursos sobre superconductividad en la licenciatura en Física de la UAM Iztapalapa. Destacamos que se omitieron en estos capítulos, resultados importantes tales como la teoría de Eliashberg o el estudio de los superconductores de alta T_c , esto debido a que no son relevantes para el estudio del efecto Josephson. Estos tópicos pueden anexarse junto con lo presentado en esta tesis para la edición futura de un libro y contribuir a la literatura relacionada con el tema en idioma español, adaptándola a un lenguaje acorde a la realidad mexicana.

Una vez que se presentaron algunas ideas fundamentales sobre la superconductividad desde distintos puntos de vista, dimos paso al estudio dinámico del efecto Josephson, para ello fue necesario realizar otra revisión teórica sobre este efecto, el cual se presenta en dispositivos conocidos como uniones Josephson, enfocándonos solamente a las de tipo túnel. El punto de partida de nuestro análisis dinámico fue representar este dispositivo conectado a una fuente de potencial como un circuito eléctrico y obtener su ecuación de movimiento. Esto es posible si consideramos que en la unión no solamente circula una corriente de pares de Cooper sino también una corriente normal y una de desplazamiento. Obtener la solución analítica de la ecuación diferencial del circuito no es fácil, así que se optó por estudiar el sistema en tres situaciones distintas: conservativa, resistiva y altamente resistiva.

Para el caso conservativo, se despreció el término de la ecuación de movimiento relacionado con la corriente normal y cuyo análisis nos lleva a los siguientes resultados:

- Demostrar que la energía se conserva en este sistema bajo ciertas condiciones, es decir, que la unión almacena energía como si fuese un condensador eléctrico y la intercambia con la corriente de pares de Cooper.
- Es posible realizar un análisis por medio de la conservación de la energía dando como resultado la obtención de diagramas fase tanto en el plano como el cilindro así como también diagramas de energía potencial.
- A partir de los diagramas fase y del potencial, podemos realizar una descripción cualitativa del comportamiento de la unión para distintos valores de la corriente constante I/I_c administrada por la fuente de potencial. Un ejemplo de ello, es la explicación que se da a una situación característica del efecto Josephson: el flujo de supercorriente en la unión cuando hay ausencia de un voltaje aplicado, presentado en la sección 5.4.3.



- Los diagramas fases y de la energía potencial son similares a los de un péndulo sometido a una torca constante por lo que este sistema también es un análogo mecánico de la unión Josephson.

La descripción del comportamiento de la unión en el régimen conservativo y la introducción del término rotaciones Josephson ambos presentados en la sección 5.4, así como también la programación computacional de los cilindros fase son una nueva contribución a la literatura del estudio dinámico de este sistema.

Para el régimen resistivo, que es descrito por la ecuación de movimiento completa, se recurrió a métodos numéricos como el de Runge-Kutta de cuarto orden y de integración como la regla de Simpson para su solución así como técnicas matemáticas para su análisis cualitativo. Los resultados obtenidos, en este caso, son:

- La presencia de una bifurcación nodo-silla dentro del diagrama fase cuando se varía el parámetro I/I_c .
- La existencia y unicidad de un ciclo límite en el diagrama fase para valores $I/I_c > 1$ y cuya demostración se presenta en la sección 6.3 del capítulo 5.
- La presencia de una bifurcación homoclínica en el diagrama fase al disminuir el valor de I/I_c desde un valor mayor a 1. Este tipo de bifurcación también está relacionada a un proceso de histéresis presente en la curva corriente-voltaje para valores $\alpha < 1$, la cual es posible obtener, gracias a la solución numérica de la ecuación de movimiento y que es acorde a resultados experimentales.
- La obtención de la gráfica del periodo para distintos valores de α en este régimen resistivo.

En cuanto a las aportaciones realizadas en esta parte del trabajo para la literatura son:

- El código fuente computacional para reproducción del gráfico presentado por S. Strogatz⁷ mostrado en la Fig. 5.17 de esta tesis para localizar un ciclo límite de forma numérica.
- El código fuente de la curva corriente-voltaje presentada en la Fig. 5.21.
- La obtención de la gráfica del periodo mostrada en la Fig. 5.22 para este caso resistivo.

Por último se presentó el caso altamente resistivo, cuya ecuación se obtiene al despreciar el término asociado a la corriente de desplazamiento de la ecuación de movimiento completa. La ecuación para este régimen tiene solución analítica lo que nos conduce a expresiones exactas para el periodo y la curva de corriente-voltaje. En esta parte de la tesis, simplemente se reproducen los resultados presentados en la literatura con la única aportación de describir el efecto Josephson en este régimen de manera congruente a los casos anteriores.

Como conclusión general mencionamos que el estudio dinámico del efecto Josephson es bastante útil ya que nos permite realizar una descripción cualitativa, y particularmente en el caso altamente resistivo una descripción exacta, sobre el comportamiento de la unión Josephson para distintas situaciones y distintos valores de los parámetros I/I_c y α . Además, este estudio nos conduce a un resultado importante: la curva corriente-voltaje característica de la unión Josephson y que fue obtenida primero de manera experimental.

En cuanto a las perspectivas de este trabajo podemos mencionar las siguientes:

- Complementar este trabajo con la programación computacional de los cilindros fase para los casos resistivo y altamente resistivo, que no se pudo concretar para esta tesis.
- Continuar con la búsqueda de una solución analítica para la ecuación de movimiento del caso resistivo ya que actualmente continúa siendo campo de investigación tanto para físicos como matemáticos,
- Extender el estudio dinámico a situaciones de caos, las cuales se presentan cuando la corriente administrada por la fuente de potencial es alterna, es decir, es de tipo sinusoidal o cosenosoidal, para obtener los cilindros fase y la curva corriente-voltaje para este régimen.

⁷ Strogatz S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Como se puede observar, todavía hay mucho por hacer en este tipo de estudio para la unión Josephson, esperamos que este trabajo motive a futuros estudiantes mexicanos de Física, a que se introduzcan en este campo de investigación y aporten nuevos resultados para la comprensión del efecto Josephson desde el punto de vista dinámico.



Apéndice A

Péndulo amortiguado dirigido por una torca constante

Ecuación de movimiento

Consideremos como péndulo a una lenteja de masa m unida a una cuerda inextensible de longitud L y describamos su posición \mathbf{r} , velocidad \mathbf{v} y aceleración \mathbf{a} en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= L\hat{\mathbf{e}}_r \\ \mathbf{v} &= L\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \mathbf{a} &= L\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta - L\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned} \tag{A.1}$$

Por medio de la segunda ley de Newton obtenemos la ecuación de movimiento. Así, la fuerza neta \mathbf{F} del movimiento es:

$$\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{e}}_r + F_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta = m\mathbf{a} = mL\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta - mL\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r \tag{A.2}$$

donde las respectivas componentes son:

$$\begin{aligned} F_r &= mg \cos \theta - T \\ F_\theta &= -mg \sin \theta - b\dot{\theta} + f \end{aligned} \tag{A.3}$$

donde T es la tensión de la cuerda, $-b\dot{\theta}$ es la fuerza de amortiguamiento y f es una fuerza externa. Así, las ecuaciones de movimiento para las dos componentes r y θ son:

$$\begin{aligned} mg \cos \theta - T &= -mL\dot{\theta}^2 \\ -mg \sin \theta - b\dot{\theta} + f &= mL\ddot{\theta} \end{aligned} \tag{A.4}$$

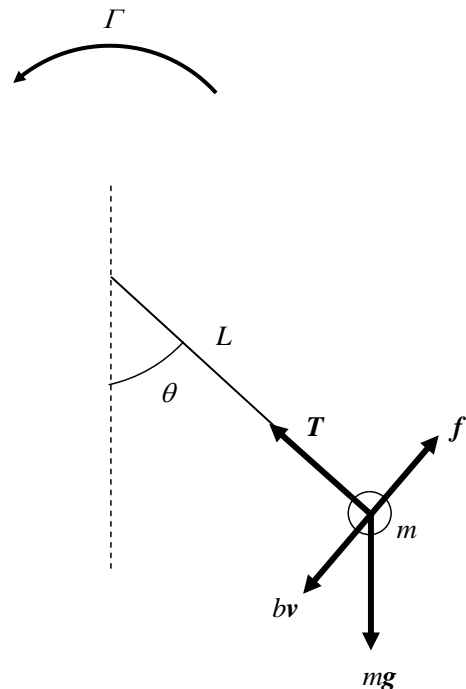
Por otro lado, el momento angular \mathbf{L} es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mL^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \tag{A.5}$$

y la torca total \mathbf{N} del sistema está dada como:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \tag{A.6}$$

Si multiplicamos por L la segunda ecuación de las expresiones (A.4) y sustituimos en la ecuación (A.6) obtenemos:





$$\mathbf{N} = mL^2\ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} = (-mgL\text{sen}\theta - b'L\dot{\theta} + fL)\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.7})$$

Ahora definimos fL como la torca Γ y $b'L$ como la nueva constante de amortiguamiento b , entonces la ecuación que rige al péndulo es:

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\text{sen}\theta = \Gamma \quad (\text{A.8})$$

Analogía con el circuito equivalente a la unión Josephson

Al comparar la ecuación del circuito equivalente a la unión Josephson:

$$\frac{\hbar C}{2e}\ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR}\dot{\phi} + I_c\text{sen}\phi = I$$

con (5.4), se encuentra las siguientes analogías:

Tabla A. 1

Péndulo	Unión Josephson
Angulo θ	Diferencia de fase ϕ
Velocidad angular $\dot{\theta}$	Voltaje V
Masa m	Capacitancia C
Torca aplicada Γ	Corriente I
Constante de amortiguamiento b	Conductancia R^{-1}
Torca máxima gravitacional mgL	Corriente crítica I_c

Apéndice B

Estabilidad de puntos fijos

Para conocer el comportamiento de una ecuación o sistema de ecuaciones alrededor de un punto se requiere realizar una *linealización* alrededor del mismo. A continuación, se explica este proceso enfocándonos en los puntos fijos (puntos de equilibrio, en términos de sistemas dinámicos) para una ecuación unidimensional y un sistema de ecuaciones en dos dimensiones; dicho proceso nos ayuda a conocer la estabilidad de los puntos y llevar a cabo una clasificación de los mismos.

Linealización de una ecuación en una dimensión

Sea $f(x) = \dot{x}$, x^* un punto fijo y $\eta(t) = x(t) - x^*$ una pequeña perturbación alrededor de x^* . Para saber si la perturbación crece o disminuye, obtendremos una ecuación diferencial de η :

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x}.$$

donde x^* es constante. De este modo $\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta)$. A continuación realizamos una expansión de Taylor alrededor de x^* :

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + O(\eta^2),$$

recordando que $f(x^*) = 0$. Por lo tanto

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + O(\eta^2)$$

Si $f'(x^*) \neq 0$, los términos de orden mayor son despreciables y nuestra aproximación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*)$$

Esta es una ecuación lineal en η y es una linealización alrededor de x^* . Esto muestra que la perturbación $\eta(t)$ crece exponencialmente si $f'(x^*) > 0$ y decrece si $f'(x^*) < 0$. Si $f'(x^*) = 0$, los términos $O(\eta^2)$ no son despreciables y es necesario un análisis no lineal para determinar la estabilidad.

La magnitud de $f'(x^*)$ en un punto fijo determina que tan estable es un punto fijo. Esta magnitud juega el rol de un crecimiento exponencial o razón de decaimiento. Definimos a la escala característica de tiempo como $|f'(x^*)|^{-1}$; este determina el tiempo que requiere $x(t)$ para variar significativamente en la vecindad del punto fijo x^* .



Linealización de un sistema de ecuaciones en dos dimensiones.

Ahora consideramos un sistema en dos dimensiones, para ello aproximaremos el retrato fase cercano a un punto fijo a uno correspondiente a un sistema lineal.

Sea el siguiente sistema:

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

y suponemos que (x^*, y^*) son puntos fijos, es decir,

$$f(x^*, y^*) = 0,$$

$$g(x^*, y^*) = 0.$$

Sea

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*$$

representan las componentes de una pequeña perturbación alrededor del punto fijo. Para saber si la perturbación crece o decrece, obtendremos ecuaciones diferenciales para u y v . Obtendremos primero la ecuación para u :

$$\dot{u} = \dot{x}$$

donde x^* es una constante. Por sustitución tenemos que

$$u = x = f(x^* + u, y^* + v)$$

Ahora, realizamos un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto fijo (x^*, y^*) :

$$\begin{aligned} \dot{u} = x = f(x^*, y^*) + u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} + O(u^2, v^2, uv) \\ = u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} + O(u^2, v^2, uv) \end{aligned}$$

donde $f(x^*, y^*) = 0$ y $O(u^2, v^2, uv)$ son términos cuadráticos en u y v . Debido a que u y v son pequeños, estos términos cuadráticos son extremadamente pequeños. De manera similar encontramos el desarrollo para v :

$$\dot{v} = u \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} + O(u^2, v^2, uv)$$

Por lo tanto, podemos expresar la perturbación de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{terminos cuadraticos}$$

La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

es conocida como la **matriz jacobiana** evaluada en el punto fijo (x^*, y^*) y es el análogo multivariable de la derivada $f'(x^*)$ en el caso de una ecuación unidimensional. Para obtener el **sistema linealizado** consideramos despreciables a los términos cuadráticos. Así

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Sistema lineal de ecuaciones

Un sistema lineal de dos dimensiones es un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde a, b, c y d son parámetros. Una manera más compacta de escribirlo es por medio de la forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

como también podemos expresarla de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{A.3}$$

Un sistema es lineal si \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son soluciones entonces la combinación lineal de estas es también solución $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$. Notemos que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ es siempre un punto fijo para cualquier elección de A .

Las soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pueden visualizarse como trayectorias moviéndose en el plano xy pero en este contexto llamado **plano fase**.



Clasificación de puntos fijos

Saber qué tipo de comportamiento tiene el plano fase alrededor de los puntos fijos de un sistema lineal es muy importante. Para obtener información sobre esto recurrimos a sistema en general como el expresado en la ecuación (A.3). Proponemos la siguiente solución:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (\text{A.4})$$

Donde $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es un vector fijo y λ es una razón de crecimiento, ambos por determinar. Si estas soluciones existen, corresponden a un movimiento exponencial a lo largo de la línea extendida por el vector \mathbf{v} .

Sustituimos la expresión (A.4) en (A.3) y obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (\text{A.5})$$

Esta expresión nos dice que las soluciones deseadas existen si \mathbf{v} es un *eigenvector* con su correspondiente *eigenvalor*. Así, la ecuación (A.4) es conocida como una *eigensolución*.

En general, los eigenvalores de la matriz \mathbf{A} están dados por la *ecuación característica* $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Para una matriz de 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

La ecuación característica es

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\text{tr } \mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A} = 0 \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{A} &= a + d \\ \det \mathbf{A} &= ad - bc. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Las soluciones a la expresión (A.7) son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\text{tr } \mathbf{A} + \sqrt{(\text{tr } \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{\text{tr } \mathbf{A} - \sqrt{(\text{tr } \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

y solo dependen de la traza y del determinante de la matriz \mathbf{A} .

Conocer los eigenvalores de un sistema lineal es muy importante porque de ellos podemos obtener información del tipo y de la estabilidad de los puntos fijos. Todo esto por medio de un diagrama cuyos ejes son la traza ($\text{tr } \mathbf{A}$) y el determinante ($\det \mathbf{A}$) de la matriz \mathbf{A} . Toda información en este diagrama está dada por las expresiones (A.9), pero también por las siguientes formulas:

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{tr } \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (\text{A.10})$$

Estas expresiones pueden obtenerse escribiendo la ecuación característica de la siguiente manera $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\text{tr } \mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A} = 0$.

A continuación, analizaremos el diagrama de la Fig. A.1:

- Si $\det \mathbf{A} < 0$, los eigenvalores son reales y de signo opuesto, entonces el punto fijo es un punto silla.
- Si $\det \mathbf{A} > 0$, los eigenvalores son:
 - a) Reales y con el mismo signo, el punto fijo es un nodo. Los nodos satisfacen $(\text{tr } \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A} < 0$.
 - b) Complejos conjugados, el punto fijo es una espiral. Estos satisfacen $(\text{tr } \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A} > 0$.

La parábola $(\text{tr } \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A} = 0$ es límite entre los nodos y las estrellas. En esta viven nodos estrellas y nodos degenerados. La estabilidad de los nodos está determinada por $\text{tr } \mathbf{A}$. Cuando $\text{tr } \mathbf{A} < 0$ ambos eigenvalores tienen partes reales negativas pero el punto fijo es estable. El punto fijo es inestable cuando $\text{tr } \mathbf{A} > 0$. Los centros neutralmente estables viven en el límite $\text{tr } \mathbf{A} = 0$, donde los eigenvalores son puramente imaginarios.

Por último, si $\det \mathbf{A} = 0$, el menor de los eigenvalores es cero. Entonces el origen no es un punto fijo aislado. Hay varias líneas por cada punto fijo o un plano de puntos fijos si $\mathbf{A} = 0$.

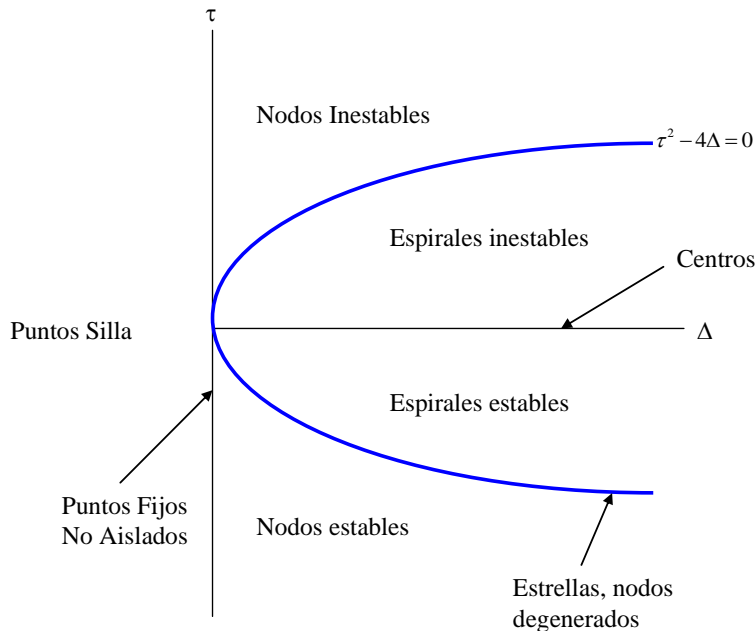


Figura A.1. Grafica $\tau = \text{tr } \mathbf{A}$ contra $\Delta = \det \mathbf{A}$

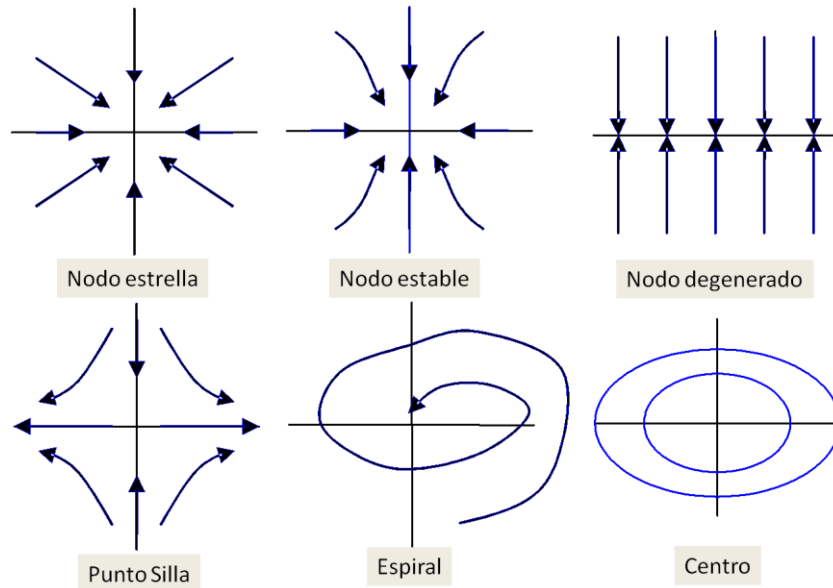


Figura A.2. Clasificación de los puntos fijos

Eigenvalores	Tipo de punto fijo	Estabilidad
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo impropio	Inestable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo impropio	Asintóticamente estable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Punto silla	Inestable
$\lambda_2 = \lambda_1 > 0$	Nodo propio o impropio	Inestable
$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$	Nodo propio o impropio	Asintóticamente estable
$\lambda_2, \lambda_1 = a + ib$	Punto espiral	Inestable
$\lambda > 0$		Inestable
$\lambda < 0$		Asintóticamente estable
$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$	Centro	Estable

Tabla B. 1 Estabilidad de puntos fijos

Apéndice C

Teoremas matemáticos

Teorema de Existencia y Unicidad

Cuando una situación física es modelada matemáticamente con un problema de valores iniciales. Es importante preguntarnos, si existe una solución al problema, así como también garantizar que sea única. Deseamos que la solución sea única debido a que si repetimos el experimento en condiciones iniciales idénticas, debemos esperar los mismos resultados, siempre y cuando el modelo sea determinístico. El teorema de Existencia y Unicidad nos garantiza todo esto.

Teorema de Existencia y Unicidad. Considere el problema de valores iniciales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Suponga que f es continua y que todas sus derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, son continuas para \mathbf{x} en algún conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces para $\mathbf{x}_0 \in D$, el problema de valores iniciales tiene una solución $\mathbf{x}(t)$ en un intervalo de tiempo $(-\tau, \tau)$ alrededor de $t = 0$, y es única.

Este teorema tiene un corolario muy importante: *trayectorias distintas jamás se intersectan*. Si dos trayectorias se intersectan, entonces habría dos soluciones desde el mismo punto (el punto de cruce), y esto violaría la parte de unicidad del teorema. En otras palabras, una trayectoria no se puede mover en dos direcciones a la vez.

Teorema Poincaré-Bendixson

El teorema de Poincaré-Bendixson fue concebido originalmente por el matemático francés Henri Poincaré, aunque él careció de una prueba completa. En 1901, el matemático sueco Ivar Otto Bendixson dio una prueba rigurosa del teorema completo. Este teorema permite clasificar todos los posibles comportamientos en el espacio fase de 2 dimensiones. Básicamente indica que cualquier órbita que permanezca en una región limitada del espacio fase de un sistema dinámico se acerca a una órbita cerrada. El teorema es uno de los principales resultados teóricos en dinámica no lineal, porque implica que el caos no ocurre en el plano fase.

El *Teorema Poincaré-Bendixson* supone que:

1. R es un subconjunto cerrado, limitado del plano;
2. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es un campo vectorial continuamente diferenciable sobre un conjunto abierto contenido en R ;
3. R no contiene puntos fijos; y
4. existe una trayectoria C que se confina en R , es decir, que inicia en R y se queda en ese subconjunto para todo tiempo futuro.

Entonces, C es una órbita cerrada o es una espiral hacia una órbita cerrada cuando $t \rightarrow \infty$. En cualquier caso, R contiene una órbita cerrada (que se muestra en la figura D.1 como una curva gruesa). La prueba de este teorema es sutil, y requiere algo de topología avanzada.

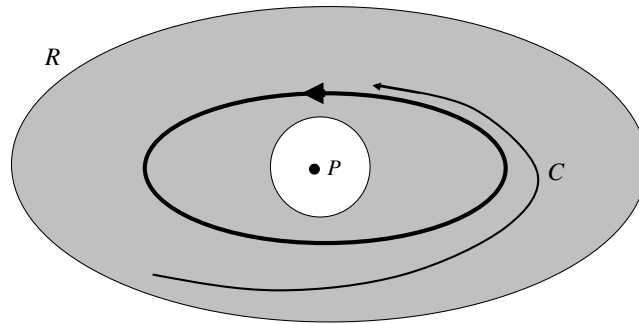


Figura C.1. Subconjunto R del espacio fase donde está confinada una trayectoria C y no contiene al punto fijo P .

Apéndice D

Códigos fuente

Muchas de las figuras mostradas en este trabajo fueron elaboradas en distintos programas computacionales tales como Microsoft Excel, Wolfram Mathematica así como el software libre Maxima, entre otros. A continuación se presenta los códigos fuente de algunas figuras mostradas en este trabajo:

Figura 2.12

SOFTWARE: Microsoft Excel 2007

DESCRIPCIÓN

Esta figura se realizó de manera numérica considerando dos columnas de celdas, una para los valores de

$$\left(\frac{T}{T_c}\right)_i = 2\eta_i^* \left[\ln\left(\frac{1+\eta_i^*}{1-\eta_i^*}\right) \right]^{-1} \text{ y la otra para valores de } \eta_{i+1} = \eta_i + 0.01.$$

Figura 5.13

SOFTWARE: Wolfram Mathematica 6

CÓDIGO FUENTE

1. Este código nos permite realizar el diagrama fase de la unión Josephson para el caso amortiguado. Para ello, primero se carga el paquete para gráficos de Mathematica:

```
Clear["Global`*"];
Needs["VectorFieldPlots`"]
```

2. Se da valores fijos a I/I_c (denotado por J en este código) y α :

```
J=0.1;
α=0.5;
```

3. Definimos nuestro sistema de ecuaciones junto con sus condiciones iniciales ϕ_0, y_0 así como también su dependencia con el tiempo t :

```
ϕpunto=y;
ypunto=J-Sin[ϕ]- αy;

eq={ϕ'[t]==(ϕpunto/.ϕ→ϕ[t]/.y→y[t]),
y'[t]==(ypunto/.y → y[t]/.y→y[t]),
ϕ[0]→ϕ0, y[0]→y0};
```



4. Calculamos $\phi(t)$ e $y(t)$ de forma numérica para distintos valores de ϕ_0 , y colocamos los valores obtenidos en un tabla que posteriormente graficamos como las trayectorias en el diagrama fase.

```
 $\phi_0=-1;$   
sol1=Table[NDSolve[eq/.y0→yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,1}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias1=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol1},{t,0,1},  
DisplayFunction → Identity,PlotStyle → Hue[.6],Frame → True];  
  
 $\phi_0=-0.5;$   
sol2=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,5}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias2=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol2},{t,0,1},  
DisplayFunction → Identity,PlotStyle → Hue[.6],Frame → True];  
  
 $\phi_0=0.5;$   
sol3=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,1}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias3=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol3},{t,0,1},  
DisplayFunction → Identity,PlotStyle → Hue[.6],Frame → True];  
  
 $\phi_0=1;$   
sol4=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,1}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias4=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol4},{t,0,1},  
DisplayFunction → Identity,PlotStyle → Hue[.6],Frame → True];  
  
 $\phi_0=1.5;$   
sol5=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,1}],{yy,-1,2,0.4}];  
trayectorias5=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol5},  
{t,0,1},DisplayFunction→Identity,PlotStyle→Hue[.6],Frame→True];  
  
 $\phi_0=2;$   
sol6=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,2}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias6=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol6},{t,0,1},  
DisplayFunction→Identity,PlotStyle→Hue[.6],Frame→True];  
  
 $\phi_0=2.5;$   
sol7=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,1}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias7=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol7},{t,0,1},  
DisplayFunction→Identity,PlotStyle→Hue[.6],Frame→True];  
  
 $\phi_0=3;$   
sol8=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,1}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias8=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol8},{t,0,1},  
DisplayFunction→Identity,PlotStyle→Hue[.6],Frame→True];  
  
 $\phi_0=3.5;$   
sol9=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,1}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias9=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol9},{t,0,1},  
DisplayFunction→Identity,PlotStyle→Hue[.6],Frame→True];  
  
 $\phi_0=4;$   
sol10=Table[NDSolve[eq/.y0 → yy,{ $\phi[t]$ ,y[t]},{t,0,1}],{yy,-2.8,2.8,0.4}];  
trayectorias10=ParametricPlot[Evaluate[{{ $\phi[t]$ ,y[t]}/.sol9},{t,0,1},
```

```
DisplayFunction->Identity,PlotStyle->Hue[.6],Frame->True];
```

5. Este módulo nos ayuda a colocar el campo vectorial, por medio de flechas, en el diagrama fase:

```
campovectorial=VectorFieldPlot[{y,J-Sin[φ]-αy},{φ,-1,2 Pi-1},
{y,-2.5,2.8}];
```

6. El siguiente módulo grafica las nulclinas del sistema:

```
nulclinas=Plot[{0,(J-Sin[φ])/α},{φ,-1,2 Pi-1},
PlotRange->{-2.5,2.8},PlotStyle->Thick];
```

Se realiza la llamada de los módulos descritos en los punto 4 al 6 por medio del comando Show para mostrar en un solo gráfico las trayectorias fase, el campo vectorial y las nulclinas del sistema de ecuaciones.

```
Show[campovectorial, trayectorias1, trayecto-
rias2,trayectorias3,trayectorias4, trayectorias5, trayectorias6,
trayectorias7,trayectorias8, trayectorias9, trayectorias10,
nulclinas,Graphics[{PointSize[0.03], Black, Point[{ArcSin[J],
0}]}],Graphics[{PointSize[0.03], Black, Point[{Pi - ArcSin[J],
0}]}],Graphics[{PointSize[0.02], White, Point[{Pi - ArcSin[J], 0}]}],
Graphics[Text[Style["I/Ic = 0.1", 12,Black], {-2.2,
1.8}]],Graphics[Text[Style["α=0.5", 12, Black], {-2.2, 1}]],
Axes -> True, AxesLabel -> {φ, y}]
```

Figura 5.17

SOFTWARE: Wolfram Mathematica 8

CÓDIGO FUENTE

1. Este código fuente nos ayuda a obtener de manera gráfica la función $P(y)$ del mapeo de Poincaré de primer retorno. Definimos primero el sistema de ecuaciones:

```
f1[φ_,y_,J_,α_]:=y;
f2[φ_,y_,J_,α_]:=J-Sin[φ]-α y;
```

2. El módulo siguiente se encarga de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones por medio de método de Runge-Kutta de cuarto orden, colocando los resultados ϕ e y en una tabla.

```
solnum[f1_,f2_,y1_,J_,α_,n_]:=
Module[{h,t,φ,y,pto1,pto2,puntosen2pi},
h=1/n;
t={0};
φ={0};
y={y1};
i=1;
While[φ[[i]]<2Pi,t=Append[t,0];
φ=Append[φ,0];y=Append[y,0];t[[i+1]]=t[[i]]+h;
φ[[i+1]]=φ[[i]]+h f1[φ[[i]],y[[i]],J,α];
y[[i+1]]=y[[i]]+h f2[φ[[i]],y[[i]],J,α];i++;
pto1={t[[Length[t]-1]],φ[[Length[φ]-1]],y[[Length[y]-1]}};
```



```
pto2={Last[t],Last[φ],Last[y]};
puntosen2pi={pto1,pto2}}
```

3. El módulo datos creará una lista con las alturas iniciales $y(0)$ y alturas finales $y(2\pi)$ para distintas trayectorias, a partir del hecho de que este módulo invocará a otros submódulos con la tarea encomendada de encontrar estas alturas dentro de la tabla creada por el módulo `solnum` del inciso anterior, involucrando un proceso iterativo; es decir, que por cada vuelta que una trayectoria da al cilindro, hay una relación de la altura inicial con la altura final.

```
altura[f1_,f2_,y1_,J_,α_,n_]:=
Module[{list,altura2pi},
list=solnum[f1,f2,y1,J,α,n];
altura2pi=list[[1,3]]+((list[[2,3]]-list[[1,3]])/(list[[2,2]]-
list[[1,2]]))*(2Pi-list[[1,2]])]
```

```
vueltas[f1_,f2_,y0_,J_,α_,n_,s_]:=
Module[{y1,round,k},
y1=y0;
round=Table[y1,{s+1}];
Do[round[[k]]=altura[f1,f2,y1,J,α,n];
y1=altura[f1,f2,y1,J,α,n],{k,2,s+1}];
round]
```

```
altportrayect[f1_,f2_,yuno_,ydos_,J_,α_,n_,s_,c_]:=
Module[{listota,d,y,p},
listota=Table[0,{c}];
p=(ydos-yuno)/(c-1);
y=yuno+(d-1) p;
Do[listota[[d]]=vueltas[f1,f2,y,J,α,n,s],{d,1,c}];
listota]
```

```
iteracion[f1_,f2_,yuno_,ydos_,J_,α_,n_,s_,c_]:=
Module[{tabla,numiter,w},
tabla=Table[0,{c}];
numiter=altportrayect[f1,f2,yuno,ydos,J,α,n,s,c];
Do[tabla[[w]]=numiter[[w,s+1]],{w,1,c}];
tabla]
```

```
datos[f1_,f2_,yuno_,ydos_,J_,α_,n_,s_,c_]:=
Module[{listgraph,listini,listfinal},
listgraph=Table[0,{100}];
listini=iteracion[f1,f2,yuno,ydos,J,α,n,s-1,c];
listfinal=iteracion[f1,f2,yuno,ydos,J,α,n,s,c];
Do[listgraph[[k]]={listini[[k]],listfinal[[k]]},{k,1,100}];
listgraph]
```

7. Por último, se realiza un gráfico de la función $P(y)$ a través de la siguiente instrucción:

```
Show[Plot[x,{x,0,13},PlotStyle→Green],ListPlot[Tooltip[datos[f1,f2,2,13,
1.5,0.7,100,1,100]],AxesOrigin→{0,0}],
Graphics[Text[Style["P(y)",Blue],{6,7.5}]],
Graphics[Text[Style["y1",Black],{2,1}],Graphics[Text[Style["y2",Blue],
{13,1}],Graphics[Text[Style["y*",Blue],{7.6358126531,1}],
AxesLabel→{"y(0)","y(2π)"}]
```


Figura 5.21

SOFTWARE: Maxima y wxMaxima

CÓDIGO FUENTE

Para obtener la curva corriente-voltaje es necesario calcular el promedio $\langle \phi' \rangle$, el cual se define como

$$\langle \phi' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \phi' d\tau = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{T}$$

donde el periodo T es dado por

$$T = \int_0^T d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\phi'}$$

Este periodo puede calcularse numéricamente por medio de la regla compuesta de Simpson:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\phi'} \\ &\approx \frac{h}{3} \left[\frac{1}{\phi'_1} + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\phi'_{2j}} + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\phi'_{2j-1}} + \frac{1}{\phi'_n} \right] \\ &= \frac{2\pi}{3n} \left[\frac{1}{\phi'_1} + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\phi'_{2j}} + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\phi'_{2j-1}} + \frac{1}{\phi'_n} \right] \end{aligned}$$

Donde $h = \frac{2\pi}{n}$ es el tamaño de cada uno de los n intervalos de integración. Así, el promedio temporal $\langle \phi' \rangle$ puede obtener numéricamente de la siguiente manera:

$$\langle \phi' \rangle = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{3n}{\frac{1}{\phi'_1} + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\phi'_{2j}} + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\phi'_{2j-1}} + \frac{1}{\phi'_n}}$$

1. El módulo que se presenta a continuación se encarga de calcular tanto ϕ como ϕ' a través del método de Runge-Kutta de cuarto orden, colocando los resultados numéricos ϕ_i y ϕ'_i en una tabla. Posteriormente, toma los valores ϕ'_i para realizar de manera numérica el promedio temporal $\langle \phi' \rangle$ para un solo valor de I/I_c .

```
fiprimapromedio2(corriente, amort, xini, yini, n) :=
block([solnum, tabla2, subtabla2, m, fiprom2],
solnum:rk([y, corriente-sin(x)-amort*y], [x, y], [xini, yini],
[t, 0, 100, 1/n]),
tabla2:makelist(solnum[i][3], i, 1, length(solnum)),
subtabla2:sublist(tabla2, lambda([h], abs(h)<=4*%pi)),
if evenp(length(subtabla2))=true then m:length(subtabla2) else
m:length(subtabla2)-1,
fiprom2:m/((1/subtabla2[1])+2*sum(1/subtabla2[2*j], j, 1,
```



```
(m/2)-1)+4*sum(1/subtabla2[(2*j)-1],j,1,m/2)+(1/subtabla2[m]))$
```

2. El siguiente módulo calcula $\langle \phi^2 \rangle$ para cada uno de los distintos valores de I/I_c , posteriormente construye una tabla con valores $(I/I_c, \langle \phi^2 \rangle)$.

```
voltajecorriente2(A,Jmax,xini,yini,n):=block([voltcorr2],  
volt-  
corr2:makelist([k,fiprimapromedio2(k,A,xini,yini,n)],k,0,Jmax,0.01))$
```

3. Por último, este módulo se encarga de graficar los valores de la tabla dada por el módulo anterior:

```
wxdraw2d(implicit(x,x,0,2),points_joined=true,  
color="green",key="0.4",points(voltajecorriente2(0.4,2,0,1,10)),  
color="blue",key="0.6",points(voltajecorriente2(0.6,2,0,1,10)),  
color="red",key="0.8",points(voltajecorriente2(0.8,2,0,1,10)),  
color="orange",key="1",points(voltajecorriente2(1,2,0,1,10)),  
color="black",key="1.2",points(voltajecorriente2(1.2,2,0,1,10)),  
xlabel="I/Ic",ylabel="Voltaje promedio",yrange=[0,2]);
```

Apéndice E

Artículos publicados y presentación en eventos especializados

Algunos capítulos de este trabajo han sido presentados en distintos eventos tales como congresos, seminarios y encuentros así como también se han publicado artículos en memorias y revistas; los cuales se enlistan a continuación:

Artículo académico

- *Aspectos físicos e históricos de la superconductividad.* A. F. Sandino Hernández. Revista Eutopía Vol. 6, No. 18. Colegio Ciencias y Humanidades UNAM. pp. 74-79. México. 2013 (Fig. E.1).

Artículos en extenso

- *La unión Josephson vista como un sistema dinámico.* A. F. Sandino Hernández y J. L. Del Río Correa. Memorias de Extensos de la XVIII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas ESFM – IPN. pp. 446-457. México, D.F. 2013 (Fig. E.2)
- *La teoría de Bragg-Williams como caso exacto de la teoría de Landau.* A. F. Sandino Hernández y J. L. Del Río Correa. Memorias del II Encuentro de Estudiantes de Posgrado UAM CINVESTAV. México. 2013. Aún sin publicar (Fig. E.3).

Conferencias

- *Análisis Cualitativo de los Diagramas Fase para una Unión Josephson.* Salón de Seminarios Leopoldo García-Colín Scherer. UAM Iztapalapa. México, D.F. 5 de julio de 2011 (Fig. E.4).
- *El Estudio de la Superconductividad vista como una Transición de Fase.* Salón de Seminarios Leopoldo García-Colín Scherer. UAM Iztapalapa. México, D. F. 10 de julio de 2012 (Fig. E.5).

Plática

- *La teoría de Bragg-Williams como caso exacto de la teoría de Landau.* II Encuentro de Estudiantes de Posgrado UAM CINVESTAV. Aula Magna de El Colegio Nacional. México, D. F. 11 de septiembre de 2013 (Fig. E.6).

Presentaciones murales

- *La Teoría Macroscópica de la Superconductividad.* A. F. Sandino Hernández y J. L. Del Río Correa. LIV Congreso Nacional de Física SMF. Mérida, Yucatán. 2011 (Fig. E.7).
- *La teoría de Bragg-Williams como caso exacto de la teoría de Landau.* A. F. Sandino Hernández y J. L. Del Río Correa. LV Congreso Nacional de Física SMF. Morelia, Michoacán. 2012 (Fig. E.8).
- *Sistemas dinámicos y la unión Josephson.* A.F. Sandino Hernández y J. L. Del Río Correa. LVI Congreso Nacional de Física SMF. San Luis Potosí, San Luis Potosí. 2013 (Fig. E.9).
- *La unión Josephson vista como un sistema dinámico.* A. F. Sandino Hernández y J. L. Del Río Correa. XVIII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas ESFM IPN. México, D.F. 2013 (Fig. E.10).



EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA EN EL COLEGIO

Aspectos físicos e históricos de la superconductividad

ALBERTO FRANCISCO SANDINO HERNÁNDEZ
Recibido: 10-05-2013, aprobado: 27-05-2013

Introducción

Resumen
La tercera unidad del programa de estudio de la materia Física II del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) busca lograr en los estudiantes un nivel de conocimiento de algunos fenómenos, como la superconductividad, relacionados con la física contemporánea y su importancia en la tecnología actual. Este artículo pretende servir de material de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje para el tema de los superconductores, describiendo su comportamiento, el desarrollo histórico de su estudio y sus aplicaciones tecnológicas.

Palabras clave
Aplicaciones tecnológicas, enseñanza de la física, superconductividad.

Abstract
The third unit of Physics II at the CCH aims to achieve in students a level of knowledge of some phenomena, as superconductivity, related to contemporary physics and its importance in today's technology. This paper seeks to support teachers and students in the teaching-learning process describing the behavior, the historical development, and technological applications of superconductors.

Key words
Technological applications, teaching physics, superconductivity.

Descripción de la superconductividad

En la naturaleza existen materiales que permiten el movimiento de sus electrones cuando se les aplica una diferencia de potencial o voltaje, es decir, hay corriente eléctrica en ellos y son conocidos como *conductores*. En cambio, aquellos que no permiten el paso

Fig. E.1

XVIII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas 2013

La unión Josephson vista como un sistema dinámico

Alberto Francisco Sandino Hernández¹, José Luis Del Río Correa²
Departamento de Física, UAM Iztapalapa, México D.F., México
E-mail: ¹afandino@hotmail.com, ²jlrco@sum.unam.mx

Resumen — En este trabajo mostramos a la unión Josephson como un sistema dinámico. La ecuación diferencial que describe a este dispositivo es análoga a la de un péndulo amortiguado sometido a una fuerza constante, la cual puede reescribirse en una ecuación sin dimensiones debido a la introducción de un parámetro \mathcal{I} que hace adimensional al tiempo. La corriente total que fluye por este dispositivo consta de tres componentes: la corriente de desplazamiento, la corriente normal y la supercorriente. Al seleccionar \mathcal{I} en dos formas distintas podemos estudiar el comportamiento del sistema cuando:

- La corriente de desplazamiento es despreciable con respecto a la corriente normal y a la supercorriente de los pares de Cooper.
- La corriente normal es pequeña comparada con la de desplazamiento y la supercorriente, y
- el caso general en donde las tres corrientes son del mismo orden de magnitud, mostrando la existencia de un ciclo límite.

En todos estos casos, el parámetro variable es la razón entre la corriente y la corriente crítica Josephson. Sin embargo, en el último caso se encuentra que al disminuir la razón entre las corrientes desde un valor mayor a 1 se presenta una bifurcación homoclínica.

Palabras Clave — bifurcación, sistema dinámico, unión Josephson.

Abstract — In this paper we show the Josephson junction as a dynamic system. The differential equation that describes this device is analogous to the damped pendulum forced with a constant torque equation, which can be rewritten in a dimensionless equation due to the introduction of a parameter \mathcal{I} that makes non-dimensional in the time. The total current flowing through this device consists of three components: the displacement current, normal current and the supercurrent. If we select \mathcal{I} in two different ways we can study the behavior of the system when:

- The displacement current is negligible with respect to the normal current and the supercurrent of the Cooper pairs.
- normal current is small compared to the displacement and the supercurrent, and
- the general case where the three currents are of the same order of magnitude, showing the existence of a limit cycle.

In all these cases, the variable parameter is the ratio between the current and the Josephson critical current. However, in the

latter case it is that to decrease the ratio between flow: from one value greater than 1 to a homoclinic bifurcation.

Keywords — bifurcation, dynamic system, Josephson junction.

I INTRODUCCIÓN

El físico británico Brian David Josephson predijo en 1962 un efecto muy peculiar, conocido hoy en día como *efecto Josephson* el cual consiste que una corriente fluya indefinidamente a través de un dispositivo conocido como *unión Josephson* aun cuando no hay una diferencia de potencial aplicada. Existen distintos tipos de uniones, pero en este trabajo estudiaremos la de tipo túnel que constan de dos superconductores separados por una conexión débil, la cual puede ser un aislante (superconductor-aislante-superconductor, SIS en inglés), un metal normal (superconductor-normal-superconductor, SNS), un semiconductor, un superconductor débil o cualquier otro material que se acople débilmente a los dos superconductores (Fig. 1). En este tipo de uniones, el efecto Josephson ocurre debido al túnelamiento de los pares Cooper a través del material conector. Los dos regiones superconductores están caracterizadas por funciones de onda macroscópicas $\psi_1 e^{i\theta_1}$ y $\psi_2 e^{i\theta_2}$ respectivamente.

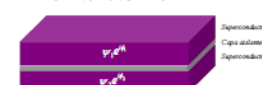


Figura 1 Esquema simple de una unión túnel

Bajo condiciones adecuadas se pueden observar dos tipos de efecto Josephson, los cuales son:

- Efecto Josephson DC. Una corriente continua fluye a través de la unión en ausencia de un campo eléctrico o magnético.
- Efecto Josephson AC. Un voltaje fijo es aplicado a través de la unión causando una corriente oscilante.

Las uniones Josephson son capaces de generar voltajes oscilatorios de alta frecuencia, por lo regular de 10^{10} - 10^{11} ciclos por segundo y detectan potenciales eléctricos de un cuantilón de volt.

Fig. E.2

La teoría de Bragg-Williams como caso exacto de la teoría de Landau

Alberto Francisco Sandino Hernández¹ and José Luis Del Río Correa²
Departamento de Física
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa
Av. San Rafael Atlixo No. 186, Col. Vauxtonia,
Delegación Iztapalapa, C.F. 09340
México, D.F.

La teoría de Bragg-Williams describe las transiciones de fase en aleaciones por medio de un parámetro de orden y que cuantifica el ordenamiento de la red cristalina. De manera general, esta teoría consiste en encontrar la entropía del sistema en términos de este parámetro a través de la fórmula de Boltzmann, evaluar la energía promedio asociada a la interacción entre dos especies de átomos que conforman la aleación, y obtener los valores de η que caracterizan el estado de equilibrio al minimizar la energía libre de Helmholtz F . Al realizar el estudio de estabilidad de los puntos críticos de F , se encuentra la dependencia de η con respecto a la temperatura T , mostrando una bifurcación en el comportamiento de este parámetro para una temperatura crítica T_c , además de que durante la transición de fase, F como función de T es continua y el calor específico presenta una discontinuidad. El análisis anterior se lleva a cabo sin recurrir a desarrollos en serie, pero cuando los resultados se expresan de esta manera, se obtiene la teoría de Landau para transiciones de fase de segundo orden lo que nos permite entender los diferentes argumentos de Landau para describir este tipo de transiciones.

Palabras clave: aleaciones, bifurcación, transiciones de fase de segundo orden.
PACS: 05.70.Fh, 61.66.Dr, 05.45.-a

I. INTRODUCCIÓN

Las transiciones de fase han sido motivo de estudio desde el siglo XIX, uno de los primeros en estudiar el fenómeno fue J. D. van der Waals, cuando presentó como parte de su tesis doctoral las correcciones de la ecuación de estado de los gases ideales, al considerar el volumen de las partículas y las interacciones que hay entre ellas. Otro suceso importante es el intento de clasificarlas, el primero en realizarlo fue Paul Ehrenfest al tomar en cuenta la relación que existe entre la energía libre de Gibbs G y el cambio de algunas propiedades térmicas durante el punto de transición, que sucede cuando el sistema se encuentra a una temperatura crítica T_c ; propuso una clasificación en la que el orden de la transición es el mismo que el de la derivada de G con respecto a la temperatura que presenta una discontinuidad durante el cambio de fase [12]. En la clasificación moderna, existen transiciones de fase de primer y segundo orden; en lo que respecta a la primera, dos estados de agregación distintos se encuentran en equilibrio (líquido-gas, líquido-sólido, etc.) y se produce un cambio abrupto en la simetría que se traduce en un cambio discontinuo en la entropía, además de presentar un calor latente, es decir, el sistema absorbe o cede energía durante la transición, un ejemplo de esto es la fusión o ebullición del agua. Mientras que en la segunda, los estados de agregación de las dos fases son idénticos y la simetría cambia de una manera continua; en el caso

de las aleaciones, el cambio de fase se presenta cuando la simetría en la red cristalina cambia, además este tipo de transiciones se caracterizan por la ausencia de calor latente y la existencia de una discontinuidad finita en el calor específico [9].

En 1934, W. L. Bragg y E. J. Williams describieron una transición de fase observada en una aleación de cobre y zinc, la cual se manifiesta por la manera en que estos grupos de átomos están ordenados en una red cristalina. A través del uso de rayos X, encontraron que debajo de una cierta temperatura de transición, los átomos de zinc se encuentran en una red de simetría cúbica y los de cobre en otra, intercaladas entre sí. La descripción teórica dada a esta situación fue utilizada como base para varios estudios sobre fenómenos de transición y es conocida como la teoría de Bragg-Williams. La idea principal de esta teoría es obtener una expresión para la entropía configuracional en términos de un parámetro que cuantifique el orden del sistema y encontrar su dependencia con la temperatura [1, 3, 7, 11].

Por otro lado, en 1937 Lev Landau presenta su teoría general para transiciones de fase de segundo orden, en la cual propone expresar la energía libre de Helmholtz F en serie de potencias de un parámetro de orden para describir el comportamiento de un sistema en la vecindad del punto de transición, además de realizar distintas hipótesis para obtener la entropía y demostrar una discontinuidad en el calor específico [8].

El propósito de este artículo es presentar ambas teorías y demostrar que son equivalentes cuando la temperatura se aproxima a la del punto de transición. Todo esto para poder entender de manera sencilla los argumentos dados por Landau a través de los resultados obtenidos por

Fig. E.3

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

Casa abierta al tiempo

El Seminario del Posgrado en Física agradece la participación de

FÍS. ALBERTO FRANCISCO SANDINO HERNÁNDEZ

por haber impartido la conferencia:

"ANÁLISIS CUALITATIVO DE LOS DIAGRAMAS FASE PARA UNA UNIÓN JOSEPHSON"

que se llevó a cabo el día 5 de julio de 2011, en el salón de seminarios "Leopoldo García Colín-Scherer" del Departamento de Física.

ATENTAMENTE
"IN CALLI IXCACHUICOPA"
Casa abierta al tiempo

Fís. Victor Domínguez Rocha
Coordinador de Seminario

M. C. Ángel Alejandro García Chung
Coordinador de Seminario

Dr. Abel Camacho Quintana
Coordinador del Posgrado en Física

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. A. P. 55-534, 09340 México D.F., México.

Fig. E.4

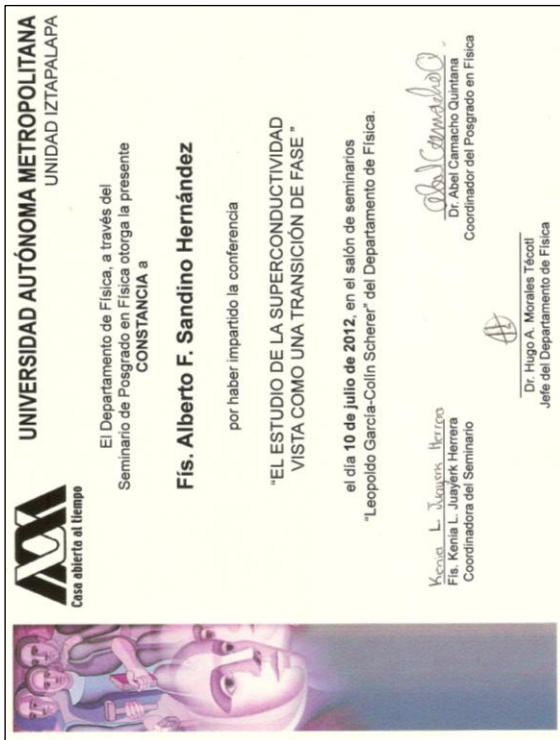


Fig. E.5

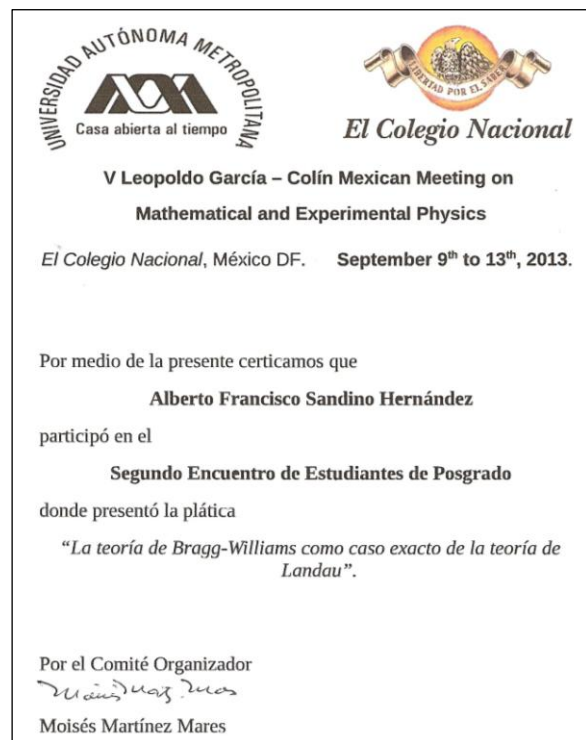


Fig. E.6

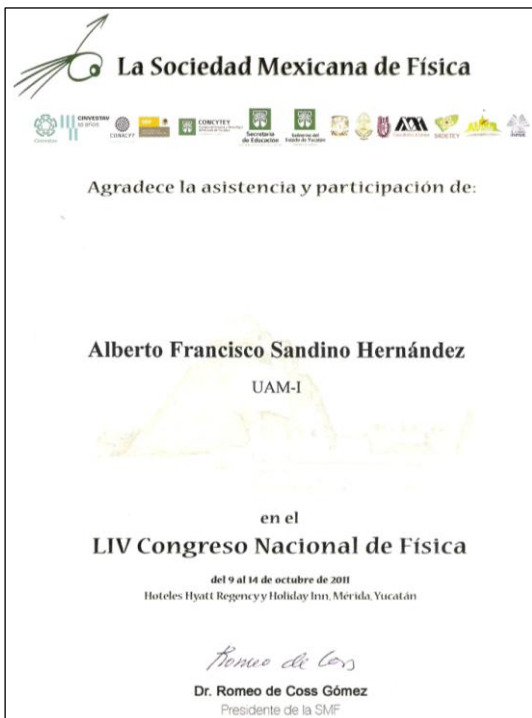


Fig. E.7

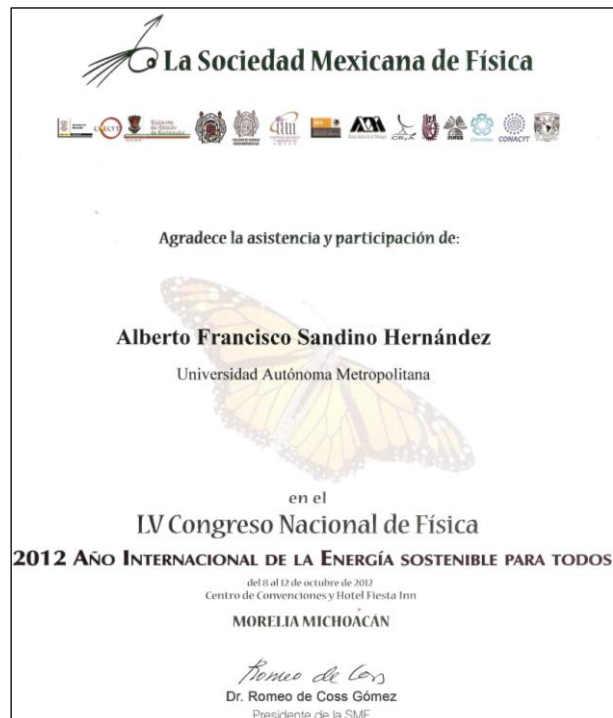


Fig. E.8

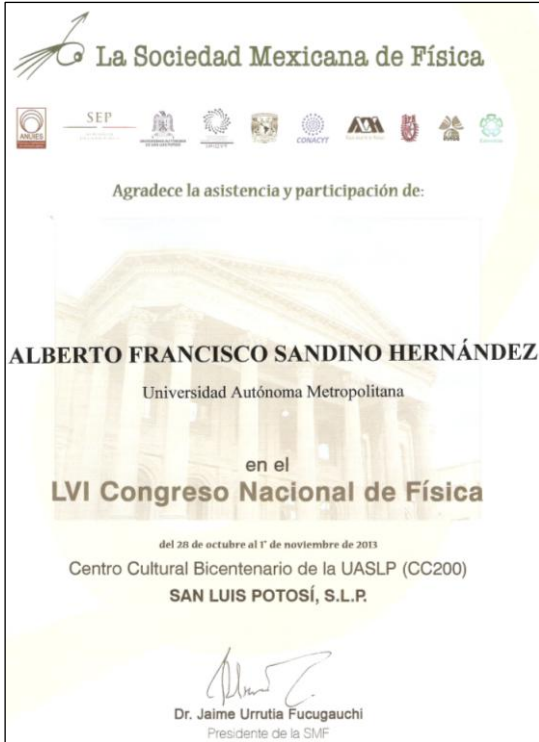


Fig. E.9



Fig. E.10

Bibliografía

- Abidi A. A. and Chua L. O. *On the dynamics of Josephson-junction circuits*. Electronic Circuits and Systems Vol. 3, No. 4, pp. 186-200. July 1979.
- Andranov A. A., Vitt A. A and S. E. Khaikin. *Theory of Oscillators*. Dover Publications Inc. New York. 1987.
- Ashcroft N. W. and Mermin N. D. *Solid State Physics*, Harcourt College Publisher, 1976.
- Autar K. and Barker C. *Ordinary Differential Equations, Topic: Runge-Kutta 4th Order Method*. Power Point Slide. <http://numericalmethods.eng.usf.edu>
- Baquero R. *La Anisotropía en la Superconductividad*. Revista Mexicana de Física Vol. 26 No. 2, pp. 275-310, 1979.
- Baquero R. *Capítulo 5. Cien Años de Superconductividad*. Archivo PDF. Departamento de Física Cinvestav. 2011.
- Barone A. and Paternò G. *Physics and Applications of the Josephson Effect*. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1982.
- Beasley M. R. *Notes on the Ginzburg-Landau Theory*. ICMR Summer School on Novel Superconductors. University of California. 2009.
- Blundell, S. *Superconductivity. A Very Short Introduction*. Oxford University Press. London. 2009.
- Borhani M. and Hadi Varahram M. *Simulation of Nonlinear Dynamics Effects for Josephson Junctions*. WSEAS Transaction on Systems Issue 7, Vol. 3, p. 2501, September 2004.
- Boyce W. E. y DiPrima R. C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Editorial Limusa. México. 2009.
- Braun E. *Física 2: Electricidad y Magnetismo*. Editorial Trillas. México. 1993.
- Burden R. L. y Faires J. D. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana. México. 1985.
- Collier N. and Autar K. *Runge-Kutta 4th Order Method of Solving Ordinary Differential Equations*. Mathematica Notebook. http://mathforcollege.com/nm/simulations/nbm/08ode/nbm_ode_sim_RK4thmethod.nb
- Corlevi S. *Quantum effects in nanoscale in Josephson junction circuits*. Doctoral Thesis. Nanostrukturfysik Alba Nova Universitetscentrum Kungliga Tekniska Högskolan. Stockholm, Sweden. 2006.
- Couillet P., Gilli J. M. and Vandenberghe N. *A Damped Pendulum Forced with A Constant Torque*. American Journal of Physics Vol. 73, No. 12, pp. 1122-1128, Dec. 2005.
- Crawford J. D. *Introduction to Bifurcation theory*. Reviews of Modern Physics Vol. 63, No. 4, pp. 991-1037, October 1991.
- Cross M. *Physics 127c: Statistical Mechanics. Superconductivity: Ginzburg Landau Theory*. California Institute of Technology. 2006. <http://www.pma.caltech.edu/~mcc/Ph127/c/Lecture14.pdf>
- Dagdug Lima L. y Guzmán López O. *Mathematica Esencial con Aplicaciones*. Colección CBI. Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa. México. 2010.
- De Llano, M. *Mecánica Cuántica*. Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias UNAM. México. 2002.
- Del Río Correa J. L. *Teoría de London & London y las transiciones de fase de segundo orden*. Memorias de Extensos de la XVII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas ESFM IPN, pp. 431-440, 2012.
- Del Río Valdés, J. L. *El Péndulo, Paradigma de Sistemas Dinámicos No Lineales*. Tesis para obtener el título de Físico. Facultad de Ciencias. UNAM. México. 2003.
- Eich-Soellner E. *Numerical Methods for Differential Equations*. The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/NumericalMethodsForDifferentialEquations/>
- Enns R. H. and McGuire G. C. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*. Birkhäuser. Boston. 2001.



- Escudero R. *Superconductividad, ¿qué es y en dónde buscar?* Materiales Avanzados Año 1, No. 2, Instituto de Investigaciones en Materiales UNAM, pp. 6-8, Febrero 2004.
- Escudero R. *Efecto túnel en superconductores*. Investigación y Ciencia, pp. 78-84, Mayo 2007.
- Feynman R. *Física Vol. III, Mecánica Cuántica*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- Fujita S. and Godoy S. *Quantum Statistical Theory of Superconductivity*. Plenum Press. New York. 1996.
- García-Colín Scherer L. *Introducción a la Termodinámica Clásica*. Editorial Trillas. México.1990.
- Goldstein H. *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté. Barcelona. 1987.
- Grant I. S. y Phillips W. R. *Electromagnetismo*. Editorial Limusa. México. 1979.
- Gobulov A. A., Kupriyanov M. Y. and Il'ichev E. *The current-phase relation in Josephson junctions*. Reviews of Modern Physics Vol. 76, No. 2, pp. 411-469, April 2004.
- Guckenheimer J. and Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. 2nd Edition. Springer-Verlag. New York. 1985.
- Guru. *Classics in Materials Science: The Bragg-Williams model of order-disorder transformations*. Materialia Indica. 2009.
<http://materialiaindica.wordpress.com/2009/02/13/classics-in-materials-science-the-bragg-williams-model-of-order-disorder-transformations/>
- Hauser W. *Introduction to the principles of mechanics*. Mass-Addison-Wesley. 1965.
- Honegger, R. *Landau Theory, Fluctuations & Break Down Landau Theory*. LaTeX slide. ETH Zürich. 2007.
<http://katzgraber.org/teaching/ss07/files/honegger.pdf>
- Imaaz C. y Zdenek V. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Editorial Limusa-Wiley. México. 1968.
- Ipanaqué R. *Breve Manual de Maxima*. Segunda Edición. Publicaciones Eumed.net. Malaga, España. 2012.
- Jordan D. W. and Smith P. *Nonlinear Ordinary Differential Equations. An Introduction for Scientist and Engineer*. 4th Edition. Oxford University Press. New York. 2007.
- Kip A. F. *Fundamentos de Electricidad y Magnetismo*. McGraw-Hill. México. 1990.
- Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc.1996.
- Krüger U., Kurkijärvi J., Bauer M. and Martiessen. *Chaos and Nonlinear Effects in Josephson Junctions and Devices*. Nonlinear Dynamics in Solids. H. Thomas (Ed.), pp. 107-128, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 1992.
- Landau L. D. y Lifshitz E. M., *Física Teórica Vol. 5: Física estadística*. Editorial Reverté, Madrid, 1986.
- Landau L. D. y Lifshitz E. M., *Física Teórica Vol. 8: Electrodinámica de los Medios Continuos*. Editorial Reverté, Madrid. 1986.
- Likharev, K. K. *Superconducting weak links*. Reviews of Modern Physics Vol. 51, No. 1, pp. 101-159, January 1979.
- Likharev, K. K. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*. Gordon and Breach Science Publishers. Glasgow. 1986.
- Magaña Solís L. F. *Los Superconductores*. Fondo de Cultura Económica. México.1988.
- Mahan G. D. *Many-particle Physics*, Plenum Press, 1981.
- Mandl F. *Física Estadística*. Editorial Limusa. México. 1979.
- Marion J. B. *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*. Editorial Reverté. Barcelona. 1998.
- Mendelssohn K. *La búsqueda del cero absoluto. El significado de la Física de las bajas temperaturas*. Ediciones Guadarrama. Madrid. 1965.
- Navarro Chávez O. y Arredondo León Y. *Teoría de la Superconductividad*. Archivo PDF. Instituto de Investigaciones en Materiales UNAM. 2011.
- Navarro Chávez O. y Baquero Parra R. *Ideas Fundamentales de la Superconductividad*. UNAM. Morelia. 2007.
- Nayak B. P. *Bragg-Williams theory of phase transition: Ising model and black hole*, Prayas Student's Journal of Physics. Vol. 3, No. 1, Jan.-Feb., 2008.
- Papon P., Ledlond J. and Meijer P. H. E. *The Physics of Phase Transitions. Concepts and Applications*. 2nd Edition. Springer-Verlag. Berlin. 2006.
- Piña Garza E. *Termodinámica*. Editorial Limusa. México. 1978.
- Pippard A.B. *The Elements of Classical Thermodynamics*. Cambridge University Press. 1957.
- Posazhennikova A. *Josephson Effect in Superconductors and Superfluids*. arXiv.org. 2009.

- <http://arxiv.org/abs/0908.1761>
- Prieto P. y Lopera W. *Junturas Josephson basadas en Superconductores de Alta Temperatura*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Vol. 25, No. 96, pp. 381-394, Septiembre 2001.
 - Ramos E. D. y Sánchez D. H. *Premios Nobel 1972 Física: J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer. Superconductividad*. Ciencia Nueva No. 21, pp. 3-7. 1972.
 - Reitz J. R., Milford F. J., Christy R. W. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Cuarta Edición. Pearson Educación. México. 1996.
 - Resnick R., Halliday D. y Krane K. S. *Física Vol. 2*. 5ta. Edición. Grupo Editorial Patria. México. 2002.
 - Riotorto Rodríguez M. (Trad.). *Manual de Maxima*. Traducción española. Archivo PDF. <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/es/maxima.pdf>
 - Salam F. M. A. and Sastry S. S. *The Complete Dynamics of the Forced Josephson junction Circuit: The Regions of Chaos*. Chaos in Nonlinear Dynamical Systems. Edited by Jagdish Chandra, pp. 43-55. SIAM. Philadelphia. 1984.
 - Shukrinov Y. M., Rahmonov I., Mihud D. and Iorga C. *Computer Simulation of Tunneling Characteristic of Superconducting Nanostructures*. 2013 Student Practice JINR Fields on Research (2nd Stage). Bogoliubov Laboratory Theoretical Physics. Dubna, Russia. PDF Slide. 2013. [http://newuc.jinr.ru/img_sections/file/Practice2013/Presentation_Eu/2013%20STUDENT%20PRACTICE\(2\).pdf](http://newuc.jinr.ru/img_sections/file/Practice2013/Presentation_Eu/2013%20STUDENT%20PRACTICE(2).pdf)
 - Strogatz S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
 - Thomas S. *Bifurcation Diagrams with Flow Fields*. The Wolfram Demonstrations Project <http://demonstrations.wolfram.com/BifurcationDiagramsWithFlowFields/>
 - Thompson J. M. T. and Stewart H. B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons. GB. 1986.
 - Torres M. E. *Ciclo Límite con Aplicaciones de Matlab*. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Entre Ríos. Mayo 2006. http://www.bioingenieria.edu.ar/academica/catedras/mate3/Apuntes/cicloLimite_2006.pdf
 - Vallejo J. A. *Ecuaciones Diferenciales con Maxima*. Facultad de Ciencias. UASLP. San Luis Potosí, México. 2009. <http://galia.fc.uaslp/~vallejo/EDO.pdf>
 - Van Duzer T. and Turner C. W. *Principles of Superconductive Devices and Circuits*. 2nd Edition. Prentice Hall. 1999.
 - Wolfram S. *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*. 2nd Edition. Addison Wesley. 1991.
 - Zanini F. *Josephson Effect and Selected Applications: an Example of Quantum Effects in Macroscopic Systems*. Bachelor Thesis. Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Università Degli Studi Di Trento. 2008.