Universidad Autónoma Metropolitana
Posgrado en Matemáticas

Espacios de Bergman

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con especialidad en

Matemáticas

P R E S E N T A:

Luis Javier Carmona Lomeli

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Lino Feliciano Reséndiz Ocampo.

Sinodales

Dra. Maribel Loaiza Leyva.

Dr. Antoni Wawrzyñczyk Wilkiewicz.

Dr. Lino Feliciano Reséndiz Ocampo.

24 de Mayo de 2013 Distrito Federal, México.

No sé si volveremos en un ciclo segundo

como vuelven las cifras de una fracción periódica;

pero sé que una oscura rotación pitagórica

noche a noche me deja en un lugar del mundo.

DEDICATORIAS

A mi Padre y Madre:

José y Eleuteria

Quienes me trajeron a este mundo y sin escatimar esfuerzo alguno sacrificaron gran parte de su vida para educarme. Jamás encontraré la forma de agradecer su apoyo, comprensión y confianza. Mis logros son también suyos e inspirados en ellos, hago de ellos éste triunfo y quiero compartirlo por siempre con ustedes.

A mi Esposa e Hija

Rosario y Rosario Elizabeth.

A mi esposa por su constante apoyo, comprensión, amor y por darme la gran alegría de ser pápa. A mi hija por ser un nuevo motor en mi vida para seguir adelante.

A mis Hermanos:

Juan Pablo, Sandra Elizabeth y José Emilio

Para quienes su ilusión ha sido verme convertido en un hombre de provecho. Y que siempre están a mi lado para alentarme a seguir.

A mis Abuelitos:

Liboria, David y Juana

Que siempre estuvierón a mi lado para alentarme a seguir adelante.

A mis Amigos:

Alfonso Hernández Montes y Diana Jiménez Suro.

Gracias a ellos mi estancia en el posgrado fue más amena e interesante.

AGRADECIMIENTOS

A mi Director de Tesis:

Dr. Lino Feliciano Reséndis Ocampo

Por dirigirme en este trabajo de tesis, dedicándome su invaluable ayuda, tiempo y atención. Por ser una parte esencial de mi formación académica y sobre todo por la amistad y confianza brindada.

A mis Revisores de Tesis:

Dra. Maribel Loaiza Leyva, Dr. Antoni Wawrzynczyk Wilkiewicz y Dr. Lino Feliciano Reséndis Ocampo.

Por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis, así como las sugerencias que me hicieron para hacer de ella un mejor trabajo.

Índice general

Resumen

El presente trabajo es un estudio sobre uno de los espacios ponderados de funciones analíticas más importantes: el llamado espacio de Bergman. Se presentan algunas de sus propiedades y la relación que tiene con otros espacios de funciones.

En el primer capítulo se definen los espacios de Bergman y se estudian las propiedades básicas de dichos espacios. A continuación para un mejor estudio de la proyección de Bergman se usan una estimación integral y el lema de Schur para obtener un resultado muy general para operadores acotados en ciertos espacios L^p. La mayoria de las pruebas relativas a los espacios de Bergman pesados se basan en cálculos explícitos con el núcleo reproductor y su operador asociado. Finalmente mediante un operador fraccionario de derivación se ve el papel relevante que juegan los espacios de Bloch en la teoría de los espacios de Bergman, pues representan a los espacios duales para exponentes pequeños $(0 < p < 1)$. También se dan algunas caracterizaciones entre los espacios de Bloch relativas a la métrica de Bergman.

El propósito del segundo capítulo es estudiar algunas de las propiedades algebraicas y analíticas más relevantes referentes a la transformada de Berezin. El resultado principal que se muestra en este capítulo es que una función $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ es fijada por la transformada de Berezin si y sólo si f es armónica. Este resultado es consecuencia de una aplicación elegante del teorema del cálculo funcional de Riesz y el teorema espectral.

En la parte final se introduce el concepto de las medidas de Carleson para los espacios de Bergman ponderados, además se estudia lo esencial que son estas medidas en los espacios tipo BMO y VMO en el disco, definiendo los promedios usando la métrica de Bergman. Se obtiene una caracterización de estos espacios en términos de la transformada de Berezin. Además se muestra que la parte analítica de los espacios BMO coincide con el espacio de Bloch. Por último se da un elegante resultado de Coburns L. A. que establece que la transformada de Berezin de cualquier operador lineal acotado satisface una fuerte condición de Lipschitz en términos de la métrica de Bergman.

Introducción

Uno de los objetivos fundamentales del Análisis Funcional es el estudio de algunas de las propiedades de las familias de funciones en su dominio de definición, por ejemplo: en base a su continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, alguna característica geométrica o sus valores límite al aproximarse a la frontera, etc. y con ello por similitud establecer clases de funciones, las cuales en muchos casos llegan además a constituir algún tipo de espacios de funciones.

Gracias al Teorema de Mapeo de Riemman del Análisis Complejo, muchas veces basta estudiar la familia de funciones analíticas en el disco unitario para saber cual es su comportamiento en cualquier dominio simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$, como sucede en el caso de las propiedades conformemente invariantes.

El estudio de los espacios de Bergman se remonta al año 1950, cuando **Stefan Bergman** publicó su monografía titulada **The Kernel Function and Conformal Mapping**, en el cual desarrolla la teoría de los espacios de Hilbert de funciones analíticas sobre un dominio Ω en el plano. El trabajo de Bergman se centro en el estudio del espacio de las funciones analíticas, cuadrado integrables sobre un dominio Ω, con respecto a la medida de área de Lebesgue. Está teoría se apoyó en la existencia de una función núcleo reproductor, la cual hoy en día es conocida como la función **núcleo de Bergman**.

Cuando se inicio el estudio de los espacios $A^p_\alpha(\mathbb{D})$, de las funciones analíticas p integrables, $0 < p \leq \infty$, sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, fue natural llamarlos **Espacios de Bergman Ponderados**.

En los últimos años la teoría de los espacios de Bergman tuvo cambios muy importantes debido a un enfoque desde el análisis funcional y la teoría de operadores. Algunos resultados notables son la caracterización de sucesiones de interpolación, el descubrimiento de Hedenmalm de los divisores contrativos de cero, las relaciones entre las funciones interiores de Bergman y la función biarmónica de Green encontradas por Duren, Khavinson, Shapiro y Sundberg y resultados concernientes a subespacios invariantes por Aleman, Borichev, Hedenmalm, Richter, Shimorin y Sundberg.

En una serie de importantes avances los problemas centrales que parecian intratables fueron resueltos y así surgió una nueva teoría muy rica. Hoy en día se sigue avanzando en dicha teoría y se ha logrado unificar con los nuevos métodos los resultado anteriormente obtenidos. Así el estudio de los espacios de Bergman se ha convertido en una síntesis magistral entre la teoría de la variable compleja, del análisis funcional y la teoría de operadores. Destaca la presencia de la geometría hiperbólica que permite, entre otras cosas, ver la relación que hay entre los espacios de Bergman ponderados y los espacios de Bloch y BMOA.

La teoría de las funciones ponderadas estudia y clasifica a las funciones analíticas por medio de su comportamiento al aproximarse la variable, a la frontera de su dominio valiéndose para ello de determinados factores de peso y midiendo con diversas herramientas matemáticas la función así ponderada. Dicha teoría inició a principios del siglo XX debido a **Stefan Bergman** y algunos de los aportes recientes más relevantes a ésta los han hecho **Kehe Zhu**, **Boris Korenblum**, **Haakan Hedenmalm**, **Peter Duren**, **Coburns L. A.**, **Aleman**, **Borichev**, **Richter**, **Shimorin**,**Sundberg**, entre otros.

El estudio de los espacios de Bergman no es parte del plan de estudios de una licenciatura o de una maestría, mas bien queda confinado a un tópico particular de estudio e investigación para estudiantes graduados o investigadores. Dos referencias recientes de mayor importancia son los libros de Theory of Bergman Spaces [8] y Bergman Spaces [5].

Un objetivo primordial de este trabajo fue presentar nociones básicas de la teoría de los espacios de Bergman y rápidamente pasar al estudio de algunos tópicos de esta teoría. Se han escrito pruebas detalladas de todos los resultados, haciendo este trabajo autocontenido, que permita al lector una aproximación más accesible a este material. Esta tesis puede ser usada como un curso introductorio a la teoría de espacios de Bergman. Más aún, es deseable que la lectura previa de este material le permita al lector interesado abordar el libro de *Theory of Bergman Spaces* [8] con mayor prestancia y fluidez.

Se recurrió a las fuentes originales para poder escribir con mayor claridad algunas de las pruebas presentadas en este trabajo. El escrito refleja explicitamente la estrecha relación que hay entre el analísis funcional, la teoría de operadores, la variable compleja y la geometria hiperbólica para soportar esta aproximación al estudio de la teoria de los espacios de Bergman.

Capítulo 1

ESPACIOS DE BERGMAN

La finalidad de este capítulo es definir los Espacios de Bergman ponderados en el disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, y probar algunas de las propiedades de estos espacios. Así mismo se definen los Espacio de Bloch los cuales son la imagen de funciones acotadas bajo la proyección de Bergman.

Los Espacios de Bloch juegan un papel muy importante en esta teoría, pues representan a los espacios duales de los espacios de Bergman para exponentes pequeños ($0 < p \leq 1$).

También se estudian algunas estimaciones relativas a los espacios $L^p(\mathbb{D}, dA)$, las cuales permiten caracterizar los espacios de Bergman ponderados y los espacios de Bloch.

En lo sucesivo, $B(a, r)$ denotará al disco Euclideano con centro en a y radio r. En particular cuando $a = 0$ se escribirá $B(0, r) = B(r)$.

1.1. Espacios de Bergman

Definición 1.1.1. *Para $0 < p < \infty$ y $-1 < \alpha < +\infty$ se definen los **espacios de Bergman ponderados** $A^p_\alpha = A^p_\alpha(\mathbb{D})$ del disco unitario, como el espacio de las funciones analíticas en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, donde la medida dA_α está definida como*

$$dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha \; dA(z),$$

y $dA(z)$ es la medida normalizada de Lebesgue dada por

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} \; dx \; dy = \frac{1}{\pi} \; r \; dr \; d\theta.$$

Si f está en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, se escribe

$$\|f\|_{p,\alpha} = \Big(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \; dA_\alpha(z) \Big)^{\frac{1}{p}},$$

en el caso en que $\alpha = 0$ simplemente se escribe $\|f\|_p = \|f\|_{p,0}$.

Lema 1.1.2. *Si α es un número real, entonces*

$$\frac{1}{\alpha+1} = \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) < \infty$$

si y sólo si $\alpha > -1$. Luego

$$\int_{\mathbb{D}} dA_\alpha(z) = 1.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^\alpha \frac{r}{\pi} \, d\theta dr \\
&= 2\int_0^1 (1-r^2)^\alpha \, r \, dr \\
&= -\frac{(1-r^2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

■

Se observa que si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es un espacio de Banach con norma dada por $\|f\|_{p,\alpha}$ y si $0 < p < 1$, el espacio $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es un espacio métrico completo con la métrica dada por

$$d(f,g) = \|f-g\|_{p,\alpha}^p.$$

Como $d(f-g,0) = d(f,g)$, la métrica es invariante, además es también p-homogénea, es decir, $d(\lambda f, 0) = |\lambda|^p d(f,0)$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. A los espacios de este tipo se les llama casi-Banach, porque ellos comparten muchas propiedades de los espacios de Banach.

Se usarán frecuentemente los operadores diferenciales de Wirtinger

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

También serán de utilidad la siguiente proposición y colorario:

Proposición 1.1.3. *Si f y g son funciones continuas y diferenciables y además $f \circ g$ está bien definida en algún conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, entonces se tiene que*

$$\frac{\partial}{\partial z}(f\circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}(z)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f\circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}(z)$$

Corolario 1.1.4. *Si f ó g es holomorfa, entonces*

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial z}(z).$$

Se denota por $L^\infty(\mathbb{D})$ el espacio de todas las funciones esencialmente acotadas en $\mathbb{D}$ y para $f \in L^\infty(\mathbb{D})$, se define

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess}\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}.$$

Así el espacio $L^\infty(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Se denota por H^∞ al espacio de funciones analíticas acotadas en $\mathbb{D}$. Como H^∞ es cerrado en $L^\infty(\mathbb{D})$, entonces H^∞ es un espacio de Banach por si mismo.

Definición 1.1.5. *Sea u una función real continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. La función u se dice* ***subarmónica*** *en Ω si*

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\ d\theta,$$

para cada $a \in \Omega$ y todo $r > 0$ tal que el disco $B(a, r)$ está completamente contenido en Ω.

Sea $0 \leq p < \infty$ y f una función analítica sobre y en el interior de una circunferencia $|z - a| = r$, se tiene por subarmonicidad

$$|f(a)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^p\ d\theta. \tag{1.1}$$

Por tal motivo, el módulo $u = |f|$ de una función analítica sobre el disco $\mathbb{D}$ resulta ser una función subarmónica en $\mathbb{D}$, lo mismo también es cierto en virtud del Teorema 3.3.7 (ver Apéndice) para la función $h = |f|^p$ con $p \geq 0$. De la ecuación (1.1) se tiene que

$$\begin{aligned} |f(a)|^p \int_0^R r\ dr &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^R \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^p\ d\theta\ r\ dr \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^R \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^p\ r\ dr\ d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{B(a,R)} |f(z)|^p\ dA(z), \end{aligned}$$

pero como $\int_0^R r\ dr = \dfrac{R^2}{2}$ se tiene

$$|f(a)|^p = \frac{1}{R^2}\int_{B(a,R)} |f(z)|^p\ dA(z),$$

es decir

$$|f(a)|^p \leq \frac{1}{|B(a, R)|_A}\int_{B(a,R)} |f(z)|^p\ dA(z). \tag{1.2}$$

El siguiente resultado dice que las funciones en los espacios de Bergman ponderados y sus derivadas tienen un crecimiento acotado sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

Proposición 1.1.6. *Supóngase que $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ y que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n, K, p, \alpha)$ tal que*

$$\sup\{|f^n(z)| : z \in K\} \leq C\|f\|_{p.\alpha}$$

para toda $f \in A^p_\alpha$ y toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En particular cada evaluación puntual en $\mathbb{D}$ $T_z(f) = f(z)$ es un funcional lineal acotado en A^p_α con $p \geq 1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

para algún $r \in (0, 1)$. Primero se probará el resultado cuando $n = 0$. Sea $\sigma = \dfrac{1-r}{2}$ y sea $B(z, \sigma)$ al disco Euclideano. Entonces para $z \in K$ se tiene

$$1 - |z|^2 \geq 1 - |z| \geq (1 - r)/2,$$

por esta desigualdad y por (1.2) se tiene

$$\begin{aligned}
|f(z)|^p &\leq \frac{1}{\sigma^2}\int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p \, dA(w) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\frac{\alpha+1}{\alpha+1}\int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p \frac{(1-|w|)^\alpha}{(1-|w|)^\alpha} \, dA(w) \\
&\leq \frac{2}{\sigma^2(\alpha+1)(1-r)^\alpha}\int_{B(z,\sigma)} |f(w)|^p \, dA_\alpha(w) \\
&= C \, \|f\|_{p,\alpha},
\end{aligned}$$

donde

$$C = \frac{2}{\sigma^2(\alpha+1)(1-r)^\alpha}$$

y así se encuentra una constante positiva C (la cual depende sólo de r). Esto prueba el resultado para el caso en que $n = 0$.

Para el caso cuando $n \geq 1$, considérese el compacto K como antes. Sea $R = \frac{1+r}{2}$, así $0 < r < R < 1$. El caso anterior implica que existe $M > 0$ tal que

$$|f(\zeta)| \leq M\|f\|_{p,\alpha}, \qquad \text{para toda} \quad |\zeta| = R.$$

Puesto que $f^{(n)}$ es analítica en el interior de la circunferencia $|\zeta| = R$ y sobre ella y K está contenido en el interior de dicha circunferencia, entonces para toda $z \in K$ se satisface la fórmula integral de Cauchy, es decir,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Por lo tanto

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} \, |d\zeta| \leq \frac{n!MR}{\sigma^{n+1}} \|f\|_{p,\alpha}$$

para todo $z \in K$ y $f \in A^p_\alpha$.

■

Proposición 1.1.7. *Para cada $0 < p < \infty$ y $-1 < \alpha < +\infty$ el espacio de Bergman A^p_α es cerrado en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en A^p_α y supóngase que $f_n \to f$ en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. En particular $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Sin pérdida de generalidad considerése el disco compacto $K = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r\}$ con $0 < r < 1$. Así por la proposición anterior existe $M > 0$ tal que

$$|f_n^{(k)}(z) - f_m^{(k)}(z)| \leq M \|f_n - f_m\|_{p,\alpha}$$

En particular para $k = 0$ se tiene que

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq M \|f_n - f_m\|_{p,\alpha},$$

para cada $z \in K$. Por lo tanto la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ a f y por tanto f es analítica en $\mathbb{D}$, luego pertenece a A^p_α.

■

Como consecuencia de la proposición anterior el espacio de Bergman A^p_α es un espacio de Banach cuando $1 \leq p < \infty$ y es un espacio métrico completo cuando $0 < p < 1$.

Definición 1.1.8. *Para una función f en $\mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, sea f_r la función dilatación dada por $f_r(z) = f(rz), \quad z \in \mathbb{D}$.*

En muchas aplicaciones se aproxima una función en el espacio de Bergman A^p_α por una sucesión de funciones. El siguiente resultado da dos usos comunes de ésto.

Proposición 1.1.9. *Para una función analítica f en $\mathbb{D}$ y $0 < r < 1$. Entonces si $0 < p < \infty$*

(1) Para cada $f \in A^p_\alpha$ se tiene que $\|f_r - f\|_{p,\alpha} \longrightarrow 0$ cuando $r \to 1^-$.

(2) Para cada $f \in A^p_\alpha$ existe una sucesión $\{p_n\}$ de polinomios tales que $\|p_n - f\|_{p,\alpha} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Sea f una función en $A^p_\alpha(\mathbb{D})$. Para probar el inciso (1), sea δ un número en el intervalo $(0,1)$ y obsérvese que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) \\
&\quad = \int_{|z|\le\delta} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) + \int_{\delta<|z|<1} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) \\
&\quad \le \int_{|z|\le\delta} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) + \int_{\delta<|z|<1} \Big(|f_r(z)| + |f(z)|\Big)^p \, dA_\alpha(z)
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ y puesto que $f \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, se puede elegir δ muy cercano a 1 tal que

$$\int_{\delta<|z|<1} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) < \frac{\epsilon}{2^{p+2}}.$$

Por otro lado sean $\delta', r \in (0,1)$ tales que $\delta < \delta' < 1$ y $\dfrac{\delta}{\delta'} < r < 1$. Tomando el cambio de variable $w = rz$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\delta'<|z|<1} |f(rz)|^p \, dA_\alpha(z) &= \int_{\delta' r<|w|<r} |f(w)|^p r^2 \, dA_\alpha(z) \\
&\le \int_{\delta<|w|<1} |f(w)|^p \, dA_\alpha(z) < \frac{\epsilon}{2^{p+2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\delta'<|z|<1} \Big(|f_r(z)| + |f(z)|\Big)^p \, dA_\alpha(z) &\le 2^p \int_{\delta<|z|<1} |f_r(z)|^p \, dA_\alpha(z) \\
&+ 2^p \int_{\delta<|z|<1} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Como δ' está fijo, por la continuidad uniforme de f en el disco cerrado $|z| \le \delta'$, sea $0 < R < 1$ tal que

$$|f(rz) - f(z)| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p}.$$

para toda $R < r < 1$. Por lo tanto

$$\int_{|z|\le\delta'} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) < \frac{\varepsilon}{2},$$

lo que prueba (1).

Para mostrar el inciso (2), sean $\varepsilon > 0$ y $0 < r < 1$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)| \, dA_\alpha(z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora sean

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \quad \text{y} \quad p_k(rz)=\sum_{n=0}^{k}a_n(rz)^n.$$

Puesto que la función $f_r(z)$ es analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ entonces su serie de Taylor $p_k(rz)$ converge uniformemente a $f_r(z)$ en $\overline{\mathbb{D}}$. Así existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para toda $k>N$

$$\begin{aligned}|f(rz)-p_k(rz)| &= |\sum_{n=0}^{\infty}a_n(rz)^n-\sum_{n=0}^{k}a_n(rz)^n| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|r^n<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Luego si $k>N$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{D}}|f_r(z)-p_k(rz)|^p\;dA_\alpha(z)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Así considerando el inciso (1) y esto último se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}|f(z)-p_k(rz)|^p\;dA_\alpha(z) &\leq \int_{\mathbb{D}}|f(z)-f_r(z)|^p\;dA_\alpha(z) \\ &+ \int_{\mathbb{D}}|f_r(z)-p_k(rz)|^p\;dA_\alpha(z)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|p_k-f\|_{p,\alpha}\longrightarrow 0$ cuando $k\to\infty$.

∎

Aunque cualquier función A^p_α puede ser aproximada (en norma) por una sucesión de polinomios, no siempre es verdadero que una funcion A^p_α puede ser aproximada (en norma) por su polinomio de Taylor. Actualmente tal aproximación es posible si y sólo si $1<p<+\infty$. Especial atención recibe el caso $p=2$. Por la Proposición 1.1.7 el espacio A^2_α es de Hilbert con producto interno dado por

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{D}}f(z)\overline{g(z)}\;dA_\alpha(z),$$

con $f,g\in A^2_\alpha$. Para cualquier número no negativo, sea

$$e_n=\sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}z^n, \qquad z\in\mathbb{D}, \tag{1.3}$$

donde $\Gamma(s)$ representa la función Gamma la cual es una función analítica de s en todo el plano complejo, excepto en sus polos simples localizados en los puntos $\{0,-1,-2,...\}$, ver

Apéndice (Definición 3.3.11 y Proposición 3.3.12).

La siguiente proposición dice que el conjunto $\{e_n\}$ es una base ortonormal para el espacio A^2_α.

Proposición 1.1.10. *El conjunto $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal en A^2_α.*

Demostración. Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle z^n, z^m\rangle &= \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z}^m dA_\alpha(z)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(\alpha+1)(1-r^2)^\alpha r^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}\ d\theta\ dr\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1(\alpha+1)(1-r^2)^\alpha r^{n+m+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\ d\theta\ dr\end{aligned}$$

De aquí se desprenden dos casos:

1) Si $m \neq n$

$$\langle z^n, z^m\rangle = 0 \quad \text{pues} \quad \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\ d\theta = 0.$$

2) Si $m = n$

$$\begin{aligned}\|z^n\|^2_{p,\alpha} = \langle z^n, z^n\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^1(\alpha+1)(1-r^2)^\alpha r^{2n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n-n)\theta}\ d\theta\ dr\\ &= \frac{n!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+2)}.\end{aligned}$$

Por lo que si se escribe $e_n = \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{D}$ entonces el conjunto $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal en A^2_α. Como el conjunto de polinomios es denso en A^2_α (Proposición 1.1.9) se concluye que $\{e_n\}$ es una base ortonormal para A^2_α.

■

Corolario 1.1.11. *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ son dos funciones en A^2_α, entonces*

(a) $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+2+\alpha)}|a_n|^2$

(b) $\langle f, g\rangle_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(n+2+\alpha)}a_n\overline{b_n}$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ *es el producto interno en* A^2_α *heredado de* $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$*.*

Se usará frecuentemente el siguiente resultado.

Proposición 1.1.12. *Si* $z, w \in \mathbb{D}$ *y* $\lambda > 0$*, entonces*

$$\frac{1}{(1 - z\overline{w})^\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\Gamma(\lambda)} z^n \overline{w}^n.$$

Ahora como el espacio A^2_α es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, existe un único operador de proyección ortogonal $P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \to A^2_\alpha$ lineal y continuo tal que $P_\alpha f = f$, si $f \in A^2_\alpha(\mathbb{D})$. En este caso se puede dar una forma explícita de dicha proyección, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.13. *Para* $-1 < \alpha < +\infty$*, sea* P_α *la proyección ortogonal de* $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ *sobre* A^2_α*. Entonces*

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA_\alpha(w),$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$*.*

Demostración. Sea $\{e_n\}$ la base ortonormal de A^2_α dada por (1.3). Para cada $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ se tiene que

$$P_\alpha f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n \rangle_\alpha e_n.$$

En particular para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$P_\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n \rangle_\alpha e_n(z),$$

y esta serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Además

$$\langle P_\alpha f, e_n \rangle_\alpha = \langle f, P_\alpha e_n \rangle_\alpha = \langle f, e_n \rangle_\alpha.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P_\alpha f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n\rangle_\alpha e_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n\rangle_\alpha e_n(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} \Big(f(w) \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}\,\overline{w}^n \Big)\, dA_\alpha(w) \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} \int_{\mathbb{D}} f(w)(z\overline{w})^n \, dA_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w) \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (z\overline{w})^n \Big] \, dA_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA_\alpha(w).
\end{aligned}
$$

Se puede realizar el cambio entre la integral y la suma ya que para cada $z \in \mathbb{D}$ fijo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (z\overline{w})^n$ converge uniformemente respecto a $w \in \mathbb{D}$.

■

Si $f \in A^2_\alpha$ entonces $P_\alpha f(z) = f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA_\alpha(w)$ y por esto el operador P_α se llama la **proyección de Bergman ponderada** en $\mathbb{D}$ y la función

$$
K_\alpha(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}, \qquad z, w \in \mathbb{D}
$$

se le llama el **núcleo reproductor de Bergman** sobre $\mathbb{D}$, el cual es holomorfo con respecto a la variable z y anti-holomorfo con respecto a la variable w. Está función juega un papel muy importante en la teoría de los espacios de Bergman ponderados.

Aunque la proyección de Bergman P_α está originalmente definida en $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, la fórmula integral

$$
P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA_\alpha
$$

extiende su dominio a $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. En particular, se puede aplicar P_α a una función en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ con $1 \leq p < \infty$.

Como A^2_α es denso en A^1_α, el siguiente resultado justifica plenamente la definición de núcleo reproductor.

Corolario 1.1.14. *Si f es una función en A^1_α, entonces*

$$
f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA_\alpha(w), \qquad z \in \mathbb{D}.
$$

*La integral converge uniformemente para z en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. (Este corolario se conoce como la **fórmula reproductora**).*

El conjunto $A^p = A^p_0$, es el espacio ordinario de Bergman y su correspondiente proyección de Bergman se denota por P y el núcleo de Bergman es

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}.$$

Las funciones núcleo de Bergman están estrechamente relacionadas con el **grupo de transformaciones de Möbius**, $Aut(\mathbb{D})$ del disco. Para ver ésto, sea $z \in \mathbb{D}$ y se considera la transformación de Möbius φ_z del disco que intercambia z y 0, es decir,

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}, \qquad w \in \mathbb{D}.$$

Ahora se calcula la proyección ortogonal de Bergman de algunas funciones en particular.

Proposición 1.1.15. *Sea P_α la proyección de Bergman ponderada.*

(a) *Sean $k,\ m$ enteros tales que $k+m > -2$ y $\gamma + \alpha > -1$. Entonces*

$$P_\alpha\big((1-|z|^2)^\gamma z^k \overline{z}^m\big) = \begin{cases} (\alpha+1)\frac{\Gamma(k-m+\alpha+2)\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(k+1)}{(k-m)!\Gamma(2+\alpha)\Gamma(\alpha+\gamma+k+2)}\ z^{k-m}, & \textit{para}\ \ k \geq m \\ \\ 0, & \textit{para}\ k < m. \end{cases}$$

En particular si $\gamma = 1,\ m = 0$ y $k > 0$ se tiene que

$$P_\alpha\big((1-|z|^2)z^k\big) = (\alpha+1)\frac{\Gamma(k+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+k+3)}\ z^k.$$

(b) *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $f(z) = \sum_{m=2k-1}^{\infty} a_m z^m$ entonces*

$$P_\alpha\Big(\frac{(1-|z|^2)^k}{\overline{z}^k} f^{(k)}(z)\Big) = (\alpha+1)\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=2k-1}^{\infty} a_n z^n.$$

La condición de suponer que los primeros $2k-1$ coeficientes de la serie de Taylor son todos cero hace esté bien definida la proyección de Bergman de dicha función. En particular si $k=1$ entonces

$$P_\alpha\Big(\frac{1-|z|^2}{\overline{z}} g'(z)\Big) = (\alpha+1)\ g(z).$$

Demostración. (a) Expandiendo la función núcleo de Bergman en serie de potencias

$$\begin{aligned} P_\alpha\big((1-|z|^2)^\gamma z^k \overline{z}^m\big) &= \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\gamma w^k \overline{w}^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}\ (z\overline{w})^n\ dA_\alpha(w) \qquad (1.4) \\ &= (\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\gamma+\alpha} w^k \overline{w}^{m+n}\ dA(w). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando coordenadas polares

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\gamma+\alpha} w^k \overline{w}^{m+n}\, dA(w) = \int_0^1 (1-r^2)^{\gamma+\alpha} r^{k+m+n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-m-n)}\, \frac{d\theta}{\pi}\, dr$$

y se observa que

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-m-n)}\, \frac{d\theta}{\pi} = \begin{cases} 0, & \text{si} \qquad k-m-n \neq 0 \\ 2, & \text{para} \quad n = k-m\ . \end{cases}$$

Al tomar $n = k-m \geq 0$ se tiene

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\gamma+\alpha} r^{2k+1}\, dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+k+2)}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n = \frac{\Gamma(k-m+2+\alpha)}{(k-m)!\Gamma(2+\alpha)} z^{k-m}.$$

Así sustituyendo estos últimos tres cálculos anteriores en (1.4) se tiene

$$P_\alpha\big((1-|z|^2)^{\gamma} z^k \overline{z}^m\big) = (\alpha+1) \frac{\Gamma(k-m+2+\alpha)\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(k+1)}{(k-m)!\Gamma(2+\alpha)\Gamma(\alpha+\gamma+k+2)} z^{k-m}.$$

(b) Obsérvese que

$$f^{(k)}(z) = a_m m(m-1)\cdots(m-k+1)\ z^{m-k},$$

entonces

$$\begin{aligned}
P_\alpha\Big(\frac{(1-|z|^2)^k}{\overline{z}^k} f^{(k)}(z)\Big) &= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}\frac{(1-|w|^2)^{k+\alpha}}{\overline{w}^k}(z\overline{w})^n \\
&\quad \cdot \sum_{m=2k-1}^{\infty} a_m m(m-1)\cdots(m-k+1)\ w^{m-k}\ dA(w) \\
&= (\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}z^n\sum_{m=2k-1}^{\infty} a_m m(m-1)\cdots(m-k+1) \\
&\quad \cdot \lim_{t\to 1}\int_{B(t)}(1-|w|^2)^{k+\alpha}\overline{w}^{n-k}w^{m-k}\ dA(w) \\
&= (\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}z^n\sum_{m=2k-1}^{\infty} a_m m(m-1)\cdots(m-k+1) \\
&\quad \cdot \lim_{t\to 1}\int_0^t\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{k+\alpha}r^{n-k+m-k+1}e^{i\theta(m-k+k-n)}\ \frac{d\theta\ dr}{\pi} \\
&= (\alpha+1)\sum_{n=2k-1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}z^n a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) \\
&\quad \cdot 2\ \lim_{t\to 1}\int_0^t(1-r^2)^{k+\alpha}r^{2(n-k)+1}\ dr \\
&= (\alpha+1)\sum_{n=2k-1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}z^n a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) \\
&\quad \cdot \int_0^1(1-u)^{k+\alpha}u^{n-k}\ du \\
&= (\alpha+1)\sum_{n=2k-1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}z^n a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(\alpha+n+2)} \\
&= (\alpha+1)\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\sum_{n=2k-1}^{\infty} a_n z^n\ .
\end{aligned}$$

Para poder pasar de la igualdad 3 a la igualdad 4 se utilizó que $m=n$ para que dicha integral sea distinta de cero y que $m\geq 2k-1$ para que exista la integral y poder calcularla.

■

El siguiente resultado muestra que la proyección $P_\alpha : L^1(\mathbb{D}, dA)\to A_\alpha$ es sobreyecctiva y además que existen una infinidad de preimagenes para cada $g\in A_\alpha$.

Corolario 1.1.16. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ y analítica. Sí k y m son enteros positivos y*

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{2k-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+3)}{(\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+2)}(1-|z|^2)z^n a_n \\ &+ \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+k+2)} \frac{(1-|z|^2)^k}{\overline{z}^k} \sum_{m=2k-1}^{\infty} a_m m(m-1)\cdots(m-k+1)z^{m-k}, \end{aligned}$$

entonces

$$P_\alpha(g)(z) = f(z).$$

Proposición 1.1.17. *La funcion φ_z tiene las siguientes propiedades*

(1) $\varphi_z = \varphi_z^{-1}$

(2) El determinante Jacobiano real de φ_z en w es

$$|\varphi_z'(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}$$

(3) $1 - |\varphi_z(w)|^2 = \dfrac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2}$.

(4) $|1 - \varphi_w(t)\overline{w}| = \dfrac{|1-\overline{w}t|}{1-|w|}$

Una aplicación simple de estas propiedades es que la fórmula para la función núcleo de Bergman $K_\alpha(z, w)$ puede derivarse de un simple cambio de variables, en lugar de usar una serie infinita para la función gamma. Más específicamente, si $f \in A_\alpha^1$, por la propiedad del valor medio y el Lema 1.1.2 se tiene

$$f(0) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\, dA_\alpha(w). \tag{1.5}$$

En efecto, por la propiedad del valor medio se tiene

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(0)(1-r^2)^\alpha \ r \ dr &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \ d\theta \int_0^1 (1-r^2)^\alpha \ r \ dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})(1-r^2)^\alpha \ r \ d\theta \ dr \\
&= \frac{1}{2(\alpha+1)}\int_{\mathbb{D}} f(w) \ dA_\alpha(w).
\end{aligned}$$

Pero como

$$\int_0^1 f(0)(1-r^2)^\alpha \ r \ dr = \frac{1}{2(\alpha+1)} \ f(0),$$

y así se obtiene lo deseado. Ahora si se reemplaza f por $f\circ\varphi_z$ en (1.5)

$$\Big(f\circ\varphi_z\Big)(0) = \int_{\mathbb{D}} \Big(f\circ\varphi_z\Big)(w) \ dA_\alpha(w)$$

y así tomando el cambio de variable dado por $w=\varphi_z(\lambda)$ y aplicando las propiedades (2) y (3) de la proposición anterior

$$\begin{aligned}
f(z) &= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} f(\lambda)\Big(1-|\varphi_z(\lambda)|^2\Big)^\alpha \ \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{\lambda}|^4} \ dA(\lambda) \\
&= (1-|z|^2)^{2+\alpha}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(\lambda)}{|1-z\overline{\lambda}|^{2(2+\alpha)}} \ dA_\alpha(\lambda).
\end{aligned}$$

Cambiando λ por w se obtiene

$$f(z) = (1-|z|^2)^{2+\alpha}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}(1-\overline{z}w)^{2+\alpha}} \ dA_\alpha(w).$$

Fijando $z\in\mathbb{D}$, y reemplazando f por la función $w\mapsto(1-\overline{z}w)^{2+\alpha}f(w)$, entonces se obtiene la fórmula reproductora

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \ dA_\alpha(w), \quad z\in\mathbb{D},$$

para $f\in A^1_\alpha$. De esto es inmediato deducir la fórmula integral para la proyección de Bergman.

1.2. Algunas estimaciones en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$

En esta sección se presentan algunas estimaciones relativas a $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, las cuales proporcionan una herramienta útil para acotar ciertos operadores integrales. En particular se estima una cota para la proyección de Bergman P_α en ciertos espacios $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.
Se usa el símbolo $\sim$ para indicar que dos cantidades son comparables, es decir, $A \sim B$ si existen constantes positivas c y d tales que $dA \leq B \leq cA$.

Teorema 1.2.1. *[Estimación Integral] Para cualquier $-1 < \alpha < +\infty$ y cualquier número real β, sean*

$$I_{\alpha,\beta}(z) \quad = \quad \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+\beta}}\, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D},$$

y

$$J_\beta(z) \quad = \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-ze^{-i\theta}|^{1+\beta}}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces se tiene que

$$I_{\alpha,\beta}(z) \sim J_\beta(z) \sim \begin{cases} 1 & \text{si } \beta < 0 \\[2ex] \log \dfrac{1}{1-|z|^2} & \text{si } \beta = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{(1-|z|^2)^\beta} & \text{si } \beta > 0 \end{cases}$$

cuando $|z| \to 1^-$.

Demostración. La condición $-1 < \alpha < +\infty$ asegura que la integral $I_{\alpha,\beta}(z)$ converge para todo $z \in \mathbb{D}$. Así pues la integral está bien definida. Ahora poniendo, $2\lambda = 2 + \alpha + \beta$. Si $\lambda = 0$ ó $\lambda < 0$, entonces $I_{\alpha,\beta}(z)$ está acotado. Si $2\lambda > 0$ se usa la serie de potencias

$$\frac{1}{(1-z\overline{w})^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\Gamma(\lambda)} (z\overline{w})^n.$$

Puesto que $(1-|w|^2)^\alpha\, dA(w)$ es invariante bajo rotación, se tiene que

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta}(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+\beta}}\, dA(w) = \int_{\mathbb{D}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2}(1-|w|^2)^\alpha |z|^{2n}|w|^{2n}\, dA(w) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n} \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\alpha |w|^{2n}\, dA(w) \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^\alpha r^{2n+1}\, d\theta\, dr \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)}|z|^{2n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\lambda)^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+\alpha+2)}|z|^{2n},
\end{aligned}$$

donde se uso (etiqueta 1, ver Apéndice) para el cálculo de la integral.

Por la fórmula de Stirling se tiene que

$$\frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+\alpha+2)} \sim \frac{n^{2n+\alpha+\beta}}{n^n \cdot n^{n+\alpha+1}} = n^{\beta-1}$$

cuando $n \to \infty$. Así pues, se analizan los siguientes casos:

1. Si $\beta < 0$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\beta-1}|z|^{2n} \quad \text{es acotado en } \mathbb{D}.$$

2. Si $\beta = 0$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-1}|z|^{2n} = \log\frac{1}{1-|z|^2} \quad \text{cuando } |z| \to 1^-.$$

3. Si $\beta > 0$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\beta-1}|z|^{2n} \sim \frac{1}{(1-|z|^2)^\beta}$$

cuando $|z| \to 1^-$, ya que

$$\frac{1}{(1-|z|^2)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}|z|^{2n} \sim \sum_{n=0}^{\infty} n^{\beta-1}|z|^{2n}$$

esta última por la fórmula de Stirling. Por lo tanto

$$I_{\alpha,\beta}(z) \sim \begin{cases} 1 & \text{si } \beta < 0 \\ \log \dfrac{1}{1-|z|^2} & \text{si } \beta = 0 \\ \dfrac{1}{(1-|z|^2)^\beta} & \text{si } \beta > 0 \end{cases}$$

La prueba para el caso de $J_\beta(z)$ es similar a la anterior.

■

Corolario 1.2.2. *Para cualquier $-1 < \alpha < \infty$ se tiene que*

$$I_{\alpha,\beta}(e^{i\theta}) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-e^{i\theta}\overline{w}|^{2+\alpha+\beta}}\, dA(w), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

es finita si $\beta < 0$.

Demostración. En la prueba del teorema anterior sea $B(r) \subset \mathbb{D}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{B(r)} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-e^{i\theta}\overline{w}|^{2+\alpha+\beta}}\, dA(w) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\lambda)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+\alpha+2)} \\ &\approx \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\lambda)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1-\beta}} < \infty \end{aligned}$$

si $1-\beta > 1$. Por lo tanto al tomar $r \to 1^-$ se tiene $I_{\alpha,\beta}(e^{i\theta}) < M < \infty$ si $\beta < 0$, donde M no depende de θ.

■

El siguiente resultado es conocido como el lema de Schur.

Teorema 1.2.3. *Supóngase que X es un espacio de medida y μ una medida positiva en X. Sea $T(x,y)$ una función medible positiva en $X \times X$ y $\mathbf{T}$ el operador integral asociado*

$$\mathbf{T}f(x) = \int_X T(x,y)f(y)\, d\mu(y), \quad x \in X,$$

definido si la integral converge. Si, para algún $1 < p < +\infty$ existe una función h medible, estrictamente positiva en X, y una constante positiva $M > 0$ tal que

$$\int_X T(x,y)h(y)^q\, d\mu(y) \leq Mh(x)^q, \quad x \in X, \tag{1.6}$$

y

$$\int_X T(x,y)h(x)^p\, d\mu(x) \leq Mh(y)^p, \quad y \in X, \tag{1.7}$$

con $p^{-1} + q^{-1} = 1$, entonces $\mathbf{T}$ es acotado en $L^p(X, d\mu)$ con $\|\mathbf{T}\| \leq M$.

Demostración. Si $f \in L^p(X, d\mu)$ con $p > 1$ entonces, puesto que $h(y) > 0$ para todo $y \in X$, para cada $x \in X$ se puede escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{T}f(x) &= \int_X T(x,y)f(y)\ d\mu(y)\\ &= \int_X T(x,y)f(y)h(y)h^{-1}(y)\ d\mu(y).\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\Big|\mathbf{T}f(x)\Big| &= \Big|\int_X T(x,y)f(y)h(y)h^{-1}(y)\ d\mu(y)\Big|\\ &\leq \int_X |T(x,y)h(y)h^{-1}(y)|\ |f(y)|\ d\mu(y)\\ &= \int_X T(x,y)h(y)h^{-1}(y)\ |f(y)|\ d\mu(y)\\ &= \int_X \big[T(x,y)\big]^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} h(y)h^{-1}(y)\ |f(y)|\ d\mu(y)\\ &= \int_X \big(\big[T(x,y)\big]^{\frac{1}{q}} h(y)\big)\big(\big[T(x,y)\big]^{\frac{1}{p}} h^{-1}(y)|f(y)|\big)\ d\mu(y)\\ &\leq \Big[\int_X T(x,y)h^q(y)\ d\mu(y)\Big]^{1/q}\Big[\int_X T(x,y)h^{-p}(y)|f(y)|^p\ d\mu(y)\Big]^{1/p}\ .\end{aligned}$$

Por otra parte elevando a la $1/q$ a la desigualdad (1.6) se tiene que

$$\Big[\int_X T(x,y)h^q(y)\ d\mu(y)\Big]^{1/q} \leq M^{1/q}h(x)\ .$$

Así

$$\Big|\mathbf{T}f(x)\Big| \leq M^{1/q}h(x)\Big[\int_X T(x,y)h^{-p}(y)|f(y)|^p\ d\mu(y)\Big]^{1/p}\ .$$

Ahora elevando está última desigualdad a la p e integrandola sobre X con respecto de $\mu(x)$, por el teorema de Fubini y usando la desigualdad (1.7) se obtiene

$$\begin{aligned}\int_X \Big|\mathbf{T}f(x)\Big|^p\ d\mu(x) &\leq \int_X\int_X M^{p/q}h^p(x)T(x,y)h^{-p}(y)|f(y)|^p\ d\mu(y)\ d\mu(x)\\ &= M^{p/q}\int_X h^{-p}(y)|f(y)|^p \int_X T(x,y)h^p(x)\ d\mu(x)\ d\mu(y)\\ &\leq M^{p/q}\cdot M\int_X h^{-p}(y)|f(y)|^p h^p(y)\ d\mu(y)\\ &= M^{p/q}\cdot M\int_X |f(y)|^p\ d\mu(y)\ .\end{aligned}$$

Por lo que

$$\int_X \Big|\mathbf{T}f(x)\Big|^p\ d\mu(x) \leq M^{p/q}\cdot M\int_X |f(y)|^p\ d\mu(y)\ .$$

Por lo tanto elevando a la $1/p$ y tomando el supremo sobre las f de norma uno en esta última desigualdad se tiene

$$\|\mathbf{T}\| \leq M.$$

■

El siguiente teorema dice cuando son acotados en $L^p(\mathbb{D}, \mu)$ los siguientes operadores definidos en él. Este es el resultado más importante de esta sección.

Teorema 1.2.4. *Supóngase que a, b, c son números reales y*

$$d\mu(z) = (1 - |z|^2)^c \; dA(z).$$

Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ los operadores integrales definidos por

$$\mathbf{T}f(z) = (1 - |z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^b}{(1 - z\overline{w})^{2+a+b}} f(w) \; dA(w)$$

y

$$\mathbf{S}f(z) = (1 - |z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^b}{|1 - z\overline{w}|^{2+a+b}} f(w) \; dA(w)$$

Entonces para $1 \leq p < \infty$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\mathbf{T}$ *es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.*

(2) $\mathbf{S}$ *es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.*

(3) $-pa < c + 1 < p(b + 1)$.

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1) Es obvio que si $\mathbf{S}$ es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, entonces $\mathbf{T}$ es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, para ver esto basta con observar que $f \in L^p(\mathbb{D}, d\mu) \Leftrightarrow |f| \in L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, entonces

$$\int_{\mathbb{D}} (\mathbf{S}|f|)^p \; d\mu(z) \geq \int_{\mathbb{D}} |\mathbf{T}f|^p \; d\mu(z).$$

(1) $\Rightarrow$ (3) Supóngase que $\mathbf{T}$ es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$. Aplicando $\mathbf{T}$ a una función de la forma $f(z) = (1 - |z|^2)^N$, donde N es un número entero suficientemente grande para que $N + b > -1$ y $a - N < 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}f(z) &= (1 - |z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^b}{(1 - z\overline{w})^{2+a+b}} (1 - |w|^2)^N \; dA(w) \\ &= (1 - |z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^{b+N}}{(1 - z\overline{w})^{2+a+b}} \; dA(w). \end{aligned}$$

Considérese la función holomorfa g definida por

$$g(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{b+N}}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}}\ dA(w).$$

Ahora tomando el cambio de variable $w = \frac{|z|}{\overline{z}}\lambda$ se tiene que

$$g(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\lambda|^2)^{b+N}}{(1-|z|\overline{\lambda})^{2+a+b}}\ dA(\lambda).$$

Por otro lado, de la definición de g se tiene

$$g(|z|) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\lambda|^2)^{b+N}}{(1-|z|\overline{\lambda})^{2+a+b}}\ dA(\lambda).$$

Así tenemos que $g(z) = g(|z|)$, luego por el Teorema del mapeo abierto se tiene que $g = C$, donde C es una constante positiva, la cual depende de b y N. Así por el Lema 1.1.2

$$C = g(0) = \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{b+N} = \frac{1}{b+N+1}.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{T}f(z) = C(1-|z|^2)^a.$$

Así pues por la acotación de $\mathbf{T}$ en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ y el Lema 1.1.2 se tiene que

$$-pa < c + 1.$$

Ahora para probar la otra parte de la desigualdad, supóngase que $p > 1$ y que q es su exponente conjugado. Sea $\mathbf{T}^*$ el operador adjunto de $\mathbf{T}$ con respecto a la acción dual inducida por el producto interno de $L^2(\mathbb{D}, d\mu)$ dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\ d\mu(z).$$

Así pues se calcula $\mathbf{T}^*$. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{D}, d\mu)$, entonces por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{T}g, f\rangle &= \int_{\mathbb{D}} (\mathbf{T}g(z))\overline{f(z)}\ d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{(1-z\overline{w})^{2+b+a}} g(w)\ dA(w)\overline{f(z)}\ d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^b g(w) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^a}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}} \overline{f(z)}\ d\mu(z)\ dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} g(w)\overline{(1-|w|^2)^{b-c} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{a+c} f(z)}{(1-\overline{z}w)^{2+a+b}}\ dA(z)}\ d\mu(w),
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{T}^* f(z) = (1-|z|^2)^{b-c} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{a+c}}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}} f(w)\, dA(w),$$

además $\mathbf{T}^*$ es acotado en $L^q(\mathbb{D}, d\mu)$. Ahora sea $f(z) = (1-|z|^2)^N$ con N suficientemente grande para que $a+c+N > -1$ y se le aplica $\mathbf{T}^*$, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* f(z) &= (1-|z|^2)^{b-c} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{a+c}}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}} (1-|w|^2)^N\, dA(w) \\ &= (1-|z|^2)^{b-c} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{a+c+N}}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}}\, dA(w). \end{aligned}$$

Se considera la función holomorfa h definida por

$$h(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{a+c+N}}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}}\, dA(w).$$

Como anteriormente se hace el cambio de variable $w = \frac{|z|}{\overline{z}}\lambda$, así

$$h(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\lambda|^2)^{a+c+N}}{(1-|z|\overline{\lambda})^{2+a+b}}\, dA(\lambda) = h(|z|).$$

Así pues se tiene que $h(z) = h(|z|)$, luego por el Teorema del mapeo abierto se tiene que $h = C'$, donde C' es una contante positiva que depende de a, c y N, además

$$C' = h(0) = \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{a+c+N}\, dA(w).$$

Por lo tanto

$$\mathbf{T}^* f(z) = C'(1-|z|^2)^{b-c}.$$

Puesto que $\mathbf{T}^*$ es acotado en $L^q(\mathbb{D}, d\mu)$, entonces por el Lema 1.1.2 se tiene que

$$(b-c)q > -c-1$$

y como $q = \frac{p}{p-1}$, se obtiene

$$p(b+1) > c+1.$$

Si $p = 1$, entonces $\mathbf{T}^*$ es acotado en $L^\infty(\mathbb{D})$ y la desigualdad deseada es $c \leq b$. Para ver que la desigualdad ocurre estrictamente, se considera la siguiente función

$$f_z(w) = \frac{(1-z\overline{w})^{2+a+b}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}, \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

Así $\|f\|_\infty = 1$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Si $b = c$, entonces

$$\mathbf{T}^* f_z(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{a+c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+c}}\, dA(w) \sim \log \frac{1}{1-|z|^2},$$

cuando $|z| \to 1^-$, esto por el Teorema 1.2.1 (en este caso $\alpha = a + c$ y $\beta = b - c$). Pero esto contradice el hecho de que $\mathbf{T}^*$ es acotado en $L^\infty(\mathbb{D})$. Así si $\mathbf{T}$ es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, entonces

$$-pa < c + 1 < p(b+1)$$

(3) $\Rightarrow$ (2) Supóngase que $-pa < c + 1 < p(b+1)$. Primero se observa que pasa cuando $p = 1$. Sea $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mu)$, así por el teorema de Fibini y el Teorema 1.2.1

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\mathbf{S}f(z)|\ d\mu(z) &= \int_{\mathbb{D}} \left|(1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} f(w)\ dA(w)\right| d\mu(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} |f(w)|\ dA(w)\ d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^a \frac{(1-|w|^2)^b}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} |f(w)|\ d\mu(z)\ dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{a+c} \frac{(1-|w|^2)^b}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} |f(w)|\ dA(z)\ dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^b |f(w)| \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{a+c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}\ dA(z)\ dA(w) \\
&\sim \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^c |f(w)|\ dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |f(w)|\ d\mu(w) < +\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{S}$ es acotado en $L^1(\mathbb{D}, d\mu)$.

Ahora se ve que pasa cuando $p > 1$, para ello se aplica el Lema de Schur. Supóngase que $1 < p < \infty$. Se reescribe el operador $\mathbf{S}$ como

$$\mathbf{S}f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^a (1-|w|^2)^{b-c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} f(w)\ d\mu(w).$$

Sea

$$T(z,w) = \frac{(1-|z|^2)^a (1-|w|^2)^{b-c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}$$

Para poder aplicar el Lema de Schur, una función $h(z)$ en $\mathbb{D}$ que cumpla con sus hipótesis puede ser elegida de la forma

$$h(z) = (1-|z|^2)^s,$$

donde $s \in \mathbb{R}$ debe ser elegida adecuadamente. Para ver que dicha función h existe, el número s debe satisfacer que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{b+qs}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}\ dA(w) \leq \frac{C}{(1-|z|^2)^{a-qs}}, \qquad z \in \mathbb{D}$$

y

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{a+ps+c}}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}}\, dA(z) \leq \frac{C}{(1-|w|^2)^{b-ps-c}}, \qquad z \in \mathbb{D}$$

donde q es el exponente conjugado de p y C es una constante positiva. Como $d\mu(z) = (1-|z|^2)^c dA(z)$, de acuerdo al Teorema 1.2.1 estas estimaciones son válidas si

$$b + qs > -1, \qquad a - qs > 0$$

y

$$a + c + ps > -1, \qquad b - c - sp > 0.$$

Reescribiendo estas desigualdades se obtiene que

$$-\frac{b+1}{q} < s < \frac{a}{q}, \qquad -\frac{a+c+1}{p} < s < \frac{b-c}{p}.$$

De igual forma reescribiendo las desigualdades $-pa < c+1$ y $c+1 < p(b+1)$ y considerando que p es el exponente conjugado de q, se consigue

$$-\frac{a+c+1}{p} < \frac{a}{q}, \qquad -\frac{b+1}{q} < \frac{b-c}{p}.$$

Así pues combinando estás desigualdades con las anteriores se obtiene

$$-\frac{b+1}{q} < s < \frac{b-c}{p}, \qquad -\frac{a+c+1}{p} < s < \frac{a}{q}.$$

De donde

$$\Big(-\frac{b+1}{q}, \frac{a}{q}\Big) \bigcap \Big(-\frac{a+c+1}{p}, \frac{b-c}{p}\Big)$$

es no vacío, lo cual prueba que $s \in \mathbb{R}$ existe y por lo tanto el operador $\mathbf{S}$ es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.

■

El siguiente teorema dice que existe una gran cantidad de proyecciones acotadas de $L^1(\mathbb{D}, dA)$ sobre el espacio de Bergman A^1.

Teorema 1.2.5. *Supóngase que* $-1 < \alpha,\ \beta < \infty$ *y* $1 \leq p < \infty$. *Entonces* P_β *es una proyección acotada de* $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ *sobre* A^p_α *si y sólo si* $\alpha + 1 < (\beta+1)p$.

Demostración. Para probar está equivalencia sea $d\mu(z) = (1-|z|^2)^\alpha dA(z)$, así pues aplicando el Teorema 1.2.4 tenemos que el operador $P_\beta : (L^p(\mathbb{D}), dA_\alpha) \to A^p_\alpha(\mathbb{D})$ es acotado si y sólo si $\alpha + 1 < p(\beta + 1)$.

■

Dos casos que vale la pena mencionar son: 1. Si $\alpha = \beta$, entonces P_α es una proyección acotada de $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre A^p_α si y sólo si $1 < p < \infty$. 2. Si $p = 1$, entonces P_β es una proyección acotada de $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre A^1_α si y sólo si $\alpha < \beta$.

Proposición 1.2.6. *Supóngase que $1 \le p < \infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ y que n es un número entero positivo. Entonces una función analítica f en $\mathbb{D}$ pertenece a A^p_α si y sólo si la función $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z)$ está en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supóngase que $f \in A^p_\alpha$. Sea $\alpha < \beta$, entonces por el Corolario 1.1.14

$$f(z) = (\beta + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}} f(w)\ dA(w),$$

$z \in \mathbb{D}$. Derivando n veces bajo el signo integral con respecto a z, se obtiene

$$f^{(n)}(z) = C \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-z\overline{w})^{2+n+\beta}} \overline{w}^n f(w)\ dA(w),$$

donde $C = (\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n+1)$. Así

$$(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) = C(1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-z\overline{w})^{2+n+\beta}} \overline{w}^n f(w)\ dA(w),$$

entonces aplicando el Teorema 1.2.4 se tiene que $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ (en este caso $a = n$, $b = \beta$ y $c = \alpha$).

$\Leftarrow$ Supóngase que f es analítica en $\mathbb{D}$ y que la función $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Se probará que $f \in A^p_\alpha$. Sin pérdida de generalidad se asume que los primeros $2n+1$ coeficientes de la serie de Taylor de f son todos cero. En este caso la función φ dada por

$$\varphi(z) = C\frac{(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z)}{\overline{z}^n}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

está en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ para cualquier constante C. En efecto, la condición de que los primeros $2n+1$ coeficientes de Taylor son cero garantiza que la función $\varphi(z)$ es continua, además la función $\varphi(z)$ alcanza su máximo en $\overline{B(r)} \subset \mathbb{D}$, con $0 < r < 1$. Así

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^p \, dA_\alpha(z) &= \int_{B(\frac{1}{2})} |\varphi(z)|^p \, dA_\alpha(z) + \int_{\frac{1}{2}<|z|<1} |\varphi(z)|^p \, dA_\alpha(z) \\
&= M_1 + C^p \int_{\frac{1}{2}<|z|<1} \frac{(1-|z|^2)^{np}|f^{(n)}(z)|^p}{|z|^{np}} \, dA_\alpha(z) \\
&\leq M_1 + 2^{np}C^p \|(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z)\|_{\alpha,p}^p \\
&\leq M
\end{aligned}$$

pues $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ y por lo tanto se tiene lo afirmado.

Ahora sea $g = P_\beta \varphi$, donde β es fijo con $\alpha < \beta < \infty$; entonces por el Teorema 1.2.5 la función $g \in A_\alpha^p$ y la fórmula explícita de g es

$$g(z) = (\beta+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}} \varphi(w) \, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Ahora tomando $C = \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}$ y derivando g bajo el signo integral n veces se tiene que

$$g^{(n)}(z) = (\beta+n+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\beta+n}}{(1-z\overline{w})^{2+\beta+n}} f^{(n)}(w) \, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Así pues por el Corolario 1.1.14 se tiene

$$g^{(n)}(z) = f^{(n)}(z),$$

y así por la Proposición 1.1.15 f y g difieren sólo por un polinomio, por lo tanto si $g \in A_\alpha^p$, entonces $f \in A_\alpha^p$.

■

1.3. El Espacio de Bloch

Definición 1.3.1. *Una función analítica f en $\mathbb{D}$ es una función de Bloch si satisface*

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < +\infty.$$

El conjunto formado por todas las funciones de Bloch es un espacio vectorial, el cual se llamará espacio de Bloch y se denota por $\mathcal{B}$; además también se tiene que $\|f\|_{\mathcal{B}}$ es una seminorma.

Proposición 1.3.2. *La seminorma $\|f\|_{\mathcal{B}}$ es Möbius invariante, es decir, $\|f\circ\varphi\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}}$, donde $f\in\mathcal{B}$ y φ es una transformación de Möbius de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Es suficiente probar para transformaciones de Möbius de la forma $\lambda = \varphi_w(z) = \frac{w-z}{1-z\overline{w}}$ con $|w|<1$. Entonces para $f\in\mathcal{B}$ se tiene por la Proposición 1.1.17 (3);

$$\begin{aligned}
\|f\circ\varphi_w\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|(f\circ\varphi)'(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|\varphi_w'(z)||f'(\varphi_w(z))| \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|\varphi_w(z)|^2)|f'(\varphi_w(z))| = \sup_{\lambda\in\mathbb{D}}(1-|\lambda|^2)|f'(\lambda)| \\
&= \|f\|_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

■

Definición 1.3.3. *El espacio pequeño de Bloch, $\mathcal{B}_0$, es el subespacio de $\mathcal{B}$ consistente de todas las funciones $f\in\mathcal{B}$ tales que*

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)|f'(z)| = 0.$$

De la prueba de la Proposición 1.3.2 se tiene que $\mathcal{B}_0$ también es Möbius invariante.

En la siguiente proposición se dota al espacio de Bloch con cierta norma bajo la cual resulta ser un espacio de Banach.

Proposición 1.3.4. *La función $\|f\| = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}}$ es una norma en $\mathcal{B}$ y el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach con esta norma.*

Demostración. Sólo se prueba que $\mathcal{B}$ es completo. Se nota que si $g\in\mathcal{B}$ y $z\in\mathbb{D}$, entonces

$$\begin{aligned}
|g(z)-g(0)| &= \left|z\int_0^1 g'(zt)\,dt\right| \le |z|\int_0^1 |g'(zt)|\,dt \\
&\le \|g\|_{\mathcal{B}}\int_0^1 \frac{|z|}{1-|z|^2t^2}\,dt \le \frac{1}{2}\|g\|_{\mathcal{B}}\log\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big),
\end{aligned}$$

y por tanto

$$|g(z) - g(0)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{B}} \log\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big).$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}$. Se desea probar que existe una función $f \in \mathcal{B}$ tal que dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \mathbb{N}$, entonces se tiene que $\|f_n - f\| < \varepsilon$. Puesto que $\{f_n\}$ es de Cauchy existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ si $n \geq m > N$. Sea $0 < |z| < r < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
|f_n(z) - f_m(z)| &\leq |(f_n(z) - f_m(z)) - (f_n(0) - f_m(0))| + |f_n(0) - f_m(0)| \\
&\leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}} \log\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big) + |f_n(0) - f_m(0)| \\
&\leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}} \log\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big) + |f_n(0) - f_m(0)| \log\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big) \\
&+ \|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}} + |f_n(0) - f_m(0)| \\
&= \|f_n - f_m\|\Big(1 + \log\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big)\Big) \\
&< \varepsilon\Big(1 + \log\Big(\frac{1+|r|}{1-|r|}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ y así converge uniformemente localmente a alguna función analítica f en $\mathbb{D}$. Luego por el teorema de Montel, $f_n'(z) \to f'(z)$ en $\mathbb{D}$ cuando $n \to \infty$. Ahora para todo $n, m \geq N$ y $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$(1 - |z|^2)|f_n'(z) - f_m'(z)| + |f_n(0) - f_m(0)| \leq \|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, al hacer que m tienda a infinito, se tiene para $n > N$,

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto $f_n - f \in \mathcal{B}$ y por la linealidad de $\mathcal{B}$ se tiene que $f \in \mathcal{B}$. Por lo tanto $f_n \to f$ en $\mathcal{B}$ y se obtiene lo deseado.

∎

Teorema 1.3.5. *Supóngase que $f \in \mathcal{B}$. Entonces $f \in \mathcal{B}_0$ si y sólo si*

$$\|f_r - f\|_{\mathcal{B}} \to 0, \qquad r \to 1^-,$$

donde f_r es la dilatación de f.

Demostración. $\Rightarrow$ Supóngase que $f \in \mathcal{B}_0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $1 - \delta < |z| < 1$ entonces $(1 - |z|^2)|f'(z)| < \varepsilon/3$. Para cada r con $\dfrac{2(1-\delta)}{2-\delta} < r < 1$ se tiene que si

$1 - \dfrac{\delta}{2} < |z| < 1$

$$\begin{array}{rcl}(1-|z|^2)|r\ f'(rz) - f'(z)| & \leq & (1-|z|^2)\ r\ |f'(rz)| + (1-|z|^2)|f'(z)| \\ & \leq & (1-r^2|z|^2)|f'(rz)| + (1-|z|^2)|f'(z)| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \dfrac{2\varepsilon}{3}\end{array}$$

pues $1 - \delta < r(1-\delta/2) < r|z| < 1$.

Ahora si $|z| \leq 1 - \dfrac{\delta}{4}$

$$(1-|z|^2)|r\ f'(rz) - f'(z)| \leq (1-|z|^2)(1-r)|f'(rz)| + (1-|z|^2)|f'(rz) - f'(z)|$$

y puesto que f' es uniformemente continua en $|z| \leq 1 - \frac{\delta}{4}$ y $r \to 1^-$ entonces

$$(1-|z|^2)|r\ f'(rz) - f'(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad |z| \leq 1 - \frac{\delta}{4}.$$

Esto muestra que si $f \in \mathcal{B}_0$ entonces

$$\|f_r - f\|_{\mathcal{B}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad r \to 1^-$$

$\Leftarrow$ Supóngase que $\|f_r - f\|_{\mathcal{B}} \longrightarrow 0$ si $r \to 1^-$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $1 - \delta < r < 1$ entonces

$$\|f_r - f\|_{\mathcal{B}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{es decir} \quad \sup_{z\in\mathbb{D}} |r\ f'(rz) - f'(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Elijase R con $1 - \delta < R < 1$, entonces

$$\begin{array}{rcl}(1-|z|^2)|f'(z)| & \leq & |f'(z) - Rf'(Rz)| + (1-|z|^2)|Rf'(Rz)| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + (1-|z|^2)R|f'(Rz)|.\end{array}$$

Como $f'(Rz)$ es continua en $\overline{\mathbb{D}}$ existe $\delta' > 0$ tal que si $1 - \delta' < |z| < 1$ entonces

$$(1-|z|^2)R|f'(Rz)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así

$$(1-|z|^2)|f'(z)| < \varepsilon$$

si $1 - \delta' < |z| < 1$. Por lo tanto $f \in \mathcal{B}_0$.

■

Lema 1.3.6. *$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ es completo.*

Demostración. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{B}_0$ una sucesión de Cauchy, entonces $f_n \to f \in \mathcal{B}$. Por probar que $f \in \mathcal{B}_0$. Dado $\varepsilon > 0$ existen $N \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|f'(z)| &\leq (1-|z|^2)|f'(z)-f_n'(z)| + (1-|z|^2)|f_n'(z)| \\ &\leq \|f(z)-f_n(z)\|_{\mathcal{B}} + (1-|z|^2)|f_n'(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

si $n \geq N$ $1-\delta < |z| < 1$. Así si $1-\delta < |z| < 1$ se tiene que $(1-|z|^2)|f'(z)| < \varepsilon$ y esto dice que $f \in \mathcal{B}_0$.

■

Proposición 1.3.7 (Schwarz Pick). *Si f es una función analítica en $\mathbb{D}$ con $\|f\|_\infty \leq 1$, entonces*

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \leq 1-|f(z)|^2, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Además $H^\infty \subset \mathcal{B}$ y $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_\infty$.

Demostración. Para ver esto se considera la función holomorfa

$$h(z) = \frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}f(z)},$$

la cual satisface las hipótesis del Lema de Schwarz, esto es, $h(0)=0$ y $|h(z)| < 1$, por lo cual $|h(z)| \leq |z|$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y $|h'(0)| \leq 1$. Ahora derivando $h(z)$ con respecto de z y evaluando en $z=0$ tenemos que

$$h'(0) = \frac{-f'(0)}{(1-|f(0)|^2)}.$$

Por lo tanto

$$|h'(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| \leq (1-|f(0)|^2).$$

Sea ahora, $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$ así se tiene que $\varphi_z(0)=0$ y $\varphi_z'(0) = -1+|z|^2$, entonces tomando $f \circ \varphi_z$ en lugar de f se obtiene

$$|(f\circ\varphi_z)'(0)| \leq 1-|f\circ\varphi_z(0)|^2 \Rightarrow |\varphi_z'(0)||f'(\varphi_z(0))| \leq 1-|f(\varphi_z(0))|^2.$$

Así

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \leq 1-|f(z)|^2 \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ahora se prueba que se tiene la contensión y la segunda desigualdad. Para ello sean $f \in H^\infty$ y $g = \dfrac{f}{\|f\|_\infty}$, de donde

$$(1 - |z|^2)\frac{|f'(z)|}{\|f\|_\infty} \leq 1 - \frac{|f(z)|^2}{\|f\|_\infty^2} \leq 1$$

Por otra parte, sea $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces si $g = \frac{f}{\|f\|_\infty}$ se tiene que $\|g\|_{\mathcal{B}} \leq 1$, de donde $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_\infty$.

■

Corolario 1.3.8. *$\mathcal{B}_0$ es la cerradura en $\mathcal{B}$ de el conjunto de polinomios. En particular $\mathcal{B}_0$ es separable.*

Demostración. Como cada f_r puede ser aproximada en H^∞ por polinomios y $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_\infty$ por la proposición anterior, así cada f_r puede ser aproximada por polinomios en $\mathcal{B}$. Luego $\mathcal{B}_0$ es la cerradura en $\mathcal{B}$ de el conjunto de polinomios.

■

Definición 1.3.9. *Sea $C(\overline{\mathbb{D}})$ al espacio de funciones continuas en el disco unitario cerrado $\overline{\mathbb{D}}$ y por $C_0(\mathbb{D})$ al subespacio de $C(\overline{\mathbb{D}})$ de las funciones f tales que $f(z) \to 0$ cuando $|z| \to 1^-$. Es inmediato que $C(\overline{\mathbb{D}})$ y $C_0(\mathbb{D})$ son subespacios cerrados de $L^\infty(\mathbb{D})$.*

El siguiente teorema expresa una relación natural entre la proyección de Bergman y los espacios de Bloch.

Teorema 1.3.10. *Sea $-1 < \alpha < +\infty$ y P_α la proyección de Bergman ponderada. Entonces*

(1) *P_α es una proyección acotada de $L^\infty(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{B}$.*

(2) *P_α es una proyección acotada de $C(\overline{\mathbb{D}})$ sobre $\mathcal{B}_0$.*

(3) *P_α es una proyección acotada de $C_0(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{B}_0$.*

Las tres aplicaciones anteriores son sobreyectivas.

Demostración. (1) Sean $g \in L^\infty(\mathbb{D})$ y $f = P_\alpha g$, así

$$f(z) = P_\alpha g(z) = (\alpha + 1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\alpha}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} g(w)\, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Derivando bajo el signo integral con respecto de z se obtiene

$$f'(z) = (\alpha + 1)(\alpha + 2)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\alpha}{(1 - z\overline{w})^{3+\alpha}} \overline{w} g(w)\, dA(w).$$

Ahora multiplicando esta última igualdad por $(1-|z|^2)$ y tomando el módulo en ambos lados se obtiene que

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|f'(z)| &\leq C(1-|z|^2)\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{\alpha}}{(1-z\overline{w})^{3+\alpha}}|g(w)|\ dA(w)\\ &\leq C\|g\|_{\infty}(1-|z|^2)\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{\alpha}}{(1-z\overline{w})^{3+\alpha}}\ dA(w).\end{aligned}$$

Ahora aplicando el Teorema 1.2.1 con $\alpha=\alpha$ y $\beta=1$, se tiene

$$(1-|z|^2)|f'(z)|\sim C\|g\|_{\infty}(1-|z|^2)\frac{1}{(1-|z|^2)}.$$

Por lo tanto

$$(1-|z|^2)|f'(z)|\leq C\|g\|_{\infty}<+\infty\ .$$

Por otro lado

$$f(0)=\int_{\mathbb{D}}g(w)\ dA_{\alpha}(w)\leq\int_{\mathbb{D}}\|g\|_{\infty}\ dA_{\alpha}(w)=\|g\|_{\infty},$$

o sea, $|f(0)|\leq\|g\|_{\infty}$ y así

$$\|f\|=|f(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)|\leq\ \ \|g\|_{\infty}+C\|g\|_{\infty}<\infty.$$

Por lo tanto $P_{\alpha}g=f\in\mathcal{B}$ y la proyección es acotada.

(2) Sea $g\in C(\overline{\mathbb{D}})$. Se desea mostrar que $f=P_{\alpha}g$ está en el espacio pequeño de Bloch. Por el teorema de aproximación de Stone-Weiertrass, la función g puede aproximarse uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$ por combinaciones finitas de funciones de la forma

$$g_{n,m}(z)=z^n\overline{z}^m,\qquad z\in\mathbb{D},$$

donde $n,m\in\mathbb{Z}^+$, es decir son polinomios en variables reales. Por la Proposición 1.1.15 tomando $\gamma=0$

$$P_{\alpha}(g_{n,m}(z))=\frac{\Gamma(n-m+\alpha+2)\Gamma(n+1)}{(n-m)!\Gamma(\alpha+n+2))}z^{n-m}.$$

Por lo tanto $P_{\alpha}g_{n,m}$ pertenece al espacio de Bloch pequeño y así como P_{α} es un operador acotado de $L^{\infty}(\mathbb{D})$ en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_0$ es cerrado en $\mathcal{B}$ se concluye que P_{α} es una proyección acotada de $C(\overline{\mathbb{D}})$ en $\mathcal{B}_0$.

(3) Este inciso es un caso particular de (2) puesto que $C_0(\mathbb{D})\subset C(\overline{\mathbb{D}})$. Luego P_{α} es una proyección acotada de $C_0(\mathbb{D})$ en $\mathcal{B}_0$.

(4) En este inciso se prueba que las proyecciones (1), (2) y (3) son sobreyectivas. Sea $f \in \mathcal{B}$, y se escribe la expansión de Taylor de f como

$$f(z) = a + bz + cz^2 + f_1(z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

donde $f_1(0) = 0$, $f_1'(0) = 0$ y se define la función $g \in L^\infty(\mathbb{D})$ por

$$g(z) = (1 - |z|^2)\Big[\frac{\alpha+2}{\alpha+1}a + \frac{\alpha+3}{\alpha+1}bz + \frac{\alpha+4}{\alpha+1}cz^2 + \frac{f_1'(z)}{\overline{z}}\Big].$$

La función $\frac{f_1'(z)}{\overline{z}} \in C(\mathbb{D})$, además por la Proposición 1.1.15 y por la linealidad de la proyección $P_\alpha g(z) = f(z)$. Por lo tanto se ha probado que P_α es una proyección sobreyectiva de $L^\infty(\mathbb{D})$ en $\mathcal{B}$ y que $P_\alpha : C(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathcal{B}_0$ también lo es.

■

Proposición 1.3.11. *Supóngase que $n \in \mathbb{Z}^+$ y f es analítica en $\mathbb{D}$. Entonces*

(1) *$f \in \mathcal{B}$ si y sólo si $(1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z)$ está en $L^\infty(\mathbb{D})$.*

(2) *$f \in \mathcal{B}_0$ si y sólo si la función $(1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z)$ está en $C(\mathbb{D})$ o $C(\overline{\mathbb{D}})$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ Si $f \in \mathcal{B}$, entonces por el Teorema 1.3.10 existe una función $g \in L^\infty(\mathbb{D})$ tal que

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{(1 - z\overline{w})^2}\, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Derivando bajo el signo integral n-veces con respecto de z

$$f^{(n)}(z) = (n+1)! \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+n}} \overline{w}^n\, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De donde

$$(1 - |z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \leq (n+1)! \|g\|_\infty \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - z\overline{w}|^{2+n}}\, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Aplicando el Teorema 1.2.1 con $\alpha = 0$ y $\beta = n > 0$, se tiene

$$(1 - |z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \quad \sim \quad (n+1)! \|g\|_\infty (1 - |z|^2)^n \frac{1}{(1 - |z|^2)^n} = (n+1)! \|g\|_\infty,$$

por lo tanto $(1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^\infty(\mathbb{D})$.

$\Leftarrow$ Supóngase que $(1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^\infty(\mathbb{D})$, entonces

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^n |f^{(n)}(z)| = K < +\infty \Rightarrow (1 - |z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \leq K,$$

para cada $z \in \mathbb{D}$. Luego

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{K}{(1-|z|^2)^n}.$$

Así por el teorema fundamental del Cálculo se tiene que

$$\begin{aligned}
|f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(0)| &= \left| z \int_0^1 f^{(n)}(tz)\ dt \right| \leq |z| \int_0^1 |f^{(n)}(tz)|\ dt \\
&\leq K \int_0^1 \frac{|z|}{(1-t^2|z|^2)^n}\ dt \leq K \int_0^1 \frac{|z|}{(1-t|z|)^n}\ dt \\
&\leq \frac{K}{(n-1)(1-|z|)^{n-1}}
\end{aligned}$$

Luego

$$|f^{(n-1)}(z)| - |f^{(n-1)}(0)| \leq \frac{K}{(n-1)(1-|z|)^{n-1}} \cdot \frac{(1+|z|)^{n-1}}{(1+|z|)^{n-1}} \leq 2^{n-1} K \frac{1}{(n-1)(1-|z|^2)^{n-1}}$$

De donde

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)^{n-1}|f^{(n-1)}(z)| &\leq \frac{K}{n-1} 2^{n-1} + (1-|z|^2)^{(n-1)}|f^{(n-1)}(0)| \\
&\leq 2^{n-1}\frac{K}{n-1} + |f^{(n-1)}(0)|.
\end{aligned}$$

Repitiendo este proceso $n-1$ veces, se tiene

$$(1-|z|^2)|f'(z)| < M < +\infty$$

y así $f \in \mathcal{B}$.

(2) $\Rightarrow$ Sea ahora $f \in \mathcal{B}_0$, entonces por el Teorema 1.3.10 existe una función $g \in C_0(\mathbb{D})$ tal que

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{(1-z\overline{w})^2}\ dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Derivando bajo el signo integral, n veces

$$f^{(n)}(z) = (n+1)! \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{(1-z\overline{w})^{2+n}} \overline{w}^n\ dA(w).$$

Si g tiene soporte compacto en $\mathbb{D}$, existe $0 < r < 1$ tal que $g(z) = 0$ si $z \in \mathbb{D} \backslash \overline{B(r)}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| &\leq (n+1)!(1-|z|^2)^{(n)} \int_{\mathbb{D}} \frac{\|g\|_\infty}{(1-r)^{2+n}}\ dA(w) \\
&\leq (n+1)!(1-|z|^2)^n \frac{\|g\|_\infty}{(1-r)^{2+n}} \\
&\to 0 \quad \text{ cuando } |z| \to 1^-.
\end{aligned}$$

Si g no tiene soporte compacto en $\mathbb{D}$, entonces se puede aproximar uniformemente por funciones continuas con soporte compacto en $\overline{\mathbb{D}}$. Supóngase que $g_k \to g$ cuando $k \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) &= (n+1)!(1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \lim_{k\to\infty} \frac{g_k(w)}{(1-z\overline{w})^{2+n}} \overline{w}^n \, dA(w) \\ &= \lim_{k\to\infty} (n+1)!(1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \frac{g_k(w)}{(1-z\overline{w})^{2+n}} \overline{w}^n \, dA(w) \\ &= \lim_{k\to\infty} (1-|z|^2)^2 f_k^{(n)}(z).\end{aligned}$$

Ahora dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(1-|z|^2)^2 f^{(n)}(z) - (1-|z|^2)^2 f_k^{(n)}(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

si $k \geq N$. Luego para $k = N+1$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < 1-\delta < |z| < 1$ se tiene que

$$|(1-|z|^2)^2 f^{(n)}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (1-|z|^2)^2 |f_{N+1}^{(n)}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Supóngase que $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y se asume que los primeros $2n+1$ coeficientes de Taylor de f son todos cero. En este caso se considera la función

$$g(z) = C\frac{(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z)}{\overline{z}^n}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

que por la prueba de la Proposición 1.2.6 se tiene que $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y además por la misma prueba se tiene que f y Pg difieren por un polinomio, luego

$$f \in \mathcal{B}_0$$

ya que $Pg \in \mathcal{B}_0$, esto por el Teorema 1.3.10.

∎

Como consecuencia de este teorema y la Proposición 1.2.6, se ve que $\mathcal{B}$ está contenido en cada espacio de Bergman ponderado A^p_α y al hacer uso de esta observación y el siguiente resultado, se pueden construir funciones no triviales en los espacios de Bergman ponderados. En particular se puede ver que cada espacio de Bergman ponderado contiene funciones que no son acotadas.

Se recuerda que una sucesión $\{\lambda_n\}$ de enteros positivos es una sucesión **lacunaria** si existe una constante $\lambda > 1$ tal que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \lambda$ para todo $n = 1,\ 2, \ldots$. En este caso una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

se dice una serie Lacunaria.

Proposición 1.3.12. (1) *Una serie lacunaria define una función en $\mathcal{B}$ si y sólo si sus coeficientes son acotados.* (2) *Similarmente una serie lacunaria define una función en $\mathcal{B}_0$ si y sólo si sus coeficientes tienden a cero.*

Demostración. Primero se prueba (1).

$\Rightarrow$ Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$ cualquier función en el espacio de Bloch. Se prueba que sus coeficientes de Taylor son acotados. Por el Corolario 1.1.14 con $\alpha = 1$ se tiene que

$$f'(z) = 2\int_{\mathbb{D}} \frac{1-|w|^2}{(1-z\overline{w})^3} f'(w)\ dA(w)$$

De donde

$$f^{(n)}(z) = (n+1)! \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|w|^2}{(1-z\overline{w})^{2+n}} \overline{w}^n f'(w)\ dA(w),$$

por lo cual

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)\overline{w}^n f'(w)\ dA(w),$$

$n \in \mathbb{N}$. Ahora tomando módulos en ambos lados se obtiene

$$|a_n| \leq (n+1)\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)|w|^n |f'(w)|\ dA(w) \leq (n+1)\int_{\mathbb{D}} |w|^n \|f\|_{\mathcal{B}}\ dA(w). \tag{1.8}$$

La ultima integral sobre $\mathbb{D}$ se puede descomponer en la integral en el disco $|w| \leq R$ y el anillo $R < |w| < 1$

$$\begin{aligned}
(n+1)\int_{\mathbb{D}} |w|^n \|f\|_{\mathcal{B}}\ dA(w) &= (n+1)\int_{B(R)} |w|^n \|f\|_{\mathcal{B}}\ dA(w) \\
&+ (n+1)\int_{R<|w|<1} |w|^n \|f\|_{\mathcal{B}}\ dA(w) \\
&= \frac{2(n+1)}{n+2}\|f\|_{\mathcal{B}} R^{n+2} + \frac{2(n+1)}{n+2}\|f\|_{\mathcal{B}}(1-R^{n+2}) \\
&\leq 2\|f\|_{\mathcal{B}}. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

De aquí tomando $R = 0$ se obtiene

$$|a_n| \leq 2\|f\|_{\mathcal{B}}$$

y esto dice que los coeficientes de f son acotados.

$\Leftarrow$ Supóngase que $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos con $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de números enteros positivos tales que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \lambda$, donde

$1 < \lambda < +\infty$ es constante. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$, con $z \in \mathbb{D}$. Se observa que f es analítica en $\mathbb{D}$ y

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n z^{\lambda_n - 1}$$

Sea $C = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, entonces $1 < C < +\infty$, así

$$\lambda_{n+1} \geq \lambda\lambda_n, \quad \text{de donde} \quad \lambda_{n+1} \geq \frac{C}{C-1}\lambda_n \quad \text{y así} \quad \lambda_{n+1} \leq C(\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Obsérvese que

$$\lambda_n < \lambda_n + 1 < \lambda_n + 2 < \cdots < \lambda_{n+1} - 1 < \lambda_{n+1},$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1}|z|^{\lambda_{n+1}-1} &\leq C(\lambda_{n+1} - \lambda_n)|z|^{\lambda_{n+1}-1} \\
&= C(1 + \cdots + 1)|z|^{\lambda_{n+1}-1} \\
&= C(|z|^{\lambda_{n+1}-1} + \cdots + |z|^{\lambda_{n+1}-1}) \\
&\leq C(|z|^{\lambda_n} + |z|^{\lambda_n+1} + \cdots + |z|^{\lambda_{n+1}-1}),
\end{aligned}$$

donde $1 + \cdots + 1 = \lambda_{n+1} - \lambda_n$. También se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda_1|z|^{\lambda_1-1} &\leq 1 + |z| + \cdots + |z|^{\lambda_1-1} \\
&\leq C(1 + |z| + \cdots + |z|^{\lambda_1-1}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|f'(z)| \leq MC\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{MC}{1 - |z|}, \tag{1.10}$$

y entonces

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 2MC < +\infty$$

y se concluye que f está en el espacio de Bloch.

Ahora se muestra (2).

$\Rightarrow$ Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$ cualquier función en el espacio de Bloch pequeño. Puesto que $f \in \mathcal{B}_0$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < R < 1$ tal que si $R < |z| < 1$, entonces

$$(1 - |w|^2)|f'(w)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como en particular $f \in \mathcal{B}$ entonces por la prueba de (1) se cumplen (1.8) y (1.9) por lo que

$$\begin{aligned}|a_n| &\leq (n+1)\int_{\mathbb{D}}(1-|w|^2)|w|^n|f'(w)|\,dA(w)\\ &\leq \frac{2(n+1)}{n+2}\|f\|_{\mathcal{B}}R^{n+2}+(n+1)\int_{R<|w|<1}(1-|w|^2)|w|^n|f'(w)|\,dA(w).\end{aligned}$$

Por lo que

$$|a_n| < \frac{2(n+1)}{n+2}\|f\|_{\mathcal{B}}R^{n+2}+\frac{(n+1)}{n+2}(1-R^{n+2})\,\varepsilon,$$

así tomando el límite cuando $n \to \infty$ se tiene que $|a_n| \to 0$.

$\Leftarrow$ Supóngase que $a_n \to 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $|a_n| < \varepsilon$ para $n \geq N$ y escribiendo

$$f(z) = P(z) + \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^{\lambda_n},$$

donde $P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{\lambda_n}$. Así por (1.10) se tiene que

$$\lim_{r\to 1}(1-r^2)|f'(z)| \leq \lim_{r\to 1}(1-r^2)|P'(z)| + MC\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto dicho límite es igual a cero, luego $f \in \mathcal{B}_0$.

■

Ahora para finalizar esta sección se presenta una caracterización del espacio de Bloch en términos de la métrica de Bergman. Se recuerda que para cada $z \in \mathbb{D}$, la función φ_z es la transformacion de Möbius de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ que intercambia a z y el origen.

La métrica pseudo hiperbólica ρ en $\mathbb{D}$ está definida por

$$\rho(z,w) = |\varphi_z(w)| = \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|; \qquad z,w \in \mathbb{D},$$

y la métrica hiperbólica β, también llamada la métrica de Bergman ó métrica de Poincaré, está dada por

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)}; \qquad z,w \in \mathbb{D}.$$

Proposición 1.3.13. *La métrica pseudo hiperbólica y la métrica hiperbólica son Möbius invariantes, es decir*

$$\rho(\varphi_\lambda(z),\varphi_\lambda(w)) = \rho(z,w) \quad \text{y} \quad \beta(\varphi_\lambda(z),\varphi_\lambda(w)) = \beta(z,w),$$

para cada $z, w \in \mathbb{D}$.

Demostración. Sean $\varphi_\lambda(z)$ y $\varphi_\lambda(w)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\rho(\varphi_\lambda(z), \varphi_\lambda(w)) \\
&= \left|\frac{\varphi_\lambda(z) - \varphi_\lambda(w)}{1 - \varphi_\lambda(z)\overline{\varphi_\lambda(w)}}\right| = \left|\frac{\frac{\lambda - z}{1-\overline{\lambda}z} - \frac{\lambda - w}{1-\overline{\lambda}w}}{1 - \frac{\lambda - z}{1-\overline{\lambda}z} \cdot \frac{\overline{\lambda}-\overline{w}}{1-\lambda\overline{w}}}\right| = \left|\frac{\frac{(\lambda-z)(1-\overline{\lambda}w)-(\lambda-w)(1-\overline{\lambda}z)}{(1-\overline{\lambda}z)(1-\overline{\lambda}w)}}{\frac{(1-\overline{\lambda}z)(1-\lambda\overline{w})-(\lambda-z)(\overline{\lambda}-\overline{w})}{(1-\overline{\lambda}z)(1-\lambda\overline{w})}}\right| \\
&= \frac{|1-\overline{\lambda}z||1-\lambda\overline{w}|}{|1-\overline{\lambda}z||1-\lambda\overline{w}|} \cdot \left|\frac{\lambda - |\lambda|^2 w - z + \overline{\lambda}wz - \lambda + |\lambda|^2 z + w - \overline{\lambda}zw}{1 - \lambda\overline{w} - \overline{\lambda}z + |\lambda|^2 z\overline{w} - |\lambda|^2 + \lambda\overline{w} + \overline{\lambda}z - z\overline{w}}\right| \\
&= \left|\frac{|\lambda|^2(z-w) - (z-w)}{(1-|\lambda|^2)(1-\overline{z}w)}\right| = \left|\frac{(|\lambda|^2 - 1)(z-w)}{(1-|\lambda|^2)(1-\overline{z}w)}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right| \\
&= \rho(z,w).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la métrica pseudo hiperbólica ρ en $\mathbb{D}$ es Möbius invariante, para ver que la métrica hiperbólica β también lo es, basta con ver que

$$\beta(\varphi_\lambda(z), \varphi_\lambda(w)) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(\varphi_\lambda(z), \varphi_\lambda(w))}{1-\rho(\varphi_\lambda(z), \varphi_\lambda(w))}$$

y aplicar el hecho de que la métrica pseudo hiperbólica ρ en $\mathbb{D}$ es Möbius invariante.

■

La distancia infinitesimal de un elemento de la métrica de Bergman en $\mathbb{D}$, está dada por

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Teorema 1.3.14. *Una función analítica f en $\mathbb{D}$ pertenece al espacio de Bloch si y sólo si existe una constante C tal que*

$$|f(z) - f(w)| \leq C\beta(z,w)$$

para todo $z, w \in \mathbb{D}$, es decir $f : (\mathbb{D}, \beta) \to (\mathbb{D}, |\cdot|)$ es de Lipschitz y C puede ser elegida como $\|f\|_{\mathcal{B}}$.

Demostración. $\Rightarrow$ Sea f una función analítica en el espacio de Bloch. Entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo y ya que $\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)|$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Big|f(z) - f(0)\Big| &\leq |z|\int_0^1 |f'(zt)|\, dt \leq \|f\|_{\mathcal{B}} \int_0^1 \frac{|z|}{1-|zt|^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{B}} \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right) = \frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{B}}\beta(z,0),
\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Ahora reemplazando f por $f\circ\varphi_z$ y reemplazando z por $\varphi_z(w)$ y aplicando la invarianza de Möbius de $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ y $\beta(z,w)$ se tiene

$$|f(z) - f(w)| \leq \|f\|_{\mathcal{B}}\beta(z,w),$$

para todo $z, w \in \mathbb{D}$ y toda $f \in \mathcal{B}$.

$\Leftarrow$ Supóngase que existe $C > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| \leq C\beta(z, w)$. Primero se observa lo siguiente

$$\lim_{w \to z} \frac{|f(w) - f(z)|}{\beta(z, w)} = (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

En efecto, como $\ln(1 + u) \approx u$ si $|u| \to 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{w \to z} \frac{|f(w) - f(z)|}{\beta(z, w)} &= \lim_{w \to z} \frac{|f(w) - f(z)|}{|w - z|} \frac{|w - z|}{\beta(z, w)} = |f'(z)| \lim_{w \to z} \frac{|w - z|}{\beta(z, w)} \\
&= |f'(z)| \lim_{w \to z} \frac{|w - z|}{\frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{2|w - z|}{|1 - z\overline{w}| - |w - z|} \right]} \\
&= |f'(z)| \lim_{w \to z} \frac{|w - z|}{\frac{1}{2} \left[\frac{2|w - z|}{|1 - z\overline{w}| - |w - z|} \right]} = |f'(z)| \frac{1}{\frac{1}{|1 - |z|^2|}} \\
&= (1 - |z|^2)|f'(z)|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(1 - |z|^2)|f'(z)| < C < +\infty$, luego $f \in \mathcal{B}$.

■

Una consecuencia de la prueba del teorema anterior es que si $f \in \mathcal{B}$, entonces

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \left\{ \frac{|f(w) - f(z)|}{\beta(z, w)} : z, w \in \mathbb{D}, z \neq w \right\}.$$

Por el teorema anterior se tiene

$$|f(z) - f(w)| \leq \|f\|_{\mathcal{B}} \beta(z, w),$$

para todo $z, w \in \mathbb{D}$, entonces

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left\{ \frac{|f(w) - f(z)|}{\beta(z, w)} : z, w \in \mathbb{D}, z \neq w \right\} \leq \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Por otro lado si

$$M = \sup_{z \in \mathbb{D}} \left\{ \frac{|f(w) - f(z)|}{\beta(z, w)} : z, w \in \mathbb{D}, z \neq w \right\} < +\infty.$$

Entonces para cualquier $z \in \mathbb{D}$

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \limsup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|f(w) - f(z)|}{\beta(z, w)} \leq M$$

y por lo tanto

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{ \frac{|f(w)-f(z)|}{\beta(z,w)} : z, w \in \mathbb{D}, z \neq w \right\}.$$

Por otra parte con ayuda de funciones del tipo

$$f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}; \qquad z \in \mathbb{D},$$

se puede probar que

$$\beta(z,w) = \sup\{|f(z)-f(w)| : \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}.$$

Esta igualdad se puede mostrar de la siguiente manera. Puesto que β y $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ son Möbius invariante será suficiente probar que

$$\beta(z,0) = \sup\{|f(z)-f(0)| : \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}.$$

Por el Teorema 1.3.14

$$|f(z)-f(0)| \leq \|f\|_{\mathcal{B}}\beta(z,0),$$

entonces

$$\sup\{|f(z)-f(0)| : \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1\} \leq \beta(z,0).$$

Para probar la desigualdad opuesta, supóngase que $z \neq 0$ y $z = |z|e^{-i\theta}$ y se considera la función

$$f(w) = \frac{1}{2}\log\frac{1+we^{i\theta}}{1-we^{i\theta}}, \qquad \text{con} \qquad \|f\|_{\beta} \leq 1.$$

Entonces,

$$|f(z)-f(0)| = \frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|} = \beta(z,0). \qquad \text{con} \qquad \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1$$

Por lo tanto

$$\beta(z,0) \leq \sup\{|f(z)-f(0)| : \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}.$$

Así pues se obtiene lo deseado. El Teorema 1.3.14 y estas últimas fórmulas exhiben la relación precisa entre los espacio de Bloch y la métrica de Bergman.

Lema 1.3.15. *La función $\beta(z,w)$ está en $L^p(\mathbb{D}.dA_\alpha)$ para todo $p>0$.*

Demostración. Para mostrar que $\beta(z,w)$ está en $L^p(\mathbb{D},dA_\alpha)$ para todo $p>0$, se debe probar que

$$\int_{\mathbb{D}} \big(\beta(z,w)\big)^p \, dA_\alpha(z) < \infty.$$

Por la desigualdad del triángulo será suficiente con probar que

$$\int_{\mathbb{D}} \big(\beta(0,z)\big)^p \, dA_\alpha(z) < \infty.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \big(\beta(0,z)\big)^p \, dA_\alpha(z) &= \frac{1}{2}(\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha \log^p\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right) dA(z) \\
&= \frac{1}{2\pi}(\alpha+1)\int_0^1 r\ (1-r^2)^\alpha \log^p\left(\frac{1+r}{1-r}\right) d\theta\ dr \\
&= (\alpha+1)\int_0^1 r\ (1-r^2)^\alpha \log^p\left(\frac{1+r}{1-r}\right) dr
\end{aligned}$$

Para ver que esta última integral es finita bastará con mostrar que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-r^2)^\alpha \log^p\left(\frac{1+r}{1-r}\right) dr &\approx \int_0^1 (1-r^2)^\alpha \log^p\left(\frac{1}{1-r}\right) dr \\
&\approx \int_0^1 (1-r)^\alpha \log^p\left(\frac{1}{1-r}\right) dr.
\end{aligned}$$

Tomando el cambio de variable $u=\log\frac{1}{1-r}$ en está última integral se tiene que $e^u=\frac{1}{1-r}$, $(1-r)=e^u$ y

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-r)^\alpha \log^p\left(\frac{1}{1-r}\right) dr &= \int_0^\infty e^{-u\alpha}\ u^p\ e^{-u}\ du \\
&= \int_0^\infty e^{-u(\alpha+1)}\ u^p\ du.
\end{aligned}$$

Lo cual es integrable si y sólo si $-u(\alpha+1)<0$, es decir si y sólo si $(\alpha+1)>0$. Así pues se tiene lo deseado.

■

1.4. Espacios Duales de los Espacios de Bergman

Sean $0 < p < +\infty$ y $-1 < \alpha < +\infty$. Un funcional lineal F en A^p_α se dice que es acotado si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|F(f)| \leq C\|f\|_{\alpha,p}$$

para todo $f \in A^p_\alpha$, donde

$$\|f\|_{\alpha,p} = \Big(\int_{\mathbb{D}} |f|^p \, dA_\alpha(z)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Se recuerda que la evaluación puntual es un funcional acotado en cada A^p_α. En particular cada espacio de Bergman ponderado A^p_α tiene funciones lineales acotadas no triviales. Sea $(A^p_\alpha)^*$ el espacio de todos los funcionales lineales acotados. Entonces $(A^p_\alpha)^*$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|F\| = \sup\{F(f) : \|f\|_{\alpha,p} \leq 1\},$$

si $1 \leq p < +\infty$, si $0 < p < 1$ entonces A^p_α es un espacio métrico completo.

El siguiente teorema dice que el espacio dual de A^p_α cuando $1 < p < \infty$ es naturalmente A^q_α con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Teorema 1.4.1. *Para $1 < p < +\infty$ y $-1 < \alpha < +\infty$ se tiene que $A^p_\alpha(\mathbb{D})^* = A^q_\alpha(\mathbb{D})$, bajo el pareo integral*

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} \, dA_\alpha(z); \qquad f \in A^p_\alpha(\mathbb{D}),\ g \in A^q_\alpha(\mathbb{D}),$$

donde q es el exponente conjugado de p.

Demostración. $\Rightarrow$ Sea F un funcional lineal acotado en A^p_α, entonces por el teorema de extensión de Hanh-Banach, F puede extenderse a un funcional lineal acotado (el cual se sigue denotando por F) en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Por la dualidad de los espacios $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ existe una función $\varphi \in L^q(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, tal que

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\varphi(z)} \, dA_\alpha,$$

para cada $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Escribiendo $f = P_\alpha f$ y usando el hecho de que el operador P_α es autoadjunto con respecto al producto interno asociado con dA_α, se tiene

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi\rangle &= \langle P_\alpha f, \varphi\rangle = \langle f, P_\alpha\varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{P_\alpha\varphi(z)} \, dA_\alpha(z). \end{aligned}$$

Haciendo $g = P_\alpha\varphi(z)$ se obtiene

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{P_\alpha\varphi(z)}\ dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dA_\alpha(z)$$

Entonces por el Teorema 1.2.4 se tiene que $g \in A^q_\alpha(\mathbb{D})$, así

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dA_\alpha(z)$$

para toda $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$.

$\Leftarrow$ Sea $g \in A^q_\alpha(\mathbb{D})$ y se define el funcional $\phi_g : A^p_\alpha(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ por

$$\phi_g(f) = \phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dA_\alpha(z).$$

Por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\Big|\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dA_\alpha(z)\Big| \leq \Big(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\ dA_\alpha(z)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^q\ dA_\alpha(z)\Big)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{\alpha,p}\cdot\|g\|_{\alpha,q}.$$

De donde,

$$\Big|\phi_g(f)\Big| \leq C\|f\|_{\alpha,p}$$

y entonces ϕ_g es un funcional acotado en $A^p_\alpha(\mathbb{D})$, es decir $\phi_g \in \Big(A^p_\alpha(\mathbb{D})\Big)^*$.

■

Para identificar el espacio dual de A^p_α cuando $0 < p < 1$, primero se introduce un cierto tipo de operador fraccionario de derivación e integración.

Sea $H(\mathbb{D})$ el espacio de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y se dota a $H(\mathbb{D})$ con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos. Así un operador líneal $H(\mathbb{D})$ es continuo si y sólo si $Tf_n \to Tf$ uniformemente en subconjuntos compactos siempre que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos.

Lema 1.4.2. *Para cada α, $-1 < \alpha < +\infty$, existe un único operador lineal $\mathbf{D}^\alpha$ en $H(\mathbb{D})$ con las siguientes propiedades*

(1) $\mathbf{D}^\alpha$ *es continuo en* $H(\mathbb{D})$.

(2) $\mathbf{D}^\alpha[(1 - z\overline{w})^{-2}] = (1 - z\overline{w})^{-(2+\alpha)}$, *para cada* $w \in \mathbb{D}$.

Demostración. Se recuerda que

$$\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\overline{w}^n \quad \text{y} \quad \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}z^n\overline{w}^n\ .$$

Se define

$$\mathbf{D}^\alpha(z^n)=\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}z^n$$

para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Así extendiendo $\mathbf{D}^\alpha$ linealmente a todo el espacio $H(\mathbb{D})$, se tiene que este operador tiene las propiedades deseadas. En efecto:

(1) Supóngase que la sucesión $\{f_n\}\subset H(\mathbb{D})$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ a la función $f\in H(\mathbb{D})$, entonces se probará que $\mathbf{D}^\alpha f_n \rightrightarrows \mathbf{D}^\alpha f$ en subconjuntos compactos. Para ello sean $f_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}z^k$ y $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$, se puede suponer $\overline{B(R)}$ como el compacto K con $0<R<1$, entonces

$$\begin{aligned}\Big|\mathbf{D}^\alpha(f_n(z))-\mathbf{D}^\alpha(f(z))\Big| &= \Big|\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)}z^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)}z^k\Big|\\ &= \Big|\sum_{k=0}^{\infty}(a_{n,k}-a_k)z^k\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)}\Big|\end{aligned}$$

El radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(a_{n,k}-b_k)z^k$, es el mismo radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(a_{n,k}-a_k)z^k k^\alpha$. Ahora por la fórmula de Stirling

$$\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}\sim n^\alpha$$

cuando $n\to\infty$. Así

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_{n,k}-a_k)\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)}z^k\sim\sum_{k=0}^{\infty}(a_{n,k}-a_k)k^\alpha z^k,$$

y así converge en $K\subset\mathbb{D}$ compacto. Dado $\varepsilon>0$, existe $0<l$ tal que

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=l}^{\infty}(a_{n,k}-a_k)\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)}z^k\Big| &\leq \sum_{k=l}^{\infty}|a_{n,k}-a_k|\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)}R^k\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

para todo $z \in K$, ya que en un conjunto compacto la serie converge absolutamente.

Ahora como $f_n \rightrightarrows f$ en K se tiene que

$$|a_{n,k} - a_k| < \frac{2\varepsilon}{2MR}(1-R)$$

si $n \geq N$, donde $M = \max_{1 \leq k \leq l} \left\{ \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)} \right\}$. Entonces

$$\Big| \sum_{k=0}^{l-1} (a_{n,k} - a_k) \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)} z^k \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y así

$$\Big| \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k} - a_k) \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{(k+1)!\Gamma(2+\alpha)} z^k \Big| < \varepsilon$$

para cada $z \in K$. Por lo tanto $\mathbf{D}^\alpha$ es continuo en $H(\mathbb{D})$.

(2) Como $\frac{1}{(1-z\overline{w})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \overline{w}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^\alpha \Big((1-z\overline{w})^{-2} \Big) &= \mathbf{D}^\alpha \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \overline{w}^n \Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \overline{w}^n \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (z\overline{w})^n \\
&= \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}.
\end{aligned}$$

(3) La unicidad se sigue de la expansión en serie de potencias de una función analítica en $\mathbb{D}$.

$\blacksquare$

Así el operador $\mathbf{D}^\alpha$ puede considerarse un operador fraccional diferencial de orden α en el caso $\alpha > 0$.

Proposición 1.4.3. *Para cada $-1 < \alpha < +\infty$ el operador $\mathbf{D}^\alpha$ también puede representarse por*

$$\mathbf{D}^\alpha f(z) = \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.11}$$

para $f \in H(\mathbb{D})$.

Demostración. Sea $f \in H(\mathbb{D})$, entonces $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, por lo cual $f(rz) = \sum_{k=0}^\infty a_k (rz)^k$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA(w) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\sum_{k=0}^\infty a_k r^k w^k}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA(w) \\
&= \sum_{k=0}^\infty a_k r^k \int_{\mathbb{D}} \frac{w^k}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA(w) \\
&= \sum_{k=0}^\infty a_k r^k \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha) n!} \int_{\mathbb{D}} w^k \overline{w}^n z^n \, dA(w) \\
&= \sum_{k=0}^\infty a_k r^k \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha) n!} z^n \int_{\mathbb{D}} w^k \overline{w}^n \, dA(w) \\
&= \sum_{k=0}^\infty a_k r^k \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha) n!} z^n \int_0^1 \int_0^{2\pi} \eta^{k+n+1} e^{-i(k-n)} \frac{d\theta \, d\eta}{\pi} \\
&= \sum_{k=0}^\infty a_k r^k \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)(k+1)!} z^k.
\end{aligned}$$

Así tomando el límite cuando $r \to 1^-$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA(w) &= \sum_{k=0}^\infty a_k z^k \frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)(k+1)!} \\
&= \mathbf{D}^\alpha f(z),
\end{aligned}$$

para $f \in H(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$.

■

En particular el límite de la proposición anterior siempre existe. Si f está en $A^1(\mathbb{D})$, entonces

$$\mathbf{D}^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Lema 1.4.4. *Para cada $-1 < \alpha < +\infty$, el operador $\mathbf{D}^\alpha$ es invertible en $H(\mathbb{D})$.*

Demostración. Se define el operador $\mathbf{D}_\alpha$ en monomios por

$$\mathbf{D}_\alpha(z^n) = \frac{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} z^n$$

y se extiende $\mathbf{D}_\alpha$ linealmente a todo el espacio $H(\mathbb{D})$. Entonces, como en la prueba del Lema 1.4.2, $\mathbf{D}_\alpha$ es un operador continuo en $H(\mathbb{D})$, además $\mathbf{D}_\alpha$ es el operador inverso de $\mathbf{D}^\alpha$.

■

Ahora ya se puede identificar al espacio dual de A^p_α cuando $0 < p < 1$. Los siguientes dos lemas serán necesarios para este fin, pero por si sólos son interesantes.

Lema 1.4.5. *Para cada $0 < p \leq 1$, $-1 < \alpha < +\infty$, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{-2+\frac{(2+\alpha)}{p}} dA(z) \leq C\|f\|_{\alpha,p}$$

para todo $f \in A^p_\alpha$, es decir $A^p_\alpha(\mathbb{D}) \subset A^1_{\frac{2+\alpha}{p}-2}(\mathbb{D})$ y la inclusión es acotada.

Demostración. Para $z \in \mathbb{D}$, considérese el disco $B\big(z, \frac{1-|z|}{2}\big)$. Por la subarmonicidad de $|f|^p$ se tiene que

$$|f(z)|^p \leq \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \int_{B(z,\frac{1-|z|}{2})} |f(w)|^p \, dA(w)$$

Es inmediato que $(1-|w|) \sim (1-|z|)$ para $w \in B\big(z, \frac{1-|z|}{2}\big)$, se puede encontrar una constante positiva $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
(\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha |f(z)|^p &\leq \frac{4}{(1-|z|^2)^2}(\alpha+1)\int_{B(z,\frac{1-|z|}{2})} (1-|z|^2)^\alpha |f(w)|^p \, dA(w) \\
&\leq \frac{C}{(1-|z|^2)^2}(\alpha+1)\int_{B(z,\frac{1-|z|}{2})} (1-|w|^2)^\alpha |f(w)|^p \, dA(w).
\end{aligned}$$

De donde

$$(\alpha+1)^{\frac{1}{p}}(1-|z|^2)^{\frac{\alpha}{p}}|f(z)| \leq \frac{C^{1/p}}{(1-|z|^2)^{2/p}}\|f\|_{\alpha,p}$$

y entonces

$$|f(z)| \leq C'(1-|z|^2)^{\frac{-(2+\alpha)}{p}}\|f\|_{\alpha,p}.$$

De esta última desigualdad se deduce que

$$|f(z)|^{(1-p)} \leq C'(1-|z|^2)^{\frac{-(2+\alpha)(1-p)}{p}}\|f\|^{1-p}_{\alpha,p}$$

y se tiene finalmente

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{-2+\frac{(2+\alpha)}{p}}\ dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p |f(z)|^{1-p}(1-|z|^2)^{-2+\frac{(2+\alpha)}{p}}\ dA(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p C(1-|z|^2)^{\alpha} \|f\|_{\alpha,p}^{1-p}\ dA(z) \\
&\leq C\|f\|_{\alpha,p}^{1-p}(\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p(1-|z|^2)^{\alpha}\ dA(z) \\
&= C\|f\|_{\alpha,p}^{1-p}\|f\|_{\alpha,p}^{p} \\
&= C\|f\|_{\alpha,p}.
\end{aligned}$$

■

Lema 1.4.6. *Sean $\alpha > -1$ y $0 < R < 1$, entonces*

$$\int_R^1 (1-r^2)^{\alpha}\ \log\frac{1}{1-r}\ dr < \infty.$$

Demostración. Para ver que se cumple este resultado será suficiente con probar que

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha}\ \log\frac{1}{1-r}\ dr < \infty.$$

Tomando en esta última integral el cambio de variable $u = \log\frac{1}{1-r}$ se tiene que $(1-r) = e^{-u}$ y

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-r)^{\alpha}\ \log\frac{1}{1-r}\ dr &= \int_0^{\infty} e^{-u\alpha}\ u\ e^{-u}\ du \\
&= \int_0^{\infty} e^{-u(\alpha+1)}\ u\ du\ ,
\end{aligned}$$

lo cual es integrable si y sólo si $-u(\alpha+1) < 0$, es decir, si $\alpha+1 > 0$.

■

Lema 1.4.7. *Supóngase que $-1 < \alpha < +\infty$ y que f es analítica en $\mathbb{D}$. Si la función f ó la función $(1-|z|^2)^{-\alpha}f(z)$ es acotada, entonces la función $(1-|z|^2)^{\alpha}\mathbf{D}^{\alpha}f(z)$ es área integrable y*

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dA(z) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \mathbf{D}^{\alpha}f(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^{\alpha}\ dA(z)$$

o equivalentemente

$$\int_{\mathbb{D}} \overline{f(z)}g(z)\ dA(z) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \overline{\mathbf{D}^{\alpha}f(z)}g(z)(1-|z|^2)^{\alpha}\ dA(z)$$

para toda $g \in H^{\infty}$.

Demostración. Se realiza la prueba por casos: (a) Si $\alpha = 0$ es inmediata.

(b) Si $0 < \alpha < +\infty$, entonces por la representación integral de $\mathbf{D}^\alpha$ dada en (1.11) y el Teorema 1.2.1 la función $(1-|z|^2)^\alpha \mathbf{D}^\alpha f(z)$ es acotada. En efecto

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)^\alpha |\mathbf{D}^\alpha f(z)| &\leq (1-|z|^2)^\alpha \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(rw)|}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}}\, dA(w) \\
&\leq (1-|z|^2)^\alpha M \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}}\, dA(w) \\
&\sim M\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-|z|^2)^\alpha} \\
&= M.
\end{aligned}$$

Para poder aplicar dicho teorema se considero $\beta = \alpha > 0$ y $\alpha = 0$. Por lo tanto la función la función $(1-|z|^2)^\alpha \mathbf{D}^\alpha f(z)$ es área integrable.

(c) Si $-1 < \alpha < 0$ y $|f(z)| \leq C_1(1-|z|^2)^\alpha$ entonces por el Teorema 1.2.1 y la representación integral de $\mathbf{D}^\alpha$, se tiene que (para aplicar el teorema mencionado se considera $\beta = \alpha < 0$ y $\alpha = 0$)

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)^\alpha |\mathbf{D}^\alpha f(z)| &\leq (1-|z|^2)^\alpha \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(rw)|}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}}\, dA(w) \\
&\leq C_1(1-|z|^2)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}}\, dA(w) \\
&\sim C_1(1-|z|^2)^\alpha \log\frac{1}{1-|z|^2},
\end{aligned}$$

para $\frac{1}{2} < |z| < 1$ y por lo tanto $(1-|z|^2)^\alpha \mathbf{D}^\alpha f(z)$ es área integrable por el Lema 1.4.6.

La identidad se sigue de la forma integral de $\mathbf{D}^\alpha$, la propiedad reproductora de P_α, y el Teorema de Fubini. En efecto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{P_\alpha g(z)}\, dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{g(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(w)\, dA(z) \\
&= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} f(z)\frac{\overline{g(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}(1-|w|^2)^\alpha\, dA(w)\, dA(z) \\
&= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \overline{g(w)}(1-|w|^2)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{(1-\overline{z}w)^{2+\alpha}}\, dA(z)\, dA(w) \\
&= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \mathbf{D}^\alpha f(w)\overline{g(w)}(1-|w|^2)^\alpha\, dA(w).
\end{aligned}$$

■

Ya probados los resultados anteriores que se usan de para la siguiente prueba, se determina el espacio dual del espacio $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ cuando $0 < p \leq 1$.

Teorema 1.4.8. *Supóngase que* $0 < p \leq 1$, $-1 < \alpha < +\infty$ *y* $\beta = \frac{(2+\alpha)}{p} - 2$. *Entonces* $(A^p_\alpha)^* = \mathcal{B}$ *bajo el pareo integral*

$$\langle f, g\rangle = \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} f(rz)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta \, dA(z),$$

donde $f \in A^p_\alpha$ *y* $g \in \mathcal{B}$.

Demostración. Primero se asume que $F \in (A^p_\alpha)^*$ y $f \in A^p_\alpha$. Como $\|f - f_r\|_{\alpha,p} \to 0$ cuando $r \to 1^-$, se tiene que

$$F(f) = \lim_{r\to 1^-} F(f_r).$$

Ahora puesto que $f_r \in A^p_\alpha$, se puede escribir como

$$f_r(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f_r(w)}{(1 - z\overline{w})^2} \, dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Como la integral converge en A^p_α, la continuidad de F implica que

$$\begin{aligned} F(f_r) &= F\Big(\int_{\mathbb{D}} \frac{f_r(w)}{(1 - z\overline{w})^2} \, dA(w)\Big) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f_r(w) F\Big(\frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}\Big) \, dA(w), \end{aligned}$$

donde F actúa con respecto a la variable z. Haciendo

$$\overline{h(w)} = F\Big(\frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}\Big), \qquad w \in \mathbb{D}$$

Entonces h es analítica en $\mathbb{D}$ y

$$F(f_r) = \int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{h(w)} \, dA(w).$$

Haciendo $\beta = (2+\alpha)/p - 2$ y aplicando el lema anterior, pues $f_r \in H^\infty$ y F es acotado, se obtiene que

$$\int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{h(w)} \, dA(w) = (\beta + 1) \int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{\mathbf{D}^\beta h(w)}(1 - |w|^2)^\beta \, dA(w).$$

Escribiendo $g = (\beta+1)\mathbf{D}^\beta h$ y aplicando la segunda propiedad del Lema 1.4.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{g(w)} &= (\beta + 1)\overline{\mathbf{D}^\beta h(w)} \\ &= (\beta + 1) F\Big[\frac{1}{(1 - z\overline{w})^{(2+\alpha)/p}}\Big] \end{aligned}$$

y

$$\overline{g'(w)} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{p} F\Big[\frac{z}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p+1}}\Big], \qquad w \in \mathbb{D}.$$

Usando el Teorema 1.2.1 y el hecho de que F es acotado se tiene que

$$\begin{aligned}
(1-|w|^2)|\overline{g'(w)}| &= \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{p}\Big|F\Big[\frac{(1-|w|^2)\ z}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p+1}}\Big]\Big| \\
&\leq \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{p}\|F\|_{p,\alpha}\Big\|\frac{(1-|w|^2)\ z}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p+1}}\Big\|_{p,\alpha} \\
&\leq \frac{(\beta+1)(\beta+2)(\alpha+1)}{p}\|F\|_{p,\alpha}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^p|z|^p(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{\frac{2+\alpha}{p}+p}}\ dA(z) \\
&\leq \frac{(\beta+1)(\beta+2)(\alpha+1)}{p}\|F\|_{p,\alpha}(1-|w|^2)^p\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+p}}\ dA(z) \\
&\sim \frac{(\beta+1)(\beta+2)(\alpha+1)}{p}\|F\|_{p,\alpha},
\end{aligned}$$

por lo cual g está en el espacio de Bloch, además

$$\begin{aligned}
F(f) &= \lim_{r\to 1^-} F(f_r) \\
&= (\beta+1)\lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{\mathbf{D}^\beta h(w)}(1-|w|^2)^\beta\ dA(w) \\
&= \lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{g(w)}(1-|w|^2)^\beta\ dA(w).
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Supóngase que $g \in \mathcal{B}$, se demuestra que la fórmula

$$F(f) = \lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}} f_r(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta\ dA(z),$$

con $f \in A^p_\alpha$ define un funcional lineal acotado en A^p_α. Por el Teorema 1.3.14 existe una función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ tal que

$$g(z) = P_\beta\varphi(z) = (\beta+1)\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}}\varphi(w)\ dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Usando el Teorema de Fubini y la propiedad reproductora de P_β se obtiene que

$$\int_{\mathbb{D}} f_r(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta\ dA(z) = \int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{\varphi(w)}(1-|w|^2)^\beta\ dA(w).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} f_r(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta \, dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} f_r(z)\overline{P_\beta\varphi(w)}(1-|z|^2)^\beta \, dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f_r(z)(\beta+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-\overline{z}w)^{2+\beta}}\overline{\varphi(w)} \, dA(w)(1-|z|^2)^\beta \, dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left[(\beta+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\beta f_r(z)}{(1-w\overline{z})^{2+\alpha}} \, dA(z)\right](1-|w|^2)^\beta\overline{\varphi(w)} \, dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{\varphi(w)}(1-|w|^2)^\beta \, dA(w).
\end{aligned}$$

Así por el Lema 1.4.5 se tiene que

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\varphi(z)}(1-|z|^2)^\beta \, dA(z),$$

donde $f \in A^p_\alpha$. Esto último se tiene ya que

$$\int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)|(1-|z|^2)^\beta \, dA(z)$$

converge. Además $F(f)$ define un funcional lineal acotado en A^p_α. En efecto

$$\begin{aligned}
|F(f)| &\leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)||\varphi(z)|(1-|z|^2)^\beta \, dA(z) \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{-2+(2+\alpha)/p} \, dA(z) \\
&\leq C\|\varphi\|_\infty \|f\|_{\alpha,p}
\end{aligned}$$

esta última desigualdad por el Teorema 1.4.5. Y así se obtiene lo deseado.

■

Capítulo 2

LA TRANSFORMADA DE BEREZIN

En este capítulo se considera el análogo de la transformada de Poisson en el contexto de los espacios de Bergman llamada la transformada de Berezin. Se prueba que los puntos fijos de esta transformada, son precisamente las funciones armónicas.

2.1. Propiedades Algebraicas

Una forma de obtener el núcleo de Poisson, es empezar con una función armónica h en $\mathbb{D}$ que es continua hasta en la frontera y aplicar el teorema del valor medio, para obtener

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it})\ dt.$$

Reemplazando h por $h \circ \varphi_z$, donde φ_z es la transformación de Möbius que intercambia 0 y z, a saber

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w}, \qquad\qquad w \in \mathbb{D},$$

y tomando el cambio de variable dado por

$$e^{is} = \varphi_z(e^{it}) \qquad \Rightarrow \qquad ie^{is}\ ds = \varphi_z'(e^{it}) ie^{it} dt$$

entonces al tomar el módulo

$$ds = |ie^{is}\ ds| = |\varphi_z'(e^{it}) ie^{it} dt| = \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{z}e^{it}|^2} dt,$$

de donde

$$dt = \frac{|1 - \overline{z}e^{it}|^2}{1 - |z|^2} ds = \frac{|1 - \overline{z}\varphi_z(e^{is})|^2}{1 - |z|^2} ds = \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{z}e^{is}|^2} ds.$$

Así se tiene

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2} h(e^{it})\ dt.$$

que es la fórmula integral de Poisson para funciones armónicas. El núcleo integral

$$P(e^{it}, z) = \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2},$$

es el **núcleo de Poisson** y la transformada

$$L^1(\mathbb{T}, dt) \ni f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it}, z) f(e^{it})\ dt$$

es la **transformada de Poisson**, donde

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

el círculo unitario en $\mathbb{C}$.

Ahora sea h en $L^1(\mathbb{D}, dA)$ una función armónica en $\mathbb{D}$. Entonces

$$h(a) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(a + re^{i\theta})\ d\theta,$$

así pues

$$\begin{aligned} h(a)\int_0^R (1-r^2)^\alpha 2r\ dr &= \int_0^R h(a+re^{i\theta})(1-r^2)^\alpha r\ \frac{d\theta\ dr}{\pi} \\ &= \frac{1}{\alpha+1}\int_{B(a,R)} h(z)\ dA_\alpha(z). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por otra parte

$$h(a)\int_0^R (1-r^2)^\alpha 2r\ dr = h(a) - h(a)(1-R^2)^{\alpha+1}.$$

Así sustituyendo esto ultimo en (2.1) y tomando $a = 0$, $R = 1$ se obtiene

$$h(0) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} h(z)\ dA_\alpha(z). \tag{2.2}$$

Si $\alpha = 0$ en la igualdad anterior se tiene

$$h(0) = \int_{\mathbb{D}} h(w)\ dA(w),$$

y nuevamente reemplazando h por $h \circ \varphi_z$ y tomando el cambio de variable $\lambda = \varphi_z(w)$ se tiene que $w = \varphi_z(\lambda)$, por lo tanto

$$h(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{\lambda}|^4} h(\lambda)\ dA(\lambda), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

El párrafo anterior motiva la siguiente definición. Para cada función $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$, se define

$$\mathbf{B}f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4} f(w)\ dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Al operador $\mathbf{B}$ se le llama la **transformada de Berezin**, el hecho que sea un operador se prueba más adelante (ver Proposición 2.1.3). En realidad hay una familia de operadores del tipo Berezin. Nuevamente Reemplazando h por $h \circ \varphi_z$ y tomando el cambio de variable en (2.2) se tiene

$$\lambda = \varphi_z(w) \qquad \Rightarrow \qquad w = \varphi_z(\lambda)$$

se obtiene

$$h(z) = (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+2}(1-|\lambda|^2)^{\alpha}}{|1-z\overline{\lambda}|^{4+2\alpha}} h(\lambda)\ dA(\lambda), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Así para $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, se escribe

$$\mathbf{B}_\alpha f(z) = (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+2}(1-|w|^2)^{\alpha}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}} f(w)\ dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De igual manera, con un cambio de variable adecuado y por el inciso (3) de la proposición 1.1.17 se obtiene

$$\mathbf{B}_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_z(w)\ dA_\alpha(w), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{2.3}$$

para cada $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Se observa que $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$.

Proposición 2.1.1. *Supóngase que $-1 < \alpha < +\infty$ y φ es una transformación de Möbius del disco. Entonces*

$$(\mathbf{B}_\alpha f) \circ \varphi = \mathbf{B}_\alpha (f \circ \varphi)$$

para cada $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Demostración. Para cada $z \in \mathbb{D}$, la transformación de Möbius $\varphi_{\varphi_z} \circ \varphi \circ \varphi_z$ fija al origen, en efecto

$$\Big(\varphi_{\varphi_{(z)}} \circ \varphi \circ \varphi_z\Big)(0) = \Big(\varphi_{\varphi_{(z)}} \circ \varphi\Big)(z) = \varphi_{\varphi_{(z)}}\big(\varphi(z)\big) = 0.$$

Por el lema de Schwarz, existe un número η de módulo uno (que depende de z) tal que

$$\varphi_{\varphi(z)} \circ \varphi \circ \varphi_z(w) = \eta w \qquad \Rightarrow \qquad \varphi \circ \varphi_z(w) = \varphi_{\varphi(z)}(\eta w),$$

para todo w en $\mathbb{D}$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\alpha(f \circ \varphi)(z) &= \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi \circ \varphi_z(w)\, dA_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_{\varphi(z)}(\eta w)\, dA_\alpha(w) \\ &= (\mathbf{B}_\alpha f)(\varphi(z)). \end{aligned}$$

En la última igualdad se utilizó la invarianza bajo rotación de dA_α, esto es, si $T(w) = \eta w$ con $|\eta| = 1$ entonces

$$dA_\alpha(w) = (1-|w|^2)^\alpha dA(w) = (1-|T(w)|^2)^\alpha |T'(w)|^2 dA(w) = (1-|w|^2)^\alpha dA(w).$$

■

Por (2.3) y como dA_α es una medida de probabilidad para $-1 < \alpha < +\infty$, el operador $\mathbf{B}_\alpha$ es acotado en $L^\infty(\mathbb{D})$. Esto es $\|\mathbf{B}_\alpha\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ para todo $-1 < \alpha < +\infty$.

Proposición 2.1.2 (Cambio de Variable)**.** *Sean α y β tales que $\alpha > -1$ y $2+\beta > -1$, entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\beta}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\beta}}\, dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|w|^2)^{\alpha-\beta} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha+\beta}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}}\, dA(z)$$

Demostración. Sea $t = \varphi_w(z)$ entonces $z = \varphi_w(t)$. Así pues

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\beta}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\beta}}\, dA_\alpha(z) \\ &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{4+\beta+\alpha}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\beta}} \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2} \\ &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\varphi_w(t)|^2)^{4+\beta+\alpha}}{|1-\varphi_w(t)\overline{w}|^{4+2\beta}} |\varphi_w'(t)|^2 \frac{dA(t)}{(1-|\varphi_w(t)|^2)^2} \\ &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{4+\alpha+\beta}(1-|t|^2)^{4+\alpha+\beta}}{|1-w\overline{t}|^{2(2+\alpha+\beta)}} \cdot \frac{|1-\overline{w}t|^{4+2\beta}}{(1-|w|)^{4+2\beta}} \cdot \frac{dA(t)}{(1-|t|^2)^2} \\ &= (1-|w|^2)^{\alpha-\beta}(\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|t|^2)^{2+\alpha+\beta}}{|1-w\overline{t}|^{4+2\alpha}} dA(t) \\ &= (\alpha+1)(1-|w|^2)^{\alpha-\beta} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|t|^2)^{2+\alpha+\beta}}{|1-t\overline{w}|^{4+2\alpha}} dA(t). \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad se utilizaron los incisos (3) y (4) de la Proposición 1.1.17.

■

La siguiente proposición dice bajo que condiciones el operador $\mathbf{B}_\alpha$ es acotado en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Proposición 2.1.3. *Supóngase que* $-1 < \alpha < +\infty$, $1 \leq p < \infty$ *y* $\beta \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\mathbf{B}_\alpha$ *es acotado en* $L^p(\mathbb{D}, dA_\beta)$ *si y sólo si* $-(\alpha+2)p < \beta + 1 < (\alpha+1)p$.

Demostración. El operador $\mathbf{B}_\alpha f$ se rescribe como

$$\mathbf{B}_\alpha f(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}} f(w)\ dA(w),$$

y así aplicando el Teorema 1.2.4 con $a = 2+\alpha$, $b = \alpha$ y $c = \beta$ se tiene que $\mathbf{B}_\alpha f$ es acotado si y sólo si $-(\alpha+2)p < \beta + 1 < (\alpha+1)p$.

■

Fijando α, $-1 < \alpha < +\infty$, por la Proposición 2.1.3, el operador $\mathbf{B}_\beta$ es acotado en $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ si y sólo si $\beta > \alpha$. Más aun, $\mathbf{B}_\beta$ es uniformemente acotado en $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ cuando $\beta \to +\infty$. Para ver esto, primero se usa el teorema de Fubini para obtener

$$\int_{\mathbb{D}} |\mathbf{B}_\beta f(z)|\ dA_\alpha(z) \leq (\beta+1) \int_{\mathbb{D}} |f(w)| \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\beta}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\beta}}\ dA_\alpha(z)\ dA_\beta(w).$$

Tomando el cambio de variable dado por $z \mapsto \varphi_w(z)$ en la integral interior y aplicando el Lema 2.1.2, se obtiene

$$\int_{\mathbb{D}} |\mathbf{B}_\beta f(z)|\ dA_\alpha(z) \leq (\beta+1) \int_{\mathbb{D}} |f(w)| \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha+\beta}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}}\ dA(z)\ dA_\alpha(w).$$

Se observa que para toda $z, w \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\frac{1}{|1-z\overline{w}|} \leq \frac{1}{1-|z|} = \frac{1+|z|}{1-|z|^2} \leq \frac{2}{1-|z|^2}.$$

Así para $\beta > \alpha + 1$,

$$\int_{\mathbb{D}} |\mathbf{B}_\beta f(z)|\ dA_\alpha(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |f(w)|\ dA_\alpha(w) \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\beta-(\alpha+2)}\ dA(z),$$

donde $C = 4^{\alpha+2}(\beta+1)$, así

$$\int_{\mathbb{D}} |\mathbf{B}_\beta f(z)|\ dA_\alpha(z) \leq \frac{4^{\alpha+2}(\beta+1)}{\beta-\alpha-1} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|\ dA_\alpha(w).$$

Esto prueba que el operador $\mathbf{B}_\beta$ es uniformemente acotado en $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ cuando $\beta \to \infty$.

Proposición 2.1.4. *Supóngase que* $-1 < \alpha < +\infty$ *y* $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$*. Entonces* $\mathbf{B}_\alpha f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ *y* $f - \mathbf{B}_\alpha f \in C_0(\mathbb{D})$*.*

Demostración. Para cada $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ se tiene que

$$\mathbf{B}_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_z(w)\ dA_\alpha(w), \qquad \text{para cada} \ \ z \in \mathbb{D}.$$

Primero se vera que $\varphi_z(w) \to z_0$ cuando $z \to z_0 \in \mathbb{T}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \varphi_z(w) &= \lim_{z \to z_0} \frac{z - w}{1 - z\overline{w}} = \frac{z_0 - w}{1 - z_0\overline{w}} \\ &= \frac{z_0 - w}{\overline{z_0}(z_0 - w)} = \frac{1}{\overline{z_0}} \frac{z_0}{z_0} \\ &= z_0. \end{aligned}$$

Ahora por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\mathbf{B}_\alpha f(z) \to f(z_0),$$

siempre que $z \to z_0 \in \mathbb{T}$. En efecto, considérese $z_n \to z_0$, $n \in \mathbb{N}$ y

$$h(w) = f \circ \varphi_{z_0}(w) \qquad \text{y} \qquad h_n(w) = f \circ \varphi_{z_n}(w).$$

Así $|h_n(w)| \leq \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$, entonces por el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned} \lim_{z_n \to z_0} \mathbf{B}_\alpha f(z) &= \int_{\mathbb{D}} \lim_{z_n \to z_0} f \circ \varphi_{z_n}(w)\ dA_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(z_0)\ dA_\alpha(w) \\ &= f(z_0). \end{aligned}$$

Esto también prueba que $f - \mathbf{B}_\alpha f \in C_0(\mathbb{D})$. En particular se obtiene que $\mathbf{B}_\alpha f \in C(\overline{\mathbb{D}})$.

■

Proposición 2.1.5. *Si* $-1 < \beta < \alpha < +\infty$*, entonces* $\mathbf{B}_\alpha \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_\beta \mathbf{B}_\alpha$ *en* $L^1(\mathbb{D}, dA_\beta)$*.*

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\beta)$ entonces el operador $\mathbf{B}_\alpha$ es acotado en $L^1(\mathbb{D}, dA_\beta)$, esto se tiene por el Teorema 2.1.3. Así $\mathbf{B}_\beta \mathbf{B}_\alpha$ tiene sentido para cada $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\beta)$. Además el operador $\mathbf{B}_\beta$ aplica $L^1(\mathbb{D}, dA_\beta)$ acotadamente sobre $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. En efecto si $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\beta)$

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{\mathbb{D}} \mathbf{B}_\beta f(z)\ dA_\alpha(z) \Big| \\ &\leq \ (\beta + 1)(\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(w)|(1 - |w|^2)^\beta\ dA(w) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{2+\alpha+\beta}}{|1 - z\overline{w}|^{4+2\beta}}\ dA(z) \\ &\sim \ C\|f\|_{\beta,1} \end{aligned}$$

donde la última se obtiene por el Teorema 1.2.1. Por lo tanto

$$\|\mathbf{B}_\beta f\| \leq C\|f\|_{\beta,1},$$

y así se obtiene lo deseado. Luiego $\mathbf{B}_\alpha \mathbf{B}_\beta f$ está bien definido para $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\beta)$.

Sea $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\beta)$. Para mostrar que $\mathbf{B}_\alpha \mathbf{B}_\beta f = \mathbf{B}_\beta \mathbf{B}_\alpha f$ es suficiente probar que $\mathbf{B}_\alpha \mathbf{B}_\beta f(0) = \mathbf{B}_\beta \mathbf{B}_\alpha f(0)$, esto por la Proposición 2.1.1. Ahora obsérvese que

$$B_\alpha f(0) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\ dA_\alpha(z).$$

Luego por Fubini

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{B}_\beta f)(0) &= \int_{\mathbb{D}} \mathbf{B}_\beta f(z)\ dA_\alpha(z) \\
&= (\alpha+1)(\beta+1)\int_{\mathbb{D}} f(w) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta(1-|z|^2)^{2+\alpha+\beta}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\beta}}\ dA(z)\ dA(w).
\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.1.2 al tomar el cambio de variable $z = \varphi_w(\lambda)$ en la integral interna se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{B}_\beta f)(0) &= (\alpha+1)(\beta+1)\int_{\mathbb{D}} f(w) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha(1-|z|^2)^{2+\alpha+\beta}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}}\ dA(z)\ dA(w) \\
&= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}} f(w)\ dA(w)\ dA_\beta(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \mathbf{B}_\alpha f(z)\ dA_\beta(z) \\
&= \mathbf{B}_\beta(\mathbf{B}_\alpha f)(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{B}_\alpha \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_\beta \mathbf{B}_\alpha.$$

■

Proposición 2.1.6. *Sea* $-1 < \alpha < +\infty$ *y* $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. *Entonces* $\mathbf{B}_\beta f \to f$ *en* $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ *cuando* $\beta \to +\infty$.

Demostración. Primero se asume que f es continua en el disco cerrado. Como dA_β es una medida de probabilidad, se tiene que

$$\mathbf{B}_\beta f(z) - f(z) = (\beta+1)\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\beta (f\circ\varphi_z(w) - f(z))\ dA(w).$$

Escríbase a $\mathbb{D}$ como la unión de un disco $B(r)$ pequeño con $r \in (0,1)$ centrado en cero y un anillo. Como

$$(\beta+1)\int_{\mathbb{D}\setminus B(r)}(1-|z|^2)^\beta\, dA(z) = (1-r^2)^{\beta+1} \to 0 \tag{2.4}$$

cuando $\beta \to +\infty$, pues $0 < 1-r^2 < 1$. Ahora se muestra que $\mathbf{B}_\beta f(z) \to f(z)$ cuando $\beta \to +\infty$. Reescribiendo con la descomposición mencionada

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\beta f(z) - f(z) &= (\beta+1)\int_{B(r)}(1-|w|^2)^\beta(f\circ\varphi_z(w) - f(z))\, dA(w)\\ &+ (\beta+1)\int_{\mathbb{D}\setminus B(r)}(1-|w|^2)^\beta(f\circ\varphi_z(w) - f(z))\, dA(w).\end{aligned}$$

Al tomar módulos

$$\begin{aligned}\Big|\mathbf{B}_\beta f(z) - f(z)\Big| &\leq (\beta+1)\int_{B(r)}(1-|w|^2)^\beta|f\circ\varphi_z(w) - f(z)|\, dA(w)\\ &+ (\beta+1)\int_{\mathbb{D}\setminus B(r)}(1-|w|^2)^\beta|f\circ\varphi_z(w) - f(z)|\, dA(w)\\ &\leq \int_{B(r)}|f\circ\varphi_z(w) - f(z)|\, dA_\beta(w)\\ &+ 2\|f\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{D}\setminus B(r)}(1-|w|^2)^\beta\, dA_\beta(w).\end{aligned}$$

Por (2.4) basta con estimar el primer sumando del lado derecho de la desigualdad anterior.

Como f es uniformemente continua en $\overline{\mathbb{D}}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y-y'| < \delta$ entonces $|f(y)-f(y')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $0 < r < 1$ con $\frac{r}{1-r} < \delta$, entonces $r(1+\delta) < \delta$, luego $0 < r < \frac{\delta}{1+\delta}$, así

$$|\varphi_z(w) - z| = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w} - z\right| = \left|\frac{w(|z|^2-1)}{1-\overline{z}w}\right| \leq \frac{|w|}{1-|w|} < \frac{|w|}{1-r} \leq \frac{r}{1-r}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ pues $|w| < r$ y $1-|w| > 1-r$. Por lo tanto

$$\int_{B(r)}|f\circ\varphi_z(w) - f(z)|\, dA_\beta(w) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para toda β y toda $z \in \mathbb{D}$. Para este r nuevamente por (2.4) existe $M > 0$ tal que

$$2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{D}\setminus B(r)} dA_\beta(w) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\beta > M$. Por lo cual para toda $\beta > M$ y $z \in \mathbb{D}$

$$\Big|\mathbf{B}_{\beta_n} f(z) - f(z)\Big| < \varepsilon\ .$$

Por lo tanto la convergencia es uniforme para toda $z \in \mathbb{D}$ y es inmediato que $\mathbf{B}_\beta f \to f$ en $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Sean $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ y $\{f_n\} \subset C(\overline{\mathbb{D}})$ una sucesión de funciones tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_n\|_{p,\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq N$. Luego se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \Big|\mathbf{B}_\beta f(z) - f(z)\Big| \, dA_\alpha(z) &\leq \int_{\mathbb{D}} \Big|\mathbf{B}_\beta (f - f_n)(z)\Big| \, dA_\alpha(z) + \int_{\mathbb{D}} \Big|\mathbf{B}_\beta f_n(z) - f_n(z)\Big| \, dA_\alpha(z) \\ &+ \int_{\mathbb{D}} \Big|f_n(z) - f(z)\Big| \, dA_\alpha(z) \\ &\leq C\|f(z) - f_n(z)\|_{\alpha,1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

y por lo tanto se tiene lo deseado.

■

Proposición 2.1.7. *Para cada α con $-1 < \alpha < +\infty$, el operador $\mathbf{B}_\alpha$ es uno a uno en el espacio $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.*

Demostración. Supóngase que $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ y $\mathbf{B}_\alpha f = 0$. Sea

$$F(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}(1 - \overline{z}w)^{2+\alpha}} \, dA_\alpha(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De donde

$$F(z) = \frac{\mathbf{B}_\alpha f(z)}{(1 - |z|^2)^{2+\alpha}}.$$

Además $F(z) = 0$, ya que $\mathbf{B}_\alpha f = 0$ en todo $\mathbb{D}$. Por lo tanto

$$\frac{\partial^{n+m} F}{\partial z^n \partial \overline{z}^m}(0) = 0$$

para cualesquiera enteros no negativos n y m. Diferenciando bajo el signo integral se tiene que

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial z^n \partial \overline{z}^m} F(z) = C \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)\overline{w}^n w^m}{(1 - z\overline{w})^{2+n+\alpha}(1 - \overline{z}w)^{2+n+\alpha}} \, dA_\alpha(w)$$

por lo que

$$\frac{\partial^{n+m} F}{\partial z^n \partial \overline{z}^m}(0) = \int_{\mathbb{D}} \overline{w}^n w^m f(w) \, dA_\alpha(w) = 0 \ .$$

Esto claramente implica que $f = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \overline{w}^n w^m f(w)\ dA_\alpha(w) \\
&= \lim_{R\to 1} (\alpha+1) \int_0^R \int_0^{2\pi} (1-r^2)^\alpha\ r^{n+m+1}\ e^{-i\theta(n-m)}\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\ e^{i\theta k}\ \frac{d\theta\ dr}{\pi} \\
&= \lim_{R\to 1} (\alpha+1)\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^R \int_0^{2\pi} (1-r^2)^\alpha\ r^{n+m+k+1}\ e^{-i\theta(n-m-k)}\ \frac{d\theta\ dr}{\pi}.
\end{aligned}$$

La última integral interior es distinta de cero sólo cuando $k = n - m \geq 0$, por lo tanto

$$0 = \int_{\mathbb{D}} \overline{w}^n w^m f(w)\ dA_\alpha(w) \quad = \quad \lim_{R\to 1} (\alpha+1)\ a_{n-m} \int_0^R 2(1-r^2)^\alpha\ r^{2n+1}\ dr\ .$$

Así se obtiene lo deseado.

∎

2.2. Funciones Armónicas

Recuérdese que si f es una función armónica en $L^1(\mathbb{D}, dA)$, entonces $\mathbf{B}f = f$. En esta sección se probará el reciproco, es decir, que las condiciones $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ y $\mathbf{B}f = f$ implican que f es armónica. Por conveniencia se usarán los operadores de Wirtinger para factorizar el operador

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big),$$

donde $z = x + iy$, el cual es una cuarta parte del Laplaciano usual. Esta renormalización tiene la particularidad de que asume una forma muy atractiva, por ejemplo si f es una función holomorfa, entonces

$$\triangle|f|^2 = |f'|^2.$$

Cuando se trabaja con funciones armónicas en el disco unitario es más conveniente usar el Laplaciano invariante denotado por Δ en lugar de el Laplaciano usual $\triangle$. Si $f \in C^2(\mathbb{D})$ el **Laplaciano invariante** está definido como

$$\Delta f(z) = (1 - |z|^2)^2 \triangle f(z), \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{D}.$$

La siguiente proposición justifica esta nomenclatura.

Proposición 2.2.1. *El Laplaciano invariante es Möbius invariante, es decir,*

$$\Delta(f \circ \varphi)(z) = (\Delta f)(\varphi(z))$$

para cada transformación de Möbius φ del disco en si mismo.

Demostración. De la Proposición 1.1 y el Corolario 1.1.4 se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = g'(z)\frac{\partial f}{\partial z}(g(z)) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \circ g)(z) = \overline{g'(z)}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z)).$$

Por lo tanto de utilizando (2) y (3) de la Proposición 1.1.17

$$\begin{aligned}
\Delta(f \circ \varphi)(z) &= (1 - |z|^2)^2 \triangle(f \circ \varphi)(z) \\
&= (1 - |z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}(f \circ \varphi)(z) \\
&= (1 - |z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big[\varphi'(z)\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(z))\Big] \\
&= (1 - |z|^2)^2 \varphi'(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big[\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi'(z))\Big] \\
&= (1 - |z|^2)^2 (\varphi'(z))\overline{(\varphi'(z))}\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z}(\varphi(z)) \\
&= (1 - |z|^2)^2 |\varphi'(z)|^2 (\triangle f)(\varphi(z)) \\
&= (1 - |\varphi(z)|^2)^2 (\triangle f)(\varphi(z)) \\
&= (\Delta f)(\varphi(z)).
\end{aligned}$$

■

Se puede interpretar a Δ como el **operador de Laplace-Beltrami** en $\mathbb{D}$, cuando $\mathbb{D}$ se dota con la métrica de Poincaré.

Proposición 2.2.2. *Para $-1 < \alpha < +\infty$, la identidad*

$$\Delta \mathbf{B}_\alpha f = (\alpha+1)(\alpha+2)\Big(\mathbf{B}_\alpha f - \mathbf{B}_{\alpha+1} f\Big)$$

se tiene para cada $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Demostración. Por la invarianza de Möbius de $\mathbf{B}_\alpha$ y Δ será suficiente probar que

$$\Delta \mathbf{B}_\alpha f(0) = (\alpha+1)(\alpha+2)\Big(\mathbf{B}_\alpha f(0) - \mathbf{B}_{\alpha+1} f(0)\Big)$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{B}_\alpha f(z) &= (1-|z|^2)^2 \triangle \mathbf{B}_\alpha f(z) \\
&= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\left[\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}}\right](1-|w|^2)^\alpha f(w)\, dA(w)
\end{aligned}$$

y por otra parte es un cálculo inmediato que

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\left[\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}}\right]_{z=0} = (2+\alpha)(2+\alpha)|w|^2 - (2+\alpha).$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{B}_\alpha f(0) &= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \Big[(2+\alpha)(2+\alpha)|w|^2 - (2+\alpha)\Big](1-|w|^2)^\alpha f(w)\, dA(w) \\
&= (\alpha+1)(\alpha+2)\int_{\mathbb{D}} \Big[(2+\alpha)|w|^2 - 1\Big](1-|w|^2)^\alpha f(w)\, dA(w) \\
&= (\alpha+1)(\alpha+2)\int_{\mathbb{D}} \Big[(2+\alpha) - 1 + (2+\alpha)|w|^2 - (2+\alpha)\Big] \\
&\quad \cdot (1-|w|^2)^\alpha f(w)\, dA(w) \\
&= (\alpha+1)(\alpha+2)\Big[(\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^\alpha f(w)\, dA(w) \\
&\quad -(\alpha+2)\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{\alpha+1} f(w)\, dA(w)\Big] \\
&= (\alpha+1)(\alpha+2)\Big[\mathbf{B}_\alpha f(0) - \mathbf{B}_{\alpha+1} f(0)\Big].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta \mathbf{B}_\alpha f = (\alpha+1)(\alpha+2)\Big(\mathbf{B}_\alpha f - \mathbf{B}_{\alpha+1} f\Big)$$

para cada $f \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. ∎

En otras palabras, para $-1 < \alpha < +\infty$ se tiene el operador

$$\mathbf{B}_{\alpha+1} = \Big(1 - \frac{\Delta}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\Big)\mathbf{B}_\alpha$$

Por lo cual la prueba del siguiente corolario es inmediata.

Corolario 2.2.3. *Supóngase que n es un número entero positivo y sea*

$$G_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{z}{k(k+1)}\Big), \qquad\qquad z \in \mathbb{C}.$$

Entonces $\mathbf{B}_n = G_n(\Delta)\mathbf{B}$ en $L^1(\mathbb{D}, dA)$.

Sea

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{k(k+1)}\Big).$$

G es una función entera y $G_n(z)$ converge uniformemente a $G(z)$ en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, esto último se prueba aplicando el Teorema 5.9 del Capítulo VII del libro [4]. La función G juega un papel muy importante en la transformada de Berezin.

A lo largo de esta sección sea

$$\sum = \Big\{w \in \mathbb{C} : -1 < \text{ Re } w < 2\Big\}$$

y

$$\Omega = \Big\{z \in \mathbb{C} : z = -w(1-w) \;\text{ para algún }\; w \in \sum\Big\}.$$

Por el teorema del mapeo abierto para funciones analíticas, Ω es un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$.

Proposición 2.2.4. *Si $z = -w(1-w)$, entonces*

$$G(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi w)}{\pi w(1-w)}.$$

Por lo tanto, $G(z) \neq 1$ para $z \in \Omega \setminus \{0\}$.

Demostración. Sea

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{w(1-w)}{k(k+1)}\Big),$$

lo cual es equivalente a

$$\Big[\Big(1+\frac{w}{k}\Big)e^{-w/k}\Big]\Big[\Big(1+\frac{1-w}{k}\Big)e^{-(1-w)/k}\Big]\Big[\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{-1}e^{1/k}\Big]$$

considerando las siguientes identidades

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{-\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-z/k}$$

y

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

En efecto como

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{w}{k}\Big)\Big(1+\frac{1-w}{k}\Big)\Big(\frac{k}{k+1}\Big) &= \Big(k+\frac{w}{k}+\frac{1-w}{k}+\frac{w(1-w)}{k^2}\Big)\frac{k}{k+1}\\ &= \Big(k+1+\frac{w(1-w)}{k}\Big)\frac{1}{k+1}\\ &= 1+\frac{w(1-w)}{k(k+1)}\ ,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}G(z) &= \prod_{k=1}^{\infty}\Big[\Big(1+\frac{w}{k}\Big)e^{-w/k}\Big]\prod_{k=1}^{\infty}\Big[\Big(1+\frac{1-w}{k}\Big)e^{-(1-w)/k}\Big]\prod_{k=1}^{\infty}\Big[\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{-1}e^{1/k}\Big]\\ &= \frac{e^{\gamma w}}{\Gamma(w+1)}\cdot\frac{e^{\gamma(1-w)}}{\Gamma(1+(1-w))}\cdot e^{-\gamma}\Gamma(2)\\ &= \frac{1}{\Gamma(w+1)\Gamma((1-w)+1)}\\ &= \frac{1}{w(1-w)}\cdot\frac{1}{\Gamma(w)\Gamma(1-w)}\ .\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$G(z)=\frac{\operatorname{sen}(\pi w)}{\pi w(1-w)}.$$

Ahora para probar que $G(z)\neq 1$ para $z\in\Omega\setminus\{0\}$ es suficiente mostrar que la función

$$\Phi(w)=\frac{\pi w(1-w)}{\operatorname{sen}(\pi w)}$$

es distinta de 1, para $w\in\sum\setminus\{0,1\}$. Obsérvese que Φ tiene la propiedad de simetría siguiente

$$\Phi\Big(\frac{1}{2}+w\Big)=\Phi\Big(\frac{1}{2}-w\Big).$$

Obsérvese que

$$0 < \Phi\Big(\frac{1}{2} + iy\Big) = \frac{\pi(y^2 + \frac{1}{4})}{\cosh(\pi y)} < 1$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ y el límite cuando $y \to \pm\infty$ es cero. Así es suficiente mostrar que la única solución de $\Phi(w)$ en la banda $-1 < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}$ es $w = 0$. Esto se resolverá con la aplicación del principio del argumento. Obsérvese que si $w = u + iv$ entonces

$$\operatorname{sen}(\pi w) = \operatorname{sen}(\pi(u + iv)) = \frac{e^{i(\pi(u+iv))} - e^{-i(\pi(u+iv))}}{2i} = \frac{e^{i\pi u}e^{-\pi v} - e^{-i\pi v}e^{\pi v}}{2i}.$$

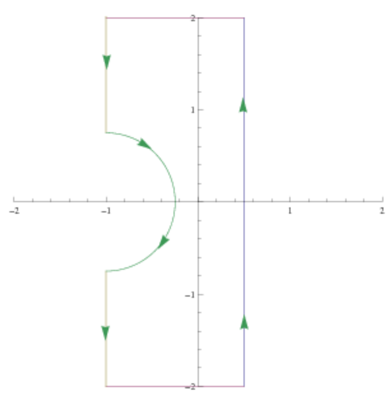
Por lo tanto

$$|\operatorname{sen}(\pi w)| \approx e^{\pi v} \qquad \text{si} \quad v > 0,$$

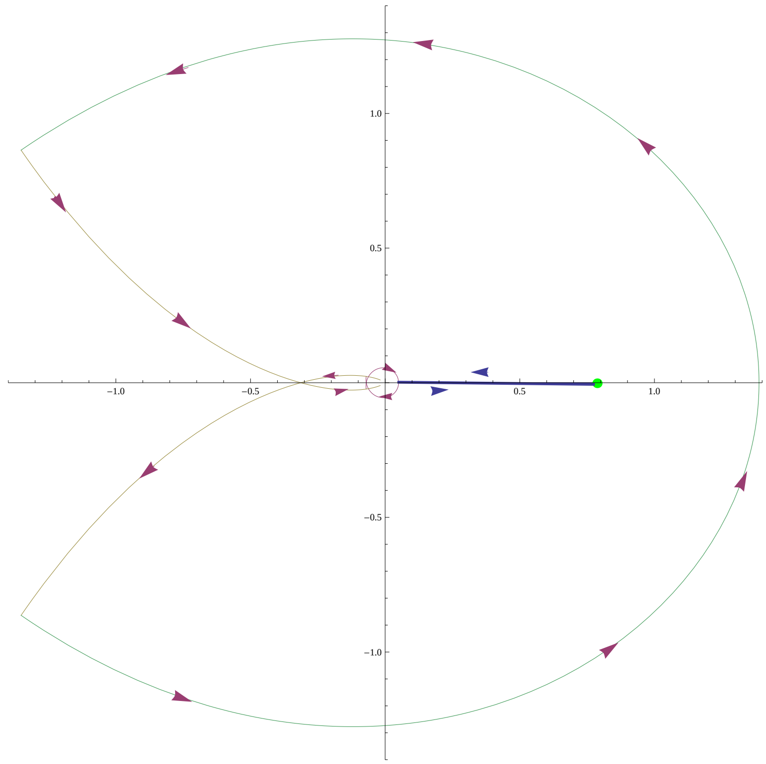
luego

$$|\Phi(w)| \approx \frac{|w||1 - w|}{e^{\pi v}} \longrightarrow 0,$$

cuando $v \to \infty$ si $v > 0$. Así pues sea A un número positivo, tal que $|\Phi(w)| < \frac{1}{2}$ para todo $w = u + iv$, donde $-1 \leq u \leq \frac{1}{2}$ y v es un real con $|v| \geq A$. Considérese el contorno γ orientado positivamente como se ve en la siguiente figura



Se probará que la imagen $\Phi(\gamma)$ del contorno γ gira alrededor de del punto 1 sólo una vez. La siguiente figura muestra cual es el mapeo del contorno, sin embargo sólo se probara la afirmación anterior.



Si $w = \frac{1}{2}$ en γ y se recorre hacia arriba, la curva $\Phi(\gamma)$ empieza en $\frac{\pi}{4}$ y avanza hacia cero a lo largo del eje real. Cuando w toma un giro a la izquierda en $\frac{1}{2} + iA$ y se mueve horizontalmente a la izquierda, la curva $\Phi(\gamma)$ oscila en el semiplano izquierdo de $x = \frac{1}{2}$. Para w en el segmento $-1 + iA$ y $-1 + i\varepsilon$ se tiene que

$$\Phi(-1 + iv) = \frac{\pi}{\operatorname{senh}(\pi v)} \Big[-3v + i(v^2 - 2) \Big] \ .$$

Esta parte de $\Phi(\gamma)$ tiene parte real negativa y por lo tanto oscila en el semiplano izquierdo de $x = 0$ y es real sólo cuando $v = \sqrt{2}$ y cruza el eje en el punto $(-3\sqrt{2}\pi)/(\operatorname{senh}(\pi\sqrt{2}))$. Hasta ahora la imagen de γ bajo Φ no toca al eje real a la derecha del punto 1. Ahora se considera $\Phi(w)$ para w en el semicírculo pequeño cerca del punto $w = -1$. Se puede reescribir Φ como

$$\Phi(w) = \frac{2}{w+1} + \Psi(w)$$

donde $\Psi(w)$ es analítica en una vecindad de $w = -1$. En efecto, obsérvese que

$$\lim_{w \to -1} \frac{w+1}{\operatorname{sen} \pi w} = \lim_{w \to -1} \frac{-1}{\pi \cos \pi w} = \frac{-1}{\pi}.$$

Así

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \pi w} = -\frac{1}{\pi(w+1)} + \tau(w),$$

donde τ es analítica en una vecindad de $w = -1$, además

$$w(1-w) = -2 + 3(w+1) - (w+1)^2$$

y por lo tanto

$$\Phi(w) = \frac{\pi w(1-w)}{\operatorname{sen} \pi w} = \frac{2}{w+1} + \Psi(w),$$

con $\Psi(w)$ analítica en una vecindad de $w = -1$. Se sigue que

$$\Phi(-1 + \varepsilon e^{it}) = \frac{2}{\varepsilon} e^{-it} + O(\varepsilon).$$

Esto prueba que si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, entonces la curva

$$\Phi(-1 + \varepsilon e^{it}), \qquad \frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

cruza el eje real cerca del punto $\frac{2}{\varepsilon}$. El número de vueltas de $\Phi(\gamma)$ alrededor de 1, no dependerá del número exacto de veces que la curva anterior cruza el eje real. Finalmente por el análisis anterior y la relación de simetría $\overline{\Phi(w)} = \Phi(\overline{w})$, cuando w se mueve hacia abajo a partir de $-1 - i\varepsilon$ y vuelve al punto de partida $\frac{\pi}{4}$, la imagen de $\Phi(\gamma)$ no cruza el eje real de la parte derecha del semiplano $x = 1$. Se concluye que la curva $\Phi(\gamma)$ gira alrededor del punto 1 exactamente una vez. Y así por el Principio del Argumento (ver ápendice Teorema 3.3.10) se tiene lo deseado.

■

Se necesitará el siguiente resultado acerca de funciones propias del Laplaciano invariante para poder probar el resultado principal de esta sección.

Proposición 2.2.5. *Supóngase que α y λ son números complejos, relacionados por $\lambda = -\alpha(1-\alpha)$. Sea X_λ el espacio propio de Δ correspondiente al valor propio λ. Sea*

$$g_\alpha(z) = \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - ze^{-i\theta}|^{2\alpha}} d\theta, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

entonces se tiene que

(1) *La función g_α pertenece a X_λ.*

(2) *Si $f \in X_\lambda$ y f es radial, entonces $f = f(0) g_\alpha$.*

(3) *El espacio X_λ contiene una función distinta de cero en $L^1(\mathbb{D}, dA)$ si y sólo si $\alpha \in \sum$.*

Demostración. Sea $P(e^{i\theta}, z)$ el núcleo de Poisson. Entonces la función g_α puede reescribirse como

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^\alpha d\theta, \qquad\qquad z \in \mathbb{D}.$$

(1) Diferenciando bajo el signo integral se tiene que

$$\Delta g_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta\Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^\alpha d\theta$$

Por otro lado como $P(e^{i\theta}, z)$ es armónica en z, se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta\Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^\alpha &= (1-|z|^2)^2\triangle\Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^\alpha \\
&= (1-|z|^2)^2\frac{\partial}{\partial z}\Big[\alpha\Big(P(e^{i\theta}, z)\Big)^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}P(e^{i\theta}, z)\Big] \\
&= (1-|z|^2)^2\alpha(\alpha-1)\Big(P(e^{i\theta}, z)\Big)^{\alpha-2}\frac{\partial}{\partial z}P(e^{i\theta}, z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}P(e^{i\theta}, z) \\
&+ (1-|z|^2)^2\alpha\Big(P(e^{i\theta}, z)\Big)^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial z\partial \overline{z}}P(e^{i\theta}, z) \\
&= (1-|z|^2)^2\alpha(\alpha-1)\Big(P(e^{i\theta}, z)\Big)^{\alpha-2}\frac{\partial}{\partial z}P(e^{i\theta}, z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}P(e^{i\theta}, z) \\
&= (1-|z|^2)^2\alpha(\alpha-1)\Big(P(e^{i\theta}, z)\Big)^{\alpha-2}\Big[\frac{(e^{-i\theta}-\overline{z})(e^{i\theta}-z)}{(1-ze^{-i\theta})^3(1-\overline{z}e^{i\theta})^3}\Big] \\
&= (1-|z|^2)^2\alpha(\alpha-1)\Big(P(e^{i\theta}, z)\Big)^{\alpha-2}\Big[\frac{e^{i\theta}(1-ze^{-i\theta})e^{-i\theta}(1-\overline{z}e^{i\theta})}{(1-ze^{-i\theta})^3(1-\overline{z}e^{i\theta})^3}\Big] \\
&= \alpha(\alpha-1)\Big(P(e^{i\theta}, z)\Big)^{\alpha-2}\Big[\frac{(1-|z|^2)^2}{(1-ze^{-i\theta})^2(1-\overline{z}e^{i\theta})^2}\Big] \\
&= \lambda\Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^{\alpha-2}\Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^2 \\
&= \lambda\Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Delta g_\alpha(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta\Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^\alpha d\theta \\
&= \lambda\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[P(e^{i\theta}, z)\Big]^\alpha d\theta \\
&= \lambda g_\alpha(z).
\end{aligned}$$

(2) Sea $f(z) = g(|z|^2)$ una función radial en X_λ. Entonces la función $g(x)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x(1-x)^2g''(x) + (1-x)^2g'(x) = \lambda g(x) \qquad 0 < x < 1.$$

En efecto, sea $f \in X_\lambda$ entonces $\Delta f = \lambda f$ en particular f tiene segundas derivadas. Puesto que f es una función radial, se cumple que $f(z) = g(|z|^2)$ con $g : (0,1) \to \mathbb{C}$ dos veces derivable. Así

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} g(|z|^2) = \overline{z}\ g'(|z|^2)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z \partial \overline{z}} f(z) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big(\overline{z}\ g'(|z|^2)\Big) = g'(|z|^2) + |z|^2 g''(|z|^2),$$

de donde

$$g'(|z|^2) = \frac{1}{\overline{z}} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \qquad \text{y} \qquad g''(|z|^2) = \frac{1}{|z|^2}\Big(\frac{\partial}{\partial z \partial \overline{z}} f(z) - \frac{1}{\overline{z}}\frac{\partial f(z)}{\partial z}\Big).$$

Sea $x = |z|^2$, se considera la ecuación diferencial

$$x(1-x)^2 y''(x) + (1-x)^2 y'(x) = \lambda\ y(x), \qquad \text{para} \quad 0 < x < 1.$$

La función g satisface esta ecuación diferencial. Al sustituir en el lado izquierdo, se tiene

$$|z|^2(1-|z|^2)^2 \frac{1}{|z|^2}\Big(\frac{\partial}{\partial z \partial \overline{z}} f(z) - \frac{1}{\overline{z}}\frac{\partial f(z)}{\partial z}\Big) + (1-|z|^2)^2 \frac{1}{\overline{z}}\frac{\partial f(z)}{\partial z},$$

el cual es equivalente a

$$(1-|z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial z \partial \overline{z}} f(z) = (1-|z|^2)^2 \triangle f(z) = \Delta f(z) = \lambda f(z) = \lambda g(|z|^2).$$

El espacio solución de la ecuacion diferencial anterior es dos-dimensional y se puede exhibir una base para éste. Como $g_\alpha \in X_\lambda$ entonces la función $g_1(x) = g_\alpha(\sqrt{x})$ es una solución y así por el método de redución al orden se ve que

$$g_2(x) = g_1(x) \int_1^x \frac{1}{t(g_1(t))^2} dt, \qquad 0 < x < 1,$$

es también una solución y que g_1 y g_2 son linealmente independientes. Así existen constantes a y b tales que $g = ag_1 + bg_2$. Como las funciones g y g_1 son acotadas cerca de 0 y g_2 no es acotada cerca de $x = 0$, se tiene que $b = 0$ y por lo tanto $g = g(0)g_1$ y de aquí

$$f = f(0) g_\alpha.$$

(3) Para ver este inciso, se asume que X_λ contiene una función no cero $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$. Por la invarianza se puede asumir que $f(0) \neq 0$. Ahora si $f \in X_\lambda$ entonces es inmediato que su radialización, dada por

$$f^\sharp(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{it}) dt,$$

también pertenece a X_λ. Del inciso (2) se tiene que $f^\sharp = f(0)g_\alpha$. Esto implica que X_λ contiene una función no cero de $L^1(\mathbb{D}, dA)$ si y sólo si $g_\alpha \in L^1(\mathbb{D}, dA)$. Así por el Corolario 1.2.2, la función g_α está en $L^1(\mathbb{D}, dA)$ si y sólo si $\alpha \in \sum$. En efecto, sea $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Primero obsérvese que

$$r^{ix} = e^{\log r^{ix}} = e^{ix\log r} = e^{ix(\ln r + i0)} = e^{ix\ln r} = \cos(x\ln r) + i\,\mathrm{sen}\,(x\ln r),$$

con $r, x \in \mathbb{R}$, entonces $|r^{ix}| = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |g_\alpha(z)|\, dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{|(1-|z|^2)^\alpha|}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - ze^{-i\theta}|^{2\alpha}} \right| dA(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{|(1-|z|^2)^\alpha|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{||1 - ze^{-i\theta}|^{2\alpha}|}\, dA(z) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{|(1-|z|^2)^\alpha|}{||1 - ze^{-i\theta}|^{2\alpha}|}\, dA(z)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha_1}}{|1 - \overline{z}e^{i\theta}|^{2\alpha_1}}\, dA(z)\, d\theta.
\end{aligned}$$

La integral interior por el Corolario 1.2.2 es comparable con 1, tomando en dicho teorema $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_1 - 2$ y $\beta < 0$ (en los otros dos casos de dicho teorema las integrales no están bien definidas). Así pues tenemos que $-1 < \operatorname{Re}\alpha < 2$. Por lo tanto la función g_α está en $L^1(\mathbb{D}, dA)$ si y sólo si $\alpha \in \sum$.

■

Se prueba ahora el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.2.6. *Supóngase que f está en $L^1(\mathbb{D}, dA)$. Entonces f es armónica si y sólo si $\mathbf{B}f = f$.*

Demostración. Sea M el conjunto de puntos fijos de la transformada de Berezin $\mathbf{B}$ en $L^1(\mathbb{D}, dA)$. Como B_α es un operador acotado en $L^1(\mathbb{D}, dA)$ se ve que M es un subespacio cerrado de $L^1(\mathbb{D}, dA)$. Puesto que todas las funciones armónicas en $L^1(\mathbb{D}, dA)$ pertenecen a M, entonces sólo se tiene que probar que cada función en M es una función armónica. Por la fórmula integral para el operador $\mathbf{B}$, cada función que satisface $f = \mathbf{B}f$ es real analítica en $\mathbb{D}$. En particular se puede aplicar el Laplaciano a cada función en M. Sea Δ_M la restricción de Δ a M. Por la Proposición 2.2.1 se tiene

$$\Delta_M \mathbf{B}f = \Delta_M f = 2(\mathbf{B}f - \mathbf{B}_1 f) = 2(f - \mathbf{B}_1 f)$$

para toda $f \in M$. Puesto que $\mathbf{B}_1$ es acotado en $L^1(\mathbb{D}, dA)$, se ve que Δ_M aplica M acotadamente sobre $L^1(\mathbb{D}, dA)$. Además dado que $\mathbf{B}\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{B}$, se tiene

$$\mathbf{B}\Delta_M f = 2(\mathbf{B}f - \mathbf{B}\mathbf{B}_1 f) = 2(f - \mathbf{B}_1 f) = \Delta_M f, \qquad f \in M.$$

Así pues Δ_M aplica M sobre M y por lo tanto Δ_M es un operador lineal acotado en el espacio de Banach M. Por el Corolario 2.2.3

$$\mathbf{B}_n f = G_n(\Delta)\mathbf{B}f = G_n(\Delta_M)f, \qquad f \in M \tag{2.5}$$

Puesto que $G_n \to G$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ y Δ_M es un operador lineal acotado en M, se tiene

$$G_n(\Delta_M) \to G(\Delta_M).$$

Esto junto con (2.5) y la Proposición 2.1.6, dice que

$$G(\Delta_M)f = f \qquad \text{para cada} \quad f \in M.$$

De donde $G(\Delta_M)$ es el operador identidad en M. Supóngase que λ es un valor propio de Δ_M. Por la Proposición 2.2.5 se tiene que $\lambda \in \Omega$. También si f es una función propia no cero correspondiente al valor λ, entonces

$$f = G(\Delta_M)f = G(\lambda)f$$

de donde $G(\lambda) = 1$. Por la Proposición 2.2.4 tenemos que $\lambda = 0$. Así el único valor propio del operador Δ_M es 0. Retomando que $G(z) - 1 = zH(z)$, donde H es una función entera con $H(0) \neq 0$. Por el Teorema del cálculo funcional de Riesz (ver ápendice Teorema 3.3.8) se tiene que

$$0 = G(\Delta_M) - I = H(\Delta_M)\Delta_M,$$

donde I es el operador identidad de M. Como el único valor propio de Δ_M es cero, el Teorema de la Aplicacón Espectral (ver ápendice Teorema 3.3.9) implica que el único valor propio de $H(\Delta_M)$ es $H(0) \neq 0$. En particular $H(\Delta_M)$ es uno a uno. Si para $f \in M$, se tiene que $H(\Delta_M)f = 0$, entonces f es un vector propio, para el valor propio 0, lo cual es posible solo para $f \equiv 0$. Ahora si $f \in M$, entonces $H(\Delta_M)\Delta_M f = 0$, se sigue que $\Delta_M f = 0$, es decir, que f es armónica. Así se tiene lo deseado.

∎

Capítulo 3

MEDIDA DE CARLESON, ESPACIOS BMO Y VMO

En este capítulo se introduce el concepto de las medidas de Carleson para los espacios de Bergman ponderados, además se estudia lo esencial que son estas medidas en los espacios tipo BMO en el disco. La parte analítica de los espacioos BMO coincide con el espacio de Bloch y se caracterizan estos espacios en términos de la transformada de Berezin. Por último se da una estimación de Lipschitz en términos de la métrica de Bergman para la tranformada de Berezin de un operador acotado arbitrario.

3.1. Medidas tipo Carleson

Así como se puede integrar el núcleo de Poisson con una medida sobre el círculo, también se puede integrar el núcleo de la transformada de Berezin con una medida del disco. Más específicamente, para una medida de Borel positiva μ en $\mathbb{D}$, se considera la función

$$\mathbf{B}\mu(z) = (1-|z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^4}\ d\mu(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

En esta sección se caracterizaran las medidas de Borel positivas μ en $\mathbb{D}$ tal que $\mathbf{B}\mu$ es acotada. También se caracterizan las medidas μ tales que $\mathbf{B}\mu(z) \to 0$ cuando $|z| \to 1^{-1}$. Tales medidas reciben el nombre de Medidas de Carleson. Recuérdese que

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2}\log\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}$$

es la métrica de Bergman en $\mathbb{D}$. A lo largo de está sección se fijaran algunos radios positivos $0 < r < +\infty$ y se considerará el disco $D(r,z)$ en la métrica de Bergman definido por

$$D(z,r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(z,w) < r\}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{3.1}$$

es decir, es el disco hiperbólico de centro z y radio r. Es bien sabido que $D(z,r)$ es un disco Euclideano con centro

$$\frac{(1-s^2)z}{(1-s^2|z|^2)}$$

y radio Euclideano

$$\frac{(1-|z|^2)s}{(1-s^2|z|^2)},$$

donde $s = \tanh r \in (0,1)$.

Sea $|D(z,r)|_A$ el área normalizada, o la dA-medida de $D(z,r)$. Obsérvese que si $r > 0$

$$|D(z,r)|_A \sim (1-|z|^2)^2.$$

En efecto, puesto que $s^2|z|^2 < s^2$ se tiene que $1 - s^2|z|^2 > 1 - s^2$, así tomando $C = \text{máx}\{\frac{1}{s^2}, \frac{s^2}{(1-s^2)^2}\}$ se obtiene

$$\frac{1}{C}(1-|z|^2)^2 \leq \frac{s^2(1-|z|^2)^2}{(1-s^2|z|^2)^2} \leq \frac{s^2(1-|z|^2)^2}{(1-s^2)^2} \leq C(1-|z|^2)^2.$$

El siguiente lema enlista algunas propiedades del disco hiperbólico.

Lema 3.1.1. *Sean r, s y R números positivos fijos. Entonces existe un número positivo constante C tal que para todo z y w en $\mathbb{D}$, se tiene que*

(1) $C^{-1}(1-|z|^2) \leq |1 - z\overline{w}| \leq C(1-|z|^2)$ *cuando* $\beta(z,w) \leq r$.

(2) $C^{-1}|D(z,r)|_A \leq |D(w,s)|_A \leq C|D(z,r)|_A$ *cuando* $\beta(z,w) \leq R$.

Demostración. (1) Si $w \in D(z,r)$ entonces $w = \varphi_z(u)$ para algún $|u| \leq s$ con $s = \tanh r$. Así

$$\begin{aligned} 1 - z\overline{w} &= 1 - z\overline{\varphi_z(u)} = 1 - z\Big(\frac{\overline{z}-\overline{u}}{1-z\overline{u}}\Big) \\ &= 1 - \frac{|z|^2 - z\overline{u}}{1-z\overline{u}} = \frac{1 - z\overline{u} - |z|^2 + z\overline{u}}{1-z\overline{u}} = \frac{1-|z|^2}{1-z\overline{u}}. \end{aligned}$$

Además

$$1 - |u| \leq 1 - |z\overline{u}| \leq |1 - z\overline{u}| \leq 2 \qquad ; \qquad 1 - |u| \geq 1 - s.$$

Luego

$$C^{-1} \leq |1 - z\overline{u}| \leq C$$

con $C = \text{máx}\Big\{2, \dfrac{1}{1-s}\Big\}$. Por lo tanto

$$C^{-1}(1-|z|^2) \leq |1 - z\overline{w}| \leq C(1-|z|^2)$$

(2) Como la condición $\beta(z,w) \leq r$ es simétrica, entonces el inciso (1) también se tiene cuando se intercambian las posiciones de z y w. En particular se tiene que $(1-|z|^2) \sim (1-|w|^2)$ si $\beta(z,w) \leq r$. Así

$$|D(z,r)|_A \sim (1-|z|^2)^2 \sim (1-|w|^2)^2 \sim |D(z,s)|_A$$

para $\beta(z,w) \leq R$.

■

Lema 3.1.2. *Sea r fijo, $0 < r < +\infty$. Entonces existe un entero positivo N y una sucesión $\{a_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que*

(1) *El disco $\mathbb{D}$ es cubierto por $\{D(a_n, r)\}$*

(2) *Cada punto en $\mathbb{D}$ pertenece a lo más a N conjuntos de la cubierta $\{D(a_n, 2r)\}$*

(3) *Si $n \neq m$, entonces $\beta(a_n, a_m) \geq \frac{r}{2}$.*

Demostración. Primero se muestra que se satisfacen los incisos (1) y (2). Para toda $r > 0$ se tiene

$$D(a,r) \subset \mathbb{D}, \qquad a \in \mathbb{D} \ .$$

Como $\mathbb{D}$ es segundo numerable entonces contiene un subconjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso numerable tal que

$$\mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(a_n, \frac{r}{2}) \quad \text{y} \quad \overline{\{a_n\}} = \mathbb{D} \ .$$

Ahora se elige $a_1 = a_{k_1}$, así existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta(a_{k_1}, a_{k_2}) \geq \frac{r}{2} \ .$$

Denótese por J_1 al conjunto de índices en $\mathbb{N}$ tales que

$$\beta(a_{k_1}, a_j) < \frac{r}{2} \quad \text{si y sólo si} \quad j \in J_1 \ .$$

Existe $k_3 \in \mathbb{N}\backslash J_1 \cup \{a_{k_2}\}$ tal que

$$\beta(a_{k_2}, a_{a_{k_3}}) \geq \frac{r}{2}.$$

Denótese por J_2 al conjunto de índices en $\mathbb{N}\backslash J_1 \cup \{a_{k_2}, a_{k_3}\}$ tales que

$$\beta(a_{k_2}, a_j) < \frac{r}{2} \quad \text{si y sólo si} \quad j \in J_2 \ .$$

Continuando con este procedimiento n-veces se tiene que existe $\{k_{n+1}\} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta(a_{k_{n+1}}, a_{k_n}) \geq \frac{r}{2}.$$

Denótese por J_n al conjunto de índices en F_{n+1} con $F_{n+1} = \mathbb{N} \backslash (J_1 \cup J_2 \cup \cdots J_{n-1}) \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} a_{k_i}$ tales que

$$\beta(a_{k_n}, a_j) < \frac{r}{2} \quad \text{si y sólo si} \quad j \in J_n \ .$$

Por lo tanto se ha encontrado $\{D(a_{a_k}, \frac{r}{2})\}$ tal que

$$\mathbb{D} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D(a_{n_k}, \frac{r}{2}) \ .$$

Para verificar esto, sea $z \in \mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(a_n, \frac{r}{2})$ entonces existe $z \in D(a_n, \frac{r}{2})$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ con $\beta(a_n, z) < \frac{r}{2}$. Así se tienen dos casos

(1) Si $a_n = a_{k_j}$ entonces $z \in D(a_{n_j}, r)$.

(2) Si $a_n \neq a_{k_j}$ entonces existe a_{k_j} tal que $\beta(a_n, a_{k_j}) < \frac{r}{2}$ para algún $j \in \mathbb{N}$ así

$$\begin{aligned} \beta(a_{k_j}, z) &\leq \beta(a_{k_j}, a_n) + \beta(a_n, z) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Por lo que si $z \in \mathbb{D}$ entonces $z \in D(a_{k_n}, r)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto

$$\mathbb{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(a_n, r) \ .$$

Para ver que se satisface (3) supóngase que $n \neq m$. Sean $D(a_n, \frac{r}{3})$ y $D(a_m, \frac{r}{3})$, los cuales son disjuntos y cumplen que

$$\beta(a_n, a_m) \geq \frac{2}{3} \ r \geq \frac{r}{2} \ .$$

■

Motivado por el Lema 3.1.2 se dice que una sucesión $\{a_j\}$ de puntos en $\mathbb{D}$ es **separada** (ó **uniformemente discreta**) si

$$0 < \inf\{\beta(a_j, a_k) : j \neq k\}.$$

Lema 3.1.3. *Sea r fijo, $0 < r < +\infty$. Entonces existe una constante positiva $C = C(r)$ tal que*

$$| f(z) |^p \leq \frac{C}{| D(z,r) |_A} \int_{D(z,r)} | f(w) |^p \ dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}$$

para toda función f, analítica en $\mathbb{D}$ y todo $0 < p < +\infty$.

Demostración. Por la subarmonicidad de $| f |^p$, se tiene

$$| f(0) |^p \leq \frac{1}{| D(0,r) |_A} \int_{D(0,r)} | f(w) |^p \ dA(w).$$

Reemplazando f por $f \circ \varphi$

$$\left| \Big(f \circ \varphi_z \Big)(0) \right|^p \leq \frac{1}{| D(0,r) |_A} \int_{D(0,r)} | \Big(f \circ \varphi_z \Big)(w) |^p \ dA(w),$$

así

$$| f(z) |^p \leq \frac{1}{| D(0,r) |_A} \int_{D(0,r)} | f(\varphi_z(w)) |^p \ dA(w).$$

Tomando el cambio de variable $w = \varphi_z(\lambda)$ se tiene,

$$\begin{aligned} | f(z) |^p &\leq \frac{1}{| D(0,r) |_A} \int_{D(z,r)} | f(\lambda) |^p | \varphi_z'(\lambda) |^2 \ dA(\lambda) \\ &= \frac{1}{| D(0,r) |_A} \int_{D(z,r)} | f(\lambda) |^p \ \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}\lambda|^4} \ dA(\lambda). \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.1.1,

$$| f(z) |^p \leq \frac{C}{| D(z,r) |_A} \int_{D(z,r)} | f(\lambda) |^p \ dA(\lambda), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

■

Como una consecuencia de los Lemas 3.1.1 y 3.1.3 se tiene la siguiente desigualdad

$$(1- | z |^2)^s \ | f(z) |^p \leq C \int_{D(z,r)} (1- | w |^2)^{s-2} |f(w)|^p \ dA(w)$$

donde f es analítica en $\mathbb{D}$, s es real y $0 < p, r < +\infty$ y C es una constante que depende de p, r, s (pero no de la función f y el punto $z \in \mathbb{D}$).

Ahora se prueba el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.1.4. *Sean $0 < p, r < +\infty$ fijos y sea μ una medida de Borel positiva en $\mathbb{D}$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(1) *La función $\mathcal{B}_\mu$ es acotada en $\mathbb{D}$.*

(2) *La función $\widehat{\mu}_r(z) = \mu(D(z,r))/|D(z,r)|_A$ es acotada en $\mathbb{D}$.*

(3) *El espacio de Bergman A^p es un subespacio acotado de $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.*

Demostración. Como

$$\mathcal{B}\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4} d\mu(w) \geq \int_{D(z,r)} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\ d\mu(w).$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Supóngase que la función $\mathcal{B}\mu$ es acotada en $\mathbb{D}$, entonces existe $C > 0$ tal que $\mathcal{B}\mu(z) \leq C$, para toda $z \in \mathbb{D}$. Así por el Lema 3.1.1

$$\begin{aligned} C &\geq \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\ d\mu(w) \geq \int_{D(z,r)} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\ d\mu(w) \\ &\geq \frac{1}{|D(z,r)|_A} \int_{D(z,r)} d\mu(w) = \frac{1}{|D(z,r)|_A} \mu(D(z,r)) = \widehat{\mu}_r(z), \end{aligned}$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y esto prueba (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Supóngase que la función $\widehat{\mu}_r(z)$ es acotada en $\mathbb{D}$, es decir, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\mu(D(z,r)) \leq C_1 |D(z,r)|_A,$$

para toda $z \in \mathbb{D}$. Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión en $\mathbb{D}$ tal que satisfaga las condiciones del Lema 3.1.2. Para cada $f \in A^p$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\ d\mu(z) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D(a_n,r)} |f(z)|^p\ d\mu(z) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D(a_n,r)) \sup\{|f(z)|^p : z \in D(a_n,r)\}. \end{aligned}$$

Por los Lemas 3.1.1 y 3.1.3, existe una constante positiva C_2 tal que

$$\sup\{|f(z)|^p : z \in D(a_n,r)\} \leq \frac{C_2}{|D(a_n,r)|_A} \int_{D(a_n,2r)} |f(z)|^p\ dA(z),$$

para toda $n = 1, 2, 3, ...,$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\ d\mu(z) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D(a_n,r)) \frac{C_2}{|D(a_n,r)|_A} \int_{D(a_n,2r)} |f(z)|^p\ dA(z) \\ &\leq C_1 C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D(a_n,2r)} |f(z)|^p\ dA(z). \end{aligned}$$

Puesto que cada punto en $\mathbb{D}$ pertenece a lo más a N de los conjuntos $D(a_n, r)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) &\leq C_1C_2N \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) \\ &\leq C\|f\|_p^p,\end{aligned}$$

para cada $f \in A^p$. Por lo tanto el espacio de Bergman A^p es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supóngase que el espacio de Bergman A^p es acotado en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \, dA(w)$$

para toda $f \in A^p$. Sean $z \in \mathbb{D}$ fija y

$$f(w) = \Big[\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big]^{2/p}, \qquad w \in \mathbb{D}.$$

Entonces f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y además $f \in A^p$. Así pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \Big|\Big(\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big)^{2/p}\Big|^p \, d\mu(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4} d\mu(z) \\ &\leq C.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{B}\mu(w) \leq C$, es decir, $\mathcal{B}\mu$ es acotada en $\mathbb{D}$.

∎

Si una medida positiva μ satisface alguna de las tres condiciones del Teorema 3.1.4, entonces μ debe ser finita, es decir, $\mu(z) < +\infty$, para toda z.

Corolario 3.1.5. *Sean φ una función no negativa en $L^1(\mathbb{D}, dA)$, $r > 0$ y $d\mu = \varphi \, dA$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(1) *Existe $C > 0$ tal que*

$$(1-|z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)}{|1-z\overline{w}|^4} \, dA(w) < C,$$

para cada $z \in \mathbb{D}$.

(2) *Existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{1}{|D(z,r)|_A} \int_{D(z,r)} \varphi(w) \, dA(w) < C,$$

para cada $z \in \mathbb{D}$.

(3) *A^p es acotado en $L^p(\mathbb{D}, \varphi dA)$.*

Teorema 3.1.6. *Sean $1 < p < \infty$ y $0 < r < +\infty$ fijos. Sea μ una medida positiva de Borel en $\mathbb{D}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *La función $\mathcal{B}\mu$ está en $C_0(\mathbb{D})$.*

(2) *La función $\widehat{\mu}_r$ está en $C_0(\mathbb{D})$.*

(3) *$A^p \subset L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ y la aplicación inclusión es compacta.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supóngase que $\mathcal{B}\mu$ está en $C_0(\mathbb{D})$, es decir, $\mathcal{B}\mu(z) \to 0$ cuando $|z| \to 1^-$. Del Teorema 3.1.5 se tiene

$$\mathcal{B}\mu(z) \geq \mu(D(z,r))/|D(z,r)|_A = \widehat{\mu}_r(z) \ .$$

Tomando el límite cuando $|z| \to 1^-$ se tiene el resultado.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supóngase que $\widehat{\mu}_r \in C_0(\mathbb{D})$, es decir, $\widehat{\mu}_r(z) \to 0$ cuando $|z| \to 1^-$. Además supóngase que $f_n \to 0$ converge débilmente en A^p cuando $n \to \infty$. Para obtener (3), basta probar que $f_n \to 0$ en norma en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ cuando $n \to \infty$. Sea $\{a_n\}_n$, la sucesión del Lema 3.1.2, entonces $|a_n| \to 1^-$ cuando $n \to \infty$. Como $\widehat{\mu}_r(z) \in C_0(\mathbb{D})$, dado $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que

$$\frac{\mu(D(a_n, r))}{|D(a_n, r)|_A} < \varepsilon,$$

para toda $n \geq N_0$. Como f_n converge débilmente a 0 en A^p cuando $n \to \infty$, entonces existe una constante positiva C tal que

$$\|f_n\|_p \leq C \qquad \text{y} \qquad f_n(z) \rightrightarrows 0,$$

en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. El resultado deseado se seguirá de la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{D}} |f_k(z)|^p \ d\mu(z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D(a_n,r)} |f_k(z)|^p \ d\mu(z).$$

La suma anterior se puede dividir en dos sumas: la primera para $1 \leq n \leq N_0$ y la segunda para $n > N_0$. Por la prueba de (2) $\Rightarrow$ (3) en el Teorema 3.1.4 la segunda suma se estima por

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N_0}^{\infty} \int_{D(a_n,r)} |f_k(z)|^p \, d\mu(z) &\leq C_1 \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{\mu(D(a_n,r))}{|D(a_n,r)|_A} \int_{D(a_n,2r)} |f_k(z)|^p \, dA(z) \\
&\leq \varepsilon C_1 \sum_{n=N_0}^{\infty} \int_{D(a_n,2r)} |f_k(z)|^p dA(z) \\
&\leq \varepsilon C_1 N C^p,
\end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$.

Por otro lado, la primera suma puede hacerse arbitrariamente pequeña eligiendo k lo suficientemente grande. Puesto que $f_k \to 0$ débilmente en A^p, entonces $f_k(z) \to 0$ uniformemente sobre subconjuntos compactos, luego

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N_0-1} \int_{D(a_n,r)} |f_k(z)|^p d\mu(z) = 0.$$

Como ε es arbitrario se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_{\mathbb{D}} |f_k(z)|^p \, d\mu(z) \right)^{1/p} = 0,$$

por lo tanto el operador

$$i : A^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D}, d\mu)$$

es compacto.

(3) $\Rightarrow$ (1) Recordemos que

$$\mathcal{B}\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} |f_z(w)|^p \, d\mu(w), \qquad z \in \mathbb{D},$$

donde

$$f_z(w) = \Big[\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\Big]^{2/p}, \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

Sea

$$f_{a_n}(w) = \Big[\frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a}_n w)^2}\Big]^{2/p},$$

se prueba que f_{a_n} converge a 0 débilmente en la norma A^p, es decir $\|f_{a_n}\|_p$ es acotada y $f_{a_n}(z) \rightrightarrows 0$ en subconjuntos compactos. La función

$$\frac{1}{|1-\overline{a}_n w|^2}$$

es una función continua en $\mathbb{D}$ y así también lo es en $\mathbf{K} \subset \mathbb{D}$ compacto, por lo que existe $M > 0$ tal que $f_{a_n}(w) \le M(1-|a_n|^2)$, ahora tomando el límite cuando n tiende a ∞ se tiene que $f_{a_n} \to 0$. Como los $f_{a_n} \subset A^p$ se tiene que $\{\|f_{a_n}\|_p\}$ es acotada por 1 para toda n. Por lo tanto $f_z = f_{a_n}$ converge débilmente a 0 en A^p.

Por lo tanto $\mathcal{B}\mu(z) \to 0$, cuando $|z| \to 1^-$, pues como por hipótesis $i : A^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ es compacto, entonces se tiene que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a_n|^2)^2}{|1-\overline{a_n}w|^4}\, d\mu \to 0$$

cuando $n \to \infty$, que es lo que se quería probar, pues la sucesión $\{a_n\}$ es arbitraria.

■

Corolario 3.1.7. *Sean φ una función no negativa en $L^1(\mathbb{D}, dA)$, $r > 0$ y $d\mu = \varphi\, dA$. Entonces las siguientes son equivalentes*

(1) *Cuando $|z| \to 1^-$*

$$(1-|z|^2)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)}{|1-z\overline{w}|^4}\, dA(w) \to 0,$$

es decir, está en $C_0(\mathbb{D})$.

(2) *La función*

$$\frac{1}{|D(z,r)|_A} \int_{D(z,r)} \varphi(w)\, dA(w),$$

está en $C_0(\mathbb{D})$.

(3) *$A^p \subset L^p(\mathbb{D}, \varphi dA)$ y la apliación inclusión es compacta.*

Demostración. La prueba es análoga a la del teorema anterior.

■

3.2. Espacios BMO y VMO en la Métrica de Bergman

Una caracterización bien conocida del espacio $BMO(\mathbb{D})$ es el Lema de Garsia, el cual dice que una función f en $L^2(\mathbb{D})$ está en el espacio $BMO(\mathbb{D})$ si y sólo si la función

$$z \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it},z)|f(e^{it})|^2 dt - \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it},z)f(e^{it})dt\right|^2$$

es acotada, donde $P(e^{it},z)$ es el núcleo de Poisson en z. Un resultado similar se tiene para funciones en el espacio $VMO(\mathbb{D})$. El propósito de esta sección es desarrollar esta teoría en la métrica de Bergman.

Recuérdese que para $0 < r < +\infty$ y $z \in \mathbb{D}$, el conjunto $D(z,r)$ es el disco hiperbólico con centro hiperbólico en z y radio hiperbólico r. Además $|D(z,r)|_A$ es el área Euclideana de $D(z,r)$ dividida entre π.

Para una función f en $\mathbb{D}$, localmente integrable, se define la función promedio $\widehat{f}_r$ por

$$\widehat{f}_r(z) = \frac{1}{|D(z,r)|_A}\int_{D(z,r)} f(w)\, dA(w) \qquad \text{para cada } \ z \in \mathbb{D}.$$

Si f es cuadrado integrable localmente, entonces se define la **oscilación media** de f en z en la métrica de Bergman como

$$MO_r(f)(z) \quad = \quad \Big[\frac{1}{|D(z,r)|_A}\int_{D(z,r)} |f(w) - \widehat{f}_r(z)|^2\, dA(w)\Big]^{1/2}.$$

Para fines prácticos en las pruebas de las Proposiciones 3.2.1, 3.2.4 y del Teorema 3.2.5 hágase

$$k_z(w) = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{D} = D(z,r),$$

donde $k_z(w)$ es el núcleo reproductor normalizado de $A^2(\mathbb{D})$.

Proposición 3.2.1. *Si f es cuadrado integrable localmente, entonces*

$$MO_r(f)(z) = \Big[\frac{1}{2|D(z,r)|_A^2}\int_{D(z,r)}\int_{D(z,r)} |f(u) - f(v)|^2\, dA(u)\, dA(v)\Big]^{1/2}. \tag{3.2}$$

Demostración. Primero obsérvese que

$$|\widehat{f}_r(z)|^2 = |\widehat{f}_r(z)|^2 \frac{1}{|D(z,r)|_A}\int_{D(z,r)} dA(w) = \frac{1}{|D(z,r)|_A}\int_{D(z,r)} |\widehat{f}_r(z)|^2\, dA(w).$$

Así

$$
\begin{aligned}
\Big(MO_r(f)(z)\Big)^2 &= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |f(w)-\widehat{f}_r(z)|^2\, dA(w)\\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2\, dA(w) - \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} f(w)\overline{\widehat{f}_r(z)}\, dA(w)\\
&- \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} \overline{f(w)}\widehat{f}_r(z)\, dA(w) + \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |\widehat{f}_r(z)|^2\, dA(w)\\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2\, dA(w) - \overline{\widehat{f}_r(z)}\frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} f(w)\, dA(w)\\
&- \widehat{f}_r(z)\frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} \overline{f(w)}\, dA(w) + |\widehat{f}_r(z)|^2\frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} dA(w)\\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2\, dA(w) - \overline{\widehat{f}_r(z)}\widehat{f}_r(z) - \widehat{f}_r(z)\overline{\widehat{f}_r(z)} + |\widehat{f}_r(z)|^2\\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2\, dA(w) - |\widehat{f}_r(z)|^2 - |\widehat{f}_r(z)|^2 + |\widehat{f}_r(z)|^2\\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2\, dA(w) - |\widehat{f}_r(z)|^2\\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} \Big(|f(w)|^2 - |\widehat{f}_r(z)|^2\Big)\, dA(w). \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Y por otra parte se tiene por el teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathcal{D}|_A^2}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} |f(u)-f(v)|^2\, dA(u)\, dA(v) &= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A^2}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} |f(u)|^2\, dA(u)\, dA(v)\\
&- \frac{1}{|\mathcal{D}|_A^2}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} f(u)\overline{f(v)}\, dA(u)\, dA(v)\\
&- \frac{1}{|\mathcal{D}|_A^2}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} \overline{f(u)}f(v)\, dA(u)\, dA(v)\\
&+ \frac{1}{|\mathcal{D}|_A^2}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} |f(v)|^2\, dA(u)\, dA(v)\\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |f(u)|^2\, dA(u) - \overline{\widehat{f}_r(z)}\widehat{f}_r(z)\\
&- \overline{\widehat{f}_r(z)}\widehat{f}_r(z) + \frac{1}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} |f(v)|^2\, dA(v)\\
&= \frac{2}{|\mathcal{D}|_A}\int_{\mathcal{D}} \Big(|f(u)|^2 - |\widehat{f}_r(z)|^2\Big)\, dA(u).
\end{aligned}
$$

Así comparando (3.3) y esta última igualdad se tiene lo deseado.

■

Por el Lema 3.1.1 y el resultado anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2. *Sean r y s números positivos tales que $r > s$ y f una función cuadrado integrable localmente en $\mathbb{D}$. Entonces existe un número positivo C tal que para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$MO_r(f)(z) \leq C\ MO_s(f)(z)\ .$$

Se denotará por $BMO_r = BMO_r(\mathbb{D})$ al espacio formado por todas las funciones f cuadrado integrables localmente, tales que

$$\|f\|_r = \sup\{MO_r(f)(z) : z \in \mathbb{D}\} < +\infty.$$

El resultado principal de esta sección, es que el espacio BMO_r es independiente de r y puede ser descrito en términos de la transformada de Berezin.

Lema 3.2.3. *Supóngase que r y s son números positivos y β es la métrica de Bergman en $\mathbb{D}$. Entonces para una función f definida en $\mathbb{D}$, las siguientes condiciones son equivalentes*

(1) $M_r = \sup\{|f(z) - f(w)| : \beta(z,w) < r\} < +\infty$

(2) $M_s = \sup\{|f(z) - f(w)| : \beta(z,w) < s\} < +\infty$

(3) $|f(z) - f(w)| \leq C(\beta(z,w) + 1)$ *para alguna constante positiva C y todo $z, w \in \mathbb{D}$.*

Demostración. Para realizar esta prueba se verá que (3) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (1) y (1) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) Supóngase que $|f(z) - f(w)| \leq C(\beta(z,w) + 1)$ para alguna constante positiva C y todo $z, w \in \mathbb{D}$. Si $\beta(z,w) < s$ con $s \in \mathbb{R}^+$, entonces $|f(z) - f(w)| \leq C(s+1)$ para todo $z, w \in \mathbb{D}$, por lo tanto

$$M_s = \sup\{|f(z) - f(w)| : \beta(z,w) < s\} < +\infty.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Se puede suponer que $r < s$, así pues $\beta(z,w) < r < s$. Por lo tanto $M_r < M_s < +\infty$.

(1) $\Rightarrow$ (3) La desigualdad deseada es obvia para el caso en el que $\beta(z,w) \leq r$, así sólo basta probar el caso cuando $\beta(z,w) > r$. Sean z, w dos puntos fijos en $\mathbb{D}$ tales que $\beta(z,w) > r$ y sea $\alpha(t)$ con $0 \leq t \leq 1$ la geodésica de z a w en la métrica hiperbólica. Sea N el menor número entero mayor o igual a $\beta(z,w)/r$ o sea $N - 1 < \beta(z,w)/r \leq N$. Sean $0 \leq t_k < t_{k+1} \leq 1$ y $0 \leq k \leq N-1$, tal que a cada t_k se le asocia un punto $\alpha(t_k)$ del segmento hiperbólico $\beta(z,w)$, tal que

$$\beta(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})) = \frac{\beta(z,w)}{N} \leq r,$$

de donde

$$|f(z) - f(w)| \leq \sum_{k=1}^{N-1} |f(\alpha(t_k)) - f(\alpha(t_{k+1}))| \leq NM_r.$$

Así por la elección de N y como $r - 2 < r < \beta(z, r)$ se tiene

$$N \leq \frac{\beta(z,w)}{r} + 1 \leq \frac{2}{r}(\beta(z,w) + 1).$$

Así,

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{2}{r} M_r(\beta(z,w) + 1)$$

para todo $\beta(z, w) > r$.

■

La métrica de Bergman crece logarítmicamente

$$\beta(0, z) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}; \qquad\qquad z \in \mathbb{D}.$$

De aquí se sigue que una función f Borel medible la cual satisface cualquiera de las condiciones del Lema 3.2.3 está en $L^p(\mathbb{D}, dA)$ para todo exponente p positivo y finito. Esto último se tiene por el Lema 1.3.15.

Ahora se probará el resultado más importante de está sección. Por conveniencia, se introduce para $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ la siguiente notación

$$MO(f)(z) = \left[B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2 \right]^{1/2}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $B(|f|^2)(z) \geq |Bf(z)|^2$ y $MO(f)(z) \geq 0$, y así la expresión anterior está bien definida.

Proposición 3.2.4. *Para* $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$

$$MO(f)(z) = (1 - |z|^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{f(u) - f(v)}{(1 - u\overline{z})^2 (1 - v\overline{z})^2} \right|^2 dA(u)\ dA(v) \right]^{1/2}. \qquad (3.4)$$

Demostración. Por la definición de la transformada de Berezin se tiene

$$
\begin{aligned}
2\bigg(B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2\bigg)&\\
= \ & B(|f|^2)(z) - \int_{\mathbb{D}} f(u)|k_z(u)|^2\, dA(u) \int_{\mathbb{D}} \overline{f(v)}|k_z(v)|^2\, dA(v)\\
- \ & \int_{\mathbb{D}} \overline{f(u)}|k_z(u)|^2\, dA(u) \int_{\mathbb{D}} f(v)|k_z(v)|^2\, dA(v) + B(|f|^2)(z)\\
= \ & \int_{\mathbb{D}} |f(u)|^2|k_z(u)|^2\, dA(u) - \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} f(u)\overline{f(v)}|k_z(u)|^2|k_z(v)|^2\, dA(u)\, dA(v)\\
- \ & \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \overline{f(u)}f(v)|k_z(u)|^2|k_z(v)|^2\, dA(u)\, dA(v) + \int_{\mathbb{D}} |f(v)|^2|k_z(v)|^2\, dA(v)\\
= \ & \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u)|^2|k_z(u)|^2|k_z(v)|^2\, dA(u)\, dA(v) - \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} f(u)\overline{f(v)}|k_z(u)|^2|k_z(v)|^2\, dA(u)\, dA(v)\\
- \ & \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \overline{f(u)}f(v)|k_z(u)|^2|k_z(v)|^2\, dA(u)\, dA(v) + \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(v)|^2|k_z(u)|^2|k_z(v)|^2\, dA(u)\, dA(v)\\
= \ & \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \Big(|f(u)|^2 - f(u)\overline{f(v)} - \overline{f(u)}f(v) + |f(v)|^2\Big)|k_z(u)|^2|k_z(v)|^2\, dA(u)\, dA(v)\\
= \ & \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u) - f(v)|^2|k_z(u)|^2|k_z(v)|^2\, dA(u)\, dA(v).
\end{aligned}
$$

Así se tiene (3.4).

■

Obsérvese de 3.4, que el espacio formado por las funciones $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} MO(f)(z) < \infty$$

es lineal, y sí $f, g \in MO$ entonces

$$MO(f+g)(z) \leq MO(f)(z) + MO(g)(z) < \infty.$$

Teorema 3.2.5. *Supóngase que $0 < r < +\infty$ y que la función f es cuadrado integrable, localmente en $\mathbb{D}$. Entonces $f \in BMO_r$ si y sólo si $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ y la función $MO(f)$ es acotada en $\mathbb{D}$.*

Demostración. $\Leftarrow$ Por el Lema 3.1.1 existe una constante $\sigma > 0$ tal que

$$|k_z(w)|^2 \geq \frac{\sigma}{|D(z,r)|_A},$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y $w \in D(z,r)$. Ahora supóngase que $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ y que la función $MO(f)$ es acotada en $\mathbb{D}$. Se probará que $f \in BMO_r(f)$, es decir,

$$\|f\|_r = \sup\{MO_r(f)(z) : z \in \mathbb{D}\} < +\infty.$$

Por la fórmula anterior para $MO(f)$ se tiene que,

$$[MO(f)(z)]^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u) - f(v)|^2 |k_z(u)|^2 |k_z(v)|^2 dA(u)dA(v). \tag{3.5}$$

Ahora por la Proposición 3.2.1

$$[MO_r(f)(z)]^2 = \frac{1}{2|D(z,r)|_A^2}\int_{D(z,r)}\int_{D(z,r)} |f(u) - f(v)|^2 dA(u)dA(v).$$

Así se tiene que $MO(f)(z) \geq MO_r(f)(z)$ ya que que si se reduce el dominio de integración de $\mathbb{D}$ a $D(z,r)$ se obtiene que

$$MO(f)(z) \geq \sigma^2 MO_r(f)(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por lo que la acotación de la función $MO(f)$ implica que $f \in BMO_r$ puesto que

$$\sup\{MO_r(f) : z \in \mathbb{D}\} < \infty.$$

$\Rightarrow$) Supóngase ahora que $f \in BMO_r$. Sean $r = 2s$ y $\widehat{f_s}$ la función promedio de f con parámetro s. Se escribe $f = f_1 + f_2$, donde $f_1(z) = \widehat{f_s}(z)$ y $f_2(z) = f(z) - \widehat{f_s}(z)$. Como el espacio de funciones $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ con $MO(f)$ acotado es lineal, será suficiente probar que f_1 y f_2 también están en MO.

Primero se observa que

$$\widehat{f_s}(z) - \widehat{f_s}(w) = \frac{1}{|D(z,s)|_A}\int_{D(z,s)} [f(u) - \widehat{f_s}(w)] \; dA(u)$$

ya que

$$\frac{1}{|D(z,s)|_A}\int_{D(z,s)} \widehat{f_s}(w) \; dA(u) = \frac{\widehat{f_s}(w)}{|D(z,s)|_A}\int_{D(z,s)} dA(u) = \widehat{f_s}(w).$$

Por otro lado

$$\widehat{f_s}(z) - \widehat{f_s}(w) = \frac{1}{|D(z,s)|_A |D(w,s)|_A}\int_{D(z,s)}\int_{D(w,s)} [f(u) - f(v)] \; dA(u) \; dA(v).$$

Así por la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a la integral interior se tiene

$$|\widehat{f}_s(z) - \widehat{f}_s(w)|^2 \leq \frac{1}{|D(z,s)|_A |D(w,s)|_A} \int_{D(z,s)} \int_{D(w,s)} |f(u) - f(v)|^2 \; dA(u) \; dA(v).$$

Si $\beta(z,w) \leq s$, entonces

$$D(z,s) \subset D(z,r) \qquad ; \qquad D(w,s) \subset D(z,r)$$

y por el Lema 3.1.1

$$|D(w,s)|_A \sim |D(z,s)|_A \sim |D(z,r)|_A \; .$$

Entonces existe una constante positiva C tal que

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_s(z) - \widehat{f}_s(w)|^2 &\leq \frac{C}{2|D(z,r)|_A^2} \int_{D(z,r)} \int_{D(z,r)} |f(u) - f(v)|^2 \; dA(u) \; dA(v) \\ &= C[MO_r(f)(z)]^2 \leq C\|f\|_r^2 < \infty, \end{aligned} \tag{3.6}$$

para todos $z, w \in \mathbb{D}$ con $\beta(z,w) \leq s$, donde se a usado (3.2). Puesto que $MO_r(f)$ es acotado, por el Lema 3.2.3 (3) existe una constante positiva C_1 tal que

$$|\widehat{f}_s(z) - \widehat{f}_s(w)| \leq C_1(\beta(z,w) + 1)$$

para toda $z, w \in \mathbb{D}$. En particular $\widehat{f}_s \in L^2(\mathbb{D}, dA)$. Ahora

$$\begin{aligned} 2[MO(\widehat{f}_s)(z)]^2 &= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\widehat{f}(u) - \widehat{f}(v)|^2 |k_z(u)|^2 |k_z(v)|^2 \; dA(u) \; dA(v) \\ &\leq C_1^2 \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} (\beta(z,w) + 1)^2 |k_z(u)|^2 |k_z(v)|^2 \; dA(u) \; dA(v). \end{aligned}$$

Haciendo los cambios de variable $\lambda = \varphi_z(u)$, $\eta = \varphi_z(v)$ y tomando el hecho de que $\beta(z,w)$ es Möbius invariante se tiene que

$$C_1^2 \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} (\beta(z,w) + 1)^2 |k_z(u)|^2 |k_z(v)|^2 \; dA(u) \; dA(v) = C_1^2 \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} (\beta(\lambda,\eta) + 1)^2 \; dA(\lambda) \; dA(\eta),$$

pero por la Proposición 1.3.15 esta última integral es finita, luego $MO(\widehat{f}_s)$ es acotada en $\mathbb{D}$.

Ahora se considera $f_2 = f - \widehat{f}_s$ y por la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{|f_2|^2_s}\right]^{1/2} &= \left[\frac{1}{|D(z,s)|_A}\int_{D(z,s)} |f(w)-\widehat{f}_s(w)|^2 \, dA(w)\right]^{1/2} \\
&\leq \left[\frac{1}{|D(z,s)|_A}\int_{D(z,s)} |f(w)-\widehat{f}_s(z)|^2 \, dA(w)\right]^{1/2} \\
&+ \left[\frac{1}{|D(z,s)|_A}\int_{D(z,s)} |\widehat{f}_s(z)-\widehat{f}_s(w)|^2 \, dA(w)\right]^{1/2} .
\end{aligned}$$

Por la desigualdad (3.6) el término

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{|D(z,s)|_A}\int_{D(z,s)} |\widehat{f}_s(z)-\widehat{f}_s(w)|^2 dA(w)\right]^{1/2} &\leq C\|f\|_r^2 \cdot \frac{1}{|D(z,r)|_A}\int_{D(z,r)} dA(w) \\
&= C\|f\|_r^2
\end{aligned}$$

es acotado con respecto de z. El término que le procede a éste, es también acotado ya que $f \in BMO_r$ y

$$MO_s(f)(z) \leq C_2 MO_r(f)(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

lo cual se sigue del Corolario 3.2.2 y la definición de $\widehat{f}_s$ usada también en la prueba. Ahora por el Corolario 3.1.5 (tomando $\varphi = |f_2|^2$) la función $B(|f_2|^2)$ es acotada, lo cual implica que $f_2 \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ y que $MO(f_2)$ es acotada.

∎

Se sigue del Teorema 3.2.5 que el espacio BMO_r es independiente del parámetro r con $0 < r < +\infty$, pero su norma si cambia con respecto de r. Se escribirá $BMO_\partial = BMO_\partial(\mathbb{D})$ para denotar el espacio BMO_r para cualquier $0 < r < +\infty$. La nueva notación representa la independencia del parámetro r. También hace hincapié en el hecho si que una función f en $L^2(\mathbb{D}, dA)$ o no, la propiedad de pertenecer a BMO_∂ depende de su comportamiento en la frontera.

Por otra parte, el espacio BMO_∂ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\| = |Bf(0)| + \sup\{MO(f)(z) : z \in \mathbb{D}\} .$$

Obsérvese que si se omite el término

$$Bf(0) = \int_{\mathbb{D}} f(z) \, dA(z)$$

entonces sólo se tiene una seminorma. La seminorma es Möbius invariante, pero la norma definida anteriormente no lo es. Se dice que la seminorma

$$\|f\|_\partial = \sup\{MO(f)(z) : z \in \mathbb{D}\}$$

es Möbius invariante pues satisface

$$\|f\|_\partial = \|f \circ \varphi\|_\partial.$$

para toda $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ de Möbius. En efecto: obsérvese que

$$|f(g(z))|^2 = (|f|^2)(g(z)) = (|f|^2 \circ g)(z),$$

además por la Proposición 2.1.1 se tiene que

$$\mathbf{B}(f \circ \varphi)(z) = (\mathbf{B}f) \circ \varphi(z).$$

Por lo que

$$\mathbf{B}(|f \circ \varphi|^2)(z) = (\mathbf{B}|f|^2) \circ \varphi(z),$$

y por otro lado

$$\Big(\mathbf{B}(|f|^2)(z) - |\mathbf{B}(f)(z)|^2\Big)^{1/2} = \Big[\mathbf{B}(|f|^2) - |\mathbf{B}(f)|^2\Big]^{1/2}(z).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}} \Big(\mathbf{B}(|f\circ\varphi|^2)(z) - |\mathbf{B}(f\circ\varphi)(z)|^2\Big)^{1/2} &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \Big((\mathbf{B}|f|^2)\circ\varphi(z) - |(\mathbf{B}f)\circ\varphi(z)|^2\Big)^{1/2} \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} \Big((\mathbf{B}(|f|^2) - |\mathbf{B}(f)|^2)\circ\varphi(z)\Big)^{1/2} \\
&= \sup_{w\in\mathbb{D}} \Big((\mathbf{B}(|f|^2) - |\mathbf{B}(f)|^2)(w)\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

y así se tiene lo deseado.

Proposición 3.2.6. *La seminorma $\|\cdot\|_\partial$ es completa en BMO_∂.*

Demostración. Puesto que $1 - |z|^2 \leq 4|1 - z\overline{w}|^4$ entonces por 3.5

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u) - f(v)|^2 \, dA(u)\, dA(v) \leq 8\|f\|_\partial^2$$

para toda $f \in BMO_\partial$, se ve que si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en BMO_∂, entonces la sucesión

$$F_n(u,v) = f_n(u) - f_n(v)$$

converge en $L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D}, dA\times dA)$. Como las funciones constantes tienen norma cero en BMO_∂, se puede asumir que $f_n(0)=0$ para toda $n=1,2,\cdots$. Tomando $v=0$ en $F_n(u,v)$ se concluye que $f_n(z)$ converge en $L^2(\mathbb{D}, dA)$ a alguna función f. Dado $\varepsilon>0$, se elige un entero positivo N tal que la integral

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |(f_n(u)-f_m(u))-(f_n(v)-f_m(v))|^2|k_z(u)k_z(v)|^2\ dA(u)\ dA(v)<\varepsilon^2$$

para toda $z\in\mathbb{D}$ y $n,m\geq N$. Si $m\to+\infty$, entonces

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |(f_n(u)-f(u))-(f_n(v)-f(v))|^2|k_z(u)k_z(v)|^2\ dA(u)\ dA(v)\leq\varepsilon^2$$

para todo $z\in\mathbb{D}$ y $n\geq N$. Esto implica que $f_n-f\in BMO_\partial$ y

$$\|f_n-f\|_\partial\leq\varepsilon, \qquad\qquad \text{para toda}\ \ n\geq N.$$

Por lo tanto $f=(f-f_n)+f_n\in BMO_\partial$ y $f_n\to f$ en BMO_∂. Por lo tanto BMO_∂ es completo.

■

Teorema 3.2.7. *Sea $H(\mathbb{D})$ el espacio de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$. Entonces*

$$BMO_\partial\cap H(\mathbb{D})=\mathcal{B}$$

Demostración. (a) Primero se prueba que $BMO_\partial\cap H(\mathbb{D})\subset\mathcal{B}$. Puesto que BMO_∂ y $\mathcal{B}$ están contenidos en $L^2(\mathbb{D}, dA)$, considérese una función $f\in A^2(\mathbb{D})$. Entonces

$$f'(0)=2\int_{\mathbb{D}}\overline{w}(f(w)-f(0))\ dA(w)\ .$$

En efecto, como

$$f(z)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\ dA(w)\quad\text{se tiene}\quad f'(z)=2\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^3}\ \overline{w}\ f(w)\ dA(w)$$

y por otro lado por la simetría de $\mathbb{D}$

$$\int_{\mathbb{D}}\overline{w}\ dA(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} r\ e^{-i\theta}\ d\theta\ dr=0\ .$$

Así se tiene

$$f'(0)=2\int_{\mathbb{D}}\overline{w}f(w)\ dA(w)-2\int_{\mathbb{D}}\overline{w}f(0)\ dA(w)=2\int_{\mathbb{D}}\overline{w}(f(w)-f(0))\ dA(w)\ .$$

Ahora reemplazando f por $f\circ\varphi_z$ en la igualdad anterior se obtiene

$$(1-|z|^2)f'(z)=2\int_{\mathbb{D}}\overline{w}(f\circ\varphi_z(w)-f(z))dA(w).$$

Luego por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$(1-|z|^2)^2|f'(z)|^2 \leq 4\int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi_z(w)-f(z)|^2 dA(w)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Como

$$|f\circ\varphi_z(w)-f(z)|^2 = |f\circ\varphi_z(w)|^2 - f\circ\varphi_z(w)\overline{f(z)} - \overline{f\circ\varphi_z(w)}f(z) + |f(z)|^2$$

y $\mathbf{B}f = f$ para f analítica se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi_z(w)-f(z)|^2\; dA(w) &= \int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi_z(w)|^2\; dA(w) - \int_{\mathbb{D}} f\circ\varphi_z(w)\overline{f(z)}\; dA(w) \\
&+ \int_{\mathbb{D}} \overline{f\circ\varphi_z(w)}f(z)\; dA(w) + \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\; dA(w) \\
&= B(|f|^2)(z) - (Bf(z))\overline{f(z)} - \overline{(Bf(z))}f(z) + |f(z)|^2 \\
&= B(|f|^2)(z) - f(z)\overline{f(z)} - \overline{f(z)}f(z) + |f(z)|^2 \\
&= B(|f|^2)(z) - |f(z)|^2 \\
&= B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2\ .
\end{aligned}$$

Resumiendo

$$\int_{\mathbb{D}} |f\circ\varphi_z(w)-f(z)|^2 dA(w) = B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2.$$

Por lo tanto

$$(1-|z|^2)^2|f'(z)|^2 \leq 4\Big(B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2\Big),$$

y así

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)|f'(z)| &\leq 2\Big(B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2\Big)^{1/2} \\
&= 2MO(f)(z) \\
&< C < \infty
\end{aligned}$$

pues $f \in BMO_\partial$. Luego se ha probado

$$BMO_\partial \cap H(\mathbb{D}) \subset \mathcal{B}.$$

(b) Ahora se prueba que $BMO_\partial \cap H(\mathbb{D}) \supset \mathcal{B}$. Sea $f \in \mathcal{B}$, entonces por el Teorema 1.3.14 existe una constante positiva C tal que

$$|f(z) - f(w)| \leq C\beta(z, w),$$

para cada $z, w \in \mathbb{D}$. Esto último, junto con la fórmula integral para $B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2$ y el Lema 1.3.15 se utiliza para obtener el resultado deseado. Como

$$\begin{aligned} (MO(f)(z))^2 &= B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2 \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f \circ \varphi_z(w) - f(z)|^2 \, dA(w) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} C(\beta(\varphi_z(w), z))^2 \, dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} C(\beta(\varphi_z(w), \varphi_z(0)))^2 \, dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} C(\beta(w, 0))^2 \, dA(w) \ , \end{aligned}$$

y esta última integral es finita por Lema 1.3.15. Por lo tanto $f \in BMO_\partial \cap H(\mathbb{D})$. Luego

$$\mathcal{B} \subset BMO_\partial \cap H(\mathbb{D}).$$

■

Se denotará por VMO_r el espacio de las funciones f en $\mathbb{D}$ cuadrado integrables localmente, tales que

$$MO_r(f)(z) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad |z| \to 1^-.$$

Dicho espacio está contenido en el espacio BMO_r. En efecto, sea $f \in VMO_r$, es decir,

$$\lim_{|z| \to 1^-} \Big(\frac{1}{|D(z,r)|_A} \int_{D(z,r)} |f(w) - \widehat{f}_r(z)|^2 \, dA(w) \Big)^{1/2} = 0 \ .$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < R < 1$ tal que si $R < |z| < 1$

$$\Big(\frac{1}{|D(z,r)|_A} \int_{D(z,r)} |f(w) - \widehat{f}_r(z)|^2 \, dA(w) \Big)^{1/2} < \varepsilon.$$

Por otra parte si $|z| \leq R$, entonces $|z|^2 \leq R^2$ y $1 - |z|^2 \geq 1 - R^2$. Luego

$$\frac{1}{|D(z,r)|_A} \sim \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \leq \frac{1}{(1 - R^2)^2}$$

y existe $K \subset \mathbb{D}$ compacto tal que $D(z, r) \subset K$ para cada $z \in B(R)$. Ahora obsérvese que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_r(z)| &= \Big| \frac{1}{|D(z,r)|_A} \int_{D(z,r)} f(w) \, dA(w) \Big| \\ &\leq \frac{C}{(1 - R^2)^2} \int_K |f(w)| \, dA(w) \\ &\leq \frac{C}{(1 - R^2)^2} \, \|f\|_K \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|D(z,r)|_A}\int_{D(z,r)}|f(w)-\widehat{f}_r(z)|^2\ dA(w)\Big)^{1/2} &\leq \Big(\frac{1}{(1-R^2)^2}\int_K |f(w)-\widehat{f}_r(z)|^2\ dA(w)\Big)^{1/2}\\
&\leq \frac{1}{(1-R^2)^2}\Big[\int_K |f(w)|^2\ dA(w)\Big]^{1/2}\\
&+ \frac{1}{(1-R^2)^2}\Big[\int_K |\widehat{f}_r(z)|^2\ dA(w)\Big]^{1/2}\\
&< C < \infty\ .
\end{aligned}$$

Así se tiene que $f \in BMO_r$.

Teorema 3.2.8. *Sean $f \in H(\mathbb{D})$ y $0 < r < 1$, entonces*

$$\int_{B(r)} |f'(z)|^2\ \log\frac{r}{|z|}\ dA(z) \leq \frac{16}{9}\ \int_{B(r)} |f'(z)|^2\ (1-|z|^2)\ dA(z). \tag{3.7}$$

Demostración. Pasando a coordenadas polares con $z = \zeta e^{i\theta}$ en (3.7) se tiene que mostrar que

$$\int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |f'(\zeta e^{i\theta})|^2\ d\theta\right) \zeta \log\frac{r}{\zeta}\ d\zeta \leq \frac{16}{9}\int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |f'(\zeta e^{i\theta})|^2\ d\theta\right)\ \zeta\ \left(1-\frac{\zeta^2}{r^2}\right)\ d\zeta.$$

Como $|f'(z)|^2$ es subarmónica, entonces si $0 < \zeta < \zeta' < 1$

$$h(\zeta) = \int_0^{2\pi} |f'(\zeta e^{i\theta})|^2\ d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f'(\zeta' e^{i\theta})|^2\ d\theta = h(\zeta')\ .$$

Para que se cumpla (3.7) será suficiente mostrar que

$$\int_0^r\ h(\zeta)\ \zeta\ \log\frac{r}{\zeta}\ d\zeta \leq \frac{16}{9}\int_0^r\ h(\zeta)\ \zeta\ \left(1-\frac{\zeta^2}{r^2}\right)\ d\zeta.$$

Un cálculo directo muestra que

$$\int_0^r\ \zeta\ \log\frac{r}{\zeta}\ d\zeta = \frac{16}{9}\int_{r/2}^r\ \left(1-\frac{\zeta^2}{r^2}\right)\ d\zeta.$$

Sea $t < \frac{r}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^r\ h(\zeta)\ \zeta\ \log\frac{r}{\zeta}\ d\zeta &= \int_0^t\ h(\zeta)\ \zeta\ \log\frac{r}{\zeta}\ d\zeta + \int_t^r\ h(\zeta)\ \zeta\ \log\frac{r}{\zeta}\ d\zeta\\
&\leq h(t)\int_0^t\ \zeta\ \log\frac{r}{\zeta}\ d\zeta + \int_t^r\ h(\zeta)\ \zeta\ \log\frac{r}{\zeta}\ d\zeta\ .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Se observa que

$$\int_0^t \zeta \ \log \frac{r}{\zeta}\ d\zeta < \int_t^r \left(\frac{16}{9}\ \zeta\Big(1-\frac{\zeta^2}{r^2}\Big) - \zeta \ \log \frac{r}{\zeta} \right) d\zeta$$

pues

$$\int_0^r \zeta \ \log \frac{r}{\zeta}\ d\zeta < \frac{16}{9} \int_t^r \ \zeta \ \Big(1-\frac{\zeta^2}{r^2}\Big)\ d\zeta \ .$$

Ya que h es creciente, (3.8) se estima por

$$\begin{aligned}
\int_0^r h(\zeta)\ \zeta\ \log \frac{r}{\zeta}\ d\zeta \ &\leq\ h(t) \int_t^r \left(\frac{16}{9}\ \zeta\Big(1-\frac{\zeta^2}{r^2}\Big) - \zeta\ \log \frac{r}{\zeta} \right) d\zeta + \int_t^r h(\zeta)\ \zeta\ \log \frac{r}{\zeta}\ d\zeta \\
&\leq\ \frac{16}{9} \int_t^r h(\zeta)\ \zeta\Big(1-\frac{\zeta^2}{r^2}\Big)\ d\zeta \ \leq \frac{16}{9} \int_0^r h(\zeta)\ \zeta\Big(1-\frac{\zeta^2}{r^2}\Big)\ d\zeta
\end{aligned}$$

y así se prueba (3.7).

■

El siguiente resultado se usará para mostrar el Teorema 3.2.10.

Lema 3.2.9. *Para toda $f \in H(\mathbb{D})$*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)-f(0)|^2\ dA(z) \leq \frac{32}{9} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2 |f'(z)|^2\ dA(z)\ .$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supóngase que la integral de la derecha es finita. Usando el Teorema de Green (ver Teorema 3.3.13 en Ápendice) se tiene que

$$\int_{|z|<r} |f'(z)|^2 \log \frac{r}{|z|}\ dA(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(0)|^2\ d\theta,$$

además por el Teorema 3.2.8

$$\int_{|z|<r} |f'(z)|^2 \log \frac{r}{|z|}\ dA(z) \leq \frac{16}{9} \int_{|z|<r} |f'(z)|^2 \Big(1-\Big|\frac{z}{r}\Big|^2\Big)\ dA(z)\ .$$

Ahora integrando la anterior desigualdad con respecto de $r\ dr$ se obtiene

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^1 r\ dr \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(0)|^2\ d\theta \leq \frac{16}{9} \int_0^1 r\ dr \int_{|z|<r} |f'(z)|^2 \Big(1-\Big|\frac{z}{r}\Big|^2\Big)\ dA(z),$$

ó

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)-f(0)|^2\ dA(z) \leq \frac{32}{9} \int_{\mathbb{D}} [1-|z|^2 + |z|^2 \log |z|^2] |f'(z)|^2\ dA(z),$$

pues por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\,dr\int_{|z|<r}|f'(z)|^2\Big(1-\Big|\frac{z}{r}\Big|^2\Big)\,dA(z) &= \int_{\mathbb{D}}\int_{|z|}^1 |f'(z)|^2\, r\,\Big(1-\Big|\frac{z}{r}\Big|^2\Big)\,dr\,dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2\int_{|z|}^1 r\,\Big(1-\Big|\frac{z}{r}\Big|^2\Big)\,dr\,dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2\big(\frac{1}{2}-\frac{|z|^2}{2}+\frac{1}{2}|z|^2\log|z|^2\big)\,dA(z)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2\big(1-|z|^2+|z|^2\log|z|^2\big)\,dA(z).\end{aligned}$$

Como $\log t\le t-1$ para $0<t\le 1$ entonces

$$1-|z|^2+|z|^2\log|z|^2\le(1-|z|^2)^2,$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{D}}|f(z)-f(0)|^2\,dA(z)\le\frac{32}{9}\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2(1-|z|^2)^2\,dA(z).$$

■

Se escribirá $VMO_\partial = VMO_\partial(\mathbb{D})$ para representar el espacio VMO_r para cualquier $0<r<+\infty$. El espacio VMO_∂ es un subespacio completo y por tanto cerrado de BMO_∂ y además VMO_∂ contiene al espacio $C(\overline{\mathbb{D}})$.

Teorema 3.2.10. *Sea $f\in H(\mathbb{D})$. Entonces $f\in VMO_\partial$ si y sólo si $f\in\mathcal{B}_0$.*

Demostración. Reemplazando f por $f\circ\varphi_w$ en el Lema 3.2.9 se obtiene

$$\begin{aligned}B(|f|^2)(w)-|Bf(w)|^2 &= \int_{\mathbb{D}}|f\circ\varphi_w(z)-f(w)|^2\,dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}}|f\circ\varphi_w(z)-f\circ\varphi_w(0)|^2\,dA(z)\\ &\le \frac{32}{9}\int_{\mathbb{D}}\Big|\big(f\circ\varphi_w\big)'(z)\Big|^2(1-|z|^2)^2\,dA(z)\\ &= \frac{32}{9}\int_{\mathbb{D}}\Big|f'\big(\varphi_w(z)\big)\Big|^2|\varphi_w'(z)|^2(1-|z|^2)^2\,dA(z)\\ &= \frac{32}{9}\int_{\mathbb{D}}\Big|f'\big(\varphi_w(z)\big)\Big|^2\frac{(1-|w|^2)^2(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}\,dA(z)\\ &= \frac{32}{9}\int_{\mathbb{D}}\Big(1-\big|\varphi_w(z)\big|^2\Big)^2\Big|f'\big(\varphi_w(z)\big)\Big|^2\,dA(z).\end{aligned}$$

Tomando el cambio de variable $\lambda=\varphi_w(z)$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{D}}\Big(1-\big|\varphi_w(z)\big|^2\Big)^2\Big|f'\big(\varphi_w(z)\big)\Big|^2\,dA(z) = \int_{\mathbb{D}}|f'(\lambda)|^2\frac{(1-|w|^2)^2(1-|\lambda|^2)^2}{|1-w\overline{\lambda}|^4}\,dA(\lambda)$$

Si $f \in \mathcal{B}_0$ existe $R > 0$ con $R < |\lambda| < 1$ tal que

$$(1 - |\lambda|^2)^2 |f'(\lambda)|^2 < \varepsilon,$$

así

$$\int_{R<|\lambda|<1} |f'(\lambda)|^2 (1 - |\lambda|^2)^2 |\varphi'_w(\lambda)|^2 \, dA(\lambda) < \int_{R<|\lambda|<1} \varepsilon \, |\varphi'_w(\lambda)|^2 \, dA(\lambda) < \varepsilon.$$

Por otra parte en $\overline{B(R)}$ se tiene que $|1 - \overline{\lambda} w| \geq (1 - R^2)^4$ y así

$$\frac{(1 - |w|^2)^2}{(1 - R^2)^4} \int_{\overline{B(R)}} |f'(\lambda)|^2 (1 - |\lambda|^2)^2 \, dA(\lambda) \longrightarrow 0,$$

cuando $|w| \to 1^-$. Por lo tanto

$$B(|f|^2)(w) - |Bf(w)|^2 \longrightarrow 0$$

cuando $|w| \to 1^-$ y así

$$f \in VMO_\partial(\mathbb{D}).$$

Ahora supóngase que $f \in VMO_\partial(\mathbb{D}) \subset BMO_\partial \subset \mathcal{B}$. Así por la fórmula de reproductora del núcleo de Bergman, para cada f se tiene que

$$f(z) - f(0) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w) - f(0)}{(1 - \overline{z} w)^2} \, dA(w).$$

Derivando en ambos lados de la igualdad anterior

$$f'(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{2\overline{w}(f(w) - f(0))}{(1 - \overline{z} w)^3} \, dA(w).$$

Si $z = 0$, entonces

$$|f'(0)|^2 \leq 4 \int_{\mathbb{D}} |f(w) - f(0)|^2 \, dA(w).$$

Reemplazando f por $f \circ \varphi_z$ en la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2)^2 |f'(z)|^2 &\leq 4 \int_{\mathbb{D}} |f \circ \varphi_z(w) - f(z)|^2 \, dA(w) \\ &= 4\Big(B(|f|^2)(z) - |Bf(z)|^2\Big), \end{aligned}$$

para $z \in \mathbb{D}$. Como $f \in VMO_\partial(\mathbb{D})$ entonces

$$f \in \mathcal{B}_0.$$

■

3.3. Una estimación de Lipschitz

Sea $\alpha(t)$ una curva suave en $\mathbb{D}$. Si $s(t)$ es la longitud de arco de $\alpha(t)$ en la métrica de Bergman, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \frac{|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}.$$

Para un punto $a \in \mathbb{D}$, se denotará por Π_a a la proyección ortogonal de rango uno de A^2 sobre el subespacio unidimensional generado por K_a, donde

$$K_a(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}; \qquad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{D},$$

el cual es un vector unitario en $A^2(\mathbb{D})$. En términos concretos

$$\begin{aligned} \langle K_{\alpha(t)}, K_{\alpha(t)} \rangle &= \int_{\mathbb{D}} K_{\alpha(t)}(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\, dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2\, dA(w) \\ &= 1. \end{aligned}$$

y como f es analítica

$$\Pi_a f = \langle f, K_a \rangle K_a = (1-|a|^2) f(a) K_a.$$

Lema 3.3.1. *Sean $\alpha(t)$ una curva suave en $\mathbb{D}$ y $s(t)$ la longitud de arco de $\alpha(t)$ en la métrica de Bergman. Entonces*

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\| \big(I - \Pi_{\alpha(t)}\big)\big(\frac{d}{dt} K_{\alpha(t)}\big)\Big\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en $A^2(\mathbb{D})$ y I es el operador identidad.

Demostración. Obsérvese que

$$K_{\alpha(t)}(z) = \frac{1-|\alpha(t)|^2}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}; \qquad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{D}.$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K_{\alpha(t)}(z) &= \frac{d}{dt}\Big[\frac{1-|\alpha(t)|^2}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}\Big] = \frac{d}{dt}\Big[\frac{1-\alpha(t)\overline{\alpha(t)}}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}\Big] \\ &= \frac{-\alpha'(t)\overline{\alpha(t)}(1-\overline{\alpha(t)}z)^2 - \alpha(t)\overline{\alpha'(t)}(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^4} \\ &- \frac{2(1-\alpha(t)\overline{\alpha(t)})(1-\overline{\alpha(t)}z)(-\overline{\alpha'(t)}z)}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^4} \\ &= -\frac{\alpha'(t)\overline{\alpha(t)} + \alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2} + \frac{2\overline{\alpha'(t)}(1-|\alpha(t)|^2)z}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^3}. \end{aligned}$$

Ahora por un cálculo directo, se tiene que

$$\Pi_{\alpha(t)}\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(z) = \frac{-\alpha'(t)\overline{\alpha(t)} + \alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\alpha(t)}\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(z)\\
&= (1-|\alpha(t)|^2)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(\alpha(t))K_{\alpha(t)}(z)\\
&= (1-|\alpha(t)|^2)\Big[-\frac{\alpha'(t)\overline{\alpha(t)} + \alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-\overline{\alpha(t)}\alpha(t))^2} + \frac{2\overline{\alpha'(t)}(1-|\alpha(t)|^2)\alpha(t)}{(1-\overline{\alpha(t)}\alpha(t))^3}\Big]\Big[\frac{1-|\alpha(t)|^2}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}\Big]\\
&= \frac{(1-|\alpha(t)|^2)^2}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}\Big[-\frac{\alpha'(t)\overline{\alpha(t)} + \alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-|\alpha(t)|^2)^2} + \frac{2\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}\Big[-\alpha'(t)\overline{\alpha(t)} - \alpha(t)\overline{\alpha'(t)} + 2\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}\Big]\\
&= \frac{\alpha(t)\overline{\alpha'(t)} - \alpha'(t)\overline{\alpha(t)}}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}.
\end{aligned}$$

Por lo que al realizar la diferencia se obtiene directamente

$$\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(z) = \frac{2\overline{\alpha'(t)}(z-\alpha(t))}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^3}\ .$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\Big\|\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)\Big\|^2 &= \Big\|\frac{2\overline{\alpha'(t)}(z-\alpha(t))}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^3}\Big\|^2\\
&= \int_{\mathbb{D}}\Big|\frac{2\overline{\alpha'(t)}(z-\alpha(t))}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^3}\Big|^2\,dA(z)\\
&= \int_{\mathbb{D}}\frac{4|\alpha'(t)|^2|z-\alpha(t)|^2}{|1-\overline{\alpha(t)}z|^2|1-\overline{\alpha(t)}z|^4}\,dA(z)\\
&= \frac{4|\alpha'(t)|^2}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}\int_{\mathbb{D}}\Big|\frac{z-\alpha(t)}{1-\overline{\alpha(t)}z}\Big|^2\Big|K_{\alpha(t)}(z)\Big|^2\,dA(z),
\end{aligned}$$

donde $K_{\alpha(t)}(z) = \dfrac{1-|\alpha(t)|^2}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}$. Así tomando el cambio de variable dado por

$$w = \frac{\alpha(t)-z}{1-\overline{\alpha(t)}z} \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{\alpha(t)-w}{1-\overline{\alpha(t)}w},$$

entonces

$$\begin{aligned} K_{\alpha(t)}(z) &= K_{\alpha(t)}\Big(\frac{\alpha(t)-w}{1-\overline{\alpha(t)}w}\Big) = \frac{1-|\alpha(t)|^2}{\Big(1-\overline{\alpha(t)}\big(\frac{\alpha(t)-w}{1-\overline{\alpha(t)}w}\big)\Big)^2} \\ &= \frac{(1-\overline{\alpha(t)}w)^2}{1-|\alpha(t)|^2} = \frac{1}{K_{\alpha(t)}(w)}, \end{aligned}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} \Big\|\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)\Big\|^2 &= \frac{4|\alpha'(t)|^2}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}\int_{\mathbb{D}}\Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2\frac{1}{\Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2}|w|^2\,dA(w) \\ &= \frac{4|\alpha'(t)|^2}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}\int_{\mathbb{D}}|w|^2\,dA(w) = \frac{2|\alpha'(t)|^2}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}, \end{aligned}$$

pues

$$\int_{\mathbb{D}}|w|^2\,dA(w) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$\Big\|\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)\Big\| = \frac{\sqrt{2}|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2} = \sqrt{2}\frac{ds}{dt},$$

y de aquí se sigue el resultado.

■

Teorema 3.3.2. *Sea $\alpha(t)$ una curva suave en $\mathbb{D}$ y sea $s(t)$ la longitud de arco de $\alpha(t)$ en la métrica de Bergman. Entonces para cualquier $f \in BMO_\partial$ se tiene que*

$$\Big|\frac{d}{dt}Bf(\alpha(t))\Big| \leq 2\sqrt{2}MO(f)(\alpha(t))\frac{ds}{dt}.$$

Demostración. Obsérvese que

$$\mathbf{B}f(\alpha(t)) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2\,dA(w). \tag{3.9}$$

Por otra parte puesto que

$$K_{\alpha(t)}(w) = \frac{1-|\alpha(t)|^2}{(1-\overline{\alpha(t)}w)^2} \qquad \text{y} \qquad \overline{K_{\alpha(t)}(w)} = \frac{1-|\alpha(t)|^2}{(1-\alpha(t)\overline{w})^2},$$

se tiene al derivar con respecto a t

$$K'_{\alpha(t)}(w) = -\frac{\alpha'(t)\overline{\alpha(t)}+\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-\overline{\alpha(t)}w)^2} + \frac{2w\overline{\alpha'(t)}(1-|\alpha(t)|^2)}{(1-\overline{\alpha(t)}w)^3}$$

y al tomar conjugados

$$\overline{K'_{\alpha(t)}(w)} = -\frac{\overline{\alpha'(t)}\alpha(t) + \overline{\alpha(t)}\alpha'(t)}{(1-\alpha(t)\overline{w})^2} + \frac{2\overline{w}\alpha'(t)(1-|\alpha(t)|^2)}{(1-\alpha(t)\overline{w})^3}.$$

Resumiendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big[K_{\alpha(t)}(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\Big] &= K'_{\alpha(t)}(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)} + K_{\alpha(t)}(w)\overline{K'_{\alpha(t)}(w)} \\
&= K'_{\alpha(t)}(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)} + \overline{\overline{K_{\alpha(t)}(w)}K'_{\alpha(t)}(w)} \\
&= 2\,\mathrm{Re}\Big[\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}(w)\Big)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\Big].
\end{aligned}$$

Ahora diferenciando bajo el signo integral a (3.9) y por el cálculo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{B}f(\alpha(t)) &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{d}{dt}\Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2\, dA(w) \\
&= 2\int_{\mathbb{D}} f(w)\,\mathrm{Re}\Big[\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}(w)\Big)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\Big]\, dA(w).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

También

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle K_{\alpha(t)}, K_{\alpha(t)}\rangle &= \int_{\mathbb{D}} \frac{d}{dt}\Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2\, dA(w) \\
&= 2\int_{\mathbb{D}} \mathrm{Re}\Big[\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}(w)\Big)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\Big]\, dA(w) \\
&= 2\,\mathrm{Re}\,\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}, K_{\alpha(t)}\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\frac{d}{dt}\langle K_{\alpha(t)}, K_{\alpha(t)}\rangle = \frac{d}{dt}(1) = 0$ se tiene que

$$\mathrm{Re}\,\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}, K_{\alpha(t)}\rangle = 0.$$

Usando esta última igualdad y la fórmula

$$\Pi_{\alpha(t)}\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big) = \langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}, K_{\alpha(t)}\rangle K_{\alpha(t)}; \qquad \alpha(t)\in\mathbb{D},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big[\Pi_{\alpha(t)}\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\Big] &= \mathrm{Re}\Big[\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}, K_{\alpha(t)}\rangle\Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2\Big] \\
&= \Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2 Re\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}, K_{\alpha(t)}\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así se reescribe (3.10) como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{B}f(\alpha(t)) &= 2\int_{\mathbb{D}} f(w)\,\mathrm{Re}\left[\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\right]\,dA(w)\\ &= 2\int_{\mathbb{D}} f(w)\,\mathrm{Re}\left[\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\right]\,dA(w).\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}}\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\,dA(w)\\ &= \Big\langle\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big),K_{\alpha(t)}\Big\rangle\\ &= \Big\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle-\Big\langle\Pi_{\alpha(t)}\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big),K_{\alpha(t)}\Big\rangle\\ &= \Big\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle-\Big\langle\Big\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle\\ &= \Big\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle-\Big\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle\Big\langle K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle\\ &= \Big\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle-\Big\langle\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)},K_{\alpha(t)}\Big\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Big|\frac{d}{dt}\mathbf{B}f(\alpha(t))\Big| &= \Big|2\int_{\mathbb{D}}\Big(f(w)-\mathbf{B}f(\alpha(t))\Big)\,\mathrm{Re}\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(w)\overline{K_{\alpha(t)}(w)}\,dA(w)\Big|\\ &\leq \Big|\frac{d}{dt}\mathbf{B}f(\alpha(t))\Big|\leq 2\int_{\mathbb{D}}\Big|f(w)-\mathbf{B}f(\alpha(t))\Big|\Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|\Big|\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)(w)\Big|\,dA(w).\end{aligned}$$

Así por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}&\Big|\Big\langle\Big(f(w)-\mathbf{B}f(\alpha(t))\Big)\Big(K_{\alpha(t)}\Big),\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)\Big\rangle\Big|\\ &\leq \Big\|\Big(f(w)-\mathbf{B}f(\alpha(t))\Big)\Big(K_{\alpha(t)}\Big)\Big\|^{1/2}\Big\|\Big(I-\Pi_{\alpha(t)}\Big)\Big(\frac{d}{dt}K_{\alpha(t)}\Big)\Big\|^{1/2}\end{aligned}$$

y de aquí

$$\begin{aligned}\Big|\frac{d}{dt}\mathbf{B}f(\alpha(t))\Big| &\leq 2\sqrt{2}\frac{|\alpha'(t)|}{(1-|\alpha(t)|^2)}\Big(\int_{\mathbb{D}}\Big|f(w)-\mathbf{B}f(\alpha(t))\Big|^2\Big|K_{\alpha(t)}(w)\Big|^2\,dA(w)\Big)^{1/2}\\ &= 2\sqrt{2}\frac{|\alpha'(t)|}{(1-|\alpha(t)|^2)}.\end{aligned}$$

■

Corolario 3.3.3. *Para $f\in BMO_\partial$ se tiene que*

$$\Big|Bf(z)-Bf(w)\Big|\leq 2\sqrt{2}\|f\|_{BMO}\beta(z,w)$$

para todo $z,w\in\mathbb{D}$, donde

$$\|f\|_{BMO}=\sup\{MO(f)(z):z\in\mathbb{D}\}.$$

Demostración. Sean $z, w \in \mathbb{D}$ fijos y sea $\alpha(t)$ la geodésica de z a w en la métrica de Bergman con $0 \leq t \leq 1$. Por el teorema fundamental del cálculo y el Teorema 3.3.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\Big|\mathbf{B}f(z) - \mathbf{B}f(w)\Big| &= \Big|\int_0^1 \frac{d}{dt}\mathbf{B}f(\alpha(t))\ dt\Big| \\
&\leq \int_0^1 2\sqrt{2}MO(f)(\alpha(t))\frac{ds}{dt}dt \\
&= 2\sqrt{2}\|f\|_{BMO}\int_0^1 \frac{ds}{dt}\ dt \\
&= 2\sqrt{2}\|f\|_{BMO}\beta(z,w).
\end{aligned}$$

■

Apéndice

Teorema 3.3.4 (Fubini)**.** *Sean* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *dos espacios de medida completos y* f *una función integrable en* $X \times Y$*. Entonces*

(i) *Para casi todo* x*, la función* f_x *definida por* $f_x(y) = f(x, y)$ *es una función integrable en* Y*.*

(i') *Para casi todo* y*, la función* f_y *definida por* $f_y(x) = f(x, y)$ *es una función integrable en* X*.*

(ii) $\int_Y f(x, y)d\nu$ *es una función integrable en* X*.*

(ii') $\int_X f(x, y)d\mu$ *es una función integrable en* Y*.*

(iii) $\int_X [\int_Y f d\nu] d\mu = \int_{X\times Y} f d(\nu \times \mu) = \int_Y [\int_X f d\mu] d\nu$

Teorema 3.3.5. *Sea* $\langle f_n \rangle$ *una sucesión de funciones medibles no negativas que convergen c.d. a una función* f *y supóngase que* $f_n \leq f$ *para toda* n*. Entonces*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Teorema 3.3.6 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)**.** *Supóngase que* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones complejas medibles en* X *tales que existe*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

para todo $x \in X$*. Si existe una función* $g \in L_1(\mu)$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1, 2, 3, ...; x \in X),$$

entonces $f \in L_1(u)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Teorema 3.3.7. *Sea $f(z)$ una función holomorfa definida en un conjunto abierto ω y toma valores en un espacio de Banach X con norma $|\cdot|_X$. Entonces cada una de las funciones $\log|f(z)|_x$, $\log^+|f(z)| = \max(\log|f(z)|_x, 0)$ y $|f(z)|_x^p$ con $0 < p < \infty$ es subarmónica en ω.*

Teorema 3.3.8 (Cálculo funcional de Riesz)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad y sea $a \in \mathcal{A}$.*

(a) *El mapeo $f \mapsto f(a)$ de $Hol(a) \to \mathcal{A}$ es un homomorfismo de álgebras.*

(b) *Si $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k z^k$ tiene radio de convergencia mayor a $r(a)$, entonces $f \in Hol(a)$ y $f(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k a^k$.*

(c) *Si $f(z) = 1$, entonces $f(a) = 1 = e$.*

(d) *Si $f(z) = z$ para toda z, entonces $f(a) = a$.*

(e) *Si $f_1, ..., f_n$ son analíticas en G, $\sigma(a) \subset G$ y $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente sobre compactos de G entonces $\|f_n(a) - f(a)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Teorema 3.3.9 (Teorema Espectral)**.** *Si $a \in \mathcal{A}$ y $f \in Hol(a)$ entonces*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Teorema 3.3.10 (Principio del argumento)**.** *Sea f una función meromorfa en G con polos $p_1, p_2, ..., p_m$ y ceros $z_1, z_2, ..., z_n$ contando multiplicidades. Si γ es una curva cerrada rectificable en G con γ homologa a cero y que no pasa a traves de $p_1, p_2, ..., p_m; z_1, z_2, ..., z_n$ entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{n} \eta(\gamma; z_k) - \sum_{j=1}^{m} \eta(\gamma; p_j),$$

donde $\eta(\gamma; a)$ es el índice de γcon respecto al punto a.

Definición 3.3.11. *La función Gamma es definida por la fórmula*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad\qquad \operatorname{Re} z > 0,$$

donde la variable compleja z tiene parte real positiva $\operatorname{Re} z$. La función Gamma se extiende holomorfamente a $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, ...\}$.

Proposición 3.3.12. *La función Gamma satisface las siguientes propiedades*

(a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(b) $\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$.

(c) *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\Gamma(n+1) = n!\ .$$

(a) Si $\operatorname{Re} x > 0$ *y* $\operatorname{Re} x > 0$ *entonces*

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ .$$

Teorema 3.3.13 (De Green)**.** *Supóngase que* Ω *es un dominio en el plano complejo cuya frontera* $\partial\Omega$ *consiste de un número finito de curvas suaves. Si* u *y* v *tienen segunda derivada continua en* $\overline{\Omega}$*, la clausura de* Ω*, entonces*

$$\int_\Omega \big(v\Delta u - u\Delta v\big)\ dA = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\big)\ ds,$$

donde $\partial/\partial n$ *es la derivada normal interior y* ds *es la longitud de arco en* $\partial\Omega$*.*

Lema 3.3.14. *Sea* $g(e^{it}) \in L^1(\mathbb{T})$*, y si* $g(0) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} g(\theta)\ d\theta$ *es su valor medio, entonces*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\ dA(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(e^{it}) - g(0)|^2\ d\theta.$$

Conclusiones

(1) Las funciones en los espacios de Bergman tienen un crecimiento controlado sobre subconjuntos compactos del disco unitario $\mathbb{D}$. Así pues toda función en dichos espacios se puede aproximar por sus dilataciones.

(2) El teorema de estimación integral junto con el lema de Schur se convierten en una herramienta muy útil para la acotación de ciertos operadores integrales. Estas estimaciones permiten estudiar y obtener propiedades la proyección de Bergman ponderada en los espacios $L^p(\mathbb{D}, dA)$ para $1 \leq p < \infty$.

(3) Las funciones analíticas en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ están estrechamente relacionadas con la métrica de Bergman β, pues dichas funciones se pueden caracterizar a partir de dicha métrica. Estás funciones satisfacen una condición de Lipschitz con respecto de la métrica de Bergman.

(4) Los espacios duales para los espacios de Bergman $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ cuando $1 < p < \infty$ resultan ser los espacios $A^q_\alpha(\mathbb{D})$ con $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Para el caso cuando $0 < p \leq 1$ el dual de $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ coincide con el espacio de Bloch $\mathcal{B}$.

(5) Los puntos fijos de la transformada de Berezin son las funciones armónicas. Puesto que la parte real e imaginaria de una función analítica son armónicas entonces la transformada de Berezin de una función analítica coincide con ella misma.

(6) A partir de las medidas de Carleson se puede caracterizar a las espacios de Bergman, es decir, si μ es una medida de Carleson acotada en $\mathbb{D}$ entonces el espacio de Bergman $A^p(\mathbb{D})$ es un subespacio acotado de $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.

(7) Los espacios BMO y VMO pueden ser caracterizados a partir de la tranformada de Berezin. Además la parte analítica de los espacios BMO y VMO coincide con los espacios de Bloch $\mathcal{B}$ y Bloch pequeño $\mathcal{B}_0$ respectivamente.

(8) La métrica Euclideana de la transformada de Berezin de las funciones en los espacios BMO están acotadas por la métrica de Bergman.

(9) El objetivo de este trabajo fue presentar de manera detallada los conceptos básicos de los espacios de Bergman y algunos tópicos sobre estos espacios.

(10) El escrito refleja explícitamente la estrecha relación que hay entre el análisis funcional, la teoría de operadores, la variable compleja y la geometría hiperbólica para soportar la aproximación al estudio de la teoría de los espacios de Bergman presentada en este trabajo.

Perspectivas

(1) Profundizar el estudio de los resultados recientes en la teoría de los espacios de Bergman en una y varias variables complejas.

(2) Redactar en forma detallada resultados relevantes como: A^p_α funciones interiores, divisores contractivos de cero en A^p, el problema extremal, conjuntos de ceros y subespacios invariantes.

(3) Un proyecto inmediato será el estudio de las clases de funciones $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \ g^s(z,a) \ dA_\alpha(z) < \infty,$$

donde $g(z,a) = \ln \frac{1}{|\varphi_z(a)|}$ y $0 < s < \infty$. Esta es una clase ponderado de Bergman y una de las primeras preguntas es estudiar su relación con el espacio de Bergman A^p_α.

(4) Un proyecto de investigación más ambicioso es el estudio de los espacios de Bergman para funciones con valores cuaternionicos. Donde uno de los objetivos sería replicar los resultados ya conocidos en la teoría de los espacios de Bergman en variable compleja.

(5) Difundir este trabajo entre las diversas instituciones de nuestro país para poder fortalecer el estudio de esta rama de las matemáticas.

Bibliografía

[1] Ahern, P., Flores, M. and Rudin, *An Invariant Volume-Mean-Value Property*, J. Funct. Anal. 111 (1993), 380-397.

[2] Békollé, D., Berger, C., Coburn, L. and Zhu, K., *BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains*, J. Funct. Anal. 93 (1990), 310-350.

[3] Bergman, S., *The kernel function and conformal mapping (second revised edition), Matemathical Surveys and Monographs, vol. 5*, American Mathematical Society, Providence, RI 1970.

[4] Conway J. B., *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[5] Duren, P. and Schuster, A., *Bergman Spaces*, AMS, Providence, 2004.

[6] Englis, M., *Functions invariant under the Berezin transform*, J. Funct. Anal. 121 (1994) 233-254.

[7] Garnett, J. B., *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[8] Hedenmalm, H., Korenblum, B., and Zhu, K., *Theory of Bergman Space*, Springer, New York, 2000.

[9] Li, H., *Hankel operators on the Bergman space of multiply-connected domains*, J. Operator Theory 28 (1992), 321-335.

[10] Pommerenke, Ch., *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992.

[11] Ren, G., *Harmonic Bergman spaces with small exponents in the unit ball*, Collectanea Mathematica, Universitat de Barcelona, 2002.

[12] Zhu, K., *Operator Theory in Funtions Spaces* AMS, USA, 2007.

[13] Zhu, K., *VMO, ESV and Toeplitz operators on the Bergman spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1987), 617-646.

[14] Zhu, K., *Bergman and Hardy spaces with small exponents*, Pacific J. Math. 162 (1994), 189-199.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00092
Matrícula: 2111800412

ESPACIOS DE BERGMAN

En México, D.F., se presentaron a las 13:00 horas del día 24 del mes de mayo del año 2013 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ANTONI ADAM WAWRZYÑCZYK WILKIEWICZ
DRA. MARIBEL LOAIZA LEYVA
DR. LINO FELICIANO RESENDIS OCAMPO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: LUIS JAVIER CARMONA LOMELI

LUIS JAVIER CARMONA LOMELI
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES HEREDIA

PRESIDENTE

DR. ANTONI ADAM WAWRZYÑCZYK WILKIEWICZ

VOCAL

DRA. MARIBEL LOAIZA LEYVA

SECRETARIO

DR. LINO FELICIANO RESENDIS OCAMPO