

**Interacción hidrodinámica de un cuerpo  
esférico con la estela laminar de otro en  
un fluido newtoniano con flujo uniforme**

**T E S I S**

que para obtener el grado de  
**DOCTOR EN CIENCIAS**  
**(INGENIERÍA QUÍMICA)**

presenta:

**Jorge Ramírez Muñoz**

Asesor: **Dr. Alberto Soria López**

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa  
Depto. de Ingeniería de Procesos e Hidráulica  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

México D.F. Octubre de 2007



## Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme la vida y darme salud, a mi amada esposa (Alma) por brindarme todo su apoyo en los momentos difíciles y a mis adorados hijos (Naomi, Jorge y Alma) por inspirarme a seguir adelante y por su comprensión. Agradezco también a mi querida madre y a mis hermanos quienes siempre me han brindado todo su apoyo y cariño.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) quien financió mis estudios de doctorado (No. becario: 171336) y a la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

Especial agradecimiento a mi asesor y gran amigo el Dr. Alberto Soria López y a la Dra. Elizabeth Salinas Barrios por sus enseñanzas y toda la confianza que depositaron en mí, a mis sinodales, a mis compañeros del posgrado y a todo el personal de esta universidad.



## Resumen

La predicción del movimiento de un conjunto de partículas (burbujas de gas, gotas o sólidas) dispersas en un medio continuo líquido o gaseoso es primordial en mecánica de fluidos de sistemas multifásicos. En un sistema concentrado de partículas, el cual es comúnmente encontrado en aplicaciones industriales, las interacciones entre partículas a través de la fase continua (interacción hidrodinámica) podrían generar procesos que modifican los patrones de flujo, por lo que la fuerza hidrodinámica sobre cada partícula se desvía significativamente de la experimentada por una partícula aislada.

En este trabajo, presentamos un estudio de la interacción hidrodinámica a través de la estela laminar generada por un cuerpo esférico (cuerpo puntero) sobre un segundo cuerpo (cuerpo acarreado) del mismo diámetro, alineados en la dirección de un flujo uniforme, newtoniano e incompresible. Partiendo de una formulación integral del principio de balance de momentum, se obtienen expresiones integrales exactas para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo inmerso en un volumen de control material y un volumen de control fijo.

Si se conoce la estructura local del flujo, los balances integrales de momentum pueden ser evitados y puede ejecutarse una integración directa del esfuerzo normal y tangencial sobre la superficie del cuerpo. Este enfoque provee de un mejor entendimiento de las contribuciones individuales de las fuerzas inerciales y viscosas en la fuerza hidrodinámica. En este estudio se utilizan expresiones diferenciales teóricas que usan este enfoque y se evalúan los efectos inerciales y viscosos utilizando soluciones analíticas conocidas para la estructura del flujo en la estela.

Se obtienen modelos para la fuerza de arrastre estacionaria, la fuerza hidrodinámica y la velocidad de aproximación del cuerpo acarreado. También se identifican las fuerzas más significativas comparando las predicciones de estos modelos con datos experimentales y numéricos de la literatura.

## Abstract

The motion forecasting of particle swarms (bubbles, drops or solid grains) immersed in a continuous fluid is essential in multiphase fluid mechanics. In particle concentrated systems, as commonly found in industrial applications, particle interactions through the continuous phase (hydrodynamic interactions) can be the carriers of processes modifying the flow patterns, since the hydrodynamic force on a particle in the swarm is meaningfully deviated from the one exerted on an isolated particle.

A study of the hydrodynamic interaction produced by the presence of a spherical body on a second identical body (the trailing body) through the laminar wake generated by the first one (the leading body) is performed in this work. Both bodies are aligned in the direction of a continuous Newtonian fluid in a uniform and incompressible flow. Beginning with an integral formulation of the momentum balance principle, exact integral expressions for the hydrodynamic force on the trailing body are obtained both in a material volume and in a fixed volume as well.

If the local flow structure is known, then the momentum integral approach can be avoided and the normal and tangential stresses on the body surface integration can be performed directly. This approach gives insight on the inertial and viscous individual contributions to the hydrodynamic force. In this study, expressions for the hydrodynamic force contributions that use this approach were used, and the viscous and inertial effects were evaluated using known simple analytical wake flow solutions.

The main results of this two-fold approach, supplemented by some proposals, are models for the trailing body's quasi-steady drag force, its hydrodynamic force contributions and evaluation, as well as its approaching velocity to the leading body. Also, the more significant forces are identified by a comparison between the model predictions on the one hand and experimental data and simulation results from the literature on the other.

# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VI
Índice	VII
Índice de Figuras	IX
Índice de Tablas	XI
Notación	XIII
0.1. Motivación . . . . .	1
0.2. Planteamiento del problema . . . . .	2
0.3. Antecedentes . . . . .	4
0.4. Objetivos . . . . .	5
0.4.1. Objetivos Generales . . . . .	5
0.4.2. Objetivos Particulares . . . . .	5
0.5. Metodología . . . . .	6
0.6. Contenido de la tesis . . . . .	6
<b>I Trabajos Previos</b>	<b>9</b>
<b>1. Una partícula moviéndose en un fluido viscoso</b>	<b>11</b>
1.1. Fundamentos teóricos . . . . .	11
1.2. Soluciones analíticas para el flujo detrás de una partícula esférica . . . . .	11
1.3. Expresiones analíticas y correlaciones para el coeficiente de arrastre sobre esferas	13
1.4. Observaciones experimentales . . . . .	14
1.5. Balance de fuerzas sobre una esfera aislada . . . . .	15

<b>2. Interacción hidrodinámica de un par de partículas</b>	<b>23</b>
2.1. Introducción . . . . .	23
2.2. Flujo reptante . . . . .	24
2.3. Números de Reynolds muy grandes a infinitos . . . . .	25
2.4. Números de Reynolds pequeños a intermedios . . . . .	26
2.5. Números de Reynolds grandes . . . . .	28
<b>II Análisis</b>	<b>31</b>
<b>3. Fuerzas actuando sobre un cuerpo inmerso en un fluido</b>	<b>33</b>
3.1. Ecuación de balance de momentum para un volumen material . . . . .	33
3.2. Fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo en un volumen de control material . . .	35
3.3. Fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo en un volumen de control fijo . . . . .	37
3.4. Flujo en la estela de un cuerpo esférico . . . . .	38
3.5. Fuerza hidrodinámica de un flujo no-uniforme sobre una esfera en un volumen de control fijo . . . . .	41
3.6. Fuerza hidrodinámica conociendo la estructura del flujo en la superficie de la esfera . . . . .	43
<b>4. Arrastre cuasiestacionario sobre la esfera acarreada</b>	<b>47</b>
4.1. Introducción . . . . .	47
4.2. Expresiones para el arrastre cuasiestacionario sobre la esfera acarreada . . . . .	47
<b>5. Fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada</b>	<b>59</b>
5.1. Introducción . . . . .	59
5.2. Un modelo aproximado para la fuerza hidrodinámica partiendo de balances integrales . . . . .	60
5.3. Expresión para la fuerza hidrodinámica en términos de expresiones diferenciales	65
<b>6. Velocidad de aproximación de la burbuja acarreada</b>	<b>69</b>
6.1. Obtención de un modelo aproximado . . . . .	69
6.2. Modelos basados en diferentes suposiciones para las fuerzas que actúan sobre la burbuja . . . . .	72
<b>III Resultados y Conclusiones</b>	<b>83</b>
<b>7. Modelos para la fuerza hidrodinámica</b>	<b>85</b>
7.1. Predicciones del modelo aproximado . . . . .	85
7.2. Predicciones del modelo obtenido a partir de expresiones diferenciales . . . . .	89



<i>Índice general</i>	IX
<b>8. Modelos para la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada</b>	<b>93</b>
8.1. Predicciones del modelo aproximado . . . . .	93
8.2. Predicciones de los modelos que consideran diferentes fuerzas sobre la burbuja acarreada . . . . .	95
<b>9. Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>
<b>A..Apéndice</b>	<b>113</b>
A.1. Solución asintótica para el flujo en la estela laminar . . . . .	113
A.2. Expresiones de las fuerzas que actúan sobre la burbuja acarreada . . . . .	117

# Índice de figuras

1.1. Fuerzas del fluido sobre una esfera pequeña en condiciones de flujo reptante. . .	16
3.1. Volumen material de fluido de dimensión finita. . . . .	34
3.2. Superficie material $\mathcal{A}_m^*(t)$ . . . . .	36
3.3. Interacción de dos esferas ascendiendo en línea. . . . .	39
3.4. Dos burbujas interactuando con la estela de la burbuja puntera. . . . .	42
4.1. Razón entre el defecto del flujo en la estela y el defecto evaluado en el eje de simetría, en función de la separación adimensional entre burbujas. . . . .	51
4.2. Contribución de la no-uniformidad axial en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria. . . . .	53
4.3. Fuerza de arrastre en función de la separación entre burbujas a $Re$ intermedios. . . . .	55
4.4. Fuerza de arrastre en función de la separación entre burbujas a $Re$ grandes. . . . .	56
4.5. $W/W_0$ en función de la separación adimensional entre burbujas. . . . .	57
5.1. Dos esferas fijas interactuando con la estela laminar de la esfera de adelante. . . . .	60
5.2. Interacción hidrodinámica de dos esferas colocadas en línea. . . . .	66
6.1. $1/\xi$ y $1/U_b$ para diferentes distancias de separación. . . . .	71
6.2. Predicción de los modelos $U_b^V$ y $U_b^{VI}$ usando $\beta$ iterada y suponiendo $\beta = 1$ . . . . .	77
7.1. Fuerza hidrodinámica y contribución de las fuerzas de arrastre y presión. . . . .	87
7.2. Campo de presión axial y gradiente del campo de presión en la estela. . . . .	88
7.3. Fuerza adimensional en función de la distancia adimensional entre los centros de las esferas para (a) $Re_1 = 52$ , (b) $Re_1 = 54$ , (c) $Re_1 = 106$ y (d) $Re_1 = 145$ . . . . .	89
7.4. Contribuciones a la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada a partir del presente trabajo y del de Zhang y Fan (2002) (ZF2002) para $Re_1 = 54$ . . . . .	90
8.1. Velocidad de aproximación de la burbuja acarreada para (a) $Re_1 = 3.06$ , (b) $Re_1 = 21.5$ y (c) $Re_1 = 35.4$ . . . . .	94
8.2. Velocidad de aproximación de la burbuja acarreada para (a) $Re_1 = 3.06$ y (b) $Re_1 = 5$ . . . . .	97
8.3. Contribuciones a la fuerza hidrodinámica sobre la burbuja acarreada de la inercia del fluido y de la no-uniformidad del flujo para $Re_1$ de 1, 3 y 5. . . . .	98

8.4. Velocidad de aproximación de la burbuja acarreada para (a) $Re_1 = 12$ , (b) $Re_1 = 21.5$ y (c) $Re_1 = 35.4$ . . . . .	99
A.1. Estela laminar axisimétrica detrás de un cuerpo esférico. . . . .	113

# Índice de tablas

2.1. Clasificación de los regímenes de flujo de burbujas y esferas sólidas . . . . .	24
4.1. Expresiones para $\beta$ usando diferentes correlaciones de la literatura . . . . .	50
6.1. Fuerzas actuando sobre la burbuja acarreada . . . . .	74
7.1. Valores óptimos del parámetro $\lambda$ . . . . .	86
7.2. Comparación del error relativo promedio para la fuerza hidrodinámica, $Er$ del modelo de Zhang y Fan (2002) (Ec. 4.2.23) y el propuesto (Ec. 5.2.14). . . . .	86

# Notación

$\mathcal{A}$	Superficie del volumen de control cilíndrico de la Fig. 5.1, $m^2$
$\mathcal{A}_b$	Superficie del conducto de la Fig. 3.2, $m^2$
$\mathcal{A}_m$	Superficie exterior del volumen de control material de la Fig. 3.2, $m^2$
$\mathcal{A}_m^*$	Superficie del volumen de control material de la Fig. 3.2, $m^2$
$\mathcal{A}_u$	Superficie del conducto de la Fig. 3.2, $m^2$
$C_d$	Coficiente de rozamiento de una esfera aislada, <i>adimensional</i>
$C_{d1}$	Coficiente de rozamiento de la esfera puntera, <i>adimensional</i>
$C_{d2}$	Coficiente de rozamiento de la esfera acarreada, <i>adimensional</i>
$C_{d2}$	Coficiente de rozamiento de la burbuja hipotética, <i>adimensional</i>
$C_M$	Coficiente de masa agregada para una esfera, <i>adimensional</i>
$d$	Diámetro de la esfera, $m$
$dA$	Elemento diferencial de superficie, $m^2$
$d/dt$	Derivada temporal siguiendo el centro de masa de la esfera, $s^{-1}$
$D/Dt$	Derivada temporal siguiendo la trayectoria de una partícula material de fluido, $s^{-1}$
$\hat{\mathbf{e}}_r$	Componente radial de la base vectorial cilíndrica, <i>adimensional</i>
$\hat{\mathbf{e}}_s$	Componente axial de la base vectorial cilíndrica, <i>adimensional</i>
$Er$	Error relativo promedio definido en la Ec. (4.2.19), <i>adimensional</i>
$F_{AM}$	Fuerza de masa agregada despreciando la no-uniformidad axial, $N$
$F_{AMT}$	Fuerza de masa agregada total, $N$
$F_d$	Fuerza de arrastre, $N$
$F_{dh2}$	Fuerza de arrastre sobre la burbuja hipotética, $N$
$F_{d1}$	Fuerza de arrastre sobre la esfera puntera, $N$
$F_{d2}$	Fuerza de arrastre sobre la esfera acarreada, $N$
$F_{d2T}$	Fuerza de arrastre total sobre la esfera acarreada, $N$
$F_g$	Fuerza boyante neta, $N$
$F_h$	Fuerza histórica, $N$
$F_{hT}$	Fuerza histórica total, $N$
$\mathbf{F}_{HD}$	Fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo, $N$
$F_{HD}$	Componente axial de la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo, $N$
$F_{HDI}$	Fuerza inercial del fluido, $N$
$F_{HD}^{(0)}$	Fuerza hidrodinámica del flujo no perturbado, $N$
$F_{HD}^{(1)}$	Fuerza hidrodinámica del flujo perturbado, $N$
$F_i$	Contribuciones individuales a la fuerza hidrodinámica, $N$

$F_p =$  Fuerzas de presión,  $N$   
 $F_{WR} =$  Fuerza de aceleración lagrangiana del fluido,  $N$   
 $\mathbf{g} =$  Aceleración gravitacional,  $ms^{-2}$   
 $\mathbf{I} =$  Tensor unitario, *adimensional*  
 $L =$  longitud característica de variación del flujo no perturbado por la esfera,  $m$   
 $m_b =$  Masa de la esfera,  $kg$   
 $m_f =$  Masa de fluido desplazado por la esfera,  $kg$   
 $\hat{\mathbf{n}} =$  vector normal unitario, *adimensional*  
 $N =$  Número de datos experimentales o numéricos usados en la Ec. (4.2.19), *adimensional*,  
 $p =$  Presión mecánica,  $Pa$   
 $p_e =$  Presión estática,  $Pa$   
 $p_k =$  Presión dinámica,  $Pa$   
 $r =$  Coordenada radial,  $m$   
 $R =$  Radio de la esfera,  $m$   
 $R_1 =$  Distancia entre orígenes de ambos marcos de referencia,  $m$   
 $s =$  Coordenada axial del marco de referencia anclado en la esfera,  $m$   
 $\hat{s} =$  Distancia adimensional entre centros de ambas burbujas, *adimensional*  
 $s_0 =$  Distancia de referencia a partir de la cual se evalúa la fuerza histórica,  $m$   
 $s_0 =$  Distancia entre la superficie de la esfera puntera y el centro de la esfera acarreada,  $m$   
 $S_b =$  Superficie de la esfera,  $m^2$   
 $t =$  Tiempo,  $s$   
 $\mathbf{T} =$  Tensor de esfuerzos totales,  $Pa$   
 $\mathbf{T}_k =$  Tensor de esfuerzos totales debidos al movimiento del fluido,  $Pa$   
 $u =$  Velocidad del campo de flujo uniforme que incide sobre la esfera puntera,  $ms^{-1}$   
 $u_1 =$  Velocidad característica del flujo incidente sobre la esfera puntera (Fig. 5.1),  $ms^{-1}$   
 $u_2 =$  Velocidad característica del flujo incidente sobre la esfera acarreada (Fig. 5.1),  $ms^{-1}$   
 $U_b =$  Velocidad de la burbuja acarreada definida en la Ec. (4.2.7), *adimensional*  
 $U_{b1} =$  Velocidad de la burbuja puntera,  $ms^{-1}$   
 $U_{b2} =$  Velocidad de la burbuja acarreada,  $ms^{-1}$   
 $U_{bh2} =$  Velocidad de la burbuja hipotética,  $ms^{-1}$   
 $V_b =$  Volumen de la esfera,  $m^3$   
 $\mathbf{w} =$  Campo de velocidad de la estela en el marco de referencia de la esfera puntera,  $ms^{-1}$   
 $w =$  Componente axial de  $\mathbf{w}$ ,  $ms^{-1}$   
 $w_0 =$  Velocidad del flujo en la estela evaluada en el eje de simetría,  $ms^{-1}$   
 $w_1 =$  Defecto del flujo en la estela,  $ms^{-1}$   
 $\bar{w} =$  Componente axial de  $\mathbf{w}$  promediada en el area proyectada por ambas esferas,  $ms^{-1}$   
 $W =$  Defecto del flujo en la estela, *adimensional*  
 $W_0 =$  Defecto del flujo en la estela evaluada en el eje de simetría, *adimensional*  
 $W_\gamma =$  Como se define en la Ec. 4.2.8, *adimensional*  
 $x, y, z =$  Coordenadas cartesianas del marco de referencia de laboratorio,  $m$

## Símbolos griegos

- $\beta$  Razón del factor secundario del coeficiente de arrastre (Tabla 4.1), *adimensional*  
 $\delta$  = Indica una sección del conducto de longitud infinitesimal, *m*  
 $\varphi_1$  = Como se define en la Ec. (6.2.10), *adimensional*  
 $\varphi_2$  = Como se define en la Ec. (6.2.11), *adimensional*  
 $\Phi_{AM}$  = Contribución de la no-uniformidad axial a la fuerza de masa agregada, *adimensional*  
 $\Phi_d$  = Contribución de la no-uniformidad a la fuerza de arrastre cuasiestacionaria, *adimensional*  
 $\Phi_h$  = Contribución de la no-uniformidad a la fuerza histórica, *adimensional*  
 $\gamma$  = Como se define en la Ec. (4.2.2), *adimensional*  
 $\lambda$  = Como se define después de la Ec. (5.2.14), *adimensional*  
 $\bar{\lambda}$  = promedio aritmético de  $\lambda$ , *adimensional*  
 $\mu$  = Viscosidad dinámica del fluido,  $kgm^{-1}s^{-1}$   
 $\nu$  = Viscosidad cinemática del fluido,  $m^2s^{-1}$   
 $\rho$  = densidad del fluido,  $kg\ m^{-3}$   
 $\sigma$  = Coordenada axial del marco de referencia anclado en la esfera, *m*  
 $\bar{\sigma}$  = Distancia entre burbujas, *adimensional*  
 $\tau$  = Tiempo, *s*  
 $\bar{\tau}$  = Tensor de esfuerzos viscosos, *Pa*  
 $\tau_{rs}, \tau_{ss}$  = Componentes del tensor de esfuerzos viscosos, *Pa*

## Subíndices

- $a$  = Región de la tapa inferior del cuerpo cilíndrico mostrado en la Fig. 5.1  
 $b$  = Región de la tapa superior del cuerpo cilíndrico mostrado en la Fig. 5.1  
 $c$  = Región de la superficie del cuerpo cilíndrico mostrado en la Fig. 5.1  
 $s$  = Componente axial del marco de referencia anclado en el cuerpo  
 $z$  = Componente vertical del sistema de referencia de laboratorio  
 $0$  = Indica cantidades evaluadas en el centro de la esfera  
 $1$  = Esfera puntera  
 $2$  = Esfera acarreada  
 $*$  = Variable auxiliar para los subíndices  $a$  y  $b$  ó  $1$  y  $2$

## Números adimensionales

- $Re = u_s d / \nu$  = Número de Reynolds de partícula  
 $We = \rho u_s^2 d / \sigma$  = Número de Weber





# 0. Introducción

## 0.1. Motivación

En las industrias de procesos químicos, petroquímicos, ambientales, aeroespaciales, farmacéuticos y de procesamiento de minerales se utilizan frecuentemente los dispositivos de contacto de sistemas multifásicos. Consecuentemente, la predicción del movimiento de partículas sólidas, gotas o burbujas dispersas en una fase continua (líquida o gaseosa) resulta esencial en la dinámica de fluidos de sistemas multifásicos. A pesar de su amplia aplicación, el conocimiento de la dinámica de estos sistemas es aún limitado debido principalmente a la dificultad al describir la interacción entre partículas, por lo que se requiere de trabajos teóricos y experimentales adicionales.

Una comprensión total de los diversos mecanismos de interacción de un gran número de partículas moviéndose en un dispositivo industrial (columna de burbujeo, tanque de sedimentación, columna de fluidización, etc.) está lejos de ser alcanzada en la actualidad (Magnaudet y Eames, 2000; Joshi *y col.*, 2002; Michaelides, 2003). Una forma de simplificar el problema podría consistir en analizar por separado (i) las interacciones directas entre partículas o *colisiones*, y (ii) las interacciones indirectas entre partículas via la fase continua o *interacción hidrodinámica*. La interacción hidrodinámica se presenta cuando el flujo alrededor de una partícula moviéndose cerca de otras es modificado por las partículas contiguas, ésta se acrecienta a medida que la concentración de partículas se incrementa. Por consiguiente, la fuerza hidrodinámica sobre una partícula cambia considerablemente si está aislada o se encuentra en presencia de otras partículas. La interacción hidrodinámica causa que las partículas se aproximen hasta que colisionen, mientras que las colisiones ocasionan procesos de *coalescencia* (aglomeración) y *rompimiento*. Así, una estrategia razonable para avanzar hacia una mejor comprensión de estos sistemas sería comprender primero la interacción hidrodinámica entre partículas.

Para el caso de columnas de burbujeo, la interacción hidrodinámica influye grandemente en

los procesos de coalescencia y rompimiento afectando la distribución de tamaño de burbujas; es decir, el área total disponible para el contacto entre fases (área interfacial), y la velocidad de las burbujas (tiempo de residencia para el contacto interfacial). Consecuentemente, contribuye al desempeño del equipo, y su conocimiento es necesario ya sea para mejorar el desempeño de dispositivos existentes o para obtener información fundamental para el escalamiento y diseño (Deckwer y Schumpe, 1993; Kulkarni y Joshi, 2005).

En general, la fuerza hidrodinámica sobre una partícula en un dispositivo de contacto es gobernada por el número de partículas de los alrededores, la separación entre partículas, la posición relativa de las partículas, la presencia de la pared del recipiente y el régimen de flujo caracterizado por el número de Reynolds de partícula  $Re = u_s d / \nu$ . Donde,  $u_s$ ,  $d$  y  $\nu$  son la velocidad terminal de la partícula relativa a la velocidad del líquido, el diámetro de partícula y la viscosidad cinemática del líquido, respectivamente.

Un caso particular de estudio, pero realista y útil, es la interacción hidrodinámica a  $Re$  del  $O(10 \sim 100)$  de un par (o tren) de partículas esféricas moviéndose a lo largo de la línea que une sus centros en un volumen infinito de fluido. El número de trabajos en la literatura en esta dirección es considerable y continúa en aumento (Harper, 1970, 1997; van Wijngaarden, 1993; Zhu y col., 1994; Yuan y Prosperetti, 1994; Katz y Meneveau, 1996; Ruzicka, 2000; Chen y Wu, 2000; Zhang y Fan, 2003; Watanabe y Sanada, 2006). El estudio de estos sistemas es un paso necesario en la derivación de modelos promediados en mecánica de fluidos de sistemas multifásicos (Yuan y Prosperetti, 1994). Además, se contribuye con información fundamental para la obtención de modelos determinísticos de las tasas de coalescencia, rompimiento y velocidad de las burbujas, los cuales son necesarios en la implementación de modelos basados en esquemas de ecuaciones de balance de población (Cameron y col., 2005).

## 0.2. Planteamiento del problema

Consideremos un par de cuerpos esféricos del mismo diámetro moviéndose rectilíneamente en un volumen infinito de un fluido newtoniano con flujo uniforme; llamaremos *cuerpo puntero* al cuerpo que se abre camino en el flujo uniforme. Este cuerpo desarrolla una estela laminar que interactúa hidrodinámicamente con el segundo cuerpo, facilitando y dirigiendo su movimiento en la corriente de flujo abierto por la estela. Este segundo cuerpo es el *cuerpo acarreado*. Consideremos los siguientes regímenes de flujo laminar:

1. Burbujas a  $Re$  grandes  $50 \leq Re \leq 200$ .
2. Burbujas a  $Re$  pequeños a intermedios  $1 \leq Re < 50$ .

3. Esferas sólidas a  $Re$  intermedios  $24 \leq Re \leq 130$ .

En el primer caso, cálculos de capa límite de Moore (1963) muestran que si una burbuja invíscida libre de surfactantes asciende en un fluido viscoso con flujo uniforme, existe una región en la estela de longitud  $R Re^{1/2}$  y espesor  $R Re^{-1/4}$  (siendo  $R$  el radio de burbuja) en la cual el flujo es casi paralelo, y además, muy parecido al descrito por la solución potencial. Así que, la fuerza hidrodinámica inercial en esta región puede ser aproximada usando la expresión de la fuerza repulsiva potencial invíscida obtenida por Lamb (1932), tal como fue considerada en los estudios de Yuan y Prosperetti (1994) y Ruzicka (2000, 2005). A distancias mayores a  $R Re^{1/2}$ , el flujo en la estela sigue el perfil de velocidad asintótico. Por consiguiente, existen gran cantidad de trabajos en la literatura en los que se han desarrollado modelos para predecir la dinámica de cúmulos de burbujas utilizando las predicciones de la teoría de flujo potencial (e.g. Sangani y Didwania, 1993b, y los trabajos citados en la Sección 2.5). Sin embargo, en estudios teóricos posteriores se encontró que el arrastre sobre una burbuja moviéndose en la estela generada por otra (a  $Re$  de hasta 200) difiere significativamente de la predicción potencial (Yuan y Prosperetti, 1994; Harper, 1997). Por lo tanto, el uso de la solución potencial para describir la interacción entre burbujas tiene limitaciones intrínsecas las cuales aún deben ser entendidas (Legendre y col., 2003). Estos argumentos sugieren la necesidad de contar con expresiones para el arrastre sobre la burbuja que consideren el efecto de la estela.

Para los dos últimos regímenes de flujo considerados, la difusión de vorticidad en la superficie es significativa, aunque es mayor para las esferas sólidas a un mismo  $Re$  (debido a que los esfuerzos viscosos tangenciales en la superficie de la burbuja son despreciables pero muy importantes en las partículas sólidas). Así que, aún para burbujas, la teoría de capa límite de Moore (1963) no proporciona una descripción adecuada del flujo de los alrededores. Por lo tanto, para burbujas a  $Re$  pequeños a intermedios o esferas sólidas a  $Re$  intermedios la suposición de flujo potencial en la estela es ciertamente inadecuada (Clift y col., 1987; Legendre y col., 2003); consecuentemente, los efectos inerciales en la estela difieren significativamente de la predicción potencial invíscida descrita en el párrafo anterior. En los estudios existentes para estos dos regímenes de flujo, la contribución de la inercia del fluido en la fuerza hidrodinámica se desprecia (Zhu y col., 1994; Chen y Lu, 1999; Chen y Wu, 2000; Zhang y Fan, 2002, 2003), o se incorpora utilizando expresiones analíticas asintóticas válidas para  $Re < 1$  o  $Re \rightarrow \infty$  (Katz y Meneveau, 1996; Watanabe y Sanada, 2006). Sin embargo, sin importar la condición de frontera en la superficie: esfuerzo tangencial despreciable para la burbuja, o condición de no-deslizamiento para la esfera sólida, a una cierta distancia, el flujo en la estela puede ser aproximado por medio del perfil de velocidad asintótico introduciendo un coeficiente de roza-

miento adecuado (Batchelor, 1967; Katz y Meneveau, 1996). Así, en este estudio, se propone evaluar los efectos inerciales y viscosos del fluido utilizando el perfil de velocidad asintótico. De acuerdo con mi conocimiento actual de la literatura, para un par de esferas sólidas o un par de burbujas interactuando en línea en el régimen de flujo  $O(10)$  a  $O(100)$ , no existe un trabajo previo en el que se haya evaluado la contribución de los efectos inerciales por medio de la solución asintótica en la estela laminar de la esfera de adelante.

### 0.3. Antecedentes

La dinámica de un par de cuerpos (burbujas o esferas sólidas) interactuando por medio de la estela del cuerpo puntero ha sido estudiada extensivamente (cfr. Ruzicka, 2000, 2005, y las citas contenidas en estos trabajos). A continuación se citan los trabajos que se consideran más importantes en el contexto de este estudio.

Harper (1970), extendió la teoría de Moore (1963) al caso de dos burbujas esféricas interactuando en línea. En su desarrollo incluyó la presencia de una estela delgada, pero supuso flujo potencial entre burbujas. Sin embargo, para  $Re$  de hasta 200, los efectos viscosos en la estela afectan significativamente el arrastre sobre la burbuja acarreada. Esto fue demostrado primero por Yuan y Prosperetti (1994), quienes resolvieron numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes a  $20 \leq Re \leq 200$ . Encontraron que el arrastre sobre la burbuja acarreada depende del  $Re$ , es siempre inferior al de la burbuja puntera y se reduce al disminuir la separación entre burbujas. Estudios experimentales y numéricos de un par de esferas sólidas han mostrado este mismo comportamiento (Sirignano, 1993; Zhu y col., 1994; Liang y col., 1996; Chen y Lu, 1999; Chen y Wu, 2000). Yuan y Prosperetti (1994) predijeron la existencia de una *distancia de equilibrio* entre burbujas a la cual, la diferencia en el arrastre actúa como una fuerza atractiva que se compensa con la fuerza inercial repulsiva.

Zhang y Fan (2002) obtuvieron una expresión para la fuerza de arrastre sobre una esfera estacionaria interactuando con la estela laminar de la esfera puntera. Posteriormente, Zhang y Fan (2003) usaron su expresión previa para predecir la velocidad de ascenso de un par de burbujas ascendiendo en línea. En estos estudios el efecto total de la estela se consideró como una reducción en el arrastre local, despreciando cualquier efecto inercial adicional del líquido.

Katz y Meneveau (1996) realizaron experimentos con un tren de burbujas esféricas de aire del mismo diámetro ascendiendo en línea en agua estancada a  $0.2 \leq Re \leq 35.5$ . Observaron que el efecto de atracción de la estela de la burbuja puntera culminó con una colisión y posteriormente ocurrió la coalescencia entre el par de burbujas contiguas. La coalescencia entre un par de burbujas ascendiendo en línea también fue observada experimentalmente por

Chester y Hoffman (1982) y Tsao y Koch (1994). Estas observaciones contradicen la existencia de una distancia de equilibrio. Como posibles causas de esta discrepancia se han mencionado la deformación de las burbujas (Yuan y Prosperetti, 1994) y la presencia de surfactantes (Harper, 1997).

Recientemente, Watanabe y Sanada (2006) y Sanada *y col.* (2006) observaron una distancia estable de separación en burbujas esféricas a  $Re$  intermedios, y concluyeron que la discrepancia entre Yuan y Prosperetti (1994) y Katz y Meneveau (1996) se originó en la diferencia en el  $Re$ . Sin embargo, Katz y Meneveau (1996) reportan que observaron la coalescencia entre el par de burbujas contiguas para  $Re$  de hasta 140. Por lo tanto, en la actualidad aún no se ha comprendido el origen de esta discrepancia.

De acuerdo a los trabajos discutidos previamente, resulta evidente la carencia de un buen entendimiento del efecto total de la estela sobre el cuerpo acarreado. En este estudio se pretende adquirir información fundamental sobre las diversas fuerzas que gobiernan el fenómeno. A continuación se describen los objetivos generales y particulares que se desean alcanzar.

## 0.4. Objetivos

### 0.4.1. Objetivos Generales

Estudiar la interacción hidrodinámica de un cuerpo esférico (burbuja de gas o partícula sólida) con la estela laminar de otro cuerpo idéntico al ya mencionado, moviéndose a lo largo de la línea que une sus centros en un fluido newtoniano con flujo uniforme y estacionario.

### 0.4.2. Objetivos Particulares

- Analizar la relación de las fuerzas de contacto (viscosas y de presión) con las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre un cuerpo inmerso en un flujo laminar no-uniforme.
- Analizar la fuerza hidrodinámica sobre un segundo cuerpo (cuerpo acarreado) interactuando con la estela laminar generada por el primero (cuerpo puntero).
- Identificar las fuerzas más significativas sobre el cuerpo acarreado.
- Estimar la fuerza de arrastre sobre el cuerpo acarreado, definiendo apropiadamente la velocidad característica de la estela, como alternativa al uso de funcionalidades diversas en el coeficiente de arrastre estacionario.

- Obtener expresiones para la fuerza de arrastre estacionaria, fuerza hidrodinámica y la velocidad de aproximación del cuerpo acarreado, y compararlas con datos experimentales y numéricos de la literatura.

## 0.5. Metodología

A continuación se presenta la metodología a seguir. Inicialmente, partiendo de una formulación integral del principio de balance de momentum, se obtiene una expresión integral exacta para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo inmerso en un volumen de control de fluido. Realizando algunas simplificaciones sobre esta expresión, se obtiene la ecuación del balance integral de momentum para el cuerpo acarreado. Esta expresión es el punto de partida en la obtención de una expresión aproximada explícita para la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada. Posteriormente, suponiendo que la velocidad del flujo en la estela varía sólo ligeramente en distancias del orden de la dimensión del cuerpo, y usando expresiones analíticas reportadas en la literatura para la fuerza hidrodinámica, obtenidas a partir de la integración directa del esfuerzo normal y tangencial sobre la superficie del cuerpo en ambos límites asintóticos (flujo reptante y potencial), se analiza el efecto de la estela sobre el cuerpo acarreado. Por último, suponiendo una descomposición de fuerzas similar a las existentes en flujo reptante y aproximando el flujo local en la estela por medio de soluciones asintóticas conocidas, se evalúa la contribución de cada una de las fuerzas (inerciales y viscosas) y se obtienen expresiones algebraicas para el arrastre estacionario, la fuerza hidrodinámica y para la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada a la puntera.

## 0.6. Contenido de la tesis

A continuación se da una descripción general del contenido de esta tesis:

### Parte I. Trabajos Previos

**Capítulo 1.** Para una partícula esférica inmersa en un fluido newtoniano con flujo uniforme y estacionario, se presenta una revisión de los estudios existentes sobre el flujo detrás de la partícula y de las fuerzas que actúan sobre ella.

**Capítulo 2.** Se presenta una revisión de los estudios realizados sobre la interacción hidrodinámica de un par (o tren) de partículas interactuando en línea.

### Parte II. Análisis

**Capítulo 3.** Partiendo de una formulación integral del principio de conservación de momentum para un volumen material, se obtienen expresiones integrales para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo inmerso en un volumen de control material y en un volumen de control fijo. Se analiza el flujo en la estela laminar y estacionaria de un cuerpo esférico. Se obtienen expresiones para la fuerza hidrodinámica actuando sobre un cuerpo esférico inmerso en un flujo no-uniforme y estacionario. Se analiza la relación de las fuerzas de contacto (viscosas y de presión) con las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre el cuerpo.

**Capítulo 4.** Se obtienen expresiones explícitas para la fuerza de arrastre cuasiestacionaria actuando sobre una esfera inmersa en un flujo no-uniforme.

**Capítulo 5.** Se obtienen modelos explícitos para la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada. En 5.1 se parte de un balance global de momentum, y en 5.2 se parte de la expresión diferencial para la fuerza hidrodinámica obtenida en la Sección 3.6.

**Capítulo 6.** Se obtienen modelos para la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada a la burbuja puntera. En 6.1 se obtiene un modelo aproximado. En 6.2 basándose en diferentes suposiciones del conjunto de fuerzas que actúan sobre la burbuja acarreada se obtienen diferentes modelos matemáticos.

### Parte III. Resultados y Conclusiones

**Capítulo 7.** Se comparan las expresiones obtenidas en el Capítulo 5 con mediciones experimentales y se analiza la contribución de cada una de las fuerzas.

**Capítulo 8.** Se comparan las expresiones obtenidas en el Capítulo 6 con mediciones experimentales y se analiza la contribución de cada una de las fuerzas.

**Capítulo 9.** Se dan las conclusiones generales y sugerencias para trabajos futuros.

### Apéndices. Apéndice A

En A.1 se obtiene la solución asintótica para el flujo en la estela de un cuerpo esférico. En A.2 se obtienen las expresiones adimensionales del conjunto de fuerzas totales que actúan sobre la burbuja acarreada que son usadas en los modelos del Capítulo 6.





Parte I

**Trabajos Previos**



# Capítulo 1

## Una partícula moviéndose en un fluido viscoso

### 1.1. Fundamentos teóricos

La ley física fundamental que gobierna el movimiento de una partícula inmersa en un fluido es la segunda ley de Newton. Por consiguiente, en el estudio del movimiento de un conjunto de partículas (fase dispersa), en un ambiente estacionario o transitorio de fluido (que constituye la fase continua), es necesario resolver una ecuación de movimiento para cada partícula. Si el flujo de fluido es estacionario y uniforme, el problema queda cerrado si se define convenientemente una ley de arrastre que relacione el arrastre sobre la superficie de la partícula con la diferencia de velocidad instantánea entre las dos fases, y así se obtiene la velocidad de la fase dispersa. Por otro lado, si el flujo de fluido es transitorio y/o no-uniforme, es necesario además conocer una expresión para la velocidad local del flujo no perturbado por la presencia de la partícula (cfr. Maxey y Riley, 1983; Clift *y col.*, 1987; Mei y Klausner, 1992; Michaelides, 2003).

### 1.2. Soluciones analíticas para el flujo detrás de una partícula esférica

Nuestro interés en este trabajo es obtener modelos simplificados para la fuerza hidrodinámica y velocidad de aproximación del cuerpo acarreado basados en el conocimiento de la estructura del flujo detrás del cuerpo puntero. En este contexto, a continuación se presenta una revisión de la literatura de las soluciones analíticas existentes.

Para un cuerpo esférico (burbuja, gota o partícula sólida) estacionario sobre el cual incide

una corriente uniforme de un fluido puro de dimensión infinita, un problema fundamental en dinámica de fluidos es obtener soluciones analíticas del perfil de velocidad uniformemente válidas en toda la región del flujo perturbado por el cuerpo. Las únicas soluciones disponibles en la literatura para una esfera sólida han sido obtenidas para los siguientes regímenes de flujo: flujo reptante o de Stokes (despreciando los términos inerciales en las ecuaciones de Navier-Stokes),  $Re \rightarrow 0$  (Stokes, 1845), flujo de Oseen,  $Re < 1$  (Oseen, 1910) y flujo potencial o ideal (despreciando los términos viscosos en las ecuaciones de Navier-Stokes),  $Re \rightarrow \infty$  (Poisson, 1831). La primera solución analítica general para el estudio de burbujas, gotas y partículas sólidas moviéndose en un ambiente estacionario y uniforme en el régimen de flujo reptante fue derivada independientemente por Hadamard (1911) y Rybczynski (1911). Sin embargo, con anterioridad, Oseen (1910) había encontrado una dificultad fundamental al despreciar los términos inerciales del balance de momentum alrededor de partículas sólidas inmersas en un medio infinito de fluido. Encontró que para cualquier valor finito del  $Re$  y distancias mayores a  $d/Re$ , el término inercial tiene una contribución comparable en magnitud con el término viscoso, por lo que la solución de flujo reptante deja de ser válida. Para remover esta inconsistencia y alcanzar su famosa solución, en lugar de despreciar los términos inerciales, sugirió linealizarlos (cfr. Batchelor, 1967; Clift y col., 1987). La solución correspondiente para una burbuja que cumple con la restricción de esfuerzo tangencial nulo sobre la superficie de la burbuja fue obtenida por Golovin y Ivanov (1973).

En el límite de  $Re \rightarrow \infty$  y  $We \rightarrow 0$ , burbujas de gas moviéndose en un fluido de baja viscosidad pueden ser aproximadas como esferas, y dado que no existe resistencia a la circulación interna, el flujo en sus alrededores como potencial (Lamb, 1932; Landau y Lifshitz, 1958). No obstante, en burbujas reales moviéndose a  $50 \leq Re \leq 200$ , es necesario realizar una corrección a la descripción de flujo potencial. Esto se debe a la existencia de una capa límite delgada alrededor de la superficie, y a una estela estrecha donde se confina la vorticidad producida en la superficie. Moore (1963) resolvió analíticamente las ecuaciones de capa límite y excepto en las cercanías del punto de estancamiento en donde encontró singularidades en el campo de presión y velocidad, obtuvo una descripción acertada del flujo en los alrededores.

Vamos a referirnos ahora al flujo en la estela de una esfera aislada (burbuja o partícula sólida) a  $Re \sim 10 - 100$ , el término *estela* se aplica generalmente a toda la región de fluido localizada en el hemisferio de atrás del cuerpo con vorticidad diferente de cero (Batchelor, 1967). Aún cuando el flujo incidente sea uniforme y estacionario, el perfil de velocidad en la estela cercana a la esfera podría ser complicado, dependiendo del régimen de flujo y de la condición de frontera sobre la superficie: esfuerzo tangencial despreciable para la burbuja (debido a una circulación interna del gas), y no-deslizamiento para la partícula (ocasionado

por la adherencia del fluido a la superficie). Para esferas sólidas, experimentalmente se ha observado que en la estela cercana al cuerpo existe una zona de recirculación del flujo o *anillos vorticosos* que se asocia a la existencia de separación en la capa límite (Batchelor, 1967; Clift y col., 1987). No obstante, si la esfera se mueve en línea recta, existe una región denominada *estela laminar* en la cual las líneas de corriente que pasan muy cerca del cuerpo son casi paralelas y tienen simetría transversal. Para un mismo  $Re$ , esta distancia es menor para una burbuja esférica que para una esfera sólida debido a que para la burbuja no existe separación de la capa límite. En esta región, la vorticidad producida en la superficie del cuerpo es continuamente transportada en la dirección del flujo, y difundida transversalmente por efecto de la viscosidad y la velocidad está dominada por su componente axial. Por lo tanto, el transporte convectivo de momentum es mucho mayor que el difusivo, y el cambio de velocidad en dirección axial es pequeño en comparación con el transversal (Landau y Lifshitz, 1958). Así, las aproximaciones de la teoría de capa límite son aplicables en esta región tanto para burbujas como para esferas sólidas (cfr. Moore, 1963; Batchelor, 1967; Schlichting, 1979).

Un efecto adicional que acompaña la propagación continua de la estela, es la tendencia de las fuerzas de fricción a hacer que el campo de velocidad sea uniforme. Así, además de las aproximaciones de capa límite, se puede suponer que en la estela lejana los cambios de presión son pequeños y el defecto de la velocidad axial es mucho menor que la velocidad de la corriente uniforme de fluido. Al aplicar un balance global de momentum y de masa sobre un volumen de control en cuyo interior se encuentra el cuerpo, y considerar que la pérdida total de momentum del fluido es igual al arrastre sobre el cuerpo, se obtiene la solución del perfil de velocidad asintótico (Batchelor, 1967; Schlichting, 1979) (véase el Apéndice A.1 en donde se realiza la deducción de ésta solución).

### 1.3. Expresiones analíticas y correlaciones para el coeficiente de arrastre sobre esferas

Una expresión analítica general para el coeficiente de arrastre estacionario sobre una esfera de fluido moviéndose a su velocidad terminal en un flujo uniforme y  $Re \rightarrow 0$  fue obtenida por Hadamard (1911) y Rybczynski (1911). Esta expresión produce la ley de Stokes para una esfera sólida,  $C_d = 24/Re$  (Stokes, 1845) y  $C_d = 16/Re$  para una burbuja invíscida libre de surfactantes. A  $Re$  finitos, es necesario considerar las desviaciones implicadas en la restricción de flujo reptante. La primera corrección fue realizada por Oseen (1910) (véase la Sección 1.2), quien obtuvo  $C_d = 24/Re(1 + 3/8Re)$  para la esfera sólida, y para una

burbuja por Golovin y Ivanov (1973), quienes llegaron a  $C_d = 16/Re(1 + 1/8Re)$ , ambas válidas a  $Re < 1$ . Para  $Re$  más grandes, el coeficiente de arrastre para una esfera aislada se estima mediante la correlación  $C_d = 24/Re(1 + 0.158Re^{0.687})$  (Schiller y Nauman, 1933) válida para  $Re < 800$ . Para una burbuja de gas moviéndose a  $Re$  muy grandes, el flujo alrededor de la burbuja no se separa y se comporta como un flujo potencial. El famoso resultado  $C_d = 48/Re$ , el cual es exacto hasta  $O(Re^{-1})$  fue primero obtenido via el método de disipación por Levich (1949). Una mejora en la expresión de Levich al calcular la disipación en la capa límite, la región de estancamiento y en la estela fue obtenida por Moore (1963), quien obtuvo  $C_d = 48/Re(1 - 2.21/Re^{0.5}) + O(Re^{-3/2})$ , válida a  $Re \geq 50$  (Magnaudet y Eames, 2000). Para  $Re \leq 50$ , Magnaudet y col. (1995) propusieron la correlación  $C_d = 16/Re(1 + 0.158Re^{0.5})$ . El coeficiente de arrastre estacionario para una burbuja puede también ser expresado usando la correlación de Mei y Klausner (1992), quienes obtuvieron  $C_d = 16/Re(1 + [8/Re + 0.5|1 + 3.31Re^{0.5}]^{-1})$ , la cual empata muy bien ambos límites asintóticos. El coeficiente de arrastre para una burbuja suele también expresarse tomando el valor menor dado por las siguientes expresiones:  $C_d = MIN [16/Re (1 + 0.158Re^{0.687}), 48/Re]$  (Tomiya, 2001).

## 1.4. Observaciones experimentales

Es bien sabido que la dinámica de una partícula aislada difiere respecto a la de una partícula interactiva en una suspensión de partículas. Sin embargo, el estudio del comportamiento de una burbuja aislada ha permitido adquirir un mejor entendimiento de la dinámica de burbujas interactivas, este ha sido el sentido de la principal contribución de muchos estudios (Wallis, 1987; Duineveld, 1995; Maxworthy y col., 1996; Manasseh y col., 2001; de Vries y col., 2002); entre otros mencionados por Michaelides (2003) y Magnaudet y Eames (2000). No obstante, debido a que la estructura del flujo alrededor de un cuerpo moviéndose cerca de otros es modificado por los cuerpos contiguos, la aplicabilidad de estos resultados a la descripción de flujos de partículas se limita a concentraciones bajas (típicamente menor que 1-2% en volumen). En particular, la interacción hidrodinámica entre cuerpos influye grandemente en la distribución espacial de la fase dispersa, principalmente en regiones donde la concentración de partículas es significativa. Esto suele apreciarse más en partículas ligeras y burbujas, dado que la inercia del sistema se concentra principalmente en la fase continua.

Los primeros estudios sobre el movimiento de una burbuja aislada ascendiendo en un líquido viscoso estancado fueron realizados aplicando directamente sobre burbujas resultados anteriormente obtenidos para una esfera sólida (Morrison y Stewart, 1976). Por otro lado, experimentos con burbujas mostraron que su comportamiento es muy diferente al de una

esfera sólida; las burbujas se deforman de acuerdo a las fuerzas locales que actúan sobre su superficie, las cuales a su vez dependen del régimen de flujo (Magnaudet y Eames, 2000; de Vries y col., 2002). Además, las burbujas esféricas de gas ascendiendo en un líquido libre de surfactantes exhiben circulación interna, por lo que las condiciones de frontera sobre la superficie de esferas sólidas y burbujas de gas son diferentes: sin deslizamiento ni deformación para una esfera sólida, esfuerzo tangencial nulo y deformación superficial para una burbuja de gas (Levich, 1962). Estas diferencias influyen grandemente la producción de vorticidad sobre la superficie, en consecuencia, también la estructura de sus estelas, así como las fuerzas ejercidas por el fluido circundante (Magnaudet y Eames, 2000).

Para burbujas de aire en agua, la viscosidad del gas es despreciable respecto a la del líquido, de modo que existe muy poca resistencia viscosa a la circulación interna del gas; por consiguiente, tanto el arrastre como la velocidad terminal de la burbuja son sumamente sensibles a la presencia de surfactantes (Clift y col., 1987). Así, una ligera contaminación del líquido puede afectar significativamente la libre circulación del líquido sobre la superficie de la burbuja, y hacer que la superficie de la burbuja se asemeje a una superficie sólida (Levich, 1962; Batchelor, 1967; Clift y col., 1987).

En esta tesis se estudia la dinámica de burbujas esféricas de gas ascendiendo rectilíneamente en agua pura a  $Re$  de hasta 200, lo cual a una temperatura de  $25^\circ\text{C}$  y presión de 1 atm corresponde a un diámetro inferior a 0.8 mm (Duineveld, 1995; Tomiyama, 2001). En este caso, el número de Weber que relaciona los efectos inerciales con los de tensión superficial,  $We = \rho u_s^2 d / \sigma$  es menor a la unidad, y la forma de la burbuja es cercana a esférica. Siendo  $\rho$  y  $\sigma$  la densidad y la tensión superficial del líquido.

## 1.5. Balance de fuerzas sobre una esfera aislada

La ecuación de movimiento para una esfera sólida pequeña moviéndose en un flujo transitorio no-uniforme a condiciones de flujo reptante fue derivado por Maxey y Riley (1983). Si el flujo es uniforme, su expresión se reduce a la expresión de Basset-Boussinesq (Boussinesq, 1885; Basset, 1888). Para simplificar el problema, Maxey y Riley (1983) consideraron el campo de flujo como la suma del flujo no-perturbado (o en ausencia de la esfera) más la contribución del flujo perturbado por la presencia de la esfera (véase la Fig. 1.1). Demostraron que, si el flujo es laminar, sin ninguna restricción respecto al  $Re$ , las fuerzas del flujo no-perturbado son la suma de la fuerza de gravedad actuando sobre la masa de fluido que ocupa el volumen de la esfera, más la fuerza de aceleración del fluido. Con la restricción  $Re \rightarrow 0$ , las fuerzas del flujo perturbado, incluyen las fuerzas de masa agregada, arrastre viscoso, y de Basset-Boussinesq

(término histórico de fuerza), incorporando en cada expresión el efecto de la no-uniformidad del campo de velocidad del fluido por medio de los *términos de Faxen* (Faxen, 1922). El arrastre viscoso estacionario tiene dos contribuciones: la primera es la resistencia de forma que resulta de integrar la distribución de presión dinámica sobre la superficie de la esfera, y la segunda es la resistencia de fricción que se obtiene al integrar la distribución del esfuerzo cortante en dicha superficie. Si la esfera se mueve rectilíneamente, la ecuación de movimiento

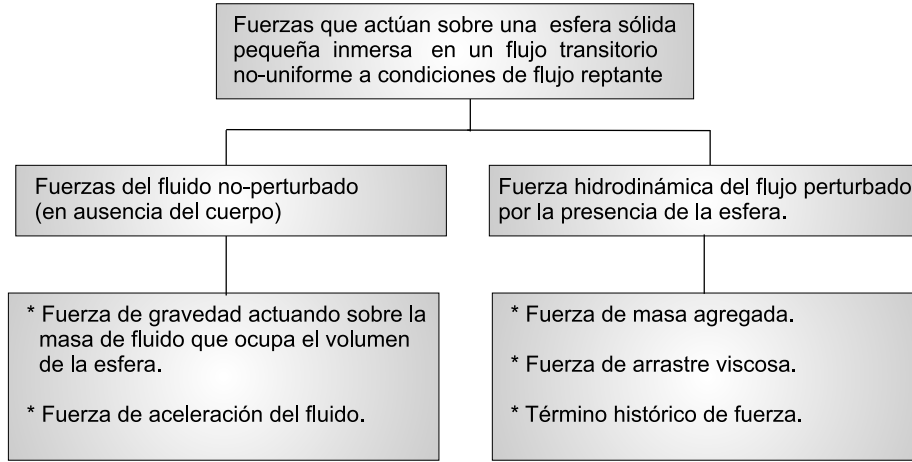


Figura 1.1: Fuerzas del fluido sobre una esfera pequeña en condiciones de flujo reptante.

de Maxey y Riley (1983) se puede expresar como

$$m_b \frac{dU_b}{dt} = F_b + F_{WR}(t) + F_{AM}(t) + F_d(t) + F_h(t), \quad (1.5.1)$$

donde  $m_b$  es la masa del cuerpo,  $U_b$  su velocidad y  $t$  el tiempo. De los términos de la ecuación anterior, el lado izquierdo representa la aceleración de la esfera; mientras que los términos del lado derecho indican las diversas fuerzas que actúan sobre la esfera. El primer término  $F_b$  denota las fuerzas volumétricas o fuerza boyante neta (que agrupa a la fuerza de flotación y gravedad). Los otros términos representan contribuciones a la fuerza hidrodinámica; estas son la fuerza de aceleración del fluido  $F_{WR}$ , la de masa agregada  $F_{AM}$ , la de arrastre viscoso  $F_d$  y la de Basset-Boussinesq (ó término histórico de fuerza)  $F_h$ , respectivamente. Si la esfera se mueve verticalmente en un flujo transitorio y no-uniforme  $w(z, t)$ , las fuerzas actuando sobre la esfera están dadas por

$$F_b = (m_b - m_f) g, \quad (1.5.2)$$



$$F_{\text{WR}}(t) = m_f \left. \frac{Dw}{Dt} \right|_0, \quad (1.5.3)$$

$$F_{\text{AM}}(t) = -\frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} \left( U_b - w_0 - \frac{1}{40} d^2 \nabla^2 w \Big|_0 \right), \quad (1.5.4)$$

$$F_{\text{d}}(t) = -3\pi d \mu \left( U_b - w_0 - \frac{1}{24} d^2 \nabla^2 w \Big|_0 \right), \quad (1.5.5)$$

y

$$F_{\text{h}}(t) = \frac{3}{2} \pi d^2 \mu \int_0^t \left( \frac{d/d\tau [U_b - w_0 - \frac{1}{24} d^2 \nabla^2 w|_0]}{[\pi \nu (t - \tau)]^{1/2}} \right) d\tau. \quad (1.5.6)$$

Aquí,  $m_f = \rho \pi d^3 / 6$  es la masa de fluido desplazado por la esfera,  $Dw/Dt$  denota una derivada temporal siguiendo un elemento de fluido del flujo no perturbado por la presencia del cuerpo,  $dw/dt$  es la derivada temporal de un elemento de fluido siguiendo la trayectoria del cuerpo. El subíndice  $_0$  indica cantidades evaluadas en el lugar donde se ubica el centro de la esfera. Además, los términos del laplaciano en todos los paréntesis, corresponden al efecto de la no-uniformidad o términos de Faxen (Faxen, 1922).

La ecuación de movimiento para una pequeña burbuja esférica moviéndose en un flujo transitorio (uniforme) libre de surfactantes en el régimen de flujo reptante, fue derivada por Morrison y Stewart (1976). Encontraron que el término de masa agregada es el mismo que para una esfera sólida, mientras que los términos de fuerza de arrastre e histórico se reducen por un factor de  $2/3$ . Obtuvieron dos términos históricos adicionales que contienen dentro del integrando derivadas temporales de segundo orden tanto del fluido como del cuerpo. Morrison y Stewart (1976) afirman que estos términos aparecen por la condición de libre circulación de líquido sobre la superficie de la burbuja. Sin embargo, para burbujas pequeñas de aire ( $d \approx 50 \mu m$ ) moviéndose en agua en el régimen de flujo reptante, ambos términos son al menos cuatro órdenes de magnitud inferiores respecto al término histórico usual o Ec. (1.5.6), y consecuentemente se pueden despreciar.

La ecuación de movimiento unidimensional para una esfera pequeña inmersa en un flujo invíscido, incompresible, transitorio, y no-uniforme con velocidad  $w(z, t)$ , puede ser planteada en la misma forma que (1.5.1) si se utiliza la expresión de la fuerza hidrodinámica obtenida secuencialmente por Taylor (1928), Voinov y col. (1973), Landweber y Miloh (1980), L'huillier (1982) y Auton (1984) (cfr. Auton y col., 1988; Magnaudet y Eames, 2000), la cual se expresa como

$$F_{\text{HDI}} = -V_b \left[ \nabla p_k (1 + C_M) + C_M \rho \frac{dU_b}{dt} \right], \quad (1.5.7)$$

donde  $V_b = \pi/6 d^3$  es el volumen de la esfera,  $p_k$  la presión dinámica del medio y  $C_M$  el coefi-

ciente de masa agregada. Utilizando la ecuación de Euler, es posible expresar la contribución del gradiente de presión dinámica de (1.5.7) como una contribución de la fuerza inercial del fluido (Auton y *col.*, 1988), por lo que

$$F_{\text{HDI}} = m_f \left[ (1 + C_M) \frac{Dw}{Dt} \Big|_0 - C_M \frac{dU_b}{dt} \right]. \quad (1.5.8)$$

Aquí, el primer término entre corchetes corresponde a la contribución total de la inercia del fluido, mientras que el segundo término representa la contribución de la aceleración del cuerpo en la fuerza de masa agregada. Agrupando términos en (1.5.8), ésta puede reescribirse como

$$F_{\text{HDI}} = m_f \left[ \frac{Dw}{Dt} \Big|_0 + C_M \left( \frac{Dw}{Dt} \Big|_0 - \frac{dU_b}{dt} \right) \right], \quad (1.5.9)$$

donde los términos dentro del corchete son las fuerzas de aceleración del fluido no perturbado por el cuerpo y la de masa agregada, respectivamente.

Taylor (1928) realizó estudios experimentales para estimar la fuerza hidrodinámica existente sobre un cuerpo fijo localizado en un túnel de viento con un flujo en ausencia del cuerpo  $w = w(s)$  y demostró que, cuando la longitud característica de la variación espacial del flujo no perturbado ( $L$ ) es mucho mayor que el tamaño del cuerpo ( $R$ ); es decir,  $R/L \ll 1$ , el cuerpo experimenta una fuerza hidrodinámica inercial que puede ser estimada a partir de la expresión invíscida. Una expresión exacta para la fuerza hidrodinámica actuando sobre una esfera inmersa en un flujo potencial no-uniforme fue derivada por van Beek (1985). Encontró que la adición del efecto de la no-uniformidad espacial del flujo produce un término adicional (que expresó por medio de una expansión en series) cuya mayor contribución es  $O(R^2/L^2)$  más pequeña respecto al primer término del lado derecho de la Ec. (1.5.8). Por consiguiente; si  $R/L \ll 1$ , la contribución adicional de la no no-uniformidad del flujo a las Ecs. (1.5.8) y (1.5.9) es muy pequeña y puede despreciarse.

Para la fuerza de masa agregada, existe una diferencia entre el término que representa la inercia del fluido de la Ec. (1.5.4) y el de la Ec. (1.5.9). Sin embargo, Maxey y Riley (1983) señalan que en general la derivada temporal del fluido debería realizarse siguiendo la trayectoria de un elemento de fluido ( $Dw/Dt$ ) en lugar de de la trayectoria de la partícula ( $dw/dt$ ). Aclaran que está diferencia, la cual es irrelevante en el contexto de flujo reptante fue obtenida por haber despreciado los efectos inerciales en la estimación de la fuerza de masa agregada. En estudios numéricos (Mei y Klausner, 1992; Kim y Sirignano, 1998) y experimentales (Park y *col.*, 1995), entre otros mencionados por Magnaudet y Eames (2000) concernientes a burbujas esféricas o esferas sólidas, se ha encontrado que mientras el flujo sea laminar, la expresión de

la fuerza de masa agregada de las Ecs. (1.5.8) y (1.5.9) es independiente del  $Re$ . Por lo tanto, la expresión de la fuerza de masa agregada invíscida es válida a cualquier régimen de flujo.

Es importante tener en mente que las expresiones diferenciales analíticas para estimar la fuerza hidrodinámica sobre una esfera aislada discutidas anteriormente, sólo son válidas si el tamaño de la esfera es pequeño en comparación con la región de cambio de la velocidad del cuerpo relativa al flujo no perturbado; y además, el gradiente de presión sobre la superficie de la esfera es aproximadamente uniforme (cfr. Maxey y Riley, 1983; Auton y col., 1988; Magnaudet y Eames, 2000).

Para una burbuja esférica moviéndose en un líquido puro a  $Re$  finitos, actualmente no hay disponible una ecuación de movimiento obtenida a partir de principios fundamentales. En esta situación, la burbuja experimenta principalmente dos efectos: en adición al término de aceleración del flujo no perturbado y la aceleración del flujo perturbado por la presencia del cuerpo (fuerza de masa agregada), se produce vorticidad, la cual se difunde a un tiempo finito hacia los alrededores. Este último efecto produce el comúnmente llamado término histórico de fuerza, cuya contraparte en el contexto de flujo reptante alrededor de un sólido es la fuerza de Basset-Boussinesq. Es importante señalar que a números de Reynolds finitos, la no-linealidad del término inercial en las ecuaciones de Navier-Stokes hace imposible separar las tres contribuciones del flujo perturbado obtenidas con la restricción de flujo reptante (arrastre cuasiestacionario, masa agregada y término histórico de fuerza). Así que, la distinción entre los efectos de disipación viscosa (históricos) y los puramente inerciales (masa agregada) no es clara, debido a que varios mecanismos actúan de manera acoplada (cfr. Magnaudet y Eames, 2000). No obstante, en muchos estudios concernientes a burbujas, gotas o partículas sólidas se ha usado una descomposición similar de fuerzas a las existentes en el régimen de flujo reptante (Odar y Hamilton, 1964; Mei y Klausner, 1992; Mei y col., 1994; Park y col., 1995; Kim y Sirignano, 1998; Holänder, 2005). Sin embargo, esta descomposición no tiene bases teóricas que la justifiquen, y debe verse más bien como una descomposición *ad hoc* para abordar el problema (cfr. Magnaudet y Eames, 2000).

Por arriba del régimen de flujo reptante, Mei y col. (1994), mediante una analogía a la ecuación de Maxey y Riley (1983), propusieron que la fuerza hidrodinámica transitoria (excluyendo la fuerza boyante neta) sobre una esfera moviéndose en línea recta en un flujo transitorio debería expresarse como

$$F_{HD}(t) = F_{WR}(t) + F_{AM}(t) + F_d(t) + F_h(t). \quad (1.5.10)$$

En la ecuación anterior, la fuerza hidrodinámica transitoria incorpora además de los efectos

puramente inerciales de la aceleración local del fluido y masa agregada (conocidas como fuerzas inerciales invíscidas) de la Ec. (1.5.9), la fuerza de frenado por disipación viscosa debido al rozamiento y producción de vorticidad en la superficie del cuerpo. Para  $t > 0$ , la fuerza total por disipación viscosa es

$$F(t) = F_d(t) + F_h(t) = 12 \pi \rho \nu u_s d C_d(t). \quad (1.5.11)$$

Donde  $C_d(t)$  fue introducido por Mei (1993) con la finalidad de considerar conjuntamente el tercer y cuarto término de la Ec. (1.5.10). Además,  $F_d(t)$  representa la contribución de la fuerza de arrastre cuasiestacionaria, es decir, cuando  $t \rightarrow \infty$ , que para un movimiento unidimensional se define introduciendo el siguiente coeficiente de arrastre estacionario

$$C_d = \frac{F_d(t)}{\frac{1}{8} \rho |u_s| u_s \pi d^2}. \quad (1.5.12)$$

De tal manera que la diferencia entre  $C_d(t)$  y  $C_d$  está considerada en el término histórico de fuerza.

El término histórico de fuerza se debe a la acción combinada de la viscosidad, no-uniformidad y principalmente la aceleración relativa de la burbuja respecto al flujo local. Debido a la aceleración relativa de la burbuja, la vorticidad producida en su superficie requiere un tiempo finito para difundirse hacia los alrededores. A medida que el  $Re$  se incrementa el transporte convectivo difunde rápidamente la vorticidad lejos del cuerpo, de modo que el efecto del término histórico persiste por menos tiempo a medida que el  $Re$  se incrementa.

Mei y *col.* (1994) estudiaron numéricamente para  $Re \leq 100$  el efecto del término histórico sobre una burbuja libre de surfactantes sujeta al movimiento súbito de un flujo uniforme de fluido. Propusieron una expresión aproximada para el kernel del término histórico. Encontraron que el kernel del término histórico sobre una burbuja a  $Re$  finitos y tiempos largos decae a una tasa más rápida,  $t^{-2}$ , respecto a la solución para flujo reptante,  $t^{-1/2}$ , lo cual implica que el efecto del término histórico sobre la burbuja a  $Re$  finitos y tiempos largos es menor y perdura por menos tiempo. Para  $Re$  pequeños ( $Re < 1$ ) y tiempos cortos, encontraron que el kernel decae como  $t^{-1/2}$ . Sin embargo, notaron que independientemente del tiempo, el efecto del término histórico se reduce conforme el  $Re$  se incrementa, lo cual concuerda con los resultados de otros estudios discutidos por Michaelides (2003).

Park y *col.* (1995), con la finalidad de la corroborar la validez de la expresión para el kernel del término histórico propuesto por Mei y *col.* (1994), realizaron un estudio experimental de burbujas esféricas ascendiendo en línea en un líquido estancado a  $13 \leq Re \leq 212$ . Partieron

de una expresión similar a la Ec. (1.5.1) (con la inercia del líquido y la no-uniformidad igual a cero) e introdujeron la expresión de Mei y col. (1994) para el kernel del término histórico. Obtuvieron excelentes aproximaciones entre sus mediciones y las predicciones del modelo para la trayectoria de la burbuja y así suministraron una validación indirecta de la expresión del término histórico. Encontraron que la expresión del término histórico obtenida con la restricción de flujo reptante sobre-estima el efecto de frenado sobre la burbuja.

En este Capítulo se realizó una revisión de la literatura para el caso de una sola partícula moviéndose en un fluido viscoso, en el siguiente Capítulo nos enfocaremos específicamente a la interacción hidrodinámica de un par de partículas.



## Capítulo 2

# Interacción hidrodinámica de un par de partículas

### 2.1. Introducción

Independiente de la naturaleza física de los cuerpos (burbujas, gotas o partículas sólidas), el flujo en la estela tiene características similares, particularmente en la región de la estela laminar. Por lo tanto, es una práctica común (Ruzicka, 2000, 2005; Zhang y Fan, 2003) suponer una dinámica de interacción similar entre un par de burbujas y un par de partículas sólidas.

Para una partícula aislada o un sistema diluido de partículas moviéndose estacionariamente en un volumen infinito de fluido, la fuerza hidrodinámica se reduce a la fuerza de arrastre; por consiguiente, se puede obtener el arrastre sobre cada partícula teóricamente o semi-empíricamente usando expresiones del coeficiente de arrastre estacionario. En cambio, en un sistema concentrado de partículas, la estructura del flujo alrededor de cada partícula tiene una fuerte dependencia del arreglo espacial de las partículas cercanas y de la separación entre partículas. Consecuentemente, la fuerza hidrodinámica que experimenta cada partícula es diferente y se desvía significativamente de la de una partícula aislada. Además, a  $Re$  finitos, no se puede distinguir unívocamente la contribución de los efectos viscosos (arrastre estacionario y término histórico) de los puramente inerciales (masa agregada y aceleración del fluido). Por lo tanto, resulta imposible medir u obtener expresiones teóricas para la fuerza hidrodinámica que experimenta cada partícula individual en un sistema concentrado de partículas.

La predicción de la velocidad de un par de cuerpos requiere de expresiones para la fuerza hidrodinámica actuando sobre cada uno, por lo que la medición o predicción de la fuerza hidrodinámica de cuerpos interactuando por medio de la fase continua ha sido y sigue siendo

un tópico de interés. Un requerimiento fundamental para cuantificar la fuerza hidrodinámica en un sistema concentrado de corpúsculos, es entender como afecta la presencia de otros cuerpos a uno de ellos. Así, los estudios se han enfocado en determinar la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo interactuando con uno (o más) cuerpos de los alrededores colocados en una configuración específica. En particular, un par (o tren) de cuerpos esféricos fijos moviéndose en una trayectoria unidimensional en la dirección de un flujo uniforme, representan una de las formas básicas de interacción entre cuerpos. Trabajos previos se han orientado a estudios experimentales, analíticos y numéricos. Sin embargo, aún en esta configuración específica tan simple, es difícil obtener expresiones analíticas para el arrastre sobre cuerpos interactuando con otros, fuera del régimen de flujo reptante. Con la finalidad de nombrar en forma homogénea los diferentes regímenes de flujo de burbujas esféricas y esferas sólidas analizados en este trabajo se propone la clasificación mostrada en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Clasificación de los regímenes de flujo de burbujas y esferas sólidas

Intervalo del $Re$	Nombre	Se aplica a
$Re \rightarrow 0$	Flujo reptante	Burbujas y esferas sólidas
$Re < 1$	$Re$ muy pequeños	Burbujas y esferas sólidas
$1 \leq Re < 10$	$Re$ pequeños	Burbujas y esferas sólidas
$10 \leq Re < 20$	$Re$ moderados	Burbujas
$20 \leq Re < 50$	$Re$ intermedios	Burbujas
$50 \leq Re \leq 200$	$Re$ grandes	Burbujas
$24 \leq Re \leq 130$	$Re$ intermedios	Esferas sólidas
$Re > 200$	$Re$ muy grandes	Burbujas
$Re \rightarrow \infty$	Flujo potencial	Burbujas y esferas sólidas

A continuación se presentan resultados encontrados en la literatura sobre la fuerza hidrodinámica y la velocidad de aproximación a diferentes regímenes de flujo de un par de cuerpos alineados verticalmente.

## 2.2. Flujo reptante

Los estudios analíticos sobre la fuerza de hidrodinámica en partículas interactivas han sido llevados a cabo únicamente a  $Re \rightarrow 0$ . El comportamiento a bajos números de Reynolds de dos partículas esféricas ha sido estudiado ampliamente (cfr. Happel y Brenner, 1990, para una revisión). Para un medio líquido infinito y en ausencia de efectos inerciales, los cuerpos se mueven con una misma velocidad, por lo que su separación permanece constante. Aún en este régimen de flujo, existen interacciones entre los cuerpos, el par de esferas se desplaza más



rápidamente que un cuerpo aislado, y el arrastre total sobre el par de esferas decrece a medida que disminuye su separación. Una técnica eficiente que ha surgido para el estudio teórico del problema de  $n$ -cuerpos es el enfoque de la dinámica stokesiana (Durfolsky y *col.*, 1987; Brady y Bossis, 1988; Fuentes y Kim, 2001). Esta técnica simula dinámicamente el comportamiento de un gran número de partículas en un flujo infinito de fluido.

Stimson y Jeffery (1926) usaron coordenadas bi-esféricas para resolver el problema de flujo reptante axisimétrico que pasa a través de dos esferas sólidas. Derivaron un factor de corrección a la fórmula de arrastre de Stokes, el cual considera los efectos de interacción entre partículas. Otros estudios han empleado el *método de reflexión* implementando un esquema de iteraciones sucesivas (cfr. Happel y Brenner, 1990) o el *teorema de adición* (cfr. Kim, 1987) para resolver el flujo de Stokes a través de dos o más esferas y obtener las fuerzas de arrastre sobre un arreglo de partículas esféricas. A  $Re < 1$ , en presencia de pequeños efectos inerciales, la interacción hidrodinámica de dos esferas sólidas fue primero explorado por Oseen (1927). Las soluciones que obtuvo no son aplicables directamente a burbujas, pero es posible aplicarlas siguiendo el análisis para una burbuja de Golovin y Ivanov (1973) y usando la metodología de Oseen.

### 2.3. Números de Reynolds muy grandes a infinitos

A números de Reynolds muy grandes o cuando  $Re \rightarrow \infty$ , burbujas esféricas de gas moviéndose en un líquido puro exhiben circulación interna (la viscosidad del gas es despreciable). En el límite entre el líquido y el gas la componente tangencial de la velocidad no se anula, pero sí lo hace su derivada normal a la interfaz. De aquí que el gradiente de velocidad cerca del límite no sea particularmente elevado y por lo tanto, a diferencia de una esfera sólida donde las fuerzas viscosas son significativas, no existe separación de la capa límite en la superficie completa de la burbuja (Levich, 1949). Por consiguiente, para el caso de un par de burbujas, se puede utilizar en todo el espacio la distribución de velocidades correspondiente al flujo potencial que rodea a una esfera, despreciando la capa superficial de líquido y la estela turbulenta muy estrecha. Así, el análisis consiste en encontrar el potencial usando dos condiciones de frontera en coordenadas esféricas (Ruzicka, 2000). La fuerza de interacción invíscida es una fuerza de repulsión inercial que decae proporcional a  $\sim \hat{s}^{-4} + O(\hat{s}^{-6})$ , donde  $\hat{s} = s/d$  es la distancia adimensional entre centroides (Lamb, 1932; Harper, 1970). Un par de burbujas alineadas verticalmente se repelen mutuamente y se separan ilimitadamente debido a la inexistencia de la fuerza atractiva ocasionada por la reducción del arrastre local. Las ecuaciones de movimiento para dos burbujas moviéndose en posición general en el régimen de flujo potencial

fueron derivadas por Biesheuvel y van Wijngaarden (1982).

## 2.4. Números de Reynolds pequeños a intermedios

Para burbujas interactuando en línea a  $Re$  pequeños a intermedios ( $1 < Re < 50$ ), o esferas sólidas a  $Re$  intermedios ( $24 \leq Re \leq 130$ ), no existen expresiones teóricas para la fuerza hidrodinámica debido a que ni la solución de Oseen ni la potencial proporcionan un punto de partida aceptable para describir el campo de flujo del líquido atrapado entre ambos cuerpos. Así, dada la inexistencia de resultados analíticos, las fuentes de información más confiables son las observaciones experimentales y las soluciones numéricas. No obstante, se han realizado esfuerzos orientados al desarrollo de modelos aproximados para predecir tanto la fuerza hidrodinámica (Katz y Meneveau, 1996; Zhang y Fan, 2002), como la velocidad de aproximación del cuerpo acarreado (Crabtree y Bridgwater, 1971; Komasa y col., 1980; Bhaga y Weber, 1980; Katz y Meneveau, 1996; Zhang y Fan, 2003).

Para un arreglo de esferas sólidas, algunos de los estudios experimentales pioneros son los de Rowe y Henwood (1961), Lee (1979) and Tsuji y col. (1982). Todos ellos se enfocaron en estudiar los efectos de la distancia dos cuerpo en la estructura del flujo detrás de la primera esfera (cuerpo puntero), y su efecto sobre un segundo cuerpo a  $Re \sim 100$  y mayores. Para un par de cuerpos interactuando en línea, encontraron que el arrastre sobre el segundo disminuye a medida que la distancia entre ellos se reduce. Zhu y col. (1994), Liang y col. (1996), Chen y Lu (1999) y Chen y Wu (2000) midieron las fuerzas de arrastre sobre dos o tres esferas alineadas en la dirección del flujo a  $40 \leq Re \leq 150$ . Encontraron que debido al defecto del flujo en la estela de la esfera puntera, la fuerza de arrastre sobre la segunda esfera colocada corriente abajo es mucho menor que el arrastre sobre la primera esfera. Sin embargo, el arrastre sobre la esfera puntera sólo es afectado ligeramente por la proximidad de la segunda esfera a pequeñas distancias de separación entre esferas. Además, encontraron que el  $Re$  afecta tanto la magnitud de la razón entre el arrastre de la segunda esfera y la esfera puntera como su cambio con la distancia entre esferas.

Las simulaciones numéricas del flujo a través de un arreglo de esferas sólidas, y la determinación de las fuerzas de arrastre resultantes sobre cada esfera han sido principalmente conducidas a  $Re$  intermedios. Tal y col. (1984a) usando coordenadas bi-esféricas, resolvieron numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes para un par de esferas moviéndose a la misma velocidad a  $Re = 40$ , y obtuvieron los coeficientes de rozamiento de ambas esferas. Ramachandran y col. (1991) simuló numéricamente el flujo laminar axisimétrico a través de un arreglo lineal de tres esferas a  $1 < Re < 200$ . Wang y Liu (1993) usando un modelo de

viscosidad turbulenta, simularon el campo de flujo alrededor de un par de esferas sólidas para  $Re \approx 103$ . Liang y col. (1996), junto con sus mediciones experimentales, realizaron un estudio numérico usando un simulador comercial sobre los campos de flujo para un arreglo en línea de tres esferas a  $Re$  de 53 y 106. Sus resultados numéricos revelan los flujos y estructuras de la estela para cada esfera, e indican que el coeficiente de rozamiento de esferas interactivas se desvía considerablemente de los de una esfera aislada a un mismo número de Reynolds.

Katz y Meneveau (1996), realizaron experimentos de un tren de burbujas de aire esféricas del mismo diámetro ascendiendo en línea en agua estancada a  $0.5 < Re < 36$ . Observaron que la burbuja puntera y la más próxima escapaban del tren y debido al efecto de atracción de la estela las burbujas colisionaban y posteriormente coalescían. La burbuja que se forma, atrae nuevamente a la que le precede en el tren, escapan y nuevamente colisionan y coalescen. Este fenómeno es conocido como *proceso de apareamiento y escape*. La velocidad de ascenso de la burbuja puntera no se ve afectada significativamente por la proximidad de la burbuja acarreada, lo cual también fue observado por Crabtree y Bridgwater (1971), Komasa y col. (1980), Bhaga y Weber (1980) y Sanada y col. (2006). Con la finalidad de predecir la velocidad de ascenso de un par de burbujas contiguas de sus experimentos, Katz y Meneveau (1996) desarrollaron un modelo aproximado basado en el conocimiento del flujo alrededor de una sola burbuja y en la estructura de la estela detrás de esta. En la estimación de las fuerzas de presión consideraron ambos límites asintóticos: flujo de Oseen y flujo potencial. Mientras que el defecto del flujo en la estela fue considerado como flujo de Oseen, para  $Re < 1$  y flujo potencial con una estela delgada, para  $Re \gg 1$ .

El efecto de la estela del cuerpo de adelante sobre el cuerpo de atrás interactuando en línea ha sido conocido como un *efecto de escudo*, permitiendo que la velocidad del cuerpo acarreado se incremente a medida que la distancia de separación entre cuerpos disminuye. Para un par de burbujas ascendiendo en línea Crabtree y Bridgwater (1971) observaron que la velocidad de ascenso de la burbuja acarreada puede ser evaluada como la suma de la velocidad terminal de una burbuja aislada más la velocidad del flujo en la estela de la burbuja puntera evaluado en el frente de la burbuja acarreada ( $w_0$ ). Estas observaciones fueron confirmadas por Bhaga y Weber (1980), quienes desarrollaron una expresión empírica para  $w_0$ .

Zhang y Fan (2002) obtuvieron una expresión semianalítica para el arrastre sobre una esfera interactuando con la estela laminar estacionaria de la esfera puntera a  $Re$  pequeños a moderados. Consideraron la fuerza de arrastre como la dominante, despreciando cualquier efecto inercial adicional. Las predicciones de su modelo ajustan adecuadamente mediciones experimentales de Zhu y col. (1994) y Liang y col. (1996). Zhang y Fan (2003), partiendo de un balance de fuerzas para la burbuja acarreada, obtuvieron diferentes modelos para la velocidad

de aproximación de la burbuja acarreada a la puntera, y alcanzaron buenas predicciones de las mediciones experimentales de Katz y Meneveau (1996). Consideraron que además de la fuerza de flotación y el arrastre, deberían tomarse en cuenta las fuerzas de presión, masa agregada y de Basset-Boussinesq. No obstante, argumentaron que en la región lejana de la estela, el gradiente de presión es despreciable, y además, la aceleración del fluido es cero. Sin embargo, en el desarrollo de Maxey y Riley (1983), la contribución de la presión dinámica se transforma en la resistencia por forma que contribuye con  $1/3$  de la fuerza de arrastre de Stokes, la fuerza de aceleración del fluido y en la fuerza de masa agregada. Por consiguiente, no es necesario adicionar un gradiente de presión a la ecuación de movimiento para una esfera, puesto que esta contribución está considerada en la expresión final (cfr. Michaelides, 2003, para una discusión sobre este asunto).

## 2.5. Números de Reynolds grandes

La vorticidad en la capa límite sobre una burbuja ascendiendo en un líquido libre de surfactantes es pequeña y se encuentra confinada en una estela delgada, por lo que los efectos viscosos en la capa límite proveen únicamente una corrección respecto al flujo potencial del orden  $Re^{-1/2}$ , en contraste con una esfera sólida donde los efectos viscosos juegan un papel dominante, y las perturbaciones de la velocidad son del mismo orden de la velocidad irrotacional. Por lo tanto, para el caso de un par de burbujas ascendiendo en línea, es razonable pensar que la solución potencial podría dar una buena descripción del flujo fuera de la capa límite, y así construir una teoría básicamente invíscida, confinando los efectos viscosos en una capa límite delgada e incorporarlos al modelo en forma aproximada. Ejemplos pueden ser encontrados en los estudios de Harper (1970), Sangani y Didwania (1993a,b), Kumaran y Koch (1993a,b), y van Wijngaarden (1993).

Las ecuaciones de movimiento para dos burbujas (en posición general) moviéndose a números de Reynolds grandes fueron derivadas por Kok (1993a,b) y Kumaran y Koch (1993a). En sus aproximaciones, ambos cuerpos experimentaban el mismo arrastre y el par seguía básicamente el mismo escenario invíscido de la ecuación de movimiento obtenida por van Wijngaarden (1993). Sangani y Didwania (1993b) incluyeron los efectos viscosos por medio de la función de disipación potencial. Mientras que en los otros estudios estos efectos fueron despreciados. Sin embargo, para dos burbujas esféricas interactuando en línea a  $Re$  de hasta 200, la contribución de los efectos viscosos en la estela de la burbuja puntera afectan significativamente el arrastre sobre la burbuja acarreada, y además, difieren cualitativa y cuantitativamente de las predicciones de la función de disipación potencial (cfr. Yuan y Prosperetti, 1994, Fig. 2).

Para la situación artificial en que el par de burbujas se mueve a la misma velocidad constante, Yuan y Prosperetti (1994) calcularon los denominados *coeficientes de arrastres verdaderos* substrayendo la fuerza inercial de la solución potencial a la fuerza hidrodinámica total actuando sobre cada burbuja. Encontraron que para distancias mayores a un diámetro de burbuja el arrastre sobre la burbuja puntera es aproximadamente igual al de una burbuja aislada, mientras que el arrastre sobre la burbuja acarreada se reduce monotónicamente conforme el espacio entre burbujas disminuye. La definición de coeficiente de arrastre verdadero se debe a que para este caso particular, la aceleración relativa de la burbuja acarreada con respecto al flujo en la estela de la burbuja puntera es cero. Por consiguiente, no existe contribución al arrastre por parte del término histórico de fuerza.

En un trabajo posterior, Harper (1997) extendió su análisis previo (Harper, 1970), para considerar la difusión de vorticidad entre burbujas, y encontró que únicamente es posible ignorar la difusión viscosa en la estela si  $Re \rightarrow \infty$ . Sugirió una aproximación general para estimar el arrastre de un tren de burbujas ascendiendo en línea. Excepto para distancias de separación entre burbujas menores a tres diámetros, sus resultado para dos burbujas se ajustan muy bien a los valores numéricos calculados por Yuan y Prosperetti (1994).

Ruzicka (2000) estudió numéricamente la dinámica de un tren de burbujas esféricas del mismo diámetro interactuando en línea a  $Re$  grandes. Propuso un balance de fuerzas suponiendo que tres fuerzas actuaban sobre cada burbuja en el tren: flotación, arrastre viscoso e inerciales invíscidas. Además, consideró la existencia de dos tipos de interacciones: locales (entre burbujas contiguas) y no-locales (entre burbujas no contiguas). Para el caso de interacciones locales, propuso una expresión empírica del coeficiente de arrastre para ambas burbujas, y las predicciones de su modelo para la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada se asemejan a los resultados de Yuan y Prosperetti (1994).

En la actualidad no existen técnicas experimentales para medir de manera directa el arrastre sobre un cuerpo interactuando con la estela. Por consiguiente en este trabajo, especialmente los valores del coeficiente de arrastre estacionario sobre la burbuja acarreada calculados por Yuan y Prosperetti (1994) a  $Re = 20, 50, 100$  y  $200$ , y diferentes distancias de separación entre burbujas, son relevantes. Estos datos serán usados para construir una expresión explícita aproximada para la fuerza de arrastre cuasiestacionaria sobre la burbuja acarreada.



**Parte II**

**Análisis**





## Capítulo 3

# Fuerzas actuando sobre un cuerpo inmerso en un fluido

En la Sección 3.1, se deriva la ecuación de conservación de momentum para un volumen material. A esta ecuación le substraeremos la fuerza boyante neta para obtener la ecuación de conservación de momentum que considera únicamente la contribución hidrodinámica. En la Sección 3.2 se obtiene una expresión exacta para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo inmerso en un volumen material de fluido. En la Sección 3.3 usando las expresiones integrales de conservación de masa para un volumen material y un volumen de control fijo, se deriva una expresión exacta para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo inmerso en un volumen de control fijo. En la Sección 3.4 se analiza la estructura del flujo detrás de la esfera puntera. En la Sección 3.5 se obtiene una expresión para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo inmerso en un volumen de control fijo que interactúa en línea con la estela laminar y estacionaria generada por un cuerpo que le antecede (el cuerpo puntero). En la Sección 3.6 se analizan los trabajos de la literatura en los que se han obtenido expresiones analíticas para la fuerza hidrodinámica integrando directamente el esfuerzo normal y tangencial en la superficie del cuerpo.

### 3.1. Ecuación de balance de momentum para un volumen material

El punto de partida consiste en plantear una formulación integral del principio de balance de momentum sobre un volumen de control material de fluido (ver Fig. 3.1). El balance de momentum para un volumen de control material  $\mathcal{V}_m$ , envuelto por una superficie cerrada  $\mathcal{A}_m^*$

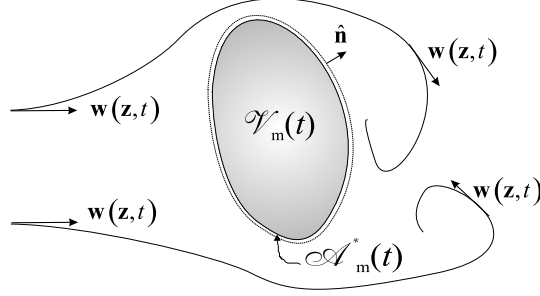


Figura 3.1: Volumen material de fluido de dimensión finita.

con vector normal unitario  $\hat{\mathbf{n}}$  orientado al exterior de la superficie, considerando tanto las fuerzas de contacto como volumétricas, puede formularse por medio de la expresión

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{w} dV = \oint_{\mathcal{A}_m^*(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} dA + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{g} dV, \quad (3.1.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $\mathbf{w}$  la velocidad del campo de flujo laminar,  $\mathbf{g}$  la aceleración gravitacional y  $\mathbf{T}$  el tensor de esfuerzos totales, el cual se define como

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (3.1.2)$$

donde  $\mathbf{I}$  y  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  son el tensor unitario y el de esfuerzos viscosos, respectivamente; y  $p$  denota la presión. Para un fluido newtoniano e incompresible  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  obedece la relación

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mu (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{w} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{w}^T) \quad (3.1.3)$$

y  $p$  corresponde a la presión mecánica. Es decir,  $p$  contiene dos contribuciones, la presión estática  $p_e$  y la presión dinámica  $p_k$ ,

$$p \doteq p_e + p_k. \quad (3.1.4)$$

En otras palabras,  $p_e$  representa la presión ejercida sobre la superficie material  $\mathcal{A}_m^*$  si el fluido está estancado, y  $p_k$  es la contribución adicional si el fluido está en movimiento. Al sustituir la Ec. (3.1.4) en la Ec. (3.1.2) se obtiene

$$\mathbf{T} = -p_e \mathbf{I} + \mathbf{T}_k, \quad (3.1.5)$$

donde  $\mathbf{T}_k$  incluye las dos contribuciones debido al movimiento del fluido alrededor de la superficie de control, estas son la presión dinámica  $-p_k \mathbf{I}$  y el tensor de esfuerzos viscosos dado por la Ec. (3.1.3). Sustituyendo la Ec. (3.1.5) en la Ec. (3.1.1), usando la identidad  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (p_e \mathbf{I}) = p_e \hat{\mathbf{n}}$ , y posteriormente, utilizando el teorema de la divergencia en el término que contiene a la presión estática, se llega a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{w} dV = \oint_{\mathcal{A}_m^*(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_k dA + \int_{\mathcal{V}_m(t)} (\rho \mathbf{g} - \nabla p_e) dV. \quad (3.1.6)$$

La condición de equilibrio mecánico de un fluido en reposo requiere que

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} (\rho \mathbf{g} - \nabla p_e) dV = 0, \quad (3.1.7)$$

de donde puede obtenerse la ecuación general de la hidrostática,  $\rho \mathbf{g} - \nabla p_e = 0$ . Ahora, restando esta condición de equilibrio mecánico de la Ec. (3.1.6) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{w} dV = \oint_{\mathcal{A}_m^*(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_k dA. \quad (3.1.8)$$

Debe remarcarse que la Ec. (3.1.8) contiene únicamente las fuerzas superficiales debidas al movimiento del fluido sobre la superficie  $\mathcal{A}_m^*$ . Este efecto es conocido como la contribución cinética (Bird y col., 1992, p. 2-28) y la correspondiente fuerza resultante es comúnmente llamada fuerza hidrodinámica (Noca, 1997).

## 3.2. Fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo en un volumen de control material

En esta Sección se estudian las fuerzas sobre un cuerpo arbitrario (burbuja, partícula sólida o gota) inmerso en un volumen de control material de un fluido newtoniano e incompresible, de modo que el cuerpo actúa como una frontera física del fluido. Siguiendo el análisis de Noca (1997), se obtiene una expresión exacta para evaluar la fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo. Como puede verse en la Fig. 3.2,  $\mathcal{A}_m^*(t)$  está ahora formada por tres superficies: la superficie del cuerpo  $\mathcal{A}_b(t)$  (con vector normal unitario dirigido hacia dentro del cuerpo), la superficie exterior  $\mathcal{A}_m(t)$  y la superficie de un conducto  $\mathcal{A}_u(t)$  el cual une la superficie exterior con la superficie del cuerpo. El conducto se incluye para eliminar el hueco ocasionado por la presencia

del cuerpo en el interior del volumen material, por lo que ahora se tiene una superficie cerrada  $\mathcal{A}_m^*(t)$  acotando a  $\mathcal{V}_m^*(t)$  con dominio simplemente conexo, lo cual es necesario para aplicar los teoremas integrales. Así que

$$\mathcal{A}_m^*(t) = \mathcal{A}_m(t) \cup \mathcal{A}_b(t) \cup \mathcal{A}_u(t). \quad (3.2.1)$$

Si se elige un conducto plano de espesor infinitesimal  $\varepsilon$ , entonces la integración de la fuerza

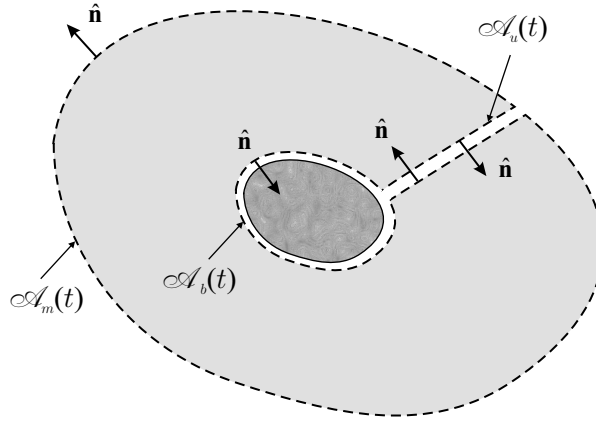


Figura 3.2: Superficie material  $\mathcal{A}_m^*(t)$ .

hidrodinámica sobre  $\mathcal{A}_u(t)$  puede conformarse por la integración sobre ambas caras del conducto más la integración sobre sus extremos. Aplicando el teorema del valor medio en ambos extremos, considerando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se obtiene que la contribución de cada una de estas integrales es despreciable. Además, el tensor de esfuerzos  $\mathbf{T}_k = (-p_k \mathbf{I} + \tau)$  es continuo sobre  $\mathcal{A}_u(t)$ , y también en el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , los vectores unitarios correspondientes a cada superficie satisfacen la relación  $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}_1$ . Por lo tanto,

$$\oint_{\mathcal{A}_u(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p_k \mathbf{I} + \tau) dA = \oint_{\mathcal{A}_u(t)} (\hat{\mathbf{n}}_1 + \hat{\mathbf{n}}_2) \cdot (-p_k \mathbf{I} + \tau) dA = 0. \quad (3.2.2)$$

Así, la integración de  $(-p_k \mathbf{I} + \tau)$  sobre  $\mathcal{A}_m^*(t)$  es equivalente a

$$\oint_{\mathcal{A}_m^*(t)} (-p_k \mathbf{I} + \tau) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint_{\mathcal{A}_m(t)} (-p_k \mathbf{I} + \tau) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \oint_{\mathcal{A}_b(t)} (-p_k \mathbf{I} + \tau) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (3.2.3)$$

Por otro lado, puesto que  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector normal dirigido hacia el cuerpo, la fuerza hidrodinámica ejercida por el fluido de los alrededores sobre el cuerpo está dada por

$$\mathbf{F}_{\text{HD}}(t) = - \oint_{\mathcal{A}_b(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_k dA. \quad (3.2.4)$$

Sustituyendo (3.2.4) en el segundo término del lado derecho de (3.2.3), y la expresión resultante en (3.1.8), se obtiene la siguiente expresión para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo arbitrario inmerso en un volumen de control material:

$$\mathbf{F}_{\text{HD}}(t) = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{w} dV + \oint_{\mathcal{A}_m(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_k dA. \quad (3.2.5)$$

### 3.3. Fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo en un volumen de control fijo

Cuando tenemos un volumen de control fijo en vez de un volumen de control material, a partir de la Ec. (3.2.5) se puede obtener una expresión integral exacta para evaluar la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo inmerso en el volumen de control fijo. La evolución temporal del impulso del fluido para un volumen de control material es

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{w} dV = 0, \quad (3.3.1)$$

mientras que para un volumen de control fijo está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{w} dV + \oint_{\mathcal{A}^*} \hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} dA = 0. \quad (3.3.2)$$

Propongamos que al tiempo  $t$ , el espacio ocupado por el volumen material  $\mathcal{V}_m(t)$  coincide con el volumen de control fijo  $\mathcal{V}$ , es decir  $\mathcal{A}_m(t)^* = \mathcal{A}^*$ . Si se iguala (3.3.1) con (3.3.2), se obtiene la siguiente expresión integral que relaciona la evolución temporal del impulso entre un volumen de control material y un volumen de control fijo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{w} dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{w} dV + \oint_{\mathcal{A}^*} \hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} dA. \quad (3.3.3)$$

Sustituyendo la Ec. (3.3.3) en la Ec. (3.2.5) se llega a

$$\mathbf{F}_{\text{HD}} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{w} dV - \oint_{\mathcal{A}^*} \hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} dA + \oint_{\mathcal{A}=\mathcal{A}_m(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_k dA. \quad (3.3.4)$$

La segunda integral de (3.3.4) representa un flujo convectivo de momentum a través de la superficie  $\mathcal{A}^*$ . Usando la Ec. (??) y agrupando términos se llega finalmente a

$$\mathbf{F}_{\text{HD}} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{w} dV + \oint_{\mathcal{A}} (-\hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_k) dA - \oint_{\mathcal{A}_b(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} dA, \quad (3.3.5)$$

donde  $\mathcal{A}$  equivale instantáneamente a  $\mathcal{A}_m(t)$ , al tiempo  $t$ . La Ec. (3.3.5) es la expresión integral exacta para la fuerza hidrodinámica actuando sobre un cuerpo sumergido en un volumen de control fijo de fluido. El primer término representa la evolución temporal del impulso del fluido dentro del volumen de control. El segundo término tiene dos contribuciones: la primera es el flujo convectivo neto de momentum que atraviesa la superficie de control; la segunda contribución representa las fuerzas viscosas y de presión dinámica sobre la superficie de control. El tercer término es el flujo convectivo neto de momentum que penetra el cuerpo. Así, usando (3.3.5) se puede obtener la fuerza hidrodinámica instantánea sobre un cuerpo a partir del conocimiento del campo de presión y de velocidad (y sus derivadas). Este enfoque ha sido propuesto por Noca (1997) para estimar la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo arbitrario a partir de mediciones experimentales del campo de velocidad del flujo obtenidas mediante Velocimetría de Imagen de Partículas (PIV por sus siglas en inglés).

### 3.4. Flujo en la estela de un cuerpo esférico

Consideremos dos esferas (burbujas o sólidas) del mismo diámetro ascendiendo sucesivamente en una trayectoria vertical, en un volumen infinito de un fluido newtoniano e incompresible con flujo uniforme (ver Fig. 3.3). Para simplificar el análisis del problema, en lo que resta de esta tesis se realizan las siguientes suposiciones: (1) La esfera acarreada (denominada aquí Esfera 2) se encuentra localizada en la región de la estela laminar, a una distancia tal que su proximidad no afecta a la esfera puntera (referida aquí como Esfera 1). Entonces, la esfera puntera se comporta como una esfera aislada moviéndose a su velocidad terminal  $U_{b1}$ . (2) El único mecanismo de interacción que se considera entre esferas es la estela laminar inducida por la esfera puntera. (3) Desde el marco de referencia anclado en la esfera puntera, el flujo en la estela es laminar, estacionario y tiene simetría axial.

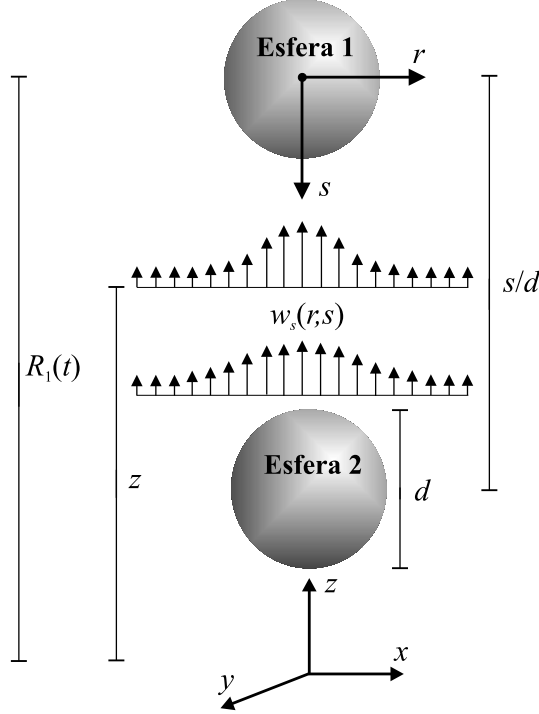


Figura 3.3: Interacción de dos esferas ascendiendo en línea.

Además de las simplificaciones planteadas anteriormente, para el caso particular de dos burbujas interactuando en línea supondremos que: (1) El número de Reynolds de burbuja está en el régimen de flujo  $O(10)$  a  $O(100)$ ; es decir, antes de que exista una apreciable deformación de la burbuja y/o separación de la capa límite. Por lo tanto, a cierta distancia de la burbuja, el flujo en la estela sigue siendo laminar, estacionario y con simetría axial (Moore, 1963; Batchelor, 1967). (2) El número de Weber es mucho menor que 1 (ambas burbujas mantienen siempre su forma esférica). (6) La superficie de ambas burbujas se encuentra libre de surfactantes (no existe actividad superficial).

El marco de referencia ubicado en el centro de la esfera puntera se encuentra localizado a una distancia  $R_1(t)$ , medida desde un marco de referencia de laboratorio  $(x, y, z)$ . Un punto en el espacio puede ser expresado en ambos marcos de referencia de acuerdo a la siguiente transformación coordenada:

$$z = R_1(t) - s. \quad (3.4.1)$$

Siguiendo la trayectoria de una partícula material de fluido lejos de la burbuja y trans-

formándola de acuerdo a la Ec. (3.4.1), su derivada temporal está dada por

$$u_z = U_{b1} - u_s. \quad (3.4.2)$$

Mientras que para una partícula material en la estela está dada por

$$w_z = U_{b1} - w_s. \quad (3.4.3)$$

Primero nos enfocaremos en analizar el flujo en la estela de la burbuja puntera a  $Re$  grandes ( $50 \leq Re \leq 200$ ). Para este régimen de flujo, Katz y Meneveau (1996) basándose en cálculos de capa límite de Moore (1963), propusieron que, para  $s/d \gg Re$ , el defecto (o imperfección) de la velocidad del flujo ascendente en la estela de la burbuja puntera puede aproximarse sumando el defecto de la solución potencial evaluada en el eje de simetría más el defecto del perfil de velocidad de la solución asintótica (véase el Apéndice A.2), así que

$$\frac{w_z(r, s) - u_z}{u_s} = \frac{1}{8} \left( \frac{d}{s} \right)^3 + \frac{C_{d1}}{2} \frac{Re_1}{16} \frac{d}{s} \exp \left( -\frac{Re_1}{4} \frac{r^2}{sd} \right). \quad (3.4.4)$$

Adicionalmente, Katz y Meneveau (1996) ajustando mediciones experimentales de la velocidad terminal de una burbuja aislada obtuvieron una correlación experimental del coeficiente de arrastre actuando sobre dicha burbuja. Ellos usaron su correlación para aproximar el efecto de reducción del arrastre sobre la burbuja acarreada. Consideraron que dicha burbuja tiene una velocidad ascendente adicional en relación a la velocidad de una burbuja aislada, dada por

$$W = \frac{1}{u_s} \frac{4}{\pi d^2} \int_0^R [w_z(r, s) - u_z] 2\pi r dr = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^3 + \frac{C_{d1}}{2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \right) \right]. \quad (3.4.5)$$

En todo el trabajo,  $\hat{s} = s/d$  representa la distancia adimensional de separación entre el centro de masa de ambas esferas, de modo que para esferas idénticas en contacto,  $\hat{s} = 1$ .

Harper (1997), usando su teoría analítica aproximada discutida en el Capítulo 2 demostró que, si  $Re \gg 1$ , la propuesta de Katz y Meneveau (1996) se puede extender a una región de mucho mayor proximidad entre burbujas que la que ellos pensaron, en este caso a distancias  $\hat{s} > O(3/2)$ . Es decir, si se consideran estas restricciones ( $Re \gg 1$  y  $\hat{s} > 3/2$ ), el flujo en la estela de la burbuja puntera está muy bien aproximado por la Ec. (3.4.5).

Analicemos ahora el flujo en la estela de la burbuja puntera a  $Re$  pequeños a intermedios ( $1 < Re \leq 50$ ). En este caso, la difusión de vorticidad viscosa sobre la superficie de la burbuja



### 3.5. Fuerza hidrodinámica de un flujo no-uniforme sobre una esfera en un volumen de control fijo 41

es significativa, y la suposición de flujo irrotacional en la estela cercana a la burbuja ya no es válida. Por lo tanto, la teoría de la capa límite de Moore (1963) no proporciona una adecuada descripción del flujo en la estela, principalmente en la región de longitud  $\sim RRe^{1/2}$  próxima a la superficie de la burbuja. Sin embargo, si el flujo es laminar, independiente del  $Re$ , a una cierta distancia de la burbuja la solución asintótica obtenida en el apéndice B es aún aplicable, y la teoría de Moore (1963) predice que esta distancia se debe reducir conforme el  $Re$  disminuye. Considerando lo anterior, se propone usar como una primera aproximación para estimar el defecto de la velocidad en la estela tanto para burbujas a  $Re$  pequeños a intermedios como para esferas sólidas a  $Re$  moderados ( $24 < Re \leq 130$ ) el perfil de velocidad asintótico promediado en el área proyectada por la esfera, entonces (Ec. A.1.22)

$$W = \frac{\bar{w}_z - u_z}{u_s} = \frac{C_{d1}}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}}\right) \right]. \quad (3.4.6)$$

Debido a que la solución potencial decae como  $\hat{s}^{-3}$  y la asintótica exponencialmente, independientemente del  $Re$ , a una cierta distancia de la burbuja puntera (la cual es menor conforme el  $Re$  disminuye), el defecto del flujo en la estela se reduce a la Ec. (3.4.6).

## 3.5. Fuerza hidrodinámica de un flujo no-uniforme sobre una esfera en un volumen de control fijo

En esta Sección, a partir de la Ec. (3.3.5) se obtiene una expresión integral simplificada para evaluar la fuerza hidrodinámica sobre una esfera (esfera acarreada) interactuando en línea con la estela de otra esfera del mismo tamaño. Como caso particular, estudiamos nuevamente el sistema de un par de esferas del mismo diámetro ascendiendo en línea e interactuando por medio de la estela laminar y estacionaria de la esfera puntera descrito en la Sección anterior. Por conveniencia, se elige un volumen de control con geometría cilíndrica, fijo respecto al marco de referencia inercial anclado en la burbuja puntera (ver Fig. 3.4). Considerando la naturaleza permanente del perfil de velocidad en la estela en el marco de referencia de la esfera puntera, la incompresibilidad del flujo y la rigidez de la esfera acarreada, es razonable suponer que la tasa de cambio del impulso en el volumen de control para una posición fija de la esfera acarreada es independiente del tiempo. Entonces

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{w} dV = 0. \quad (3.5.1)$$

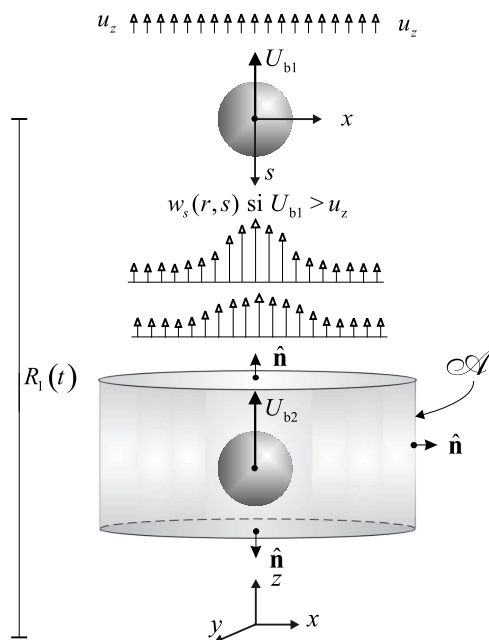


Figura 3.4: Dos burbujas interactuando con la estela de la burbuja puntera.

Además, dado que el fluido no penetra la superficie del cuerpo, la última integral de (3.3.5) es cero. Por lo tanto, la expresión para la fuerza hidrodinámica que actúa sobre el cuerpo acarreado se simplifica para el caso estudiado a

$$\mathbf{F}_{\text{HD}} = \oint_{\mathcal{A}} (-\hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_k) dA. \quad (3.5.2)$$

El término en el integrando de la expresión anterior, representa el flujo neto de momentum a través de la superficie fija de control. Esta expresión será el punto de partida en el Capítulo 4 para la obtención de una expresión aproximada para la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada.

### 3.6. Fuerza hidrodinámica conociendo la estructura del flujo en la superficie de la esfera

El análisis en 3.2 puede usarse para evaluar la fuerza hidrodinámica si se conoce únicamente la estructura del flujo sobre la superficie del cuerpo. En principio, una integración directa del

esfuerzo normal y tangencial sobre la superficie del cuerpo en lugar de utilizar un balance global de momentum proporciona un mejor entendimiento respecto a la contribución individual de las fuerzas de presión y viscosas en la fuerza hidrodinámica. Este enfoque es comúnmente usado en la literatura tanto para obtener expresiones diferenciales así como en estudios numéricos (Morrison y Stewart, 1976; Maxey y Riley, 1983; Auton y col., 1988; Kang y Leal, 1988; Yuan y Prosperetti, 1994; Kurose y Komori, 1999; Kurose y col., 2001).

Reduciendo el volumen de control hasta cero, es decir, hasta que la superficie  $\mathcal{A}_m(t)$  coincide con  $A_b$ , y considerando además que la dirección relativa del flujo es paralela al eje- $z$  de movimiento permanente del cuerpo, de modo que éste no experimentará fuerza de sustentación. Así, a partir de la expresión exacta para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo inmerso en un flujo viscoso e incompresible dada por la Ec. (3.2.5), su componente vertical se simplifica a

$$F_{\text{HD}} = \mathbf{F}_{\text{HD}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = \oint_{S_b} \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z ds, \quad (3.6.1)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector normal unitario dirigido hacia el exterior de la superficie.

Siguiendo el análisis de Maxey y Riley (1983) es posible separar el campo de flujo alrededor de la esfera en el campo de flujo no perturbado  $w^{(0)}$  y el campo de flujo perturbado por la presencia de la esfera  $w^{(1)}$ . El campo de flujo resultante satisface la condición  $w = w^{(0)} + w^{(1)}$ , en todo el espacio ocupado por el fluido. Así, para una esfera interactuando en línea con la estela laminar, estacionaria (no-uniforme) inducida por otra esfera localizada corriente arriba, independiente del  $Re$  y de la condición de frontera sobre su superficie (no-deslizamiento o esfuerzo tangencial nulo), el cuerpo experimenta una fuerza hidrodinámica cuya expresión desde un marco de referencia de laboratorio está dada por

$$F_{\text{HD}} = F_{\text{HD}}^{(0)} + F_{\text{HD}}^{(1)} = \oint_{S_b} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( -p_k^{(0)} \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(0)} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z ds + \oint_{S_b} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( -p_k^{(1)} \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z ds. \quad (3.6.2)$$

Cuando el tamaño del cuerpo es pequeño en comparación con la longitud característica de variación del flujo no perturbado y del campo de presión en la estela, tanto el gradiente de presión como el campo de velocidad evaluados sobre la superficie de la esfera son aproximadamente uniformes. Sobre esta consideración, convirtiendo a una integral de volumen la expresión integral del flujo no perturbado, y considerando que  $\mathbf{w} = w_z(r, z)$ , ésta puede ser

aproximadamente evaluada como

$$F_{\text{HD}}^{(0)} = V_b \left( -\frac{\partial p_k^{(0)}}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_z^{(0)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w_z^{(0)}}{\partial z^2} \right] \right). \quad (3.6.3)$$

Mientras que la ecuación de movimiento (sin la contribución de la fuerza de gravedad) para el flujo no perturbado en la estela en coordenadas cilíndricas es

$$\rho w_z^{(0)} \frac{\partial w_z^{(0)}}{\partial z} = -\frac{\partial p_k^{(0)}}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_z^{(0)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w_z^{(0)}}{\partial z^2} \right]. \quad (3.6.4)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en el término entre paréntesis de la Ec. (3.6.3) se llega a la siguiente expresión explícita para la fuerza inercial del fluido no perturbado actuando sobre la burbuja acarreada cuando esta se mueve en relación a la burbuja puntera (véase también Maxey y Riley, 1983, y el análisis que lleva a la Ec. 25):

$$F_{\text{HD}}^{(0)} = -m_f (U_{b1} - w_z) \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad (3.6.5)$$

donde  $m_f = \rho V_b$  y  $\partial w_z / \partial z = \partial w_z^{(0)} / \partial z$ . Aquí,  $\bar{w}_z$  y  $\partial \bar{w}_z / \partial z$  son evaluadas en el lugar donde se ubica el centro de la esfera, y  $(U_{b1} - \bar{w}_z) \partial \bar{w}_z / \partial z$  es la aceleración convectiva del fluido relativa a la esfera puntera (en la dirección  $z$ ) debido a la no-uniformidad del flujo. Dado que ésta expresión se obtuvo a partir de (3.6.4), el efecto total de la estructura local del flujo en la fuerza inercial del fluido no perturbado inducido tanto por el gradiente de presión dinámica como por el transporte viscoso ha sido considerado en (3.6.5). Sustituyendo la Ec. (3.6.5) en la Ec. (3.6.2) la fuerza hidrodinámica puede expresarse como

$$F_{\text{HD}} = -m_f (U_{b1} - w_z) \frac{\partial w_z}{\partial z} + \oint_{S_b} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( -p_k^{(1)} \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(1)} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z ds. \quad (3.6.6)$$

Es aparente en la Ec. (3.6.6) que para obtener una expresión analítica de la fuerza hidrodinámica se debe determinar la fuerza del flujo perturbado por la esfera. Sin embargo, expresiones analíticas que consideran las contribuciones individuales de la presión dinámica  $p_k^{(1)}$  y de los esfuerzos viscosos  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(1)}$  sobre la superficie de esferas (sólidas, burbujas o gotas) del flujo perturbado únicamente han sido obtenidas para el régimen de flujo reptante (e.g. Morrison y Stewart, 1976; Maxey y Riley, 1983; Michaelides y Feng, 1995; Michaelides, 2003). Así que, a diferencia del límite de flujo reptante en donde es posible identificar inequívocamente las fuerzas del flujo perturbado (arrastre cuasiestacionario, masa agregada y término histórico

de fuerza); a  $Re$  finitos, la no-linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes hacen imposible distinguir individualmente estos términos. Sin embargo, en una gran cantidad de estudios concernientes con burbujas o esferas sólidas a  $Re$  finitos se ha usado una descomposición de fuerzas idéntica a la existente en flujo reptante examinando la validez de esta aproximación con resultados numéricos o mediciones experimentales (véase la revisión del Capítulo 1 y 2). En nuestro desarrollo usaremos esta misma descomposición de fuerzas. Por lo tanto, a partir del balance de fuerzas dado por (3.6.6), la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada puede escribirse en términos de expresiones diferenciales adicionando la fuerza de la inercia del fluido, la fuerza de masa agregada debida a la aceleración relativa del cuerpo y las fuerzas de arrastre viscoso (estacionario y término histórico de fuerza), es decir

$$\begin{aligned} F_{\text{HD}} &= F_{\text{HDI}} + F_{\text{d2}} + F_{\text{h}} \\ &= m_{\text{f}} \left[ - (1 + C_{\text{M}}) (U_{\text{b1}} - \bar{w}_z) \frac{\partial w_z}{\partial z} + C_{\text{M}} (U_{\text{b1}} - U_{\text{b2}}) \frac{dU_{\text{b2}}}{dz} \right] + F_{\text{d2}} + F_{\text{h}}. \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

El efecto del gradiente de presión dinámica tanto para el flujo no perturbado como para el perturbado es considerado implícitamente en la expresión anterior (véanse también las Ecs. 1.5.7 y 1.5.8 ); por lo tanto, no es necesario un término más para considerar este efecto.



## Capítulo 4

# Arrastre cuasiestacionario sobre la esfera acarreada

### 4.1. Introducción

El objetivo de este Capítulo es obtener expresiones para la fuerza de arrastre cuasiestacionaria actuando sobre la esfera acarreada. Sin embargo, dado que los únicos datos reportados en la literatura del coeficiente de arrastre estacionario sobre la esfera acarreada se obtuvieron para burbujas esféricas (Yuan y Prosperetti, 1994), específicamente nos enfocamos a analizar este caso (aunque nuestro análisis es también válido para esferas sólidas). Se analizan dos regímenes de flujo:  $Re$  pequeños a intermedios ( $1 \leq Re \leq 50$ ) y  $Re$  grandes ( $50 \leq Re \leq 200$ ). Las predicciones de éstas expresiones son comparadas con resultados numéricos reportados en la literatura. La expresión del arrastre para  $Re$  pequeños a intermedios será usada en el Capítulo 6 con la finalidad de predecir mediciones experimentales de la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada a la puntera.

### 4.2. Expresiones para el arrastre cuasiestacionario sobre la esfera acarreada

Para el caso de una esfera sólida inmersa en un flujo cortante lineal con una no-uniformidad transversal leve, es necesario introducir una corrección adicional a la expresión del arrastre cuasiestacionario (Bagchi y Balachandar, 2002c,b), pero debido a que ésta es muy pequeña se puede despreciar (Bagchi y Balachandar, 2002a; Kurose y Komori, 1999). El mismo resultado ha sido encontrado para una burbuja esférica libre de surfactantes (Kurose y col., 2001).

Sin embargo, para dos burbujas esféricas interactuando en línea a  $Re$  pequeños a grandes, la no-uniformidad transversal del flujo contribuye significativamente en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria (Yuan y Prosperetti, 1994; Katz y Meneveau, 1996).

Debe reconocerse que obtener una expresión analítica para el arrastre sobre un cuerpo inmerso en un flujo altamente no-uniforme (en la dirección transversal al flujo) a  $Re$  pequeños a intermedios no es una tarea sencilla (cfr. Katz y Meneveau, 1996). Yuan y Prosperetti (1994) sugieren una alternativa que consiste en especificar una velocidad relativa de la burbuja respecto a una velocidad de referencia apropiada para el flujo en la estela de la burbuja puntera. Este enfoque permite incorporar correlaciones conocidas del coeficiente de arrastre estacionario. En este Capítulo se explora esta alternativa, la consideración de la no-uniformidad transversal para la estimación del arrastre cuasiestacionario sobre la burbuja acarreada se realiza usando correlaciones conocidas del coeficiente de arrastre estacionario, pero especificando una velocidad de referencia apropiada en la estela. Katz y Meneveau (1996) para  $Re \gg 1$  proponen como esta velocidad la Ec. (3.4.5), mientras que Zhang y Fan (2003) para  $Re$  pequeños a intermedios propusieron la Ec. (3.4.6). Sin embargo, el perfil de velocidad en la estela a una distancia axial fija describe la forma de un paraboloides elipsoidal cuya concavidad se suaviza a medida que la distancia axial se incrementa o el  $Re$  disminuye (Schlichting, 1979, pag. 170). Así, una pregunta que naturalmente surge es *¿Resulta correcto suponer siempre a  $\bar{w}_z$  como la velocidad de referencia del fluido independientemente del  $Re$  y de la distancia axial medida desde la burbuja puntera?* A continuación se realiza un análisis del problema con la finalidad de responder a esta pregunta.

Partiendo de la expresión analítica para el arrastre sobre una esfera obtenida con la restricción de flujo reptante, y extendiéndola a  $Re$  mayores introduciendo una expresión semiempírica para el coeficiente de arrastre estacionario (véase el Apéndice A.2); la componente vertical del arrastre cuasiestacionario sobre la esfera acarreada de la Fig. 3.3 se escribe como

$$F_{d2T} = -C_{d2} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{b2} - \gamma \bar{w}_z) \left( U_{b2} - \gamma \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right). \quad (4.2.1)$$

Aquí, con el propósito de considerar el efecto de la no-uniformidad transversal del flujo, se eligió una velocidad relativa de la burbuja acarreada  $U_{b2} - \gamma \bar{w}_z$ . Además,  $\bar{w}_z$  y sus derivadas deben evaluarse en el centro de masa de la burbuja usando la Ec. (3.4.5) (para  $Re$  grandes) o la Ec. (3.4.6) (para  $Re$  pequeños a intermedios). El término del Laplaciano son derivadas de segundo orden para corregir el efecto adicional que ocasiona la no-uniformidad axial (en la dirección del flujo) (Michaelides, 2003). El factor  $\gamma$  es un parámetro que equivale a la razón de una velocidad promediada en la estela sobre una área radial proyectada desconocida



$R_\gamma = d_\gamma/2$  con respecto a  $\bar{w}_z$ , entonces

$$\gamma \doteq \frac{1}{\bar{w}_z} \frac{1}{\pi R_\gamma^2} \int_0^{R_\gamma} w_z(r, s) 2\pi r dr. \quad (4.2.2)$$

Por lo que  $\gamma$  se incluye en la Ec. (4.2.1) como una propuesta alternativa para considerar el efecto de la no-uniformidad transversal del flujo en la estimación del arrastre sobre la burbuja acarreada. Su definición considera que la velocidad típica del fluido en la estela no es necesariamente coincidente con la velocidad relativa de la burbuja acarreada con respecto a la velocidad promedio de la estela  $U_{b2} - \bar{w}_z$ ; más bien, este es un caso particular que se presenta cuando  $\gamma = 1$ . En otras palabras,  $\gamma$  considera que el área proyectada para encontrar la velocidad típica en la estela podría depender de la distancia y del número de Reynolds.

La fuerza de arrastre estacionaria sobre la burbuja puntera ascendiendo a su velocidad terminal en un flujo uniforme y estacionario se expresa como

$$F_{d1} = -C_{d1} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{b1} - u_z)^2. \quad (4.2.3)$$

Dividiendo la Ec. (4.2.1) entre la Ec. (4.2.3) se obtiene

$$\frac{F_{d2T}}{F_{d1}} = \frac{C_{d2}}{C_{d1}} \left( \frac{U_{b2} - \gamma \bar{w}_z}{U_{b1} - u_z} \right) \left( \frac{U_{b2} - \gamma \bar{w}_z}{U_{b1} - u_z} - \frac{1}{U_{b1} - u_z} \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right). \quad (4.2.4)$$

La razón de coeficientes de arrastre de la ecuación anterior considera tanto la principal dependencia de las expresiones para el arrastre estacionario sobre una burbuja aislada que existen en la literatura (Hadamard, 1911; Rybczynski, 1911; Levich, 1949), así como el factor secundario que provee una corrección del término de orden principal  $O(Re^{-1})$  (Moore, 1963; Golovin y Ivanov, 1973; Mei y col., 1994; Magnaudet y col., 1995; Katz y Meneveau, 1996), de modo que

$$\frac{C_{d2}}{C_{d1}} = \frac{Re_1}{Re_2} \beta, \quad (4.2.5)$$

donde  $Re_2 = (U_{b2} - \gamma \bar{w}_z) d/\nu$  es el número de Reynolds de la burbuja acarreada, así que

$$\frac{Re_2}{Re_1} = \frac{U_{b2} - \gamma \bar{w}_z}{U_{b1} - u_z} = U_b - W_\gamma. \quad (4.2.6)$$

Aquí,

$$U_b = \frac{U_{b2} - u_z}{U_{b1} - u_z} \quad (4.2.7)$$

y

$$W_\gamma = \frac{\gamma \bar{w}_z - u_z}{U_{b1} - u_z} \quad (4.2.8)$$

son las expresiones adimensionales para la velocidad de la burbuja acarreada y el defecto de la velocidad de referencia en la estela, respectivamente. Además,  $\beta$  es la razón del factor secundario cuyo valor depende de la expresión del arrastre usada. En la Tabla (4.1) se presentan expresiones para  $\beta$  usando diferentes correlaciones del coeficiente de arrastre estacionario reportadas en la literatura descritas en la Sección 1.3. Ahora, usando las Ecs. (4.2.5) y (4.2.6)

Tabla 4.1: Expresiones para  $\beta$  usando diferentes correlaciones de la literatura

Autor(es)	Validez	$\beta$
Moore (1963)	$50 \leq Re \leq 200$	$\frac{1-2.211/Re_2^{0.5}}{1-2.211/Re_1^{0.5}}$
Magnaudet y col. (1995)	$Re \leq 50$	$\frac{1+0.15Re_2^{0.5}}{1+0.15Re_1^{0.5}}$
Mei y col. (1994)	Cualquier $Re$	$\frac{1+[8/Re_2+0.5 1+3.31Re_2^{-0.5}]^{-1}}{1+[8/Re_1+0.5 1+3.31Re_1^{-0.5}]^{-1}}$
Katz y Meneveau (1996)	$0.2 \leq Re \leq 56$	$\frac{3^{0.5(1+\tanh[2 \log_{10}(0.0715Re_2)])}}{3^{0.5(1+\tanh[2 \log_{10}(0.0715Re_1)])}}$

en la Ec. (4.2.4), y tomando el término del laplaciano del Apéndice A.1 (Ec. A.2.33) se obtiene

$$\frac{F_{d2T}}{F_{d1}} = \frac{F_{d2}}{F_{d1}} - \beta \Phi_d = \beta (U_b - W_\gamma) - \beta \Phi_d, \quad (4.2.9)$$

donde

$$\Phi_d = \frac{1}{U_{b1} - \bar{w}_z} \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z = \frac{1}{24} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{s} \frac{W}{W_0} \right) \left( 2 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{s} \right) W_0 \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2, \quad (4.2.10)$$

representa la contribución de la no-uniformidad axial del flujo para flujo reptante cuando se usa la Ec. (3.4.6).

En la Ec. (4.2.9) dado que aún no se cuenta con expresiones para  $U_b$  y  $\gamma$ , no es posible obtener estimaciones para  $F_{d2T}/F_{d1}$ . Con la intención de establecer valores límites de  $\gamma$  acordes con su definición (Ec. 4.2.2), en la Fig. 4.1 se muestran valores de  $W/W_0$  en función de  $\hat{s}$  a  $Re$  pequeños a intermedios. El valor de  $W$  se estimó mediante la Ec. (3.4.6), mientras que

$$W_0 = \frac{w_0 - u_z}{U_{b1} - u_z} = \frac{C_{d1}}{2} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \quad (4.2.11)$$

es la velocidad adimensional de la estela evaluada en el eje de simetría cuando se considera únicamente el segundo término del lado derecho de la Ec. (3.4.4). Se observa que a  $Re$  pequeños

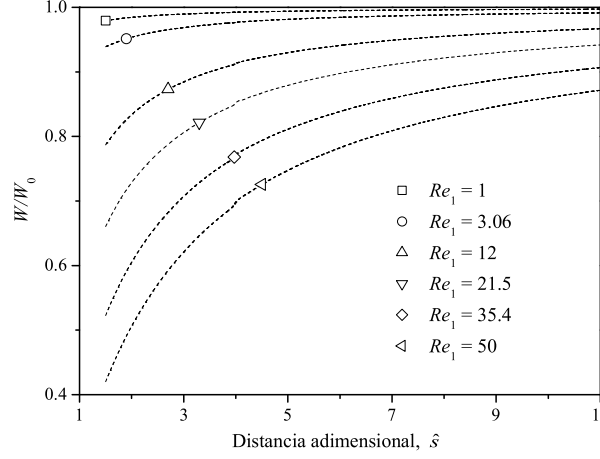


Figura 4.1: Razón entre el defecto del flujo en la estela y el defecto evaluado en el eje de simetría, en función de la separación adimensional entre burbujas.

y/o distancia lejanas  $W/W_0 \rightarrow 1$ ; por consiguiente, el defecto de la velocidad promediada en el área proyectada por la burbuja es similar al defecto de la velocidad evaluada en el eje de simetría; y por lo tanto, la dependencia transversal del campo de velocidad en la estela es muy pequeña. Esto también puede encontrarse analíticamente si se realiza la siguiente expansión en series de Taylor de la Ec. (3.4.6) para valores  $(\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \ll 1)$ , es decir,  $[\exp(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}})] \cong 1$ :

$$W = \frac{C_{d1}}{2} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \left[ 1 - \frac{1}{2!} \frac{Re_1}{16} \hat{s}^{-1} + \frac{1}{3!} \left( \frac{Re_1}{16} \right)^2 \hat{s}^{-2} + \dots + \frac{1}{n!} \left( \frac{Re_1}{16} \right)^n \hat{s}^{-n} \right]. \quad (4.2.12)$$

El término dominante dentro del corchete es  $O(1)$  y los demás términos tienen una contribución que se hace más pequeña conforme el  $Re$  disminuye o  $\hat{s}$  se incrementa. Así, el término dominante de la Ec. (4.2.12) es idéntico a la Ec. (4.2.11), y por lo tanto, en el límite cuando  $\hat{s} \rightarrow \infty$  ó  $Re \rightarrow 0$ ,  $W/W_0 \rightarrow 1$ , lo cual es acorde a lo observado en la Fig. 4.1.

Considerando ahora el caso límite  $Re \rightarrow 0$ , y usando  $C_d = 16/Re$ , a partir de (4.2.12) se tiene que

$$\lim_{Re_1 \rightarrow 0} (W) = \frac{C_{d1}}{2} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{s}}. \quad (4.2.13)$$

Este resultado es idéntico a la velocidad evaluada en el eje de simetría que se obtiene a partir de la solución de flujo reptante sobre una burbuja invíscida libre de surfactantes.

En resumen, la dependencia radial de la no-uniformidad del flujo se reduce significativamente para  $Re$  pequeños y/o distancias lejanas, así que en ambos casos  $w_z$  es independiente de la coordenada radial. Por consiguiente, a partir de la Ec. (4.2.2) con  $w_z(s) \cong w_z(r, s)$  se tiene que

$$\gamma \cong \frac{w_z(s)}{\bar{w}_z} \frac{1}{\pi R_\gamma^2} \int_0^{R_\gamma} 2\pi r dr \cong 1, \quad (4.2.14)$$

por lo que  $W_\gamma \cong W$ . Consecuentemente, valores de  $\gamma$  cercanos a la unidad indican una uniformidad transversal del flujo despreciable.

Para el caso de  $Re$  grandes, los cálculos de capa límite de Moore (1963) indican que existe también la posibilidad de que los valores de  $\gamma$  sean cercanos a la unidad dado que el flujo en la estela cercana es casi paralelo. Sin embargo, este caso será analizado más adelante en esta misma Sección.

Vamos a analizar ahora la influencia de la no-uniformidad axial del flujo en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria para  $Re$  pequeños. Este término surge como una corrección de segundo orden para la no-uniformidad axial del flujo (Maxey y Riley, 1983; Michaelides, 2003). Su adición produce una contribución adicional  $O(R^2/L^2)$ . Así que, si  $R/L \ll 1$  ó también  $\Phi_d/W_\gamma \ll 1$  (Ec. 4.2.9), su contribución es muy pequeña y puede despreciarse. Sin embargo, dado que la no-uniformidad del flujo en la estela es del mismo orden de magnitud que la distancia  $\hat{s}$ , a pequeñas distancias entre burbujas su contribución podría llegar a ser importante. Con el objetivo de estimarla, en la Fig. 4.2 se muestra  $\Phi_d/W_\gamma$  (obtenida a partir de la Ec. 4.2.9 usando  $\gamma = 1$ ) en función de la distancia adimensional  $\hat{s}$  para  $Re = 1, 3.06$  y  $12$ . Se observa que a  $Re \approx 1$  y distancias de separación  $\hat{s} < O(2)$  su contribución podría ser significativa, aunque decae rápidamente con la distancia. Sin embargo, a medidas que el  $Re$  aumenta, su efecto disminuye drásticamente. Por ejemplo, para  $Re = 12$  y  $\hat{s} > O(3/2)$ , se observa que  $\Phi_d/W_\gamma \ll 1$ , y por lo tanto, la contribución de la no uniformidad es despreciable. Así que, en este estudio consideraremos el efecto de la no-uniformidad axial del flujo únicamente para  $Re$  pequeños y la despreciaremos para  $Re$  mayores (véase la Tabla 2.1). Conociendo  $\gamma$ , si se introduce la expresión del arrastre (Ec. 4.2.9) en la ecuación de movimiento para la burbuja,  $F_{d2}/F_{d1}$  puede obtenerse simultáneamente al conocer  $U_b$ . Sin embargo, cuando  $\gamma \neq 1$ , es necesario contar primero con una expresión para este parámetro. Con la finalidad de encontrar una expresión adecuada para  $\gamma$  a  $Re$  intermedios y grandes, vamos a referirnos a la *situación artificial* resuelta numéricamente por Yuan y Prosperetti (1994) en la cual ambas burbujas

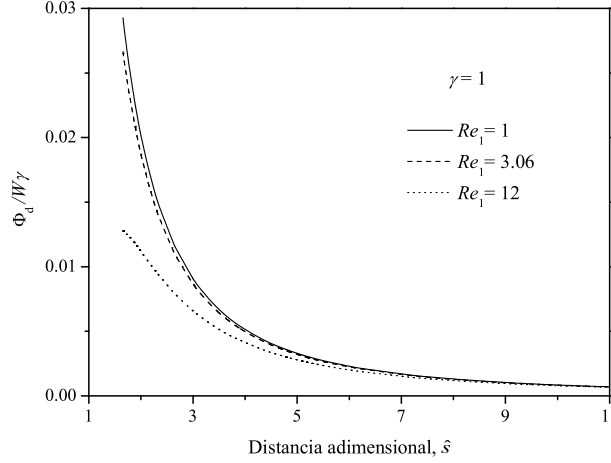


Figura 4.2: Contribución de la no-uniformidad axial en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria.

se mueven en un líquido estancado ( $u_z = 0$ ), a la misma velocidad constante  $U_{b2} = U_{b1}$ . Con esta restricción, de las Ecs. 4.2.7 y 4.2.8 se tiene que  $U_b = 1$  y  $W_\gamma = \gamma W$ , y considerando que para  $Re$  moderados o mayores  $\Phi_d \cong 0$ , las Ecs. 4.2.6 y 4.2.9 se simplifican a

$$Re_2 = (1 - \gamma W) Re_1 \quad (4.2.15)$$

y

$$\frac{F_{d2T}}{F_{d1}} \cong \frac{F_{d2}}{F_{d1}} = \beta (1 - \gamma W). \quad (4.2.16)$$

Si se sustituye la Ec. (4.2.15) en las expresiones para  $\beta$  de la Tabla 4.1, para alcanzar una expresión explícita para el arrastre cuasiestacionario únicamente hace falta obtener una correlación para  $\gamma$ . Con este propósito, transcribimos la expresión adimensional para la burbuja acarreada usando el enfoque de Yuan y Prosperetti (1994)

$$\frac{F_{d2}}{F_{d1}} = \frac{C_{d2}}{C_{d1}} \left( \frac{U_{b2} - u_z}{U_{b1} - u_z} \right)^2 = \frac{C_{d2}}{C_{d1}} U_b^2. \quad (4.2.17)$$

Aquí,  $C_{d2}$  está referido a  $U_{b2} - u_z$ . Ahora, considerando  $U_b = 1$  en la ecuación anterior se

obtiene

$$\frac{F_{d2}}{F_{d1}} = \frac{C_{d2}}{C_{d1}}. \quad (4.2.18)$$

Por consiguiente, los valores numéricos de  $C_{d2}/C_{d1}$  reportados por Yuan y Prosperetti (1994) equivalen a nuestra expresión para el arrastre cuasiestacionario (Ec. 4.2.16). Por lo tanto, con la finalidad de encontrar una expresión para  $\gamma$ , éstos valores serán utilizados como los valores verídicos. Para la estimación de los valores óptimos de  $\gamma$  se utiliza como función objetivo la siguiente definición del error relativo promedio (Bevington y Robinson, 1992):

$$\%Er = \sum_i^N \frac{1}{N} \frac{[(Verd)_i - (Pred)_i]}{(Verd)_i} \times 100. \quad (4.2.19)$$

Para minimizar el error relativo promedio entre el conjunto total de datos verídicos a un mismo  $Re$  y las predicciones de nuestro modelo usando la función objetivo anterior, se utiliza el método del gradiente conjugado (Axelson y Barker, 1984) implementado en la herramienta *Solver* de Microsoft Office Excel 2003.

En la Fig. 4.3 se comparan los datos originales de Yuan y Prosperetti (1994) para  $Re$  intermedios (20 y 50) con las predicciones de la Ec. (4.2.16). Se usa la Ec. (3.4.6) para estimar  $W$  y la correlación de Magnaudet y *col.* (1995) para la estimación de  $C_{d1}$  y  $\beta$ . También se incluyen las predicciones suponiendo  $\gamma = 1$  y la de los valores óptimos de  $\gamma$  para cada  $Re$  ( $\gamma_{Re}$ ). En la Fig. 4.4 se realiza la misma comparación para  $Re$  grandes (50, 100 y 200) usando la Ec. (3.4.5) para  $W$  y la correlación de Moore (1963) para la estimación de  $C_{d1}$  y  $\beta$ . Resulta evidente en las Figs. 4.3 y 4.4 que utilizar  $\gamma = 1$  para todo el régimen de flujo analizado en cada figura produce una subestimación del arrastre cuasiestacionario sobre la burbuja acarreada; es decir, no se incorpora apropiadamente el efecto de la no-uniformidad transversal del flujo. En los casos estudiados se obtuvieron valores de  $\gamma$  menores a uno. De acuerdo a su definición dada en la Ec. (4.2.2), estos valores corresponden a una mayor área de integración, puesto que si  $\gamma < 1$ , entonces,  $R_\gamma > R$ . En la Fig. 4.5 se muestran los valores óptimos de  $\gamma$  para cada número de Reynolds y la correlación de  $\gamma$  en función del  $Re$  para cada régimen de flujo analizado que se obtuvo a partir de los valores óptimos de  $\gamma$ . La correlación para  $Re$  intermedios es

$$\gamma_{Re} = 0.1946 \log_{10} Re_1 + 0.4836, \quad (4.2.20)$$

mientras que para  $Re$  grandes se obtuvo

$$\gamma_{Re} = 0.5592 \log_{10} Re_1 - 0.3474. \quad (4.2.21)$$

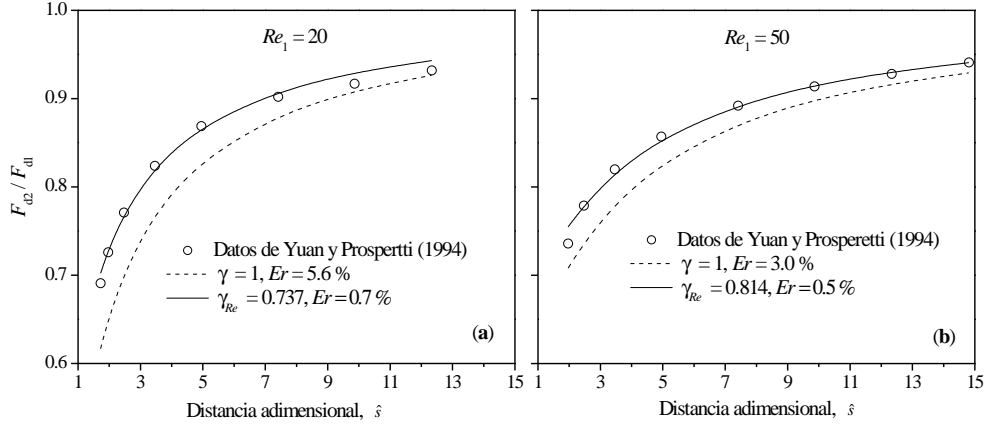


Figura 4.3: Fuerza de arrastre en función de la separación entre burbujas a  $Re$  intermedios.

En la Fig. 4.5 se observa que existe una notable diferencia cualitativa y cuantitativa en el comportamiento de la correlación  $\gamma$  para los dos regímenes de flujo analizados. Por ejemplo, para  $Re_1 = 50$  se tiene una diferencia aproximada del 26 %, siendo mayor la estimada a  $Re$  intermedios. Observando las Figs. 4.3(b) y 4.4(a) con  $\gamma = 1$  podemos darnos cuenta que el modelo del arrastre para  $Re$  grandes usando la Ec. (4.2.16) produce una mayor subestimación de los valores numéricos del arrastre estacionario respecto al modelo para  $Re$  intermedios. Esta diferencia se debe básicamente al modelo usado para aproximar la estructura local del flujo cuya magnitud es mayor a  $Re$  grandes (Ec. 3.4.5) en comparación con la de  $Re$  intermedios (Ec. 3.4.6); por consiguiente, el valor óptimo de  $\gamma$  debe ser menor.

La relación  $R_\gamma/R$  se puede obtener fácilmente en forma analítica si se sustituye la Ec. (3.4.5) (para  $Re$  grandes) o la Ec. (3.4.6) (para  $Re$  pequeños a intermedios) en la Ec. (4.2.2) y se efectúa la integración de la expresión resultante. Por ejemplo, para  $Re$  pequeños a intermedios ( $1 \leq Re \leq 50$ ) y  $u_z = 0$ , se llega a la siguiente expresión algebraica:

$$\gamma \frac{W}{W_0} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \left( \frac{R_\gamma}{R} \right)^2 = 1 - \exp \left[ - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \left( \frac{R_\gamma}{R} \right)^2 \right], \quad (4.2.22)$$

en la cual, para un  $Re_1$  específico y usando (4.2.20) se obtiene que  $R_\gamma/R$  es función de  $\hat{s}$ . Mediante una expansión en series de Taylor al término que contiene el exponencial de la ecuación anterior es fácil darse cuenta que para valores  $\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \left( \frac{R_\gamma}{R} \right)^2 \ll 1$  se obtiene  $\gamma \cong 1$ ,

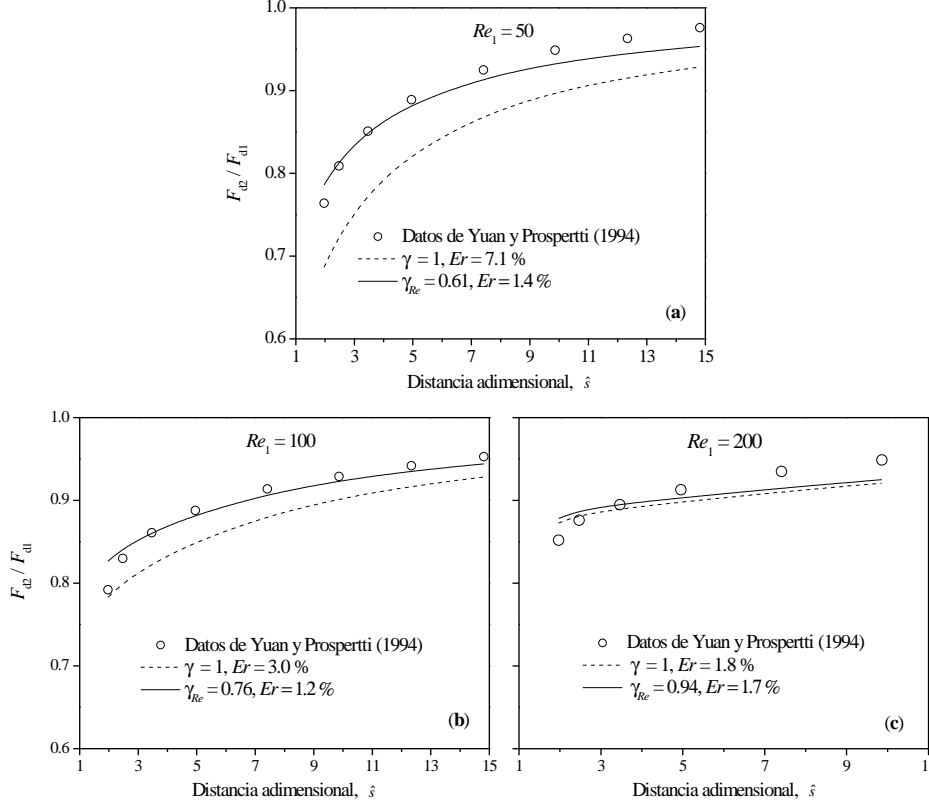


Figura 4.4: Fuerza de arrastre en función de la separación entre burbujas a  $Re$  grandes.

ó que en el límite  $Re \rightarrow 0$  se alcanza  $\gamma = 1$ , lo cual es acorde con el análisis previo para este régimen de flujo.

En la Fig. 4.4(c) se observa que para  $Re \approx 200$ ,  $\gamma \approx 1$ . Esto puede ser explicado si se observa que en la Ec. (3.4.5) los términos dominantes para  $O(3/2) < \hat{s} < O(\sqrt{Re}/2 + 1)$  son  $W = O(\hat{s}^{-3} + C_{d1}/2) = O(\hat{s}^{-3} + 24 Re^{-1})$ , es decir, el flujo es casi paralelo con una no-uniformidad transversal despreciable. A distancias más largas el flujo sigue el comportamiento del perfil de velocidad asintótico. Sin embargo, como la escala de longitud de variación del flujo en la estela es del mismo orden de magnitud que la distancia  $\hat{s}$ , para valores de  $\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \ll 1$  usando la expansión en series de Taylor de la Ec. (4.2.12) se obtiene que la velocidad en la estela es aproximadamente igual a la velocidad evaluada en el eje de simetría, es decir  $W/W_0 \cong 1$ . Por lo tanto para  $Re \geq 200$  en la región completa de la estela se tiene que la



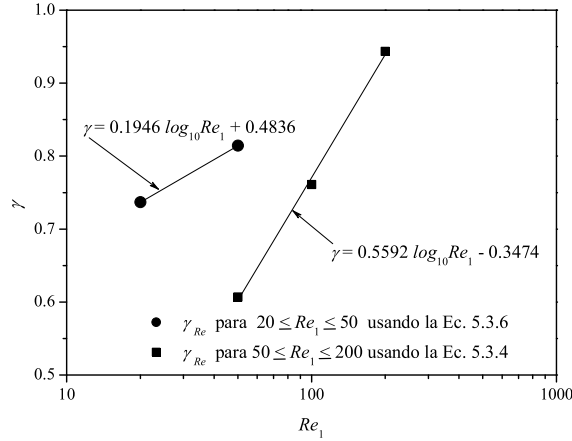


Figura 4.5:  $W/W_0$  en función de la separación adimensional entre burbujas.

dependencia transversal de la no-uniformidad del flujo es muy pequeña, y consecuentemente de la Ec. (4.2.2) se tiene que  $\gamma \cong 1$ . Así, nuestro análisis para  $Re \geq 200$  es acorde con los resultados de Harper (1997).

La pregunta investigada en este Capítulo fue: *¿Es correcto suponer siempre a  $\bar{w}_z$  ( $\gamma = 1$ ) como la velocidad típica de referencia del fluido independientemente del  $Re$  y de la distancia  $\hat{s}$ ?* De acuerdo a nuestro análisis del problema el cual se basa en suponer una estructura del flujo conocida en la estela para los dos regímenes de flujo diferentes ( $Re$  pequeños a intermedios y  $Re$  grandes), la respuesta parece ser que se puede suponer  $\gamma = 1$  únicamente para valores  $(\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \ll 1)$  ó  $Re \geq 200$  y  $\hat{s} > O(3/2)$ . Es decir, cuando la no-uniformidad transversal del flujo en la estela es muy pequeña. Además, si se considera que en estos casos la contribución de la razón del factor secundario en las expresiones del coeficiente de arrastre estacionario es despreciable, es decir,  $\beta \cong 1$ , la expresión del arrastre se simplifica a la siguiente expresión obtenida inicialmente por Zhang y Fan (2002) para esferas sólidas a  $Re$  intermedios:

$$\frac{F_{d2T}}{F_{d1}} \cong \frac{F_{d2}}{F_{d1}} = U_b - W, \quad (4.2.23)$$

la cual posteriormente usaron Zhang y Fan (2003) con burbujas interactuando en línea. Por lo tanto, de acuerdo a nuestro análisis, ellos únicamente consideraron la principal dependencia del coeficiente de arrastre estacionario  $C_d$  con respecto al número de Reynolds; es decir,

$C_d \propto Re^{-1}$ , y además,  $\gamma = 1$ . Sin embargo, se encontró que para el caso de burbujas (fuera de los dos casos límites mencionados previamente), la no-uniformidad transversal del flujo es significativa y utilizar como velocidad característica  $\bar{w}_z$  (es decir,  $\gamma = 1$ ) produce una subestimación del arrastre cuasiestacionario sobre la burbuja acarreada (Figs. 4.3 y 4.4). Por consiguiente, la velocidad típica de referencia debería ser función del  $Re$  y de la separación  $\hat{s}$ , es decir  $\gamma < 1$ , lo cual corresponde a una mayor área de integración respecto al área proyecta por la burbuja. Al considerar este efecto, se obtuvo una correlación de  $\gamma$  para  $Re$  intermedios ( $20 \leq Re \leq 50$ ) y otra para  $Re$  grandes ( $50 \leq Re \leq 200$ ). Estas expresiones se pueden sustituir en la expresión del arrastre cuasiestacionario para cada régimen de flujo y ser usadas para predecir la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada a la puntera.

## Capítulo 5

# Fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada

### 5.1. Introducción

En la Sección 3.5, a partir de los principios más fundamentales se obtuvo una expresión integral para la fuerza hidrodinámica sobre un cuerpo interactuando en línea con la estela de otro cuerpo. En este Capítulo, se analiza el caso particular de un arreglo en línea de dos esferas fijas suponiendo que la esfera acarreada interactúa con el perfil de velocidad que predice la solución asintótica (Ec. A.1.21). Se derivan dos nuevas expresiones explícitas para estimar la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada. En la Sección 5.2, se parte de un balance integral de momentum (Ec. 3.5.2), y en la Sección 5.3 se parte de la expresión diferencial para la fuerza hidrodinámica obtenida en la Sección 3.6.

Las simplificaciones adicionales implícitas en los modelos para la fuerza hidrodinámica que se obtienen en este Capítulo son: (1) El número de Reynolds está entre 24 y 130, después de la formación de ambos anillos vorticosos estacionarios y antes de que estos comiencen a oscilar (Batchelor, 1967). En este régimen, el flujo en la estela fuera de los anillos vorticosos es laminar, axisimétrico y estacionario. (2) La esfera acarreada está localizada fuera de la región de los anillos vorticosos. Esta región se extiende a medida que el  $Re$  se incrementa (Batchelor, 1967; Clift *y col.*, 1987; Zhu *y col.*, 1994).

## 5.2. Un modelo aproximado para la fuerza hidrodinámica partiendo de balances integrales

Consideremos el sistema a estudiar el cual consiste de dos esferas fijas inmersas en un flujo uniforme, estacionario, newtoniano e incompresible, como se muestra en la Fig. 5.1. En

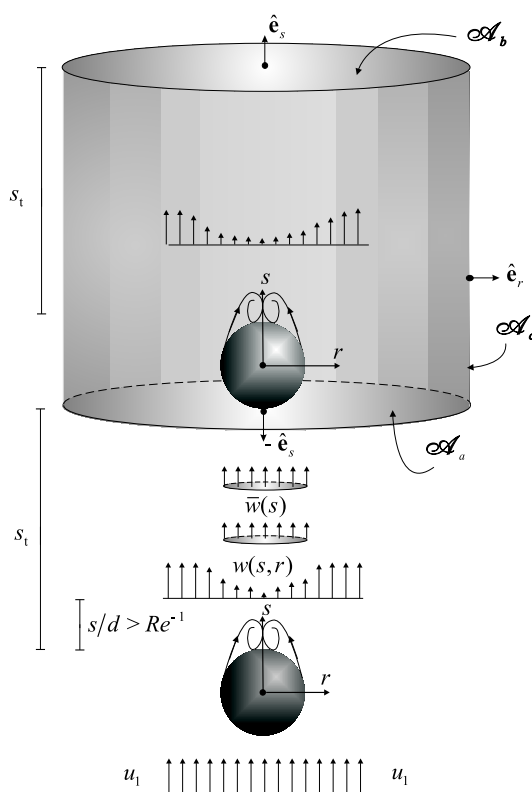


Figura 5.1: Dos esferas fijas interactuando con la estela laminar de la esfera de adelante.

esta figura,  $u_1$  denota la velocidad constante del flujo uniforme que incide sobre la esfera cuya dirección se toma como la coordenada axial  $s$  de un sistema coordenado cilíndrico, con su origen anclado en la esfera puntera. Tomando como referencia la dirección del flujo, la esfera corriente arriba es la puntera, mientras que la esfera corriente abajo es la acarreada. El flujo que incide sobre la esfera puntera es uniforme; por consiguiente, la fuerza hidrodinámica actuado sobre ella es únicamente la fuerza de arrastre estacionaria ( $F_{d1}$ ). No obstante, este cuerpo induce un flujo no-uniforme sobre la esfera acarreada. El flujo total de momentum, que incluye tanto el flujo inercial y la presión dinámica (Landau y Lifshitz, 1958), así como el

5.2. Un modelo aproximado para la fuerza hidrodinámica partiendo de balances integrales 61

flujo viscoso, evaluados en una superficie fija arbitraria  $\mathcal{A}$  que contiene a la esfera acarreada es

$$\oint_{\mathcal{A}} [-\hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}})] dA. \quad (5.2.1)$$

El flujo neto de momentum sobre la superficie  $\mathcal{A}$  es la diferencia entre el flujo que entra y el que sale. Pero esta diferencia es, a su vez, la cantidad de movimiento total que pasa en la unidad de tiempo desde el fluido hacia el cuerpo (Landau y Lifshitz, 1958; Batchelor, 1967; Schlichting, 1979); es decir, la fuerza hidrodinámica  $F_{\text{HD}}$  que resulta del movimiento del fluido (o contribución cinética) dada en la Ec. (3.5.1), la cual nuevamente transcribimos para una mejor claridad

$$\mathbf{F}_{\text{HD}} = \oint_{\mathcal{A}} [-\hat{\mathbf{n}} \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}})] dA. \quad (5.2.2)$$

Eligiendo como volumen de control el cilindro mostrado en la Fig. 5.1, la superficie de control puede descomponerse en las superficies de las tapas inferior ( $\mathcal{A}_a$ ), superior ( $\mathcal{A}_b$ ) y del cuerpo ( $\mathcal{A}_c$ ), donde  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a + \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_c$ . Por lo tanto, la Ec. (5.2.2) puede también expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{HD}} &= \int_{\mathcal{A}_a} [-\hat{\mathbf{n}}_a \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}}_a \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}})] dA + \int_{\mathcal{A}_b} [-\hat{\mathbf{n}}_b \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}}_b \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}})] dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}_c} [-\hat{\mathbf{n}}_c \cdot \rho \mathbf{w} \mathbf{w} + \hat{\mathbf{n}}_c \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}})] dA. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Dado que en el caso de estudio ambos cuerpos tienen el mismo eje de simetría y el flujo es paralelo a este eje, la fuerza de sustentación es cero. Así pues, la fuerza hidrodinámica se reduce a su componente axial. Además, al considerar que en la región lejana de la estela laminar detrás de ambos cuerpos (fuera de la región de los anillos vorticosos) se cumple que  $\mathbf{w} = w(r, s) \hat{\mathbf{e}}_s$ ; entonces, a partir de la Ec. (5.2.3) se obtiene

$$\begin{aligned} F_{\text{HD}} = \mathbf{F}_{\text{HD}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_s &= \int_{\mathcal{A}_a} [-\hat{\mathbf{n}}_a \cdot (\rho w^2 \hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s + \hat{\mathbf{n}}_a \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s] dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}_b} [-\hat{\mathbf{n}}_b \cdot (\rho w^2 \hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s + \hat{\mathbf{n}}_b \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s] dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}_c} [-\hat{\mathbf{n}}_c \cdot (\rho w^2 \hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s + \hat{\mathbf{n}}_c \cdot (-p_k \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s] dA. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Sustituyendo la definición del vector normal en cada superficie:  $\hat{\mathbf{n}}_a = -\hat{\mathbf{e}}_s$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_b = \hat{\mathbf{e}}_s$  y  $\hat{\mathbf{n}}_c = \hat{\mathbf{e}}_r$  en la expresión anterior, tomando en cuenta que  $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \tau_{rs} \hat{\mathbf{e}}_r \hat{\mathbf{e}}_s + \tau_{ss} \hat{\mathbf{e}}_s \hat{\mathbf{e}}_s$  y que la derivada radial de la velocidad  $\partial w / \partial r$  es grande en comparación con la axial  $\partial w / \partial s$  (Landau y Lifshitz, 1958), consecuentemente,  $\tau_{ss} \ll \tau_{rs}$ ; y considerando además que el área de las superficies de ambas tapas es idéntica ( $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b$ ) se obtiene

$$F_{\text{HD}} = \rho \int_{\mathcal{A}_a} w_a^2 dA - \rho \int_{\mathcal{A}_b} w_b^2 dA - \int_{\mathcal{A}_a} p_{ka} dA + \int_{\mathcal{A}_b} p_{kb} dA + \int_{\mathcal{A}_c} \tau_{rs} dA. \quad (5.2.5)$$

La última integral de esta expresión puede interpretarse como la densidad de flujo viscoso en la dirección axial sobre la frontera lateral del cilindro. Consecuentemente, la capa de fluido que se mueve en la dirección axial sobre ésta frontera  $\mathcal{A}_c$  comunica parte de su momentum a la capa adyacente de fluido, y en consecuencia, ésta se mantiene en movimiento en la misma dirección. Sin embargo, si la frontera lateral del cilindro se coloca lejos de la esfera, se tiene que sobre dicha frontera  $\partial w / \partial r \rightarrow 0$ , por lo tanto,  $\tau_{rs} \cong 0$ . Así, el flujo neto de momentum sobre la frontera del cilindro se reduce a la diferencia entre el efecto sumado del flujo inercial y de presión que entra en la tapa inferior menos el que sale en la tapa superior, es decir,

$$F_{\text{HD}} = \rho \int_{\mathcal{A}_a} w_a^2 dA - \rho \int_{\mathcal{A}_b} w_b^2 dA - \int_{\mathcal{A}_a} p_{ka} dA + \int_{\mathcal{A}_b} p_{kb} dA. \quad (5.2.6)$$

El primer par de términos del lado derecho de la expresión anterior representan el déficit (pérdida) de flujo inercial, respecto al flujo inercial existente en ausencia del cuerpo. Dado que el flujo en la estela es estacionario, el significado físico de estos términos es que representan la pérdida de momentum debido a la fricción viscosa. En general, este déficit de momentum se debe no solo al arrastre cuasiestacionario (de fricción y de forma) actuando sobre la superficie del cuerpo, sino también a la disipación viscosa en el seno del fluido lo cual produce un cambio en la estructura local del flujo e incluso en el campo de presión. Debido a esta circunstancia, la identificación de la pérdida de momentum debido exclusivamente al arrastre actuando sobre el cuerpo no es una tarea sencilla. Sin embargo, dado que el arrastre viscoso es la fuerza dominante (Tal y col., 1984b; Zhu y col., 1994; Liang y col., 1996; Chen y Wu, 2000), en este trabajo proponemos como una primera aproximación asociar este déficit únicamente al arrastre cuasiestacionario que ejerce el fluido sobre el cuerpo, es decir

$$F_{\text{d2}} \cong \rho \int_{\mathcal{A}_a} w_a^2 dA - \rho \int_{\mathcal{A}_b} w_b^2 dA. \quad (5.2.7)$$

## 5.2. Un modelo aproximado para la fuerza hidrodinámica partiendo de balances integrales 63

Sustituyendo la Ec. (5.2.7) en la Ec. (5.2.6) y dividiendo la expresión resultante entre la fuerza de arrastre de la esfera puntera obtenemos

$$\frac{F_{HD}}{F_{d1}} = \frac{F_{d2}}{F_{d1}} - \frac{1}{F_{d1}} \left( \int_{\mathcal{A}_a} p_a dA - \int_{\mathcal{A}_b} p_b dA \right). \quad (5.2.8)$$

Para evaluar las fuerzas de arrastre viscoso estacionario y de presión en la expresión anterior, supondremos que la esfera acarreada interactúa con el perfil asintótico promediado sobre el área frontal proyectada por ambas esferas,  $\bar{w} = \bar{w}_s$  (Ec. 3.4.6). Además, en la estimación de la fuerza de arrastre, consideraremos únicamente la principal dependencia del coeficiente de arrastre estacionario  $C_d$  con respecto al número de Reynolds, es decir,  $C_d \propto Re^{-1}$ . Siendo  $C_{d1} = 24/Re_1 (1 + 0.15 Re_1^{0.687})$  (Schiller y Nauman, 1933) válida para  $Re < 800$ , y una expresión similar es usada para estimar  $C_{d2}$  (véase el Capítulo 4, Ec. 4.2.23).

Sustituyendo la Ec. (4.2.23) en la Ec. (5.2.8) obtenemos la siguiente expresión para la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada:

$$\frac{F_{HD}}{F_{d1}} = (1 - W) - \frac{1}{F_{d1}} \left( \int_{\mathcal{A}_a} p_a dA - \int_{\mathcal{A}_b} p_b dA \right). \quad (5.2.9)$$

Para poder estimar el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior, es necesario evaluar la presión en ambos extremos (tapas) de la superficie de control (a una distancia  $s_t$  medida desde la superficie de ambos cuerpos, como se muestra en la Fig. 5.1). El campo de presión en la estela del cuerpo puntero puede ser evaluado sustituyendo  $\bar{w}$  en la componente axial de la ecuación de movimiento (Ec. 3.6.4). No obstante, actualmente se carece de una expresión analítica a  $Re$  intermedios para evaluar el campo de presión en la estela de un cuerpo interactuando con la estela de otro cuerpo e intentar abordar este problema está más allá del alcance del presente trabajo.

Por otro lado, en observaciones experimentales y simulaciones numéricas de un tren de esferas sólidas (Tal y col., 1984b; Liang y col., 1996) y un par de burbujas esféricas (Yuan y Prosperetti, 1994) han revelado que la estructura del flujo detrás de cada esfera es similar. Considerando lo anterior, la suposición básica en nuestro análisis para la estimación de la presión en ambos extremos del cilindro es que la estructura del flujo en la estela de la esfera puntera es similar a la estructura del flujo en la estela de la esfera acarreada. Esta similitud se establece al considerar que la razón entre la velocidad promedio en la estela del cuerpo puntero y la velocidad del flujo uniforme ( $u_1$ ), es aproximadamente igual a la razón entre la

velocidad promedio en la estela del cuerpo acarreado y una velocidad característica del flujo incidente sobre el cuerpo acarreado ( $u_2$ ). Así, la velocidad del flujo no perturbado en ambos extremos del cilindro puede expresarse a partir de la Ec. (3.4.6) como

$$\frac{\bar{w}_b}{u_2} \cong \frac{\bar{w}_a}{u_1} = 1 - \frac{C_{d1}}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}-1}\right) \right]. \quad (5.2.10)$$

De acuerdo a la física del problema  $u_2 < u_1$ . Es decir, debido al efecto de escudo del cuerpo puntero, el caudal que incide sobre el cuerpo acarreado (en la misma área proyectada por ambos cuerpos) es menor al caudal que incide sobre el cuerpo puntero ( $\pi/4d^2u_2 < \pi/4d^2u_1$ ). Si se considera la expresión anterior para el flujo en ambas tapas; y además, se desprecian los efectos de las fuerzas viscosas que actúan en la dirección del flujo, la componente axial de la ecuación de movimiento para el flujo no perturbado a partir de la Ec. (3.6.4) evaluada en ambos extremos del cilindro puede expresarse en forma aproximada por

$$u_* \frac{d\bar{w}_*}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_k}{ds}, \quad (5.2.11)$$

donde  $u_* = u_1$  y  $\bar{w}_* = \bar{w}_a$  (extremo inferior); o también  $u_* = u_2$  y  $\bar{w}_* = \bar{w}_b$  (extremo superior). Derivando la Ec. (5.2.10) y sustituyendo el resultado en la Ec. (5.2.11) se obtiene

$$\frac{dp_k}{ds} = C_{d1} \frac{1}{2} \rho u_*^2 \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}-1}\right) \frac{Re_1}{16} \frac{1}{(\hat{s}-1)^2} \frac{1}{d}. \quad (5.2.12)$$

Al integrar la ecuación anterior con la condición límite, para  $\hat{s} \rightarrow \infty$ ,  $p_k = 0$ ; se llega a la siguiente solución aproximada para el campo de presión dinámica:

$$p_k = C_{d1} \frac{1}{2} \rho u_*^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}-1}\right) \right]. \quad (5.2.13)$$

Sustituyendo la Ec. (5.2.13) en la Ec. (5.2.9) (con  $u_* = u_1$  para estimar  $p_{ka}$  y  $u_* = u_1$  para estimar  $p_{kb}$ ) y tomando en cuenta que  $p_k$  es independiente de  $r$ , se elige  $\mathcal{A}_* =$  área proyectada por ambas esferas ( $\pi/4d^2$ ). Al integrar la expresión resultante se llega a la siguiente expresión adimensional para la fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo acarreado:

$$\frac{F_{HD}}{F_{d1}} = (1 - W) + (1 - \lambda^2) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}-1}\right) \right], \quad (5.2.14)$$

donde  $\lambda$  representa la razón entre una velocidad característica del flujo incidente sobre la esfera acarreada y la velocidad del flujo uniforme incidente sobre la esfera puntera, es decir



$\lambda = u_2/u_1$ . En la expresión anterior, si se consideran las simplificaciones implícitas en el modelo, el primer término del lado derecho contiene el efecto de la fuerza de arrastre sobre el cuerpo acarreado, mientras que el último término representa la contribución de las fuerzas de presión.

Las dos principales características de la expresión para la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada, obtenida en la Ec. 5.2.14, son: (i) La consideración del efecto de la estela no sólo como una reducción en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria, sino también a través de la incorporación de las fuerzas de presión. (ii) La incorporación del parámetro  $\lambda$ , el cual representa la razón entre una velocidad característica del flujo incidente sobre el cuerpo acarreado y la velocidad del campo de flujo uniforme incidente sobre el cuerpo puntero, su valor debe estar entre  $0 < \lambda < 1$ . De acuerdo a la Ec. (5.2.14), el suponer  $\lambda = 1$  equivale a despreciar el efecto del gradiente de presión; es decir, la fuerza hidrodinámica experimentada por la esfera acarreada sería únicamente la fuerza de arrastre cuasiestacionaria. Mientras que el suponer  $\lambda = 0$  equivale a decir que no existe flujo en la estela de la esfera de adelante. La única posibilidad para que se presentara esta situación sería que la esfera puntera frenara totalmente el flujo hacia la esfera acarreada, en consecuencia, no existiría un defecto del flujo en la estela ( $W = 0$ ) y la presión dinámica en ambos extremos del cilindro sería  $p_a = p_b = 0$ . Por lo tanto, usando la expresión dada en la Ec. (5.2.9) se observa que en este escenario la esfera acarreada no experimentaría un efecto debido a la presencia de la esfera puntera.

Con la finalidad de alcanzar un modelo aproximado explícito, el valor de  $\lambda$  se estimará en el Capítulo 7 ajustando las predicciones de (5.2.14) con datos experimentales reportados en la literatura. Debe notarse que en esta expresión, la fuerza hidrodinámica sobre la esfera se reduce a la fuerza de arrastre de la esfera puntera a una distancia de separación entre cuerpos infinita ( $\hat{s} \rightarrow \infty$ ).

### 5.3. Expresión para la fuerza hidrodinámica en términos de expresiones diferenciales

Comenzaremos nuevamente por referirnos al sistema estudiado en la Sección anterior, el cual puede generalizarse al caso de un par de esferas del mismo tamaño moviéndose a través de un fluido newtoniano de dimensión infinita a la misma velocidad constante. Asumiremos su movimiento paralelo al eje vertical  $z$  de un marco de referencia de laboratorio, como se muestra en la Fig 5.2. El marco de referencia de laboratorio  $(x, y, z)$  se relaciona con el marco de referencia inercial cilíndrico anclado en el centro de la esfera puntera por medio de la

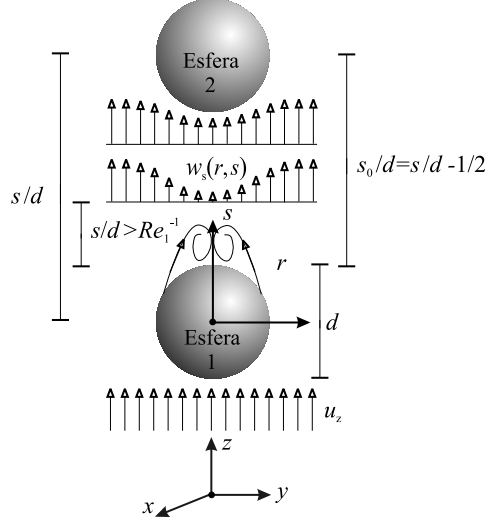


Figura 5.2: Interacción hidrodinámica de dos esferas colocadas en línea.

transformación de Galileo,  $z = U_{b1}t + s$ , siendo  $U_{b1}$  la velocidad de la esfera puntera y  $t$  el tiempo transcurrido. Si la esfera puntera está fija dicha velocidad desaparece. En este estudio, proponemos la expresión general considerando a  $U_{b1}$  como una constante.

Para la estimación de las fuerzas inerciales y viscosas actuando sobre la esfera acarreada nuevamente supondremos que ésta interactúa con el perfil de velocidad asintótico promediado en el área proyectada por ambas esferas,  $\bar{w}$  (Ec. 3.4.6). Considerando la naturaleza permanente del perfil de velocidad asintótico en una posición fija observada desde el marco de referencia de la esfera puntera, la componente vertical adimensional de la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada puede ser expresada simbólicamente como (véase la Sección 3.6)

$$\frac{F_{HD}}{F_{d1}} = \frac{F_{HDI}}{F_{d1}} + \frac{F_{d2}}{F_{d1}}. \quad (5.3.1)$$

Desde 1928, Taylor derivó la fuerza hidrodinámica inercial ( $F_{HDI}$ ) sobre una esfera fija inmersa en un flujo no-uniforme, estacionario e irrotacional invíscido, la cual es válida si el tamaño del cuerpo es pequeño en comparación con la escala de longitud de variaciones del flujo no perturbado (Sección 1.5). Además, si la dirección relativa del flujo es paralela con la dirección de movimiento de la esfera, esta fuerza se reduce a una contribución inercial del flujo no perturbado,  $m_f \bar{w}_z d\bar{w}_z/ds$  más la contribución inercial del flujo perturbado por la presencia del cuerpo  $m_f C_M \bar{w}_z d\bar{w}_z/ds$  (fuerza de masa agregada). Si ambos cuerpos están

fijos,  $U_{b1} = U_{b2} = 0$ , y considerando que  $ds = dz$  (Fig. 5.2), la fuerza hidrodinámica actuando sobre la esfera acarreada puede también ser obtenida a partir de la Ec. (3.6.7) y expresarse como

$$F_{\text{HDI}} = m_f (1 + C_M) \bar{w}_z \frac{d\bar{w}_z}{ds}. \quad (5.3.2)$$

Ahora, considerando que la velocidad en la estela observada en marcos de referencia es la misma ( $w_z = w_s$ ), sustituyendo la Ec. (3.4.6) y su derivada en la Ec. (5.3.2), y además, dividiendo la expresión resultante entre la fuerza de arrastre de la esfera puntera (Ec. A.1.16), se obtiene la siguiente expresión para la fuerza hidrodinámica inercial

$$\frac{F_{\text{HDI}}}{F_{\text{d1}}} = (1 + C_M) \frac{Re_1}{24} \frac{1}{(s_0/d)^2} (1 - W) \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{s_0/d}\right), \quad (5.3.3)$$

donde  $s_0/d = \hat{s} - 1/2$  es la distancia entre la superficie de atrás de la esfera puntera y el centro de la esfera acarreada. Sustituyendo las Ecs. (4.2.23) (con  $U_b = 1$ ) y (5.3.3) en la Ec. (5.3.1) y considerando que para una esfera  $C_M = 1/2$  (Magnaudet y Eames, 2000), se obtiene la siguiente expresión para la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada

$$\frac{F_{\text{HD}}}{F_{\text{d1}}} = (1 - W) \left[ 1 + \frac{Re_1}{16} \frac{1}{(s_0/d)^2} \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{s_0/d}\right) \right]. \quad (5.3.4)$$

Nuevamente, acorde con la física del fenómeno, en el límite  $s_0/d \rightarrow \infty$  la fuerza hidrodinámica predicha por la expresión anterior se reduce a la fuerza de arrastre sobre una esfera aislada.



## Capítulo 6

# Velocidad de aproximación de la burbuja acarreada

### 6.1. Obtención de un modelo aproximado

Para la burbuja puntera moviéndose a su velocidad terminal en un volumen infinito de un fluido con flujo uniforme, la condición de equilibrio mecánico (balance estacionario de fuerzas) considerando las fuerzas volumétricas e hidrodinámicas actuando sobre la burbuja se expresa simplemente como

$$F_b + F_{d1} = 0. \quad (6.1.1)$$

donde  $F_b$  es la fuerza boyante neta actuando hacia arriba sobre el centro de masa de la burbuja, y considera la diferencia entre las fuerzas de flotación y gravitacional (aunque la fuerza gravitacional sobre una burbuja es despreciable y la fuerza boyante neta se reduce a la fuerza de flotación).

El balance cuasiestacionario de fuerzas sobre la burbuja acarreada puede escribirse simbólicamente como

$$F_b + F_{d2} + F_{WR} + F_{AM} = 0. \quad (6.1.2)$$

En la ecuación anterior se ha considerado que la inercia de la burbuja es despreciable comparada con la inercia del líquido; y además, la contribución del término de aceleración del cuerpo en la fuerza de masa agregada, el término histórico de fuerza y la no-uniformidad axial del flujo son despreciables respecto a las fuerzas consideradas: las fuerzas de rozamiento, boyante e inerciales del fluido.

Consideremos ahora una burbuja hipotética moviéndose a la misma velocidad que la bur-

buja acarreada, pero interactuando con el flujo uniforme de fluido. La fuerza de arrastre sobre esta burbuja sería

$$F_{dh2} = -C_{dh2} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{b2} - u_z)^2, \quad (6.1.3)$$

donde  $C_{dh2}$  es el coeficiente de arrastre estacionario referido a la velocidad relativa  $U_{b2} - u_z$ . Sustituyendo la Ec. (6.1.1) en la Ec. (6.1.2) y dividiendo el resultado entre la Ec. (6.1.3) se obtiene

$$\frac{F_{d2}}{F_{dh2}} = \frac{F_{d1}}{F_{dh2}} - \frac{F_{WR}}{F_{dh2}} - \frac{F_{AM}}{F_{dh2}} = \frac{1}{\xi} \frac{F_{d1}}{F_{dh2}}, \quad (6.1.4)$$

donde

$$\frac{1}{\xi} \doteq 1 - \frac{F_{WR}}{F_{d1}} - \frac{F_{AM}}{F_{d1}}. \quad (6.1.5)$$

Al considerar la Ec. (3.4.6), así como las definiciones dadas en las Ecs. (4.2.1) (suponiendo despreciable el efecto de la no-uniformidad y usando  $\gamma = 1$  y  $\beta = 1$ ), (4.2.3) y (6.1.3), se obtienen las siguientes expresiones adimensionales para la fuerza de arrastre sobre la burbuja acarreada y la puntera:

$$\frac{F_{d2}}{F_{dh2}} = \frac{U_{b2} - \bar{w}_z}{U_{b2} - u_z} = 1 - \frac{W}{U_b} \quad (6.1.6)$$

y

$$\frac{F_{d1}}{F_{dh2}} = \frac{U_{b1} - u_z}{U_{b2} - u_z} = \frac{1}{U_b}. \quad (6.1.7)$$

La contribución convectiva de las fuerzas de aceleración del fluido y de masa agregada están dadas por (Apéndice A.2)

$$\frac{F_{WR}}{F_{d1}} = \frac{Re_1}{24} (1 - W) \left( 1 - \frac{W}{W_0} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s} - 1} \right) \left( \frac{1}{\hat{s} - 1} \right)^2 \quad (6.1.8)$$

y

$$\frac{F_{AM}}{F_{d1}} = \frac{1}{2} \frac{F_{WR}}{F_{d1}}. \quad (6.1.9)$$

Aquí,  $\hat{s} - 1$  es la distancia entre las superficies más próximas de ambas burbujas. Al sustituir las Ecs. (6.1.8) y (6.1.9) en la Ec. (6.1.5) se obtiene

$$\frac{1}{\xi} = 1 - \frac{3}{2} \frac{F_{WR}}{F_{d1}} = 1 - \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left( 1 - \frac{W}{W_0} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s} - 1} \right) \left( \frac{1}{\hat{s} - 1} \right)^2. \quad (6.1.10)$$

Así, en caso de conocer o lograr establecer alguna tendencia o hipótesis plausible acerca de la función multiplicadora  $\xi$ , el balance cuasiestacionario de fuerzas (Ec. 6.1.4) podría simplificarse considerablemente. Por ahora, el interés específico es obtener un modelo lo más

simplificado posible para predecir la velocidad de ascenso de la burbuja de atrás. Con este propósito, en la Fig. 6.1 se comparan las predicciones de  $1/\xi$  (Ec. 6.1.10) para  $Re_1 = 21.5$  con mediciones experimentales de  $1/U_b$  reportadas por Katz y Meneveau (1996). La semejanza entre el comportamiento de  $1/\xi$  y  $1/U_b$  es evidente en esta figura, por lo que es razonable proponer que

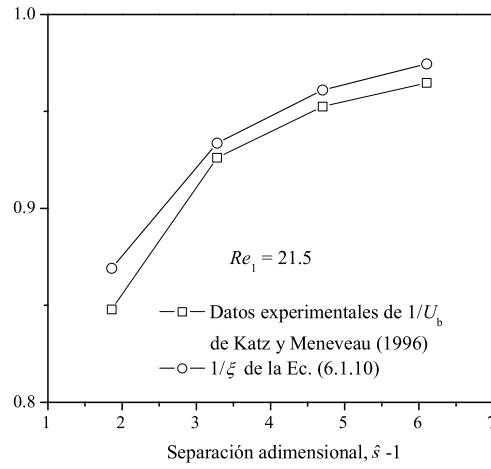


Figura 6.1:  $1/\xi$  y  $1/U_b$  para diferentes distancias de separación.

$$\frac{1}{\xi} \approx \frac{1}{U_b}. \quad (6.1.11)$$

Sustituyendo las Ecs. (6.1.6), (6.1.7) y (6.1.11) en la Ec. (6.1.4) se obtiene

$$U_b (U_b - W) = 1. \quad (6.1.12)$$

Esta ecuación simplificada equivale al balance de fuerzas sobre la burbuja de atrás dado en la Ec. (6.1.2). Al resolver para  $U_b$ , considerando únicamente la raíz positiva se obtiene la siguiente expresión:

$$U_b = \frac{W + \sqrt{W^2 + 4}}{2}. \quad (6.1.13)$$

En esta expresión, la velocidad de ascenso de la burbuja de atrás se iguala a la de una burbuja aislada ( $U_b = 1$ ) a una distancia de separación entre burbujas infinita ( $\hat{s} \rightarrow \infty$ ).

## 6.2. Modelos basados en diferentes suposiciones para las fuerzas que actúan sobre la burbuja

Para la burbuja acarreada moviéndose verticalmente a  $Re$  pequeños a moderados en un fluido cuyo flujo en ausencia del cuerpo es  $\bar{w}_z(s)$ , la ecuación de movimiento completa se obtiene (cfr. Park y col., 1995; Michaelides, 2003) a partir de la ecuación de Maxey y Riley (1983), pero modificando los siguientes términos dependientes del  $Re$ : (1) Introduciendo la definición del coeficiente de arrastre estacionario para considerar las desviaciones implícitas en la restricción de flujo reptante. (2) Multiplicando por un factor empírico el término histórico de fuerza, y además, empleando una expresión aproximada para el kernel de este término. (3) Despreciando la contribución de la no-uniformidad axial del flujo.

Ahora, se tiene como objetivo evaluar la contribución de cada una de las fuerzas en el movimiento de la burbuja. Por consiguiente, las expresiones analíticas de estos términos, obtenidas para una burbuja aislada en el régimen de flujo reptante, son usadas para el caso de la burbuja acarreada moviéndose a  $Re$  pequeños ( $Re \leq 5$ ). Así que, el balance adimensional de fuerzas sobre la burbuja acarreada (despreciando la inercia de la burbuja y considerando la flotación como la única fuerza externa) se escribe como

$$\frac{F_{WR}}{F_{d1}} + \frac{F_{AMT}}{F_{d1}} + \frac{F_{d2T}}{F_{d1}} + \frac{F_{hT}}{F_{d1}} - 1 = 0, \quad (6.2.1)$$

donde se ha considerado de la Ec. (6.1.1) que  $F_b = -F_{d1}$ . Las expresiones adimensionales de cada una de las fuerzas están dadas por (véase Apéndice A.2)

$$\frac{F_{WR}}{F_{d1}} = \frac{Re_1}{24} (1 - W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{s} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2, \quad (6.2.2)$$

$$\frac{F_{AMT}}{F_{d1}} = \frac{1}{2} \frac{F_{WR}}{F_{d1}} - \frac{Re_1}{48} \frac{1}{\hat{s}} \frac{(U_b - 1)}{W_0} \frac{dU_b}{d\hat{s}} + \Phi_{AM}, \quad (6.2.3)$$

$$\frac{F_{d2T}}{F_{d1}} = \beta (U_b - \gamma W - \Phi_d) \quad (6.2.4)$$

y

$$\frac{F_{hT}}{F_{d1}} = \beta \sqrt{\frac{Re_1}{4\pi}} \int_{\hat{s}_0}^{\hat{s}} \sqrt{U_b - 1} \left( \frac{dU_b}{d\hat{\sigma}} - \frac{dW}{d\hat{\sigma}} + \Phi_h \right) \frac{d\sigma}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}}. \quad (6.2.5)$$

Aquí,

$$\frac{dW}{d\hat{\sigma}} = -\frac{W_0}{\hat{\sigma}} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{W}{W_0} \right), \quad (6.2.6)$$



## 6.2. Modelos basados en diferentes suposiciones para las fuerzas que actúan sobre la burbuja 73

es la derivada adimensional del defecto del flujo en la estela,  $dU_b/d\hat{\sigma}$  la derivada adimensional espacial de la velocidad de la burbuja acarreada, y  $\hat{\sigma}$  es una variable auxiliar para  $\hat{s}$ . Además,

$$\Phi_{AM} = \frac{Re_1}{320} (1 - W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^4, \quad (6.2.7)$$

$$\Phi_d = \frac{1}{24} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( 2 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \right) W_0 \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 \quad (6.2.8)$$

y

$$\Phi_h = \frac{1}{4} W_0 \left( 1 - \frac{W}{W_0} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{\sigma}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{\sigma}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{\sigma}} \right) \left( \frac{1}{\hat{\sigma}} \right)^3. \quad (6.2.9)$$

Son la contribución de la no-uniformidad axial del flujo para las fuerzas de masa agregada, arrastre cuasiestacionario e histórica, respectivamente. Siendo

$$\varphi_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \frac{Re_1}{16} \quad (6.2.10)$$

y

$$\varphi_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \frac{Re_1}{16}. \quad (6.2.11)$$

En muchos trabajos concernientes con burbujas el término histórico es usualmente despreciado debido principalmente a que su influencia es mínima o por las dificultades numéricas en su implementación (cfr. Michaelides, 2003). Zhang y Fan (2003) usaron directamente la expresión analítica de Morrison y Stewart (1976) de la fuerza histórica sobre una burbuja aislada moviéndose en un líquido estancado en el régimen de flujo reptante para el caso de la burbuja acarreada moviéndose a  $Re$  pequeños a moderados. Encontraron que para  $Re = 21.5$  y una distancia de separación entre burbujas de dos diámetros esta fuerza contribuye con un 10% de la fuerza resistiva total. Sin embargo, como fue discutido en la Sección 1.5, es ampliamente reconocido que el kernel del término histórico para flujo reptante sobreestima el efecto de la fuerza histórica a  $Re$  mayores. Por lo tanto, las conclusiones de Zhang y Fan (2003) respecto la importancia del término histórico sobre la burbuja acarreada podrían ser erróneas. Además, la expresión usada por Zhang y Fan (2003) equivale a considerar en el integrando de la Ec. (6.2.5) únicamente  $dU_b/d\hat{\sigma}$ , y suponer  $dW/d\hat{\sigma} = 0$  y  $\Phi_h = 0$ . Sin embargo, si se considera que la burbuja acarreada se acelera en relación al flujo local, y que en la estela para  $\hat{s} > 2$ ,  $dU_b/d\hat{\sigma} \approx dW/d\hat{\sigma}$ ; por lo tanto, existen argumentos suficientes para pensar que Zhang y Fan (2003) sobreestimaron la contribución del término histórico de fuerza.

Por otro lado, en estudios experimentales discutido previamente (Katz y Meneveau, 1996;

Tabla 6.1: Fuerzas actuando sobre la burbuja acarreada

Modelo	Hipótesis
I	$F_{d2T}/F_{d1} - 1 = 0$
II	$F_{d2T}/F_{d1} - 1 = 0$ , con $\Phi_d = 0$
III	$(F_{WR} + F_{d2T})/F_{d1} - 1 = 0$
IV	$(F_{WR} + F_{d2T})/F_{d1} - 1 = 0$ con $\Phi_d = 0$
V	$(F_{WR} + F_{AMT} + F_{d2T})/F_{d1} - 1 = 0$ , con $dU_b/d\hat{\sigma} = 0$
VI	$(F_{WR} + F_{AMT} + F_{d2T})/F_{d1} - 1 = 0$ , con $\Phi_d = 0$ y $dU_b/d\hat{\sigma} = 0$
VII	$(F_{WR} + F_{AMT} + F_{d2T})/F_{d1} - 1 = 0$
VIII	$(F_{WR} + F_{AMT} + F_{d2T})/F_{d1} - 1 = 0$ , con $\Phi_d = 0$ y $\Phi_{AM} = 0$
IX	$(F_{WR} + F_{AMT} + F_{d2T} + F_{hT})/F_{d1} - 1 = 0$
X	$(F_{WR} + F_{AMT} + F_{d2T} + F_{hT})/F_{d1} - 1 = 0$ , con $\Phi_d = 0$ , $\Phi_{AM} = 0$ y $\Phi_h = 0$

Sanada y *col.*, 2006) de un par (o tren) de burbujas esféricas ascendiendo en línea a  $Re$  pequeños a moderadas, se ha observado que la aceleración de la burbuja acarreada desde un marco de referencia anclado en la burbuja puntera es muy pequeña en comparación con la aceleración de la misma burbuja cuando es liberada de un tubo capilar (parte del reposo) (Park y *col.*, 1995). Así que, el tiempo transcurrido para que la burbuja acarreada se desplace una distancia equivalente a un diámetro de burbuja es mucho mayor respecto al de una burbuja que parte del reposo. Por lo tanto, las observaciones experimentales para la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada corresponden a tiempos experimentales de observación largos. En vista de los tiempos de observaciones largos y de los resultados concernientes con el comportamiento del kernel del término histórico discutidos previamente, es razonable suponer que el kernel del término histórico sobre la burbuja acarreada tiene una dependencia temporal  $t^{-2}$ . Es decir, es aún más débil que el kernel del término histórico usado en la Ec. (6.2.5). Por consiguiente, si se demuestra que a  $Re$  pequeños el término histórico de fuerza usado es despreciable respecto a las demás fuerzas consideradas, el verdadero término histórico sobre la burbuja acarreada a  $Re$  mayores sería aún más pequeño.

Para tomar en cuenta números de Reynolds finitos de burbuja, se introduce en el término histórico el parámetro de corrección  $\beta$  (véase el Apéndice A.2 y la Tabla 4.1). La consideración de un coeficiente de corrección o función de correlación en la fuerza histórica para considerar  $Re$  finitos siguiendo la práctica usada para el término de arrastre estacionario es muy común en aplicaciones prácticas de ingeniería (Kim y Sirignano, 1998; Michaelides, 2003).

Al sustituir las expresiones dadas en las Ecs. (6.2.2-6.2.5) en cada uno de los balances de fuerzas de la Tabla 6.1, se obtienen los siguientes modelos para la velocidad de ascenso de la

## 6.2. Modelos basados en diferentes suposiciones para las fuerzas que actúan sobre la burbuja75

burbuja acarreada:

$$U_b^I = \frac{1}{\beta} + \gamma W + \Phi_d, \quad (6.2.12)$$

$$U_b^{II} = \frac{1}{\beta} + \gamma W, \quad (6.2.13)$$

$$U_b^{III} = \frac{1}{\beta} + \gamma W + \Phi_d - \frac{1}{\beta} \frac{Re_1}{24} (1 - W) \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^2, \quad (6.2.14)$$

$$U_b^{IV} = \frac{1}{\beta} + \gamma W - \frac{1}{\beta} \frac{Re_1}{24} (1 - W) \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^2, \quad (6.2.15)$$

$$U_b^V = \frac{1}{\beta} + \gamma W + \Phi_d - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^2 + \Phi_{AM} \right], \quad (6.2.16)$$

$$U_b^{VI} = \frac{1}{\beta} + \gamma W - \frac{1}{\beta} \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^2, \quad (6.2.17)$$

$$U_b^{VII} = \frac{1}{\beta} + \gamma W + \Phi_d - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^2 + \Phi_{AM} \right] + \frac{Re_1}{48} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{s}} \frac{(U_b^{VII} - 1)}{W_0} \frac{dU_b^{VII}}{d\hat{s}}, \quad (6.2.18)$$

$$U_b^{VIII} = \frac{1}{\beta} + \gamma W - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^2 \right] + \frac{Re_1}{48} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{s}} \frac{(U_b^{VIII} - 1)}{W_0} \frac{dU_b^{VIII}}{d\hat{s}}, \quad (6.2.19)$$

$$U_b^{IX} = \frac{1}{\beta} + \gamma W + \Phi_d - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^2 + \Phi_{AM} \right] + \frac{Re_1}{48} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{s}} \frac{(U_b^{IX} - 1)}{W_0} \frac{dU_b^{IX}}{d\hat{s}} - \sqrt{\frac{Re_1}{4\pi}} \int_{\hat{s}_0}^{\hat{s}} \sqrt{U_b^{IX} - 1} \left\{ \frac{dU_b^{IX}}{d\hat{\sigma}} + \frac{W_0}{\hat{\sigma}} \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{W}{W_0}\right) + \Phi_h \right\} \frac{d\hat{\sigma}}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}} \quad (6.2.20)$$

y

$$\begin{aligned}
U_b^X &= \frac{1}{\beta} + \gamma W - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 \right] \\
&+ \frac{Re_1}{48} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{s}} \frac{(U_b^X - 1)}{W_0} \frac{dU_b^X}{d\hat{s}} \\
&- \sqrt{\frac{Re_1}{4\pi}} \int_{\hat{s}_0}^{\hat{s}} \sqrt{U_b^X - 1} \left\{ \frac{dU_b^X}{d\hat{\sigma}} + \frac{W_0}{\hat{\sigma}} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{W}{W_0} \right) \right\} \frac{d\hat{\sigma}}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}}.
\end{aligned} \tag{6.2.21}$$

En todos los modelos anteriores, para un mismo  $Re_1$ ,  $\beta = \beta(U_b)$  y  $U_b = U_b(s)$ ; por lo tanto, es necesario conocer primero  $U_b$  para cada distancia de separación. El procedimiento que se usó para su evaluación es el siguiente: (1) Inicialmente se supone  $\beta_i = 1$  y se obtiene una primera estimación para  $U_{b,i}$ . (2) Posteriormente,  $U_{b,i}$  es usado para obtener una nueva estimación  $\beta_{i+1}$  la cual a su vez es nuevamente usada para estimar  $U_{b,i+1}$ . El procedimiento iterativo se repite hasta que  $|U_{b,i+1} - U_{b,i}| \leq Et$ , siendo  $Et$  el error tolerado. El consumo de tiempo de cómputo de este procedimiento es mínimo, con un máximo de 10 iteraciones siempre se obtuvieron  $Et < 1 \times 10^{-6}$ .

Los modelos  $U_b^{IX}$  y  $U_b^X$  consideran el conjunto de fuerzas totales que actúan sobre la burbuja acarreada con y sin el efecto de la no-uniformidad. Ambos modelos son ecuaciones integro-diferenciales para  $U_b$  imposibles de resolver analíticamente. Incluso numéricamente, su solución tiene un costo de cómputo elevado y es complicada dado que el integrando depende de la solución para  $U_b$  en el mismo instante (cfr. Michaelides, 2003, quien presenta una discusión extensa de las dificultades existentes en la evaluación del término histórico). Sin embargo, es posible elaborar una estrategia que permita estimar la magnitud relativa de cada término aprovechando que los modelos  $U_b^V$  y  $U_b^{VI}$  contienen los efectos más importantes (flotación, arrastre cuasiestacionario e inercia del líquido). Por consiguiente, ambos modelos pueden ser utilizados como una aproximación inicial para estimar  $dU_b^{VII}/d\hat{s}$  y  $dU_b^{VIII}/d\hat{s}$ . Conociendo  $U_b^{VII}$  y  $U_b^{VIII}$ , sus derivadas pueden ser a su vez utilizadas en la obtención de una aproximación inicial para estimar  $dU_b^{IX}/d\hat{\sigma}$  y  $dU_b^X/d\hat{\sigma}$ , y así alcanzar finalmente una solución para  $U_b^{IX}$  y  $U_b^X$ .

En la Fig. 6.2 se muestran  $U_b^V$  y  $U_b^{VI}$  (iterando  $\beta$ ), y las predicciones de estos mismos modelos y (suponiendo  $\beta = 1$ ) para  $Re_1 = 3$  y 50. Se observa que para cada modelo y un mismo  $Re_1$ , el valor de  $\beta$  influye escasamente en la pendiente. Este mismo comportamiento fue también observado para los modelos  $U_b^I$ ,  $U_b^{II}$ ,  $U_b^{III}$  y  $U_b^{IV}$ . Por lo tanto, para cada modelo de la Tabla 6.1 es razonable a suponer que,  $dU_b^i/d\hat{s} \cong /dU_{b,\beta=1}^i d\hat{s}$ .

## 6.2. Modelos basados en diferentes suposiciones para las fuerzas que actúan sobre la burbuja 77

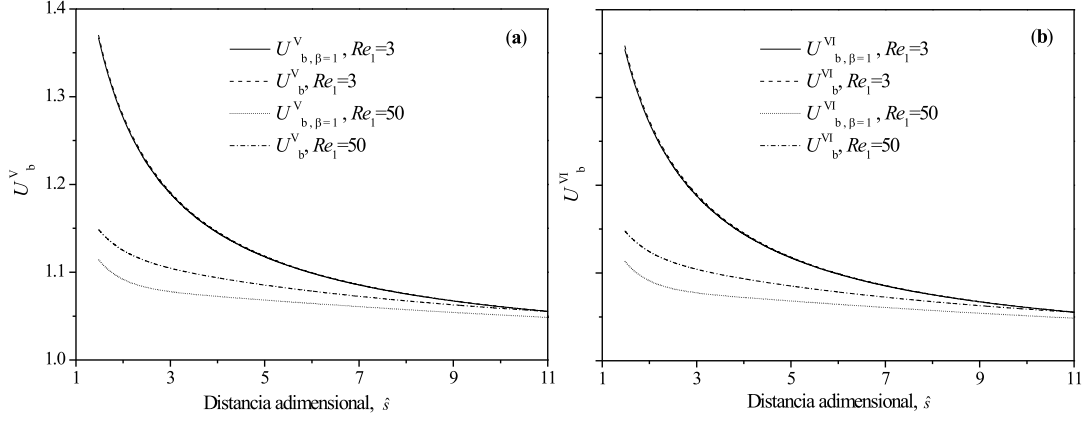


Figura 6.2: Predicción de los modelos  $U_b^V$  y  $U_b^{VI}$  usando  $\beta$  iterada y suponiendo  $\beta = 1$ .

Considerando lo anterior, para obtener  $U_b^{VII}$  se aproxima

$$\frac{dU_b^{VII}}{d\hat{s}} \cong \frac{dU_{b,\beta=1}^V}{d\hat{s}} = \frac{dU_{b,\beta=1}^{VI}}{d\hat{s}} + \frac{d\Phi_d}{d\hat{s}} - \frac{d\Phi_{AM}}{d\hat{s}}. \quad (6.2.22)$$

Derivando las Ecs. (6.2.16), (6.2.7) y (6.2.8) se llega a

$$\begin{aligned} \frac{dU_{b,\beta=1}^{VI}}{d\hat{s}} &= \gamma \frac{dW}{ds} - \frac{d}{ds} \left[ \frac{Re_1}{16} (1-W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{s} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 \right] \\ &+ \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^3 \\ &\times \left\{ \gamma W_0 \hat{s}^2 + \frac{Re_1}{16} \left[ W_0 \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) - (1-W) \left( 2 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

$$\frac{d\Phi_d}{ds} = \frac{Re_1}{384} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) W_0 \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^4 \left[ 1 + \left( 2 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \right) - \frac{96}{Re_1} \hat{s} \left( 1 - \frac{Re_1}{32} \frac{1}{\hat{s}} \right) \right], \quad (6.2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{AM}}{ds} &= \frac{Re_1}{320} (1-W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^5 \\ &+ \left\{ \left( \frac{1}{\hat{s}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}} \right) \varphi_2 + \left( \frac{1}{\hat{s}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}} \right) \varphi_1 \right. \\ &\left. + \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}} \right) \left[ \frac{W_0}{1-W} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) + \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} - 4 \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

Sustituyendo las Ecs. (6.2.23-6.2.25) en la Ec. (6.2.22) y el resultado en en la Ec. (6.2.18) se obtiene

$$U_b^{\text{VII}} = \frac{1}{1 + \Gamma^{\text{VII}}} \left\{ \frac{1}{\beta} + \gamma W + \Phi_d - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 + \Phi_{\text{AM}} \right] + \Gamma^{\text{VII}} \right\}, \quad (6.2.26)$$

donde

$$\Gamma^{\text{VII}} = -\frac{Re_1}{48} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{s}} \frac{1}{W_0} \frac{dU_{b,\beta=1}^{\text{V}}}{d\hat{s}}. \quad (6.2.27)$$

Para obtener  $U_b^{\text{VIII}}$  se aproxima

$$\frac{dU_b^{\text{VIII}}}{d\hat{s}} \cong \frac{dU_{b,\beta=1}^{\text{VI}}}{d\hat{s}}. \quad (6.2.28)$$

Sustituyendo la Ec. (6.2.23) en la Ec. (6.2.28) y el resultado en la Ec. (6.2.19) obtenemos

$$U_b^{\text{VIII}} = \frac{1}{1 + \Gamma^{\text{VIII}}} \left\{ \frac{1}{\beta} + \gamma W - \frac{1}{\beta} \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 + \Gamma^{\text{VIII}} \right\}, \quad (6.2.29)$$

donde

$$\Gamma^{\text{VIII}} = -\frac{Re_1}{48} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{s}} \frac{1}{W_0} \frac{dU_{b,\beta=1}^{\text{VI}}}{d\hat{s}}. \quad (6.2.30)$$

Si se derivan nuevamente las Ecs. (6.2.26) y (6.2.29), y el resultado se sustituye en las Ecs. (6.2.18) y (6.2.19) se obtendría una segunda aproximación para  $U_b^{\text{VII}}$  y  $U_b^{\text{VIII}}$ . Este procedimiento puede repetirse el número de veces que se desee para obtener nuevas y mejores estimaciones para  $U_b^{\text{VII}}$  y  $U_b^{\text{VIII}}$ . Sin embargo, en este trabajo vamos a usar únicamente la primera aproximación.

Para obtener  $U_b^{\text{IX}}$  se aproxima

$$\frac{dU_b^{\text{IX}}}{d\hat{s}} \cong \frac{dU_{b,\beta=1}^{\text{VII}}}{d\hat{s}} = \frac{1}{1 + \Gamma_{\beta=1}^{\text{VII}}} \left\{ \frac{dU_{b,\beta=1}^{\text{V}}}{d\hat{s}} + \left( 1 - \frac{U_{b,\beta=1}^{\text{V}} + \Gamma_{\beta=1}^{\text{VII}}}{1 + \Gamma_{\beta=1}^{\text{VII}}} \right) \frac{d\Gamma_{\beta=1}^{\text{VII}}}{d\hat{s}} \right\}. \quad (6.2.31)$$

Donde a partir de la Ec. (6.2.27) se tiene que

$$\frac{d\Gamma_{\beta=1}^{\text{VII}}}{d\hat{s}} = -\frac{Re_1}{48} \frac{1}{\hat{s}} \frac{1}{W_0} \frac{d}{d\hat{s}} \left( \frac{dU_{b,\beta=1}^{\text{V}}}{d\hat{s}} \right). \quad (6.2.32)$$

## 6.2. Modelos basados en diferentes suposiciones para las fuerzas que actúan sobre la burbuja 79

Por lo tanto, es necesario derivar nuevamente la Ec. (6.2.22), derivándola se llega a

$$\frac{d}{d\hat{s}} \left( \frac{dU_{b,\beta=1}^V}{d\hat{s}} \right) = \frac{d}{d\hat{s}} \left( \frac{dU_{b,\beta=1}^{VI}}{d\hat{s}} \right) + \frac{d}{d\hat{s}} \left( \frac{d\Phi_d}{d\hat{s}} \right) - \frac{d}{d\hat{s}} \left( \frac{d\Phi_{AM}}{d\hat{s}} \right), \quad (6.2.33)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{s}} \left( \frac{dU_{b,\beta=1}^{VI}}{d\hat{s}} \right) &= - \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^4 \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\gamma W_0 \hat{s}^2 + \left( \frac{Re_1}{16} \right)^2 (1 - W) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right) + \left\langle 1 - \frac{Re_1}{16} \left[ \left( 1 + \frac{Re_1}{16} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right) - 2 \right] \right\rangle W_0 \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \\ &- \left\langle \gamma W_0 \hat{s}^2 - \frac{Re_1}{16} \left[ (1 - W) \left( 2 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \right) - W_0 \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \right] \right\rangle \left( 3 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \right) \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

$$\left( \frac{d\Phi_d}{d\hat{s}} \right) = \frac{Re_1}{384} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) W_0 \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^6 \left\{ \begin{aligned} &s^2 \left[ \frac{Re_1}{16} \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 - \frac{96}{Re_1} \right] \\ &- \left[ 1 + \left( 2 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \right) \left( 1 - \frac{48}{Re_1} \hat{s} \right) \right] \left( 3\hat{s} + \frac{Re_1}{16} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (6.2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{s}} \left( \frac{d\Phi_{AM}}{d\hat{s}} \right) &= \frac{Re_1}{320} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) (1 - W) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^5 \\ &\times \left\{ \left[ \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} - 5 + \frac{W_0}{1 - W} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \right] \Psi \left( \frac{1}{\hat{s}} \right) + \frac{d\Psi}{d\hat{s}} \right\}, \end{aligned} \quad (6.2.36)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \left[ \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}} \right) \varphi_2 + \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}} \right) \varphi_1 \right] \left( \frac{1}{\hat{s}} \right) \\ &+ \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}} \right) \left[ \frac{W_0}{1 - W} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) + \frac{Re_1}{16} \left( \frac{1}{\hat{s}} \right) - 4 \right] \end{aligned} \quad (6.2.37)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\hat{s}} &= 2\varphi_1\varphi_2 \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^3 \\ &+ \left[ \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}} \right) \varphi_2 + \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}} \right) \varphi_1 \right] \left[ \frac{W_0}{1 - W} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) + \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} - 5 \right] \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 \\ &+ \left\{ \frac{W_0}{1 - W} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left[ \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} - 1 - \frac{W_0}{1 - W} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \right] - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \right\} \\ &\times \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right). \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

Sustituyendo la Ec. (6.2.31) en la Ec. (6.2.20) se obtiene

$$U_{b,i+1}^{IX} = \frac{1}{1 + \Gamma^{IX}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\beta} + \gamma W - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 + \Phi_{AM} \right] + \Phi_d + \Gamma^{IX} \\ & - \sqrt{\frac{Re_1}{4\pi}} \int_{\hat{s}_0}^{\hat{s}} \sqrt{U_{b,i}^{IX} - 1} \left[ \frac{dU_{b,\beta=1}^{VII}}{d\hat{s}} + \frac{W_0}{\hat{\sigma}} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{W}{W_0} \right) + \Phi_h \right] \frac{d\hat{\sigma}}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}} \end{aligned} \right\}, \quad (6.2.39)$$

donde

$$\Gamma^{IX} = -\frac{Re_1}{48} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{s}} \frac{1}{W_0} \frac{dU_{b,\beta=1}^{VII}}{d\hat{s}}. \quad (6.2.40)$$

Para obtener  $U_b^X$  se aproxima

$$\frac{dU_b^X}{d\hat{s}} \cong \frac{dU_{b,\beta=1}^{VIII}}{d\hat{s}} = \frac{1}{1 + \Gamma_{\beta=1}^{VII}} \left\{ \frac{dU_{b,\beta=1}^{VI}}{d\hat{s}} + \left( 1 - \frac{U_{b,\beta=1}^{VI} + \Gamma_{\beta=1}^{VIII}}{1 + \Gamma_{\beta=1}^{VIII}} \right) \frac{d\Gamma_{\beta=1}^{VIII}}{d\hat{s}} \right\}. \quad (6.2.41)$$

Donde a partir de la Ec. (6.2.30) se tiene que

$$\Gamma_{\beta=1}^{VIII} = -\frac{Re_1}{48} \frac{1}{\hat{s}} \frac{1}{W_0} \frac{dU_{b,\beta=1}^{VI}}{d\hat{s}}. \quad (6.2.42)$$

Derivando la Ec. (6.2.42) se llega a

$$\frac{d\Gamma_{\beta=1}^{VIII}}{d\hat{s}} = -\frac{Re_1}{48} \frac{1}{\hat{s}} \frac{1}{W_0} \frac{d}{d\hat{s}} \left( \frac{dU_{b,\beta=1}^{VI}}{d\hat{s}} \right). \quad (6.2.43)$$

Sustituyendo la Ec. (6.2.43) en la Ec. (6.2.41) y el resultado en la Ec. (6.2.21) se obtiene

$$U_{b,i+1}^X = \frac{1}{(1 + \Gamma^X)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\beta} + \gamma W - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{Re_1}{16} (1 - W) \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0} \right) \left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^2 + \Gamma^X \right] \\ & - \sqrt{\frac{Re_1}{4\pi}} \int_{\hat{s}_0}^{\hat{s}} \sqrt{U_{b,i}^X - 1} \left[ \frac{dU_{b,\beta=1}^{VIII}}{d\hat{s}} + \frac{W_0}{\hat{\sigma}} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{W}{W_0} \right) \right] \frac{d\hat{\sigma}}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}} \end{aligned} \right\}, \quad (6.2.44)$$

donde

$$\Gamma^X = -\frac{Re_1}{48} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\hat{s}} \frac{1}{W_0} \frac{dU_{b,\beta=1}^{VIII}}{d\hat{s}}. \quad (6.2.45)$$

Para resolver  $U_{b,i+1}^{IX}$  y  $U_{b,i+1}^X$  es necesario conocer una primera aproximación para  $U_{b,i}^{IX}$  y  $U_{b,i}^X$ . Considerando que a una cierta distancia de la burbuja puntera el término histórico de fuerza es despreciable, se supone que a esta distancia  $U_{b,i}^{IX} = U_b^{VII}$  y  $U_{b,i}^X = U_b^{VIII}$ . Posteriormente, el valor obtenido de  $U_{b,i+1}^{IX}$  y  $U_{b,i+1}^X$  es nuevamente usado para la próxima estimación a una distancia menor, y el procedimiento se repite hasta la distancia deseada. Para evitar



## 6.2. Modelos basados en diferentes suposiciones para las fuerzas que actúan sobre la burbuja 81

singularidades en el integrando en  $\hat{\sigma} = \hat{s}$ , el valor del integrando para cualquier distancia  $\hat{s}_0 - s$ , se evalúa hasta  $\hat{\sigma} = \hat{s} + \Delta\hat{\sigma}$ , siendo  $\Delta\hat{\sigma}$  el tamaño de paso.

Renombrando ahora al producto de la raíz cuadrada y el término entre corchetes de las Ecs. (6.2.41) y (6.2.44) como  $f(\hat{\sigma})$ . Si consideramos que  $f(\hat{\sigma})$  es acotada y mayor que cero en  $[\hat{s}, \hat{s} + \Delta\hat{\sigma}]$ ; entonces existe un número real  $M$  tal que  $f(\hat{\sigma}) \leq M$  para todo valor intermedio de  $\hat{\sigma}$ . Por lo tanto

$$\int_{\hat{s}}^{\hat{s}+\Delta\hat{\sigma}} \frac{f(\hat{\sigma})}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}} d\hat{\sigma} \leq M \int_{\hat{s}}^{\hat{s}+\Delta\hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}}. \quad (6.2.46)$$

La integral del lado derecho de la Ec. (6.2.46) es una *integral impropia*. Si  $g(\hat{\sigma}) = 1/\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}$  y considerando que  $g(\hat{\sigma})$  es continua en  $(\hat{s}, \hat{s} + \Delta\hat{\sigma}]$  y discontinua en  $\hat{s}$ , entonces podemos decir que si el límite existe (Swokowski, 1988, Definición 10.6)

$$M \int_{\hat{s}}^{\hat{s}+\Delta\hat{\sigma}} g(\hat{\sigma}) d\hat{\sigma} = M \lim_{x \rightarrow \hat{s}^+} \int_x^{\hat{s}+\Delta\hat{\sigma}} g(\hat{\sigma}) d\hat{\sigma} = 2M\Delta\hat{\sigma}, \quad (6.2.47)$$

Aquí, el límite es el valor de la integral impropia. Por lo tanto, considerando (6.2.46) y (6.2.47), se tiene que

$$\lim_{\Delta\hat{\sigma} \rightarrow 0} \left[ \int_{\hat{s}}^{\hat{s}+\Delta\hat{\sigma}} \frac{f(\hat{\sigma})}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}} d\hat{\sigma} \right] = 2M \lim_{\Delta\hat{\sigma} \rightarrow 0} [\Delta\hat{\sigma}] = 0. \quad (6.2.48)$$

Así, eligiendo un tamaño de paso suficientemente pequeño, el error de integrar el término histórico hasta  $\hat{\sigma} = \hat{s} + \Delta\hat{\sigma}$  es despreciable. La integración del término histórico en este trabajo se realizó mediante el software comercial Origin 7.0. Los valores del integrando fueron generados a partir de una hoja de cálculo de Microsoft Excel usando  $\Delta\hat{\sigma} = 0.05$ .



## Parte III

# Resultados y Conclusiones



## Capítulo 7

# Modelos para la fuerza hidrodinámica

### 7.1. Predicciones del modelo aproximado

Para comparar las predicciones de nuestro modelo para  $F_{HD}$ , estimar el valor de  $\lambda$  y analizar el efecto de las fuerzas incorporadas en la Ec. (5.2.14), se utilizan datos experimentales de Zhu y col. (1994). Ellos midieron la fuerza hidrodinámica sobre un par de esferas alineadas en la dirección de un flujo uniforme, en sus mediciones, ambas esferas fueron mantenidas a una distancia fija para cada experimento específico por medio de una varilla conectada a una micro-balanza electrónica de alta precisión. La fuerza boyante neta fue substraída de la fuerza total sobre cada esfera transmitida por la varilla de soporte a la balanza, quedando únicamente la fuerza hidrodinámica la cual fue identificada por ellos como la *fuerza de arrastre total*.

Para minimizar la función objetivo (Ec. 4.2.19) y estimar el valor óptimo de  $\lambda$  a  $Re_1$  de 54, 92 y 106 se usa el método del gradiente conjugado (Axelsson y Barker, 1984) implementado en la herramienta Solver de Microsoft Office Excel 2003. Los valores obtenidos de  $\lambda$  y el promedio aritmético de ellos ( $\bar{\lambda}$ ) se reportan en la Tabla 7.1. Como se esperaba, el valor de  $\lambda$  para los tres flujos estudiados es siempre menor a la unidad. Así, debido al efecto de escudo del cuerpo de adelante, el caudal que incide sobre el cuerpo acarreado es menor al que incide sobre el cuerpo puntero. Se observa en la Tabla 7.1 que existe una cierta dependencia de  $\lambda$  con  $Re$ . Sin embargo, investigar dicha funcionalidad con la finalidad de obtener una expresión de este parámetro en función del  $Re$ , requiere de más información experimental y/o numérica. Por lo tanto, en este trabajo no se realizará un análisis sobre esta funcionalidad.

Para estimar el error estadístico promedio de las predicciones del modelo de Zhang y Fan

Tabla 7.1: Valores óptimos del parámetro  $\lambda$ .

$Re_1$	$\lambda = u_2/u_1$
54	0.945
92	0.976
106	0.958
$\bar{\lambda}$	0.96

(2002) (Ec. 4.2.23) y el obtenido en la Ec. (5.2.14), ambos modelos se comparan con mediciones experimentales de la fuerza hidrodinámica de Zhu y col. (1994). Para ello, se usa la definición del error relativo promedio dado en la Ec. (4.2.19). Los valores obtenidos a partir de la Ec. (4.2.19) están reportados en la Tabla 7.2. Se observa que aunque ambos modelos dan una buena aproximación de las mediciones experimentales, el modelo obtenido en este trabajo da siempre una mejor predicción, con un intervalo de error entre 1.42% para  $Re_1 = 106$  y 3.78% para  $Re_1 = 54$  (usando  $\lambda$ ), mientras que para  $Re_1 = 106$  y  $Re_1 = 54$  (usando  $\bar{\lambda}$ ), el intervalo de error está entre 1.54% y 5.78%, respectivamente. Usando el modelo de Zhang y Fan (2002) se obtiene un error entre 5.57% ( $Re_1 = 92$ ) y 11.53% ( $Re_1 = 54$ ). Esta diferencia se adjudica a la adición de los efectos de la fuerza de presión en la fuerza hidrodinámica los cuales fueron aproximados por medio de la Ec. (5.2.13).

Tabla 7.2: Comparación del error relativo promedio para la fuerza hidrodinámica,  $Er$  del modelo de Zhang y Fan (2002) (Ec. 4.2.23) y el propuesto (Ec. 5.2.14).

$Re_1$	% $Er$ usando $\lambda$	% $Er$ usando $\bar{\lambda}$	% $Er$ Zhang y Fan (2002)
54	3.78	5.78	11.53
92	1.87	4.95	5.57
106	1.42	1.54	9.58

Como puede verse en la Tabla 7.2, para  $Re_1 = 54$  y 92, al usar el valor óptimo de  $\lambda$  se obtiene la mejor predicción cuantitativa de la Ec. (5.2.14). Sin embargo, como se discutió anteriormente, no es plausible con los datos experimentales actuales proponer una expresión para  $\lambda$ . Por lo tanto, con el propósito de comparar y utilizar el modelo obtenido (Ec. 5.2.14) en su régimen de flujo de validez ( $24 < Re < 130$ ), se propone como una alternativa inicial usar  $\lambda = \bar{\lambda} = 0.96$ .

En la Fig. 7.1(a) se grafican las contribuciones individuales  $F_i/F_{d1}$ , donde  $F_i$  denota  $F_{d2}$ , la fuerza de presión ( $F_p$ ) o  $F_{HD}$  en función de la distancia para un número de Reynolds de 54. La suma de las dos fuerzas, arrastre y presión, producen la fuerza hidrodinámica dada por la Ec. (5.2.14). El modelo obtenido predice que para una distancia adimensional de separación  $\hat{s} - 1 = 3$ , la fuerza de presión contribuye con aproximadamente un 10% en la

fuerza hidrodinámica total. La fuerza de arrastre cuasiestacionaria considerada en la Fig. 7.1, es equivalente al modelo de Zhang y Fan (2002) dado en la Ec. (4.2.23) para el arrastre sobre una partícula interactiva, y por lo tanto, es conveniente compararlo con la fuerza hidrodinámica calculada con la Ec. (5.2.14). Esta comparación se muestra también en las Figs. 7.1(b) y 7.1(c) para  $Re_1 = 92$  y  $Re_1 = 106$ , respectivamente. Como se observa en estas figuras, ambos modelos dan una buena predicción de los resultados experimentales. Sin embargo, es evidente que existe una mejor predicción del presente modelo. Ahora, adimensionalizando las Ecs.

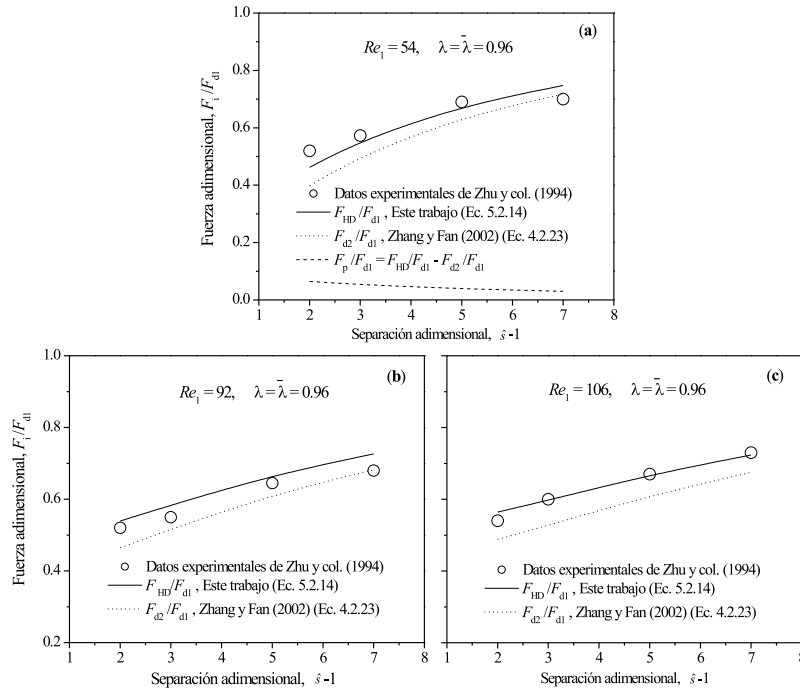


Figura 7.1: Fuerza hidrodinámica y contribución de las fuerzas de arrastre y presión.

(5.2.12) y (5.2.13) mediante la fuerza de arrastre de la esfera puntera y sustituyendo  $u_* = u_1$ , se obtienen las siguientes expresiones aproximadas para el campo de presión y su gradiente en la estela del cuerpo de adelante

$$S_b \frac{p}{F_{d1}} = 4 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Re_1 d}{16 s} \right) \right] \quad (7.1.1)$$

y

$$V_b \frac{dp}{ds} / F_{d1} = \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{Re_1 d}{16 s}\right) \frac{Re_1}{16} \left(\frac{d}{s}\right)^2, \quad (7.1.2)$$

siendo  $S_b = \pi d^2$  la superficie de la esfera. El perfil asintótico es válido para distancias de

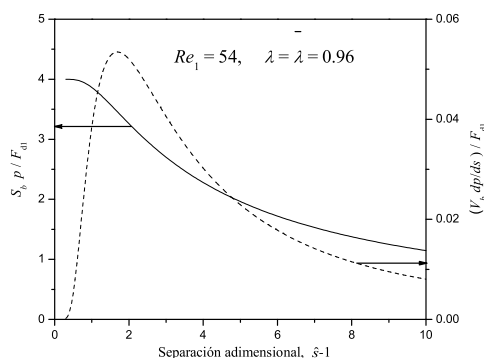


Figura 7.2: Campo de presión axial y gradiente del campo de presión en la estela.

separación entre esferas mayores al tamaño de los anillos vorticosos. Sin embargo, con la finalidad de alcanzar una mayor comprensión (aunque sea cualitativa) de la importancia de las fuerzas de presión sobre la esfera acarreada; en la Fig. 7.2 se grafica (para  $Re_1 = 54$ ), tanto el campo de presión como su gradiente hasta pequeñas distancias de separación. Se observa que cuando la distancia entre cuerpos disminuye, tanto el campo de presión como su gradiente se incrementan drásticamente hasta  $\hat{s} - 1 \approx 1.5$ , donde existe un punto de inflexión del campo de presión (su gradiente es máximo). Los resultados obtenidos son congruentes con los resultados de Lamb (1932) para la interacción en línea de un par de esferas en el régimen de flujo potencial. Lamb encontró que la presencia del cuerpo puntero comunica fuerzas de presión al cuerpo acarreado, esto se debe a que el flujo en la estela observado desde el marco de referencia de la esfera puntera es más lento (tiene una mayor presión) que el flujo fuera de la estela. De acuerdo a los resultados obtenidos, se concluye que a pequeñas distancias de separación las fuerzas de presión son significativas, por lo que deberían ser consideradas en los modelos. Estos resultados también coinciden con los de Katz y Meneveau (1996) para el caso de dos burbujas esféricas interactivas ascendiendo en línea.



## 7.2. Predicciones del modelo obtenido a partir de expresiones diferenciales

Para evaluar las predicciones de la fuerza hidrodinámica de la expresión obtenida en este trabajo, dada por la Ec. (5.3.4), sus predicciones son comparadas con mediciones experimentales reportadas por Chen y Lu (1999) para  $Re_1 = 52$ , Chen y Wu (2000) para  $Re_1 = 54$ , y Zhu y col. (1994) para  $Re_1$  de 54, 106 y 145. En la Fig 7.3 se grafica  $F_i/F_{d1}$ , donde  $F_i$  denota  $F_{d2}$  a partir de Zhang y Fan (2002) (ZF2002) ó  $F_{HD}$  a partir de la Ec. (5.3.4) como función de la distancia entre centros de ambas esferas,  $s_0/d$  (véase Fig. 5.2), con  $s_0/d = s/d + 1/2$  para un  $Re_1$  específico. Se observa un aparente mejor ajuste a los datos experimentales del modelo

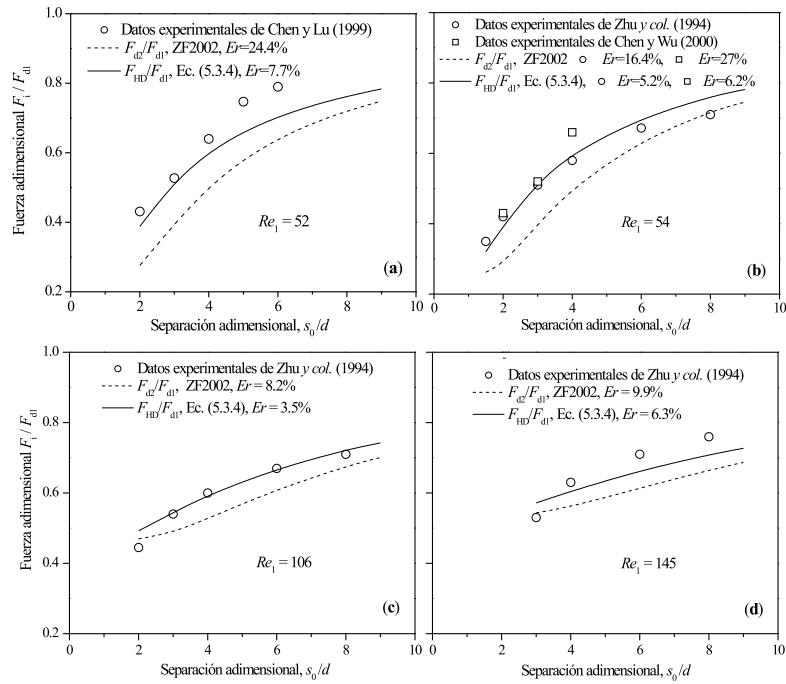


Figura 7.3: Fuerza adimensional en función de la distancia adimensional entre los centros de las esferas para (a)  $Re_1 = 52$ , (b)  $Re_1 = 54$ , (c)  $Re_1 = 106$  y (d)  $Re_1 = 145$ .

obtenido en este trabajo en comparación con el modelo de Zhang y Fan (2002). Es importante señalar que para ejecutar sus cálculos, Zhang y Fan (2002) definen como la distancia de separación a la distancia que existe entre la superficie de atrás de la esfera puntera y la superficie

frontal de la esfera acarreada. No obstante, en este trabajo encontramos una mejor predicción si se estiman las fuerzas sobre la esfera considerando una distancia de separación coincidente con el centro de masa de la la esfera acarreada. Esta consideración es frecuentemente usada en la literatura (cfr. Maxey y Riley, 1983; Auton y *col.*, 1988; Magnaudet y Eames, 2000). Para estimar el error estadístico promedio de ambos modelos usando el conjunto de datos experimentales, utilizamos nuevamente la definición del error de la Ec. (4.2.19).

Los resultados obtenidos con nuestro modelo muestran que la aproximación entre los valores experimentales y los teóricos dan un error entre 3.5% para  $Re_1 = 106$  y 7.7% para  $Re_1 = 52$ ; mientras que el modelo de Zhang y Fan (2002) produce un error entre 8.2% ( $Re_1 = 106$ ) y 27% ( $Re_1 = 54$ ). El origen de esta discrepancia proviene de dos contribuciones: (1) La inclusión de las fuerzas inerciales cuya importancia relativa se incrementa a medida que la distancia se reduce, hasta alcanzar el 13.7% de la fuerza hidrodinámica total a  $Re_1 = 54$  y  $s_0/d = 2$  (Fig. 7.4). Aquí, los cálculos de ambas fuerzas fueron realizados con nuestro modelo.

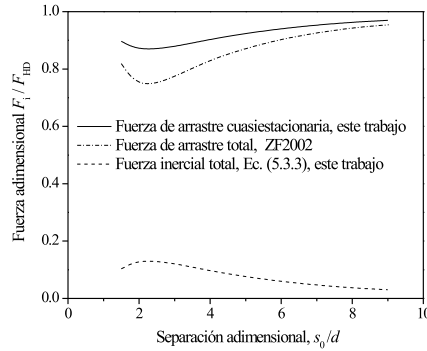


Figura 7.4: Contribuciones a la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada a partir del presente trabajo y del de Zhang y Fan (2002) (ZF2002) para  $Re_1 = 54$ .

(2) Como se ha señalado anteriormente, con el modelo de Zhang y Fan (2002) los cálculos fueron realizados considerando distancias de separación medidas entre la superficie de atrás de la esfera puntera y la superficie frontal de la esfera acarreada. Consecuentemente, sus estimaciones producen una subestimación adicional de la fuerza cuasiestacionaria de arrastre. Sus predicciones a  $Re = 54$  y  $s_0/d = 2$  producen una discrepancia de hasta un 27% de la fuerza hidrodinámica total, como se puede ver de la Fig. 7.4 e inferir a partir de la Fig. 7.3 (b).

Así, el modelo de Zhang y Fan (2002) subestima el efecto total de la estela sobre la esfera

acarreada no únicamente debido a su elección de la distancia de separación entre esferas, sino también debido a que desprecia los efectos inerciales del fluido. En nuestro modelo, se elimina mucha de esta discrepancia al suponer que el efecto total de la estela sobre la esfera acarreada involucra no únicamente el efecto de reducción del arrastre cuasiestacionario, sino también las fuerzas inerciales del fluido; es decir, la fuerza de aceleración convectiva del fluido y la contribución de la inercia del fluido en la fuerza de masa agregada.



## Capítulo 8

# Modelos para la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada

### 8.1. Predicciones del modelo aproximado

Citaremos las principales características del modelo aproximado obtenido en 6.1: (i) La burbuja acarreada interactúa con el defecto del perfil asintótico promediado en su área proyectada. (ii) El efecto de la estela no se considera únicamente como una reducción en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria, sino también a través de la incorporación de las fuerzas inerciales. (iii) Se incorporó la función multiplicadora  $\xi$ . (iv) Se encontró que el comportamiento de  $\xi$  es similar al de  $U_b$  de acuerdo con mediciones experimentales. La contribución de ambas fuerzas inerciales actuando sobre la burbuja acarreada del balance de fuerzas dado en la Ec.(6.1.13) se retiene en el presente análisis a través de la función multiplicadora  $\xi$ . Despreciar estos efectos equivale a suponer  $\xi = 1$ . En tal caso, de las Ecs. (6.1.1) y (6.1.4) se obtiene el siguiente balance estacionario de fuerzas:  $F_g + F_{d2} = 0$ . Sustituyendo las Ecs. (6.1.6) y (6.1.7) en la Ec. (6.1.4) se obtiene  $U_b = 1 + W$ , primeramente propuesta por Crabtree y Bridgwater (1971) a partir de sus observaciones experimentales.

Para comparar las predicciones de nuestro modelo para  $U_b$  dado en la Ec. (6.1.13) y el modelo de Crabtree y Bridgwater (1971) se usan los datos experimentales de burbujas de aire ascendiendo en agua destilada reportados por Katz y Meneveau (1996). En la Fig. 3 se grafica  $U_b$  en función de la distancia  $\hat{s} - 1$  para  $Re_1$  de 3.06, 21.5 y 35.4, respectivamente. Los parámetros necesarios del modelo son también tomados de sus mediciones experimentales e

incluidos en la Fig. 8.1. Se observa que para grandes distancias de separación entre burbujas

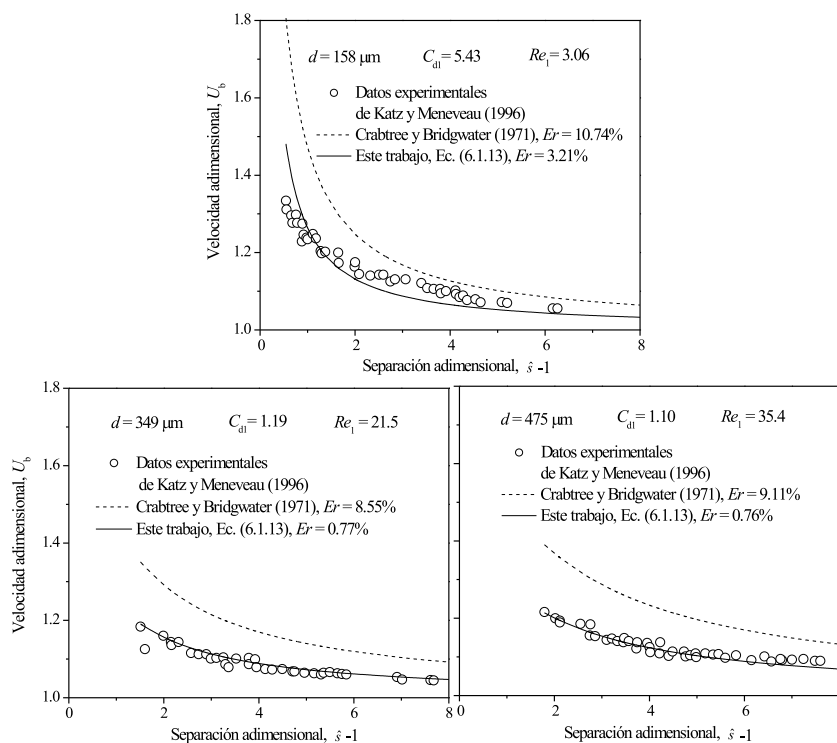


Figura 8.1: Velocidad de aproximación de la burbuja acarreada para (a)  $Re_1 = 3.06$ , (b)  $Re_1 = 21.5$  y (c)  $Re_1 = 35.4$ .

ambos modelos dan una buena aproximación de las mediciones experimentales. Sin embargo, a medida que la separación disminuye, el modelo obtenido en este trabajo da siempre una mejor predicción, con un intervalo de error entre 0.76 % para  $Re_1 = 35.4$  y 3.21 % para  $Re_1 = 3.06$ ; mientras que con el modelo de Crabtree y Bridgwater (1971) se obtiene un error entre 8.55 % ( $Re_1 = 21.5$ ) y 9.11 % ( $Re_1 = 3.06$ ).

Así que, en el modelo de la Ec. (6.1.13), el efecto total de la estela se consideró no sólo como una reducción en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria, sino también a través de la incorporación de las fuerzas inerciales, las cuales fueron transformadas definiendo una función multiplicadora  $\xi$  mayor que 1. El valor límite de  $\xi = 1$  se obtiene cuando se aplica un balance en estado estacionario sobre la burbuja acarreada, y esta condición se alcanza cuando se desprecian ambas fuerzas inerciales. No obstante, esta condición límite no evita la permanencia

## 8.2. Predicciones de los modelos que consideran diferentes fuerzas sobre la burbuja acarreada<sup>95</sup>

del efecto de la estela en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria. La función multiplicadora se evalúa en este trabajo mediante el perfil de velocidad asintótico y se encuentra que tiene un comportamiento similar a los valores experimentales de  $U_b$ . El resultado de incorporar esta suposición a la ecuación de balance de fuerzas consistió en una nueva expresión para la velocidad de aproximación de ambas burbujas. Sin embargo, dado que la expresión fue derivada considerando una similitud y no sólo principios fundamentales, se debe tener cuidado al extrapolar su aplicación. La expresión ha sido probada para  $3 < Re < 36$ . En este régimen de flujo, ni la corrección de Oseen (Golovin y Ivanov, 1973) (válida para  $Re < 1$ ) ni la teoría aproximada de (Moore, 1963) (válida para  $Re \gg 1$ ) se pueden utilizar. Por lo tanto, debido a la inexistencia de expresiones analíticas en el régimen de flujo estudiado, esta expresión se puede utilizar como una buena aproximación inicial.

## 8.2. Predicciones de los modelos que consideran diferentes fuerzas sobre la burbuja acarreada

Modelos previos para predecir la velocidad de ascenso de la burbuja acarreada han sido construidos tomando en cuenta el efecto total de la estela por medio de modificar la contribución de la fuerza de arrastre sobre la burbuja, y además, considerando la interacción burbuja-burbuja a través de la estela (efectos inerciales del fluido) como un mecanismo repulsivo bi-direccional actuando sobre el par de burbujas contiguas siguiendo el enfoque de Lamb (1932) (Yuan y Prosperetti, 1994; Katz y Meneveau, 1996; Ruzicka, 2000, 2005) usando la solución potencial, o usando la solución de Golovin y Ivanov (1973) válida para  $Re \ll 1$  (Katz y Meneveau, 1996). En nuestro estudio a  $Re$  pequeños y moderados, dado que una de las simplificaciones del modelo es que la proximidad de la burbuja acarreada no afecta a la burbuja puntera, este efecto se ha considerado como un mecanismo repulsivo uni-direccional el cual tiene un efecto de frenado sobre la burbuja acarreada que equivale a la expresión de Taylor (1928) o Ec. (5.3.3) (suponiendo que el perfil asintótico promediado sobre el área proyectada por ambas burbujas da una buena aproximación de los efectos inerciales).

La identificación de cada una de las fuerzas que actúan sobre la burbuja acarreada a  $Re$  pequeños y moderados no es una tarea simple. No obstante, para el caso de una burbuja aislada, usando el conjunto de fuerzas obtenidas con la restricción de flujo reptante e introduciendo expresiones aproximadas para los términos dependientes del  $Re$  se ha logrado obtener modelos mecánicos para predecir la velocidad de la burbuja. Este enfoque es usado en este trabajo pero para el caso de una burbuja moviéndose en la estela generada por otra burbuja del mismo

tamaño. Usando datos experimentales y/o numéricos de la literatura se ha logrado estimar la contribución de cada una de las fuerzas con el objetivo de suprimir las menos significativas y obtener modelos simplificados para la velocidad de ascenso de la burbuja acarreada.

Es importante enfatizar que el papel del gradiente de presión en la ecuación de movimiento de Maxey y Riley (1983) aparece distribuido entre las fuerzas de flotación, aceleración del fluido, masa agregada así como en la fuerza histórica. Por lo tanto, el gradiente de presión no está explícitamente representado pero su efecto ya ha sido considerado en la expresión final y no es necesario agregar algún término adicional (véase Michaelides, 2003, quien presenta una discusión al respecto). Sin embargo, en algunos modelos de la literatura se introduce un término para el gradiente de presión además de las otras fuerzas del fluido (Morrison y Stewart, 1976; Zhang y Fan, 2003). De acuerdo a nuestro punto de vista del problema, consideramos que esta estrategia de modelado podría producir la duplicación de algunas fuerzas del fluido o también despreciar su contribución dependiendo del signo elegido para cada término. Wallis (1987) señala que este es un problema frecuente encontrado en el modelado de flujo en dos fases y en estrategias de cerradura para columnas de burbujeo.

Con la finalidad de estimar la magnitud relativa de cada término de la expresión completa para la fuerza que actúa sobre la burbuja acarreada, en 6.2 se obtuvieron diferentes modelos para la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada adicionando secuencialmente los efectos más importantes del fluido (Tabla 6.1). Estos modelos serán comparados con datos experimentales de un par de burbujas ascendiendo en un líquido estancado ( $u_z = 0$ ) a  $Re$  pequeños y moderados. La predicción de estos modelos para  $Re$  pequeños (usando  $\gamma = 1$ ) se compara en la Fig. 8.2 con datos experimentales de Katz y Meneveau (1996) ( $Re_1 = 3.06$ ) y Watanabe y Sanada (2006) ( $Re_1 = 5$ ). Los modelos impares consideran el efecto de la no-uniformidad axial del flujo, mientras que los pares desprecian este efecto. Estos modelos requieren de expresiones adecuadas para el  $C_d$  las cuales fueron tomadas de la literatura (véase la Sección 1.3 y la Tabla 4.1). En estas figuras se aprecia la contribución teórica de cada una de las fuerzas en las predicciones del modelo; por consiguiente, serán usadas para determinar la importancia de los términos dependientes del  $Re$  (no-uniformidad axial del flujo y término histórico de fuerza) respecto a las demás contribuciones con el propósito de obtener un solo modelo simplificado explícito válido para  $Re$  pequeños y moderados.

Primero nos enfocaremos en analizar la contribución del término histórico de fuerza comparando las predicciones de  $U_b^{VII}$  con las de  $U_b^{IX}$ . En la Fig. 8.2(a) ( $Re_1 = 3.06$ ) se observa que la diferencia del error relativo promedio ( $Er$ ) entre ambos modelos es de 0.47%, mientras que en la Fig. 8.2(b) ( $Re_1 = 5$ ) se obtuvo una diferencia de 0.1%. Es decir, un incremento en el  $Re$  (aún pequeño) disminuye drásticamente la contribución relativa del término histórico



## 8.2. Predicciones de los modelos que consideran diferentes fuerzas sobre la burbuja acarreada 97

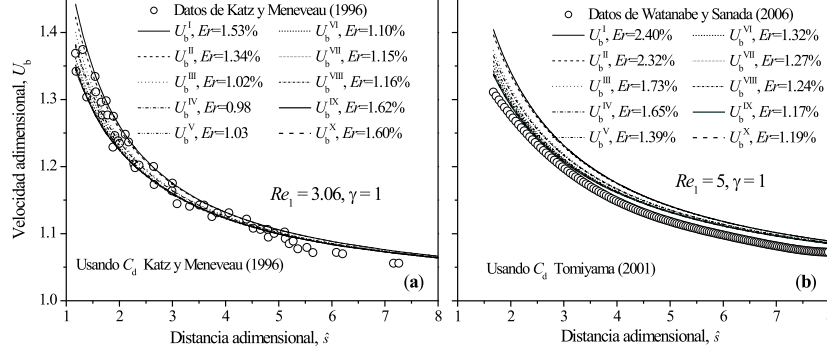


Figura 8.2: Velocidad de aproximación de la burbuja acarreada para (a)  $Re_1 = 3.06$  y (b)  $Re_1 = 5$ .

debido principalmente a un incremento en la contribución de los efectos inerciales del fluido. Así que, a  $Re = 3.06$  la contribución del término histórico es del mismo orden respecto a la contribución de los términos inerciales, y en conjunto, estos efectos son mucho menores que la contribución de la fuerza de arrastre cuasiestacionaria. Sin embargo, a  $Re = 5$  la contribución inercial del fluido adquiere una mayor importancia, en tanto que el término histórico de fuerza disminuye drásticamente su contribución. Considerando lo anterior y lo discutido en la Sección 6.2 respecto a que el kernel del término histórico en nuestro caso de estudio decae mucho más rápido ( $t^{-2}$ ) que el considerado en nuestro modelo ( $t^{-1/2}$ ), existen argumentos suficientes para pensar que el término histórico de fuerza tiene una contribución despreciable aún a  $Re$  pequeños. Esto puede explicarse también dando un vistazo al modelo  $U_b^I$  el cual considera la fuerza de arrastre cuasiestacionaria (que es la contribución dominante) y la no-uniformidad axial del flujo. Derivándolo se obtiene  $dU_b^I/ds - dW/ds = d\Phi_d/ds$ , y de la Ec. (6.2.24) se tiene que  $d\Phi_d/ds$  es muy pequeña y decae como  $O(s^{-5})$ , por lo que la aceleración relativa de la burbuja acarreada respecto al flujo local en la estela es insignificante. Además, dado que la contribución de la no-uniformidad axial del flujo en el término histórico de fuerza (modelos  $U_b^{IX}$  y  $U_b^X$  de la Fig. 8.2) para  $Re_1$  de 3.06 y 5 es insignificante; por consiguiente, de acuerdo a las predicciones de los modelos obtenidos en este trabajo, la fuerza histórica es despreciable.

Ahora nos enfocaremos en estudiar la contribución total de la no-uniformidad axial del flujo. En el Capítulo 4 encontramos que la contribución de la no-uniformidad axial del flujo en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria es insignificante. Esta misma situación se observa en la Fig. 8.2 para todos los modelos que consideran su contribución. Por lo tanto, a par-

tir de esta figura podemos concluir que en lo general su contribución no afecta de manera apreciable las predicciones de los modelos. En la Fig. 8.3 se muestra la contribución de la no-uniformidad axial total, arrastre cuasiestacionario e inercia del fluido para el caso de dos burbujas ascendiendo a la misma velocidad constante. En este caso específico,  $U_b = 1$  y tanto la contribución de la aceleración del cuerpo en la fuerza de masa agregada (6.2.3) como la fuerza histórica (6.2.5) son cero. Entonces, la fuerza hidrodinámica total sobre la burbuja acarreada ( $F_{HD}$ ) es la suma de la inercia del fluido ( $F_{HDI} = 3/2F_{WR}$ ), arrastre cuasiestacionario ( $F_{d2}$ ) y de la no-uniformidad total del flujo ( $F_{NUT} = \Phi_d + \Phi_{AM}$ ). En la Fig. 8.3 se presenta

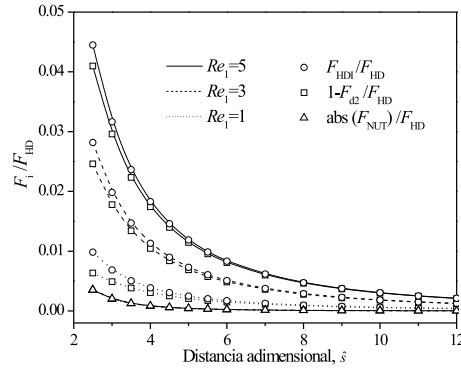


Figura 8.3: Contribuciones a la fuerza hidrodinámica sobre la burbuja acarreada de la inercia del fluido y de la no-uniformidad del flujo para  $Re_1$  de 1, 3 y 5.

la contribución de  $1 - F_{d2}/F_{HD}$ , inercia del fluido y no-uniformidad total para  $Re_1$  de 1, 3 y 5 adimensionalizadas con la fuerza hidrodinámica total. El comportamiento más importante a ser observado en esta figura es que la contribución de la no-uniformidad total a distancias  $\hat{s} \simeq 1$  representa menos del 0.5% de la fuerza hidrodinámica total y decae como  $(\hat{s}^{-3})$ , y además, es casi independiente del  $Re$ . Sin embargo, la contribución de  $F_{HDI}$  representa casi el total de la fuerza hidrodinámica sin la fuerza de arrastre cuasiestacionaria y su contribución aumenta significativamente conforme el  $Re$  se incrementa.

Los resultados obtenidos demuestran que la contribución de la fuerza histórica y de la no-uniformidad axial del flujo en la fuerza hidrodinámica que actúa sobre la burbuja acarreada no influye significativamente en las predicciones de los modelos. De esta manera, los modelos  $U_b^{II}$ ,  $U_b^{IV}$ ,  $U_b^{VI}$  y  $U_b^{VIII}$  pueden ser usados para  $Re$  pequeños y moderados. En la Fig. (8.4) se comparan las predicciones de nuestros modelos para  $Re$  de 12, 21.5 y 35.4. Los valores de  $\gamma$

8.2. Predicciones de los modelos que consideran diferentes fuerzas sobre la burbuja acarreada 99

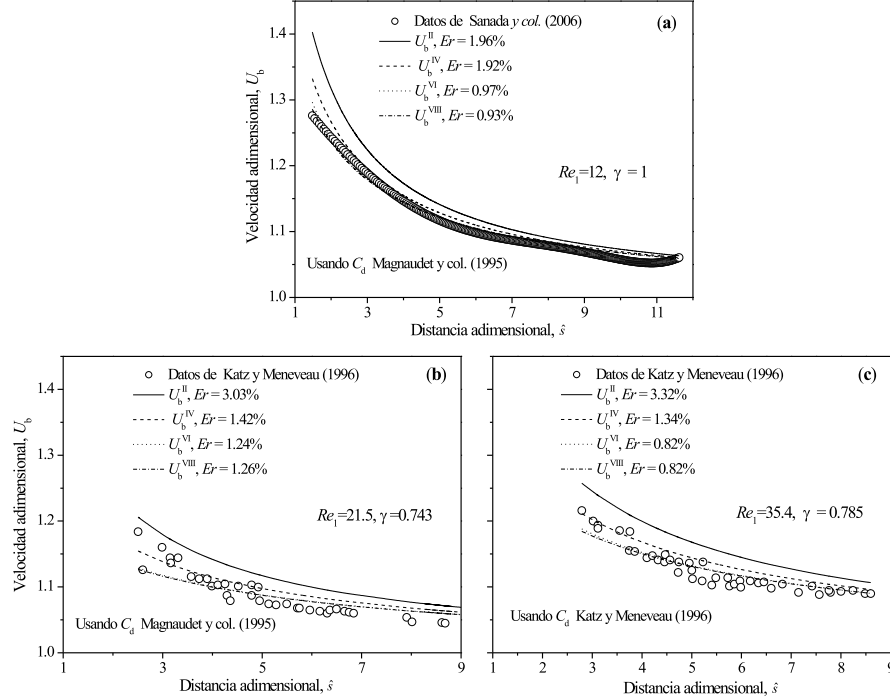


Figura 8.4: Velocidad de aproximación de la burbuja acarreada para (a)  $Re_1 = 12$ , (b)  $Re_1 = 21.5$  y (c)  $Re_1 = 35.4$ .

para  $Re$  de 21.5 y 35.4 fueron estimados a partir de la Ec. (4.2.20), mientras que para  $Re = 12$ , dado que no se cuenta con una expresión adecuada para  $\gamma$ , se supone como primera aproximación  $\gamma = 1$ . Se observa que cualitativamente todos los modelos dan una buena predicción de las mediciones experimentales; sin embargo, cuantitativamente, las predicciones se mejoran notablemente cuando se adicionan los efectos inerciales del fluido. En el régimen de flujo estudiado, la burbuja acarreada se aproxima a la burbuja puntera debido a una disminución local en el arrastre, este efecto atractivo es mayor que cualquier efecto repulsivo en la estela debido a las fuerzas inerciales del fluido, lo cual es acorde con las mediciones experimentales. Conforme el  $Re$  se incrementa, la fuerza atractiva debida a la reducción en el arrastre local sobre la burbuja acarreada disminuye, mientras que la fuerza inercial repulsiva del fluido se incrementa significativamente frenando el movimiento de la burbuja acarreada. Así que, de lo observado en las Figs. 8.2 y 8.4, si se comparan las predicciones cualitativas y cuantitativas

de  $U_b^{VI}$  y  $U_b^{VIII}$  podemos concluir que para  $Re$  pequeños a moderados, la contribución del término de aceleración del cuerpo en la fuerza de masa agregada es despreciable y se vuelve aún más pequeña conforme el  $Re$  se incrementa, llegando a ser despreciable para  $Re = 35.4$  ( $< 0.009\%$ ).

## Capítulo 9

# Conclusiones

En este trabajo estudiamos la hidrodinámica de dos cuerpos esféricos del mismo tamaño (sólidos o burbujas) interactuando en línea a  $Re \approx 3-100$  a través de la estela viscosa generada por el cuerpo puntero. Al estudiar la interacción de dos esferas sólidas fijas alineadas en la dirección de un flujo uniforme y estacionario se obtuvieron expresiones adimensionales para la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada. Estas expresiones son válidas para distancias de separación entre esferas mayores a la dimensión de los anillos vorticosos que se forman detrás de la esfera puntera. Además, su régimen de flujo de validez requiere que los anillos vorticosos sean cerrados y sin oscilaciones (la estela sea laminar y estacionaria). Se encontró que para distancias muy grandes de separación entre cuerpos la fuerza de arrastre constituye el total de la fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo acarreado. Sin embargo, a medida que la distancia de separación disminuye, las fuerzas inerciales del fluido adquieren importancia; no obstante, la fuerza de arrastre cuasiestacionaria es siempre la fuerza dominante.

El flujo laminar y estacionario en la estela observado desde el marco de referencia anclado en la esfera puntera no depende explícitamente del tiempo; es decir, su aceleración local es cero. No obstante, independiente del número de Reynolds, la aceleración convectiva del fluido no perturbado en la estela (debido a la no-uniformidad del flujo) ejerce una fuerza inercial sobre la esfera acarreada que se relaciona con el gradiente de presión y el transporte viscoso a través de las ecuaciones de Navier-Stokes. Además, el cuerpo afecta el movimiento de una cierta cantidad de fluido de los alrededores, resultando un efecto inercial adicional sobre el cuerpo conocido como fuerza de masa agregada. Por lo tanto, las fuerzas de aceleración del fluido y de masa agregada (fuerzas inerciales del fluido) deberían ser tomadas en cuenta, aún para un par de esferas fijas ó un par de burbujas moviéndose a la misma velocidad constante en un volumen infinito de fluido con flujo uniforme y estacionario. La aproximación

de ambos modelos con mediciones experimentales confirman que contienen las fuerzas más significativas que ejerce el fluido sobre el cuerpo acarreado. Así, el efecto de la estela como se estudió en este trabajo para el caso de dos esferas fijas, considera no sólo la reducción del arrastre cuasiestacionario, sino también el efecto repulsivo de las fuerzas inerciales del fluido. Cuando ambas fuerzas son tomadas en cuenta, aún utilizando el perfil de velocidad asintótico, se obtuvieron mejores predicciones de las mediciones experimentales respecto a los modelos previos los cuales consideraban únicamente la reducción en el arrastre cuasiestacionario. Estos resultados justifican el enfoque abordado en este trabajo en el sentido de que para  $24 \leq Re \leq 130$  las fuerzas de aceleración del fluido y de masa agregada contribuyen significativamente en la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada.

Para el caso de dos burbujas ascendiendo en línea, usando expresiones conocidas del coeficiente de arrastre estacionario, se desarrolló un enfoque alternativo para la determinación de la velocidad característica del flujo en la estela de la burbuja puntera e incorporar los efectos de la no-uniformidad del flujo. Con este enfoque se alcanzó una considerable simplificación de este problema hidrodinámico complejo y se obtuvo una nueva expresión explícita para predecir la fuerza de arrastre cuasiestacionaria sobre la burbuja acarreada. Al utilizar esta expresión para obtener diferentes modelos para la velocidad de ascenso de la burbuja acarreada, y sus excelentes predicciones cualitativas y cuantitativas de los datos experimentales para  $Re$  de 21.5 y 35.4, se sugiere que el enfoque desarrollado es apropiado para ser utilizado como cerraduras en modelos promediados de flujo en dos fases.

Para predecir la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada a la puntera, primero se obtuvo un modelo aproximado introduciendo los efectos inerciales del fluido en la estela por medio de una función multiplicadora. Posteriormente, suponiendo un conjunto de fuerzas actuando sobre la burbuja acarreada similar a las existentes en el régimen de flujo reptante, y usando diferentes hipótesis, se obtuvieron diferentes modelos para la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada. Se encontró que la fuerza histórica, la contribución de la no-uniformidad axial y el término de aceleración del cuerpo en la fuerza de masa agregada no influyen significativamente en las predicciones del modelo (la suma de estos tres términos es inferior al 1% de la fuerza hidrodinámica total); es decir, el proceso de interacción puede considerarse cuasiestacionario. Sin embargo, se encontró que a  $Re \geq 5$ , el arrastre cuasiestacionario y las contribuciones inerciales del fluido en las fuerzas de aceleración lagrangiana y de masa agregada que están relacionadas con el gradiente de presión, influyen significativamente en las predicciones del modelo.

Nuestros resultados teóricos son acordes con las observaciones experimentales respecto a que el proceso de aproximación de la burbuja acarreada a la puntera a  $Re$  pequeños a mode-

rados puede considerarse como cuasiestacionario. No obstante, de acuerdo a nuestro análisis del problema, el hecho de que este proceso sea considerado como cuasiestacionario reside en que la velocidad de aproximación entre ambas burbujas es función únicamente de su separación instantánea para un  $Re$  específico. Así, los modelos considerados como cuasiestacionarios deberían considerar la contribución convectiva de las fuerzas de aceleración lagrangiana del fluido y de masa agregada, y no únicamente el efecto de reducción en el arrastre cuasiestacionario sobre la esfera acarreada (efecto de escudo). Las fuerzas dominantes que actúan sobre la burbuja acarreada para dos burbujas ascendiendo en línea a  $3.05 \leq Re \leq 35.5$  en orden de importancia son: flotación, arrastre cuasiestacionario, contribución convectiva de la fuerza de aceleración del fluido y el término similar de la fuerza de masa agregada. Por consiguiente, el modelo que gobierna el fenómeno de aproximación de la burbuja acarreada a la puntera es totalmente explícito si se propone usar la solución asintótica como la velocidad local del flujo no perturbado.

Se propuso y desarrolló un nuevo enfoque para la consideración del efecto de la no-uniformidad transversal del flujo el cual fue tomado en cuenta por medio del factor  $\gamma$ . Para  $50 \leq Re \leq 200$  usando datos numéricos de la literatura se encontraron los valores óptimos de  $\gamma$  y se obtuvo una nueva expresión para predecir el arrastre quasi estacionario sobre la burbuja acarreada. Sin embargo, para  $Re$  pequeños y moderados no existen suficientes datos en la literatura para alcanzar una expresión para  $\gamma$ , por lo que es necesario realizar trabajos en esta dirección. Si se desea implementar este enfoque para el caso de esferas sólidas fijas, sería sumamente útil obtener primero ya sea numéricamente o experimentalmente datos de la fuerza hidrodinámica sobre la esfera acarreada a diferentes  $Re$  y distancias de separación mayores a las reportadas actualmente. Además, esta información podría ser también útil para obtener una expresión para  $\lambda$ . Es necesario abordar un estudio teórico y experimental cuyo objetivo sea entender el porqué de las discrepancias entre los estudios teóricos y experimentales acerca de la existencia de una distancia de equilibrio. Usando las expresiones obtenidas en este trabajo pero considerando además los efectos disipativos viscosos transitorios en la estela, este análisis se podría extender para el caso de un tren de esferas o burbujas interactuando en línea.





# Bibliografía

- Auton, T. R. (1984). *The dynamics of bubbles, drops and particles in motion in liquids*. PhD thesis, Univ. Cambridge, Cambridge, U.K.
- Auton, T. R., Hunt, J. C. R., y Prud'homme, M. (1988). The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow. *J. Fluid Mech.*, 197:241–257.
- Axelsson, O. y Barker, V. A. (1984). *Finite element solution of boundary value problems*. Academic Press, Orlando, USA.
- Bagchi, T. y Balachandar, S. (2002a). Effect of free rotation on the motion of a solid sphere in a linear shear flow at moderate reynolds number. *Phys. Fluids*, 14:2719–2737.
- Bagchi, T. y Balachandar, S. (2002b). Shear versus vortex-induced lift force on a rigid sphere at moderate *re*. *J. Fluid Mech.*, 473:379–388.
- Bagchi, T. y Balachandar, S. (2002c). Steady planar straining flow past a rigid sphere at moderate reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 466:365–407.
- Basset, A. B. (1888). *Treatise on Hydrodynamics*. Bell, London.
- Batchelor, G. K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Bhaga, D. y Weber, M. E. (1980). In-line interaction of a pair of bubbles in a viscous liquid. *Chem. Eng. Sci.*, 35:2467–2474.
- Biesheuvel, A. y van Wijngaarden, L. (1982). The motion of pairs of gas bubbles in perfect liquid. *J. Engng. Math*, 16:349–365.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., y Lightfoot, E. N. (1992). *Fenómenos de transporte*. Editorial Reverté, S.A., Barcelona.

- Boussinesq, J. (1885). *Applications Letude des Potentiels*. Blanchard, Paris re-edition 1969.
- Brady, J. F. y Bossis, G. (1988). Stokesian dynamics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 20:111–157.
- Cameron, I., Wang, F., Immanuel, C., y Stepanek, F. (2005). Process systems modelling and applications in granulation: A review. *Chemical Engineering Science*, 60:3723–3750.
- Chen, R. y Lu, Y. (1999). The flow characteristics of an interactive particle at low reynolds numbers. *Int. J. Multiphase flow*, 25:1645–1655.
- Chen, R. y Wu, J. (2000). The flow characteristics between two interactive spheres. *Chem. Eng. Sci.*, 55:1143–1158.
- Chester, A. y Hoffman, G. (1982). Bubble coalescence in pure liquids. *Appl. Sci. Res.*, 38:353–361.
- Clift, R., Grace, J. R., y Weber, M. E. (1987). *Bubble, drops and particles*. Academic Press, New York.
- Crabtree, J. y Bridgwater, J. (1971). Bubble coalescence in viscous liquids. *Chem. Eng. Sci.*, 26:839–851.
- de Vries, A., Biesheuvel, A., y van Wijngaarden, L. (2002). Notes on the path and wake of a gas bubble rising in pure water. *Int. J. Multiphase Flow*, 28:1823–1835.
- Deckwer, W.-D. y Schumpe, A. (1993). Improved tools for bubble column reactor design and scale-up. *Chem. Eng. Sci.*, 51:889.
- Duineveld, P. (1995). The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 292:325–332.
- Durfolsky, L., Brady, J. F., y Bossis, G. (1987). Dynamic simulation of hydrodynamically interacting particles. *J. Fluid Mech.*, 180:21–49.
- Faxen, H. (1922). Der widerstand gegen die bewegung einer starren kugel in einer zum den flussigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenenwinden eingeschlossen ist. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 68:89–119.
- Fuentes, Y. O. y Kim, S. (2001). Parallel computational microhydrodynamics: communication scheduling strategies. *AIChE J.*, 38:1059–1078.

- Golovin, A. M. y Ivanov, M. F. (1973). Motion of a bubble in a viscous liquid. *J. Applied Mech. Tech. Phys (USSR)*, 12:91–94.
- Hadamard, J. (1911). Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 152:1735–1752.
- Happel, J. y Brenner, H. (1990). *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Harper, J. F. (1970). On bubbles rising in line at large reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 41:751–758.
- Harper, J. F. (1997). Bubbles rising in line: why is the first approximation so bad? *J. Fluid Mech.*, 351:289–300.
- Holänder, W., Z. S. (2005). Hydrodynamically interacting droplets at small reynolds numbers. *Int. J. Multiphase flow*, 31:53–68.
- Joshi, J. B., Vitankar, V. S., Kulkarni, A. A., Dhotre, M. T., y Ekambara, K. (2002). Coherent flow structures in bubble column reactors. *Chem. Eng. Sci.*, 57:3157–3183.
- Kang, I. S. y Leal, L. G. (1988). The drag coefficient for a spherical bubble in a uniform streaming flow. *Phys. Fluids*, 31:233–237.
- Katz, J. y Meneveau, C. (1996). Wake-induced relative motion of bubbles rising in line. *Int. J. Multiphase flow*, 22:239–258.
- Kim, I., E. S. y Sirignano, W. A. (1998). On the equation for spherical-particle motion: Effect of reynolds and acceleration numbers. *J. Fluid Mech.*, 367:221–253.
- Kim, S. (1987). Stokes flow past three spheres: an analytic solution. *Phys. Fluids*, 30:2309–2314.
- Kok, J. B. W. (1993a). Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. part i: Theory. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 12:515–540.
- Kok, J. B. W. (1993b). Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. part ii: Experiment. *Eur. J. Mech B/Fluids*, 12:541–560.
- Komasawa, I., Otake, T., y Kamojima, M. (1980). Wake behavior and its effect on interaction between spherical-cap bubbles. *J. Chem. Eng. Jpn.*, 13:103–109.

- Kulkarni, A. A. y Joshi, J. B. (2005). Bubble formation and bubble rise velocity in gas-liquid systems: A review. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 44:5873–5931.
- Kumaran, V. y Koch, D. L. (1993a). The effect of hydrodynamic interactions on the average properties of a bidisperse suspension of high reynolds number, low weber number bubbles. *Phys. Fluids A*, 5:1123–1134.
- Kumaran, V. y Koch, D. L. (1993b). The rate of coalescence in a suspension of high reynolds number, low weber number bubbles. *Phys. Fluids A*, 5:1135–1140.
- Kurose, R. y Komori, S. (1999). Drag and lift forces on a rotating sphere in a linear shear flow. *J. Fluid Mech.*, 384:183–206.
- Kurose, R., Misumi, R., y Komori, S. (2001). Drag and lift forces acting on a spherical bubble in a linear shear flow. *Int. J. Multiphase flow*, 27:1247–1258.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Landau, L. y Lifshitz, E. (1958). *Fluid Mechanics*. 2nd edn. Butterworth-Heinemann.
- Landweber, L. y Miloh, T. (1980). Unsteady lagally theorem for multipoles and deformable bodies. *J. Fluid Mech.*, 96:333–346. (y corregido 112, 1982, 502).
- Lee, K. C. (1979). Aerodynamic interaction between two spheres at reynolds numbers around 104. *Aerodyn. Q.*, 30:371–385.
- Legendre, D., Magnaudet, J., y Mougin, G. (2003). Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.*, 497:133–166.
- Levich, V. (1949). Bubble motion at high reynolds numbers (in russian). *Zh. Eksp. Teoret. Fiz.*, 19:18–24.
- Levich, V. (1962). *Physicochemical Hydrodynamics*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, NJ.
- L’huillier, D. (1982). Forces dinertie sur une bulle en expansion se deplacant dans un fluide. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 295:II, 95–98.
- Liang, S.-C., Hong, T., y L.-S., F. (1996). Effects of particle arrangements on the drag force of a particle in the intermediate flow regime. *Int. J. Multiphase Flow*, 22:285–306.
- Magnaudet, J. y Eames, I. (2000). The motion of high-reynolds-number bubbles in homogeneous flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32:659–708.

- Magnaudet, J., Rivero, M., y Fabre, J. (1995). Accelerated flows past a rigid sphere or spherical bubble. part i. steady straining flow. *J. Fluid Mech.*, 284:97–135.
- Manasseh, R., La Fontaine, R., Davy, J., Sheperd, I., y Zhu, Y. (2001). Passive acoustic bubble sizing in sparged systems. *Exp. Fluids*, 30:672–682.
- Maxey, M. R. y Riley, J. J. (1983). Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Phys. Fluids*, 26:883–888.
- Maxworthy, T., Gnann C., K. M., y F., D. (1996). Experiments on the rise of air bubbles in clean viscous liquids. *J. Fluid Mech.*, 321:421–441.
- Mei, R. (1993). History force on a sphere due to a step change in the free-stream velocity. *Int. J. Multiphase Flow*, 19:509–525.
- Mei, R. y Klausner, J. F. (1992). Unsteady force on a spherical bubble at finite reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity. *Phys. Fluids A*, 4:63–70.
- Mei, R., Klausner, J. F., y Lawrence, C. J. (1994). A note on the history force on a spherical bubble at finite reynolds number. *Phys. Fluids*, 6:418–420.
- Michaelides, E. E. (2003). Hydrodynamic force and heat/mass transfer from particles, bubbles, and drops-the freeman scholar lecture. *J. Fluids Eng.*, 125:209–238.
- Michaelides, E. E. y Feng, Z. G. (1995). The equation of motion of a small viscous sphere in an unsteady flow with interface slip. *Int. J. Multiphase Flow*, 21:315–321.
- Moore, D. (1963). The boundary layer on a spherical gas bubble. *J. Fluid Mech.*, 16:161–176.
- Morrison, F. A. y Stewart, L. B. (1976). Small bubble motion in an accelerating liquid. *ASME. J. Appl. Mech.*, 43:399–403.
- Noca, F. (1997). *On the evaluation of time-dependent fluid-dynamic forces on bluff bodies*. PhD thesis, California Institute of Technology. Pasadena, Cal. USA.
- Odar, F. y Hamilton, W. S. (1964). Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 18:302–303.
- Oseen, C. W. (1910). Über die stokesche formel und über eine verwandte aufgabe in der hydrodynamik. Technical report, Ark. Mat., Astron. Fys. (6)29.
- Oseen, C. W. (1927). *Hydrodynamik*. Leipzig; Akademische Verlag.

- Park, W. C., Klausner, J. F., y Mei, R. (1995). Unsteady forces on spherical bubbles. *Experiments in fluids*, 19:167–172.
- Poisson, S. A. (1831). Memoire sur les mouvements simultanés dun pendule et de l'air environnant. *Mem. Acad. Sci., Paris*, 9:521–523.
- Ramachandran, R. S., Wang, T.-Y., Kleinstreuer, C., y Chiang, H. (1991). Laminar flow past three closely-spaced monodisperse spheres or nonevaporating drops. *AIAA J.*, 29:43–51.
- Rowe, P. N. y Henwood, G. A. (1961). Drag forces in a hydraulic model of a fluidised bed-part i. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 39:43–54.
- Ruzicka, M. C. (2000). On bubbles rising in line. *Int. J. Multiphase flow*, 26:1141–1181.
- Ruzicka, M. C. (2005). Vertical stability of bubble chain: Multiscale approach. *Int. J. Multiphase flow*, 31:1063–1096.
- Rybczynski, W. (1911). On the translatory motion of a fluid sphere in a viscous medium. Technical report, Bull. Acad. Sci A40, Cracow.
- Sanada, T., Watanabe, M., y Fukano, T. (2006). Interaction and coalescence of bubbles in stagnant liquid. *Multiphase Science and Technology*, 18:155–174.
- Sangani, A. S. y Didwania, A. K. (1993a). Dispersed-phase stress tensor in flow of bubbly liquids at large reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 248:27–54.
- Sangani, A. S. y Didwania, A. K. (1993b). Dynamic simulations of flows of bubbly liquids at large reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 250:307–337.
- Schiller, L. y Nauman, A. (1933). Über die grundlegende berechnung bei der schwefkraftaufbereitung. *Ver. Deutch. Ing.*, 44:318–320.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill: New York.
- Sirignano, M. C. (1993). Fluid dynamics of sprays. *J. Fluids Eng.*, 115:345–378.
- Stimson, M. y Jeffery, G. B. (1926). The motion of two spheres in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. London*, A111:110–116.
- Stokes, G. G. (1845). On the theories of internal friction of the fluids in motion. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 8:287–319.

- Swokowski, E. W. (1988). *Cálculo con geometría analítica, 2a. Edición*. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Tal, R., Lee, D. N., y Sirignanao, W. A. (1984a). Heat and momentum transfer around a pair of spheres in viscous flow. *J. Heat Mass Trans.*, 27:1953–1962.
- Tal, R., Lee, D. N., y Sirignanao, W. A. (1984b). Hydrodynamics and heat in sphere assemblages - cylindrical cell models. *J. Heat Mass Trans.*, 26:1265–1273.
- Taylor, G. (1928). The forces on a body placed in a curved or converging stream of fluid. *Proc. R. Soc. London A*, 120:260–83.
- Tomiya, A. (2001). Reconsideration of three fundamental problems in modeling bubbly flows. In *39th european two-phase flow group meeting*, Aveiro, Portugal.
- Tsao, H.-K. y Koch, D. (1994). Collisions of slightly deformable, high reynolds number bubbles with short-range repulsive forces. *Phys. Fluids*, 6:2591–2605.
- Tsuji, Y., Morikawa, Y., y Terashima (1982). Fluid-dynamic interaction between two spheres. *Int. J. Multiphase Flow*, 8:71–82.
- van Beek, P. (1985). A counterpart of Faxén's formula in potential flow. *Int. J. Multiphase flow*, 11:873–879.
- van Wijngaarden, L. (1993). The mean rise velocity of pairwise-interacting bubbles in liquid. *J. Fluid Mech*, 251:55–78.
- Voinov, V., O.V., V., y A.G., P. (1973). Hydrodynamic interactions between bodies in a perfect incompressible fluid and their motion in non-uniform streams. *Prikl. Math. Mekh.*, 37:680–689.
- Wallis, G. (1987). *Interfacial friction modelling. In Multiphase Science and Technology 3*. Hemisphere Publ. Corp, Washington, USA.
- Wang, B.-X. y Liu, T. (1993). Research on hydrodynamics and heat transfer for fluid flow around heating spheres in tandem. *J. Heat Mass Transfer*, 35:307–317.
- Watanabe, M. y Sanada, T. (2006). In-line motion of a pair of bubbles in a viscous liquid. *JSME International Journal*, 49:410–418.
- Yuan, H. y Prosperetti, L. A. (1994). On the in-line motion of two spherical bubbles in a viscous fluid. *J. Fluid. Mech.*, 278:325–349.

- Zhang, J. y Fan, L. S. (2002). A semianalytical expression for the drag force of an interactive particle due to wake effect. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 41:5094–5097.
- Zhang, J. y Fan, L. S. (2003). On the rise velocity of an interactive bubble in liquids. *Chem. Eng. J.*, 92:169–176.
- Zhu, C., Liang, S., y Fan, L.-S. (1994). Particle wake effects on the drag force of an interactive particle. *Int. J. Multiphase Flow*, 20:117–129.



# Apéndice A

## A.1. Solución asintótica para el flujo en la estela laminar

Consideremos un cuerpo esférico inmerso en un flujo laminar, uniforme, estacionario, newtoniano e incompresible, como se muestra en la Fig. A.1. En esta figura,  $u_s$  denota la velocidad

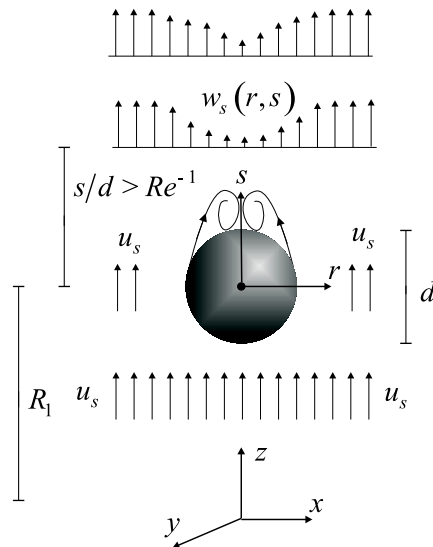


Figura A.1: Estela laminar axisimétrica detrás de un cuerpo esférico.

constante del flujo uniforme que incide sobre la esfera cuya dirección se toma como la coordenada axial  $s$  de un sistema coordenado cilíndrico, con su origen anclado en el centro de la esfera. El perfil de velocidad muy cerca del cuerpo es evidentemente determinado por la capa límite sobre el cuerpo, y la estructura del flujo dentro de esta región depende si existe o no separación del flujo en la capa límite (Batchelor, 1967; Schlichting, 1979). Sin embargo, a una

distancia lejos del cuerpo (denominada estela laminar) la diferencia de la velocidad (defecto del flujo)

$$w_1(r, s) = u_s(r, s) - w_s(r, s) \quad (\text{A.1.1})$$

es muy pequeña comparada con  $u_s$  ( $w_1 \ll u_s$ ), y el flujo puede estudiarse independientemente de la condición de frontera sobre la superficie de la esfera (véase la Sección 1.2). En esta región el flujo es paralelo y axisimétrico, y su ancho se incrementa parabólicamente con la distancia. Además, las derivadas respecto a la coordenada axial de la velocidad son pequeñas en comparación con la transversal ( $\partial w_s / \partial s \ll \partial w_s / \partial r$ ) y el campo de presión es aproximadamente uniforme (Landau y Lifshitz, 1958). Así que, considerando  $|u_s - w_s| \ll u_s$ , la componente axial de la ecuación de movimiento expresada en coordenadas cilíndricas se reduce a la siguiente ecuación lineal (Landau y Lifshitz, 1958; Batchelor, 1967; Schlichting, 1979):

$$u_s \frac{\partial w_s}{\partial s} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_s}{\partial r} \right), \quad (\text{A.1.2})$$

donde se han despreciado los términos cuadráticos en  $w_s$ . Sustituyendo la Ec. (A.1.1) en la Ec. (A.1.2) se obtiene la siguiente ecuación diferencial para  $w_1$ :

$$u_s \frac{\partial w_1}{\partial s} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_1}{\partial r} \right). \quad (\text{A.1.3})$$

Las condiciones de frontera son:

$$r = 0 : \frac{\partial w_1}{\partial r} = 0; r \rightarrow \infty : w_1 = 0. \quad (\text{A.1.4})$$

La magnitud de la depresión del perfil de velocidad en la estela está directamente conectada con el arrastre sobre el cuerpo; sin embargo, lejos del cuerpo el perfil de velocidad en la estela llega a ser prácticamente independiente de  $s$ . Igualando la pérdida del flujo de cantidad movimiento entre dos planos infinitos  $s = \text{constante}$  (uno de ellos corriente arriba y el otro muy lejos corriente abajo) con la componente vertical del arrastre que actúa sobre el cuerpo, se obtiene (Landau y Lifshitz, 1958; Schlichting, 1979):

$$F_d = 2\pi\rho \int_{r=0}^{\infty} w_s (u_s - w_s) r dr = \text{constante}. \quad (\text{A.1.5})$$

Sustituyendo la Ec. (A.1.1) en la expresión integral anterior y omitiendo los términos cuadráticos en  $w_1$  se llega a

$$F_d = 2\pi\rho u_s \int_{r=0}^{\infty} w_1(r, s) r dr = \text{constante.} \quad (\text{A.1.6})$$

La ecuación diferencial parcial de la Ec. (A.1.3) puede convertirse en una ecuación diferencial ordinaria si se realiza una transformación adecuada de variables. Con este propósito se introduce convenientemente la siguiente variable

$$\eta = \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{u_s}{\nu s}} \quad (\text{A.1.7})$$

y además, asumimos que  $w_1$  es de la forma

$$w_1 = C u_s \frac{f(\eta)}{s}, \quad (\text{A.1.8})$$

la cual satisface (A.1.3) (en los límites dados por la Ec. A.1.4) y (A.1.6). Sustituyendo las Ecs. (A.1.7) y (A.1.8) en la Ec. (A.1.3) se obtiene una ecuación para  $f(\eta)$ . Esta es

$$\frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{df}{d\eta} \right) + 2\eta^2 \frac{df}{d\eta} + 4\eta f = 0 \quad (\text{A.1.9})$$

y las condiciones de frontera para (A.1.9) son

$$\eta = 0 : \frac{df}{d\eta} = 0; \eta = \infty : f = 0. \quad (\text{A.1.10})$$

La solución de (A.1.10) es

$$f(\eta) = \exp(-\eta^2). \quad (\text{A.1.11})$$

Sustituyendo (A.1.7) en (A.1.11) y el resultado en (A.1.8) se obtiene

$$w_1(r, s) = \frac{C}{s} u_s \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{u_s r^2}{\nu s}\right). \quad (\text{A.1.12})$$

El valor de la constante  $C$  se determina sustituyendo (A.1.12) en (A.1.6)

$$F_d = 2\pi\rho u_s^2 \frac{C}{s} \int_{r=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{u_s r^2}{\nu s}\right) r dr. \quad (\text{A.1.13})$$

Integrando (A.1.13) se tiene que

$$F_d = 4\pi C \rho \nu u_s. \quad (\text{A.1.14})$$

Ahora, usando la definición del coeficiente de arrastre estacionario para una esfera inmersa en un flujo estacionario y uniforme referido al área proyectada por la esfera  $A_p = \pi d^2/4$

$$C_d = \frac{F_d}{1/2 \rho A_p u_s^2}. \quad (\text{A.1.15})$$

Por lo que la fuerza del arrastre estacionario suele expresarse como

$$F_{d1} = C_d \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho u_s^2. \quad (\text{A.1.16})$$

Sustituyendo (A.1.14) en (A.1.15) se llega a

$$C = \frac{C_d}{32} d \frac{du_s}{\nu} = \frac{C_d}{32} d Re. \quad (\text{A.1.17})$$

Sustituyendo (A.1.17) en (A.1.12) y usando (A.1.1), el perfil de velocidad asintótico que se observa en ambos marcos de referencia es

$$\frac{w_z - U_{b1}}{u_z - U_{b1}} = \frac{w_s}{u_s} = 1 - \frac{C_{d1}}{2} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{s/d} \exp\left(-\frac{Re_1}{4} \frac{r^2}{sd}\right). \quad (\text{A.1.18})$$

En general, el marco de referencia de laboratorio  $(x, y, z)$  puede relacionarse con el marco de referencia anclado en el centro de la esfera por medio de una transformación de Galileo. Para el caso mostrado en la Fig. (A.1) dicha transformación es  $z = U_{b1}t + s$ , siendo  $U_{b1}$  la velocidad de la esfera y  $t$  el tiempo transcurrido. Además,  $u_z$  es la velocidad del flujo uniforme en el marco de referencia de laboratorio, entonces

$$u_s = u_z - U_{b1}. \quad (\text{A.1.19})$$

De igual forma, para una partícula material en la estela la transformación coordenada está dada por

$$w_s = w_z - U_{b1}. \quad (\text{A.1.20})$$

El perfil de velocidad asintótico promediado en el área proyectada por la esfera se define como

$$\bar{w}_z = \frac{4}{\pi d^2} \int_0^{d/2} w_z(r, s) 2\pi r dr. \quad (\text{A.1.21})$$

Sustituyendo (A.1.18) en la Ec. (A.1.21) obtenemos el siguiente perfil de velocidad promedio observado desde el marco de referencia anclado en la esfera:

$$\frac{\bar{w}_s}{u_s} = 1 - \frac{C_{d1}}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{s/d}\right) \right]. \quad (\text{A.1.22})$$

## A.2. Expresiones de las fuerzas que actúan sobre la burbuja acarreada

Usando como punto de partida la ecuación de movimiento de Maxey y Riley (1983), se deducen las expresiones adimensionales de cada una de las fuerzas actuando sobre la burbuja acarreada las cuales son válidas a  $Re$  pequeños a intermedios. El balance estacionario de fuerzas sobre la burbuja puntera inmersa en un flujo uniforme se expresa como

$$F_b + F_{d1} = 0, \quad (\text{A.2.1})$$

donde

$$F_{d1} = -C_{d1} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{b1} - u_z)^2. \quad (\text{A.2.2})$$

Mientras que el balance cuasiestacionario de fuerzas sobre la burbuja acarreada moviéndose verticalmente en un flujo no-uniforme  $w_z(s)$ , despreciando la inercia de la burbuja y considerando a la flotación como la única fuerza externa se escribe simbólicamente (véase la Sección 1.5) como

$$F_b + F_{WR} + F_{AMT} + F_{d2T} + F_{hT} = 0. \quad (\text{A.2.3})$$

Dividiendo (A.2.3) entre  $F_{d1}$  y considerando de la Ec. (A.2.1) que  $F_b/F_{d1} = -1$  se obtiene

$$\frac{F_{WR}}{F_{d1}} + \frac{F_{AMT}}{F_{d1}} + \frac{F_{d2T}}{F_{d1}} + \frac{F_{hT}}{F_{d1}} - 1 = 0. \quad (\text{A.2.4})$$

A continuación se obtendrán las expresiones para cada una de estas fuerzas. Se supone que el flujo local en la estela de la burbuja puntera (en ausencia de la burbuja acarreada) es descrito por la solución asintótica promediada en el área proyectada por la burbuja  $w_z(s)$  (véase el Capítulo 4 y el Apéndice A.1). Las expresiones para cada una de las fuerzas están dadas por

$$F_{WR} = m_f \frac{D\bar{w}_z}{Dt}, \quad (\text{A.2.5})$$

$$F_{AMT} = \frac{1}{2} m_f \left[ \frac{D}{Dt} \left( \bar{w}_z + \frac{d^2}{40} \nabla^2 \bar{w}_z \right) - \frac{dU_{b2}}{dt} \right], \quad (\text{A.2.6})$$

$$F_{d2T} = -3\pi d\mu \left( U_{b2} - \gamma \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right), \quad (\text{A.2.7})$$

y

$$F_{hT} = -3\pi d\mu \frac{d}{2} \int_0^t \frac{\frac{d}{d\tau} \left( U_{b2} - \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right)}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} d\tau, \quad (\text{A.2.8})$$

donde

$$m_f = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho. \quad (\text{A.2.9})$$

Los límites en la integral del término histórico de la Ec. (A.2.8) indican que la integración debe realizarse en todo el intervalo de tiempo en que la esfera acarreada es acelerada por la estela de la burbuja puntera. Excepto por la expresión para la fuerza de masa agregada cuya forma final correcta fue obtenida por Auton y col. (1988) (Sección 1.5), los demás términos (si se considera que en flujo reptante  $\gamma = 1$ ) fueron obtenidos por Maxey y Riley (1983). En cuanto al significado del factor  $\gamma$ , en el Capítulo 4 se realiza una amplia discusión al respecto. En estas expresiones, tanto  $\bar{w}_z$  como todas sus derivadas deben ser evaluadas en la posición del centro de masa de la esfera  $z = R_1(t) - s$  (Fig. 3.3).

Notar que en las Ecs. (A.2.5-A.2.8) existen dos derivadas distintas,  $d/dt$  y  $D/Dt$ . La derivada  $d/dt$  se usa para denotar una derivada temporal siguiendo el movimiento del centro de masa de la burbuja acarreada, de modo que para un movimiento unidimensional en la dirección vertical de un marco de referencia de laboratorio el operador se escribe como

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_{b2} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{A.2.10})$$

La transformación de Galileo entre el marco de referencia inercial anclado en la burbuja puntera y el marco de referencia de laboratorio es la siguiente:

$$z = U_{b1}t - s, \quad (\text{A.2.11})$$

Por lo que

$$ds = -dz. \quad (\text{A.2.12})$$

Es decir, un incremento diferencial de  $z$  equivale a un decremento diferencial de  $s$ . Usando la Ec. (A.2.10), la derivada temporal de un punto material siguiendo a la trayectoria de la burbuja de acarreada, pero relativa a la burbuja puntera se expresa como

$$\frac{d}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (U_{b2} - U_{b1}) \frac{\partial}{\partial z} \right]. \quad (\text{A.2.13})$$

Sustituyendo la Ec. (A.2.10) en la Ec. (A.2.13) se obtiene la derivada temporal de un punto material en el marco de referencia de la burbuja puntera

$$\frac{d}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (U_{b1} - U_{b2}) \frac{\partial}{\partial s} \right]. \quad (\text{A.2.14})$$

Al usar el operador diferencial de la expresión anterior en  $\bar{w}_z = \bar{w}_z(s)$  se obtiene que

$$\frac{d\bar{w}_z}{dt} = (U_{b1} - U_{b2}) \frac{d\bar{w}_z}{ds}. \quad (\text{A.2.15})$$

Considerando que el único mecanismo de interacción que causa la aceleración de la burbuja acarreada es la estela permanente de la burbuja puntera; entonces  $U_{b2} = U_{b2}(s)$ . Así que, la aceleración de la burbuja acarreada relativa a la burbuja puntera se escribe como

$$\frac{dU_{b2}}{dt} = (U_{b1} - U_{b2}) \frac{dU_{b2}}{ds}; \quad (\text{A.2.16})$$

por lo que la derivada temporal en el integrando de la Ec. (A.2.8) se puede expresar como

$$\frac{d}{d\tau} \left( U_{b2} - \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right) = (U_{b1} - U_{b2}) \frac{d}{ds} \left( U_{b2} - \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right). \quad (\text{A.2.17})$$

Por otro lado,  $D/Dt$  se usa para denotar una derivada temporal siguiendo una partícula material de fluido no-perturbado en la posición del centro de masa de la esfera, de modo que el operador desde el marco de referencia de laboratorio se escribe como

$$\frac{D}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{w}_z \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{A.2.18})$$

Sustituyendo  $\bar{w}_z = \bar{w}_z(s)$  en la Ec. (A.2.18) y considerando la Ec. (A.2.12), se obtiene la siguiente aceleración de un elemento de fluido en relación a la burbuja puntera:

$$\frac{D\bar{w}_z}{Dt} = (U_{b1} - \bar{w}_z) \frac{d\bar{w}_z}{ds}, \quad (\text{A.2.19})$$

por lo que el primer término de la Ec. (A.2.6) se puede expresar como

$$\frac{D}{Dt} \left( \bar{w}_z + \frac{d^2}{40} \nabla^2 \bar{w}_z \right) = (U_{b1} - \bar{w}_z) \frac{d}{ds} \left( \bar{w}_z + \frac{d^2}{40} \nabla^2 \bar{w}_z \right). \quad (\text{A.2.20})$$

Considerando las Ecs. (A.2.16), (A.2.17), (A.2.19) y (A.2.20) en las Ecs. (A.2.5), (A.2.6)

y (A.2.8) se obtiene

$$F_{\text{WR}} = m_f (U_{\text{b1}} - \bar{w}_z) \frac{d\bar{w}_z}{ds}, \quad (\text{A.2.21})$$

$$F_{\text{AMT}} = \frac{1}{2} m_f \left[ (U_{\text{b1}} - \bar{w}_z) \frac{d}{ds} \left( \bar{w}_z + \frac{d^2}{40} \nabla^2 \bar{w}_z \right) - (U_{\text{b1}} - U_{\text{b2}}) \frac{dU_{\text{b2}}}{ds} \right] \quad (\text{A.2.22})$$

y

$$F_{\text{hT}} = -3\pi d\mu \frac{d}{2} \int_0^t (U_{\text{b1}} - U_{\text{b2}}) \frac{d}{ds} \left( U_{\text{b2}} - \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}}. \quad (\text{A.2.23})$$

La expresión para el rozamiento de la Ec. (A.2.7) y el término histórico de fuerza de la Ec. (A.2.23) fueron obtenidos para una esfera sólida moviéndose en el régimen de flujo reptante. Por lo tanto, ambos términos deben ser modificados para el caso de un régimen de flujo superior o multiplicarse por un factor de 1/3 para una burbuja en flujo reptante (Morrison y Stewart, 1976). En este trabajo se propone introducir en el término histórico la bien conocida definición del coeficiente de arrastre estacionario

$$3\pi d\mu = C_{\text{d2}} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{\text{b2}} - \gamma \bar{w}_z), \quad (\text{A.2.24})$$

que es usualmente usada para estimar la fuerza de rozamiento a diferentes regímenes de flujo. De esta manera, usando correlaciones conocidas del coeficiente de arrastre estacionario, se pueden extender las Ecs. (A.2.7) y (A.2.23) al caso de una burbuja esférica moviéndose a un número de Reynolds mayor. Ahora, usando la Ec. (A.2.24) en las Ecs. (A.2.7) y (A.2.23) se llega a

$$F_{\text{d2T}} = -C_{\text{d2}} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{\text{b2}} - \gamma \bar{w}_z) \left( U_{\text{b2}} - \gamma \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right) \quad (\text{A.2.25})$$

y

$$F_{\text{hT}} = -\frac{3}{8} C_{\text{d2}} \frac{\pi}{6} d^3 \rho (U_{\text{b2}} - \gamma \bar{w}_z) \int_0^t (U_{\text{b1}} - U_{\text{b2}}) \frac{d}{ds} \left( U_{\text{b2}} - \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}}. \quad (\text{A.2.26})$$

Dividiendo las Ecs. (A.2.21), (A.2.22), (A.2.25) y (A.2.26) entre la Ec. (A.2.2) y usando la Ec. (A.2.9) se obtiene

$$\frac{F_{\text{WR}}}{F_{\text{d1}}} = -\frac{4}{3} \frac{d}{C_{\text{d1}}} \frac{U_{\text{b1}} - \bar{w}_z}{(U_{\text{b1}} - u_z)^2} \frac{d\bar{w}_z}{ds}, \quad (\text{A.2.27})$$

$$\frac{F_{\text{AMT}}}{F_{\text{d1}}} = -\frac{2}{3} \frac{d}{C_{\text{d1}}} \frac{1}{(U_{\text{b1}} - u_z)^2} \left[ (U_{\text{b1}} - \bar{w}_z) \frac{d}{ds} \left( \bar{w}_z + \frac{d^2}{40} \nabla^2 \bar{w}_z \right) - (U_{\text{b1}} - U_{\text{b2}}) \frac{dU_{\text{b2}}}{ds} \right], \quad (\text{A.2.28})$$



$$\frac{F_{d2T}}{F_{d1}} = \frac{C_{d2}}{C_{d1}} \frac{U_{b2} - \gamma \bar{w}_z}{(U_{b1} - u_z)^2} \left( U_{b2} - \gamma \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right) \quad (\text{A.2.29})$$

y

$$\frac{F_{hT}}{F_{d1}} = \frac{1}{2} \frac{C_{d2}}{C_{d1}} \frac{U_{b2} - \gamma \bar{w}_z}{(U_{b1} - u_z)^2} d \int_0^t \frac{(U_{b1} - U_{b2}) \frac{d}{ds} \left( U_{b2} - \bar{w}_z - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \bar{w}_z \right)}{\sqrt{\pi \nu (t - \tau)}} d\tau. \quad (\text{A.2.30})$$

La solución asintótica para la estela promediada en el área proyectada por la burbuja se puede escribir como

$$\bar{w}_z = u_z + \frac{16}{Re_1} (w_0 - u_z) \frac{s}{d} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Re_1 d}{16 s} \right) \right]. \quad (\text{A.2.31})$$

Las derivadas necesarias de (A.2.31) para ser usadas en las Ecs. (A.2.27-A.2.30) son

$$\nabla \bar{w}_z = \frac{d\bar{w}_z}{ds} = -\frac{w_0 - u_z}{d} \frac{d}{s} \exp \left( -\frac{Re_1 d}{16 s} \right), \quad (\text{A.2.32})$$

$$\nabla^2 \bar{w}_z = \frac{d^2 \bar{w}_z}{ds^2} = \frac{w_0 - u_z}{s^2} \left( 2 - \frac{Re_1 d}{16 s} \right) \exp \left( -\frac{Re_1 d}{16 s} \right) \quad (\text{A.2.33})$$

y

$$\frac{d}{ds} (\nabla^2 \bar{w}_z) = \frac{d^3 \bar{w}_z}{ds^3} = -6 \frac{w_0 - u_z}{s^3} \left( 1 - \varphi_1 \frac{d}{s} \right) \left( 1 - \varphi_2 \frac{d}{s} \right) \exp \left( -\frac{Re_1 d}{16 s} \right). \quad (\text{A.2.34})$$

Donde

$$\varphi_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \frac{Re_1}{16} \quad (\text{A.2.35})$$

y

$$\varphi_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \frac{Re_1}{16}. \quad (\text{A.2.36})$$

Sustituyendo la Ec. (4.2.11) en la Ec. (3.4.6) y transcribiendo (4.2.11) obtenemos

$$W = \frac{\bar{w}_z - u_z}{U_{b1} - u_z} = \frac{16}{Re_1} \hat{s} W_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Re_1 \hat{1}}{16 \hat{s}} \right) \right] \quad (\text{A.2.37})$$

y

$$W_0 = \frac{w_0 - u_z}{U_{b1} - u_z} = \frac{C_{d1}}{2} \frac{Re_1 \hat{1}}{16 \hat{s}}. \quad (\text{A.2.38})$$

Sustituyendo la Ec. (A.2.32) en la Ec. (A.2.27) y considerando (A.2.37) y (A.2.38) se obtiene

$$\frac{F_{WR}}{F_{d1}} = \frac{Re_1}{24} (1 - W) \left( 1 - \frac{W}{W_0} \frac{Re_1 \hat{1}}{16 \hat{s}} \right) \left( \frac{\hat{1}}{\hat{s}} \right)^2 \quad (\text{A.2.39})$$

Ahora, usando las Ecs. (A.2.32) y (A.2.34) en la Ec. (A.2.28) y considerando (A.2.39) se llega a

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{AMT}}}{F_{\text{d1}}} &= \frac{1}{2} \frac{F_{\text{WR}}}{F_{\text{d1}}} + \frac{Re_1}{320} \frac{U_{\text{b1}} - \bar{w}_z}{U_{\text{b1}} - u_z} \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^4 \left(1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}}\right) \left(1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}}\right) \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}}\right) \\ &+ \frac{Re_1}{48} \frac{U_{\text{b1}} - U_{\text{b2}}}{U_{\text{b1}} - u_z} \frac{1}{\hat{s}} \frac{1}{(w_0 - u_z)} \frac{dU_{\text{b2}}}{d\hat{s}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.40})$$

Introduciendo la siguiente variable adimensional (Ec. 4.2.7):

$$U_{\text{b}} = \frac{U_{\text{b2}} - u_z}{U_{\text{b1}} - u_z} \quad (\text{A.2.41})$$

y considerando (A.2.37) y (A.2.38) se obtiene

$$\frac{F_{\text{AMT}}}{F_{\text{d1}}} = \frac{1}{2} \frac{F_{\text{WR}}}{F_{\text{d1}}} + \Phi_{\text{AM}} - \frac{Re_1}{48} \frac{1}{\hat{s}} \frac{(U_{\text{b}} - 1)}{W_0} \frac{dU_{\text{b}}}{d\hat{s}}. \quad (\text{A.2.42})$$

Donde

$$\Phi_{\text{AM}} = \frac{Re_1}{320} (1 - W) \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(1 - \frac{\varphi_1}{\hat{s}}\right) \left(1 - \frac{\varphi_2}{\hat{s}}\right) \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^4 \quad (\text{A.2.43})$$

Representa la contribución de la no-uniformidad del flujo en la fuerza de masa agregada en flujo reptante (Sección 1.5).

La expresión adimensional para el arrastre sobre la burbuja acarreada fue deducida en el Capítulo 4, por lo que aquí únicamente la transcribimos, ésta se expresa como

$$\frac{F_{\text{d2T}}}{F_{\text{d1}}} = \frac{F_{\text{d2}}}{F_{\text{d1}}} - \beta \Phi_{\text{d}} = \beta (U_{\text{b}} - W_{\gamma}) - \beta \Phi_{\text{d}}, \quad (\text{A.2.44})$$

donde

$$\Phi_{\text{d}} = \frac{1}{24} \left(1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}} \frac{W}{W_0}\right) \left(2 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{s}}\right) W_0 \left(\frac{1}{\hat{s}}\right)^2, \quad (\text{A.2.45})$$

representa el efecto de la no-uniformidad del flujo en la fuerza de arrastre sobre la burbuja acarreada.

Ahora, se obtendrá la expresión para el término histórico de fuerza. Considerando que (Ec. 4.2.5)

$$\frac{C_{\text{d2}}}{C_{\text{d1}}} = \frac{U_{\text{b1}} - u_z}{U_{\text{b2}} - \gamma \bar{w}_z} \beta. \quad (\text{A.2.46})$$

Sustituyendo la Ec. (A.2.46) en la Ec. (A.2.30) (usando  $\sigma = s$ ) y utilizando (A.2.41) se

obtiene

$$\frac{F_{h\Gamma}}{F_{d1}} = \frac{\beta}{2} d \int_0^t (1 - U_b) \left[ \frac{dU_{b2}}{d\sigma} - \frac{d\bar{w}_z}{d\sigma} - \frac{d^2}{24} \frac{d}{d\sigma} (\nabla^2 \bar{w}_z) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}}. \quad (\text{A.2.47})$$

El objetivo es obtener una expresión para el término histórico que dependa exclusivamente de la separación entre burbujas. Sin embargo, los límites y algunos términos dentro del integrando tienen como variable independiente el tiempo; por lo tanto, es necesario transformar el tiempo a su correspondiente variable independiente de posición. Para ello, definimos la velocidad instantánea de la burbuja acarreada observada desde la burbuja puntera como

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -(U_{b2} - U_{b1}). \quad (\text{A.2.48})$$

Es decir, la distancia entre burbujas disminuye a medida que transcurre el tiempo. Por consiguiente, la pendiente (velocidad relativa de la burbuja) es negativa. Eligiendo  $s_0$  como la distancia de referencia a partir de la cual se evalúa el término histórico de fuerza a un tiempo inicial  $\tau = 0$ . Integrando la Ec. (A.2.48) con la condición inicial, para  $\tau = 0$ ,  $\sigma = s_0$ , se obtiene

$$\sigma = s_0 - (U_{b2} - U_{b1}) \tau. \quad (\text{A.2.49})$$

El límite superior de (A.2.47) indica que el término histórico debe evaluarse hasta un tiempo actual  $\tau = t$ , por lo que a partir de la Ec. (A.2.49) se tiene que cuando  $\tau = t$

$$s = s_0 - (U_{b2} - U_{b1}) t, \quad (\text{A.2.50})$$

siendo  $s_0$  la distancia entre burbujas en el tiempo actual, por lo que  $s_0 - s$  es la distancia transcurrida desde  $\tau = 0$  hasta  $\tau = t$ . Sustituyendo las Ecs. (A.2.48-A.2.50) en (A.2.47) y usando (A.2.41)(42) se llega a

$$\frac{F_{h\Gamma}}{F_{d1}} = \frac{\beta}{2} d \int_{s_0}^s \frac{(U_b - 1)}{(U_{b2} - U_{b1})^{1/2}} \left[ \frac{dU_{b2}}{d\sigma} - \frac{d\bar{w}_z}{d\sigma} - \frac{d^2}{24} \frac{d}{d\sigma} (\nabla^2 \bar{w}_z) \right] \frac{d\sigma}{\sqrt{\pi\nu(\sigma - s)}}. \quad (\text{A.2.51})$$

Definiendo la siguiente variable adimensional:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{d}. \quad (\text{A.2.52})$$

Sustituyendo las Ecs. (A.2.32) y (A.2.34) (con  $\sigma = s$ ) en la Ec. (A.2.51) e introduciendo las

variables adimensionales definidas en las Ecs. (A.2.37), (A.2.38), (A.2.41) y (A.2.52); después de realizar el álgebra correspondiente se obtiene la siguiente expresión adimensional para el término histórico de fuerza:

$$\frac{F_{hT}}{F_{d1}} = \beta \sqrt{\frac{Re_1}{4\pi}} \int_{\hat{s}_0}^{\hat{s}} (U_b - 1)^{1/2} \left( \frac{dU_b}{d\hat{\sigma}} - \frac{dW}{d\hat{\sigma}} + \Phi_h \right) \frac{d\hat{\sigma}}{\sqrt{\hat{\sigma} - \hat{s}}}, \quad (\text{A.2.53})$$

donde

$$\frac{dW}{d\hat{\sigma}} = -\frac{W_0}{\hat{\sigma}} \left( 1 - \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{W}{W_0} \right) \quad (\text{A.2.54})$$

y

$$\Phi_h = \frac{1}{4} W_0 \left( 1 - \frac{W}{W_0} \frac{Re_1}{16} \frac{1}{\hat{\sigma}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\hat{\sigma}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_2}{\hat{\sigma}} \right) \left( \frac{1}{\hat{\sigma}} \right)^3. \quad (\text{A.2.55})$$

Aquí,  $\Phi_h$  es la contribución de la no-uniformidad axial en el término histórico de fuerza.

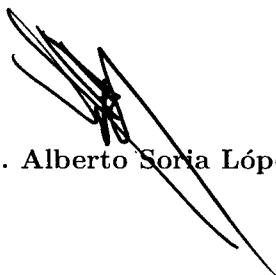
**Interacción hidrodinámica de un cuerpo  
esférico con la estela laminar de otro en  
un fluido newtoniano con flujo uniforme**

**T E S I S**

que para obtener el grado de  
DOCTOR EN CIENCIAS  
(INGENIERÍA QUÍMICA)

presenta:

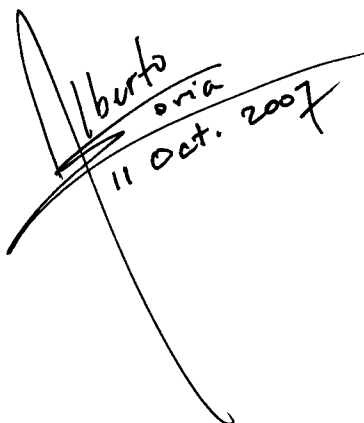
**Jorge Ramírez Muñoz**



Asesor: **Dr. Alberto Soria López**

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa  
Depto. de Ingeniería de Procesos e Hidráulica  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

México D.F. Octubre de 2007



Alberto  
Soria  
11 Oct. 2007