



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERIA

**ESTUDIO DEL  
MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONARIO**

Tesis que presenta:  
**Lic. Azucena Campillo Navarro**

Para obtener el grado de:  
**Maestro en Ciencias Matemáticas.**

Asesor:  
Dr. Juan Ruíz de Chávez Somoza.

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Jorge Alberto León Vázquez.

CINVESTAV

Secretario: Dr. Juan Ruíz de Chávez Somoza.

UAM-I

Vocal: Dr. Julio César García Corte.

UAM-I

México, D.F., Diciembre 2013.

*Este trabajo lo dedico a mi familia, la razón de mi motivación y esfuerzo,  
y, con gran amor, a mi novio Fernando, por ser todo para mí en este camino.*



# Agradecimientos

Aprovecho este espacio para agradecer a todas las personas que de alguna manera ayudaron al buen culmino de este trabajo.

A mis compañeros y amigos de la maestría, con quienes compartí gratos momentos, les agradezco su apoyo y amistad. Su compañía durante mis estudios fué muy reconfortante y un complemento esencial para seguir creciendo profesionalmente.

Quiero agradecer de manera muy especial al profesor Julio César García Corte, por todos los cursos de probabilidad que me impartió en la maestría y que me impulsaron a seguir estudiando probabilidad. Por sus enseñanzas, su dedicación y motivación puedo decir hasta el momento que lo que sé de probabilidad se lo debo a él. También agradezco su colaboración para el mejoramiento de esta tesis y su participación como mi sinodal.

Otro agradecimiento especial se la merece mi asesor, el profesor Juan Ruíz de Chávez Somoza, quien a pesar de no conocerme en un principio, me tuvo fé para la realización de una tesis a su mando. Le agradezco además su inigualable dedicación en la elaboración de este trabajo, sus consejos y sus enseñanzas.

Al profesor Jorge Alberto León Vázquez le agradezco el valioso tiempo que dedicó en la revisión de la tesis. Su experiencia en el tema, sus comentarios, observaciones y correcciones fueron indispensables para mejorar esta tesis. Así como también le agradezco su participación como mi sinodal.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>Lista de notaciones</b>	<b>vii</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Variables Aleatorias y Vectores Aleatorios Gaussianos . . . . .	1
1.1.1. Variables Gaussianas en $\mathbb{R}$ . . . . .	1
1.1.2. Vectores Gaussianos en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	2
1.1.3. La densidad gaussiana de dimensión $n$ . . . . .	7
1.2. Procesos Gaussianos . . . . .	10
1.2.1. Nociones básicas de procesos estocásticos . . . . .	10
1.2.2. Propiedades de los procesos gaussianos . . . . .	15
1.2.3. Ejemplos de Procesos Gaussianos . . . . .	20
<b>2. Movimiento Browniano Fraccionario</b>	<b>33</b>
2.1. Introducción . . . . .	33
2.1.1. Procesos Autosimilares . . . . .	33
2.1.2. Ejemplos de procesos autosimilares . . . . .	37
2.2. Propiedades del Movimiento Browniano Fraccionario . . . . .	38
2.2.1. Regularidad de las trayectorias. . . . .	44
2.2.2. Diferenciabilidad de la trayectorias. . . . .	44
2.2.3. $\alpha$ -variación del movimiento Browniano fraccionario. . . . .	45
2.2.4. El mBf no es Semimartingala cuando $H \neq \frac{1}{2}$ . . . . .	51
2.2.5. Dependencia de corto y largo plazo . . . . .	52
2.2.6. Propiedad no Markoviana . . . . .	57
2.3. El fenómeno de Hurst . . . . .	62
<b>3. Representación Integral del Movimiento Browniano fraccionario</b>	<b>71</b>
3.1. Representación de Mandelbrot y Van Ness . . . . .	71
3.2. Movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville . . . . .	77
3.2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville . . . . .	77

3.2.2. Definición del movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville . . . . .	78
3.2.3. Propiedades del mBf-RL . . . . .	79
3.2.4. Propiedades asintóticas del mBf-RL . . . . .	84
3.2.5. Aproximación del mBf-RL mediante Semimartingalas . . . . .	90
<b>4. Integración estocástica con respecto al mBf</b>	<b>93</b>
4.1. Integración con respecto al mBf cuando $H > \frac{1}{2}$ . . . . .	94
4.2. Integración con respecto al mBf cuando $H < \frac{1}{2}$ . . . . .	98
<b>Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>

# Resumen

La presente tesis tiene como objetivo estudiar el movimiento Browniano fraccionario (como lo dice el mismo título de la tesis), sin embargo el estudio de este proceso es muy vasto por lo que cabe destacar que esta tesis se enfoca en conjuntar y desarrollar las principales propiedades del mismo. La razón por la que se aborda este proceso como trabajo de tesis es debido a que no se le ha dado la suficiente divulgación a pesar de que se tiene una amplia gama de aplicaciones del mismo y se conoce desde 1940 ya que fué presentado por Kolmogorov.

Para atender a un mejor entendimiento del tema se exponen algunos resultados de la teoría de procesos gaussianos que ayudarán al lector a tener una base teórica para partir al estudio del movimiento Browniano fraccionario.

La ventaja del estudio del movimiento Browniano fraccionario es que los conocimientos necesarios para el desarrollo de las propiedades del proceso resultan no ser complicadas dentro de la teoría de probabilidad y procesos estocásticos. La verdadera dificultad se presenta cuando se trabaja en definir la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano fraccionario debido a que, para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, se necesita del estudio de otras teorías como el cálculo de Malliavin, Productos de Wick, la teoría de integrales de Young y la teoría de las trayectorias rugosas (rough paths), por mencionar algunos.



# Introducción

La motivación que se tuvo para empezar este trabajo fué estudiar una aproximación al movimiento Browniano fraccionario, específicamente una de las aproximaciones que están dadas en el artículo [Cavanzo, 2005], ya que actualmente se conocen muchas aproximaciones al movimiento Browniano a comparación con el movimiento Browniano fraccionario. Sin embargo, durante el estudio del movimiento Browniano fraccionario nos percatamos que éste tiene varias propiedades interesantes que contrastan con las propiedades del movimiento Browniano estándar, por lo cual se decidió estudiar con más detalle las propiedades básicas del movimiento Browniano fraccionario llegando, de esta manera, a establecer el objetivo principal de la presente tesis.

El objetivo de la tesis es desarrollar las propiedades básicas del movimiento Browniano fraccionario para analizar ciertas propiedades que difieren y otras que coinciden con el movimiento Browniano. Este desarrollo se llevará a cabo usando como base fundamental la teoría de procesos gaussianos entre otros conceptos básicos de la teoría de procesos estocásticos.

Debido a que el movimiento Browniano fraccionario es un proceso gaussiano, en el primer capítulo se presentan algunos resultados de la teoría de procesos gaussianos que ayudarán a probar varias propiedades del movimiento Browniano fraccionario. Se comienza con una pequeña introducción a las variables aleatorias gaussianas y vectores aleatorios gaussianos para culminar con el estudio de procesos gaussianos y algunos ejemplos de éstos.

En el capítulo 2 se establece la definición del movimiento Browniano fraccionario junto con sus propiedades básicas, como lo son: la regularidad y no diferenciabilidad de sus trayectorias, la  $\alpha$ -variación del proceso, la propiedad de que el proceso no es semimartingala, la dependencia de corto y largo plazo del proceso de sus incrementos y la propiedad no markoviana. Para culminar el capítulo se presenta el análisis del fenómeno de Hurst con el cual se da a conocer la manera en la que fué introducido históricamente el estudio del movimiento Browniano fraccionario.

Luego, en las investigaciones realizadas para el capítulo 2 se encontró que el movimiento Browniano fraccionario tiene una representación integral que es muy común dentro de su estudio y en sus aplicaciones, la denominada: “Representación integral de Mandelbrot y Van Ness”. Por lo cual en el capítulo 3 se comienza presentando esta representación integral y a partir de ella surgió la necesidad de examinar las

propiedades de otro proceso conocido como movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville, ya que éste último tiene una representación integral muy similar a la representación integral de Mandelbrot y Van Ness, y por esta razón a estos dos procesos se les ha confundido como el mismo proceso. Por lo tanto, el objetivo principal del capítulo 3 es aclarar que el movimiento Browniano fraccionario y el movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville no son el mismo proceso, y, a pesar de ello, se encontrará una relación entre éstos.

Como se verá en el capítulo 2, el movimiento Browniano fraccionario no es una semimartingala lo cual trae como consecuencia que no se puede aplicar el cálculo de Itô con el fin de definir la integral estocástica con respecto a este proceso. Por lo tanto, en el capítulo 4 se finaliza este trabajo de tesis exponiendo de manera informativa dos alternativas para definir la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano fraccionario. Una alternativa sirve para estudiar la integral estocástica cuando  $H > \frac{1}{2}$  y la otra cuando  $H < \frac{1}{2}$ .

La tesis aporta en sí una manera de abordar el estudio del movimiento Browniano fraccionario teniendo como base la teoría de los procesos gaussianos que se presenta en el capítulo 1 y la cual encamina al lector a un mejor entendimiento del proceso. La manera en la que se desarrolla el estudio de las propiedades del movimiento Browniano fraccionario es meramente analítica y con la virtud de que no se ocupan herramientas muy sofisticadas para entenderlo. En el capítulo 2 se brinda una recopilación de las propiedades más resaltantes del movimiento Browniano fraccionario, mientras que en el capítulo 3 se estudiarán algunas diferencias entre el movimiento Browniano fraccionario y el movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville. Para culminar, en el capítulo 4 se presenta un panorama sobre el trabajo que se ha realizado para definir la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano fraccionario.

# Lista de notaciones

$\sim$	Distribución de la variable aleatoria.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espacio de probabilidad.
$\mathcal{B}(M)$	$\sigma$ -álgebra de conjuntos de Borel de $M$ .
$E$	Esperanza de la variable aleatoria.
$\text{Var}$	Varianza de la variable aleatoria.
$\exp$	Función exponencial $e$ .
$K$	Matriz de covarianza de un vector aleatorio.
$\text{Cov}$	Covarianza.
$m_X$	Vector esperanza del vector aleatorio $X$ .
$c.s.$	Casi seguramente.
$\stackrel{c.s.}{\equiv}$	Igualdad casi segura.
$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espacio de funciones integrables definidas en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .
$\mathbb{P}_X$	Distribución de la variable aleatoria $X$ .
$f_X$	Función de densidad de la variable aleatoria $X$ .
$\det$	Determinante de una matriz.
$\otimes$	Producto entre $\sigma$ -álgebras.
$\Pi$	Producto entre conjuntos.
$\circ$	Composición de funciones.
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$	Igualdad en distribución.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto punto.
$K_X(\cdot, \cdot)$	Operador de covarianza del proceso $X$ .
$\log$	Función logaritmo.
$\Gamma$	Función gamma.
$E[X \mathcal{F}]$	Esperanza condicional de la variable aleatoria $X$ con respecto a la $\sigma$ -álgebra $\mathcal{F}$ .
$\mathbf{O}(f)$	Orden de convergencia de la función $f$ .
$\approx$	Aproximación.
$f''(x)$	Segunda derivada de la función $f$ respecto a $x$ .
$[\cdot]$	Función parte entera.
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	Convergencia en distribución.
$\xrightarrow{c.s.}$	Convergencia casi segura.
$\xrightarrow{L^2}$	Convergencia en media cuadrática.

---

$\mathbb{P}[X \mathcal{F}]$	Probabilidad condicional de la variable aleatoria $X$ con respecto a la $\sigma$ -álgebra $\mathcal{F}$ .
$a \wedge b$	Mínimo entre $a$ y $b$ .
${}_2F_1$	Función hipergeométrica.
$\ll$	Mucho menor que.
$\gg$	Mucho mayor que.
$a \cong b$	$a$ tiene la misma forma que $b$ salvo constantes positivas.
$\text{Cov}_{\Delta}^X$	Covarianza del proceso de incrementos de $X$ .
$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espacio de funciones cuadrado integrables definidas en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .
$\mathcal{C}^l$	Conjunto de funciones $l$ -veces diferenciable y cuya $l$ -ésima derivada es continua.
$\mathcal{C}^{\infty}$	Conjunto de funciones infinitamente diferenciables.
$\mathcal{C}^0$	Conjunto de funciones continuas.
$C^{\alpha}$	Conjunto de funciones $\alpha$ -Hölderianas.
$\ \cdot\ _{\alpha}$	Norma del conjunto $C^{\alpha}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Debido a que el movimiento Browniano fraccionario es un proceso gaussiano es preciso estudiar la teoría de procesos gaussianos ó al menos los principales resultados que ayudarán a examinar las propiedades básicas del movimiento Browniano fraccionario. Por tal razón, este primer capítulo se dedica a encaminar de la manera más breve y analítica posible el estudio de los procesos gaussianos en general comenzando desde los conceptos más esenciales, como lo son la definición de variables y vectores aleatorios gaussianos, hasta finalizar con ejemplos de procesos gaussianos.

### 1.1. Variables Aleatorias y Vectores Aleatorios Gaussianos

En esta sección se presentan las definiciones de variables aleatorias y vectores aleatorios gaussianos, la función de densidad y la función característica de una variable y un vector gaussiano respectivamente, independencia entre variables aleatorias gaussianas, así como también independencia entre vectores aleatorios gaussianos, entre otros resultados que complementan el estudio de las variables y los vectores aleatorios gaussianos.

#### 1.1.1. Variables Gaussianas en $\mathbb{R}$

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  un espacio medible. Todas las variables aleatorias que se consideren en esta sección están definidas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y toman valores en  $\mathbb{R}$ .

**1.1 Definición.** Sea  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  una variable aleatoria. Se dice que la variable aleatoria  $X$  tiene distribución normal o gaussiana si su función de densidad está dada por:

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

donde  $\mu$  es la esperanza de  $X$  y  $\sigma^2$  es la varianza de  $X$ , los cuales se denotan como  $E(X)$  y  $\text{Var}(X)$  respectivamente.

En particular, la variable aleatoria  $X$  se dice que tiene distribución normal estándar si su función de densidad es:

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\},$$

es decir, cuando  $E(X) = 0$  y  $\text{Var}(X) = 1$ .

Una variable aleatoria  $X$  que tiene distribución normal con esperanza  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  se denota como:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Como observación, una variable aleatoria gaussiana  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , definida en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , es una constante igual a  $\mu$  casi seguramente (c.s.) si  $\sigma^2 = 0$ . Esta distribución es la conocida como distribución delta de Dirac en  $\mu$ , denotada por  $\delta_\mu$ . Por lo cual, si  $\sigma^2 = 0$  entonces  $\mathbb{P} = \delta_\mu$ .

## 1.2 Propiedades.

i) Sea  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , entonces  $X$  tiene función característica dada por:

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \exp\left\{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}.$$

ii) Sea  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , luego  $X$  puede verse como la translación y la dilatación de una variable aleatoria normal estándar  $\tilde{X} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , como sigue:  $X = \mu + \sigma\tilde{X}$ . Es decir si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , entonces:

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

iii) Sean  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  y  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  variables aleatorias independientes, entonces  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

### 1.1.2. Vectores Gaussianos en $\mathbb{R}^n$

En esta sección se considerarán variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ , las cuales están definidas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y toman valores en  $\mathbb{R}$ . En cuanto a los vectores aleatorios que se estarán tratando, éstos estarán formados por las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ , es decir se considerarán los vectores aleatorios  $(X_1, \dots, X_n)$ , los cuales están definidos en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y toman valores en  $\mathbb{R}^n$ , por lo cual se trabajará con el espacio medible  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ .

**1.3 Definición.** Sea  $X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  un vector aleatorio que toma valores en  $\mathbb{R}^n$  y tal que  $E|X_i| < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ . La esperanza del vector aleatorio  $X$ , denotada por  $E(X)$ , es el vector de esperanzas, es decir:

$$E(X) = (E(X_1), \dots, E(X_n)).$$

Si  $E(X_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ , se dice que el vector aleatorio  $X$  es centrado.

Para simplificar la notación se denotará por  $m_X$  al vector esperanza del vector aleatorio  $X$ .

**1.4 Definición.** Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio tal que  $E|X_i| < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ , y  $E|X_i X_j| < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ , y  $j = 1, \dots, n$ . La matriz de covarianza del vector aleatorio  $X$  es la matriz cuadrada, simétrica y positiva definida, dada por:

$$K = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n},$$

donde  $\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$ .

**1.5 Definición.** Un vector aleatorio  $X = (X_1, \dots, X_n)$  se dice que tiene distribución gaussiana si tiene distribución normal de dimensión  $n$ , es decir, si su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det K}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - m_X)^\top K^{-1} (x - m_X) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $\det K$  es el determinante de la matriz de covarianza  $K$ .

**1.6 Proposición. (La función característica de un vector gaussiano en  $\mathbb{R}^n$ ).** Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio gaussiano con esperanza  $m_X$  y matriz de covarianza  $K$ , entonces la función característica del vector aleatorio  $X$  está dada por:

$$\phi_X(x) = \exp \left\{ ix^\top m_X - \frac{1}{2} x^\top K x \right\} \quad (1.1)$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Por la fórmula de inversión de Lévy, ver [Williams, 2008, pag. 175], se deduce que la función característica determina de manera única la distribución del vector aleatorio. Con la ayuda de este resultado se probará la siguiente proposición.

**1.7 Proposición. (Independencia de variables aleatorias gaussianas).**

Sea  $(X, Y)$  un vector gaussiano, entonces  $X$  y  $Y$  son independientes si y sólo si

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

**Demostración.** Si  $X$  y  $Y$  son independientes, se sigue inmediatamente que

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Para demostrar el recíproco, se denotará a la función esperanza del vector aleatorio gaussiano  $(X, Y)$  por  $m_{(X,Y)} = (E(X), E(Y))$ . Luego, debido a que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , se tiene que la matriz de covarianza  $K$  de  $(X, Y)$  esta dada por:

$$K = \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & 0 \\ 0 & \text{Var}(Y) \end{bmatrix}.$$

Con lo anterior se calcula la función característica de  $(X, Y)$ :

$$\begin{aligned} \phi_{(X,Y)}(x, y) &= \exp \left\{ i(x, y)^\top m_{(X,Y)} - \frac{1}{2} (x, y)^\top K (x, y) \right\} \\ &= \exp \left\{ i(xE(X) + yE(Y)) - \frac{1}{2} (x^2\text{Var}(X) + y^2\text{Var}(Y)) \right\} \\ &= \exp \left\{ ixE(X) - \frac{1}{2}x^2\text{Var}(X) \right\} \exp \left\{ iyE(Y) - \frac{1}{2}y^2\text{Var}(Y) \right\} \\ &= \phi_X(x) \phi_Y(y). \end{aligned}$$

Por la unicidad de la función característica, se concluye que la distribución conjunta del vector aleatorio gaussiano  $(X, Y)$  es igual al producto de la distribución de la variable aleatoria  $X$  y de la distribución de la variable aleatoria  $Y$ , por lo tanto  $X$  y  $Y$  son independientes ( ver [Williams, 2008, pag. 38-40]). ■

De igual manera se prueba el resultado anterior para vectores gaussianos de dimensión mayor que dos en la siguiente proposición.

**1.8 Proposición.** Sea  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_p)$  un vector aleatorio gaussiano de dimensión  $n+p$ , entonces los vectores aleatorios  $X = (X_1, \dots, X_n)$  y  $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$  son independientes si y sólo si las covarianzas,  $\text{Cov}(X_i, Y_j)$ ,  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ , son todas nulas.

El siguiente resultado es una caracterización muy importante de los vectores gaussianos.

**1.9 Proposición.** Un vector aleatorio  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es gaussiano si y sólo si todas las combinaciones lineales de sus coordenadas tienen distribución gaussiana en  $\mathbb{R}$ , es decir, si y sólo si la combinación lineal  $a_1X_1 + \dots + a_nX_n$  tienen distribución gaussiana en  $\mathbb{R}$ , para toda  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.** Bajo el supuesto de que  $X$  es un vector aleatorio gaussiano, nótese primeramente que, para toda  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , la variable aleatoria  $a_1X_1 + \dots + a_nX_n$  tiene la siguiente esperanza y varianza:

$$E(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i),$$

$$\text{Var}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{j=1}^n \left( a_j \sum_{i=1}^n a_i \text{Cov}(X_i, X_j) \right).$$

Por la Proposición (1.6), para cada  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_X(a) &= \exp \left\{ ia^\top m_X - \frac{1}{2} a^\top K a \right\} \\ &= \exp \left\{ i \left( \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( a_j \sum_{i=1}^n a_i \text{Cov}(X_i, X_j) \right) \right\} \\ &= \phi_Y(1), \end{aligned}$$

donde  $Y$  es una variable aleatoria gaussiana con  $E(Y) = E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n)$  y  $\text{Var}(Y) = \sum_{j=1}^n (a_j \sum_{i=1}^n a_i \text{Cov}(X_i, X_j))$ , por lo que:

$$Y \stackrel{c.s.}{=} a_1X_1 + \cdots + a_nX_n,$$

y por consiguiente  $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$  tiene la misma distribución que  $Y$ , así se muestra que la variable aleatoria  $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$  es gaussiana.

El recíproco se obtiene de la misma manera al observar que:

$$\phi_{a_1X_1 + \cdots + a_nX_n}(1) = \phi_X(a),$$

para cada  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . ■

### 1.10 Observación.

1. La distribución de un vector gaussiano  $X$  esta determinada por el vector  $m_X$  y su matriz de covarianza  $K$ .
2. Un vector aleatorio gaussiano  $X = (X_1, \dots, X_n)$  se dice que es gaussiano estándar si:

$$E(X_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n, \quad \text{y} \quad K = I_n,$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ . Además, la función característica del vector gaussiano estándar  $X$  esta dada por:

$$\phi_X(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^\top x \right\},$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

3. Evaluando la función característica de un vector gaussiano  $X = (X_1, \dots, X_n)$  en el punto  $x = (x_1, 0, \dots, 0)$  y tomando  $K = I_n$  se obtiene:

$$\phi_X(x) = \exp \left\{ ix_1 E(X_1) - \frac{1}{2} x_1^2 \text{Var}(X_1) \right\} = \phi_{X_1}(x_1),$$

por lo cual  $X_1 \sim \mathcal{N}(E(X_1), \text{Var}(X_1))$ .

De igual manera se tiene que  $X_i \sim \mathcal{N}(E(X_i), \text{Var}(X_i))$ , para cada  $i = 2, \dots, n$ . Por lo tanto, si un vector  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es gaussiano entonces cada variable aleatoria  $X_i$  que compone al vector también es gaussiana.

Se ha visto que si un vector  $\tilde{X} = (X_1, \dots, X_n)$  es gaussiano entonces sus marginales  $X_i$  son gaussianas, y las combinaciones lineales de sus marginales también son gaussianas. Sin embargo el recíproco es falso, es decir, si dos variables aleatorias son gaussianas entonces el vector aleatorio formado por esas variables no necesariamente es gaussiano. A continuación se presenta un ejemplo.

### 1.11 Ejemplo. (Variables gaussianas y vectores no gaussianos).

Sea  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  y sea  $Y$  una variable aleatoria con distribución dada por:

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq a, \\ -X & \text{si } |X| > a. \end{cases}$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ .

Para determinar que  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  nótese que la función característica de  $Y$  es:

$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= E[e^{itY}] = E[e^{itX} \mathbf{1}_{|X| \leq a}] + E[e^{-itX} \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= E[e^{itX} \mathbf{1}_{|X| \leq a}] + E[e^{itX} \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= E[e^{itX} \mathbf{1}_{|X| \leq a}] + E[e^{itX} \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= E[e^{itX} (\mathbf{1}_{|X| \leq a} + \mathbf{1}_{|X| > a})] \\ &= E[e^{itX}], \end{aligned}$$

es decir, la función característica de  $Y$  coincide con la función característica de  $X$ . Así se tienen dos variables aleatorias,  $X$  y  $Y$ , con distribución normal estándar.

Por otro lado, la variable aleatoria  $X + Y$  esta dada por:

$$X + Y = \begin{cases} X + X = 2X & \text{si } |X| \leq a, \\ X - X = 0 & \text{si } |X| > a. \end{cases} = 2X \mathbf{1}_{|X| \leq a}.$$

De aquí, la variable aleatoria  $X + Y$  no tiene una distribución gaussiana y, por la Proposición (1.9), el vector aleatorio  $(X, Y)$  no es un vector gaussiano.

Además, este ejemplo muestra que en la Proposición (1.7), la hipótesis de que  $(X, Y)$  sea un vector gaussiano es necesaria y suficiente para suponer que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias gaussianas.

Otro detalle interesante que se puede rescatar de este ejemplo se obtiene al observar la covarianza de las variables  $X$  y  $Y$  como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[XY] \\ &= E[X^2 \mathbf{1}_{|X| \leq a}] - E[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= E[X^2] - E[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}] - E[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= 1 - 2E[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}]. \end{aligned}$$

Ahora, considerando a la esperanza  $E[X^2 \mathbf{1}_{|X|>a}]$  como función de  $a$ , se verificará que la función  $u(a) = E[X^2 \mathbf{1}_{|X|>a}]$  es continua.

Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}_+$  tal que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Nótese los siguientes puntos:

- i)  $X^2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .
- ii)  $X^2 \geq X^2 \mathbf{1}_{|X|>a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} X^2 \mathbf{1}_{|X|>a_n} = X^2 \mathbf{1}_{|X|>a}$ .

Luego, por el teorema de la convergencia dominada se obtiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X^2 \mathbf{1}_{|X|>a_n}) = E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X^2 \mathbf{1}_{|X|>a_n}\right) = E(X^2 \mathbf{1}_{|X|>a}) = u(a),$$

es decir, la función  $u(a)$  es continua.

Además, usando de nuevo el teorema de la convergencia dominada y tomando la sucesión  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X^2 \mathbf{1}_{|X|>b_n}) = E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X^2 \mathbf{1}_{|X|>b_n}\right) = E(0) = 0.$$

Y observando que  $u(0) = 1$  se concluye que existe  $\tilde{a} \in \mathbb{R}_+$  tal que  $u(\tilde{a}) = \frac{1}{2}$ , es decir, tomando:

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq \tilde{a}, \\ -X & \text{si } |X| > \tilde{a}. \end{cases}$$

se tiene que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  y así las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son no correlacionadas y a su vez, no independientes. De esta manera, las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son un ejemplo claro de que aunque  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , no necesariamente las variables  $X$  y  $Y$  son independientes.

### 1.1.3. La densidad gaussiana de dimensión $n$

Se ha visto que una variable aleatoria gaussiana se puede entender como una translación y dilatación de una variable aleatoria gaussiana estándar, ahora será útil extender ése mismo resultado para vectores aleatorios gaussianos, y para ello se denotará por  $\langle a, b \rangle$  al producto punto entre los vectores  $a = (a_1, \dots, a_n)$  y  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , es decir  $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ . Además, se simplificará la notación  $m_X$  por  $m$ .

**1.12 Proposición.** Sea  $X \sim \mathcal{N}(m, K)$  un vector aleatorio gaussiano de dimensión  $n$ , con esperanza  $m \in \mathbb{R}^n$  y con matriz de covarianza invertible  $K$ , entonces

$$\sqrt{K}^{-1}(X - m) \sim \mathcal{N}(0, I_n).$$

**Demostración.** Recuérdese que la matriz de covarianza  $K$  es positiva definida, con ello existe la matriz  $A$  simétrica, tal que  $A^2 = K$ , así la matriz  $A$  es la matriz  $\sqrt{K}$ . Luego, debido a que  $K$  es invertible entonces la matriz  $A$  también es invertible

por lo que se justifica la existencia de la matriz  $\sqrt{K}^{-1}$ . Ahora se mostrará que  $A^{-1}K(A^{-1})^\top = I_n$ , es decir:

$$\sqrt{K}^{-1}K(\sqrt{K}^{-1})^\top = I_n. \quad (1.2)$$

De la relación  $A^2 = K$  se sigue que  $A^{-1}KA^{-1} = I_n$ , y usando que la inversa de la matriz  $A$  también es simétrica se llega al resultado deseado.

Ahora, usando la unicidad de la función característica, se probará que el vector aleatorio  $\sqrt{K}^{-1}(X - m)$  es un vector aleatorio gaussiano estándar. Para simplificar se denotará por  $X_0$  al vector aleatorio  $\sqrt{K}^{-1}(X - m)$ .

$$\begin{aligned} \phi_{X_0}(x) &= \mathbb{E}[\exp\{i\langle x, X_0 \rangle\}] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{i\left\langle x, \sqrt{K}^{-1}(X - m) \right\rangle\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{i\left\langle (\sqrt{K}^{-1})^\top x, X - m \right\rangle\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{i\left\langle (\sqrt{K}^{-1})^\top x, X \right\rangle\right\} \exp\left\{-i\left\langle (\sqrt{K}^{-1})^\top x, m \right\rangle\right\}\right] \\ &= \exp\left\{-i\left\langle (\sqrt{K}^{-1})^\top x, m \right\rangle\right\} \mathbb{E}\left[\exp\left\{i\left\langle (\sqrt{K}^{-1})^\top x, X \right\rangle\right\}\right] \\ &= \exp\left\{-i\left\langle (\sqrt{K}^{-1})^\top x, m \right\rangle\right\} \phi_X\left(\left(\sqrt{K}^{-1}\right)^\top x\right) \\ &= \exp\left\{i\left\langle m, \left(\sqrt{K}^{-1}\right)^\top x \right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \left(\sqrt{K}^{-1}\right)^\top x, K \left(\sqrt{K}^{-1}\right)^\top x \right\rangle\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-i\left\langle \left(\sqrt{K}^{-1}\right)^\top x, m \right\rangle\right\}, \quad \text{por la ecuación (1.1).} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle \left(\sqrt{K}^{-1}\right)^\top x, K \left(\sqrt{K}^{-1}\right)^\top x \right\rangle\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle x, \sqrt{K}^{-1}K \left(\sqrt{K}^{-1}\right)^\top x \right\rangle\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle x, I_n x \rangle\right\} \quad \text{por la ecuación (1.2).} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle x, x \rangle\right\}. \end{aligned}$$

Por el punto 2 de la observación (1.10) se concluye que  $X_0 \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ . ■

### 1.13 Observación.

1. Un vector aleatorio  $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ , con la matriz de covarianzas  $K$  invertible, puede verse como una translación y dilatación de un vector gaussiano estándar como sigue:

$$X \sim \sqrt{K}X_0 + m,$$

donde  $X_0 \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ .

2. Sea  $X_0 = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio gaussiano estándar ( $X_0 \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ ), de aquí  $\text{Cov}(X_0) = I_n$ , entonces, por las Proposiciones (1.7) y (1.9), las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  son independientes y por lo tanto la distribución del vector  $X_0$  es el producto de las distribuciones marginales, es decir:

$$\mathbb{P}_{X_0} = \mathbb{P}_{X_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{X_n}.$$

Así, la densidad de  $X_0$  se obtiene del producto de las funciones de densidad marginales:

$$\begin{aligned} f_{X_0}(x_1, \dots, x_n) &= f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \right) \cdots \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_n^2} \right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para obtener la densidad de un vector gaussiano  $X \sim \mathcal{N}(m, K)$  en general, con matriz de covarianza  $K = \text{Cov}(X)$  invertible, se usarán los siguientes resultados:

i)  $X \sim \sqrt{K}X_0 + m$ , donde  $X_0 \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ .

ii)  $K = \sqrt{K} \left( \sqrt{K} \right)^\top$ .

iii)  $\det \sqrt{K} = \sqrt{\det K}$ . Esto se debe al resultado del inciso ii), ya que el determinante de una matriz es invariante bajo la transposición, es decir:  $\det(K) = \det(K)^\top$ .

Ahora se procederá a calcular directamente la distribución del vector aleatorio  $X$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in B) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{K}X_0 + m \in B\right), \quad \text{por i).} \\
&= \mathbb{P}\left(X_0 \in \sqrt{K}^{-1}(B - m)\right) \\
&= \int_{\sqrt{K}^{-1}(B-m)} f_{X_0}(x) dx \\
&= \int_B f_{X_0}\left(\sqrt{K}^{-1}(y - m)\right) \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| dy, \quad \text{tomando } y = \sqrt{K}x + m, \\
&= \int_B f_{X_0}\left(\sqrt{K}^{-1}(y - m)\right) \frac{1}{\det \sqrt{K}} dy \\
&= \int_B f_{X_0}\left(\sqrt{K}^{-1}(y - m)\right) \frac{dy}{\sqrt{\det K}}, \quad \text{por iii).} \\
&= \int_B \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle\sqrt{K}^{-1}(y - m), \sqrt{K}^{-1}(y - m)\right\rangle\right\}}{\left((2\pi)^n \det K\right)^{\frac{1}{2}}} dy, \quad \text{ecuación (1.3).} \\
&= \int_B \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle(y - m), K^{-1}(y - m)\right\rangle\right\}}{\left((2\pi)^n \det K\right)^{\frac{1}{2}}} dy, \quad \text{por ii).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en la siguiente proposición se establece la función de densidad de un vector aleatorio gaussiano de dimensión  $n$ .

**1.14 Proposición.** *La densidad de un vector gaussiano  $X \sim \mathcal{N}(m, K)$  de dimensión  $n$ , con  $K$  invertible, está dada por:*

$$f_X(x) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle(x - m), K^{-1}(x - m)\right\rangle\right\}}{\left((2\pi)^n \det(K)\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

## 1.2. Procesos Gaussianos

En esta sección primeramente se abordarán conceptos básicos de la teoría de procesos estocásticos para luego aterrizar en el estudio de los principales resultados sobre procesos gaussianos y culminar con algunos ejemplos de ellos.

### 1.2.1. Nociones básicas de procesos estocásticos

En esta sección los procesos estocásticos están definidos en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , conjunto de tiempo  $T = \mathbb{R}_+$  y espacio de estados  $\mathbb{R}$ .

**1.15 Definición.** *Un proceso estocástico, con espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , conjunto de tiempo  $T$  y espacio de estados  $\mathbb{R}$ , es una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$ , tal que para cada  $t \in T$ :*

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Cabe destacar que un proceso estocástico depende de dos parámetros, de  $t \in T$  y de  $\omega \in \Omega$ , donde para  $t$  fijo, la función  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  es una variable aleatoria con espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y para  $\omega$  fijo,  $t \mapsto X_t(\omega)$  es una función que toma valores en  $\mathbb{R}$  y es llamada la  $\omega$ -trayectoria del proceso.

Para  $L \subset T$ , se denotará como  $\mathcal{B}^L$  a la  $\sigma$ -álgebra producto de conjuntos de  $\mathbb{R}^L$ , es decir  $\otimes_{t \in L} \mathcal{B}_t(\mathbb{R})$ , donde  $\mathcal{B}_t(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  para cada  $t \in L$ .

La  $\sigma$ -álgebra producto  $\otimes_{t \in L} \mathcal{B}_t(\mathbb{R})$  es la mínima  $\sigma$ -álgebra de conjuntos de  $\mathbb{R}^L$  que contiene a los conjuntos de la forma  $\prod_{t \in L} A_t$ , con  $A_t \in \mathcal{B}_t(\mathbb{R})$ , y donde el conjunto  $\{t \in L : A_t \neq \mathbb{R}\}$  es finito.

Luego, para  $F \subset L \subset T$ , sea  $\pi_F^L : (\mathbb{R}^L, \mathcal{B}^L) \rightarrow (\mathbb{R}^F, \mathcal{B}^F)$  la proyección definida por:

$$\pi_F^L((f_t)_{t \in L}) = (f_t)_{t \in F},$$

donde  $f_t \in \mathbb{R}, \forall t \in T$ . En particular, la proyección  $\pi_t^L : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $t \in L$ , se entiende como la proyección  $\pi_{\{t\}}^L$ , y si  $L = T$  entonces  $\pi_t^T$  se denotará simplemente por  $\pi_t$ .

### 1.16 Observación.

1. La  $\sigma$ -álgebra producto  $\mathcal{B}^L$  coincide con la mínima  $\sigma$ -álgebra de conjuntos de  $\mathbb{R}^L$  con respecto a la cual las proyecciones  $\{\pi_t^L\}_{t \in L}$  son medibles.
2. Se cumple la igualdad:

$$\pi_K^M = \pi_K^L \circ \pi_L^M, \quad \forall K \subset L \subset M \subset T.$$

3. Las proyecciones  $\pi_F^L$  son medibles, ya que  $\pi_t^F \circ \pi_F^L = \pi_t^L$  y cada  $\pi_t^L$  es medible.

**1.17 Definición.** Dado un proceso estocástico  $X = \{X_t\}_{t \in T}$  y dado  $F \subset T$ , se define la función  $\varphi_X^F : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^F, \mathcal{B}^F)$  como:

$$\varphi_X^F(\omega) = \{X_t(\omega)\}_{t \in F}.$$

Nótese que la función  $\varphi_X^F$  es medible ya que para cada  $t \in F$  se tiene que

$$\pi_t^F \circ \varphi_X^F = X_t,$$

de donde  $X_t$  es medible para cada  $t \in F$ .

La función  $\mathbb{P} \circ \varphi_X^{-1} : \mathcal{B}^T \rightarrow [0, 1]$ , definida por:

$$(\mathbb{P} \circ \varphi_X^{-1})(A) = \mathbb{P}(\varphi_X^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathcal{B}^T,$$

se le llama *la ley o la distribución* del proceso  $X$ .

**1.18 Definición.** Para cada  $F \subset T$ , con  $F$  finito, se define  $\mathbb{P}_F = \mathbb{P} \circ [\varphi_X^F]^{-1}$ . A la familia de probabilidades:

$$\{\mathbb{P}_F\}_{F \subset T, F \text{ finito}}$$

se le llama la familia de distribuciones finito dimensionales del proceso  $X$ .

De acuerdo con la definición anterior, para  $F \subset L$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_L \circ [\pi_F^L]^{-1} &= \mathbb{P} \circ [\varphi_X^L]^{-1} \circ [\pi_F^L]^{-1} \\ &= \mathbb{P} \circ (\pi_F^L \circ \varphi_X^L)^{-1} \\ &= \mathbb{P} \circ (\varphi_X^F)^{-1} \\ &= \mathbb{P}_F \end{aligned}$$

es decir, se cumple la propiedad llamada “condición de consistencia”:

$$\mathbb{P}_L \circ [\pi_F^L]^{-1} = \mathbb{P}_F. \quad (1.4)$$

En lo siguiente se analizarán algunas maneras de establecer igualdad entre dos procesos estocásticos.

**1.19 Definición.**

- i) Dos procesos,  $Y$  y  $X$ , se dice que son equivalentes si tienen la misma distribución.
- ii) Decimos que  $Y$  es una versión del proceso  $X$  si  $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ , para toda  $t \in T$ .
- iii)  $Y$  y  $X$  se dice que son indistinguibles si  $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1$ .

De esta definición surge inmediatamente el siguiente resultado.

**1.20 Proposición.** Indistinguible  $\Rightarrow$  versión del proceso  $\Rightarrow$  equivalentes.

**Demostración.** Como  $Y$  y  $X$  son indistinguibles se tiene que:

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1,$$

en particular para cada  $l \in T$  se tiene que  $X_l = Y_l$  son iguales con probabilidad 1, es decir  $Y$  es versión del proceso  $X$ . Ahora, si  $Y$  es versión del proceso  $X$ , entonces  $X_t = Y_t$  c.s. para cada  $t \in T$ , y con ello, para cada  $t_1, \dots, t_m \in T$ , con  $t_1 < \dots < t_m$  y  $m \in \mathbb{N}$ , se satisface que:

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \stackrel{\text{c.s.}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_m}),$$

lo que implica que son iguales en distribución, es decir, la familia de distribuciones finito dimensionales del proceso  $X$  coincide con la familia de distribuciones finito dimensionales del proceso  $Y$ . Por el Teorema (1.23), el cual se presenta más adelante, se concluye que los procesos  $X$  y  $Y$  tienen la misma distribución. Por lo tanto, los procesos  $X$  y  $Y$  son equivalentes. ■

A continuación se presentan un par de ejemplos que sirven para comprobar que el recíproco de las implicaciones de la Proposición (1.20) son falsas.

**1.21 Ejemplo.** Sea  $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda)$  un espacio de probabilidad, con  $\lambda$  la medida de Lebesgue,  $T = [0, 1]$  y el conjunto  $D$  que representa la diagonal del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Luego, se definen los procesos:

$$X_t(\omega) = 0, \quad \forall (t, \omega).$$

$$Y_t(\omega) = \mathbf{1}_D(t, \omega), \quad \forall (t, \omega).$$

Nótese que para  $t$  fija:

$$X_t(\omega) = 0, \forall \omega \in [0, 1].$$

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq t. \\ 1 & \text{si } \omega = t. \end{cases}$$

De aquí,  $X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall \omega \neq t$ , con lo cual se tiene que  $\lambda(X_t = Y_t) = 1$  para cada  $t$  fijo. Por lo tanto el proceso  $X$  es *versión del proceso*  $Y$ .

Por otro lado, el conjunto  $\{\omega \in [0, 1] : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \quad \forall t \in T\} = \emptyset$ , por lo cual  $X$  y  $Y$  no son indistinguibles.

**1.22 Ejemplo.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad,  $T$  el conjunto de tiempo y  $Z$  una variable aleatoria simétrica con distribución continua. Defínanse:

$$X_t(\omega) = Z(\omega), \quad \forall (t, \omega) \in T \times \Omega.$$

$$Y_t(\omega) = -Z(\omega), \quad \forall (t, \omega) \in T \times \Omega.$$

Es claro que los procesos  $X$  y  $Y$  son *equivalentes* ya que  $Z$  es una variable aleatoria simétrica, sin embargo, nótese que para cada  $t \in T$  se cumple que:

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(Z = -Z) = \mathbb{P}(Z = 0) = 0,$$

de donde la probabilidad es cero ya que  $Z$  tiene distribución continua, por lo cual  $X$  no es *versión del proceso*  $Y$ .

### La construcción de Kolmogorov.

Anteriormente se ha visto que a cada proceso estocástico  $X$ , con espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , conjunto de tiempo  $T$  y espacio de estados  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , se le puede extraer la familia de distribuciones finito dimensionales del proceso mediante:

$$\{\mathbb{P}_F\}_{F \subset T, F \text{ finito}} = \left\{ \mathbb{P} \circ [\varphi_X^F]^{-1} \right\}_{F \subset T, F \text{ finito}}.$$

Ahora se plantea el problema inverso, es decir, dada una familia de distribuciones finito dimensionales  $\{\mathbb{P}_F\}_{F \subset T, F \text{ finito}}$ , donde cada  $\mathbb{P}_F$  es una medida de probabilidad en  $\mathcal{B}^F$  que cumple con la condición de consistencia (1.4), se desea obtener un proceso estocástico  $X$  tal que sus distribuciones finito dimensionales coincidan con la familia de distribuciones finito dimensionales dadas a priori. El siguiente teorema es la solución a este problema inverso.

### 1.23 Teorema. (La construcción de Kolmogorov).

Supóngase que para cada  $F \subset T$ , con  $F$  finito, existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}_F$  sobre  $\mathcal{B}^F$  tal que cumple la condición de consistencia (1.4), entonces existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  sobre  $\mathcal{B}^T$  tal que

$$\mathbb{P}_F = \mathbb{P} \circ [\pi_F^{-1}], \quad \forall F \subset T, F \text{ finito.}$$

En particular, el proceso canónico  $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T, \mathbb{P}, \{\pi_t\}_{t \in T})$  satisface

$$\mathbb{P} \circ [\varphi_\pi^F]^{-1} = \mathbb{P} \circ \pi_F^{-1} = \mathbb{P}_F, \quad F \subset T, F \text{ finito,}$$

es decir, la familia de distribuciones finito dimensionales  $\{\mathbb{P}_F\}_{F \subset T, F \text{ finito}}$  dadas a priori, coincide con la familia de distribuciones finito dimensionales del proceso canónico  $\{\pi_t\}_{t \in T}$ .

En el caso del proceso  $X = \{X_t\}_{t \in T}$  definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , el proceso canónico  $\{\pi_t\}_{t \in T}$  asociado al proceso  $X$  esta dado por  $\pi_s(X) = X_s, \forall s \in T$ .

La demostración del teorema puede consultarse en [Tudor, 2002, pag. 28].

Una consecuencia inmediata del teorema de la construcción de Kolmogorov es que las distribuciones finito dimensionales de un proceso estocástico, con espacio de estados en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , determinan la distribución del proceso. Además, este teorema es de gran utilidad para construir procesos estocásticos, específicamente los procesos gaussianos, por lo cual se usará posteriormente para justificar la existencia de los procesos gaussianos.

### Regularidad de las trayectorias.

Dado un proceso estocástico  $Z$ , a menudo es necesaria una versión del proceso  $Z$  cuyas trayectorias tengan buenas propiedades de regularidad, como se vió en el ejemplo (1.21), donde se tiene un proceso discontinuo, dado por  $Y$ , y del cual se tiene una versión del proceso, denotado por  $X$ , el cual es continuo. En el siguiente teorema se presentarán las condiciones bajo las cuales se puede obtener una versión continua de un proceso estocástico.

**1.24 Definición.** Una función  $X : T \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es  $\gamma$ -Hölder, con  $0 < \gamma < 1$ , si existe una constante  $C_\gamma$  tal que

$$|X_t - X_s| \leq C_\gamma |t - s|^\gamma, \quad \forall s, t \in T.$$

### 1.25 Teorema. (Criterio de continuidad de Kolmogorov).

Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso estocástico que toma valores en  $\mathbb{R}$ . Supóngase que existen constantes  $a, b, c > 0$ , tales que  $\forall s, t \in T$  se cumple:

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^a) \leq c |t - s|^{1+b},$$

entonces, para cada  $0 < \gamma < \frac{b}{a}$ , existe una versión continua  $\{\tilde{X}_t\}_{t \in T}$  del proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$ , y una variable aleatoria positiva  $Y_\gamma$  que satisface:

- i)  $E(Y_\gamma^a) < \infty$ .
- ii)  $|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \leq Y_\gamma |t - s|^\gamma, \quad \forall s, t \in T$ .

Para la demostración del teorema puede consultar [Tudor, 2002, pag. 33].

### Algunas propiedades generales de las distribuciones de procesos.

#### 1.26 Definición.

- i) Un proceso  $X$  se dice que tiene incrementos independientes si para toda  $t_1, \dots, t_n \in T$ , con  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ , las variables aleatorias  $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ , son independientes.
- ii) Un proceso  $X$  se dice que es estacionario si para toda  $h > 0$  se tiene que  $\{X_{t+h}\}_{t \in T} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{X_t\}_{t \in T}$ , es decir para toda  $t_1, \dots, t_n \in T$  se tiene que:

$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}).$$

- iii) Un proceso  $X$  se dice que tiene incrementos estacionarios si las distribuciones de los incrementos,  $X_{t+h} - X_t$ , con  $t \in T$ , no dependen de  $h > 0$ .

**1.27 Ejemplo.** Sea  $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , el conjunto de tiempo, y sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una sucesión de variables aleatorias independientes. Considérese el proceso de sumas parciales  $S_n = \sum_{t=0}^n X_t$ , nótese que el proceso de sumas parciales  $\{S_n\}_{n \in T}$  tiene, evidentemente, incrementos independientes y, además si se supone que la sucesión  $\{X_t\}_{t \in T}$  consiste de variables aleatorias con la misma distribución, entonces el proceso  $\{S_n\}_{n \in T}$  tiene incrementos independientes y estacionarios.

#### 1.2.2. Propiedades de los procesos gaussianos

La definición de proceso gaussiano surge como resultado del Teorema de la construcción de Kolmogorov (1.23).

**1.28 Definición.** Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  es llamado proceso gaussiano si y sólo si todas las distribuciones finito dimensionales son distribuciones normales, es decir, si y sólo si el vector aleatorio  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  es gaussiano para toda  $t_1, \dots, t_n \in T$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

La siguiente proposición se sigue inmediatamente de la Definición (1.28) y de la Proposición (1.9).

**1.29 Proposición.** *El proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  se dice que es gaussiano si y sólo si todas las combinaciones lineales del proceso tienen distribución normal, es decir, si y sólo si la variable aleatoria:  $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$  es gaussiana para toda  $t_1, \dots, t_n \in T$ , y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .*

En la demostración de la Proposición (1.9) se prueba que la distribución de un vector gaussiano esta determinada por su vector de esperanza y su matriz de covarianzas. Por el Teorema de la construcción de Kolmogorov (1.23), se sabe que las distribuciones finito dimensionales de un proceso definen la distribución del mismo, por lo que, para el caso de los procesos gaussianos, se traduce a que la función esperanza del proceso gaussiano  $\{X_t\}_{t \in T}$ , dada por  $m_X(t) = E(X_t)$  y su operador de covarianza, dado por  $K_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$ , con  $s, t \in T$ , determinan la distribución del mismo. Más aún, en el siguiente teorema se prueba que dada la función esperanza  $m$  y un operador de covarianza  $K$ , existe un proceso gaussiano con la función esperanza  $m$  y con el operador de covarianza  $K$ , dados a priori.

**1.30 Teorema.** *Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso gaussiano, entonces su matriz de covarianza  $K$  es:*

i) *Simétrica.*

ii) *Positiva definida, es decir, para cada  $t_1, \dots, t_n \in T$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que:  $\sum_{i,j=1}^n a_i a_j K(t_i, t_j) \geq 0$ .*

*Recíprocamente, para cada función  $m : T \rightarrow \mathbb{R}$  y para cada función  $K : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , simétrica y positiva definida, existe un proceso gaussiano  $X$  tal que  $m_X \equiv m$  y  $K_X \equiv K$ .*

**Demostración.** La simetría de la matriz de covarianza  $K$  es evidente ya que:

$$K_X(t, s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t) = K_X(s, t).$$

Luego, para verificar que la matriz de covarianza  $K$  es positiva definida, se observa que para cada  $t_1, \dots, t_n \in T$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j K(t_i, t_j) = E \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i (X_{t_i} - E(X_{t_i})) \right)^2 \right] \geq 0.$$

Ahora, para demostrar el recíproco, se supondrá, sin pérdida de generalidad, que  $m \equiv 0$  y para cada  $F \subset T$ , con  $F$  finito, se denotará por  $K^F$  a la matriz de covarianza  $K$  restringida a  $F^2$ , y se define la medida de probabilidad  $\mathbb{P}_F$  como:

$$\mathbb{P}_F = \mathcal{N}(0, K^F),$$

es decir, es la distribución normal (de dimensión igual a la cardinalidad del conjunto  $F$ ), con esperanza  $m \equiv 0$  y covarianza dada por  $K^F$ .

Lo siguiente es verificar que la familia de distribuciones finito dimensionales,  $\{\mathbb{P}_F\}_{F \subset T, F \text{ finito}}$ , cumple la condición de consistencia (1.4), para luego, con el Teorema de la construcción de Kolmogorov (1.23), asegurar la existencia de un proceso estocástico con tal familia de distribuciones finito dimensionales que se ha definido.

Sean  $F_1$  y  $F_2$  subconjuntos finitos de  $T$  tales que  $F_1 \subset F_2$ . Luego, se define la proyección:

$$\tilde{\pi}_{F_1}^{F_2}(t) = (\tilde{t}_j)_{j \in F_2}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}^{F_1},$$

donde

$$\tilde{t}_j = \begin{cases} t_j & \text{si } j \in F_1. \\ 0 & \text{si } j \in F_2 \setminus F_1. \end{cases}$$

Un ejemplo que ilustra la proyección es el siguiente. Supóngase que  $F_1 = \{1, 4, 6\}$  y  $F_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , luego para  $t \in \mathbb{R}^{F_1}$  se tiene que  $t = (t_1, t_4, t_6)$ , para algunas  $t_1, t_4, t_6 \in \mathbb{R}$ . Así, la proyección queda de la siguiente manera:

$$\tilde{\pi}_{F_1}^{F_2} = (0, t_1, 0, 0, t_4, 0, t_6).$$

La función característica de la distribución  $\mathbb{P}_{F_1}$  esta dada por:

$$\phi_{\mathbb{P}_{F_1}}(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle K^{F_1} t, t \rangle \right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^{F_1},$$

donde  $\langle K^{F_1} t, t \rangle = t^\top K^{F_1} t$ . Además, nótese que:

$$\langle K^{F_2} \tilde{\pi}_{F_1}^{F_2}(t), \tilde{\pi}_{F_1}^{F_2}(t) \rangle = \langle K^{F_1} t, t \rangle,$$

de aquí, para cada  $t \in \mathbb{R}^{F_1}$ :

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{P}_{F_2} \circ [\tilde{\pi}_{F_1}^{F_2}]^{-1}}(t) &= \phi_{\mathbb{P}_{F_2}}(\tilde{\pi}_{F_1}^{F_2}(t)) \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle K^{F_2} \tilde{\pi}_{F_1}^{F_2}(t), \tilde{\pi}_{F_1}^{F_2}(t) \rangle \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle K^{F_1} t, t \rangle \right\} \\ &= \varphi_{\mathbb{P}_{F_1}}(t), \end{aligned}$$

y por la unicidad de la función característica se concluye que:

$$\mathbb{P}_{F_1} = \mathbb{P}_{F_2} \circ (\tilde{\pi}_{F_1}^{F_2})^{-1}, \quad \forall F_1 \subset F_2 \subset T, F_i \text{ finitos},$$

es decir, se cumple la condición de consistencia (1.4) con lo cual el Teorema de la construcción de Kolmogorov (1.23) asegura la existencia de una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$ , cuya familia de distribuciones finito dimensionales coincide con:

$$\{\mathbb{P}_F\}_{F \subset T, F \text{ finito}} = \{\mathcal{N}(0, K^F)\}_{F \subset T, F \text{ finito}}.$$



El Teorema del criterio de continuidad de Kolmogorov (1.25) brinda las condiciones con las cuales se puede obtener una versión continua y con buenas propiedades de regularidad de un proceso en general. Ahora se verá ése mismo resultado para el caso de los procesos gaussianos, es decir se presentarán las condiciones con las que se puede obtener una versión continua de un proceso gaussiano y cuya versión continua tenga mejores propiedades de regularidad de sus trayectorias que las del mismo proceso gaussiano.

**1.31 Teorema.** *Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso gaussiano centrado con función de covarianza  $K$ . Supóngase que existen constantes  $\alpha, c > 0$  tales que:*

$$K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) \leq c|t - s|^\alpha, \quad \forall s, t \in T, \quad (1.5)$$

entonces existe una versión continua  $\tilde{X}$  del proceso  $X$ , tal que para toda  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{2}$ , las trayectorias de  $\tilde{X}$  son  $\gamma$ -Hölderianas c.s..

**Demostración.** Por hipótesis se tiene que existen constantes  $\alpha, c > 0$  con las cuales:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t - X_s|^2) &= \mathbb{E}(X_t^2) + \mathbb{E}(X_s^2) - 2\mathbb{E}(X_s X_t) \\ &= K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) \\ &\leq c|t - s|^\alpha. \end{aligned}$$

Sin embargo, no se puede aplicar aún el Teorema del criterio de continuidad de Kolmogorov (1.25) ya que no se garantiza que  $\alpha > 1$ , por lo cual se usará el hecho de que si  $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  entonces  $\mathbb{E}(Y^{2m}) = \frac{2m!}{2^m m!} \sigma^{2m}$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t - X_s|^{2m}) &= \frac{2m!}{2^m m!} (\text{Var}(|X_t - X_s|))^m \\ &= \frac{2m!}{2^m m!} (\mathbb{E}(|X_t - X_s|^2))^m \\ &\leq \mathbb{E}^m(|X_t - X_s|^2) \\ &\leq c^m |t - s|^{m\alpha}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

De aquí, escogiendo  $m^* \in \mathbb{N}$  tal que  $m^* \alpha > 1$ , se denotará como  $b = m^* \alpha - 1$  y  $a = 2m^*$  con lo cual la desigualdad anterior (1.6) queda reescrita de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^a) \leq c^{m^*} |t - s|^{b+1}, \quad (1.7)$$

por lo tanto, para tal  $m^*$ , se satisfacen las condiciones del criterio de continuidad de Kolmogorov (1.25) y así existe una versión continua con trayectorias  $\gamma$ -Hölderianas c.s., para toda  $0 < \gamma < \frac{b}{a}$ .

Más aún, la desigualdad (1.7) se cumple para cualquier otra constante mayor que  $m^*$ , y notando que:

$$\frac{b}{a} = \frac{m\alpha - 1}{2m} \rightarrow \frac{\alpha}{2}, \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty,$$

se concluye que existe una versión continua cuyas trayectorias son  $\gamma$ -Hölderianas c.s., para toda  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{2}$ . ■

**1.32 Proposición.** *Un proceso gaussiano  $\{X_t\}_{t \in T}$  es estacionario si y sólo si su función esperanza  $m_X$  es constante y su operador de covarianza  $K$  cumple la igualdad  $K(s, t) = K(s + h, t + h)$ , para cada  $t, s \in T$  y toda  $h > 0$ .*

**Demostración.** Supóngase que  $\{X_t\}_{t \in T}$  es estacionario, luego, por la Definición (1.26), se cumple que  $\{X_{t+h}\}_{t \in T} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{X_t\}_{t \in T}$  para toda  $h > 0$ . De aquí se tiene que:

$$E(X_{t+h}) = E(X_t), \quad \forall t \in T \text{ y } \forall h > 0,$$

por consiguiente se concluye que la función esperanza  $m_X$  es constante.

Además, las distribuciones finito dimensionales del proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  coinciden con las distribuciones finito dimensionales del proceso  $\{X_{t+h}\}_{t \in T}$ , por lo que, para cada  $s, t \in T$  y toda  $h > 0$  se cumple que:

$$(X_s, X_t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_{s+h}, X_{t+h}),$$

y así  $K(t, s) = K(t + h, s + h)$ .

Más aún, nótese que de la igualdad  $K(t, s) = K(t + h, s + h)$  se obtiene que  $E(X_{t+h}X_{s+h}) = E(X_tX_s)$ , ya que la función esperanza  $m_X$  es constante, por lo cual, usando este hecho se sigue que:

$$\begin{aligned} K(s + t, s) &= \text{Cov}(X_{t+s}, X_s) \\ &= E(X_{t+s}X_s) - m_X^2(t) \\ &= E(X_tX_0) - m_X^2(t), \end{aligned}$$

por lo que la covarianza sólo depende del incremento dado por  $t$ . De hecho, poniendo  $K(t, 0) = K(t)$  y tomando  $s < t$ , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} K(t - s) &= E(X_{t-s}X_0) - m_X^2(t) \\ &= E(X_tX_s) - m_X^2(t) \\ &= K(t, s), \end{aligned}$$

es decir, el operador covarianza sólo depende de la diferencia entre  $s$  y  $t$ .

El recíproco de la demostración resulta inmediato por el hecho de que la función esperanza y el operador covarianza definen la distribución de un proceso gaussiano. ■

### 1.2.3. Ejemplos de Procesos Gaussianos

En esta sección se presentan algunos ejemplos de procesos gaussianos además de algunas de sus propiedades.

#### 1.33 Ejemplo. Movimiento Browniano.

El movimiento Browniano, denotado comúnmente por  $W = \{W_t\}_{t \in T}$ , es un proceso gaussiano cuyo operador de covarianza está definido por:

$$K_W(s, t) = \min\{s, t\}. \quad (1.8)$$

Este proceso es también conocido como proceso de Wiener y para facilitar cálculos se tratará con el movimiento Browniano centrado, es decir con función esperanza  $m_W \equiv 0$ , y el cual es llamado movimiento Browniano estándar. La siguiente proposición establece las principales propiedades del movimiento Browniano estándar.

#### 1.34 Proposición.

- i)  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ .
- ii)  $W_0 = 0$  c.s..
- iii) Para  $s \leq t$ , se cumple que  $W_t - W_s \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ .
- iv)  $W$  tiene incrementos estacionarios e independientes.
- v)  $W$  tiene trayectorias  $\gamma$ -Hölderianas continuas, para toda  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ .
- vi)  $W$  no es un proceso estacionario.

#### Demostración.

- i) Se debe a que  $W$  es un proceso gaussiano centrado y donde  $\text{Var}(W_t) = K_W(t, t) = t$ .
- ii) Por el inciso i), la distribución de la variable aleatoria  $W_0$  está dada por  $\mathcal{N}(0, 0)$  (lo cual corresponde a la distribución delta de Dirac concentrada en cero), así se tiene que  $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ .
- iii) Por la Proposición (1.29), las combinaciones lineales del proceso  $W$  tienen distribución normal, así, en particular, la combinación lineal  $W_t - W_s$  tiene distribución normal con:

$$\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0, \quad \text{y} \quad \text{Var}(W_t - W_s) = t - s,$$

por lo tanto  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ , es decir  $W_t - W_s \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_{t-s}$ .

- iv) Del inciso anterior iii) se deduce que  $W_{t+h} - W_h \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_t, \forall h > 0$  y  $t \in T$ , es decir, el movimiento Browniano tiene incrementos estacionarios. Por otro lado, para cualesquiera  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in T$ , con  $0 \leq s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ , el vector

$$(W_{t_2} - W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}),$$

es gaussiano, ya que todas las combinaciones lineales de sus coordenadas tiene distribución normal, lo cual se debe a que éstas mismas corresponden a combinaciones lineales del movimiento Browniano  $\{W_t\}_{t \in T}$  y por la Proposición (1.9) se concluye que el vector es gaussiano.

Ahora, para asegurar que las variables aleatorias  $W_{t_2} - W_{t_1}$  y  $W_{s_2} - W_{s_1}$  son independientes, por la Proposición (1.7), resta ver que la covarianza entre estas variables es cero. En efecto:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{s_2} - W_{s_1}) &= \text{Cov}(W_{t_2}, W_{s_2}) - \text{Cov}(W_{t_2}, W_{s_1}) - \text{Cov}(W_{t_1}, W_{s_2}) \\ &\quad + \text{Cov}(W_{t_1}, W_{s_1}) \\ &= t_1 - s_1 - t_1 + s_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto las variables aleatorias  $W_{t_2} - W_{t_1}$  y  $W_{s_2} - W_{s_1}$  son independientes y por la Definición (1.26) el movimiento Browniano  $W$  tiene incrementos independientes.

v) Sean  $s, t \in T$ , luego nótese que:

$$K_W(t, t) + K_W(s, s) - 2K_W(t, s) \leq |t - s|,$$

por lo que el Teorema (1.31) se cumple tomando  $c = 1$  y  $\alpha = 1$ , garantizando con ello la existencia de una versión continua del proceso  $W$  cuyas trayectorias son  $\gamma$ -Hölder continuas, para toda  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ .

vi) Sean  $s, t \in T$  y  $h > 0$ . La prueba es directa usando la Proposición (1.32) ya que se tiene que:

$$K_W(s + h, t + h) \neq K_W(s, t), \quad \forall h > 0.$$

■

### 1.35 Ejemplo. Puente Browniano.

En este caso se considera el conjunto de tiempo  $T = [0, 1]$ . El Puente Browniano, denotado simplemente por  $P$ , es un proceso gaussiano centrado con función de covarianza dada por:

$$K_P(t, s) = \min\{t, s\} - ts.$$

**1.36 Observación.** El Puente Browniano no es un proceso estacionario. Esta afirmación se muestra con el simple hecho de observar que, para  $s, t \in T$  y  $h > 0$ ,  $K_P(s + h, t + h) \neq K_P(s, t)$ , luego de la Proposición (1.32) se sigue la afirmación de esta observación.

Además, cabe notar que el Puente Browniano tiene una función de covarianza muy parecida a la del movimiento Browniano, por lo cual se pueden considerar procesos muy parecidos para valores muy pequeños de  $s$  y  $t$ . De hecho, en la siguiente proposición se establece la relación lineal que existe entre ambos procesos.

**1.37 Proposición.**

- i) El Puente Browniano  $P$  tiene incrementos estacionarios.  
 ii) El Puente Browniano  $P$  no tiene incrementos independientes.

**Demostración.**

i) Sea  $s \in [0, 1]$  y  $h > 0$  tal que  $s + h \in [0, 1]$ .

$$\text{Var}(P_{s+h} - P_s) = h - h^2,$$

así la distribución de la  $P_{s+h} - P_s$  sólo depende del tamaño de su incremento y por lo tanto el Puente Browniano tiene incrementos estacionarios.

ii) Sean  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in [0, 1]$  tales que  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ . De aquí:

$$\text{Cov}(P_{s_2} - P_{s_1}, P_{t_2} - P_{t_1}) = (s_2 - s_1)(1 - t_2) + (s_1 - s_2)(1 - t_1) > 0,$$

y por la Proposición (1.7) el proceso  $P$  no tiene incrementos independientes. ■

**1.38 Proposición.** El Puente Browniano  $P$  se puede definir directamente a partir de un movimiento Browniano estándar  $W$  haciendo:

$$P_t = W_t - tW_1.$$

**Demostración.** Primeramente se probará que el proceso  $\{W_t - tW_1\}_{t \in T}$  es un proceso gaussiano, y para ello se mostrará que las combinaciones lineales del proceso tienen distribución normal. Sean  $t_1, \dots, t_n \in T$ , luego obsérvese que:

$$\sum_{i=1}^n W_{t_i} - t_i W_1 = \sum_{i=1}^n W_{t_i} - W_1 \sum_{j=1}^n t_j = \sum_{i=2}^n W_{t_i} - W_1 \left( \sum_{j=1}^n t_j - 1 \right),$$

es decir, se observa que las combinaciones lineales del proceso  $\{W_t - tW_1\}_{t \in T}$  corresponden a combinaciones lineales del movimiento Browniano, por lo cual las combinaciones lineales del proceso  $\{W_t - tW_1\}_{t \in T}$  tienen distribución normal, concluyéndose de esta manera que el proceso  $\{W_t - tW_1\}_{t \in T}$  es gaussiano.

Luego, el proceso  $\{W_t - tW_1\}_{t \in T}$  es centrado ya que se está considerando a  $W$  como un movimiento Browniano estándar.

Por último, para  $s, t \in T$ , nótese que se cumple:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_t - tW_1, W_s - sW_1) &= \text{Cov}(W_t, W_s) - t\text{Cov}(W_1, W_s) - t\text{Cov}(W_s, W_1) \\ &\quad + ts\text{Cov}(W_1, W_1) \\ &= \min\{t, s\} - ts - ts + ts \\ &= \min\{t, s\} - ts. \end{aligned}$$

Por lo tanto el proceso  $\{W_t - tW_1\}_{t \in T}$  es un Puente Browniano. ■

La proposición anterior muestra que el Puente Browniano  $P$  es en realidad un movimiento Browniano  $W$  condicionado a tomar el valor cero al tiempo  $t = 1$  y por tal condición se pierde la propiedad de incrementos independientes y estacionarios que tiene el movimiento Browniano.

Recíprocamente, se puede construir un movimiento Browniano  $W$ , con conjunto de tiempo  $T = [0, 1]$ , a partir de un Puente Browniano  $P$  y con la ayuda de una variable aleatoria normal estándar  $X$ , como sigue:

$$W_t = P_t + tX, \quad t \in T.$$

### 1.39 Proposición.

- i) Definiendo  $\tilde{P}_t = P_{1-t}$ , el proceso  $\{\tilde{P}_t\}_{t \in T}$  es también un Puente Browniano.
- ii)  $\{P_t\}_{t \in T}$  tiene trayectorias  $\gamma$ -Hölder continuas c.s., para toda  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ .

### Demostración.

- i) Para cualesquiera  $t_1, \dots, t_n \in T$ , se tiene que:

$$\left(\tilde{P}_{t_1}, \dots, \tilde{P}_{t_n}\right) = (P_{1-t_1}, \dots, P_{1-t_n}),$$

así, las distribuciones finito dimensionales del proceso  $\{\tilde{P}_t\}_{t \in T}$  tienen distribución normal y por ello el proceso  $\tilde{P}$  es gaussiano centrado. Luego, para  $s, t \in T$ , con  $s < t$ , nótese que:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\tilde{P}_t, \tilde{P}_s\right) &= \text{Cov}\left(P_{1-t}, P_{1-s}\right) \\ &= \text{mín}\{1-t, 1-s\} - (1-t)(1-s) \\ &= (1-t) - (1-t) + s(1-t) \\ &= \text{mín}\{t-s\} - ts, \end{aligned}$$

por lo cual, la función de covarianza del proceso  $\tilde{P}$  coincide con la función de covarianza del Puente Browniano  $P$ , demostrando lo deseado.

ii) Para  $s, t \in T$  y suponiendo sin pérdida de generalidad que  $s < t$ , se verifica que:

$$\begin{aligned}
K_P(t, t) + K_P(s, s) - 2K_P(s, t) &= \mathbb{E}[(P_t - P_s)^2] \\
&= \mathbb{E}[(W_t - tW_1 - W_s + sW_1)^2] \\
&= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] - 2(t-s)\mathbb{E}[(W_t - W_s)W_1] \\
&\quad + (t-s)^2\mathbb{E}[W_1^2] \\
&= (t-s) - 2(t-s)^2 + (t-s)^2 \\
&= (t-s) - (t-s)^2 \\
&= (1 - (t-s))(t-s) \\
&\leq (t-s).
\end{aligned}$$

Por lo que el Teorema (1.31) se cumple para  $c = 1$  y  $\alpha = 1$  y así se determina la existencia de una versión continua del proceso  $P$  cuyas trayectorias son  $\gamma$ -Hölder continuas c.s., para toda  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ . ■

#### 1.40 Ejemplo. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Sea  $T = \mathbb{R}_+$  el conjunto de tiempo. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $U$ , de parámetro  $\beta > 0$  y  $C > 0$ , es un proceso gaussiano centrado cuyo operador de covarianza está dado por:

$$K_U(t, s) = Ce^{-\beta|t-s|}.$$

#### 1.41 Proposición.

- i) Para cada  $t \in T$  fija,  $U_t \sim \mathcal{N}(0, C)$ .
- ii)  $U$  es un proceso estacionario.
- iii) Para cada  $\lambda > 0$ , el proceso definido como:

$$e^{-\lambda t}W_{(e^{2\lambda t})}, \quad t \in T,$$

donde  $W$  es un movimiento Browniano estándar, es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

- iv) El proceso  $\{e^{-\lambda t}W_{(e^{2\lambda t})}\}_{t \in T}$  tiene incrementos estacionarios pero no independientes.

#### Demostración.

- i) Se debe a que el proceso  $U$  es gaussiano centrado y a que  $\text{Var}(U_t) = K_U(t, t) = C$ .
- ii)  $U$  es un proceso gaussiano centrado cuyo operador de covarianza sólo depende de la diferencia entre los tiempos, es decir, se cumple que  $K_U(s, t) = K_U(s+h, t+h)$ ,  $\forall h > 0$  y  $s, t \in T$ . Así, por la Proposición (1.32) se sigue que  $U$  es un proceso estacionario.

iii) Nótese que todas las combinaciones lineales del proceso  $\{e^{-\lambda t}W_{(e^{2\lambda t})}\}_{t \in T}$  corresponden a combinaciones lineales del movimiento Browniano  $W$ , así las combinaciones lineales tienen distribución normal y por la Proposición (1.29) se sigue que el proceso  $\{e^{-\lambda t}W_{(e^{2\lambda t})}\}_{t \in T}$  es gaussiano. Ahora, el proceso es gaussiano centrado ya que  $W$  es un proceso gaussiano centrado.

Sea  $\lambda > 0$  fija y  $s, t \in T$ , con  $s < t$ , de aquí:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(e^{-\lambda t}W_{e^{2\lambda t}}, e^{-\lambda s}W_{e^{2\lambda s}}) &= e^{-\lambda(t+s)}\text{Cov}(W_{e^{2\lambda t}}, W_{e^{2\lambda s}}) \\ &= e^{-\lambda(t+s)}e^{2\lambda s} \\ &= e^{-\lambda(t-s)}, \end{aligned}$$

por lo cual, el proceso  $\{e^{-\lambda t}W_{(e^{2\lambda t})}\}_{t \in T}$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck de parámetro  $\beta = \lambda$  y tamaño  $C = 1$ .

iv) Para  $h > 0$ , se verificará que la distribución de la variable aleatoria

$$e^{-\lambda(t+h)}W_{e^{2\lambda(t+h)}} - e^{-\lambda h}W_{e^{2\lambda h}}$$

no depende de  $h$ .

Por el inciso anterior *iii*), se sabe que la variable aleatoria

$$e^{-\lambda(t+h)}W_{e^{2\lambda(t+h)}} - e^{-\lambda h}W_{e^{2\lambda h}}$$

tiene distribución normal con media cero. Ahora se calculará su varianza.

$$\begin{aligned} \text{Var}(e^{-\lambda(t+h)}W_{e^{2\lambda(t+h)}} - e^{-\lambda h}W_{e^{2\lambda h}}) &= \text{Var}(e^{-\lambda(t+h)}W_{e^{2\lambda(t+h)}}) + \text{Var}(e^{-\lambda h}W_{e^{2\lambda h}}) \\ &\quad - 2\text{Cov}(e^{-\lambda(t+h)}W_{e^{2\lambda(t+h)}}, e^{-\lambda h}W_{e^{2\lambda h}}) \\ &= 2 - 2e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

por lo cual, la distribución de la variable aleatoria  $e^{-\lambda(t+h)}W_{e^{2\lambda(t+h)}} - e^{-\lambda h}W_{e^{2\lambda h}}$  no depende de  $h$ , determinando así que el proceso  $\{e^{-\lambda t}W_{(e^{2\lambda t})}\}_{t \in T}$  tiene incrementos estacionarios.

Ahora se mostrará que el proceso  $\{e^{-\lambda t}W_{(e^{2\lambda t})}\}_{t \in T}$  no tiene incrementos independientes. Para ello, sean  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in T$  tales que  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ , luego el vector:

$$(e^{-\lambda s_2}W_{e^{2\lambda s_2}} - e^{-\lambda s_1}W_{e^{2\lambda s_1}}, e^{-\lambda t_2}W_{e^{2\lambda t_2}} - e^{-\lambda t_1}W_{e^{2\lambda t_1}})$$

se sabe que es gaussiano por la Proposición (1.9), y además se tiene que:

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(e^{-\lambda s_2}W_{e^{2\lambda s_2}} - e^{-\lambda s_1}W_{e^{2\lambda s_1}}, e^{-\lambda t_2}W_{e^{2\lambda t_2}} - e^{-\lambda t_1}W_{e^{2\lambda t_1}}) \\ &= \text{Cov}(e^{-\lambda s_2}W_{e^{2\lambda s_2}}, e^{-\lambda t_2}W_{e^{2\lambda t_2}}) - \text{Cov}(e^{-\lambda s_2}W_{e^{2\lambda s_2}}, e^{-\lambda t_1}W_{e^{2\lambda t_1}}) \\ &\quad - \text{Cov}(e^{-\lambda s_1}W_{e^{2\lambda s_1}}, e^{-\lambda t_2}W_{e^{2\lambda t_2}}) + \text{Cov}(e^{-\lambda s_1}W_{e^{2\lambda s_1}}, e^{-\lambda t_1}W_{e^{2\lambda t_1}}) \\ &= e^{-\lambda(t_2-s_2)} - e^{-\lambda(t_1-s_2)} - e^{-\lambda(t_2-s_1)} + e^{-\lambda(t_1-s_1)} \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

así, las variables aleatorias  $e^{-\lambda s_2} W_{e^{2\lambda s_2}} - e^{-\lambda s_1} W_{e^{2\lambda s_1}}$  y  $e^{-\lambda t_2} W_{e^{2\lambda t_2}} - e^{-\lambda t_1} W_{e^{2\lambda t_1}}$  no son independientes por la Proposición (1.7). ■

#### 1.42 Ejemplo. Movimiento Browniano Fraccionario estándar.

El movimiento Browniano fraccionario estándar, denotado por  $B^H$ , es un proceso gaussiano centrado cuyo operador de covarianza esta dado por:

$$K_H(t, s) = \frac{1}{2} \left( |s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H} \right), \quad t, s \in T = \mathbb{R}_+. \quad (1.9)$$

donde  $H \in (0, 1)$  y  $H$  es llamado el coeficiente de Hurst.

#### 1.43 Observación.

- i) Para  $H = \frac{1}{2}$ , el movimiento Browniano fraccionario  $B^H$  es el movimiento Browniano estándar  $W$ . Esto se verifica directamente a partir de la función de covarianza  $K_H$  del movimiento Browniano fraccionario estándar. Sean  $s, t \in T$ , luego sustituyendo  $H = \frac{1}{2}$  en la ecuación (1.9), queda:

$$K_{\frac{1}{2}}(t, s) = \frac{1}{2} (s + t - |t - s|) = \min \{s, t\},$$

por lo cual coincide con la función de covarianza del movimiento Browniano (1.8).

- ii) Sean  $s, t \in T$ , y  $h > 0$ , luego:

$$\begin{aligned} K_H(s + h, t + h) &= \frac{1}{2} \left\{ (t + h)^{2H} + (s + h)^{2H} - |t - s|^{2H} \right\} \\ &\neq \frac{1}{2} \left\{ t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right\} \\ &= K_H(s, t), \end{aligned}$$

de aquí, por la Proposición (1.32), resulta que el movimiento Browniano fraccionario no es un proceso estacionario.

#### 1.44 Proposición.

- i) El proceso  $B^H$  tiene incrementos estacionarios.  
ii) Los incrementos del proceso  $B^H$  son independientes sólo cuando  $H = \frac{1}{2}$ , es decir sólo en el caso que sea el movimiento Browniano.

#### Demostración.

- i) Se verificará que la distribución de la variable aleatoria  $B_{t+h}^H - B_h^H$  no depende de  $h > 0$ . De antemando se sabe que tiene distribución normal con media cero, por lo cual se calculará simplemente su varianza.

$$\begin{aligned} \text{Var} (B_{t+h}^H - B_h^H) &= |t + h|^{2H} + h^{2H} - 2K_H(t + h, h) \\ &= |t + h|^{2H} + h^{2H} - \left\{ |t + h|^{2H} + h^{2H} - t^{2H} \right\} \\ &= t^{2H}. \end{aligned}$$

Como la varianza no depende de  $h$  entonces se concluye que el movimiento Browniano fraccionario tiene incrementos estacionarios.

- ii) Sean  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in T$ , tales que  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ . Se probará que las variables aleatorias  $B_{s_2}^H - B_{s_1}^H$  y  $B_{t_2}^H - B_{t_1}^H$  son independientes. Para ello, nótese primeramente que el vector formado por las variables:

$$(B_{s_2}^H - B_{s_1}^H, B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)$$

es un vector gaussiano por la Proposición (1.9). Ahora se hará uso de la Proposición (1.7) para determinar si las variables son independientes y por lo tal, resta calcular la covarianza entre las variables.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_{s_2}^H - B_{s_1}^H, B_{t_2}^H - B_{t_1}^H) &= \text{Cov}(B_{s_2}^H, B_{t_2}^H) - \text{Cov}(B_{s_2}^H, B_{t_1}^H) - \text{Cov}(B_{s_1}^H, B_{t_2}^H) \\ &\quad + \text{Cov}(B_{s_1}^H, B_{t_1}^H) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (t_2 - s_1)^{2H} + (t_1 - s_2)^{2H} - (t_2 - s_2)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} \right], \end{aligned}$$

lo cual es cero si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ , es decir son independientes si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ . ■

#### 1.45 Ejemplo. Movimiento Browniano Subfraccionario.

El Movimiento Browniano Subfraccionario  $SB^H$  es un proceso gaussiano centrado con función de covarianza:

$$K_H^{SB}(s, t) = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2} \left[ (s + t)^{2H} + |s - t|^{2H} \right], \quad s, t \in T = \mathbb{R}_+, \quad (1.10)$$

donde  $H \in (0, 1)$ .

#### 1.46 Observación.

- i) Para  $H = \frac{1}{2}$ , el movimiento Browniano subfraccionario  $SB^{\frac{1}{2}}$  es el movimiento Browniano estándar. Esto se verifica sustituyendo  $H = \frac{1}{2}$  en la ecuación de la función de covarianza (1.10).

$$\begin{aligned} K_{\frac{1}{2}}^{SB}(s, t) &= s + t - \frac{1}{2} [(s + t) + |s - t|] \\ &= \frac{1}{2} [t + s - |t - s|] \\ &= \min \{s, t\}, \end{aligned}$$

por lo tanto la función de covarianza  $K_{\frac{1}{2}}^{SB}$  coincide con la función de covarianza del movimiento Browniano (1.8).

- ii) El movimiento Browniano subfraccionario  $SB^H$  no es estacionario. La prueba se sigue al observar que, para  $s, t \in T$ , y toda  $h > 0$ , la covarianza  $K_H^{SB}(s + h, t + h)$  tiene la siguiente forma:

$$K_H^{SB}(s + h, t + h) = (s + h)^{2H} + (t + h)^{2H} - \frac{1}{2} \left[ (s + t + 2h)^{2H} + |t - s|^{2H} \right],$$

es decir al observar que  $K_H^{SB}(s+h, t+h)$  depende de  $h$ , por lo cual es diferente al valor de  $K_H^{SB}(s, t)$ . Luego, por la Proposición (1.32), se concluye que el proceso no es estacionario.

**1.47 Proposición.** *El movimiento Browniano Subfraccionario  $SB^H$  sólo tiene incrementos estacionarios e independientes cuando  $H = \frac{1}{2}$ .*

**Demostración.** Sea  $h > 0$ . Primeramente se probará que la distribución de la variable aleatoria  $SB_{t+h}^H - SB_h^H$  no depende de  $h$  sólo cuando  $H = \frac{1}{2}$ . De entrada se sabe que la variable aleatoria tiene distribución normal con media cero, por lo cual basta verificar la forma de su varianza.

$$\begin{aligned} \text{Var}(SB_{t+h}^H - SB_h^H) &= \text{Var}(SB_{t+h}^H) + \text{Var}(SB_h^H) - 2\text{Cov}(SB_{t+h}^H, SB_h^H) \\ &= 2(t+h)^{2H} - \frac{1}{2}(2(t+h))^{2H} + 2h^{2H} - \frac{1}{2}(2h)^{2H} \\ &\quad - 2\left\{(t+h)^{2H} + h^{2H} - \left[(t+2h)^{2H} + t^{2H}\right]\right\} \\ &= -\frac{1}{2}(2(t+h))^{2H} - \frac{1}{2}(2h)^{2H} + (t+2h)^{2H} + t^{2H}, \end{aligned}$$

sin embargo, sólo cuando  $H = \frac{1}{2}$  se tiene que  $\text{Var}(SB_{t+h}^{\frac{1}{2}} - SB_h^{\frac{1}{2}}) = t$ , por lo tanto, el movimiento Browniano Subfraccionario tiene incrementos estacionarios si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ , es decir, en el caso que sea un movimiento Browniano estándar.

Ahora, se probará que el proceso  $SB^H$  tiene incrementos independientes sólo cuando  $H = \frac{1}{2}$ .

Sean  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in T$ , tales que  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ . A estas alturas se sabe de antemano que el vector:

$$(SB_{s_2}^H - SB_{s_1}^H, SB_{t_2}^H - SB_{t_1}^H)$$

es gaussiano por la Proposición (1.9), por lo cual resta ver en qué casos la covarianza entre las variables aleatorias  $SB_{s_2}^H - SB_{s_1}^H$  y  $SB_{t_2}^H - SB_{t_1}^H$  es cero.

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(SB_{s_2}^H - SB_{s_1}^H, SB_{t_2}^H - SB_{t_1}^H) \\ &= \frac{1}{2}\left\{(t_2 - s_2)^{2H} - (t_1 - s_2)^{2H} - (t_2 - s_1)^{2H} + (t_1 - s_1)^{2H}\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{(t_2 + s_2)^{2H} - (t_1 + s_2)^{2H} - (t_2 + s_1)^{2H} + (t_1 + s_1)^{2H}\right\}, \end{aligned}$$

lo cual es cero sólo en el caso cuando  $H = \frac{1}{2}$ . Por último, por la Proposición (1.7) se concluye que las variables  $SB_{s_2}^H - SB_{s_1}^H$  y  $SB_{t_2}^H - SB_{t_1}^H$  son independientes si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ . ■

En el artículo [Norvaisa, 2011] se encuentra más información del movimiento Browniano Subfraccionario.

**1.48 Ejemplo. Movimiento Browniano Bifraccionario.**

El movimiento Browniano Bifraccionario, el cual se denotará como  $B^{H,K}$ , fué presentado por Christian Húndré y José Villa en el artículo [Húndré, Villa, 2003]. Este proceso es gaussiano centrado con función de covarianza dada por:

$$K_{H,K}(s, t) = \frac{1}{2^K} \left\{ (t^{2H} + s^{2H})^K - |t - s|^{2HK} \right\}, \quad s, t \in T = \mathbb{R}_+, \quad (1.11)$$

donde  $H \in (0, 1)$  y  $K \in (0, 1]$ .

**1.49 Observación.**

- i) Cuando  $K = 1$ , el movimiento Browniano Bifraccionario  $B^{H,K}$  es el movimiento Browniano fraccionario. Esto resulta evidente al sustituir el valor  $K = 1$  en la función de covarianza (1.11), ya que corresponde a la función de covarianza del movimiento Browniano fraccionario (1.9). Además, de este caso se deduce que cuando  $H = \frac{1}{2}$  y  $K = 1$  entonces el movimiento Browniano Bifraccionario  $B^{H,K}$  es el movimiento Browniano estándar.
- ii) El movimiento Browniano Bifraccionario  $B^{H,K}$  no es estacionario. Para ver esto sean  $s, t \in T$  y  $h > 0$ , luego nótese que:

$$K_{H,K}(s + h, t + h) = \frac{1}{2^K} \left\{ \left( (t + h)^{2H} + (s + h)^{2H} \right)^K - |t - s|^{2HK} \right\},$$

es decir nótese que el valor de  $K_{H,K}(s + h, t + h)$  depende de  $h$  y con ello no es igual al valor de  $K_{H,K}(s, t)$ . Por esta observación, la Proposición (1.32) afirma que el movimiento Browniano bifraccionario no es estacionario.

**1.50 Proposición.**

- i) *El movimiento Browniano Bifraccionario  $B^{H,K}$  no tiene incrementos estacionarios cuando  $K \neq 1$ , es decir, tiene incrementos estacionarios sólo cuando es un movimiento Browniano fraccionario.*
- ii) *El movimiento Browniano Bifraccionario  $B^{H,K}$  no tiene incrementos independientes cuando  $K \neq 1$  o cuando  $H \neq \frac{1}{2}$ , es decir tiene incrementos independientes sólo cuando es un movimiento Browniano estándar.*

**Demostración.**

- i) Sea  $h > 0$ . Se mostrará que la distribución de la variable aleatoria  $B_{t+h}^{H,K} - B_h^{H,K}$  depende de  $h$  salvo en el caso  $K = 1$ . Para probarlo se calculará simplemente su varianza ya que se sabe que es una variable aleatoria normal con media cero.

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( B_{t+h}^{H,K} - B_h^{H,K} \right) &= (t + h)^{2HK} + h^{2HK} - 2K_{H,K}(t + h, h) \\ &= (t + h)^{2HK} + h^{2HK} - 2^{1-K} \left\{ \left( (t + h)^{2H} + h^{2H} \right)^K - t^{2HK} \right\}, \end{aligned}$$

así obsérvese que sólo cuando  $K = 1$  se tiene que  $\text{Var}\left(B_{t+h}^{H,1} - B_h^{H,1}\right) = t^{2H}$ , es decir sólo en este caso no depende de  $h$ , por lo tal, el proceso tiene incrementos estacionarios si y sólo si  $K = 1$ .

ii) Sean  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in T$ , tales que  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ . Luego, el vector aleatorio

$$\left(B_{s_2}^{H,K} - B_{s_1}^{H,K}, B_{t_2}^{H,K} - B_{t_1}^{H,K}\right)$$

es gaussiano por la Proposición (1.9). Enseguida se analizará en qué casos la covarianza entre las variables aleatorias es cero.

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(B_{s_2}^{H,K} - B_{s_1}^{H,K}, B_{t_2}^{H,K} - B_{t_1}^{H,K}\right) &= K_{H,K}(s_2, t_2) - K_{H,K}(s_2, t_1) - K_{H,K}(s_1, t_2) \\ &\quad + K_{H,K}(s_1, t_1) \\ &= \frac{1}{2^K} \left\{ (s_2^{2H} + t_2^{2H})^K - (t_2 - s_2)^{2HK} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2^K} \left\{ (s_2^{2H} + t_1^{2H})^K - (t_1 - s_2)^{2HK} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2^K} \left\{ (s_1^{2H} + t_2^{2H})^K - (t_2 - s_1)^{2HK} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2^K} \left\{ (s_1^{2H} + t_1^{2H})^K - (t_1 - s_1)^{2HK} \right\}, \end{aligned}$$

de aquí, si  $K = 1$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(B_{s_2}^{H,K} - B_{s_1}^{H,K}, B_{t_2}^{H,K} - B_{t_1}^{H,K}\right) \\ = \frac{1}{2} \left\{ -(t_2 - s_2)^{2H} + (t_1 - s_2)^{2H} + (t_2 - s_1)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} \right\}, \end{aligned}$$

y si  $H = \frac{1}{2}$  resulta que:

$$\text{Cov}\left(B_{s_2}^{H,K} - B_{s_1}^{H,K}, B_{t_2}^{H,K} - B_{t_1}^{H,K}\right) = 0,$$

por lo tanto, la covarianza entre las variables aleatorias  $B_{s_2}^{H,K} - B_{s_1}^{H,K}$  y  $B_{t_2}^{H,K} - B_{t_1}^{H,K}$  es cero si y sólo si  $K = 1$  y  $H = \frac{1}{2}$ , y por la Proposición (1.7), se concluye que las variables son independientes si y sólo si  $K = 1$  y  $H = \frac{1}{2}$ . ■

El movimiento Browniano bifraccionario también se puede consultar en el artículo [Norvaisa, 2011].

### 1.51 Ejemplo. Movimiento Browniano Fraccionario Mezclado.

El movimiento Browniano fraccionario mezclado  $M^H(a, b)$ , de parámetros  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $H \in (0, 1)$ , es un proceso gaussiano centrado definido de la siguiente manera:

$$M_t^H(a, b) := aW_t + bB_t^H, \quad t \in T = \mathbb{R}_+.$$

donde  $\{W_t\}_{t \in T}$  es un movimiento Browniano estándar y  $\{B_t^H\}_{t \in T}$  es un movimiento Browniano fraccionario independiente del proceso  $W$ . (Ver [Zili, 2006]).

**1.52 Observación.**

i) Para  $s, t \in T$ , se tiene que  $\text{Cov}(W_s, B_t^H) = 0$ .

Obsérvese que el vector  $(W_s, B_t^H)$  es gaussiano ya que las combinaciones lineales del vector  $(W_s, B_t^H)$  corresponden a combinaciones lineales del proceso  $M^H(a, b)$ , el cual es gaussiano, y por lo tanto tienen distribución normal. Luego, por la Proposición (1.9) se prueba la afirmación.

Ahora, tomando en cuenta que los procesos  $W$  y  $B^H$  son independientes, se tiene que las variables aleatorias  $W_s$  y  $B_t^H$  son independientes, por lo tanto, de la Proposición (1.7) se sigue que  $\text{Cov}(W_s, B_t^H) = 0$ .

ii) Para  $s, t \in T$ , la covarianza del proceso  $M^H(a, b)$  esta dada por:

$$\text{Cov}(M_t^H(a, b), M_s^H(a, b)) = a^2(t \wedge s) + \frac{b^2}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad (1.12)$$

donde  $(t \wedge s) = \frac{1}{2}(t + s - |t - s|)$ .

Esto se verifica mediante el cálculo directo de la covarianza como se muestra:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(M_t^H(a, b), M_s^H(a, b)) &= \text{Cov}(aW_t + bB_t^H, aW_s + bB_s^H) \\ &= \text{Cov}(aW_t, aW_s) + \text{Cov}(aW_t, bB_s^H) + \text{Cov}(aB_t^H, aW_s) \\ &\quad + \text{Cov}(aB_t^H, bB_s^H) \\ &= a^2(t \wedge s) + \frac{b^2}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H}), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que  $\text{Cov}(W_t, B_s^H) = 0 = \text{Cov}(B_t^H, W_s)$ , por la observación i).

iii) Observando la forma de la covarianza del proceso, dada en la ecuación (1.12), y haciendo uso de la Proposición (1.32) se llega a que el movimiento Browniano fraccionario mezclado no es un proceso estacionario.

**1.53 Proposición.**

i) El proceso  $M^H(a, b)$  tiene incrementos estacionarios.

ii) El proceso  $M^H(a, b)$  no tiene incrementos independientes salvo cuando  $H = \frac{1}{2}$ .

**Demostración.**

i) Sea  $h > 0$ . Para ver que la distribución de la variable aleatoria  $M_{t+h}^H(a, b) - M_t^H(a, b)$  no depende de  $h$ , sólo basta con probar que su varianza no depende de

$h$ , ya que se sabe que tiene distribución normal con media cero.

$$\begin{aligned}
\text{Var} (M_{t+h}^H (a, b) - M_h^H (a, b)) &= \text{Var} (M_{t+h}^H (a, b)) + \text{Var} (M_h^H (a, b)) \\
&\quad - 2\text{Cov} (M_{t+h}^H (a, b), M_h^H (a, b)) \\
&= a^2 (t+h) + b^2 (t+h)^{2H} + a^2 h + b^2 h^{2H} \\
&\quad - 2 \left( a^2 h + \frac{b^2}{2} (t+h)^{2H} + \frac{b^2}{2} h^{2H} - \frac{b^2}{2} t^{2H} \right) \\
&= a^2 t + b^2 t^{2H},
\end{aligned}$$

por lo tanto, el proceso  $M^H (a, b)$  tiene incrementos estacionarios.

ii) Sean  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in T$ , tales que  $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ . Para determinar si el proceso  $M^H (a, b)$  tiene incrementos independientes se analizará la covarianza entre las variables:

$$M_{s_2}^H (a, b) - M_{s_1}^H (a, b) \quad \text{y} \quad M_{t_2}^H (a, b) - M_{t_1}^H (a, b),$$

como sigue.

$$\begin{aligned}
&\text{Cov} (M_{s_2}^H (a, b) - M_{s_1}^H (a, b), M_{t_2}^H (a, b) - M_{t_1}^H (a, b)) \\
&= \text{Cov} (M_{s_2}^H (a, b), M_{t_2}^H (a, b)) - \text{Cov} (M_{s_2}^H (a, b), M_{t_1}^H (a, b)) \\
&\quad - \text{Cov} (M_{s_1}^H (a, b), M_{t_2}^H (a, b)) + \text{Cov} (M_{s_1}^H (a, b), M_{t_1}^H (a, b)) \\
&= \frac{b^2}{2} \left[ (t_1 - s_2)^{2H} + (t_2 - s_1)^{2H} - (t_2 - s_2)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} \right],
\end{aligned}$$

de aquí, obsérvese que sólo en el caso  $H = \frac{1}{2}$  se tiene que:

$$\text{Cov} (M_{s_2}^H (a, b) - M_{s_1}^H (a, b), M_{t_2}^H (a, b) - M_{t_1}^H (a, b)) = 0,$$

luego, aplicando la Proposición (1.7), se concluye que las variables aleatorias

$M_{s_2}^H (a, b) - M_{s_1}^H (a, b)$  y  $M_{t_2}^H (a, b) - M_{t_1}^H (a, b)$  son independientes si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ .  
Por lo tanto, el proceso  $M^H (a, b)$  tiene incrementos independientes si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ . ■

# Capítulo 2

## Movimiento Browniano Fraccionario

Este capítulo es la parte central de la tesis ya que aquí se presentará la definición del movimiento Browniano fraccionario más general y algunas equivalencias del mismo, se examinarán las propiedades básicas del proceso y se culminará dando una buena idea de la manera en la que fué introducido su estudio históricamente.

Los procesos estocásticos que se consideran en este capítulo estan definidos en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , con conjunto de tiempo  $T = \mathbb{R}_+$ , a menos que se especifique lo contrario.

### 2.1. Introducción

La principal propiedad del movimiento Browniano fraccionario es que es un proceso autosimilar y por tal razón en esta introducción se estudiarán algunos resultados sobre procesos autosimilares con los cuales se podrá entender la importancia de esta propiedad en los procesos gaussianos específicamente. Además se darán otros ejemplos de procesos gaussianos autosimilares aclarando con ello la existencia de otros procesos de este tipo.

#### 2.1.1. Procesos Autosimilares

Los procesos autosimilares son invariantes en distribución bajo cierta escala de tiempo y espacio. Son importantes en la modelación debido a que la propiedad de autosimilaridad aparece en fenómenos de la geofísica, hidrología, turbulencia, economía, etc..

Históricamente, este fenómeno de autosimilaridad fué observado por primera vez en las inundaciones del río Nilo en los años 622-1284. Las observaciones fueron formalizadas por Tousson en el artículo [Tousson, 1925], donde muestra que el nivel de

acumulación del río Nilo tiene cierta “persistencia” (es decir el nivel de acumulación del río Nilo se mantiene durante cierto tiempo). Posteriormente, estas observaciones fueron consideradas por el hidrólogo británico Hurst en el artículo [Hurst, 1951], para predecir el nivel en el que se inundaba el río Nilo, obteniendo buenas aproximaciones, por lo cual las estableció como normas estadísticas en hidrología con el índice de autosimilaridad de los procesos subyacentes. Por esta razón a tal índice de autosimilaridad también se le conoce como coeficiente de Hurst [Taqqu, 2013].

A continuación se presenta la definición formal de los procesos autosimilares.

**2.1 Definición.** *Un proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  se dice que es autosimilar de índice  $H > 0$ , si para cada  $a > 0$ , los procesos  $\{X_{at}\}_{t \in T}$  y  $\{a^H X_t\}_{t \in T}$  tienen la misma distribución, o equivalentemente, los procesos  $\{X_t\}_{t \in T}$  y  $\{a^{-H} X_{at}\}_{t \in T}$  tienen la misma distribución.*

**2.2 Observación.** Un detalle importante que se destaca a partir de la definición es que un proceso autosimilar  $\{X_t\}_{t \in T}$  no puede ser estacionario. La justificación es la siguiente: obsérvese que para cada  $a > 0$ :

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E(X_{at}^2) \quad \text{por la estacionariedad,} \\ &= a^{2H} E(X_t^2) \quad \text{por la autosimilaridad,} \end{aligned}$$

de aquí se sigue que  $E(X_t^2) = 0$ , es decir  $X_t = 0$  c.s., y por lo cual el proceso es nulo, siendo esto una contradicción. Por lo tanto, un proceso autosimilar no puede ser estacionario.

Sin embargo, la siguiente proposición establece una relación entre los procesos autosimilares y los procesos estacionarios.

**2.3 Proposición.** *Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso autosimilar de índice  $H$ , entonces el proceso definido por:*

$$Y_t = \exp\{-tH\} X_{e^t}, \quad t \in T,$$

*es un proceso estacionario.*

*Recíprocamente, si  $\{Y_t\}_{t \in T}$  es estacionario entonces  $X_t = t^H Y_{\log t}$ , con  $t \in T$ , es un proceso autosimilar de índice  $H$ .*

**Demostración.** Supóngase primeramente que  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un proceso autosimilar de índice  $H$ , entonces se probará que el proceso  $\{Y_t\}_{t \in T}$  es estacionario. Para ello, sea  $h > 0$  y  $a = e^h$ , así:

$$\begin{aligned} Y_{t+h} &= e^{-(t+h)H} X_{e^{t+h}} \\ &= e^{-hH} e^{-tH} X_{e^h e^t} \\ &= e^{-tH} a^{-H} X_{ae^t} \quad \text{sustituyendo } e^h \text{ por } a, \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} e^{-tH} X_{e^t} \quad \text{por la definición de autosimilaridad (2.1),} \\ &= Y_t, \end{aligned}$$

por lo cual el proceso  $\{Y_t\}_{t \in T}$  es estacionario.

Para probar el recíproco, sea  $a > 0$  y, en este caso, se tomará  $h = \log(a)$ , así:

$$\begin{aligned} X_t &= t^H Y_{\log t} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} t^H Y_{h+\log t} \quad \text{por la estacionariedad del proceso } Y, \\ &= t^H Y_{\log(a)+\log(t)} \quad \text{sustituyendo } h \text{ por } \log(a), \\ &= t^H Y_{\log at} \\ &= a^{-H} X_{at}, \end{aligned}$$

por lo tanto el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es autosimilar de índice  $H$ . ■

Un ejemplo de esta relación es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (1.40), el cual es un proceso estacionario asociado al movimiento Browniano fraccionario con índice de autosimilaridad  $H = \frac{1}{2}$ , es decir, asociado al movimiento Browniano estándar.

**2.4 Proposición.** *Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso autosimilar de índice  $H$ , con incrementos estacionarios y tal que  $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$ . Si, además, para alguna  $\gamma > 0$  se tiene que  $E(|X_1|^\gamma) < \infty$ , entonces se siguen las siguientes implicaciones:*

- i) *Si  $0 < \gamma < 1$  se tiene que  $0 < H < \frac{1}{\gamma}$ .*
- ii) *Si  $\gamma \geq 1$  se cumple que  $0 < H \leq 1$ .*

**Demostración.**

i) Sea  $\gamma \in (0, 1)$ . Para la demostración de este inciso se usarán las siguientes desigualdades:

$$\text{Para } a \geq 0, b \geq 0 \text{ se cumple que } (a + b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma. \quad (2.1)$$

$$\text{Para } a > 0, b > 0 \text{ se cumple que } (a + b)^\gamma < a^\gamma + b^\gamma. \quad (2.2)$$

Antes de usar las desigualdades anteriores primero nótese lo siguiente:

$$|X_2|^\gamma = |(X_2 - X_1) + X_1|^\gamma \leq ||X_2 - X_1| + |X_1||^\gamma \quad (2.3)$$

de aquí, tomando  $a = |X_2 - X_1|$  y  $b = |X_1|$  en la desigualdad (2.1) se obtiene que:

$$||X_2 - X_1| + |X_1||^\gamma \leq |X_2 - X_1|^\gamma + |X_1|^\gamma. \quad (2.4)$$

Juntando las desigualdades (2.3) y (2.4) se llega a la desigualdad:

$$|X_2|^\gamma \leq |X_2 - X_1|^\gamma + |X_1|^\gamma, \quad (2.5)$$

y, además, por la desigualdad (2.2), esta última desigualdad (2.5) se vuelve estricta en el conjunto  $A = \{X_1 \neq 0, X_2 - X_1 \neq 0\}$ .

Ahora, la hipótesis de que el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  tiene incrementos estacionarios implica que  $X_2 - X_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1$  por lo cual el conjunto  $A$  tiene la misma probabilidad que el conjunto  $\{X_1 \neq 0\}$ , es decir  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_1 \neq 0)$ , donde  $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$  por hipótesis. Con estas deducciones se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_2|^\gamma &= \int_{\Omega} |X_2|^\gamma d\mathbb{P} = \int_A |X_2|^\gamma d\mathbb{P} + \int_{A^c} |X_2|^\gamma d\mathbb{P} \\ &< \int_A (|X_2 - X_1|^\gamma + |X_1|^\gamma) d\mathbb{P} + \int_{A^c} |X_2|^\gamma d\mathbb{P} \\ &\leq \int_A (|X_2 - X_1|^\gamma + |X_1|^\gamma) d\mathbb{P} + \int_{A^c} (|X_2 - X_1|^\gamma + |X_1|^\gamma) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}|X_2 - X_1|^\gamma + \mathbb{E}|X_1|^\gamma, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}|X_2|^\gamma < \mathbb{E}|X_2 - X_1|^\gamma + \mathbb{E}|X_1|^\gamma.$$

De aquí, usando de nuevo el hecho que  $X_2 - X_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1$ , resulta que:

$$\mathbb{E}|X_2|^\gamma < 2\mathbb{E}|X_1|^\gamma. \quad (2.6)$$

Luego, recordando que el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es autosimilar de índice  $H$  se tiene que  $2^H X_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_2$ , así:

$$\mathbb{E}|X_2|^\gamma = \mathbb{E}|2^H X_1|^\gamma = 2^{H\gamma} \mathbb{E}|X_1|^\gamma. \quad (2.7)$$

Por último, las ecuaciones (2.6) y (2.7) implican que  $2^{H\gamma} < 2$ , por lo tanto  $H < \frac{1}{\gamma}$ .

ii) Sea  $\gamma \geq 1$ . Para el caso en el que  $\gamma > 1$ , se toma  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ , de esta manera se tiene que  $0 < \rho \leq 1$ , y con ello se cumplen las hipótesis del inciso i) para los valores de  $\rho$ , por lo cual se concluye que  $0 < H < \frac{1}{\rho}$ ,  $\forall \rho < 1$ . Así se llega a que  $0 < H < 1$ . Luego, si  $\gamma = 1$  entonces quiere decir que  $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ . Por otro lado, tomando en cuenta que el proceso es estacionario se cumple que  $X_2 - X_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1$ , con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$\mathbb{E}|X_2| = \mathbb{E}|(X_2 - X_1) + X_1| \leq \mathbb{E}|X_2 - X_1| + \mathbb{E}|X_1| = 2\mathbb{E}|X_1|,$$

es decir,

$$\mathbb{E}|X_2| \leq 2\mathbb{E}|X_1|. \quad (2.8)$$

Mientras que por la autosimilaridad se tiene que  $X_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} 2^H X_1$ , así:

$$\mathbb{E}|X_2| = 2^H \mathbb{E}|X_1|. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, combinando las ecuaciones (2.8) y (2.9), se llega a que  $2^H \leq 2$ , es decir  $H \leq 1$ . ■

A partir de esta proposición se observa que si un proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es autosimilar con incrementos estacionarios y  $\text{Var}(X_1) < \infty$ , entonces el índice de autosimilaridad del proceso pertenece al conjunto  $(0, 1]$ . Lo cual también se cumple en particular para los procesos gaussianos autosimilares con incrementos estacionarios.

### 2.1.2. Ejemplos de procesos autosimilares

A continuación se presentan algunos ejemplos de procesos autosimilares que a su vez sirvieron como ejemplos de procesos gaussianos en el capítulo 1, por lo que en esta sección se presentan procesos gaussianos centrados con la propiedad de ser autosimilares. Solamente se considerarán procesos gaussianos centrados debido a que se facilita la prueba de que sean autosimilares. Ejemplos de procesos autosimilares que no sean gaussianos se encuentran en los libros [Samorodnitsky, 1994, pag. 312] y [Figuro, 2000, pag. 85].

#### 2.5 Ejemplo. Movimiento Browniano Fraccionario estándar.

El movimiento Browniano fraccionario  $B^H$  es un proceso gaussiano centrado con índice de autosimilaridad  $H \in (0, 1)$ . Se probará que en efecto es un proceso autosimilar.

Según la definición de autosimilaridad (2.1) se necesita probar que los procesos  $\{B_{at}^H\}_{t \in T}$  y  $\{a^H B_t^H\}_{t \in T}$  tienen la misma distribución para toda  $a > 0$ . Para ello, es fundamental que el proceso  $B^H$  sea gaussiano centrado ya que de inmediato se tiene que los procesos  $\{B_{at}^H\}_{t \in T}$  y  $\{a^H B_t^H\}_{t \in T}$  también son gaussianos y, de esta manera, para probar que tienen la misma distribución resta verificar que la función de covarianzas del proceso  $\{B_{at}^H\}_{t \in T}$  sea igual a la función de covarianzas del proceso  $\{a^H B_t^H\}_{t \in T}$ . Sean  $s, t \in T$ , y  $a > 0$ , de aquí:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_{at}^H, B_{as}^H) &= \frac{1}{2} \left\{ |at|^{2H} + |as|^{2H} - |at - as|^{2H} \right\} \\ &= \frac{1}{2} a^{2H} \left\{ |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H} \right\} \\ &= a^{2H} \text{Cov}(B_t^H, B_s^H) \\ &= \text{Cov}(a^H B_t^H, a^H B_s^H), \end{aligned}$$

por lo tanto, los procesos  $\{B_{at}^H\}_{t \in T}$  y  $\{a^H B_t^H\}_{t \in T}$  tienen la misma distribución.

#### 2.6 Ejemplo. Movimiento Browniano Subfraccionario.

El movimiento Browniano subfraccionario  $SB^H$  (ver [Norvaisa, 2011]) es un proceso autosimilar de índice  $H \in (0, 1)$ . Se verificará que los procesos  $\{SB_{at}^H\}_{t \in T}$  y  $\{a^H SB_t^H\}_{t \in T}$  tienen la misma distribución para toda  $a > 0$ . De nuevo, basta ver que los procesos  $\{SB_{at}^H\}_{t \in T}$  y  $\{a^H SB_t^H\}_{t \in T}$  tienen la misma función de covarianza ya que ambos procesos son gaussianos centrados. Sean  $s, t \in T$ , y  $a > 0$ , de aquí:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(SB_{at}^H, SB_{as}^H) &= (as)^{2H} + (at)^{2H} - \frac{1}{2} \left[ (as + at)^{2H} + |as - at|^{2H} \right] \\ &= a^{2H} \left[ s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2} \left( (s + t)^{2H} + |as - at|^{2H} \right) \right] \\ &= a^{2H} \text{Cov}(SB_t^H, SB_s^H) \\ &= \text{Cov}(a^H SB_t^H, a^H SB_s^H). \end{aligned}$$

Por lo tanto se verifica la autosimilaridad del proceso  $SB^H$ .

### 2.7 Ejemplo. Movimiento Browniano Bifraccionario.

El movimiento Browniano bifraccionario  $B^{H,K}$  (ver [Norvaisa, 2011]) es un proceso autosimilar de índice  $HK$ , donde  $H \in (0, 1)$  y  $K \in (0, 1]$ . Para probarlo se verificará que la función de covarianza del proceso  $\{B_{at}^{H,K}\}_{t \in T}$  es igual a la función de covarianza del proceso  $\{a^{HK} B_t^{H,K}\}_{t \in T}$ . Sean  $s, t \in T$ , y  $a > 0$ , luego:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left( B_{at}^{H,K}, B_{as}^{H,K} \right) &= \frac{1}{2^k} \left\{ \left( (at)^{2H} + (as)^{2H} \right)^K - |at - as|^{2HK} \right\} \\ &= \frac{a^{2HK}}{2^k} \left\{ \left( t^{2H} + s^{2H} \right)^K - |t - s|^{2HK} \right\} \\ &= a^{2HK} \text{Cov} \left( B_t^{H,K}, B_s^{H,K} \right) \\ &= \text{Cov} \left( a^{HK} B_t^{H,K}, a^{HK} B_s^{H,K} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el proceso  $B^{H,K}$  es autosimilar con índice  $HK$ .

## 2.2. Propiedades del Movimiento Browniano Fraccionario

El movimiento Browniano fraccionario fué presentado por Kolmogorov en el artículo [Kolmogorov, 1940] luego, tiempo después, su estudio fue retomado y completado por Benoît B. Mandelbrot y Van Ness en el artículo [Mandelbrot, Ness, 1968], donde se le atribuyó el nombre actual.

En esta sección se estudiarán las principales propiedades del movimiento Browniano fraccionario, sin embargo, para empezar a estudiarlo, resulta natural comenzar con la prueba de la existencia del mismo y para ello el siguiente lema prueba la existencia del movimiento Browniano fraccionario usando el Teorema (1.30), con el cual es suficiente mostrar que la covarianza del movimiento Browniano fraccionario es positiva definida.

**2.8 Lema.** *Para  $H \in (0, 1]$ , la función*

$$K_H(t, s) = \frac{1}{2} \left( |s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H} \right), \quad s, t \in T,$$

*es positiva definida.*

**Demostración.** Primeramente se probará la siguiente igualdad:

$$\int_0^\infty (1 - \exp^{-xu}) x^{-1-H} dx = \frac{u^H \Gamma(1-H)}{H}, \quad \forall u > 0. \quad (2.10)$$

Para demostrar la igualdad se resolverá la integral del lado izquierdo integrando por partes como sigue:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty (1 - \exp^{-xu}) x^{-1-H} dx \\
&= \frac{(\exp^{-xu} - 1)}{Hx^H} \Big|_0^\infty + \frac{u}{H} \int_0^\infty x^{-H} \exp^{-xu} dx \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\exp^{-xu} - 1)}{Hx^H} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp^{-xu} - 1)}{Hx^H} + \frac{u}{H} \int_0^\infty x^{-H} \exp^{-xu} dx \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-u \exp^{-xu}}{H^2 x^{H-1}} + \frac{u}{H} \int_0^\infty x^{-H} \exp^{-xu} dx, \quad \text{por la regla de L'Hôpital,} \\
&= \frac{u}{H^2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{1-H} \exp^{-ux} + \frac{u}{H} \int_0^\infty x^{-H} \exp^{-xu} dx \\
&= \frac{u}{H} \int_0^\infty x^{-H} \exp^{-xu} dx,
\end{aligned}$$

por lo que se tiene la igualdad:

$$\int_0^\infty (1 - \exp^{-xu}) x^{-1-H} dx = \frac{u}{H} \int_0^\infty x^{-H} \exp^{-xu} dx, \quad (2.11)$$

luego, aplicando el cambio de variable  $y = ux$  a la integral del lado derecho de la igualdad anterior (2.11) queda:

$$\int_0^\infty (1 - \exp^{-xu}) x^{-1-H} dx = \frac{u^H}{H} \int_0^\infty y^{-H} \exp^{-y} dy = \frac{u^H \Gamma(1-H)}{H}, \quad \forall u > 0,$$

por lo tanto se llega a la igualdad deseada.

Ahora se probará directamente que la función de covarianza del movimiento Browniano fraccionario es positiva definida, es decir se probará que para toda  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j K_H(t_i, t_j) \geq 0.$$

Sea  $t_0 = 0$  y sea  $a_0 = -\sum_{j=1}^n a_j$ , por lo que  $\sum_{i=0}^n a_i = 0$ . Así:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n a_i a_j K_H(t_i, t_j) &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \left( |t_i|^{2H} + |t_j|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j |t_i|^{2H} + \sum_{i,j=1}^n a_i a_j |t_j|^{2H} - \sum_{i,j=1}^n a_i a_j |t_i - t_j|^{2H} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i |t_i|^{2H} \left( \sum_{j=1}^n a_j \right) + \sum_{j=1}^n a_j |t_j|^{2H} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) - \sum_{i,j=1}^n a_i a_j |t_i - t_j|^{2H} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i |t_i|^{2H} (-a_0) + \sum_{j=1}^n a_j |t_j|^{2H} (-a_0) - \sum_{i,j=1}^n a_i a_j |t_i - t_j|^{2H} \\
&= - \sum_{i=1}^n a_i a_0 |t_i - t_0|^{2H} - \sum_{j=1}^n a_j a_0 |t_j - t_0|^{2H} - \sum_{i,j=1}^n a_i a_j |t_i - t_j|^{2H} \\
&= - \sum_{i,j=0}^n a_i a_j |t_i - t_j|^{2H}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Luego, poniendo  $u^H = |t_i - t_j|^{2H}$  en la igualdad (2.10) se obtiene que:

$$|t_i - t_j|^{2H} = \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty \left( 1 - \exp^{-x|t_i-t_j|^2} \right) x^{-1-H} dx,$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (2.12) resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n a_i a_j K(t_i, t_j) &= - \sum_{i,j=0}^n a_i a_j |t_i - t_j|^{2H} \\
&= \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty - \sum_{i,j=0}^n a_i a_j \left( 1 - \exp^{-x|t_i-t_j|^2} \right) x^{-1-H} dx \\
&= \frac{H}{\Gamma(1-H)} \left[ \int_0^\infty - \sum_{i,j=0}^n a_i a_j x^{-1-H} dx + \int_0^\infty \sum_{i,j=0}^n a_i a_j x^{-1-H} \exp^{-x|t_i-t_j|^2} dx \right] \\
&= \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty - \left( \sum_{i=0}^n a_i \right) \left( \sum_{j=0}^n a_j \right) x^{-1-H} dx \\
&\quad + \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty \sum_{i,j=0}^n a_i a_j x^{-1-H} \exp^{-x|t_i-t_j|^2} dx \\
&= \frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^\infty \left( \sum_{i,j=0}^n a_i a_j \exp^{-x|t_i-t_j|^2} \right) x^{-1-H} dx.
\end{aligned}$$

Para garantizar que la integral anterior es no negativa basta probar que:

$$\sum_{i,j=0}^n a_i a_j \exp^{-x|t_i-t_j|^2} \geq 0,$$

debido a que  $x > 0$  y  $\frac{H}{\Gamma(1-H)} > 0$ . Y para probarlo, obsérvese que la función  $\varphi(t) = \exp^{-xt^2}$  es la función característica de una variable aleatoria normal con media cero y varianza  $2x$ , así, por el teorema de Bochner [Shiryayev, 1996, pag. 287], la función  $\varphi$  es positiva definida, es decir se tiene que:

$$\sum_{i,j=0}^n a_i a_j \exp^{-x|t_i-t_j|^2} \geq 0,$$

lo cual concluye la demostración. ■

Hasta este momento se ha visto que el movimiento Browniano fraccionario es autosimilar de índice  $H \in (0, 1)$  y tiene incrementos estacionarios. Ahora, en la siguiente proposición se verá en qué casos un proceso autosimilar con incrementos estacionarios es un movimiento Browniano fraccionario.

**2.9 Proposición.** *Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso autosimilar, de índice  $H$ , con incrementos estacionarios y varianza finita, entonces*

i)  $X_0 = 0$  c.s.

ii) Si  $0 < H < 1$ , entonces el proceso es centrado y cumple que:

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{1}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right) \text{Var}(X_1). \quad (2.13)$$

iii) Si  $H = 1$ , entonces  $X_t = tX_1$  c.s., para toda  $t \in T$ .

**Demostración.**

i) Debido a que el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es autosimilar de índice  $H$  se tiene que:

$$\text{E}(X_a^2) = a^H \text{E}(X_0^2), \forall a > 0,$$

de aquí resulta que  $\text{E}(X_0^2) = 0$  y así  $X_0 = 0$  c.s.

ii) Sea  $H \in (0, 1)$ . Se usará que el proceso es autosimilar con incrementos estacionarios para obtener la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \text{E}(X_1) &= \text{E}(X_2 - X_1) \quad \text{ya que } X_2 - X_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1, \\ &= \text{E}(X_2) - \text{E}(X_1) \\ &= \text{E}(2^H X_1) - \text{E}(X_1) \quad \text{usando que } X_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} 2^H X_1, \\ &= (2^H - 1) \text{E}(X_1), \end{aligned}$$

de aquí se llega a que  $E(X_1) = 0$ , ya que  $H \in (0, 1)$ , este hecho implica que:

$$\text{Var}(X_1) = E(X_1^2) \quad (2.14)$$

y, por la autosimilaridad del proceso, se tiene que:

$$X_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} a^{-H} X_a, \quad \forall a > 0, \quad (2.15)$$

y con ello  $E(X_a) = 0, \forall a > 0$ , es decir el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es centrado.

Ahora, usando de nuevo que el proceso es autosimilar con incrementos estacionarios se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} E(X_t X_s) &= \frac{1}{2} \{E(X_t^2) + E(X_s^2) - E[(X_t - X_s)^2]\} \\ &= \frac{1}{2} \{E(X_t^2) + E(X_s^2) - E[(X_{|t-s|} - X_0)^2]\} \\ &= \frac{1}{2} \{E(t^{2H} X_1^2) + E(s^{2H} X_1^2) - E[|t-s|^{2H} X_1^2]\} \\ &= \frac{1}{2} [t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}] E(X_1^2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

Luego, por las ecuaciones (2.14) y (2.15) se concluye que:

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = E(X_t X_s) = \frac{1}{2} [t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}] \text{Var}(X_1).$$

iii) Sea  $H = 1$ . Se probará que  $E[(X_t - tX_1)^2] = 0$ , y para ello obsérvese que la ecuación (2.16) también se cumple para  $H = 1$ , así, en este caso se tiene que:

$$E(X_t X_1) = tE(X_1^2). \quad (2.17)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} E[(X_t - tX_1)^2] &= E(X_t^2) - 2tE(X_t X_1) + t^2E(X_1^2) \\ &= t^2E(X_1^2) - 2t^2E(X_1^2) + t^2E(X_1^2), \quad \text{por la igualdad (2.17),} \\ &= (t^2 - 2t^2 + t^2) E(X_1^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $X_t = tX_1$  c.s. ■

La proposición anterior establece que un proceso autosimilar de índice  $H \in (0, 1)$ , con incrementos estacionarios y varianza finita tiene la función de covarianza del movimiento Browniano fraccionario estándar, salvo por la constante multiplicativa:  $\text{Var}(X_1)$ . Por lo cual la siguiente definición del movimiento Browniano fraccionario implica que, a pesar de esa constante multiplicativa, un proceso gaussiano con tal función de covarianza es un movimiento Browniano fraccionario.

**2.10 Definición.** *Un proceso gaussiano autosimilar, con índice  $H \in (0, 1)$ , y con incrementos estacionarios es llamado un movimiento Browniano fraccionario (mBf). Si  $\text{Var}(X_1) = 1$  en la ecuación (2.13), entonces se le conoce como movimiento Browniano fraccionario estándar.*

Por lo tanto, a la proposición anterior sólo le falta la hipótesis de que sea proceso gaussiano para que el proceso resultante sea un movimiento Browniano fraccionario.

Ahora, en la siguiente proposición se establece otra caracterización del movimiento Browniano fraccionario usando como hipótesis que sea un proceso gaussiano con incrementos estacionarios y una forma específica de la varianza del proceso.

**2.11 Proposición.** *Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso gaussiano centrado con incrementos estacionarios, tal que  $\text{Var}(X_t) = t^{2H} \text{Var}(X_1)$ , con  $H > 0$  y con  $X_0 = 0$ , entonces el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un movimiento Browniano fraccionario de índice  $H \in (0, 1)$ .*

**Demostración.** Se probará que la covarianza del proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  coincide con la covarianza del mBf. Usando que el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es centrado, que tiene incrementos estacionarios y que  $X_0 = 0$ , el cálculo de la covarianza queda como sigue:

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{1}{2} \left\{ \text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_s) - \text{Var}(X_{|t-s|}) \right\}, \quad \forall s, t \in T.$$

Luego, sustituyendo el valor de la varianza del proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$ , queda:

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{\text{Var}(X_1)}{2} \left\{ t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right\}.$$

Por lo tanto la covarianza del proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  coincide con la covarianza del mBf y, por la unicidad de los procesos gaussianos establecida en el Teorema (1.30), se concluye que el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un movimiento Browniano fraccionario con índice  $H \in (0, 1)$ . ■

**2.12 Observación.** Sea  $\{B_t^H\}_{t \in T}$  un movimiento Browniano fraccionario. Por la Proposición (2.11), la variable aleatoria  $B_t^H - B_s^H$  tiene la misma distribución que la variable aleatoria  $(t-s)^H N$ , donde  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

De la Definición (2.10) y de las proposiciones (2.9) y (2.11) se sigue inmediatamente la prueba del siguiente corolario.

**2.13 Corolario.** Sea  $H \in (0, 1)$  y sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso gaussiano centrado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $\{X_t\}_{t \in T}$  es autosimilar de índice  $H$ , con incrementos estacionarios y varianza finita.
- ii)  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un mBf con índice de autosimilaridad  $H$ .
- iii)  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un proceso con incrementos estacionarios y cuya varianza esta dada por:

$$\text{Var}(X_t) = t^{2H} \text{Var}(X_1), \quad \forall t \in T. \quad (2.18)$$

### 2.2.1. Regularidad de las trayectorias.

**2.14 Proposición.** *El movimiento Browniano fraccionario con índice de autosimilaridad  $H \in (0, 1)$ ,  $B^H$ , admite una versión continua  $\tilde{B}^H$  tal que para toda  $\gamma < H$ , las trayectorias del proceso  $\tilde{B}^H$  son  $\gamma$ -Hölderianas c.s..*

**Demostración.** Por el Teorema (1.31), resta verificar que existen constantes  $c, \alpha > 0$ , tales que:

$$K_H(t, t) + K_H(s, s) - 2K_H(s, t) \leq c|t - s|^\alpha, \quad \forall t, s \in T.$$

En efecto, para  $s, t \in T$ :

$$\begin{aligned} K_H(t, t) + K_H(s, s) - 2K_H(s, t) &= t^{2H} + s^{2H} - \left\{ t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right\} \\ &= |t - s|^{2H}, \end{aligned}$$

de aquí, tomando  $c = 1$  y  $\alpha = 2H$  en el Teorema (1.31), se tiene que para cada  $0 < H < 1$  existe una versión continua  $\tilde{B}^H$ , donde, para toda  $\gamma < \frac{\alpha}{2} = H$ , las trayectorias del proceso  $\tilde{B}^H$  son  $\gamma$ -Hölderianas c.s.. ■

### 2.2.2. Diferenciabilidad de la trayectorias.

**2.15 Proposición.** *Casi todas las trayectorias del movimiento Browniano fraccionario no son diferenciables en ningún punto.*

**Demostración.** Supóngase que  $B_0^H = 0$ , y sea la variable aleatoria

$$\frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0}, \quad \text{con } t, t_0 \in T \text{ y tal que } t_0 < t.$$

La distribución de la variable aleatoria anterior se obtiene usando que el mBf es autosimilar con incrementos estacionarios como sigue:

$$\frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{B_{t-t_0}^H}{t - t_0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{(t - t_0)^H B_1^H}{t - t_0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (t - t_0)^{H-1} B_1^H \quad (2.19)$$

Ahora, considérese el siguiente evento:

$$A(t) = \left\{ \omega : \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left| \frac{B_s^H(\omega) - B_{t_0}^H(\omega)}{s - t_0} \right| > d \right\}, \quad d \in \mathbb{R}_+.$$

De aquí obsérvese que para cualquier sucesión  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  decreciente a  $t_0$ , se tiene que:

$$A(t_n) \supset A(t_{n+1}), \quad (2.20)$$

y, además,:

$$\begin{aligned} A(t_n) &\supset \left\{ \omega : \left| \frac{B_{t_n}^H(\omega) - B_{t_0}^H(\omega)}{t_n - t_0} \right| > d \right\} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ \omega : \left| (t_n - t_0)^{H-1} B_1^H(\omega) \right| > d \right\} \quad \text{por la relación (2.19),} \\ &= \left\{ \omega : |B_1^H(\omega)| > (t_n - t_0)^{1-H} d \right\}, \end{aligned}$$

con lo cual se sigue que:

$$\mathbb{P}(A(t_n)) \geq \mathbb{P}\left(|B_1^H| > (t_n - t_0)^{1-H} d\right),$$

luego, tomando límite en ambos lados de la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t_n)) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|B_1^H| > (t_n - t_0)^{1-H} d\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ |B_1^H| > (t_n - t_0)^{1-H} d \right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(|B_1^H| > 0\right) = 1, \end{aligned}$$

es decir, resulta que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t_n)) = 1$ . Por otro lado, debido a la relación (2.20), se llega a que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(t_n)) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A(t_n)\right),$$

y por consiguiente:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A(t_n)\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t_0 \leq s \leq t_n} \left| \frac{B_s^H(\omega) - B_{t_0}^H(\omega)}{s - t_0} \right| > d\right) = 1.$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \searrow t_0} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \left| \frac{B_s^H - B_{t_0}^H}{s - t_0} \right| > d\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow t_0} A(t)\right) = 1.$$

Esto implica que el evento en el que  $B^H$  no es diferenciable en el punto  $t_0 \in T$  tiene medida 1, con  $t_0$  arbitrario. Con lo cual se concluye que casi todas las trayectorias del proceso  $B^H$  son no diferenciables en ningún punto.  $\blacksquare$

### 2.2.3. $\alpha$ -variación del movimiento Browniano fraccionario.

En esta parte se considerará a  $T$  como una constante positiva, y con el cual se define el intervalo de tiempo:  $[0, T]$ .

Sea  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  un proceso estocástico denotado por  $X$ , y sea  $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de particiones  $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \leq n} (t_i - t_{i-1}) = 0.$$

**2.16 Definición.** Un proceso estocástico  $X$  se dice que tiene  $\alpha$ -variación finita si para toda familia de particiones  $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \leq n} (t_i - t_{i-1}) = 0,$$

se tiene que la sucesión de variables aleatorias:

$$S_\alpha(X, \pi_n) = \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^\alpha, n \in \mathbb{N},$$

converge en probabilidad a una variable aleatoria  $V_\alpha(X, [0, T])$ . En tal caso, a la variable aleatoria  $V_\alpha(X, [0, T])$  se le conoce como la  $\alpha$ -variación del proceso  $X$ .

Para calcular la  $\alpha$ -variación del movimiento Browniano fraccionario sobre el intervalo  $[0, T]$  se tomará la sucesión de particiones diáticas:

$$\pi_n = \left\{ \frac{iT}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n \right\}, n \in \mathbb{N}.$$

y con esta sucesión se pasará a calcular las variables aleatorias  $S_\alpha(B^H, \pi_n)$ .

$$\begin{aligned} S_\alpha(B^H, \pi_n) &= \sum_{i=1}^n \left| B_{\frac{iT}{n}}^H - B_{\frac{(i-1)T}{n}}^H \right|^\alpha \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^n \left| B_{\frac{T}{n}}^H \right|^\alpha \quad \text{por los incrementos estacionarios,} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^n \left| \left( \frac{1}{n} \right)^H B_T^H \right|^\alpha \quad \text{por la autosimilaridad,} \\ &= \left( \frac{1}{n} \right)^{\alpha H} \sum_{i=1}^n |B_T^H|^\alpha \\ &= \left( \frac{1}{n} \right)^{\alpha H - 1} |B_T^H|^\alpha. \end{aligned}$$

De aquí se puede observar que:

$$S_\alpha(B^H, \pi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha H > 1 \\ \infty & \text{si } \alpha H < 1 \\ |B_T^H|^\alpha & \text{si } \alpha H = 1 \end{cases}$$

por lo cual, la  $\alpha$ -variación del mBf no es finita para  $\alpha H < 1$ .

Ahora para verificar si la  $\alpha$ -variación existe para  $\alpha H \geq 1$ , se tomará una partición cualesquiera  $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \leq n} (t_i - t_{i-1}) = 0.$$

$$\begin{aligned}
S_\alpha(B^H, \pi_n) &= \sum_{i=1}^n \left| B_{t_i}^H - B_{t_{i-1}}^H \right|^\alpha \\
&\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^n \left| B_{t_i - t_{i-1}}^H \right|^\alpha \quad \text{por los incrementos estacionarios,} \\
&\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^n \left| (t_i - t_{i-1})^H B_1^H \right|^\alpha \quad \text{por la autosimilaridad,} \\
&= |B_1^H|^\alpha \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{\alpha H},
\end{aligned}$$

de aquí:

- Si  $\alpha H = 1$ , entonces:

$$S_\alpha(B^H, \pi_n) = |B_1^H|^\alpha \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = T |B_1^H|^\alpha,$$

y así se obtiene que:

$$V_\alpha(B^H, [0, T]) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_\alpha(B^H, \pi_n) = T |B_1^H|^\alpha.$$

- Si  $\alpha H > 1$ , entonces:

$$\begin{aligned}
S_\alpha(B^H, \pi_n) &= |B_1^H|^\alpha \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{\alpha H} \\
&\leq |B_1^H|^\alpha \sup_{i \leq n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha H - 1} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\
&= T |B_1^H|^\alpha \sup_{i \leq n} (t_i - t_{i-1})^{\alpha H - 1},
\end{aligned}$$

y con ello se tiene que:

$$V_\alpha(B^H, [0, T]) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_\alpha(B^H, \pi_n) = 0.$$

Por lo tanto, resumiendo:

$$V_\alpha(B^H, [0, T]) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha H > 1 \\ \infty & \text{si } \alpha H < 1 \\ T |B_1^H|^\alpha & \text{si } \alpha H = 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

La siguiente proposición establece una equivalencia de la  $\alpha$ -varianción del mBf, con  $\alpha = \frac{1}{H}$ , sobre el intervalo  $[0, T]$ .

**2.17 Proposición.** *La  $\alpha$ -variación del movimiento Browniano fraccionario en el conjunto de tiempo  $[0, T]$ , es la variable aleatoria  $TE(|N|^\alpha)$  para  $\alpha = \frac{1}{H}$ , donde  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .*

**Demostración.** Sea  $(t_i^n)$  una partición del intervalo  $[0, T]$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i^n (t_{i+1}^n - t_i^n) = 0.$$

Para simplificar se denotará por  $S_n$  a  $S_\alpha(B^H, (t_i^n))$ , donde:

$$S_\alpha(B^H, (t_i^n)) = \sum_{i=0}^n \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^\alpha,$$

así, la demostración consistirá en probar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ (S_n - TE(|N|^\alpha))^2 \right] = 0.$$

Para ello nótese lo siguiente:

$$\mathbb{E} \left[ (S_n - TE(|N|^\alpha))^2 \right] = \mathbb{E} [S_n^2] - 2TE[|N|^\alpha] \mathbb{E}[S_n] + T^2 \mathbb{E}^2[|N|^\alpha], \quad (2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_n] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^n \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^\alpha \right] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E} \left[ \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^\alpha \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{E} \left[ |t_{i+1} - t_i|^{\alpha H} |N|^\alpha \right] \quad \text{por la observación (2.12),} \end{aligned}$$

con lo cual, para  $\alpha = \frac{1}{H}$  se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_n] &= \sum_{i=0}^n \mathbb{E} [|t_{i+1} - t_i| |N|^\alpha] \\ &= \mathbb{E} [|N|^\alpha] \sum_{i=0}^n |t_{i+1} - t_i| \\ &= TE [|N|^\alpha], \end{aligned}$$

y sustituyendo este último resultado en la igualdad (2.22):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (S_n - TE(|N|^\alpha))^2 \right] &= \mathbb{E} [S_n^2] - 2TE [|N|^\alpha] \mathbb{E} [S_n] + T^2 \mathbb{E}^2 [|N|^\alpha] \\ &= \mathbb{E} [S_n^2] - 2TE [|N|^\alpha] TE [|N|^\alpha] + T^2 \mathbb{E}^2 [|N|^\alpha] \\ &= \mathbb{E} [S_n^2] - T^2 \mathbb{E}^2 [|N|^\alpha]. \end{aligned}$$

De esta manera resta probar que  $E(S_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^2 E^2(|N|^\alpha)$ .

Primeramente obsérvese que:

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \sum_{i,j} \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^\alpha \left| B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H \right|^\alpha \\ &= \sum_{i=0}^n \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^{2\alpha} + 2 \sum_{i>j} \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^\alpha \left| B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H \right|^\alpha. \end{aligned}$$

Se denotará por  $I_1$  a la siguiente expresión:

$$\sum_{i=0}^n E \left[ \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^{2\alpha} \right],$$

y por  $I_2$  a la expresión:

$$2 \sum_{i>j} E \left[ \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^\alpha \left| B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H \right|^\alpha \right],$$

así  $E(S_n^2) = I_1 + I_2$  y con ello:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} I_2.$$

Para calcular el límite de  $I_1$  se tomará en cuenta la observación (2.12) ya que con ella se obtiene que:

$$I_1 = \sum_{i=0}^n E \left[ \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^{2\alpha} \right] = \sum_{i=0}^n E \left[ (t_{i+1} - t_i)^{2\alpha H} |N|^{2\alpha} \right],$$

y sustituyendo  $\alpha = \frac{1}{H}$  queda:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=0}^n E \left[ (t_{i+1} - t_i)^2 |N|^{2\alpha} \right] \\ &= E(|N|^{2\alpha}) \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) (t_{i+1} - t_i) \\ &\leq E(|N|^{2\alpha}) \sup_i (t_{i+1}^n - t_i^n) \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) \\ &= E(|N|^{2\alpha}) T \sup_i (t_{i+1}^n - t_i^n) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

por lo tanto  $I_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Ahora se procederá a calcular el límite de  $I_2$  usando, de nueva cuenta, la observación (2.12).

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \sum_{i>j} \mathbb{E} \left[ \left| B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H \right|^\alpha \left| B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H \right|^\alpha \right] \\ &= 2 \sum_{i>j} \mathbb{E} \left[ \left| (t_{i+1} - t_i)^H N_1 \right|^\alpha \left| (t_{j+1} - t_j)^H N_2 \right|^\alpha \right] \\ &= 2\mathbb{E} (|N_1|^\alpha |N_2|^\alpha) \sum_{i>j} |t_{i+1} - t_i|^{\alpha H} |t_{j+1} - t_j|^{\alpha H}, \end{aligned}$$

luego, sustituyendo  $\alpha = \frac{1}{H}$  resulta:

$$I_2 = 2\mathbb{E} (|N_1|^\alpha |N_2|^\alpha) \sum_{i>j} |t_{i+1} - t_i| |t_{j+1} - t_j|,$$

y usando que las variables  $N_1$  y  $N_2$  son independientes se obtiene una simplificación para  $I_2$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\mathbb{E} (|N_1|^\alpha) \mathbb{E} (|N_2|^\alpha) \sum_{i>j} |t_{i+1} - t_i| |t_{j+1} - t_j| \\ &= 2\mathbb{E} (|N_1|^\alpha) \mathbb{E} (|N_1|^\alpha) \sum_{i=0}^n |t_{i+1} - t_i| \sum_{j=0}^{i-1} |t_{j+1} - t_j| \\ &= 2\mathbb{E}^2 (|N_1|^\alpha) \sum_{i=0}^n |t_{i+1} - t_i| t_i. \end{aligned}$$

Por último, recordando la definición de integral de Riemann:

$$\sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) t_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T t dt = \frac{T^2}{2},$$

por lo tanto:

$$I_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^2 \mathbb{E}^2 (|N_1|^\alpha).$$

De esta manera se concluye que:

$$\mathbb{E} (S_n^2) = I_1 + I_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^2 \mathbb{E}^2 (|N_1|^\alpha),$$

donde  $N_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Por lo tanto, finalmente se obtiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ (S_n - T\mathbb{E} (|N_1|^\alpha))^2 \right] = 0,$$

es decir  $V_\alpha (B^H, [0, T]) = T\mathbb{E} (|N_1|^\alpha)$  c.s., para  $\alpha = \frac{1}{H}$ . ■

### 2.2.4. El mBf no es Semimartingala cuando $H \neq \frac{1}{2}$

En esta sección  $T$  representa una constante positiva finita.

**2.18 Definición.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  es una familia creciente de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ , es decir, para cada  $0 \leq s \leq t$ , se tiene que:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}.$$

Al espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  se le conoce como espacio de probabilidad filtrado.

**2.19 Definición.** Una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  se dice que es continua por la derecha si  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} = \{\mathcal{F}_{t+}\}_{t \geq 0}$ , donde  $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{t < s} \mathcal{F}_s$ .

**2.20 Definición.** Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  se dice que es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , si para cada  $s \in \mathbb{R}_+$  se tiene que  $X_s$  es  $\mathcal{F}_s$ -medible.

**2.21 Definición.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado. Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  un proceso estocástico definido en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , luego el proceso  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  es llamado martingala respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  si:

i) Es adaptado a la filtración.

ii)  $E(|X_t|) < \infty, \forall t \geq 0$

iii)  $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \forall 0 \leq s \leq t$ .

**2.22 Definición.** Una función  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  se dice que es un tiempo de paro si para toda  $t \in \mathbb{R}_+$  el evento  $\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**2.23 Definición.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado y sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  un proceso estocástico continuo y adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ . El proceso  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  se dice que es una martingala local continua si existe una sucesión de tiempos de paro  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  creciente, con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$  y tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$X_{\min\{s, \tau_n\}} \mathbf{1}_{\{\tau_n > 0\}}$$

es una martingala respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

**2.24 Definición.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado tal que la filtración cumple con las condiciones habituales (es decir, la filtración es completa y continua por la derecha). Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ , adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , se dice que es una semimartingala continua si admite la siguiente representación:

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

donde  $M$  es una martingala local continua y nula en cero, y  $A$  es un proceso continuo, adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , de variación finita y nulo en cero.

**2.25 Proposición.** *Toda semimartingala es de variación cuadrática finita.*

La demostración de esta proposición puede consultarse en el libro [Metivier, 1982, pag. 175], ó si prefiere la demostración para una semimartingala continua (como el caso que nos concierne) puede consultar el libro [Ruíz de Chávez, 1995, pag. 87].

Ahora, a partir de la Proposición (2.25) se demostrará que el mBf no es semimartingala, a menos que sea el movimiento Browniano (i.e. cuando  $H = \frac{1}{2}$ ), y para ello se considerarán los siguientes casos:

- i) Si  $H \in (0, 1/2)$  entonces, por la ecuación (2.21),  $V_2(B^H, [0, T])$  es infinita ya que  $\alpha H < 1$ . De aquí la Proposición (2.25) establece que el movimiento Browniano fraccionario con  $H \in (0, 1/2)$  no es semimartingala.
- ii) Si  $H \in (1/2, 1)$  entonces, por la ecuación (2.21),  $V_2(B^H, [0, T]) = 0$  ya que  $\alpha H > 1$ . Y ahora si se supone que  $B^H$  es semimartingala entonces, por definición de semimartingala, se tendría que:

$$B_t^H = B_0^H + M_t + A_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

así:

$$M_t = B_t^H - B_0^H - A_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

por lo que la variación cuadrática del proceso  $M$  sería cero y consecuentemente  $M \equiv 0$  c.s.. Esto implica que  $B^H = A$  c.s., lo cual es una contradicción debido a que el mBf no tiene variación finita (ya que  $\alpha H = H < 1$ ) y, en cambio, el proceso  $A$  sí. Por lo tanto, en el caso  $H \in (1/2, 1)$ ,  $B^H$  tampoco es semimartingala.

- iii) Si  $H = \frac{1}{2}$ , se tiene que  $B^H$  es el movimiento Browniano estándar, el cual es bien conocido que es martingala y por consiguiente es semimartingala.

### 2.2.5. Dependencia de corto y largo plazo

**2.26 Definición.** *Una sucesión estacionaria de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , se dice que tiene dependencia de corto plazo si la sucesión de covarianzas  $\rho(n) = \text{Cov}(X_k, X_{k+n})$ , con  $k, n \in \mathbb{N}$ , satisface:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\rho(n)| < \infty.$$

**2.27 Definición.** *Una sucesión estacionaria de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , se dice que tiene dependencia de largo plazo si la sucesión de covarianzas  $\rho(n) = \text{Cov}(X_k, X_{k+n})$ , con  $k, n \in \mathbb{N}$ , satisface:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}} = 1,$$

para alguna constante  $c$  y  $\alpha \in (0, 1)$ .

En este caso, la dependencia entre  $X_k$  y  $X_{k+n}$  decae lentamente cuando  $n$  tiende a infinito ya que  $\rho(n) = \mathbf{O}(cn^{-\alpha})$ , es decir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}} \right| < \infty,$$

donde el símbolo  $\mathbf{O}$  se le conoce como orden de convergencia, y además:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty.$$

A continuación se verá que el mBf tiene dependencia de largo plazo cuando  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  y dependencia de corto plazo cuando  $H \in (0, \frac{1}{2})$ .

Para  $k, n \in \mathbb{N}$ , sean:

$$X_k = B_k^H - B_{k-1}^H \quad y \quad X_{k+n} = B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H.$$

Se probará específicamente que la sucesión de incrementos  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  del mBf tiene dependencia de largo plazo y corto plazo, cuando  $H > \frac{1}{2}$  y  $H < \frac{1}{2}$  respectivamente. Para ello nótese lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho_H(n) &= \text{Cov}(X_k, X_{k+n}) \\ &= \text{Cov}(B_k^H - B_{k-1}^H, B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H) \\ &= \text{Cov}(B_k^H, B_{k+n}^H) - \text{Cov}(B_k^H, B_{k+n-1}^H) \\ &\quad - \text{Cov}(B_{k-1}^H, B_{k+n}^H) + \text{Cov}(B_{k-1}^H, B_{k+n-1}^H) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ n^{2H} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} + n^{2H} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H} - 2n^{2H} \right\} \\ &= \frac{n^{2H-2}}{2} \left\{ n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} + n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H} - 2n^2 \right\} \\ &= \frac{n^{2H-2}}{2} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H} - 2}{\frac{1}{n^2}} \right\}, \end{aligned}$$

luego, aplicando la regla de L'Hôpital a la última expresión que esta dentro del corchete  $\{ \}$ , se obtiene que:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H} - 2}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2H(2H - 1),$$

con lo cual, cuando  $n$  es suficientemente grande, se tiene que:

$$\rho_H(n) \approx n^{2H-2} H(2H-1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall H \in (0, 1), \quad (2.23)$$

donde el símbolo  $\approx$  indica aproximación. De aquí se observa que la covarianza de los incrementos tiende a cero en el mismo orden que  $n^{2H-2}$ , por lo cual el mBf es un proceso de memoria larga. Además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_H(n)}{(2H-1) H n^{2H-2}} = 1.$$

por lo que, tomando  $c = (2H-1)H$  y  $\alpha = 2-2H$  en la Definición (2.27), se tiene que sólo cuando  $H \in (1/2, 1)$  se cumple que  $\alpha \in (0, 1)$ , así, sólo en éste caso el mBf tiene dependencia de largo plazo. Mientras que cuando  $H \in (0, 1/2)$  se observa que  $2-2H \in (1, 2)$ , por lo cual  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-2H}} < \infty$ , y por consiguiente  $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_H(n)| < \infty$ , de esta manera se concluye que en este caso el mBf tiene dependencia de corto plazo.

Ahora, bajo las propiedades de dependencia de corto y largo plazo se caracterizará al mBf con las siguientes definiciones.

**2.28 Definición.** *Un proceso estocástico se dice que es:*

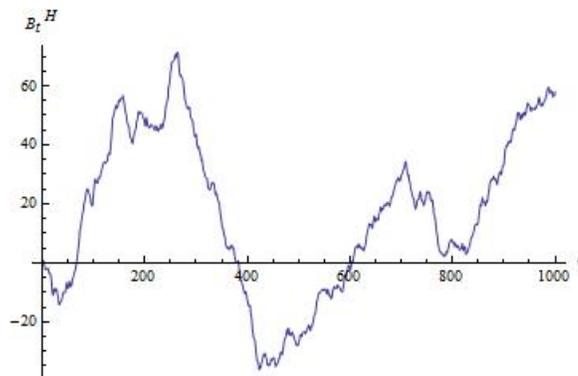
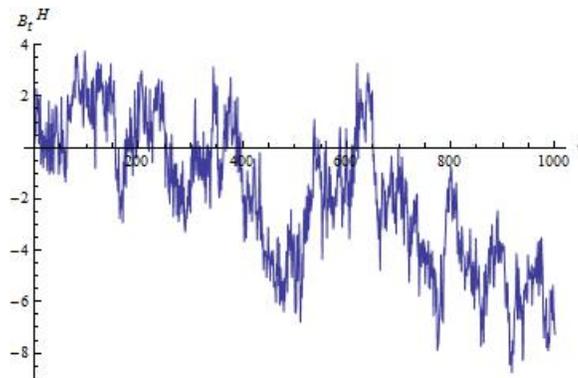
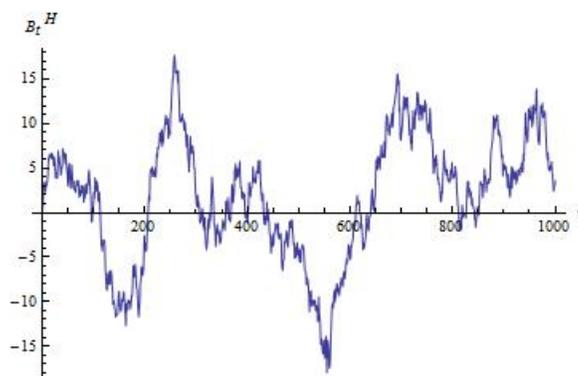
- i) Persistente, cuando el proceso tiene dependencia de largo plazo y la covarianza entre los incrementos del proceso son positivos.*
- ii) Antipersistente, cuando el proceso tiene dependencia de corto plazo y la covarianza entre los incrementos del proceso son negativos.*
- iii) Neutro, cuando la covarianza entre los incrementos del proceso es nula.*

Para  $H \in (1/2, 1)$ ,  $n^{2H-2} H(2H-1)$  es positiva, así en este caso el proceso es persistente y por lo cual los incrementos del mBf tienden a la misma dirección.

Para  $H \in (0, 1/2)$ ,  $n^{2H-2} H(2H-1)$  es negativa, así en este caso el proceso es antipersistente y por lo cual los incrementos del mBf tienden a direcciones opuestas.

Para  $H = \frac{1}{2}$ ,  $n^{2H-2} H(2H-1) = 0$ , así en este caso el mBf es neutro debido a que expresa neutralidad en las direcciones de sus incrementos.

La persistencia, antipersistencia y neutralidad de los incrementos del mBf puede observarse en las figuras 1, 2 y 3 respectivamente.

Fig.1 El mBf persistente, con  $H=0.8$ .Fig.2 El mBf antipersistente, con  $H=0.2$ .Fig.3 El mBf neutralizado, con  $H=0.5$ .

A continuación cabe presentar una aplicación del movimiento Browniano fraccio-

nario que motiva la importancia de la dependencia de largo plazo del proceso.

### Panorama de la aplicación del mBf a las variaciones de la temperatura

En el artículo [Brody, Syroka, Zervos , 2002] se trabajó en una manera de aplicar el movimiento Browniano fraccionario para modelar las variaciones de la temperatura. Por lo cual, en lo siguiente se expone a grandes rasgos sobre lo que se hizo en el artículo para aplicar el movimiento Browniano fraccionario en las variaciones de la temperatura.

Por conocimiento empírico se dió a conocer que algunas variables del clima, en particular la temperatura, exhiben dependencia temporal en sus correlaciones. Debido a que, en el caso de las condiciones meteorológicas, si una anomalía se presentó en el pasado lo más probable es que continúe persistiendo en el futuro, por lo tanto la persistencia se interpreta como el grado en el que la anomalía meteorológica se extiende, de esta manera la incorporación de la persistencia a modelos de las variaciones climáticas es fundamental para obtener mejores estimaciones y cotas en estos modelos. Esto motivó la aplicación del mBf para modelar las variaciones de la temperatura en el tiempo.

Se han desarrollado varios métodos para identificar la presencia de dependencia a largo plazo en un determinado conjunto de datos. Sin embargo, uno de los métodos más simples y eficientes para analizar la temperatura diaria es el método S-T, el cual fué introducido por Syroka y Toumi en 2001.

El ejemplo que se presenta en el artículo es un análisis de las temperaturas diarias del centro de Inglaterra durante los años 1772-1999, es el registro ( del CET) más largo que se tiene. De aquí, a través del análisis del método S-T, se determina un exponente  $\gamma \in (-0.5, 0)$  que expresa la existencia de una correlación de plazo temporal entre los valores diarios, y con el cual se usa la relación  $H = 1 + \gamma$ , donde  $H$  es el coeficiente de autosimilaridad del mBf.

Ahora, para modelar la evolución de la temperatura media que se presenta diariamente se considera el proceso de Ornstein-Uhlenbeck fraccionario como el modelo básico, y el cual se define como la solución a la ecuación diferencial:

$$dX_t = k_t(\theta_t - X_t) dt + \sigma_t dB_t^H, \quad X_0 = 0. \quad (2.24)$$

La integral estocástica que se maneja para obtener la solución de la ecuación diferencial (2.24) es un tipo de integral de Itô que hace uso de los Productos de Wick, con  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Esto se desarrolla en el artículo [Duncan, Hu, Pasik-Duncan, 2000, pag. 592].

La siguiente proposición proporciona la solución a la ecuación diferencial estocástica (2.24) con el tipo de integral estocástica dada en el artículo [Duncan, Hu, Pasik-Duncan, 2000, pa.592].

**2.29 Proposición.** *Suponga que  $k, \theta$  y  $\sigma$  son funciones determinísticas acotadas. Si*

$$K_t = \exp \left( - \int_0^t k_s ds \right),$$

*entonces la solución a la ecuación diferencial (2.24) es*

$$X_t = xK_t + K_t \int_0^t k_s \theta_s K_s^{-1} ds + K_t \int_0^t \sigma_s K_s^{-1} dB_s^H, \quad (2.25)$$

*donde  $x = X_0$ .*

La demostración de la proposición puede ser consultada en el artículo [Brody, Syroka, Zervos, 2002, pag.192].

En la figura 4 se muestra una simulación de las trayectorias del proceso  $X_t$ , que es la solución a la ecuación diferencial estocástica (2.24), con la siguiente elección:  $H = 0.75$ ,  $k_t \equiv 0.95$  y

$$\sigma_t = 2.5 + 0.5 \sin \left( \frac{2\pi t}{365} + 1.1 \right),$$

$$\theta_t = 10 - 6.3 \sin \left( \frac{2\pi t}{365} + 1.2 \right).$$

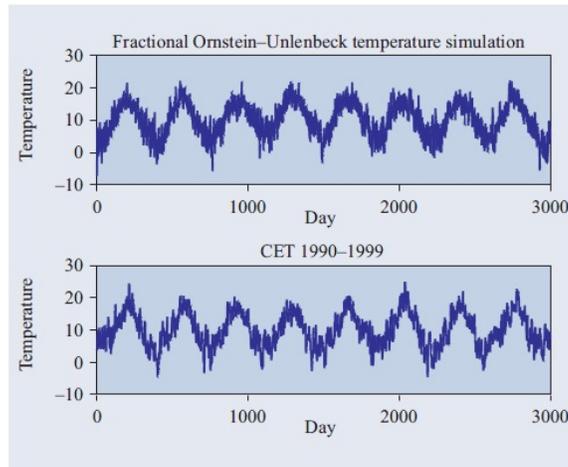


Fig. 4 Comparación entre los datos de la temperatura del CET y la simulación del proceso Ornstein-Uhlenbeck fraccionario.

### 2.2.6. Propiedad no Markoviana

**2.30 Definición.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$  un espacio de probabilidad filtrado y sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso estocástico adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ , con  $(E, \mathcal{E})$  el espacio de estados. Se dice que  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un proceso de Markov si*

$$\mathbb{P}[X_t \in A | \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[X_t \in A | X_s], \quad \forall s, t \in T, \text{ con } s \leq t,$$

*donde  $A \in \mathcal{E}$ .*

De la definición se deduce que, en un proceso de Markov, la probabilidad del futuro sólo depende del presente, por lo que a este tipo de procesos se pueden describir como procesos sin memoria o con pérdida de memoria.

**2.31 Lema.** *Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso gaussiano centrado y sea  $K(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s)$ , con  $s, t \in T$ , la función de covarianza del proceso. Si  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un proceso de Markov entonces para cualesquiera  $t_0, s, t \in T$ , con  $t_0 < s < t$ , se cumple que:*

$$K(t, t_0) = \frac{K(t, s)K(s, t_0)}{K(s, s)}. \quad (2.26)$$

**Demostración.** Para  $s, t \in T$ , con  $s < t$ , sea el vector:

$$\left( X_s, X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s \right),$$

el cual es un vector gaussiano debido a que el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es gaussiano.

Usando que el proceso es centrado se observará que la covarianza de las variables aleatorias que forman al vector aleatorio es cero:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left( X_s, X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s \right) &= \text{E} \left[ X_s \left( X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s \right) \right] \\ &\quad + \text{E}[X_s] \text{E} \left[ X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s \right] \\ &= \text{E}[X_s X_t] - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \text{E}(X_s^2) + 0 \\ &= K(t, s) - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} K(s, s) \\ &= 0, \end{aligned}$$

con lo cual, de la Proposición (1.7)), se sigue que las variables aleatorias  $X_s$  y  $X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s$  son independientes y, por consiguiente, para cualquier valor posible  $\xi$  de la variable aleatoria  $X_s$ , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{E} \left[ X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s \mid X_s = \xi \right] &= \text{E} \left[ X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s \right], \quad \text{por la independencia,} \\ &= \text{E}[X_t] - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \text{E}[X_s] \\ &= 0, \quad \text{ya que el proceso es centrado,} \end{aligned}$$

es decir:

$$\text{E} \left[ X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s \mid X_s = \xi \right] = 0. \quad (2.27)$$

Sin embargo, por otro lado se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ X_t - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} X_s \middle| X_s = \xi \right] &= \mathbb{E} [X_t | X_s = \xi] - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \mathbb{E} [X_s | X_s = \xi] \\ &= \mathbb{E} [X_t | X_s = \xi] - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \xi, \end{aligned} \quad (2.28)$$

por lo cual, igualando los resultado (2.27) y (2.28), se llega a que:

$$\mathbb{E} [X_t | X_s = \xi] - \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \xi = 0, \quad \forall s, t \in T, \text{ con } s < t.$$

es decir,

$$\mathbb{E} [X_t | X_s = \xi] = \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \xi, \quad \forall s, t \in T, \text{ con } s < t. \quad (2.29)$$

Por otro lado, se calculará la esperanza condicional de la ecuación (2.29) por medio de la probabilidad de transición de la variable  $X_{t_0}$ , así la probabilidad de transición de la variable aleatoria  $X_{t_0}$ , usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov, esta dada por:

$$P(x, t, x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t, y, s) P(dy, s, x_0, t_0). \quad (2.30)$$

De esta manera se usará la probabilidad de transición dada en la ecuación anterior (2.30) y que el proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un proceso de Markov para calcular la siguiente esperanza condicional:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [X_t | X_{t_0} = x_0] &= \int_{-\infty}^{\infty} x dP(x, t, x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x P(dx, t, x_0, t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} P(dx, t, y, s) P(dy, s, x_0, t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x P(dx, t, y, s) \right] P(dy, s, x_0, t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbb{E}(X_t | X_s = y)] P(dy, s, x_0, t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(t, s)}{K(s, s)} y P(dy, s, x_0, t_0), \quad \text{con } s < t, \text{ por la ecuación (2.29),} \\ &= \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \int_{-\infty}^{\infty} y P(dy, s, x_0, t_0) \\ &= \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \mathbb{E} [X_s | X_{t_0} = x_0] \\ &= \frac{K(t, s)}{K(s, s)} \frac{K(s, t_0)}{K(t_0, t_0)} x_0, \quad t_0 < s. \end{aligned}$$

Así, se obtuvo que:

$$E [X_t | X_{t_0} = x_0] = \frac{K(t, s) K(s, t_0)}{K(s, s) K(t_0, t_0)} x_0, \quad \text{con } t_0 < s < t. \quad (2.31)$$

Y, además, de la ecuación (2.29), se tiene que:

$$E [X_t | X_{t_0} = x_0] = \frac{K(t, t_0)}{K(t_0, t_0)} x_0, \quad (2.32)$$

por lo que igualando las ecuaciones (2.31) y (2.32) se sigue que:

$$\frac{K(t, s) K(s, t_0)}{K(s, s) K(t_0, t_0)} = \frac{K(t, t_0)}{K(t_0, t_0)}, \quad t_0 < s < t,$$

y con ello se concluye que:

$$K(t, t_0) = \frac{K(t, s) K(s, t_0)}{K(s, s)}, \quad t_0 < s < t.$$

demostrando lo deseado. ■

De hecho el lema es un si y sólo sí [Tudor, 2002, pag. 414], no obstante para el propósito de esta parte sólo es necesaria una implicación, aunque con la otra implicación resulta muy fácil probar que el movimiento Browniano estándar es un proceso de Markov.

Ahora se procederá a demostrar que el mBf no es un proceso de Markov para  $H \neq \frac{1}{2}$ .

**2.32 Teorema.** *El movimiento Browniano fraccionario con índice de autosimilaridad  $H \in (0, 1)$ , no es un proceso de Markov para  $H \neq \frac{1}{2}$ .*

**Demostración.** La demostración se hará por contradicción usando el Lema (2.31), por lo cual se supondrá que el mBf es un proceso de Markov, es decir que cumple con la relación:

$$K_H(t, t_0) K_H(s, s) = K_H(t, s) K_H(s, t_0), \quad 0 \leq t_0 < s < t, \quad (2.33)$$

para toda  $H \in (0, 1)$  fija.

Por el hecho de que el mBf es un proceso centrado, la relación (2.33) es equivalente a:

$$E [B_t^H B_{t_0}^H] E [(B_s^H)^2] = E [B_t^H B_s^H] E [B_s^H B_{t_0}^H]. \quad (2.34)$$

y es la que se usará para la demostración.

Se tomará  $t = 1$  y  $0 \leq t_0 < 1$  en la relación (2.34) para definir la siguiente función:

$$\nu_H(t_0) = E [B_1^H B_{t_0}^H] = \frac{1}{2} \left\{ 1 + t_0^{2H} - (1 - t_0)^{2H} \right\}, \quad H \in (0, 1). \quad (2.35)$$

Luego, obsérvese que para  $0 \leq t_0 < s < 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E} [B_s^H B_{t_0}^H]}{\mathbb{E} [(B_s^H)^2]} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{t_0}{s} \right)^{2H} - \left( 1 - \frac{t_0}{s} \right)^{2H} \right\} \\ &= \nu_H \left( \frac{t_0}{s} \right). \end{aligned}$$

La relación (2.34) con  $t = 1$  es equivalente a:

$$\frac{\mathbb{E} [B_1^H B_{t_0}^H]}{\mathbb{E} [B_1^H B_s^H]} = \frac{\mathbb{E} [B_s^H B_{t_0}^H]}{\mathbb{E} [(B_s^H)^2]},$$

por lo cual se sigue que:

$$\nu_H(t_0) = \nu_H \left( \frac{t_0}{s} \right) \nu_H(s), \quad \text{para } 0 < t_0 < s < 1. \quad (2.36)$$

Ahora se definirá otra función:

$$\psi_H(x) = \log \nu_H(e^{-x}), \quad \text{con } x \geq 0, \quad (2.37)$$

de aquí se tiene que:

$$\psi_H(x) = \log \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2Hx} - \frac{1}{2} (1 - e^{-x})^{2H} \right), \quad (2.38)$$

con lo cual se obtienen las siguientes observaciones:

- a)  $\psi_H(0) = 0$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_H(x) = -\infty$ .
- c)  $\psi_H(x+y) = \psi_H(x) + \psi_H(y)$ , con  $0 \leq x < y$ , (por la ecuación (2.35)).

Del inciso c) se deduce que:

$$\frac{d}{dx} \psi_H(x+y) = \frac{d}{dx} \psi_H(x),$$

es decir, la derivada de la función  $\psi_H$  es constante para  $x \geq 0$ . Y además, considerando los incisos a) y b), se llega a que existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$\psi_H(x) = -Cx, \quad x \geq 0.$$

Por esta última forma de la función  $\psi_H$  se obtiene una expresión mas simple para la función  $\nu_H$ :

$$\nu_H(e^{-x}) = e^{\psi_H(x)} = e^{-Cx},$$

de aquí, tomando  $y = e^{-x}$  se observa que  $0 < y < 1$ , y que:

$$\nu_H(y) = y^C, \quad y \in (0, 1) \quad (2.39)$$

Ahora, de la ecuación (2.35) se obtiene que:

$$\nu_H''(t_0) = \frac{d^2}{dt_0^2} \nu_H(t_0) = H(2H-1) \left[ t_0^{2H-2} - (1-t_0)^{2H-2} \right], \quad (2.40)$$

del cual se observa que para  $H \neq \frac{1}{2}$  se tiene que  $H(2H-1) \neq 0$  y que, para toda  $H \in (0, 1)$ , se tiene que  $2H-2 < 0$ , con lo cual se llega al siguiente límite:

$$\lim_{t_0 \rightarrow 1} \left| \nu_H''(t_0) \right| = \infty. \quad (2.41)$$

Por otro lado, de la ecuación (2.39) se sigue que:

$$\nu_H''(t_0) = \frac{d^2}{dt_0^2} \nu_H(t_0) = C(C-1)t_0^{C-2},$$

obteniéndose así:

$$\lim_{t_0 \rightarrow 1} \left| \nu_H''(t_0) \right| = C|C-1| \neq \infty. \quad (2.42)$$

Debido a que los límites (2.41) y (2.42) son distintos para  $H \neq \frac{1}{2}$ , se llega a la contradicción. Por lo tanto, el mBf no es un proceso de Markov para  $H \neq \frac{1}{2}$ . ■

### 2.3. El fenómeno de Hurst

En esta sección se dará la idea de cómo fue descubierto históricamente el movimiento Browniano fraccionario a partir del fenómeno observado por Hurst.

Se sabe que Hurst estudió el flujo de agua en el río Nilo y fué donde observó un fenómeno un tanto curioso. Para describir tal fenómeno considérese una sucesión de variables aleatorias  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  que representan los datos observados por Hurst. El estadístico que analizó fué el R-S (Re-Scaled range), el cual se define a continuación:

$$\frac{R}{S}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (S_i - \frac{i}{n}S_n) - \min_{1 \leq i \leq n} (S_i - \frac{i}{n}S_n)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{n}S_n)^2}} \quad (2.43)$$

donde  $S_0 = 0$  y  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

Se supondrá que las variables  $X_i$ 's son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media  $\mu \in \mathbb{R}$  y varianza  $\sigma^2$ .

La convergencia del estadístico R-S describe el fenómeno observado por Hurst y para examinar la convergencia se usarán las siguientes funciones:

▪

$$t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} (S_{[nt]} - [nt] \mu), \quad t \in T, \quad (2.44)$$

la cual es constante sobre cada intervalo  $(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ , donde  $i = 0, 1, \dots, n$ , y donde  $t \in [0, 1]$ .

▪

$$t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{n}} (S_n - n\mu), \quad t \in T, \quad (2.45)$$

la cual es monótona para toda  $t \in [0, 1]$ .

De aquí, por las características mencionadas de las funciones (2.44) y (2.45), se observa que la función:

$$t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} (S_{[nt]} - [nt] \mu - t(S_n - n\mu)) \quad (2.46)$$

obtiene su máximo y su mínimo sólo en los puntos de la forma  $t = \frac{i}{n}$ , con  $i = 0, \dots, n$ , sobre el intervalo  $[0, 1]$  y con ello se obtiene que:

$$\sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{\sqrt{n}} (S_{[nt]} - [nt] \mu - t(S_n - n\mu)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n} \left( S_i - \frac{i}{n} S_n \right), \quad (2.47)$$

y que:

$$\inf_{t \in [0,1]} \frac{1}{\sqrt{n}} (S_{[nt]} - [nt] \mu - t(S_n - n\mu)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \min_{1 \leq i \leq n} \left( S_i - \frac{i}{n} S_n \right). \quad (2.48)$$

Ahora, se define la sucesión de funciones:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} (S_{[nt]} - [nt] \mu), \quad (2.49)$$

ya que con esta sucesión y con las igualdades (2.47) y (2.48) se simplifica la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left( S_i - \frac{i}{n} S_n \right) - \min_{1 \leq i \leq n} \left( S_i - \frac{i}{n} S_n \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S_{[nt]} - [nt] \mu - t(S_n - n\mu)) - \inf_{t \in [0,1]} (S_{[nt]} - [nt] \mu - t(S_n - n\mu)) \right\} \\ &= \sup_{t \in [0,1]} \{f_n(t) - t f_n(1)\} - \inf_{t \in [0,1]} \{f_n(t) - t f_n(1)\}, \quad \text{por la definición de } f_n \text{ (2.49)}. \end{aligned}$$

Luego, se denotará por  $\phi(f_n)$  a la función:

$$\sup_{t \in [0,1]} \{f_n(t) - t f_n(1)\} - \inf_{t \in [0,1]} \{f_n(t) - t f_n(1)\}.$$

Hasta aquí se ha llegado a que el estadístico R-S puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{R}{S}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sigma\sqrt{n}\phi(f_n)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{n}S_n)^2}},$$

es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{R}{S}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sigma\phi(f_n)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{n}S_n)^2}}. \quad (2.50)$$

Enseguida se presenta el teorema de Donsker, (ver [Revuz, 1999, pag. 518]), ya que con este teorema se obtiene el límite de la sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 2.33 Teorema. (Teorema de Donsker).

Sea  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, tales que  $E(X_i) = 0$  y  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ , entonces el proceso

$$g_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , converge en distribución al movimiento Browniano estándar  $W$ .

De aquí nótese los siguientes puntos que resultan del teorema de Donsker:

- Para cada  $t = \frac{i}{n}$ , donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se tiene que:

$$g_n\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} B_s, \quad \text{con } s \in [0, 1]. \quad (2.51)$$

- Con  $t = 1$ :

$$g_n(1) = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} B_1. \quad (2.52)$$

Por lo cual, para el caso de la función  $f_n(t)$ , con  $t \in [0, 1]$ , se tiene que para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $t \in [0, 1]$  existe  $i^* \in \{1, \dots, n\}$  tal que:

$$f_n(t) = f_n\left(\frac{i^*}{n}\right) = \frac{S_{i^*}}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{i^*\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \quad (2.53)$$

y

$$tf_n(1) = \frac{i^*}{n}f_n(1) = \frac{i^*}{n}\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{i^*\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \quad (2.54)$$

así:

$$\begin{aligned} f_n(t) - tf_n(1) &= \frac{S_{i^*}}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{i^*}{n}\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} B_t - tB_1, \quad \text{por los resultados (2.51) y (2.52)}. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\phi(f_n) &= \sup_{t \in [0,1]} \{f_n(t) - tf_n(1)\} - \inf_{t \in [0,1]} \{f_n(t) - tf_n(1)\} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,1]} \{B_t - tB_1\} - \inf_{t \in [0,1]} \{B_t - tB_1\} \\
&= \phi(B).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Ahora, para terminar la convergencia del estadístico R-S de la ecuación (2.50) se usará la ley fuerte de los grandes números (LFGN) para determinar la convergencia de:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} S_n\right)^2} \\
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{S_n}{n}\right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{X_i^2}{n} - 2 \frac{X_i S_n}{n^2} + \frac{1}{n} \frac{S_n^2}{n^2} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{X_i S_n}{n^2} + \frac{S_n^2}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - 2 \frac{S_n S_n}{n^2} + \frac{S_n^2}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - \frac{S_n^2}{n^2} \\
&\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} E(X_1^2) - E^2(X_1), \quad \text{por la LFGN,} \\
&= \text{Var}(X_1) \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{S_n}{n}\right)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \sigma. \tag{2.56}$$

De esta manera, por las ecuaciones (2.55) y (2.56) se obtiene finalmente que:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{R}{S}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \phi(B). \tag{2.57}$$

El análisis de la convergencia del estadístico R-S expresa que para el caso en el que las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  son independientes e idénticamente distribuidas, el estadístico R-S( $X_1, \dots, X_n$ ) converge con la constante  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Sin embargo, Hurst obtuvo otro resultado con los datos que tenía del río Nilo entre los años 622-1469,

ya que él observó que el estadístico R-S( $X_1, \dots, X_n$ ) converge con la constante  $n^{0.7}$ , por lo que, de manera natural, surgió la pregunta de que si era posible encontrar un modelo estocástico que explicara éste hecho. Como se verá a continuación, el movimiento Browniano fraccionario fué la respuesta.

Para probar que el movimiento Browniano fraccionario es, en efecto, el modelo estocástico que justifica las observaciones anteriores, se considerarán las variables aleatorias  $X'_i$ s definidas como:

$$X_i = \mu + \sigma (B_i^H - B_{i-1}^H), \quad (2.58)$$

donde  $B^H$  es un movimiento Browniano fraccionario con el índice de autosimilaridad  $H = 0.74$ . Obsérvese que las variables aleatorias  $X'_i$ s tienen media  $\mu$ , varianza  $\sigma^2$  y no son independientes. Ahora considérense los siguientes dos incisos:

a)

$$\begin{aligned} S_i - \frac{i}{n}S_n &= \sum_{k=1}^i X_k - \frac{i}{n} \sum_{k=1}^i X_k \\ &= \sum_{k=1}^i \{\mu + \sigma (B_k^H - B_{k-1}^H)\} \\ &\quad - \frac{i}{n} \sum_{k=1}^n \{\mu + \sigma (B_k^H - B_{k-1}^H)\} \\ &= \sigma (B_i^H - B_0^H) - \frac{i\sigma}{n} (B_n^H - B_0^H) \\ &= \sigma \left( B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H \right), \quad \text{donde } B_0^H \equiv 0 \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$S_i - \frac{i}{n}S_n = \sigma \left( B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H \right). \quad (2.59)$$

b)

$$\begin{aligned} X_i - \frac{1}{n}S_n &= \mu + \sigma (B_i^H - B_{i-1}^H) - \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^k X_k \right) \\ &= \mu + \sigma (B_i^H - B_{i-1}^H) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{\mu + \sigma (B_k^H - B_{k-1}^H)\} \\ &= \sigma (B_i^H - B_{i-1}^H) - \frac{\sigma}{n} (B_n^H - B_0^H) \\ &= \sigma \left( B_i^H - B_{i-1}^H - \frac{1}{n}B_n^H \right), \quad \text{donde } B_0^H \equiv 0 \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Por lo cual:

$$X_i - \frac{1}{n}S_n = \sigma \left( B_i^H - B_{i-1}^H - \frac{1}{n}B_n^H \right). \quad (2.60)$$

Con las observaciones a) y b) se llega a que:

$$\begin{aligned} \frac{R}{S}(X_1, \dots, X_n) &= \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (S_i - \frac{i}{n}S_n) - \min_{1 \leq i \leq n} (S_i - \frac{i}{n}S_n)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{n}S_n)^2}} \\ &= \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (\sigma (B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H)) - \min_{1 \leq i \leq n} (\sigma (B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H))}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma (B_i^H - B_{i-1}^H - \frac{1}{n}B_n^H))^2}} \\ &= \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H) - \min_{1 \leq i \leq n} (B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_i^H - B_{i-1}^H - \frac{1}{n}B_n^H)^2}}. \end{aligned}$$

Ahora, usando la propiedad de autosimilaridad del proceso  $B^H$  se obtiene que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^H} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left( B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H \right) - \min_{1 \leq i \leq n} \left( B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H \right) \right\} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} \left( B_{\frac{i}{n}}^H - \frac{i}{n}B_1^H \right) - \min_{1 \leq i \leq n} \left( B_{\frac{i}{n}}^H - \frac{i}{n}B_1^H \right), \end{aligned}$$

luego, notando que:

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq i \leq n} \left( B_{\frac{i}{n}}^H - \frac{i}{n}B_1^H \right) - \min_{1 \leq i \leq n} \left( B_{\frac{i}{n}}^H - \frac{i}{n}B_1^H \right) \\ &= \max_{\frac{1}{n} \leq \frac{i}{n} \leq 1} \left( B_{\frac{i}{n}}^H - \frac{i}{n}B_1^H \right) - \min_{1 \leq i \leq n} \left( B_{\frac{i}{n}}^H - \frac{i}{n}B_1^H \right), \end{aligned}$$

se sigue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\frac{1}{n} \leq \frac{i}{n} \leq 1} \left( B_{\frac{i}{n}}^H - \frac{i}{n}B_1^H \right) = \sup_{t \in [0,1]} (B_t^H - tB_1^H), \quad \text{límite puntual,}$$

y de igual manera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq n} \left( B_{\frac{i}{n}}^H - \frac{i}{n}B_1^H \right) = \inf_{t \in [0,1]} (B_t^H - tB_1^H), \quad \text{límite puntual,}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^H} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left( B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H \right) - \min_{1 \leq i \leq n} \left( B_i^H - \frac{i}{n}B_n^H \right) \right\} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{t \in [0,1]} (B_t^H - tB_1^H) - \inf_{t \in [0,1]} (B_t^H - tB_1^H). \end{aligned}$$

Para terminar se calculará la convergencia de:

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( B_i^H - B_{i-1}^H - \frac{1}{n} B_n^H \right)^2} \quad (2.61)$$

y para lo cual se observa que:

$$\frac{1}{n} B_n^H \stackrel{\mathcal{D}}{=} n^{H-1} B_1^H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.62)$$

y, además, se usará el siguiente teorema.

**2.34 Teorema.** *Sea  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible tal que  $E[f^2(X)] < \infty$ , entonces para el movimiento Browniano fraccionario,  $B^H$ , con índice de autosimilaridad  $H \in (0, 1)$ , se cumple que:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(B_i^H - B_{i-1}^H) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} E f(X). \quad (2.63)$$

La demostración de este teorema puede consultarse en [Nourdin, 2012, pag. 17].

De aquí, por un lado, tomando  $f(x) = x^2$  en el Teorema (2.34) se sigue que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_i^H - B_{i-1}^H)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} E(X^2) = 1. \quad (2.64)$$

Y si ahora  $f(x) = x$ , se obtiene que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_i^H - B_{i-1}^H) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} E(X) = 0. \quad (2.65)$$

Por lo cual, combinando los resultados (2.62) y (2.65):

$$\frac{2}{n} B_n^H \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (B_i^H - B_{i-1}^H) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 0. \quad (2.66)$$

De las ecuaciones (2.62) y (2.66) se estima la convergencia de (2.61):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( B_i^H - B_{i-1}^H - \frac{1}{n} B_n^H \right)^2 = \\ & = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{n} (B_i^H - B_{i-1}^H)^2 - \frac{2}{n^2} B_n^H (B_i^H - B_{i-1}^H) + \frac{1}{n^3} (B_n^H)^2 \right\} \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (B_i^H - B_{i-1}^H)^2 - \frac{2}{n^2} B_n^H \sum_{i=1}^n (B_i^H - B_{i-1}^H) + \left( \frac{1}{n} B_n^H \right) \left( \frac{1}{n} B_n^H \right) \\ & \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( B_i^H - B_{i-1}^H - \frac{1}{n} B_n^H \right)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 1.$$

De esta manera finalmente se llega a que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^H} \frac{R}{S}(X_1, \dots, X_n) &= \frac{\frac{1}{n^H} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} (B_i^H - \frac{i}{n} B_n^H) - \min_{1 \leq i \leq n} (B_i^H - \frac{i}{n} B_n^H) \right\}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_i^H - B_{i-1}^H - \frac{1}{n} B_n^H)^2}} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \sup_{t \in [0,1]} (B_t^H - tB_1^H) - \inf_{t \in [0,1]} (B_t^H - tB_1^H). \end{aligned}$$

Por lo que el movimiento Browniano fraccionario es un modelo estocástico que explica el fenómeno de Hurst.



## Capítulo 3

# Representación Integral del Movimiento Browniano fraccionario

El movimiento Browniano fraccionario ha sido ampliamente aplicado para la modelación de varios fenómenos físicos donde la versión adoptada comúnmente del mBf es la representación integral de Mandelbrot y Van Ness. Aunque actualmente existen otras representaciones [Coutin, 2007, pag. 12], en este capítulo se presentará la definición de la representación integral de Mandelbrot y Van Ness ya que, aparte de sus aplicaciones, ha sido muy estudiada dentro de la teoría del movimiento Browniano fraccionario.

A partir de la definición de la representación integral de Mandelbrot y Van Ness del mBf surgió la necesidad de analizar el movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville debido a que tiene una representación integral similar a la representación integral de Mandelbrot y Van Ness y por ello se le ha confundido como un mBf. Sin embargo, en este capítulo se aclarará que el movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville no es un mBf y a pesar de este hecho se presentará una relación que existe entre ambos procesos y cuya relación se dá para tiempos suficientemente grandes del movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville.

### 3.1. Representación de Mandelbrot y Van Ness

En el artículo [Mandelbrot, Ness, 1968], Mandelbrot y Van Ness muestran que el movimiento Browniano fraccionario se obtiene por medio de una integral con respecto al movimiento Browniano estándar  $\{W_u, u \in \mathbb{R}\}$ , denominado *two-sided* Brownian motion [Mishura, 2008, pag. 9].

La definición de la representación integral de Mandelbrot y Van Ness del mBf se presenta a continuación.

**3.1 Definición.** Para  $t > 0$  y  $H \in (0, 1)$ , el movimiento Browniano fraccionario de Mandelbrot y Van Ness (mBf-MV) se define como:

$$B_H^{MV}(t) := \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left[ \int_{-\infty}^0 \left( (t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_u + \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right]. \quad (3.1)$$

Nótese que la definición anterior es sólo para  $t > 0$  por lo que a continuación se define el mBf-MV para  $t < 0$ .

**3.2 Definición.** Para  $t < 0$  y  $H \in (0, 1)$ , el mBf-MV se define como:

$$B_H^{MV}(t) := \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left[ \int_{-\infty}^t \left( (t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_u - \int_t^0 (-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right]. \quad (3.2)$$

Las dos definiciones anteriores para el mBf-MV se sintetizan en la forma dada en [Samorodnitsky, 1994, pag. 321] de la siguiente manera. Para  $t \in \mathbb{R}$ , el mBf-MV se define como:

$$B_H^{MV}(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{\mathbb{R}} \left[ ((t-u)_+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-u)_+)^{H-\frac{1}{2}} \right] dW_u, \quad (3.3)$$

donde

$$f_+ = \begin{cases} f & \text{si } f > 0, \\ 0 & \text{si } f \leq 0, \end{cases}$$

y donde la integral  $\int_{\mathbb{R}} f(u) dW_u$  se define como una extensión de la integral de Itô con respecto al two-sided Brownian motion  $\{W_u\}_{u \in \mathbb{R}}$  (ver [Nourdin, 2012, pag. 54]).

**3.3 Definición.** Sea  $f$  un proceso estocástico tal que  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ , entonces la integral:

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) dW_u$$

se le llama la integral de Itô extendida de  $f$  con respecto al two-sided Brownian motion  $W$ .

En esta sección se verificará que la representación integral del mBf dada por Mandelbrot y Van Ness es en efecto un movimiento Browniano fraccionario. Específicamente, se probará que la representación integral de Mandelbrot y Van Ness es un proceso gaussiano con incrementos estacionarios y cuya varianza esta dada por  $\text{Var}(B_H^{MV}(t)) = t^{2H} \text{Var}(B_H^{MV}(1))$ .

En la siguiente proposición se establece que el mBf-MV es un proceso gaussiano verificando que la integral (3.3) esta bien definida como integral de Itô respecto al two-sided Brownian motion.

**3.4 Proposición.** El proceso  $B_H^{MV}$  es un proceso gaussiano.

**Demostración.** Se demostrará que la integral:

$$B_H^{MV}(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{\mathbb{R}} \left[ ((t-u)_+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-u)_+)^{H-\frac{1}{2}} \right] dW_u,$$

está bien definida como integral de Itô extendida respecto al two-sided Brownian motion. Para ello, por la Definición (3.3), es necesario verificar que la función:

$$g_t(u) = ((t-u)_+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-u)_+)^{H-\frac{1}{2}}$$

pertenece a  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ , es decir se verá que:

$$\int_{\mathbb{R}} (g_t(u))^2 du < \infty.$$

Caso 1:  $H = \frac{1}{2}$ .

Si  $t > 0$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (g_t(u))^2 du &= \int_0^t (t-u)^{2H-1} du \\ &+ \int_{-\infty}^0 \left[ (t-u)^{2H-1} + (-u)^{2H-1} - 2(t-u)^{H-\frac{1}{2}}(-u)^{H-\frac{1}{2}} \right] du \\ &= \int_0^t du, \quad \text{para } H = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego, si  $t < 0$  se obtiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (g_t(u))^2 du &= \int_t^0 (-u)^{2H-1} du \\ &+ \int_{-\infty}^t \left[ (-u)^{2H-1} + (-u)^{2H-1} - 2(t-u)^{H-\frac{1}{2}}(-u)^{H-\frac{1}{2}} \right] du \\ &= \int_t^0 du, \quad \text{para } H = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $g_t(u)$  es cuadrado integrable para  $H = \frac{1}{2}$  y  $t \in \mathbb{R}$ .  
Caso 2:  $H \in (0, 1)$ , con  $H \neq \frac{1}{2}$ .

Sea  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}}{(H-\frac{1}{2})t(-u)^{H-\frac{3}{2}}} &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{t^{H-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} - t^{H-\frac{1}{2}} \left(-\frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}}}{(H-\frac{1}{2})t(-u)^{H-\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{t^{H-\frac{3}{2}} \left[ \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} \right]}{(H-\frac{1}{2})(-u)^{H-\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}}}{(H-\frac{1}{2})\left(-\frac{u}{t}\right)^{H-\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(1+y)^{H-\frac{1}{2}} - y^{H-\frac{1}{2}}}{(H-\frac{1}{2})y^{H-\frac{3}{2}}} \quad \text{con } y = -\frac{u}{t}, \\
&= \frac{1}{(H-\frac{1}{2})} \lim_{y \rightarrow \infty} y \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{H-\frac{1}{2}} - y \\
&= \frac{1}{(H-\frac{1}{2})} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{H-\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{y}} \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{H-\frac{3}{2}} \quad \text{por la regla de L'Hôpital,} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

El límite anterior expresa que cuando  $u \rightarrow -\infty$  se tiene que:

$$(t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \approx \left(H - \frac{1}{2}\right) t (-u)^{H-\frac{3}{2}},$$

y con ello:

$$\left[ (t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 \approx \left(H - \frac{1}{2}\right)^2 t^2 (-u)^{2H-3}, \quad \text{cuando } u \rightarrow -\infty,$$

donde el símbolo  $\approx$  indica aproximación.

De aquí obsérvese que la integral de la función:

$$u \mapsto \left[ (t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right]^2$$

existe en el límite a  $-\infty$ , debido a que  $2H-3 < -1$  y así  $(H-\frac{1}{2})^2 t^2 (-u)^{2H-3} \xrightarrow{u \rightarrow -\infty} 0$ .

Ahora, para verificar que  $g_t(u)$  es cuadrado integrable en el límite a  $\infty$ , obsérvese que cuando  $u \rightarrow \infty$  se tiene que:

$$(t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \approx (t-u)_+^{H-\frac{1}{2}},$$

luego, la integral de la función  $(t-u)_+^{2H-1}$  existe en el límite a  $\infty$ .

Por lo tanto la función  $g_t(u) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  para toda  $H \in (0, 1)$  y  $t \in \mathbb{R}$ . De esta se concluye que la integral (3.3) esta bien definida como integral de Itô extendida.  $\blacksquare$

Ahora, en la siguiente proposición, se probará que la forma de la varianza del mBf-MV.

**3.5 Proposición.** *La varianza del mBf-MV esta dada por:*

$$\text{Var}(B_H^{MV}(t)) = t^{2H} \text{Var}(B_H^{MV}(1)),$$

con  $t \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.**

Sea  $t > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_H^{MV}(t)) &= \mathbb{E}(B_H^{MV}(t))^2 = \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^0 [(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E}\left(\int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u\right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^0 [(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u\right) \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left[ \int_{-\infty}^0 [(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}]^2 du + \int_0^t (t-u)^{2H-1} du \right] \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left[ \int_{-\infty}^0 t^{2H-1} \left[ \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 du + \frac{t^{2H}}{2H} \right] \\ &= \frac{t^{2H}}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left[ \int_{-\infty}^0 [(1-x)^{H-\frac{1}{2}} - (-x)^{H-\frac{1}{2}}]^2 dx + \frac{1}{2H} \right], \end{aligned}$$

luego, de aquí se tiene que:

$$V_H := \text{Var}(B_H^{MV}(1)) = \frac{\int_{-\infty}^0 [(1-x)^{H-\frac{1}{2}} - (-x)^{H-\frac{1}{2}}]^2 dx + \frac{1}{2H}}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2},$$

por lo que:

$$\text{Var}(B_H^{MV}(t)) = t^{2H} V_H. \quad (3.4)$$

Mientras que para  $t < 0$ :

$$\begin{aligned}
\text{Var}(B_H^{MV}(t)) &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left( \int_{-\infty}^t [(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u \right)^2 \\
&+ \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left( \int_t^0 (-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right)^2 \\
&- \frac{2}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left( \int_{-\infty}^t [(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u \int_t^0 (-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right) \\
&= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left( \int_{-\infty}^t [(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}]^2 du + \int_t^0 (-u)^{2H-1} du \right) \\
&= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left( \int_0^\infty [x^{H-\frac{1}{2}} - (x-t)^{H-\frac{1}{2}}]^2 dx + \int_t^0 (x-t)^{2H-1} dx \right), \text{ tomando } x = t - u, \\
&= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left( \int_0^\infty [(x-t)^{H-\frac{1}{2}} - x^{H-\frac{1}{2}}]^2 dx + \frac{(-t)^{2H}}{2H} \right) \\
&= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left( \int_{-\infty}^0 [(t-x)^{H-\frac{1}{2}} - (-x)^{H-\frac{1}{2}}]^2 dx + \frac{(-t)^{2H}}{2H} \right) \\
&= \frac{t^{2H}}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left( \int_{-\infty}^0 [(1-y)^{H-\frac{1}{2}} - (-y)^{H-\frac{1}{2}}]^2 dx + \frac{1}{2H} \right), \text{ tomando } y = \frac{x}{t}, \\
&= t^{2H} V_H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\text{Var}(B_H^{MV}(t)) = t^{2H} V_H, \forall t \in \mathbb{R}$ . ■

Por último se mostrará que el mBf-MV es un proceso con incrementos estacionarios.

**3.6 Proposición.** *El proceso  $B_H^{MV}$  tiene incrementos estacionarios.*

**Demostración.** Para toda  $h > 0$ :

$$\begin{aligned}
\text{Var} (B_H^{MV} (s+h) - B_H^{MV} (s)) &= \text{E} (B_H^{MV} (s+h) - B_H^{MV} (s))^2 \\
&= \frac{1}{[\Gamma (H + \frac{1}{2})]^2} \text{E} \left( \int_{-\infty}^{s+h} (s+h-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u - \int_{-\infty}^s (s-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right)^2 \\
&= \frac{1}{[\Gamma (H + \frac{1}{2})]^2} \text{E} \left( \int_{-\infty}^s [(s+h-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u - \int_s^{s+h} (s+h-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right)^2 \\
&= \frac{1}{[\Gamma (H + \frac{1}{2})]^2} \left( \int_{-\infty}^s [(s+h-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}]^2 du + \int_s^{s+h} (s+h-u)^{2H-1} du \right) \\
&= \frac{1}{[\Gamma (H + \frac{1}{2})]^2} \int_{-\infty}^0 [(h-x)^{H-\frac{1}{2}} - (-x)^{H-\frac{1}{2}}]^2 du, \quad \text{tomando } x = u - s, \\
&\quad + \frac{1}{[\Gamma (H + \frac{1}{2})]^2} \int_s^{s+h} (h-x)^{2H-1} du \\
&= h^{2H} V_H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el proceso  $B_H^{MV}$  tiene incrementos estacionarios. ■

En resumen se ha probado que el mBf-MV es un proceso gaussiano, con incrementos estacionarios y cuya varianza esta dada por  $\text{Var} (B_H^{MV} (t)) = t^{2H} \text{Var} (B_H^{MV} (1))$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Así, usando la Proposición (2.11), se concluye que en efecto el mBf-MV es un mBf con función de covarianza dada por:

$$\text{Cov} (t, s) = \frac{\text{Var} (B_H^{MV} (1))}{2} \left( |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H} \right), \quad \forall t, s \in T. \quad (3.5)$$

## 3.2. Movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville

El objetivo de esta sección es resaltar que el movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville no es un movimiento Browniano fraccionario, y para ello se examinarán algunas propiedades del movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville con las cuales se probará que en efecto no es un movimiento Browniano fraccionario. Por otro lado, a pesar de la gran diferencia que tienen estos procesos, se verá una relación entre ambos, la cual se dá para tiempos suficientemente grandes del movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville.

### 3.2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Antes de presentar la definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, se recordarán algunos resultados y notaciones del cálculo elemental que servirán como punto de partida para construir la definición.

La  $n$ -ésima derivada de una función  $f$  está definida recursivamente por:

$$D^n f(t) = D [D^{n-1} f(t)], \quad n \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Obsérvese que para el caso de  $n = 0$ , se obtiene  $f(t)$ , lo cual significa que la función no se alteró.

En el mismo sentido, la  $n$ -ésima integral de  $f$  se define a través de

$$I^n f(t) = \int_0^t I^{n-1} f(u) du. \quad (3.7)$$

De igual manera, se tiene la propiedad de que  $I^0 f(t) = f(t)$ , y por consiguiente  $I^0 f(t) = D^0 f(t)$ .

Luego, la fórmula de Cauchy (para la  $n$ -ésima integración de  $f$ , ver [Oldham, 2006, pag. 38]), nos proporciona otra manera de escribir la  $n$ -ésima integral de  $f$  en la ecuación (3.7) como sigue:

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} f(u) du, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Este último resultado marcó la base de la integral fraccionaria ya que ahora tiene sentido el reemplazar a  $n \in \mathbb{N}$  por un número  $\alpha > 0$ , y, así también, el factorial por la función gamma  $\Gamma$ .

Haciendo los cambios mencionados se procede a la definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville [Oldham, 2006, pag. 49].

**3.7 Definición.** Sean  $\alpha > 0$  y  $f \in L^1((a, b), du)$ . La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden  $\alpha$  se define como:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du, \quad (3.9)$$

donde  $t \in (a, b)$ .

De ahora en adelante se usará el movimiento Browniano estándar clásico, el cual se denota por  $\{W_u, u \geq 0\}$ .

### 3.2.2. Definición del movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville

**3.8 Definición.** Sean  $t > 0, H > 0$  y  $W$  el movimiento Browniano estándar. El movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville (mBf-RL) está definido como:

$$B_H^{RL}(t) := \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u. \quad (3.10)$$

Se puede llegar a pensar que el mBf-RL es un movimiento Browniano fraccionario, debido a su nombre y a que es una de las integrales presentes en la definición del mBf-MV (3.1). De hecho se ha llegado a considerar el mBf-RL como una versión simplificada del mBf-MV en [Rambaldi, 1994, pag. 22] y en [LLosa, 1990, pag. 5013-5014]. Sin embargo, es necesario aclarar de que no se trata realmente de un movimiento Browniano fraccionario (ya que por ejemplo no tiene incrementos estacionarios, lo cual se verá en la Proposición (3.13)), si no que su nombre está justificado por el cálculo fraccionario, debido a que este proceso es la integral fraccionaria del Riemann-Liouville (3.7) con respecto al movimiento Browniano estándar.

En el artículo [Mandelbrot, 1982, pag. 550] se hace mención de que el mBf-RL se aproxima al mBf-MV sin hacer una demostración, por lo cual aquí se desarrollará una parte del artículo de S.C. Lim ([Lim, 1995]) donde se aclara que el mBf-RL no se aproxima en sí al mBf-MV sino, más bien, la relación que se encuentra es que el proceso de incrementos del mBf-RL, para tiempos suficientemente grandes, se aproxima al proceso de incrementos del mBf-MV. El mBf-RL para tiempos suficientemente grandes se considerará como una aproximación al mBf-RL asintótico.

### 3.2.3. Propiedades del mBf-RL

En esta parte se analizarán dos propiedades cruciales del mBf-RL, las cuales son que el proceso es autosimilar y que no tiene incrementos estacionarios, con las cuales se determina que el mBf-RL no es un mBf.

Para empezar se presentará una forma explícita de la covarianza del mBf-RL debido a que con ella se facilita la prueba de que el mBf-RL es autosimilar. Sin embargo, la covarianza del mBf-RL tiene una forma más complicada comparada con la covarianza del mBf-MV ya que está en términos de la función Hipergeométrica, la cual se define a continuación.

**3.9 Definición.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ ,  $y z \in \mathbb{C}$ , con  $|z| < 1$ . La función Hipergeométrica  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  se define por medio de la serie de potencias:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k, \quad (3.11)$$

donde  $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ .

Sin embargo, existe una representación integral de la función hipergeométrica [Nikiforov, 1988, pag. 259] la cual también se usará, y por ello se presenta en el siguiente teorema.

**3.10 Teorema.** Para  $a \in \mathbb{R}$ ,  $c > b > 0$  y  $z \in \mathbb{C}$ , con  $|z| < 1$ , la función hipergeométrica  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  tiene la siguiente representación integral:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-zu)^{-a} du. \quad (3.12)$$

Ahora se pasará a demostrar la forma de la covarianza del mBf-RL.

**3.11 Teorema.** Para  $t > s > 0$ , la covarianza del mBf-RL está dada por:

$$\text{Cov}_H^{RL}(t, s) = \frac{t^{H+\frac{1}{2}}s^{H-\frac{1}{2}}}{(H+\frac{1}{2})[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-H, 1, H+\frac{3}{2}, \frac{s}{t}\right), \quad (3.13)$$

donde  $\text{Cov}_H^{RL}(t, s) = \text{Cov}(B_H^{RL}(t), B_H^{RL}(s))$  y  ${}_2F_1$  es la función Hipergeométrica.

**Demostración.** Se usará que el proceso  $B_H^{RL}$  es centrado ya que así se tiene que:

$$\text{E}(B_H^{RL}(t) - B_H^{RL}(s))^2 = \text{Var}(B_H^{RL}(t)) + \text{Var}(B_H^{RL}(s)) - 2\text{E}(B_H^{RL}(t)B_H^{RL}(s)).$$

Nótese que, para  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_H^{RL}(t)) &= \frac{1}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \text{E}\left(\int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u\right)^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \int_0^t (t-u)^{2H-1} du \\ &= \frac{t^{2H-1}}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \int_0^t \left(1-\frac{u}{t}\right)^{2H-1} du \\ &= \frac{t^{2H}}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \int_0^1 (1-x)^{2H-1} dx, \quad \text{tomando } x = \frac{u}{t} \\ &= \frac{t^{2H}}{(H+\frac{1}{2})[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-H, 1, H+\frac{3}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Ahora, suponiendo que  $0 < s < t$ :

$$\begin{aligned} &\text{E}(B_H^{RL}(t) - B_H^{RL}(s))^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \text{E}\left(\int_0^s [(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u + \int_s^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u\right)^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \left(\int_0^s [(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}]^2 du + \int_s^t (t-u)^{2H-1} du\right) \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \left(\int_0^t (t-u)^{2H-1} du + \int_0^s (s-u)^{2H-1} du\right) \\ &\quad - \frac{2}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \int_0^s (t-u)^{H-\frac{1}{2}} (s-u)^{H-\frac{1}{2}} du \\ &= \text{Var}(B_H^{RL}(t)) + \text{Var}(B_H^{RL}(s)) - \frac{2}{[\Gamma(H+\frac{1}{2})]^2} \int_0^s (t-u)^{H-\frac{1}{2}} (s-u)^{H-\frac{1}{2}} du. \end{aligned}$$

Por lo tal se tiene que:

$$\text{Cov}_H^{RL}(t, s) = \text{E}(B_H^{RL}(t) B_H^{RL}(s)) = \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_0^s (t-u)^{H-\frac{1}{2}} (s-u)^{H-\frac{1}{2}} du, \quad (3.14)$$

luego:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_0^s (t-u)^{H-\frac{1}{2}} (s-u)^{H-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{t^{H-\frac{1}{2}} s^{H-\frac{1}{2}}}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_0^s \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{t^{H-\frac{1}{2}} s^{H+\frac{1}{2}}}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_0^1 \left(1 - \frac{sv}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} (1-v)^{H-\frac{1}{2}} dv, \quad \text{tomando } v = \frac{u}{s}, \\ &= \frac{t^{H-\frac{1}{2}} s^{H+\frac{1}{2}}}{(H + \frac{1}{2}) [\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - H, 1, H + \frac{3}{2}, \frac{s}{t}\right). \end{aligned}$$

■

Ahora estamos en condiciones de probar la autosimilaridad del mBf-RL en la siguiente proposición.

**3.12 Proposición.** *El mBf-RL es autosimilar de índice  $H > 0$ .*

**Demostración.** Sean  $s, t \in T$ ,  $a > 0$  y  $H > 0$ . De aquí:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_H^{RL}(at, as) &= \frac{(at)^{H+\frac{1}{2}} (as)^{H-\frac{1}{2}}}{(H + \frac{1}{2}) (\Gamma(H + \frac{1}{2}))^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - H, 1, H + \frac{3}{2}, \frac{as}{at}\right) \\ &= \frac{a^{2H} t^{H+\frac{1}{2}} s^{H-\frac{1}{2}}}{(H + \frac{1}{2}) (\Gamma(H + \frac{1}{2}))^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - H, 1, H + \frac{3}{2}, \frac{s}{t}\right) \\ &= a^{2H} \text{Cov}_H^{RL}(t, s) \\ &= \text{E}[(a^H B_H^{RL}(t)) (a^H B_H^{RL}(s))] \\ &= \text{Cov}((a^H B_H^{RL}(t)), (a^H B_H^{RL}(s))). \end{aligned}$$

Por lo cual los procesos  $\{B_H^{RL}(at)\}_{t \in T}$  y  $\{a^H B_H^{RL}(t)\}_{t \in T}$  tiene la misma distribución. ■

A pesar de la aparente simplicidad del mBf-RL, éste proceso tiene un gran inconveniente, el cual es que sus incrementos no son estacionarios, y por el Corolario (2.13) se concluye que el mBf-RL no es un movimiento Browniano fraccionario. Por lo tanto la siguiente proposición es crucial para demostrar que el mBf-RL no es un mBf.

**3.13 Proposición.**  $B_H^{RL}$  no tiene incrementos estacionarios a menos que  $H = \frac{1}{2}$ .

**Demostración.** Se demostrará que la distribución de la variable aleatoria

$$B_H^{RL}(t+h) - B_H^{RL}(h)$$

depende de  $h > 0$ , para cada  $t > 0$ , a menos que  $H = \frac{1}{2}$ .

Sea  $\alpha = H - \frac{1}{2}$ . Para el caso de  $0 < h < t$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |B_H^{RL}(t+h) - B_H^{RL}(h)|^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left| \int_0^{t+h} (t+h-u)^\alpha dW_u - \int_0^h (h-u)^\alpha dW_u \right|^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left| \int_0^h [(t+h-u)^\alpha - (h-u)^\alpha] dW_u + \int_h^{t+h} (t+h-u)^\alpha dW_u \right|^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left[ \mathbb{E} \left| \int_0^h [(t+h-u)^\alpha - (h-u)^\alpha] dW_u \right|^2 + \mathbb{E} \left| \int_h^{t+h} (t+h-u)^\alpha dW_u \right|^2 \right] \\ &\quad + \frac{2}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left| \int_0^h [(t+h-u)^\alpha - (h-u)^\alpha] dW_u \int_h^{t+h} (t+h-u)^\alpha dW_u \right| \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left[ \int_0^h [(t+h-u)^\alpha - (h-u)^\alpha]^2 du + \int_h^{t+h} (t+h-u)^{2\alpha} du \right] \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left[ \int_0^{t+h} (t+h-u)^{2\alpha} du + \int_0^h (h-u)^{2\alpha} du \right] \\ &\quad - \frac{2}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_0^h (t+h-u)^\alpha (h-u)^\alpha du \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left[ \frac{(t+h)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + \frac{h^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} - 2 \int_0^h (t+h-u)^\alpha (h-u)^\alpha du \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por último, nótese que cuando  $H = \frac{1}{2}$  la ecuación (3.15) no depende de  $h$ , y sólo cuando  $H = \frac{1}{2}$  se tiene que  $\alpha = 0$  y  $2\alpha + 1 = 1$ . Por lo tanto  $B_H^{RL}$  tiene incrementos estacionarios si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ .

Para el caso  $0 < t < h$  se realiza el mismo procedimiento. ■

Los siguientes resultados se prueban usando la isometría de Itô y la propiedad de que el proceso  $B_H^{RL}$  es gaussiano centrado.

**3.14 Proposición.** Para  $0 < a < t$  y  $H \in (0, 1)$ , se define el proceso:

$$R_H(a, t) = \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_a^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u,$$

entonces

$$\{R_H(a, a+t)\}_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{B_H^{RL}(t)\}_{t \geq 0}.$$

**Demostración.** Se probará que la covarianza de la variable aleatoria  $R_H(a, a+t)$  es igual a la covarianza de  $B_H^{RL}(t)$ , para cada  $t > 0$  y  $a \leq t$ . Primero, obsérvese que la varianza de  $R_H(a, a+t)$  está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_H(a, a+t)) &= \mathbb{E}(R_H(a, a+t))^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left( \int_a^{a+t} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right)^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_a^{a+t} (a+t-u)^{2H-1} du \\ &= \frac{t^{2H}}{2H [\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2}. \end{aligned}$$

Ahora, supóngase sin pérdida de generalidad que  $a \leq s < t$ :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(R_H(a, a+t) - R_H(a, a+s))^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left( \int_a^{a+t} [(t+a-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s+a-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u + \int_{a+s}^{a+t} (t+a-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right)^2 \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left( \int_a^{a+s} [(a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (a+s-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left( \int_{a+s}^{a+t} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \mathbb{E} \left( \int_a^{a+s} [(a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (a+s-u)^{H-\frac{1}{2}}] dW_u \int_{a+s}^{a+t} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right) \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_a^{a+t} [(a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (a+s-u)^{H-\frac{1}{2}}]^2 du \\ &\quad + \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_{a+s}^{a+t} (a+t-u)^{2H-1} du \\ &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left\{ \int_a^{a+t} (a+t-u)^{2H-1} du + \int_a^{a+s} (a+s-u)^{2H-1} du \right\} \\ &\quad - \frac{2}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_a^{a+s} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} (a+s-u)^{H-\frac{1}{2}} du \\ &= \text{Var}(R_H(a, a+t)) + \text{Var}(R_H(a, a+s)) \\ &\quad - \frac{2}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_a^{a+s} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} (a+s-u)^{H-\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

y de aquí se obtiene el valor de la covarianza del proceso  $R_H(a, a+t)$ :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(R_H(a, a+t) R_H(a, a+s)) \\
&= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_a^{a+s} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} (a+s-u)^{H-\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_0^s (t-x)^{H-\frac{1}{2}} (s-x)^{H-\frac{1}{2}} dx, \quad \text{tomando } x = u - a, \\
&= \text{Cov}_H^{RL}(t, s), \quad \text{ver ecuación (3.14)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las covarianzas de los procesos coinciden. ■

**3.15 Proposición.** Para  $0 \leq a \leq t$ , sea  $\tilde{R}_H(a, t) = B_H^{RL}(t) - R_H(a, t)$ , entonces los procesos:

$$\{R_H(a, a+t)\}_{t \geq 0} \quad \text{y} \quad \{\tilde{R}_H(a, a+t)\}_{t \geq 0},$$

son independientes.

**Demostración.** Nótese que:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_H(a, a+t) &= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \left( \int_0^{a+t} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u - \int_a^{a+t} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right) \\
&= \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_0^a (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u,
\end{aligned}$$

y además:

$$R_H(a, a+t) = \frac{1}{[\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \int_a^{a+t} (a+t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u,$$

es decir, se puede observar que la variable aleatoria  $\tilde{R}_H(a, a+t)$  esta definida sobre un intervalo de integración ajeno al intervalo de integración en donde esta definida la variable aleatoria  $R_H(a, a+t)$ , por lo cual la demostración se concluye por el hecho de que el movimiento Browniano estándar  $W$  tiene incrementos independientes ((iv) de la Proposición (1.34)). ■

### 3.2.4. Propiedades asintóticas del mBf-RL

La principal propiedad asintótica del mBf-RL que se establece es una relación entre el mBf-RL y el mBf-MV, la cual se realiza mediante una prueba heurística. Esta relación es que el comportamiento asintótico del proceso de incrementos del

mBf-RL coincide con el proceso de incrementos del mBf-MV y la prueba de ello resulta del análisis de la covarianza del mBf-RL para tiempos suficientemente grandes. Otra propiedad asintótica que se presenta del mBf-RL es que un movimiento Browniano fraccionario aproxima el comportamiento asintótico que tiene el mBf-RL, es decir para tiempos suficientemente grandes del mBf-RL, éste se comporta similar a un movimiento Browniano fraccionario.

Para comenzar con el análisis del comportamiento asintótico del mBf-RL será conveniente reescribir la covarianza del mBf-RL de tal manera que quede separada en dos términos, y para ello se usará la siguiente propiedad de la función hipergeométrica, la cual puede ser encontrada en [Prudnikov, 2003, pag. 383] (igualdad 5):

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c, z) &= \left( \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \right) {}_2F_1(a, b, a+b-c+1, 1-z) \\ &\quad + \left( \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \right) (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z). \end{aligned}$$

Aplicando esta propiedad a la función hipergeométrica de la covarianza del mBf-RL (3.13) resulta que:

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-H, 1, H+\frac{3}{2}, \frac{s}{t}\right) \\ &= \left( \frac{\Gamma(H+\frac{3}{2}) \Gamma(2H)}{\Gamma(2H+1) \Gamma(H+\frac{1}{2})} \right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-H, 1, 1-2H, 1-\frac{s}{t}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(H+\frac{3}{2}) \Gamma(-2H)}{\Gamma(\frac{1}{2}-H) \Gamma(1)} \left(1-\frac{s}{t}\right)^{2H} {}_2F_1\left(2H+1, H+\frac{1}{2}, 2H+1, 1-\frac{s}{t}\right) \\ &= \left( \frac{H+\frac{1}{2}}{2H} \right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-H, 1, 1-2H, 1-\frac{s}{t}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(H+\frac{3}{2}) \Gamma(-2H)}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)} \left(1-\frac{s}{t}\right)^{2H} {}_2F_1\left(2H+1, H+\frac{1}{2}, 2H+1, 1-\frac{s}{t}\right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

La propiedad de simetría de los dos primero parámetros de la función hipergeométrica ( la cual se sigue inmediatamente de la Definición (3.9)) implica que:

$${}_2F_1\left(2H+1, H+\frac{1}{2}, 2H+1, 1-\frac{s}{t}\right) = {}_2F_1\left(H+\frac{1}{2}, 2H+1, 2H+1, 1-\frac{s}{t}\right). \quad (3.17)$$

Por otro lado, de la Definición (3.9) se obtiene que:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(H+\frac{1}{2}, 2H+1, 2H+1, 1-\frac{s}{t}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{s}{t}\right)^k \Gamma\left(H+\frac{1}{2}+k\right)}{k! \Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \left(1-\left(1-\frac{s}{t}\right)\right)^{-(H+\frac{1}{2})} \\ &= \left(\frac{s}{t}\right)^{-(H+\frac{1}{2})}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

por lo que aplicando las propiedades dadas en las ecuaciones (3.17) y (3.18), la función hipergeométrica inicial (3.16) queda:

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - H, 1, H + \frac{3}{2}, \frac{s}{t}\right) &= \left(\frac{H + \frac{1}{2}}{2H}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - H, 1, 1 - 2H, 1 - \frac{s}{t}\right) \\
 &+ \frac{(t-s)^{2H} t^{-(H+\frac{1}{2})} \Gamma(H + \frac{3}{2}) \Gamma(-2H)}{t^{H-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} - H)}. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

De esta manera, sustituyendo la forma anterior de la función hipergeométrica (3.19) en la covarianza del mBf-RL (3.13), la covarianza del mBf-RL queda separada en dos términos como sigue:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}_H^{RL}(t, s) &= \left[ \frac{t^{H+\frac{1}{2}} s^{H-\frac{1}{2}}}{2H (\Gamma(H + \frac{1}{2}))^2} \right] {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - H, 1, 1 - 2H, 1 - \frac{s}{t}\right) \\
 &+ \frac{(t-s)^{2H} \Gamma(-2H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - H)} \quad \text{para } t > s. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Otra propiedad de la función hipergeométrica es:

$${}_2F_1(a, b, 2b, z) = (1-z)^{-\frac{a}{2}} {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, b - \frac{a}{2}, b + \frac{1}{2}, \frac{z^2}{4z-4}\right), \quad (3.21)$$

la cual puede consultarse en [Prudnikov, 2003, pag. 386] (igualdad 64).

Aplicando esta última propiedad a  ${}_2F_1(1, \frac{1}{2} - H, 1 - 2H, 1 - \frac{s}{t})$  se obtiene que:

$${}_2F_1\left(1, \frac{1}{2} - H, 1 - 2H, 1 - \frac{s}{t}\right) = \left(\frac{s}{t}\right)^{-1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -H, 1 - H, -\frac{(t-s)^2}{4ts}\right). \quad (3.22)$$

Por lo que ahora la covarianza dada en la ecuación (3.20) queda:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}_H^{RL}(t, s) &= \left[ \frac{t^H s^H}{2H (\Gamma(H + \frac{1}{2}))^2} \right] {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -H, 1 - H, -\frac{(t-s)^2}{4ts}\right) \\
 &+ \frac{(t-s)^{2H} \Gamma(-2H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - H)}. \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Finalmente, usando la identidad algebraica:  $2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2$ , la covarianza de la ecuación (3.23) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}_H^{RL}(t, s) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t^{2H} + s^{2H} - (s^H - t^H)^2}{2H (\Gamma(H + \frac{1}{2}))^2} \right] {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -H, 1 - H, -\frac{\tau^2}{4ts}\right) \\
 &+ \frac{\tau^{2H} \Gamma(-2H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - H)}, \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

donde  $t - s = \tau \geq 0$ .

Hasta aquí se puede observar que la covarianza se separó en dos partes en la que una es no estacionaria y otra sí lo es, donde el término con  $\tau^{2H}$  es la parte estacionaria.

Para hacer el análisis del comportamiento al largo plazo del proceso mBf-RL se considerará que  $t > s \gg 1$  tal que  $\tau \ll s$ , donde los simbolos  $\gg$  y  $\ll$  denotan mucho mayor que y mucho menor que, respectivamente, y el simbolo  $\approx$  denota aproximación del valor. Bajo estas condiciones se cumplen los siguientes dos incisos:

a)

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -H, 1-H, -\frac{\tau^2}{4ts}\right) &= \frac{\Gamma(-H+1)}{\Gamma(-H)\Gamma(1)} \int_0^1 u^{-H-1} \left(1 - \frac{\tau^2}{4ts}u\right)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= -H \int_0^1 u^{-H-1} \left(1 - \frac{\tau^2}{4ts}u\right)^{-\frac{1}{2}} du \\ &\approx -H \int_0^1 u^{-H-1} du, \quad \text{cuando } \tau \approx 0, \\ &= 1, \end{aligned}$$

por lo que:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -H, 1-H, -\frac{\tau^2}{4ts}\right) \approx 1, \quad \text{cuando } \tau \approx 0.$$

b)

$$(s^H - t^H)^2 = [s^H - (s + \tau)^H]^2 \approx 0, \quad \text{cuando } \tau \approx 0.$$

Con los incisos a) y b), la covarianza del mBf-RL a largo plazo, dicho de otra manera, la covarianza asintótica del mBf-RL, denotada por  $\text{Cov}_H^a$ , se puede aproximar con la función:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{t^{2H} + s^{2H}}{2H [\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \right) + \frac{\Gamma(-2H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - H)} (t - s)^{2H}$$

la cual se puede simplificar tomando

$$C_H = \text{Var}(B_H^{RL}(1)) = \frac{1}{2H (\Gamma(H + \frac{1}{2}))^2},$$

y

$$D_H = \frac{-4H\Gamma(H + \frac{1}{2})\Gamma(-2H)}{\Gamma(\frac{1}{2} - H)},$$

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left( \frac{t^{2H} + s^{2H}}{2H [\Gamma(H + \frac{1}{2})]^2} \right) + \frac{\Gamma(-2H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - H)} (t - s)^{2H} \\
 &= \frac{C_H}{2} [t^{2H} + s^{2H}] + \frac{(t - s)^{2H} \Gamma(-2H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - H)} \\
 &= \frac{C_H}{2} [t^{2H} + s^{2H}] + \frac{C_H}{2} (t - s)^{2H} \frac{4H\Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(-2H)}{\Gamma(\frac{1}{2} - H)} \\
 &= \frac{C_H}{2} [t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} D_H],
 \end{aligned}$$

así, se tiene que:

$$\frac{C_H}{2} [t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} D_H] \approx \text{Cov}_H^a.$$

Para abreviar, se denotará por  $\text{Cov}_H^{aa}$  a la función que se aproxima a  $\text{Cov}_H^a$ , es decir:

$$\text{Cov}_H^{aa}(t, s) = \frac{C_H}{2} [t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} D_H], \quad \forall t, s \in T, \text{ con } t > s.$$

Ahora, examinando la función gamma en los coeficientes  $C_H$  y  $D_H$ , se observa que:

- i) Para  $H > 0$  se tiene que  $C_H > 0$ .
- ii)  $0 < H < 1$  es el menor intervalo en el que  $D_H \geq 1$ .
- iii) Para  $H = \frac{1}{2}$ ,  $D_H$  no esta definida.

Considerando esta información, se tomará  $H \in (0, 1)$ , con  $H \neq \frac{1}{2}$ , para probar que la función  $\text{Cov}_H^{aa}$  es una covarianza, es decir si, en efecto, es positiva definida.

Obsérvese que para  $t > s \gg 1$ ,  $t - s \ll t$  y  $H \in (0, 1)$ :

$$\text{Cov}_H^{aa}(t, s) \cong t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} D_H,$$

donde  $\cong$  simboliza que tienen la misma forma salvo constantes positivas.

Por otro lado, para  $t > s \geq 0$ , la covarianza del mBf-MV tiene la forma:

$$\text{Cov}_H^{MV}(t, s) \cong |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}, \quad \text{con } 0 < H < 1,$$

por lo cual:

$$\text{Cov}_H^{aa}(t, t) \cong \text{Cov}_H^{MV}(t, t), \quad \forall t \gg 1, \quad \text{con } 0 < H < 1. \quad (3.25)$$

Además, nótese que para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, existen  $t > s \gg 1$  tales que  $t - s < \varepsilon \ll s$ , con lo cual se sigue:

$$t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} D_H \approx t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H},$$

para  $t > s \gg 1$  y  $t - s \ll s$ . Así, se concluye que:

$$\text{Cov}_H^{aa}(t, s) \cong \text{Cov}_H^{MV}(t, s), \quad \forall t > s \gg 1, \text{ con } t - s \ll s \text{ y } H \in (0, 1). \quad (3.26)$$

Por las ecuaciones (3.25) y (3.26), se llega a que la función  $\text{Cov}_H^{aa}(t, s)$  tiene la misma forma que la covarianza  $\text{Cov}_H^{MV}(t, s)$ , salvo constantes positivas para  $t > s \gg 1$ ,  $t - s \ll s$  y  $H \in (0, 1)$ , con lo cual se concluye que la función  $\text{Cov}_H^{aa}(t, s)$  es positiva definida. Luego, debido a que el mBf-RL es un proceso gaussiano con función de covarianza asintótica igual a  $\text{Cov}_H^{aa}$ , implica que se está aproximando al comportamiento asintótico del mBf-RL por medio de un proceso gaussiano con covarianza dada por  $\text{Cov}_H^{aa}$ , el cual se denotará por  $B_H^{aa}$ . Ahora se verá que el proceso  $B_H^{aa}$  es un proceso autosimilar con incrementos estacionarios.

Primero se verificará que el proceso  $B_H^{aa}$  es autosimilar. Sea  $b > 0$  y  $t, s \in T$ , así:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_H^{aa}(bt, bs) &= \frac{C_H}{2} \left[ (bt)^{2H} + (bs)^{2H} - (bt - bs)^{2H} D_H \right] \\ &= \frac{C_H b^{2H}}{2} \left[ t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} D_H \right] \\ &= b^{2H} \text{Cov}_H^{aa}(t, s), \end{aligned}$$

por lo cual el proceso  $B_H^{aa}$  es autosimilar.

Ahora se mostrará que el proceso  $B_H^{aa}$  tiene incrementos estacionarios. Sea  $t \in T$  y  $h > 0$ , de aquí:

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_H^{aa}(t+h) - B_H^{aa}(h)) &= \text{Var}(B_H^{aa}(t+h)) + \text{Var}(B_H^{aa}(h)) - 2\text{Cov}_H^{aa}(t+h, h) \\ &= C_H(t+h)^{2H} + C_H h^{2H} \\ &\quad - C_H \left[ (t+h)^{2H} + h^{2H} - t^{2H} D_H \right] \\ &= t^{2H} D_H, \end{aligned}$$

por lo cual la variable aleatoria  $B_H^{aa}(t+h) - B_H^{aa}(h)$  no depende de  $h$ , lo que prueba que el proceso  $B_H^{aa}$  tiene incrementos estacionarios.

De esta manera se tiene que el proceso  $B_H^{aa}$  es un proceso gaussiano, autosimilar y con incrementos estacionarios, es decir el proceso  $B_H^{aa}$  es un movimiento Browniano fraccionario, por lo tanto hasta el momento se puede decir que el comportamiento asintótico del mBf-RL se puede aproximar por un movimiento Browniano fraccionario, dicho de otra manera, el mBf-RL tiene la propiedad asintótica de que es muy parecido a un movimiento Browniano fraccionario, recalcando así que no son el mismo proceso.

Sin embargo, lo que concierne a continuación es probar que el proceso  $B_H^{aa}$  tiene el mismo proceso de incrementos que el mBf-MV. Para verificarlo primeramente se calculará la covarianza del proceso de incrementos del  $B_H^{aa}$ . Sean  $t > s \gg h > 0$ :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{\Delta}^{aa}(t, s, h) &= \text{E}[(B_H^{aa}(t+h) - B_H^{aa}(t))(B_H^{aa}(s+h) - B_H^{aa}(s))] \\
&= \text{E}(B_H^{aa}(t+h)B_H^{aa}(s+h)) + \text{E}(B_H^{aa}(t)B_H^{aa}(s)) \\
&\quad - \text{E}(B_H^{aa}(t+h)B_H^{aa}(s)) - \text{E}(B_H^{aa}(s+h)B_H^{aa}(t)) \\
&= \text{Cov}_H^{aa}(t+h, s+h) + \text{Cov}_H^{aa}(t, s) \\
&\quad - \text{Cov}_H^{aa}(t+h, s) - \text{Cov}_H^{aa}(t, s+h) \\
&= \frac{C_H}{2} [(t+h)^{2H} + (s+h)^{2H} - D_H(t-s)^{2H}] \\
&\quad + \frac{C_H}{2} [t^{2H} + s^{2H} - D_H(t-s)^{2H}] \\
&\quad - \frac{C_H}{2} [(t+h)^{2H} + s^{2H} - D_H(t-s-h)^{2H}] \\
&\quad - \frac{C_H}{2} [t^{2H} + (s+h)^{2H} - D_H(t-s+h)^{2H}] \\
&= \frac{C_H D_H}{2} [(t-s+h)^{2H} + (t-s-h)^{2H} - 2(t-s)^{2H}],
\end{aligned}$$

luego, de igual manera se calculará la covarianza del proceso de incrementos del mBf-MV. Para  $t > s \gg h > 0$ :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{\Delta}^{MV}(t, s, h) &= \text{E}[(B_H^{MV}(t+h) - B_H^{MV}(t))(B_H^{MV}(s+h) - B_H^{MV}(s))] \\
&= \text{Cov}_H^{MV}(t+h, s+h) + \text{Cov}_H^{MV}(t, s) \\
&\quad - \text{Cov}_H^{MV}(t+h, s) - \text{Cov}_H^{MV}(t, s+h) \\
&= \frac{V_H}{2} [(t-s+h)^{2H} + (t-s-h)^{2H} - 2(t-s)^{2H}],
\end{aligned}$$

ya que se puede probar que  $V_H = C_H D_H$  [Lim, 1995, pag.316], entonces  $\text{Cov}_{\Delta}^{aa}(t, s, h)$  coincide exactamente con  $\text{Cov}_{\Delta}^{MV}(s, t, h)$ , para  $t > s \gg h > 0$ . Es decir el proceso de incrementos del proceso  $B_H^{aa}$  coincide con el proceso de incrementos del mBf-MV.

En resumen se obtuvo que el proceso  $B_H^{aa}$  es la aproximación que se tiene al comportamiento asintótico del mBf-RL, por lo cual se puede concluir que:

- 1) El mBf-RL asintótico tiene un comportamiento muy parecido al mBf. Es decir para valores suficientemente grandes del mBf-RL, éste se parece al mBf, más no son el mismo proceso.
- 2) El proceso de incrementos del mBf-RL asintótico coincide con el proceso de incrementos del mBf.

### 3.2.5. Aproximación del mBf-RL mediante Semimartingalas

Hasta el momento se ha visto que aunque el mBf-RL tiene una representación más sencilla que el mBf, éste es menos rico en propiedades que el movimiento Browniano fraccionario. Sin embargo, una ventaja que tiene el mBf-RL es que se le puede

aproximar de manera natural mediante semimartingalas a pesar de que él mismo no es semimartingala (ver [Base, Pedersen, 2009, pag. 2976]), por lo cual se ha decidido desarrollar la prueba de esta aproximación.

El siguiente lema presenta la familia de semimartingalas con las cuales se aproximará al mBf-RL.

**3.16 Lema.** *Para cada  $\varepsilon > 0$ , sea*

$$B_t^\varepsilon = \int_0^t (t - u + \varepsilon)^{H-\frac{1}{2}} dW_u,$$

donde  $0 < H < 1$ , con  $H \neq \frac{1}{2}$ , y donde el proceso  $\{W_u\}_{u \geq 0}$  es el movimiento Browniano estándar, entonces el proceso  $\{B_t^\varepsilon\}_{t \geq 0}$  es una semimartingala.

**Demostración.** Para cada  $\varepsilon > 0$ , considérese el proceso  $\{\chi_t^\varepsilon\}_{t \geq 0}$ , definido como:

$$\chi_t^\varepsilon = \int_0^t (t - u + \varepsilon)^{\alpha-1} dW_u,$$

donde  $\alpha = H - \frac{1}{2}$ , es decir  $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  ya que  $H \in (0, 1)$ .

$$\begin{aligned} \int_0^t \chi_s^\varepsilon ds &= \int_0^t \int_0^s (s - u + \varepsilon)^{\alpha-1} dW_u ds \\ &= \int_0^t \int_u^t (s - u + \varepsilon)^{\alpha-1} ds dW_u, \quad \text{por el teorema de Fubini estocástico,} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[ \int_0^t (t - u + \varepsilon)^\alpha dW_u - \varepsilon^\alpha W_t \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} [B_t^\varepsilon - \varepsilon^\alpha W_t], \end{aligned}$$

por lo cual se tiene que:

$$B_t^\varepsilon = \alpha \int_0^t \chi_s^\varepsilon ds + \varepsilon^\alpha W_t,$$

de esta manera se obtiene que el proceso  $\{B_t^\varepsilon\}_{t \geq 0}$  es una semimartingala. ■

A continuación se presenta la aproximación del mBf-RL mediante semimartingalas. En este caso  $T$  representa una constante positiva finita.

**3.17 Teorema.** *El proceso  $\{B_t^\varepsilon\}_{t \geq 0}$  converge al proceso  $\{B_H^{RL}(t)\}_{t \geq 0}$  en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y, además, esta convergencia es uniforme con respecto a  $t \in [0, T]$ .*

**Demostración.** Considérese la siguiente desigualdad:

$$(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha,$$

la cual se cumple para toda  $a, b > 0$  y toda  $\alpha \in [0, 1]$ .

Ahora, aplicando la desigualdad anterior al cálculo de la convergencia se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| B_t^\varepsilon - B_H^{RL}(t) \right|^2 &= \mathbb{E} \left( \int_0^t (t-u+\varepsilon)^\alpha dW_u - \int_0^t (t-u)^\alpha dW_u \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left( \int_0^t (t-u+\varepsilon)^\alpha - (t-u)^\alpha dW_u \right)^2 \\ &= \int_0^t \mathbb{E} [(t-u+\varepsilon)^\alpha - (t-u)^\alpha]^2 du, \quad \text{por la isometría de It\^o,} \\ &= \int_0^t [(t-u+\varepsilon)^\alpha - (t-u)^\alpha]^2 du \\ &\leq \int_0^t [(t-u)^\alpha + \varepsilon^\alpha - (t-u)^\alpha]^2 du, \quad \text{usando la desigualdad,} \\ &= \int_0^t \varepsilon^{2\alpha} du \\ &= \varepsilon^{2\alpha} t, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbb{E} \left| B_t^\varepsilon - B_H^{RL}(t) \right|^2 \leq \varepsilon^{2\alpha} T, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.27)$$

■

## Capítulo 4

# Integración estocástica con respecto al mBf

En el capítulo 2 se ha visto que el movimiento Browniano fraccionario no es una semimartingala excepto cuando  $H = \frac{1}{2}$ , es decir cuando se trata del movimiento Browniano estándar. Como consecuencia de ello el cálculo de Itô no puede aplicarse a este proceso y por lo cual se empezaron a desarrollar otros métodos alternativos para definir la integral estocástica con respecto al mBf y, por consiguiente, resolver las ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s^H + \int_0^t b(X_s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (4.1)$$

donde  $T$  es una constante positiva finita.

En el artículo de Lin ([Lin, 1995]) y en el artículo de Dai y Heyde ([Dai, Heyde, 1996]) se ha definido la integral estocástica:  $\int_0^t \sigma_s dB_s^H$ , como un límite de sumas de Riemann en  $L^2$ , pero sólo para el caso  $H > \frac{1}{2}$ . Sin embargo con este enfoque no se cumple que  $E\left(\int_0^t \sigma_s dB_s^H\right) = 0$ . Para atender a este defecto, un nuevo tipo de integral (con media cero) fué definida para  $H > \frac{1}{2}$  por Duncan, Hu y Pasik-Duncan en el artículo [Duncan, Hu, Pasik-Duncan, 2000] usando los productos de Wick (ver [Mishura, 2008, pag. 141]).

Luego, Carmona, Coutin y Montseny en el artículo [Coutin, 2002] desarrollaron una construcción de la integral estocástica con respecto al mBf, con  $H \in (\frac{1}{4}, 1)$ , por medio de un límite de integrales las cuales se aproximan mediante semimartingalas. En este enfoque las técnicas del cálculo de Malliavin son esenciales para establecer la existencia de las integrales.

Este capítulo tiene como objetivo presentar una integral estocástica con respecto al movimiento Browniano fraccionario sin llegar a usar el cálculo de Malliavin [Nualart, 2000] o los productos de Wick. La intención de este capítulo es dar un enfoque informativo sobre el tema.

Para definir la integral con respecto al mBf se tendrán dos casos: cuando  $H > \frac{1}{2}$  y cuando  $H < \frac{1}{2}$ . En el caso  $H > \frac{1}{2}$  se aplica la integral de Young [Nourdin, 2012, pag. 23] para definir la integral estocástica respecto al mBf y además se presenta la fórmula de cambio de variable en el sentido de las integrales de Young. Mientras que para el caso  $H < \frac{1}{2}$  se usa la teoría de los procesos con trayectorias rugosas, denominada en inglés como Rough paths (ver [Coutin, 2002]), con la cual sólo se alcanza a definir un tipo de integral estocástica con respecto al mBf para  $H > \frac{1}{6}$ .

### 4.1. Integración con respecto al mBf cuando $H > \frac{1}{2}$

En esta sección se usará la integral de Young para definir la integral con respecto al mBf cuando  $H > \frac{1}{2}$  con ayuda de las ideas presentadas en el libro [Nourdin, 2012, pag. 23]. Para ello se hará una introducción de los conceptos necesarios.

Sea  $T > 0$  fija. Luego, para cada  $l \in \mathbb{N}$  se denotará por  $\mathcal{C}^l$  al conjunto de funciones  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  que son  $l$  veces diferenciables y cuya  $l$ -ésima derivada es continua.  $\mathcal{C}^0$  denotará el conjunto de funciones continuas.

Por otro lado, para cada  $\alpha \in [0, 1]$  se denotará por  $C^\alpha$  al conjunto de funciones  $\alpha$ -Hölderianas, el cual es el conjunto de funciones  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen:

$$|f|_\alpha := \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|f(t) - f(s)|}{(t-s)^\alpha} < \infty. \quad (4.2)$$

Recuérdese que:

$$|f|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|, \quad (4.3)$$

así, ahora se puede presentar la norma definida en el conjunto  $C^\alpha$ :

$$\|f\|_\alpha := |f|_\alpha + |f|_\infty. \quad (4.4)$$

Sea  $f \in C^\alpha$  fija, luego se define el operador  $T_f : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^1$  como:

$$T_f(g)(t) = \int_0^t f(u) dg(u) = \int_0^t f(u) g'(u) du, \quad t \in [0, T], \quad (4.5)$$

donde  $g \in \mathcal{C}^1$ .

Así, para  $s, t \in [0, T]$ , con  $s < t$ , se tiene que:

$$T_f(g)(t) - T_f(g)(s) = \int_s^t f(u) g'(u) du. \quad (4.6)$$

Con los conceptos anteriores se define la siguiente función para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$J_n(f, g, s, t) = \sum_{k=1}^{2^n} f\left(s + \frac{k}{2^n}(t-s)\right) \times \left\{ g\left(s + \frac{k}{2^n}(t-s)\right) - g\left(s + \frac{(k-1)}{2^n}(t-s)\right) \right\}, \quad (4.7)$$

donde  $f \in C^\alpha$  y  $g \in \mathcal{C}^1$ . Obsérvese que cada  $J_n$  representa una suma de Riemann-Stieltjes, por lo cual la sucesión de funciones  $\{J_n(f, g, s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(f, g, s, t) = \int_s^t f(u) g'(u) du. \quad (4.8)$$

Por otro lado se puede hacer un reordenamiento con los términos de  $J_n$  en la ecuación (4.7) para separar los términos que ya estaban en  $J_{n-1}$  con los términos que se agregaron para formar  $J_n$ , quedando como sigue:

$$\begin{aligned} J_n(f, g, s, t) &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f\left(s + \frac{2k}{2^n}(t-s)\right) \\ &\quad \times \left\{ g\left(s + \frac{2k}{2^n}(t-s)\right) - g\left(s + \frac{(2k-1)}{2^n}(t-s)\right) \right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f\left(s + \frac{(2k-1)}{2^n}(t-s)\right) \\ &\quad \times \left\{ g\left(s + \frac{(2k-1)}{2^n}(t-s)\right) - g\left(s + \frac{(2k-2)}{2^n}(t-s)\right) \right\}, \end{aligned}$$

con lo cual se llega a que:

$$\begin{aligned} &J_n(f, g, s, t) - J_{n-1}(f, g, s, t) \\ &= - \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left[ f\left(s + \frac{2k}{2^n}(t-s)\right) - f\left(s + \frac{(2k-1)}{2^n}(t-s)\right) \right] \\ &\quad \times \left[ g\left(s + \frac{(2k-1)}{2^n}(t-s)\right) - g\left(s + \frac{(2k-2)}{2^n}(t-s)\right) \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto para cualquier  $\beta \in [0, 1]$  se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} &|J_n(f, g, s, t) - J_{n-1}(f, g, s, t)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| f\left(s + \frac{2k}{2^n}(t-s)\right) - f\left(s + \frac{(2k-1)}{2^n}(t-s)\right) \right| \\ &\quad \times \left| g\left(s + \frac{(2k-1)}{2^n}(t-s)\right) - g\left(s + \frac{(2k-2)}{2^n}(t-s)\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{(t-s)^\alpha (t-s)^\beta}{2^{n\alpha} 2^{n\beta}} |f|_\alpha |g|_\beta = \frac{2^{n-1}}{2^{n(\alpha+\beta)}} (t-s)^{\alpha+\beta} |f|_\alpha |g|_\beta \\ &= \frac{2^{-n(\alpha+\beta-1)}}{2} (t-s)^{\alpha+\beta} |f|_\alpha |g|_\beta, \end{aligned}$$

es decir,

$$|J_n(f, g, s, t) - J_{n-1}(f, g, s, t)| \leq \frac{2^{-n(\alpha+\beta-1)}}{2} (t-s)^{\alpha+\beta} |f|_\alpha |g|_\beta. \quad (4.9)$$

Ahora, tomando la sumatoria sobre  $n \geq 1$  en la diferencia de las  $J_n$ 's se sigue que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \{J_n(f, g, s, t) - J_{n-1}(f, g, s, t)\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(f, g, s, t) - J_0(f, g, s, t) \\ &= \int_s^t f(u) g'(u) du - f(t) [g(t) - g(s)], \end{aligned}$$

luego, usando la desigualdad (4.9) obtiene que:

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(u) g'(u) du - f(t) [g(t) - g(s)] \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n(f, g, s, t) - J_{n-1}(f, g, s, t)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n(\alpha+\beta-1)}}{2} (t-s)^{\alpha+\beta} |f|_\alpha |g|_\beta, \end{aligned}$$

de aquí se denotará por  $S_{\alpha, \beta}$  a la expresión  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\alpha+\beta-1)}$ , de esta manera se tiene que:

$$\left| \int_s^t f(u) g'(u) du - f(t) [g(t) - g(s)] \right| \leq S_{\alpha, \beta} (t-s)^{\alpha+\beta} |f|_\alpha |g|_\beta. \quad (4.10)$$

Es necesario observar que  $S_{\alpha, \beta} < \infty$  cuando  $\beta > 1 - \alpha$ , por lo cual se fijará un  $\beta$  tal que  $\beta > 1 - \alpha$ .

A continuación usando la desigualdad (4.10) se obtendrá una desigualdad para la integral  $\int_s^t f(u) g'(u) du$  por medio del siguiente análisis por casos.

Caso 1: De la desigualdad (4.10), si

$$\int_s^t f(u) g'(u) du - f(t) [g(t) - g(s)] \leq S_{\alpha, \beta} (t-s)^{\alpha+\beta} |f|_\alpha |g|_\beta,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_s^t f(u) g'(u) du &\leq f(t) [g(t) - g(s)] + S_{\alpha, \beta} (t-s)^{\alpha+\beta} |f|_\alpha |g|_\beta \\ &\leq |f|_\infty |g|_\beta (t-s)^\beta + S_{\alpha, \beta} (t-s)^{\alpha+\beta} |f|_\alpha |g|_\beta. \end{aligned}$$

Caso 2: De la desigualdad (4.10), si

$$f(t)[g(t) - g(s)] - \int_s^t f(u)g'(u)du \leq S_{\alpha,\beta}(t-s)^{\alpha+\beta}|f|_\alpha|g|_\beta,$$

entonces:

$$\begin{aligned} - \int_s^t f(u)g'(u)du &\leq S_{\alpha,\beta}(t-s)^{\alpha+\beta}|f|_\alpha|g|_\beta - f(t)[g(t) - g(s)] \\ &\leq S_{\alpha,\beta}(t-s)^{\alpha+\beta}|f|_\alpha|g|_\beta + |f|_\infty|g|_\beta(t-s)^\beta. \end{aligned}$$

Y así, por el caso 1 y 2 se llega a que:

$$\left| \int_s^t f(u)g'(u)du \right| \leq S_{\alpha,\beta}(t-s)^{\alpha+\beta}|f|_\alpha|g|_\beta + |f|_\infty|g|_\beta(t-s)^\beta$$

y por lo cual:

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(u)g'(u)du \right| &\leq S_{\alpha,\beta}T^\alpha(t-s)^\beta\|f\|_\alpha\|g\|_\beta + \|f\|_\infty\|g\|_\beta(t-s)^\beta \\ &= (1 + S_{\alpha+\beta}T^\alpha)\|f\|_\alpha\|g\|_\beta(t-s)^\beta. \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata de la desigualdad anterior se siguen las siguientes dos desigualdades:

$$\left| \int_0^\cdot f(u)g'(u)du \right|_\beta \leq (1 + S_{\alpha+\beta}T^\alpha)\|f\|_\alpha\|g\|_\beta, \quad (4.11)$$

y

$$\left| \int_0^\cdot f(u)g'(u)du \right|_\infty \leq (1 + S_{\alpha+\beta}T^\alpha)T^\beta\|f\|_\alpha\|g\|_\beta. \quad (4.12)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\cdot f(u)g'(u)du \right\|_\beta &= \left| \int_0^\cdot f(u)g'(u)du \right|_\beta + \left| \int_0^\cdot f(u)g'(u)du \right|_\infty \\ &\leq (1 + S_{\alpha+\beta}T^\alpha)\|f\|_\alpha\|g\|_\beta \\ &\quad + (1 + S_{\alpha+\beta}T^\alpha)T^\beta\|f\|_\alpha\|g\|_\beta, \quad \text{por (4.11) y (4.12)}. \\ &= (1 + S_{\alpha+\beta}T^\alpha)(1 + T^\beta)\|f\|_\alpha\|g\|_\beta, \quad \text{ya que } |g|_\beta \leq \|g\|_\beta. \end{aligned}$$

Es decir, se ha llegado a que el operador  $T_f(g) = \int_0^\cdot f(u)g'(u)du$  es acotado con respecto a la norma  $\|\cdot\|_\beta$  y por lo tanto es continuo.

El siguiente teorema es la última herramienta necesaria para definir la integral de Young.

**4.1 Teorema.** Sea  $f \in C^\alpha$ , con  $\alpha \in (0, 1)$ , y sea  $\beta \in (0, 1)$  tal que  $\beta + \alpha > 1$ , entonces el operador lineal  $T_f : \mathcal{C}^1 \subset C^\beta \rightarrow C^\beta$  definido por  $T_f(g) = \int_0^\cdot f(u) g'(u) du$  es continuo con respecto a la norma  $\|\cdot\|_\beta$ . Además, por densidad, el operador  $T_f$  se extiende de manera única a un operador  $T_f : C^\beta \rightarrow C^\beta$ .

Una demostración más rigurosa de este teorema se encuentra en [Young, 1936, pag. 265].

**4.2 Definición.** Sea  $f \in C^\alpha$  y  $g \in C^\beta$  tal que  $\beta + \alpha > 1$ . La Integral de Young  $\int_0^\cdot f(u) dg(u)$  esta bien definida como el valor del operador  $T_f(g)$ .

Recordando la Proposición (2.14), ésta afirma que las trayectorias del mBf, con índice  $H \in (0, 1)$  de autosimilaridad, son  $\beta$ -hölderianas para toda  $\beta \in (0, H)$ . De esta manera, la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano fraccionario,  $B^H$ , está bien definida como integral de Young para toda  $f \in C^\alpha$ , donde  $\alpha > 1 - \beta \in (1 - H, 1)$ .

A continuación se presenta la fórmula de cambio de variable en el sentido de las integrales de Young.

**4.3 Teorema.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función en  $\mathcal{C}^2$ , y sean  $f, g \in C^\alpha$ , con  $\alpha \in (1/2, 1]$ , entonces las integrales:

$$\int_0^\cdot \frac{\partial \phi}{\partial f}(f(u), g(u)) df(u), \quad (4.13)$$

y

$$\int_0^\cdot \frac{\partial \phi}{\partial g}(f(u), g(u)) dg(u), \quad (4.14)$$

estan bien definidas como integrales de Young. Además, para toda  $t \in [0, T]$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi(f(t), g(t)) &= \phi(f(0), g(0)) + \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial f}(f(u), g(u)) df(u) \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial g}(f(u), g(u)) dg(u). \end{aligned} \quad (4.15)$$

## 4.2. Integración con respecto al mBf cuando $H < \frac{1}{2}$

La integral estocástica con respecto al mBf con índice  $H < \frac{1}{2}$  se puede definir directamente por medio de la integral de Young, sin embargo el problema está en que no se puede aplicar el Teorema (4.3) debido a que las trayectorias del proceso  $B^H$  son  $\beta$ -hölderianas con  $\beta \in (0, H)$ . Por tal razón se busca otra manera de definir la integral estocástica con el fin de obtener un resultado similar al Teorema (4.3) pero ahora para  $H \in (0, \frac{1}{2})$ .

**4.4 Definición.** Sean  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  y  $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$  procesos estocásticos continuos. Se define la integral simétrica del proceso  $Y$  respecto al proceso  $X$  como:

$$\int_0^T Y_s d^\circ X_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left( Y_{\frac{(k+1)T}{n}} + Y_{\frac{kT}{n}} \right) \left( X_{\frac{(k+1)T}{n}} - X_{\frac{kT}{n}} \right), \quad (4.16)$$

siempre y cuando el límite existe en probabilidad.

**4.5 Teorema.** Sea  $B^H$  un movimiento Browniano fraccionario con índice de autosimilaridad  $H > \frac{1}{6}$ ,  $T > 0$  fijo y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función en  $\mathcal{C}^\infty$  con un crecimiento polinomial junto con todas sus derivadas, entonces la integral  $\int_0^T f'(B_s^H) d^\circ B_s^H$  existe en el sentido de la Definición (4.4), y se tiene que:

$$f(B_T^H) = f(0) + \int_0^T f'(B_s^H) d^\circ B_s^H. \quad (4.17)$$

Este teorema proporciona una fórmula de cambio de variable para  $f(B_T^H)$ , con la desventaja de que es para un conjunto muy restringido de integrales, ya que a la función  $f$  en el Teorema (4.5) se le pide que tenga un crecimiento polinomial, que tenga todas sus derivadas y que se encuentre en  $\mathcal{C}^\infty$ . Por otro lado, la ventaja que tiene este teorema se cumple para toda  $H > \frac{1}{6}$  y además no usa la teoría del cálculo de Malliavin, el cual requiere de muchas herramientas para estudiarlo.

La demostración del Teorema (4.5) es muy extensa y por lo cual se omite en esta sección, sin embargo puede consultarse en [Nourdin, 2012, pag. 32].



# Conclusiones

El resultado más relevante que se presentó en el primer capítulo de la tesis es que para probar la igualdad en distribución de procesos gaussianos centrados sólo es necesario verificar que sus funciones de covarianza coincidan. Este resultado sirvió de gran ayuda para demostrar de una manera muy sencilla que el movimiento Browniano fraccionario es un proceso autosimilar, y cuya propiedad es fundamental.

Otro detalle que se puede resaltar del capítulo 1 es que el movimiento Browniano fraccionario es una generalización del movimiento Browniano en el sentido de que el movimiento Browniano es autosimilar de índice  $\frac{1}{2}$  mientras que el movimiento Browniano fraccionario extiende ese índice al conjunto  $(0, 1)$ , obteniendo como caso particular al movimiento Browniano cuando el índice es  $\frac{1}{2}$ .

Del capítulo 2 se destacan las caracterizaciones del movimiento Browniano fraccionario, es decir el hecho de que un proceso gaussiano autosimilar y con incrementos estacionarios es equivalente a un proceso gaussiano centrado con función de covarianza dada por:

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{1}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right) \text{Var}(X_1), \quad \forall t, s \in T.$$

Además, las propiedades del movimiento Browniano fraccionario que contrastan con las propiedades del movimiento Browniano clásico es que el mBf no es semimartingala, tiene dependencia de corto y largo plazo en sus incrementos, y no es un proceso de Markov.

En el capítulo 3 se analizaron algunas de las diferencias y a su vez coincidencias entre el movimiento Browniano fraccionario y el movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville, como el hecho de que para tiempos suficientemente grandes el mBf-RL tiene un comportamiento muy parecido al mBf, con lo cual se deja al criterio del lector usar al movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville como un movimiento Browniano fraccionario, como se ha usado en los artículos mencionados en el capítulo 3.

Por último, el capítulo 4 es consecuencia inmediata del hecho de que el movimiento Browniano fraccionario no es semimartingala, ya que por esta razón no se le puede aplicar el cálculo de Itô para definir la integral estocástica respecto al mBf. Este capítulo en sí se quedó corto en el estudio de la integral estocástica respecto al mBf debido a que se ocupan otras teorías distintas a la del Cálculo de Itô, como por

ejemplo la teoría de las integrales de Young y la teoría de las trayectorias rugosas (de las cuales se proporcionó una introducción de ellas en este capítulo), para poder definir la integral, y aunque se alcanzó a dar una idea del tema, sin usar muchos conceptos nuevos, se espera como trabajo a futuro profundizar más en ello.

## Resumen de propiedades

En esta sección se presenta una recopilación de las propiedades de los procesos gaussianos que se abordaron en el capítulo 1 como ejemplos de procesos gaussianos.

La propiedad de semimartingala de algunos procesos no se probaron en este trabajo ya que es extensa su demostración, por lo cual a continuación se enumeran algunas referencias donde se pueden encontrar las demostraciones.

- (1) [Bojdecki, 2004]. Demostración de la propiedad de semimartingala del movimiento Browniano Subfraccionario.
- (2) [Russo, 2006]. Demostración de la propiedad de semimartingala del movimiento Browniano Bifraccionario.
- (3) [Cheridito, 2001]. Demostración de la propiedad de semimartingala del movimiento Browniano Mezclado.
- (4) [Base, Pedersen, 2009]. Demostración de la propiedad de semimartingala del movimiento Browniano fraccionario de Riemann-Liouville.

Proceso Gaussiano	Incrementos estacionarios	Incrementos independientes	Proceso estacionario	Autosimilar	Proceso de Markov	Semimartingala
Movimiento Browniano	✓	✓	×	0.5 ✓	✓	✓
Puente Browniano	✓	×	×	×	✓	✓
Ornstein-Uhlenbeck	✓	×	✓	×	✓	✓
MBf con índice $H \in (0, 1)$	✓	×	×	✓	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$
MB Subfraccionario con índice $H \in (0, 1)$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	×	✓ $H \in (0, 1)$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$ Ver (1).	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$ Ver (1).
MB Bifraccionario con índice $H \in (0, 1)$ y $K \in (0, 1]$	$K \neq 1 \times$ $K = 1 \checkmark$	$H \neq 0.5 \times$ o $K \neq 1 \times$ $H = 0.5$ y $K = 1 \checkmark$	×	✓ $H \in (0, 1)$ y $K \in (0, 1]$	$2HK \neq 1 \times$ $2HK = 1 \checkmark$ Ver (2).	$2HK \neq 1 \times$ $2HK = 1 \checkmark$ Ver (2).
MB Mezclado con índice $H \in (0, 1)$	✓	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	×	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	$H \in (0, \frac{3}{4}] - \{0.5\} \times$ $H \in (\frac{3}{4}, 1) \cup \{0.5\} \checkmark$ Ver (3).
MBf-RL con índice $H \in (0, 1)$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	×	✓ $H \in (0, 1)$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$	$H \neq 0.5 \times$ $H = 0.5 \checkmark$ Ver (4).



# Bibliografía

- Haidar Al-Talibi, *On the Relevance of Fractional Gaussian Processes for Analysing Financial Markets*, Report from MSI, Master's Thesis, Växjö University, Sweden, (2007).
- Andreas Base, Jan Pedersen, *Lévy driven moving averages and semimartingales*, *Stochastic Processes and their Applications*, **119**, (2009), pp. 2970-2991.
- F. Biagini, Y. Hu, B. Oksendal, T. Zhang, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer, 2008.
- Tomasz Bojdecki, Luis G. Gorostiza, Anna Talarczyk, *Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times*, *Statistics & Probability letters*, **69**, (2004), pp. 405-419.
- J.C. Breton, *Cours de Processus Gaussiens*, Université de La Rochelle, France, 2006.
- D. C Brody, J. Syroka, M. Zervos, *Dynamical pricing of weather derivatives*, *Quantitative Finance*, **2**, (2002), pp. 189-198.
- Andrea Cavanzo, Liliana Blanco, *El movimiento Browniano fraccional como límite de ciertos tipos de procesos estocásticos*, *Revista Colombiana de Estadística*, **28**, N. 2, (2005), pp. 173-191.
- Patrick Cheridito, *On Mixed fractional Brownian motion*, *Bernoulli* **7**, N. 6, (2001), pp. 913-934.
- Laure Coutin, *An introduction to (Stochastic) Calculus with respect to fractional Brownian motion*, *Séminaire de Probabilités XL, Lecture Notes in Math*, **1899**, Springer, (2007), pp. 3-65.
- Laure Coutin, Zhongmin Qian, *Stochastic Analysis, Rough path analysis and fractional Brownian motions*, *Probability theory and related fields*, Springer, **122**, N.1, (2002), pp. 108-140.

- P. CARMONA, L. COUTIN, G. MONTSENY, *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics, **39**, N.1, (2003), pp. 27-68.
- W. DAI, C. C. HEYDE, *Itô's formula with respect to fractional Brownian motion and its application*, Journal of Appl. Math. and Stoch. An., **9**, (1996), pp. 439-448.
- T. E. DUNCAN, Y. HU, B. PASIK-DUNCAN, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory*, SIAM J. Control Optim., **38**, (2000), pp. 582-612.
- PAUL EMBRECHTS, MAKOTO MAEJIMA, *An introduction to the theory of selfsimilar stochastic processes*, International Journal of Modern Physics B, **14**, (2000), pp. 1399-1420.
- J.E. FIGUEROA LÓPEZ, *Construcción de procesos autosimilares con varianza finita*, Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, 2000.
- C. HUNDRÉ, J. VILLA, *An example of infinite dimensional quasi-helix*, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, **336**, (2003). pp.195-201.
- H.E. HURST, *Long-term storage capacity in reservoirs*, Trans. Amer Soc. Civil. Eng., **116**, (1951). pp. 400-410.
- TRAN HUNG THAO, *An approximate approach to fractional analysis for finance*, Academy of Science and Technology of Vietnam, Nonlinear Analysis: Real World Application, **7**, (2006), pp. 124-132.
- ANDREI N. KOLMOGOROV, *Wiensche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum (Alemán)*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.), **26**, (1940), pp. 115-118.
- MIKHAIL LIFSHITS, THOMAS SIMON, *Small deviations for fractional stable process*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, **41**, (2006), pp. 725-752.
- S.C. LIM, *Fractional Brownian motion and multifractional Brownian motion of Riemann-Liouville type*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **34**, (2001), pp. 1301-1310.
- S.C. LIM, V.M. SITHI, *Asymptotic properties of the fractional Brownian motion of Riemann-Liouville type*, Physics Letters A, **206**, (1995), pp. 311-317.
- S.J. LIM, *Stochastic analysis of fractional Brownian motions*, Stochastic and Stoch. Reports, **55**, (1995), pp. 121-140.
- JOSEP LLOSA, JAUME MASOLIVER, *Fractal dimension for Gaussian colored processes*, Physica Review A, **42**, N. 8, (1990), pp. 5011-5014.

- B. B. MANDELBROT, *On a Eigenfunction Expansion and on Fractional Brownian Motions*, Lettere al Nuovo Cimento, **33**, N.17, (1982), pp. 549-550.
- B. B. MANDELBROT, J.W. VAN NESS, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review, **10**, N. 4, (1968), pp. 422-437.
- MICHEL MÉTIVIER, *Semimartingales: A course on Stochastic Processes*, Walter de Gruyter-Berlin-New York, 1982.
- YULIYA MISHURA, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Lecture Notes in Mathematics, **1929**, Springer, 2008.
- ARNOLD F. NIKIFOROV, VASILII B. UVAROV, *Special Functions of Mathematical Physics, A Unified Introduction with Applications*, Birkhäuser, 1988.
- RIMAS NORVAISA, *A complement to Gladyshev's Theorem*, Lithuanian Mathematical Journal, **51**, N. 1, (2011), pp. 26-35.
- IVAN NOURDIN, *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*, Bocconi University Press, Springer, 2012.
- D. NUALART, *Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst index  $H < \frac{1}{2}$* , Stochastic Processes and their Applications, **86**, (2000), pp. 121-139.
- KEITH B. OLDHAM, JEROME SPANIER, *The Fractional Calculus*, Dover Publications, Inc., 2006.
- A.P. PRUDNIKOV, YU. A. BRYCHKOV, O.I. MARICHEV, *Series e Integrales. Funciones Especiales. Capítulos Adicionales*, Vol. 3, Bibfizmat, 2003.
- SANDRO RAMBALDI, OBRETTA PINAZZA, *An accurate fractional Brownian motion generator*, Physica A, **208**, (1994), pp. 21-30.
- DANIEL REVUZ, MARC YOR, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **293**, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer, 1999.
- J. RUIZ DE CHÁVEZ SOMOZA, *Integral de Itô para Semimartingalas Continuas*, Colección UAM-CBI, 1995.
- G. SAMORODNITSKY, M.S. TAQQU, *Stable non gaussian random processes*, Chapman & Hall., 1994.
- SOUMIK SARKAR, *Fractional Brownian Motion: Long range dependency, Markov property, Simulation strategy-A review*, United Technologies Research Center, Stochastic Process Course, 2008.

- A.N.SHIRYAEV, *Probability*, Second Edition, Springer, 1996.
- M. S. TAQQU, *Benoît Mandelbrot and Fractional Brownian Motion*, Statistical Science, **28**, No. 1, (2013), pp. 131-134.
- NGUYEN TIEN DUNG, TRAN HUNG THAO, *An approximate approach to fractional stochastic integration and its applications*, Brazilian Journal of Probability and Statistics, **24**, No. 1, (2010), pp. 57-67.
- O. TOUSSON, *Mémoires sur l'Histoire du Nile*, Mémoires de l'Institut d'Égypte, (1925), pp. 366-385.
- C. TUDOR, *Procesos Estocásticos*, Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, 2002.
- KAOUACHE RAFIK, *Memoire: Quelques proprietes du Mouvement Brownien classique et Mouvement Brownien Fractionnaire(Le Modele de Black et Scholes)*, Université Mentouri-Constantine.
- FRANCESCO RUSSO, CIPRIAN A. TUDOR, *On bifractional Brownian motion*, Stochastic Processes and their Applications, **116**, (2006), pp. 830-856.
- DAVID WILLIAMS, *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, 2008.
- LAURENCE C. YOUNG, *An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration*, Acta Mathematica, **67**, No. 1, (1936), pp. 251-282.
- M. ZÄHLE, *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. Part I*, Probability Theory and Related Fields, **111**, (1998), pp. 333-374.
- MOUNIR ZILI, *On the Mixed Fractional Brownian Motion*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, **2006**, 2006, pp. 1-9.