



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**BIFURCACIÓN TIPO HOPF EN
SISTEMAS SUAVES POR PEDAZOS
CONTINUOS EN EL PLANO**

Tesis que presenta:

José Manuel Islas Hernández

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

(Matemáticas Aplicadas e industriales)

Asesores:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández
UAM-I

Dr. Fernando Verduzco González
UNISON

Jurado:

Presidente:

Dr. Fernando Verduzco González
UNISON, Sonora, México.

Secretario:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández
UAM-I, DF, México.

Vocal:

Dr. Raúl Villafuerte Segura
UAEH, Hidalgo, México.

Vocal:



Dr. Mario Gerardo Medina Valdez
UAM-I, DF, México.



Bifurcación tipo Hopf en
Sistemas Suaves por Pedazos
en el Plano.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 26 del mes de octubre del año 2016 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ
- DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ
- DR. RAUL VILLAFUERTE SEGURA
- DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

JOSE MANUEL ISLAS HERNANDEZ
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

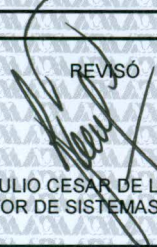
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: JOSE MANUEL ISLAS HERNANDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar


REVISÓ



LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES


Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI



DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE




DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ

VOCAL



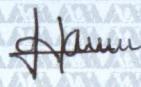
DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ

VOCAL



DR. RAUL VILLAFUERTE SEGURA

SECRETARIO



DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciéndole a mi **MAMÁ**, Aurelia, por toda la fortaleza que ha mostrado para mantener a mis hermanos y a mí por un buen camino. A **Alfredo**, por estar siempre al pendiente de mí (y por **Kelly** y **Miri**). A **Diana** y **Flor**, por toda la alegría que han traído desde que llegaron. A **Erika**, por su apoyo, comprensión, pero sobre todo, su cariño. Citando a mi hermano, a **Genaro** e **Imelda**, por mostrarnos el valor del trabajo duro y el amor incondicional. Al resto de mi **Familia**, por que a pesar de todo siempre están ahí.

También al **Dr. Baltazar** por todo el conocimiento y tiempo que me ha compartido. Al **Dr. Fernando Verduzco**, por sus valiosos consejos, y por hacerme sentir en confianza cuando estuve en Sonora. A los Doctores **Raúl Villafuerte** y **Mario Medina**, por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo y la rapidez con la que lo hicieron.

IV

A Miri, Kelly, Florecita, Diana, Alfredo y mi mamá.
A Erika.

Índice general

Introducción	1
1. Sistemas dinámicos suaves por pedazos	3
1.1. Sistemas suaves por pedazos	3
1.2. Ejemplo en la Mecánica	5
1.3. Puntos fijos	7
1.4. Bifurcación	8
2. Bifurcaciones tipo Hopf en SPCLP	11
2.1. SPCLP	11
2.2. Forma canónica	13
2.3. Bifurcación tipo Hopf	16
2.4. Ejemplo	31
3. Bifurcaciones tipo Hopf en SPCSP	35
3.1. SPCSP	35
3.2. Forma Canónica	37
3.3. Bifurcación tipo Hopf	39
3.4. Ejemplo	48
Conclusiones y Perspectivas	55
Apéndice	56
A. Resultados de Ecuaciones Diferenciales	57
B. Algunos Teoremas Importantes	61
C. Desarrollo Detallado de las Demostraciones	63
D. Sistemas lineales planos y retratos fase	71
Bibliografía	75

Resumen y Objetivos

Resumen

En el siguiente trabajo se considera un sistema suave por pedazos en el plano, el cual está particionado en dos regiones por un variedad de conmutación, específicamente el eje vertical, además de ser continuo en todo el plano; inclusive sobre dicha variedad. Ambas regiones tendrán un comportamiento de espirales, es decir que tienen un foco como punto de equilibrio pero con estabilidad contraria. Se analizará el comportamiento del retrato fase cuando uno de estos focos se acerca a la variedad de conmutación, la cruza de manera transversal y, cuando pasa a la región adyacente, cambia de estabilidad y además se encuentra rodeado por un ciclo límite. Se mostrarán las condiciones necesarias para cuando los sistemas son lineales y cuando sean no lineales, a partir del estudio de las soluciones de dichos sistemas usando mapeos de Poincaré para hallar los ciclos límite.

Objetivo General

Establecer de manera detallada las condiciones necesarias para que en un sistema suave por pedazos continuo en el plano exista una bifurcación tipo Hopf, es decir, una bifurcación donde un punto de equilibrio del sistema cruce la variedad de conmutación y cuando pase a la siguiente región aparezca rodeado por un ciclo límite.

Objetivos específicos

1. Estudiar las propiedades fundamentales de los sistemas suaves por pedazos lineales y no lineales
2. Establecer las consecuencias de exigir continuidad en todo el plano, en especial sobre la variedad de conmutación
3. Hallar formas canónicas para los sistemas estudiados en los cuales podamos encontrar un comportamiento de espirales con diferente estabilidad en las regiones.
4. Analizar la existencia de ciclos límite mediante el estudio de las soluciones de las formas canónicas usando mapeos de Poincaré.

Introducción

Históricamente la principal motivación y objetivo del estudio de los sistemas dinámicos está en el modelado matemático, ya que muchos de los problemas que surgen en las distintas áreas de la ciencia, como la Física, la Química, la Biología, la Economía, entre otras, pueden ser vistos o planteados como la evolución de sistemas en tiempo continuo, la cual, obviamente, es la principal herramienta ofrecida por estos sistemas. Esto ha hecho que la teoría cualitativa, geométrica y numérica de los sistemas dinámicos tenga ya un fuerte desarrollo con bases muy sólidas.

Dentro de estas mismas áreas de aplicación existen muchos fenómenos que no pueden ser explicados o planteados por medio de un sistema clásico de la forma $\dot{x} = F(x)$, donde F es un campo vectorial suave, sino que en tales fenómenos los espacios en los que esté definida la variable x necesitan sufrir una partición donde cada zona resultante de ésta, está gobernada por un distinto campo vectorial, lo cual se puede representar por medio de funciones definidas por pedazos, donde la dinámica puede sufrir cambios abruptos y pueden ser no suaves. Dichas funciones dan lugar a lo que se conoce como *sistemas dinámicos suaves por pedazos*, que son el área de interés de este trabajo. Aunque el estudio de este tema es relativamente nuevo, se cuenta ya con bibliografía como [4] y [21], donde se abordan problemas principalmente en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Más aún en las aplicaciones en las que se ven envueltas estos sistemas es muy común el hecho de que las ecuaciones asociadas contengan parámetros cuyos valores no sean exactos, sino que sólo se tenga un conocimiento aproximado. Por esta razón es importante estudiar el comportamiento de las soluciones y examinar la dependencia de estos parámetros, o equivalentemente, hacer referencia a la teoría de bifurcación. Puede suceder que una ligera variación en algún parámetro, pueda tener un impacto muy significativo sobre el comportamiento de sus soluciones, es decir que se lleve a cabo un cambio en el tipo de topología del sistema cuando sus parámetros pasan a través de un valor de bifurcación. Existen distintas formas en las que se llevan a cabo estos cambios y por ende, distintos tipos de bifurcación. Nuestro trabajo está enfocado en específico en la *Bifurcación de Hopf*, donde se lleva a cabo la aparición o desaparición de un ciclo límite, cuando se cruza algún valor de bifurcación.

El estudio de la bifurcación de Hopf tiene sus orígenes en el trabajo de Poincaré alrededor de 1892 y fue discutido por Andronov en la década de 1930 [17]. Finalmente fue el trabajo de Hopf el que terminó por mostrar la relevancia de esta bifurcación en 1942 (la contribución de Hopf fue la extensión de dos a tres dimensiones). Aunque el término bifurcación *Poincaré-Andronov-Hopf* es más adecuado, se vuelve más común el llamarla bifurcación de Hopf. La importancia de este tipo de bifurcación se puede ver en su aparición en modelos Físicos, Biológicos y Económicos, como lo muestran [9], [8], y [25] respectivamente. Además, aunque este trabajo está basado en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la bifurcación de Hopf también tiene aplicaciones en las Ecuaciones Derivadas Parciales, principalmente en la dinámica de fluidos, como se puede ver en [17]. Esta tesis, está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se presenta un breve resumen acerca de los Sistemas Dinámicos Suaves por Pedazos en el Plano, mencionando las definiciones y los teoremas más relevantes para el desarrollo de nuestro trabajo en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 ya definiendo que las zonas en las que se hizo la partición del plano son lineales además de ser continuas en todo \mathbb{R}^2 , hallamos las características necesarias para hallar una bifurcación tipo Hopf.

De igual manera, en el Capítulo 3, se muestra una bifurcación tipo Hopf, pero ahora definiendo las zonas del plano como no lineales pero manteniendo la continuidad en todo \mathbb{R}^2 .

Este trabajo se basa de manera importante en [7] y [22], donde realizamos un acercamiento a definiciones y resultados ya existentes sobre sistemas suaves por pedazos que se usaron en los trabajos citados arriba. Nos centramos en desarrollar todos los resultados que fueron necesarios para formalizar los teoremas presentados, además de proponer otro tipo de demostraciones a algunos de los presentados, pensando que pueden ser afrontado de una manera más sencilla, haciendo una búsqueda importante de todas las propiedades necesarias, tanto de Análisis como de Ecuaciones Diferenciales que fueron vitales para dejar claro todos los pasos en los resultados presentados aquí.

Capítulo 1

Sistemas dinámicos suaves por pedazos

1.1. Sistemas suaves por pedazos

Para comenzar diremos, de manera intuitiva, que un sistema dinámico suave por pedazos es cualquier sistema dinámico cuyo retrato fase está dividido en distintas regiones, cada una asociada a un diferente campo vectorial suave. Buscando ser más formales comenzamos con la siguiente definición.

Definición 1.1 *Un mapeo suave por pedazos está descrito por un conjunto finito de mapeos*

$$x \mapsto F_i(x, \mu), \quad \text{para } x \in S_i,$$

donde $\bigcup_i S_i = D \subset \mathbb{R}^n$ y cada S_i tiene un interior no vacío. La intersección Σ_{ij} entre la clausura ($\bar{S}_i = S_i \cup \partial S_i$) de conjuntos S_i y S_j , es decir $\Sigma_{ij} = \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$, es una variedad de dimensión \mathbb{R}^{n-1} incluida en las fronteras ∂S_i y ∂S_j , o es el conjunto vacío.

Se pueden ver ejemplos de mapeos suaves por pedazos en la Figura 1.1 .

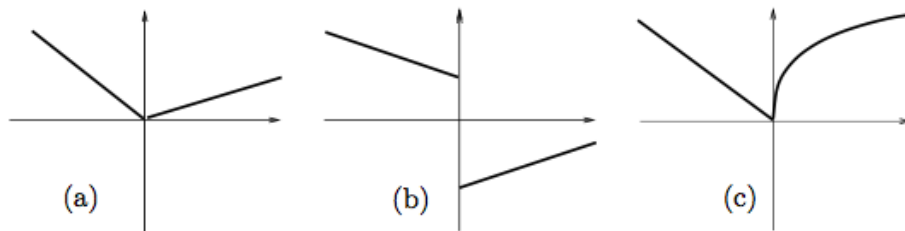


Figura 1.1: Mapeos suaves por pedazos.

En la Figura 1.1(a) podemos ver un mapeo suave por pedazos el cual es lineal y continuo, mientras que 1.1(b) también es lineal pero en este caso no es continuo. Finalmente notemos que en la definición anterior permitimos la posibilidad de que alguno de los mapeos F_i pueda ser no suave sobre la frontera Σ_{ij} . Por ejemplo el mapeo 1.1(c) en el cual la primera derivada de $F_2(x)$ tiende a ∞ cuando $x \rightarrow 0$. En cada caso

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0\} \\ S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\} \\ \Sigma_{12} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}. \end{aligned}$$

Definición 1.2 *Un sistema suave por pedazos está descrito por un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias,*

$$\dot{x} = F_i(x, \mu), \quad \text{para } x \in S_i, \quad (1.1)$$

donde $\bigcup_i S_i = D \subset \mathbb{R}^n$ y cada S_i tiene un interior no vacío. La intersección $\Sigma_{ij} = \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$, es una variedad de dimensión \mathbb{R}^{n-1} incluida en las fronteras ∂S_i y ∂S_j , o es el conjunto vacío. Cada campo vectorial F_i es suave tanto en el estado x como en el parámetro μ , y define un flujo $\varphi_i(x, t)$ en cualquier conjunto abierto $U \subset S_i$. En particular cada flujo φ_i está bien definido en ambos lados de la frontera ∂S_j .

A la frontera Σ_{ij} entre dos regiones S_i y S_j , se le llama variedad de conmutación, las cuales se considerarán también suaves. Los sistemas suaves por pedazos se pueden clasificar en dos tipos, continuos o discontinuos.

Definición 1.3 *Se dice que el sistema suave por pedazos (1.1) es continuo si $F_i(x) = F_j(x)$ en cualquier punto sobre la frontera Σ_{ij} que separa dos regiones adyacentes S_i y S_j . En contraste, un sistema suave por pedazos es discontinuo, o también llamado sistema Filippov, si dos diferentes vectores \dot{x} , llamémoslos $F_i(x)$ y $F_j(x)$, pueden estar asociados a un mismo punto $x \in \Sigma_{ij}$.*

En los sistemas continuos el vector \dot{x} está definido de manera única en cualquier punto del espacio de estados y las órbitas en la región S_i se aproximan de manera transversal a la frontera Σ_{ij} , al coincidir con ésta, y dado que $F_i(x) = F_j(x)$, la cruzan de manera diferenciable y entran a la región adyacente S_j . En los sistemas Filippov como $F_i(x) \neq F_j(x)$ lo que podemos analizar son el sentido de estos vectores, si tienen el mismo signo, la órbita cruza la frontera pero de manera no diferenciable y tiene, en ese punto, una discontinuidad en su vector tangente. De lo contrario, si las componentes transversales de $F_i(x)$ y $F_j(x)$ son de sentidos opuestos, es decir que los dos campos vectoriales están dirección contraria, las órbitas del sistema en ambas regiones se acercan a la frontera pero al no poder cruzarla, el estado del sistema es forzado a permanecer sobre la frontera y deslizarse sobre ella. Para entender más sobre los sistemas Filippov se pueden consultar [5] y [4].

1.2. Ejemplo en la Mecánica

Un ejemplo de la utilidad de los sistemas suaves por pedazos, lo podemos encontrar en la Mecánica. Algunos sistemas mecánicos en los cuales los componentes móviles hacen contacto intermitente entre sí a menudo dan lugar a ecuaciones de movimiento que contienen términos lineales por pedazos. Consideremos el sistema que se muestra en la Figura 1.2.

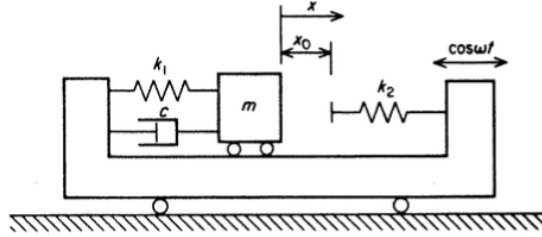


Figura 1.2: Sistema mecánico.

Una masa m está unida a un resorte con elasticidad k_1 y a un amortiguador con factor de amortiguamiento c . Cuando el desplazamiento x , excede cierto valor x_0 , un segundo resorte k_2 , hace contacto con m . Sin pérdida de generalización se puede asumir que $x_0 \geq 0$. Los dos resortes dan lugar a una fuerza de recuperación la cual es lineal por pedazos. Cuando al sistema se le ejerce una fuerza armónica del exterior, la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + H(x) = \beta\cos(\omega t), \quad (1.2)$$

donde

$$H(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < x_0 \\ \tilde{\omega}^2 x + (1 - \tilde{\omega}^2)x_0, & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

$\tilde{\omega}^2$ es el radio de elasticidad $\frac{k_1+k_2}{k_1}$, α es coeficiente de amortiguamiento, el cual asumiremos que es menor a 1, β es la fuerza de amplitud, y ω la fuerza de frecuencia. Los puntos significan derivadas con respecto al tiempo. Las dos ecuaciones quedarían, de forma explícita,

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = \beta\cos(\omega t) & \text{si } x < x_0 \\ \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \tilde{\omega}^2 x + (1 - \tilde{\omega}^2)x_0 = \beta\cos(\omega t), & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

Si hacemos $\alpha = \beta = 0$, $x_0 = 1$ y $\tilde{\omega}^2 = 2$, además de transformarlo en un sistema de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \text{si } x < 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

y su retrato fase se puede ver la Figura 1.3.

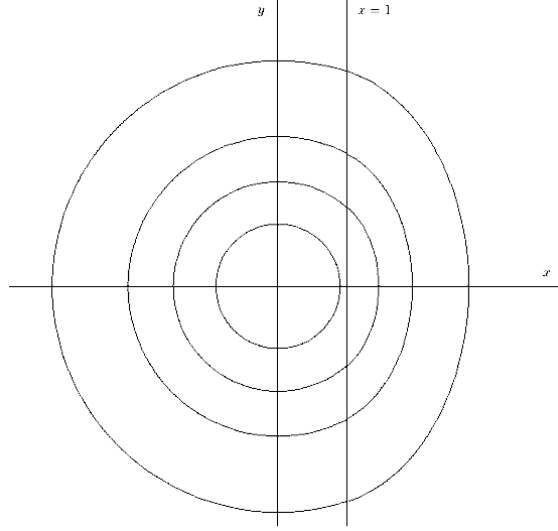


Figura 1.3: Retrato fase del Sistema (1.3).

En este ejemplo podemos notar que el plano fase está dividido en dos regiones, $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x < 1\}$ y $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 1\}$, por una variedad de conmutación $\Sigma_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x = 1\}$. En ambas regiones tenemos asociados campos vectoriales lineales, lo que lo hace que el sistema sea suave en sus respectivas regiones, pero si analizamos la continuidad en la variedad de conmutación,

calculamos $F_L \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}$ y $F_R \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} F_L \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -1 \end{bmatrix} \\ F_R \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

es decir $F_L \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = F_R \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}$ y por la definición 1.3 el sistema es continuo también en la variedad de conmutación. Además en ambas regiones tenemos un comportamiento de centros ya que los puntos de equilibrio de los sistemas de las regiones izquierda y derecha son $(0, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 0)$, con eigenvalores $\pm i$ y $\pm\sqrt{2}i$

respectivamente, aunque el único punto de equilibrio visible en el retrato fase, es el de la región de la izquierda. En seguida hablaremos de este detalle.

1.3. Puntos fijos

Como ya se mencionó anteriormente, el desarrollo de este trabajo está enfocado a los sistemas suaves por pedazos en el plano, el cual estará dividido en dos regiones por una variedad de conmutación, la cual será el eje y , es decir

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0\} \\ S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\} \\ \Sigma_{12} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}. \end{aligned}$$

Tales sistemas los podemos escribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} F_L(x, y) & \text{si } x < 0 \\ F_R(x, y) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} . \quad (1.4)$$

$F_L(x, y)$ y $F_R(x, y)$ representan los campos vectoriales de las regiones que están a la izquierda (S_1) y a la derecha (S_2) del eje y , respectivamente. Además de que requeriremos que dichos sistemas sean continuos, es decir que

$$F_L(x, y) = F_R(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Sigma_{12}.$$

Es bien conocido que para conocer el comportamiento de los sistemas de ecuaciones diferenciales se debe hacer un análisis de los puntos de equilibrio, es decir los puntos (x^*, y^*) tales que $F(x^*, y^*) = 0$. Debido a la forma en que se definió el sistema (1.4), pueden surgir distintos casos, a la hora de analizar estos. Por ejemplo que el punto de equilibrio, (x^*, y^*) , del sistema de alguna de las regiones, derecha o izquierda, pertenezca a la otra región. Para esto damos las siguientes definiciones.

Definición 1.4 Diremos que $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio del sistema (1.4) en S_1 si $F_L(x^*, y^*) = 0$ y $(x^*, y^*) \in S_1$. Similarmente, (x^*, y^*) es un equilibrio en S_2 si $F_R(x^*, y^*) = 0$ y $(x^*, y^*) \in S_2$. Diremos que (x^*, y^*) es un equilibrio frontera si $(x^*, y^*) \in \Sigma_{12}$, es decir el eje y .

Definición 1.5 Diremos que $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio virtual del sistema (1.4) en S_1 si $F_L(x^*, y^*) = 0$ y $(x^*, y^*) \in S_2$. Similarmente, (x^*, y^*) es un equilibrio virtual en S_2 si $F_R(x^*, y^*) = 0$ y $(x^*, y^*) \in S_1$.

Por ejemplo, en el sistema (1.3), el sistema de la región S_1 tiene un punto de equilibrio en el origen ya que $(0, 0) \in S_1$, en cambio el sistema S_2 tiene un punto de equilibrio virtual en $(\frac{1}{2}, 0)$ ya que recordemos que para este ejemplo $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1\}$ por lo que $(\frac{1}{2}, 0) \notin S_2$.

1.4. Bifurcación

Recordemos que en los sistemas dinámicos comunes se lleva a cabo un fenómeno llamado bifurcación, que son distintos cambios en la estructura cualitativa del retrato fase cuando es variado algún parámetro del sistema y éste toma un valor que provoca dichos cambios, conocido como valor de bifurcación. Los sistemas suaves por pedazos, pueden exhibir la mayoría de estas bifurcaciones, siempre que el valor de bifurcación esté lo suficientemente lejos de las variedades de conmutación. Además de estos, los sistemas suaves por pedazos también pueden llevar a cabo algunos fenómenos de bifurcaciones propios de ellos, ya que en estos sistemas, la interacción entre las regiones donde los campos son suaves y las variedades de conmutación producen otro tipo de bifurcaciones que no se encuentran en los sistemas comunes.

Definición 1.6 *Una bifurcación que resulta de la colisión de un punto de equilibrio con una variedad de conmutación en un sistema suave por pedazos, continuo, es conocida como una bifurcación discontinua.*

Simpson, en [21], presenta una clasificación completa de bifurcaciones discontinuas que se presentan en sistemas planos, basándose en el número y la naturaleza de conjuntos invariantes que ocurren en ambas regiones del sistema. Las situaciones que se mencionan son

- *Bifurcación silla-nodo discontinua.* Está es una bifurcación análoga a la bifurcación silla-nodo en sistemas suaves, es decir que dos puntos de equilibrio coexisten hasta que colisionan juntos en la variedad de conmutación y desaparecen.
- *Bifurcación Hopf discontinua.* En seguida hablaremos de ella al ser la bifurcación de interés.
- *Bifurcación silla-nodo-Hopf discontinua.* Es una bifurcación de cruce múltiple (es decir, varios puntos de equilibrio colisionan con la variedad de conmutación) y exhibe un comportamiento de silla-nodo y Hopf discontinuas. y se da con la colisión de una silla y un ciclo límite que desaparecen al colisionar con la variedad de conmutación.
- *Bifurcación de cambio de estabilidad.* También es una bifurcación de cruce múltiple pero simplemente hay un cambio en la estabilidad de los puntos de equilibrio.

En este trabajo estamos interesados en la Bifurcación Hopf discontinua que surja del sistema (1.4). Dicha bifurcación es análoga a la bifurcación de Hopf que se encuentra en sistemas suaves, es decir, se tiene un foco en una de las regiones en las que está dividido el plano, conforme el parámetro varía dicho foco se acerca a la variedad de conmutación y coinciden en el valor de bifurcación, cuando cruza a la otra región el foco cambia de estabilidad y aparece rodeado de un ciclo límite el cual tiene estabilidad contraria.

En el Capítulo 2, trabajamos con un sistema de la forma (1.4), donde, además, los campos $F_L(x, y)$ y $F_R(x, y)$ son lineales. Estos sistemas los llamaremos Sistemas Planos, Continuos, Lineales por Pedazos (**SPCLP**). Mientras que en el Capítulo 3, trabajaremos de igual manera con el sistema (1.4), pero haciendo una generalización para $F_L(x, y)$ y $F_R(x, y)$, donde lo único que pediremos es que sean continuos. Estos sistemas los llamaremos Sistemas Planos Continuos, Suaves por Pedazos (**SPCSP**).

Capítulo 2

Bifurcaciones tipo Hopf en SPCLP

2.1. SPCLP

Se mencionó que en este capítulo trabajaremos con SPCLP. Es decir que tomaremos un sistema del tipo (1.4), un sistema suave por pedazos en el plano dividido en dos zonas por el eje y , pero los campos vectoriales asociados a cada una de las zonas están definidos de manera lineal. Esto nos permite escribir el sistema de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} A_L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c_L, & \text{si } x \leq 0 \\ A_R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c_R, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde

$$A_L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \quad A_R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

y c_L, c_R son constantes que pertenecen a \mathbb{R}^2 , y el punto denota derivada con respecto a τ . Además podemos hacer la siguiente asociación para buscar la continuidad.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \begin{cases} F_L(x, y) = A_L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c_L, & \text{si } x \leq 0 \\ F_R(x, y) = A_R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c_R, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} F_L(x, y) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{L1} \\ c_{L2} \end{bmatrix}, & \text{si } x \leq 0 \\ F_R(x, y) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{R1} \\ c_{R2} \end{bmatrix}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Como se mencionó en la definición (1.3) para que $F(x, y)$ sea continuo en la frontera Σ_{12} se debe cumplir que $F_L(x, y) = F_R(x, y)$ con $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{L1} \\ c_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{R1} \\ c_{R2} \end{bmatrix} \\
&\qquad \qquad \qquad \begin{bmatrix} l_{12} \\ l_{22} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_{L1} \\ c_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_{R1} \\ c_{R2} \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} l_{12} - r_{12} \\ l_{22} - r_{22} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_{L1} - c_{R1} \\ c_{L2} - c_{R2} \end{bmatrix} = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Si $y = 0$,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_{L1} - c_{R1} \\ c_{L2} - c_{R2} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_{L1} - c_{R1} = 0 \\ c_{L2} - c_{R2} = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_{L1} = c_{R1} \\ c_{L2} = c_{R2} \end{matrix}$$

Lo que nos deja que $\begin{bmatrix} l_{12} - r_{12} \\ l_{22} - r_{22} \end{bmatrix} y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} l_{12} - r_{12} \\ l_{22} - r_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} l_{12} - r_{12} = 0 \\ l_{22} - r_{22} = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} l_{12} = r_{12} \\ l_{22} = r_{22} \end{matrix}$$

Por lo tanto $c_L = c_R$ y las matrices A_L, A_R tienen la misma segunda columna, es decir

$$A_L = \begin{bmatrix} l_{11} & a_{21} \\ l_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad y \quad A_R = \begin{bmatrix} r_{11} & a_{21} \\ r_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Entonces, nuestro sistema queda como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} l_{11} & a_{21} \\ l_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{bmatrix} r_{11} & a_{21} \\ r_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2. Forma canónica

Este tipo de sistemas son los que estudiaremos en este capítulo, donde haremos un análisis cualitativo de ellos, para lo cual aplicaremos la teoría cualitativa de Ecuaciones Diferenciales en (2.1). Especialmente estamos interesados en las bifurcaciones que den lugar a ciclos límite de dicho sistema. Definamos los parámetros $t_L = \text{traza}(A_L)$ y $t_R = \text{traza}(A_R)$ y denotamos por $\text{int}(\cdot)$ a la región interior de una curva de Jordan cerrada en el plano, entonces obtenemos un primer resultado para órbitas periódicas.

Proposición 2.1 *Si Γ es una órbita cerrada del sistema (2.1), entonces*

$$\iint_{\text{int}_L(\Gamma)} t_L dx_1 dx_2 + \iint_{\text{int}_R(\Gamma)} t_R dx_1 dx_2 = t_L \cdot S_L + t_R \cdot S_R = 0,$$

donde $\text{int}_L(\Gamma) = \text{int}(\Gamma) \cap \{x_1 < 0\}$, $\text{int}_R(\Gamma) = \text{int}(\Gamma) \cap \{x_1 > 0\}$,
 $S_L = \text{area}(\text{int}_L(\Gamma))$, $S_R = \text{area}(\text{int}_R(\Gamma))$.

La demostración de este resultado se puede ver en ([21], pág 35).

Con la Proposición anterior se puede establecer un resultado acerca de las condiciones necesarias para la existencia de órbitas cerradas aisladas, es decir ciclos límite.

Proposición 2.2 *Si Γ es un ciclo límite del sistema (2.1), entonces Γ vive en las dos zonas y se tiene que $t_L \cdot t_R < 0$ y $a_{12} \neq 0$.*

Demostración:

Como el sistema (2.1) se dividió en dos zonas en las cuales es lineal y los sistemas lineales no pueden tener ciclos límite, entonces Γ vive en ambas zonas. Debido a esto $S_L > 0, S_R > 0$.

Si $t_L \cdot t_R > 0$ (mismo signo) entonces $t_L S_L + t_R S_R \neq 0$, por la Proposición 1, el sistema no tendría órbitas cerradas. Si alguna de las trazas es cero, para que se cumpla $t_L \cdot S_L + t_R \cdot S_R = 0$, la otra también debe serlo, lo que nos lleva a un sistema conservativo (Proposición C.1), el cual no puede tener ciclos límite (Proposición A.3), obteniendo una contradicción. Por lo tanto $t_L \cdot t_R < 0$.

Por otra parte, sabemos que toda órbita periódica en un campo vectorial plano y continuo, debe contener al menos un punto de equilibrio en su interior (Teorema

A.1). Entonces, si $a_{12} = 0$, el sistema (2.1) es desacoplado para x_1 , lo cual nos dice que el punto de equilibrio tiene una línea vertical asociada y esto se opone a la existencia de una órbita periódica (Proposición A.4), por lo tanto $a_{12} \neq 0$. ■

Ahora damos una forma canónica a la cual todos los sistemas SPCLP de este capítulo, capaces de tener ciclos límite pueden ser reducidos.

Proposición 2.3 *Si un sistema SPCLP tiene un ciclo límite, entonces el sistema puede transformarse a la siguiente forma canónica*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - y \\ \dot{y} &= x - by - \mu, \end{aligned} \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} \eta_L x, & \text{si } x \leq 0 \\ \eta_R x, & \text{si } x \geq 0; \end{cases} \quad (2.2)$$

y el punto representa la derivada con respecto a una nueva variable s .

Demostración:

De la Proposición 2, podemos asumir que $t_L \neq t_R$ y $a_{12} \neq 0$. Empecemos definiendo las variables $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Ahora hacemos en (2.1) un cambio de variables de la forma

$$w = Pz - w_0, \quad \text{con} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & -a_{12} \end{bmatrix}, \quad y \quad w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix},$$

y entonces

$$\dot{w} = P\dot{z}, \quad y \quad z = P^{-1}(w + w_0).$$

De lo anterior si hacemos $z = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, tenemos que

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{12}y - c_1 \end{bmatrix},$$

lo que nos dice que w asocia al eje vertical consigo mismo, por lo tanto se mantiene la frontera del nuevo sistema por pedazos. Ahora, si $x \leq 0$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= P\dot{z} = P(A_L z + c) = PA_L[P^{-1}(w + w_0)] + Pc \\ &= (PA_L P^{-1})w + P(A_L P^{-1}w_0 + c) \\ &= \bar{A}_L w + \bar{c}_1. \end{aligned}$$

Análogamente, si $x \geq 0$

$$\dot{w} = \bar{A}_R w + \bar{c}_2, \quad \text{con} \quad \bar{A}_R = PA_R P^{-1}, \quad y \quad \bar{c}_2 = P(A_R P^{-1}w_0 + c)$$

Al realizar los cálculos, tenemos que

$$\bar{A}_L = \begin{bmatrix} l_{11} + \alpha & a_{12} \\ \alpha l_{11} - a_{12} l_{21} & a_{22} - \alpha \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_R = \begin{bmatrix} r_{11} + \alpha & a_{12} \\ \alpha r_{11} - a_{12} r_{21} & a_{22} - \alpha \end{bmatrix}$$

$$y \quad \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22} c_1 - a_{12} c_2 \end{bmatrix}.$$

Lo siguiente que haremos es buscar el valor de α que haga que la posición {12} de las matrices \bar{A}_L y \bar{A}_R sean iguales, entonces

$$\begin{aligned} \alpha l_{11} - a_{12} l_{12} &= \alpha r_{11} - a_{12} r_{12} \\ \alpha(l_{11} - r_{11}) &= (l_{12} - r_{12})a_{12} \\ \alpha &= \frac{l_{12} - r_{12}}{l_{11} - r_{11}} a_{12}. \end{aligned}$$

Si llamamos $\bar{\alpha}$ al valor anterior y hacemos $m_L = l_{11} + \bar{\alpha}$, $m_R = r_{11} + \bar{\alpha}$ y $n = a_{22} - \bar{\alpha}$, obtenemos el sistema

$$\dot{w} = \begin{cases} \begin{bmatrix} m_L & -1 \\ \bar{\alpha} & n \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 \end{bmatrix} & \text{si } u \leq 0 \\ \begin{bmatrix} m_L & -1 \\ \bar{\alpha} & n \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 \end{bmatrix} & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

Si calculamos los valores propios del sistema anterior, en ambas regiones (con $K = \{L, R\}$), tenemos que

$$\begin{vmatrix} m_k - \lambda & -1 \\ \bar{\alpha} & n - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (m_k + n)\lambda + (m_k n + \bar{\alpha}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m_k + n \pm \sqrt{(m_k + n)^2 - 4(m_k n + \bar{\alpha})}}{2} = \frac{m_k + n \pm \sqrt{(m_k - n)^2 - 4\bar{\alpha}}}{2},$$

con lo que podemos darnos cuenta que si $\bar{\alpha} \leq 0$ los eigenvalores son reales y por lo tanto no podría tener órbitas periódicas. Así podemos asumir que $\bar{\alpha} > 0$. Finalmente, si reparametrizamos con

$$\tilde{u} = \sqrt{\bar{\alpha}}u, \quad \tilde{v} = v, \quad s = \sqrt{\bar{\alpha}}\tau,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{du(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}}} \frac{d\tilde{u}(s)}{ds} \frac{ds(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}}} \dot{\tilde{u}} \sqrt{\bar{\alpha}} = \dot{\tilde{u}} \\ \dot{v} &= \frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{d\tilde{v}(s)}{ds} \frac{ds(\tau)}{d\tau} = \sqrt{\bar{\alpha}} \dot{\tilde{v}}. \end{aligned}$$

Entonces llegamos a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \sqrt{\tilde{\alpha}} \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_k & -1 \\ \tilde{\alpha} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{u}}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \sqrt{\tilde{\alpha}} \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{u}}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} m_k - \tilde{v} \\ \tilde{\alpha} \frac{\tilde{u}}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} + n \tilde{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{m_k}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} \tilde{u} - \tilde{v} \\ \tilde{u} + \frac{n}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} \tilde{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_0}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por último hagamos $\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\frac{m_k}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} = \eta_k$ (con $k = \{L, R\}$), $\frac{n}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} = -b$ y $\frac{c_0}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} = -\mu$, para obtener

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \eta_L x - y \\ x - by \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu \end{bmatrix} & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{bmatrix} \eta_R x - y \\ x - by \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu \end{bmatrix} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

el cual podemos expresar como

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) - y \\
\dot{y} &= x - by - \mu, \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} \eta_L x, & \text{si } x \leq 0 \\ \eta_R x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3. Bifurcación tipo Hopf

Como lo mencionamos anteriormente, estamos interesados en estudiar las bifurcaciones tipo Hopf del sistema (1.4), cuando F_L y F_R son lineales. Además encontramos la forma canónica (2.2) para cuando aparezca un ciclo límite. Lo que haremos a continuación es presentar la bifurcación tipo Hopf jugando con la aparición de tal ciclo límite. Para esto, comencemos introduciendo los parámetros de la traza y el determinante en cada región,

$$\begin{aligned}
t_k &= \eta_k - b, \\
d_k &= 1 - b\eta_k,
\end{aligned}$$

donde $k = L, R$, representando derecha e izquierda respectivamente. Asumiremos que $d_L, d_R > 0$, lo cual implica que cada región del sistema (2.2) tiene sólo un punto de equilibrio. Además nos limitaremos al caso donde

$$D_k = d_k - \frac{t_k^2}{4} > 0, \quad \text{para } k = L, R.$$

Para ver las consecuencias de lo anterior buscamos los puntos críticos de cada una de las regiones, entonces

$$\begin{aligned} \begin{cases} \eta_k x - y = 0 \\ x - by = \mu \end{cases} &\Rightarrow y = \eta_k x \Rightarrow x - b\eta_k x = \mu \Rightarrow x(1 - b\eta_k) = \mu \\ &\Rightarrow x = \frac{\mu}{1 - b\eta_k} \Rightarrow x = \frac{\mu}{d_k}, \quad y = \eta_k \frac{\mu}{d_k}. \end{aligned}$$

El hecho de que el punto crítico esté dado por $(\frac{\mu}{d_k}, \eta_k \frac{\mu}{d_k})$ es de mucha importancia, ya que nos muestra que éste depende totalmente del valor de μ . Más aún podemos notar que en el plano fase sólo se podrá ver un punto de equilibrio, esto debido a que cuando $\mu < 0$ y como $d_k > 0$ los puntos de equilibrio de ambas regiones estarán del lado izquierdo, por lo que el equilibrio de la región izquierda se podrá ver, pero el de la región derecha será virtual. De manera similar si $\mu > 0$ los puntos de equilibrio estarán en la región derecha y por lo tanto el de la región izquierda será virtual. Además estos puntos de equilibrio coincidirán en el origen cuando $\mu = 0$. Haciendo el cambio de variables de la forma

$$\begin{aligned} x &= u + \frac{\mu}{d_k} \\ y &= v + \eta_k \frac{\mu}{d_k} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{u} \\ \dot{y} &= \dot{v}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{u} = \eta_k(u + \frac{\mu}{d_k}) - (v + \eta_k \frac{\mu}{d_k}) \\ \dot{v} = u + \frac{\mu}{d_k} - b(v + \eta_k \frac{\mu}{d_k}) - \mu \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \eta_k u + \eta_k \frac{\mu}{d_k} - v - \eta_k \frac{\mu}{d_k} \\ \dot{v} = u + \frac{\mu}{d_k} - bv - b\eta_k \frac{\mu}{d_k} - \mu \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \eta_k u - v \\ \dot{v} = u - bv + \frac{\mu}{d_k}(1 - b\eta_k) - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \eta_k u - v \\ \dot{v} = u - bv, \end{cases} \end{aligned}$$

el cual es un sistema lineal homogéneo con punto de equilibrio $(0, 0)$. Buscando sus eigenvalores obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \eta_k - \lambda & -1 \\ 1 & -b - \lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 + (b - \eta_k)\lambda + (1 - b\eta_k) = 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{(\eta_k - b) \pm \sqrt{(b - \eta_k)^2 - 4(1 - b\eta_k)}}{2} = \frac{t_k \pm \sqrt{-4[d_k - \frac{t_k^2}{4}]}}{2}, \end{aligned}$$

y dada la restricción $D_k = d_k - \frac{t_k^2}{4} > 0$,

$$\lambda = \frac{t_k \pm 2i\sqrt{d_k - \frac{t_k^2}{4}}}{2} = \frac{t_k}{2} \pm i\sqrt{D_k}.$$

Finalmente, si llamamos $w_k = \sqrt{D_k}$, los valores propios quedan de la forma

$$\lambda = \frac{t_k}{2} \pm iw_k,$$

que significa que tenemos una dinámica de foco en ambas regiones. Trabajamos algunos resultados con este caso asociados a la aparición de un ciclo límite y al cambio de estabilidad del punto de equilibrio. Ya teniendo los valores propios, calculamos la matriz exponencial e^{As} para hallar la solución del sistema. Usamos la ecuación asociada del sistema

$$X(s) = e^{s \frac{t_k}{2}} [c_1 \cos(w_k s) + c_2 \text{sen}(w_k s)].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{X}(s) &= e^{s \frac{t_k}{2}} [-c_1 w_k \text{sen}(w_k s) + c_2 w_k \cos(w_k s)] + \frac{t_k}{2} e^{s \frac{t_k}{2}} [c_1 \cos(w_k s) + c_2 \text{sen}(w_k s)] \\ \dot{X}(s) &= e^{s \frac{t_k}{2}} [(c_2 w_k + \frac{t_k}{2} c_1) \cos(w_k s) + (-c_1 w_k + \frac{t_k}{2} c_2) \text{sen}(w_k s)]. \end{aligned}$$

Dividimos este resultado en dos casos. Caso I : $X(0) = 1$, $\dot{X}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(0) = c_1 = 1, \quad \dot{X}(0) = c_2 w_k + \frac{t_k}{2} = 0 &\Rightarrow c_2 = -\frac{t_k}{2w_k} \\ \Rightarrow X(s) = e^{s \frac{t_k}{2}} [\cos(w_k s) - \frac{t_k}{2w_k} \text{sen}(w_k s)]. \end{aligned}$$

Caso II : $X(0) = 0$, $\dot{X}(0) = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(0) = c_1 = 0, \quad \dot{X}(0) = c_2 w_k + \frac{t_k}{2} c_1 = 1, &\Rightarrow c_2 = \frac{1}{w_k} \\ \Rightarrow X(s) = \frac{e^{s \frac{t_k}{2}}}{w_k} \text{sen}(w_k s). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} e^{As} &= e^{s \frac{t_k}{2}} [\cos(w_k s) - \frac{t_k}{2w_k} \text{sen}(w_k s)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{s \frac{t_k}{2}}}{w_k} \text{sen}(w_k s) \begin{pmatrix} \eta_k & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \\ &= e^{s \frac{t_k}{2}} \begin{pmatrix} \cos(w_k s) + \frac{\eta_k + b}{2w_k} \text{sen}(w_k s) & \frac{\text{sen}(w_k s)}{w_k} \\ \frac{\text{sen}(w_k s)}{w_k} & \cos(w_k s) - \frac{\eta_k + b}{2w_k} \text{sen}(w_k s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y la solución está dada por $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{As} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= e^{s \frac{t_k}{2}} M(s) \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \\ \text{con } M(s) &= \begin{pmatrix} \cos(w_k s) + \frac{\eta_k + b}{2w_k} \text{sen}(w_k s) & \frac{\text{sen}(w_k s)}{w_k} \\ \frac{\text{sen}(w_k s)}{w_k} & \cos(w_k s) - \frac{\eta_k + b}{2w_k} \text{sen}(w_k s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por último regresamos a las variables originales para obtener la solución del sistema (2.2)

$$\begin{pmatrix} x - \frac{\mu}{d_k} \\ y - \eta_k \frac{\mu}{d_k} \end{pmatrix} = e^{s \frac{t_k}{2}} M(s) \begin{pmatrix} x(0) - \frac{\mu}{d_k} \\ y(0) - \eta_k \frac{\mu}{d_k} \end{pmatrix}$$

$$\text{con } M(s) = \begin{pmatrix} \cos(w_k s) + \frac{\eta_k + b}{2w_k} \text{sen}(w_k s) & \frac{\text{sen}(w_k s)}{w_k} \\ \frac{\text{sen}(w_k s)}{w_k} & \cos(w_k s) - \frac{\eta_k + b}{2w_k} \text{sen}(w_k s) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Ahora, introducimos dos parámetros que serán muy importantes para el siguiente análisis,

$$\gamma_L = \frac{\eta_L - b}{2w_L} = \frac{t_L}{2w_L}$$

$$\gamma_R = \frac{\eta_R - b}{2w_R} = \frac{t_R}{2w_R}$$

Notemos que si $\mu = 0$ el punto de equilibrio del sistema (2.2) está en el origen, es decir en la frontera, entre las dos zonas lineales. Su topología está determinada por la siguiente proposición.

Teorema 2.1 *Considerando el sistema (2.2) y bajo las suposiciones de que $D_L, D_R > 0$ y $\mu = 0$, se cumple lo siguiente.*

- (a) Si $\gamma_L + \gamma_R > 0$, el origen es un foco no lineal inestable.
- (b) Si $\gamma_L + \gamma_R = 0$, el origen es un centro no lineal.
- (c) Si $\gamma_L + \gamma_R < 0$, el origen es un foco no lineal estable.

Nota: Estamos llamando no lineal a los focos y centros mencionados sólo para aclarar el punto de que las órbitas del sistema son consecuencias de la conexión de las órbitas de ambas regiones en la variedad de conmutación.

Demostración:

Lo haremos calculando un mapeo de Poincaré con la línea $S_+ = \{x = 0, y \geq 0\}$ como la sección perpendicular a la órbita cerrada. Dicho mapeo P se construye mediante la composición del mapeo P_L , el cual aplica puntos de S_+ a puntos de $S_- = \{x = 0, y \leq 0\}$, usando las órbitas de la región $x < 0$, ya que podemos notar que cuando tomamos un punto de S_+ el flujo va hacia la izquierda ya que en (2.2) $\dot{x} = -y < 0$, y el mapeo P_R , el cual aplica puntos de S_- a puntos de S_+ , usando las órbitas de la región $x > 0$, ya que tomando un punto de S_- podemos notar en (2.2) que $\dot{x} = -y > 0$ es decir el flujo va hacia la derecha, y el mapeo entonces es de la forma

$$P(p) = P_R(P_L(p)) \quad \text{ó} \quad \text{si } q = P_L(p) \quad \Rightarrow \quad P(p) = P_R(q),$$

Ahora tomemos y hagamos $a = 0, x(0) = 0, y(0) = p(p > 0)$ y trabajemos la zona izquierda, siendo $s_L = \frac{\pi}{w_L}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\pi \frac{t_L}{2w_L}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -pe^{\gamma_L \pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s_L) \\ y(s_L) \end{pmatrix}$$

y entonces definimos

$$P_L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{con} \quad P_L(p) = q = -y(s_L) = pe^{\gamma_L \pi}$$

De manera análoga, haciendo $a = 0, x(0) = 0, y(0) = -q (q > 0)$ y trabajando la zona de la derecha siendo $s_R = \frac{\pi}{w_R}$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\pi \frac{t_R}{2w_R}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ qe^{\gamma_R \pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s_R) \\ y(s_R) \end{pmatrix}$$

y definimos

$$P_R : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{con} \quad P_R(p) = r = y(s_R) = qe^{\gamma_R \pi}$$

Por lo tanto, el mapeo P queda definido como

$$P(p) = P_R(P_L(p)) = P_R(pe^{\gamma_L \pi}) = pe^{\gamma_L \pi} e^{\gamma_R \pi} = pe^{(\gamma_L + \gamma_R) \pi}$$

De donde es fácil ver que si $\gamma_L + \gamma_R = 0$ entonces $e^{(\gamma_L + \gamma_R) \pi} = 1$ y $P(p) = p$, lo que significa que tenemos órbitas cerradas y, por lo tanto, el origen es un centro no lineal. Si $\gamma_L + \gamma_R > 0$ entonces $e^{(\gamma_L + \gamma_R) \pi} > 1$ y entonces $P(p) > p$, lo que nos dice que el mapeo se va alejando del origen y este último es un foco no lineal inestable. Finalmente, si $\gamma_L + \gamma_R < 0$ entonces $e^{(\gamma_L + \gamma_R) \pi} < 1$ y $P(p) < p$, lo que significa que se está acercando al origen, por lo tanto es un foco no lineal estable. ■

Cuando $\mu \neq 0$ en el sistema (2.2) el punto de equilibrio está localizado en el interior de alguna de las zonas lineales. El flujo en dicha zona es lineal, pero el flujo global es no lineal y un ciclo límite puede aparecer cuando $t_L \cdot t_R < 0$.

Teorema 2.2 *Considere el sistema (2.2) con $D_L, D_R > 0, \mu \neq 0, y t_L \cdot t_R < 0$. Entonces hay sólo un punto de equilibrio y los siguientes enunciados se mantienen.*

- (a) *Si $\gamma_L + \gamma_R > 0$ y $\text{sign}(\mu) = \text{sign}(\gamma_L)$, entonces el punto de equilibrio es un foco estable (asintóticamente), y está rodeado por un único ciclo límite inestable.*
- (b) *Si $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$ y $\text{sign}(\mu) = \text{sign}(\gamma_L)$, entonces el punto de equilibrio es un foco estable (asintóticamente) y no existen ciclos límite.*
- (c) *Si $\gamma_L + \gamma_R \geq 0$ y $\text{sign}(\mu) = \text{sign}(\gamma_R)$, entonces el punto de equilibrio es un foco inestable y no existen ciclos límite.*
- (d) *Si $\gamma_L + \gamma_R < 0$ y $\text{sign}(\mu) = \text{sign}(\gamma_R)$, entonces el punto de equilibrio es un foco inestable y está rodeado por un único ciclo límite estable.*

Más aún, cuando un ciclo límite existe, su amplitud depende linealmente del parámetro μ y su periodo no depende en absoluto de tal parámetro.

Demostración:

Recordemos que el sistema (2.2) tiene un punto de equilibrio en $(\frac{\mu}{d_k}, \eta_k \frac{\mu}{d_k})$, por lo tanto podemos notar que este punto de equilibrio está en la región izquierda si $\mu < 0$ y en la región derecha si $\mu > 0$. Comenzamos la prueba escogiendo $\mu < 0$ y considerando los enunciados (a) y (b), es decir $sign(\mu) = sign(\gamma_L)$, entonces $\gamma_L < 0$, y por definición, $t_L < 0$. Además, recordando los eigenvalores del sistema $\lambda = \frac{t_k}{2} \pm iw_k$, el punto de equilibrio es un foco estable, localizado en la región izquierda.

El estudio de la existencia de ciclos límite se hará mediante un mapeo de Poincaré y para ésto introduciremos la siguiente función auxiliar.

$$\varphi_\gamma(\tau) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos(\tau) - \gamma\text{sen}(\tau)) \quad (2.4)$$

Con las propiedades de simetría

$$\varphi_{-\gamma}(-\tau) = 1 - e^{(-\gamma)(-\tau)}(\cos(-\tau) - (-\gamma)\text{sen}(-\tau)) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos(\tau) - \gamma\text{sen}(\tau)) = \varphi_\gamma(\tau)$$

$$\varphi_{-\gamma}(\tau) = 1 - e^{(-\gamma)\tau}(\cos(\tau) - (-\gamma)\text{sen}(\tau)) = 1 - e^{\gamma(-\tau)}(\cos(-\tau) - \gamma\text{sen}(-\tau)) = \varphi_\gamma(-\tau)$$

cuya gráfica para $\gamma > 0$ se puede ver en la Figura 2.1

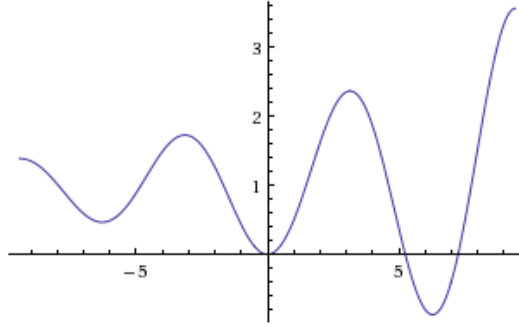


Figura 2.1: Gráfica de la función (2.4) con $\gamma = 0.1$.

donde podemos notar que la función tiene su primer raíz para algún valor $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi)$. Además podemos ver que para su derivada con respecto a τ tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi'_\gamma(\tau) &= -e^{\gamma\tau}(-\text{sen}(\tau) - \gamma\cos(\tau)) - \gamma e^{\gamma\tau}(\cos(\tau) - \gamma\text{sen}(\tau)) \\ &= e^{\gamma\tau}(\text{sen}(\tau) + \gamma^2\text{sen}(\tau)) \end{aligned}$$

Tomemos ahora $(x(0), y(0)) = (0, -q)$, con $q > 0$ (es decir un punto de S_- definido anteriormente) como punto inicial de una órbita, se concluye que la

trayectoria se mueve en la zona derecha hasta que eventualmente alcanza la región izquierda, ya que como mostramos antes el flujo en S_- (S_+ respectivamente) está apuntando a la región derecha (izquierda), ya que $\dot{x} = -y > 0$ ($\dot{x} = -y < 0$) y así las trayectorias dejan la región de la derecha en un punto $(0, r)$ de S_+ después de un tiempo s_R . De (2.3) con $s = s_R$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 - \frac{\mu}{d_R} \\ r - \eta_R \frac{\mu}{d_R} \end{pmatrix} = e^{s_R \frac{t_R}{2}} M(s_R) \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{d_R} \\ -q - \eta_R \frac{\mu}{d_R} \end{pmatrix}$$

con $M(s_R) = \begin{pmatrix} \cos(w_R s_R) + \frac{(b+\eta_R)\text{sen}(w_R s_R)}{2w_R} & -\frac{\text{sen}(w_R s_R)}{w_R} \\ \frac{\text{sen}(w_R s_R)}{w_R} & \cos(w_R s_R) - \frac{(b+\eta_R)\text{sen}(w_R s_R)}{2w_R} \end{pmatrix}$

Podemos hallar q con la ecuación correspondiente al primer renglón resultante del producto de las matrices de lado derecho, es decir

$$-\frac{\mu}{d_R} = e^{s_R w_R \frac{t_R}{2w_R}} \left[-\frac{\mu}{d_R} \left(\cos(w_R s_R) + \frac{(b+\eta_R)\text{sen}(w_R s_R)}{2w_R} \right) + \left(q + \eta_R \frac{\mu}{d_R} \right) \frac{\text{sen}(w_R s_R)}{w_R} \right]$$

Si hacemos $\tau_R = s_R w_R$, tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{d_R} + \frac{\mu}{d_R} e^{\gamma_R \tau_R} \left(\cos(\tau_R) + \frac{(b+\eta_R)\text{sen}(\tau_R)}{2w_R} \right) &= e^{\gamma_R \tau_R} q \frac{\text{sen}(\tau_R)}{w_R} + e^{\gamma_R \tau_R} \eta_R \frac{\mu}{d_R} \frac{\text{sen}(\tau_R)}{w_R} \\ -\frac{\mu}{d_R} + \frac{\mu}{d_R} e^{\gamma_R \tau_R} \left(\cos(\tau_R) + \frac{(b+\eta_R)\text{sen}(\tau_R)}{2w_R} \right) - e^{\gamma_R \tau_R} \eta_R \frac{\mu}{d_R} \frac{\text{sen}(w_R s_R)}{w_R} &= e^{\gamma_R \tau_R} q \frac{\text{sen}(\tau_R)}{w_R} \\ -\frac{\mu}{d_R} [1 - e^{\gamma_R \tau_R} (\cos(\tau_R) + \frac{(b-\eta_R)\text{sen}(\tau_R)}{2w_R})] &= e^{\gamma_R \tau_R} q \frac{\text{sen}(\tau_R)}{w_R} \\ -\frac{\mu w_R e^{-\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} [1 - e^{\gamma_R \tau_R} (\cos(\tau_R) - \gamma_R \text{sen}(\tau_R))] &= q \\ \therefore q(\tau_R) &= -\frac{\mu w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \end{aligned}$$

Ahora para r usamos la ecuación del segundo renglón resultante del producto de las mismas matrices,

$$r - \eta_R \frac{\mu}{d_R} = e^{\gamma_R \tau_R} \left[-\frac{\mu}{d_R} \frac{\text{sen}(\tau_R)}{w_R} + \left(\cos(\tau_R) - \frac{(b+\eta_R)\text{sen}(\tau_R)}{2w_R} \right) \left(-q - \eta_R \frac{\mu}{d_R} \right) \right]$$

Haciendo cálculos en la ecuación (ver Proposición C.3) podemos demostrar que

$$\begin{aligned} r = & -\frac{\mu e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_R)}{w_R} + w_R \cos^2(\tau_R) + \frac{b+\eta_R}{2w_R} (w_R \gamma_R - \eta_R) \text{sen}^2(\tau_R) + (-w_R \gamma_R + \eta_R) \right. \\ & \left. - \frac{b+\eta_R}{2w_R} w_R \text{sen}(\tau_R) \cos(\tau_R) - w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) - w_R \gamma_R e^{-\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) \right] \end{aligned}$$

donde el coeficiente del término con seno y coseno es cero, como se puede ver en la Proposición C.4, por lo tanto nos queda

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{2 + (b + \eta_R)(w_R \gamma_R - \eta_R)}{2w_R} \text{sen}^2(\tau_R) + w_R \text{cos}^2(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. - w_R e^{-\gamma_R \tau_R} (\text{cos}(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R)) \right] \\
&= -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{2 + (b + \eta_R)(w_R [\frac{\eta_R - b}{2w_R}] - \eta_R)}{2w_R^2} \text{sen}^2(\tau_R) + \text{cos}^2(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. - e^{-\gamma_R \tau_R} (\text{cos}(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R)) \right] \\
&= -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{2 + (b + \eta_R)(\frac{-\eta_R - b}{2})}{2w_R^2} \text{sen}^2(\tau_R) + \text{cos}^2(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. - e^{-\gamma_R \tau_R} (\text{cos}(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R)) \right]
\end{aligned}$$

Ahora recordemos que $w_k = \sqrt{D_k} = \sqrt{d_k - \frac{t_k^2}{4}}$ y $t_k = \eta_k - b$, $d_k = 1 - b\eta_k$, entonces

$$\begin{aligned}
w_k &= \sqrt{1 - b\eta_k - \frac{(\eta_k - b)^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{4b\eta_k + \eta_k^2 - 2b\eta_k + b^2}{4}} \\
&= \sqrt{1 - \frac{\eta_k^2 + 2b\eta_k + b^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{(\eta_k + b)^2}{4}} \\
&\Rightarrow \frac{(\eta_k + b)^2}{2} = 2(1 - w_k^2)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sustituyendo esto en la ecuación

$$\begin{aligned}
r &= -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{2 - 2(1 - w_R^2)}{2w_R^2} \text{sen}^2(\tau_R) + \text{cos}^2(\tau_R) - e^{-\gamma_R \tau_R} (\text{cos}(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_R \text{sen}(\tau_R)) \right] \\
&= -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{2w_R^2}{2w_R^2} \text{sen}^2(\tau_R) + \text{cos}^2(\tau_R) - e^{-\gamma_R \tau_R} (\text{cos}(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R)) \right] \\
&= -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} [\text{sen}^2(\tau_R) + \text{cos}^2(\tau_R) - e^{-\gamma_R \tau_R} (\text{cos}(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R))] \\
&= -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} [1 - e^{-\gamma_R \tau_R} (\text{cos}(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R))] \\
\therefore r(\tau_R) &= -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)}
\end{aligned}$$

Las funciones que acabamos de obtener ,

$$q(\tau_R) = -\frac{\mu w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)}, \quad r(\tau_R) = -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)}, \tag{2.6}$$

están definidas para $\tau_R \in (0, \pi)$, ya que cuando (τ_R) varía en este intervalo ambas funciones crecen monótonamente de 0 a ∞ , y entonces definiremos, de manera implícita el mapeo de Poincaré de la zona derecha como

$$P_R : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \quad \text{con } P_R(q) = r, \quad P_R(0) = 0$$

Ahora, recorriendo hacia atrás la órbita de un punto $(0, -q)$ en S_- , podemos obtener la intersección que ésta tuvo en el punto $(0, p) \in S_+$ después de un tiempo $-s_L$. Nuevamente de la ecuación (2.3), tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 - \frac{\mu}{d_L} \\ p - \eta_L \frac{\mu}{d_L} \end{pmatrix} = e^{-s_L \frac{t_L}{2}} M(-s_L) \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{d_L} \\ -q - \eta_L \frac{\mu}{d_L} \end{pmatrix}$$

$$\text{con } M(-s_L) = \begin{pmatrix} \cos(w_L s_L) - \frac{(b+\eta_L)\text{sen}(w_L s_L)}{2w_L} & \frac{\text{sen}(w_L s_L)}{w_L} \\ -\frac{\text{sen}(w_L s_L)}{w_L} & \cos(w_L s_L) + \frac{(b+\eta_L)\text{sen}(w_L s_L)}{2w_L} \end{pmatrix}$$

Usando la ecuación asociada al primer renglón resultante del producto de las dos matrices de la derecha podemos encontrar q

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{d_L} &= e^{-s_L w_L \frac{t_L}{2w_L}} \left[-\frac{\mu}{d_L} \left(\cos(w_L s_L) - \frac{(b+\eta_L)\text{sen}(w_L s_L)}{2w_L} \right) + \left(-q - \eta_L \frac{\mu}{d_L} \right) \frac{\text{sen}(w_L s_L)}{w_L} \right] \\ q \frac{\text{sen}(\tau_L)}{w_L} e^{-\gamma_L \tau_L} &= \frac{\mu}{d_L} + e^{-\gamma_L \tau_L} \left[-\frac{\mu}{d_L} \left(\cos(\tau_L) - \frac{(b+\eta_L)\text{sen}(\tau_L)}{2w_L} \right) - \eta_L \frac{\mu}{d_L} \frac{\text{sen}(\tau_L)}{w_L} \right] \\ q \frac{\text{sen}(\tau_L)}{w_L} e^{-\gamma_L \tau_L} &= \frac{\mu}{d_L} \left[1 - e^{-\gamma_L \tau_L} \left(\cos(\tau_L) - \frac{(b+\eta_L)\text{sen}(\tau_L)}{2w_L} \right) + \eta_L \frac{\text{sen}(\tau_L)}{w_L} \right] \\ q \frac{\text{sen}(\tau_L)}{w_L} e^{-\gamma_L \tau_L} &= \frac{\mu}{d_L} \left[1 - e^{-\gamma_L \tau_L} \left(\cos(\tau_L) + \frac{\eta_L - b}{2w_L} \text{sen}(\tau_L) \right) \right] \\ q \frac{\text{sen}(\tau_L)}{w_L} e^{-\gamma_L \tau_L} &= \frac{\mu}{d_L} \left[1 - e^{-\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) + \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \right] \\ \therefore q(\tau_L) &= \frac{\mu w_L e^{\gamma_L \tau_L} \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \end{aligned}$$

Ahora para encontrar p usamos la ecuación del segundo renglón del producto de las mismas matrices,

$$p - \mu_L \frac{\mu}{d_L} = e^{-s_L w_L \frac{t_L}{2w_L}} \left[\frac{\mu}{d_L} \frac{\text{sen}(w_L s_L)}{w_L} + \left(\cos(w_L s_L) + \frac{(b+\eta_L)\text{sen}(w_L s_L)}{2w_L} \right) \left(-q - \eta_L \frac{\mu}{d_L} \right) \right]$$

Haciendo cálculos en la ecuación (Proposición (C.5)) podemos probar que

$$p(\tau_L) = \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)}$$

Las funciones que acabamos de obtener

$$q(\tau_L) = \frac{\mu w_L e^{\gamma_L \tau_L} \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)}, \quad p(\tau_L) = \frac{\mu w_L e^{-\gamma_L \tau_L} \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \quad (2.7)$$

están definidas en $(\pi, \hat{\tau}]$, donde $\hat{\tau}$ es, como se mencionó, la primer raíz de la función φ_γ para $\gamma > 0$, es decir $\varphi_{\gamma_L}(\hat{\tau}) = 0$, por lo tanto $q(\hat{\tau}) = 0$. Entonces cuando τ_L decrece de $\hat{\tau}$ a π , la función $p(\tau_L)$ crece monótonamente de $\hat{p} = p(\hat{\tau})$ a ∞ y la función $q(\tau_L)$ de 0 a ∞ .

Para representar el mapeo con el tiempo invertido sobre la zona de la izquierda, definimos el mapeo

$$P_L^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [\hat{p}, \infty), \quad \text{con} \quad P_L^{-1}(q) = p > \hat{p}, \quad P_L^{-1}(0) = \hat{p}$$

y lo primero que haremos es calcular su derivada con respecto a q . Tomando en cuenta que tanto p como q , están en función de τ_L tenemos que

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\frac{dp}{d\tau_L}}{\frac{dq}{d\tau_L}}$$

Entonces, si $p(\tau_L) = \frac{\mu w_L e^{-\gamma_L \tau_L} \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)}$, tenemos

$$\frac{dp}{d\tau_L} = \frac{\mu w_L}{d_L} \left[\frac{\text{sen}(\tau_L) [-\gamma_L e^{-\gamma_L \tau_L} \varphi_{\gamma_L}(\tau_L) + e^{-\gamma_L \tau_L} \varphi'_{\gamma_L}(\tau_L)] - \cos(\tau_L) e^{-\gamma_L \tau_L} \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{\text{sen}^2(\tau_L)} \right]$$

Simplifiquemos el numerador de la expresión encerrada entre corchetes

$$\begin{aligned} &= \text{sen}(\tau_L) [-\gamma_L e^{-\gamma_L \tau_L} (1 - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L))) \\ &\quad + e^{-\gamma_L \tau_L} (e^{\gamma_L \tau_L} (\text{sen}(\tau_L) + \gamma_L^2 \text{sen}(\tau_L)))] \\ &\quad - e^{-\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) (1 - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L))) \\ &= \text{sen}(\tau_L) [-\gamma_L e^{-\gamma_L \tau_L} + \gamma_L \cos(\tau_L) - \gamma_L^2 \text{sen}(\tau_L) + \text{sen}(\tau_L) + \gamma_L^2 \text{sen}(\tau_L)] \\ &\quad - e^{-\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L) \cos(\tau_L) \\ &= -\gamma_L e^{-\gamma_L \tau_L} \text{sen}(\tau_L) + \text{sen}^2(\tau_L) - e^{-\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) \\ &= 1 - e^{-\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) + \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \\ &= \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L) \end{aligned}$$

Sustituyéndolo en la derivada obtenemos

$$\frac{dp}{d\tau_L} = \frac{\mu w_L \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}^2(\tau_L)}$$

Para $q(\tau_L) = \frac{\mu w_L e^{\gamma_L \tau_L} \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)}$ tenemos que

$$\frac{dq}{d\tau_L} = \frac{\mu w_L}{d_L} \left[\frac{\text{sen}(\tau_L) [\gamma_L e^{\gamma_L \tau_L} \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L) + e^{\gamma_L \tau_L} \varphi'_{-\gamma_L}(\tau_L)] - e^{\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{\text{sen}^2(\tau_L)} \right]$$

De igual manera, simplificando el numerador de la expresión entre corchetes

$$\begin{aligned}
&= \text{sen}(\tau_L) [\gamma_L e^{\gamma_L \tau_L} (1 - e^{-\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) + \gamma_L \text{sen}(\tau_L))) \\
&\quad + e^{\gamma_L \tau_L} (e^{-\gamma_L \tau_L} (\text{sen}(\tau_L) + \gamma_L^2 \text{sen}(\tau_L)))] \\
&\quad - e^{\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) (1 - e^{-\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) + \gamma_L \text{sen}(\tau_L))) \\
&= \text{sen}(\tau_L) [\gamma_L e^{\gamma_L \tau_L} - \gamma_L \cos(\tau_L) - \gamma_L^2 \text{sen}(\tau_L) + \text{sen}(\tau_L) + \gamma_L^2 \text{sen}(\tau_L)] \\
&\quad - e^{\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) + \gamma_L \text{sen}(\tau_L) \cos(\tau_L) \\
&= \gamma_L e^{\gamma_L \tau_L} \text{sen}(\tau_L) + \text{sen}^2(\tau_L) - e^{\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) \\
&= 1 - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \\
&= \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)
\end{aligned}$$

Sustituyéndolo en la derivada obtenemos

$$\frac{dq}{d\tau_L} = \frac{\mu w_L \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}^2(\tau_L)}$$

Por lo tanto tenemos que la derivada final queda de la forma

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\frac{dp}{d\tau_L}}{\frac{dq}{d\tau_L}} = \frac{\frac{\mu w_L \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}^2(\tau_L)}}{\frac{\mu w_L \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}^2(\tau_L)}} = \frac{\varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{\varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}$$

Ahora usando las propiedades y la gráfica de la función φ_γ , podemos ver que para $\tau_L \in (\pi, \hat{\tau}]$ ($\hat{\tau}$ es la primer raíz de la función)

$$\varphi_{-\gamma_L}(\tau_L) > 0 \quad y \quad \varphi_{\gamma_L}(\tau_L) = \varphi_{-\gamma_L}(-\tau_L) > 0$$

Por lo tanto $\frac{dp}{dq} > 0$ en el intervalo, y entonces, por el teorema de la función inversa, existe el mapeo

$$P_L : [\hat{p}, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \quad \text{con} \quad P_L(p) = q, \quad P_L(\hat{p}) = 0$$

y es diferenciable, con

$$\frac{dq}{dp} = q'(p) = \frac{\varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{\varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}$$

De igual manera buscamos la derivada del mapeo $r(q) = P_R(q)$, donde

$$\frac{dr}{dq} = \frac{\frac{dr}{d\tau_R}}{\frac{dq}{d\tau_R}}$$

Entonces si $r(\tau_R) = -\frac{\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)}$ tenemos

$$\frac{dr}{d\tau_R} = -\frac{\mu w_R}{d_R} \left[\frac{\text{sen}(\tau_R) [\gamma_R e^{\gamma_R \tau_R} \varphi_{-\gamma_R}(\tau_R) + e^{\gamma_R \tau_R} \varphi'_{-\gamma_R}(\tau_R)] - e^{\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) \varphi_{-\gamma_R}(\tau_R)}{\text{sen}^2(\tau_R)} \right]$$

Simplificando el numerador de la expresión encerrada entre corchetes

$$\begin{aligned}
&= \text{sen}(\tau_R)[\gamma_R e^{\gamma_R \tau_R}(1 - e^{-\gamma_R \tau_R}(\cos(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R))) \\
&\quad + e^{\gamma_R \tau_R}(e^{-\gamma_R \tau_R}(\text{sen}(\tau_R) + \gamma_R^2 \text{sen}(\tau_R)))] \\
&\quad - e^{\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R)(1 - e^{-\gamma_R \tau_R}(\cos(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R))) \\
&= \text{sen}(\tau_R)[\gamma_R e^{\gamma_R \tau_R} - \gamma_R \cos(\tau_R) - \gamma_R^2 \text{sen}(\tau_R) + \text{sen}(\tau_R) \\
&\quad + \gamma_R^2 \text{sen}(\tau_R)] - e^{\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) + \cos^2(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R) \cos(\tau_R) \\
&= \gamma_R e^{\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) + \text{sen}^2(\tau_R) - e^{\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) + \cos^2(\tau_R) \\
&= 1 - e^{\gamma_R \tau_R}(\cos(\tau_R) - \gamma_R \text{sen}(\tau_R)) \\
&= \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la derivada

$$\frac{dr}{d\tau_R} = -\frac{\mu w_R \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}^2(\tau_R)}$$

Para $q(\tau_R) = -\frac{\mu w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)}$ tenemos

$$\frac{dq}{d\tau_R} = -\frac{\mu w_R}{d_R} \left[\frac{\text{sen}(\tau_R) \left[-\gamma_R e^{-\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R) + e^{-\gamma_R \tau_R} \varphi'_{\gamma_R}(\tau_R) \right] - e^{-\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{\text{sen}^2(\tau_R)} \right]$$

De igual manera, simplificando el numerador de la expresión entre corchetes

$$\begin{aligned}
&= \text{sen}(\tau_R)[-\gamma_R e^{-\gamma_R \tau_R}(1 - e^{\gamma_R \tau_R}(\cos(\tau_R) - \gamma_R \text{sen}(\tau_R))) \\
&\quad + e^{-\gamma_R \tau_R}(e^{\gamma_R \tau_R}(\text{sen}(\tau_R) + \gamma_R^2 \text{sen}(\tau_R)))] \\
&\quad - e^{\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R)(1 - e^{-\gamma_R \tau_R}(\cos(\tau_R) - \gamma_R \text{sen}(\tau_R))) \\
&= \text{sen}(\tau_R) [-\gamma_R e^{-\gamma_R \tau_R} + \gamma_R \cos(\tau_R) - \gamma_R^2 \text{sen}(\tau_R) + \text{sen}(\tau_R) + \gamma_R^2 \text{sen}(\tau_R)] \\
&\quad - e^{-\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) + \cos^2(\tau_R) - \gamma_R \text{sen}(\tau_R) \cos(\tau_R) \\
&= -\gamma_R e^{-\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) + \text{sen}^2(\tau_R) - e^{-\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) + \cos^2(\tau_R) \\
&= 1 - e^{-\gamma_R \tau_R}(\cos(\tau_R) + \gamma_R \text{sen}(\tau_R)) \\
&= \varphi_{-\gamma_R}(\tau_R)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la derivada

$$\frac{dq}{d\tau_R} = -\frac{\mu w_R \varphi_{-\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}^2(\tau_R)}$$

Por lo tanto tenemos que la derivada final queda de la forma

$$\frac{dr}{dq} = r'(q) = \frac{-\frac{\mu w_R \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}^2(\tau_R)}}{-\frac{\mu w_R \varphi_{-\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}^2(\tau_R)}} = \frac{\varphi_{\gamma_R}}{\varphi_{-\gamma_R}},$$

con lo que podemos definir el mapeo de Poincaré $P : [\hat{p}, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ de la forma

$$r = P(p) = P_R(P_L(p))$$

y calculamos su derivada

$$\frac{dP}{dp} = P'_R(P_L(p))P'_L(p) = P'_R(q)P'_L(p) = r'(q)q'(p) = \frac{\varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{\varphi_{-\gamma_R}(\tau_R)} \frac{\varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{\varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}$$

Ahora completamos la expresión para obtener p y r

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dp} &= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \frac{-\mu w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)} = \frac{p}{r} \frac{-\mu w_R e^{\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \frac{e^{-2\gamma_R \tau_R}}{e^{2\gamma_L \tau_L}} \\ &= \frac{p}{P(p)} e^{2(\gamma_L \tau_L + \gamma_R \tau_R)} = \frac{p}{P(p)} e^{2v(q)} \end{aligned}$$

donde $v(q) = \gamma_L \tau_L + \gamma_R \tau_R$ y τ_L, τ_R son los ángulos fase a través de q . Note que cuando $p \rightarrow \hat{p}^+$, entonces $\tau_L \rightarrow \hat{\tau}$ y como $r = P(p)$, entonces $r = P(\hat{p}) \rightarrow 0$ y $\tau_R \rightarrow 0$, y si $p \rightarrow \infty$, entonces $\tau_L \rightarrow \pi$ y $r = P(p) \rightarrow \infty$ y $\tau_R \rightarrow \pi$, por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \hat{p}} \frac{dP}{dp} &= \frac{\hat{p}}{P(\hat{p})} e^{2(\gamma_L \hat{\tau} + \gamma_R(0))} = \infty \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{dP}{dp} &= \frac{\varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{\varphi_{-\gamma_R}(\tau_R)} \frac{\varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{\varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)} = \frac{1 + e^{\gamma_L \pi}}{1 + e^{-\gamma_L \pi}} \frac{1 + e^{\gamma_R \pi}}{1 + e^{-\gamma_R \pi}} \\ &= \frac{1 + e^{\gamma_L \pi}}{e^{\gamma_L \pi} + 1} \frac{1 + e^{\gamma_R \pi}}{e^{\gamma_R \pi} + 1} = e^{(\gamma_L + \gamma_R)\pi} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Además se puede ver que si \bar{p} es un punto fijo del mapeo P , es decir $P(\bar{p}) = \bar{p}$, entonces tenemos que

$$\left(\frac{dP}{dp} \right)_{p=\bar{p}} = e^{2v(\bar{p})}, \quad \text{donde } \bar{q} = P_L(\bar{q})$$

Más aún, como las funciones $r(q)$ y $p(q)$ cumplen que $r(0) = 0 < \hat{p} = p(0)$, por continuidad tenemos que $r(q) < p(q)$ para $q < \bar{q}$. Ahora definamos la función $l(q) = r(q) - p(q)$, para $q < \bar{q}$ donde $l(\bar{q}) = r(\bar{q}) - p(\bar{q}) = 0$, y supongamos que $p'(\bar{q}) > r'(\bar{q})$ entonces $r'(\bar{q}) - p'(\bar{q}) < 0$ lo que significaría que $l'(\bar{q}) < 0$, es decir que $l(\bar{q}) = 0$ y decreciente en ese punto, por lo tanto $l(q) > 0$ para valores más pequeños y suficientes cercanos a \bar{q} y entonces $r(q) > p(q)$, lo que contradice el primer enunciado de este párrafo. Por lo tanto $p'(\bar{q}) < r'(\bar{q})$, con lo cual tenemos que

$$1 \leq \frac{r'(q)}{p'(q)} = \left(\frac{dP}{dp} \right)_{p=\bar{p}} = e^{2v(\bar{q})} \quad (2.9)$$

y así $v(\bar{q}) \geq 0$. En nuestro caso, la función $v(q)$ es estrictamente creciente porque a un q más grande le corresponden un τ_R más grande y un τ_L más pequeño. Entonces como $\gamma_R > 0$ y $\gamma_L < 0$, $v(q)$ siempre se hace más grande conforme q se hace más grande, por lo tanto esta función solo se hace cero en sólo un punto fijo.

Ahora analizaremos la existencia de puntos fijos en el mapeo P bajo la hipótesis del enunciado (a), considerando la función,

$$h(p) = P(p) - p, \quad p \in [\hat{p}, \infty) \quad (2.10)$$

De esta ecuación sabemos que $h(\hat{p}) = P(\hat{p}) - \hat{p} = -\hat{p} < 0$ y de (2.8), que existe un número $k > 0$ tal que para p suficientemente grande tenemos que $h'(p) > k > 0$, porque estamos asumiendo que $\gamma_R + \gamma_L > 0$, es decir como

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{dP}{dp} = e^{(\gamma_L + \gamma_R)\pi} > 1 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} h'(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{dP}{dp} - 1 \right) > 0$$

es decir que $h'(p) > k > 0$ para algún valor p suficientemente grande. Entonces usando el teorema del valor medio tenemos que

$$\frac{h(p) - h(\hat{p})}{p - \hat{p}} = h'(p) > k > 0$$

y equivalentemente

$$h(p) = h(\hat{p}) + h'(p)(p - \hat{p})$$

Como $k > 0$ entonces tenemos que para \hat{p} dado, por la propiedad arquimediana de los números existe un p suficientemente grande tal que

$$kp > k\hat{p} - h(\hat{p})$$

y, entonces

$$h(\hat{p}) + k(p - \hat{p}) > 0$$

usando el resultado encontrado con el teorema del valor medio, tenemos

$$h(\hat{p}) + h'(p)(p - \hat{p}) > h(\hat{p}) + k(p - \hat{p}) > 0$$

$$\therefore h(p) > 0,$$

para un p suficientemente grande. Con esto y por el teorema del valor intermedio, tenemos que un valor \bar{p} con $h(\bar{p}) = P(\bar{p}) - \bar{p} = 0$ existe. En consecuencia el mapeo P tiene al menos un punto fijo, es decir, el sistema (2.2) tiene, al menos, un ciclo límite. Supongamos ahora que para el mapeo P existen dos puntos fijos \bar{p}_1 y \bar{p}_2

tales que $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$ y no existen más puntos fijos en el intervalo (\bar{p}_1, \bar{p}_2) . Entonces, necesariamente tenemos que

$$v(\bar{q}_1) = 0, \quad \left(\frac{dP}{dp}\right)_{p=\bar{p}_1} = 1 < \left(\frac{dP}{dp}\right)_{p=\bar{p}_2}$$

porque dos puntos fijos consecutivos no pueden tener derivadas mas grandes que 1. En esta situación, para puntos p a la izquierda de \bar{p}_2 y suficientemente cercanos a él, por el teorema del valor intermedio tenemos que $h(p) = P(p) - p < 0$, es decir $p > P(p)$ y lo mismo pasa para $p \in (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$. Entonces

$$\frac{dP}{dp} = \frac{p}{P(p)} e^{v(q)} > 1, \quad \forall p \in (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$$

entrando en contradicción con el teorema del valor medio, ya que

$$\frac{P(\bar{p}_2) - P(\bar{p}_1)}{\bar{p}_2 - \bar{p}_1} = \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_1}{\bar{p}_2 - \bar{p}_1} = 1$$

Por lo tanto, la gráfica del mapeo P tiene sólo un punto fijo \bar{p} y como

$$\frac{dP}{dp} > 1 \quad \forall p > \bar{p} \quad \Rightarrow r = P(p) > p$$

lo que nos dice que se tiene un ciclo límite inestable, entonces el enunciado (a) se prueba.

Ahora estudiemos la existencia de puntos fijos del mapeo P bajo las hipótesis del enunciado (b), es decir $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$, manteniendo que $a < 0$. Así, $\gamma_L < 0$ y el punto de equilibrio es también un foco asintóticamente estable. Supongamos que el correspondiente mapeo de Poincaré P tiene un punto fijo \bar{p}_1 . Sabemos que $\left(\frac{dP}{dp}\right)_{p=\bar{p}_1} > 1$, entonces $v(\bar{q}_1) \geq 0$. Pero en este caso tenemos

$$v(\bar{q}_1) = \gamma_L \tau_L + \gamma_R \tau_R \leq \gamma_L (\tau_L + \tau_R) < 0$$

porque $\gamma_L + \gamma_R \leq 0$ y $\tau_L > \pi > \tau_R$, obteniendo una contradicción, y así el mapeo P no tiene puntos fijos y el enunciado (b) se prueba para $a < 0$. los enunciados (a) y (b) para $a > 0$ y los enunciados (c) y (d) para $a \neq 0$ se reducen a algunos casos que acabamos de estudiar, mediante el uso de las propiedades de simetría del sistema. Cuando un ciclo límite existe, puede ser determinado resolviendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} q(\tau_R) &= q(\tau_L), \\ r(\tau_R) &= p(\tau_L) \end{aligned}$$

donde $\tau_R \in (0, \pi)$ y $\tau_L \in (\pi, \hat{p})$. Note que por las ecuaciones 2.6 y 2.7, la solución de las ecuaciones anteriores no depende del valor del parámetro μ . Así el enunciado final está probado. ■

Finalmente del desarrollo anterior surge nuestra bifurcación tipo Hopf. Por ejemplo, consideremos cuando $\gamma_L < 0$, $\gamma_R > 0$ y $\gamma_L + \gamma_R < 0$. Tomando a

μ como nuestro parámetro de bifurcación tenemos una bifurcación tipo Hopf supercrítica en $\mu = 0$, ya que cuando $\mu < 0$ de (b) en el Teorema 2.2, hay un foco estable, el cuál se mantiene cuando $\mu = 0$ por (c) del Teorema 2.1, y cuando $\mu > 0$, por (d) del Teorema 2.2 el foco se vuelve inestable y está rodeado por un ciclo límite estable. De manera análoga cuando $\gamma_L < 0$, $\gamma_R > 0$ y $\gamma_L + \gamma_R > 0$, ocurre una bifurcación tipo Hopf subcrítica en $\mu = 0$, porque cuando $\mu < 0$, de (a) del Teorema 2.2 el punto crítico es un foco estable y está rodeado por un ciclo límite inestable, cuando $\mu = 0$ el origen se convierte en un foco inestable por el Teorema 2.1, el cuál se mantiene cuando $\mu > 0$ por (c) del Teorema 2.2.

2.4. Ejemplo

Ejemplo Consideremos el sistema continuo, lineal por pedazos.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - |x| + y \\ \dot{y} &= -3x + y - 0.01.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Como se puede ver en la Figura 2.2, este sistema tiene un ciclo límite. Además

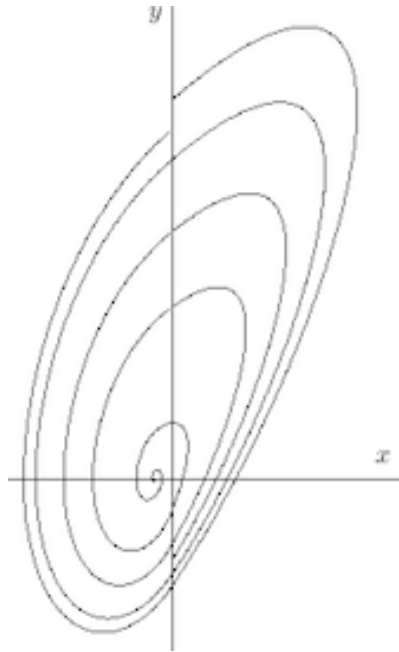


Figura 2.2: retrato fase del sistema (2.11).

se puede expresar de la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} y \\ -3x + y - 0.01 \end{bmatrix} & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{bmatrix} -2x + y \\ -3x + y - 0.01 \end{bmatrix} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

el cual, es un sistema de la forma (2.1). Si hacemos el cambio de variables de la proposición (2.2), obtenemos el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) - y \\ x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \mu \end{bmatrix} \quad \text{con } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}}x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

donde μ tiene específicamente el valor de $\frac{1}{100\sqrt{3}}$, pero lo dejaremos así, ya que será nuestro parámetro de la bifurcación tipo Hopf, que se llevará a cabo. Los sistemas de las regiones izquierda y derecha son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \mu \quad \text{si } x \leq 0, \\ \dot{x} &= -\frac{2}{\sqrt{3}}x - y \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{\sqrt{3}}y - \mu \quad \text{si } x \geq 0, \end{aligned}$$

respectivamente. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} t_L &= \frac{1}{\sqrt{3}}, & d_L &= 1, & D_L &= \frac{11}{12}, & w_L &= \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}, \\ t_R &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & d_R &= \frac{1}{3}, & D_R &= \frac{1}{4}, & w_R &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\gamma_L = \frac{t_L}{2w_L} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{2(\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}})} = \frac{1}{\sqrt{11}} > 0, \quad \gamma_R = \frac{t_R}{2w_R} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2(\frac{1}{2})} = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$$

Por lo tanto

$$\gamma_L + \gamma_R = \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -0.2758 < 0$$

Así, por el inciso (b) del Teorema 2.2, cuando $\mu < 0$ el punto de equilibrio dado por $(\frac{\mu}{d_k}, \eta_k \frac{\mu}{d_k})$, es un foco inestable y está rodeado por un ciclo límite estable, como se puede ver en la Figura 2.3 .

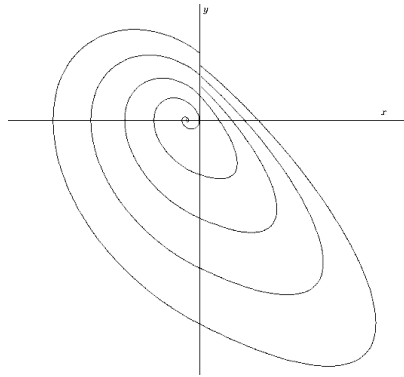


Figura 2.3: Retrato fase del sistema (2.12) con $\mu = -0.01$.

Si $\mu = 0$ por (c) del Teorema 2.1 el punto de equilibrio está en el origen y es un foco estable y desaparece el ciclo límite. Y, por (d) del Teorema 2.2, cuando $\mu > 0$ se mantiene el foco estable sin la existencia de ciclos límite (ver Figura 2.4).

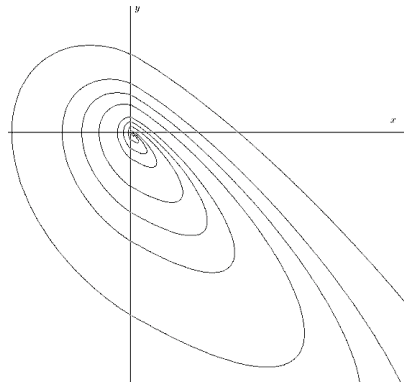


Figura 2.4: retrato fase del sistema (2.12) con $\mu = 0.01$.

Capítulo 3

Bifurcaciones tipo Hopf en SPCSP

3.1. SPCSP

En este capítulo trabajaremos con sistemas en los cuales la definición por pedazos ya no es con sistemas lineales, si no que generalizaremos el concepto a funciones de cualquier tipo. Lo único que se pedirá es que haya continuidad en todo el plano.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales, en el plano, de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} F_L(x, y; \mu) & \text{si } x \leq 0 \\ F_R(x, y; \mu) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, continuo y F_L, F_R son campos vectoriales C^j a trozos ($j \geq 1$). Asumimos que tiene un punto de equilibrio, (x^*, y^*, μ) , el cuál cruza la variedad de conmutación cuando el parámetro μ es variado. Asumimos aún más que la variedad de conmutación es el eje y , y que el punto de equilibrio está en el origen cuando $\mu = 0$. Dado que el sistema es continuo en todo el plano, en especial sobre la variedad de conmutación, es decir, el eje y , tenemos que

$$F_L(0, y; \mu) = F_R(0, y; \mu).$$

También asumiremos que

$$F_L(0, 0; 0) = F_R(0, 0; 0) = (0, 0),$$

para asegurar que el punto de equilibrio está en el origen cuando $\mu = 0$. Nuevamente usamos $k = \{L, R\}$ para representar las regiones izquierda y derecha de (3.1), respectivamente.

Lo que haremos será trabajar con la expansión en series de Taylor de ambos sub-sistemas alrededor del origen. Entonces, definiendo

$$F_k(x, y; \mu) = \begin{bmatrix} F_k^1(x, y; \mu) \\ F_k^2(x, y; \mu) \end{bmatrix},$$

como la primer y segunda componente de F_k , podemos escribir los campos vectoriales como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_k(\mu)\mu + a_k(\mu)x + b_k(\mu)y + o(x, y) \\ \dot{y} &= q_k(\mu)\mu + c_k(\mu)x + d_k(\mu)y + o(x, y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde p_k, a_k, b_k, q_k, c_k y d_k son funciones reales C^{j-1} de μ con $k = \{L, R\}$ y los términos de orden mayor que uno tienden a cero más rápido. El factor μ en los términos independientes, hacen explícito el hecho de que los términos constantes son cero para $\mu = 0$.

Ahora, por continuidad en el eje y , sabemos que $F_L(0, y; \mu) = F_R(0, y; \mu)$ y esto nos llevaría a que

$$\begin{bmatrix} F_k^1(0, y; \mu) \\ F_k^2(0, y; \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k^1(0, y; \mu) \\ F_k^2(0, y; \mu) \end{bmatrix},$$

y más aún, para valores alrededor del origen tenemos

$$\begin{bmatrix} p_L(\mu)\mu + b_L(\mu)y \\ q_L(\mu)\mu + d_L(\mu)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_R(\mu)\mu + b_R(\mu)y \\ q_R(\mu)\mu + d_R(\mu)y \end{bmatrix}.$$

De aquí, si $y = 0$

$$\begin{bmatrix} p_L(\mu)\mu \\ q_L(\mu)\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_R(\mu)\mu \\ q_R(\mu)\mu \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} p_L(\mu) &= p_R(\mu) = p(\mu) \\ q_L(\mu) &= q_R(\mu) = q(\mu) \end{aligned}.$$

Con lo anterior tenemos que

$$\begin{bmatrix} p(\mu)\mu + b_L(\mu)y \\ q(\mu)\mu + d_L(\mu)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\mu)\mu + b_R(\mu)y \\ q(\mu)\mu + d_R(\mu)y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} b_L(\mu) &= b_R(\mu) = b(\mu) \\ d_L(\mu) &= d_R(\mu) = d(\mu), \end{aligned}$$

por lo tanto los desarrollos en series de ambos sistema, para valores cercanos al origen, quedan de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p(\mu)\mu + a_k(\mu)x + b(\mu)y \\ \dot{y} &= q(\mu)\mu + c_k(\mu)x + d(\mu)y \end{aligned} \quad \text{con } k = \{L, R\}. \quad (3.3)$$

Con el fin de describir el comportamiento que queremos del sistema calculamos las matrices Jacobianas de ambas zonas en el origen, lo que nos queda

$$A_k(\mu) = DF_j(0, 0; \mu) = \begin{bmatrix} a_k(\mu) & b(\mu) \\ c_k(\mu) & d(\mu) \end{bmatrix}, \quad \text{con } k = \{L, R\}. \quad (3.4)$$

Supondremos que para $\mu = 0$, $A_L(0)$ y $A_R(0)$ tienen eigenvalores

$$\lambda_L \pm iw_L, \quad \text{and} \quad -\lambda_R \pm iw_R \quad (3.5)$$

respectivamente, donde $\lambda_L, w_L, \lambda_R, w_R > 0$. Debido a esto podemos notar varias cosas. Primero que $c_k(0)$ y $b(0)$ son distintos de cero, ya que si alguno de los dos fuera igual a cero la matriz Jacobiana $A_L(0)$ sería triangular, y sería imposible tener los eigenvalores complejos (3.5). Calculando los eigenvalores de $A_k(0)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_k(0) - r & b(0) \\ c_k(0) & d(0) - r \end{vmatrix} &= r^2 - (a_k(0) + d(0))r + a_k(0)d(0) - c_k(0)b(0) = 0 \\ \Rightarrow r &= \frac{a_k(0) + d(0) \pm \sqrt{(a_k(0) + d(0))^2 - 4(a_k(0)d(0) - c_k(0)b(0))}}{2} \\ &= \frac{a_k(0) + d(0)}{2} \pm \frac{\sqrt{(a_k(0) - d(0))^2 - 4c_k(0)b(0)}}{2} \\ &= \frac{a_k(0) + d(0)}{2} \pm i \frac{\sqrt{4c_k(0)b(0) - (a_k(0) - d(0))^2}}{2}. \end{aligned}$$

Así, asociando con 3.5

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \frac{a_L(0) + d(0)}{2}, \lambda_R = -\frac{a_R(0) + d(0)}{2}, w_L = \frac{\sqrt{4c_L(0)b(0) - (a_L(0) - d(0))^2}}{2}, \\ w_R &= \frac{\sqrt{4c_R(0)b(0) - (a_R(0) - d(0))^2}}{2}. \end{aligned}$$

Más aún, con las ecuaciones anteriores, podemos ver que

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 + w_k^2 &= \left[\frac{a_k(0) + d(0)}{2} \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{4c_k(0)b(0) - (a_k(0) - d(0))^2}}{2} \right]^2 \\ &= \frac{a_k(0) + 2a_k(0)d(0) + d^2(0)}{4} + \frac{4c_k(0)b(0) - a_k^2(0) + 2a_k(0)d(0) - d^2(0)}{4} \\ &= a_k(0)d(0) - c_k(0)b(0) = \det A_k(0). \end{aligned}$$

3.2. Forma Canónica

Ahora buscamos una condición para asegurar que el punto de equilibrio, cruza a la variedad de conmutación cuando μ cambia de positivo a negativo, es decir que cuando $\mu < 0$ el equilibrio se encuentre en alguna de las mitades del plano ($x < 0$ ó $x > 0$), llegue al origen cuando $\mu = 0$ y se mantenga en esa mitad cuando $\mu > 0$. Tal hecho se evitará si aseguramos que $\frac{d}{d\mu}x^*(0) \neq 0$. Para visualizar lo anterior, tomemos el punto de equilibrio como una función paramétrica de μ , es decir

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^*(\mu) \\ y^*(\mu) \end{bmatrix},$$

y sabemos que el equilibrio ocurre cuando $F_k(x^*, y^*, ; \mu) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} A_k(\mu) \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p(\mu) \\ q(\mu) \end{bmatrix} \mu &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = -\mu A_k^{-1}(\mu) \begin{bmatrix} p(\mu) \\ q(\mu) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\mu}{\det A_k(\mu)} \begin{bmatrix} d(\mu) & -b(\mu) \\ -c_k(\mu) & a_k(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(\mu) \\ q(\mu) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\mu}{\det A_k(\mu)} \begin{bmatrix} p(\mu)d(\mu) - q(\mu)b(\mu) \\ -p(\mu)c_k(\mu) + q(\mu)a_k(\mu) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Con lo anterior podemos desarrollar el siguiente resultado .

Proposición 3.1 *El punto de equilibrio (3.6) del sistema (3.1), no cruza de manera tangencial al eje y si se cumple que*

$$\Gamma = p(0)d(0) - q(0)b(0) \neq 0. \quad (3.7)$$

Demostación:

Como ya lo mencionamos, el hecho del cruce tangencial del punto de equilibrio en el eje y se evitará si se tiene que $\frac{d}{d\mu}x^*(0) \neq 0$. De (3.6) tenemos que

$$x^*(\mu) = -\frac{\mu}{\det A_k(\mu)} [p(\mu)d(\mu) - q(\mu)b(\mu)]$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}x^*(\mu) &= -\frac{p(\mu)d(\mu) - q(\mu)b(\mu)}{\det A_k(\mu)} \\ &+ \mu \left[\frac{\det A_k(\mu) \frac{d}{d\mu} [p(\mu)d(\mu) - q(\mu)b(\mu)] - \frac{d}{d\mu} \det A_k(\mu) [p(\mu)d(\mu) - q(\mu)b(\mu)]}{(\det A_k(\mu))^2} \right], \end{aligned}$$

Sin desarrollar las derivadas de la segunda expresión podemos darnos cuenta que cuando $\mu = 0$, tal término sera igual a cero, por lo tanto

$$\frac{d}{d\mu}x^*(0) = -\frac{p(0)d(0) - q(0)b(0)}{\lambda_k^2 + w_k^2}.$$

Dado que $\lambda_k^2 + w_k^2 > 0$, entonces, para asegurarnos que no tendrá una intersección tangencial con el eje y , se necesita que

$$\Gamma = p(0)d(0) - q(0)b(0) \neq 0$$

Además, si se hace un re-escalamiento en la variable $\mu \mapsto \frac{\mu}{\Gamma}$, obtenemos que $\Gamma = 1$. ■

Con el fin de simplificar los coeficientes del sistema (3.3), llevaremos a cabo otras dos transformaciones. Primero, dado que $b(0) \neq 0$, podemos hacer un re-escalamiento de la forma $y \mapsto \frac{y}{b(0)}$ para obtener $b(0) = 1$. Segundo, podemos notar que $\dot{x}(0, y; \mu)$ es diferenciable, y además

$$\dot{x}(0, 0; 0) = 0 \quad y \quad D_y \dot{x}(0, 0; 0) = b(0) = 1 \neq 0.$$

Entonces usando el teorema de la función implícita, existe una vecindad cerca del origen en (y, μ) en la cual, hay una única función $\tilde{y}(\mu)$ que satisface que $\dot{x}(0, \tilde{y}(\mu); \mu) = 0$ con $\tilde{y}(0) = 0$, para valores cercanos a cero. Así, usando la traslación $y \mapsto y - \tilde{y}(\mu)$, tenemos que

$$\dot{x}(0, y; \mu) = p(\mu)\mu + (y - \tilde{y}(\mu)),$$

y cuando $y = \tilde{y}(\mu)$ con μ suficientemente pequeño tenemos

$$\dot{x}(0, \tilde{y}; \mu) = p(\mu)\mu = 0, \quad \Rightarrow \quad p(\mu) = 0.$$

Así con las simplificaciones anteriores, el sistema (3.3), queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = F_k(x, y; \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ q(\mu) \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} a_k(\mu) & b_k(\mu) \\ c_k(\mu) & d_k(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

para valores suficientemente pequeños de μ . Además, dado que $b(0) = 1$ y $p(0) = 0$, tenemos que $\Gamma = -q(0) = 1$, así que $q(0) = -1$. Además los eigenvalores del sistema $A_L(0)$ y $A_R(0)$ aún están dados por (3.5).

Por último, llamemos x_L^* a la componente del punto de equilibrio cuando está en la zona izquierda y x_R^* cuando está en la zona derecha y tenemos que

$$x_k^* = -\frac{\mu}{\det A_k(\mu)} [p(\mu)d(\mu) - b(\mu)q(\mu)]. \quad (3.9)$$

Entonces, para algún valor de μ suficientemente pequeño, tenemos por continuidad, que

$$x_k^* = -\frac{\mu}{\lambda_k^2 + w_k^2} \quad (3.10)$$

. Así, cuando μ es cercano a cero y positivo el punto de equilibrio está en la zona izquierda del plano y es un foco inestable. Conforme varía μ y se hace positivo, el punto de equilibrio ahora estará en la zona derecha y será un foco estable (siempre que μ siga siendo cercano a cero).

3.3. Bifurcación tipo Hopf

Aquí desarrollaremos un resultado que nos permitirá ver la existencia de una bifurcación tipo Hopf en el sistema (3.8) descrito anteriormente, donde se crea una órbita periódica cuando $\mu = 0$.

Teorema 3.1 *Suponga que el campo vectorial descrito en (3.1) es continuo y C^j , $j \geq 0$, a trozos en $(x, y; \mu)$, y tiene un equilibrio que cruza transversalmente una variedad de conmutación cuando $\mu = 0$ en $(0, 0)$ donde la variedad es C^j . Además, suponga que cuando $\mu \rightarrow 0^+$ los eigenvalores del punto de equilibrio se*

aproximan a $-\lambda_L \pm iw_L$ y cuando $\mu \rightarrow 0^-$, los valores propios se aproximan a $-\lambda_R \pm iw_R$, donde $\lambda_L, w_L, \lambda_R, w_R > 0$. Sea

$$\Lambda = \frac{\lambda_L}{w_L} - \frac{\lambda_R}{w_R}, \quad (3.11)$$

el cual será el parámetro utilizado para la estabilidad de la bifurcación tipo Hopf de la siguiente manera:

- Si $\Lambda < 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $0 < \mu < \varepsilon$ hay una órbita periódica estable que rodea el punto de equilibrio y para $-\varepsilon < \mu \leq 0$ no hay órbitas periódicas cerca del punto de equilibrio.
- Si $\Lambda > 0$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $-\varepsilon < \mu < 0$ hay una órbita periódica inestable que rodea al punto de equilibrio, y para todo $0 < \mu < \varepsilon$ no hay órbitas periódicas cerca del punto de equilibrio.

Para probar el Teorema 3.1 usaremos el sistema (3.8) así, nuestra variedad de conmutación será el eje y . La órbita periódica nuevamente será obtenida mediante un mapeo de Poincaré P , definida de la parte positiva del eje y a si mismo, obtenido por la composición de dos mapeos P_R, P_L , que siguen el flujo de las regiones derecha e izquierda respectivamente. Sólo se considerará $\mu \geq 0$.

Demostración:

Lo primero que haremos será definir los mapeos P_R y P_L . Consideremos el sistema (3.8) con las expresiones para ambas regiones del plano:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(\mu) \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} a_L(\mu) & b_L(\mu) \\ c_L(\mu) & d_L(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(\mu) \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} a_R(\mu) & b_R(\mu) \\ c_R(\mu) & d_R(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Denotemos los flujos de estas ecuaciones por

$$\varphi_t^L(x, y; \mu), \quad \varphi_t^R(x, y; \mu),$$

respectivamente, para $(x, y; \mu)$ en alguna vecindad del origen. Ahora, para $\delta_k, \delta_{\mu_k} > 0$ suficientemente pequeños, definiremos los mapeos de la siguiente forma

$$P_R : [0, \delta_R] \times [0, \delta_{\mu_R}] \implies R^- \quad \text{con} \quad P_R(y_0; \mu) = y_1,$$

donde y_1 es la primera intersección de $\varphi_t^R(0, y_0; \mu)$ con la parte negativa del eje y o el origen para $t \geq 0$, y

$$P_L : [-\delta_L, 0] \times [0, \delta_{\mu_L}] \implies R^+ \quad \text{con} \quad P_L(y_1; \mu) = y_2,$$

donde y_2 es la primera intersección de $\varphi_t^R(0, y_1; \mu)$ con la parte positiva del eje y o el origen para $t \geq 0$.

Ya con esto, probaremos que dichos mapeos están bien definidos en $\mu = 0$. Ya sabemos que en este caso el origen es un punto de equilibrio de los sistemas (3.12) y (3.13), más aún, sabemos que es un punto de equilibrio hiperbólico ya que sus eigenvalores son (3.5), con $\lambda_L, \lambda_R \neq 0$, en el sistema linealizado y por lo tanto las trayectorias tienen un comportamiento de espiral alrededor del equilibrio y repetidamente tienen intersecciones con el eje y (Figura 3.1). El giro de dichos espirales es en el sentido horario ya que en ambos sistemas tenemos que

$$\dot{x}(0, y; 0) = y,$$

y, por el Teorema de Hartman-Grobman, podemos decir que los sistemas (3.12) y (3.13) tienen el mismo comportamiento para alguna vecindad suficientemente cercana al origen. Por lo tanto, P_R y P_L están bien definidas en $\mu = 0$.

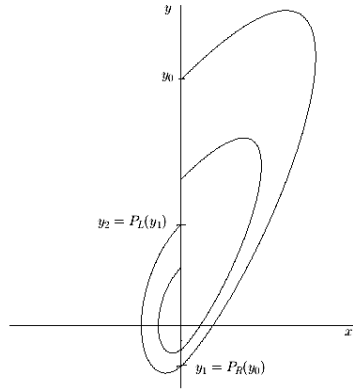


Figura 3.1: Mapeos en $\mu = 0$

Ahora probemos primero que P_R está bien definido para $\mu > 0$ suficientemente pequeño. En este caso, el origen ya no es un punto de equilibrio de (3.12), y por (3.10), el punto de equilibrio está en la región izquierda del plano. Las propiedades necesarios de P_R se obtienen considerando el comportamiento de la trayectoria que pasa a través del origen, la cual se puede deducir calculando aproximaciones del flujo de (3.12) sobre el eje y . Dado que

$$\dot{x}(0, y; \mu) = b(\mu)y, \quad \text{con } b(0) = 1,$$

y $b(\mu)$ es continua, hay una vecindad de μ en la que $b(\mu) > 0$ y por lo tanto hay una vecindad del origen en la que el flujo de la zona positiva del eje y tiene dirección hacia la parte derecha del plano ya que

$$\dot{x}(0, y; \mu) = b(\mu)y > 0, \quad y > 0,$$

suficientemente pequeño, y la zona negativa del eje y tiene dirección hacia la izquierda del plano, porque

$$\dot{x}(0, y; \mu) = b(\mu)y < 0, \quad y < 0.$$

Más aún, tenemos que $\dot{y}(0, y; \mu) = q(\mu)\mu + d(\mu)y$ y como $q(0) = -1$ y $q(\mu)$ es continua, entonces para $\mu > 0$ suficientemente pequeño y también un y suficientemente pequeño tenemos que $\dot{y} < 0$, y ya que $\dot{x}(0, 0; \mu) = 0$, deducimos que la trayectoria que pasa a través del origen lo hace de manera tangente, sin entrar a la región derecha del plano, así por la definición que le dimos a P_R , podemos tener que $P_R(0, \mu) = 0$. Además como el flujo es continuo, existe un intervalo no vacío $[0, \delta_R]$ en la parte positiva del eje y que es asociado a la parte negativa del mismo (Figura 3.2). Así, el mapeo P_R , está bien definido para algún $\delta_{\mu_R} > 0$ con $P_R(0, \mu) = 0$. Finalmente P_R es C^j ya que (3.12) lo es.

En segundo lugar probaremos que P_L está bien definido para $\mu > 0$ suficientemente pequeño. Dado que $F_L(0, 0; \mu) = (0, q(\mu)\mu)$ y $q(0) = -1$, la dirección inicial de la trayectoria $\varphi_t^L(0, 0; \mu)$, que inicia en el origen, es directamente hacia abajo, además de que, ya vimos, el punto de equilibrio está en la región izquierda del plano para $\mu > 0$ y suficientemente pequeño, y por esto último debe estar cercano al origen. Así, podemos usar el flujo del sistema linealizado de la región izquierda, para aproximar $\varphi_t^L(0, 0; \mu)$. Recordemos que los eigenvalores de $A_L(0)$ son $\lambda_L \pm iw_L$, donde $\lambda_L, w_L > 0$ y por lo tanto (x_L^*, y_L^*) es un foco inestable cuando $\mu = 0$, y, por continuidad, permanece con ese comportamiento cuando μ es suficientemente pequeño. En consecuencia, el flujo $\varphi_t^L(0, 0; \mu)$ inicia en el origen con un giro tipo espiral en el sentido horario y se mantiene contenido en la región izquierda del plano, pero dado que el punto de equilibrio es inestable, tendrá una intersección con el eje y en alguna punto $P_L(0; \mu) = \hat{y}(\mu) > 0$ antes de dar un giro de 360° alrededor del punto de equilibrio, y como el flujo es continuo, P_L debe asociar un intervalo no vacío $[-\delta_L, 0]$ a puntos sobre la parte positiva del eje y , por encima de $\hat{y}(\mu)$ (Figura 3.2). Así el mapeo P_L , está bien definido para algún $\delta_{\mu_L} > 0$ y también es C^j

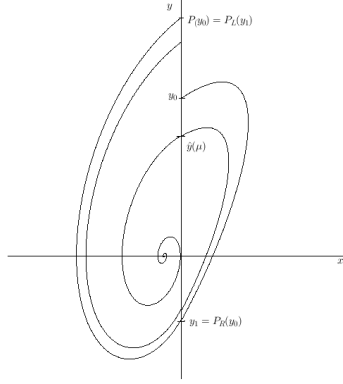
Con todo lo anterior es posible definir el mapeo de Poincaré, con el que trabajaremos, de la siguiente manera. Sean

$$\begin{aligned} P_R : [0, \delta_R] \times [0, \delta_{\mu_R}] &\longrightarrow R^- \quad \text{con} \quad P_R(y_0; \mu) = y_1, \\ P_L : [-\delta_L] \times [0, \delta_{\mu_L}] &\longrightarrow R^+ \quad \text{con} \quad P_L(y_1; \mu) = y_2, \end{aligned}$$

donde $P_R(0; 0) = P_L(0; 0) = 0$, están bien definidos. Lo anterior implica que existen $\delta, \delta_\mu > 0$ tales que el mapeo de Poincaré,

$$\begin{aligned} P : [0, \delta] \times [0, \delta_\mu] &\longrightarrow R^+ \quad \text{con} \\ P(y_0; \mu) &= (P_L \circ P_R)(y_0; \mu) = P_L(P_R(y_0; \mu); \mu) \in C^j. \end{aligned}$$

Lo que nos interesa de este mapeo es buscar la existencia de órbitas periódicas que den lugar a la bifurcación de Hopf. Para esto empezamos calculando las

Figura 3.2: Mapeo P con $\mu > 0$.

derivadas del mapeo en $(0^+, 0^+)$. Primero buscamos $D_\mu P(0, 0^+)$. Para esto, tenemos que $P_R(0, \mu) = 0$, entonces, debido a que es una función constante, se sigue que

$$D_\mu P(0, 0^+) = 0.$$

También tenemos que $P_L(0; \mu) = \hat{y}(\mu)$, lo cual nos permite ver que para $y_0 = 0$

$$P(0, \mu) = P_L(P_R(0, \mu); \mu) = P_L(0; \mu) = \hat{y}(\mu).$$

Además recordando que si $\mu = 0$, el origen es un punto de equilibrio tenemos que $\hat{y}(0) = 0$, por lo tanto

$$\alpha = D_\mu P(0; 0^+) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\hat{y}(\mu) - \hat{y}(0)}{\mu} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\hat{y}(\mu)}{\mu} > 0.$$

Para calcular el valor de $D_y P(0^+; 0)$ consideramos los sistemas (3.8) cuando $\mu = 0$, en específico el de la región derecha, es decir, para $k = R$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_R(0) & 1 \\ c_R(0) & d(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

el cual sabemos que tiene eigenvalores $-\lambda_R \pm iw_R$ con $\lambda_R, w_R > 0$, por lo tanto tiene un punto de equilibrio en el origen cuyo flujo tiene un comportamiento de foco estable. La solución del sistema está dado por (Ver Proposición C.6)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{e^{-\lambda_R t}}{w_R} M(t) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

donde

$$M(t) = \begin{bmatrix} w_R \cos(w_R t) + (\lambda_R + a_R(0)) \sin(w_R t) & \sin(w_R t) \\ c_R(0) \sin(w_R t) & w_R \cos(w_R t) + (\lambda_R + d(0)) \sin(w_R t) \end{bmatrix},$$

y así el flujo del sistema tendrá la expresión

$$\varphi_t^R(x, y) = \frac{e^{-\lambda_R t}}{w_R} M(t) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Finalmente para puntos sobre el eje y , el sistema tiene el flujo

$$\varphi_t^R(0, y_0) = \frac{e^{-\lambda_R t}}{w_R} \begin{bmatrix} \text{sen}(w_R t) \\ w_R \cos(w_R t) + (\lambda_R + d(0)) \text{sen}(w_R t) \end{bmatrix} y_0$$

de donde es fácil ver que asocia los puntos de la parte positiva del eje y a la parte negativa en el tiempo $\tau = \frac{\pi}{w_R}$, con lo cual tenemos que

$$\varphi_\tau^R = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{-\lambda_R \tau} \end{bmatrix},$$

Este flujo que acabamos de obtener es una aproximación del flujo del sistema (3.13) para la región derecha del plano muy cercano al origen, debido a la continuidad. Por lo tanto cuando

$$y_0 \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad P_R(y_0; 0) \rightarrow -e^{-\frac{\lambda_R \pi}{w_R}} y_0.$$

Mediante un análisis similar encontramos que el sistema de la región izquierda ($k = L$), el cual tiene eigenvalores $\lambda_L \pm iw_L$ con $\mu = 0$, tiene flujo

$$\varphi_t^L = \frac{e^{\lambda_L t}}{w_L} N(t) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

donde

$$N(t) = \begin{bmatrix} w_L \cos(w_L t) + (-\lambda_L + a_L(0)) \text{sen}(w_L t) & \text{sen}(w_L t) \\ c_L(0) \text{sen}(w_L t) & w_L \cos(w_L t) + (-\lambda_L + d(0)) \text{sen}(w_L t) \end{bmatrix},$$

por lo tanto el flujo para valores sobre la parte positiva del eje y será

$$\varphi_t^L(0, y_1) = \frac{e^{\lambda_L t}}{w_L} \begin{bmatrix} \text{sen}(w_L t) \\ w_L \cos(w_L t) + (-\lambda_L + d(0)) \text{sen}(w_L t) \end{bmatrix} y_1.$$

De igual manera, cuando $\tau = \frac{\pi}{w_L}$, los valores negativos del eje y con los valores positivos del mismo, ya que

$$\varphi_\tau^L = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{-\lambda_L \tau} \end{bmatrix},$$

y este flujo es una aproximación del sistema (3.12), en la región izquierda muy cercano al origen, debido a la continuidad. Por lo tanto

$$y_1 \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad P_L(y_1; 0) \rightarrow -e^{-\frac{\lambda_L \pi}{w_L}} y_1.$$

Con todo lo anterior, cuando $y_0 \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned}
P(y_0; 0) &= (P_L \circ P_R)(y_0; 0) = P_L(P_R(y_0; 0); 0) = P_L(-e^{-\frac{\lambda_R \pi}{w_R}} y_0; 0) \\
&= (-e^{-\frac{\lambda_L \pi}{w_L}})(-e^{-\frac{\lambda_R \pi}{w_R}} y_0) = -e^{(\frac{\lambda_L}{w_L} - \frac{\lambda_R}{w_R})\pi} y_0 \\
&= e^{\Lambda \pi} y_0,
\end{aligned}$$

con lo que concluimos que

$$D_y P(0^+; 0) = e^{\Lambda \pi}.$$

Por último buscamos probar la existencia de órbitas periódicas. Para esto se define la función

$$v : [0, \delta] \times [0, \delta_\mu] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad v(y_0, \mu) = P(y_0; \mu) - y_0,$$

la cual es C^j . Claramente los ceros de la función v corresponden a los puntos fijos del mapeo de Poincaré P , y estos representan órbitas periódicas para el sistema (3.8). Debido a que usaremos el teorema de la función implícita para v en el origen, lo primero que haremos será extender su definición alrededor de este punto. Sea

$$\tilde{v} : [-\delta, \delta] \times [-\delta_\mu, \delta_\mu] \rightarrow \mathbb{R},$$

una función C^j con $\tilde{v}(y_0, \mu) = v(y_0, \mu)$ para $y_0, \mu \geq 0$. Para esta función podemos notar lo siguiente:

- $\tilde{v}(0, 0) = v(0, 0) = P(0; 0) = 0$
- $D_y \tilde{v}(0, 0) = D_y P(0^+; 0) - 1 = e^{\Lambda \pi} - 1$
- $D_\mu \tilde{v}(0, 0) = D_\mu P(0, 0^+) = \alpha > 0$.

Los primeros dos puntos nos ayudan para aplicar el teorema de la función implícita a la función, \tilde{v} en $(0, 0)$. Por lo tanto, existe una función y_+ que satisface que $\tilde{v}(y_+(\mu), \mu) = 0$ para toda μ en una alguna vecindad de $\mu = 0$, con $y_+(0) = 0$, y además

$$D_\mu y_+(0) = -\frac{D_\mu \tilde{v}(0, 0)}{D_y \tilde{v}(0, 0)} = -\frac{\alpha}{e^{\Lambda \pi} - 1} = -\frac{\alpha}{1 - e^{\Lambda \pi}}.$$

Así, cuando $\lambda < 0$, tenemos que $D_\mu y_+(0) > 0$, lo que significa que es creciente en dicho punto, por lo tanto, dado que $y_+(0) = 0$, para valores positivos de μ cercanos a cero, $y_+(\mu) > 0$, es decir que están en la parte positiva del eje y , así que

$$\tilde{v}(y_+(\mu), \mu) = v(y_+(\mu), \mu) = 0,$$

lo que implica que $y_+(\mu)$ es un punto periódico de la función del mapeo de Poincaré P , y cuando $0 < \mu < \delta_\mu$, el sistema (3.8) tiene una órbita periódica

que cruza la parte positiva del eje y en $y_+(\mu)$. Digamos que dicha órbita periódica tiene su otro cruce con el eje y en $y_-(\mu) = P_R(y_+(\mu); \mu)$. La función $y_-(\mu)$ es también C^j y se hace cero en $\mu = 0$. Además calculando

$$D_\mu y_-(0^+) = D_\mu P_R(0^+, 0^+)$$

usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} D_\mu y_-(0^+) &= D_y P_R(0^+, 0) D_\mu y_+(0^+) + D_\mu P_R(0, 0^+) D_\mu \mu \\ &= (-e^{-\frac{\lambda_R}{w_R} \pi}) \left(\frac{\alpha}{1 - e^{\Lambda \pi}} \right) + (0)(1) = (-e^{-\frac{\lambda_R}{w_R} \pi}) \left(\frac{\alpha}{1 - e^{(\frac{\lambda_L}{w_L} - \frac{\lambda_R}{w_R}) \pi}} \right) \\ &= (-e^{-\frac{\lambda_R}{w_R} \pi}) \left(\frac{\alpha}{1 - \frac{e^{\frac{\lambda_L}{w_L} \pi}}{e^{\frac{\lambda_R}{w_R} \pi}}} \right) = (-e^{-\frac{\lambda_R}{w_R} \pi}) \left(-\frac{\alpha e^{\frac{\lambda_R}{w_R} \pi}}{e^{\frac{\lambda_R}{w_R} \pi} - e^{\frac{\lambda_L}{w_L} \pi}} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{e^{\frac{\lambda_R}{w_R} \pi} - e^{\frac{\lambda_L}{w_L} \pi}}. \end{aligned}$$

Como $\Lambda < 0$ entonces $\frac{\lambda_L}{w_L} < \frac{\lambda_R}{w_R}$, y por lo tanto $D_\mu y_-(0^+) < 0$. Es decir, $y_-(\mu)$ es decreciente en $\mu = 0$ y por lo tanto para valores positivos de μ cercanos a cero, $y_-(\mu) < 0$. es decir que los cruces de la órbita periódica se da en la parte negativa del eje y .

De otra manera, si $\Lambda < 0$, $D_\mu y_+(0) < 0$, por lo que $y_+(\mu)$ es decreciente en dicho punto, por lo tanto para valores positivos de μ cercanos a cero, $y_+(\mu) < 0$ es decir que los ceros de la función \tilde{v} son negativos, pero v no está definido para esos puntos, por lo tanto, dado que por el teorema de la función implícita $y_+(\mu)$ es la única solución de $\tilde{v}(y_0, \mu) = 0$ en el origen, v no tiene ceros, el mapeo P no tiene puntos fijos y el sistema (3.8) no tiene órbitas periódicas.

Por último queremos ver la estabilidad de la órbita periódica. Para esto, usamos el hecho de que si p es un punto fijo de un mapeo f , cuando $|f(p)| < 1$ entonces p es un atractor. Entonces buscamos

$$D_y \tilde{v}(y_+(\mu), \mu).$$

Para esto, recordemos que $D_y \tilde{v}(0, 0) = e^{\Lambda \pi} - 1$, y por lo tanto cuando $\Lambda < 0$, $-1 < D_y \tilde{v}(0, 0) < 0$ y dado que \tilde{v} es una función C^j , tenemos que para algún valor de μ positivo, suficientemente cercano a cero,

$$-1 < D_y \tilde{v}(y_+(\mu), \mu) < 0 \quad \Rightarrow \quad |D_y \tilde{v}(y_+(\mu), \mu)| < 1,$$

por lo tanto $y_+(\mu) > 0$ representa puntos fijos atractores del mapeo P , y órbitas periódicas del sistema (3.8), siempre que $0 < \mu < \delta_\mu$, lo que demuestra el teorema, para $\mu > 0$.

Para probar el teorema cuando $\mu < 0$ se propone la transformación $(z, \nu, \tau) \mapsto (-x, -\mu, -t)$ (con $x, z \in R^2$), y analizaremos las propiedades que nuestro nuevo sistema arroja. Primero notemos que

$$z' = \frac{dz}{d\tau} = -\frac{dx}{d\tau} = -\frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -(-1)\dot{x} = \dot{x}.$$

Además, de (3.8), tenemos que para $k = \{L, R\}$

$$\begin{aligned} F_k(x; \mu) &= F_k(-z; -\nu) = \begin{bmatrix} 0 \\ q(-\nu) \end{bmatrix} (-\nu) + \begin{bmatrix} a_k(-\nu) & b(-\nu) \\ c_k(-\nu) & d(-\nu) \end{bmatrix} (-z) \\ &= -\left(\begin{bmatrix} 0 \\ q(-\nu) \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} a_k(-\nu) & b(-\nu) \\ c_k(-\nu) & d(-\nu) \end{bmatrix} z \right). \end{aligned}$$

Ahora llamemos $a_k(-\nu) = \bar{a}_k(\nu)$, $b(-\nu) = \bar{b}(\nu)$, $c_k(-\nu) = \bar{c}_k(\nu)$ y $d(-\nu) = \bar{d}(\nu)$ y así tener que

$$\begin{bmatrix} a_k(-\nu) & b(-\nu) \\ c_k(-\nu) & d(-\nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_k(\nu) & \bar{b}(\nu) \\ \bar{c}_k(\nu) & \bar{d}(\nu) \end{bmatrix},$$

en especial, para $\nu = 0$

$$\begin{bmatrix} a_k(0) & b(0) \\ c_k(0) & d(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_k(0) & \bar{b}(0) \\ \bar{c}_k(0) & \bar{d}(0) \end{bmatrix}.$$

Entonces tenemos que

$$z' = \dot{x} = \begin{cases} -\left(\begin{bmatrix} 0 \\ q(-\nu) \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} \bar{a}_R(\nu) & \bar{b}(\nu) \\ \bar{c}_R(\nu) & \bar{d}(\nu) \end{bmatrix} z \right) & \text{si } z_1 \leq 0 \\ -\left(\begin{bmatrix} 0 \\ q(-\nu) \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} \bar{a}_L(\nu) & \bar{b}(\nu) \\ \bar{c}_L(\nu) & \bar{d}(\nu) \end{bmatrix} z \right) & \text{si } z_1 \geq 0. \end{cases}$$

Por lo que, cuando $\nu = 0$, el origen es un punto de equilibrio de ambos sistemas, donde se puede ver que para $z_1 \leq 0$ los eigenvalores, son de la forma $\lambda_R \pm iw_R$ (foco inestable) y para $z_1 \geq 0$ son de la forma $-\lambda_L \pm iw_L$ (foco estable), y por continuidad se mantienen así para valores de ν suficientemente cercanos a cero. Además, la primer componente del punto de equilibrio, en cada sistema es

$$z_{1L}^* = -\frac{\nu}{\lambda_R^2 + w_R^2}, \quad z_{1R}^* = -\frac{\nu}{\lambda_L^2 + w_L^2}.$$

para valores de ν suficientemente cercanos a cero. Así, cuando ν es pequeño y positivo (negativo), el equilibrio se localiza en la región izquierda (derecha) y es un foco inestable (estable), es decir que nuestro nuevo sistema tiene las mismas propiedades que el sistema (3.8), pero como τ esta en reversa, la estabilidad del sistema se invierte. Además ahora

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_R}{w_R} - \frac{\lambda_L}{w_L} = -\Lambda.$$

Finalmente, con lo ya demostrado para el sistema (3.8), tenemos que, para $\nu > 0$, si $\Lambda_1 < 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $0 < \nu < \varepsilon$ hay una órbita periódica inestable y para $-\varepsilon < \nu < 0$ no hay órbitas periódicas.

Lo que nos dice que, cuando $\Lambda > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $-\varepsilon < \mu < 0$ hay una órbita periódica inestable y para $0 < \mu < \varepsilon$ no hay órbitas periódicas, y así queda demostrado el teorema para $\mu < 0$, y así se concluye la demostración. ■

3.4. Ejemplo

Ejemplo. Consideremos el sistema continuo definido a trozos.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - |x| + y \\ \dot{y} &= -3x + y + 3y^2 - \mu,\end{aligned}\tag{3.14}$$

el cual se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} y \\ -3x + y + 3y^2 - \mu \end{bmatrix} & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{bmatrix} -2x + y \\ -3x + y + 3y^2 - \mu \end{bmatrix} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Analicemos los sistemas por separado, comenzando con el sistema de la zona izquierda.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -3x + y + 3y^2 - \mu \end{bmatrix}.$$

Buscando el punto crítico tenemos que

$$\begin{bmatrix} y \\ -3x + y + 3y^2 - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

así, $y = 0$, y

$$-3x - \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\mu}{3},$$

lo que nos dice que el punto de equilibrio del sistema está en el punto $(-\frac{\mu}{3}, 0)$, es decir, que el punto de equilibrio del sistema de la región izquierda será visible si $\mu \geq 0$ y que dicho punto está en el origen cuando $\mu = 0$. Para ver su comportamiento linealizamos el sistema, obteniendo la matriz Jacobiana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 + 6y \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo el punto de equilibrio tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

y calculando sus valores propios

$$r = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{11}}{2},$$

de donde podemos ver que no importa en donde se encuentre el punto de equilibrio, éste siempre será un foco inestable, incluyendo en el origen, además de que $\lambda_L = \frac{1}{2}$ y $w_L = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Ahora trabajemos con el sistema de la región derecha,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + y \\ -3x + y + 3y^2 - \mu \end{bmatrix}.$$

Buscando el punto crítico tenemos que

$$\begin{bmatrix} -2x + y \\ -3x + y + 3y^2 - \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De la primera ecuación tenemos que $y = 2x$, y sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos

$$12x^2 - x - \mu = 0,$$

lo que nos hace ver que el sistema tiene puntos de equilibrio en

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 48\mu}}{24}, \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48\mu}}{12} \right), \quad (3.15)$$

Obviamente no están definidos para cualquier valor de μ . La expresión dentro de la raíz nos dice que sólo habrá puntos de equilibrio para $\mu \in [-\frac{1}{48}, \infty)$, además debemos tomar en cuenta para qué valores de μ los puntos de equilibrio se podrán ver en el sistema (3.14), ya que recordemos que este sistema está definido para $x \geq 0$, por lo tanto buscamos para que valores se cumple que

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 48\mu}}{24} \geq 0.$$

Se puede ver que la suma de la expresión anterior siempre es mayor que cero, lo que quiere decir que el punto de equilibrio resultante aparecerá siempre que $\mu \in [-\frac{1}{48}, \infty)$, por lo tanto sólo nos interesa la resta, de donde vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1 + 48\mu}}{24} \geq 0 &\Rightarrow 1 \geq \sqrt{1 + 48\mu} \Rightarrow 1 \geq 1 + 48\mu \\ &\Rightarrow \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

con esto, podemos concluir varias cosas. Lo primero que diremos es que el punto de equilibrio

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 48\mu}}{24}, \frac{1 - \sqrt{1 + 48\mu}}{12} \right), \quad (3.17)$$

será el que nos importa, para aplicar el teorema visto en este capítulo, ya que este punto es el que llega al origen cuando $\mu = 0$ y será visible en el sistema (3.14) cuando $\mu \in [-\frac{1}{48}, 0]$. Ahora, para ver su comportamiento cualitativo, calculamos la matriz Jacobiana de la zona derecha,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 + 6y \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

En específico, cuando el punto de equilibrio está en el origen, es decir, cuando $\mu = 0$,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

donde observamos que tiene eigenvalores, $r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, lo que lo hace un foco estable, como ya se había mencionado, y entonces $\lambda_R = \frac{1}{2}$ y $w_R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dicho comportamiento de foco estable se mantiene cuando $\mu \in (2 - \frac{7}{6}\sqrt{3}, 0)$, donde $2 - \frac{7}{6}\sqrt{3} \approx -0.020725$, es decir que cuando $\mu \rightarrow 0_+$ los eigenvalores ese aproximan a $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Todo esto nos permite ver que el sistema (3.14) se adecua a las condiciones de (3.1), donde

$$\Lambda = \frac{\lambda_L}{w_L} - \frac{\lambda_R}{w_R} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0.$$

Entonces, por el teorema de este capítulo existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $0 < \mu < \varepsilon$ hay una órbita periódica estable, y para $-\varepsilon < \mu < 0$.

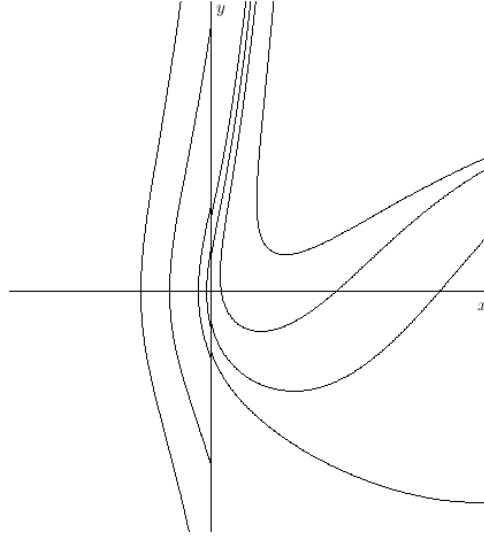
Ahora analicemos la evolución del sistema (3.14) conforme cambia el valor de μ . Como ya habíamos mencionado, para $\mu \in (-\infty, -\frac{1}{48})$ no tenemos puntos de equilibrio en el sistema (3.14), ya que los del sistema izquierdo no son visibles para valores de $\mu < 0$ y los de la zona derecha no esta definidos en este intervalo. Se puede ver un retrato fase en la Figura 3.3.

Después, cuando $\mu = -\frac{1}{48}$ sólo hay un punto de equilibrio en $(\frac{1}{24}, \frac{1}{12})$, ya que (3.15) tiene sólo una solución. Para ver su comportamiento la sustituimos en (3.18), obteniendo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

la cual tiene eigenvalores $r = 0$, $r = -\frac{1}{2}$. Se puede demostrar que aquí se lleva una bifurcación silla-nodo, pero al no ser el tema central del trabajo, sólo se hace el comentario y se muestra el retrato fase en la Figura 3.4

Cuando $\mu \in (-\frac{1}{48}, 2 - \frac{7}{6}\sqrt{3})$, se puede ver, sin mostrar aquí los cálculos correspondientes, que el punto de equilibrio (3.17) actúa como un nodo estable y, como ya se mencionó, el punto

Figura 3.3: Sistema con $\mu = 1$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 48\mu}}{24}, \frac{1 + \sqrt{1 + 48\mu}}{12} \right) \quad (3.19)$$

aparecerá en el sistema para todo $\mu > -\frac{1}{48}$. Analizamos su estabilidad en la matriz Jacobiana obteniendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & \frac{5 + \sqrt{1 + 48\mu}}{4} \end{bmatrix}$$

cuyos eigenvalores están dados por

$$r = \frac{\frac{-3 + \sqrt{1 + 48\mu}}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{-3 + \sqrt{1 + 48\mu}}{4}\right)^2 + 22 + 2\sqrt{1 + 48\mu}}}{2},$$

donde es fácil ver que el valor obtenido de la raíz más grande, es siempre mayor que el del elemento dado por la traza, esto quiere decir que las raíces siempre son de signos contrarios y por lo tanto es un punto silla. En la Figura 3.5 se muestra el retrato fase para $\mu = 0.0208$.

Dupués de esto, cuando $\mu \in (2 - \frac{7}{6}\sqrt{3}, 0)$, es donde aparece el foco estable que se esta acercando al origen conforme μ tiende a cero, además del puntilla. La Figura 3.6 muestra el comportamiento un retrato fase del sistema, para un valor de $\mu = -0.01$.

Cuando $\mu = 0$ aparece un punto de equilibrio para ambas regiones, que es un foco estable para la región derecha y un foco inestable para la izquierda, sin olvidar que el punto silla de la región derecha. Se puede ver esto en la Figura 3.7

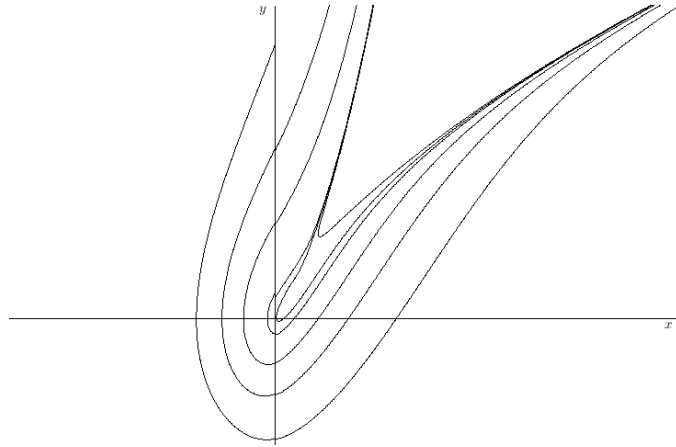


Figura 3.4: Sistema con $\mu = -\frac{1}{48}$

Por último para valores cercanos a $\mu = 0$ el sistema tendrá un punto de equilibrio en la región izquierda, el cual está rodeado por un ciclo límite, con lo que se nota la bifurcación tipo Hopf que experimenta el punto de equilibrio, sin olvidar el punto silla de la región derecha. Figura 3.8

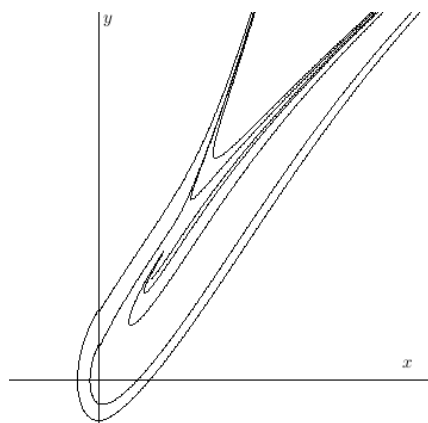


Figura 3.5: Sistema con $\mu = 0.0208$

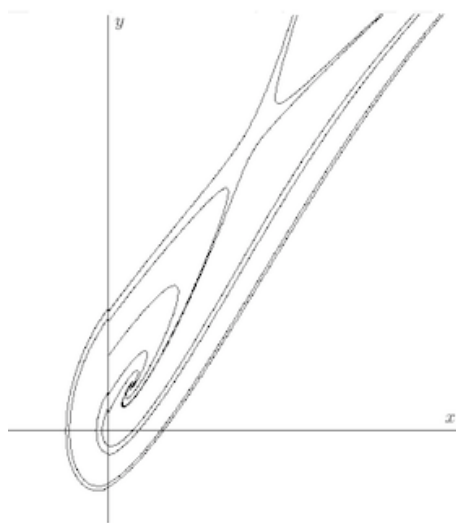
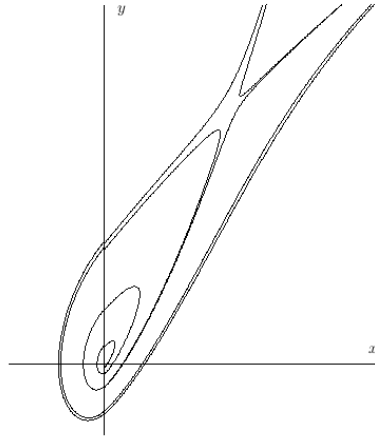
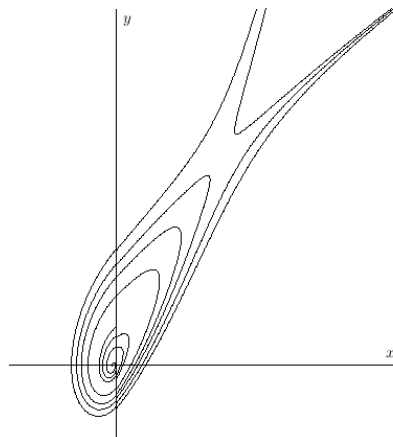


Figura 3.6: Sistema con $\mu = -0.01$.

Figura 3.7: Sistema con $\mu = 0$.Figura 3.8: Sistema con $\mu = 0.01$.

Conclusiones y Perspectivas

Finalizamos nuestro trabajo presentando las conclusiones obtenidas de lo estudiado y mencionamos algunas de las ideas que se tiene para trabajos a futuros como consecuencia de lo realizado aquí.

En el primer capítulo damos algunas definiciones importantes para introducirnos en lo ya establecido sobre sistemas dinámicos suaves por pedazos además de presentar un ejemplo sencillo que ilustre la idea general de estos.

Nuestro trabajo está enfocado en sistemas dinámicos suaves por pedazos en el plano, los cuales se definen continuos en todo \mathbb{R}^2 , obviamente el primer punto de interés es la continuidad sobre la frontera de conmutación, la cual fue definida sobre el eje y para simplificar cálculos durante el desarrollo; así se dividió el plano en dos zonas suaves. Además se planteó la idea de que al mover los parámetros de bifurcación provocarán que el trayecto de el punto de equilibrio a estudiar estuviera definido de manera continua y que estuviera siempre del mismo lado de las dos zonas, así cuando el parámetro es menor que cero (valor de bifurcación) el equilibrio está del mismo lado del plano en ambos sistemas, por lo tanto uno se notaba y el otro era virtual, cuando el parámetro es cero el equilibrio estaba en el origen y actuaba para ambas zonas y cuando era mayor que cero el equilibrio pasaba a la otra zona siendo virtual el que se notaba en la otra zona y viceversa. Finalmente se buscaron las condiciones necesarias para que los puntos de equilibrio de los sistemas de ambas zonas actuaran como focos buscando que los espirales asociados formen órbitas periódicas, que estuvieran asociadas a la bifurcación tipo Hopf, cuando coinciden en la variedad de conmutación.

En el segundo capítulo se trabajó con sistemas lineales y se buscaron las condiciones de continuidad que presentaran las matrices asociadas. En el tercer capítulo se generalizó a sistemas no lineales donde la herramienta importante fue la expansión de Taylor para buscar asociarlas también a matrices que nos representaran un comportamiento equivalente al lineal.

En ambos casos la herramienta importante para la búsqueda de órbitas periódicas fue el mapeo de Poincaré, analizando las soluciones obtenidas de los sistemas asociados a las zonas en las que se dividió el plano, usando resultados de análisis que fueron de suma importancia, como el teorema del valor medio y

el teorema de la función implícita. De esta manera, se obtuvieron demostraciones adecuadas de los teoremas que nos marcan las condiciones necesarias para encontrar las bifurcaciones tipo Hopf en este tipo de sistemas que se han vuelto un objeto de estudio de gran relevancia.

Para concluir se tienen en mente cuatro ideas con las que se podría seguir adelante en la investigación desarrollada

- Intentar hallar una bifurcación tipo Hopf en el plano dividiéndolo en cuatro zonas donde el eje x y el eje y sean las variedades de conmutación.
- Encontrar bifurcaciones tipo Hopf en Sistemas Filippov
- Expandir estos desarrollos al sistema tridimensional.
- Generalizar los resultados a n dimensiones.

Apéndice A

Resultados de Ecuaciones Diferenciales

En este Apéndice hacemos referencia a algunos resultados de Ecuaciones Diferenciales que fueron de gran utilidad y que se dieron por hecho en el desarrollo del trabajo, pero aquí los mencionamos y demostramos.

Proposición A.1 *Un sistema lineal no puede tener ciclos límite.*

Demostración:

Sea $\dot{x} = Ax$ un sistema lineal con $x \in \mathbb{R}^2$ y $x(t)$ una solución periódica de dicho sistema. Entonces probemos que $z(t) = cx(t)$, con $c \in \mathbb{R}$, también es solución. Entonces

$$\dot{z}(t) = [c\dot{x}(t)] = c\dot{x}(t) = c[Ax(t)] = A[cx(t)] = Az(t),$$

y al ser c cualquier real, las soluciones periódicas de $\dot{x} = Ax$ no son aisladas, es decir, no son ciclos límite. ■

Definición A.1 *Un sistema en \mathbb{R}^2 se dice que es un Sistema Hamiltoniano si existe una función $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, que sea C^∞ , tal que*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)\end{aligned}\tag{A.1}$$

La función H se llama Función Hamiltoniana

Definición A.2 *Suponga que $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ es continua y para todo x_0 en \mathbb{R}^n el sistema*

$$\dot{x} = f(x),\tag{A.2}$$

tiene una única solución $x(t) = x(t, x_0)$ con $x(0, x_0) = x_0$. Se dice que una función $E : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es una primera integral de A.2 en una región $D \subset \mathbb{R}^n$ si E es continua junto a sus primeras derivadas parciales, E no es constante en cualquier conjunto abierto D y $E(x(t))$ es constante a lo largo de las soluciones de A.2, es decir $\frac{dE(x(t))}{dt} = 0$.

Definición A.3 El sistema (A.2) se dice que es conservativo si tiene una primera integral E en \mathbb{R}^n .

Proposición A.2 Para un sistema Hamiltoniano de la forma (A.1), H es una primera integral de éste, es decir un sistema Hamiltoniano es Conservativo.

Demostración:

Calculando la derivada parcial de H con respecto a t , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial t} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y(t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \left(-\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned}$$

es decir, es constante a lo largo de las soluciones $x(t), y(t)$, y dado que H es C^∞ , es una primera integral, por lo tanto el sistema es Conservativo. ■

Proposición A.3 Un sistema Conservativo no tiene ciclos límite.

Demostración:

Supongamos que un sistema conservativo tiene un ciclo límite, llamémosle $x_1(t)$. Por ser conservativo, $E(x_1(t)) = C_1$. Al ser una órbita aislada, existe un abierto D el cual no contiene otro ciclo límite. Ahora, dado que E no es constante en cualquier abierto, escojamos un punto a , tal que $E(a) = C_2 \neq C_1$. Sea $x_2(t_0) = a$, es decir $E(x_2(t)) = E(a) = C_2$, por lo tanto $E(x_2(t)) = C_2$. Ya que $x_2(t)$ no es un ciclo límite entonces $x_2(t) \rightarrow x_1(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ ó cuando $t \rightarrow -\infty$. Por lo tanto $E(x_2(t)) \rightarrow E(x_1(t))$ cuando $t \rightarrow \infty$ ó cuando $t \rightarrow -\infty$. Así $C_2 \rightarrow C_1$ cuando $t \rightarrow \infty$ ó cuando $t \rightarrow -\infty$ y como C_2 y C_1 son constantes, $C_2 = C_1$, obteniendo una contradicción. Por lo tanto un sistema conservativo no puede tener ciclos límite. ■

Proposición A.4 Un sistema lineal por pedazos, desacoplado de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ r_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

no tiene ciclos límite.

Demostración:

Tomemos la primera ecuación del sistema cuando $x < 0$, es decir

$$\dot{x} = l_{11}x + c_1 \quad (\text{A.4})$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden, que se puede expresar de la forma

$$\dot{x} + P(t)x = Q(t) \quad (\text{A.5})$$

donde $P(t) = -l_{11}$ y $Q(t) = c_1$. Recordemos que A.5 tiene solución

$$x = e^{-\int P(t)dt} \left[\int e^{\int P(t)dt} Q(t)dt + C \right] \quad (\text{A.6})$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} \int P(t)dt &= -\int l_{11}dt = -l_{11}t \quad \Rightarrow \quad e^{\int P(t)dt} = e^{-l_{11}t} \\ \Rightarrow \int e^{-\int P(t)dt} Q(t)dt &= \int e^{-l_{11}t} c_1 dt = -\frac{c_1}{l_{11}} e^{-l_{11}t}, \end{aligned}$$

por lo tanto, sustituyendo en A.6, obtenemos

$$x = e^{l_{11}t} \left[-\frac{c_1}{l_{11}} e^{-l_{11}t} + C \right] \Rightarrow x = -\frac{c_1}{l_{11}} + C e^{l_{11}t}$$

Ahora se puede ver fácilmente en A.4, que la componente $x = x^*$ del punto de equilibrio del sistema cuando $x < 0$ es $x^* = -\frac{c_1}{l_{11}}$. Y así, si tomamos como valor inicial de la solución al punto de equilibrio, obtenemos que $x = -\frac{c_1}{l_{11}}$, que representa en \mathbb{R}^2 a una recta vertical que pasa sobre el punto de equilibrio, por lo tanto no puede tener un ciclo límite. Finalmente tomando la primer ecuación del sistema cuando $x > 0$, obtenemos el mismo razonamiento. ■

Teorema A.1 *Sea $f(x)$ continua en un conjunto abierto E y sea $x = x_p(t)$ una solución periódica de $\dot{x} = f(x)$ de periodo p , es decir, $x_p(t+p) = x_p(t)$ para $-\infty < t < \infty$. Sea $x = x_p(t)$, $0 \leq t \leq p$ una curva de Jordan con interior I contenido en E y $f(x_p(t)) \neq 0$. Entonces I contiene un punto de equilibrio.*

No presentaremos la demostración de este Teorema debido a lo extenso de ella, pero se puede ver en [12], página 150.

Apéndice B

Algunos Teoremas Importantes

En este apéndice se mencionan algunos teoremas que no pertenecen a la teoría de Ecuaciones Diferenciales, pero que fueron de suma importancia durante el desarrollo de este trabajo.

Teorema B.1 (La propiedad arquimediana de los números reales) *Si $x > 0$ y si y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n , tal que $nx > y$.*

Teorema B.2 (Teorema del valor intermedio) *Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier número k entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b , tal que $f(c) = k$.*

Teorema B.3 (Teorema del valor medio) *Si f es una función continua en todo un intervalo cerrado $[a, b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a, b) , existe por lo menos un punto c interior a (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Teorema B.4 (Teorema de la función inversa) *Sea f una función diferenciable sobre un intervalo $I \in \mathbb{R}$ y sea $Df(x) > 0$ (ó $Df(x) < 0$) para todo $x \in I$. Entonces f^{-1} , la inversa de f , es diferenciable sobre el intervalo $f(I)$ y*

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{(Df \circ f^{-1})(x)} \quad \text{sobre } f(I)$$

Teorema B.5 (Teorema de la función implícita) *Suponga que $F(x, y)$ tiene derivadas continuas $D_x F$ y $D_y F$ en una vecindad del punto (x_0, y_0) , donde*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad D_y F(x_0, y_0) \neq 0.$$

Entonces, con centro en (x_0, y_0) , existe algún rectángulo

$$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

tal que para cada x en el intervalo I dado por $[x_0 - a, x_0 + a]$, la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene exactamente una solución $y = f(x)$ que se encuentra en el intervalo $[y_0 - b, y_0 + b]$. Esta f satisface la condición inicial $y_0 = f(x_0)$, y, para toda x en I

$$F(x, f(x)) = 0, \quad D_y F(x, f(x)) \neq 0$$

Además, f es continua y tiene una derivada continua en I , dada por

$$y' = f'(x) = -\frac{D_x F}{D_y F}.$$

Teorema B.6 (Fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el origen) *Suponga que $f(x, y)$ y sus derivadas parciales hasta de orden $n+1$ son continuas en toda una región rectangular abierta R , con centro en un punto (a, b) . Entonces, en R ,*

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(0, 0) + x f_x(0, 0) + y f_y(0, 0) + \frac{1}{2!} (x^2 f_{xx}(0, 0) + 2xy f_{xy}(0, 0) + y^2 f_{yy}(0, 0)) \\ & + \dots + \frac{1}{n!} \left[\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right] (0, 0) + \frac{1}{(n+1)!} \left[\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f \right] (cx, cy) \end{aligned}$$

donde el último término está evaluado en un punto del segmento de recta que une el origen con (x, y) .

Teorema B.7 (Estabilidad de puntos fijos en mapeos) *Sea f un mapeo sobre R , y asumimos que p es un punto fijo de f . Entonces*

- Si $|f'(p)| < 1$, entonces p es un tractor.
- Si $|f'(p)| > 1$, entonces p es un repulsor.

Teorema B.8 (Teorema de Green) *Sea D una región simple y sea ∂D su frontera. Supongamos que $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 . Entonces*

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Apéndice C

Desarrollo Detallado de las Demostraciones

Presentamos algunas de las ecuaciones que no se desarrollaron en el texto para una lectura más ágil.

Proposición C.1 *Sea el sistema de la forma*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} l_{11} & a_{21} \\ l_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, & \text{si } x \leq 0 \\ \begin{bmatrix} r_{11} & a_{21} \\ r_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $t_L = t_R = 0$, el sistema es Hamiltoniano y, por ende, Conservativo.

Demostración: Si $t_L = l_{11} - a_{22} = 0$ y $t_R = r_{11} - a_{22} = 0$, tenemos que $l_{11} = r_{11} = -a_{22}$, lo que nos permite expresar el sistema de la forma

$$\dot{x} = -a_{22}x + a_{12}y + c_1 \dot{y} = d(x) + a_{22}y + c_2$$

donde

$$d(x) = \begin{cases} l_{21}x & \text{si } x \leq 0 \\ r_{21}x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Buscando que el sistema sea Hamiltoniano, supongamos que $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$, así tenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = -a_{22}x + a_{12}y + c_1.$$

Integrando con respecto a y obtenemos

$$H(x, y) = -a_{22}xy + \frac{a_{12}}{2}y^2 + c_1y + h(x).$$

Ahora, de esta ecuación calculamos $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -a_{22}y + h'(x)$$

Y como queremos que $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$, hacemos

$$\begin{aligned} d(x) + a_{22}y - c_2 &= a_{22}y - h'(x) \\ h'(x) &= -d(x) - c_2 \\ \Rightarrow h(x) &= -\int d(x)dx - c_2x \end{aligned}$$

Así la función Hamiltoniana queda de la forma

$$H(x, y) = \int d(x)dx - a_{22}xy + \frac{a_{12}}{2}y^2 + c_1y - c_2x$$

donde

$$d(x) = \begin{cases} l_{21}x & \text{si } x \leq 0 \\ r_{21}x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Finalmente, por la Proposición A.2, el sistema es Conservativo. ■

Proposición C.2 *Teniendo el sistema (??)*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi_1(x) + a_{12}y + c_1, \\ \dot{y} &= \varphi_2(x) + a_{22}y + c_2, \end{aligned}$$

donde

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} l_{i1}x, & \text{si } x \leq 0 \\ r_{i1}x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{con } i = 1, 2.$$

y definiendo $v = \alpha x - a_{12}y - c_1$, entonces

$$\dot{v} = \alpha\varphi_1(u) - a_{12}\varphi_2(u) + (\alpha - a_{22})(\alpha u - v) + a_{22}c_1 - a_{12}c_2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \alpha \dot{x} - a_{12} \dot{y} \\
&= \alpha[\varphi_1(x) + a_{12}y + c_1] - a_{12}[\varphi_2(x) + a_{22} + c_2] \\
&= \alpha\varphi_1(x) + \alpha a_{12}y + \alpha c_1 - a_{12}\varphi_2(x) - a_{12}a_{22}y - a_{12}c_2 \\
&= \alpha\varphi_1(x) - a_{12}\varphi_2(x) - \alpha^2x + \alpha a_{12}x_2 + \alpha c_1 + \alpha^2x - a_{12}a_{22}y - a_{12}c_2 \\
&= \alpha\varphi_1(x) - a_{12}\varphi_2(x) - \alpha[x - a_{12}y - c_1] + \alpha^2x - a_{12}a_{22}y - a_{12}c_2 \\
&= \alpha\varphi_1(u) - a_{12}\varphi_2(u) - \alpha v + \alpha^2u - \alpha a_{22}x + \alpha a_{22}x - a_{12}a_{22}y - a_{22}c_1 \\
&\quad + a_{22}c_1 - a_{12}c_2 \\
&= \alpha\varphi_1(u) - a_{12}\varphi_2(u) - \alpha v + \alpha^2u - \alpha a_{22}u + a_{22}[\alpha x - a_{12}y - c_1] + a_{22}c_1 \\
&\quad - a_{12}c_2 \\
&= \alpha\varphi_1(u) - a_{12}\varphi_2(u) - \alpha v + \alpha^2u - \alpha a_{22}u + a_{22}v + a_{22}c_1 - a_{12}c_2 \\
&= \alpha\varphi_1(u) - a_{12}\varphi_2(u) + \alpha(\alpha u - v) - a_{22}(\alpha u - v) + a_{22}c_1 - a_{12}c_2 \\
&= \alpha\varphi_1(u) - a_{12}\varphi_2(u) + (\alpha - a_{22})(\alpha u - v) + a_{22}c_1 - a_{12}c_2 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición C.3 *Teniendo la ecuación*

$$r - \mu_R \frac{\mu}{d_R} = e^{\gamma_R \tau_R} \left[-\frac{\mu}{d_R} \frac{\text{sen}(\tau_R)}{w_R} + \left(\cos(\tau_R) - \frac{(b + \eta_R) \text{sen}(\tau_R)}{2w_R} \right) \left(-q - \eta_R \frac{\mu}{d_R} \right) \right]$$

Se cumple la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
r &= -\frac{\mu e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_R)}{w_R} + w_R \cos^2(\tau_R) + \frac{b + \eta_R}{2w_R} (w_R \gamma_R - \mu_R) \text{sen}^2(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. + (-w_R \gamma_R + \mu_R - \frac{b + \eta_R}{2w_R} w_R) \text{sen}(\tau_R) \cos(\tau_R) - w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. - w_R \gamma_R e^{-\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) \right]
\end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
r &= e^{\gamma_R \tau_R} \left[-\frac{\mu}{d_R} \frac{\text{sen}(\tau_R)}{w_R} + \left(\cos(\tau_R) - \frac{(b + \eta_R) \text{sen}(\tau_R)}{2w_R} \right) \left(\frac{\mu w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mu_R \frac{\mu}{d_R} \right) \right] + \eta_R \frac{\mu}{d_R} \\
&= -\frac{\mu}{d_R} e^{\gamma_R \tau_R} \left[\frac{\text{sen}(\tau_R)}{w_R} + \left(\cos(\tau_R) - \frac{(b + \eta_R) \text{sen}(\tau_R)}{2w_R} \right) \left(-\frac{w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \varphi_{\gamma_R}(\tau_R)}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \eta_R \right) - \mu_R e^{-\gamma_R \tau_R} \right] \\
&= -\frac{\mu e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_R)}{w_R} + \left(\cos(\tau_R) - \frac{(b + \mu_R) \text{sen}(\tau_R)}{2w_R} \right) \left(-w_R e^{-\gamma_R \tau_R} [1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{\gamma_R \tau_R} (\cos(\tau_R) - \gamma_R \text{sen}(\tau_R))] + \eta_R \text{sen}(\tau_R) \right) - \eta_R e^{-\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) \right] \\
&= -\frac{\mu e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_R)}{w_R} + \left(\cos(\tau_R) - \frac{(b + \eta_R) \text{sen}(\tau_R)}{2w_R} \right) \left(w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w_R \cos(\tau_R) - w_R \gamma_R \text{sen}(\tau_R) + \eta_R \text{sen}(\tau_R) \right) - \eta_R e^{-\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) \right] \\
&= -\frac{\mu e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_R)}{w_R} - w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) + w_R \cos^2(\tau_R) - w_R \gamma_R \text{sen}(\tau_R) \cos(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. + \eta_R \text{sen}(\tau_R) \cos(\tau_R) + \frac{b + \eta_R}{2w_R} w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) - \frac{b + \eta_R}{2w_R} w_R \text{sen}(\tau_R) \cos(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. + \frac{b + \eta_R}{2w_R} w_R \gamma_R \text{sen}^2(\tau_R) - \frac{b + \eta_R}{2w_R} \eta_R \text{sen}^2(\tau_R) - \eta_R e^{-\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) \right] \\
&= -\frac{\mu e^{\gamma_R \tau_R}}{d_R \text{sen}(\tau_R)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_R)}{w_R} + w_R \cos^2(\tau_R) + \frac{b + \eta_R}{2w_R} (w_R \gamma_R - \mu_R) \text{sen}^2(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. + (-w_R \gamma_R + \mu_R - \frac{b + \eta_R}{2w_R} w_R) \text{sen}(\tau_R) \cos(\tau_R) - w_R e^{-\gamma_R \tau_R} \cos(\tau_R) \right. \\
&\quad \left. - w_R \gamma_R e^{-\gamma_R \tau_R} \text{sen}(\tau_R) \right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición C.4 El coeficiente $w_L \gamma_L - \eta_L + \frac{b + \eta_L}{2}$ es igual a cero.

Demostración:

Dado que $\gamma_L = \frac{\eta_L - b}{2w_L}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
w_L \gamma_L - \eta_L + \frac{b + \eta_L}{2} &= w_L \left(\frac{\eta_L - b}{2w_L} \right) - \eta_L + \frac{b + \eta_L}{2} = \frac{\eta_L - b}{2} - \eta_L + \frac{b + \eta_L}{2} \\
&= \frac{-\eta_L - b}{2} + \frac{b + \eta_L}{2} = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición C.5 Teniendo la ecuación

$$p - \eta_L \frac{\mu}{d_L} = e^{-s_L w_L \frac{t_L}{2w_L}} \left[\frac{\mu}{d_L} \frac{\text{sen}(w_L s_L)}{w_L} + \left(\cos(w_L s_L) + \frac{(b + \eta_L) \text{sen}(w_L s_L)}{2w_L} \right) \left(-q - \eta_L \frac{\mu}{d_L} \right) \right]$$

Probar que

$$p(\tau_L) = \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)}.$$

Demostración

$$\begin{aligned}
p &= e^{-\gamma_L \tau_L} \left[\frac{\mu}{d_L} \frac{\text{sen}(\tau_L)}{w_L} + \left(\cos(\tau_L) + \frac{(b + \eta_L) \text{sen}(\tau_L)}{2w_L} \right) \left(-\frac{\mu w_L e^{\gamma_L \tau_L} \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \eta_L \frac{\mu}{d_L} \right) \right] + \eta_L \frac{\mu}{d_L} \\
&= \frac{\mu}{d_L} e^{-\gamma_L \tau_L} \left[\frac{\text{sen}(\tau_L)}{w_L} + \left(\cos(\tau_L) + \frac{(b + \eta_L) \text{sen}(\tau_L)}{2w_L} \right) \left(-\frac{w_L e^{\gamma_L \tau_L} \varphi_{-\gamma_L}(\tau_L)}{\text{sen}(\tau_L)} - \eta_L \right) \right. \\
&\quad \left. + \eta_L e^{\gamma_L \tau_L} \right] \\
&= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L}}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_L)}{w_L} + \left(\cos(\tau_L) + \frac{b + \eta_L}{2w_L} \text{sen}(\tau_L) \right) (-w_L e^{\gamma_L \tau_L} (1 \right. \\
&\quad \left. - e^{-\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) + \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) - \eta_L \text{sen}(\tau_L)) + \eta_L e^{\gamma_L \tau_L} \text{sen}(\tau_L) \right] \\
&= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L}}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_L)}{w_L} + \left(\cos(\tau_L) + \frac{b + \eta_L}{2w_L} \text{sen}(\tau_L) \right) (-w_L e^{\gamma_L \tau_L} + w_L \cos(\tau_L) \right. \\
&\quad \left. + w_L \gamma_L \text{sen}(\tau_L) - \eta_L \text{sen}(\tau_L) + \eta_L e^{\gamma_L \tau_L} \text{sen}(\tau_L) \right] \\
&= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L}}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_L)}{w_L} - w_L e^{\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) + w_L \cos^2(\tau_L) + (w_L \gamma_L \right. \\
&\quad \left. - \eta_L) \text{sen}(\tau_L) \cos(\tau_L) + w_L \frac{b + \eta_L}{2w_L} \text{sen}(\tau_L) \cos(\tau_L) + \frac{b + \eta_L}{2w_L} (w_L \gamma_L - \eta_L) \text{sen}^2(\tau_L) \right. \\
&\quad \left. - w_L \frac{b + \eta_L}{2w_L} e^{\gamma_L \tau_L} \text{sen}(\tau_L) + \eta_L e^{\gamma_L \tau_L} \text{sen}(\tau_L) \right] \\
&= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L}}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{\text{sen}^2(\tau_L)}{w_L} + w_L \cos^2(\tau_L) + \frac{b + \eta_L}{2w_L} (w_L \gamma_L - \eta_L) \text{sen}^2(\tau_L) + (w_L \gamma_L \right. \\
&\quad \left. - \eta_L + \frac{b + \eta_L}{2}) \text{sen}(\tau_L) \cos(\tau_L) - w_L e^{\gamma_L \tau_L} \cos(\tau_L) + w_L \frac{\eta_L - b}{2w_L} e^{\gamma_L \tau_L} \text{sen}(\tau_L) \right] \\
&= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{2 + (b + \eta_L)(w_L \gamma_L - \eta_L)}{2w_L^2} \text{sen}^2(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \right] \\
&= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{2 + (b + \eta_L)(w_L [\frac{\eta_L - b}{2w_L}] - \eta_L)}{2w_L^2} \text{sen}^2(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \right] \\
&= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{2 + (b + \eta_L)(\frac{-\eta_L - b}{2})}{2w_L^2} \text{sen}^2(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{2 - \frac{(b+\eta_L)^2}{2}}{2w_L^2} \text{sen}^2(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \right]$$

Usando también que $\frac{(\eta_k+b)^2}{2} = 2(1 - w_k^2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{2 - 2(1 - w_L^2)}{2w_L^2} \text{sen}^2(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \right] \\ &= \frac{a e^{-\gamma_L \tau_L} w_L}{d_L \text{sen}(\tau_L)} \left[\frac{2w_L^2}{2w_L^2} \text{sen}^2(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L)) \right] \\ &= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L}{d_L \text{sen}(\tau_L)} [\text{sen}^2(\tau_L) + \cos^2(\tau_L) - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L))] \\ &= \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L}{d_L \text{sen}(\tau_L)} [1 - e^{\gamma_L \tau_L} (\cos(\tau_L) - \gamma_L \text{sen}(\tau_L))] \end{aligned}$$

$$\therefore p(\tau_L) = \frac{\mu e^{-\gamma_L \tau_L} w_L \varphi_{\gamma_L}(\tau_L)}{d_L \text{sen}(\tau_L)}$$

Proposición C.6 *La solución del sistema*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k(0) & 1 \\ c_k(0) & d(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

cuyos eigenvalores son $\lambda_k \pm iw_k$, está dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{e^{\lambda_k t}}{w_k} M(t) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

donde

$$M(t) = \begin{bmatrix} w_k \cos(w_k t) + (-\lambda_k + a_k(0)) \text{sen}(w_k t) & \text{sen}(w_k t) \\ c_k(0) \text{sen}(w_k t) & w_k \cos(w_k t) + (-\lambda_k + d(0)) \text{sen}(w_k t) \end{bmatrix}$$

Demostración:

Calculando la matriz exponencial, tenemos que

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\lambda_k t} (c_1 \cos(w_k t) + c_2 \text{sen}(w_k t)) \\ \dot{X}(t) &= \lambda_k e^{\lambda_k t} (c_1 \cos(w_k t) + c_2 \text{sen}(w_k t)) + e^{\lambda_k t} (-w_k c_1 \text{sen}(w_k t) + w_k c_2 \cos(w_k t)) \end{aligned}$$

Caso I : $X(0) = 1, \dot{X}(0) = 0$

$$X(0) = c_1 = 1, \quad \dot{X}(0) = \lambda_k + w_k c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\lambda_k}{w_k}$$

$$\Rightarrow X(t) = e^{\lambda_k t} \left(\cos(w_k t) - \frac{\lambda_k}{w_k} \operatorname{sen}(w_k t) \right)$$

Caso II : $X(0) = 0, \dot{X}(0) = 1$

$$X(0) = c_1 = 0, \quad \dot{X}(0) = w_k c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{w_k}$$

$$\Rightarrow X(t) = \frac{e^{\lambda_k t}}{w_k} \operatorname{sen}(w_k t)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{\lambda_k t} \left(\cos(w_k t) - \frac{\lambda_k}{w_k} \operatorname{sen}(w_k t) \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{\lambda_k t}}{w_k} \operatorname{sen}(w_k t) \begin{bmatrix} a_k(0) & 1 \\ c_k(0) & d(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{\lambda_k t}}{w_k} \begin{bmatrix} w_k \cos(w_k t) + (-\lambda_k + a_k(0)) \operatorname{sen}(w_k t) & \operatorname{sen}(w_k t) \\ c_k(0) \operatorname{sen}(w_k t) & w_k \cos(w_k t) + (-\lambda_k + d(0)) \operatorname{sen}(w_k t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Y así

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{e^{\lambda_k t}}{w_k} M(t) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

donde

$$M(t) = \begin{bmatrix} w_k \cos(w_k t) + (-\lambda_k + a_k(0)) \operatorname{sen}(w_k t) & \operatorname{sen}(w_k t) \\ c_k(0) \operatorname{sen}(w_k t) & w_k \cos(w_k t) + (-\lambda_k + d(0)) \operatorname{sen}(w_k t) \end{bmatrix}$$

■

Apéndice D

Sistemas lineales planos y retratos fase

Llamemos a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en \mathbb{R}^2 un sistema lineal plano. Tales sistemas los podemos escribir como:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{D.1}$$

Con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, y $A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}$. En este caso llamamos plano fase a \mathbb{R}^2 y decimos que un retrato fase es una imagen de una colección de curvas solución representativas del sistema en el plano. La apariencia o comportamiento de los retratos fase es controlada por los puntos de equilibrio \mathbf{x}^* , es decir los valores de \mathbf{x} tales que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

los cuales representan soluciones de equilibrio o constantes, ya que si tomamos como valor inicial $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}^*$ entonces, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ para cualquier tiempo t . Si $\det A \neq 0$ el sistema (D.1) sólo tiene a $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ como punto de equilibrio.

La primer característica importante para analizar de los puntos de equilibrio es su estabilidad, ésta nos ayuda a entender si las curvas solución se acercan o se alejan de tales puntos. Para entender este concepto damos las siguientes definiciones.

Definición D.1 Consideremos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio de (D.1).

- Entonces \mathbf{x}^* es un punto de equilibrio estable si para cada vecindad \mathbb{O} de $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2$ existe una vecindad \mathbb{O}_1 de \mathbf{x}^* tal que para cada solución $\mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$ en \mathbb{O}_1 está definida y permanece en \mathbb{O} para todo $t > 0$.
- Si \mathbb{O}_1 puede ser escogido de la manera anterior y además de la condición de estabilidad tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*,$$

entonces decimos que \mathbf{x}^* es asintóticamente estable.

- Si un punto de equilibrio \mathbf{x}^* que no es estable es llamado inestable. Esto significa que hay una vecindad \mathbb{O} de \mathbf{x}^* tal que para cada vecindad \mathbb{O}_1 de \mathbf{x}^* en \mathbb{O} , existe al menos una solución $\mathbf{x}(t)$ que empieza en $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{O}_1$ que no está completamente contenida en \mathbb{O} para todo $t > 0$.

En segundo lugar podemos clasificar el comportamiento de las curvas solución a partir de los eigenvalores que la matriz A tenga. A continuación clasificamos los comportamientos más comunes que podemos encontrar en los sistemas lineales planos.

1. Si tenemos dos eigenvalores reales $\lambda_1 < \lambda_2$ distintos de ceros, existen tres casos para el punto de equilibrio
 - $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$; tenemos un punto silla
 - $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$; tenemos un nodo estable
 - $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$; tenemos un nodo inestable.
2. Si los eigenvalores resultan ser complejos de la forma $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ tenemos otros tres casos.
 - $\alpha < 0$; tenemos un foco estable
 - $\alpha = 0$; tenemos un centro
 - $\alpha > 0$; tenemos un foco inestable.

Otros casos como eigenvalores repetidos o iguales a cero pueden ser consultados en [14] y [23]. Además el sistema no homogéneo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

es simplemente una traslación de (D.1).

Concluiremos este apéndice con la siguiente proposición.

Proposición D.1 *Si el punto de equilibrio del sistema (D.1) es un foco estable, es asintóticamente estable.*

Demostración:

Sabemos que el sistema (D.1) tiene un foco estable como punto de equilibrio si los eigenvalores de A son de la forma $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\alpha < 0$. Además en [19] encontramos que la forma canónica de la matriz exponencial de A es de la forma

$$e^{Bt} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\text{sen}(\beta t) \\ \text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix},$$

así las solución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}$ está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\text{sen}(\beta t) \\ \text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_0.$$

Por último podemos ver que si $t \rightarrow -\infty$, $e^{\alpha t} \rightarrow 0$, ya que $\alpha < 0$. Y así $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, lo que hace al punto de equilibrio asintóticamente estable. Finalmente debido a la equivalencia topológica de este sistema y el (D.1), este último también es asintóticamente estable. ■.

Bibliografía

- [1] Alligood, K., Sauer, T. y Yorke, J. (1996). *Chaos, an Introduction to Dynamical Systems*. Nueva York: Springer-Verlag.
- [2] Apostol, Tom. (2009) *Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté.
- [3] Apostol, Tom. (2009) *Calculus I*. México: Reverté.
- [4] di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A. y Kowalczyk, P. (2008) *Piecewise-smooth Dynamical Systems, Theory and Applications*. Londres: Springer-Verlag
- [5] Campoy, B. (2015) *Sistemas Lineales Continuos por Pedazos en el Plano*. Sonora: Universidad de Sonora. División de Ciencias Exactas y Naturales. Tesis de Licenciatura en Matemáticas.
- [6] Courant, R. y John, F. (2008) *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, Vol. 2*. México: Limusa.
- [7] Freire, E., Ponce, E. y Torres, F. (1997). *Hopf-Like Bifurcations in Planar Piecewise Linear Systems*. Publicacions Matemàtiques, Vol 41, 135-148.
- [8] Fussmann, G., Ellner, S., Shertzer, K. y Hairston, N. (2000) *Crossing the Hopf Bifurcation in a Live Predator-Prey System*. Science. 290, 1358.1360.
- [9] Gu, W., Milano, F., Jiang, P. y Tang, G. (2007). *Hopf Bifurcation Induced by SVC Controllers: A didactic example*. ScienceDirect. 77, 234-240.
- [10] Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Nueva York: Springer-Verlag
- [11] Hale, J. (1980) *Ordinary Differential Equations*. (2da. edición)USA: Krieger
- [12] Hartman, P. (1982) *Ordinary Differential Equations*. Boston: Birkhäuser.
- [13] Hasser, N., LaSalle, J. y Sullivan, J. (1979) *Análisis Matemático 1*. México: Trillas.

- [14] Hirsch, M., Smale, S. y Devaney, R. (2004) *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos* (2da. edición). EUA: Elsevier.
- [15] Leithold, L. (1998) *El Cálculo* (7ma. edición). México: Oxford.
- [16] Llibre, J. and Teruel, A. (2010) *Qualitative Theory of Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Differential Systems*
- [17] Marsden, J. y McCracken, M. (1976). *The Hopf Bifurcation and Its Applications* Nueva York: Springer-Verlag
- [18] Marsden, J. y Tromba, A. (2004) *Cálculo Vectorial* (5ta. edición). Madrid: Pearson.
- [19] Perko, L. (1991) *Differential Equations and Dynamical Systems*. Nueva York: Springer-Verlag
- [20] Shaw, S. y Holmes, P. (1983). *A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator*. Journal of Sound and Vibration. 90(1), 129-155.
- [21] Simpson, D. (2010) *Bifurcations in Piecewise-smooth Continuous Systems*. Singapur: World Scientific.
- [22] Simpson, D. y Meiss, J. (2007). *Andronov-Hopf Bifurcations in Planar, Piecewise-smooth, Continuous Flows*. Physics Letters. A 371, 213-220.
- [23] Strogatz, S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Nueva York: Perseus Books.
- [24] Thomas, G. (2010). *Cálculo, Varias Variables* (12va. edición). México: Pearson.
- [25] Vilchez, M., Velasco F., González y L., Ortega, J. (2003). *Hopf Bifurcations: Qualitative Analysis and Application to a Bioeconomic Model of Fisheries*. SciELO. 6(4)