

ESTIMACION DE LOS CONJUNTOS
ALCANZABLES DE SISTEMAS
LINEALIZABLES.

TESIS QUE PRESENTA EL
MAT. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN
PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
MAESTRO EN MATEMATICAS.

OCTUBRE DE 1989.

ASESOR DE TESIS
DR. RODOLFO SUAREZ CORTES.

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA.

AGRADECIMIENTOS

Luís Oct 71
A mis padres :

José G. Solís Miranda (Q.P.D.)

y

Julieta Daun de Solís

por su amor y apoyo.

A mis hermanos :

Landy, Linda, Orlando y Fernando,

por su cariño

y aliento.

A mis maestros, con respeto y gratitud.

A los profesores sinodales :

Dr. Pedro Armendáriz Morales,

Dr. Rodolfo Suárez Cortés,

Dr. Jesús Alvarez Calderón y

Dra. Patricia Saavedra Barrera,

por su consideración a este trabajo.

En especial a mi asesor, Dr. Rodolfo Suárez, sin cuya motivación la presente no habría tenido lugar, y al Dr. Pedro Armendáriz, por su interés y tiempo.

A todos mis amigos, con aprecio y por los gratos momentos juntos, y en particular a José G. Reyes, Ricardo Ramírez M., Jacqueline Desfassieux D., Joaquín Delgado, Amado León, Fernando Verduzco, Jesús Chargoy, Fernando Vázquez, Ma. Luisa Sandoval y demás cuates, por lo invaluable de la amistad.

A las secretarias, Martha Sánchez, Beatriz Arce y Marilén Juanché, por el excelente trabajo de mecanografía y empeño.

INDICE

INTRODUCCION.....	1
CAPITULO 1 ESTIMACION DEL CONJUNTO ALCANZABLE DE SISTEMAS DE CONTROL LINEALES NO AUTONOMOS.	
§1.1 EVOLUCION DE CONJUNTOS ALCANZABLES. RESULTADOS GENERALES.....	1
§1.2 COTAS ELIPSOIDALES.....	9
§1.3 EJEMPLOS : SISTEMAS LINEALES EN FORMA CANONICA DE BRUNOVSKY CON UNA ENTRADA.....	21
CAPITULO 2 ESTIMACION DEL CONJUNTO ALCANZABLE DE CIERTOS SISTEMAS NO LINEALES.	
§2.1 GENERALIZACION HACIA EL CASO DE SISTEMAS NO LINEALES.....	31
§2.2 EQUIVALENCIA LINEAL DE SISTEMAS NO LINEALES. TRANSFORMACION GLOBAL.....	48
§2.3 ESTIMACION DEL CONJUNTO ALCANZABLE DE SISTEMAS LINEALMENTE EQUIVALENTES.....	83
CONCLUSIONES.....	105
APENDICE 1.....	108
APENDICE 2.....	118
APENDICE 3.....	125
BIBLIOGRAFIA.....	131

INTRODUCCION

El objetivo de esta tesis es presentar un problema importante de la teoría de control acotado: La estimación del conjunto alcanzable.

Consideremos un sistema de control con condición inicial:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \text{ con } x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{E}^n$, siendo $\mathbb{E}^n$ es el espacio euclideo, f y g son campos vectoriales, u es el control y t_0 es un instante de tiempo inicial.

Dado el sistema (1), supongamos que los controles u toman valores en un conjunto compacto $U \subset \mathbb{E}^1$, i.e., las imágenes de las funciones $u: \mathbb{E}^1 \rightarrow U$, se hallan en el compacto U , entonces, nuestro interés recae en estudiar el conjunto de todas las trayectorias-solución de (1) hasta un tiempo $t \geq t_0$, tomando para esto todas las funciones de control admisibles ($u(t) \in U$). El conjunto determinado por la unión de estas curvas en el espacio de estados x es conocido como el conjunto alcanzable $X(t)$ de (1) en el tiempo t .

Desde un punto de vista físico, el conjunto alcanzable constituye el conjunto de estados (entendiéndose, el conjunto de variables físicas de interés que describen un sistema) a los cuales es posible llevar un sistema modelado por (1) a partir de una descripción inicial.

En este contexto, con tener una aproximación del conjunto alcanzable es más que suficiente para tener una idea de las limitaciones del sistema respecto a las variables físicas a las que el sistema puede ser llevado mediante el uso de las variables de control del diseño. Además, el hecho de elegir estas últimas acotadas (i.e., confinadas a ciertos valores permitidos) radica en que físicamente no se dispone, e.g., de potencia infinita, en el caso de que controlemos con potencia.

Ahora bien, determinar con exactitud el conjunto alcanzable así como sus características en general, es todavía un problema abierto en la Teoría de Control.

Para el caso de sistemas lineales, i.e., o sistemas del tipo (1) para los que $f(x) = Ax$ y $g(x) = b$, con A y b matrices de tamaños apropiados, el conjunto alcanzable posee ciertas características interesantes: es simétrico, compacto, convexo y, en cuanto a su evolución conforme varía el tiempo, no presenta cambios "drásticos" en incrementos pequeños de tiempo (su evolución es continua en t en la métrica de Hausdorff).

Sin embargo, aún para el caso de sistemas lineales, determinar con exactitud el conjunto alcanzable para toda t , implica un gran trabajo computacional, sobre todo en dimensiones grandes; además de que no ha sido resuelto en general.

En el caso en que el sistema (1) es de índole no lineal, sólo

podemos contar con que $X(t)$ es compacto, exigiendo condiciones sobre los campos vectoriales f y g , y que las trayectorias existan para todo t (i.e., que no se "escapen" al infinito en tiempo finito).

Aún cuando las características generales del conjunto alcanzable poseen un interés matemático per se, desde una perspectiva pragmática, la descripción del conjunto alcanzable no resultan tan preponderante (teniendo presente la complejidad computacional que esto implica), como la de dar una estimación del mismo.

Así, en el capítulo 1 se presenta una teoría para aproximar (por dentro y fuera) mediante el uso de elipsoides al conjunto alcanzable para el caso general de sistemas lineales no autónomos (incluyendo de paso a los autónomos) y con controles restringidos dados vectorialmente (entradas múltiples).

Aunque el trabajo computacional es insoslayable en general, pues en esta empresa es necesario hallar la solución de una ecuación diferencial no lineal, (para determinar el Elipsoide) ,sí resulta factible hallar soluciones por cuadraturas para un tipo particular de sistemas lineales con una entrada (un control escalar), que son de gran utilidad en el capítulo 2.

En el capítulo 2 se extrapolan los resultados de los sistemas lineales a una clase de sistemas no lineales del tipo (1), los cuales son "linealizables" vía un cambio de coordenadas y una

retroalimentación (control), pero con el inconveniente, semejante al estudiado para un ejemplo de un sistema lineal dado en la sección §2.1, de que los resultados sólo son locales en general.

Sin embargo, podemos contar con una técnica para al menos aproximar $X(t)$ localmente y hasta un tiempo determinado, mediante imágenes difeomorfas de elipsoides, presentando la ventaja respecto a otras técnicas existentes para este efecto, de que proporcionamos la estimación interna. Esta, resulta particularmente complicada de determinar o está ausente en los otros enfoques que se han presentado para abordar el problema (véase por ejemplo [17], [26] y [32]).

Al final del capítulo 2 se proporciona un ejemplo de aplicación para un reactor (C.S.T.R.) modelado por un sistema de dos ecuaciones diferenciales y una entrada (control). En particular, se esboza un procedimiento para que la estimación interna sea mejor (tratando de optimizarla), comparando el resultado con el conjunto alcanzable "real" (una aproximación bastante fiel para tiempos no muy grandes).

CAPITULO 1

ESTIMACION DEL CONJUNTO ALCANZABLE DE SISTEMAS DE CONTROL LINEALES NO-AUTONOMOS

§1.1. EVOLUCION DE CONJUNTOS ALCANZABLES. RESULTADOS GENERALES.

Sean $\mathbb{E}^n$ el espacio euclideo n-dimensional, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, y $\Omega(\mathbb{E}^n)$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{E}^n$.

Consideremos un sistema de control lineal no autónomo y condiciones iniciales

$$\dot{x} = A(t)x + v, \quad x(t_0) \in M \quad (1.1)$$

donde, $x \in \mathbb{E}^n$, $A(t)$ es una matriz $n \times n$ de coeficientes integrables en todo intervalo acotado de tiempo, v es el vector de control, t_0 es un instante de tiempo inicial y M es un conjunto convexo en $\Omega(\mathbb{E}^n)$. (El conjunto de condiciones iniciales).

Denotamos por $\Phi(t)$ la matriz fundamental asociada al sistema $\dot{x} = A(t)x$, con condición inicial $\Phi(t_0) = I$. (Recuérdese que $\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}$, en el caso que $A(t) = A$ sea una matriz constante).

Consideremos el conjunto de todas las funciones de control medibles, cuyo conjunto de restricciones viene definido bajo la

forma de una multifunción $U(t)$ (véase [Ap.1]), la cual es convexa y medible, y tal que en módulo, $|U(t)| \leq k(t)$, donde $k(t)$ es una función integrable en cualquier intervalo acotado.

Definición.- Una función de control v es admisible si solo si es una selección de $U(t)$ (véase [Ap.1]).

Observación.- Cuando $|U(t)| \leq k$, donde $k \in \mathbb{E}^1$ fija, entonces resulta equivalente a que $\max_{v(t) \in U(t)} \|v(t)\| \leq k$, o sea $\|v(t)\| \leq k$, para toda $v(t) \in U(t)$.

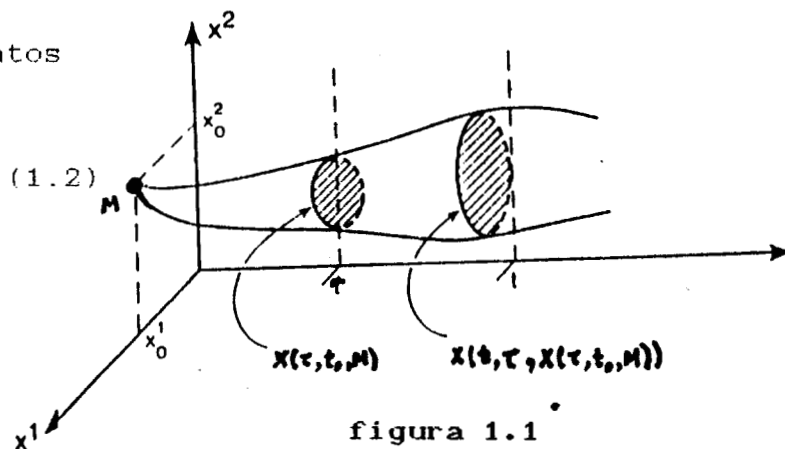
Definición.- El conjunto alcanzable $X(t)$ para (1.1) con $v(t) \in U(t)$ a partir de M es el conjunto de todos los vectores $x(t)$, los cuales son valores de trayectorias $x(t)$ que satisfacen (1.1) usando todos los controles admisibles, para $t \geq t_0$.

Para enfatizar la dependencia de $X(t)$ respecto del dominio M e instante t_0 iniciales, lo denotamos: $X(t) = X(t, t_0, M)$.

Una propiedad importante a remarcar para los conjuntos alcanzables es la siguiente:

$$X(t, t_0, M) = X(t, \tau, X(\tau, t_0, M)) \quad (1.2)$$

para $t_0 \leq \tau \leq t$.



O sea, todo conjunto alcanzable $X(t)$ puede construirse tomando cualquier otro conjunto alcanzable $X(\tau)$ previo a manera de conjunto inicial.

Definición.- Sea $V(t)$ una multifunción definida para todo $t \geq t_0$. Decimos que $V(t)$ es una familia de conjuntos subalcanzables (respectivamente superalcanzables) para el sistema (1.1) si sólo si para toda $\tau \in [t_0, t]$, tenemos que $V(t) \subset X(t, \tau, V(\tau))$, para $t_0 \leq \tau \leq t$ (respectivamente, la contención invertida, $\supset$) se satisface. Y la denotaremos $V_-(t)$ (respectivamente, $V_+(t)$). Expresado de otra manera, $V_-(t)$ ($V_+(t)$) acota a $X(t)$ desde adentro (afuera).

En particular, nos interesará que las multifunciones $V_-(t)$ y $V_+(t)$ sean convexas y compactas. Esta elección se ve justificada por las características generales de los conjuntos alcanzables de sistemas lineales, reveladas por el siguiente teorema.

Teorema.- Consideramos el sistema lineal (1.1) con $v(t) \in U(t)$. Entonces, $X(t)$ es un conjunto convexo, compacto y, que viéndolo como la multifunción $t \mapsto X(t)$, varía continuamente con t , para $t_0 \leq t < \infty$ (respecto a la métrica de Hausdorff en el rango). (cf. Mackie-Strauss[31], p.60, o Lee-Markus[28], p.69). ■

Así, de aquí en adelante, $V(t)$ la consideraremos siempre como una multifunción convexa y compacta.

Ahora bien, nuestro objetivo es hallar cotas para $X(t)$ de tipo

elipsoidal, retomando para esto los trabajos de Chernous'ko, Komarov et al., donde el control se tiene restringido . i.e. , $v(t) \in U(t)$.

Las razones por las que se escogen los elipsoides como cotas radican en :

- 1) su fácil representación : un elemento vectorial para el centro y una matriz simétrica definida positiva. [Ap. 1].
- 2) proveen de una aproximación adecuada para conjuntos convexos arbitrarios, y como nota final,
- 3) la clase de los elipsoides es invariante bajo transformaciones lineales.

Estas propiedades son las que nos hacen favorecer las multifunciones elipsoidales con respecto a todas las demás multifunciones compactas y convexas.

A pesar de esto, para propósitos generales, solo pediremos de momento que $V(t)$ sea compacta y convexa, relegando las particulares de tipo elipsoidal a la sección § 1.2.

El lema siguiente - corolario de la proposición 1 en Ap.1 - nos indica la manera de acotar el conjunto alcanzable de un sistema (1.1), mediante el uso de funciones soporte :

Lema 1.1- Sea $V_-(t)$ una multifunción tal que $V_-(t_0) \subset M$ (respectivamente, $V_+(t_0) \supset M$). Entonces, $V_-(t) \subset X(t)$ si y sólo si $c\langle V(t), \psi \rangle \leq c\langle X(t), \psi \rangle$, para cualesquiera $\psi \in \mathbb{E}^n$ y $t \geq t_0$ (respectivamente, con la contención y la desigualdad invertidas, $\supset$ y $\geq$).

Sin embargo, para elegir una $V(t)$ apropiada que cumpla lo anterior, debemos imponer condiciones sobre la misma, que hagan el nexo con $X(t)$.

Para el efecto, primeramente tenemos que la función soporte de $X(t)$ viene dada por la fórmula :

$$c\langle X(t), \psi \rangle := c\langle \Phi(t)(M + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) U(s) ds), \psi \rangle \quad (1.3)$$

Pero, para poder operar con mayor libertad, consideremos en su lugar la función soporte : $c\langle \Phi^{-1}(t)X(t), \psi \rangle$, lo cual no implica pérdida de generalidad alguna para lo que sigue, pues $\Phi(t)$ no es singular; así, usando las propiedades 2 y 4 (en este orden) de las funciones soporte [Ap.1], tenemos :

$$\begin{aligned} c\langle \Phi^{-1}(t)X(t), \psi \rangle &= c\langle M + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) U(s) ds, \psi \rangle \\ &= c\langle M, \psi \rangle + c\langle \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) U(s) ds, \psi \rangle \\ &= c\langle M, \psi \rangle + \int_{t_0}^t c\langle \Phi^{-1}(s) U(s), \psi \rangle ds \end{aligned} \quad (1.4)$$

Las condiciones para garantizar la estimación inferior del conjunto alcanzable, vendrán dadas en los términos siguientes :

Consideremos una multifunción $V(t)$ para la cual la función soporte $c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle$ sea absolutamente continua en $t \geq t_0$, para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$. Entonces, existe $\frac{d}{dt} c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle$, para $t \geq t_0$, en c.t.p. ([Ap. 2]).

Denotemos $h(t, \psi) = \frac{d}{dt} c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle$. y pidamos satisfaga la desigualdad :

$$h(t, \psi) \leq \frac{d}{dt} c\langle \Phi^{-1}(t)U(t), \psi \rangle \quad (1.5)$$

para casi toda $t \geq t_0$ y toda $\psi \in \mathbb{E}^n$.

El resultado por obtener es, que una tal $V(t)$, para la cual se satisface lo anterior, y que además inicialmente se tenga que $V(t_0) \subset M$ y para algún instante $\tau \geq t_0$, también $V(\tau) \subset X(\tau)$, cumple con que siempre estuvo contenida en $X(t)$ a partir del instante t_0 , i.e., $V(t)$ es una cota inferior para $X(t)$.

Precisémoslo mediante los próximos dos resultados :

Lema 1.2.- Sean $\tau \geq t_0$ un instante de tiempo y $\psi \in \mathbb{E}^n$ fijos. Sea $V(t)$ una multifunción tal que $c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle$ es absolutamente continua para $t \geq \tau$ y satisface las desigualdades (1.5) y

$$c\langle \Phi^{-1}(\tau)V(\tau), \psi \rangle \leq c\langle \Phi^{-1}(\tau)X(\tau), \psi \rangle. \quad (1.6)$$

Entonces, esta desigualdad es válida para toda $t \geq \tau$.

Demostración.— De (1.4) sabemos que

$$c\langle \Phi^{-1}(t)X(t), \psi \rangle = c\langle M, \psi \rangle + \int_{t_0}^t c\langle \Phi^{-1}(s)U(s), \psi \rangle ds$$

la cual, para lo que sigue, la expresaremos como :

$$\begin{aligned} c\langle M, \psi \rangle + \int_{t_0}^{\tau} c\langle \Phi^{-1}(s)U(s), \psi \rangle ds + \int_{\tau}^t c\langle \Phi^{-1}(s)U(s), \psi \rangle ds \\ = c\langle \Phi^{-1}(\tau)X(\tau), \psi \rangle + \int_{\tau}^t c\langle \Phi^{-1}(s)U(s), \psi \rangle ds. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Por otra parte, para ψ fija, por la continuidad absoluta de la función soporte $c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle$, $h(t, \psi)$ es integrable (cf. [Ap.2]) y de (1.5), integrando desde τ hasta t :

$$\int_{\tau}^t h(s, \psi) ds \leq \int_{\tau}^t c\langle \Phi^{-1}(s)U(s), \psi \rangle ds, \text{ luego,}$$

$$c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle - c\langle \Phi^{-1}(\tau)U(\tau), \psi \rangle \leq \int_{\tau}^t c\langle \Phi^{-1}(s)U(s), \psi \rangle ds,$$

de donde,

$$c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle \leq c\langle \Phi^{-1}(\tau)U(\tau), \psi \rangle + \int_{\tau}^t c\langle \Phi^{-1}(s)U(s), \psi \rangle ds \quad (1.8)$$

y así, usando la nueva expresión (1.7), por (1.6), tenemos que (1.8) es menor o igual que :

$$c\langle \Phi^{-1}(\tau)X(\tau), \psi \rangle + \int_{\tau}^t c\langle \Phi^{-1}(s)U(s), \psi \rangle ds = \\ = c\langle \Phi^{-1}(t)X(t), \psi \rangle.$$

Por lo tanto , $c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle \leq c\langle \Phi^{-1}(t)X(t), \psi \rangle$,
para $t \geq \tau$. ■

Corolario 1.1.- Supongamos que $V(t)$ es una multifunción tal que $V(t_0) \subset M$ y que para cualesquiera $t \geq \tau$ y $\psi \in \mathbb{E}^n$, la función $c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle$ es absolutamente continua en t y satisface (1.5). Entonces, $V(t) \subset X(t)$ para toda $t \geq t_0$, i.e., $V(t) = V_-(t)$ es una multifunción subalcanzable.

Demostración.- De hecho, como la multifunción $V(t)$ satisface todas las hipótesis del lema anterior, tenemos que se satisface :

$$c\langle \Phi^{-1}(t)V(t), \psi \rangle \leq c\langle \Phi^{-1}(t)U(t), \psi \rangle ,$$

para cualesquiera $t \geq t_0$ y $\psi \in \mathbb{E}^n$. Pero esto, por el lema 1.1 , es equivalente a que $\Phi^{-1}(t)V(t) \subset \Phi^{-1}(t)X(t)$, para toda $t \geq t_0$. De aquí, debido a la no singularidad de $\Phi(t)$, se sigue que $V(t) \subset X(t)$ para $t \geq t_0$. ■

Con respecto al caso de cotas externas para $X(t)$, $V_+(t)$, no necesitamos más que parafrasear lo anterior, modificando el sentido de la desigualdad (1.5) y además, que se cumpla $V_+(t_0) \supset M$.

§ 1.2 COTAS ELIPSOIDALES.

A continuación construiremos $V(t)$ de forma tal que sea un elipsoide en $\mathbb{E}^n$, para $t \geq t_0$ y satisfaga la desigualdad (1.5), a fin de que sirva de conjunto subalcanzable (o bien la desigualdad contraria a (1.5), para el conjunto superalcanzable).

Sea $v(t)$ una selección medible de la multifunción $U(t)$, la cual existe debido a que $U(t)$ es medible (véase [Ap.1]), y denotemos por M_+^n la clase de las matrices simétricas definidas positivas.

Para el caso que nos compete en esta sección, vamos a considerar la familia de funciones matriciales que satisfacen las condiciones siguientes :

1) consideremos a todas las funciones matriciales definidas positivas, $F : \mathbb{E}^1 \times M_+^n \rightarrow M_+^n$, $F = F(t, Q)$, (i.e., si $Q \geq 0$ entonces $F(t, Q) \geq 0$), que satisfacen la desigualdad :

$$\langle F(t, Q)\psi, \psi \rangle \leq 2c \langle U(t) - v(t), \psi \rangle \langle Q\psi, \psi \rangle^{1/2} \quad (2.1)$$

2) las funciones $F(t, Q)$ son continuas en Q , para $t \in \mathbb{E}_+^1$, fijo;

3) las funciones $F(t, Q)$ son integrables según Lebesgue en subintervalos compactos de $\mathbb{E}_+^1$, para $Q \in M_+^n$, fija .

Denotamos con $\mathcal{W}_-(t, Q)$ a esta clase de matrices F que satisfacen las condiciones 1), 2) y 3) anteriores.

De manera análoga definimos $\mathbb{W}_+(t, Q)$ la clase de funciones matriciales que satisfacen las condiciones 1), 2) y 3) anteriores, pero con la desigualdad invertida en (2.1).

$\mathbb{W}_-(t, Q)$ ($\mathbb{W}_+(t, Q)$) no es una clase vacía, como constataremos con (2.5) (respectivamente (2.6)).

Con estas familias de matrices definidas así, y si además contamos con que la solución de la ecuación diferencial (2.2) (ver más adelante) existe, lo cual se sigue de las condiciones 2) y 3) de la definición de $\mathbb{W}_-(t, Q)$, y es única para condiciones iniciales dadas (i.e., si $(t_0, Q_0) \in \mathbb{E}_+^1 \times \mathbb{M}_+^n$, entonces existe una única solución de (2.2) $Q = Q(t, t_0, Q_0)$ tal que $Q(t_0) = Q_0$), tenemos que la solución $Q(t)$ de la ecuación diferencial matricial (2.2) (véase [Ap.2]) es absolutamente continua y definida positiva (véase Reid[34], pág. 129 y sucesivas).

De esta forma contamos con los teoremas fundamentales sobre cotas elipsoidales para conjuntos alcanzables (Komarov[25]).

Teorema 2.1.—(de subalcanzabilidad elipsoidal o de acotación inferior del conjunto alcanzable $X(t)$ por medio de un elipsoide).

Sean a_0 y $Q_0 \geq 0$ parámetros del elipsoide $E(a_0, Q_0) \subset M$, sea $v(t)$ un control admisible, y $a(t)$ una solución de la ecuación diferencial $\dot{a} = A(t)a + v(t)$, con condición inicial $a(t_0) = a_0$. Sea $Q(t) \geq 0$ la solución de la ecuación diferencial matricial

$$\dot{Q} = A(t)Q + QA^T(t) + F_-(t, Q) \quad (2.2)$$

con condición inicial $Q(t_0) = Q_0$, donde $F_- \in W_-(t, Q)$. Entonces el elipsoide dado por $E(a(t), Q(t))$ será una cota inferior para $X(t)$, i.e., será un conjunto subalcanzable.

Demostración. - Supongamos $Q(t)$ es la solución de (2.2); definamos la función $\gamma: \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}_+^1$, dada por $\gamma(t, \psi) := \langle \Phi^{-1}(t)Q(t)\Phi^{-1T}(t)\psi, \psi \rangle$, la cual es absolutamente continua en t y no negativa.

En efecto, para $Q(t) \geq 0$ fija, tenemos que :

$$\gamma(t, \psi) = \langle Q(t)\Phi^{-1T}(t)\psi, \Phi^{-1T}(t)\psi \rangle = \langle Q(t)\phi, \phi \rangle \geq 0,$$

por definición.

Esta prueba la tendremos en tres pasos :

a) Primeramente demostraremos que para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$, existe $\tau \geq t_0$ tal que tengamos $c\langle \Phi^{-1}(\tau)E(a(\tau), Q(\tau)), \psi \rangle \leq c\langle \Phi^{-1}(\tau)X(\tau), \psi \rangle$.

En efecto, supongamos que $\psi \in \mathbb{E}^n$ es un vector para el cual $\gamma(t, \psi) = 0$. Entonces, usando la expresión para el elipsoide $E(a, Q)$ ([Ap. 1]), las propiedades 2 y 3 de las funciones soporte ([Ap. 1]), la desigualdad de Schwarz (D.Sc.) y de la proposición 5 ([Ap. 1]) :

$$\begin{aligned} c\langle \Phi^{-1}E(a, Q), \psi \rangle &= c\langle \Phi^{-1}(a + Q^{1/2}B^1(0)), \psi \rangle = \\ &= c\langle a + Q^{1/2}B^1(0), \Phi^{-1T}\psi \rangle \end{aligned} \quad (P. 3)$$

$$= c \langle a, \Phi^{-1T} \psi \rangle + c \langle Q^{1/2} B^1(0), \Phi^{-1T} \psi \rangle \quad (P. 2)$$

$$= \langle \Phi^{-1} a, \psi \rangle + c \langle B^1(0), Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi \rangle \quad (P. 3)$$

$$= \langle \Phi^{-1} a, \psi \rangle + \| Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi \| \quad (D.Sc)$$

$$= \langle \Phi^{-1} a, \psi \rangle + \langle Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi, Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi \rangle^{1/2}$$

$$= \langle \Phi^{-1} a, \psi \rangle + \langle \Phi^{-1} Q^{1/2} Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi, \psi \rangle^{1/2} \quad (P. 5)$$

$$= \langle \Phi^{-1} a, \psi \rangle + \gamma^{1/2}(t, \psi) = \langle \Phi^{-1} a, \psi \rangle,$$

pues $\gamma(t, \psi) = 0$, por hipótesis. (Para simplificar la notación hemos omitido el parámetro τ). Pero, $a(t) \in X(t)$, para toda $t \geq t_0$, debido a la ecuación $\dot{a} = A(t)a + v(t)$. Por lo tanto, tenemos que $c \langle \Phi^{-1}(t) E(a(t), Q(t)), \psi \rangle \leq c \langle \Phi^{-1}(t) X(t), \psi \rangle$, para toda $t \geq t_0$, y en particular se satisface si $t = \tau$.

Supongamos ahora que para $\psi \in \mathbb{E}^n$ fijo, $\gamma(t_1, \psi) > 0$, para $t_1 \geq t_0$. Como $\gamma(t, \psi)$ es continua en t , es positiva en algún semi-intervalo izquierdo de t_1 . Sea $(\tau, t_1]$ un tal intervalo maximal, o sea donde $\gamma|_{(\tau, t_1]} \neq 0$. Entonces, o bien $\tau = t_0$ (y luego $E(a_0, Q_0) \subset X(t_0) \subset M$), o bien $\gamma(t, \psi) = 0$. En ambos casos, por la primera parte de esta prueba,

$$c \langle \Phi^{-1}(\tau) E(a(\tau), Q(\tau)), \psi \rangle \leq c \langle \Phi^{-1}(\tau) X(\tau), \psi \rangle.$$

b) Probemos ahora que (1.5) se satisface para la función soporte asociada al elipsoide $E(a, Q)$, para casi toda $t \in (\tau, t_1]$:

$$\frac{d}{dt} c \langle \Phi^{-1}(t) E(a(t), Q(t)), \psi \rangle \leq c \langle \Phi^{-1}(t) U(t), \psi \rangle.$$

En efecto, para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$ y para casi toda $t \in (\tau, t_1]$, por las propiedades 2 y 3 de las funciones soporte ([Ap. 1]), de la desigualdad de Schwarz y de la proposición 5 ([Ap. 1]) (en este orden), tenemos :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} c \langle \Phi^{-1} E(a, Q), \psi \rangle &= \frac{d}{dt} c \langle \Phi^{-1} (a + Q^{1/2} B^1(0)), \psi \rangle \\
 &= \frac{d}{dt} c \langle \Phi^{-1} a, \psi \rangle + \frac{d}{dt} c \langle \Phi^{-1} Q^{1/2} B^1(0), \psi \rangle \\
 &= \langle \Phi^{-1} (-A) a + \Phi^{-1} \dot{a}, \psi \rangle + \frac{d}{dt} c \langle B^1(0), Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi \rangle \\
 &= \langle \Phi^{-1} (\dot{a} - Aa), \psi \rangle + \frac{d}{dt} \| Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi \|^2 \\
 &= \langle \Phi^{-1} (\dot{a} - Aa), \psi \rangle + \frac{d}{dt} \langle Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi, Q^{1/2} \Phi^{-1T} \psi \rangle^{1/2} \\
 &= \langle \Phi^{-1} (\dot{a} - Aa), \psi \rangle + \frac{d}{dt} \langle \Phi^{-1} Q \Phi^{-1T} \psi, \psi \rangle^{1/2} \\
 &= \langle \Phi^{-1} (\dot{a} - Aa), \psi \rangle + \frac{d}{dt} (\gamma(t, \psi))^{1/2} .
 \end{aligned}$$

esto último por la definición de $\gamma(t, \psi)$. luego esta última expresión es , por la regla de la cadena, igual a :

$$\begin{aligned}
 &\langle \Phi^{-1} (\dot{a} - Aa), \psi \rangle + \frac{1}{2} (\gamma(t, \psi))^{-1/2} \langle \Phi^{-1} (-A) Q \Phi^{-1T} \psi + \Phi^{-1} \dot{Q} \Phi^{-1T} \psi + \Phi^{-1} Q \Phi^{-1T} (-A^T) \psi, \psi \rangle \\
 &= \langle \Phi^{-1} (\dot{a} - Aa), \psi \rangle + \frac{1}{2} (\gamma(t, \psi))^{-1/2} \langle \Phi^{-1} (\dot{Q} - AQ - QA^T) \Phi^{-1T} \psi, \psi \rangle \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

para $\psi \neq 0$ y es cero si $\psi = 0$, pues $\gamma(t, \psi)|_{(\tau, t_1]} > 0$.

Pero, por otra parte, por ser $Q(t) \geq 0$ una solución de la ecuación diferencial (2.2); i.e., $F(t, Q) := \dot{Q} - AQ - QA^T$, para casi toda $t \geq t_0$, y satisface la desigualdad (2.1), entonces,

$$\begin{aligned} \langle (\dot{Q} - AQ - QA^T)\phi, \phi \rangle &\leq 2c \langle U - \dot{a} + Aa, \phi \rangle \langle Q\phi, \phi \rangle^{1/2} = \\ &= 2c \langle U - v(t), \phi \rangle \langle Q\phi, \phi \rangle^{1/2}, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathbb{E}^n$.

Hagamos $\phi = \Phi^{-1T}\psi$, y entonces,

$$\begin{aligned} \langle (\dot{Q} - AQ - QA^T)\Phi^{-1T}\psi, \Phi^{-1T}\psi \rangle &= \langle \Phi^{-1}(\dot{Q} - AQ - QA^T)\Phi^{-1T}\psi, \psi \rangle \leq \\ 2c \langle \Phi^{-1}(U - \dot{a} + Aa), \psi \rangle &\langle \Phi^{-1}Q\Phi^{-1T}\psi, \psi \rangle^{1/2} = \\ 2c \langle \Phi^{-1}(U - \dot{a} + Aa), \psi \rangle \gamma^{1/2}(t, \psi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ahora bien, como $\gamma(t, \psi)|_{(\tau, t_1)} > 0$, dividiendo (2.4) entre $2\gamma^{1/2}(t, \psi)$, y usando la propiedad 2 de las funciones soporte [Ap.1], tenemos:

$$\frac{1}{2} \gamma^{-1/2} \langle \Phi^{-1}(\dot{Q} - AQ - QA^T)\Phi^{-1T}\psi, \psi \rangle + c \langle \Phi^{-1}(\dot{a} - Aa), \psi \rangle \leq c \langle \Phi^{-1}U, \psi \rangle,$$

i.e., $\frac{d}{dt} c \langle \Phi^{-1}E(a, Q), \psi \rangle \leq c \langle \Phi^{-1}U, \psi \rangle$, por (2.3) y (2.4).

(En todos estos cálculos omitimos la dependencia respecto a t , por claridad).

c) Probaremos ahora en base a los resultados de a) y b) que

$c \langle \Phi^{-1}(t_1)E(a(t_1), Q(t_1)), \psi \rangle \leq c \langle \Phi^{-1}(t_1)\dot{X}(t_1), \psi \rangle$ se satisface para $t_1 \geq \tau$.

Pero esto, en efecto, se sigue de aplicar el lema 1.2 y el corolario 1.1 :

Como conclusión hemos obtenido que, asignando un instante $t_1 \geq t_0$ la función soporte asociada al elipsoide $E(a(t), Q(t))$ satisface (por el lema 1.2) la desigualdad :

$$c \langle \Phi^{-1}(t_1) E(a(t_1), Q(t_1)), \psi \rangle \leq c \langle \Phi^{-1}(t_1) X(t_1), \psi \rangle, \text{ para } \psi \in E^n.$$

Y así, usando el hecho de que t_1 es arbitrario (del corolario 1.1), $E(a(t), Q(t)) \subset X(t)$, para toda $t \geq t_0$. ■

Gráficamente,

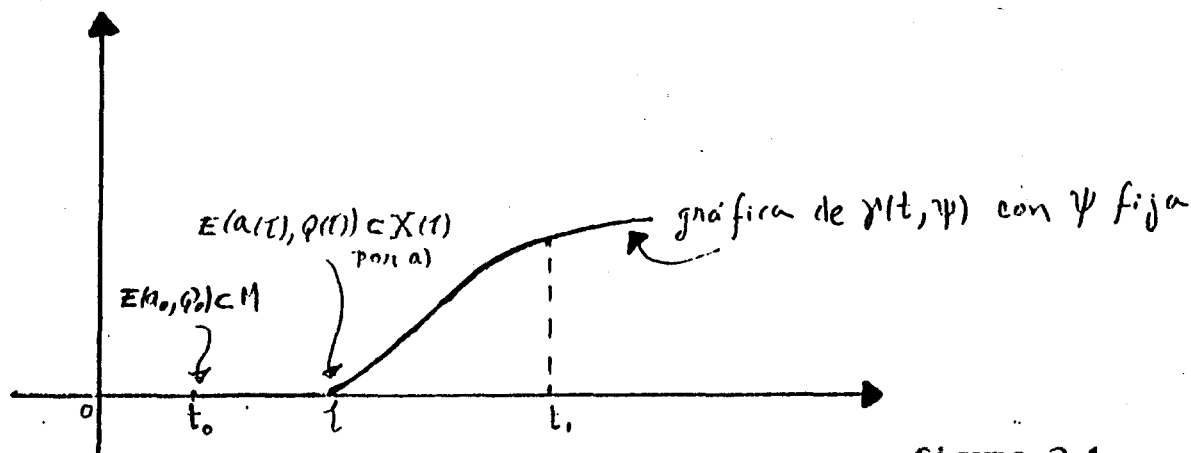


figura 2.1

Teorema 2.2. - (de superalcanzabilidad elipsoidal o de acotación superior del conjunto alcanzable $X(t)$ mediante un elipsoide).

Con las mismas hipótesis del teorema anterior, pero considerando en (2.2) que $F \in \mathbb{W}_+(t, Q)$. Entonces, la solución $Q \geq 0$ de la ecuación diferencial (2.2) especificará un elipsoide $E(t, Q)$ que contiene al conjunto $X(t)$, siempre y cuando tengamos además que

los parámetros a_0 y Q_0 sean elegidos de manera que $E(a_0, Q_0) > M$.

Demostración. - Es una paráfrasis de la del teorema anterior, con la modificación de usar la desigualdad contraria a (1.5). ■

La determinación de los parámetros $a(t)$ y $Q(t)$ se reduce a resolver el problema de Cauchy de un sistema de dos ecuaciones diferenciales : una ecuación diferencial vectorial para el centro $a(t)$ y una ecuación diferencial matricial no lineal para la matriz simétrica $Q(t) \geq 0$. Estas dos ecuaciones son independientes y pueden ser integradas por separado.

Si consideramos el caso en que $U(t) = v(t) + B(t)B^1(0)$, donde $v : \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^n$, es una función asignada, $t \rightarrow B(t)$ es una función matricial de coeficientes integrables en todo intervalo acotado, y $B^1(0)$ es la bola unitaria centrada en el origen, resulta que siempre existe una familia de funciones matriciales F_- (y F_+) que satisfacen la condición 1) de la definición de $W_-(t, Q)$ (respectivamente, de $W_+(t, Q)$).

En efecto, mostraremos que cualquier función de la forma :

$$F_-(t, Q) = Q^{1/2} (PB(t)B^T(t)P)^{1/2} P^{-1} + P^{-1} (PB(t)B^T(t)P)^{1/2} Q^{1/2} \quad (2.5)$$

satisface la condición 1) de la definición de $W_-(t, Q)$. Aquí $P = P(t, Q, B)$ es una función matricial que toma valores simétricos invertibles (i.e., $(P^{-1})^T = P^{-1}$), y es tal que $F_-(t, Q) \geq 0$. Así, por

las proposiciones 5 y 6 ([Ap. 1]) y la desigualdad de Schwarz (D.Sc.), para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$, tenemos :

$$\begin{aligned}
 \langle F_-(t, Q)\psi, \psi \rangle &= \langle Q^{1/2} (PBB^T P)^{1/2} P^{-1} \psi, \psi \rangle + \\
 &\quad \langle P^{-1} (PBB^T P)^{1/2} Q^{1/2} \psi, \psi \rangle \\
 &= \langle Q^{1/2} (PBB^T P)^{1/2} P^{-1} \psi, \psi \rangle + \\
 &\quad \langle \psi, (Q^{1/2})^T (PBB^T P)^{1/2 T} P^{-1 T} \psi \rangle \\
 &= 2 \langle Q^{1/2} (PBB^T P)^{1/2} P^{-1} \psi, \psi \rangle \\
 &= 2 \langle (PBB^T P)^{1/2} P^{-1} \psi, Q^{1/2} \psi \rangle \\
 &\leq 2 \| Q^{1/2} \psi \| \| (PBB^T P)^{1/2} P^{-1} \psi \| = \quad (D.Sc.) \\
 &= 2 \| Q^{1/2} \psi \| \langle (PBB^T P)^{1/2} P^{-1} \psi, (PBB^T P)^{1/2} P^{-1} \psi \rangle^{1/2} \\
 &= 2 \| Q^{1/2} \psi \| \langle P^{-1} ((PBB^T P)^{1/2})^2 P^{-1} \psi, \psi \rangle^{1/2} \\
 &= 2 \langle Q \psi, \psi \rangle^{1/2} \langle BB^T \psi, \psi \rangle^{1/2}
 \end{aligned}$$

Así del hecho de que $U(t) - v(t) = B(t)B^1(0)$, tenemos :

$$\langle F_-(t, Q)\psi, \psi \rangle \leq 2 \langle Q\psi, \psi \rangle^{1/2} \| B^T \psi \| = 2 c \langle B^1(0), B^T \psi \rangle \langle Q\psi, \psi \rangle^{1/2}$$

Por otra parte, si $P_1(t, Q)$ y $P_2(t, Q)$ son funciones matriciales que toman valores simétricos invertibles, entonces la función :

$$F_+(t, Q) := \| P_1^{-1} \| \| P_2^{-1} \| (BP_1 P_1^T B^T + Q^{1/2} P_2 P_2^T Q^{1/2}) \quad (2.6)$$

satisface la desigualdad (2.1) de $W_+(t, Q)$. Procediendo análogamente como para con (2.5), aquí solo requerimos probar que para $t \geq t_0$ en c.t.p., tenemos que $\langle F_+(t, Q)\psi, \psi \rangle \geq 2 \langle Q\psi, \psi \rangle^{1/2} \| B^T \psi \|$, lo cual es el caso, pues, para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$:

$$\langle F_+(t, Q)\psi, \psi \rangle = \| P_1^{-1} \| \| P_2^{-1} \| \left[\langle BP_1 P_1^T B^T \psi, \psi \rangle + \langle Q^{1/2} P_2 P_2^T Q^{1/2} \psi, \psi \rangle \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \|P_1^{-1}\| \|P_2^{-1}\| \left(\|P_1^T B^T \psi\|^2 + \|P_2^T Q^{1/2} \psi\|^2 \right) \\
&\geq 2 \|P_1^{-1}\| \|P_2^{-1}\| \|P_1^T B^T \psi\| \|P_2^T Q^{1/2} \psi\| \quad (D.1) \\
&\geq 2 \|P_1^{-1} P_1^T B^T \psi\| \|P_2^{-1} P_2^T Q^{1/2} \psi\| \quad (D.Sc) \\
&= 2 \|B^T \psi\| \|Q^{1/2} \psi\| = 2 \|B^T \psi\| \langle Q\psi, \psi \rangle^{1/2}
\end{aligned}$$

usando para esto, las desigualdades : (D.1) $(a-b)^2 \geq 0$, para toda $a, b \in \mathbb{R}^1$ y la de Schwarz (D.Sc.). ■

Las funciones (2.5) y (2.6) tomadas a manera de ejemplos para la teoría son generalizaciones de ecuaciones (derivadas por otros medios - ver bosquejo supra), las cuales aun cuando sus objetivos son estimar (infra y sobreaproximar) al conjunto alcanzable mediante elipsoides, éstos son localmente óptimos en términos de sus volúmenes, aspecto que no estaba contemplado por la teoría expuesta.

Para el caso, las aproximaciones elipsoidales $E(a(t), Q_{\pm}(t))$ son tales que satisfacen las condiciones : $\dot{vol}_- \rightarrow \text{máx}$ y $\dot{vol}_+ \rightarrow \text{mín}$, donde $(\dot{})$ significa derivada, lo cual equivale a que los volúmenes $vol_{\pm}$ de los elipsoides $E(a(t), Q_{\pm}(t))$ cambian en una razón que es la máxima (para vol_-) o la mínima (para vol_+) posible para todo elipsoide que sirva de cota para $X(t)$. (Chernous'ko [14] y [15]).

Estas ecuaciones, correspondientes a los parámetros $a(t)$ y $Q_{\pm}(t)$ y a las condiciones iniciales, son las siguientes :

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & \dot{a} = Aa + v, \quad a(t_0) = a_0 \\
\text{ii)} \quad & \dot{Q}_- = AQ_- + Q_-A^T + 2 Q_-^{1/2} (Q_-^{-1/2} BB^T Q_-^{-1/2})^{1/2} Q_-^{1/2} \quad (2.7) \\
\text{iii)} \quad & \dot{Q}_+ = AQ_+ + Q_+A^T + p(t)Q_+ + p^{-1}(t)BB^T,
\end{aligned}$$

donde, $p(t) := \{n^{-1} \text{tr}[Q_+^{-1} BB^T]\}^{1/2}$, $Q_{\pm}(t_0) = Q_{\pm}^0$ y tr significa traza.

Resulta fácil verificar que (2.7 ii) y (2.7 iii) no son más que particularizaciones que corresponden a (2.5) y (2.6). En efecto, para (2.7 ii) sólo se necesita hacer $P = Q_-^{-1/2}$, mientras que para (2.7 iii), $P_1 = p^{-1}(t)I$ y $P_2 = p(t)I$.

Describiendo a grosso modo : las ecuaciones (2.7) (Chernous'ko [13], Schlaepfer-Scheppe[38], et al.) se derivan por un proceso de discretización (aproximación en diferencias finitas en el tiempo) de la ecuación diferencial (1.1) y por el uso de un problema auxiliar : la aproximación óptima en volumen a la suma de dos elipsoides. Posteriormente, se realiza una expansión en series en t de la discretización de (1.1), truncándola al primer orden (razón por la que la optimización es local). Finalmente, haciendo tender el incremento de tiempo a cero, se llega a los resultados en tiempo continuo : las ecuaciones (2.7) (Chernous'ko[13]).

Observación.- La ecuación (2.7 ii) extraída de Komarov [25] es de hecho equivalente a la derivada en Chernous'ko[13]. Por nuestra parte daremos una representación más sencilla.

Consideremos la ecuación (2.7 ii), para la cual $F_-(t, Q)$ tiene la forma :

$$F_-(t, Q) = 2 Q^{-1/2} (Q^{-1/2} B B^T Q^{-1/2})^{1/2} Q^{-1/2}$$

Ahora bien, como Q es simétrica y definida positiva, Q es diagonalizable, y además, por la proposición 5 ([Ap. 1]), tiene una única raíz cuadrada, $Q^{1/2}$, simétrica y definida positiva. Denotemos por T la matriz de cambio de base a la forma diagonal; y así, $Q = T^{-1} \hat{Q} T$, con $\hat{Q}$ en forma diagonal. Luego, de la definición de semejanza de matrices y de la proposición 7 de funciones matriciales ([Ap.1]), tenemos que $Q^{1/2} = T^{-1} \hat{Q}^{1/2} T$. De esta manera, sustituyendo esta expresión en la de $F_-(t, Q)$, y aplicando recursivamente las proposiciones 5 y 7, obtenemos :

$$\begin{aligned} F_-(t, Q) &= 2 T^{-1} \hat{Q}^{1/2} T \left[T^{-1} \hat{Q}^{-1/2} T B B^T T^{-1} \hat{Q}^{-1/2} T \right]^{1/2} T^{-1} \hat{Q}^{1/2} T \\ &= 2 T^{-1} \hat{Q}^{1/2} \left[\hat{Q}^{-1/2} T B B^T T^{-1} \hat{Q}^{-1/2} \right]^{1/2} \hat{Q}^{1/2} T \\ &= 2 T^{-1} \hat{Q}^{1/2} \left[\hat{Q}^{-1/2} T B B^T T^{-1} \hat{Q}^{-1} \hat{Q}^{1/2} \right]^{1/2} \hat{Q}^{1/2} T \\ &= 2 T^{-1} \hat{Q}^{1/2} \left[(T^{-1} \hat{Q}^{1/2})^{-1} B B^T T^{-1} \hat{Q}^{-1} T (T^{-1} \hat{Q}^{1/2}) \right]^{1/2} \hat{Q}^{1/2} T \\ &= 2 T^{-1} \hat{Q}^{1/2} \hat{Q}^{-1/2} T \left[B B^T (T^{-1} \hat{Q}^{-1} T) \right]^{1/2} T^{-1} \hat{Q}^{1/2} \hat{Q}^{1/2} T \\ &= 2 \left[B B^T Q^{-1} \right]^{1/2} T^{-1} \hat{Q} T = 2 \left[B B^T Q^{-1} \right]^{1/2} Q \quad (2.8) \end{aligned}$$

(para simplificar la notación suprimimos el signo - de la Q).

§ 1.3 EJEMPLOS: SISTEMAS LINEALES EN FORMA CANONICA DE BRUNOVSKY (F.C.B.) CON UNA ENTRADA.

Aunque las restricciones sobre las condiciones iniciales y los controles son convexas, no tienen porqué ser necesariamente elipsoidales. Por lo regular, suele tomarse U como un poliedro convexo.

Sin embargo, para obtener las matrices Q de la ecuación diferencial (2.2) la teoría propone funciones (2.5) y (2.6) para las que U debe ser de la forma : $U(t) = v(t) + B(t)B^1(0)$, siendo ésta una familia de elipsoides (posiblemente degenerados).

Bajo esta situación, tendremos una inclusión del tipo : $v(t) + B(t)B^1(0) \subset U(t)$, en la cual los puntos extremos de U no son alcanzados, y siendo éstos con lo que solemos conformar la frontera del conjunto alcanzable, perdemos así una estimación deseable.

Con fines de ilustración, y en virtud de lo anterior, aquí optamos por tomar solo el caso de U en el que el elipsoide es un poliedro, que se tiene cuando $U \subset \mathbb{E}^1$, un segmento de recta.

Consideremos (2.2) con F_- en la representación (2.8) y F_+ en la (2.7 iii). Debido a la dificultad de hallar soluciones por cuadraturas de (2.2) en general, por ser ésta una ecuación diferencial no lineal, trabajaremos con una familia de sistemas

lineales, cuyas soluciones sí son halladas explícitamente. Aparte de que estos sistemas lineales nos serán de gran utilidad en el capítulo 2 para sistemas no lineales.

Los sistemas lineales en Forma Canónica de Brunovsky (F.C.B.) con una entrada son sistemas de la forma :

$$\dot{x} = \hat{A}x + v, \text{ donde } x \in \mathbb{E}^n, \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \text{ y } u \in U \subset \mathbb{E}^1$$

Sin embargo, nos será útil representar en base a la teoría la restricción en el control como : $v \in U = \bar{b} + rBB^1(0) \subset \mathbb{E}^1$, en donde,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{E}^1, \text{ y } r > 0. \quad (3.1)$$

Para estos sistemas lineales la representación (2.8) resulta factible de calcular en general, de manera que los cálculos para hallar soluciones se simplifican. En efecto,

Proposición 3.1 .- Sea un sistema (3.1) en la forma canónica de Brunovsky, con $v \in U \subset \mathbb{E}^1$. Entonces, $F_-(t, Q) = 2r (BB^T Q^{-1})^{1/2} Q$, toma la forma :

$$F_-(t, Q) = 2r B |Q|^{1/2} [Q_{n-1}]^{-1/2} \quad (3.2)$$

donde, Q_{n-1} es el menor principal correspondiente al último elemento de la diagonal de Q .

Demostración. -

Por (2.8), $F_-(t, Q) := 2 r (B B^T Q^{-1})^{1/2} Q$, pero como $B B^T = B$ y usando la fórmula para la inversa de la matriz Q , obtenemos :

$$F_-(t, Q) = 2 r (B Q^{-1})^{1/2} Q = 2 r (B \operatorname{adj}[Q])^{1/2} Q / \sqrt{|Q|} .$$

Ahora bien, para el caso particular que estamos considerando con la matriz B definida en (3.1) y del hecho de que los valores de una función f definida en el espectro Λ de una matriz M , $f(\Lambda)$, determinan unívocamente la función matricial $f(M)$ (cf. [Ap. 1]), tenemos que para hallar $C^{1/2} = (B \operatorname{adj}[Q])^{1/2}$, necesitamos primero el polinomio de Lagrange-Sylvester asociado a C (Gantmacher[16], p. 97).

Para el efecto, determinemos los autovalores de la matriz C , la cual por ser una matriz que tiene ceros en todas partes, excepto en el último renglón, obtenemos :

$$0 = |C - \lambda I| = -\lambda^{n-1} (Q_{n-1} - \lambda) . \text{ Luego, } \lambda_1 = \dots \lambda_{n-1} = 0 \text{ y } \lambda_n = Q_{n-1} .$$

De aquí que el polinomio de interpolación es :

$$p(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i)} \sqrt[n]{\lambda_n} = \frac{\lambda^{n-1}}{\lambda_n^{n-1}} \sqrt[n]{\lambda_n} = \lambda^{n-1} \lambda_n^{3/2-n} .$$

de donde, $p(C) = C^{1/2} = C^{n-1} [Q_{n-1}]^{3/2-n}$; ahora bien, debido a la forma de la matriz C , tenemos que $C^{n-1} = [Q_{n-1}]^{n-2} C$, y de aquí, resulta finalmente que :

$$p(C) = [Q_{n-1}]^{n-2} C [Q_{n-1}]^{3/2-n} = [Q_{n-1}]^{-1/2} C . \text{ Por lo tanto,}$$

$$F_-(t, Q) = 2 r [Q_{n-1}]^{-1/2} C Q / \sqrt{|Q|}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 r [Q_{n-1}]^{-1/2} (B \operatorname{adj}[Q]) Q |Q| / (|Q| \sqrt{|Q|}) \\
&= 2 r [Q_{n-1}]^{-1/2} B Q^{-1} Q \sqrt{|Q|} \\
&= 2 r B \sqrt{|Q|} [Q_{n-1}]^{-1/2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

De esta manera, el parámetro Q_- para los sistemas en la F.C.B. se determina resolviendo la ecuación diferencial :

$$\dot{Q}_- = A Q_- + Q_- A^T + 2 r B |Q_-|^{1/2} [Q_{n-1}]^{1/2} \quad (3.3)$$

De manera análoga, para la representación (2.7 iii), tenemos,

Proposición 3.2. - Sea el sistema (3.1) en la forma canónica de Brunovsky, con $v \in U \subset \mathbb{E}^1$. Entonces, $F_+(t, Q) = p(t) Q_+ + p^{-1}(t) r^2 B B^T$, toma la forma :

$$F_+(t, Q) = r Q [Q_{n-1}]^{1/2} / \sqrt{n|Q|} + r B \sqrt{n|Q|} [Q_{n-1}]^{-1/2} \quad (3.4)$$

Demostración. - Por definición, $p(t) = r \{n^{-1} \operatorname{tr}[Q^{-1} B B^T]\}^{1/2}$

$$= r \{\operatorname{tr}[\operatorname{adj}(Q) B]\}^{1/2} / \sqrt{n|Q|}$$

$$= r [Q_{n-1}]^{1/2} / \sqrt{n|Q|} \quad .$$

pues $B B^T = B$ y $(\operatorname{adj}(Q) B)$ es una matriz con ceros en todas partes, excepto en la última columna. $\blacksquare$

Y así, hallar Q_+ para un sistema en la F.C.B. es resolver la

ecuación diferencial matricial :

$$\dot{Q}_{\pm} = A Q_{\pm} + Q_{\pm} A^T + p(t) Q_{\pm} + p^{-1}(t) r^2 B \quad (3.5)$$

donde, $p(t) = r [Q_{n-1}]^{1/2} / \sqrt{n|Q|}$.

Las estimaciones (2.7) son también válidas para cuando tenemos $M = \{x_0\}$, i.e., $x(t_0) = a_0$. En este caso necesitamos poner $Q_0 = 0$. Pero entonces, las ecuaciones (2.7) para $Q_{\pm}$ tienen singularidades si $Q_{\pm} \rightarrow 0$. Sin embargo, los miembros derechos de (2.7) para $Q_{\pm}$ (i.e., los campos vectoriales) permanecen acotados y se aproximan a cero cuando $Q \rightarrow 0$. (Chernous'ko[11]). De esta forma, como $Q_{\pm} \rightarrow 0$ y $\dot{Q}_{\pm} \rightarrow 0$, buscamos el comportamiento asintótico de (2.7) para $Q_{\pm}$, con la condición inicial $Q_{\pm}(t_0) = 0$, en el caso general en la forma :

$$Q(t) = (t-t_0) \hat{Q} + o((t-t_0)^2) \quad (3.6)$$

donde $\hat{Q}$ es una matriz simétrica constante. La determinación de $\hat{Q}$, si $\hat{Q}$ no es nula, puede servir para inicializar una integración numérica de las ecuaciones (2.7). (Chernous'ko[12],[13]).

Ejemplos:

1) Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = \hat{A}x + v$, con $x \in \mathbb{E}^2$ y $v \in r B B^T(0) = U$.

Aquí, $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Escribamos $Q_{\pm} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix}$.

Así, aplicando en la representación (3.3), tenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 & q_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ q_3 & 0 \end{pmatrix} + 2r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sqrt{q_1 q_3 - q_2^2} \cdot q_1^{-1/2}.$$

O sea,

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= 2q_2 \\ (i) \quad \dot{q}_2 &= q_3 \\ \dot{q}_3 &= 2r \left[q_1 q_3 - q_2^2 \right]^{1/2} q_1^{-1/2}, \quad |Q_-| = q_1 q_3 - q_2^2 > 0 \end{aligned}$$

Para simplificar, supongamos que $M = \{(0,0)\}$, de donde, obtenemos las condiciones iniciales :

$$a(0) = (0,0) \text{ y } Q_-(0) = \hat{0}, \text{ ó } q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$$

Pero entonces, tenemos que, aunque el sistema tiene una singularidad en $(0,0)$, el campo vectorial se anula si $Q \rightarrow 0$. Por lo tanto, las soluciones, suponiéndolas analíticas, las podemos proponer de la forma siguiente, y trabajar con el método de coeficientes indeterminados :

$$\begin{aligned} q_1(t) &= a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots \\ (ii) \quad q_2(t) &= b_1 t^2 + b_2 t^3 + \dots \\ q_3(t) &= c_1 t^2 + c_2 t^3 + \dots \end{aligned}$$

Ahora bien, de suponer la analiticidad de estas soluciones, podemos remover la singularidad, y hacemos :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ (iii) \quad \dot{q}_2 &= q_3 \\ q_1 (\dot{q}_3)^2 &= 4r^2 \left[q_1 q_3 - q_2^2 \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones (ii) para las soluciones en esta ecuación, (iii), obtenemos para las dos primeras ecuaciones :

$$2a_1 t + 3a_2 t^2 + \dots + na_{n-1} t^{n-1} + \dots = 2(b_1 t^2 + b_2 t^3 + \dots + b_{n-2} t^{n-1} + \dots)$$

$$2b_1 t + 3b_2 t^2 + \dots + nb_{n-1} t^{n-1} + \dots = c_1 t^2 + c_2 t^3 + \dots + c_{n-2} t^{n-1} + \dots$$

De estas dos ecuaciones podemos obtener las relaciones de recurrencia :

$$(iv) \quad \begin{aligned} a_{n-1} &= (2/n) b_{n-2}, \quad a_1 = 0 \\ b_{n-1} &= (1/n) c_{n-2}, \quad b_1 = 0 \end{aligned}$$

de donde también $a_2 = 0$, pues $a_n = 2/(n(n+1)) c_{n-2}$.

Por lo tanto, la tercera ecuación de (iii) queda :

$$(a_3 t^4 + a_4 t^5 + \dots) (2c_1 t^2 + 3c_2 t^3 + \dots)^2 = 4r^2 ((c_1 t^2 + c_2 t^3 + \dots) (a_3 t^4 + a_4 t^5 + \dots) - (b_2 t^3 + b_3 t^4 + \dots)^2)$$

Desarrollando las operaciones pertinentes, e igualando coeficientes hallamos, para los correspondientes a orden 6 :

$$a_3 c_1^2 = r^2 (a_3 c_1 - b_2^2)$$

de donde, usando las relaciones de recurrencia (iv), obtenemos :

$$(\frac{2}{9} - 4)c_1 c_1^2 = r^2 ((\frac{2}{9} - 4)c_1 c_1 - (c_1/3)^2), \text{ y entonces, } c_1 = 0 \text{ o } c_1 = r^2/3.$$

Tomando $c_1 = r^2/3$, para hallar una solución no trivial, de nueva cuenta por (iv), obtenemos los primeros términos de esta solución :

$$a_3 = \frac{r^2}{18}, \quad b_2 = \frac{r^2}{9} \quad \text{y} \quad c_1 = \frac{r^2}{3}.$$

Ahora bien, un cálculo directo muestra que $c_k = 0$, para $k \geq 2$; por lo que de (iv), $a_{k+2} = b_{k+1} = 0$.

De esta forma se cuenta con la única solución no trivial :

$$q_1(t) = \frac{r^2}{18} t^4, \quad q_2(t) = \frac{r^2}{9} t^3 \quad \text{y} \quad q_3(t) = \frac{r^2}{3} t^2.$$

Así, $Q^{-1}(t)$ tiene la representación:

$$\begin{aligned} Q^{-1}(t) &= \frac{r^{-2}}{\frac{t^6}{54} - \frac{t^6}{81}} \begin{bmatrix} t^2/3 & -t^3/9 \\ -t^2/9 & t^4/18 \end{bmatrix} = \frac{18}{r^2 t^6} \begin{bmatrix} 3t^2 & -t^3 \\ -t^3 & t^4/2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{18}{r^2 t^4} \begin{bmatrix} 3 & -t \\ -t & t^2/2 \end{bmatrix}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, la solución de la ecuación $\dot{a} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix} = \hat{A}a$,

con condición inicial $a(0) = \hat{0}$, es la trivial: $a(t) \equiv (0,0)^T$.

Por lo tanto, tenemos:

$$E(a(t), Q_-(t)) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 3x_1^2 - 2t x_1 x_2 + \frac{t^2}{2} x_2^2 \leq \frac{r^2 t^4}{18}, \quad t > 0 \right\}$$

Por otra parte, usando la representación (3.5), derivaremos la expresión para $E(a, Q_+)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 & q_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_2 & 0 \\ q_3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{q_1^{1/2} r}{\sqrt{2|Q_+|}} \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2 q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \frac{\sqrt{2|Q_+|}}{q_1^{1/2}} \end{bmatrix}$$

O sea,

$$\dot{q}_1 = 2q_2 + \frac{q_1^{1/2} r}{\sqrt{2|Q_+|}} q_1$$

$$\dot{q}_2 = q_3 + \frac{q_1^{1/2} r}{\sqrt{2|Q_+|}} q_2$$

$$\dot{q}_3 = \frac{q_1^{1/2} r}{\sqrt{2|Q_+|}} q_3 + \frac{r \sqrt{2|Q_+|}}{q_1^{1/2}}$$

con condición inicial $Q_+(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Para resolverlo, buscamos soluciones en la forma:

$q_1(t) = r^2 b_1 t^4$, $q_2(t) = r^2 b_2 t^3$, $q_3(t) = r^2 b_3 t^2$, donde b_1 , b_2 , b_3 son coeficientes indeterminados (la justificación de esto radica en el proceso desarrollado previamente) .

Sustituyendo estas soluciones en las ecuaciones diferenciales, hallamos la solución única no trivial con: $b_1 = \frac{32}{45}$, $b_2 = \frac{8}{9}$ y $b_3 = \frac{4}{3}$.

En efecto,

$$4 r^2 b_1 t^3 = 2 r^2 b_2 t^3 + r^2 \left[\sqrt{\frac{b_1}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}} \right] t^{-1} b_1 t^4$$

$$3 r^2 b_2 t^2 = r^2 b_3 t^2 + r^2 \sqrt{\frac{b_1}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}} b_2 t^2$$

$$2 r^2 b_3 t = r^2 \sqrt{\frac{b_1}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}} b_2 t + r^2 \sqrt{\frac{2(b_1 b_3 - b_2^2)}{b_1}} t$$

o bien, hallar b_1, b_2, b_3 del sistema de ecuaciones no lineal:

$$4b_1 = 2b_2 + \sqrt{\frac{b_1}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}} b_1$$

$$3b_2 = b_3 + \sqrt{\frac{b_1}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}} b_2$$

$$2b_3 = \sqrt{\frac{b_1}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}} b_3 + \sqrt{\frac{2(b_1 b_3 - b_2^2)}{b_1}}$$

Por lo tanto, $Q_+^{-1}(t)$ tiene la forma:

$$Q_+^{-1}(t) = \frac{9r^{-2}}{2t^6} \begin{pmatrix} \frac{15}{8} t^2 & -\frac{5}{4} t^3 \\ -\frac{5}{4} t^3 & t^4 \end{pmatrix} = \frac{9r^{-2}}{2t^4} \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} t \\ -\frac{5}{4} t & t^2 \end{pmatrix}. \quad \text{Así,}$$

contando con que la solución de $\dot{a}(t) = \hat{A}a$ es la trivial para condiciones iniciales $a(0) = 0$, tenemos finalmente,

$$E((t), Q_+(t)) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{135}{16} x_1^2 t^{-4} - \frac{45}{4} x_1 x_2 t^{-3} + \frac{9}{2} t^{-2} x_2^2 \leq r^2, t > 0 \right\}$$

o

$$E(a(t), Q_+(t)) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{15}{8} x_1^2 - \frac{5}{2} t x_1 x_2 + t^2 x_2^2 \leq \frac{2}{9} t^4 r^2, t > 0 \right\}.$$

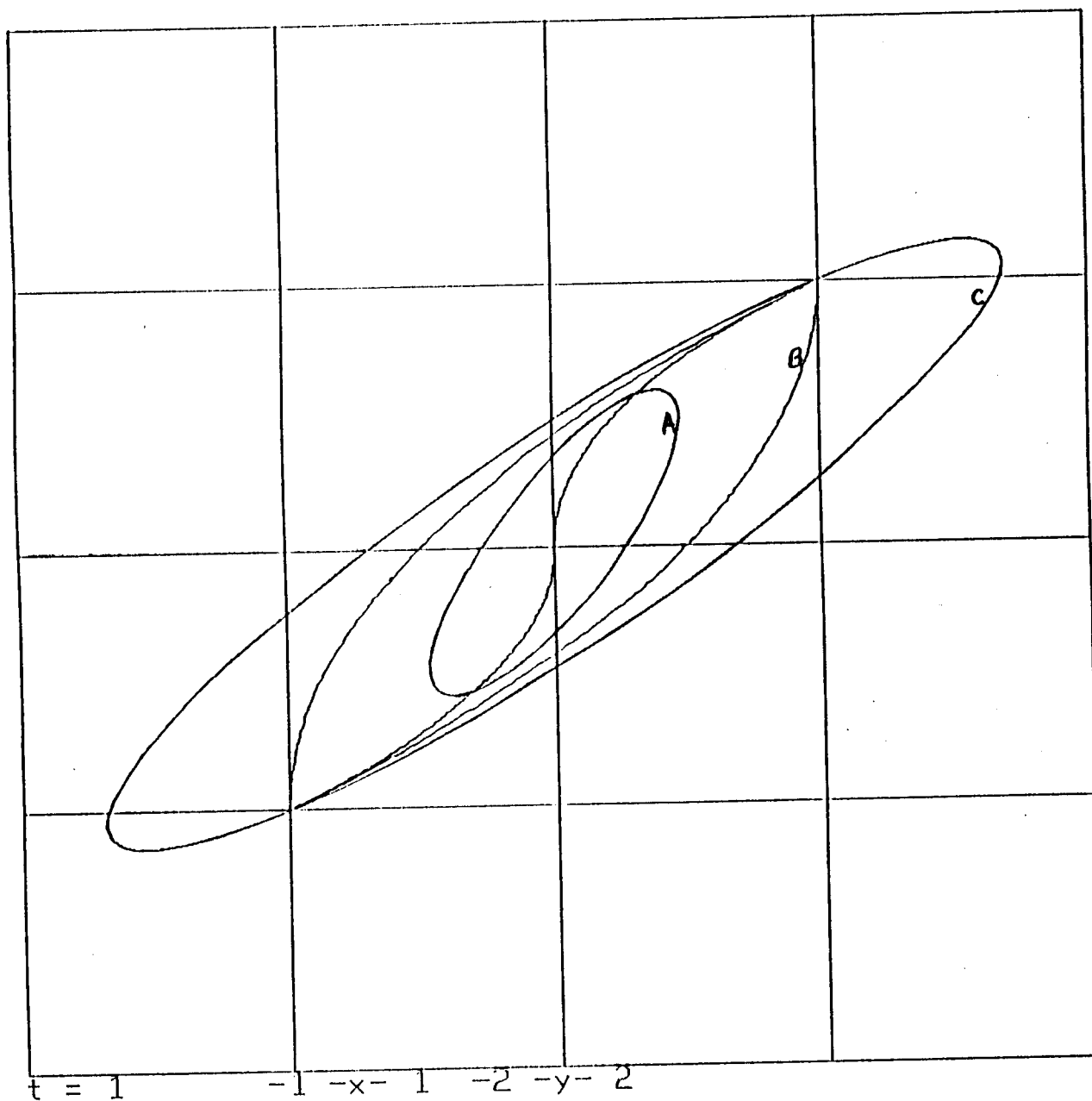


figura 3.1

El conjunto alcanzable B comparado con las estimaciones elipsoidales A y C, para $r = 1$ y un tiempo $t = 1$.

ESTIMACION DEL CONJUNTO ALCANZABLE DE CIERTOS SISTEMAS NO LINEALES.

§2.1 GENERALIZACION HACIA EL CASO DE SISTEMAS NO LINEALES.

Consideremos un sistema dinámico controlado descrito por la ecuación diferencial, restricciones y condición inicial:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \text{ , con } u \in U(t), x(t_0) \in M \text{ y } t \geq t_0, \quad (1.1)$$

donde t representa al tiempo, $x \in \mathbb{E}^n$ es el vector fase (o de estados), f un campo vectorial dado, $U(t)$ es una multifunción compacta y M es el dominio en el cual el vector de estados permanece en el instante inicial t_0 (M es el dominio inicial).

En particular, centremos nuestra atención en un sistema controlado (1.1) para el cual,

$$f(x, u, t) := A(t)x + g(x, u, t) \quad (1.2)$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ y $g(x, u, t)$ es una función para la que el conjunto $G(x, t) := \{y \in \mathbb{E}^n / y = g(x, u, t), u \in U(t)\}$ de valores de $g(x, u, t)$, como una multifunción en x y t , admita la doble estimación:

$$G_-(t) \subset \bigcap_{x \in E^n} G(x,t) \subset \bigcup_{x \in E^n} G(x,t) \subset G_+(t), \quad (1.3)$$

para $t \geq t_0$, con $G_{\pm}(t)$ multifunciones compactas y convexas. De manera análoga, acotamos $G_-^0(t_0) \subset M \subset G_+^0(t_0)$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $G_{\pm}(t) := E(b_{\pm}^0(x), H_{\pm}(t))$ y $G_{\pm}(t_0) := E(a_{\pm}^0, Q_{\pm}^0)$, multifunciones elipsoidales, donde $a_{\pm}^0$ son vectores dados, $b_{\pm}^0(t)$ son funciones vectoriales, y $H_{\pm}(t)$, $Q_{\pm}^0$ son matrices $n \times n$, simétricas y semidefinidas positivas.

Las estimaciones anteriores (1.3) implican que el conjunto alcanzable $X(t)$ de (1.1)-(1.2) está acotado por los conjuntos alcanzables de los sistemas lineales de control no autónomos con las restricciones elipsoidales siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + v_{\pm}, & v_{\pm} &\in E(b_{\pm}^0(t), H_{\pm}(t)), \\ x(t_0) &\in E(a_{\pm}^0, Q_{\pm}^0), & t &\geq t_0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A ciencia cierta, lo realizado equivale a considerar las retroalimentaciones $v_{\pm} := v_{\pm}(x, u, t)$, cuyos valores se encuentran en los compactos $G_{\pm}(t)$. Pero, por la manera en la que definimos $G_{\pm}(t)$, $v_{\pm}$ dependen en última instancia tan sólo del tiempo t , con independencia de los parámetros x y u . Y así, $v_{\pm} := v_{\pm}(t)$ son controles a lazo abierto.

Por lo tanto, la afirmación anterior se sigue de que $v_-(v_+)$ es un control cuyos valores se hallan en un sub(super)conjunto del correspondiente a la retroalimentación $v = g(x, u, t)$, o sea, el dado

por la multifunción $G(x, t)$.

Escribamos $X(t) = X(t, t_0, M)$, para enfatizar la dependencia de $X(t)$ respecto al dominio M e instante t_0 iniciales. Así, denotando los conjuntos alcanzables de (1.4) mediante $X_{\pm}(t, t_0, E(a_{\pm}^0, Q_{\pm}^0))$, tenemos:

$$X_{-}(t, t_0, E(a_{-}^0, Q_{-}^0)) \subset X(t, t_0, M) \subset X_{+}(t, t_0, E(a_{+}^0, Q_{+}^0)). \quad (1.5)$$

Ahora bien, los conjuntos $X_{\pm}$ no son elipsoides en general. Por lo tanto, usando la teoría del capítulo anterior, introducimos estimaciones elipsoidales $E(a_{\pm}(t), Q_{\pm}(t))$ -localmente óptimas en volumen- para los sistemas lineales (1.4), de forma tal que:

$$i) \ a_{\pm}(t_0) = a_{\pm}^0, \quad Q_{\pm}(t_0) = Q_{\pm}^0 \quad (1.6)$$

ii) $E(Q_{-}(t), Q_{-}(t))$ es un conjunto subalcanzable de (1.4) para el signo menos ($E(a_{-}, Q) \subset X_{-}$) y $E(a_{+}(t), Q_{+}(t))$ es un conjunto superalcanzable de (1.4) para el signo más ($X_{+} \subset E(a_{+}, Q_{+})$).

Consecuentemente, el problema de estimar $X(t)$ para (1.1)-(1.2) se reduce a los de estimar $X_{\pm}(t)$ para los sistemas lineales (1.4):

$$E(a_{-}(t), Q_{-}(t)) \subset X(t) \subset E(a_{+}(t), Q_{+}(t)). \quad (1.7)$$

De aquí en adelante, nos limitaremos a trabajar con sistemas autónomos, donde, $A(t) = A$ es una matriz constante, $U(t) = U$ es compacto y $g(x, u, t) = g(x, u)$.

Una versión local para estimar $X(t)$ de (1.1)-(1.2) es factible aún cuando $\bigcup_{x \in \mathbb{E}^n} G(x)$ no sea acotado, o $\bigcap_{x \in \mathbb{E}^n} G(x) = \emptyset$ (que implica que $G_- = \emptyset$), aunque claro que los resultados que obtendremos serán más pobres.

Para ello, contemplemos la existencia de un abierto $V \subset \mathbb{E}^n$ que contiene al dominio inicial M , y para el cual se satisface la doble estimación (1.3), a saber,

$$G_- \subset \bigcap_{x \in V} G(x) \subset \bigcup_{x \in V} G(x) \subset G_+, \quad (1.8)$$

y además, $G_-^0 \subset M \subset G_+^0$, donde $G_\pm, G_\pm^0 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ son elipsoides.

Entonces, los sistemas de control lineales y autónomos con restricciones elipsoidales siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + v_\pm, & \text{para } v \in G_\pm \\ x(t_0) &\in G_\pm^0, & \text{y } t \geq t_0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

son tales que, parafraseando (1.7),

$$E(a_-(t), Q_-(t)) \subset X(t) \subset E(a_+(t), Q_+(t)) \subset V, \quad (1.10)$$

para $t_0 \leq t \leq T\text{-máx}$; i.e., $X(t)$ del sistema (1.1)-(1.2) autónomo ha sido estimado por los elipsoides que acotan los conjuntos alcanzables de los sistemas lineales (1.9), conforme transcurre el tiempo, hasta un $T\text{-máx.}$, instante último para el cual la cota

$E(a_+(t), Q_+(t))$ todavía está contenida en V .

Es nuestro propósito extender este procedimiento, en sus aspectos global y local, para otros sistemas no-lineales autónomos que son transformables a una forma particular de (1.1)-(1.2) por medio de un cambio tanto de coordenadas como de controles. (Ver la sección § 2.2).

Esto último, el cambio en el control, equivale de hecho a realizar una retroalimentación del estilo de (1.4), con lo que lo planteado anteriormente se extrapolará para estos sistemas.

El aspecto remarcable de aplicar la transformación en cuestión, radica en que mejora en ciertos casos el resultado que se tiene cuando la multifunción $G(x)$ genera una configuración geométrica tal que o $\bigcap_{x \in V} G(x)$ es vacío, para cualquier $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto conteniendo al dominio inicial M , o $\bigcup_{x \in V} G(x)$ es no acotado. Pero que sin embargo, $G(x)$ bajo la transformación $G(x) \mapsto \hat{G}(y)$, esta nueva $\hat{G}(y)$ sí admite un tal V en las nuevas coordenadas en donde $\bigcap_{y \in V} \hat{G}(y) \neq \emptyset$ o bien $\bigcup_{y \in V} \hat{G}(y)$ es acotada, permitiendo aplicar el procedimiento en la sección §2.3.

Ejemplo. Consideremos el sistema de control no lineal autónomo :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x_2 \\ u \end{bmatrix} = g(x,u), \text{ con } |u| \leq 1 \text{ y } M = \{(0,0)\}.$$

Para este sistema, la multifunción $G(x_1, x_2)$ está dada por:

$G(x_1, x_2) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{E}^2 / (y_1, y_2) = (\sin x_2, u), |u| \leq 1\}$. Así, para $(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2$ fijo, $G(x_1, x_2)$ es un segmento de recta vertical en $\mathbb{E}^n$ de la forma : $\{y_1\} \times [-1, 1]$.

Aquí, $G(x_1, x_2)$ tiene por rango el cuadrado $[-1, 1]^2$. Sin embargo, $\bigcap_{x \in V} G(x) = \emptyset$, para toda vecindad V del $(0, 0)$, pues como la función $\sin x_2$ es 1-1 cerca del 0, tenemos

$$\{y_1\} \times [-1, 1] \cap \{y'_1\} \times [-1, 1] = \emptyset, \quad y_1 \neq y'_1$$

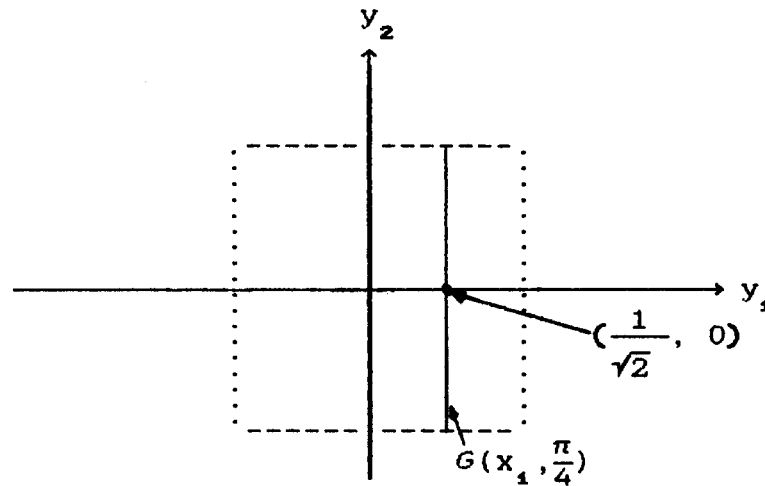


Fig. 1.1.

Por consiguiente, como conjunto subalcanzable sólo podemos contar con el trivial: el mismo origen.

Sin embargo, sí admite la estimación externa globalmente, pues $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^2} G(x) = [-1, 1]^2$. ■

Tendremos ocasión de retomar este ejemplo en la sección §2.3, donde $G(x)$ es llevada bajo la transformación de manera que

localmente son posibles los conjuntos subalcanzables, pero con perjuicio de los superalcanzables, que también son locales.

Para obtener una perspectiva de lo mínimo que hemos de realizar para el caso no lineal, analizamos a continuación un ejemplo de un sistema lineal en $\mathbb{E}^2$ para el que estudiaremos el conjunto alcanzable $X(t)$ aproximándolo mediante el conjunto alcanzable $Y(t)$ del sistema en la forma canónica de Brunovsky :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w, \quad \text{con } w \in U \subset \mathbb{E}^1 \quad (1.11)$$

De la teoría de control lineal, para ambos sistemas lineales controlados nos son conocidas las formas de sus conjuntos alcanzables conforme varía el tiempo.

Ejemplo. Consideremos el sistema lineal de control

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}, \quad \text{para } |\bar{u}| \leq 1 \quad (1.12)$$

y condición inicial $\bar{x}(0) \in M = \{(0,0)\}$.

Debido a que en este caso resulta más cómodo trabajar con el conjunto controlable $C(t)$ que con el alcanzable $X(t)$, de la teoría podemos considerar el sistema lineal :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \text{para } |u| \leq 1, \quad (1.13)$$

con condición inicial $\bar{x}(0) = (0,0)$, y donde $u = -\bar{u}$, cuyo $C(t)$ es el

$X(t)$ del sistema original. (cf Mackie[31],pág.37, tiempo invertido).

Para el sistema (1.13), las curvas integrales están dadas por las soluciones de:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + u}{x_2}, \text{ luego } \int x_2 dx_2 = \int (-x_1 + u) dx_1, \text{ de donde,}$$

con condiciones iniciales $(x_1, x_2) = (0,0)$, tenemos :

$(x_1 - u)^2 + x_2^2 = u^2$, i.e., forman una familia de circunferencias pasando por $(u,0)$, con u actuando como parámetro.

Siguiendo (Lee-Markus[28]), el espacio de cambio (conjunto donde se da el cambio en control, "switch") está dado por las curvas:

$$S_+ := \{(x_1, x_2) / (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, u = +1, x_2 \geq 0\}$$

$$S_- := \{(x_1, x_2) / (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1, u = -1, x_2 \leq 0\}$$

Y así, para llevar un punto $x_0 \in \mathbb{E}^2$ al origen en tiempo óptimo, tenemos e.g., la gráfica siguiente

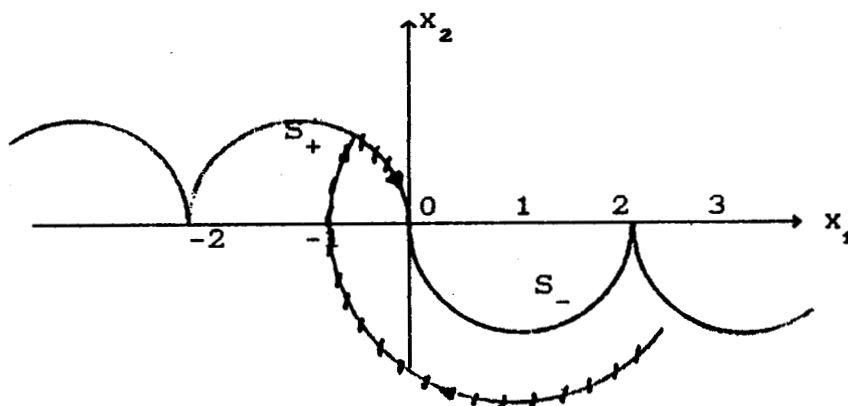
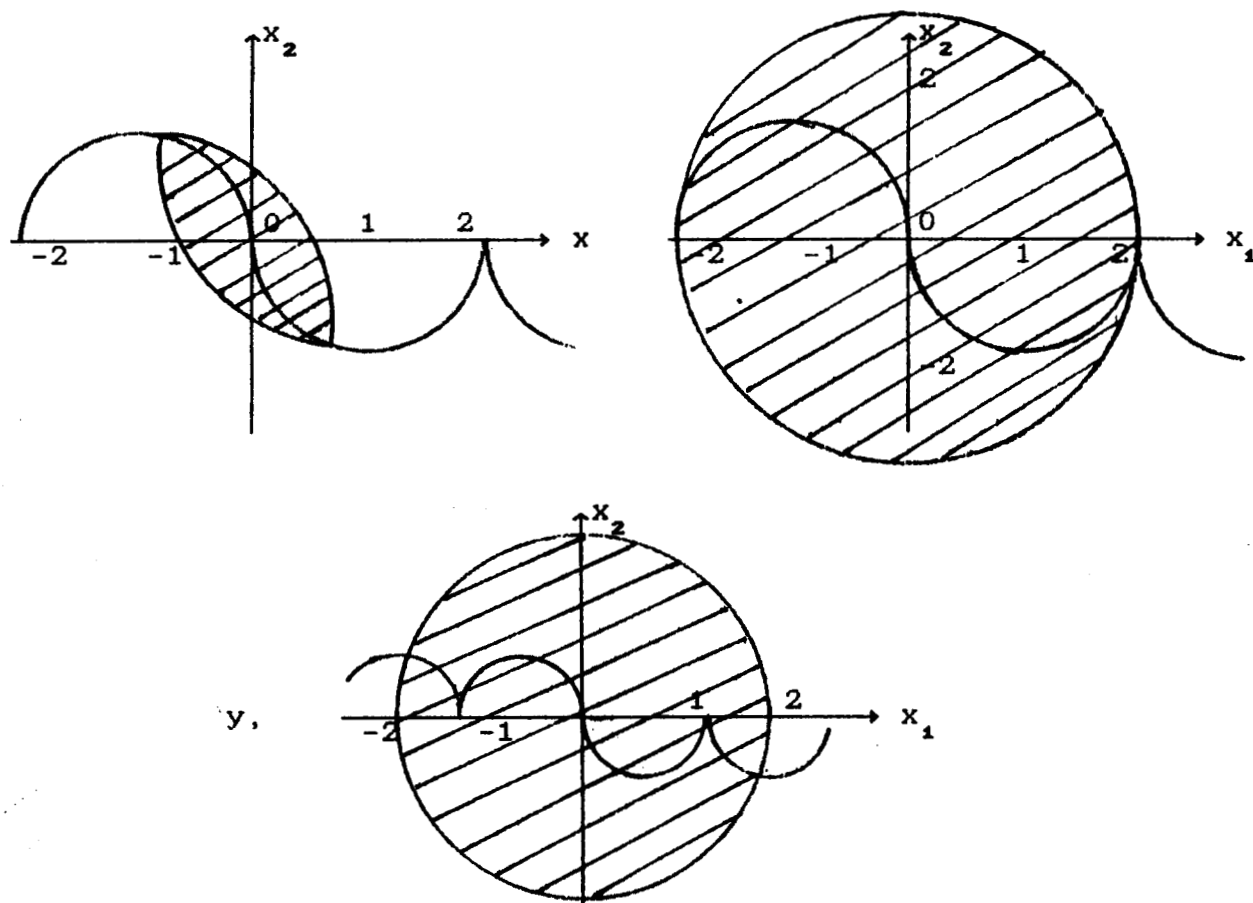


Figura 1.2

Ahora, usando controles extremales conformamos la frontera del conjunto controlable; y así, contamos con la sucesión siguiente de $C(t)$ conforme varía t :



en adelante.

Figura 1.3.

Como nota final, sabemos que el sistema lineal es globalmente controlable para $|u| \leq 1$. (O sea, el conjunto $\bigcup_{t \geq 0} X(t) = \mathbb{E}^2$ para el sistema lineal (1.12)).

Pasemos ahora a considerar la aproximación vía un sistema en la forma canónica de Brunovsky. Para esto, consideremos a (1.13) como un sistema (1.1)-(1.2) de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 + u \end{pmatrix} = A\bar{x} + g(\bar{x}, u),$$

donde

$$g(x_1, x_2, u) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, u) \\ g_2(x_1, x_2, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 + u \end{pmatrix}$$

y hagamos la retroalimentación $v = v(x_1, x_2, u) = g_2(x_1, x_2, u)$. Hecho esto, tenemos que (1.13) está ya en la forma canónica de Brunovsky:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (1.14)$$

$G(\bar{x})$ en este caso no está acotada: $\bigcup_{\bar{x} \in \mathbb{E}^2} G(\bar{x}) = \{0\} \times \mathbb{E}^1 = \{\text{eje } y_2\}$,

donde, en la gráfica $y_2 = x_1 + u = v$.

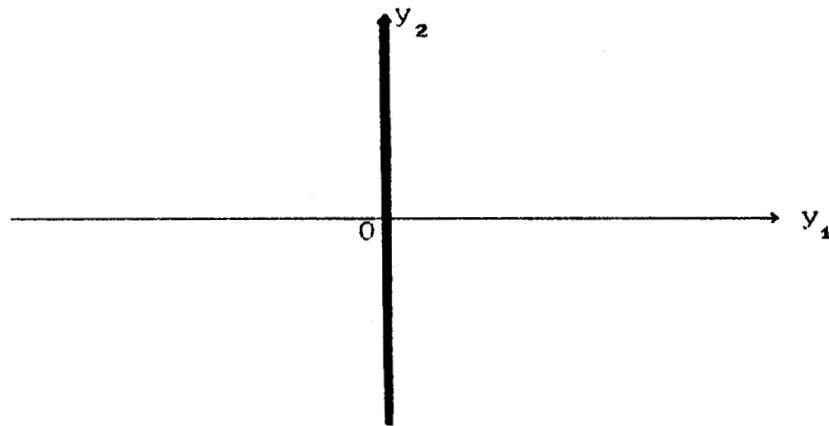


Figura 1.4.

Dado que u es acotado ($|u| \leq 1$), nuestro análisis se centrará en qué configuraciones toma el conjunto controlable $C_B(t)$ del

sistema lineal en la forma canónica de Brunovsky (1.14) al interrelacionar v , x , y u . En otras palabras, determinar el conjunto controlable bajo restricciones en el control y los estados.

Para tal efecto, hagamos $|u| = |x_1 + v| \leq |x_1| + |v|$, y como $|u| \leq 1$, entonces con $|x_1| \leq k$, $|v| \leq 1-k$, $0 \leq k \leq 1$, obtenemos las gráficas siguientes, tomando a k como parámetro:

Si $|x_1| = k = |v| = 1-k$

Si $|x_1| = k < |v| = 1-k$

Si $|x_1| = k > |v| = 1-k$

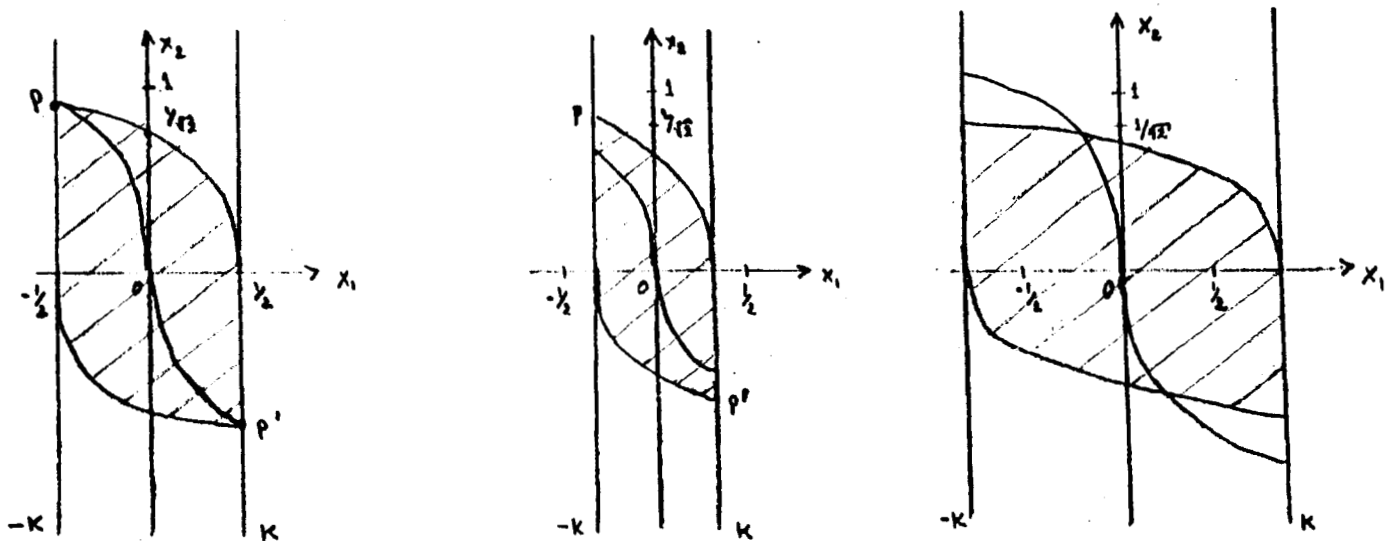


Figura 1.5.

donde, las curvas que conforman las fronteras de estos conjuntos son:

$$x_2^2 = -2(1-k)(x_1 - k),$$

y

$$x_2^2 = -2(1-k)(x_1 + k),$$

,correspondientes a los controles
extremales :

$$v = \pm(1-k),$$

todas las gráficas se corresponden con la interrelación siguiente entre x , v y u representada gráficamente:

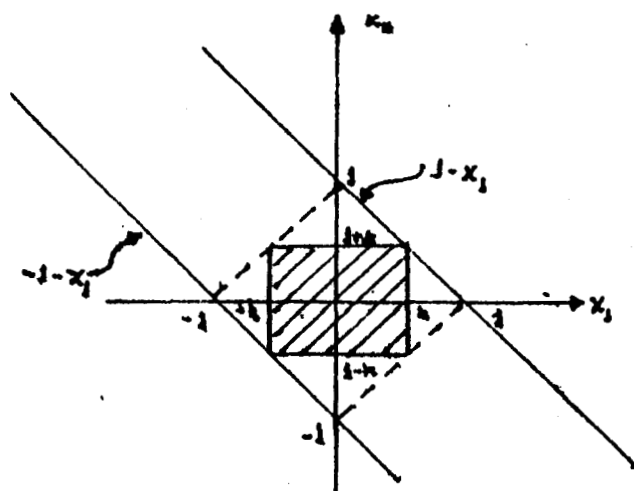


Figura 1.6.

Aquí, la banda es la región de valores permisibles de x_1 y v , tales que $|u| = |x_1 + v| \leq 1$; el rectángulo achurado corresponde a las cotas: $|x_1| \leq k$, $|v| \leq 1 - k$, para un k -fijo, con $0 \leq k \leq 1$; y el cuadrado dentro la banda con vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$ es el conjunto generado por todos los rectángulos (del tipo achurado) variando el parámetro k en $[0,1]$.

Determinar para este último el conjunto controlable equivale a construir la unión de los conjuntos controlables variando $k \in [0,1]$.

Para esto, hallamos primero el lugar geométrico descrito por el punto P , que aparece en la figura 1.5, conforme cambia k : $P: (-k, -2(1-k)(-2k))$, luego $(x_1, x_2^2) = (-k, -2(1-k)(-2k))$.

Así $x_1^2 + x_2^2 = k^2 + 4k - 4k^2 = 4k - 3k^2 = -4x_1 - 3x_1^2$, de donde

$4(x_1^2 + x_1 + \frac{1}{4}) + x_2^2 = 1$, o sea $4(x_1 + \frac{1}{2})^2 + x_2^2 = 1$, la ecuación de una elipse. Pero como $x_2 \geq 0$ y $x_1 = -k$, sólo nos quedamos con la parte superior. Gráficamente, tenemos:

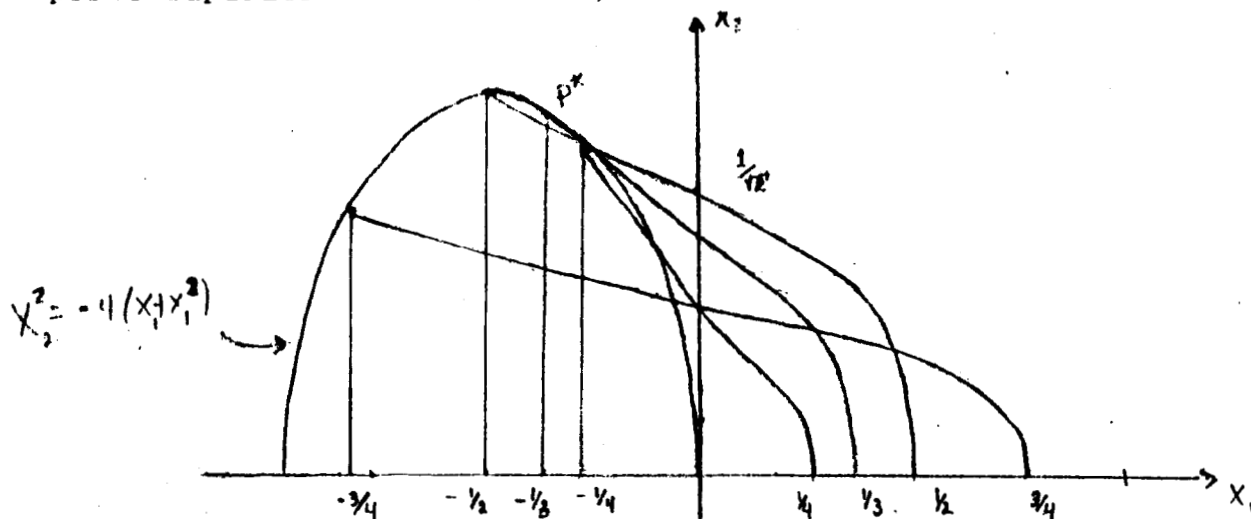


Figura 1.7.

Para hallar la unión de todos estos conjuntos, encontramos la envolvente convexa de la familia de parábolas $x_2^2 = -2(1-k)(x-k)$ (i.e., una curva tal que en cada uno de sus puntos es tangente al menos a una curva de la familia y que cualquier segmento de la misma es tangente a un conjunto infinito de curvas de la familia). En efecto, tenemos, $x_2^2 = -2(x-k-kx + k^2)$, luego derivando implícitamente respecto a k , se tiene, $k = \frac{1}{2}(x+1)$. Sustituyendo esto en la ecuación de la familia y con la condición $x_2 \geq 0$, obtenemos que la descripción de la envolvente viene dada por :

$$x_2 = \frac{1-x_1}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente, procediendo de manera análoga con el punto P' , tenemos que el conjunto controlable en correspondencia con el cuadrado (figura 1.6), viene dado por la figura siguiente:

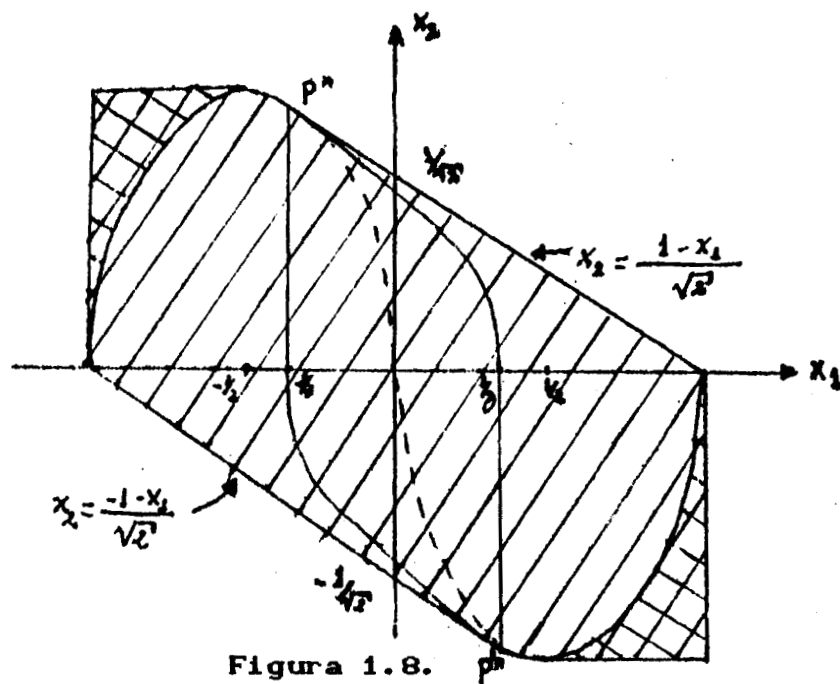


Figura 1.8.

Observación.- Las regiones cuadriculadas corresponden al control nulo, $v = 0$.

Ahora, avanzando sobre la banda de la fig. 1.6, obtenemos en correspondencia las gráficas sucesivas:

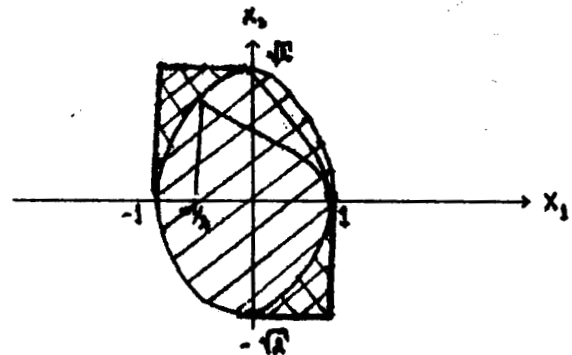
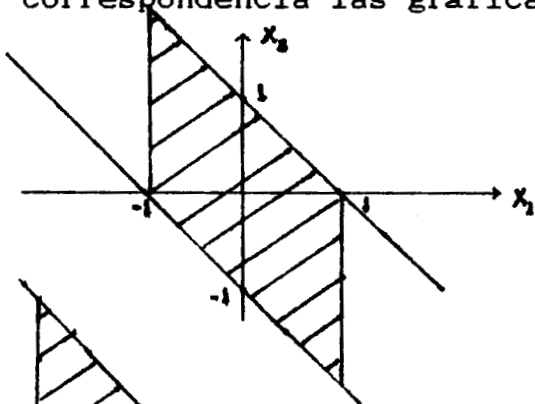


Figura 1.9.

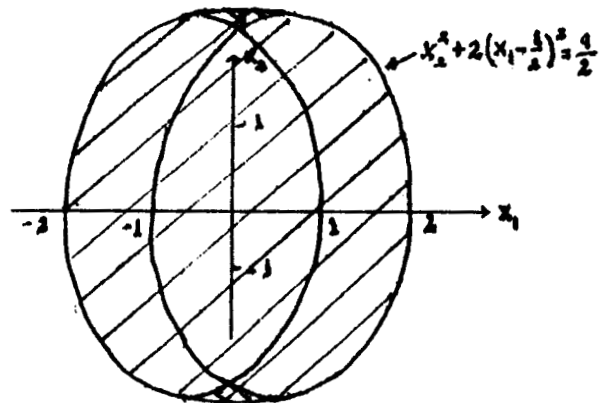
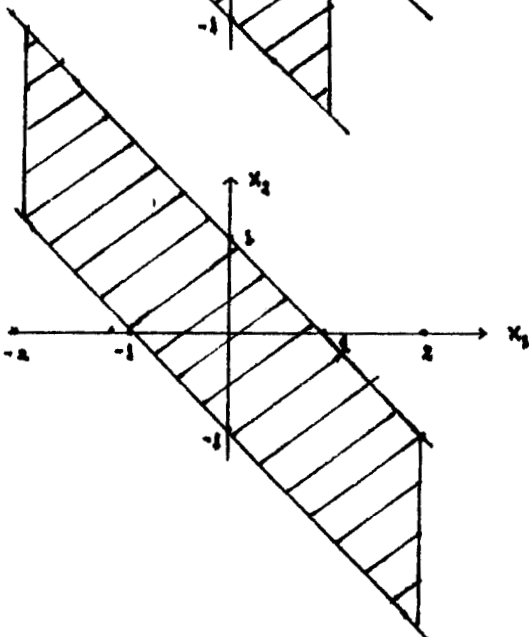


Figura 1.10.

y en adelante,

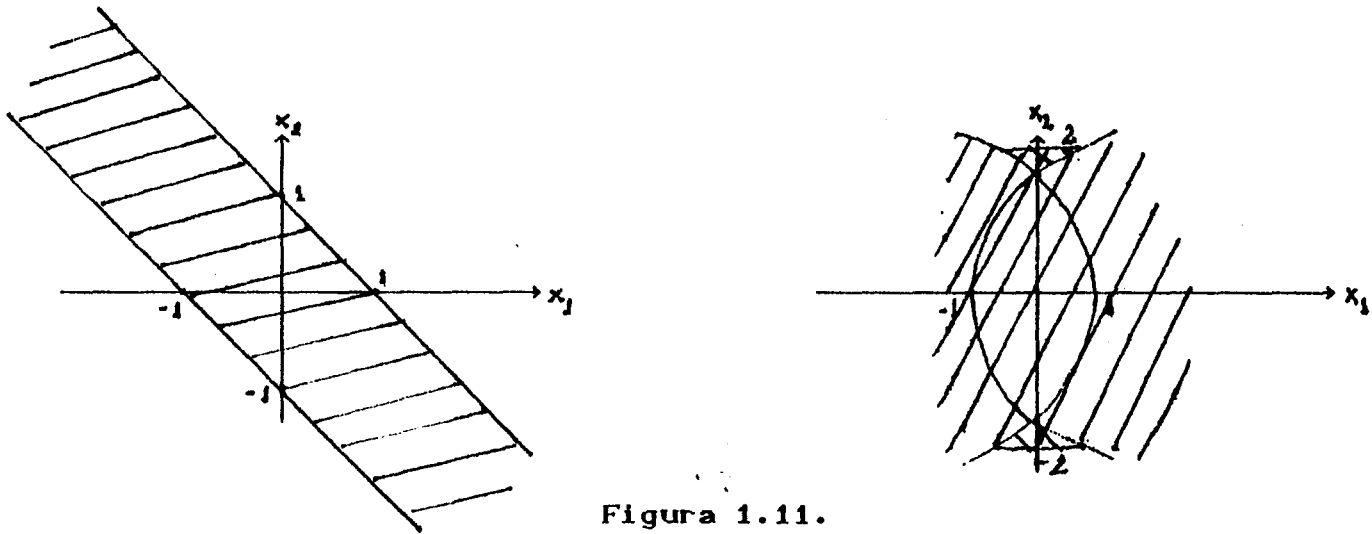


Figura 1.11.

Retornando al problema inicial de conjunto alcanzable, tenemos que el sistema lineal en la forma canónica de Brunovsky (1.11) es tal que si $y_1 = x_1$, $y_2 = -x_2$ y $w = -v$, tenemos que su conjunto alcanzable $Y(t)$ es el conjunto controlable $C_B(t)$ del sistema lineal en forma canónica de Brunovsky (1.14). Por consiguiente, las aproximaciones mediante (1.11) del conjunto alcanzable $X(t)$ del sistema lineal (1.12) son precisamente las que obtuvimos en la sucesión de gráficas 1.5 y 1.8 a 1.11. ■

Los comentarios siguientes resultarán de gran utilidad cuando extendamos el procedimiento, aquí desarrollado, en la sección §2.3.

Observaciones:

1. La forma que puede tomar un conjunto alcanzable bajo restricciones en los estados y en el control puede resultar complicada, aún en el caso tan simple considerado (sólo retroalimentación), el que además hay que recalcar, es de tipo

lineal. Así, un sistema de control lineal con controles y estados acotados genera comportamientos semejantes al caso no lineal.

2. Existe una íntima interdependencia entre el control u original y las variables de estado involucradas en la retroalimentación $v=v(\bar{x},u)$ ($\bar{x}=(x_1,0)$ en el caso en cuestión), condicionando tanto la forma "caprichosa" como el dominio de validez del conjunto alcanzable aproximante.

3. Bajo consideraciones físicas, el sistema en F.C.B. corresponde a un modelo del carro-cohete (Mackie [31]). Así, las restricciones impuestas sobre $v = v(x_1,u)$ son interpretables como una interdependencia entre la posición x_1 y la potencia v , que restringe el uso de toda la potencia disponible u en función de la posición x_1 del móvil a sólo ciertos valores permitidos de v . O sea, v es potencia condicionada a la posición x_1 y a la potencia disponible u .

De aquí resulta que, físicamente hablando, el conjunto alcanzable del sistema en forma canónica de Brunovsky (1.11) sea cota inferior para el conjunto alcanzable del sistema (1.12).

La observación principal a remarcar, susceptible de generalización, es la siguiente :

4. Tenemos que cuando al inicio del ejemplo restringimos estrictamente la pareja (x_1,v) a valores cerca del origen

$(0,0)$, $(|x_1| \leq k, |v| \leq 1-k, k \in [0,1], \text{ fijo})$, ésta podía tomar valores en los que tanto x_1 como v varían independientemente uno del otro, y aún así, el control u permanece admisible.

En realidad éste es un hecho que podemos asegurar a priori, pues siendo $u = u(\bar{x}, v) = x_1 + v$ una función continua en el punto $(x_1, v) = (0,0)$, tenemos por definición que: para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|(x_1, v)\| < \delta$$

entonces

$$|u(x_1, v) - u(0,0)| = |u(x_1, v)| < \varepsilon,$$

i.e., si $\|(x_1, v)\| < \delta$ entonces $|u(x_1, v)| < \varepsilon$.

Y en particular, para $\varepsilon = 1$ se satisface.

En otras palabras, la continuidad de u en $(0,0)$ asegura que existe una vecindad en el origen de las coordenadas (x,v) , cuyos valores bajo u , en valor absoluto, no exceden la cota igual a 1.

§2.2 EQUIVALENCIA LINEAL DE S.N.L. TRANSFORMACION GLOBAL.

Para el paso de sistemas lineales de control a los no lineales han habido varios enfoques, no todos fructíferos.

Uno de ellos por ejemplo, proveniente de la teoría de sistemas, proponía clasificar a los sistemas no lineales que se asemejan en la forma a los lineales, con sólo unos "pequeños cambios". Y así, considerarlos como simples extensiones de sistemas lineales. Sin embargo, la experiencia ha mostrado que aún para la clase de los sistemas bilineales, la extrapolación no es tan sencilla.

Por consiguiente, surge la necesidad de hallar características intrínsecas a los sistemas lineales (y que los hacen ser tales), para luego generalizarlas a ciertos sistemas no lineales, con el objeto de que al serles comunes, los consideremos bajo una misma "clase".

Una tal propiedad es la que se conoce como la matriz de controlabilidad; la cual, implícito en su nombre, permite clasificar a los sistemas lineales controlables de los que no.

Por definición, para un sistema lineal de control autónomo:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (2.1)$$

donde, $x \in \mathbb{E}^n$, A es una matriz constante $n \times n$, $b \in \mathbb{E}^n$ es un vector constante y $u(t) \in U(t) \subset \mathbb{E}^1$ es el vector de control, la matriz de

controlabilidad viene dada por:

$$M_{n \times n} = \{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\} \quad (2.2)$$

Y de la teoría de control lineal (ver, e.g., Lee-Markus[28]), M es de rango n si y sólo si el conjunto alcanzable del sistema (2.1) tiene interior no vacío.

Por otra parte, también se tiene que cuando $\text{rango } M = n$, siempre existe una transformación lineal no-singular de coordenadas:

$T: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$, $T = (T_1, \dots, T_n)$, $T(0) = 0$, con $Tx = z$, dada por :

$$z_i = \langle c, A^{i-1}x \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde $c \in \mathbb{E}^n$ es un vector ortogonal a los vectores $b, Ab, \dots, A^{n-2}b$, y $\langle c, A^{n-1}b \rangle = 1$ (en realidad sólo basta que $\langle c, A^{n-1}b \rangle \neq 0$). Bajo esta transformación tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= T_i \dot{x} = \langle c, A^{i-1} \dot{x} \rangle = \langle c, A^{i-1}(Ax + bu) \rangle \\ &= \langle c, A^i x + A^{i-1}bu \rangle = \langle c, A^i x \rangle + \langle c, A^{i-1}b \rangle u \\ &= \begin{cases} \langle c, A^i x \rangle = z_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1. \\ \langle c, A^n x \rangle + \langle c, A^{n-1}b \rangle u, & i = n. \\ = \langle c, A^n x \rangle + u \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora bien, por el teorema de Hamilton-Cayley, A satisface su polinomio característico, $|\lambda I - A| = \lambda^n + p_n \lambda^{n-1} + \dots + p_1 = 0$, $A^n = -p_n A^{n-1} - \dots - p_1 I$, luego

$$\langle c, A^n x \rangle = \langle c, -\sum_{i=1}^n p_i A^{i-1} x \rangle = -\sum_{i=1}^n p_i \langle c, A^{i-1} x \rangle = -\sum_{i=1}^n p_i z_i,$$

Por lo tanto, el sistema lineal (2.1) se reduce a la forma :

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, & i &= 1, 2, \dots, n-1. \\ \dot{z}_n &= -\sum_{i=1}^n p_i z_i + u\end{aligned}$$

O sea, en forma matricial, hemos obtenido:

$\dot{\tilde{z}} = \tilde{A}z + \hat{b}u$, donde $\tilde{A}$ es conocida como la matriz compañera,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ -p_1 & -p_2 & \dots & -p_n \end{bmatrix} \text{ y } \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, haciendo la retroalimentación $u = \sum_{i=1}^n p_i z_i + v$, tenemos que el sistema (2.1) se ha pasado a la forma canónica de Brunovsky

$$\dot{\tilde{z}} = \hat{A}z + \hat{b}v.$$

En otras palabras, todo sistema lineal autónomo y controlable es transformable, de una manera lineal (la transformación T) y con una retroalimentación ($v = v(z,u)$), a un sistema lineal en la forma canónica de Brunovsky .

Definición.- Entendemos por una retroalimentación lineal del sistema (2.1), la asignación $u := Qx + v$, donde Q es una matriz $1 \times n$

constante, de manera que bajo esta transformación obtenemos un nuevo sistema $\dot{x} = (A + bQ)x + b v$.

Definición.- Decimos que dos sistemas lineales (2.1) :

$$\dot{x} = Ax + bu \quad \text{y} \quad \dot{z} = A'z + b'v$$

son F-equivalentes (F por feedback, retroalimentación) si y sólo si existen matrices, $T_{n \times n}$, no singular, y $Q_{1 \times n}$, tales que :

$$A' = T(A + bQ)T^{-1} \quad \text{y} \quad b' = Tb$$

o sea, $\dot{z} = T(A + bQ)T^{-1}z + Tb v = A'z + b'v$

Observaciones :

1) Si T es la transformación representada por la matriz T, entonces, para $z = Tx$, tenemos :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T\dot{x} = T(Ax + bu) = T(Ax + b(Qx + v)) \\ &= T(Ax + bQx) + Tb v = T(A + bQ)x + Tb v \\ &= T(A + bQ)T^{-1}z + Tb v \end{aligned}$$

2) La F-equivalencia es de hecho una relación de equivalencia, i.e., es reflexiva, simétrica y transitiva, como puede verificarse con un cálculo directo. (cf. Brunovsky[8], pág. 174).

Así, lo realizado para transformar un sistema lineal controlable a la forma canónica de Brunovsky equivale a decir que todo sistema lineal controlable es F-equivalente con un sistema en la forma canónica de Brunovsky, donde la transformación lineal T viene dada por $T_i(x) = \langle c, A^{i-1}x \rangle = z_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, y la matriz Q por $Q = (p_1, \dots, p_n)$.

Por consiguiente, tenemos así definido un número finito de clases de F-equivalencia para los sistemas lineales controlables con una entrada, teniendo un sistema en la forma canónica de Brunovsky como representante, para cada dimensión n . (cf. Brunovsky[8], teorema 2, pág. 176).

Para el caso de sistemas lineales no controlables, o sea, sistemas para los cuales el rango de la matriz de controlabilidad M no es máximo, se cuenta con el trabajo desarrollado por Liang[29], donde, se extiende el resultado de Brunovsky, mismo que en la presente sólo hemos considerado para sistemas con una entrada.

Este hecho dió pauta para estudiar la existencia de sistemas no lineales para los que se va a definir una clase de equivalencia, la cual, restringida a los sistemas lineales controlables, coincide con la aquí definida. Con esto cierto, tendríamos que los sistemas no lineales en cuestión estarían "linealizados", y, por ende, representables en una forma canónica de Brunovsky.

El papel representado por la matriz constante M para los sistemas lineales, tiene su contrapartida en los no lineales con una matriz $n \times n$, a la que también suele llamarse de controlabilidad. Aunque, de facto, para los sistemas no lineales la controlabilidad no se dá como condición necesaria y suficiente respecto a que el rango de esta matriz sea n . (sólo proporciona la suficiencia, y para la necesidad hay que tomar más consideraciones (Hermes[22])).

Sin embargo, bajo hipótesis adicionales y que siempre el rango de la matriz sea máximo, es posible realizar un procedimiento parecido al del sistema lineal anterior, reduciendo (vía una transformación no lineal y una retroalimentación) un sistema no lineal a uno en forma canónica de Brunovsky, localmente (Su[39]).

Para el efecto, primero tenemos la definición siguiente [Ap 3]:

La derivada de Lie de un campo vectorial respecto de otro, es un operador entre campos vectoriales C^∞ , que viene dado por la igualdad:

$$L_f(g) = [f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g,$$

para f y g campos vectoriales de clase C^∞ en $\mathbb{E}^n$, donde $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son las matrices jacobianas $n \times n$.

De manera inductiva, podemos definir los corchetes de Lie sucesivos:

$$\begin{aligned} (\text{ad}^1 f, g) &:= [f, g] \\ (\text{ad}^2 f, g) &:= [f, (\text{ad}^1 f, g)] = [f, [f, g]] \\ &\vdots \\ (\text{ad}^k f, g) &:= [f, (\text{ad}^{k-1} f, g)] \quad , \quad \text{con } (\text{ad}^0 f, g) := g. \end{aligned}$$

Así, la matriz que nos atañe está formada con los vectores $g, (\text{ad}^2 f, g), \dots, (\text{ad}^{n-1} f, g)$ a manera de columnas:

$$M := \{g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-1} f, g)\} \quad (2.3)$$

Para el caso de sistemas lineales, el rango de esta matriz coincide con el de la matriz de controlabilidad original, pues dado (2.1), y haciendo $g(x) := b$ y $f(x) := Ax$, tenemos en efecto,

$$\begin{aligned} (ad^1 f, g) &:= [f, g] = -Ab \\ (ad^2 f, g) &:= [f, [f, g]] = A^2 b \\ &\vdots \\ (ad^{n-1} f, g) &:= [f, (ad^{n-2} f, g)] = (-1)^{n-1} A^{n-1} b. \end{aligned}$$

Retornando al problema de "linealización" y siguiendo el trabajo de Su [39], resulta que para que un sistema no lineal sea "linealizado" alrededor de un punto crítico x_0 para el sistema libre, (o sea, con $u = 0$) son condiciones necesarias y suficientes que:

a) el sistema no lineal sea de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\varphi(x, u), \text{ donde } x \in \mathbb{E}^n, u(t) \in U(t) \subset \mathbb{E}^1,$$

donde, f, g son campos vectoriales suaves en $V \subset \mathbb{E}^n$ abierto, con $x_0 \in \text{int } V$, $f(x_0) = 0$, $\varphi(x_0, 0) = 0$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$ en el punto $(x_0, 0)$.

b) la matriz M , (2.3), sea de rango máximo en el punto x_0 , y

c) la distribución generada por los campos vectoriales $g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-2} f, g)$ es involutiva en el punto x_0 . [Ap. 3]. ■

Nótese que por b) $g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-1} f, g)$ son linealmente

independientes y por c) existe una variedad integral para este distribución involutiva, debido al teorema de Frobenius ([Ap. 3]).

Por comodidad, consideramos en lo sucesivo sólo sistemas no lineales, lineales en el control, de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.4)$$

donde f, g son campos vectoriales de clase C^∞ en V , donde $V \subset \mathbb{E}^n$ es un abierto, con $0 \in \text{int } V$, y $f(0) = 0$.

Sin pérdida de generalidad se ha tomado una traslación para que el origen sea punto crítico.

Sin embargo, por lo expuesto en la sección anterior, §2.1, estamos más interesados en que la linealización sea semiglobal, en el sentido de cuáles condiciones han de satisfacer V , f y g para que exista una transformación de clase C^∞ , $T = (T_1, \dots, T_{n+1})$ del abierto $V \times \mathbb{E}^1 \subset \mathbb{E}^{n+1}$ en un abierto de $\mathbb{E}^{n+1}$, tal que,

- 1) $T(0) = 0$
- 2) $\tilde{T} = (T_1, \dots, T_n)$ es función sólo de $x_1, \dots, x_n$ (estados) y $\tilde{T}$ lleva a $V \subset \mathbb{E}^n$ en el espacio $\mathbb{E}^n$ de $y_1, \dots, y_n$, ($y_i = T_i(x)$), para $i = 1, \dots, n$), con una matriz jacobiana $D\tilde{T}$ no-singular.
- 3) T_{n+1} es una función de x, u , la cual puede despejarse como una función de u , donde $x \in V$.

4) $y_1, \dots, y_{n+1}$ satisfacen :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= y_{n+1} \end{aligned}$$

Obtenemos un sistema lineal en la forma canónica de Brunovsky, si definimos el control $v := T_{n+1}(x, u)$

5) T es inyectivo en V .

En otras palabras, nuestro interés recae sobre las condiciones suficientes para la linealización semiglobal de un sistema no lineal (2.4). Las necesarias para esto (aspecto semiglobal) no las contemplaremos en este trabajo.

Para llevar a cabo esto, se necesitan combinar los resultados locales (Su [39]) con los teoremas globales sobre la función inversa, a fin de garantizar una transformación global de un sistema no lineal (2.4) en un sistema lineal (Hunt, Su & Meyer [23]).

Pasemos entonces a construir la linealización de un sistema no lineal de la forma (2.4).

Primeramente definimos una relación de equivalencia entre sistemas no lineales en general.

Definición. Una τ -transformación T con dominio W es un difeomorfismo de una vecindad del origen en $\mathbb{E}^{n+1}$, que lleva el origen en el origen.

En la teoría, $W = V \times U$, donde $U \subset \mathbb{E}^1$ y V es una vecindad del origen en $\mathbb{E}^n$, el espacio de estados.

Consideremos ahora, los dos sistemas no lineales :

$$\begin{aligned} S_1: \dot{x} &= f(x,u) \quad y \\ S_2: \dot{y} &= g(y,v), \end{aligned}$$

donde $x, y \in \mathbb{E}^n$, $u, v \in U \subset \mathbb{E}^1$, f, g campos vectoriales de clase C^∞ , y denotamos sus trayectorias por φ y ψ , respectivamente.

Definición. Decimos que el sistema S_1 está τ -relacionado con el sistema S_2 si y sólo si existe una τ -transformación T en W tal que para todo estado $x_0 \in V$ y cada control admisible u se satisface lo siguiente:

Si hacemos $\hat{y}_0 = T(x_0, u(0))$ y $T(\varphi(t; x_0, u), u(t)) = (y(t), v(t))$, siempre que $\varphi(t; x_0, u)$ es un estado $x(t)$ en V , entonces $y(t) = \psi(t; y_0, v)$.

En otras palabras, para toda trayectoria de estado-control $(x(t), u(t))$ de S_1 , la transformación la lleva en la correspondiente $(y(t), v(t))$ de S_2 .

En términos de la transformación tenemos:

$$\begin{aligned} y_i &:= T_i(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad y \\ v &:= T_{n+1}(x, u), \end{aligned}$$

luego del sistema S_2 , se debe satisfacer que,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{T}_1(x,u) = g_1(T_1, \dots, T_{n+1}) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= \dot{T}_n(x,u) = g_n(T_1, \dots, T_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

y así, $(y(t), v(t)) = (T_1(t), \dots, T_n(t), T_{n+1}(t))$ es una trayectoria de estado-control para S_2 .

Ahora bien, pidiendo que $T_1, \dots, T_n$ sólo sean transformaciones de estados, tenemos lo siguiente :

Denotemos con F la transformación sobre los estados, $F = (T_1, \dots, T_n)$ y hagamos $\hat{y}_0 = T(x_0, u(0)) = (F(x_0), T_{n+1}(x_0, u(0))) = (y_0, v(0))$.

Ahora, si $\phi(t, x_0, u)$ es una solución de S_1 , entonces,

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= T(x(t), u(t)) = T(\phi(t, x_0, u), u(t)) \\ &= (F(\phi(t, x_0, u)), T_{n+1}(\phi(t, x_0, u), u(t))) \\ &= (y(t), v(t)) \end{aligned}$$

es tal que $y(t) = F(\phi(t, x_0, u)) = \psi(t, y_0, v)$ debe ser solución del sistema S_2 .

Así, $g(y(t)) = \dot{y}(t) = DF(\phi(t, x_0, u)) \cdot \dot{\phi}(t, x_0, u) = DF(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$
luego, en coordenadas,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1}{\partial x_i} \dot{x}_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1}{\partial x_i} f_i(x,u) = g_1(T(x,u)) \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_n}{\partial x_i} \dot{x}_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_n}{\partial x_i} f_i(x,u) = g_n(T(x,u)).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

de aquí que, $\frac{\partial T_1}{\partial u} = \dots = \frac{\partial T_n}{\partial u} = 0$, pero para que DT no sea singular,

$$\text{debemos tener: } \frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} \neq 0. \tag{2.7}$$

De esta forma, cada τ -transformación puede verse como la combinación de un cambio de coordenadas del espacio fase por $(T_1, \dots, T_n)$ y un cambio de coordenadas en el espacio de control dado por una retroalimentación, $v := T_{n+1}(x,u)$.

La relación definida por τ en el espacio de sistemas es una relación de equivalencia.

Observación. - Por la forma de definir la τ -transformación, se está exigiendo que los campos vectoriales f y g asociados a los sistemas S_1 y S_2 sean conjugados; i.e., la τ -transformación es tal que preserva el parámetro t :

$$T_i(\phi_t(x_0, u)) = \psi_t(T_i(x_0, u(0))) \text{ para todo } x_0 \in V \text{ y } t \in \mathbb{E}^1.$$

para $i = 1, \dots, n$.

Ahora bien, con respecto a la relación con la F-equivalencia entre sistemas lineales controlables, tenemos que la τ -equivalencia

es una extensión, en el sentido de que restringida a los sistemas lineales controlables, se reduce a la F-equivalencia. La implicación de que si dos sistemas S_1 y S_2 son F-equivalentes, entonces son τ -equivalentes resulta obvia. En cuanto a la implicación contraria la relegaremos a la página 69.

Consideremos el sistema no lineal, lineal en el control, (2.4):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

el cual suponemos está en la τ -relación de equivalencia que contiene a los sistemas lineales controlables, la cual denotamos con τ_0 . Entonces, (2.4) está τ -relacionado con el sistema lineal en la forma canónica de Brunovsky,

$$\dot{y} = \hat{A}y + \hat{b}v.$$

Caractericemos a τ_0 , a fin de que quede bien definida. Primeramente, obtengamos sus condiciones necesarias. Para esto, aplicando para este caso lo desarrollado en (2.6), tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{T}_1(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1}{\partial x_i} (f_i(x) + g_i(x)u) = T_2(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\dot{T}_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_i} (f_i(x) + g_i(x)u) = T_n(x)$$

$$\dot{T}_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_n}{\partial x_i} (f_i(x) + g_i(x)u) = T_{n+1}(x, u)$$

Pero de (2.7), resulta que se debe cumplir:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_i} g_i(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad y$$

(2.8)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_i} (f_i(x) + g_i(x)u) = T_{n+1}, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_i} g_i(x) \neq 0.$$

Lo cual, en términos de la derivada de una función h , de clase C^∞ , respecto a un campo vectorial f , $L_f(h)(p) := dh(p)(f(p))$, para $p \in V \subset \mathbb{E}^n$. [Ap. 3], queda en la forma condensada:

$$L_g(T_i)(p) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$L_f(T_i)(p) = T_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad y$$

$$L_{f+gu}(T_n)(p) = T_{n+1}, \quad \text{con} \quad L_g(T_n)(p) \neq 0.$$

Ahora bien, usando la versión de la fórmula de Leibnitz que vincula las derivadas de Lie de funciones con las de campos vectoriales [Ap. 3], tenemos para las condiciones $L_g(T_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ y $L_g(T_n) \neq 0$, la representación siguiente en función solamente de T_1 . En vista de lo cual, del conocimiento de T_1 se determinarán los demás T_i , $i = 2, 3, \dots, n-1$, por medio de diferenciación de Lie. En efecto,

$$\begin{aligned} L_g(T_2) &:= L_g(L_f(T_1)) \\ &= L_f(L_g(T_1)) - L_{[f,g]}(T_1) \\ &= -[f,g]T_1 = -(\text{ad}^1 f, g)T_1 \end{aligned}$$

$$L_g(T_3) := L_g(L_f(T_2))$$

$$\begin{aligned}
&= L_f(L_g(T_2)) - L_{[f,g]}(T_2) \\
&= -L_{[f,g]}(L_f(T_1)) \\
&= -L_f(L_{[f,g]}(T_1)) + L_{[f,[f,g]]}(T_1) \\
&= [f,[f,g]](T_1) = (\text{ad}^2 f, g)T_1
\end{aligned}$$

Y en general, de manera recursiva:

$$L_g T_k := L_g(L_f T_{k-1}) = (-1)^{k-1} (\text{ad}^{k-1} f, g)T_1 = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, n-1 \\ \text{no cero}, & k = n. \end{cases}$$

De donde extractamos las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}
&(\text{ad}^k f, g)T_1 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\
\text{con} \quad &(\text{ad}^0 f, g) = g. \\
\text{y} \quad &(\text{ad}^{n-1} f, g)T_1 \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

En otras palabras, si el sistema no lineal (2.4) se halla en τ_0 , se tienen como condiciones necesarias que se satisfaga (2.9).

Proposición 2.1.- Supongamos que el sistema (2.4) se halla en la clase de equivalencia τ_0 . Por construcción, realizada para deducir (2.9), supongamos que las funciones $T_1, \dots, T_n$, dependen sólo de x , i.e., $\frac{\partial T_i}{\partial u} = 0$, pero no así T_{n+1} , para la cual como $\frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} \neq 0$, sí depende de u . Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

- Las funciones $dT_1, \dots, dT_n, dT_{n+1}$ son linealmente independientes.
- La matriz de controlabilidad $M = \{g, (\text{ad}^1 f, g), \dots, (\text{ad}^{n-1} f, g)\}$ es de rango máximo.

c) Las condiciones (2.9) se satisfacen.

Demostración. - a) $\Rightarrow$ c)

Por definición, $dT_1, \dots, dT_n, dT_{n+1}$ son vectores linealmente independientes (i.e., la matriz jacobiana DT es no-singular). Entonces, como por construcción pedimos que las funciones $T_1, \dots, T_n$ sean independientes de u , pero no así T_{n+1} , la cual sí depende de u , obtenemos lo sustentado anteriormente, a saber,

$$L_g T_i = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{y}$$

$$L_g T_n \neq 0.$$

Así, siguiendo el procedimiento realizado para deducir (2.9), la condición c) se satisface.

c) $\Rightarrow$ b)

Queremos que $\text{rango } M = n$, lo cual equivale a que $g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-1} f, g)$ son linealmente independientes.

Probando por contradicción, supongamos que estos vectores no son linealmente independientes. Entonces, para i con, $0 \leq i \leq n-1$, tenemos $(ad^i f, g) = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k (ad^k f, g)$, donde α_k son funciones C^∞ ; y así el vector $(ad^{n-1} f, g)$ debe de ser combinación lineal de $g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-2} f, g)$, pues estos vectores se determinan recursivamente; pero entonces,

$$(ad^{n-1} f, g) T_1 = \sum_{k=0}^{n-2} c_k (ad^k f, g) T_1 = 0,$$

contradiendo la hipótesis de c), de que esto es diferente de cero en una vecindad del 0.

b) $\rightarrow$ a)

Probemos por reducción al absurdo.

Supongamos que $dT_1, \dots, dT_n, dT_{n+1}$ son linealmente dependientes y por construcción queremos que $\frac{\partial T_i}{\partial u} = 0$, $i = 1, \dots, n$, y $\frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} \neq 0$. Entonces, la matriz jacobiana asociada DT,

$$DT = \begin{bmatrix} dT_1 \\ \vdots \\ dT_n \\ dT_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\tilde{T}_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ d\tilde{T}_n & 0 \\ d\tilde{T}_{n+1} & \frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} \end{bmatrix} \text{ es singular, donde } (d\tilde{T}_i, 0) = dT_i,$$

$i=1, \dots, n$, luego, $\det(DT) = \frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} \det(d\tilde{T}_1, \dots, d\tilde{T}_n) = 0$, de donde $\det(d\tilde{T}_1, \dots, d\tilde{T}_n) = 0$. Identifiquemos $d\tilde{T}_i$ con dT_i .

Por otra parte, como suponemos que el sistema (2.4) está en τ_0 , está entonces en τ -relación con la forma canónica de Brunovsky, y parafraseando lo expuesto en la teoría:

$$L_{f+gu} T_i = T_{i+1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

de donde,

$$L_g T_i = 0$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$L_f T_i = T_{i+1}$$

porque $\frac{\partial T_i}{\partial u} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$; y como $\frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} \neq 0$, entonces,

$$L_{f+gu} T_n = L_f T_n + L_g T_n \cdot u, \quad \text{con } L_g T_n \neq 0.$$

Usando la versión de regla de Leibnitz, obtenemos

$$(\text{ad}^i f, g) T_i = 0, \quad \text{para } i = 0, \dots, n-2 \quad \text{y}$$

$$(\text{ad}^{n-1} f, g) T_i \neq 0.$$

Aplicando la forma iterativa de la regla de Leibnitz a esto último, es fácil ver que:

$$(\text{ad}^k f, g) T_i = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-i-1 \quad \text{y}$$

$$(\text{ad}^{n-i} f, g) T_i \neq 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \quad \text{y}$$

$$(\text{ad}^0 f, g) T_n \neq 0,$$

Ahora bien, el hecho de que la matriz M sea de rango máximo en el origen es equivalente a que los vectores $g, (\text{ad}^1 f, g), \dots, (\text{ad}^{n-1} f, g)$ formen una base de $T_p \mathbb{E}^n$ para p en una vecindad V del origen.

Así, de estas fórmulas, tenemos :

$$dT_{i,p}((\text{ad}^{n-i} f, g)(p)) \neq 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

Por lo tanto, expresando la dualidad entre 1-formas y campos vectoriales respecto a las bases dx_i y $\frac{\partial}{\partial x_j}$ (cf., e.g. Loomis[30], pág. 394), haciendo $\langle dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$, entonces, las fórmulas anteriores quedan :

$$\langle dT_{ip}, (ad^{n-i}f, g)(p) \rangle := \alpha_i(p) \quad , \quad i = 1, \dots, n,$$

donde, $\alpha_i : V \subset \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ son funciones de clase C^∞ , y $p \in V$.

De esta manera, tenemos, expresando con $(^*)$ al dual de una 1-forma :

$a_1(p) (dT_{1p})^* = (ad^{n-1}f, g)(p)$ y $\langle dT_{1p}, (ad^k f, g)(p) \rangle = 0$, para $k = 0, \dots, n-2$. y donde $a_1(p)$ es una función C^∞ .

$(dT_{2p})^*$ es combinación lineal de $(ad^{n-1}f, g)(p)$ y $(ad^{n-2}f, g)(p)$ localmente, y por lo tanto,

$$(ad^{n-2}f, g)(p) = b_1(p)a_1(p)(dT_{1p})^* + a_2(p)(dT_{2p})^*$$

continuyendo de esta manera, obtenemos,

$$(ad^{n-i}f, g)(p) = \sum_{k=1}^i \gamma_k(p) (dT_{kp})^*, \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

donde, γ_k son funciones C^∞ .

Pero entonces, la dependencia lineal de $(dT_1)^*, \dots, (dT_n)^*$ implica que $(ad^{n-i}f, g)$, para $i = 1, \dots, n$ no son linealmente independientes, para $p \in V$, contradiciendo lo sustentado por b). ■

Por consiguiente, para un sistema no-lineal (2.4) en τ_0 , la condición sobre la matriz de controlabilidad M se interpreta como las condiciones (2.9).

Sin embargo, queda un punto por resolver para tener las condiciones necesarias para que un sistema (2.4) se halle en τ_0 , el cual recae en que exista la solución de T_1 del sistema (2.9).

Para que se satisfaga para algún T_1 el sistema de ecuaciones parciales lineales de 1er. orden : $(\text{ad}^k f, g)T_1 = 0$, en una vecindad del 0, para $k = 0, \dots, n-2$, (garantizando la existencia de T_1), tenemos que resulta equivalente a que la distribución generada por $\{g, (\text{ad}^1 f, g), \dots, (\text{ad}^{n-2} f, g)\}$ sea completamente integrable. Esto es válido en virtud del teorema de Frobenius en términos de 1-formas (cf. [Ap. 3]).

Pero esto último, a su vez es equivalente a lo que sustenta el teorema de Frobenius en la primera versión del [Ap. 3], el cual, adaptado a nuestros intereses, expresa:

Teorema de Frobenius. - La distribución generada con los vectores $\{g, (\text{ad}^1 f, g), \dots, (\text{ad}^{n-2} f, g)\}$ es completamente integrable si y sólo si es involutiva. ■

De esta forma, tenemos que si un sistema está en τ_0 , entonces, contamos con el teorema siguiente (condición necesaria), que hace las veces de resumen de todo lo planteado hasta ahora.

Teorema 2.1.- Si un sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ está en la clase de equivalencia de r_0 , entonces

a) $g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-1} f, g)$ son linealmente independientes en el origen.

b) La distribución generada por $\{g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-2} f, g)\}$ es involutiva en el origen. ■

Las condiciones a) y b) de este teorema son también suficientes localmente (Su [39]). En efecto, esto se sigue de aplicar el teorema de la función inversa, pues DT es no singular (condición a)) y procediendo a derivar las demás componentes de la transformación T a partir de las relaciones (2.8), apoyándonos para esto en la existencia de T_1 .

Sin embargo, debido al propósito de que nuestro interés se centra en condiciones globales, abordamos, por tanto, las condiciones suficientes desde la perspectiva de obtener una transformación global.

Ahora bien, antes de proceder con las condiciones globales, veamos como se aplica la transformación a un sistema lineal, para verificar que se reduce a la transformación dada al principio de esta sección.

En efecto, consideremos un sistema (2.1), para el cual la matriz de controlabilidad M es de rango máximo. Entonces,

suponiendo la existencia de una función $h(x) = c^T x$, con $c \in \mathbb{E}^n$ no nulo, que satisface las condiciones (2.9), éstas nos proporcionan precisamente la transformación propuesta :

$$(\text{ad}^k f, g) h(x) = (-1)^k (A^k b) (h(x)) = dh(x) (-1)^k (A^k b) = (-1)^k c^T A^k b = 0,$$

para $k = 0, 1, \dots, n-2$ y

$$(\text{ad}^{n-1} f, g) h(x) = (-1)^{n-1} c^T A^{n-1} b \neq 0$$

De hecho, como $g, (\text{ad}^1 f, g), \dots, (\text{ad}^{n-1} f, g)$ son linealmente independientes, de estas relaciones se sigue que la función $h(x)$ existe, aunque no es única.

Ahora bien, proponiendo $T_1(x) = h(x)$, tenemos que :

$$T_2(x) = L_f T_1(x) = dT_1(x)(f(x)) = c^T Ax$$

$$T_3(x) = (L_f T_2)(x) = dT_2(x)(f(x)) = (c^T A)(Ax) = c^T A^2 x$$

$\vdots$

$$T_n(x) = (L_f T_{n-1})(x) = dT_{n-1}(x)(f(x)) = (c^T A^{n-2})(Ax) = c^T A^{n-1} x$$

Así, haciendo $z_i = T_i(x)$, obtenemos las ecuaciones :

$$z_i = c^T A^i x \quad i = 1, \dots, n-1 \quad y$$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= L_{f+gu}(T_n)(x) = dT_n(x)(f+gu)(x) \\ &= c^T A^{n-1}(Ax+bu) = c^T A^n x + c^T A^{n-1} bu \end{aligned}$$

De donde, si elegimos $h(x)$ de forma tal que $c^T A^{n-1} b = 1$, tenemos, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= z_{n+1} = T_{n+1}(x) = \alpha(z) + u,\end{aligned}$$

con, $z = T(x)$.

Suponiendo ahora que la ley de control de retroalimentación siguiente se elige : $u = -\alpha(z) + v$; la cual existe y está bien definida en todo $\mathbb{E}^n$, el sistema se convierte en uno en la F.C.B. :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v.\end{aligned}$$

Así, hemos verificado que si un sistema lineal controlable está en la clase τ_0 , el sistema es F-equivalente.

Pasemos a considerar el problema de hallar una transformación global T , estudiando para esto las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (2.9). Desde la perspectiva local, estas soluciones existen , como consecuencia del teorema de Frobenius (Su [39]). Así, garantizadas las condiciones de existencia, siempre es posible construir una solución de este sistema de ecuaciones diferenciales parciales, "componiendo" la solución de $dT_1(x) ((ad^{n-1}f, g)(x)) \neq 0$ con las soluciones de las

n-1 ecuaciones diferenciales ordinarias :

$$\dot{x} = (\text{ad}^k f, g) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

éstas últimas obtenidas mediante el método de características (cf. Arnold [2], pág. 59).

Definición. - Una ecuación diferencial parcial de la forma :

$$L_x h(x) = 0 \quad \text{o} \quad dh(x) X(x) = 0$$

con $x \in \mathbb{E}^n$, X un campo vectorial en $\mathbb{E}^n$ y h una función, se denomina ecuación lineal homogénea de primer grado.

Este método consiste en lo siguiente :

Intuitivamente, la técnica está motivada por el hecho de que la diferencial de una función $h : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$, viene a ser el gradiente, y como tal, tiene la propiedad de ser normal a las curvas de nivel S de la función, i.e., normal a todo vector tangente en cualquier punto de las curvas de nivel S . Así, para v_x , vector tangente en x a una curva de nivel de la función h , tenemos $dh_x(v_x) = 0$. De aquí, si los vectores v_x están definidos por un campo vectorial $X(x)$, resulta que determinar estas curvas de nivel equivale a hallar las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria : $\dot{x} = X(x)$, a la que se le da el nombre de ecuación característica.

Por lo tanto, una función $h : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$ es una solución de la ecuación diferencial parcial $dh(x) X(x) = 0$ si y sólo si es una

integral primera de la ecuación característica, i.e., si y sólo si es una función constante sobre cada solución $\phi(t)$ de la ecuación característica. En vista de esto, las superficies de nivel de h están dadas por :

$$S_c = \{x \in \mathbb{E}^2 / h(x) = c, \text{ para toda } x = \phi(t)\}$$

Ahora bien, para resolver el sistema :

$$dh(x) X_i(x) = 0 ,$$

para $i = 1, \dots, n-1$, donde $x \in \mathbb{E}^n$, $X_i(x)$ son campos vectoriales linealmente independientes y h una función, tenemos que, extrapolando lo anterior, $dh(x)$ es normal a los hiperplanos tangentes a los conjuntos de nivel S de h , donde $X_1(x), \dots, X_{n-1}(x)$ generan a los espacios vectoriales que identificamos con estos hiperplanos tangentes. En otras palabras, $dh(x)$ tiene como kernel la distribución $D(x)$ generada por los campos vectoriales $X_1(x), \dots, X_{n-1}(x)$, para toda x en cada conjunto de nivel S de h .

Así, para determinar la función h como solución del sistema, debemos de realizar la composición de las soluciones de las ecuaciones características $\dot{x} = X_i(x)$, con $i = 1, \dots, n-1$.

Denotemos con $\phi_{t_i}^{X_i}(x)$ la solución de la ecuación característica, con la condición inicial $\phi_0^{X_i}(x_0) = x_0$, $x_0 \in S$.

Entonces, la composición, que nos

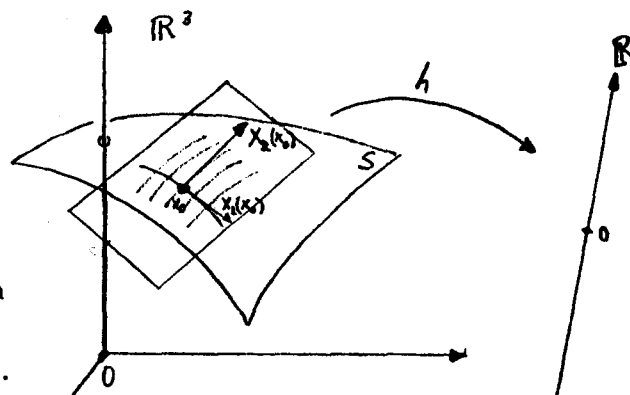


figura 2.1

dará la solución del sistema, viene en los términos siguientes :

Para resolver la ecuación $dh(x) X_1(x) = 0$, se introduce el parámetro t_1 y se determina la solución de la ecuación $\frac{dx}{dt_1} = X_1(x)$, con condición inicial $x(0) = \phi_{01}^{X_1}(x_0) = x_0$, en conjunción con la ecuación $\frac{\partial h}{\partial t_1} = 0$, pues h debe ser constante sobre la curva $\phi_{t_1}^{X_1}(x)$, respecto al cambio en el tiempo t_1 .

A continuación, resolvemos la ecuación $dh(x) X_2(x) = 0$, lo cual equivale a resolver el sistema :

$$\frac{dx}{dt_2} = X_2(x) \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial t_2} = 0$$

con condición inicial $x(t_1, 0) = \phi_{02}^{X_2} \circ \phi_{t_1}^{X_1}(x_0) = \phi_{t_1}^{X_2}(x_0)$.

Considerando la ecuación $dh(x) X_g(x) = 0$, resolverla se reduce a hallar la solución del sistema :

$$\frac{dx}{dt_g} = X_g(x) \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial t_g} = 0$$

con condición inicial :

$$x(t_1, t_2, 0) = \phi_{0g}^{X_g} \circ \phi_{t_2}^{X_2} \circ \phi_{t_1}^{X_1}(x_0) = \phi_{t_2}^{X_2} \circ \phi_{t_1}^{X_1}(x_0).$$

Repitiendo este proceso en orden, introducimos así todos los parámetros $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, y terminamos con la ecuación parcial $dh(x) X_{n-1}(x) = 0$, la cual equivale a :

$$\frac{dx}{dt_{n-1}} = X_{n-1}(x) \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial t_{n-1}} = 0$$

con la condición inicial :

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 0) &= \phi_0^{X_{n-1}} \circ \phi_{t_{n-2}}^{X_{n-2}} \circ \dots \circ \phi_{t_2}^{X_2} \circ \phi_{t_1}^{X_1}(x_0) = \\ &= \phi_{t_{n-2}}^{X_{n-2}} \circ \dots \circ \phi_{t_2}^{X_2} \circ \phi_{t_1}^{X_1}(x_0) . \end{aligned}$$

Hemos obtenido así una parametrización del conjunto de nivel S de la función $h(x)$, conjunto que será una variedad de dimensión $n-1$ en $\mathbb{E}^n$, si la distribución generada por los campos vectoriales $X_1(x), \dots, X_{n-1}(x)$ es involutiva.

El objetivo de todo esto, es construir una transformación auxiliar a fin de probar la existencia de una transformación T de índole global.

Procediendo con el sistema (2.9), tenemos que determinar una solución T_1 de clase C^∞ que satisface :

$$dT_1(x) ((ad^k f, g)(x)) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

y

$$dT_1(x) ((ad^{n-1} f, g)(x)) \neq 0$$

Para esto aplicamos el método recién desarrollado, con la salvedad de que primero resolvemos la ecuación característica :

$\frac{dx}{dt_1} = (ad^{n-1} f, g)$, para toda $t_1 \in \mathbb{E}^1$ (la cual corresponde a la ecuación lineal no homogénea $dT_1(x) (ad^{n-1} f, g)(x) = 0$), con la condición inicial $x(0) = 0$, para hallar la curva integral del campo vectorial $(ad^{n-1} f, g)$ que pasa por el origen del espacio de

estados x .

De esta forma, identificando los campos vectoriales $(\text{ad}^{n-i}f, g)$ con X_i , $i = 1, \dots, n$, construimos una transformación de $\mathbb{E}^n$ en $\mathbb{E}^n$, $(t_1, t_2, \dots, t_n) \mapsto (x_1(\bar{t}), \dots, x_n(\bar{t}))$, con $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, dada por $F(t_1, \dots, t_n) = \phi_{t_n}^g \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{(\text{ad}^{n-1}f, g)}(0)$. Y que además, tiene la propiedad de llevar el origen en el origen.

Ahora bien, puede verificarse que existe tal F , proponiendo para este efecto $T_1 = t_1$. (Hunt et al. [23]).

Además de esto, se puede verificar lo siguiente :

- i) Para t_1 fijo, $F(t_1, \dots, t_n) = \phi_{t_n}^g \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{(\text{ad}^{n-1}f, g)}$ define una variedad integral de la distribución involutiva generada por los campos vectoriales $\{g, (\text{ad}^1f, g), \dots, (\text{ad}^{n-2}f, g)\}$ (usando aquí la propiedad de involutividad). De donde $T_1 = t_1$ es en realidad una solución de las ecuaciones (2.9).
- ii) La ecuación $dT_1(x) ((\text{ad}^{n-1}f, g)(x)) \neq 0$, puede resolverse debido a la involutividad del conjunto $\{g, (\text{ad}^1f, g), \dots, (\text{ad}^{n-2}f, g)\}$ y a que la matriz de controlabilidad tiene rango máximo.
- iii) Usando la fórmula de Leibnitz repetidamente se obtiene que :

$$\begin{aligned} dT_j(x) ((\text{ad}^k f, g)(x)) &= 0 & \text{para } j &= 0, 1, \dots, n-1 \\ dT_j(x) ((\text{ad}^{n-j} f, g)(x)) &\neq 0 & \text{y } k &= 0, 1, \dots, n-j+1 \end{aligned}$$

De donde se tiene que $\frac{\partial T_j}{\partial t_k} = 0$, si $k > j$, o de manera equivalente, la matriz jacobiana de la transformación $(T_1, T_2, \dots, T_n) = (T_1(t), T_2(t), \dots, T_n(t))$ es triangular inferior. Más aún, $\frac{\partial T_j}{\partial t_j} \neq 0$, esto es, la diagonal nunca es cero. (cf. Hunt et al. [23]).

Para este caso la matriz jacobiana de F es :

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

y es llamada matriz no-característica. (Término tomado de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales , cf. John [19]).

Esta matriz evaluada en el origen tiene por columnas precisamente a los vectores $(\text{ad}^{n-1}f, g), \dots, (\text{ad}^1 f, g), g$, (todos evaluados en 0); luego, como estos vectores son linealmente independientes, se sigue que la matriz es no-singular, y por ende, la transformación $\bar{t} \mapsto x(\bar{t})$ es un difeomorfismo local en una vecindad W del origen en $\mathbb{E}^n$.

Ahora bien, para obtener que esta transformación sea un difeomorfismo global en un conjunto $V \subset \mathbb{E}^n$, contamos con el resultado siguiente (Kou et al [27]) :

Teorema.- (Criterio de la razón) Supongamos que existe una transformación diferenciable, $H: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, con matriz jacobiana $J(x)$. Si existe una constante $\epsilon > 0$ tal que los valores absolutos de los menores principales $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ de $J(x)$ satisfacen la condición de la razón :

$|\Delta_1| \geq \epsilon$, $\left| \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right| \geq \epsilon$, $\left| \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right| \geq \epsilon$, para toda $x \in V$, entonces H es inyectiva en todo V . ■

Con este criterio en mente establecemos un resultado de índole global.

Teorema 2.2.- Supóngase que la matriz de controlabilidad del sistema (2.4) es no singular en $\mathbb{E}^n$, que $\{g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-2} f, g)\}$ genera una distribución involutiva y que la matriz no

característica $\left[\frac{\partial x_j}{\partial t_k} \right]$ satisface el criterio de la razón, entonces existe una transformación de clase C^∞ , $T = (T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1})$ que satisface :

- 1) $T(0) = 0$.
- 2) $T_1 = T_1(x)$, $T_2 = T_2(x)$, $\dots$, $T_n = T_n(x)$, $T_{n+1} = T_{n+1}(x, u)$, donde $(x, u) \in \mathbb{E}^{n+1} = \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^1$.
- 3) $T_{n+1} = T_{n+1}(x, u)$ puede despejarse como función de u .
- 4) T lleva el sistema (2.4) en uno en la forma de Brunovsky.
- 5) La transformación $(T_1, T_2, \dots, T_n) : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ es uno a uno, al

igual que $T ; \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$.

Demostración.-

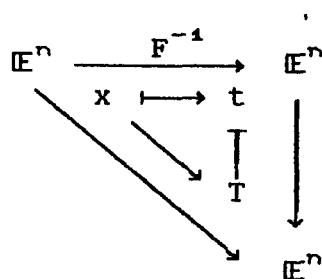
Como la matriz $\left[\frac{\partial x_j}{\partial t_k} \right]$ satisface el criterio de la razón, las transformaciones $t \mapsto x = x(t)$ y $x \mapsto t = t(x)$ son 1-1 en $\mathbb{E}^n$.

Considerando la solución $T_1 = t_1$ en las ecuaciones diferenciales (2.9), tenemos $T_1 = t_1(x)$, y se construyen $T_2, \dots, T_n, T_{n+1}$ por diferenciación de Lie :

$$T_2 = L_f T_1, T = L_f^2 T_1, \dots, T_n = L_f^{n-1} T_1, T_{n+1} = L_{f+ug} T_n.$$

Luego, $T_2 = T_2(x), \dots, T_n = T_n(x)$ y $T_{n+1} = T_{n+1}(x, u)$.

Por otra parte, consideremos el diagrama :



donde, $T = T(t)$, determinados de las ecuaciones (2.9) (Hunt et al.[23]) son tales que satisfacen $\frac{\partial T_j}{\partial t_k} = 0$, si $k > j$ y $\frac{\partial T_j}{\partial t_j} \neq 0$, i.e., la matriz $\left[\frac{\partial T_j}{\partial t_k} \right]$ es triangular inferior. Esto es,

$$T_1 = T_1(t_1) = t_1, T_2 = T_2(t_1, t_2), \dots, T_n = T_n(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Ahora bien, por el teorema del valor medio medio para derivadas parciales (en cada dirección t_k) implica que la función $(T_1, T_2, \dots, T_n) : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ es uno a uno. De donde el diagrama conmuta uno a uno en todas direcciones.

Como T_1 es de clase C^∞ , así como los cambios de coordenadas, entonces, $T_2, \dots, T_n$ son de clase C^∞ , pues se obtienen por diferenciación de Lie sobre el campo vectorial de clase C^∞ , $f(x)$. Esto implica que $(T_1, T_2, \dots, T_n) = (T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x))$ es de clase C^∞ (es un difeomorfismo global de clase C^∞).

A continuación se construye la función $T : \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, dada por $T(x, u) = (T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x), T_{n+1}(x, u))$, donde

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x, u) &= (L_{f+ug} T_n)(x) = L_{f+ug} (L_f^{n-1} T_1)(x) = \\ &= L_f (L_f^{n-1} T_1)(x) + (-1)^{n-1} L_g (L_f^{n-1} T_1)(x). \end{aligned}$$

El cual tiene por matriz jacobiana :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial x_j}{\partial x} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & * & * & \frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} \end{array} \right]$$

con $\frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} = (-1)^{n-1} L_g (L_f^{n-1} T_1)(x) \neq 0$; lo que nos asegura que la transformación $T : \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ es uno a uno.

De esta manera, todos los incisos 1) - 5) son inmediatos. ■

Corolario 2.1.- Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{E}^n$, el cual contiene al origen, y f y g campos vectoriales de clase C^∞ en U . Supongamos que la matriz de controlabilidad del sistema (2.4) es no singular en U , que la distribución generada por $\{g, (ad^1 f, g), \dots, (ad^{n-2} f, g)\}$ es involutiva en U , y que la matriz no característica satisface el criterio de la razón $\mathbb{E}^n$. Entonces existe una transformación de clase C^∞ , $T = (T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1})$ que satisface :

- 1) $T(0) = 0$.
- 2) $T_1 = T_1(x)$, $T_2 = T_2(x)$, $\dots$, $T_n = T_n(x)$, $T_{n+1} = T_{n+1}(x, u)$, donde $(x, u) \in U \times \mathbb{E}^1$.
- 3) $T_{n+1} = T_{n+1}(x, u)$ puede despejarse como función de u .
- 4) T lleva el sistema (2.4) en uno en la forma de Brunovsky.
- 5) La transformación $(T_1, T_2, \dots, T_n) : U \rightarrow \mathbb{E}^n$ es uno a uno, al igual que $T : U \times \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$. (cf. Hunt et al. [23]). ■

Ejemplo: Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \text{ con } |u| \leq 1.$$

$$\text{Aquí } Df = \begin{bmatrix} 0 & \cos x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } Dg = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{luego, } [f, g] = Dg \cdot f - Df \cdot g = - \begin{bmatrix} \cos x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Y así, $\{g, [f, g]\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ generan $T_0 \mathbb{E}^2$ en el $(0,0)$ en

el conjunto $V = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2} \}$. Además, g es involutivo de manera trivial en todo $\mathbb{E}^2$.

En lo que respecta a las condiciones (2.9), éstas se traducen en resolver la ecuación diferencial parcial :

$$L_g T_1(x_1, x_2) = dT_1(x_1, x_2) g(x_1, x_2) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \cdot 1 = 0$$

para la que podemos contar con la solución : $T_1(x_1) = x_1$.

Determinemos T_2 y T_3 por diferenciación de Lie :

$$T_2(x_1, x_2) = L_f T_1(x_1, x_2) = dT_1(x_1, x_2) f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sin x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sin x_2$$

y

$$\begin{aligned} T_3(x_1, x_2, u) &= L_{f+gu} T_2 = dT_2(x_1, x_2) (f+gu)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sin x_2 \\ u \end{pmatrix} \\ &= (\cos x_2) u. \end{aligned}$$

Verifiquemos a continuación, que esta τ -transformación es de índole global en V :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{ds} \\ \frac{dx_2}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con condiciones iniciales } x_1(0) = x_2(0) = 0$$

el cual tiene por solución $x_1(s) = -s$, $x_2(s) = 0$, "componiendo" esta solución con la del sistema :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt_1} \\ \frac{dx_2}{dt_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con condición inicial

$$x_1(s, 0) = x_1(s) = -s$$

$$x_2(s, 0) = x_2(s) = 0,$$

obtenemos ,

$$x_1(s, t_1) = -s \quad y \quad x_2(s, t_1) = t_1.$$

Así, la matriz no-característica, está dada por :

$$\Gamma(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, las condiciones de la razón se satisfacen con $\epsilon = 1$:

$$|\Delta_1| = |-1| \geq 1 > 0 \quad y \quad \left| \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right| = \frac{|-1|}{|-1|} \geq 1 > 0 \quad . \quad \text{Para toda} \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 .$$

Por lo tanto , la transformación $T(x_1, x_2, u)$ dada por $T(x_1, x_2, u) = (x_1, \text{sen} x_2, (\cos x_2)u)$ es 1-1 en el conjunto $V \times \mathbb{E}^1$ y $(T_1(x_1), T_2(x_2)) = (x_1, \text{sen} x_2)$ es un difeomorfismo global en V , debido al criterio de la razón. ■

§ 2.3. ESTIMACION DEL CONJUNTO ALCANZABLE DE SISTEMAS LINEALMENTE EQUIVALENTES.

El aspecto remarcable de los sistemas en τ_0 , "linealizables", con respecto a la estimación del conjunto alcanzable, radica en la propiedad de que la multifunción $G(x)$ (definida en la § 2.1) se transforma en otra multifunción $\hat{G}(y)$, la cual, para un abierto V conteniendo al 0 dado, carece de los inconvenientes de que $\bigcap_{x \in V} G(x)$ es vacío ó $\bigcup_{x \in V} G(x)$ es no acotado. Pues, esta nueva multifunción $\hat{G}(y)$ (definida en el espacio de estados $y = T(x)$), es tal que su rango se halla contenido en $\mathbb{E}^1$, y como la τ -transformación T tiene la propiedad de que $T(0) = 0$, permite así, que para una vecindad $W = T(V)$ del 0 en $\mathbb{E}^n$ (espacio de estados y), siempre $\bigcap_{y \in W} \hat{G}(y) \neq \emptyset$ y $\bigcup_{y \in W} \hat{G}(y)$ es acotado.

En efecto, la τ -transformación T de un sistema linealizable, posee la característica de, por su construcción, separar el cambio de coordenadas en el espacio de estados del cambio en el control, i.e., consiste de un cambio de coordenadas, por un lado, y una retroalimentación, por el otro: $(T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x), T_{n+1}(x, u))$. De manera que la multifunción $\hat{G}(y)$ adquiere la forma :

$$\hat{G}(y) = \{z \in \mathbb{E}^n \mid z_1 = z_2 = \dots = z_{n-1} = 0 \quad y \quad z_n = T_{n+1}(x, u), \\ u(t) \in U(t)\} \subset \mathbb{E}^1.$$

Como corolario de la teoría, podemos contar con el resultado siguiente, de carácter local.

Proposición 3.1.- Si un sistema no lineal es semiglobalmente linealizabile en un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{E}^n$ que contiene al 0, entonces existen multifunciones compactas $V_-(t)$ y $V_+(t)$ de imágenes (conjuntos compactos) con interior no vacío, las cuales estiman localmente (i.e., hasta un $t = T^* - \text{máx}$) al conjunto alcanzable $X(t)$ y son iguales a $T^{-1}(E_-(t))$ y $T^{-1}(E_+(t))$, respectivamente.

Demostración.- Por hipótesis, tenemos que:

1) La retroalimentación $v = T_{n+1}(x, u) = (L_f T_n)(x) - (L_g T_n)(x) \cdot u$ está en $C^\infty(V \times I)$, con $I \subset \mathbb{E}^1$ y $v(0,0) = 0$, y como,

2) $\frac{\partial v(x, u)}{\partial u} \Big|_{V \times I} = L_g T_n \Big|_{V \times I} \neq 0$, entonces podemos despejar u , y

obtenemos ;

$$u = u(x, v) = \frac{v - L_f T_n}{L_g T_n},$$

la cual es una función de clase C^∞ , porque todas las funciones involucradas lo son.

Así, en particular, $u = u(x, v)$ es continua en $(0,0)$; por lo tanto, para cualquier $I_0 \subset I$, con $0 \in I_0$, existe U_0 , vecindad del $(0,0)$ tal que si $(x, v) \in U_0$, entonces $u \in I_0$.

En otras palabras dada $K_0 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|(x, v)\| < \delta$, entonces $|u(x, v)| < K_0$.

Fijemos ahora una U_0 , y consideremos un compacto V_0 tal que $V_0 \subset U_0$, cuyo interior sea una vecindad de $(0,0)$, y denotemos con D_0 su proyección en el espacio de estados X , y con C_0 su proyección en el de control.

Ahora bien, bajo la τ -transformación T , $T(D_0)$ (respectivamente $T(C_0)$) es un compacto con $0 \in T(\text{int } V_0)$ ($0 \in T(\text{int } C_0)$) en el espacio de estados $y = T(x)$ (de control).

Entonces, el sistema no lineal una vez transformado se puede considerar como un sistema lineal en la forma canónica de Brunovsky dentro de $T(D_0)$, con el control v en el compacto $T(C_0)$. Y así, existen unos conjuntos compactos y convexos $G_{\pm}$ en $\mathbb{E}^1$, tales que,

$$G_- \subset \bigcap_{y \in T(D_0)} G(y) \subset T(C_0) \subset \bigcup_{y \in T(D_0)} G(y) \subset G_+$$

Por consiguiente, admite las estimaciones elipsoidales proporcionadas por la teoría de la sección § 1.3, $E_-(t)$ y $E_+(t)$, que acotan al conjunto alcanzable del sistema (en coordenadas y) $Y(t)$, hasta un tiempo $t = T^*$ para el cual los elipsoides todavía permanecen en $T(D_0)$. Así, $E_-(t) \subset Y(t) \subset E_+(t) \subset T(D_0)$.

De donde como la τ -transformación T es un difeomorfismo, existe su inversa, $T^{-1}: T(D_0) \longrightarrow D_0$ tal que $T^{-1}(E_-(t)) \subset T^{-1}(Y(t)) \subset T^{-1}(E_+(t)) \subset D_0 \subset V$, y por definición de la τ -transformación, $T^{-1}(Y(t)) = X(t)$. ■

Ejemplo. - consideremos el sistema no lineal en $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad |u| \leq 2 \quad \text{y} \quad M = \{(0,0)\} ,$$

con $V = \{ (x_1, x_2) / -\pi/2 < x_2 < \pi/2 \}$, un conjunto abierto conteniendo al origen en $\mathbb{E}^2$.

Anteriormente (en la sección § 2.2) verificamos que existe una transformación global en el interior de $V \times [-2,2]$ en su imagen $T = (T_1, T_2, T_3)$ definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= T_1(x_1) = x_1 \\ y_2 &= T_2(x_1, x_2) = \sin x_2 \\ v &:= T_3(x_1, x_2, u) = (\cos x_2)u \end{aligned}$$

Y así, el sistema queda, bajo la τ -transformación, en la forma canónica de Brunovsky,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= v \quad (= (\cos x_2)u) \end{aligned}$$

Aquí, como $|u| = |v / \cos x_2| \leq 2$, entonces, los candidatos para v vienen dados por la restricción $|v| \leq 2 |\cos x_2|$. De donde, eligiendo, e.g. , $D_0 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 / -\pi/4 < x_2 < \pi/4 \}$, tendremos $v \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; pues, en efecto, como

$$G(x) = \{ z \in \mathbb{E}^1 / z = \cos x_2 u , \quad |u| \leq 2 \}$$

entonces, en D_0 , $\bigcap_{x \in D_0} G(x) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] = G_-$, o $|v_-| \leq \sqrt{2}$.

Análogamente, $\bigcup_{x \in D_0} G(x) = \bigcup_{x \in V} G(x) = [-2, 2] = G_+$, por lo que

$v_+ \in [-2, 2]$, $|v_+| \leq 2$. Hagamos $r_1 := \sqrt{2}$ y $r_2 := 2$.

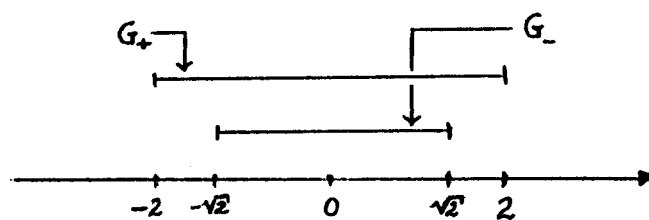


Figura 3.1

Por otra parte, de la sección §1.3, los elipsoides que acotan al conjunto alcanzable de un sistema lineal en forma canónica de Brunovsky, están dados por :

$$E_-(t, Q) = \{y \in \mathbb{E}^2 / 3y_1^2 - 2ty_1y_2 + t^2/2 y_2^2 \leq r_1^2 t^4 / 18\}$$

$$E_+(t, Q) = \{y \in \mathbb{E}^2 / 15/8 y_1^2 - 5/2 t y_1y_2 + t^2 y_2^2 \leq 2/9 r_2^2 t^4\}$$

Y así, bajo la τ -transformación, tenemos :

$$T^{-1}(E_-(t, Q)) = \{x \in \mathbb{E}^2 / 3x_1^2 - 2tx_1 \sin x_2 + t^2/2 \sin^2 x_2 \leq 2 t^4 / 18\}$$

$$T^{-1}(E_+(t, Q)) = \{x \in \mathbb{E}^2 / 15/8 x_1^2 - 5/2 t x_1 \sin x_2 + t^2 \sin^2 x_2 \leq 8/9 t^4\}$$

Por lo tanto, podemos contar con la estimación maximal iguiente del conjunto alcanzable restringida al dominio D_0 , expresada en la figura 3.2, en donde, B es el conjunto alcanzable y A y C son las estimaciones interna y externa, respectivamente, para el tiempo $t = T^*_{\text{máx.}} = 0.33$.

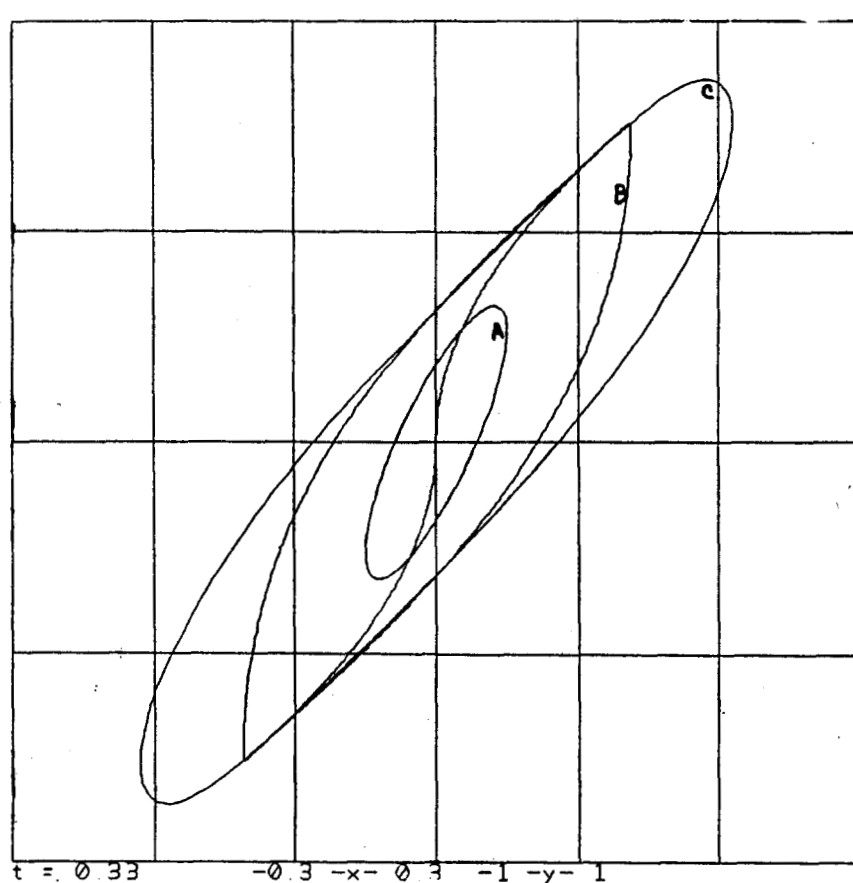


Figura 3.2

Aunque el resultado obtenido es pobre (local), el conocimiento de la interrelación entre los conjuntos D , de la forma :

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^n / -\pi/2 < -\bar{x}_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2 < \pi/2, x_1 \in \mathbb{E}^n\}$$

y las restricciones G_- sobre el control v_- , en concordancia con el dominio V de la τ -transformación T , permite realizar estimaciones internas del conjunto alcanzable para todo el tiempo, semejantes a las realizadas para el ejemplo lineal dado al final de la § 2.1. Las cuales proporcionamos a continuación, para diferentes interrelaciones entre los conjuntos D y G_- , figuras 3.3 a 3.6.

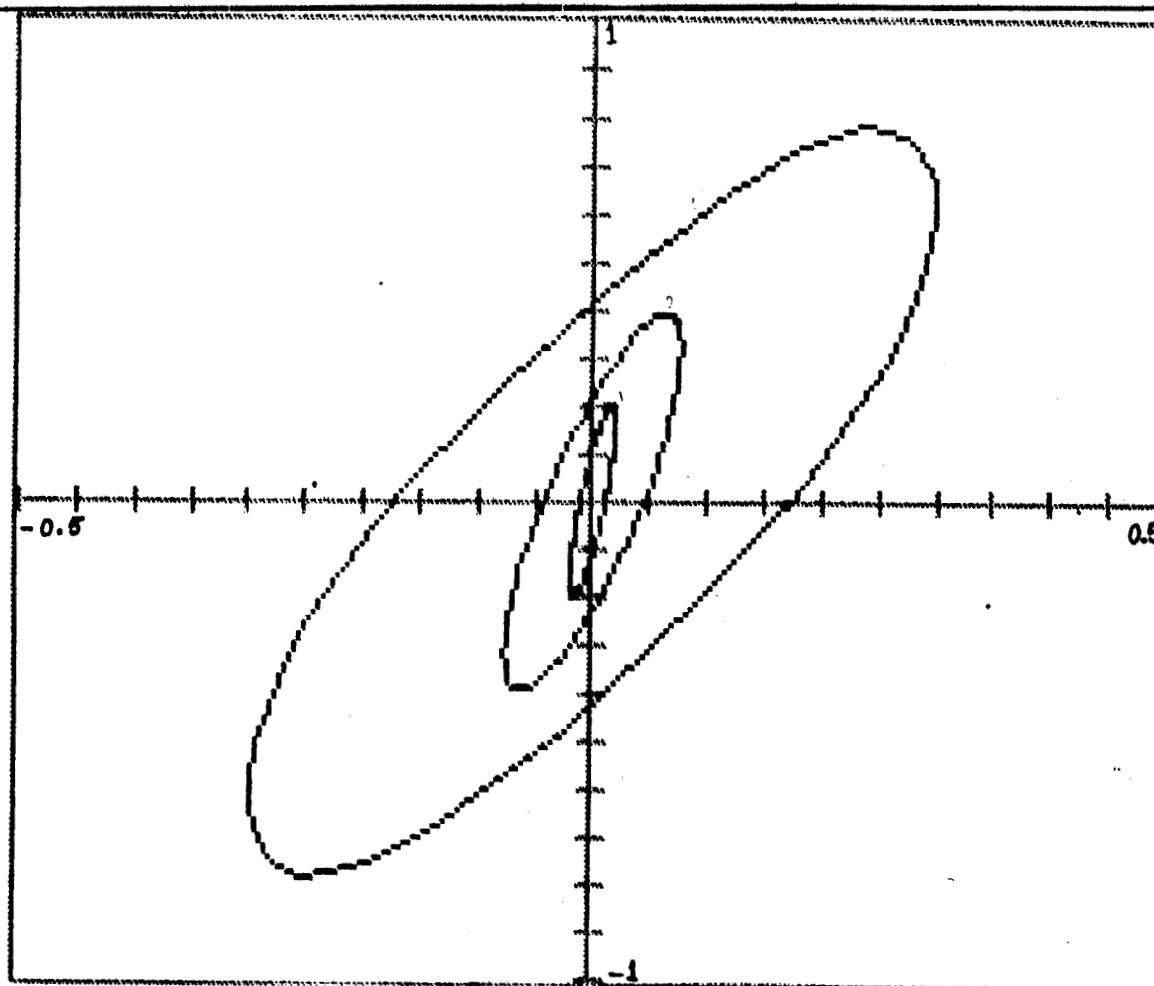


figura 3.3

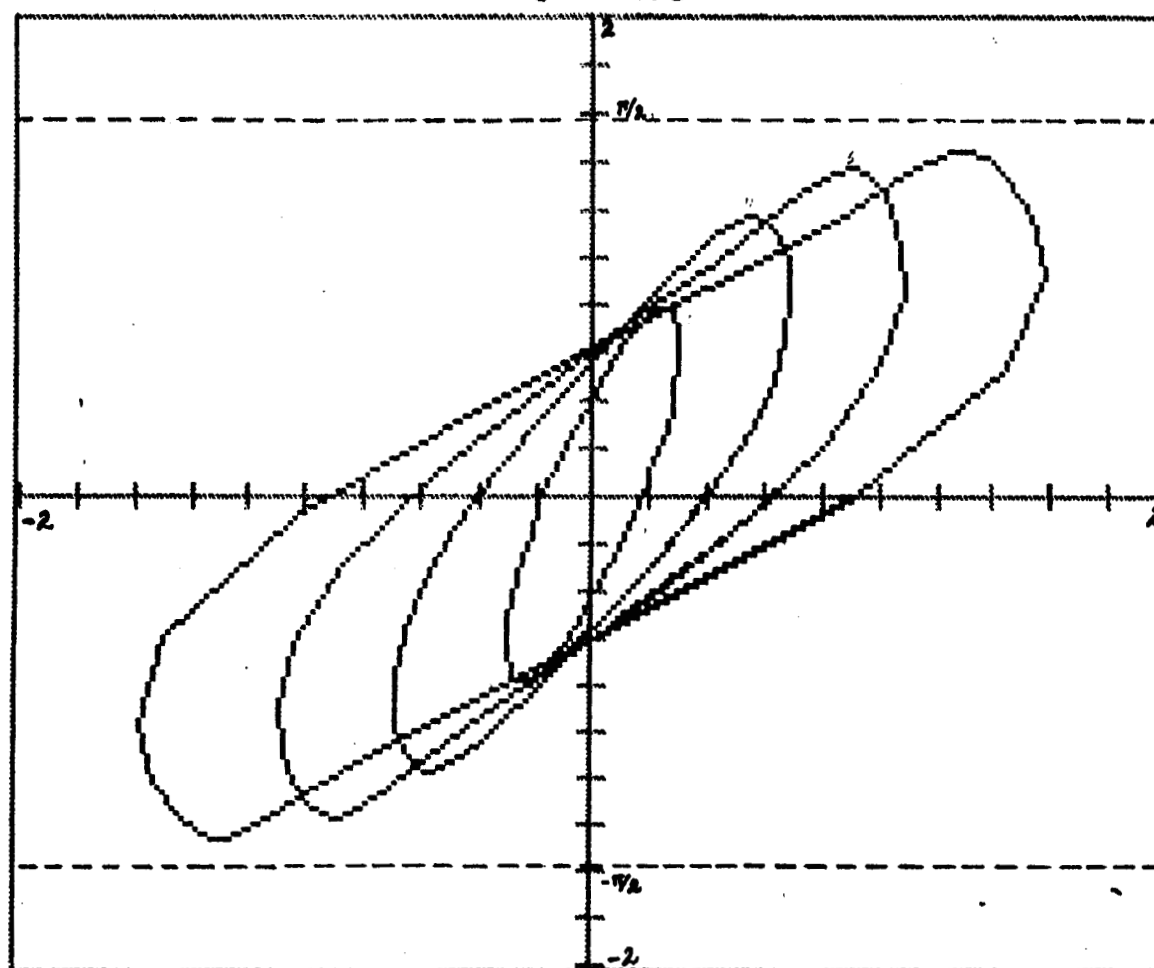


figura 3.4

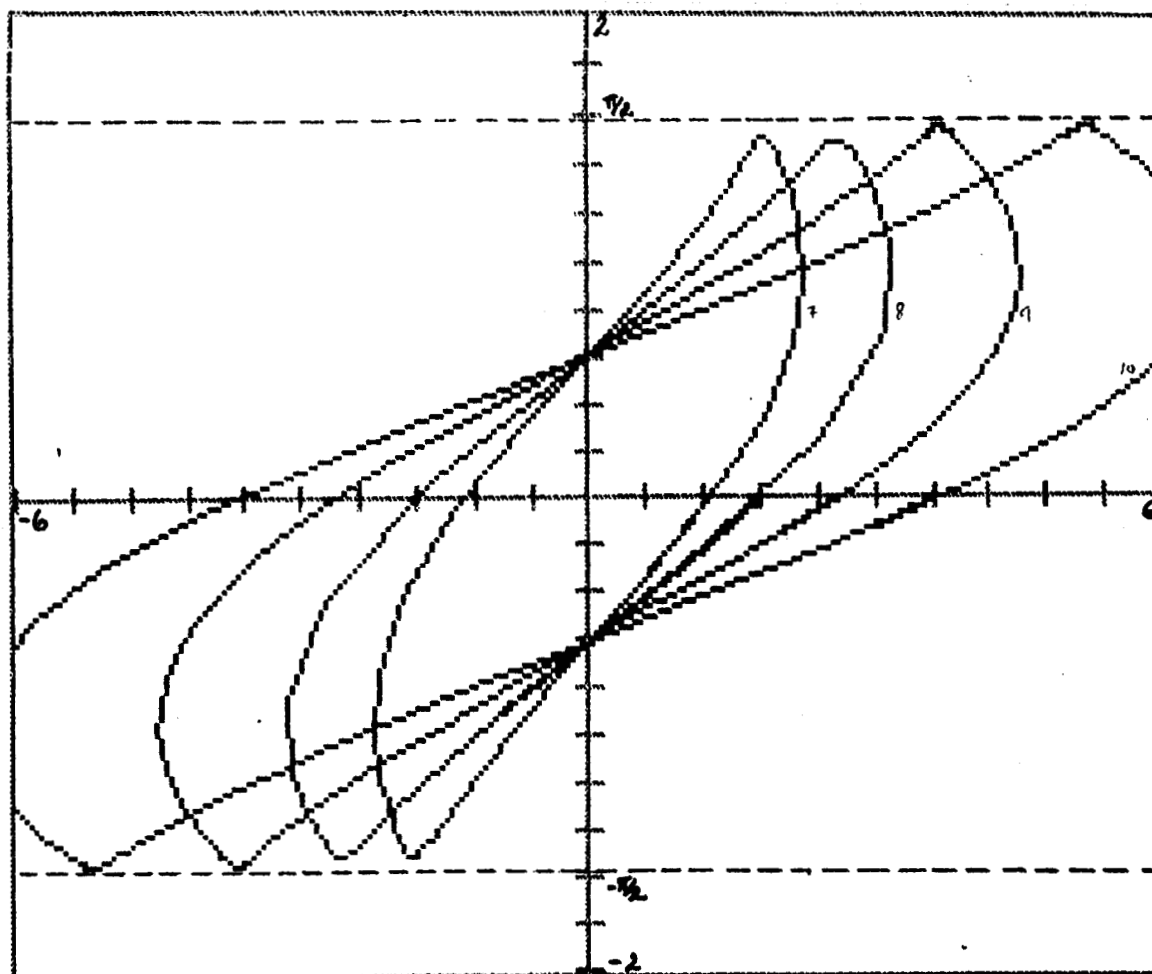


figura 3.5

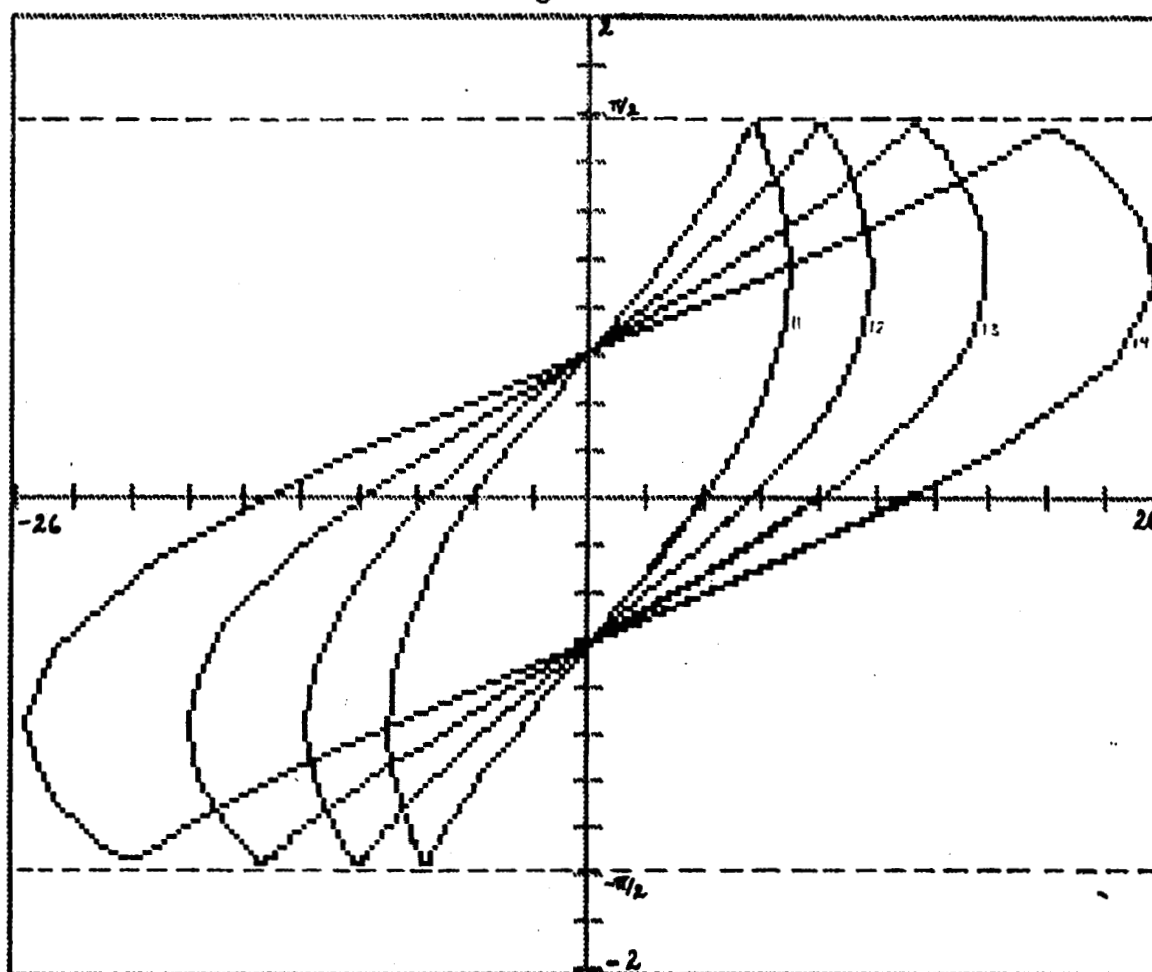


figura 3.6

Así, nuestro objetivo inmediato es determinar la unión de todas estas estimaciones inferiores, generadas al ir variando las cotas sobre el control v , G_- , en correspondencia con los conjuntos D apreciables en la figura siguiente a una misma escala.

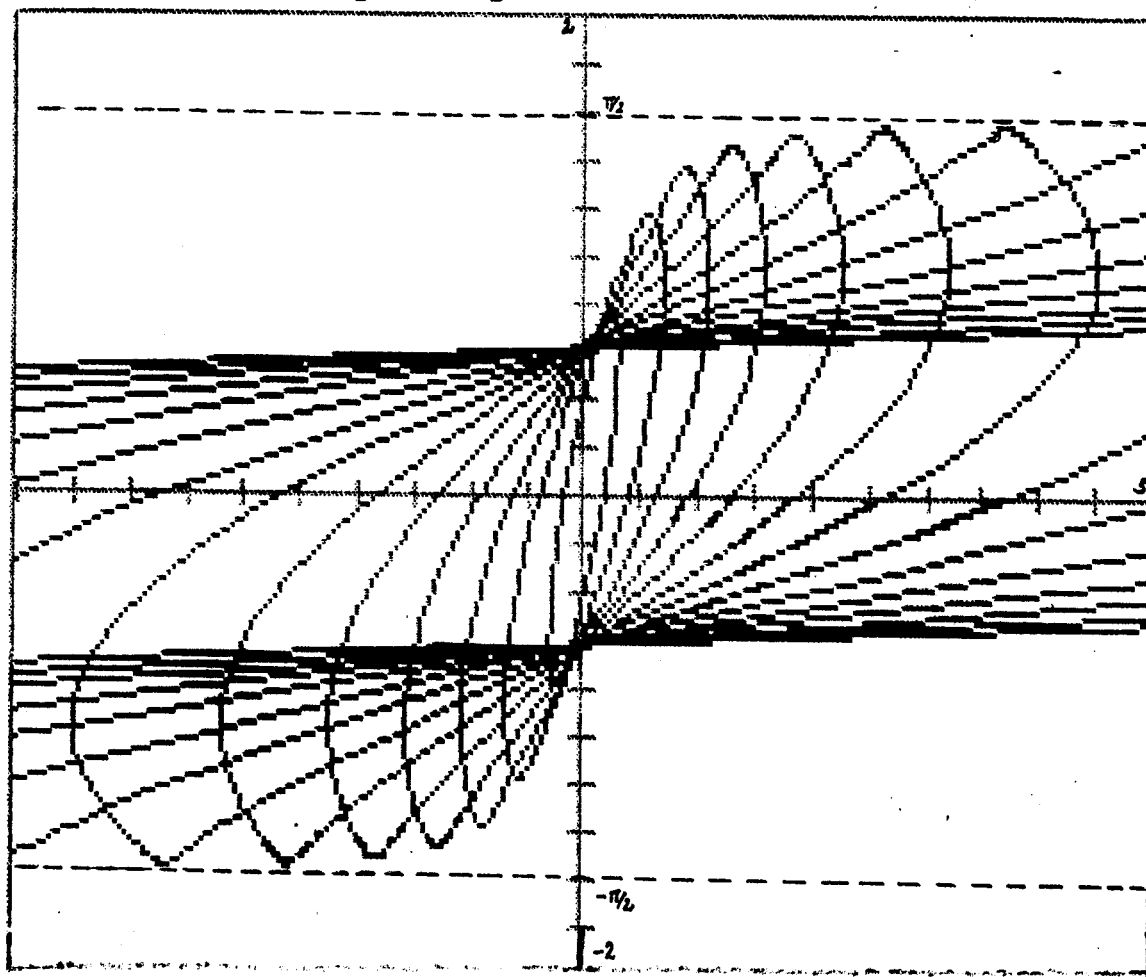


Figura 3.7

Para determinar la unión de todas estas estimaciones, de la expresión para $T^{-1}(E_-(t, Q))$, hallamos el lugar geométrico de todos los puntos de cada una de estas estimaciones donde x_2 alcanza sus valores máximo y mínimo (los que en la figura 3.7 semejan "cúspides", confirmando que la transformación T perderá la propiedad de ser un difeomorfismo al llegar a puntos en las rectas $x_2 = \pm \pi/2$).

En efecto, de $T^{-1}(E_-)$, tenemos, para cada estimación, que el tiempo t al que se alcanza un extremo $x_2 = \bar{x}_2$, respecto al conjunto $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^n / -\bar{x}_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2, x_1 \in \mathbb{E}^1\}$ está dado por :
 $t = 3\bar{x}_1 / \text{sen } \bar{x}_2$, luego, sustituyendo esto en la expresión de $T^{-1}(E_-)$, y con $r_1 = 2\cos \bar{x}_2$, obtenemos :

$$\begin{aligned} 3\bar{x}_1^2 - 2(3\bar{x}_1 / \text{sen } \bar{x}_2) \bar{x}_1 \text{sen } \bar{x}_2 + \frac{1}{2} (3\bar{x}_1 / \text{sen } \bar{x}_2)^2 \text{sen}^2 \bar{x}_2 = \\ = 1/18 (2\cos \bar{x}_2)^2 (3\bar{x}_1 / \text{sen } \bar{x}_2)^4 \end{aligned}$$

De donde,

$$1/12 = \bar{x}_1^2 \cos^2 \bar{x}_2 / \text{sen}^4 \bar{x}_2, \text{ o sea : } \bar{x}_1 = \pm \frac{\text{sen}^2 \bar{x}_2}{2\sqrt{3} \cos \bar{x}_2}$$

Ahora bien, de las gráficas también se observa que la estimación interna del conjunto alcanzable llevada a los límites :

$$r_1 \longrightarrow 0, \quad x_2 \longrightarrow \pi/2 \quad \text{y} \quad t \longrightarrow \infty,$$

se convierte en una banda horizontal. Para determinarla, hallemos su corte con el eje x_2 ($x_1 = 0$); así, de la expresión para $T^{-1}(E_-)$, tenemos :

$$t^2/2 \text{sen}^2 \bar{x}_2 = r_1^2 t^4 / 18, \text{ o bien, } \text{sen}^2 \bar{x}_2 = r_1^2 t^2 / 9$$

Sustituyendo los valores de $r_1 = 2 \cos \bar{x}_2$, de $t = 3\bar{x}_1 / \text{sen } \bar{x}_2$, y de $\bar{x}_1^2 = \text{sen}^4 \bar{x}_2 / (12 \cos^2 \bar{x}_2)$, obtenemos :

$$\begin{aligned}\sin^2 \bar{x}_2 &= 1/9 (2\cos \bar{x}_2)^2 (3\bar{x}_1 / \sin \bar{x}_2)^2 = \frac{4}{9} \cos^2 \bar{x}_2 9\bar{x}_1^2 / \sin^2 \bar{x}_2 = \\ &= 4 \cos^2 \bar{x}_2 \sin^4 \bar{x}_2 / (12 \cos^2 \bar{x}_2 \sin^2 \bar{x}_2) = 1/3 \sin^2 \bar{x}_2\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_2 = \pm \sin^{-1} (1/3 \sin^2 \bar{x}_2)^{1/2} \xrightarrow{x_2 \rightarrow \pi/2} \pm \sin^{-1} (1/\sqrt{3}) \cong \pm 0.6154797$$

Por consiguiente, la región en cuestión viene dada mediante la figura siguiente :

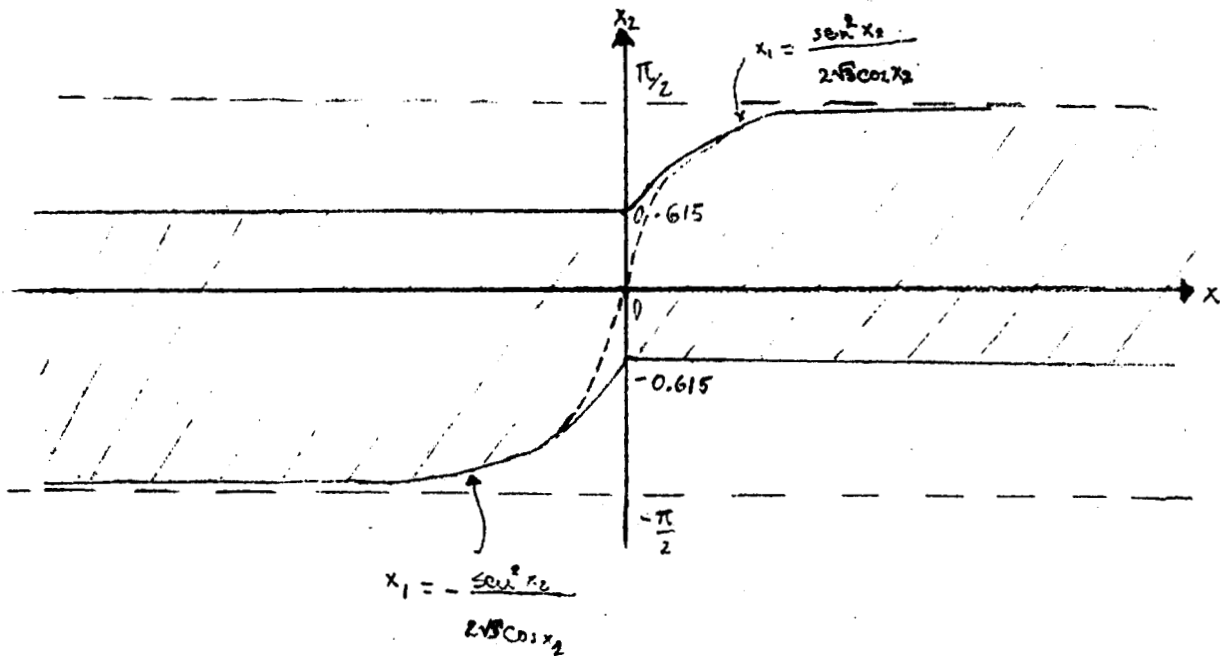


figura 3.8

Región determinada por la unión de todas las estimaciones internas.

Consideremos ahora el sistema no lineal :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \text{ con } |u| \leq k, \quad 0 < k < \infty.$$

Proposición 3.2.- Supongamos que este sistema es globalmente transformable a un sistema lineal, de forma tal que para :

$$T_{n+1}(x,u) = L_f T_n(x) + L_g T_n(x) u = v(x,u),$$

tengamos $|L_f T_n(x)| \leq k_1$ y $0 < \varepsilon \leq |L_g T_n(x)| \leq k_2$, para toda $x \in \mathbb{E}^n$ y constantes k_1 , k_2 y ε . Entonces, es posible diseñar la restricción sobre u , dada por k , de manera que la retroalimentación en el control $v = v(x,u)$ se halle en un compacto. Esto permite así construir cotas sobre el conjunto alcanzable del sistema no lineal vía las del sistema lineal en forma canónica de Brunovsky mediante la τ -transformación T , para toda x en $\mathbb{E}^n$ y $t \geq t_0$.

Demostración.- De la proposición de carácter local,

$$|u| = \left| \frac{v - L_f T_n}{L_g T_n} \right| = \frac{\max |v - L_f T_n|}{\min |L_g T_n|} \leq \frac{|v| + k_1}{\varepsilon} \leq k$$

lo cual es equivalente a $|v| \leq \varepsilon k - k_1$, para toda $x \in \mathbb{E}^n$.

Por lo tanto, eligiendo k de manera tal que $\varepsilon k - k_1 = k_3 > 0$, tomamos :

$$v_- \in G_- = [-k_3, k_3] = \bigcap_{x \in \mathbb{E}^n} G(x)$$

y, por consiguiente, el sistema lineal en forma canónica de Brunovsky con $v_- \in G_-$ satisface que su conjunto subalcanzable lo es también del sistema no lineal bajo la transformación.

De manera similar, tenemos $G_+ = \bigcup_{x \in \mathbb{E}^n} G(x)$, que es compacto en $\mathbb{E}^1$, y tomando $v_+ \in G_+$, el resultado se sigue. ■

Ejemplo :

Consideremos el sistema siguiente en $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \ln(x_1^2 + 1) \\ -2x_1 x_2 / (x_1^2 + 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad |u| \leq 3.$$

Para este sistema tenemos que los campos vectoriales g y $[f, g]$ cuando se evalúan en 0 son base de $T_0 \mathbb{E}^2$. En efecto,

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} & 1 \\ \frac{-2x_1(1 - x_1^2)}{(x_1^2 + 1)} & \frac{-2x_1}{x_1^2 + 1} \end{bmatrix} \quad Dg(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{de donde, } [f, g] = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} \end{bmatrix},$$

Y así, g y $[f,g]$ son linealmente independientes en todo punto

$$\text{de } \mathbb{E}^2, \dim \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2x_1}{x_1^2+1} \end{bmatrix} \right\} = 2, \quad \text{para todo } (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2.$$

Por otra parte, g es trivialmente involutivo.

Así, tenemos que existe una τ -transformación, la cual determinamos resolviendo la E.D.P. siguiente :

$$L_g(T_1(x)) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} 0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} 1 = 0,$$

por lo que $T_1(x)$ es función solo de x_1 , y así, $T_1(x_1) = x_1$, digamos.

De esta manera, hallemos las demás $T_i(x)$, mediante derivación de Lie :

$$\begin{aligned} T_2(x) &= L_f(T_1(x)) = dT_1(x) f(x) = (1, 0) f(x_1, x_2) \\ &= x_2 + \ln(x_1^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(x, u) &= L_{f+gu}(T_2(x)) = dT_2(x)(f(x)+g(x)u) = \\ &= (2x_1/(x_1^2+1), 1)(f(x)+g(x)u) = \\ &= 2x_1 \ln(x_1^2+1)/(x_1^2+1) + u \end{aligned}$$

Pero aquí, resulta que se satisfacen las hipótesis de la proposición anterior, pues, en efecto,

$L_f(T_2(x)) = 2x_1 \ln(x_1^2 + 1)/(x_1^2 + 1)$, está acotada por las rectas $y = \pm 1.381832$.

La gráfica de la función $h(x_1) = 2x_1 \ln(x_1^2 + 1)/(x_1^2 + 1)$ es :

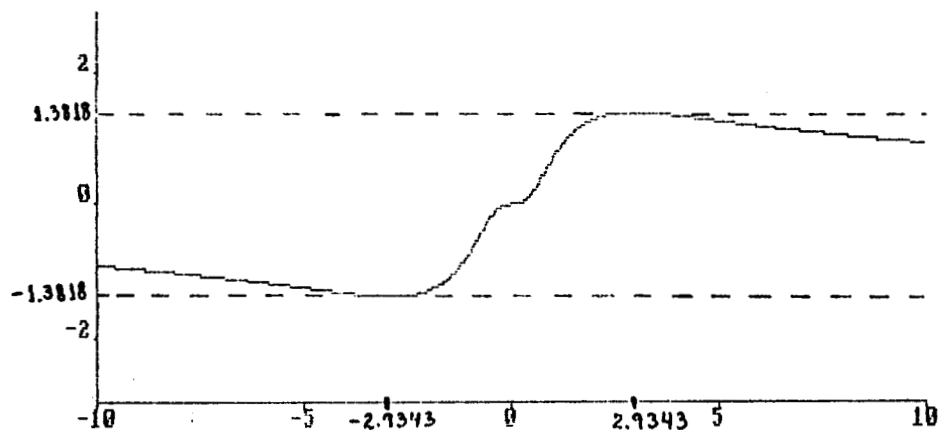


figura 3.9

Y, por otra parte, la función $L_g(T_2(x))$ satisface las condiciones de acotación trivialmente, por ser constante.

Por otra parte,

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{ds} \\ \frac{dx_2}{ds} \end{bmatrix} = [f, g] = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} \end{bmatrix}, \text{ con condiciones iniciales}$$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$, se obtiene que $x_1(s) = -s$ y

$$\int dx_2 = \int \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} ds = \int -\frac{2s}{s^2 + 1} ds, \text{ o sea } x_2(s) = -\ln(s^2 + 1) \text{ y}$$

componiendo con las soluciones de:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt_1} \\ \frac{dx_2}{dt_1} \end{pmatrix} = g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con condiciones iniciales, } \begin{aligned} x_1(s, 0) &= x_1(s) \\ x_2(s, 0) &= x_2(s) \end{aligned},$$

llegamos a que $x_1(s, t_1) = -s$ y $x_2(s, t_1) = -\ln(s^2 + 1) + t$.

De aquí, la matriz no-característica, Γ , es:

$$\Gamma(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2s}{s^2+1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Por lo que } |\Delta_1| = |-1| \geq 1 > 0 \text{ y } \left| \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right| = \left| \frac{-1}{-1} \right| \geq 1 > 0,$$

para toda $(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2$.

Por lo tanto, el difeomorfismo $\tilde{T}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ es global.

Así, el sistema original :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(x_1^2 + 1) + x_2 \\ -\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + 1} \end{pmatrix}}_{f(x_1, x_2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(x_1, x_2)} u$$

lo podemos expresar como :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(x_1^2 + 1) \\ -\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + 1} \end{pmatrix}}_{\tilde{g}(x_1, x_2, u)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

En este caso tenemos que $\tilde{G}(x_1, x_2)$ es tal que $\bigcup_{x \in E^2} \tilde{G}(x)$ no es acotada y $\bigcap_{x \in E^2} \tilde{G}(x) = \emptyset$. Por lo que no se puede aplicar directamente lo planteado en la sección § 2.1.

Sin embargo, como el sistema es linealizable de manera global, tenemos:

$$T_1(x_1, x_2) = x_1$$

$$T_2(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + 1) + x_2$$

$$T_3(x_1, x_2, u) = \frac{2x_1 \ln(x_1^2 + 1)}{x_1^2 + 1} + u =: v$$

de forma que $|u| = \left| v_- - \frac{2x_1 \ln(x_1^2 + 1)}{x_1^2 + 1} \right| \leq |v_-| + 1.3819 \leq 3$, si $|v| \leq 1.6181$.

Y, por otra parte, para v_+ , tenemos: $|v_+| \leq 4.3819$.

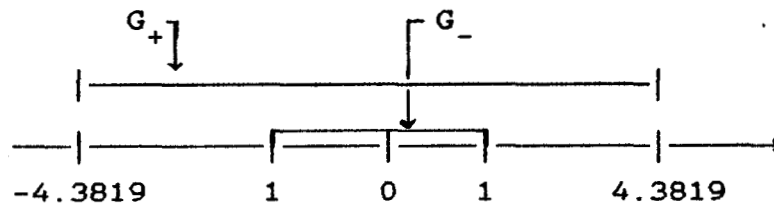


figura 3.10

Los elipsoides que acotan la evolución del sistema lineal en forma canónica de Brunovsky asociado, se ven transformados en:

$$T^{-1}(E_{-}(t,Q)) =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{E}^2 / 3x_1^2 - 2tx_1(\ln(x_1^2+1)+x_2) + \frac{t^2}{2} (\ln(x_1^2+1)+x_2)^2 \leq (1.6181)^2 \frac{t^4}{18} \right\}$$

$$\text{y } T^{-1}(E_{+}(t,Q)) =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{E}^2 / \frac{15}{8} x_1^2 - \frac{5}{2} tx_1(\ln(x_1^2+1)+x_2) + t^2 (\ln(x_1^2+1)x_2)^2 \leq \frac{2}{9} (4.3819)^2 t^4 \right\}$$

Así, podemos contar con las aproximaciones A y C siguientes del conjunto alcanzable del sistema para el tiempo $t = 0.43$ comparándolas con el conjunto alcanzable B obtenido por medio de controles extremales, figura 3.11.

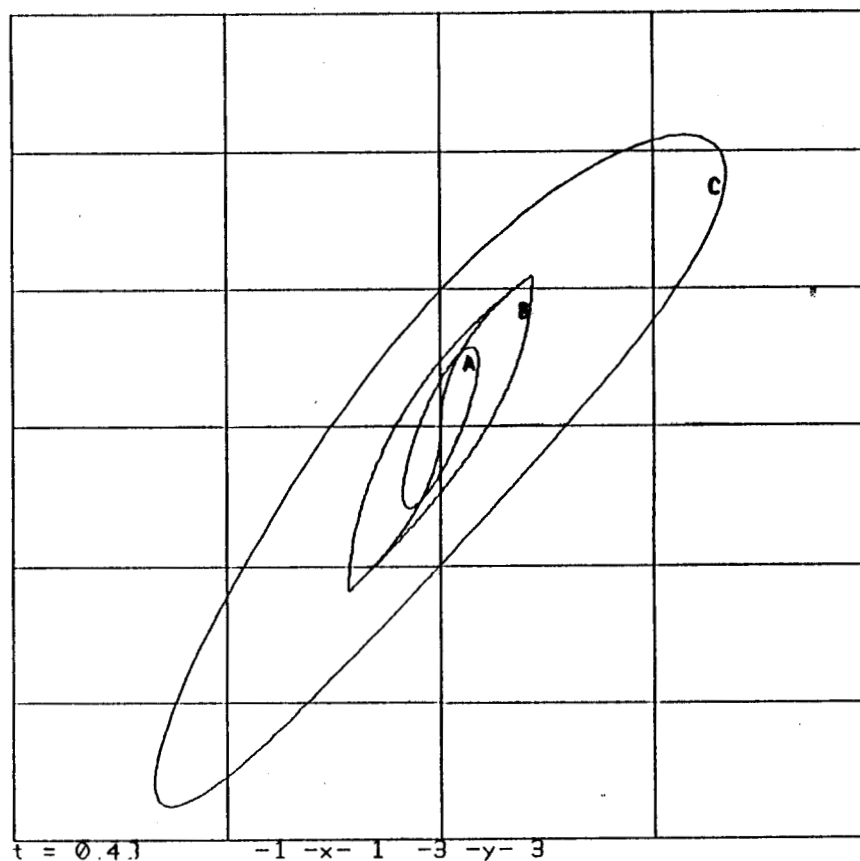


figura 3.11

Ejemplo : Aplicación a un reactor C.S.T.R. (Continuous Stirred Tank Reactor).

Un modelo para el reactor (C.S.T.R.) viene dado por el sistema de control no lineal, con una entrada $\bar{u}$ (Alvarez et al.[1]) :

$$(i) \quad \dot{x}_1 = 1 - x_1 \left(1 + e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \right)$$

$$\dot{x}_2 = 700 - 2x_2 + 200 x_1 e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} + \bar{u} \quad , \quad \text{con } |\bar{u}| \leq 50,$$

donde, x_1 : = concentración, x_2 : = temperatura y, donde, con fines de simplificar los cálculos, hemos introducido los valores de las constantes físicas.

Este sistema posee 3 puntos críticos para $\bar{u} = 0$: dos estables (0.963, 353.6) y (0.0885, 441.1), y uno inestable (.5,400).

Ahora bien, como el interés recae en "controlar" más que determinar la "alcanzabilidad", en lugar de (i) tomaremos el sistema con tiempo invertido:

$$\dot{x}_1 = x_1 \left(1 + e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \right) - 1 \quad \text{con } u = -\bar{u},$$

(ii)

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - 700 - 200 x_1 e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} + u$$

$$|u| \leq 50.$$

Por razones de interés práctico, nos abocamos a estudiar el conjunto controlable respecto al punto crítico inestable (0.5, 400).

Verificando las hipótesis para garantizar una linealización global de (ii) resultan, salvo cambios de signo, válidas e implicadas por lo desarrollado para (i) en [1] en el dominio $D = (0, 1) \times (0, \infty)$.

Así, la transformación viene dada por:

$$(Lg T_1)(x_1, x_2) = dT_1(x_1, x_2)(g(x_1, x_2)) = 0,$$

o sea, la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \cdot 0 = 0.$$

de donde, podemos tomar $T_1(x_1) = x_1 - 0.5$.

Por derivación de Lie, tenemos:

$$\begin{aligned} T_2(x_1, x_2) &= (L_{f_1} T_1)(x_1, x_2) = dT_1(x_1, x_2)(f(x_1, x_2)) \\ &= x_1 \left[1 + e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \right] - 1 \end{aligned}$$

y

$$T_3(x_1, x_2, u) = v(x_1, x_2, u) = (L_{f+ug} T_2)(x_1, x_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 + e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \\ x_1 e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \cdot \frac{10^4}{x_2} \end{pmatrix} (f + ug)(x_1, x_2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 + e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \\ x_1 e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \cdot \frac{10^4}{x_2} \end{pmatrix} \left[x_1 \left(1 + e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \right) - 1 \right] + \begin{pmatrix} 10^4 x_1 e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \\ x_2^2 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 2x_2 - 700 - 200 x_1 e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10^4 x_1 e^{\frac{25 - 10^4}{x_2}} \\ x_2^2 \end{pmatrix} u.
\end{aligned}$$

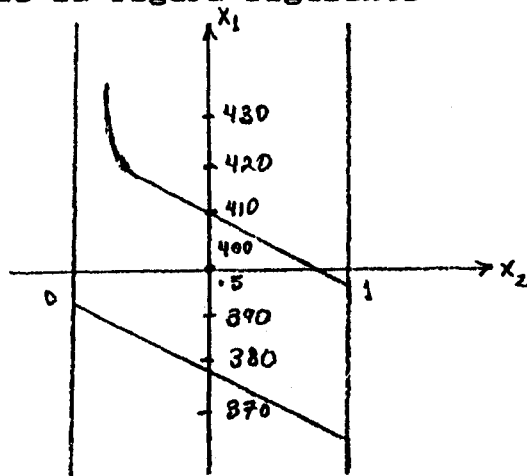
Las cuales son tales que, haciendo $y_1 = T_1(x_1)$ y $y_2 = T_2(x_1, x_2)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad &\dot{y}_1 = y_2 \\
&\dot{y}_2 = v
\end{aligned}$$

Ahora bien, nuestro objetivo es caracterizar una región V , donde el control v pueda tomar valores independientemente de los estados $(x_1, x_2) \in V$, sin que la cota sobre el control u sea rebasada (i.e., u sea admisible).

Desde una postura conservadora nos vemos interesados en restringir nuestro estudio a la estimación interna.

Por consideraciones físicas (o sea del significado de las variables de (1)), tenemos que la región V a estudiar va a estar contenida en la banda de la figura siguiente



Con el objeto de mejorar la estimación, proponemos lo siguiente. El procedimiento a seguir es construir las curvas de nivel de la función $v = v(x_1, x_2, u)$ para los valores constantes de u , $u = +50$ y $u = -50$, (la función v es creciente en u).

Hecho esto, seleccionamos parejas de sendas curvas de nivel correspondientes a $u = +50$ y $u = -50$, bajo el criterio de que, como conjuntos, están "cerca" una de la otra.

De esta manera, el conjunto C formado por la intersección de las regiones conformadas por una pareja en cuestión (i.e., si (S_1, S_2) es una pareja, y construimos B_1 y B_2 conjuntos tales que $\partial B_1 = S_1$ y $\partial B_2 = S_2$, entonces $C = B_1 \cap B_2$), es tal que, si $v = v^*$ corresponde a S_1 y $v = v_*$ corresponde a S_2 , entonces $v \in [v_*, v^*]$ libremente en C , con independencia de los estados, sin que por esto deje u de ser admisible, i.e., $|u| \leq 50$.

El paso siguiente es construir el Elipsoide $E(a(t), Q_-(t))$ en relación con $v \in [v_*, v^*]$. Para este efecto, como el intervalo $[v_*, v^*]$ no tiene por qué ser simétrico respecto al $0 \in \mathbb{E}^1$ ($v_* = -v^*$), e incluso puede no contener al 0, necesitamos hacer unas modificaciones al elipsoide hallado en el ejemplo 1) de la sección § 1.3, donde $v \in E(\bar{b}, rB)$ (cf. (3.1), pág. 22), con $\bar{b} = 0$.

Si $\bar{b} \neq 0$, el sistema en F.C.B., $\dot{y} = \hat{A}y + v$, puede reescribirse como, $\dot{y} = \hat{A}y + \bar{b} + \bar{v}$, donde $\bar{v} \in E(0, rB)$.

Así, la ecuación que describe el parámetro $a(t)$ es la única que se ve afectada, con lo que se tiene que resolver: $\dot{a} = \hat{A}a + \bar{b}$, con la condición inicial $a(0) = 0$.

Para nuestro caso ($x \in \mathbb{E}^2$), esto se traduce en:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b \end{pmatrix}, \text{ con condición inicial}$$

$$a(0,0) = (0,0).$$

de donde obtenemos la solución:

$$a_1(t) = \frac{b}{2} t^2, \quad a_2(t) = b t.$$

Aquí, b corresponde al centro del intervalo $[v_*, v^*]$, i.e., $b = \frac{v_* + v^*}{2}$; y así, con este cambio, $\bar{v} \in \left[-\frac{v^* - v_*}{2}, \frac{v^* - v_*}{2} \right]$ (es

simétrico con el origen), con lo que $E(a(t), Q_-(t))$ queda de la forma:

$$E(a(t), Q_-(t)) = b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 \\ t \end{pmatrix} + r Q_-^{1/2}(t) B^1(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

donde, $Q_-(t)$ es la matriz dada en el ejemplo 1) § 1.3,

$$r := \frac{v^* - v_*}{2} \geq 0 \text{ y } B^1(0) \text{ es la bola unitaria en } \mathbb{E}^2.$$

A continuación proporcionamos una sucesión de gráficas de $E(a(t), Q_-(t))$ bajo la transformación $T^{-1}(y_1, y_2)$ dada por

$$T^{-1}(y_1, y_2) = \left\{ y_1 + 0.5, 10^4 / (25 - \ln((y_2 + 1)/(y_1 - 1))) \right\} = (x_1, x_2),$$

donde, para permitir que las aproximaciones sean maximales (en volumen), dejamos transcurrir el tiempo t hasta que $T^{-1}(E(a(t), Q_-(t)))$ "toque" la frontera de C .

Observación. - Como para los casos considerados no presentaba ganancia mayor tomar $b \neq 0$, elegimos entonces tomar las ecuaciones de la manera llevada hasta ahora (con $b = 0$).

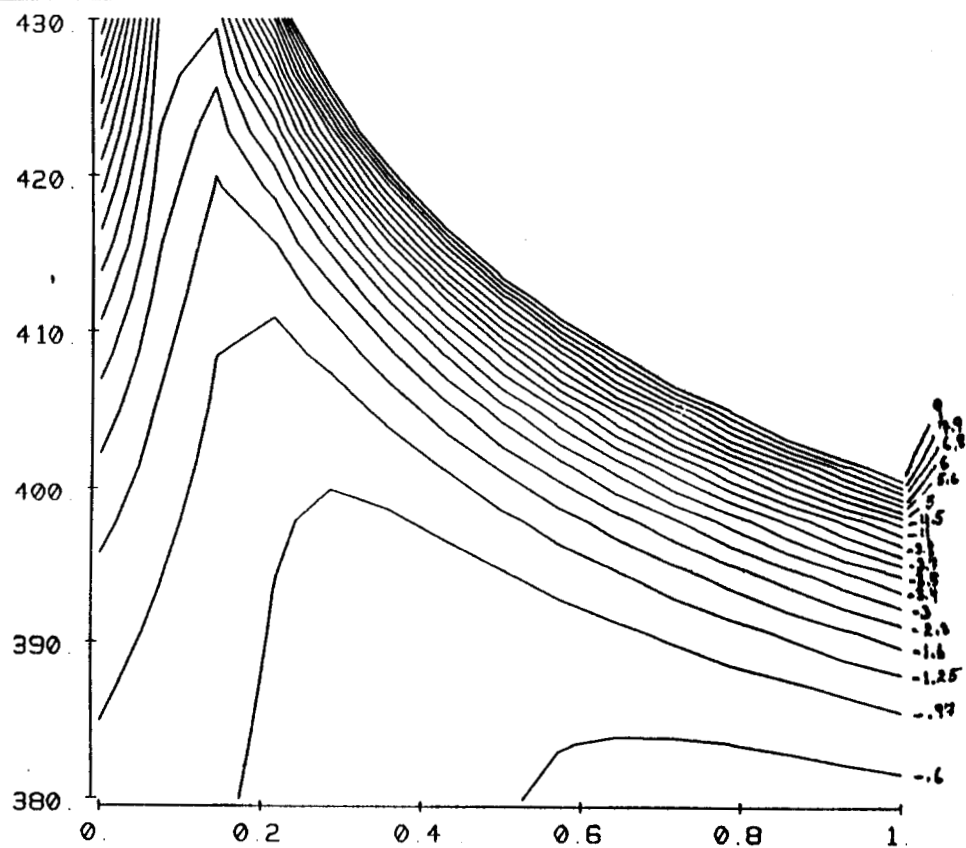


figura 3.12

curvas de nivel con $u = -50$.

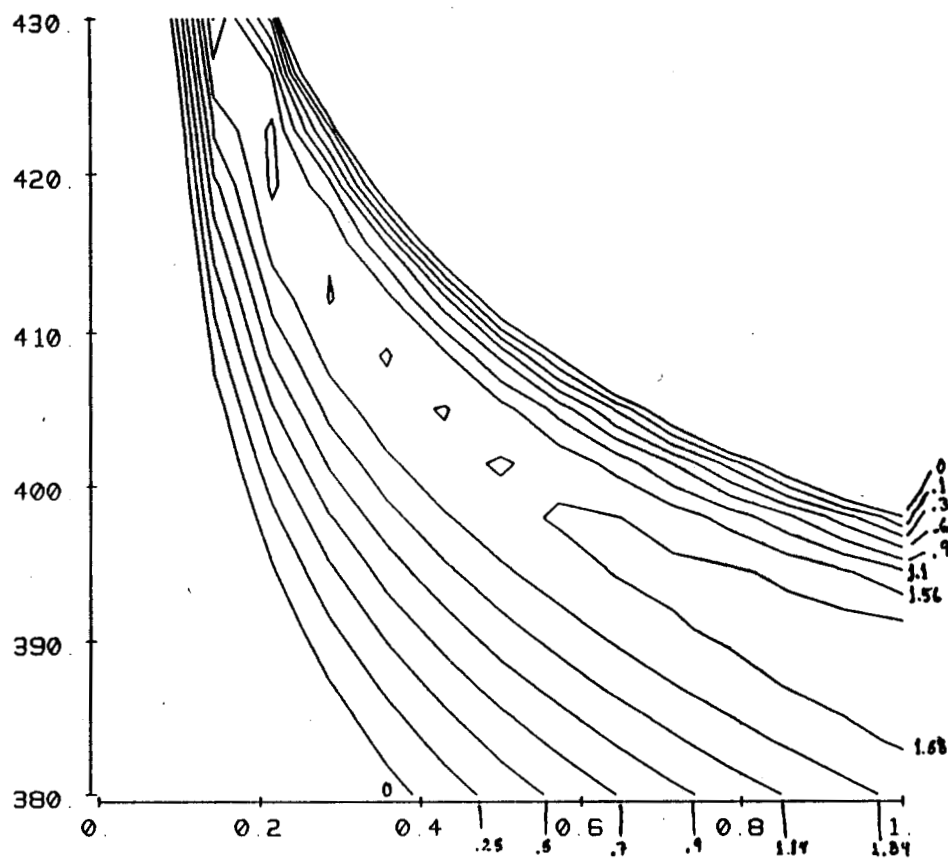


figura 3.13

Curvas de nivel con $u = 50$.

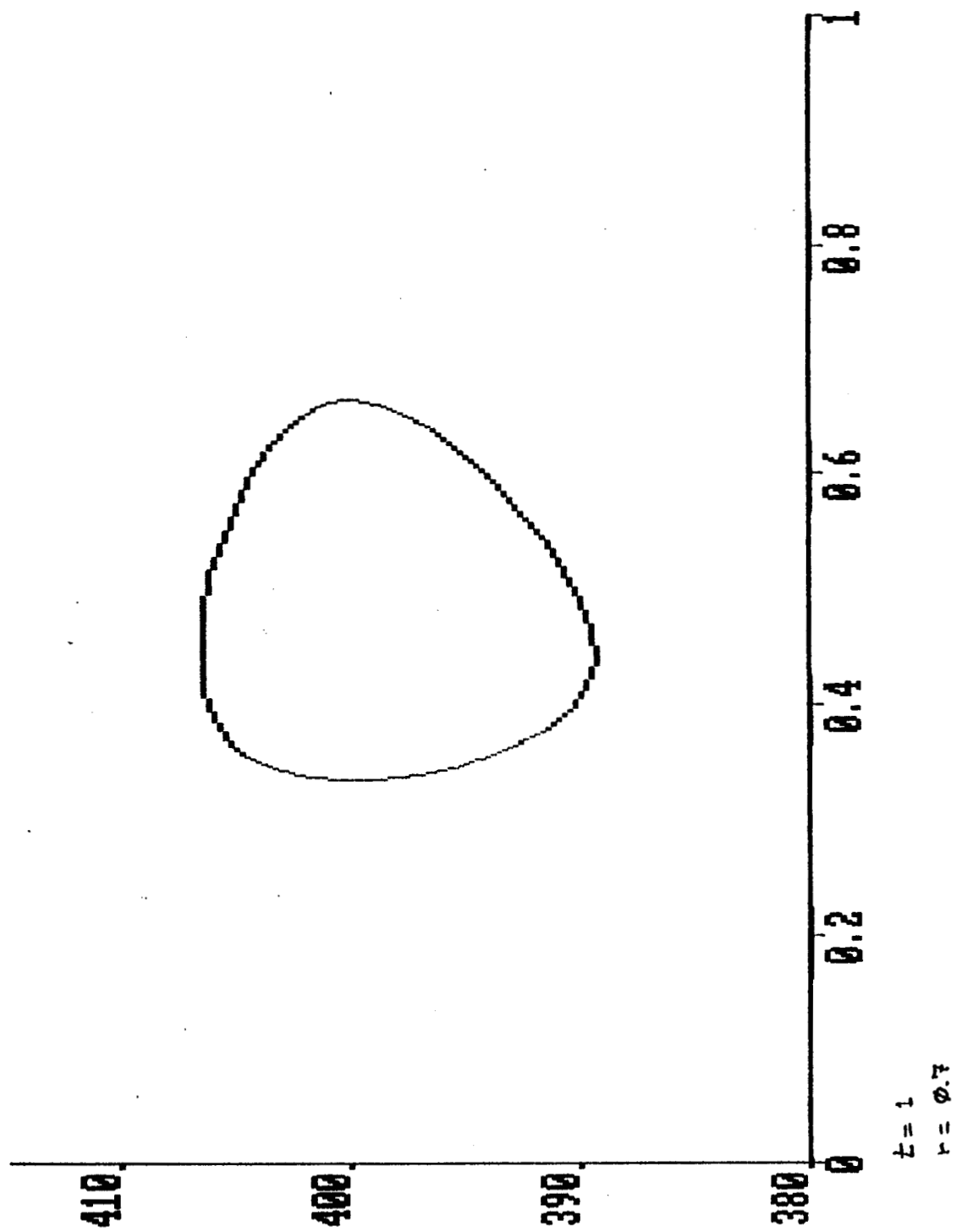


figura 3.14

Estimación interna maximal, correspondiente a $t = 1$.

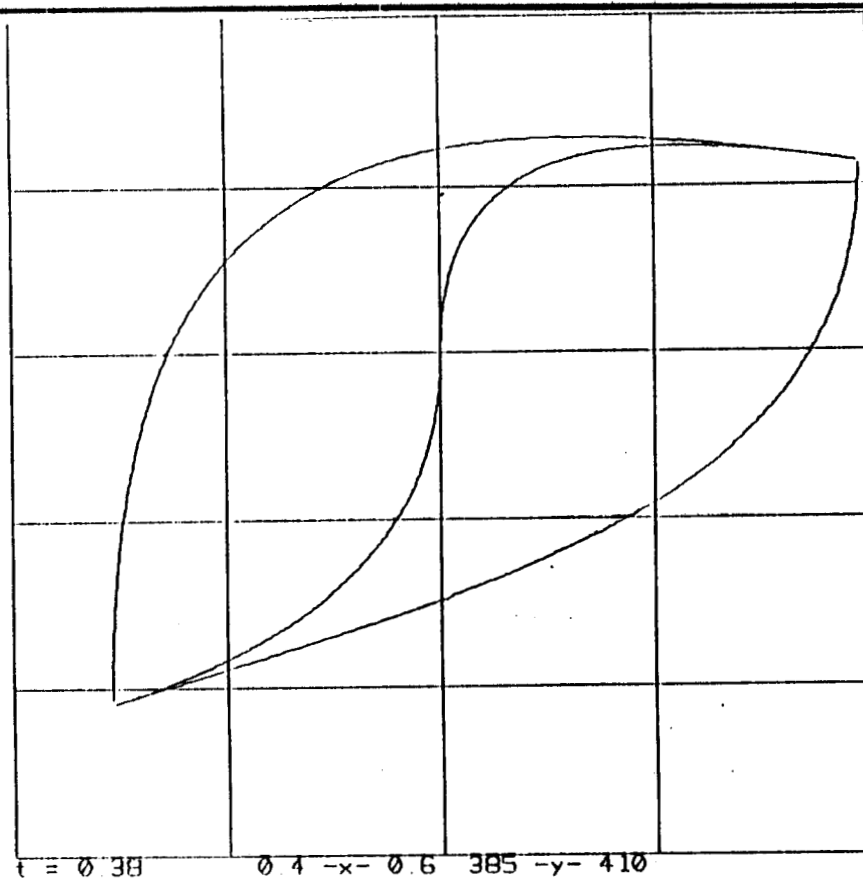


figura 3.15

Conjunto controlable para $t = 0.38$.

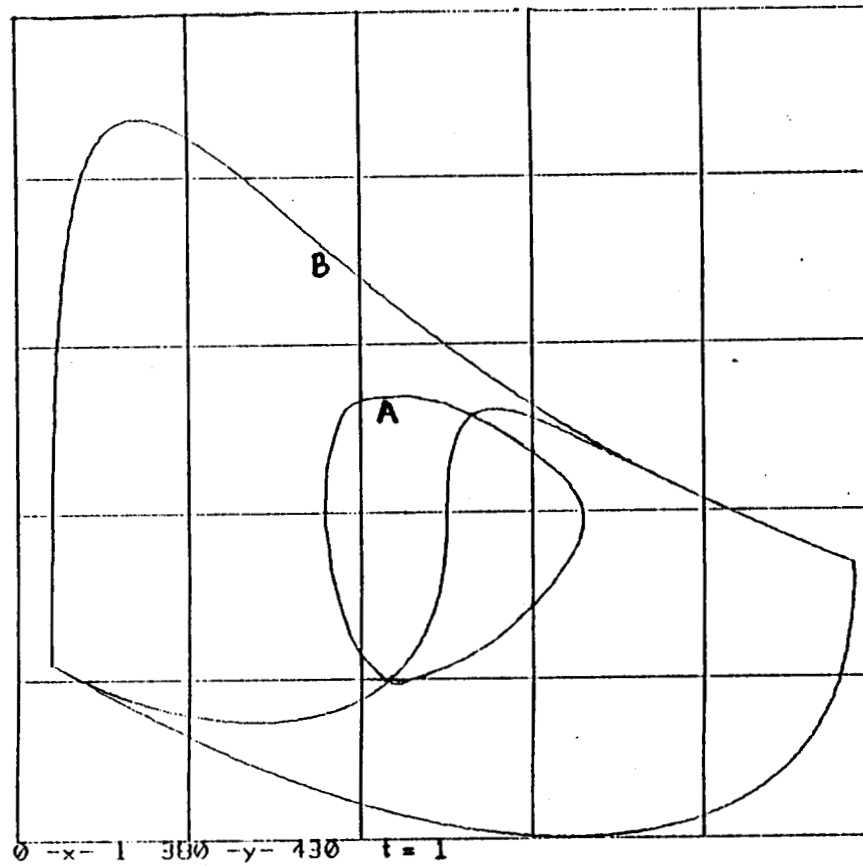


figura 3.16

Comparación de la estimación interna A con el conjunto controlable B, para $t = 1$.

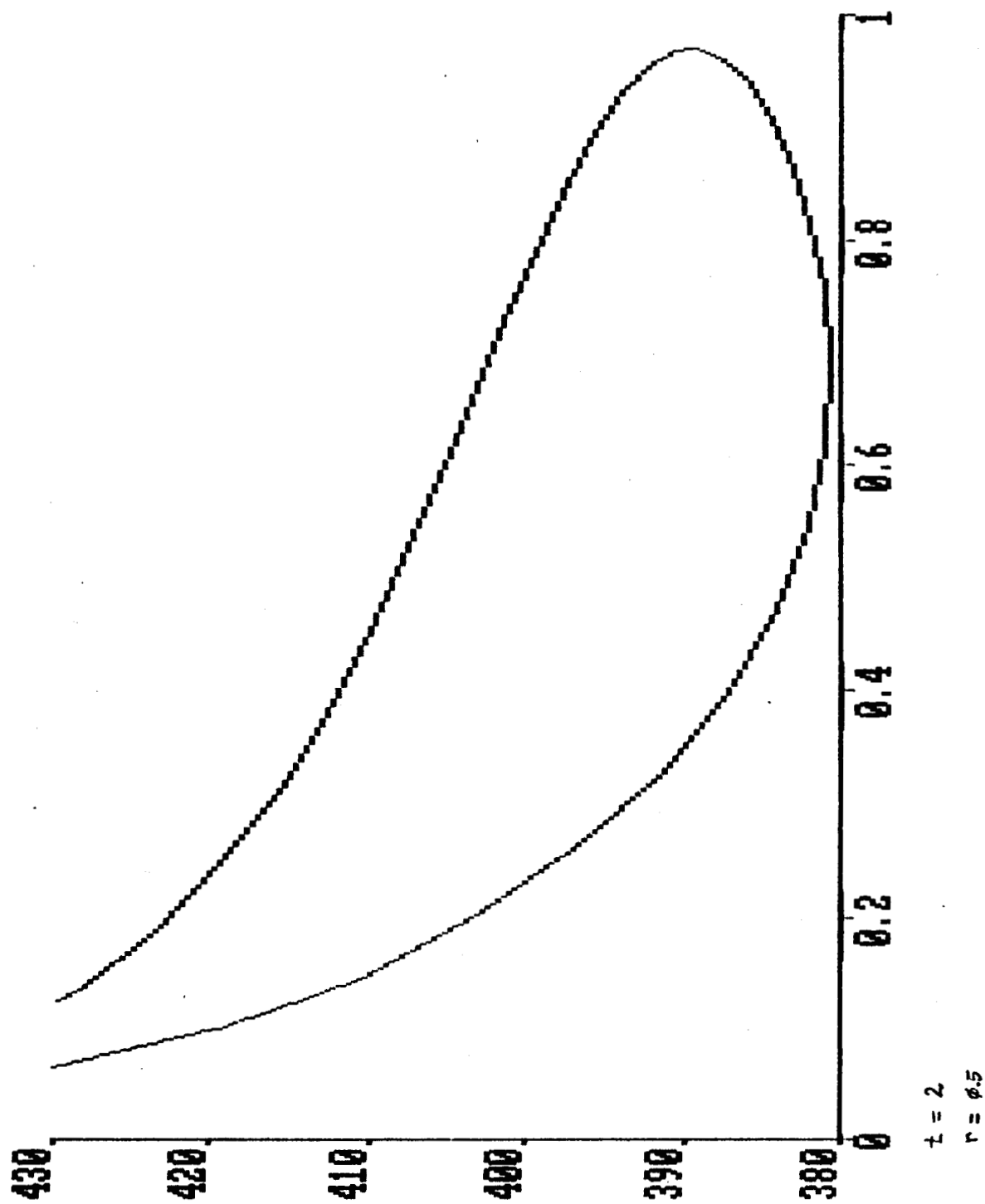


figura 3.17

Estimación interna para $t = 2$.

CONCLUSIONES

El objetivo alcanzado en esta tesis radica principalmente en dar una técnica con la que siempre es posible proporcionar estimaciones del conjunto alcanzable de sistemas linealizables con una entrada de una manera explícita.

Aún cuando las estimaciones no resultan óptimas en general, para el caso del último ejemplo se provee de un algoritmo a seguir, con el cual la estimación interna mejora notablemente. Y así contamos para dimensiones bajas de una estimación interna satisfactoria, para la cual, como se hizo mención en la introducción a la presente, existen pocos resultados.

Un aspecto objetable recae sobre el hecho de que la clase de los sistemas linealizables globalmente en el plano respecto al espacio de todos los sistemas lineales en el control es "flaco" (entendiendo por esto, que no es densa en las topologías idóneas), con todo y que la condición de involutividad se satisface trivialmente. Dando pauta a que para los sistemas de dimensiones mayores, esta clase sea aún más pobre (Byrnes [9]).

Sin embargo, debido a que en la práctica surgen varios ejemplos de importancia de índoles mecánica, fisicoquímicas u otras, que sí son linealizables, tenemos así un punto a favor para realizar un estudio sobre este particular.

Un aspecto que resulta importante completar consiste en determinar un algoritmo para hallar las soluciones explícitas para las estimaciones elipsoidales de los sistemas lineales en la forma canónica de Brunovsky. Para estos sistemas obtuvimos las expresiones simplificadas (3.2) y (3.4) en la sección §1.3, con las que de hecho sí se pueden obtener las soluciones deseadas, procediendo inductivamente, pero se tiene el inconveniente de que las soluciones encontradas son soluciones formales, restando por lo tanto su justificación, e.g., mediante coeficientes indeterminados. Es debido a esto por lo que no se expuso en este trabajo.

Como perspectivas de desarrollo podemos contar con las siguientes:

(1) Considerar sólo la transformación de estados sin la retroalimentación. Con ésto obtendríamos un sistema no lineal que posee localmente toda la información del sistema, en el caso lineal, con $f(y)=Ay$ y $g(y)=b$, donde A es la matriz compañera y b es un vector de ceros, excepto el último renglón. De esta manera, en lugar de aproximar el sistema mediante la retroalimentación v con valores constantes, se puede proceder a construir una familia de funciones $\beta_1(y)$ y $\beta_2(y)$; con las propiedades de:

- (i) si $v(y,u) = \alpha_1(y) + \alpha_2(y)u$, entonces β_i aproxima a α_i , $i=1,2$,
y
(ii) Se conozcan las propiedades y aproximaciones al conjunto

alcanzable del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ \dot{y}_2 &= \beta_1(y) + \beta_2(y)u\end{aligned}$$

Con esto, las estimaciones del conjunto alcanzable para el sistema original serían mejores.

(2) Utilizar otras formas de linealizar, que consisten en transformar el sistema no lineal de manera que su "modelo tangente" sea independiente del punto de operación. La ventaja de esta teoría sobre la presentada aquí, radica en que no solamente toda solución de ésta lo es de aquélla, sino que en la mayoría de los casos es posible elegir una "ley de control" más simple. (Champetier, et. al. [10]).

APENDICE 1

Denotamos con $\mathbb{E}^n$ el espacio euclideo, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidea.

Denotamos con $\Omega(\mathbb{E}^n)$ la clase de todos los subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{E}^n$.

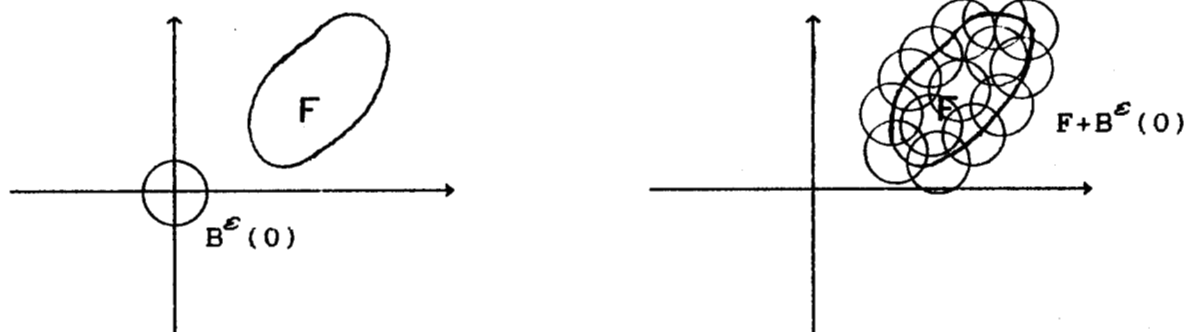
Definición. - Una multifunción (o función multivaluada) es, dados F y G conjuntos, toda función $V:F \rightarrow \mathcal{P}(G)$, donde $\mathcal{P}(G)$ es el conjunto potencia de G . En particular, sólo consideramos las multifunciones $V:\mathbb{E}^1 \rightarrow \Omega(\mathbb{E}^n)$, y decimos que la multifunción V es compacta. Si además, $V(t)$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{E}^n$ para cada $t \in \mathbb{E}^1$, decimos que V es convexa.

En otras palabras, para nuestro propósito, una multifunción es una familia de conjuntos (de algún tipo) dependiente de un parámetro.

Definición. - Sean $F, G \in \Omega(\mathbb{E}^n)$. La métrica de Hausdorff se define como $h(F, G) = \min\{\epsilon > 0 / F \subset G + B^\epsilon(0), G \subset F + B^\epsilon(0)\}$. Aquí, $B^\epsilon(0)$ es la esfera cerrada de radio ϵ con centro en el origen de coordenadas en el espacio $\mathbb{E}^n$.

Con esta métrica se provee a $\Omega(\mathbb{E}^n)$ de una estructura de espacio métrico. (Kelly & Weiss[24], p. 234).

La sugerencia para la métrica de Hausdorff proviene del efecto de sumar una vecindad $B^\varepsilon(0)$ y un conjunto F . Esta suma corresponde geoméricamente a "acrecentar" F en todas partes con una cantidad de ε .



Y así, determinar una $\varepsilon > 0$ para la cual $F+B^\varepsilon(0) \supset G$, con lo que el número ε nos da una medida de la distancia entre F y G , en el sentido de que cualquier punto $g \in G$ está más cerca que la distancia ε de algún punto de F , pues $g \in B^\varepsilon(f)$, para algún $f \in F$. De manera similar se determina para inclusión en sentido contrario. Ahora bien, debido a que no es siempre factible que exista un valor numérico de ε que satisfice ambas inclusiones, se da la definición de arriba.

Definición. - Una multifunción $V: \mathbb{E}^1 \rightarrow \Omega(\mathbb{E}^n)$ es medible si y sólo si para toda $\delta \geq 0$ y toda $K \in \Omega(\mathbb{E}^n)$, tenemos,

$$V^{-1}(B^\delta(K)) = \{t \in \mathbb{E}^1 / V(t) \in B^\delta(K)\} := \{t \in \mathbb{E}^1 / h(V(t), K) \leq \delta\}$$

es medible según Lebesgue. (Bartle[4], pág. 14).

Definición. - El módulo de un conjunto $F \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ se define por el número $|F| := \max\{\|f\| / f \in F\}$.

Definición. - Una función $v: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^n$ es una selección de una multifunción $V(t)$ si y sólo si la relación $v(t) \in V(t)$ se satisface para toda $t \in \mathbb{E}^1$. (i.e., si fijamos t , el valor de $v(t)$ se halla en el compacto $V(t)$).

Ejemplos:

a) Sea $U: \mathbb{E}^1 \rightarrow \Omega(\mathbb{E}^1)$, dada por $U(t) = U = [-1, 1]$, es una multifunción constante. Una selección $v(t)$ será simplemente una función tal que $v(t) \in [-1, 1]$, para toda t .

b) Sea $V: \mathbb{E}^1 \rightarrow \Omega(\mathbb{E}^2)$ una multifunción dada por :

$$V(t) = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 / x^2 + y^2 \leq t^2, t \geq 0\} = B^t(0).$$

Si v es una selección de V , $v(t) \in B^t(0)$, para toda $t \geq 0$; así, la función $v(t)$ tiene imágenes en los compactos y convexos $B^t(0)$.

Teorema. - Sea $V: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ una multifunción, con I un intervalo cerrado. Si $V(t)$ es medible, existe una función medible $v: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ tal que $v(t) \in V(t)$. (cf. Aubin-Cellina[3], pág. 90). ■

Definición. - Un subconjunto M de $\mathbb{E}^n$ es un conjunto afín si y sólo si para cualesquiera $x, y \in M$, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in M$, para toda $\lambda \in \mathbb{E}^1$.

Definición. - Un hiperplano H es un conjunto afín de $\mathbb{E}^n$ de dimensión $n - 1$.

Proposición. - Sean $\psi \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{E}^1$. Entonces el conjunto

$$H = \{x \in \mathbb{E}^n / \langle x, \psi \rangle = k\}$$

es un hiperplano en $\mathbb{E}^n$ con vector normal ψ . Además, todo hiperplano puede ser representado de esta manera, con ψ y k únicos, salvo un múltiplo común distinto de cero. (cf. Rockafellar[35], pág. 5). ■

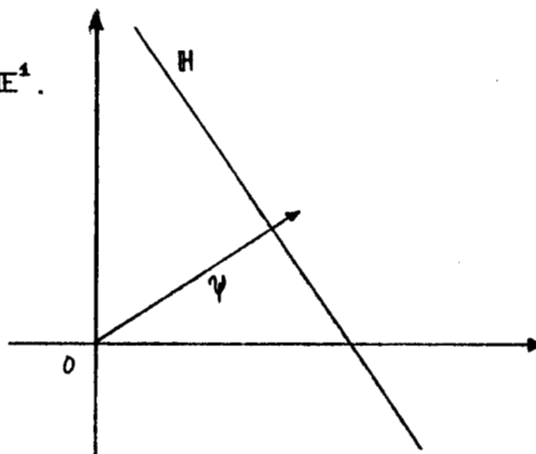
Definición. - Sean $\psi \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{E}^1$.

Los conjuntos siguientes :

$$\{x \in \mathbb{E}^n / \langle x, \psi \rangle \leq k\} \quad \text{y}$$

$$\{x \in \mathbb{E}^n / \langle x, \psi \rangle \geq k\}$$

son llamados semiespacios cerrados.



Teorema. - Todo conjunto convexo y cerrado $F \subset \mathbb{E}^n$ es igual a la intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen.

(cf. Rockafellar[35], pág. 99). ■

Definición. - Sea F un subconjunto convexo de $\mathbb{E}^n$. Un semiespacio soporte de F es un semiespacio cerrado que contiene a F y tiene al menos un punto de F en su frontera.

Definición. - Un hiperplano soporte de un conjunto convexo F es un hiperplano tal que es la frontera de un semiespacio soporte de F .

En otras palabras, un hiperplano soporte es un hiperplano de la forma $H = \{x \in \mathbb{E}^n / \langle x, \psi \rangle = k\}$, con $\psi \neq 0$, en donde, $\langle x, \psi \rangle \leq k$, para cualquier $x \in F$ y la igualdad $\langle x, \psi \rangle = k$ se satisface para al

menos un punto $x \in F$. Así, un hiperplano soporte de F es asociado con una función lineal que alcanza su máximo en F . Además, si F es cerrado, los puntos en $F \cap H$ son precisamente los puntos frontera de F .

Proposición. - Sea F un conjunto convexo y cerrado en $\mathbb{E}^n$. Un punto $x \in F$ es un punto frontera de F si y sólo si existe una función lineal h , la cual no es constante sobre el conjunto F , tal que h alcanza su máximo sobre F en x . (cf. Rockafellar[35], pág. 100). ■

Definición. - La función soporte (o de referencia) de un conjunto convexo $F \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ es una función real definida por la igualdad :

$$c\langle F, \psi \rangle := \max\{\langle f, \psi \rangle / f \in F\} , \text{ para } \psi \in \mathbb{E}^n.$$

Esta función describe a todos los semiespacios cerrados de $\mathbb{E}^n$ que contienen a un conjunto convexo dado.

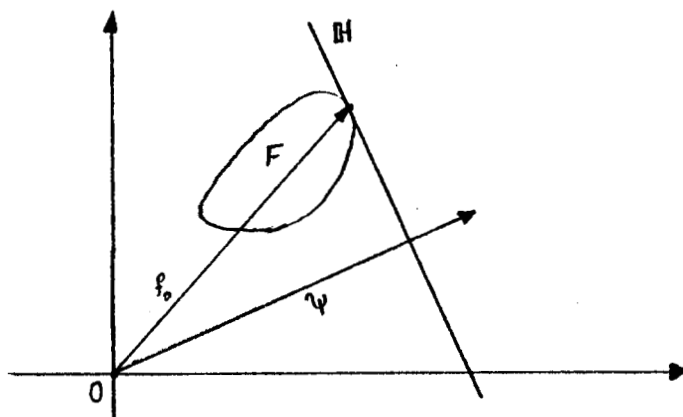
En efecto, si tenemos : $F \subset \{x \in \mathbb{E}^n / \langle x, \psi \rangle \leq k\}$, para ψ y k fijos y para toda $x \in \mathbb{E}^n$, entonces esta contención es equivalente a que $c\langle F, \psi \rangle \leq k$.

Teorema. - Sea F un conjunto convexo y cerrado. Entonces, $f \in F$ si y sólo si $\langle f, \psi \rangle \leq c\langle F, \psi \rangle$, para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$.
(cf. Rockafellar[35], pág. 112). ■

Geométricamente, tenemos así, que la función soporte de un conjunto convexo y compacto F es igual a la proyección de $f = f_0$ en

la dirección de ψ multiplicado por la magnitud de ψ , donde f_0 es un punto frontera de F que también pertenece al hiperplano soporte

$$H = \{x \in \mathbb{E}^n / \langle x, \psi \rangle = k\}$$



Propiedades de las funciones soporte (Rockafellar[35]) :

Proposición 1.- Sean $V(t)$ y $W(t)$ dos multifunciones convexas y compactas. Entonces, $V(t) \subset W(t)$ si y sólo si tenemos que $c\langle V(t), \psi \rangle \leq c\langle W(t), \psi \rangle$, para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$ y toda $t \in \mathbb{E}^1$. (pág. 113). ■

Esta proposición resulta sumamente útil, ya que permite caracterizar la contención de conjuntos convexas y compactos mediante sus funciones soporte.

Proposición 2.- Sean $V(t)$ y $W(t)$ dos multifunciones convexas, entonces la función soporte de su suma, $V(t) + W(t)$, está dada por :

$$c\langle V(t) + W(t), \psi \rangle = c\langle V(t), \psi \rangle + c\langle W(t), \psi \rangle,$$

para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$ y toda $t \in \mathbb{E}^1$. (pág. 113). ■

Proposición 3.- Sean $V(t)$ una multifunción convexa y compacta, y

$A(t)$ una transformación, $A(t): \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, continua en t y lineal en $\mathbb{E}^n$. Entonces, $c\langle A(t)V(t), \psi \rangle = c\langle V(t), A^T(t)\psi \rangle$, para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$ y toda $t \in \mathbb{E}^1$. (pág. 143). ■

Proposición 4. - Sea $V(t)$ una multifunción convexa y medible la cual satisface que $|V(t)| \leq k(t)$, donde $k(t)$ es una función integrable en todo intervalo finito. Entonces,

$$\int_{t_0}^t c\langle V(s), \psi \rangle ds = c\langle \int_{t_0}^t V(s) ds, \psi \rangle,$$

para toda $\psi \in \mathbb{E}^n$ y toda $t \geq t_0$, y donde,

$$\int_{t_0}^t V(s) ds := \left\{ \int_{t_0}^t v(s) ds \mid v \text{ es una selección integrable de } V \right\}$$

(cf. Aubin-Cellina[3]). ■

Matrices simétricas definidas positivas y elipsoides :

Definición. - Una matriz Q $n \times n$ es definida positiva (no negativa) si y sólo si todos sus autovalores son positivos (no negativos), y lo denotamos $Q > 0$ ($Q \geq 0$). Decimos que Q es simétrica si y sólo si satisface la igualdad $Q = Q^T$, donde T es la operación de transposición.

Proposición 5. - Si Q es una matriz simétrica y no negativa, entonces existe una única matriz simétrica P , con $P \geq 0$ y tal que $P = Q^{1/2}$. (cf. Reid[33], pág. 506). ■

Proposición 6. - Sean P y Q matrices simétricas tales que $P \geq 0$ y $Q \geq 0$. Entonces, PQ es una matriz simétrica que satisface $PQ \geq 0$ si y sólo si $PQ = QP$. (cf. Reid[33], pág. 507). ■

Definición. - Un elipsoide $E(a, Q)$ centrado en un punto $a \in \mathbb{E}^n$ y correspondiendo a una matriz Q simétrica y definida positiva, se define por la igualdad:

$$E(a, Q) = a + Q^{1/2} B^1(0),$$

donde,

$$B^1(0) = \{x \in \mathbb{E}^n / \|x\| \leq 1\}.$$

Observación. - $E(a, Q)$ es un conjunto convexo y compacto en $\mathbb{E}^n$. Para $E(a, Q)$, su función soporte viene dada por la fórmula:

$$c\langle E(a, Q), \psi \rangle = \langle a, \psi \rangle + \langle Q\psi, \psi \rangle^{1/2}.$$

En efecto,

$$c\langle E(a, Q), \psi \rangle = c\langle a, \psi \rangle + c\langle Q^{1/2} B^1(0), \psi \rangle \quad (P. 2)$$

$$= c\langle a, \psi \rangle + c\langle B^1(0), (Q^{1/2})^T \psi \rangle \quad (P. 3)$$

$$= \langle a, \psi \rangle + c\langle B^1(0), Q^{1/2} \psi \rangle \quad (P. 5)$$

$$= \langle a, \psi \rangle + \|x\| \|Q^{1/2} \psi\| \quad (D.Sc.)$$

$$= \langle a, \psi \rangle + \langle Q^{1/2} \psi, Q^{1/2} \psi \rangle^{1/2} \quad (Def.)$$

$$= \langle a, \psi \rangle + \langle Q^{1/2} Q^{1/2} \psi, \psi \rangle^{1/2} \quad (P. 3)$$

$$= \langle a, \psi \rangle + \langle Q\psi, \psi \rangle^{1/2} \quad (P. 5)$$

usando las propiedades 2 y 3 de las funciones soporte, la proposición 5, la desigualdad de Schwarz (D.Sc.) y la definición de norma euclídeana. ■

Esta definición de elipsoide coincide con la dada usualmente, a saber,

$$E(a(t), Q(t)) = \{x \in \mathbb{E}^n / \langle Q^{-1}(x-a), (x-a) \rangle \leq 1\},$$

pues las funciones soporte de ambas al ser iguales, podemos hacer uso de la proposición 1. En efecto,

$$c \langle E(a, Q), \psi \rangle := \max_{x \in E(a, Q)} \langle x, \psi \rangle = \max_{\{y \in \mathbb{E}^n / \langle Q^{-1}y, y \rangle \leq 1\}} \langle y, \psi \rangle + \langle a, \psi \rangle$$

$$= \max_{\{y \in \mathbb{E}^n / \|Q^{-1/2}y\| \leq 1\}} \langle Q^{-1/2}y, Q^{1/2}\psi \rangle + \langle a, \psi \rangle = \|Q^{-1/2}y\| \|Q^{1/2}\psi\| + \langle a, \psi \rangle$$

$$\{y \in \mathbb{E}^n / \|Q^{-1/2}y\| = 1\}$$

$$= \|Q^{1/2}\psi\| + \langle a, \psi \rangle = \langle Q^{1/2}\psi, Q^{1/2}\psi \rangle^{1/2} + \langle a, \psi \rangle = \langle Q\psi, \psi \rangle^{1/2} + \langle a, \psi \rangle. \blacksquare$$

Definición. - Dos matrices P y Q son semejantes si y sólo si existe una matriz T no singular tal que $Q = T^{-1} P T$.

Proposición 7. - Sean P y Q dos matrices semejantes y f una función definida para P y Q. Entonces f(P) y f(Q) son también matrices semejantes y la matriz T transforma f(P) en f(Q), $f(Q) = T^{-1} f(P) T$. (cf. Gantmacher[16], pág 98). ■

Definición. - Sea f una función definida en el espectro de una matriz A. Sea $\psi(\lambda)$ el polinomio mínimo de A,

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \text{ con } m = \sum_{i=1}^k m_i = \text{grado de } \psi(\lambda).$$

Entonces, tenemos que los m números :

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \dots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i), \text{ para } i = 1, 2, \dots, k,$$

se les denomina como los valores de la función $f(\lambda)$ en el espectro de la matriz A ; los cuales en conjunto se les denota simbólicamente como $f(A)$.

La proposición siguiente resulta particularmente útil cuando la matriz A es fija o tenemos una familia parametrizada de matrices $A(t)$ para las que determinar un polinomio $p(\lambda)$ que tome los mismos valores en el espectro de $A(t)$ que la función $f(\lambda)$ resulte sencillo.

Proposición 8.- Sea f una función definida en el espectro de la matriz A y $p(\lambda)$ un polinomio tal que $f(\lambda) = p(\lambda)$ (en particular, $p(\lambda)$ se le puede tomar como el polinomio de interpolación de Lagrange-Sylvester). Entonces, $f(A) = p(A)$. (cf. Gantmacher[16], de las págs. 96 a la 116). ■

APENDICE 2

Extensión del concepto de solución de una ecuación diferencial.

Dada la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, t)$$

y la condición inicial $x(t_0) = x_0$ (1)

el problema a estudiar consiste en establecer si existe una solución $x(t)$ y si esta es única.

En general esto no es garantizable si no se proporcionan determinadas condiciones, por lo regular sobre el campo vectorial $f(x, t)$ (e.g., pedir que como función, la regla de correspondencia $f(x, t)$ sea continua en un dominio $D \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^1$, entendiéndose por dominio un subconjunto abierto y conexo).

Así, e.g., si $f(x, t)$ es la función de Dirichlet que asigna el número 1 si t es racional y el cero si t es irracional, resulta que no existe función alguna que tenga por derivada a $f(x, t)$.

Respondiendo al problema de la existencia, supongamos que $f(x, t)$ está definida y es continua en un dominio D , y que (x_0, t_0) es un punto de D . Podemos afirmar, que existe una función $x(t)$, definida en un intervalo (abierto) que contiene al punto t_0 con derivada continua $\dot{x}(t)$ en dicho intervalo, tal que $x(t_0) = x_0$.

y dada por $\dot{x}(t) = f(x, t)$, para toda t en el intervalo.

(cf. Reid [33], teorema de existencia tipo Cauchy-Peano o Hale[20]).

De esta manera, la solución $x(t)$ satisface la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds \quad (2)$$

Recíprocamente, si una función $x(t)$ con derivada continua y que satisface (2), también satisface (1). Por lo tanto, la ecuación integral (2) puede sustituir (1).

Sin embargo, la expresión (2) resulta más general que la representación diferencial (1), pues aquella puede satisfacerse con funciones que no son diferenciales en todos sus puntos, e.g., funciones cuya gráfica posea puntos "picos" (puntos donde no existe la derivada).

Desde el punto de vista de las aplicaciones, resulta que la condición de continuidad sobre $f(x, t)$ es innecesaria y demasiado restrictiva. En el caso de sistemas de control, donde el campo vectorial tiene la forma

$$f(x, t, u) \quad (3)$$

con el parámetro u sirviendo como control, tenemos que u se toma como una función $u(t)$ medible (Lebesgue), por lo que al elegir una función $u(t)$, el campo vectorial $f(x, t, u(t))$ no es necesariamente continua en t .

La motivación para tomar las funciones $u(t)$ medibles viene de que, en la práctica, se consideran un tipo muy importante de controles denominados de relevo ("relés" o "bang-bang"), los cuales sólo pueden tomar dos valores (digamos 1 y -1), pasando necesariamente del uno al otro en forma discontinua.

Definición.- Se dice que una función $f(t)$ definida en un intervalo $I=[a,b]$, es absolutamente continua en I (en forma abreviada, f es AC en I) si para cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que para cualquier colección disjunta y finita de intervalos abiertos $I_1, I_2, \dots, I_n$ contenidos en I , cuyas longitudes $\lambda(I_i)$ satisfagan

$$\sum_{i=1}^n \lambda(I_i) < \delta$$

entonces la suma de las oscilaciones de la función en los intervalos I_i no supera ε :

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i^*) - f(t_{*i})| < \varepsilon, \text{ para toda } n.$$

Una tal f es obviamente continua, basta tomar solo $n = 1$.

Diremos que la función $x(t)$ es una solución "generalizada" de la ecuación diferencial con condición inicial (1) si satisface la ecuación integral (2). Esto es equivalente a lo siguiente : $x(t)$ es absolutamente continua y satisface, además de la condición inicial en (1), a la ecuación diferencial en (1) en " casi todos los puntos".

La justificación a esta equivalencia viene dada por el teorema

siguiente :

Teorema. - Sean $I=[a,b]$ y $f:I \rightarrow \mathbb{E}^1$ una función continua y no decreciente. Entonces, cada una de las afirmaciones siguientes sobre f implica las otras dos:

- (a) f es AC en I .
- (b) f aplica conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero.
- (c) f es diferenciable en c.t.p. de I (i.e., excepto en un conjunto de medida cero), f' es integrable y

$$f(t)-f(a)=\int_a^t f'(s)ds \quad (a \leq t \leq b).$$

(cf. Rudin [37]).

Nota. - La extensión de este teorema a funciones $f:I \rightarrow \mathbb{E}^n$ es canónica.

Así, la equivalencia entre los incisos (a) y (c) se traduce en que una función absolutamente continua, además de que posee derivadas en todos los puntos del intervalo I , con la posible excepción de un conjunto de medida cero, resulta ser igual a la integral de su función derivada (la cual, definida para I en c.t.p., permite definir la integral).

Para el caso particular de que $f(x,t)$ es continua, evidentemente la solución tendrá derivada en todo punto de I , y no existe ya diferencia entre considerar la ecuación diferencial en (1) o la integral (2).

Debido a que C. Carathéodory fue el primero en considerar ecuaciones diferenciales en este enfoque, las soluciones son frecuentemente referidas como "soluciones en el sentido de Carathéodory".

Supongamos que $D \subset \mathbb{E}^{n+1}$ es un dominio. Decimos que $f: D \rightarrow \mathbb{E}^n$ satisface las condiciones de Carathéodory en D si f es medible en t para cada x fijo, continua en x para cada t fija, y para cada conjunto compacto $U \subset D$, existe una función integrable $m_U(t)$ tal que :

$$||f(x,t)|| \leq m_U(t) \quad , (x,t) \in U.$$

Teorema (Carathéodory).- Si D es un dominio en $\mathbb{E}^{n+1}$ y f satisface las condiciones de Carathéodory en D , entonces, para cualquier $(x_0, t_0) \in D$, existe una solución de (1). (cf., Hale [20], pág. 28). ■

Aparte de este teorema fundamental de existencia, queda el problema de establecer la extensión del "intervalo de existencia" de la solución, así como el de estudiar el comportamiento de ésta a medida que toma valores cercanos a los extremos de dicho intervalo.

El resultado siguiente asegura que si la función f se "comporta bien", la solución $x(t)$ no podrá extenderse más allá de cierto valor $t = t^*$ sólo si $x(t)$ tiende a la frontera de D .

Teorema. - Si $D \subset \mathbb{E}^{n+1}$ es un dominio, f satisface las condiciones de Carathéodory en D y $x(t)$ es una solución de (1) en algún

intervalo, entonces existe una continuación de $x(t)$ hasta un intervalo maximal de existencia. Además, si (a,b) es un intervalo maximal de existencia de (1), entonces $(t,x(t))$ tiende a la frontera de D cuando $t \rightarrow a$ ó $t \rightarrow b$. ■

(Hale [20], pág. 29).

Otra propiedad deseable para el sistema (1) es respecto a la unicidad de la solución para condiciones iniciales dadas.

La continuidad de la función $f(x,t)$ por sí sola no basta para garantizar la unicidad. Para este efecto, se necesita de una condición más restrictiva. La condición suficiente usual (pero no necesaria) es la llamada de Lipschitz.

Definición. - La función $f(x,t)$ definida en un dominio D en $\mathbb{E}^{n+1}$ se dice localmente "Lipschitziana" (que cumple la condición de Lipschitz) en x , si para cualquier compacto $U \subset D$ existe una constante $k = k_U$ tal que

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| \leq k\|x-y\|, \text{ para } (x,t), (y,t) \in U.$$

Observaciones:

- (i) Si $f(x,t)$ tiene derivadas parciales continuas respecto a x en D , entonces $f(x,t)$ es localmente Lipschitziana.
- (ii) Aunque la condición de Lipschitz no implica, en general, la diferenciabilidad si implica la continuidad de $f(x,t)$ respecto a x .

Un teorema similar al de unicidad de las soluciones (cf., e.g., Hale [20], pág. 18) se tiene para soluciones generalizadas.

Teorema. - Supongamos que $D \subset \mathbb{E}^{n+1}$ es un dominio, f satisface las condiciones de Carathéodory en D y para cada conjunto compacto $U \subset D$, existe una función integrable $k_U(t)$ tal que

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| \leq k_U(t)\|x-y\|, \quad \text{para } (x,t), (y,t) \in U.$$

Entonces, para cualquier $(x_0, t_0) \in U$, existe una única solución $x(x_0, t_0, t)$ de (1) pasando por (x_0, t_0) . Además, el dominio E en $\mathbb{E}^{n+2}$ de definición de la función $x(x_0, t_0, t)$ es abierto y $x(x_0, t_0, t)$ es continua en E . (Hale [20], pág. 30). ■

APENDICE 3.

Sea $\mathbb{E}^n$ el espacio euclideo n-dimensional.

Denotemos por $C^\infty(\mathbb{E}^n)$ el conjunto de todas las funciones de valores reales en $\mathbb{E}^n$ de clase C^∞ :

$$C^\infty(\mathbb{E}^n) = \{f/f:\mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}, f \text{ con derivadas parciales de todas \u00f3rdenes}\}.$$

Definici\u00f3n. - Un vector tangente en un punto $p \in \mathbb{E}^n$ es un operador $v_p: C^\infty(\mathbb{E}^n) \rightarrow \mathbb{E}$ tal que para cualesquiera $f, g, \in C^\infty(\mathbb{E}^n)$, se cumple que:

- (i) $v_p(f+g) = v_p(f) + v_p(g)$
- (ii) $v_p(fg) = v_p(f) \cdot g(p) + v_p(g) \cdot f(p).$

Ahora bien, aunque esta definici\u00f3n no parece muy geom\u00e9trica, tenemos que:

- (a) por un lado, el espacio de todos los vectores tangentes en un punto es un espacio vectorial y
- (b) si $x_1, \dots, x_n$ son un sistema coordenado en p , entonces para cada i , $v(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_p$ define un vector tangente.

Estos vectores forman una base para el conjunto de todos los vectores tangentes en p .

Definici\u00f3n. - El espacio vectorial formado con todos los vectores tangentes en un punto p se denomina espacio tangente en p , y lo denotamos por $T_p \mathbb{E}^n$.

Observación. - Los vectores tangentes en un punto vienen a ser (eligiendo un sistema coordenado) derivadas direccionales, de donde, se establece una identificación entre la base canónica en $\mathbb{E}^n$ y las derivadas direccionales respecto a los ejes coordenados: $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$, con lo que es común usar indistintamente el vector $\hat{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ o $\partial/\partial x_i$ como vector unitario en la dirección del i -ésimo eje coordenado. (cf. Boothby [6]).

Denotamos con $T\mathbb{E}^n$ el conjunto de todos los vectores tangentes en todos los puntos de $\mathbb{E}^n$, $T\mathbb{E}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{E}^n} T_p \mathbb{E}^n$.

Definición. - Un campo vectorial en $\mathbb{E}^n$ es una transformación que asigna a cada punto $p \in \mathbb{E}^n$, un elemento de $T_p \mathbb{E}^n$,

$$p \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Si las funciones a_i son de clase C^∞ , decimos que el campo vectorial es de clase C^∞ .

Como el conjunto $T_p \mathbb{E}^n$ es un espacio vectorial, resulta natural pensar en su dual $T_p^* \mathbb{E}^n$, i.e., el espacio vectorial formado con todas las funciones lineales de valores reales definidas en $T_p \mathbb{E}^n$.

Definición. - Una 1-forma es una función que asocia a cada punto $p \in \mathbb{E}^n$, un elemento de $T_p^* \mathbb{E}^n$, $w : p \longmapsto w_p$, con $w_p \in T_p^* \mathbb{E}^n$, tal que $w_p : T_p \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$ es una función real de valores reales.

Definición.- Si f es una función de valores reales en $\mathbb{E}^n$, $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^1$, la diferencial df de f es la 1-forma tal que $df_p = v_p(f)$, para todos los vectores tangentes v_p .

Una generalización de la derivada direccional viene dada en la definición siguiente:

Definición.- Sean φ una función real de clase C^∞ y f un campo vectorial de clase C^∞ definidos en $\mathbb{E}^n$. Se define la derivada de Lie de φ con respecto al campo f en el punto p , $L_f \varphi(p)$, por

$$L_f \varphi(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x_i}.$$

Sean f y g dos campos vectoriales en $\mathbb{E}^n$ de clase C^∞ . Para simplificar supongamos que el flujo de f , φ_t^f está definido en $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^n$. Fijando $p \in \mathbb{E}^n$ y $t \in \mathbb{E}^1$, el vector

$$v(t) = d\varphi_{-t}^f (\varphi_t^f(p)) g(\varphi_t^f(p)).$$

es un vector tangente en $T_p \mathbb{E}^n$. Así, la función $t \rightarrow v(t)$ define una curva de clase C^∞ en $T_p \mathbb{E}^n$.

Definición.- El corchete de Lie entre dos campos vectoriales f y g denotado por $[f, g]$, se define por

$$[f, g] = \frac{d}{dt} (v(t)) \big|_{t=0}$$

Lema.- Sean $x: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ un sistema de coordenadas, y f y g dos campos vectoriales en $\mathbb{E}^n$, entonces en este sistema de coordenadas para $f(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$, $g(p) = \sum_{i=1}^n b_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$, tenemos que

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ donde, } c_i = \sum_{j=1}^n (a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}).$$

Proposición. - Si f y g son dos campos vectoriales definidos en un abierto de $\mathbb{E}^n$, entonces:

- a) $[f, g] = dg_p f(p) - df_p g(p).$
- b) $[f, g] = -[g, f].$
- c) $[,]$ es bilineal: $[af_1 + bf_2, g] = a[f_1, g] + b[f_2, g],$ para campos vectoriales f_1, f_2 y g , y escalares $a, b.$

Definición. - Sean f y g dos campos vectoriales de clase C^∞ y h una función de clase C^∞ , entonces la fórmula de Leibnitz para la derivada de Lie es la siguiente :

$$L_{[f, g]}(h(x)) = L_g(L_f(h(x))) - L_f(L_g(h(x))), \text{ para } x \in \mathbb{E}^n.$$

Definición. - Una distribución k -dimensional en $\mathbb{E}^n$ es una función $p \mapsto \Delta_p$, donde $\Delta_p \subset T_p \mathbb{E}^n$ es un subespacio de $T_p \mathbb{E}^n$ de dimensión k . Para cualquier $q \in \mathbb{E}^n$ existe una vecindad U y k campos vectoriales $X_1, \dots, X_k$ tales que $X_1(q), \dots, X_k(q)$ son una base para Δ_q , para cada $q \in U$. Decimos que Δ es una distribución de clase C^∞ si es posible escoger campos vectoriales $X_1, \dots, X_k$ de clase C^∞ con esta propiedad, en una vecindad de cada punto p . Además, decimos que un campo vectorial X en $\mathbb{E}^n$ pertenece a la distribución Δ si $X(p) \in \Delta(p)$, para cada p en $\mathbb{E}^n$, y escribimos $X \in \Delta$.

Definición. - Una distribución de clase C^∞ es denominada involutiva si $[X, Y] \in \Delta$ siempre que X e Y son campos vectoriales pertenecientes a Δ .

Definición. - Sea $M \subset \mathbb{E}^n$. Un atlas de clase C^∞ sobre M es una colección A de parejas (U_i, ϕ_i) llamadas cartas, donde U_i es un subconjunto de M y ϕ_i es un difeomorfismo de U_i en un abierto de $\mathbb{E}^n$, sujeto a las condiciones siguientes :

- 1) Para cualquier $(U_i, \phi_i) \in A$ y $(U_j, \phi_j) \in A$, los conjuntos $\phi_i(U_i \cap U_j)$ y $\phi_j(U_i \cap U_j)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{E}^n$, y las funciones $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ son de clase C^∞ .
- 2) $\bigcup U_i = M$.

Las funciones $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ se denominan funciones de transición del atlas.

Definición. - Sean A_1 y A_2 dos atlas en M . Decimos que A_1 es equivalente a A_2 si y sólo si su unión $A_1 \cup A_2$ es de nuevo un atlas. Esto define una relación de equivalencia.

Definición. - Una variedad M de clase C^∞ es un subconjunto de $\mathbb{E}^n$ provisto con una clase de equivalencia de atlas sobre M .

Definición. - Una distribución Δ de dimensión k sobre $\mathbb{E}^n$, con $k < n$, es completamente integrable si para cada $p \in \mathbb{E}^n$ existe una vecindad $U \subset \mathbb{E}^n$ y una variedad k -dimensional M de $\mathbb{E}^n$ tal que :

$$d\iota(T_q M) = \Delta(\iota(q)), \text{ para cada } q \in U.$$

donde, $\iota : M \rightarrow U$ es la función inclusión; i.e., el espacio tangente de M es exactamente Δ .

Teorema 1 (Frobenius). - Una distribución Δ en $\mathbb{E}^n$ es completamente integrable si y sólo si es involutiva. (Boothby[6], pág. 159).

Presentamos a continuación una versión del teorema de Frobenius utilizando la teoría de 1-formas diferenciales sobre un abierto de $\mathbb{E}^n$

Proposición. - Una distribución Δ de clase C^∞ se puede definir localmente en un abierto U de $\mathbb{E}^n$ como el kernel de $n-k$ 1-formas diferenciales de clase C^∞ linealmente independientes. Y recíprocamente, si $w^1, \dots, w^{n-k}$ son 1-formas de clase C^∞ linealmente independientes, entonces, $\Delta(q) = \bigcap_{i=1}^{n-k} \text{kern}(w_q^i)$ es una distribución de dimensión k y de clase C^∞ , para cada $q \in U$. ■

Teorema 2 (Frobenius). - Sea Δ una distribución de dimensión k y de clase C^∞ en un abierto U de $\mathbb{E}^n$, definida por $n-k$ 1-formas diferenciales linealmente independientes y clase C^∞ : $w^1, \dots, w^{n-k}$. Δ es completamente integrable si y sólo si estas 1-formas satisfacen la condición :

$$dw^i = \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_j^i \wedge w^j, \quad \text{para } i = 1, \dots, n-k$$

donde, α_j^i son 1-formas apropiadas, $\wedge$ es el producto cuña y d es la diferenciación exterior. ■

(cf. Boothby[6], pág. 222).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Alvarez, J., Alvarez, J. y González, E., Global Nonlinear Control of a Continuous Stirred Tank Reactor, Chemical Engineering Journal, 43, 1988.
- [2] Arnold, V. I., Geometrical Method in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 1983.
- [3] Aubin, J. y Cellina, A., Differential Inclusions, Springer-Verlag, Germany, 1984.
- [4] Bartle, R., The Elements of Integration, Wiley, N.Y., 1966.
- [5] Brockett, R et. al. Eds., Differential Geometric Control Theory, Birkhäuser, 1982.
- [6] Boothby, W., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, N.Y., 1975.
- [7] Boothby, W., Some Comments on Global Linearization of Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, 4, No. 8, p. 143-147, 1984.
- [8] Brunovsky, P., A classification of Linear Controllable Systems, Kibernetika, 6, p. 173-188, 1970.
- [9] Byrnes, Ch., Remarks on Nonlinear Planar Control Systems wich are Linearizable by Feedback, Systems and Control Letters, 5, p. 363-367, 1985.
- [10] Champetier, C., Reboulet, C. and Mouyon, P., A New Approach to Linearize Nonlinear Systems: The Pseudo-linearization, Comparison with Classical Methods, 9th. World Congress, 9, p. 165-167, 1984.
- [11] Cheng, D., Tarn, Tz. and Isidori, A., A Global External

- Linearization of Nonlinear Systems Via Feedback, IEEE Transaction on Automatic Control, AC-30, No. 8, p.808-811, 1985.
- [12] Chernous'ko, F.L., Optimal Guaranteed Estimates of Indeterminacies with the Aid of Ellipsoids I,II y III, Engineering Cibernetics 18, 1980.
- [13] Chernous'ko, F.L., Ellipsoidal Estimates of a Controlled System's Attainability Domain, J. of Applied Mathematics and Mechanics, 45, p. 7-12, 1982.
- [14] Chernous'ko, F.L., Guaranteed Estimation of Reachable Sets for Controlled Systems 81, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, p. 619-631, 1986.
- [15] Chernous'ko, F.L., and Onseevich, A.I., Two-Sided Estimates of the Attainability Domains of Controlled Systems, J. App. Math. Mechs., 46, p. 590-595, 1982.
- [16] Gantmacher, F.R., The theory of Matrices, Vol. I, Chelsea, N.Y., 1959.
- [17] Gurman, V.I. y Konstantinov, C.M., Description and Estimation of the Extent of Attainability Sets of Controlled Systems, Differential Equations, 23, 3, p. 290-295, 1985.
- [18] Imaz, C. y Vorel, Z., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Limusa, México, 1975.
- [19] John, F., Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 2da. Edition, N.Y., 1975.
- [20] Hale, J., Ordinary Differential Equations, Krieger Pu. Co., Inc., Malabar, Fda., 2a. Ed., 1980.
- [21] Hermann, R. and Krener A., Nonlinear Controllability and

- Observability, IEEE Trans. on Aut. Control , AC-22, No.5, p. 728-740, Oct. 1977.
- [22] Hermes, H., On Local and Global Controllability, SIAM J. Control, 12, No. 2, p. 252-261, 1974.
- [23] Hunt, L., Su, R. and Meyer, G., Global Transformations of Nonlinear Systems, IEEE Trans. on Aut. Control, AC-28, No. 1, p. 24-30, Jan. 1983.
- [24] Kelly, P. and Weiss, M., Geometry and Convexity, A study in Maths. Methods., John Wiley and Sons., N.Y., 1979.
- [25] Komarov, V.A., Estimates of Reachable Sets for Linear Non-autonomous Systems. Math. USSR. Izvestiya, 25, No. 1, p. 193-206, 1985.
- [26] Komarov, V.A., Estimates for the Attainable Set for Differential Inclusions, Matematicheski Zametki, 37, No. 6, p. 501-506, 1985.
- [27] Kou, S., Elliot, D. and Tarn, Tz., Observability of Nonlinear Systems, Information and Control , 22, p. 89-99, 1973.
- [28] Lee, E. and Markus, L., Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley and Sons, N.Y., 1967.
- [29] Liang, B., A Classification of Linear Control Systems, Linear and Multilinear Algebra, 8, p. 261-264, 1980.
- [30] Loomis, L. and Sternberg, Sh., Advanced Calculus, Addison-Wesley Publishing Co., Mass., 1968.
- [31] Mackie, J. and Strauss, A., An Introduction to Optimal Control Theory, Springer-Verlag, N.Y., 1982.
- [32] Panasyuk, A.I., Reachability Region Equations and their Use in Optimal Control, Automatic Remote Control, 43, No.5,

p. 625-636, 1982.

- [33] Reid, W., Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, N.Y., 1971.
- [34] Reid, W., Riccati Differential Equations, A.P., N.Y., 1972.
- [35] Rockafellar, R., Convex Analysis, Princeton Univ. Press, 2da. Ed., N.J., 1972.
- [36] Roxin, E., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Teoría de Control, tomo I, EUDEBA, B.A., 1968.
- [37] Rudin, W., Analisis Real y Complejo, Mc. Graw-Hill, 3a. Ed., Madrid, 1988.
- [38] Schlaepfer, F. and Schweppe, F., Continuous-Time State Estimation Under Disturbances Bounded by Convex Sets, IEEE Trans. on Aut. Control, AC-17, No. 2, p. 197-205, April 1972.
- [39] Su, R., On the Linear Equivalents of Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, 2, No. 1, p. 48-52, July 1982.