

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

---



## Geodésicas en Agujeros Negros de Einstein-Born-Infeld

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física) presenta:

**Fís. Daniel Martínez Carbajal**

Asesor

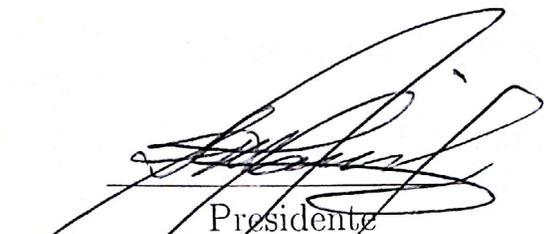
Dr. Román Linares Romero

Sustentación de tesis: viernes 14 de junio de 2013, 12:30 hrs.



---

## Miembros del jurado



Presidente  
**Dr. Alberto Alejandro García Díaz**  
*Departamento de Física, UAM-I.*  
*Departamento de Física, Cinvestav.*

Román Linares Romero  
Secretario  
**Dr. Román Linares Romero**  
*Departamento de Física, UAM-I.*



Vocal  
**Dra. Nora Eva Bretón Báez**  
*Departamento de Física, Cinvestav.*



---

*Dedicada con todo mi cariño a mis padres:*

*Gil Armando Martínez Martínez*

*y*

*Reginalda Carbajal Ocampo.*



---

## Agradecimientos

Agradezco de forma especial a mi asesor, **Dr. Román Linares Romero**, por su gran dedicación y colaboración en el desarrollo de esta tesis de maestría, así como la oportunidad que me ha brindado para formar parte de su grupo de investigación.

Agradezco a mis sinodales **Dr. Alberto Alejandro García Díaz** y la **Dra. Nora Eva Bretón Báez** por sus contribuciones y excelentes sugerencias que ayudaron a mejorar este trabajo de tesis. Debo agradecer también su amabilidad y disponibilidad durante el proceso de revisión de tesis. Muchas gracias por permitirme vivir una experiencia tan importante para mi formación como investigador.

Agradezco enormemente a mi tutor **Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría**, por el gran apoyo y ayuda que me proporcionó en los buenos y malos momentos.

Al CONACyT por el apoyo económico brindado a lo largo de mis estudios de maestría.

A mis padres **Gil Armando Martínez Martínez** y **Reginalda Carbajal Ocampo**: Por su ejemplo de lucha y honestidad. Ustedes que nunca me han abandonado y siempre han creído en mí. Gracias por sus sabios consejos, sin ustedes nada de esto hubiera sido posible.

Agradezco a mis hermanos: Luis Armando, Mario y Rubén por ser un ejemplo de valentía, capacidad y superación. . . por ellos y para ellos!

De una manera muy peculiar agradezco a mis compañeros de generación por los buenos momentos e interminables noches de estudio que compartimos durante la maestría. Víctor y Noé. De la misma manera a todos las personas con quienes compartí estos dos largos años, en particular Angélica, Evelyn, Gastón, Joshua, Rubén, Marisol y Martín.

A todos ellos... muchas gracias!



# Índice general

<b>Contenido</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Relatividad General</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones del Campo Gravitacional . . . . .	1
1.2. El tensor de curvatura . . . . .	4
1.3. Representaciones irreducibles de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . . . . .	7
1.4. El principio de equivalencia . . . . .	12
1.5. Formalismo de tétradas . . . . .	14
1.6. Tétradas nulas . . . . .	17
1.6.1. Transformaciones de Lorentz . . . . .	18
1.7. Las ecuaciones de Cartan . . . . .	20
1.8. Curvatura en el caso esféricamente simétrico . . . . .	21
1.9. Métrica de Reissner-Nordström . . . . .	24
<b>2. Clasificación algebraica de los campos</b>	<b>29</b>
2.1. El álgebra de bivectores . . . . .	30
2.1.1. Transformaciones de Lorentz . . . . .	31
2.2. Clasificación del campo electromagnético . . . . .	32
2.2.1. Método de ejes adaptados . . . . .	33
2.2.2. Ecuación de valores propios . . . . .	35
2.3. Clasificación algebraica del tensor de Weyl . . . . .	37
2.3.1. Base auto-dual . . . . .	39
2.3.2. Tensor de Weyl autodual . . . . .	40

2.3.3.	Método de ejes adaptados . . . . .	41
2.3.4.	Ecuación de valores propios . . . . .	42
2.3.5.	Clasificación de Petrov . . . . .	44
2.4.	Coefficientes de espín y congruencias nulas . . . . .	45
2.5.	Aplicaciones del formalismo de tétradas nulas . . . . .	49
2.5.1.	Ecuaciones de Einstein-Maxwell . . . . .	50
2.5.2.	Soluciones exactas en el formalismo de NP . . . . .	52
<b>3.</b>	<b>Electrodinámica de Born-Infeld</b>	<b>57</b>
3.1.	Lagrangiano de Born-Infeld . . . . .	57
3.2.	Formulación hamiltoniana . . . . .	61
3.2.1.	Las ecuaciones de campo en forma vectorial. . . . .	63
3.2.1.1.	Solución estática de las ecuaciones de campo. . . . .	64
3.3.	Ecuaciones de Einstein-Born-Infeld . . . . .	65
3.3.1.	Las condiciones de energía . . . . .	66
3.3.2.	Ecuaciones de Einstein-Born-Infeld para las métricas de tipo-D. . . . .	67
3.3.3.	Soluciones en espacios-tiempo de Petrov tipo D . . . . .	70
3.4.	Generalización de la solución de Reissner-Nordström . . . . .	71
3.4.1.	Propiedades electromagnéticas de la solución . . . . .	74
3.4.2.	Agujeros de Reissner-Nordström y otros límites . . . . .	76
3.4.2.1.	Caso $b \gg 1$ . . . . .	76
3.4.2.2.	Comportamiento en $r \rightarrow 0$ . . . . .	77
3.4.3.	Horizontes de eventos . . . . .	78
<b>4.</b>	<b>Geodésicas en agujeros negros de EBI</b>	<b>81</b>
4.1.	Partícula relativista . . . . .	81
4.2.	Método de Hamilton-Jacobi . . . . .	83
4.3.	Vectores de Killing . . . . .	86
4.4.	Clasificación completa de las geodésicas . . . . .	88
4.4.1.	El movimiento $\theta$ . . . . .	88
4.4.2.	El movimiento $\tilde{r}$ . . . . .	90
4.4.2.1.	Los posibles tipos de órbitas . . . . .	90

---

4.4.2.2. El movimiento radial . . . . .	91
4.5. Solución de la ecuación geodésica . . . . .	94
4.5.1. La solución $\tilde{r}$ . . . . .	95
4.5.1.1. Caso (a) $b \ll 1$ . . . . .	95
4.5.1.2. Caso (b) $b \gg 1$ . . . . .	98
4.5.1.3. Caso (c) $\infty \gg b > 1$ . . . . .	101
4.5.2. Solución de la ecuación $\theta(\gamma)$ . . . . .	101
4.5.3. Solución de la ecuación $\phi(\gamma)$ . . . . .	101
4.5.4. Geodésicas en el plano ecuatorial . . . . .	102
<b>Conclusiones</b>	<b>105</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>



# Introducción

A finales del siglo XIX, en 1872, James Clerk Maxwell unificó la electricidad y el magnetismo en una sola teoría. Años más tarde, hacia 1916, Albert Einstein finalmente publica su teoría de la relatividad general, la cual es una teoría del campo gravitacional e invariante ante transformaciones de coordenadas generales. Debido a la equivalencia entre masa y energía, todas las formas de energía actúan como fuentes de los campos gravitatorios. Esto implica que la teoría electromagnética de Maxwell, la cual es lineal, también hace que el espacio-tiempo se curve cuando el tensor de energía-momento de Maxwell es sustituido en las ecuaciones de campo de la relatividad general. Cuando se busca una solución esféricamente simétrica, estática y asintóticamente plana, de las ecuaciones de Einstein-Maxwell obtenemos una solución de agujero negro denominado Reissner-Nordström (R-N), el cual tiene una singularidad en  $r = 0$ , al igual que la solución del agujero negro de Schwarzschild que es el límite de R-N cuando  $Q = 0$ . Aunque las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo (ecuaciones lineales) han sido exitosas describiendo una gran cantidad de fenómenos físicos a nivel clásico, desde el punto de vista de la física teórica, la situación no es del todo satisfactoria, ya que al resolver las ecuaciones de Maxwell para una distribución de carga puntual se obtiene un campo que diverge en la posición de la carga.

Desde comienzos del siglo XX, algunos físicos que no estaban satisfechos con la teoría de Maxwell, realizaron diversos intentos para eliminar la divergencia del campo. Para solucionar este problema se propusieron varias formulaciones de la electrodinámica, entre ellas versiones no lineales de la teoría. Entre los modelos más exitosos se encuentra el de Born e Infeld (BI), el cual fue hecho por el famoso físico Max Born, y su estudiante Leopold Infeld. Basado en la elección de una acción no lineal, en la cual se postula un límite en la intensidad del campo, es decir una cota máxima en la intensidad del campo, Born e Infeld resolvieron las ecuaciones de campo resultantes de la nueva acción en el caso de una carga puntual, y obtuvieron lo que se conoce como solución esféricamente simétrica (SES). El resultado difiere significativamente del campo coulombiano en el entorno de una carga puntual donde los campos son más intensos, y contrariamente a la teoría de Maxwell encuentran un campo que es finito en todo punto, incluso en la posición de la carga.

Ahora, uno se podría preguntar, si la teoría del modelo de Born-Infeld regulariza el campo coulombiano, ¿La teoría de Einstein-Born-Infeld regularizará a Reissner-Nordström?. Esta pregunta fue contestada parcialmente en [2] donde se obtuvo la solución

de Agujero-Negro para esta teoría.

Por otro lado, recientemente en la literatura existe un interés por estudiar las geodésicas de ciertos agujeros negros [4, 3]. En particular, la solución de R-N resulta ser el destino final del colapso gravitacional de una estrella cargada muy masiva. En este contexto, es de gran interés estudiar las propiedades del agujero negro de R-N, entre ellas sus geodésicas, y también resulta interesante estudiar con mucho detalle su generalización electromagnética no-lineal. Dado que conocemos ya la solución del agujero negro que generaliza a R-N, es importante estudiar la clasificación completa de las geodésicas de esta solución, un primer trabajo en esta dirección fue realizado en [1, 2].

El interés principal de este trabajo es estudiar las trayectorias de las partículas de prueba en una geometría que es la generalización electromagnética no lineal de la solución de Reissner-Nordström. El espacio-tiempo que estudiaremos es una solución del modelo de Einstein-Born-Infeld, el cual es no singular fuera de un horizonte de eventos regular y se caracteriza por tres parámetros: la masa  $M$ , la carga electromagnética  $Q$  y el parámetro  $b$  de Born-Infeld relacionado con la magnitud del campo eléctrico en el origen.

Cabe señalar que durante muchos años el electromagnetismo de Born-Infeld se mantuvo como una curiosidad, es decir, un modelo interesante de una teoría no lineal, el cual regulariza el campo eléctrico de una distribución de carga puntal y por consiguiente su energía es finita incluso en el origen, pero que no describía ningún fenómeno físico. Sin embargo, durante la década de 90's hubo un resurgimiento del interés en la teoría de Born-Infeld y sus extensiones no abelianas, debido a su conexión con la teoría de cuerdas y de D-branas. Es decir existen estructuras similares entre el lagrangiano de Born-Infeld y el lagrangiano de una D-brana en la teoría de cuerdas. Como se mostrará en el capítulo 3 el lagrangiano de Born-Infeld está dado por

$$\mathcal{L} = b^2 \left( 1 - \sqrt{-\det \left( \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu} \right)} \right),$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski,  $F_{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético,  $b$  es la intensidad del campo eléctrico en el origen. En la teoría de cuerdas, el lagrangiano efectivo de los campos de norma en una D-brana son descritos por el mismo tipo de Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -T \sqrt{-\det (\eta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha F_{\mu\nu})},$$

donde  $T$  es la tensión de la D-brana. Con el surgimiento de las D-branas, es probable entonces que la última palabra acerca de la teoría de Born-Infeld no ha sido dicha aún.

El contenido de este trabajo es el siguiente: En el capítulo 1 se describen brevemente algunos conceptos de Relatividad General. Para el estudio de la solución del agujero negro de Einstein-Born-Infeld es necesario la introducción del formalismo de tétradas nulas. Posteriormente se estudia el agujero negro de Reissner-Nordström, es decir, la solución de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica y una fuente cargada, en el formalismo de tétradas nulas.

En el capítulo 2 se estudia la clasificación algebraica del campo gravitatorio, también conocida como la clasificación algebraica de tensor de Weyl o mejor conocida como la clasificación de Petrov. Como un ejemplo de estas técnicas presentamos el caso más sencillo, correspondiente a un campo electromagnético.

En el capítulo 3 se estudia la formulación hamiltoniana de la electrodinámica no lineal, en donde se plantean las ecuaciones de Einstein acopladas a la electrodinámica no lineal de B-I. Para ello comenzamos por entender las modificaciones del tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  respecto a Maxwell y escribiremos las ecuaciones del sistema en la formulación de tétradas. El nuevo tensor de energía-momento y las nuevas ecuaciones de campo se conocen como el tensor energía-momento de Einstein-Born-Infeld y las ecuaciones de campo de Einstein-Born-Infeld respectivamente. Finalmente, se hará una comparación entre la solución de Reissner-Nordström y la solución de Einstein-Born-Infeld.

En el capítulo 4 se obtienen las ecuaciones geodésicas en el agujero negro de Einstein-Born-Infeld. Para ello utilizaremos el método de Hamilton-Jacobi el cual nos llevará a definir un potencial efectivo. Debido a la complejidad de las ecuaciones obtenidas, no se conocen soluciones analíticas a las mismas, sin embargo existen varios casos límites para los cuales es posible simplificar las ecuaciones, de tal forma que acepten soluciones analíticas. Existen tres casos de interés en la electrodinámica no lineal, para los cuales el límite de las ecuaciones geodésicas se reduce a casos que se pueden resolver analíticamente, es decir, tres casos en los que el límite se toma sobre el parámetro  $b$  de Born-Infeld, estos casos son: (a)  $b \gg 1$ , (b)  $b \ll 1$  y (c)  $\infty \gg b > 1$ , los cuales se pueden identificar con algunas soluciones que en los años recientes se han obtenido en el estudio de la geodésicas. Estas soluciones son una generalización de las funciones elípticas, las cuales son conocidas como funciones de Weierstrass [10].



# 1

## Relatividad General

En este capítulo se presentan los elementos básicos de Relatividad General que se utilizarán en los capítulos posteriores de este trabajo, para estudiar las soluciones tipo agujero negro de la electrodinámica no lineal de Born-Infeld acoplada al campo gravitacional.

### 1.1. Ecuaciones del Campo Gravitacional

En la Teoría de la Relatividad General el espacio-tiempo está descrito por una variedad diferenciable, pseudoriemanniana, de dimensión 4, dotada con una métrica Lorentziana  $g_{\mu\nu}$ .

El tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , es un tensor simétrico de segundo rango que contiene la información para medir el intervalo  $ds^2$  entre dos eventos separados infinitesimalmente

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

Es decir, el tensor métrico determina la geometría del espacio-tiempo así como las geodésicas de las partículas masivas y los fotones. Los índices  $\mu, \nu$ , etc. toman los valores: 0, 1, 2 y 3 cuando la dimensión del espacio-tiempo es 4. Pero la misma forma es válida si el espacio-tiempo es de dimensión  $d$ , en cuyo caso los índices toman los valores 0, 1, ...,  $d - 1$ . A lo largo de este trabajo consideraremos que la signatura de la métrica es  $(-, +, \dots, +)$ .

La información del campo gravitacional se encuentra en el tensor de curvatura, antes de definirlo es conveniente introducir los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ , también conocidos

como conexión de Levi-Civita. Estos símbolos, los cuales no transforman como tensor, son combinaciones del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y sus derivadas parciales  $\partial_\rho g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu,\rho}$  de la siguiente forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\nu,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}). \quad (1.2)$$

Como su nombre lo indica, el tensor de curvatura de Riemann contiene la información sobre la curvatura del espacio-tiempo, éste depende del tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas. En términos de los símbolos de Christoffel el tensor se define como

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda \equiv \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^\lambda - \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^\lambda + \Gamma_{\sigma\nu}^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^\lambda - \Gamma_{\sigma\mu}^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}^\lambda. \quad (1.3)$$

Este tensor satisface varias propiedades de simetría en sus índices, la forma más sencilla de presentarlas es mediante el tensor de Riemann que tiene todos los índices abajo

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} \equiv g_{\rho\lambda} R_{\sigma\mu\nu}^\lambda,$$

el cual utilizando la definición (1.3) y la expresión (1.2) de los símbolos de Christoffel, se reescribe en términos de las segundas derivadas del tensor métrico en la forma

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}). \quad (1.4)$$

En esta expresión se pueden notar inmediatamente las propiedades algebraicas de simetría siguientes del tensor  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ :

- Antisimetría: El tensor es antisimétrico en sus dos primeros índices y en los dos últimos índices

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} = +R_{\sigma\rho\nu\mu}. \quad (1.5)$$

- Simetría: El tensor es invariante por intercambio del primer par de índices con el segundo:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.6)$$

- Ciclicidad: La suma de las componentes del tensor de Riemann que difieren por permutaciones cíclicas de los últimos tres índices se anula

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \quad (1.7)$$

Esta última propiedad es equivalente a pedir que la antisimetrización de los últimos tres índices se anule:

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0.$$

Además de estas simetrías algebraicas, el tensor de Riemann también satisface una identidad diferencial. Para obtenerla consideremos la derivada covariante del tensor de Riemann en un punto y evaluemos la expresión en las coordenadas normales, esto es

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \partial_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \partial_\lambda \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}).$$

Considerando ahora la suma de las permutaciones cíclicas de los primeros tres índices obtenemos la conocida:

- Identidad de Bianchi

$$\nabla_{\lambda}R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma}R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0. \quad (1.8)$$

Podemos escribir la identidad de Bianchi en una forma compacta, si utilizamos la propiedad de antisimetría  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$ , lo cual nos permite escribir este resultado como

$$\nabla_{[\lambda}R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0.$$

Contrayendo índices del tensor de Riemann (1.3) con la ayuda del tensor métrico, es posible construir otros objetos que son relevantes en el estudio de espacios curvos, como el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\gamma}_{\mu\gamma\nu} = g^{\lambda\gamma}R_{\lambda\mu\gamma\nu}, \quad (1.9)$$

y el escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Note que debido a la propiedad de simetría (1.6) del tensor de curvatura, el tensor de Ricci es un tensor simétrico. Con la ayuda del tensor de Ricci y el escalar de curvatura es posible construir un tensor de rango dos, simétrico, conocido en la literatura como el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.11)$$

Este tensor tiene la propiedad de que su derivada covariante se anula. Mostrar este resultado es directo con la ayuda de la identidad de Bianchi (1.8). Si contraemos la identidad en 4 de sus índices tenemos

$$g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\nabla_{\lambda}R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma}R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0.$$

Utilizando el hecho de que la derivada covariante del tensor métrico se anula, esto es, que  $\nabla_{\lambda}g^{\nu\sigma} = 0$ , obtenemos

$$\nabla^{\mu}R_{\rho\mu} - \nabla_{\rho}R + \nabla^{\nu}R_{\rho\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^{\mu}R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_{\rho}R.$$

Por lo tanto la derivada covariante del tensor  $G_{\mu\nu}$  satisface:

$$\nabla_{\nu}G^{\mu\nu} = 0. \quad (1.12)$$

El tensor (1.11) es relevante porque es el tensor que aparece en las ecuaciones de movimiento del campo gravitacional, las llamadas ecuaciones de Hilbert-Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

escritas en unidades geométricas  $c = 1$  y  $G = 1$ . El lado izquierdo de la ecuación es puramente geométrico y está escrito en términos de la métrica y de contracciones del tensor de curvatura. El lado derecho de la ecuación contiene el llamado tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ , éste es un tensor simétrico de segundo rango que representa el contenido

de energía y materia, responsable de la curvatura del espacio-tiempo. Es importante resaltar que la ecuación (1.12) implica inmediatamente que el tensor de energía momento se conserva

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.14)$$

Para finalizar esta sección mencionemos que las ecuaciones del campo gravitacional (1.13) se pueden obtener de un principio variacional, a partir de la acción de Hilbert

$$\frac{1}{16\pi} \int d^d x \sqrt{|g|} (R - \Lambda + 16\pi \mathcal{L}_{\text{materia}}), \quad (1.15)$$

donde hemos incluido un término de constante cosmológica  $\Lambda$ . El término geométrico de la ecuación se obtiene del primer término de la acción, mientras que el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  está dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{\text{materia}})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.16)$$

Con lo cual las ecuaciones de campo resultantes son

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Uno de los objetivos de este trabajo es re-obtener la solución de esta ecuación, cuando el tensor  $T_{\mu\nu}$  corresponde al de la electrodinámica no-lineal de Born-Infeld. Las soluciones serán expuestas en el capítulo 3.

## 1.2. El tensor de curvatura

Como hemos señalado en la sección anterior, el tensor de Riemann es un tensor muy importante ya que éste contiene toda la información sobre la curvatura y por tanto es de primera importancia tener el mejor entendimiento posible de sus propiedades, como por ejemplo, ¿Cuántas componentes independientes tiene? ¿Qué información podemos extraer de éstas? etc. En esta sección exponemos algunas de las características del tensor. Comencemos por contar el número de componentes independientes que tiene.

En principio un tensor de rango cuatro tiene  $d^4$  componentes independientes en un espacio-tiempo de  $d$ -dimensiones. Sin embargo, como consecuencia de sus simetrías, el tensor de Riemann tiene  $\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1)$  componentes independientes en un espacio-tiempo de  $d$ -dimensiones. Para obtener este número recordemos que el tensor es antisimétrico en el primer par de índices, antisimétrico en los últimos dos índices y simétrico bajo el intercambio de estos dos pares de índices. Esto significa que podemos pensar al tensor como una matriz simétrica  $R_{[\rho\sigma][\mu\nu]}$ , donde los pares  $\rho\sigma$  y  $\mu\nu$  son considerados como los índices individuales. Una matriz simétrica tiene  $\frac{1}{2}n(n + 1)$  componentes independientes. Por otro lado cada par de índices lo podemos pensar como una matriz antisimétrica por lo que cada par de índices toma  $\frac{1}{2}d(d - 1)$  valores diferentes. Por lo tanto el número de

componentes individuales lo podemos obtener al considerar que tenemos una matriz de  $n \times n$ , donde  $n$  toma  $\frac{1}{2}d(d+1)$  valores diferentes. Bajo estas consideraciones tenemos

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}d(d-1) \right] \left[ \frac{1}{2}d(d-1) + 1 \right] = \frac{1}{8} (d^4 - 2d^3 + 3d^2 - 2d).$$

Hasta aquí hemos considerado sólo 2 de los 4 diferentes tipos de simetrías algebraicas del tensor de Riemann, por lo que debemos incorporar en el conteo la simetría que nos falta, esto es, la propiedad cíclica (1.7). Para ello notemos que como consecuencia de la propiedad cíclica:  $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$ , la parte totalmente anti-simétrica del tensor de Riemann se anula,

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0. \quad (1.18)$$

Ahora un tensor totalmente antisimétrico en  $d$  dimensiones tiene  $d(d-1)(d-2)(d-3)/4!$  componentes independientes. Por lo tanto la restricción (1.18) reduce al número de componentes independientes del tensor de Riemann por esta cantidad, lo cual da como resultado

$$\frac{1}{8} (d^4 - 2d^3 + 3d^2 - 2d) - d(d-1)(d-2)(d-3)/4! = \frac{1}{12} d^2 (d^2 - 1). \quad (1.19)$$

El cual corresponde al número de componentes independientes del tensor de Riemann. Analicemos el significado de este resultado.

- En  $d = 1$ , la ecuación (1.19) nos dice que el tensor de curvatura  $R_{1111}$  siempre se anula. Este resultado es consistente con la propiedades de simetría (1.5).
- En  $d = 2$ , la ecuación (1.19) nos dice que el tensor de curvatura tiene 1 componente independiente. Podemos considerar que esta componente es  $R_{1212}$ . Las componentes restantes están relacionadas a ésta a través de las relaciones (1.5) y (1.6)

$$\begin{aligned} R_{1212} &= -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}, \\ R_{1111} &= -R_{1122} = -R_{2211} = R_{2222} = 0. \end{aligned}$$

Podemos reescribir estas fórmulas en una manera muy elegante. Note primero que<sup>1</sup>

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = 2g_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu} \frac{R_{1212}}{g},$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica:  $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ . Contrayendo los índices  $\mu$  y  $\rho$  obtenemos

$$R_{\nu\sigma} = g_{\nu\sigma} \frac{R_{1212}}{g}, \quad (1.20)$$

esto es, el tensor de Ricci en  $d = 2$ , es proporcional al tensor métrico. Contrayendo los dos índices restantes obtenemos

$$R = \frac{2R_{1212}}{g}, \quad (1.21)$$

---

<sup>1</sup>Denotaremos a lo largo del texto, la antisimetrización de dos índices por el símbolo  $[\ , ]$ , y la simetrización con el símbolo  $( \ , )$ . En ambos casos, el símbolo incluye el factor de peso  $\frac{1}{2!}$ .

esto es, el escalar de curvatura es proporcional a la única componente independiente del tensor de Riemann! Por lo tanto de manera covariante, el tensor de Riemann se escribe como

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu}R. \quad (1.22)$$

• En  $d = 3$ , la ecuación (1.19) nos dice que el tensor de curvatura tiene 6 componentes independientes. Pero éste es también el número de componentes independientes del tensor de Ricci, que es un tensor simétrico de rango dos. Podemos así intuir que será posible escribir el tensor de Riemann en términos únicamente del tensor de Ricci. Desde luego dado que el tensor de Riemann tiene 4 índices y el de Ricci sólo 2, en la escritura será necesario utilizar la métrica. Las 6 componentes independientes del tensor de Riemann pueden tomarse como

$$R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{1223} \text{ y } R_{1323}.$$

Todas ellas pueden escribirse en la forma

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(g_{\mu[\rho}R_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu}) - g_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu}R. \quad (1.23)$$

Todos los resultados anteriores nos dicen que el tensor de Riemann completo, sólo se necesita en espacios-tiempo de dimensión:  $d \geq 4$ . Resumiendo, hemos visto que en  $d = 1$ , el tensor de Riemann siempre se anula. En  $d = 2$  el tensor de Riemann sólo tiene una componente independiente, la cual es igual al escalar de curvatura  $R$  y en  $d = 3$ , las 6 componentes independientes del tensor de Riemann se pueden escribir en términos de las 6 componentes del tensor de Ricci.

• Por otro lado, en  $d = 4$ , la ecuación (1.19) nos dice que el tensor de curvatura tiene 20 componentes independientes, mientras que el tensor de Ricci sólo tiene 10 componentes independientes. Esto implica que en  $d = 4$ , el tensor  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  tiene 10 componentes que van más allá de las que se pueden construir como combinaciones del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Un resultado análogo vale para  $d > 4$ .

Antes de finalizar esta sección, es importante enfatizar que las  $\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1)$  componentes independientes  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  del tensor de Riemann describen a la curvatura de un espacio de  $d$ -dimensiones, pero no en una manera invariante, ya que los valores de estas componentes no sólo dependen de la propiedades intrínsecas del espacio, sino también del sistema de coordenadas particular elegido. La caracterización invariante de un espacio está dada en términos de *escalares* construidos con  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  y  $g_{\mu\nu}$ . Es posible saber cuántos de estos escalares hay en un espacio de  $d$ -dimensiones mediante un cálculo muy sencillo. Cuando realizamos una transformación general de coordenadas  $x \rightarrow x'$ , en un punto dado  $X$ , podemos utilizar las  $d^2$  cantidades  $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$  para simplificar las expresiones de las cantidades geométricas. De esta manera a las  $\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1)$  componentes independientes de  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ , y a las  $\frac{1}{2}d(d + 1)$  componentes independientes de  $g_{\mu\nu}$  en el punto  $X$ , las podemos restringir al realizar una transformación general de coordenadas con  $d^2$  condiciones algebraicas, así el número de escalares que podemos construir utilizando  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  y  $g_{\mu\nu}$  es

$$\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1) + \frac{1}{2}d(d + 1) - d^2 = \frac{1}{12}d(d - 1)(d - 2)(d + 3). \quad (1.24)$$

Esta fórmula es válida para  $d \geq 3$ .

- El caso  $d = 2$  es una excepción a este argumento, aunque la fórmula nos dice que no existe escalar alguno que podamos construir, en realidad existe uno, debido a un subgrupo uniparamétrico de transformaciones de coordenadas, que no tienen efecto ni en  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ , ni en  $g_{\mu\nu}$ , por lo cual en realidad existe un escalar, el escalar de curvatura  $R$ . Sin embargo esta excepción no ocurre para espacios de dimensión mayor.

- En  $d = 3$  la relación (1.24) nos dice que existen 3 escalares de curvatura, los cuales se pueden elegir de manera conveniente como las tres raíces de la ecuación secular

$$\det(R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}) = 0,$$

o equivalentemente como las tres cantidades

$$R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \text{ y } \frac{\det R}{\det g}.$$

- En  $d = 4$  la ecuación (1.24) nos dice que existen 14 escalares. Para enumerarlos (y para otros propósitos también), es conveniente hacer la descomposición del tensor de Riemann en términos de sus componentes irreducibles. Este será el propósito de la sección siguiente.

### 1.3. Representaciones irreducibles de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$

Un tensor arbitrario de segundo rango, puede ser descompuesto en términos de un tensor antisimétrico y un tensor simétrico, a su vez el tensor simétrico puede ser descompuesto aún más, en un tensor simétrico de traza nula y un término proporcional al tensor métrico

$$T_{\mu\nu} = T_{[\mu\nu]} + T_{(\mu\nu)} = T_{[\mu\nu]} + \left\{ T_{(\mu\nu)} - \frac{1}{d} T_{\rho}^{\rho} g_{\mu\nu} \right\} + \frac{1}{d} T_{\rho}^{\rho} g_{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

Una manera rápida de ver que esta descomposición tiene sentido, es contando el número de componentes independientes a cada lado de la ecuación. En el lado izquierdo tenemos un tensor de segundo rango, el cual, en  $d$ -dimensiones tiene  $d^2$  componentes. En el lado derecho tenemos la suma de un tensor antisimétrico, el cual tiene  $d(d-1)/2$  componentes y un tensor simétrico, el cual tiene  $d(d+1)/2$  componentes. Es claro que la suma de las componentes del lado derecho da el número correcto de componentes:  $d^2$ .

De manera análoga a la descomposición del tensor de rango 2, el tensor de Riemann puede ser dividido en 3 partes, las cuales corresponden a las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = C_{\rho\sigma\mu\nu} + E_{\rho\sigma\mu\nu} + G_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (1.26)$$

El primer término  $C_{\rho\sigma\mu\nu}$  es conocido como el tensor de Weyl o tensor de curvatura conforme, el segundo término  $E_{\rho\sigma\mu\nu}$  es un tensor escrito exclusivamente en términos del

tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor métrico, mientras que el último término  $G_{\rho\sigma\mu\nu}$  es un tensor escrito exclusivamente en términos del escalar de curvatura y el tensor métrico. Explícitamente tenemos que la expresión y propiedades de cada término son las siguientes:

- Tensor de Weyl

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{d-2} (g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + \frac{2R}{(d-1)(d-2)} g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}. \quad (1.27)$$

El tensor  $C_{\rho\sigma\mu\nu}$  es un tensor que tiene las mismas simetrías que el tensor de Riemann y adicionalmente es un tensor completamente sin traza. Esta última propiedad significa que la contracción con respecto a cada par de índices es cero, es decir:  $C_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = C_{\rho}^{\mu}{}_{\mu\nu} = 0$ . Debido a estas propiedades, el tensor tiene  $\frac{1}{12}d(d+1)(d+2)(d-3)$  componentes independientes no nulas. Un espacio-tiempo con tensor de Weyl idénticamente cero, se dice que es conformalmente plano.

- El tensor semi-sin traza  $E_{\rho\sigma\mu\nu}$

$$E_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{2}{(d-2)} (g_{\rho[\mu}S_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}S_{\nu]\rho}), \quad (1.28)$$

con  $\frac{1}{2}d(d-1)$  componentes independientes no nulas, donde

$$S_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{d}R g_{\mu\nu}, \quad (1.29)$$

denota la parte sin traza del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ .

- El escalar  $G_{\rho\sigma\mu\nu}$

$$G_{\rho\sigma\mu\nu} \equiv \frac{2}{d(d-1)} R g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}, \quad (1.30)$$

con  $d$  componentes independientes no nulas y el cual satisface que la condición:

$$G_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \frac{1}{d}g_{\sigma\nu}R.$$

Esbochemos como construir el tensor de Weyl, para ello consideremos el tensor antisimétrico más general, en el primer y segundo par de índices, esto es

$$g^{\rho\sigma}C_{\rho\sigma\mu\nu} = g^{\mu\nu}C_{\rho\sigma\mu\nu} = 0.$$

Esta condición es necesaria para que el tensor de Weyl tenga las mismas propiedades de antisimetría que el tensor de Riemann, y escribamos este tensor en términos de  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}$  y  $R$ ,

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} + \alpha (g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + \beta g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}R. \quad (1.31)$$

Note que los términos que involucran al tensor de Ricci y al escalar de curvatura, son el análogo de la ecuación (1.23). Como queremos construir el tensor de traza nula, debemos imponer la condición

$$g^{\rho\nu} C_{\rho\sigma\mu\nu} = -C^{\nu}_{\sigma\nu\mu} = 0.$$

Imponiendo esta condición en (1.31) obtenemos

$$g^{\rho\nu} C_{\rho\sigma\mu\nu} = g^{\rho\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \alpha (g^{\rho\nu} g_{\rho[\mu} R_{\nu]\sigma} - g^{\rho\nu} g_{\sigma[\mu} R_{\nu]\rho}) + \beta g^{\rho\nu} g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma} R.$$

El primer término del lado derecho es simplemente el negativo del tensor de Ricci

$$g^{\rho\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\mu}.$$

Para el segundo y tercer término tenemos

$$g^{\rho\nu} g_{\rho[\mu} R_{\nu]\sigma} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (g_{\rho\mu} R_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu} R_{\mu\sigma}) = \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\nu} R_{\nu\sigma} - d R_{\mu\sigma}),$$

y

$$g^{\rho\nu} g_{\sigma[\mu} R_{\nu]\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (g_{\sigma\mu} R_{\nu\rho} - g_{\sigma\nu} R_{\mu\rho}) = \frac{1}{2} (g_{\sigma\mu} R - \delta_{\sigma}^{\rho} R_{\mu\rho}).$$

Finalmente para el cuarto término tenemos

$$g^{\rho\nu} g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma} R = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma}) R = \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\nu} g_{\nu\sigma} - d g_{\mu\sigma}) R.$$

Juntando estos resultados tenemos entonces que la contracción de las componentes del tensor de Weyl son

$$g^{\rho\nu} C_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\mu} + \frac{\alpha}{2} ((2-d) R_{\mu\sigma} - g_{\sigma\mu} R) + \frac{\beta}{2} (1-d) g_{\mu\sigma} R = 0,$$

de la cual obtenemos dos ecuaciones, una para el tensor de Ricci

$$-R_{\sigma\mu} + \frac{\alpha}{2} (2-d) R_{\mu\sigma} = 0, \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2}{(d-2)},$$

y una para el escalar de curvatura

$$-\frac{\alpha}{2} g_{\sigma\mu} R + \frac{\beta}{2} (1-d) g_{\mu\sigma} R = 0, \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{\alpha}{(d-1)} = \frac{2}{(d-1)(d-2)}.$$

De lo cual obtenemos finalmente la ecuación (1.27)

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{(d-2)} (g_{\rho[\mu} R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu} R_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(d-1)(d-2)} g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma} R.$$

El nombre *tensor de curvatura conforme* o *tensor conforme* está relacionado con el hecho de que dos espacios de Riemann diferentes cuyos intervalos  $d\hat{s}^2$  y  $ds^2$  están conformemente relacionados,

$$ds^2 = \Omega^2(x^\mu) d\hat{s}^2,$$

tienen el mismo tensor de Weyl, aunque sus tensores de curvatura de Riemann sean diferentes. Su relevancia física reside en que este tensor describe la contribución del campo gravitacional que se propaga en el vacío y que es detectable en las regiones externas de la fuente, por ejemplo las ondas gravitacionales.

Finalmente es directo contar el número de componentes independientes del tensor, para ello recordemos que el tensor de Weyl tiene las mismas propiedades de simetría que el tensor de Riemann y por tanto tiene  $\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1)$  componentes, sin embargo el tensor de Weyl está sujeto a la condición adicional

$$0 = C^\nu_{\sigma\nu\mu} = g^{\rho\nu}C_{\rho\sigma\nu\mu} = g^{\rho\nu}C_{\nu\mu\rho\sigma} = C^\nu_{\mu\nu\sigma}.$$

Para contar el número de componentes nulas que implica esta relación, notemos que podemos considerar a esta contracción como un tensor simétrico en los índices  $\sigma\mu$ , por lo tanto en  $d$ -dimensiones, el tensor tiene  $\frac{1}{2}d(d+1)$  componentes nulas adicionales. Así el tensor de Weyl tiene

$$\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1) - \frac{1}{2}d(d+1) = \frac{1}{12}d(d+1)(d+2)(d-3)$$

componentes independientes. Este resultado nos dice simplemente que en  $d = 3$ , el tensor de Weyl se anula idénticamente:  $C_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$ , mientras que en  $d = 4$ , el tensor de Weyl tiene 10 componentes independientes. Estos resultados están en completo acuerdo con nuestra discusión en la sección anterior. En particular en el caso  $d = 3$  como el tensor de Weyl se anula, obtenemos de la ecuación (1.27)

$$0 = R_{\rho\sigma\mu\nu} - 2(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}R,$$

que corresponde precisamente a la ecuación (1.23).

Construyamos ahora el tensor  $E_{\rho\sigma\mu\nu}$ . Al igual que con el tensor de Weyl debemos construir la combinación más general posible consistente con las simetrías del tensor de Riemann, pero esta vez sólo con los tensores  $R_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}$  y  $R$ . Esta combinación es la misma que utilizamos en (1.31), pero desde luego sin incluir  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$

$$E_{\rho\sigma\mu\nu} = \gamma (g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + \delta (g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}g_{\nu]\rho}) R.$$

Es útil escribir esta combinación en términos del tensor

$$S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{\delta}{\gamma} g_{\mu\nu}R,$$

con lo cual obtenemos que

$$E_{\rho\sigma\mu\nu} = \gamma (g_{\rho[\mu}S_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}S_{\nu]\rho}).$$

Imponiendo la condición de que el tensor  $S_{\mu\nu}$  sea de traza nula obtenemos una condición para el cociente  $\delta/\gamma$

$$g^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{1}{d}.$$

Así el tensor resultante es el tensor de Ricci sin traza (1.29). La constante  $\gamma$  la fijaremos imponiendo la condición de que la contracción del primer y tercer índices del tensor  $E_{\rho\sigma\mu\nu}$  de como resultado el tensor de Ricci sin traza  $S_{\sigma\mu}$

$$g^{\rho\mu} E_{\rho\sigma\mu\nu} = S_{\sigma\nu} = \frac{\gamma}{2} g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} S_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu} S_{\mu\sigma} - g_{\sigma\mu} S_{\nu\rho} + g_{\sigma\nu} S_{\mu\rho}),$$

con lo cual obtenemos

$$S_{\sigma\nu} = \frac{\gamma}{2} (d S_{\nu\sigma} - \delta_{\nu}^{\mu} S_{\mu\sigma} - \delta_{\sigma}^{\rho} S_{\nu\rho}) \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{\gamma}{2} (d - 2) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{2}{(d - 2)}.$$

Obteniendo así la expresión (1.28)

$$E_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{2}{(d - 2)} (g_{\rho[\mu} S_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu} S_{\nu]\rho}).$$

Por último, la parte escalar  $G_{\rho\sigma\mu\nu}$  del tensor de Riemann satisface la condición de que al contraer el primer y tercer índices da como resultado  $G^{\mu}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{d} g_{\sigma\nu} R$ , de manera tal que al realizar una segunda contracción obtenemos el escalar de curvatura  $G^{\mu\nu}_{\mu\nu} = R$ . Al igual que en los casos anteriores, el tensor debe tener las mismas simetrías que el tensor de Riemann y debe ser construido utilizando únicamente  $g_{\mu\nu}$  y  $R$ , por lo que el tensor se expresa como

$$G_{\rho\sigma\mu\nu} = \eta R g_{\rho[\sigma} g_{\mu]\nu}.$$

Contrayendo el primer y tercer índices obtenemos

$$G^{\mu}_{\sigma\mu\nu} = \frac{\eta}{2} R (g^{\rho\mu} g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} - g^{\rho\mu} g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu}) = \frac{\eta}{2} (1 - d) g_{\sigma\nu} R.$$

Imponiendo la condición:  $G^{\mu}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{d} g_{\sigma\nu} R$ , obtenemos

$$\frac{\eta}{2} (1 - d) g_{\sigma\nu} R = \frac{1}{d} g_{\sigma\nu} R \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{2}{d(d - 1)}$$

y con este valor de  $\eta$ , la ecuación (1.30)

$$G_{\rho\sigma\mu\nu} \equiv \frac{2}{d(d - 1)} R g_{\rho[\sigma} g_{\mu]\nu}.$$

Estamos ahora en posición de retomar la discusión de la sección anterior donde encontramos que el número de escalares de curvatura que podemos construir en  $d = 4$ , son 14.

En general, cuando los valores propios de  $R_{\mu\nu}$  son *no degenerados*, los invariantes de curvatura se pueden describir por

- Todas las componentes del tensor de Weyl, para el sistema de ejes coordenados único, que diagonaliza a  $R_{\mu\nu}$  y  $g_{\mu\nu}$ . En este caso los elementos de  $g_{\mu\nu}$  son +1's, -1's, y 0's.

- Las componentes restantes son los  $d$  valores propios de  $R_{\mu\nu}$ .

En  $d = 4$  tendríamos entonces que los 14 escalares de curvatura serían las 10 componentes del tensor de Weyl, más los 4 valores propios del tensor de Ricci.

Sin embargo este conteo no es válido cuando alguno de los valores propios de  $R_{\mu\nu}$  es degenerado. Un caso interesante es el de campos gravitacionales en espacio vacío, donde se satisface que:  $R_{\mu\nu} = 0$ . En este caso los invariantes de curvatura en  $d = 4$  están dados por las 10 componentes nulas de  $R_{\mu\nu}$  (recuerde que el que un tensor sea cero, es una afirmación independiente del sistema de coordenadas), más las 4 cantidades

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}, & \quad \frac{\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\delta\epsilon}C^{\delta\epsilon\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{|g|}}, \\ C^{\delta\epsilon\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu}{}_{\delta\epsilon}, & \quad \frac{\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\delta\epsilon}C^{\delta\epsilon\rho\sigma}C_{\eta\xi\rho\sigma}C^{\eta\xi}{}_{\mu\nu}}{\sqrt{|g|}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Petrov dio una descripción equivalente de estos 4 invariantes de curvatura como raíces de una ecuación secular, y clasificó varios tipos de tensores de Weyl de acuerdo a las degeneraciones de estas raíces. Nuestro objetivo en el capítulo 2 de este trabajo, será entrar en los detalles de la clasificación de Petrov.

Finalmente es importante enfatizar que la relación (1.24) nos dice el número de invariantes de curvatura independientes *algebraicamente*. En general existen además relaciones diferenciales entre estos invariantes, y por tanto el número de invariantes de curvatura funcionalmente independientes es menor al expresado en (1.24).

## 1.4. El principio de equivalencia

Uno de los principios físicos fundamentales de la Relatividad General es el *principio de equivalencia*, este principio nos dice que si consideramos una partícula moviéndose libremente bajo la influencia únicamente de fuerzas gravitacionales, entonces existe un sistema de coordenadas  $\{\xi^a\}$  en caída libre, en el cual sus ecuaciones de movimiento en el espacio-tiempo describen una línea recta

$$\frac{d^2\xi^a}{d\sigma^2} = 0, \quad (1.33)$$

donde  $\sigma \equiv \xi^0$ . El intervalo en este sistema coordenado está dado en términos de la métrica de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{ab}d\xi^a d\xi^b. \quad (1.34)$$

Para partículas masivas,  $d\sigma$  coincide con el tiempo propio  $d\sigma^2 = d\tau^2 = -ds^2$ . Supongamos ahora que utilizamos cualquier otros sistema coordenado  $x^\mu$ , el cual puede ser un sistema coordenado cartesiano en reposo en el sistema de laboratorio, o cualquier otro

sistema curvilíneo. Las coordenadas en el sistema en caída libre  $\{\xi^a\}$  son funciones de las coordenadas curvas  $x^\mu$ , y la ecuación (1.33) se reescribe como

$$0 = \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) \Big|_{x=X} = \left( \frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \frac{\partial^2 \xi^a(x)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) \Big|_{x=X}. \quad (1.35)$$

Note que estamos señalando explícitamente que la ecuación es válida en un punto  $x = X$  del espacio-tiempo. Si multiplicamos esta ecuación por la relación inversa  $\partial x^\mu / \partial \xi^a$  y utilizamos la propiedad

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (1.36)$$

obtenemos finalmente

$$\left( \frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} \right) \Big|_{x=X} = 0, \quad (1.37)$$

donde  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  es la conexión afín, definida como

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \Big|_{x=X} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial^2 \xi^a(x)}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \Big|_{x=X}. \quad (1.38)$$

Note que es posible escribir el intervalo en términos de las coordenadas curvas  $x^\mu$ , al considerar la transformación:  $dx^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} dx^\mu$ , esto es

$$ds^2 = \eta_{ab} \frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu} \Big|_{x=X} dx^\mu \frac{\partial \xi^b(x)}{\partial x^\nu} \Big|_{x=X} dx^\nu \equiv g_{\mu\nu}(x) \Big|_{x=X} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.39)$$

con el tensor métrico definido como

$$g_{\mu\nu}(x) \Big|_{x=X} \equiv \eta_{ab} \frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^b(x)}{\partial x^\nu} \Big|_{x=X}. \quad (1.40)$$

Es importante notar que los valores del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y la conexión afín  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  en el punto  $X$ , determinan las coordenadas inerciales locales  $\xi^a(x)$  en una vecindad del punto. Para visualizar que este es el caso, multipliquemos la ec. (1.38) por  $\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu}$  y utilicemos la propiedad

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^b} = \delta_a^b, \quad (1.41)$$

con lo cual obtenemos

$$\frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu} \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \Big|_{x=X} \equiv \frac{\partial^2 \xi^a(x)}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \Big|_{x=X}. \quad (1.42)$$

Esta es una ecuación diferencial para la coordenada local en el punto  $X$  y su solución es

$$\xi^a(x) = a^a + e_\mu^a (x^\mu - X^\mu) + \frac{1}{2} b_\lambda^a \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (x^\mu - X^\mu)(x^\nu - X^\nu) + \dots, \quad (1.43)$$

donde

$$a^a \equiv \xi^a(X), \quad y \quad e_\mu^a(x)|_{x=X} \equiv \left. \frac{\partial \xi^a(x)}{\partial x^\mu} \right|_{x=X}. \quad (1.44)$$

En términos de las constantes  $e_\mu^a(X)$  la ecuación (1.40) puede reescribirse como

$$g_{\mu\nu}(x)|_{x=X} \equiv \eta_{ab} e_\mu^a(x) e_\nu^b(x)|_{x=X}. \quad (1.45)$$

Finalmente señalemos que las constantes  $e_\mu^a(X)$  están determinadas por las ecuaciones (1.43) hasta una transformación de Lorentz

$$e_\mu^a(X) \rightarrow e_\mu^b(X) \Lambda_b^a, \quad (1.46)$$

la cual deja invariante la ecuación (1.45). Concluimos de esto que el conjunto de coordenadas inerciales posee una ambigüedad en las constantes  $a^a$  y  $b_\mu^a$ , lo cual se refleja en el hecho de que si las coordenadas  $\xi^a$  son coordenadas inerciales locales, también lo son las coordenadas:  $\xi^b \Lambda_b^a + c^a$ .

El principio de equivalencia implica entonces, que si conocemos los valores de la métrica y los símbolos de Christoffel en un punto  $X$ , podemos determinar localmente las coordenadas inerciales a orden  $(x - X)^2$ , hasta una transformación inhomogénea de Lorentz. Desde luego, sabemos también que no es posible construir un único sistema coordenado que sea localmente inercial en todo punto, a menos que el espacio-tiempo sea plano.

## 1.5. Formalismo de tétradas

La forma usual de resolver problemas en Relatividad General es obtener la métrica a través de las ecuaciones de campo (1.17). Una forma alternativa de resolver el problema es utilizar el formalismo de tétradas. En este formalismo uno utiliza la libertad que tenemos de escoger la base coordenada para describir la física, y elegimos un conjunto de 4 vectores linealmente independientes en cada punto  $X$  del espacio-tiempo, que simplifiquen las cantidades geométricas relevantes del problema. De esta forma, los objetos de interés (vectores, tensores, etc.) se proyectan en la nueva base para realizar los cálculos, y luego si se desea es posible regresar a la base coordenada original con una nueva proyección.

La ventaja que posee este formalismo respecto a la formulación en términos de la métrica radica en el hecho de que uno puede elegir la tétrada de manera tal que ésta refleje aspectos relevantes del espacio-tiempo que se encuentra bajo estudio. Entre las tétradas más utilizadas se encuentran las tétradas nulas (tétradas cuyos vectores son vectores nulos, dos reales y dos complejos, siendo estos últimos complejos conjugados uno del otro), y particularmente las tétradas de Newman-Penrose.

La elección de la base de tétradas depende de las simetrías de la variedad considerada. Para comenzar con el formalismo, supongamos que tenemos una variedad  $\mathcal{M}$ ,

provista con una métrica  $g$ . Haciendo uso del principio de equivalencia, podemos construir localmente un sistema coordenado inercial, el cual de acuerdo con la ecuación (1.45) se puede escribir como

$$\eta_{ab} e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \equiv g_{\mu\nu}(x), \quad (1.47)$$

donde  $e_\mu^a(x)$  satisface la condición (1.44) en el punto  $X$ . Ahora bien, para cada punto físico  $X$  podemos fijar el sistema inercial local e investigar como transforman las derivadas parciales  $e_\mu^a(x)$  ante un cambio de coordenadas no inercial de  $x^\mu$  a  $x'^\mu$ , obteniendo la regla de transformación

$$e_\mu^a(x) \rightarrow e'_\mu{}^a(x) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu^a(x). \quad (1.48)$$

Sabemos también por la ec. (1.46) que cuando cambiamos de un sistema coordenado inercial a otro inercial,  $e_\mu^a(x)$  transforma mediante una transformación de Lorentz

$$e_\mu^a(x) \rightarrow e_\mu^a(x) = e_\mu^b(x) \Lambda_b^a. \quad (1.49)$$

Debido a estas propiedades de transformación podemos pensar a las

$$e_\mu^a(x), \quad (1.50)$$

como cuatro campos vectoriales covariantes respecto a las coordenadas curvas y como cuatro campos vectoriales contravariantes respecto a las coordenadas planas. Este conjunto de vectores se conoce como *tétrada* o *vielbein*. Queda claro que ambos tipos de índices, latinos y griegos, toman los valores: 0, 1, 2, 3. Y queda claro también su significado, el índice griego representa a las coordenadas curvilíneas y el índice latino al sistema coordenado inercial. El inverso de las tétradas (1.50) se define mediante la operación matricial

$$e_\mu^a(x) e_a^\nu(x) = \delta_\mu^\nu, \quad (1.51)$$

que no es otra cosa que la regla de la cadena (1.36). De manera análoga la condición (1.41) se escribe como

$$e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab}, \quad (1.52)$$

la cual puede interpretarse como una condición de ortonormalidad<sup>2</sup>. En términos de la tétrada y la tétrada inversa, podemos definir los vectores y uno formas tanto en las coordenadas inerciales como en las coordenadas curvas

$$e_a = e_a^\mu(x) \partial_\mu, \quad \omega^a = e_\mu^a(x) dx^\mu, \quad (1.53)$$

$$e_\mu = e_\mu^a(x) \partial_a, \quad \omega^\mu = e_a^\mu(x) dx^a. \quad (1.54)$$

Queda claro que la relación entre los índices de las tétrada y la tétrada inversa está dada por

$$e_a^\mu(x) = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_\nu^b(x), \quad y \quad e_\mu^a(x) = g_{\mu\nu} \eta^{ab} e_b^\nu(x). \quad (1.55)$$

---

<sup>2</sup>En la versión Euclidiana:  $\eta_{ab} \rightarrow \delta_{ab}$ .

Así, dado cualquier campo vectorial contravariante  $A^\mu(x)$ , podemos utilizar las tétradas para referir sus componentes en el punto  $x$ , al sistema coordenado inercial local  $\xi^a(x)$  en el mismo punto

$$A^a(x) \equiv e_\mu^a(x)A^\mu(x). \quad (1.56)$$

Note que estamos contrayendo un vector contravariante  $A^\mu$  con cuatro vectores covariantes  $e_\mu^a(x)$ , de forma tal esta transformación tiene el efecto de reemplazar el 4-vector  $A^\mu$  por *cuatro* escalares  $A^a$ . Esta misma operación se puede realizar con cualquier campo vectorial contravariante y en general con cualquier campo tensorial

$$\begin{aligned} A_a(x) &\equiv e_a^\mu(x)A_\mu(x), \\ B_a{}^b(x) &\equiv e_a^\mu(x)e_\nu^b(x)B_\mu{}^\nu(x), \text{ etc.} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Regresando a la libertad que tenemos de elegir el sistema inercial local, notemos que con ayuda de la relación (1.47) y las 1-formas (1.53) podemos reescribir el elemento de línea en la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab}e_\mu^a(x)dx^\mu e_\nu^b(x)dx^\nu = \eta_{ab}\omega^a\omega^b. \quad (1.58)$$

En la métrica

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

el intervalo se escribe explícitamente como

$$ds^2 = \eta_{ab}\omega'^a \otimes \omega'^b = -\omega'^0 \otimes \omega'^0 + \omega'^1 \otimes \omega'^1 + \omega'^2 \otimes \omega'^2 + \omega'^3 \otimes \omega'^3. \quad (1.60)$$

Es posible encontrar ahora la forma de la métrica  $\tilde{\eta}_{ab}$  para un conjunto de 4 tétradas nulas, donde por tétrada *nula* entendemos una tétrada cuya norma es cero. Para ello notemos que el conjunto de 1-formas siguiente tiene norma cero

$$\omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega'^0 + \omega'^1), \quad \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega'^2 + i\omega'^3), \quad (1.61)$$

$$\omega^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega'^0 - \omega'^1), \quad \omega^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega'^2 - i\omega'^3). \quad (1.62)$$

Definiendo el producto directo simétrico:  $\omega'^a \otimes_s \omega'^b \equiv \frac{1}{2}(\omega'^a \otimes \omega'^b + \omega'^b \otimes \omega'^a)$ , obtenemos

$$\omega^0 \otimes_s \omega^1 = \frac{1}{2}(-\omega'^0 \otimes \omega'^0 + \omega'^1 \otimes \omega'^1), \quad \omega^2 \otimes_s \omega^3 = \frac{1}{2}(-\omega'^2 \otimes \omega'^2 + \omega'^3 \otimes \omega'^3).$$

Así podemos escribir el intervalo como

$$ds^2 = -2\omega^0 \otimes_s \omega^1 + 2\omega^2 \otimes_s \omega^3, \quad (1.63)$$

y la métrica del sistema inercial toma la forma

$$\tilde{\eta}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

## 1.6. Tétradas nulas

El formalismo de Newman-Penrose (1962) es de gran utilidad en relatividad general. Esta técnica matemática es importante en investigaciones tales como: Soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, inmersión del espacio-tiempo, estudio de congruencias nulas, clasificación de Petrov, comportamiento asintótico, el problema de la energía del campo gravitacional, etc. En particular en la Clasificación de Petrov (CP) aparece la tétrada nula compleja de Newman-Penrose en forma natural. Consideremos nuevamente la métrica

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Escribamos esta métrica en términos de los cuatro vectores unitarios  $u_a$ ,  $s_a$ ,  $v_a$  y  $w_a$ , definidos por

$$\begin{aligned} u_a &\equiv -\frac{\partial ct}{\partial \xi^a} = (-1, 0, 0, 0), & s_a &\equiv \frac{\partial x}{\partial \xi^a} = (0, 1, 0, 0), \\ v_a &\equiv \frac{\partial y}{\partial \xi^a} = (0, 0, 1, 0), & w_a &\equiv \frac{\partial z}{\partial \xi^a} = (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Así,  $-u^a u_a = s^a s_a = v^a v_a = w^a w_a = 1$ , mientras que los productos restantes son cero. Estos cuatro vectores forman un sistema completo, cualquier vector o tensor se puede expresar utilizando combinaciones lineales y productos de éstos, por ejemplo

$$\eta_{ab} = -u_a u_b + s_a s_b + v_a v_b + w_a w_b. \quad (1.66)$$

Introducimos un nuevo conjunto de tétradas llamado tétradas nulas, o tétradas de Sachs, o tétradas de Newman-Penrose, el cual consta de dos vectores reales nulos  $k$ ,  $l$ , y dos vectores nulos complejos  $m$ ,  $\bar{m}$  (la barra sobre  $m$  denota conjugación compleja)

$$\{e_a\} = (k_a, l_a, m_a, \bar{m}_a). \quad (1.67)$$

Que los vectores sean nulos significa que

$$k_a k^a = l_a l^a = m_a m^a = \bar{m}_a \bar{m}^a = 0. \quad (1.68)$$

La nueva tétrada la podemos escribir en términos de la tétrada (1.65) en la forma:

$$k_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_a + s_a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0), \quad l_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_a - s_a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0, 0), \quad (1.69)$$

$$m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_a + i w_a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, i), \quad \bar{m}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_a - i w_a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -i), \quad (1.70)$$

mientras que las tétradas contravariantes en el índice plano están dadas por

$$k^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \quad l^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \quad (1.71)$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, i), \quad \bar{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -i). \quad (1.72)$$

La métrica (1.59) queda escrita en términos de las tétradas nulas como

$$\eta_{ab} = -2k_{(a}l_{b)} + 2m_{(a}\bar{m}_{b)}, \quad (1.73)$$

y los diferentes productos escalares de las tétradas son

$$m^a\bar{m}_a = -k^al_a = 1, \quad k^am_a = l^am_a = 0. \quad (1.74)$$

Como hemos visto, una base de tétradas no queda definida de forma única, ya que existe la libertad de realizar Transformaciones de Lorentz. Por este motivo es importante saber cómo actúan las transformaciones sobre las tétradas nulas que hemos definido.

### 1.6.1. Transformaciones de Lorentz

Estudiemos ahora como actúan las Transformaciones de Lorentz sobre la base de tétradas nulas. Nuestra guía para ello será estudiar las diferentes formas en que las transformaciones dejan invariante los productos internos entre las tétradas nulas.

- Boost en la dirección  $x$  y el cambio de tamaño en  $k_a$  y  $l_a$

Comencemos observando que la multiplicación de  $k^\mu$  por una constante (o función par)  $A$ , sigue siendo un vector nulo. Para mantener el producto interno  $k^al_a$  fijo debe suceder que

$$k'^a = Ak^a, \quad l'^a = A^{-1}l^a, \quad A > 0. \quad (1.75)$$

Consideremos ahora dos sistemas de referencia inerciales que se desplazan uno respecto del otro a lo largo del eje  $x$ , investiguemos la relación entre el parámetro  $A$  y la velocidad relativa entre los dos sistemas, para ello consideremos la Transformación de Lorentz (boost) correspondiente, la cual tiene la forma

$$\Lambda_a{}^b = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

Dado que los vectores  $u_a$  y  $s_a$  transforman como

$$u^a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow u'^a = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad v^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v'^a = \begin{pmatrix} -\beta\gamma \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el vector  $k^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^a + v^a)$  transforma de la siguiente manera

$$k'^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \beta)\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} k^a,$$

con lo cual concluimos que el valor de la función  $A$  está relacionado con la velocidad como  $A = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ . Procediendo análogamente con  $l^a$  obtenemos la forma de transformación para los vectores nulos reales

$$k'^a = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} k^a, \quad l'^a = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} l^a. \quad (1.77)$$

Queda claro que la Transformación de Lorentz (1.76) no afecta a los vectores nulos complejos  $m$  y  $\bar{m}$  y por tanto los productos internos (1.74) quedan invariantes.

- Transformaciones con  $k^a$  fijo.

Consideremos ahora una Transformación de Lorentz que deje invariante el vector  $k^a$ , es decir  $k'^a = k^a$ . Para ello consideremos a  $l'^a$  como la combinación más general de los vectores nulos, es decir:  $l'^a = l^a + Dk^a + \bar{B}m^a + \bar{E}\bar{m}^a$ , e imponamos la condición de que los productos escalares se mantengan. Es claro que para que el producto interno  $k'^a l'_a = k^a l_a = -1$ , se mantenga, el coeficiente de  $l^a$  en la combinación lineal debe ser 1, ya que  $k^a$  se ha mantenido fijo.

Las constantes  $D$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{E}$ , no son todas independientes. Pidiendo que el vector  $l'^a$  sea real obtenemos  $\bar{D} = D$  y  $B = \bar{E}$  y pidiendo que el vector sea nulo, esto es,  $l'^a l'_a = 0$ , obtenemos  $D = B\bar{B}$  y por tanto

$$l'^a = l^a + B\bar{B}k^a + \bar{B}m^a + B\bar{m}^a. \quad (1.78)$$

Para obtener la forma del vector de Lorentz  $m'^a$  procedemos de la misma manera, esto es, proponemos una combinación lineal en términos de las tétradas nulas e imponemos la condición de preservar los productos internos. La condición  $k'^a m'_a = 0$  impone que el vector  $l^a$  no aparezca en la combinación, así la combinación más general, es de la forma

$$m'^a = \delta k^a + \epsilon m^a + \chi \bar{m}^a.$$

Para encontrar las relaciones entre las constantes utilizamos las siguientes propiedades  $\bar{m}'^a m'_a = 1$ ,  $l'^a \bar{m}'_a = 0$  y  $m'^a m'_a = 0$ , de las cuales obtenemos las siguientes relaciones  $|\epsilon|^2 + |\chi|^2 = 1$ ,  $-\delta + B\epsilon + \bar{B}\chi = 0$  y  $\epsilon\chi = 0$  respectivamente. De esta última relación elegimos  $\chi = 0$ , donde obtenemos que la ecuaciones se reducen a  $|\epsilon|^2 = 1$ ,  $\delta = B\epsilon$ . Obteniendo finalmente  $\epsilon = e^{i\Theta}$ . En resumen, la transformación de Lorentz cambia las tétradas en la forma

$$k'^a = k^a, \quad l'^a = l^a + B\bar{B}k^a + \bar{B}m^a + B\bar{m}^a, \quad m'^a = e^{i\Theta} (m^a + Bk^a), \quad (1.79)$$

donde  $\Theta$  es un número real y  $B$  es complejo.

- Transformaciones con  $l^a$  fijo.

Realizando el mismo procedimiento podemos obtener una rotación nula manteniendo  $l^a$  fijo

$$l'^a = l^a, \quad k'^a = k^a + C\bar{C}l^a + \bar{C}m^a + C\bar{m}^a, \quad m'^a = e^{i\Theta} (m^a + Cl^a). \quad (1.80)$$

La transformación general entre dos tétradas nulas contiene seis parámetros reales que son precisamente el número de parámetros de una transformación general de Lorentz. Estos seis parámetros reales están dados por dos cantidades reales:  $\Theta$  y  $A$  y dos complejas  $B$  y  $C$ . Geométricamente el parámetro  $\Theta$  se interpreta como un ángulo de rotación en el plano  $m - \bar{m}$ , para visualizar esta afirmación, utilicemos la ecuación (1.70) y escribamos la parte de la transformación  $m'^a = e^{i\Theta} m^a$  como:

$$(v + iw)' = e^{i\Theta}(v + iw),$$

la cual podemos dividir en parte real y parte imaginaria, obteniendo

$$v' = v \cos \Theta - w \sin \Theta, \quad y \quad w' = z \sin \Theta + w \cos \Theta. \quad (1.81)$$

El parámetro  $A$  corresponde a una combinación del parámetro  $\beta$  de un boost de Lorentz en la dirección  $x$ , y los parámetros  $B$  y  $C$  describen las llamadas rotaciones nulas.

## 1.7. Las ecuaciones de Cartan

Se puede demostrar siguiendo la lógica de sustituir índices curvos por índices planos que hemos discutido anteriormente (ver por ejemplo [13]), que las componentes del tensor de curvatura en la formulación de tétradas están dadas por

$$R^a{}_{bcd} = \Gamma^a{}_{bd|c} - \Gamma^a{}_{bd|c} + \Gamma^e{}_{bd} \Gamma^a{}_{ec} - \Gamma^e{}_{bc} \Gamma^a{}_{ed} - D^e{}_{cd} \Gamma^a{}_{be}, \quad (1.82)$$

donde

$$\Gamma^a{}_{bd|c} = \Gamma^a{}_{bd;c} + \Gamma^e{}_{bc} \Gamma^a{}_{ed} + \Gamma^e{}_{dc} \Gamma^a{}_{be} \quad ; \quad D^e{}_{cd} = -2\Gamma^e{}_{[cd]}.$$

En una base de coordenadas, uno puede simplemente sustituir los símbolos de Christoffel en esta expresión y listo. Sin embargo, el método de Cartan para el cálculo de la curvatura es más compacto y eficiente en muchas aplicaciones. Una vez obtenidas las componentes de las tétradas, el algoritmo se divide en dos pasos.

- (i) Cálculo de la conexión  $\Gamma^a{}_b$  de las 1-formas.

Primero consideremos las bases  $\{e_a\}$  y  $\{\omega^a\}$  definidas en (1.53). La base  $\{e_a\}$  es la base del espacio tangente  $T_p$  y la base  $\{\omega^a\}$  es la llamada base dual, por ser base del espacio dual  $T_p^*$  (cotangente). Por lo tanto estas bases satisfacen

$$\langle \omega^a, e_b \rangle = \delta^a_b. \quad (1.83)$$

Los coeficientes de conexión  $\Gamma^c{}_{ab}$  se puede escribir con respecto a estas bases como

$$\Gamma^c{}_{ab} = \omega^c{}_{\mu} e^{\mu}{}_{a;\nu} e^{\nu}{}_{b} = -e^{\mu}{}_{a} \omega^c{}_{\mu;\nu} e^{\nu}{}_{b}. \quad (1.84)$$

Estos también se conocen como los coeficientes de rotación de Ricci. Para la derivada exterior de la base de 1-formas obtenemos

$$d\omega^a = d(e_\mu^a dx^\mu) \equiv \omega_{\mu,\nu}^a dx^\nu \wedge dx^\mu = \omega_{\mu;\nu}^a dx^\nu \wedge dx^\mu = \Gamma_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c. \quad (1.85)$$

Introduciendo la conexión como la 1-forma

$$\Gamma_b^a \equiv \Gamma_{bc}^a \omega^c, \quad (1.86)$$

podemos reescribir la derivada exterior  $d\omega^a$  (ec. 1.85) en la forma

$$d\omega^a = -\Gamma_b^a \wedge \omega^b, \quad (1.87)$$

donde esta ecuación es conocida como la primera ecuación de Cartan.

- (ii) Cálculo de la 2-forma de curvatura  $\Theta_b^a$

De la segunda ecuación de Cartan, definida por Cartan como:

$$\Theta_b^a \equiv \frac{1}{2} R_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d = d\Gamma_b^a + \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c, \quad (1.88)$$

podemos calcular las componentes del tensor de curvatura  $R_{bcd}^a$  con respecto a una base general  $\{e_a\}$  y después obtener el tensor de Ricci así como el escalar de curvatura.

## 1.8. Curvatura en el caso esféricamente simétrico

Como un ejemplo de los diferentes conceptos que hemos presentado en este capítulo obtendremos la métrica del agujero negro de Reissner-Nordström, esta métrica corresponde al espacio que genera una distribución esféricamente simétrica de masa  $M$  y carga  $Q$ . Para ello utilizaremos el formalismo de tétradas y comenzaremos por suponer que la solución está descrita por un tensor métrico esféricamente simétrico. El ansatz más general de un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estacionario es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{(2)}^2, \quad (1.89)$$

donde  $\Omega_{(2)}$  es la métrica de la  $S^2$  esfera. Utilizando el elemento de línea proyectado en la base de tétradas (1.58), podemos identificar directamente las uno-formas  $\omega^a$

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \sqrt{f} dt \Rightarrow dt = f^{-1/2} \omega^0, & \omega^1 &= \frac{dr}{\sqrt{f}} \Rightarrow dr = f^{1/2} \omega^1, \\ \omega^2 &= r d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{\omega^2}{r}, & \omega^3 &= r \sin \theta d\phi \Rightarrow d\phi = \frac{\omega^3}{r \sin \theta}. \end{aligned}$$

Utilizamos ahora la definición de la derivada exterior para las 1-formas

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= \frac{1}{2}f^{-1/2}f'dr \wedge dt = \frac{1}{2}f^{-1/2}f'\omega^1 \wedge \omega^0, \\ d\omega^1 &= -\frac{1}{2}f^{-3/2}f'dr \wedge dr = 0, \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= dr \wedge d\theta = \frac{f^{1/2}}{r}\omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^3 &= \sin\theta dr \wedge d\phi + r \cos\theta d\theta \wedge d\phi = \frac{f^{1/2}}{r}\omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{\cos\theta}{r \sin\theta}\omega^2 \wedge \omega^3. \end{aligned} \quad (1.91)$$

De la primera ecuación de Cartan:  $d\omega^a = -\Gamma_b^a \wedge \omega^b$ , podemos comparar directamente con las ecuaciones anteriores y leer el valor de las conexiones. Es conveniente para esta comparación escribir la ecuación de Cartan explícitamente:

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= -\Gamma_b^0 \wedge \omega^b = -\Gamma_0^0 \wedge \omega^0 - \Gamma_1^0 \wedge \omega^1 - \Gamma_2^0 \wedge \omega^2 - \Gamma_3^0 \wedge \omega^3, \\ d\omega^1 &= -\Gamma_b^1 \wedge \omega^b = -\Gamma_0^1 \wedge \omega^0 - \Gamma_1^1 \wedge \omega^1 - \Gamma_2^1 \wedge \omega^2 - \Gamma_3^1 \wedge \omega^3, \\ d\omega^2 &= -\Gamma_b^2 \wedge \omega^b = -\Gamma_0^2 \wedge \omega^0 - \Gamma_1^2 \wedge \omega^1 - \Gamma_2^2 \wedge \omega^2 - \Gamma_3^2 \wedge \omega^3, \\ d\omega^3 &= -\Gamma_b^3 \wedge \omega^b = -\Gamma_0^3 \wedge \omega^0 - \Gamma_1^3 \wedge \omega^1 - \Gamma_2^3 \wedge \omega^2 - \Gamma_3^3 \wedge \omega^3. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Utilizando la propiedad de antisimetría de los coeficientes de Ricci  $\Gamma_{ab}$

$$-\Gamma_{ab} = \Gamma_{ba} \iff -\eta_{ac}\Gamma_b^c = \eta_{bc}\Gamma_a^c, \quad (1.93)$$

concluimos que

$$\Rightarrow \Gamma_0^0 = \Gamma_1^1 = \Gamma_2^2 = \Gamma_3^3 = 0. \quad (1.94)$$

Comparando las ecuaciones (1.90) con las expresiones anteriores de la ecuación (1.92) obtenemos

$$\begin{aligned} -\Gamma_1^0 \wedge \omega^1 &= \frac{1}{2}f^{-1/2}f'\omega^1 \wedge \omega^0 \Rightarrow \Gamma_1^0 = \Gamma_0^1 = \frac{1}{2}f^{-1/2}f'\omega^{(0)}, \\ -\Gamma_1^2 \wedge \omega^1 &= \frac{f^{1/2}}{r}\omega^1 \wedge \omega^2 \Rightarrow \Gamma_1^2 = -\Gamma_2^1 = \frac{f^{1/2}}{r}\omega^2, \\ -\Gamma_1^3 \wedge \omega^1 &= \frac{f^{1/2}}{r}\omega^1 \wedge \omega^3 \Rightarrow \Gamma_1^3 = -\Gamma_3^1 = \frac{f^{1/2}}{r}\omega^3, \\ -\Gamma_2^3 \wedge \omega^2 &= \frac{\cos\theta}{r \sin\theta}\omega^2 \wedge \omega^3 \Rightarrow \Gamma_2^3 = -\Gamma_3^2 = \frac{\cos\theta}{r \sin\theta}\omega^3. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Escribiendo los elementos de  $\Gamma_b^a$  en una matriz, tenemos

$$\Gamma_b^a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}f^{-1/2}f'\omega^0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}f^{-1/2}f'\omega^0 & 0 & -\frac{\sqrt{f}}{r}\omega^2 & -\frac{\sqrt{f}}{r}\omega^3 \\ 0 & \frac{\sqrt{f}}{r}\omega^2 & 0 & -\frac{\cot\theta}{r}\omega^3 \\ 0 & \frac{\sqrt{f}}{r}\omega^3 & \frac{\cot\theta}{r}\omega^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la segunda ecuación de Cartan:  $\Theta_b^a = d\Gamma_b^a + \Gamma_c^a \wedge \Gamma_b^c$  podemos calcular los coeficientes del tensor de curvatura. Ejemplificaremos el cálculo obteniendo explícitamente  $\Theta_1^0$ . El procedimiento para el resto de las  $\Theta_b^a$  es similar

$$\Theta_1^0 = d\Gamma_1^0 + \Gamma_c^0 \wedge \Gamma_1^c.$$

La derivada exterior de  $\Gamma_1^0$  es

$$\begin{aligned} d\Gamma_1^0 &= \left( -\frac{1}{4}f^{-3/2}f'^2 + \frac{1}{2}f^{-1/2}f'' \right) dr \wedge \omega^0 + \frac{1}{2}f^{-1/2}f'd\omega^0 \\ &= \left( -\frac{1}{4}f^{-1}f'^2 + \frac{1}{2}f'' \right) \omega^1 \wedge \omega^0 + \frac{1}{4}f^{-1}f'^2\omega^1 \wedge \omega^0 = \frac{1}{2}f''\omega^1 \wedge \omega^0. \end{aligned}$$

En este caso el producto de uno-formas  $\Gamma_c^0 \wedge \Gamma_1^c = 0$ , y por tanto  $\Theta_1^0 = \frac{1}{2}f''\omega^1 \wedge \omega^0$ . Ahora resumimos en una matriz todos los coeficientes  $\Theta_b^a$

$$\Theta_b^a = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}f''\omega^0 \wedge \omega^1 & -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}\omega^0 \wedge \omega^2 & -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}\omega^0 \wedge \omega^3 \\ -\frac{1}{2}f''\omega^0 \wedge \omega^1 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}\omega^1 \wedge \omega^2 & -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}\omega^1 \wedge \omega^3 \\ -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}\omega^0 \wedge \omega^2 & \frac{1}{2}\frac{f'}{r}\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & \left(\frac{1}{r^2} - \frac{f}{r^2}\right)\omega^2 \wedge \omega^3 \\ -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}\omega^0 \wedge \omega^3 & \frac{1}{2}\frac{f'}{r}\omega^1 \wedge \omega^3 & -\left(\frac{1}{r^2} - \frac{f}{r^2}\right)\omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.96)$$

Por otro lado los coeficientes del tensor de curvatura están relacionados con  $\Theta_b^a$  mediante la ecuación (1.88)

$$\Theta_b^a = \frac{1}{2}R_{bcd}^a\omega^c \wedge \omega^d.$$

Escribiendo explícitamente esta expresión para el termino  $\Theta_1^0$  y comparando directamente con (1.96) tenemos

$$\Theta_1^0 = \frac{1}{2}R_{1cd}^0\omega^c \wedge \omega^d = \frac{1}{2}R_{101}^0\omega^0 \wedge \omega^1 + \frac{1}{2}R_{110}^0\omega^1 \wedge \omega^0 + \dots = R_{101}^0\omega^0 \wedge \omega^1 + \dots$$

obteniendo

$$R_{101}^0\omega^0 \wedge \omega^1 = -\frac{1}{2}f''\omega^0 \wedge \omega^1 \quad \Rightarrow \quad R_{101}^0 = -\frac{1}{2}f''.$$

De la misma manera podemos escribir una ecuación para  $\Theta_2^0, \Theta_3^0, \dots$ , etc. y comparar directamente con la ecuación (1.96) para obtener los coeficientes no nulos del tensor de Riemman restantes

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= -\frac{1}{2}f'', & R_{202}^0 &= -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}, \\ R_{303}^0 &= -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}, & R_{212}^1 &= -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}, \\ R_{313}^1 &= -\frac{1}{2}\frac{f'}{r}, & R_{323}^2 &= \left(\frac{1}{r^2} - \frac{f}{r}\right). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Podemos calcular ahora los coeficientes del tensor de Ricci en la base de tétradas  $R_{ab} = R^c{}_{acb}$

$$\begin{aligned} R_{00} &= +\frac{1}{2}f'' + \frac{f'}{r}, & R_{11} &= -\frac{1}{2}f'' - \frac{f'}{r}, \\ R_{22} &= -\frac{f'}{r} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{f}{r^2}\right), & R_{33} &= -\frac{f'}{r} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{f}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (1.98)$$

y también el escalar de curvatura, el cual resulta ser

$$R = R^a{}_a = R^0{}_0 + R^1{}_1 + R^2{}_2 + R^3{}_3 = -2 \left( \frac{f''}{2} + \frac{2f'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{f}{r^2} \right). \quad (1.99)$$

Para escribir las ecuaciones de Hilbert-Einstein nos interesa también escribir el tensor de Einstein en la base de tétradas

$$\begin{aligned} G_{00} = -G_{11} &= -\frac{f'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{f}{r^2}, \\ G_{22} = G_{33} &= \frac{f''}{2} + \frac{f'}{r}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Con todos estos elementos geométricos, estamos ya en posición de escribir y resolver las ecuaciones de Einstein para el caso en que tenemos una distribución esférica de masa y carga.

## 1.9. Métrica de Reissner-Nordström

Las ecuaciones de Einstein con fuentes, proyectadas en la base de tétradas es

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R = 8\pi T_{ab}. \quad (1.101)$$

Nuestro objetivo es resolver esta ecuación para una distribución esférica de carga eléctrica y masa. En este caso debemos considerar entonces el tensor de energía-momento para el campo de Maxwell, cuya expresión en la base de tétradas es

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left[ \eta_{ad}F^{dc}F_{bc} - \frac{1}{4}\eta_{ab}F_{cd}F^{cd} \right]. \quad (1.102)$$

Debido a que la distribución es esférica tenemos sólo un campo eléctrico radial

$$\vec{E} = \frac{Q}{r^2}\hat{r}, \quad (1.103)$$

donde  $Q$  es la carga eléctrica total de la distribución. Por tanto el tensor electromagnético  $F^{ab}$  toma la forma

$$F^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{Q}{r^2}, \quad (1.104)$$

mientras que las componentes no-nulas del tensor de energía-momento en la base de tétradas, tiene la forma

$$\begin{aligned} T_{00} = -T_{11} &= \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4} \\ T_{22} = T_{33} &= \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Estamos ahora en posición de escribir las ecuaciones de Einstein (1.101) independientes para nuestro sistema. En (1.100) obtuvimos las expresiones del tensor de Einstein y también tenemos ya las expresiones del tensor de energía-momento. Sustituyendo estos resultados obtenemos un sistema de dos ecuaciones linealmente independientes

$$\begin{aligned} \frac{-1 + f + r f'}{f'' r^2} &= -\frac{Q^2}{r^4}, \\ \frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} &= \frac{Q^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

De la primera ecuación tenemos que

$$f + r f' = 1 - \frac{Q^2}{r^2}.$$

Reescribiendo el primer término como  $d(rf)$  e integrando tenemos

$$d(rf) = 1 - \frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow rf = r + \frac{Q^2}{r} + C.$$

Por lo tanto obtenemos que  $f$  tiene la forma

$$f(r) = 1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{C}{r},$$

El valor de la constante  $C$  se obtiene al considerar en límite  $Q \rightarrow 0$ , obteniendo  $C = -2M$ . Esta métrica describe el exterior de un agujero negro y se le conoce con el nombre de métrica de Reissner-Nordström (que abreviaremos como RN)

$$ds^2 = -\psi_{RN} dt^2 + \psi_{RN}^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (1.107)$$

donde

$$\psi_{RN} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (1.108)$$

Usualmente la métrica RN se escribe en la forma

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_r} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (1.109)$$

con

$$\Delta(r) \equiv r^2 - 2Mr + Q^2. \quad (1.110)$$

A partir de la métrica RN (1.109), se puede observar que existen tres singularidades. Una singularidad esencial en  $r = 0$ , la cual es una singularidad no-removible similar al caso  $r = 0$  en Schwarzschild. Las otras dos singularidades son singularidades coordenadas y se encuentran en los puntos donde  $\Delta(r_{\pm}) = 0$ , con

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad \text{y} \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (1.111)$$

- Caso  $M < |Q|$

Cuando  $M < |Q|$  los valores de  $r_{\pm}$  no son reales. La función  $\Delta$  es siempre positiva y la métrica no posee singularidades en  $r = r_{\pm}$ . Debido a esto, la coordenada  $t$  siempre es tipo-tiempo y la coordenada  $r$  siempre es tipo-espacio. Ya que no existen horizontes, la singularidad en  $r = 0$  está desnuda. De acuerdo con la conjetura de la censura cósmica, podemos considerar que este caso no se presenta físicamente.

- Caso  $M > |Q|$

Cuando  $M > |Q|$  los valores de  $r_{\pm}$  son reales y la función  $\Delta$  se vuelve cero allí. De esta forma,  $\Delta$  es positiva para  $r > r_+$  y para  $r < r_-$ , y toma valores negativos para  $r_- < r < r_+$ . Tenemos la singularidad en  $r = 0$  al igual que en el CASO 1, pero esta vez existen dos horizontes que la ocultan. Ahora bien, las singularidades  $r = r_{\pm}$  se pueden remover mediante un cambio de coordenadas. Por lo tanto decimos que son singularidades de las coordenadas, es decir no es una singularidad de la variedad.

- Caso  $M = |Q|$

En el caso extremo en el cual  $M = |Q|$  se tiene  $r_{\pm} = M$ , esto es, los horizontes se convierten en uno sólo.

Si escribimos la función radial  $\psi_{RN}(r)$  dada en la ec. (1.108), en términos de coordenadas adimensionales  $u = r/M$  y  $\alpha = Q/M$ , tenemos

$$\psi_{RN}(u) = 1 - \frac{2}{u} + \frac{\alpha^2}{u^2}. \quad (1.112)$$

En la Fig.(1.1) se muestra la forma de la función  $\psi_{RN}$ , es claro que existen tres casos diferentes, dependiendo de los valores relativos de  $Q$  y  $M$ . Desde luego, estamos utilizando un sistema de unidades para el cual  $c = 1$  y  $G = 1$ .

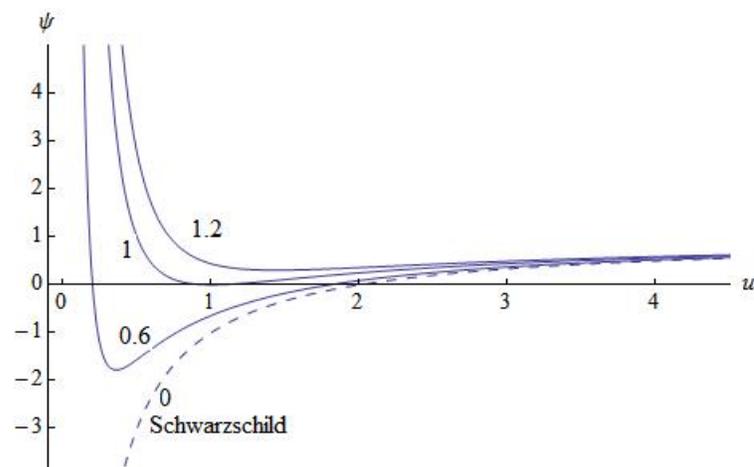


Figura 1.1: Forma de la función métrica  $\psi_{RN}(u)$ . Dependiendo de los valores relativos de  $\alpha = Q/M$  se pueden distinguir tres casos  $\alpha \geq 1$ ,  $\alpha = 1$  y  $\alpha \leq 1$ . Cuando  $\alpha = 0$  tenemos el caso de Schwarzschild.



# 2

## Clasificación algebraica de los campos

El objetivo de este capítulo será revisar la clasificación de Petrov o a veces también llamada la clasificación de los campos gravitatorios. A. Z. Petrov publicó su trabajo en 1951 y éste proporcionó la base del desarrollo matemático de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein. La clasificación original de Petrov se aplicó para el tensor de Riemann de una variedad  $\mathcal{M}$  de cuatro dimensiones. Hoy en día la clasificación se aplica generalmente al tensor de Weyl y las técnicas utilizadas son esencialmente idénticas a las utilizadas por Petrov.

La idea detrás de la clasificación es sencilla, supongamos que tenemos un espacio métrico y que deseamos obtener una clasificación invariante de un tensor  $T_{\mu\nu}$  de orden 2, simétrico. Este objetivo se puede alcanzar utilizando el método de vectores y valores propios. El método se basa en la siguiente ecuación

$$T_{\mu\nu}V^\nu = \lambda V_\mu = \lambda g_{\mu\nu}V^\nu, \quad (2.1)$$

donde  $\lambda$  es un escalar y  $V^\beta$  un vector. Un vector  $V^\nu \neq 0$ , que satisface la ecuación (2.1), se dice que es un vector propio de  $T_{\mu\nu}$ . Escribiendo la ecuación (2.1) en la forma

$$(T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu})V^\nu = 0, \quad (2.2)$$

podemos ver que un vector propio puede existir solamente para los valores de  $\lambda$  que son raíces de la ecuación

$$\det(T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}) = 0. \quad (2.3)$$

A estos valores de  $\lambda$  les llamamos los valores propios del tensor  $T_{\mu\nu}$ .

La ecuación (2.2) constituye un problema local, en referencia a un punto  $X$  del espacio. A la luz de la discusión del capítulo anterior, sabemos que dado un tensor del

espacio-tiempo es posible construir el tensor respectivo en el espacio tangente utilizando las tétradas (ver por ejemplo ec. (1.57)). De la misma manera, dado un tensor en el espacio tangente, es posible construir el tensor correspondiente en el espacio-tiempo. Dado que las ecuaciones tensoriales mantienen su forma al escribirlas, ya sea con tensores del espacio-tiempo, o del espacio inercial local, sin pérdida de generalidad y con el objetivo de simplificar la discusión de valores propios, trabajaremos en el marco de referencia inercial local.

Es claro que la ecuación de valores propios del tensor de Weyl es un poco más elaborada que la ec. (2.2), ya que éste es un tensor de cuatro índices. Con el objetivo de ganar intuición en la solución de ecuaciones de valores propios, presentaremos primero la clasificación del tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  y revisaremos inmediatamente después el caso del tensor de Weyl:  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ .

## 2.1. El álgebra de bivectores

Para hacer el estudio de la clasificación algebraica del tensor de Weyl, es conveniente trabajar con una base de bivectores. Por lo tanto daremos a continuación algunas propiedades importantes de los bivectores. La manera más sencilla de definir un bivector es considerarlo como una 2-forma. Por conveniencia trabajaremos en el sistema de coordenadas inercial local

$$X = X_{ab} \omega^a \wedge \omega^b. \quad (2.4)$$

Un bivector,  $X_{ab} = u_{[a}v_{b]}$ , representa un elemento de la 2-superficie abarcada por las dos 1 formas  $u = u_a dx^a$  y  $v = v_a dx^a$ . Este elemento de superficie es tipo espacio, tipo tiempo o nulo, de acuerdo con que si  $X^{ab}X_{ab}$  es positivo, negativo o cero, respectivamente.

Definamos ahora la 4-forma de Levi-Civita  $\varepsilon$  como  $\varepsilon \equiv 4! \sqrt{-g} \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ , donde  $g$  es el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Sus componentes están dadas por  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . En el caso plano, si la base está positivamente orientada, esto es, si la tétrada ortonormal es  $\{e_a\} = \{u_a, s_a, v_a, w_a\}$ , las componentes de la forma de Levi-Civita se definen por

$$\varepsilon_{0123} = 1, \quad (2.5)$$

y la contracción de dos símbolos de Levi-Civita está definida por

$$\varepsilon_{abcd} \varepsilon^{efgh} = -24 \delta_{[a}^e \delta_b^f \delta_c^g \delta_d^h] \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{cdef} = -2(\delta_a^e \delta_b^f - \delta_a^f \delta_b^e). \quad (2.6)$$

Definimos el bivector dual  $\tilde{X}$  en notación de índices como

$$\tilde{X}_{ab} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} X^{cd}. \quad (2.7)$$

Para evitar confusiones, hacemos hincapié en que los conceptos de base dual y bivector dual tienen significados completamente distintos. Aplicando dos veces la operación de dualidad (2.7) obtenemos

$$\left( \tilde{X}_{ab} \right)^\sim = -X_{ab}. \quad (2.8)$$

Un bivector es llamado nulo (o singular) si

$$X_{ab}X^{ab} = 0 = X_{ab}\tilde{X}^{ab}. \quad (2.9)$$

El bivector complejo está definido por

$$X_{ab}^* \equiv X_{ab} + i\tilde{X}_{ab}, \quad (2.10)$$

este bivector es auto-dual, es decir, se cumple la condición

$$(\tilde{X}_{ab}^*) = -iX_{ab}^*. \quad (2.11)$$

Los bivectores auto-duales tienen una característica muy interesante, están completamente determinados por un vector unitario  $\mathbf{u}$  tipo tiempo ( $u_a u^a = -1$ ) y la proyección

$$X_{\mu} \equiv X_{ab}^* u^b, \quad \Rightarrow \quad X_a u^a = 0. \quad (2.12)$$

Esto es así, ya que

$$X_{ab}^* = 2u_{[a}X_{b]} + i\varepsilon_{abcd}u^c X^d = 2(u_{[a}X_{b]})^*. \quad (2.13)$$

Como consecuencia de esta importante relación obtenemos

$$X_{ab}^* X^{*ab} = -4X_a X^a. \quad (2.14)$$

Ahora es posible construir cualquier bivector auto-dual en términos de una base de bivectores  $\mathbf{Z}^\mu = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$  que puede ser construida a partir de la tétrada nula compleja (1.68) por

$$\mathbf{Z}^1 \equiv \mathbf{U} = 2\bar{m} \wedge l \quad U_{ab} = \bar{m}_a l_b - \bar{m}_b l_a \quad (2.15)$$

$$\mathbf{Z}^2 \equiv \mathbf{V} = 2k \wedge m \quad V_{ab} = k_a m_b - k_b m_a \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Z}^3 \equiv \mathbf{W} = 2(m \wedge \bar{m} - k \wedge l) \quad W_{ab} = \bar{m}_a m_b - \bar{m}_b m_a - k_a l_b + k_b l_a, \quad (2.17)$$

es decir la las ecuaciones (2.15)-(2.17) satisfacen la propiedad (2.11). Si hacemos todas las contracciones posibles entre los bivectores  $U_{ab}$ ,  $V_{ab}$  y  $W_{ab}$  obtenemos que todas las contracciones se anulan

$$W_{ab}V^{ab} = W_{ab}U^{ab} = V_{ab}V^{ab} = U_{ab}U^{ab} = 0, \quad (2.18)$$

excepto

$$U_{ab}V^{ab} = 2, \quad W_{ab}W^{ab} = -4. \quad (2.19)$$

### 2.1.1. Transformaciones de Lorentz

Es directo encontrar las transformaciones de Lorentz de los bivectores utilizando las transformaciones de Lorentz de la sección 1.6.1. Por ejemplo, en el caso en que las

transformaciones dejan la tétrada  $l^a$  fija (1.80), tenemos que el bivector  $U_{ab}$  transforma como

$$\begin{aligned} U'_{ab} &= \bar{m}'_a l'_b - \bar{m}'_b l'_a = (\bar{m}_a + \bar{E}l_a)l'_b - (\bar{m}_b + \bar{E}l_b)l'_a \\ &= \bar{m}_a l_b - \bar{m}_b l_a = U_{ab}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

De la misma manera podemos calcular el efecto de las transformaciones de Lorentz para los bivectores restantes, el resultado es

- Transformaciones con  $l^a$  fijo

$$\begin{aligned} U'_{ab} &= e^{-i\Theta} U_{ab} \\ W'_{ab} &= e^{-i\Theta} (W_{ab} - 2CU_{ab}) \\ V'_{ab} &= e^{-i\Theta} (V_{ab} - CW_{ab} + C^2 U_{ab}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

- Transformaciones con  $k^a$  fijo

$$V'_{ab} = e^{-i\Theta} V_{ab} \quad (2.22)$$

$$W'_{ab} = e^{-i\Theta} (W_{ab} - 2BV_{ab}) \quad (2.23)$$

$$U'_{ab} = e^{-i\Theta} (U_{ab} - BW_{ab} + B^2 V_{ab}). \quad (2.24)$$

## 2.2. Clasificación del campo electromagnético

Como un primer ejemplo de la aplicación del método de la clasificación algebraica de los campos, estudiemos el caso del tensor de campo electromagnético  $F_{ab}$ .

El tensor de Maxwell  $F_{ab}$  es un tensor que no satisface la propiedad de auto-dualidad y por tanto no puede ser escrito en términos de los bivectores auto-duales (2.15)-(2.17). Sin embargo si utilizamos el tensor de campo complejo

$$\Phi_{ab} \equiv F_{ab} + i\tilde{F}_{ab}, \quad (2.25)$$

notamos que el tensor es auto-dual en el sentido de la ecuación (2.11)

$$\tilde{\Phi}_{ab} = -i\Phi_{ab}. \quad (2.26)$$

Por lo tanto podemos escribir el tensor en términos de los bivectores  $U_{ab}$ ,  $V_{ab}$  y  $W_{ab}$ :

$$\Phi_{ab} = \varphi_0 U_{ab} + \varphi_1 W_{ab} + \varphi_2 V_{ab}. \quad (2.27)$$

Los 3 coeficientes complejos  $\varphi_i$ , tienen la información de las seis componentes reales del tensor de Maxwell. Estos coeficientes se pueden determinar haciendo la contracción del tensor complejo  $\Phi_{ab}$  con los bivectores  $U_{ab}$ ,  $V_{ab}$  y  $W_{ab}$ :

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{1}{2}\Phi_{ab}V^{ab} = -(E_y + E_z) + i(B_y - B_z), \\ \varphi_1 &= -\frac{1}{4}\Phi_{ab}W^{ab} = -(B_x + iE_x), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\Phi_{ab}U^{ab} = E_z - E_y + i(B_y + B_z).\end{aligned}\tag{2.28}$$

Para hacer la clasificación algebraica del tensor  $\Phi_{ab}$  tenemos dos formulaciones, la primera basada en hacer una transformación de Lorentz a los coeficientes  $\varphi_i$  y hacer la clasificación de las posibles raíces del parámetro libre que obtenemos de la transformación de Lorentz. La segunda formulación está basada en un problema de vectores propios.

### 2.2.1. Método de ejes adaptados

Los tensores simétricos toman una forma particularmente simple cuando uno realiza una transformación a los ejes principales. Para el caso de los tensores antisimétricos podemos establecer un problema análogo que consiste en simplificar el desarrollo (2.27) al elegir la dirección del vector nulo  $k^a$ , esto es, adaptando la tétrada nula al tensor antisimétrico bajo consideración. Bajo una Transformación de Lorentz, el campo-autodual  $\Phi_{ab}$  transforma como

$$\Phi'_{ab} = \varphi'_0 U'_{ab} + \varphi'_1 W'_{ab} + \varphi'_2 V'_{ab}.\tag{2.29}$$

Considerando una transformación de Lorentz que deja el vector  $l^a$  fijo, para la cual los bivectores transforman en la forma (2.21), tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi'_{ab} &= \varphi'_0 U_{ab} + \varphi'_1 (W_{ab} - 2C U_{ab}) + \varphi'_2 (V_{ab} - C W_{ab} + C^2 U_{ab}) \\ &= (\varphi'_0 - 2C\varphi'_1 + C^2\varphi'_2) U_{ab} + (\varphi'_1 - C\varphi'_2) W_{ab} + \varphi'_2 V_{ab}.\end{aligned}$$

De esta última expresión podemos identificar directamente como transforman los  $\varphi_i$ , obteniendo:

$$\varphi_0 = \varphi'_0 - 2C\varphi'_1 + C^2\varphi'_2\tag{2.30}$$

$$\varphi_1 = \varphi'_1 - C\varphi'_2\tag{2.31}$$

$$\varphi_2 = \varphi'_2.\tag{2.32}$$

Note que escogiendo adecuadamente el parámetro  $C$  de la rotación nula, podemos hacer que  $\varphi_0$  o  $\varphi_1$  se anulen. Por otro lado note que  $\varphi_2$  es invariante.

Si ahora hacemos una Transformación de Lorentz que deje a la tétrada  $k^a$  invariante, obtenemos que las ecuaciones análogas a (2.30)-(2.32) son

$$\varphi_0 = \varphi'_0$$

$$\varphi_1 = \varphi'_1 - B\varphi'_2$$

$$\varphi_2 = \varphi'_2 - 2B\varphi'_1 + B^2\varphi'_0$$

En este caso mediante una elección adecuada del parámetro  $B$  de la rotación nula, podemos hacer que el coeficiente  $\varphi_1$  o  $\varphi_2$  se anulen. En este caso note que  $\varphi_0$  es invariante.

Dado que nuestro objetivo es encontrar la elección más invariante posible, demandaremos que al hacer una Transformación de Lorentz con  $l^a$  fijo se anule el coeficiente  $\varphi_2$ , esto es encontraremos un valor del coeficiente  $C$  que haga que  $\varphi_2 = 0$ , después si realizamos una transformación subsecuente que deje invariante al vector  $k^a$ , como  $\varphi_2$  es invariante ante esta transformación, seguirá siendo 0 y podremos reducir así la forma del desarrollo (2.27). Por la misma razón elegiremos un valor del coeficiente  $B$  en de forma tal que  $\varphi_0$  se anule. En la siguiente tabla resumimos estos resultados

$k^{a'} = k^a$	$l^{a'} = l^a$
$\varphi_0 = \varphi'_0$	$\varphi_2 = \varphi'_2$
$\varphi_1 = \varphi'_1 - B\varphi'_2$	$\varphi_1 = \varphi'_1 - C\varphi'_2$
$0 = \varphi_2 = \varphi'_2 - 2B\varphi'_1 + B^2\varphi'_0$	$0 = \varphi_0 = \varphi'_0 - 2C\varphi'_1 + C^2\varphi'_2$

Comencemos encontrando el valor del coeficiente  $C$  para una transformación de Lorentz que deja invariante el vector  $l^a$ , de tal manera que se anule  $\varphi_0$ . Para ello debe suceder de la ecuación (2.30) que

$$\varphi'_0 - 2C\varphi'_1 + C^2\varphi'_2 = 0, \quad (2.33)$$

cuyas soluciones son

$$C_{\pm} = \frac{\varphi'_1 \pm \sqrt{\varphi_1'^2 - \varphi'_0\varphi'_2}}{\varphi'_2}. \quad (2.34)$$

• Caso degenerado:

$$\varphi_1'^2 - \varphi'_0\varphi'_2 = 0. \quad (2.35)$$

En este caso tenemos que el discriminante es cero, por lo tanto tenemos degeneración en las raíces.

• Caso no degenerado:

$$\varphi_1'^2 - \varphi'_0\varphi'_2 \neq 0. \quad (2.36)$$

Cuando el discriminante es distinto de cero las raíces son distintas, por lo tanto no tenemos degeneración.

Ahora estamos interesados en relacionar la expresión  $\varphi_1'^2 - \varphi'_0\varphi'_2$  con algunas cantidad física, para ellos empezamos por calcular la contracción del tensor de Maxwell complejo (2.25) consigo mismo:

$$\begin{aligned} \Phi^{ab}\Phi_{ab} &= (\varphi_0 U^{ab} + \varphi_1 W^{ab} + \varphi_2 V^{ab}) (\varphi_0 U_{ab} + \varphi_1 W_{ab} + \varphi_2 V_{ab}) \\ &= \varphi_1^2 W^{ab} W_{ab} + \varphi_0 \varphi_2 U^{ab} V_{ab} + \varphi_0 \varphi_2 V^{ab} U_{ab} \\ &= -4(\varphi_1^2 - \varphi_0 \varphi_2) \end{aligned}$$

donde hemos usado las relaciones (2.19). Si ahora aplicamos las transformaciones (2.30)-(2.32) obtenemos que

$$\begin{aligned}\Phi^{ab}\Phi_{ab} &= -4(\varphi_1^2 - \varphi_0\varphi_2) \\ &= -4(\varphi_1' - E\varphi_2')^2 + 4(\varphi_0' - 2E\varphi_1' + E^2\varphi_2')\varphi_2 = -4(\varphi_1'^2 - \varphi_0'\varphi_2').\end{aligned}$$

Como era de esperarse esta cantidad es un invariante el cual está relacionado con los dos invariantes relativistas del campo electromagnético de la siguiente manera

$$\Phi^{ab}\Phi_{ab} = \left(F^{ab} + i\tilde{F}^{ab}\right)\left(F_{ab} + i\tilde{F}_{ab}\right) = 2(F^{ab}F_{ab} + i\tilde{F}^{ab}F_{ab}). \quad (2.37)$$

Tenemos así una relación entre los coeficientes y los dos invariantes electromagnéticos

$$\Phi^{ab}\Phi_{ab} = -4(\varphi_1'^2 - \varphi_0'\varphi_2') = 2(F^{ab}F_{ab} + i\tilde{F}^{ab}F_{ab}). \quad (2.38)$$

De la misma manera, si queremos obtener la Transformación de Lorentz que deje invariante el vector  $k^a$ , de tal manera que se anule el coeficiente  $\varphi_0$  obtenemos

$$B_{\pm} = \frac{\varphi_1' \pm \sqrt{\varphi_1'^2 - \varphi_0'\varphi_2'}}{\varphi_0'}. \quad (2.39)$$

Nuevamente existen dos casos dependiendo del valor del invariante  $\varphi_1^2 - \varphi_0\varphi_2$ . Concluimos entonces que mediante el uso de dos transformaciones de Lorentz sucesivas, una que deje invariante la tétrada  $l^a$  y después otra que deje invariante la tétrada  $k^a$ , lo cual se logra escogiendo adecuadamente el valor de los coeficientes  $C$  y  $B$  respectivamente, podemos ir a un marco de referencia donde  $\varphi_0 = \varphi_2 = 0$ , de tal manera que el desarrollo (2.27) del campo complejo  $\Phi_{ab}$  en ese marco se escribe simplemente como

$$\Phi_{ab} = \varphi_1 W_{ab}, \quad (2.40)$$

y dado que  $\varphi_1 = -(B_x + iE_x)$ , en este marco de referencia sólo una componente del campo eléctrico y una del campo magnético son distintas de cero, en otras palabras, en este marco las componentes no nulas del tensor de Maxwell son:  $F_{01} = -F_{10}$  y  $F_{34} = -F_{43}$ .

### 2.2.2. Ecuación de valores propios

Existe una segunda forma de hacer la clasificación algebraica del campo electromagnético, en la cual resolvemos la ecuación de valores propios y vectores propios del campo electromagnético.

- Clasificación en términos del vector  $k^a$ .

Empezamos haciendo la contracción del tensor de Maxwell complejo (2.27) con el vector  $k^a$

$$\Phi_{ab}k^b = (\varphi_0 U_{ab} + \varphi_1 W_{ab} + \varphi_2 V_{ab})k^b = -\varphi_0 \bar{m}_a + \varphi_1 k_a, \quad (2.41)$$

- Caso degenerado:

Si  $\varphi_0 = 0$  y  $\varphi_1 = 0$ , entonces

$$\Phi_{ab}k^b = 0. \quad (2.42)$$

Decimos en este caso que los campos están degenerados porque solamente existe un vector nulo. Si ahora observamos la ecuación (2.38) podemos notar que los dos invariantes electromagnéticos son nulos

$$F^{ab}F_{ab} = 0 = \tilde{F}^{ab}F_{ab}. \quad (2.43)$$

- Caso no degenerado:

Por otro lado si multiplicamos (2.41) por un vector  $k_a$  obtenemos

$$k_a\Phi_{\mu c}k^c = -\varphi_0k_a\bar{m}_b + \varphi_1k_ak_b. \quad (2.44)$$

Antisimetrizando esta ecuación en los índices:  $a, b$ , obtenemos

$$k_{[a}\Phi_{b]c}k^c = -\varphi_0k_{[a}\bar{m}_{b]} + \varphi_1k_{[a}k_{b]} = -\varphi_0k_{[a}\bar{m}_{b]}.$$

Si  $\varphi_0 = 0$  y  $\varphi_1 \neq 0$ , entonces

$$k_{[a}\Phi_{b]c}k^c = 0. \quad (2.45)$$

Decimos que los campos son no degenerados por que tiene dos vectores nulos distintos.

- Clasificación en términos del vector  $l^a$ .

Podemos hacer esta misma clasificación para el vector nulo  $l^a$ . En este en completa analogía con el caso anterior tenemos

- Caso degenerado:

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \Phi_{ab}l^b = 0. \quad (2.46)$$

- Caso no degenerado:

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad l_{[a}\Phi_{b]c}l^c = 0. \quad (2.47)$$

Ahora si alineamos nuestro campo con los dos vectores nulos  $l^\mu$  y  $k^\mu$ , además pedimos que el campo sea no-nulo se tiene que satisfacer

$$\begin{aligned} \varphi_2 = 0, & \quad \varphi_1 \neq 0 \Rightarrow l_{[a}\Phi_{b]c}l^c = 0, \\ \varphi_0 = 0, & \quad \varphi_1 \neq 0 \Rightarrow k_{[a}\Phi_{b]c}k^c = 0, \end{aligned}$$

de lo cual podemos concluir que un campo no-nulo alineado con los vectores nulos  $l^\mu$  y  $k^\mu$  satisface

$$\varphi_0 = \varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 \neq 0$$

## 2.3. Clasificación algebraica del tensor de Weyl

Nuestro objetivo será ahora revisar la clasificación de Petrov del tensor de Weyl  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ , definido en (1.27). Como hemos mencionado, este tensor posee todas las simetrías del tensor de Riemann y cumple con la condición extra de tener traza nula. Al igual que el tensor de curvatura, el de Weyl da información sobre las fuerzas de marea que actúan sobre un cuerpo que se mueve a través del espacio-tiempo a lo largo de una geodésica. Pero una diferencia radical es que este tensor no contiene información sobre la manera en que cambia el volumen del cuerpo, sino de cómo las fuerzas de marea cambian su forma. Una propiedad importante del tensor de Weyl es que es invariante

$$C^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \rightarrow C'^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = C^{\alpha}_{\beta\mu\nu}, \quad (2.48)$$

bajo transformaciones conformes de la métrica:

$$g_{ab} \rightarrow g'_{ab} = f(x) g_{ab}, \quad (2.49)$$

donde  $f(x)$  es una función escalar definida positiva.

En otras áreas de la física se sabe que las propiedades algebraicas de los tensores están relacionadas con algunas propiedades físicas de interés. Así por ejemplo, en la óptica de cristales la clasificación de los medios de acuerdo con la multiplicidad de los valores propios del tensor  $\epsilon$  conduce a la división de los cristales ópticos: cristales biaxial, cristales uniaxiales o isotrópicos. En la sección anterior vimos que en el caso de la electrodinámica, la clasificación algebraica de los campos reside en la forma como se propagan las ondas electromagnéticas. Por tanto podemos esperar que diferentes propiedades físicas en Relatividad General se estén relacionadas con una clasificación algebraica del tensor de curvatura.

El análisis del tensor de Weyl (tensor conforme) no es suficiente, si se quiere determinar todas las propiedades algebraicas del tensor de curvatura. La información faltante se oculta en el tensor de Ricci o en el tensor de energía-momento (a causa de las ecuaciones de campo (1.17)). Sin embargo, para clasificar los campos gravitacionales en el vacío, el tensor de Weyl nos da toda la información y por tanto es suficiente con estudiar su clasificación. La clasificación de Petrov es la clasificación de los campos gravitacionales de vacío de acuerdo con las propiedades algebraicas del tensor de curvatura.

Dado que el tensor de Weyl es de orden 4, no podemos discutir directamente la ecuación (2.2) de valores propios. Sin embargo, es fácil convencerse que un tensor de 4 orden que tiene las propiedades de simetría del tensor de Riemann, puede ser considerado como un tensor simétrico de orden 2 en el espacio de bivectores en 6-dimensiones. Puesto que el tensor de Weyl tiene también estas simetrías, podemos escribir

$$C_{abcd} \longleftrightarrow C_{AB} = C_{BA}; \quad A, B = 1, 2, \dots, 6. \quad (2.50)$$

Tenemos que introducir una cierta correspondencia entre los valores de los índices  $A, B$  y  $ab, cd$ . Por lo tanto hacemos la siguiente elección:

$$\begin{aligned}\{ab\} &= 01, 02, 03, 23, 31, 12. \\ \{A\} &= 1, 2, 3, 4, 5, 6.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Para escribir una ecuación de la forma (2.2) para  $C_{AB}$  necesitamos una "métrica"  $g_{AB}$  en el espacio de los bivectores. El tensor correspondiente  $g_{abcd}$  en un espacio de Riemanniano puede ser construido a partir del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  de manera única. Está definido de la siguiente manera

$$g_{abcd} = g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}.\tag{2.52}$$

Es directo comprobar que este tensor tiene las mismas simetrías del tensor de Riemann. En consecuencia, el tensor  $g_{AB}$  correspondiente en el espacio de bivectores es simétrico en los índices  $A, B$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{AB} = 0, \quad A \neq B; \\ \text{componentes de la diagonal } g_{AB} = (-1, -1, -1; 1, 1, 1). \end{array} \right\}\tag{2.53}$$

La ecuación de valores propios en la forma (2.2) para el tensor de Weyl será ahora

$$(C_{AB} - \lambda g_{AB}) W^B = 0.\tag{2.54}$$

Donde esta ecuación es la transcripción en el espacio de bivectores de la siguiente ecuación en el espacio de Riemann

$$(C_{abcd} - \lambda g_{abcd}) S^{cd} = 0.\tag{2.55}$$

Siempre podemos pensar al tensor de Weyl (o cualquier tensor de rango 4) en un punto dado del espacio-tiempo como si fuese un operador lineal actuando en un cierto espacio vectorial

$$S^{ab} \rightarrow \frac{1}{2} C^{ab}_{cd} S^{cd}.\tag{2.56}$$

Es por este motivo que resulta atractivo el problema de encontrar autovalores y autovectores (o, en este caso autobivectores) que cumplan:

$$\frac{1}{2} C^{ab}_{cd} S^{cd} = \lambda S^{ab}.\tag{2.57}$$

Del mismo modo que para operadores lineales los autobivectores del tensor de Weyl pueden tener diferentes multiplicidades. Las posibles multiplicidades indican algún tipo de simetría del tensor en ese dado evento del espacio-tiempo.

Desde que aparecieron los trabajos originales de Petrov se han propuesto otros enfoques para la clasificación del tensor de Weyl. Tal vez los más conocidos son la clasificación espinorial de Penrose y el enfoque centrado en "*las direcciones principales nulas*" (el cual será discutido en la sección ) debido principalmente a Bel (pero aumentado por Debever y por Sachs, Ehlers y Kundt). En estos enfoques se busca soluciones para un vector principal nulo  $k$  de  $C_{abcd}$  tal que este vector satisface la siguiente ecuación de Debever-Penrose

$$k^b k_{[s} C_{a]bc[d} k_{r]} k^c = 0.\tag{2.58}$$

Se puede demostrar que esta ecuación tiene 4 soluciones para  $k$ , este enfoque se discutirá en la sección siguiente.

### 2.3.1. Base auto-dual

La clasificación del tensor de Weyl se realiza de forma análoga a la realizada para el campo de Maxwell de la sección 2.2. La idea es construir un tensor de Weyl autodual análogo al tensor autodual de Maxwell  $\Phi_{ab}$  (ver ec. (2.27)) y escribir este tensor en términos de una base de productos de bivectores auto-duales. Para ello tenemos que construir una base  $A_r$  con  $r = 0, 1, 2, 3, 4$  de cuatro índices la cual tenga las mismas simetrías del tensor de Weyl y que esté formada por productos de bivectores autoduales. Es directo verificar que tal base la forman

$$\begin{aligned} A_0 &= U_{ab}W_{cd} + U_{cd}W_{ab}, & A_3 &= U_{ab}U_{cd}, \\ A_1 &= V_{ab}W_{cd} + V_{cd}W_{ab}, & A_4 &= V_{ab}V_{cd}, \\ A_2 &= W_{ab}W_{cd} + U_{ab}V_{cd} + V_{ab}U_{cd}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

El siguiente paso es saber cómo actúan las transformaciones de Lorentz sobre esta base. Con ayuda de las transformaciones de Lorentz para los bivectores discutidas en la sección 2.1.1, tenemos que las transformaciones sobre esta base son

- Transformaciones con  $l^a$  fijo

$$\begin{aligned} A'_3 &= U_{ab}U_{cd} \\ A'_0 &= U_{ab}W_{cd} + U_{cd}W_{ab} - 4CU_{ab}U_{cd} \\ A'_2 &= W_{ab}W_{cd} + U_{ab}V_{cd} + V_{ab}U_{cd} - 3C(U_{ab}W_{cd} + U_{cd}W_{ab}) + 6C^2U_{ab}U_{cd} \\ A'_1 &= V_{ab}W_{cd} + V_{cd}W_{ab} - 2C(W_{ab}W_{cd} + U_{ab}V_{cd} + V_{ab}U_{cd}) + 3C^2(U_{ab}W_{cd} \\ &\quad + U_{cd}W_{ab}) - 4C^3U_{ab}U_{cd} \\ A'_4 &= V_{ab}V_{cd} - C(V_{ab}W_{cd} + V_{cd}W_{ab}) + C^2(W_{ab}W_{cd} + U_{ab}V_{cd} + V_{ab}U_{cd}) \\ &\quad - C^3(U_{ab}W_{cd} + U_{cd}W_{ab}) + C^4U_{ab}U_{cd}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

- Transformaciones con  $k^a$  fijo

$$\begin{aligned} A'_4 &= V_{ab}V_{cd} \\ A'_1 &= V_{ab}W_{cd} + V_{cd}W_{ab} - 4BV_{ab}V_{cd} \\ A'_2 &= W_{ab}W_{cd} + U_{ab}V_{cd} + V_{ab}U_{cd} - 3B(V_{ab}W_{cd} + V_{cd}W_{ab}) + 6B^2V_{ab}V_{cd} \\ A'_3 &= U_{ab}U_{cd} - B(U_{ab}W_{cd} + U_{cd}W_{ab}) + B^2(W_{ab}W_{cd} + U_{ab}V_{cd} + V_{ab}U_{cd}) \\ &\quad - B^3(V_{ab}W_{cd} + V_{cd}W_{ab}) + B^4V_{ab}V_{cd} \\ A'_0 &= U_{ab}W_{cd} + U_{cd}W_{ab} - 2CB(W_{ab}W_{cd} + U_{ab}V_{cd} + V_{ab}U_{cd}) + 3B^2(V_{ab}W_{cd} \\ &\quad + V_{cd}W_{ab}) - 4B^3V_{ab}V_{cd}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

### 2.3.2. Tensor de Weyl autodual

Debemos ahora construir con el tensor de Weyl un nuevo tensor que sea autodual, Para ello construimos el tensor

$$C_{abcd}^* \equiv C_{abcd} + i\tilde{C}_{abcd} = C_{abcd} + \frac{i}{2}\varepsilon_{cdef}C_{ab}{}^{ef}, \quad (2.62)$$

el cual es el análogo al tensor complejo  $\Phi_{ab}$  del campo electromagnético. Como vimos en la sección 1.3, si contraemos el primer y tercer índices del tensor de Weyl obtenemos

$$C^{ab}{}_{ad} = 0. \quad (2.63)$$

Como consecuencia resulta que el dual respecto al primer par de índices del dual respecto al último par de índices del tensor de Weyl complejo es igual a menos el tensor de Weyl, esto es

$$\tilde{\tilde{C}}_{abcd} = \frac{1}{4}\varepsilon_{abef}\varepsilon_{cdgh}C^{efgh} = -C_{abcd}. \quad (2.64)$$

Esta es una propiedad que no tiene el tensor de curvatura para un espacio curvo arbitrario y es la propiedad por la cual el tensor de Weyl complejo es autodual con respecto al último par de índices

$$\tilde{C}_{abcd}^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{cdef}C_{ab}{}^{ef} = -iC_{abcd}^*. \quad (2.65)$$

Esta propiedad nos permite poder desarrollar el tensor de Weyl complejo en términos de la base

$$\begin{aligned} C_{abcd}^* = 2[\Psi_0 U_{ab}U_{cd} + \Psi_1(U_{ab}W_{cd} + U_{cd}W_{ab}) + \Psi_2(W_{ab}W_{cd} + V_{ab}U_{cd} + V_{cd}U_{ab}) + \\ + \Psi_3(V_{ab}W_{cd} + V_{cd}W_{ab}) + \Psi_4 V_{ab}V_{cd}], \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde los 5 coeficientes  $\Phi_i$  son escalares complejos y contienen la misma información que las 10 componentes reales independientes del tensor de Weyl  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  (1.27). Esta ecuación es la ecuación análoga a (2.27) para el campo electromagnético. Podemos obtener los 5 coeficientes realizando todas las posibles proyecciones independientes del tensor de Weyl (1.27) sobre las tétradas nulas, obteniendo

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\equiv C_{abcd}k^a m^b k^c m^d, & \Psi_1 &\equiv C_{abcd}k^a l^b k^c m^d, \\ \Psi_2 &\equiv \frac{1}{2}C_{abcd}k^a l^b (k^c l^d - m^c \bar{m}^d) = C_{abcd}k^a m^b \bar{m}^c l^d, & & \\ \Psi_3 &\equiv C_{abcd}k^a l^b \bar{m}^c l^d, & \Psi_4 &\equiv C_{abcd}\bar{m}^a l^b \bar{m}^c l^d. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Estas cinco proyecciones son conocidas como las Cantidades de NP y los diferentes términos en (2.66) admiten la siguiente interpretación física (Szekeres 1965) [21] :

- El término  $\Psi_4$ - representa una onda transversal en la dirección-  $k$ ,
- el término- $\Psi_3$  una componente de la onda longitudinal,
- y el término  $\Psi_2$  una componente Coulomb;

los términos  $\Psi_1$  y  $\Psi_0$  representan componentes de onda transversal y longitudinal en la dirección  $l$ .

Como ya se ha mencionado, en la literatura existen varias formulaciones para la clasificación algebraica del tensor de Weyl. En este trabajo presentaremos dos distintas formulaciones de esta clasificación algebraica, la primera basada en hacer una transformación de Lorentz a los coeficientes  $\Psi_i$  y hacer la clasificación de las posibles raíces del parámetro libre involucrado en las transformaciones de Lorentz. La segunda formulación está basada en pensar al tensor de Weyl como un problema de vectores propios nulos que es bien conocido en la literatura como el criterio de Bel de "las direcciones principales nulas"

### 2.3.3. Método de ejes adaptados

Realizando una transformaciones de Lorentz que deja fijo al vector  $l^a$  podemos ver como transforma el tensor de Weyl autodual. En hemos visto como cambia la base ante estas transformaciones, la idea es es ver entonces como cambian los coeficientes  $\Psi_{r=0,..,4}$  bajo esta transformación, es decir, consideremos el tensor de Weyl complejo en un sistema primado  $\overset{*}{C}'_{abcd}$

$$\begin{aligned} \overset{*}{C}'_{abcd} = & 2 [\Psi'_0 U'_{ab} U'_{cd} + \Psi_1 (U'_{ab} W'_{cd} + U'_{cd} W'_{ab}) + \Psi'_2 (W'_{ab} W'_{cd} + V'_{ab} U'_{cd} + V'_{cd} U'_{ab}) + \\ & + \Psi'_3 (V'_{ab} W'_{cd} + V'_{cd} W'_{ab}) + \Psi'_4 V'_{ab} V'_{cd}]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

y obtengamos como cambian los coeficientes  $\Psi_{r=0,..,4}$  bajo una transformación de Lorentz que mantiene fijo a la tétrada  $l'^a = l^a$ . Para ello consideramos las transformaciones (2.60) de la base y reescribimos esta expresión como:

$$\begin{aligned} \overset{*}{C}_{abcd} = & 2 [(\Psi'_0 - 4C\Psi'_1 + 6C^2\Psi'_2 - 4C^3\Psi'_3 + C^4\Psi'_4) U_{ab} U_{cd} + \\ & + (\Psi'_1 - 2C\Psi'_2 + 3C^2\Psi'_3 - C^3\Psi'_4) (U_{ab} W_{cd} + U_{cd} W_{ab}) + \\ & + (\Psi'_2 - 2C\Psi'_3 + C^2\Psi'_4) (W_{ab} W_{cd} + V_{ab} U_{cd} + V_{cd} U_{ab}) + \\ & + (\Psi'_3 - C\Psi'_4) (V_{ab} W_{cd} + V_{cd} W_{ab}) + \Psi'_4 V_{ab} V_{cd}] \end{aligned}$$

de la cual podemos leer directamente como transforman los coeficientes  $\Psi_{r=0,..,4}$  :

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \Psi'_0 - 4C\Psi'_1 + 6C^2\Psi'_2 - 4C^3\Psi'_3 + C^4\Psi'_4, \\ \Psi_1 &= \Psi'_1 - 2C\Psi'_2 + 3C^2\Psi'_3 - C^3\Psi'_4, \\ \Psi_2 &= \Psi'_2 - 2C\Psi'_3 + C^2\Psi'_4, \\ \Psi_3 &= \Psi'_3 - C\Psi'_4, \\ \Psi_4 &= \Psi'_4. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Si ahora aplicamos el mismo procedimiento para obtener como transforman los coeficientes  $\Psi_{r=0,..,4}$  bajo una transformación de Lorentz que preserva la tétrada  $k^{a'l} = k^a$ , es decir

bajo las transformaciones (2.61), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Psi_4 &= \Psi'_4 - 4B\Psi'_3 + 6B^2\Psi'_2 - 4B^3\Psi'_1 + B^4\Psi'_0, \\
\Psi_3 &= \Psi'_3 - 2B\Psi'_2 + 3B^2\Psi'_1 - B^3\Psi'_0, \\
\Psi_2 &= \Psi'_2 - 2B\Psi'_1 + B^2\Psi'_0, \\
\Psi_1 &= \Psi'_1 - B\Psi'_0, \\
\Psi_0 &= \Psi'_0.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Otra manera más simple de obtener estas transformaciones a partir de (2.69) es hacer la transformación  $l_a \leftrightarrow -k_a$ .

Como ya se había mencionado la clasificación algebraica en esta formulación está basada en hacer una clasificación de las raíces de los parámetros libres  $C$  y  $B$ , es decir las ecuaciones (2.69) y (2.70) son polinomios de cuarto orden en  $C$  y  $B$ , los cuales sabemos tienen cuatro raíces complejas, que pueden estar o no, degeneradas.

Debido a que  $\Psi_0$  es invariante, es conveniente elegir  $\Psi_0 = 0$ , lo cual a su vez simplifica la clasificación de las raíces de  $C$  y  $B$ . Con esta elección el polinomio de cuarto orden para  $C$  es

$$-4C\Psi'_1 + 6C^2\Psi'_2 - 4C^3\Psi'_3 + C^4\Psi'_4 = 0. \tag{2.71}$$

Si ahora hacemos el cambio de etiquetas  $l_a \leftrightarrow -k_a$  obtenemos un polinomio de cuarto orden para  $B$

$$-4B\Psi'_3 + 6B^2\Psi'_2 - 4B^3\Psi'_1 + B^4\Psi'_0 = 0, \tag{2.72}$$

de lo cual podemos concluir que  $\Psi'_4 = 0$ . Utilizando este resultado obtenemos un polinomio de tercer orden donde  $C = 0$  es una doble raíz, es decir tenemos una degeneración simple

$$-4C\Psi'_1 + 6C^2\Psi'_2 - 4C^3\Psi'_3 = 0. \tag{2.73}$$

De la misma manera considerando las diferentes alternativas para los valores de  $\Psi_{r=0,..,4}$  podemos hacer una clasificación completa la cual se resume en la siguiente tabla.

Degeneración	$l^a$	$k^a$
Simple	$\Psi'_0 = 0$	$\Psi'_4 = 0$
Doble	$\Psi'_0 = \Psi'_1 = 0$	$\Psi'_3 = \Psi'_4 = 0$
Triple	$\Psi'_0 = \Psi'_1 = \Psi'_2 = 0$	$\Psi'_2 = \Psi'_3 = \Psi'_4 = 0$
Cuádruple	$\Psi'_0 = \Psi'_1 = \Psi'_2 = \Psi'_3 = 0$	$\Psi'_1 = \Psi'_2 = \Psi'_3 = \Psi'_4 = 0$

### 2.3.4. Ecuación de valores propios

Es posible hacer una clasificación de los tipos de campos gravitacionales directamente de el tensor de Weyl y sus eigenvectores nulos  $l^a$  y  $k^a$ . Es decir, podemos pensar esta clasificación como una generalización del problema de valores y vectores propios donde estos eigenvectores son nulos, por lo tanto un vector que anule al tensor de Weyl

es un eigenvector nulo (dirección principal nula). En esta clasificación se analizarán todas las posibles multiplicidades del tensor de Weyl, así como las condiciones que tienen que satisfacer los coeficientes de NP (2.100).

Contrayendo el tensor de Weyl complejo (2.66), con el vector nulo  $l^c$  obtenemos

$${}^*C_{abcd}l^c = 2[\Psi_1 U_{ab}l_d + \Psi_2(W_{ab}l_d - U_{ab}m_d) + \Psi_3(V_{ab}l_d - W_{ab}m_d) - \Psi_4 V_{ab}m_d]. \quad (2.74)$$

Si

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad \text{and} \quad \Psi_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad {}^*C_{abcd}l^c = 0. \quad (2.75)$$

Como tenemos un tensor de cuarto orden, la contracción con el vector  $l^a$  se puede hacer con los cuatro índices, lo que indica que existen a lo más cuatro eigenvectores linealmente independientes para este tensor. Por lo tanto tenemos un sistema cuatro veces degenerado.

Si ahora multiplicamos por  $l_r$  a la ecuación (2.74) obtenemos

$${}^*C_{abcd}l_r l^c = 2[\Psi_1 U_{ab}l_d l_r + \Psi_2(W_{ab}l_d l_r - U_{ab}m_d l_r) + \Psi_3(V_{ab}l_d l_r - W_{ab}m_d l_r) - \Psi_4 V_{ab}m_d l_r],$$

y si anti-simetrizamos a  $[d r]$

$${}^*C_{abc[d]r}l^c = 2[\Psi_1 U_{ab}l_{[d}l_{r]} + \Psi_2(W_{ab}l_{[d}l_{r]} - U_{ab}m_{[d}l_{r]}) + \Psi_3(V_{ab}l_{[d}l_{r]} - W_{ab}m_{[d}l_{r]}) - \Psi_4 V_{ab}m_{[d}l_{r]}]$$

Dado que  $l_{[d}l_{r]} = 0$ , obtenemos finalmente

$${}^*C_{abc[d]r}l^c = 2[-\Psi_2 U_{ab}m_{[d}l_{r]} - \Psi_3 W_{ab}m_{[d}l_{r]} - \Psi_4 V_{ab}m_{[d}l_{r]}]. \quad (2.76)$$

De esta ecuación concluimos que si

$$\Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad \text{y} \quad \Psi_1 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad {}^*C_{abc[d]r}l^c = 0. \quad (2.77)$$

En este caso tenemos dos vectores linealmente independientes y sabemos que existen cuatro vectores, por lo que podemos concluir que tenemos un sistema dos veces degenerado.

Realizando una contracción adicional con el vector  $l^b$  obtenemos

$$l^b {}^*C_{abc[d]r}l^c = 2[\Psi_3 l_a m_{[d}l_{r]} - \Psi_4 m_a m_{[d}l_{r]}]. \quad (2.78)$$

En este caso si

$$\Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad \text{y} \quad \Psi_2 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad l^b {}^*C_{abc[d]r}l^c = 0. \quad (2.79)$$

En este caso tenemos tres vectores linealmente independientes que satisfacen al tensor de Weyl, por lo tanto uno de ellos tiene que estar degenerado, para obtener el cuarto vector.

Finalmente multiplicamos por  $l_s$  la ecuación (2.78), obtenemos

$$l^b l_s C_{abc[d]l_r}^* l^c = 2 [\Psi_3 l_s l_a m_{[d]l_r} - \Psi_4 l_s m_a m_{[d]l_r}].$$

y antisimetrizando  $[s a]$

$$l^b l_{[s} C_{a]bc[d]l_r}^* l^c = -2\Psi_4 l_{[s} m_a] m_{[d]l_r}. \quad (2.80)$$

De esta ecuación concluimos que si

$$\Psi_4 = 0, \quad y \quad \Psi_3 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad l^b l_{[s} C_{a]bc[d]l_r}^* l^c = 0. \quad (2.81)$$

Hemos encontrado así bajo qué condiciones el tensor de Weyl tiene cuatro vectores linealmente independientes, es decir tenemos un sistema no degenerado.

El mismo análisis se puede hacer para el vector nulo  $k^a$ , a manera de resumen tenemos que:

$$C_{abcd}^* k^c = 0, \iff \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 \neq 0. \quad (2.82)$$

$$C_{abc[d]k_r}^* k^c = 0 \iff \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0 \quad \Psi_3 \neq 0 \quad (2.83)$$

$$k^b C_{abc[d]k_r}^* k^c = 0 \iff \Psi_0 = \Psi_1 = 0 \quad \Psi_2 \neq 0 \quad (2.84)$$

$$k^b k_{[s} C_{a]bc[d]k_r}^* k^c = 0 \iff \Psi_0 = 0 \quad \Psi_1 \neq 0 \quad (2.85)$$

Este resultado lo entendemos en términos de la degeneración del vector  $l^a$  como:

- 4 veces degenerado si satisface (2.82),
- 3 veces degenerado si cumple (2.83) pero no satisface(2.82),
- 2 veces degenerado si satisface (2.84) y no satisface (2.82) y (2.83),
- no-degenerado ó simple si cumple (2.85) y no satisface (2.82), (2.83) y (2.84).

### 2.3.5. Clasificación de Petrov

La clasificación de Petrov se basa en las diferentes multiplicidades de los distintos autobivectores (asociados con las llamadas direcciones principales nulas en dicho evento). Existen 6 tipos de Petrov diferentes, a saber:

- Tipo *I*: 4 direcciones principales nulas simples.
- Tipo *II*: 2 direcciones principales nulas simples y una doble.
- Tipo *D*: 2 pares de direcciones principales nulas dobles.

- Tipo *III*: 1 dirección principal nula de multiplicidad 3 y otra simple.
- Tipo *N*: 1 dirección principal nula de multiplicidad 4.
- Tipo *O*: El tensor de Weyl se anula.

Daremos a continuación una breve interpretación de alguno de estos tipos.

Métricas pertenecientes al tipo *D* en la clasificación de Petrov, corresponden a las asociadas a campos gravitacionales generados por objetos completamente caracterizados por su masa y su momento angular. Así, todas las soluciones de vacío de agujeros negros pertenecen a este tipo.

Métricas pertenecientes al tipo *N* están asociadas con radiación gravitacional transversal a la dirección del vector de onda (coincidente con la dirección principal nula 4 veces degenerada que caracteriza a este tipo de soluciones).

Métricas del tipo *O* no tienen ninguna dirección principal nula. Es decir, no hay una dirección privilegiada. Es por esto que modelos cosmológicos como el de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker pertenecen a este tipo.

Como hemos mencionado anteriormente en este trabajo estamos interesados en los espacio-tiempo tipo *D*, los cuales se caracterizan por la existencia de dos direcciones principales dobles nulas,  $k$  y  $l$ . Para este tipo de espacios se tiene que satisfacer

$$\begin{aligned} l^b C_{abc[d]l_r}^* l^r &= 0 \iff \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad \Psi_2 \neq 0 \\ k^b C_{abc[d]k_r}^* k^c &= 0 \iff \Psi_0 = \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 \neq 0. \end{aligned}$$

De este resultado podemos concluir que un espacio-tiempo tipo *D* está caracterizado por que el único escalar de Newman-Penrose no nulo es  $\Psi_2$ .

Ahora podemos construir invariantes con las distintas contracciones del tensor de Weyl, en la clasificación de Petrov son relevantes cuatro invariantes, a saber:

$$\begin{aligned} C_2 &= C^{abcd} C_{abcd}, & C_2^* &= C^{*abcd} C_{abcd} \\ C_3 &= C^{abcd} C_{abrs} C^{rs}_{cd}, & C_3^* &= C^{*abcd} C_{abrs} C^{rs}_{cd} \end{aligned}$$

que a su vez están en función de las cantidades de NP:

$$\begin{aligned} C_2 + iC_2^* &= 16 (3\Psi_3^2 + \Psi_0\Psi_4 - 4\Psi_1\Psi_3), \\ C_3 + iC_3^* &= 96 (-\Psi_2^3 + 2\Psi_1\Psi_2\Psi_3 + \Psi_0\Psi_2\Psi_4 - \Psi_0\Psi_3^2 - \Psi_1\Psi_4^2). \end{aligned}$$

## 2.4. Coeficientes de espín y congruencias nulas

Hasta el momento en todos los cálculos realizados hemos permanecido sobre un evento arbitrario del espacio-tiempo  $M_4$  con una tétrada dada, ahora nuestro interés

radica en describir la evolución de la tétrada nula conforme pasamos de un punto a otro del espacio-tiempo. Para ello se introducirán 12 coeficientes, los cuales son bien conocidos de espín  $\kappa, \rho, \sigma, \tau, \lambda, \pi, \dots$  introducidos por Newman-Penrose (1962) y los cuales están asociados a familias de rayos de luz bajo la acción del campo gravitacional. Es conveniente ordenar la tétrada de NP en la forma:

$$Z_{(a)}{}^\nu = (l^\nu, k^\nu, m^\nu, \bar{m}^\nu) \quad , \quad a = 0, \dots, 3 \quad (2.86)$$

ahora es fácil ver que el índice griego lo podemos bajar contrayendo con la métrica  $g_{\mu\nu}$ , obteniendo

$$Z_{(a)\mu} = (l_\mu, k_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu) \quad (2.87)$$

con estas dos últimas relaciones, ahora podemos definir la matriz  $Z \equiv Z_{(a)}^\mu Z_{(b)\mu}$

$$Z_{(a)}^\mu Z_{(b)\mu} = Z_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} l^\mu l_\mu & l^\mu k_\mu & l^\mu m_\mu & l^\mu \bar{m}_\mu \\ k^\mu l_\mu & k^\mu k_\mu & k^\mu m_\mu & k^\mu \bar{m}_\mu \\ m^\mu l_\mu & m^\mu k_\mu & m^\mu m_\mu & m^\mu \bar{m}_\mu \\ \bar{m}^\mu l_\mu & \bar{m}^\mu k_\mu & \bar{m}^\mu m_\mu & \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu \end{pmatrix}$$

usando las relaciones de ortonormalidad (1.74) nos quedan:

$$Z_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Ahora definimos la matriz inversa  $Z^{-1} = Z^{(a)(b)}$  tal que  $Z^{(a)(b)} Z_{(b)(c)} = \delta_{(c)}^{(a)}$

$$Z^{-1} = Z^{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

donde la matriz  $Z^{(a)(b)}$  permite definir una base asociada a (2.86):

$$Z^{(a)\nu} = Z^{(a)(b)} Z_{(b)}^\nu \quad \Rightarrow \quad Z^{(a)\nu} = (-k^\nu, -l^\nu, \bar{m}^\nu, m^\nu), \quad (2.90)$$

es decir  $Z$  y  $Z^{-1}$  funcionan como una “métrica” para subir y bajar índices de la tétrada nula de NP.

Es natural preguntarse acerca de la evolución de (2.86) sobre  $M_4$ , esto a su vez nos informa sobre los cambios que sufren otros objetos tensoriales al movernos en presencia de la curvatura del espacio-tiempo, como es bien conocido, matemáticamente el problema se reduce a realizar el cálculo de las derivadas covariantes de (2.86):  $Z_{(a)\mu;\nu}$ .

Necesitamos calcular  $Z_{(a)\mu;\nu}$  el cual es un tensor de orden dos, no necesariamente simétrico en  $\mu$  y  $\nu$ . Este tensor puede desarrollarse en términos de una base generada por la tétrada, por lo tanto podemos escribir :

$$Z_{(a)\mu;\nu} = \gamma_{qah} Z_{(a)\mu}^{(q)} Z_{\nu}^{(h)}, \quad (2.91)$$

donde los coeficientes de la expansión, a saber,  $\gamma_{qah}$ , se conocen como los Coeficientes de Rotación asociados a la tétrada bajo análisis.

Si ahora usamos las propiedades (2.87) y (2.89) podemos escribir explícitamente  $Z_{(a)b} Z_{(c)}^{(a)}$ , es decir

$$\begin{aligned} Z_{(a)\mu} Z_{\nu}^{(a)} &= Z_{(1)\mu} Z_{\nu}^{(1)} + Z_{(2)\mu} Z_{\nu}^{(2)} + Z_{(3)\mu} Z_{\nu}^{(3)} + Z_{(4)\mu} Z_{\nu}^{(4)} \\ &= -l_{\mu} k_{\nu} - k_{\mu} l_{\nu} + m_{\mu} \bar{m}_{\nu} + \bar{m}_{\mu} m_{\nu}, \end{aligned}$$

donde podemos identificar esta expresión con  $g_{\mu\nu}$  a partir de (1.73), por lo tanto

$$Z_{(a)\mu} Z_{\nu}^{(a)} = g_{\mu\nu}. \quad (2.92)$$

Análogamente podemos calcular  $Z_{(a)\mu} Z_{(b)}^{\mu}$ , obteniendo

$$Z_{(a)\mu} Z_{(b)}^{\mu} = Z_{(a)(b)}.$$

Si ahora usamos (2.92) podemos escribir (2.91) como:

$$Z_{(a)\mu;\nu} = \gamma_{qah} Z_{(a)\mu}^{(q)} Z_{(h)\mu}^{(h)} Z_{\nu}^{(h)} = \gamma_{qah} Z_{(a)(h)}^{(q)} g_{\mu\nu}.$$

De esta expresión es fácil ver que si ahora multiplicamos por  $g^{\gamma\nu} Z_{(p)(h)}$  podemos obtener una expresión para  $\gamma_{qah}$ :

$$\begin{aligned} g^{\gamma\nu} Z_{(p)(h)} Z_{(a)\mu;\nu} &= \delta_{\mu}^{\gamma} \delta_{(p)}^{(q)} \gamma_{qah} \\ \gamma_{qah} &= g^{\mu\nu} Z_{(h)(q)} Z_{(a)\mu;\nu}. \end{aligned}$$

Es conveniente escribir el tensor métrico en términos de la tétradas de NP, es decir  $g^{\mu\nu} = Z_{(g)}^{\mu} Z_{(g)\nu}$  para obtener

$$\gamma_{abc} = Z_{(c)}^{\mu} Z_{(a)\nu} Z_{(b)\mu;\nu}. \quad (2.93)$$

De este resultado podemos notar que los coeficientes de rotación son las proyecciones de  $Z_{(b)\mu;\nu}$  sobre la tétrada nula. Los coeficientes de rotación  $\gamma_{abc}$  tienen una antisimetría que es fácil ver:

$$\begin{aligned} \gamma_{abc} &= \left[ \left( Z_{(a)}^{\mu} Z_{(b)\mu} \right)_{;\nu} - Z_{(b)\mu} Z_{(a);\nu}^{\mu} \right] Z_{(c)}^{\nu} \\ &= Z_{(a)(b);(c)} - Z_{(b)}^{\mu} Z_{(a)\mu;\nu} Z_{(c)}^{\nu} \\ &= -Z_{(a)\mu;\nu} Z_{(b)}^{\mu} Z_{(c)}^{\nu}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que la derivada covariante de las métricas es cero, es decir  $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$  y  $Z_{(a)(b);(c)} = 0$ , por lo tanto podemos concluir que tenemos una antisimetría en los dos primeros índices de  $\gamma_{abc}$ :

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}.$$

En consecuencia de la antisimetría,  $\gamma_{abc}$  sólo tiene 24 componentes independientes; dado que (2.86) es compleja entonces (2.93) no son en general reales, existen dos excepciones  $\gamma_{100}$  y  $\gamma_{101}$ . Ahora veamos lo que ocurre al aplicar conjugación compleja a estos dos coeficientes de rotación, por ejemplo:

$$\gamma_{230} = -\gamma_{320} = \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu \quad \Rightarrow \quad \gamma_{320} = -\bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu.$$

De la misma manera  $\bar{\gamma}_{213} = \gamma_{312}$ ,  $\bar{\gamma}_{201} = \gamma_{301}$ , etc., donde podemos concluir, que al conjugar (2.93) se intercambian  $2 \leftrightarrow 3$ , de manera general podemos obtener una expresión para la conjugación compleja de  $\gamma_{abc}$ , es decir:

$$\bar{\gamma}_{a_1 a_2 a_3} = \gamma_{b_1 b_2 b_3} \quad \text{con} \quad b_r = 3\delta_{2a_r} + 1\delta_{3a_r} + a_r(\delta_{0a_r} + \delta_{1a_r}). \quad (2.94)$$

Ahora es conveniente escribir las 24 cantidades independientes como doce complejas, esta notación fue introducida por Newman-Penrose (1962):

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv \gamma_{121} = -k_{\mu;\nu} m^\mu k^\nu, & \rho &\equiv \gamma_{123} = -k_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu \\ \sigma &\equiv \gamma_{122} = -k_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu, & \tau &\equiv \gamma_{120} = -k_{\mu;\nu} m^\mu k^\nu \\ \nu &\equiv \gamma_{300} = l_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu, & \mu &\equiv \gamma_{302} = l_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu \\ \lambda &\equiv \gamma_{303} = l_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu, & \pi &\equiv \gamma_{301} = l_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu k^\nu \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{101} - \gamma_{231}) = -\frac{1}{2}(k_{\mu;\nu} l^\mu k^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu k^\nu), \\ \gamma &\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{100} - \gamma_{230}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu), \\ \alpha &\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{103} - \gamma_{233}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu), \\ \beta &\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{102} - \gamma_{232}) = -\frac{1}{2}(n_{\mu;\nu} l^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Estas 12 cantidades complejas se conocen con el nombre de Coeficientes de espín y, como puede verse, están en función de los coeficientes de rotación, por lo tanto estos coeficientes junto con sus complejos conjugados contienen la misma información que los  $\gamma_{abc}$ . De (2.94) podemos notar que  $\gamma_{101}$  y  $\gamma_{100}$  son reales y que  $\gamma_{231}$  y  $\gamma_{230}$  son imaginarios, por ello se combinaron entre sí para dar origen a las cantidades complejas  $\varepsilon$  y  $\gamma$ ; a partir de (2.96) podemos obtener

		$\gamma_{abc}$					
$c \setminus ab$		0 1	0 2	2 1	2 3	3 0	3 1
0		$-(\gamma + \bar{\gamma})$	$-\bar{\nu}$	$-\tau$	$\bar{\gamma} - \gamma$	$\nu$	$-\bar{\tau}$
1		$-(\varepsilon + \bar{\varepsilon})$	$-\bar{\pi}$	$-\kappa$	$\bar{\varepsilon} - \varepsilon$	$\pi$	$-\bar{\kappa}$
2		$-(\bar{\alpha} + \beta)$	$-\bar{\lambda}$	$-\sigma$	$\bar{\alpha} - \beta$	$\mu$	$-\bar{\rho}$
3		$-(\alpha + \bar{\beta})$	$-\bar{\mu}$	$-\rho$	$\beta - \alpha$	$\lambda$	$-\bar{\sigma}$

Estas 12 cantidades complejas se conocen con el nombre de Coeficientes de espín y, como puede verse, están en función de los coeficientes de rotación, además, ellas junto con sus complejos conjugados contienen la misma información que los  $\gamma_{abc}$ .

## 2.5. Aplicaciones del formalismo de tétradas nulas

En esta sección se muestran algunas aplicaciones de la herramienta de NP, las cuales nos muestran la ventaja de dicho formalismo y su relevancia en relatividad general: Escribiremos las ecuaciones de Maxwell en espacio curvo en términos de la tétrada nula, con lo cual podremos determinar las geometrías de Schwarzschild y Reissner – Nordström mediante el formalismo de NP.

Hasta el momento no hemos concentrado en el estudio del tensor de Weyl  $C_{\rho\sigma\mu\nu}$ , en donde la información contenida en  $C_{\rho\sigma\mu\nu}$  ya está almacenada en las cantidades,  $\Psi_r$  definidas en (2.67) y que a su vez son coeficientes de la expansión del tensor de Weyl complejo  $C_{\rho\sigma\mu\nu}^*$  en términos de la base antisimétrica (2.15)-(2.17).

Recordemos que en el capítulo uno estudiamos la representación irreducible del tensor de Riemann, en donde definimos el tensor  $S_{\mu\nu}$  en (1.29), como un tensor simétrico y con traza nula, el cual para cuatro dimensiones viene dado por:

$$S_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}R g_{\mu\nu} \quad (2.97)$$

de la misma manera que como el tensor de Weyl ahora podemos encontrar una base para el tensor  $S_{\mu\nu}$ , obteniéndose:

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} = & 2 \left[ \phi_{02} \bar{m}_\mu m_\nu + \bar{\phi}_{02} m_\mu m_\nu + \phi_{00} l_\mu l_\nu + \phi_{22} k_\mu k_\nu + \right. \\ & + \phi_{11} (\bar{m}_\mu m_\nu + \bar{m}_\nu m_\mu + k_\mu l_\nu + k_\nu l_\mu) - \bar{\phi}_{01} (m_\mu l_\nu + m_\nu l_\mu) - \\ & \left. - \bar{\phi}_{12} (m_\mu k_\nu + m_\nu k_\mu) - \phi_{01} (\bar{m}_\mu l_\nu + \bar{m}_\nu l_\mu) - \phi_{12} (\bar{m}_\mu k_\nu + \bar{m}_\nu k_\mu) \right] \quad (2.98) \end{aligned}$$

donde  $\phi_{00}$ ,  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{22}$  son reales y  $\phi_{01}$ ,  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{12}$  son complejos por lo tanto tenemos 9 cantidades reales el cual coincide con el número de componentes independientes de  $S_{\mu\nu}$ . Al contraer (2.98) con la tétrada de NP obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{00} &= \frac{1}{2} S_{\mu\nu} k^\mu k^\nu, & \phi_{11} &= \frac{1}{4} S_{\mu\nu} (m^\mu \bar{m}^\nu + k^\mu l^\nu) = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} k^\mu l^\nu = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} m^\mu \bar{m}^\nu, \\ \phi_{22} &= \frac{1}{2} S_{\mu\nu} l^\mu l^\nu, & \phi_{12} &= \frac{1}{2} S_{\mu\nu} m^\mu m^\nu, \\ \phi_{01} &= \frac{1}{2} S_{\mu\nu} k^\mu m^\nu, & \phi_{02} &= \frac{1}{2} S_{\mu\nu} k^\mu k^\nu. \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de (2.97) las ecuaciones de campo pueden escribirse como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.99)$$

por lo tanto los coeficientes  $\phi_{ab}$  toman la forma

$$\begin{aligned}\phi_{00} &= 4\pi T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu, & \phi_{11} &= 2\pi T_{\mu\nu} (m^\mu \bar{m}^\nu + k^\mu l^\nu) = 4\pi S_{\mu\nu} k^\mu l^\nu = 4\pi S_{\mu\nu} m^\mu \bar{m}^\nu, \\ \phi_{22} &= 4\pi T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu, & \phi_{12} &= 4\pi T_{\mu\nu} m^\mu m^\nu, \\ \phi_{01} &= 4\pi T_{\mu\nu} k^\mu m^\nu, & \phi_{02} &= 4\pi T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu.\end{aligned}$$

### 2.5.1. Ecuaciones de Einstein-Maxwell

Consideramos el tensor de Maxwell definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [F_{\mu\rho} F^{\rho\nu} - \frac{1}{4} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) g_{\mu\nu}],$$

donde el tensor antisimétrico  $F_{\mu\nu}$  y real, el cual puede desarrollarse en función de la tétrada de NP, a partir de (2.27):

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\Phi_{\mu\nu} + \bar{\Phi}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\varphi_0 U_{\mu\nu} + \varphi_1 W_{\mu\nu} + \varphi_2 V_{\mu\nu} + \bar{\varphi}_0 \bar{U}_{\mu\nu} + \bar{\varphi}_1 \bar{W}_{\mu\nu} + \bar{\varphi}_2 \bar{V}_{\mu\nu}).\end{aligned}$$

Por simplicidad es conveniente reabsorber el factor  $\frac{1}{2}$  en las constantes, definiendo  $\phi_i \equiv \frac{1}{2}\varphi_i$ :

$$F_{\mu\nu} = \phi_0 U_{\mu\nu} + \phi_1 W_{\mu\nu} + \phi_2 V_{\mu\nu} + \bar{\phi}_0 \bar{U}_{\mu\nu} + \bar{\phi}_1 \bar{W}_{\mu\nu} + \bar{\phi}_2 \bar{V}_{\mu\nu},$$

donde las tres cantidades complejas  $\varphi_i$  (equivalentes a las seis componentes reales independientes de  $F_{\mu\nu}$ ) dadas por:

$$\phi_0 = F_{\mu\nu} k^\mu m^\nu, \quad \phi_1 = F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu l^\nu, \quad \phi_2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (k^\mu l^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu). \quad (2.100)$$

Hasta el momento hemos empleado sólo aspectos algebraicos, las características diferenciales aparecen al imponer las ecuaciones de Maxwell:

$$F_{\mu\nu;\rho} + F_{\nu\rho;\mu} + F_{\rho\mu;\nu} = 0, \quad (2.101)$$

$$F_{\mu;\nu}^\nu = 0. \quad (2.102)$$

La primera de ellas siempre es válida, la segunda sólo se cumple en el vacío. El siguiente paso es proyectar las ecuaciones de Maxwell en las tétradas de NP. Si ahora recordamos que:

$$F_{\mu\nu} = F_{(a)(b)} Z_{\mu}^{(a)} Z_{\nu}^{(b)}, \quad (2.103)$$

$$F_{\mu\nu;\rho} = (F_{(a)(b)} Z_{\mu}^{(a)} Z_{\nu}^{(b)})_{;(c)} Z_{\rho}^{(c)}, \quad (2.104)$$

y sustituimos este resultado en las ecuaciones de Maxwell (2.101) obtenemos:

$$F_{(a)(b);(c)} + F_{(b)(c);(a)} + F_{(c)(a);(b)} + F_{(b)(d)}(\gamma_{ac}^d - \gamma_{ca}^d) + F_{(a)(d)}(\gamma_{cb}^d - \gamma_{bc}^d) + F_{(c)(d)}(\gamma_{ba}^d - \gamma_{ab}^d) = 0. \quad (2.105)$$

Donde este resultado lo podemos pensar como la derivada en la tétrada de NP más un término extra asociado con los coeficientes de rotación  $\gamma_{abc}$  que jugaría el papel de los símbolos de Christoffel, donde la derivada covariante es

$$F_{\mu\nu;\rho} = F_{\mu\nu,\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} F_{\nu\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} F_{\mu\sigma},$$

que al proyectar sobre la tétrada nula implica:

$$F_{\mu\nu;\rho} \rightarrow F_{(a)(b);(c)} + \gamma_{ac}^d F_{(b)(d)} - \gamma_{bc}^d F_{(a)(d)}. \quad (2.106)$$

Para obtener las ecuaciones de Maxwell tenemos que dar valores a los índices  $a$ ,  $b$  y  $c$ , por ejemplo consideremos el caso en el que  $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $c = 3$ .

$$F_{(1)(2);(3)} + F_{(2)(3);(1)} + F_{(3)(1);(2)} + F_{(2)(d)}(\gamma_{13}^d - \gamma_{31}^d) + F_{(1)(d)}(\gamma_{32}^d - \gamma_{23}^d) + F_{(3)(d)}(\gamma_{21}^d - \gamma_{12}^d) = 0. \quad (2.107)$$

Ahora escribimos explícitamente las componentes de  $F_{(a)(b)}$ , es decir:

$$F_{(a)(b)} = F_{\mu\nu} Z_{(a)}^{\mu} Z_{(b)}^{\nu} \quad ; \quad F_{(a)(b);(c)} = (F_{\mu\nu} Z_{(a)}^{\mu} Z_{(b)}^{\nu})_{;\rho} Z_{(c)}^{\rho}.$$

El primer paso es identificar las componentes de  $F_{(a)(b)}$  con los coeficientes  $\phi_i$  (2.100):

$$\phi_0 = F_{(1)(2)}, \quad \phi_1 = \frac{1}{2}(F_{(1)(0)} + F_{(3)(2)}), \quad \phi_2 = F_{(3)(0)},$$

Definiendo los siguientes operadores

$$\delta \equiv m^{\mu} \nabla_{\mu} \quad , \quad \bar{\delta} \equiv \bar{m}^{\mu} \nabla_{\mu} \quad , \quad D \equiv l^{\mu} \nabla_{\mu} \quad , \quad \bar{D} \equiv n^{\mu} \nabla_{\mu},$$

entendiéndose que  $\nabla_{\mu} = ;\mu$ , podemos escribir de manera compacta los primeros tres términos de (2.107) como:

$$\begin{aligned} F_{(1)(2);(3)} &= (F_{\mu\nu} k^{\mu} m^{\nu})_{;\rho} \bar{m}^{\rho} = \bar{\delta} \phi_0, \\ F_{(2)(3);(1)} &= (F_{\mu\nu} m^{\mu} \bar{m}^{\nu})_{;\rho} k^{\rho} = D(\phi_1 + \bar{\phi}_1), \\ F_{(3)(1);(2)} &= \bar{F}_{(2)(1);(3)} = (F_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} k^{\nu})_{;\rho} m^{\rho} = -\delta \bar{\phi}_0. \end{aligned}$$

Es conveniente escribir los coeficientes de rotación  $\gamma_{bc}^a = Z^{(a)(r)} \gamma_{rbc}$  con los índices abajo en (2.107) donde  $Z^{(a)(r)}$  está definida en (2.89). Con esto, junto con la relación (2.94) ahora podemos identificar fácilmente como están relacionados con los coeficientes de espín. Por lo tanto usando estos resultados, la ecuación (2.102) la podemos escribir en términos de los coeficientes de espín y en términos de los coeficientes  $\phi_i$  como:

$$D\bar{\phi}_1 - D\phi_1 - \delta\bar{\phi}_0 + \bar{\delta}\phi_0 - \phi_2\kappa + \bar{\phi}_2\bar{\kappa} + \phi_0(\pi - 2\alpha) + \bar{\phi}_0(2\bar{\alpha} - \bar{\pi}) + 2\phi_1\rho - 2\bar{\phi}_1\bar{\rho} = 0.$$

De la misma manera podemos obtener una ecuación para los diferentes valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , donde las únicas ecuaciones independientes son

$$\begin{aligned} \delta\phi_2 - \bar{\delta}\bar{\phi}_2 + \Delta\bar{\phi}_1 - \bar{\Delta}\phi_1 + \bar{\phi}_2(\bar{\tau} - 2\bar{\beta}) - \phi_2(\tau - 2\beta) + \phi_0\nu - \bar{\phi}_0\bar{\nu} - 2\mu\phi_1 - 2\bar{\mu}\bar{\phi}_1 &= 0, \\ D\phi_2 - \bar{\delta}\phi_1 + \Delta\bar{\phi}_0 - \bar{\delta}\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2\bar{\sigma} + \phi_2(\rho - 2\varepsilon) + \bar{\phi}_0(2\bar{\gamma} - \bar{\mu}) + \phi_0\lambda - 2\phi_1\pi - 2\bar{\phi}_1\bar{\tau} &= 0, \\ D\bar{\phi}_1 - D\phi_1 - \delta\bar{\phi}_0 + \bar{\delta}\phi_0 - \phi_2\kappa + \bar{\phi}_2\bar{\kappa} + \phi_0(\pi - 2\alpha) + \bar{\phi}_0(2\bar{\alpha} - \bar{\pi}) + 2\phi_1\rho - 2\bar{\phi}_1\bar{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (2.108)$$

De manera similar a (2.106) la ecuación (2.102) conduce a:

$$F_{(a)(b);(c)}Z^{(b)(c)} + \gamma^{db} {}_a F_{(b)(d)} - F_{(a)(d)}Z^{(d)\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.109)$$

Usando el mismo procedimiento y dando valores a los índices  $a$ ,  $b$  y  $c$ , obtenemos tres relaciones independientes para esta ecuación;

$$\begin{aligned} \delta\bar{\phi}_1 - D\bar{\phi}_2 + \Delta\phi_0 - \delta\phi_1 - \phi_2\sigma + \bar{\phi}_2(\bar{\rho} - 2\bar{\varepsilon}) + \phi_0(\mu - 2\gamma) - \bar{\phi}_0\bar{\lambda} + 2\bar{\phi}_1\bar{\pi} + 2\phi_1\tau &= 0 \\ \bar{\delta}\phi_0 + \delta\bar{\phi}_0 - D\phi_1 - D\bar{\phi}_1 + \phi_0(\pi - 2\alpha) + \bar{\phi}_0(\bar{\pi} - 2\bar{\alpha}) - \phi_2\kappa - \bar{\phi}_2\bar{\kappa} + 2\bar{\phi}_1\bar{\rho} + 2\phi_1\rho &= 0 \\ \Delta\phi_1 + \Delta\bar{\phi}_1 - \bar{\delta}\bar{\phi}_2 - \delta\phi_2 - \phi_0\nu - \bar{\phi}_0\bar{\nu} + 2\mu\phi_1 + 2\bar{\mu}\bar{\phi}_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2 + (\bar{\tau} - 2\bar{\beta})\bar{\phi}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

Relacionado las ecuaciones (2.105) y (2.107) no es difícil ver que podemos simplificar estas expresiones, obteniendo las cuatro ecuaciones de maxwell proyectadas en el formalismo de las tétradas de NP :

$$\begin{aligned} D\phi_1 - \bar{\delta}\phi_0 &= (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2, \\ D\phi_2 - \bar{\delta}\phi_1 &= \lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\phi_2, \\ \delta\phi_1 - \Delta\phi_0 &= (\mu - 2\gamma)\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \\ \delta\phi_2 - \Delta\phi_1 &= -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Ahora consideremos el caso cuando  $F_{\mu\nu}$  es no-nulo, en este caso sabemos que  $F_{\mu\nu}$  tiene dos vectores propios nulos que los hacemos coincidir con  $k^\mu$  y  $l^\mu$ , entonces de (2.100) tenemos que

$$\phi_0 = \phi_2 = 0, \quad \phi_1 \neq 0,$$

por lo tanto las expresiones (2.111) se reducen a

$$D\phi_1 = 2\rho\phi_1, \quad \bar{\delta}\phi_1 = -2\pi\phi_1, \quad \delta\phi_1 = 2\tau\phi_1, \quad \Delta\phi_1 = -2\mu\phi_1, \quad (2.112)$$

donde estas expresiones son la Ecuaciones de Maxwell para una campo no-nulo.

## 2.5.2. Soluciones exactas en el formalismo de NP

Ahora usaremos el formalismo de NP el cual permite obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, donde encontraremos el campo gravitacional (métrica) generado por un hoyo negro con y sin carga, el procedimiento que seguiremos es el del trabajo de Davis (1976) [11, 12].

Primero consideremos que  $M_4$  tiene simetría esférica, entonces:

$$ds^2 = -e^B dt^2 + e^A dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Escribimos la tétrada nula asociada a esta métrica:

$$\begin{aligned}\omega^0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{\frac{A}{2}} dr - e^{\frac{B}{2}} dt \right), & \omega^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (r d\theta + i r \sin \theta d\phi), \\ \omega^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{\frac{A}{2}} dr + e^{\frac{B}{2}} dt \right), & \omega^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (r d\theta - i r \sin \theta d\phi).\end{aligned}\quad (2.113)$$

Ahora usamos las ecuaciones (1.70) y (1.69) las cuales relacionan la tétrada nula con los vectores nulos, por lo tanto podemos escribir

$$l_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\frac{B}{2}}, e^{\frac{A}{2}}, 0, 0), \quad l^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} (-e^{-\frac{B}{2}}, e^{-\frac{A}{2}}, 0, 0) \quad (2.114)$$

$$k_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (-e^{\frac{B}{2}}, e^{\frac{A}{2}}, 0, 0), \quad k^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-\frac{B}{2}}, e^{-\frac{A}{2}}, 0, 0) \quad (2.115)$$

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} r (0, 0, 1, -i \sin \theta), \quad m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} (0, 0, 1, -\frac{i}{\sin \theta}) \quad (2.116)$$

$$\bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} r (0, 0, 1, i \sin \theta), \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} (0, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta}). \quad (2.117)$$

Ahora calculamos los 12 coeficientes de espín, para esto consideremos el coeficiente  $\rho \equiv \gamma_{123} = -k_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu$ , el cual explícitamente toma la forma

$$-\rho = k_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu = k_{4;4} m^4 \bar{m}^4 + k_{4;3} m^4 \bar{m}^3 + k_{3;4} m^3 \bar{m}^4 + k_{3;3} m^3 \bar{m}^3$$

las componentes no nula están dadas por

$$k_{3;3} = k_{3,3} - \Gamma_{33}^\mu k_\mu = -\Gamma_{33}^1 k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{A}{2}} r \sin^2 \theta \quad \text{donde} \quad \Gamma_{33}^1 = -e^{-A} r \sin^2 \theta$$

$$k_{2;2} = k_{2,2} - \Gamma_{22}^\mu k_\mu = -\Gamma_{22}^1 k_1 = \frac{r}{\sqrt{2}} e^{-\frac{A}{2}} \quad \text{donde} \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-A}$$

donde finalmente podemos escribir  $\rho = -\frac{e^{-A/2}}{\sqrt{2}r}$ . De la misma manera podemos obtener todos los coeficientes obteniendo:

$$\begin{aligned}\mu &= \rho = -\frac{e^{-A/2}}{\sqrt{2}r}, & \alpha &= -\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cot \theta \\ \kappa &= \sigma = \lambda = 0, & \nu &= \tau = \pi = 0 \\ \varepsilon &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (B' e^{-\frac{A}{2}} + \dot{A} e^{-\frac{B}{2}}), & \gamma &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (B' e^{-\frac{A}{2}} - \dot{A} e^{-\frac{B}{2}}).\end{aligned}$$

Donde hemos denotado  $\cdot = \frac{\partial}{\partial t}$  y  $\prime = \frac{\partial}{\partial r}$  para los coeficientes  $\phi_{ab}$  donde  $a, b = 0, 1, 2, 3$  y para los coeficientes  $\Psi_{r=0,1,4}$  obtenemos:

$$\delta\varepsilon = \delta\rho = 0, \quad \phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = 0 \Rightarrow A' = -B' \quad \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$$

$$\phi_{00} = 4\varepsilon\rho - \Psi_2 + \frac{R}{12}, \quad \phi_{11} = \rho^2 - \Psi_2 - \frac{R}{24} - \frac{1}{2r^2}, \quad \phi_{22} = 4\gamma\rho - \Psi_2 + \frac{R}{12}. \quad (2.118)$$

Finalmente las Ecuaciones de Newman-Penrose

$$D\rho = \rho^2 + 2\varepsilon\rho - \phi_{00} \quad (2.119)$$

$$D\alpha = \rho\alpha \quad (2.120)$$

$$D\gamma - \Delta\varepsilon = -4\varepsilon\gamma + \Psi_2 - \phi_{11} + \frac{R}{24} \quad (2.121)$$

$$\delta\gamma + \Delta\alpha = -\rho\alpha. \quad (2.122)$$

La mayoría de los coeficientes de espín se anulan y los restantes son reales, también se obtiene que  $\Psi_r = 0$ ,  $r \neq 2$ , esto significa que  $M_4$  es tipo O ó D según sea el valor de  $\Psi_2$ , en esta forma queda probado el teorema de Rao (1966) y Plebański – Stachel (1968) [21]:

**“Todo espacio-tiempo con simetría esférica es tipo O o D”.**

Ahora consideremos dos casos particulares:

a).- Espacio-tiempo vacío.

De la expresión (2.99) podemos notar que el Espacio-tiempo vacío requiere  $\phi_{ab} = R = 0$  y necesariamente  $\Psi_2 \neq 0$  para evitar el caso de espacio plano, por lo tanto los coeficientes (2.118) toman la forma:

$$\phi_{00} = 0 = 4\varepsilon\rho - \Psi_2,$$

$$\phi_{11} = 0 = \rho^2 - \Psi_2 - \frac{1}{2r^2},$$

$$\phi_{22} = 0 = 4\gamma\rho - \Psi_2.$$

Evaluando los coeficientes de espín en las ecuaciones de NP (2.119)-(2.122) obtenemos las siguientes relaciones:

$$A' = -B' \quad , \quad \gamma = \varepsilon \quad , \quad \dot{A} = 0. \quad (2.123)$$

Usando  $\phi_{00}$  y  $\phi_{22}$  podemos obtener el valor del coeficiente  $\Psi_2$ :

$$\left. \begin{array}{l} 4\varepsilon\rho - \Psi_2 = 0 \\ 4\gamma\rho - \Psi_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Psi_2 = \frac{A'}{2r} e^{-A},$$

donde hemos usado que  $A' = -B'$ . Usando este resultado y el valor de  $\rho$ , podemos evaluar  $\phi_{11}$  para obtener la siguiente expresión

$$\phi_{11} = \frac{1}{2r^2} (e^{-A} - A'e^{-A}r - 1) = \frac{1}{2r^2} (d(e^{-A}r) - 1) = 0.$$

Integrando esta expresión obtenemos

$$d(e^{-A}r) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-A}r - r = -C_0,$$

usando  $A' = -B'$  obtenemos que

$$e^A = \left(1 - \frac{C_0}{r}\right)^{-1}, \quad e^B = \left(1 - \frac{C_0}{r}\right) e^{g(t)},$$

donde  $g$  es una función de  $t$  y  $C_0$  es una constante. Obtenemos la métrica de Schwarzschild, ahora si re escalamos el tiempo  $t$ , es decir si hacemos la transformación  $d\tau = e^{g/2}dt$  posteriormente  $C_0$  puede identificarse con  $2M$ . Simultáneamente hemos demostrado el teorema de Birkhoff (1923) y Eiesland (1925) [21]:

**“Todo espacio-tiempo  $M_4$  vacío con simetría esférica es estático”,**

b).- Espacio – tiempo con campo electromagnético.

Usando este resultado que todo  $M_4$  con simetría esférica es estático obtenemos que  $\dot{A} = \dot{B} = 0$ , y la simetría esférica sólo permite campo eléctrico radial por lo que  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , entonces:

$$R = \phi_0 = \phi_2 = 0, \quad \phi_{11} = -2\phi_1^2 = \rho^2,$$

y de la ecuación de Maxwell  $D\phi_1 = 2\rho\phi_1$  de (2.112), obtenemos

$$D\phi_1 = k^\mu \nabla_\mu \phi_1 = k^\mu \phi_{1,\mu} = 2\rho\phi_1. \quad (2.124)$$

Usando el vector nulo  $k^\mu$  (2.115) obtenemos que las componente no nula es

$$k^1 \phi_{1,1} = k^r \phi_{1,r} = -\frac{e^{-A/2}}{\sqrt{2}} \phi_{1,t} = r\rho\phi_{1,t}, \quad (2.125)$$

obteniendo finalmente la ecuación diferencial

$$\phi_{1,r} = \frac{2}{r}\phi_1 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \frac{k}{r^2}.$$

Usando este resultado podemos evaluar  $\phi_{11} = -2\phi_1^2 = \rho^2 - \Psi_2 - \frac{1}{2r^2}$ , donde hemos usado  $\phi_{ab} = -2\phi_a \bar{\phi}_b$  obteniendo

$$-4\frac{k^2}{r^2} = d(re^{-A}) - 1.$$

Integrando esta expresión

$$4\frac{k^2}{r^1} = re^{-A} - r + C_0,$$

finalmente obtenemos

$$e^{-A} = e^B = 1 - \frac{C_0}{r} + \frac{4k^2}{r^2}, \quad \text{donde } C_0 = 2m, \quad k = \frac{q}{2} \quad (2.126)$$

Por lo tanto obtenemos la métrica de R-N.

$M_4$  no puede ser tipo O, en efecto si  $\Psi_2 = 0$  entonces (2.123) implican que  $A$ ,  $B$  y  $r$  son constantes lo cual es imposible. Por lo tanto,

“Si el espacio-tiempo  $M_4$  tiene simetría esférica en presencia de un campo de Maxwell entonces es tipo D”.

Stephani (1967) obtuvo soluciones tipo O de las ecuaciones de Einstein – Maxwell, debido a este último resultado es claro que dichas métricas no poseen simetría esférica.

# 3

## Electrodinámica de Born-Infeld

En este capítulo describimos brevemente las ideas e hipótesis que dieron origen a la electrodinámica no lineal y presentamos los aspectos principales del formalismo (ver por ejemplo [6]). Como un ejemplo concreto de una electrodinámica no lineal, discutimos el modelo de Born-Infeld [24], propuesto históricamente en los años 30 del siglo pasado, con el objetivo de eliminar la divergencia de la energía de los electrones en la electrodinámica clásica mediante la introducción de un límite superior a la intensidad del campo eléctrico en el origen. Basándose en esta idea, Born e Infeld propusieron el razonamiento que a continuación exponemos.

### 3.1. Lagrangiano de Born-Infeld

Las ecuaciones de movimiento de una partícula relativista se obtiene a partir del lagrangiano

$$L = m_0 c^2 \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right], \quad (3.1)$$

donde  $m_0$  es la masa de la partícula en reposo y  $v$  la velocidad de la partícula. Este lagrangiano se puede derivar a partir del invariante relativista, y manifiestamente impone el límite  $c$  para la velocidad de la partícula. El lagrangiano (3.1) es la función real más simple para  $v < c$ , que tiene como límite a bajas velocidades el lagrangiano Newtoniano de partícula libre  $L = m_0 v^2 / 2$ .

Siguiendo este razonamiento podemos encontrar un Lagrangiano análogo a (3.1)

para el electromagnetismo, a partir del lagrangiano de Maxwell

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{2}(B^2 - E^2). \quad (3.2)$$

Este lagrangiano no restringe el valor en la intensidad de los campos, esto es, permite que los campos puedan incluso tender a un valor infinito. Si deseamos introducir la existencia de un límite  $b$  para la intensidad de los campos, podemos construir un nuevo lagrangiano en analogía con el caso de la partícula relativista, obteniendo

$$\mathcal{L}_{BI} = b^2 \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{B^2 - E^2}{b^2}} \right]. \quad (3.3)$$

Como veremos, en el caso no estático aparece un término adicional  $b^{-4}(\vec{B} \cdot \vec{E})^2$ .

Aunque este razonamiento parece bastante convincente, esta densidad lagrangiana se puede obtener de primeros principios. Podemos preguntarnos por la densidad lagrangiana más general que podamos construir con un tensor de rango 2 y que sea invariante ante transformación de coordenadas. Una vez construida, podemos obtener la física que describe la teoría imponiendo el principio de mínima acción

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0. \quad (3.4)$$

Para construir la acción consideramos un campo tensorial covariante  $a_{\mu\nu}$  del cual no asumimos ninguna propiedad de simetría, y demandemos que  $\mathcal{L}$  sea función de  $a_{\mu\nu}$  de manera tal que sea invariante ante transformaciones de coordenadas. Esta relación entre  $\mathcal{L}$  y  $a_{\mu\nu}$  es bien conocida y tiene la forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-|a_{\mu\nu}|} \quad \text{donde} \quad |a_{\mu\nu}| = \det(a_{\mu\nu}). \quad (3.5)$$

Dado que todo tensor de rango dos se puede descomponer en su parte simétrica y su parte antisimétrica podemos escribir

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

donde  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  y  $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ . Ahora identificamos la parte simétrica  $g_{\mu\nu}$  como la métrica y la parte antisimétrica  $f_{\mu\nu}$  como el campo electromagnético. Con esto podemos construir tres expresiones las cuales multiplicadas por  $d^4x$  son invariantes:

$$\sqrt{-|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|}; \quad \sqrt{-|g_{\mu\nu}|}; \quad \sqrt{|f_{\mu\nu}|}, \quad (3.7)$$

donde el signo menos se agrega con el fin de obtener valores reales de las raíces cuadradas, dado que estamos considerando la signatura  $(-1,1,1,1)$ .

La suposición más simple para  $\mathcal{L}$  es que sea una combinación lineal de los tres invariantes en (3.7)

$$\mathcal{L} = A\sqrt{-|g_{\mu\nu}|} + B\sqrt{|f_{\mu\nu}|} + C\sqrt{-|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|}, \quad (3.8)$$

donde el segundo término puede ser omitido, ya que si  $f_{\mu\nu}$  es la rotación de un vector potencial, como se supondrá, su integral en todo el espacio-tiempo se puede cambiar a una integral de superficie, la cual no contribuye a la ecuación de movimiento del campo, y por tanto se puede tomar  $B = 0$ . Para determinar el valor de  $A$  y  $C$  podemos tomar el límite de coordenadas cartesianas y valores pequeños de  $f_{\mu\nu}$ , dado que para campos débiles los efectos no lineales son despreciables y la teoría debe tener como límite el electromagnetismo lineal. Tomando estos límites,  $\mathcal{L}$  tiene que coincidir con la teoría de Maxwell

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}. \quad (3.9)$$

En el sistema de coordenadas cartesianas,  $g_{ab} = \eta_{ab}$  y el determinante  $|\eta_{ab} + f_{ab}|$  se puede escribir como la suma de los determinantes de  $\eta$  y  $f$  más un término de mixto:

$$-|\eta_{ab} + f_{ab}| = 1 + (f_{12}^2 + f_{13}^2 + f_{23}^2 - f_{01}^2 - f_{02}^2 - f_{03}^2) - |f_{ab}|, \quad (3.10)$$

donde  $|f_{ab}| = (f_{12}f_{03} - f_{02}f_{13} + f_{01}f_{23})^2$ . Si definimos

$$f \equiv \frac{f_{ab}f^{ab}}{2} = f_{12}^2 + f_{13}^2 + f_{23}^2 - f_{01}^2 - f_{02}^2 - f_{03}^2, \quad (3.11)$$

$$\tilde{g} \equiv \frac{f_{ab}\tilde{f}^{ab}}{4} = f_{12}f_{03} - f_{02}f_{13} + f_{01}f_{23}, \quad (3.12)$$

donde  $\tilde{f}^{ab}$  es el tensor dual de  $f_{ab}$  definido en (2.7), podemos reescribir la ecuación (3.10) como

$$-|\eta_{ab} + f_{ab}| = 1 + f - \tilde{g}^2. \quad (3.13)$$

Por lo tanto el lagrangiano (3.8) lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = A + C \sqrt{1 + f - \tilde{g}^2}. \quad (3.14)$$

Si hacemos la aproximación para valores pequeños de  $f_{\mu\nu}$  en la ecuación (3.14), es decir, para valores pequeños de  $f$  y  $g$  obtenemos

$$\mathcal{L} = A \left\{ 1 + C' \left( 1 + \frac{f - \tilde{g}^2}{2} \right) \right\}, \quad (3.15)$$

donde redefinimos la constante  $C' \equiv C/A$ . Para que de esta expresión se pueda obtener la expresión del lagrangiano de Maxwell (3.9), debe suceder necesariamente que  $C' = -1$ . Es conveniente definir la constante  $A \equiv b^2$ , por lo que ahora podemos escribir

$$-b^2 \frac{f}{2} = -b^2 \frac{f_{ab}f^{ab}}{4} = \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}.$$

De esta última ecuación tenemos que las componentes del tensor  $f_{ab}$  están relacionadas con las componentes de  $F_{ab}$  mediante la relación  $f_{ab} = \frac{1}{b}F_{ab}$ . Por lo tanto podemos escribir las cantidades  $f$  y  $g$  en términos de las componentes del tensor  $F_{ab}$  como

$$f = \frac{f_{ab}f^{ab}}{2} = \frac{1}{2} \frac{F_{ab}F^{ab}}{b^2} = \frac{2F}{b^2}, \quad \tilde{g} = \frac{f_{ab}\tilde{f}^{ab}}{4} = \frac{1}{4} \frac{F_{ab}\tilde{F}^{ab}}{b^2} = \frac{\tilde{G}}{b^2}, \quad (3.16)$$

donde hemos definido

$$F \equiv \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} = \frac{1}{2} (B^2 - E^2) \quad \text{y} \quad \tilde{G} \equiv \frac{1}{4} F_{ab} \tilde{F}^{ab} = -\bar{B} \cdot \bar{E}, \quad (3.17)$$

que son los dos invariantes del electromagnetismo y los cuales coinciden con la parte real e imaginaria respectivamente del invariante  $\Phi_{ab} \Phi^{ab}$  (ec. (2.38)).

Llegamos así finalmente a la densidad lagrangiana buscada,

$$\mathcal{L}_{BI} = b^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2F}{b^2} - \frac{\tilde{G}^2}{b^4}} \right), \quad (3.18)$$

que es la generalización de la ecuación (3.3). Por completes calculamos la densidad lagrangiana del campo electromagnético en coordenadas generales, es decir

$$\mathcal{L} = b^2 \left( \sqrt{-|g_{\mu\nu}|} - \sqrt{-|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|} \right). \quad (3.19)$$

Ahora para escribir a  $\mathcal{L}$  en un sistema general de coordenadas, denotamos  $|g_{\mu\nu}| = g$  y desarrollamos el determinante  $|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|$ , en una serie de potencias de  $f_{\mu\nu}$  y  $g_{\mu\nu}$ , con esto podemos escribir

$$|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}| = g + \Phi(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}) - |f_{\mu\nu}|, \quad (3.20)$$

donde  $\Phi(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu})$  denota una función en potencias de  $g_{\mu\nu}$  y  $f_{\mu\nu}$ . Las propiedades de transformación de  $|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|$ ,  $g$ ,  $|f_{\mu\nu}|$  y por lo tanto también las de  $\Phi(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu})$ , son las mismas, es decir, estos transforman de la misma manera que lo hace  $g$ , por lo tanto podemos escribir

$$g + \Phi(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}) - |f_{\mu\nu}| = g \left( 1 + \frac{\Phi}{g} - \frac{|f_{\mu\nu}|}{g} \right). \quad (3.21)$$

Podemos ver que todas las expresiones entre paréntesis en el lado derecho de (3.21) son invariantes, y por tanto valen para cualquier sistema coordenado. En la expresión (3.11) hemos calculado su valor en un sistema de coordenadas y obtuvimos

$$\frac{\Phi}{g} = \frac{1}{2} f_{ab} f^{ab} = \frac{2F}{b^2}. \quad (3.22)$$

y por consiguiente

$$\frac{|f_{\mu\nu}|}{g} = \left( \frac{f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu}}{4} \right)^2 = \frac{\tilde{G}^2}{b^4}. \quad (3.23)$$

Dado que  $\Phi/g$  y  $|f_{\mu\nu}|/g$  son invariantes, podemos escribir para un sistema arbitrario de coordenadas

$$-|g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}| = g \left( 1 + \frac{2F}{b^2} - \frac{\tilde{G}^2}{b^4} \right). \quad (3.24)$$

Por lo tanto la densidad lagrangiana de Born-Infeld para un espacio descrito por la métrica  $g_{\mu\nu}$  es

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} b^2 \left( 1 - \sqrt{1 + 2F/b^2 - \tilde{G}^2/b^4} \right). \quad (3.25)$$

## 3.2. Formulación hamiltoniana

El lagragiano de Born-Infeld (3.25), depende de manera no lineal (de aquí el nombre electrodinámica no lineal) de los invariantes del electromagnetismo:  $F = \frac{1}{2}(B^2 - E^2)$  y  $\tilde{G} = -\vec{B} \cdot \vec{E}$  definidos en (3.17). Para que el lagrangiano sea invariante ante transformaciones de Lorentz y de paridad entonces debe depender de  $F$  y  $\tilde{G}^2$ . Como es usual se puede introducir un vector potencial  $\phi_\mu$ , a través del cual podemos escribir el tensor del campo electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu, \quad (3.26)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  satisface la identidad de Bianchi

$$\nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} = 0. \quad (3.27)$$

Con la ayuda del tensor dual:  $\tilde{F}^{\alpha\beta} = (1/2\sqrt{-g}) \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , esta identidad se puede escribir como

$$\nabla_\nu \left( \sqrt{-g} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0, \quad (3.28)$$

la cual es equivalente a la Ley de Faraday y la ley de Gauss magnética cuando la acción es la de Maxwell (3.2). Por otro lado sabemos que las ecuaciones de movimiento (la ley de Gauss eléctrica y la ley de Ampere-Maxwell cuando la acción es (3.2)) se obtienen minimizando la acción, esto es, a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\nu \left( \frac{\partial L(F, \tilde{G}^2)}{\partial F_{\mu\nu}} \right) = 0. \quad (3.29)$$

Por lo tanto las Ecs. (3.28) y (3.29) son la generalización de las ecuaciones de Maxwell. Para construir la versión hamiltoniana de la teoría comenzamos definiendo un “momento generalizado”

$$P^{\alpha\beta} \equiv 2 \frac{\partial L}{\partial F_{\alpha\beta}} = 2 \frac{\partial L}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial F_{\alpha\beta}} + 2 \frac{\partial L}{\partial \tilde{G}} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial F_{\alpha\beta}} = \frac{\partial L}{\partial F} F^{\alpha\beta} + \frac{\partial L}{\partial \tilde{G}} \tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (3.30)$$

y definimos la función hamiltoniana a través de la transformación de Legendre del lagrangiano de Born-Infeld

$$H = \frac{1}{2} P^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - L(F, \tilde{G}). \quad (3.31)$$

A este nivel note que es posible trabajar con un Hamiltoniano que depende de dos diferentes pares de variables canónicas, podemos considerar que  $H(F, \tilde{G}^2)$  o  $H(P, \tilde{Q}^2)$ , donde  $P$  y  $Q$  son los invariantes asociados a  $P^{\alpha\beta}$ , es decir

$$P \equiv \frac{1}{4} P_{\mu\nu} P^{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \tilde{Q} \equiv \frac{1}{4} P_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

En esta expresión  $\tilde{P}^{\mu\nu}$  es el tensor dual de  $P_{\mu\nu}$ .

El marco  $(P, \tilde{Q})$  es una forma alternativa del electromagnetismo no lineal que se obtiene a partir del marco original  $(F, \tilde{G})$ , mediante una transformación de Legendre. Las condiciones físicas deben ser impuestas sobre  $H$ . Para campos débiles los efectos no lineales son despreciables y la teoría debe tener como límite el electromagnetismo lineal, es decir  $H(P, \tilde{Q}) = P + O(P^2, \tilde{Q}^2)$ . En este formalismo,  $F^{\alpha\beta}$  es el tensor con significado físico, mientras que  $P^{\alpha\beta}$  no lo es. Las teorías no lineales logran que  $F^{\alpha\beta}$  sea una cantidad bien comportada haciendo que  $P^{\alpha\beta}$  absorba las singularidades de las fuentes.

Usando la Ec. (3.30) y el lagrangiano (3.18) podemos expresar el tensor  $P^{\alpha\beta}$  y su dual  $\tilde{P}^{\alpha\beta}$  en función de los invariantes  $F, \tilde{G}$ , es decir

$$P^{\alpha\beta} = \frac{-F^{\alpha\beta} + \tilde{G}/b^2 \tilde{F}^{\alpha\beta}}{\sqrt{1 + 2F/b^2 - \tilde{G}^2/b^4}}, \quad \tilde{P}^{\alpha\beta} = \frac{-\tilde{F}^{\alpha\beta} - \tilde{G}/b^2 F^{\alpha\beta}}{\sqrt{1 + 2F/b^2 - \tilde{G}^2/b^4}}, \quad (3.33)$$

donde hemos usado  $\tilde{\tilde{F}}^{\alpha\beta} = -F^{\alpha\beta}$ . Usando este resultado junto con la propiedad  $\tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} = -F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$  podemos encontrar la relación entre los invariantes  $F, \tilde{G}$  y  $P, \tilde{Q}$ , es decir:

$$P = \frac{(1 - \tilde{G}^2/b^4)F - 2\tilde{G}^2/b^2}{1 + 2F/b^2 - \tilde{G}^2/b^4}, \quad \tilde{Q} = \tilde{G}. \quad (3.34)$$

Es conveniente reescribir este sistema de ecuaciones como

$$P - 2P/b^2 - \tilde{Q}^2/b^4 = \frac{(1 + \tilde{G}^2/b^4)^2}{1 + 2F/b^2 - \tilde{G}^2/b^4}. \quad (3.35)$$

Como ya se mencionó anteriormente, el electromagnetismo de Born-Infeld surge del lagrangiano (3.18), a partir del cuál se obtiene el siguiente hamiltoniano bajo la transformación de Legendre definida en (3.31) y usando el momento (3.30) junto con la relación (3.35):

$$H = b^2 \left( \sqrt{1 - 2P/b^2 - \tilde{Q}^2/b^4} - 1 \right), \quad (3.36)$$

donde  $b$  es la máxima intensidad de los campos en el origen y el parámetro relevante en la teoría de Born-Infeld.

La Ec. (3.30) puede invertirse para expresar a  $F^{\alpha\beta}$  en función de  $P^{\alpha\beta}, P$  y  $\tilde{Q}$ , es decir, usando las ecuaciones canónicas de Hamilton obtenemos

$$F^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial H}{\partial P^{\alpha\beta}} = 2 \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial P^{\alpha\beta}} + 2 \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial P^{\alpha\beta}} = \frac{\partial H}{\partial P} P^{\alpha\beta} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{P}^{\alpha\beta}. \quad (3.37)$$

Sustituyendo la Ec. (3.37) en la ec. (3.28) se obtiene:

$$\partial_\beta \left( \frac{\partial H}{\partial P} P^{\alpha\beta} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{P}^{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (3.38)$$

Esta ecuación, junto con la Ec. (3.29), son las ecuaciones del electromagnetismo de Born-Infeld.

### 3.2.1. Las ecuaciones de campo en forma vectorial.

Denotamos por  $\vec{\mathbf{B}}$ ,  $\vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{D}}$ ,  $\vec{\mathbf{H}}$ , el espacio de los vectores que caracterizan el campo electromagnético en las unidades convencionales. Tenemos que en un sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} (x^0, x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (t, x, y, z) \\ (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) &\rightarrow (\phi_0, \vec{\mathbf{A}}) \\ (F_{01}, F_{02}, F_{03}) &\rightarrow \vec{\mathbf{E}} \\ (F_{21}, F_{13}, F_{32}) &\rightarrow \vec{\mathbf{B}} \\ (P_{01}, P_{02}, P_{03}) &\rightarrow \vec{\mathbf{D}} \\ (P_{21}, P_{13}, P_{32}) &\rightarrow \vec{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

Tenemos que el lagrangiano para un sistema de coordenadas cartesianas está dado por

$$L = b^2 \left( 1 - \sqrt{1 + 2F/b^2 - \tilde{G}^2/b^4} \right). \quad (3.39)$$

donde los invariantes están dados por

$$F = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2; \quad \tilde{G} = -\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

Ahora usando la ec. (3.33) para  $P_{01}, P_{02}, P_{03}$  y  $P_{21}, P_{13}, P_{32}$ , obtenemos

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathbf{E}}} = -\frac{-\vec{\mathbf{E}} + \tilde{G}\vec{\mathbf{B}}/b^2}{\sqrt{1 + 2F/b^2 - \tilde{G}^2/b^4}}, \quad \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathbf{B}}} = -\frac{-\vec{\mathbf{B}} + \tilde{G}\vec{\mathbf{E}}/b^2}{\sqrt{1 + 2F/b^2 - \tilde{G}^2/b^4}} \quad (3.40)$$

respectivamente. Estas dos ecuaciones son las relaciones constitutivas de la electrodinámica no-lineal, en el caso lineal (Maxwell) estas relaciones están dadas por  $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{H}}$  respectivamente. Nuevamente si hacemos uso de la ec.(3.26) obtenemos

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}; \quad \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (3.41)$$

Finalmente usando la identidad (3.27) junto con (3.28) obtenemos la generalización de las ecuaciones de campo para el electromagnetismo no lineal:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.42)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0. \quad (3.43)$$

Las ecuaciones de campo (3.42) y (3.43) son formalmente idénticas con las ecuaciones de Maxwell sin fuentes para una sustancia que tiene una constante dieléctrica y una susceptibilidad magnética.

### 3.2.1.1. Solución estática de las ecuaciones de campo.

La diferencia con el electromagnetismo lineal (Maxwell) reside en la relaciones constitutivas (3.40), para ilustrar esto consideremos la solución estática de las ecuaciones de campo en el electromagnetismo de BI. Consideramos (en el sistema de coordenadas cartesianas) el caso electrostático donde  $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{H}} = 0$  y todas las demás componentes de campo son independientes de  $t$ . Por lo tanto, las ecuaciones de campo se reducen a:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0. \quad (3.44)$$

Resolvemos esta ecuación para el caso de la simetría central. Entonces  $\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0$  es simplemente

$$\frac{d}{dr}(r^2 D_r) = 0,$$

y (3.44) tiene la solución

$$D_r = e/r^2. \quad (3.45)$$

En este caso el campo  $\vec{\mathbf{D}}$  es exactamente el mismo que en la teoría de Maxwell: las fuentes de  $\vec{\mathbf{D}}$  son cargas puntuales dados por la integral de superficie

$$4\pi e = \int D_r d\sigma.$$

La solución para  $\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = 0$  es

$$E_r = -\frac{d\phi}{dr} = -\phi'(r), \quad (3.46)$$

y de (3.40) obtenemos

$$D_r = \frac{E_r}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2} E_r^2}} = -\frac{\phi'(r)}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2} \phi'^2}}. \quad (3.47)$$

Usando (3.45) junto con (3.47) da una ecuación diferencial para  $\phi(r)$  de la primera orden, con solución

$$\phi(r) = \frac{e}{r_0} f\left(\frac{r}{r_0}\right); \quad f(x) = \int_x^\infty \frac{dy}{\sqrt{1 + y^4}} \quad r_0 = \sqrt{\frac{e}{b}}.$$

Se ve que el campo  $\vec{\mathbf{D}}$  es infinito para  $r = 0$ , sin embargo  $\vec{\mathbf{E}}$  es siempre es finito. Uno tiene

$$D_r = \frac{e}{r^2}, \quad E_r = -\frac{e}{r^2 \sqrt{1 + (r/r_0)^4}}. \quad (3.48)$$

### 3.3. Ecuaciones de Einstein-Born-EInfeld

Las ecuaciones acopladas entre la gravitación y el electromagnetismo no lineal se derivan a partir de la acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{16\pi} - \mathcal{L}_{BI} \right), \quad (3.49)$$

donde  $R$  es el escalar de curvatura,  $g \equiv \det |g_{\mu\nu}|$  y  $\mathcal{L}_{BI}$  es la densidad lagrangiana electromagnética de Born-Infeld, la cual tiene una dependencia no lineal respecto a los invariantes de  $P_{\mu\nu}$ , en el marco  $(P, \tilde{Q})$ , o respecto a los invariantes de  $F_{\mu\nu}$ , en el esquema  $(F, \tilde{G})$ . El tensor de energía momento está dado por

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (3.50)$$

Si ahora usamos el lagrangiano para cualquier sistema coordenado  $\mathcal{L} = \sqrt{-g} L$  y usando el siguiente resultado bien conocido  $\partial(\sqrt{-g})/\partial g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}$  podemos escribir el tensor de energía momento como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left( 2 \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} L \right). \quad (3.51)$$

Es conveniente hacer nuevamente una transformada de Legendre, con lo cual podemos escribir el lagrangiano  $L$  en función de  $F^{\alpha\beta}$ ,  $P^{\alpha\beta}$ ,  $P$  y  $\tilde{Q}$

$$L = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} - H(P, \tilde{Q}). \quad (3.52)$$

Con ayuda de la ecuación (3.37) podemos escribir el lagrangiano (3.52) en términos de  $P$  y  $\tilde{Q}$

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H}{\partial P} P^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{P}^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} \right) - H = 2 \left( \frac{\partial H}{\partial P} P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{Q} \right) - H. \quad (3.53)$$

Por otro lado calculamos la derivada del lagrangiano con respecto a la métrica

$$\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial \tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (3.54)$$

Introduciendo la ecuaciones (3.53) y (3.54) en (3.51), obtenemos una expresión para el tensor de energía momento en términos de  $P$  y  $\tilde{Q}$

$$4\pi T_{\mu\nu} = -\frac{\partial H}{\partial P} g_{\mu\rho} P^{\rho\alpha} P_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu} \left( 2 \frac{\partial H}{\partial P} P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{Q} - H \right). \quad (3.55)$$

Si ahora hacemos una contracción entre la métrica  $g^{\mu\nu}$  y las ecuaciones de Einstein  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$ , obtenemos

$$-R = 8\pi T^\mu{}_\mu, \quad (3.56)$$

donde hemos utilizado  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ . Ahora de la expresión (3.55) calculamos  $T^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} 4\pi T^\nu{}_\nu &= - \frac{\partial H}{\partial P} P_{\mu\alpha} g^{\mu\nu} P_\nu^\alpha + g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \left( 2 \frac{\partial H}{\partial P} P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{Q} - H \right) \\ &= - 4 \frac{\partial H}{\partial P} P + 4 \left( 2 \frac{\partial H}{\partial P} P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{Q} - H \right) \end{aligned}$$

y finalmente obtenemos que el escalar de curvatura tiene la forma

$$-R = 8 \left( \frac{\partial H}{\partial P} P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{Q} - H \right). \quad (3.57)$$

Es importante destacar que el tensor de energía-momento que se obtiene del lagrangiano de Maxwell, es de traza nula  $T^\mu{}_\mu = 0$ , y por tanto el agujero negro de Reissner-Nordström tiene esta propiedad. Por otro lado vemos que si estamos trabajando con la electrodinámica lineal de Born-Infeld, la traza del tensor de energía momento puede ser diferente de cero y consecuentemente también el escalar de curvatura  $R$ .

### 3.3.1. Las condiciones de energía

Al hacer consideraciones físicas sobre el tensor de energía-momento concluimos que éste tiene que obedecer ciertas condiciones para la energía: la densidad de energía local, medida por un observador con 4-velocidad  $U$  ( $U_\mu U^\mu < 1$ ) no tiene que ser negativo y el vector de flujo de energía local  $\mathbf{q}$  no es tipo espacio

$$T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0, \quad (3.58)$$

donde

$$q^\mu q_\mu \leq 0, \quad q^\mu \equiv T^\mu{}_\nu U^\nu. \quad (3.59)$$

Estas son, respectivamente, la condición de energía débil (CED) y la condición de energía dominante (CED); ambas condiciones se cumplen siempre

$$\frac{\partial H}{\partial P} \geq 0, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial P} P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{Q} - H \right) \geq 0. \quad (3.60)$$

La condición de energía fuerte (CEF) se define como  $R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0$ , y la podemos resolver usando la ecuación de Einstein en la forma

$$R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 8\pi \left( T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu + \frac{T}{2} \right) \geq 0. \quad (3.61)$$

Note que en el caso de la electrodinámica no lineal la CEF se puede violar si la traza del tensor de energía-momento es suficientemente negativa. En el caso de la electrodinámica de Maxwell  $T = 0$ , por lo que se satisface la CED y automáticamente también la CEF.

### 3.3.2. Ecuaciones de Einstein-Born-Infeld para las métricas de tipo-D.

En esta sección se exponen las ideas básicas y algunos resultados relevantes obtenidos en [6] para las soluciones de las métricas tipo-D. Ahora vamos a trabajar en las ecuaciones de EBI de la sección anterior para las métricas de Petrov tipo-D. La razón de restringir nuestro estudio de las métricas de tipo D se basa en la relevancia física de las soluciones pertenecientes a esta clase. Para investigar este tipo de soluciones, siempre se puede alinear las direcciones de los vectores nulos reales  $\omega^1$  y  $\omega^0$  a lo largo de los vectores de Debever-Penrose. Por lo tanto la única componente distinta de los coeficientes de N-P (2.67)  $\Psi_r$  con  $r = 1, \dots, 5$ , es  $\Psi_2$ . Vamos a postular que los vectores propios de  $F_{ab}$  (y por lo tanto las de  $\tilde{F}_{ab}$ ) también están alineadas en las direcciones de los vectores de D-P  $l^a$  y  $k^a$ . Por lo tanto las componentes no nulas de  $F_{ab}$  son  $F_{01} = -F_{10}$  y  $F_{23} = -F_{32}$  ( $P_{01} = -P_{10}$  y  $P_{23} = -P_{32}$ ). Como se ha discutido en la sección 2.2.

En consecuencia, los invariantes (3.32) están dados por

$$P = -\frac{1}{2}(P_{01}^2 + P_{23}^2), \quad \tilde{Q} = -P_{01}P_{23}. \quad (3.62)$$

Las componentes distintas de cero del tensor de energía-momento (3.55) son

$$\left. \begin{array}{l} 8\pi T_{01} \\ 8\pi T_{23} \end{array} \right\} = \mp \frac{\partial H}{\partial P}(P_{01}^2 - P_{23}^2) + 2 \left( \frac{\partial H}{\partial P}P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}}\tilde{Q} - H \right) \quad (3.63)$$

Las componentes no nulas del tensor de Ricci las podemos determinar a partir de la ecuaciones de Einstein con constante cosmológica acopladas con el electromagnetismo de B-I, es decir,  $R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \lambda + 8\pi T_{ab}$

$$\left. \begin{array}{l} -R_{01} \\ -R_{23} \end{array} \right\} = \pm \frac{\partial H}{\partial P}(P_{01}^2 - P_{23}^2) + 2 \left( \frac{\partial H}{\partial P}P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}}\tilde{Q} - H \right) + \lambda \quad (3.64)$$

con  $R_{ab} = 0$  para todos los demás valores de a y b.

La dos-forma  $\omega$ , la cual tiene la propiedad que  $d\omega = 0$  ( en la sección 3.4.1 se discutirá este resultado), para el electromagnetismo no lineal asume la forma :  $\omega = \frac{1}{2}(F_{ab} + \tilde{P}_{ab})\omega^a \wedge \omega^b$ . Por lo tanto, para la componentes no nulas de  $F_{ab}$  y  $\tilde{P}_{ab}$  obtenemos

$$\omega = (F_{01} + P_{23})\omega^0 \wedge \omega^1 + (F_{23} + P_{01})\omega^2 \wedge \omega^3.$$

Ahora parametrizamos las componentes distintas de cero de  $P_{ab}$  como

$$P_{23} = iH = ib(1 - \exp[-2\nu])^{1/2} \sin \varphi \equiv ib \sin \varphi G^{(-)}, \quad (3.65)$$

$$P_{01} = D = b(\exp[2\nu] - 1)^{1/2} \cos \varphi \equiv b \cos \varphi G^{(+)}, \quad (3.66)$$

donde  $\nu(\nu \geq 0)$  y  $\varphi$  son funciones reales, que pueden ser escritas como

$$\exp[2\nu] = \frac{b^2 + D^2}{b^2 - H^2}, \quad \exp[i\varphi] = \frac{D \exp[-\nu/2] + iH \exp[\nu/2]}{b(\exp[\nu] - \exp[-\nu])^{1/2}}.$$

En esta parametrización  $H$  toma la forma

$$H = b^2(1 - \exp[\nu] \cos^2 \varphi - \exp[-\nu] \sin^2 \varphi). \quad (3.67)$$

Por lo tanto las siguientes cantidades se pueden escribir como

$$\frac{\partial H}{\partial P} = 2(D^2 + H^2)^{-1} b^2 \sinh \nu, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial P} P + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{Q} - H \right) = b^2(\cosh \nu - 1).$$

Sustituyendo este resultado junto con (3.65)-(3.66) en (3.68), obtenemos

$$-R_{01} = \lambda + 2b^2(\exp[-\nu] - 1), \quad -R_{23} = \lambda + 2b^2(\exp[\nu] - 1). \quad (3.68)$$

De acuerdo con la ecuación (3.37), las componentes no nulas de  $F_{ab}$  son

$$F_{12} = iB = \exp[\nu] H, \quad F_{34} = E = \exp[-\nu] D. \quad (3.69)$$

Consecuentemente

$$D = \exp[\nu] E, \quad B = \exp[\nu] H. \quad (3.70)$$

Para la dos-forma electromagnética tenemos

$$\omega = (D + i \exp[\nu] H) \omega^0 \wedge \omega^1 + (\exp[-\nu] D + iH) \omega^2 \wedge \omega^3, \quad (3.71)$$

que en términos de  $\nu$  y  $\varphi$  y toma la forma

$$\omega = b \exp[i\varphi] \{iy^2 G^{(+)} \omega^0 \wedge \omega^1 + G^{(-)} \omega^2 \wedge \omega^3\} \quad (3.72)$$

Dado que las ecuaciones de EBI (3.68), son independientes de  $\varphi$ , el sistema dinámico completo de EBI posee un grado de libertad en el hamiltoniano. Tenemos una solución específica dado por  $\omega^a$ ,  $\nu$  y  $\varphi$  se obtiene otra solución mediante la sustitución  $\varphi$  por  $\varphi + \varphi_0$ , donde  $\varphi_0$  es una constante real arbitraria. Esta libertad se conoce como la libertad de la dualidad de rotaciones. Por lo tanto, la teoría EBI es compatible con la existencia de cargas magnéticas.

En cuanto al límite lineal (la teoría de Maxwell), se obtiene la dos-forma de Maxwell mediante el límite de  $\nu \rightarrow 0$  y  $b \rightarrow \infty$ . De acuerdo con las ecs. (3.71) y (3.70) para  $\nu = 0$ , la dos-forma de Maxwell es

$$\omega = (E + iB) \{ \omega^0 \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge \omega^3 \}. \quad (3.73)$$

La métrica mas general tipo-D que está alineado con el campo gravitacional y el campo electromagnético no lineal, esta dado en las coordenadas  $(\tau, y, x, \sigma)$  como

$$g = -\frac{\Delta_y}{l^2 + y^2} (d\tau - 2lx d\sigma)^2 + \frac{l^2 + y^2}{\Delta_y} dy^2 + (l^2 + y^2) \left[ \frac{dx^2}{P} + P d\sigma^2 \right] \quad (3.74)$$

donde  $\Delta_y = \Delta_y(y)$ ,  $P = P(x)$  y  $l = \text{constante}$ .

Como se había mencionado antes mencionado anteriormente esta solución se obtuvo bajo la suposición que satisfacía el teorema de Goldberg-Sachs:

Un espacio-tiempo es algebraicamente especial, si y solo si, sus congruencias son geodésicas nulas de “shear” libre:

$$\kappa = 0 = \sigma \iff \Psi_0 = 0 = \Psi_1.$$

Por lo tanto el elemento de línea (3.74) satisface  $-\kappa = k_{a;b}m^ak^b = 0$  y  $-\sigma = k_{a;b}m^am^b = 0$ .

Para determinar las funciones  $\Delta_y(y)$ ,  $P(x)$  y  $l$  usamos el formalismo de tétradas, de manera análoga a la sección 1.7, es decir, haciendo uso de la primera y segunda ecuación de Cartan, con lo cual calculamos los coeficientes del tensor de Ricci. Donde las tétradas nulas para el elemento de línea (3.74) están dadas por :

$$\left. \begin{array}{l} \omega^0 \\ \omega^1 \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left( \frac{l^2+y^2}{\Delta_y} \right)^{1/2} dy \pm \left( \frac{\Delta_y}{l^2+y^2} \right)^{1/2} (d\tau - 2lxd\sigma) \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega^2 \\ \omega^3 \end{array} \right\} = \frac{(l^2+y^2)^{1/2}}{\sqrt{2}} \left\{ P^{1/2}d\sigma \pm i \frac{1}{P^{1/2}}dx \right\}.$$

Las componentes no nulas de  $R_{ab}$ , es decir,  $R_{01}$  y  $R_{23}$  tiene la siguiente forma

$$-R_{01} = \frac{(l^2+y^2)^{-1}}{2} \left( -\Delta_{yy} + \frac{2y}{l^2+y^2}\Delta_y - \frac{2\Delta_y}{l^2+y^2} \right)$$

$$-R_{23} = \frac{(l^2+y^2)^{-1}}{2} \left( -P_{xx} - \frac{2y}{l^2+y^2}\Delta_y + \frac{2\Delta_y}{l^2+y^2} \right)$$

Por otro lado usando el formalismo hamiltoniano de la electrodinámica no lineal para obtener las componentes del tensor de Ricci  $R_{01}$  y  $R_{23}$ , las cuales están dadas en (3.68). Esta es la conexión con la electrodinámica no-lineal, con lo cual podemos obtener el sistema de ecuaciones diferenciales para  $\Delta_y(y)$  y  $P(x)$ :

$$-\Delta_{yy} + \frac{2y}{l^2+y^2}\Delta_y - \frac{2\Delta_y}{l^2+y^2} = 2(l^2+y^2)[\lambda + 2b^2(\exp[-\nu] - 1)] \quad (3.75)$$

$$-P_{xx} - \frac{2y}{l^2+y^2}\Delta_y + \frac{2\Delta_y}{l^2+y^2} = 2(l^2+y^2)[\lambda + 2b(\exp[\nu] - 1)] \quad (3.76)$$

Por otro lado sabemos que la dos-forma electromagnética  $\omega$  tiene que satisfacer  $d\omega = 0$

$$\omega = -b \exp[i\varphi] \{ i(y^2 + l^2)G^{(+)}dx \wedge d\sigma + G^{(-)}dy \wedge [d\tau - 2lxd\sigma] \}$$

$$d\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp[2\nu] = 1 + \frac{q^2 + g^2}{b^2(y^2 + l^2)^2}.$$

$$q + ig = -\sqrt{q^2 + g^2} \exp[i\varphi_0]$$

Usando este resultado ahora es posible resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (3.75)-(3.76) obteniendo

$$P = \alpha + \beta x - \varepsilon x^2$$

$$\Delta_y = \varepsilon(y^2 - l^2) - 2my - \lambda\left(\frac{1}{3}y^2 + 2l^2y^2 - l^4\right) +$$

$$+(e^2 + g^2)y \int \frac{ds}{s^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (q^2 + g^2)/(b^2(s^2 + l^2))}}$$

donde  $m$  y  $\varepsilon$  son constantes de integración. Algunas propiedades física importantes se pueden encontrar analizando el coeficiente de espín  $\rho$ , el cual lo descomponemos en sus partes real e imaginaria, entonces

$$\rho \equiv -(\Theta + i\omega) \quad \Rightarrow \quad \Theta = -\frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho}) \quad \omega = \frac{i}{2}(\rho - \bar{\rho}),$$

donde  $\Theta$  y  $\omega$  están asociados con la expansión y rotación de las geodésicas respectivamente

$$\rho \equiv -k_{a,b}m^a\bar{m}^b = -(\Theta + i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\Delta_y}{l^2 + y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{y - il}{l^2 + y^2}.$$

Es importante nota que en el límite  $l \rightarrow 0$  el coeficiente de espín es puramente real, lo que implica  $\omega \rightarrow 0$ , es decir la rotación de las congruencias es nula y obtenemos una solución estática. Por lo tanto el parámetro  $l$  está asociado con el momento angular.

### 3.3.3. Soluciones en espacios-tiempo de Petrov tipo D

La Teoría de Born-Infeld tiene la propiedad de que sus ecuaciones de movimiento tienen una simetría de dualidad eléctrica-magnética  $SO(2)$ . En [7] García, Salazar y Plebański obtuvieron todas las soluciones tipo D en la clasificación de Petrov, para la teoría de Einstein acoplada con la electrodinámica no-lineal, las cuales heredan la simetría eléctrico-magnética. La suposición básica que se adoptó para obtener las soluciones consistió en hacer coincidir las direcciones de las tétradas nulas de las métricas tipo D, con los vectores propios del campo electromagnético no lineal y suponiendo que las dos direcciones principales son geodésicas nulas y de “shear” libre. Como resultado encontraron que todas las soluciones de este tipo se subdividen en dos clases: la familia estática y la familia estacionaria.

Las soluciones estáticas se dividen en tres subfamilias: la solución Bertotti-Robinson (caso A), la generalización de NLE (Electrodinámica no lineal) de la solución de Reissner-Nordstrom (caso B) y la generalización de NLE de la solución de anti-Reissner-Nordstrom (caso C). Las soluciones estacionarias pertenecen a dos subfamilias: la generalización de NLE de la métrica NUT B(+) (caso a), que contiene como caso límite la solución del caso B, y la generalización de NLE de la solución anti-NUT (-)(caso b), que contiene como caso límite la métrica del caso C. En la siguiente tabla se resumen las subfamilias de

las métricas tipo-D así como sus posibles límites. Cabe señalar que estas soluciones del sistema de ecuaciones de Einstein-Born-Infeld fueron obtenidas incluyendo una constante cosmológica  $\lambda$  en el tensor de energía-momento.

En la siguiente tabla se resume las condiciones bajo las cuales los parámetros  $\nu$ ,  $b$  y  $l$  se puede obtener todos los tipos de soluciones tipo-D a partir del elemento de línea  $ds$  (3.74).

Familia	Espacio-Tiempo	límite $\nu \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$	$x \leftrightarrow y, \tau \rightarrow i\tau \sigma \rightarrow i\sigma$	$l = 0$
Estática	NLE R-B	R-B	—	—
	NLE R-N	R-N	NLE anti-R-N	—
	NLE anti-R-N	anti-R-N	NLE R-N	—
Estacionaria	NLE NUT $\tilde{B}(+)$	NUT Carter $\tilde{B}(+)$	NLE anti-NUT Carter $\tilde{B}(-)$	NLE R-N
	NLE anti-NUT $\tilde{B}(-)$	anti-NUT Carter $\tilde{B}(-)$	NLE anti-NUT Carter $\tilde{B}(+)$	NLE anti-R-N

En esta tabla estamos utilizando la notación: B-R=Robinson-Bertotti y R-N=Reissner-Nordstrom.

### 3.4. Generalización de la solución de Reissner-Nordström

Consideremos la solución estática con carga del sistema Einstein-Born-Infeld (generalización de la solución de Reissner-Nordström), la cual puede ser obtenida a partir del elemento de línea  $ds$  (3.74) en el límite  $l \rightarrow 0$  y presentada en las coordenadas  $(\tau, y, x, \sigma)$ . Esta solución generaliza la solución de Reissner-Nordström y está dada por la métrica

$$g = -\frac{\Delta_y}{y^2} d\tau^2 + \frac{y^2}{\Delta_y} dy^2 + y^2 \left\{ \frac{1}{P} dx^2 + P d\sigma^2 \right\} \quad (3.77)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \alpha + \beta x - \varepsilon x^2 \\ \Delta_y = \varepsilon y^2 - 2my - \frac{\lambda}{3} y^4 + (e^2 + g^2) y \int_y^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (e^2 + g^2)/b^2 s^4}} \\ \omega = (e + ig)d \left\{ ix d\sigma - d\tau \int_y^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + (e^2 + g^2)/b^2}} \right\}. \end{array} \right. \quad (3.78)$$

Como hemos mencionado esta solución constituye la generalización de electrodinámica no lineal de la solución de Reissner-Nordström, sin embargo no es evidente el límite que debemos tomar para que esto suceda. Para obtener la solución de Reissner-Nordström como un caso límite, es conveniente escribir esta métrica en las coordenadas canónicas,

es decir, hacer el siguiente cambio de coordenadas  $(\tau, y, x, \sigma) \rightarrow (t, r, \cos \theta, \phi)$  y adicionalmente pedir simetría esférica, lo cual se logra fijando el valor de los parámetros  $\varepsilon = 1$ ,  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ .

Los demás parámetros los podemos identificar como: la constante cosmológica  $\lambda = 0$ , la carga magnética  $g = G$ , la carga eléctrica  $e = Q$  y la masa  $m = M$ . Por lo tanto la métrica de este espacio-tiempo está dada por

$$ds^2 = -\psi dt^2 + \psi^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.79)$$

donde  $\psi = \Delta_r/r^2$  y estamos considerando una solución sin constante cosmológica y por simplicidad sin carga magnética

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + Q^2 r \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + Q^2/b^2 s^4}} \quad (3.80)$$

$$\omega = Qd \left\{ i \cos \theta d\phi - dt \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} \right\}. \quad (3.81)$$

Podemos escribir la integral elíptica (3.80) (que es de primera clase) en términos de funciones elípticas de Legendre  $F(\beta, k) := \int_\beta^\infty (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} ds$ . Para ello conviene reescribir la integral de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + Q^2/b^2 s^4}} &= 2 \int_r^\infty ds \frac{\sqrt{1 + Q^2/b^2 s^4} - 1}{Q^2/b^2 s^2} \\ &= -\frac{2}{3} \frac{b^2 s^3}{Q^2} \Big|_r^\infty + 2 \frac{b^2}{Q^2} \int_r^\infty ds \sqrt{s^4 + Q^2/b^2}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

donde solamente se ha multiplicado y dividido por el conjugado del denominador y posteriormente solamente se ha simplificado. El segundo término de la ecuación (3.82) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_r^\infty ds \sqrt{s^4 + Q^2/b^2} &= \int_r^\infty ds \frac{s^4 + Q^2/b^2}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} \\ &= \int_r^\infty ds \frac{Q^2/b^2}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} + \int_r^\infty ds \frac{s^4}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Integrando por partes la segunda integral, obtenemos que la integral (3.83) toma la forma

$$\int_r^\infty ds \sqrt{s^4 + Q^2/b^2} = \int_r^\infty ds \frac{Q^2/b^2}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} + \frac{s}{2} \sqrt{s^4 + Q^2/b^2} \Big|_r^\infty - \frac{1}{2} \int_r^\infty ds \sqrt{s^4 + Q^2/b^2}, \quad (3.84)$$

donde podemos notar que el tercer término de la ecuación anterior es proporcional por un factor de  $\frac{1}{2}$  a la misma integral del lado izquierdo, podemos escribir

$$\frac{3}{2} \int_r^\infty ds \sqrt{s^4 + Q^2/b^2} = \int_r^\infty ds \frac{Q^2/b^2}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} + \frac{s}{2} \sqrt{s^4 + Q^2/b^2} \Big|_r^\infty. \quad (3.85)$$

Finalmente la integral (3.82) toma la forma

$$\int_r^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + Q^2/b^2 s^4}} = -\frac{2b^2 s^3}{3Q^2} \left[ 1 - \sqrt{1 + Q^2/b^2 s^4} \right] \Big|_r^\infty + \frac{4}{3} \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}}. \quad (3.86)$$

Se puede identificar la segunda integral de esta última expresión con la función elíptica de Legendre, o de manera equivalente se puede identificar con una función hipergeométrica:

$$\int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.87)$$

$$= \frac{1}{r} {}_2F_1 \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{Q^2}{b^2 r^4} \right) \quad (3.88)$$

Donde el caso de la función hipergeométrica se deduce en [23]. Usando este resultado junto con (3.86) y sustituyendo en (3.80),  $\Delta_r$  finalmente toma la forma

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr + \frac{2}{3}b^2 r^4 + \frac{2}{3}Q^2 r \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{2}{3}b^2 r^2 \sqrt{r^4 + Q^2/b^2}. \quad (3.89)$$

La solución de Einstein-Born-Infeld en las llamadas coordenadas canónicas  $(t, r, \theta, \varphi)$  y en términos de las funciones elípticas de Legendre  $F(\beta, \kappa)$ , está dada por

$$ds^2 = -\psi_{BI} dt^2 + \psi_{BI}^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.90)$$

donde

$$\psi_{BI}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2}{3}b^2 r^2 \left( 1 - \sqrt{1 + Q^2/b^2 r^4} \right) + \frac{2}{3} \frac{Q^2}{r} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.91)$$

Nuevamente en el sistema de unidades gaussiano,  $M$  es la masa del agujero negro,  $Q$  es la carga eléctrica y  $b$  es el parámetro de Born-Infeld que corresponde a la magnitud del campo eléctrico en  $r = 0$ . Con la sustitución  $Q \rightarrow \sqrt{Q^2 + G^2}$ , la solución incluye la llamada carga magnética  $G$ <sup>1</sup> proveniente del hecho de que en la teoría de Born-Infeld existe una simetría de dualidad eléctrico-magnética.

<sup>1</sup>No confundir  $G$  en esta ecuación, la cual representa una carga magnética, con  $\tilde{G}$  definida en la ecuación (3.17), donde representa un invariante electromagnético.

### 3.4.1. Propiedades electromagnéticas de la solución

Una vez presentada la solución de agujero negro de las ecuaciones de Einstein-Born-Infeld, es importante conocer las propiedades y cantidades electromagnéticas de la solución, de manera explícita. Para ello comencemos recordando que en el contexto de formas diferenciales, la derivada exterior  $d_r$  es un mapeo  $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$  cuya acción sobre una  $r$ -forma:  $\omega_r = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ , está dada por

$$d\omega \equiv \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (3.92)$$

Si calculamos la segunda derivada exterior obtenemos que

$$d^2\omega \equiv \frac{1}{r!} \left( \frac{\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \right) dx^\sigma \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0, \quad (3.93)$$

ya que el tensor que está entre paréntesis en (3.93) es simétrico en  $\sigma$  y  $\nu$ , mientras que  $dx^\sigma \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\sigma$ , es anti-simétrico en  $\sigma$  y  $\nu$ . Por lo tanto se puede concluir que la segunda derivada exterior para una  $r$ -forma es nula. Este resultado traducido al caso de la electrodinámica sin fuentes nos dice que

$$dF = d(dA) = 0, \quad (3.94)$$

donde  $A$  es el cuatro-potencial

$$A^\mu = \left( \phi, \vec{A} \right) \Rightarrow A = A_\mu dx^\mu, \quad (3.95)$$

y  $F$  es el tensor de Faraday o tensor de campo electromagnético

$$F = dA = d(A_\nu dx^\nu) = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Anti-simetrizando el cuatro-potencial, es decir  $\partial_{[\mu} A_{\nu]} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ . Obtenemos que el tensor de Faraday se puede escribir como

$$F = \partial_{[\mu} A_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu, \text{ y por lo tanto, } F_{\mu\nu} \equiv \partial_{[\mu} A_{\nu]}. \quad (3.96)$$

Nuevamente calculamos la derivada exterior

$$d \left( \frac{1}{2} F_{\nu\mu} dx^\nu \wedge dx^\mu \right) = \frac{1}{2} \partial_\gamma F_{\nu\mu} dx^\gamma \wedge dx^\nu \wedge dx^\mu. \quad (3.97)$$

Ahora anti-simetrizamos  $\partial_{[\gamma} F_{\nu\mu]}$ , se obtiene

$$\partial_{[\gamma} F_{\nu\mu]} \equiv \frac{1}{6} (\partial_\gamma F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\gamma} + \partial_\mu F_{\gamma\nu}). \quad (3.98)$$

Dado que la segunda derivada exterior es nula, podemos concluir que

$$dF = \partial_{[\gamma} F_{\nu\mu]} dx^\gamma \wedge dx^\nu \wedge dx^\mu = 0 \text{ y por lo tanto } \partial_{[\gamma} F_{\nu\mu]} = 0.$$

Como consecuencia de este resultado obtenemos las ecuaciones de movimiento de la electrodinámica sin fuentes en un espacio-tiempo curvo

$$g^{\nu\alpha}g^{\mu\gamma}F_{\nu\mu;\gamma} = g^{\nu\alpha}F_{\nu}{}^{\gamma}{}_{;\gamma} = F^{\alpha\gamma}{}_{;\gamma} = 0. \quad (3.99)$$

Si aplicamos este razonamiento a la dos-forma del electromagnetismo no lineal, es decir a la indicada en (3.81), obtenemos

$$F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = Qd \left\{ i \cos \theta d\phi - dt \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} \right\}, \quad (3.100)$$

$$= -iQ \sin \theta d\phi \wedge d\theta + \frac{Q}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} dt \wedge dr. \quad (3.101)$$

De este resultado podemos inferir que las componentes no nulas del tensor electromagnético son

$$-F_{rt} = F_{tr} = \frac{Q}{\sqrt{r^4 + Q^2/b^2}}, \quad \tilde{F}_{\theta\phi} = -\tilde{F}_{\phi\theta} = iQ \sin \theta. \quad (3.102)$$

donde hemos utilizado que:  $\omega = F = F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ . Con la ayuda de la ecuación (3.96) podemos obtener las componentes no nulas del potencial  $A_\mu$ :  $F_{tr} = -\partial_r A_t$  y  $\tilde{F}_{\theta\phi} = \partial_\theta A_\phi$  por lo tanto

$$A_t = Q \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}}, \quad \tilde{A}_\phi = i \cos \theta. \quad (3.103)$$

Por otro lado estamos interesados en calcular las componentes de los tensores  $P_{\mu\nu}$  y  $Q_{\mu\nu}$ . Las componentes del tensor  $P_{\mu\nu}$  están definidas por las relaciones constitutivas (3.37)

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial H}{\partial P} P_{\mu\nu} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{P}_{\mu\nu}, \quad (3.104)$$

donde las componentes no nulas de  $P_{\mu\nu}$  son  $P_{rt}$  y  $P_{tr}$ . Con esto obtenemos que  $P = \frac{1}{4}(-P_{tr}^2 - P_{rt}^2) = -\frac{1}{2}P_{rt}^2$ . Usando el Hamiltoniano (3.36) obtenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{1}{\sqrt{1 + P_{tr}^2/b^2}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} = 0.$$

Para este caso la única componente no nula para la relación constitutiva (3.37) es

$$F_{rt} = \frac{\partial H}{\partial P} P_{rt}, \quad (3.105)$$

y dado que

$$F_{rt} = \frac{Q}{\sqrt{r^4 + Q^2/b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + P_{rt}^2/b^2}} P_{rt} \quad (3.106)$$

concluimos que la componente no nula de  $P_{\mu\nu}$  es

$$P_{rt} = \frac{Q}{r^2}. \quad (3.107)$$

En el electromagnetismo no lineal el papel del tensor  $P_{\mu\nu}$  lo juega el tensor  $F_{\mu\nu}$ .

De las ecuaciones (3.102) y (3.107) puede verse que  $P_{rt}$  es singular en el origen, mientras que  $F_{rt}$  en  $r = 0$  da un valor finito que corresponde a la magnitud  $b$ . Las dos componentes no nulas de tensor de energía-momento en la teoría de Born-Infeld, ecuación (3.55), están dadas por:

$$8\pi T_{r\theta} = 2b^2 \left[ \left( 1 + \frac{Q^2}{b^2 r^4} \right)^{-1/2} - 1 \right], \quad (3.108)$$

$$8\pi T_{\theta\phi} = 2b^2 \left[ \left( 1 + \frac{Q^2}{b^2 r^4} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (3.109)$$

### 3.4.2. Agujeros de Reiner-Nordström y otros límites

En el límite de distancias grandes  $r \rightarrow \infty$ , con  $b \neq 0$  y finito, la métrica (3.91) es asintóticamente plana, y corresponde a la solución de Schwarzschild, es decir:  $\psi_{BI}(r) \rightarrow 1$ . Cuando el parámetro de B-I tiende a infinito,  $b \rightarrow \infty$ , recuperamos la solución electromagnética lineal (Einstein-Maxwell), esto es, la solución de R-N.

Para obtener estos límites a partir de las ecuaciones (3.91) y (3.102) debemos tomar el límite en la expresión integral para la función elíptica de Legendre  $F(\beta, \kappa)$ :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}}. \quad (3.110)$$

#### 3.4.2.1. Caso $b \gg 1$

En este caso podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor

$$\int_r^\infty ds \left( s^4 + \frac{Q^2}{b^2} \right)^{-1/2} = \int_r^\infty s^{-2} \left( 1 + \frac{Q^2}{b^2 s^4} \right)^{-1/2} ds \simeq \int_r^\infty s^{-2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{b^2 s^4} \right) ds. \quad (3.111)$$

En el límite cuando  $b \rightarrow \infty$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_r^\infty ds \left( s^4 + \frac{Q^2}{b^2} \right)^{-1/2} \longrightarrow \int_r^\infty s^{-2} ds = \frac{1}{r}.$$

El segundo término de (3.91) se puede aproximar como

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2}{3} b^2 r^2 \left( 1 - \sqrt{1 + Q^2/b^2 r^4} \right) \rightarrow -\frac{1}{3} \frac{Q^2}{r^2}.$$

En el límite  $b \rightarrow \infty$  el tercer término de la métrica  $\psi_{BI}$  es  $-Q^2/3r^2$  mientras que el último término es  $4Q^2/3r^2$ ; la suma de ambos da  $Q^2/r^2$ , que es igual a  $\psi_{RN}$ .

$$\psi_{BI}(r) \rightarrow \psi_{RN}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}.$$

Claramente, en el límite de  $Q = 0$  se obtiene la solución de Schwarzschild. Observamos que en  $r = 0$  los dos últimos términos de RN divergen.

### 3.4.2.2. Comportamiento en $r \rightarrow 0$

Por otro lado, para  $\psi_{BI}$

$$\psi_{BI}(r) = 1 - \frac{2}{3} b^2 r^2 \left( 1 - \sqrt{1 + Q^2/b^2 r^4} \right) + \frac{2}{r} \left\{ -M + \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \quad (3.112)$$

el segundo término es finito cuando se evalúa en  $r = 0$ . La función elíptica  $F(\beta, \kappa)$  también es finita cuando se evalúa en  $r = 0$ . Entonces, dependiendo del valor de la expresión en corchetes, tenemos tres posibles casos de comportamiento de  $\psi$  en la vecindad de  $r = 0$ :

1.  $M > \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $\psi \rightarrow -\infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ .
2.  $M < \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $\psi \rightarrow +\infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ .
3.  $M = \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $\psi$  es finita cuando  $r \rightarrow 0$ .

A pesar de que en el caso (3)  $\psi$  es regular en toda el rango, la métrica diverge en  $r = 0$ . Esta conclusión se obtiene del análisis del escalar Weyl. Puesto que la solución es de tipo D, el único escalar de Weyl no nulo es  $\Psi_2$  y está dado por

$$\Psi_2 = \frac{M}{r^3} - \frac{Q^2 r}{6} \partial_r \left[ \partial_r \left( \frac{1}{r^2} \int_r^\infty \frac{ds}{s^2 + \sqrt{s^4 + Q^2/b^2}} \right) \right]. \quad (3.113)$$

Los invariantes de esta solución dependen de  $\Psi_2^2$ , por lo que en  $r = 0$ , existe una singularidad de orden  $1/r^6$ , que proviene del primer término (similar al caso de Schwarzschild y Reissner-Nordström).

### 3.4.3. Horizontes de eventos

Los ceros<sup>2</sup> en la función de la métrica  $\psi_{BI}(r)$  indican la existencia de singularidades en las coordenadas, que pueden ser eliminadas usando extensiones analíticas. Estos ceros se obtienen en forma numérica. En la Fig. (3.1) se muestra el comportamiento de  $\psi_{BI}(r)$  en función de la coordenada adimensional  $u = r/M$  para distintos valores de los parámetros  $Q$ ,  $M$  y  $b$ .

$$\psi_{BI}(u) = 1 - \frac{2}{u} + \frac{2}{3}(bM)^2 u^2 \left(1 - \sqrt{1 + \alpha^2/(bM)^2 u^4}\right) + \frac{2\alpha^2}{3u} \sqrt{\frac{bM}{\alpha}} F\left(\arccos\left\{\frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1}\right\}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.114)$$

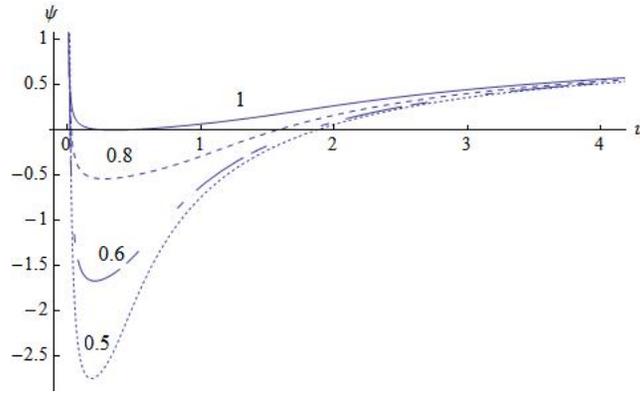


Figura 3.1: Forma de la función métrica  $\psi_{RN}$ . El valor  $r_h$ , con  $\psi(r_h) = 0$ , determina la posición del horizonte de eventos. El valor de  $\alpha = Q/M$  está indicado en cada curva y la correspondiente magnitud de  $b$  es:  $(\alpha, b)$ ,  $(0,5, 4,5/M)$ ,  $(0,6, 2,5/M)$ ,  $(0,8, 1,03/M)$ ,  $(1, 0,5225/M)$ .

En las gráficas se dan los valores de la constante  $\alpha$ , dada por  $\alpha^2 = Q^2/M^2$ . La posición del horizonte de eventos queda determinada por el valor de  $r$  en el cual  $g_{tt}(= -\psi)$  es cero. Para  $\alpha > 1$  (caso hiperextremo,  $Q > M$ ) no existe horizonte de eventos, como en el caso de RN. Para  $\alpha < 0,4$  el comportamiento se asemeja a Schwarzschild, independientemente del valor de  $b$ . Para valores de  $0,5 < \alpha < 0,9$  y  $b < 0,7$  la función métrica también se asemeja Schwarzschild (campo electromagnético débil). Para estos valores de  $\alpha$ , la magnitud  $bM$  puede ajustarse de manera tal de que  $\psi$  tienda a infinito cerca de  $r = 0$ . En estos casos  $\psi$  tiene dos ceros.

Ahora vamos a discutir el agujero negro extremo en detalle, ya que es la contraparte de la solución de Reissner-Nordström, donde el caso extremo se obtiene cuando  $Q = M$  como se discutió en la sección 1.9, para el caso de EBI esto no sucede. Recordando que el caso extremo es aquel para el cual el horizonte interno  $r_+$  como el externo  $r_-$  toman el mismo valor, es decir, el caso para el cual tenemos raíces degeneradas de  $\psi(r)$ . Una condición suficiente y necesaria para obtener ceros dobles es que tanto  $\psi(r)$  como

<sup>2</sup>Exceptuando desde luego el caso  $r = 0$ .

$d\psi(r)/dr$  tienen que ser cero. Por lo tanto de la ecuación (3.114), se llega a la siguiente ecuación, la cual es una condición para el caso extremo y que a su vez define el radio del horizonte extremo  $r_{ex}$ :

$$1 + 2 \left( R_0^2 - \sqrt{R_0^4 - Q^2 b^2} \right) = 0 \quad \text{con} \quad R_0 = b r_{ex}. \quad (3.115)$$

Donde las raíces para  $r_{ex}$  de esta función están dadas por

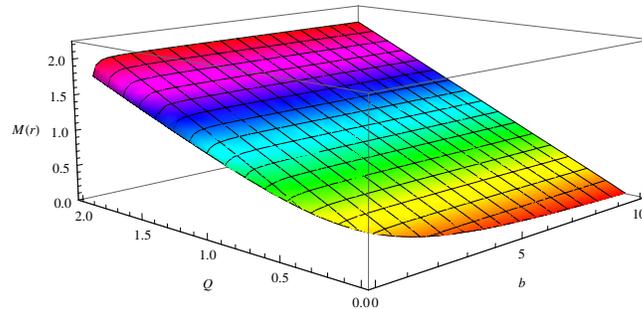
$$r_{ex}^2 = Q^2 - \frac{1}{4b^2}. \quad (3.116)$$

De este resultado se puede inferir que el horizonte extremo estará determinado por la raíz positiva de (3.116), es decir,  $r_{ex} = \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4b^2}}$  siempre y cuando el discriminante sea estrictamente mayor a cero. Cuando el discriminante es cero, tenemos el caso de una singularidad del espacio-tiempo y para el caso  $Q < 1/2b$  tenemos una singularidad desnuda. Usando la condición  $\psi(r_{ex}) = 0$ , podemos escribir la masa  $M$  en términos del horizonte extremo  $r_{ex}$ :

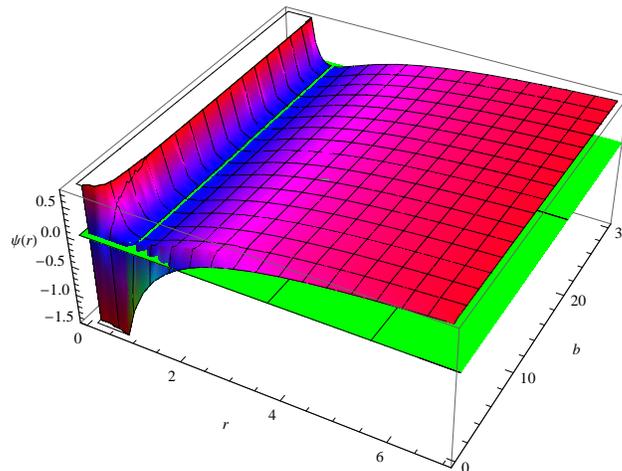
$$M = \frac{r_{ex}}{2} - \frac{b^2 r_{ex}^3}{3} \left( 1 - \sqrt{1 + Q^2/b^2 r_{ex}^4} \right) + \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{b r_{ex}^2/Q - 1}{b r_{ex}^2/Q + 1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.117)$$

donde  $r_{ex}$  está dada por (3.116).

Como se había mencionado anteriormente, el caso extremo del agujero negro de B-I no está determinado por la condición lineal  $Q = M$  como lo es para el caso de RN. La relación entre carga  $Q$ , masa  $M$  y parámetro  $b$  de B-I está dada por (3.117), la cual no define un caso extremo, si no toda una familia de casos extremos a raíz de la aparición del parámetro  $b$ , como se muestra en la figura (3.2a). En la figura se muestra la familia de casos extremos para  $Q = 0,9$ , donde tenemos que tomar en cuenta que el parámetro  $b$  tiene que satisfacer la condición  $Q > 1/2b$ .



(a) En esta figura se muestra la familia de casos extremos que aparece en la solución de EBI determinada por los parámetros  $Q$ ,  $M$  y  $b$ .



(b) En esta figura se muestra  $\psi(r, b)$  en función de la distancia  $r$  y del parámetro  $b$  para el valor de  $Q = 0,9$ , donde se puede notar que para valores de  $Q > 1/2b$  se obtiene una familia de casos extremos la cual está delimitada por la intersección de la función  $M(Q, b)$  y el plano  $M(Q, b) = 0$ .

Figura 3.2: En la figura (3.2a) se puede ver que para un valor fijo de  $Q$  tenemos toda una familia de valores de  $M$  determinados por el parámetro  $b$ , para los cuales obtenemos un caso extremo. A diferencia del caso de RN, dado un valor fijo de  $Q$  tenemos únicamente un valor de  $M$ . En la figura (3.2b) se muestra una familia de casos extremos para un valor fijo de  $Q$ .

# 4

## Geodésicas en agujeros negros de EBI

### 4.1. Partícula relativista

Consideremos la acción para una partícula de masa  $m$  moviéndose en  $\mathcal{C}$ , donde  $\mathcal{C}$  es una trayectoria tipo tiempo con puntos extremos A y B:

$$S = -mc^2 \int_A^B d\tau \quad (4.1)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio de  $\mathcal{C}$ . Ya que el tiempo propio está relacionado con el elemento de línea, podemos escribir

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}} = \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}} d\lambda \quad (4.2)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro arbitrario en  $\mathcal{C}$  y  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ . De esta manera, la acción toma la forma

$$S[x] = -m \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda (c = 1). \quad (4.3)$$

y la trayectoria de la partícula,  $\mathcal{C}$ , corresponde a lo que se denomina una geodésica y esta debe satisfacer el principio variacional, es decir

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0. \quad (4.4)$$

La acción (4.3) no es adecuada para describir partículas sin masa ya que esta se anula así misma. Sin embargo, es posible utilizar una acción equivalente,

$$S[x, e] = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} [e^{-1}(\lambda) g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - m^2 e(\lambda)] d\lambda \quad (4.5)$$

donde  $e(\lambda)$  es una nueva función arbitraria denominada *einbein*. Para describir partículas sin masa se toma el límite  $m \rightarrow 0$  en esta acción. De la ecuación (4.5) uno puede inferir que el lagrangiano es

$$L = \frac{e^{-1}(\lambda)}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{m^2}{2} e(\lambda) \quad (4.6)$$

Para probar que (4.6) es equivalente a la acción (4.3) debemos mostrar que el principio variacional lleva a las mismas ecuaciones de movimiento. Sin embargo, en este caso se tienen dos cantidades para realizar la variación. Al realizar la variación con respecto al einbein  $e(\lambda)$  se tiene

$$\frac{\delta S}{\delta e} = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} [-e^{-2}(\lambda) g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - m^2 e(\lambda)] d\lambda \quad (4.7)$$

es decir, de esto podemos inferir

$$e = \frac{1}{m} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} = \frac{1}{m} \frac{d\tau}{d\lambda}. \quad (4.8)$$

Por otro lado, si ahora realizamos una variación en  $x^\mu$  se tiene que

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu \quad (4.9)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} \quad (4.10)$$

y por lo tanto la acción transformará de acuerdo con

$$S \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} [(g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{d(x^\nu + \delta x^\nu)}{d\lambda} e^{-1} - m^2 e] d\lambda \quad (4.11)$$

$$S \rightarrow S + \delta S \quad (4.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} e^{-1}(\lambda) & \left[ g_{\mu\nu} \left( 2 \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} + \frac{d(\delta x^\mu)}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) \right. \\ & \left. + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) \right] d\lambda + \text{t.o.s.} \end{aligned} \quad (4.13)$$

de esta última ecuación junto con (4.8) no es difícil mostrar que  $\delta S = 0$  implica

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma \left( \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = e^{-1}(\lambda) \frac{de}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (4.14)$$

donde

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma \left( \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \equiv \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\nu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, la libertad de escoger el parámetro  $\lambda$  se convierte aquí en la libertad para escoger el einbein  $e(\lambda)$ . Si se desea una geodésica en parametrización afín se tomará  $e(\lambda) = \text{constante}$ . Con ello la ecuación (4.14) se convierte en

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (4.16)$$

Es conveniente elegir la parametrización afín como  $e^{-1}(\lambda) = m$ , con ello el lagrangiano (4.6) toma la forma

$$L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{m}{2}. \quad (4.17)$$

Ahora calculamos la función hamiltoniana, dado que el hamiltoniano es la transformación de Legendre del lagrangiano podemos escribir este como:

$$H = p_\mu \dot{q}^\mu - L(p, q), \quad (4.18)$$

donde  $q^\mu$  y  $\dot{q}^\mu$  son las coordenadas y velocidades generalizadas respectivamente y  $p_\mu$  son los momentos conjugados que están definidos como:

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \quad \dot{q}^\mu = \dot{x}^\mu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}. \quad (4.19)$$

Calculado los momentos conjugados para el lagrangiano (4.17) obtenemos

$$p_\mu = m g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}. \quad (4.20)$$

Finalmente obtenemos que el hamiltoniano es

$$H = \frac{m^{-1}}{2} g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + \frac{m}{2}. \quad (4.21)$$

## 4.2. Método de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi (EHJ) es una ecuación diferencial en derivadas parciales usada en mecánica clásica y mecánica relativista. La EHJ permite construir una formulación alternativa a la mecánica lagrangiana y a la mecánica hamiltoniana y por lo tanto encontrar las ecuaciones de movimiento.

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -H(x^\mu, \frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \tau) \quad (4.22)$$

esta ecuación puede ser deducida de la mecánica hamiltoniana considerando a  $S$  como la función generatriz de una transformación canónica. Los momentos conjugados de las coordenadas corresponden a las derivadas de la función con respecto a sus coordenadas generalizadas:

$$p_\mu \equiv \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (4.23)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi relativista para una partícula libre con masa  $m$  en una métrica  $g_{\mu\nu}$  se puede construir a partir de una constante de movimiento que es válida para geodésicas, es decir a lo largo de cada trayectoria la cantidad

$$\delta = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (4.24)$$

es una constante. Para una partícula masiva que generalmente eligen  $\lambda = \tau$ , y esta relación se convierte simplemente en  $\delta = -g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = +1$ , donde  $U^\mu$  es la 4-velocidad. Para una partícula sin masa que siempre tenemos  $\delta = 0$ . Para geodésicas tipo-espacio (a pesar de que no corresponden con trayectorias de partículas), se elige  $\delta = -1$ . Reescribiendo en términos del cuatro momento obtenemos  $m^2 \delta = -g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ . Usando este resultado junto con la definición (4.23) finalmente podemos obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi relativista para una partícula libre

$$m^2 \delta = -g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right). \quad (4.25)$$

Ahora queremos introducir interacciones, por lo tanto podemos introducirlas mediante el principio acoplamiento mínimo. Para el caso electromagnético es de la forma

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu + ig\check{A}_\mu \quad (4.26)$$

donde

$$A_t = Q \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}}, \quad A_\phi = -G \cos \theta \quad (4.27)$$

$$\check{A}_t = iG \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}}, \quad \check{A}_\phi = iQ \cos \theta. \quad (4.28)$$

Por simplicidad el potencial  $A_t$  lo reescribimos como  $A_t = Q I(r)$ , donde  $I(r) = \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + Q^2/b^2}}$ .

Aplicando el principio de acoplamiento mínimo a la expresión (4.25) resulta

$$m^2 \delta = -g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\mu} - qA_\mu + ig\check{A}_\mu \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x^\nu} - qA_\nu + ig\check{A}_\nu \right). \quad (4.29)$$

Ahora aplicaremos este formalismo el espacio-tiempo de Einstein–Born-Infeld, es decir a un elemento de línea que tiene la forma:

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.30)$$

donde

$$\Delta_r = r^2 + \frac{2}{3}b^2 r^4 \left( 1 - \sqrt{1 + \alpha^2/b^2 r^4} \right) + 2r \left\{ -M + \frac{\alpha^2}{3} \sqrt{\frac{b}{\alpha}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \quad (4.31)$$

donde  $\alpha^2 \equiv Q^2 + G^2$ . Aquí hemos introducido la carga magnética al espacio-tiempo haciendo el cambio  $Q \rightarrow \sqrt{Q^2 + G^2}$ , esto es posible ya que este espacio-tiempo tiene lo que es bien conocido como dualidad eléctrica-magnética.

Sustituyendo las componentes no nulas de  $g_{\mu\nu}$ ,  $A_\mu$  y  $\tilde{A}_\mu$  en (4.29) obtenemos

$$m^2\delta = \frac{r^2}{\Delta_r} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - (Qq + Gg)I(r) \right)^2 - \frac{\Delta_r}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} + (qG - gQ) \cos \theta \right)^2. \quad (4.32)$$

En muchos sistemas físicos importantes para encontrar las soluciones de las ecuaciones de movimiento en el enfoque de Hamilton-Jacobi se busca una solución por el método de separación de variables:

$$S = \sum_k S(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

donde las  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son constantes de integración. En mecánica hamiltoniana se llama coordenada cíclica a una coordenada  $q_1$  que no aparece explícitamente en el hamiltoniano. Una coordenada cíclica es siempre un caso particular en el que la ecuación de Hamilton-Jacobi puede escribirse en forma más simple:

$$S = S(\tau; q_j) + q_1 \alpha_1 \quad q_j \neq 1.$$

Para nuestro caso en estudio podemos notar que el hamiltoniano de la ecuación (4.32) no depende explícitamente de las coordenadas  $\tau$ ,  $t$  y  $\varphi$ , es decir, estas coordenadas son cíclicas por lo que hay cantidades conservadas. Esto permite proponer el siguiente Ansatz para la acción  $S$ :

$$S = -Et + L\varphi + S(r) + S(\theta), \quad (4.33)$$

donde  $E$  se interpreta como la energía de la partícula de prueba,  $L$  su momento angular y  $S(r)$ ,  $S(\theta)$  son funciones arbitrarias de sus argumentos por determinar.

Sustituyendo el Ansatz de la ecuación (4.33) en la expresión (4.32) obtenemos una ecuación diferencial parcial que sólo depende de las variables  $r$  y  $\theta$ , la cual es separable

$$m^2\delta = \frac{r^2}{\Delta_r} (E + (Qq + Gg)I(r))^2 - \frac{\Delta_r}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{(L + (qG - gQ) \cos \theta)^2}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.34)$$

Es conveniente adimensionalizar las ecuaciones obtenidas de manera que las podemos usar

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_s}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{r_s}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{r_s}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{r_s}, \quad \tilde{G} = \frac{G}{r_s}, \quad \tilde{L} = \frac{L}{r_s}, \quad (4.35)$$

donde  $r_s$  es el radio de Schwarzschild, es decir  $r_s = 2M$ . Por lo tanto la ecuación (4.34) adimensionalizada toma la forma

$$m^2\delta \tilde{r}^2 = \frac{\tilde{r}^4}{\tilde{\Delta}_r} (E + \tilde{\Delta}_q I(r))^2 - \tilde{\Delta}_r \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \tilde{L} + \tilde{\Delta}_g \cos \theta \right)^2 \quad (4.36)$$

donde hemos usado las siguientes definiciones  $\Delta_g \equiv \tilde{G}q + \tilde{Q}g$ ,  $\Delta_q \equiv \tilde{Q}q - \tilde{G}g$  y  $\tilde{\Delta}_r$  está dado por

$$\tilde{\Delta}_r = \tilde{r}^2 - \tilde{r} + \frac{2}{3}\beta^2\tilde{r}^4 \left(1 - \sqrt{1 + \tilde{\alpha}^2/\beta^2\tilde{r}^4}\right) + \frac{2\tilde{\alpha}^2\tilde{r}}{3}\sqrt{\frac{\beta}{\tilde{\alpha}}}F\left(\arccos\left\{\frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1}\right\}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (4.37)$$

donde  $\tilde{\alpha}$  y  $\beta$  están definidos como  $\tilde{\alpha}^2 \equiv \tilde{Q}^2 + \tilde{G}^2$  y  $\beta \equiv r_s b$ .

Podemos separar la ecuación (4.36) como dos ecuaciones diferenciales independientes

$$-m^2\delta\tilde{r}^2 + \frac{\tilde{r}^4}{\tilde{\Delta}_r}(E + \Delta_q I(r))^2 - \tilde{\Delta}_r \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = k = \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta}(\tilde{L} + \Delta_g \cos \theta)^2 \quad (4.38)$$

donde  $k$  es una constante

$$\tilde{\Delta}_r^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = \tilde{r}^4 (E + \Delta_q I(r))^2 - \tilde{\Delta}_r (k + m^2 \delta\tilde{r}^2) \quad (4.39)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta}\right)^2 = k - \frac{1}{\sin^2 \theta}(\tilde{L} + \Delta_g \cos \theta)^2. \quad (4.40)$$

Si hacemos la siguiente redefinición del tiempo propio  $d\tau \equiv r^2 d\gamma$  y haciendo uso de las definiciones (4.19) y (4.23), es decir

$$m\tilde{r}^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = p_\theta = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad m \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{\Delta}_r} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tau} = p_r = \frac{\partial S}{\partial r}$$

obtenemos finalmente las ecuaciones diferenciales para las geodésicas de  $\tilde{r}$  y  $\theta$ :

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\gamma}\right)^2 = R \quad \text{donde} \quad R = \frac{\tilde{r}^4}{m^2}(E + \Delta_q I(r))^2 - \frac{\tilde{\Delta}_r}{m^2}(m^2\delta\tilde{r}^2 + k) \quad (4.41)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2 = \Theta \quad \text{donde} \quad \Theta = \frac{k}{m^2} - \frac{1}{m^2 \sin^2 \theta}(\tilde{L} + \Delta_g \cos \theta)^2. \quad (4.42)$$

### 4.3. Vectores de Killing

Dado que la métrica de B-I es un espacio tiempo que además de ser estático es esféricamente simétrico, podemos encontrar cuatro vectores de Killing que están asociados con dos cantidades conservas, es decir la energía y el momento angular de una partícula de prueba.

Al observar la métrica de la NLE Generalización de Reissner-Nordstrom (4.30) se puede observar que el tensor métrico es independiente de las coordenadas  $t$  y  $\varphi$ . Por lo tanto, los vectores

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4.43)$$

son campos vectoriales de Killing.

Como es conocido, el Teorema de Noether nos asegura que para cada simetría continua de la acción, existe una carga conservada. En este caso, la carga conservada corresponde a

$$Q = \xi^\mu p_\mu. \quad (4.44)$$

Ahora utilizando el acoplamiento mínimo (4.26) para incorporar las interacciones electromagnéticas, donde el 4-momento  $p_\mu$  está dado por (4.20). Finalmente obtenemos

$$p_\mu = m g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} - q A_\mu + ig \check{A}_\mu. \quad (4.45)$$

De esta forma, la cantidad conservada asociada con el vector  $\xi$  es

$$\begin{aligned} E &= \xi^\mu p_\mu = \xi^t p_t \\ &= -m \frac{\Delta_r}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \tau} - q A_t + ig \check{A}_t \\ &= - \left( m \frac{\Delta_r}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \Delta_q I(r) \right). \\ &= -m\epsilon \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde  $\epsilon$  es la energía por unidad de masa, y por ello la cantidad conservada corresponde a la energía de la partícula.

Por otro lado, la cantidad conservada asociada con el vector  $\zeta$  es

$$L = \zeta^\mu p_\mu = \zeta^\varphi p_\varphi \quad (4.47)$$

utilizando la expresión (4.45) para el 4-momento

$$\begin{aligned} L &= mr^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - q A_\phi + ig \check{A}_\phi \\ &= mr^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \Delta_g \cos \theta. \\ &= -ml \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde la cantidad  $l$  tiene unidades de longitud al cuadrado por radian sobre tiempo. De esta forma, la cantidad conservada esta vez es el momento angular de la partícula.

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{m \tilde{r}^2 \sin^2 \theta} (\tilde{L} + \Delta_g \cos \theta), \quad \frac{d\tilde{t}}{d\tau} = \frac{\tilde{r}^2}{m \tilde{\Delta}_r} (E - \Delta_q I(\tilde{r}))$$

donde hemos adimensionalizado tomando  $\tilde{r} = r/r_s$  y  $\tilde{t} = t/r_s$  donde  $r_s = 2M$ . Con la redefinición del tiempo propio  $d\tau \equiv r^2 d\gamma$  tenemos que

$$\frac{d\phi}{d\gamma} = \frac{1}{m \sin^2 \theta} (\tilde{L} + \Delta_g \cos \theta) \quad (4.49)$$

$$\frac{d\tilde{t}}{d\gamma} = \frac{\tilde{r}^4}{m \tilde{\Delta}_r} (E - \Delta_q I(\tilde{r})) \quad (4.50)$$

estas dos ecuaciones junto con (4.41) y (4.42) son las ecuaciones diferenciales de las geodésicas de este espacio-tiempo, ahora nuestro propósito es encontrar algunos casos particulares de interés, los cuales tengan solución exacta.

## 4.4. Clasificación completa de las geodésicas

De la ecuación de Hamilton-Jacobi hemos obtenido dos de las ecuaciones geodésicas (4.41) y (4.42), las dos restantes ecuaciones geodésicas las podemos obtener de las cantidades conservadas (4.49) y (4.50). Las propiedades de las órbitas están dadas por la función  $R$  (4.41) y  $\Theta$  (4.42). Las constantes de movimiento (energía, momento angular y la constante de separación de variables), así como los parámetros de la métrica y las partículas de prueba cargadas caracterizar estos polinomios y, como consecuencia, los tipos de órbitas. En esta sección se discute el movimiento del espacio-tiempo de EBI en términos de las propiedades de la función  $R$  y  $\Theta$ .

Por simplicidad en el resto de este capítulo normalizaremos el valor de la masa de la partícula de prueba, es decir tomaremos  $m = 1$ .

### 4.4.1. El movimiento $\theta$

Puesto que  $\theta$  es un ángulo polar, éste sólo puede tomar valores reales. La ecuación (4.42) tiene soluciones reales si se cumple  $\Theta \geq 0$ . Esto implica  $k \geq 0$ . Realizando el cambio de variable  $\xi = \cos \theta$  la ec. (4.42) se puede escribir de manera más simple como

$$\left(\frac{d\xi}{d\gamma}\right)^2 = \Theta_\xi \quad \text{con} \quad \Theta_\xi = a\xi^2 + b\xi + c, \quad (4.51)$$

con un polinomio de segundo orden en el lado derecho, con coeficientes  $a = -(k + \Delta_g^2)$ ,  $b = -2\tilde{L}\Delta_g$  y  $c = k - \tilde{L}^2$ . Puesto que  $k \geq 0$  implica que  $a < 0$ . Los ceros de  $\Theta_\xi$  definen los ángulos de dos conos que confinan el movimiento de las partículas de prueba (una característica similar aparece en el espacio-tiempo Taub-NUT [19] y Kerr [20]).

Para el caso en el que  $\Delta_g$  se anula en la ecuación (4.49) y (4.42), entonces el movimiento se encuentra en un plano (por ejemplo, el movimiento de partículas sólo eléctricamente cargadas o neutras se reduce a un plano en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström con sólo carga eléctrica).

El discriminante  $D = b^2 - 4ac$  del polinomio  $\Theta_\xi$  puede ser escrito como  $D = 4k\kappa$  con  $\kappa = k + \Delta_g^2 - \tilde{L}^2$ . El discriminante tiene que ser  $D \geq 0$  para evitar que las raíces de  $\Theta_\xi$  sean complejas. Esto implica que tanto  $k$  como  $\kappa$  debe ser positivo o idénticamente cero

$$k \geq 0 \quad \kappa = k - \tilde{L}^2 + \Delta_g^2 \geq 0. \quad (4.52)$$

Estas son las condiciones que tienen que satisfacer los parámetros  $\tilde{L}$  y  $k$  para valores dados de  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{G}$ ,  $q$  y  $g$ . Siempre y cuando  $k - \tilde{L}^2$  sea positivo no hay constricciones en los valores que puede tomar  $\tilde{L}$ . Cuando  $k - \tilde{L}^2$  se vuelve negativa de las desigualdades (4.52) implica un límite inferior para el momento angular dado por  $\tilde{L}_{min} = \pm\sqrt{\Delta_g^2 + k}$ .

Ahora es fácil mostrar que podemos escribir  $\Theta_\xi$  como

$$\begin{aligned}\Theta &= k - \frac{1}{\sin^2 \theta} (\tilde{L} + \Delta_g \cos \theta)^2 \\ &= \kappa - \frac{1}{\sin^2 \theta} (\tilde{L} \cos \theta + \Delta_g)^2.\end{aligned}\quad (4.53)$$

Los ceros de  $\Theta_\xi$  están dados por

$$\xi_{1,2} = -\frac{\tilde{L}\Delta_g \pm \sqrt{k\kappa}}{k + \Delta_g^2}.\quad (4.54)$$

La función  $\Theta_\xi$  describe una parábola con máximo en  $(-\frac{\tilde{L}\Delta_g}{k+\Delta_g^2}, \frac{k\kappa}{k+\Delta_g^2})$ . Cuando  $\tilde{L}$  y  $\Delta_g$  son distintos de cero el máximo de la parábola no se encuentra en  $\xi = 0$  o, de forma equivalente, los ceros ya no son simétricas con respecto  $\xi = 0$ . Sólo para el caso en el que  $\tilde{L}$  y  $\Delta_g$  son nulos ambos conos son simétricos con respecto al plano ecuatorial.

El movimiento de  $\vartheta$  se pueden clasificar de acuerdo con el signo de  $k - \tilde{L}^2$ :

1. Si  $k - \tilde{L}^2 < 0$ , entonces  $\Theta_\xi$  tiene 2 ceros positivos para  $\tilde{L}\Delta_g < 0$  y  $\theta \in (0, \pi/2)$ , de modo que la partícula se mueve por encima del plano ecuatorial sin cruzar este. Si  $\tilde{L}\Delta_g > 0$ , entonces  $\theta \in (\pi/2, \pi)$ .
2. Si  $k - \tilde{L}^2 = 0$ , entonces  $\Theta_\xi$  tiene 2 ceros:  $\xi_1 = 0$  y  $\xi_2 = -\frac{\tilde{L}\Delta_g}{k+\Delta_g^2}$ . Si  $\tilde{L}\Delta_g < 0$ , entonces  $\xi \in [0, 1)$  y  $\theta \in (0, \pi]$ . Si  $\tilde{L}\Delta_g > 0$ , entonces  $\xi \in (-1, 0]$  y  $\theta \in [\pi/2, \pi)$ . Si  $\tilde{L} = -\Delta_g$  entonces el movimiento de  $\vartheta$  ocupa todo el hemisferio superior  $\theta \in [0, \pi/2]$ . El movimiento ocupa todo el hemisferio inferior con  $\theta \in [\pi/2, \pi]$  si  $\tilde{L} = \Delta_g$ .
3. Si  $k - \tilde{L}^2 > 0$ , entonces  $\Theta_\xi$  tiene una raíz positiva y una negativa  $\theta \in (0, \pi)$ , y la partícula cruza el plano ecuatorial durante su movimiento.

En general, el segundo término de la función  $\Theta_\xi$  en (4.53) diverge para  $\theta \rightarrow 0, \pi$ . Sin embargo, si  $\tilde{L} = -\Delta_g$ , este término es regular para  $\theta = 0$ , y si  $\tilde{L} = \Delta_g$  este es regular para  $\theta = \pi$ . Si  $\tilde{L} = \pm\Delta_g$ , entonces  $k = \kappa$ . La regularidad de  $\Theta_\xi$  en estos casos se puede ver desde

$$\Theta = \kappa - \tilde{L}^2 \frac{(1 \pm \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta},$$

aplicando la regla de L'Hôpital. Si, además,  $\tilde{L}^2 = 0$ , entonces  $\Theta_\xi = k + \Delta_g^2$  es independiente de  $\theta$ .

En los casos especiales, cuando una de las constantes  $k$  o  $\kappa$  o ambas son cero,  $\Theta_\xi$  tiene una raíz doble, que es el único valor posible para  $\theta$ . Se pueden distinguir tres casos:

1. Si  $k = 0$  y  $\kappa > 0$ , entonces  $\xi = -\frac{\tilde{L}}{\Delta_g}$  para  $\tilde{L}^2 < \Delta_g^2$ .
2. Si  $\kappa = 0$  y  $k > 0$ , entonces  $\xi = -\frac{\Delta_g}{\tilde{L}}$  para  $\tilde{L}^2 > \Delta_g^2$ .
3. Si  $k = \kappa = 0$ , entonces  $\xi = \pm 1$ , lo que implica que  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$  son posibles. En este caso,  $\tilde{L} = \pm \Delta_g$  (como se discutió anteriormente).

Esto significa que durante el movimiento de una partícula de prueba de la coordenada  $\theta$  es constante y la trayectoria se encuentra alrededor de un cono, con ejes  $\theta = 0, \pi$ , con un ángulo de apertura  $\arccos \xi$ . En este caso de (4.49) se obtiene inmediatamente que  $\varphi(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma - \gamma_{in})$  con una constante  $\mathcal{C} = \frac{\tilde{L} + \xi \Delta_g}{1 - \xi^2}$ , que en el caso 1 es  $\mathcal{C} = 0$  y en el caso 2 es  $\mathcal{C} = \tilde{L}$ .

Por lo tanto, el hecho de que  $k$  y  $\kappa$  no sean nulas indica que el movimiento de la partícula no es simétrico con respecto con los ejes  $\theta = 0, \pi$ . Por lo tanto, estas dos constantes pueden ser consideradas para desempeñar el papel de un generalizada Carter constante que aparece, por ejemplo, en el movimiento de las partículas en un espacio-tiempo de NUT y Kerr.

## 4.4.2. El movimiento $\tilde{r}$

### 4.4.2.1. Los posibles tipos de órbitas

En el resto de esta sección vamos a considerar el movimiento de partículas cargadas en el agujero negro de EBI, es decir, el caso en el que posee dos horizontes no degenerados  $r_{\pm}$ . Antes de discutir el r-movimiento en detalle, presentamos una lista de todas las posibles órbitas:

1. Órbitas de escape (OE) con rangos:  $(r_1, \infty)$  con  $r_1 > r_+$ . Estas órbitas de escape no cruzan los horizontes.
2. Órbitas de colapso (OC), con rangos  $(r_1, \infty)$  con  $r_1 < r_-$ . Este tipo de órbitas tienen un extremo en infinito y el otro extremo detrás del horizonte.
3. Órbitas periódicas (OP) con un rango de  $\tilde{r} \in (r_1, r_2)$  con  $r_1 < r_2$ . Este tipo de órbitas son muy excéntricas, las cuales son posibles en
  - (a)  $r_1, r_2 > r_+$
  - (b)  $r_1, r_2 < r_-$ .
4. Órbitas periódicas de colapso (OPC) con un rango de  $\tilde{r} \in (r_1, r_2)$  con  $r_1 < r_-$  y  $r_2 > r_+$ . Este tipo de órbitas están cercanas a los horizontes de eventos con ambos extremos detrás del horizonte del agujero negro.

#### 4.4.2.2. El movimiento radial

Consideremos ahora sólo partículas masivas, esto es  $\delta = 1$ . Con el fin de obtener valores reales de  $\tilde{r}$  de (4.41) tenemos que exigir  $R \geq 0$ . Las regiones en las que  $R \geq 0$  están delimitadas por los ceros de  $R$ . El número de ceros depende de los valores de  $E$ ,  $k$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{G}$ ,  $q$ ,  $g$  y  $b$ . Dos condiciones  $R = 0$  y  $\frac{dR}{d\tilde{r}} = 0$  definen los ceros dobles del polinomio  $R$  y por lo tanto el límite entre las regiones en las que  $R$  tiene 1, 2, 3 o 4 ceros.

Antes de buscar soluciones analíticas para este espacio-tiempo, es importante primero definir un potencial efectivo y hacer un análisis cualitativo de todas las posibles formas que puede tomar este potencial y así podemos hacer una clasificación de las posibles geodésicas para este potencial. Ahora definimos el potencial efectivo para la ec(4.41) como los valores de la energía para la cual

$$0 = \left( \frac{d\tilde{r}}{d\gamma} \right)^2 = \tilde{r}^4 (E - V_{eff}^+) (E - V_{eff}^-) \quad (4.55)$$

explícitamente el problema se reduce a encontrar las raíces de  $E$ , de la siguiente expresión

$$\left( \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \gamma} \right)^2 = \tilde{r}^4 \left( E^2 + 2\Delta_q I(\tilde{r})E + \Delta_q^2 I(\tilde{r})^2 - \frac{\tilde{\Delta}_r}{\tilde{r}^4} (\delta \tilde{r}^2 + k) \right)$$

donde la condición (4.55) determina los puntos de retorno de una órbita, es decir, el potencial efectivo toma la forma

$$V_{eff}^{\pm} = -\Delta_q I(\tilde{r}) \pm \frac{1}{\tilde{r}^2} \sqrt{\tilde{\Delta}_r (\delta \tilde{r}^2 + k)}. \quad (4.56)$$

Ahora como primer paso haremos una comparación para los diferentes tipos de potencial para los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Born-Infeld. Estos potenciales se muestran en la figura (4.1).

Algunos ejemplos del potencial efectivo están dados en las Figs.(4.2)-(4.3).

Estas figuras combinan las raíces positivas  $V_{eff}^+$  y la parte negativa  $V_{eff}^-$ . En los horizontes ambas partes  $V_{eff}^{\pm}$  coinciden (es decir, en estos puntos las dos partes  $V_{eff}^{\pm}$  están pegadas entre sí), y  $\tilde{\Delta}_r$  es nula aquí. Por consiguiente,  $V_{eff}^{\pm}(r_{\pm}) = -\Delta_q I(r_{\pm})$ . Claramente  $V_{eff}^{\pm}(r_{\pm}) < 0$  si  $\Delta_q > 0$  y viceversa (véase por ejemplo la figura 4.3).

Observamos que, en contraste con el caso Schwarzschild aquí la raíz positiva  $V_{eff}^+$  puede permitir a las partículas con energías negativas. La región fuera del horizonte donde las partículas de energía negativa pueden permanecer ha sido denominado “ergosfera generalizada”, ya que la energía se puede extraer [15, 16]. Mientras las partículas con energías de por debajo de la raíz negativa  $V_{eff}^-$  no tienen interpretación clásica, se asocian con las antipartículas en el marco de la teoría cuántica de campos [17]. La relación  $V_{eff}^+(E, q, g) = -V_{eff}^-(-E, -q, -g)$  muestra, que las órbitas correspondientes a energías positivas están disponibles para las partículas con cargas opuestas (es decir, las antipartículas). Un límite inferior para las energías de las partículas se obtiene de la exigencia de que el tiempo sólo debe marchar hacia adelante (véase la ecuación (4.50).),  $E \geq \Delta_q I(\tilde{r})$ .

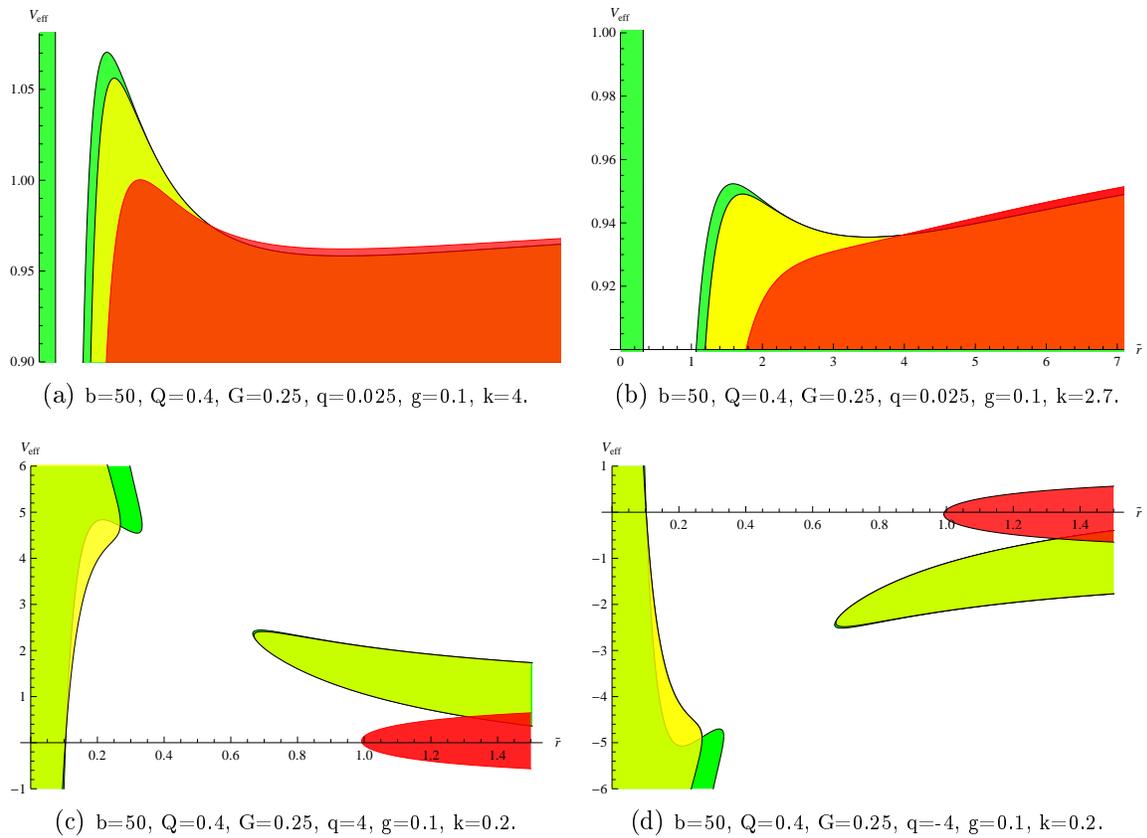


Figura 4.1: En las gáficas se muestra el comportamiento del potencial efectivo del espacio tiempo de EBI (potencial en color verde) y sus dos casos límites, es decir, en límite  $b \rightarrow 0$  se recupera el potencial de Schwarzschild (potencial en color rojo) y para el caso límite  $b \rightarrow \infty$  se recupera el potencial de RN (potencial en color amarillo). El área en color marca las zonas físicamente prohibidas respectivamente.

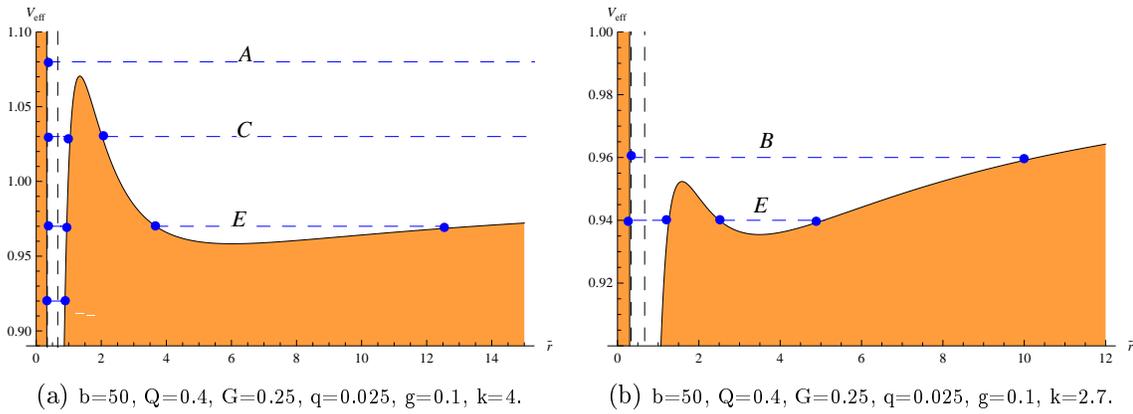


Figura 4.2: Potencial  $V_{eff}(\tilde{r})$  para diferentes valores de  $k$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{G}$ ,  $q$ ,  $g$  y  $b$ . La línea negra delimita las regiones del potencial efectivo  $V_{eff}^+$  y  $V_{eff}^-$ . Las dos partes del potencial se pegan en los horizontes, con la ordenada  $V_{eff}^\pm(r_\pm) = -\Delta_q I(r_\pm)$ . El área naranja marca las zonas físicamente prohibidas. Las posiciones de los horizontes se muestran mediante líneas de trazos verticales.

Como sabemos por estudios previos para partículas neutras (ver por ejemplo [19]), el espacio-tiempo de Reissner-Norström posee una barrera de potencial que impide que las partículas caigan en la singularidad. La barrera de potencial que está definida por la raíz más pequeña positiva  $r_1$  de  $R$  que se encuentra en el intervalo  $0 < r_1 \leq r_-$ . Cuando incrementamos los valores de  $\Delta_q$ , la influencia de la carga de una partícula de prueba se hace evidente a través de la expresión  $-\Delta_q I(\tilde{r})$ . Es decir, para grandes valores de la carga de la partícula de prueba, el potencial efectivo puede formar una pequeña montaña de potencial (Fig.4.3b) o pozo de potencial (Fig.4.3a) en el intervalo  $(0, r_-]$ . Esto indica que las órbitas consolidadas pueden existir en esta región. Esta característica sólo está presente en el movimiento de partículas cargadas.

Usando las consideraciones anteriores podemos dar todas las posibles combinaciones de ceros de  $R$  y una interpretación en términos de tipos específicos de órbitas los cuales se resumen en la Tabla 4.1.

Los tipos de órbitas relativas a los diversos parámetros vienen dados por:

- Región (1): un cero positivo. La órbita es una OC con partículas procedentes de  $\tilde{r} = +\infty$ . De las características de la potencial efectivo (barrera de potencial), está claro que el punto de retorno están en la región que delimita a el horizonte interno (caso  $A_-$ ). En este caso, la energía de una partícula de prueba corresponde al punto de unión de los potenciales  $V_{eff}^\pm$ :  $E_{A_-} = V_{eff}^\pm(r_-)$ .
- Región (2): dos ceros positivos. Aquí sólo OPC son posibles. En el caso especial cuando  $\Delta_q = 0$  y  $E = 0$ , los puntos de retorno están sobre los horizontes (caso  $B_\pm$ ). También los casos  $B_-$  y  $B_+$  cuando uno de los puntos de retorno se encuentra en uno de los horizontes son posibles. En este caso la energía de nuevo corresponde a

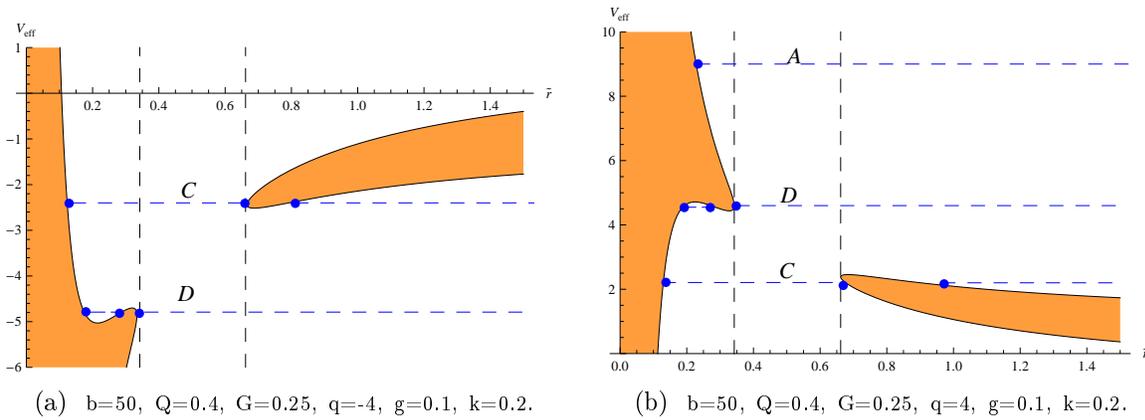


Figura 4.3: Potencial efectivo  $V_{eff}^{\pm}(\tilde{r})$  para diferentes valores de  $k, \tilde{Q}, \tilde{G}, q, g$  y  $b$ . El área naranja marca una zona físicamente prohibida. Las posiciones de los horizontes se muestran mediante líneas de trazos verticales. En este caso hay hasta 3 puntos de retorno para  $\tilde{r} \leq \tilde{r}_-$ . Tal efecto puede ser causado por una partícula de prueba altamente cargada. Los posibles tipos de órbitas se para estos potenciales se resumen en la Tabla 4.1.

los puntos de pegamento de los potenciales  $V_{eff}^{\pm} : E_{B_-} = V_{eff}^{\pm}(r_-)$  (tal órbita se puede encontrar por ejemplo en la figura 4.2b) o  $V_{eff}^{\pm} : E_{B_+} = V_{eff}^{\pm}(r_+)$  (véase por ejemplo la figura 4.3a), respectivamente.

- Región (3): tres ceros positivos.

Región (3)<sub>+</sub>: Aquí OPC y OP son posibles con subcasos  $C_-$  y  $C_+$ , los cuales denotan puntos de retorno del potencial en los horizontes interior y exterior respectivamente.

Región (3)<sub>-</sub>: Para cargas que incrementan el término  $-\Delta_q I(\tilde{r})$  conduce a una órbita con puntos de retorno por detrás del horizonte interior. También es posible que un punto de retorno de la OC se encuentre en el horizonte interior (caso  $D_-$ ).

- Región (4): cuatro ceros positivos. Aquí encontramos OPC y OP (órbitas planetarias).

## 4.5. Solución de la ecuación geodésica

Ahora se presentan las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales (4.49), (4.50), (4.41) y (4.42).

tipo	región	ceros +	rango de $\tilde{r}$	órbita
$A$	(1)	1		OC
$A_-$				OC
$B$	(2)	2		OPC
$B_+$				OPC
$B_-$				OPC
$B_{\pm}$				OPC
$C$	(3) <sub>+</sub>	3		OPC, OE
$C_-$				OPC, OE
$C_+$				OPC, OE
$D$	(3) <sub>-</sub>	3		OP, OC
$D_-$				OP, OC
$E$	(4)	4		OPC, OP

Cuadro 4.1: Tipos de órbitas de las partículas cargadas en el espacio-tiempo de EBI. Las líneas gruesas representan el rango de las órbitas. Los puntos de retorno se muestran mediante puntos gruesos. Los horizontes están indicados por las líneas verticales. En casos especiales se encuentran los puntos de retorno en los horizontes. Las tipos D, con órbitas periódicas detrás del horizonte interno son posibles para las partículas cargadas con cargas relativamente grandes.

### 4.5.1. La solución $\tilde{r}$

Al realizar la separación de variables en el método de Hamilton-Jacobi hemos obtenido que la ecuación diferencial para el movimiento radial dada por (4.41). Debido a la complejidad de esta ecuación obtenida, no se conocen soluciones analíticas a la misma, sin embargo existen varios casos límites para los cuales es posible simplificar las ecuaciones, de tal forma que aceptan soluciones analíticas, es decir, tres casos en los que el límite se toma sobre el parámetro  $b$  de Born-Infeld, estos casos son: (a)  $b \gg 1$ , (b)  $b \ll 1$  y (c)  $\infty \gg b > 1$ .

#### 4.5.1.1. Caso (a) $b \ll 1$

Ahora consideremos un desarrollo en serie de potencia para  $b \ll 1$  de  $\psi_{BI}(r)$ , el cual está dado por

$$\psi_{BI}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2}{3}b^2r^2 \left(1 - \sqrt{1 + Q^2/b^2r^4}\right) + \frac{2Q^2}{3r} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \tag{4.57}$$

el segundo término se puede aproximar por una serie de potencias en  $b^2 r^4 / Q^2$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} b^2 r^2 \left( 1 - \sqrt{1 + Q^2 / b^2 r^4} \right) &= \frac{2}{3} b^2 r^2 - \frac{2bQ}{3} \sqrt{1 + \frac{b^2 r^4}{Q^2}} \\ &\simeq \frac{2}{3} b^2 r^2 - \frac{2bQ}{3} - \frac{b}{3} \frac{b^2 r^4}{Q}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Para el tercer término de (4.57), la función elíptica se puede aproximar para pequeños valores de  $b$  como una serie de potencias de  $\sqrt{br}/\sqrt{Q}$ , es decir  $F\left(\arccos\left\{\frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1}\right\}, 1/\sqrt{2}\right) = \sum_{i=0}^4 a_i (\sqrt{br}/\sqrt{Q})^i$  donde

$$\sum_{i=0}^4 a_i (\sqrt{br}/\sqrt{Q})^i = a_0 - 2(\sqrt{br}/\sqrt{Q}) + \frac{1}{5}(\sqrt{br}/\sqrt{Q})^5 + \dots$$

si cortamos la serie hasta cuarto orden, tenemos que

$$\psi_{BI}(r) = \frac{\Delta_r}{r^2} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{2bQ}{3} + \frac{2}{3} b^2 r^2 - \frac{1}{3} \frac{b^3 r^4}{Q} + \frac{a}{r} - \frac{4bQ}{3} + \frac{2}{15} \frac{b^3}{Q} r^4 + \dots$$

Tomando el límite  $b \rightarrow 0 \Rightarrow Q \rightarrow 0$ , obtenemos el caso de Schwarzschild. Por lo tanto  $a_0 = 0$ , con esto

$$\Delta_r = r^2 - 2Mr - 2bQr^2 + \frac{2}{3} b^2 r^4 - \frac{3}{15} \frac{b^3 r^6}{Q} + \dots + \mathcal{O}\left[\frac{b^3 r^6}{Q}\right].$$

Nuevamente cortamos la serie hasta cuarto orden en  $r$  y adimensionalizamos obtenemos que

$$\tilde{\Delta}_r = \tilde{r}^2 - \tilde{r} - 2\tilde{b}\tilde{Q}\tilde{r}^2 - \frac{2}{3}\tilde{b}^2\tilde{r}^4. \quad (4.59)$$

Reescribimos esta expresión como una serie de potencias de  $\tilde{r}$ , es decir como  $\sum_{i=1}^4 b_i \tilde{r}^i$

$$\tilde{\Delta}_r = b_1 \tilde{r} + b_2 \tilde{r}^2 + b_4 \tilde{r}^4 \quad (4.60)$$

con coeficientes  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = 1 - 2\tilde{b}\tilde{Q}$ ,  $b_3 = 0$  y  $b_4 = -\frac{2}{3}\tilde{b}^2$ . Si introducimos (4.60) tenemos que explícitamente la expresión (4.41) toma la forma

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \gamma}\right)^2 = \tilde{r}^4 (E^2 + 2E I(\tilde{r}) \Delta_q + I(\tilde{r})^2 \Delta_q^2) - (b_1 \tilde{r} + b_2 \tilde{r}^2 + b_4 \tilde{r}^4) (k + \delta \tilde{r}^2). \quad (4.61)$$

Ahora podemos estudiar dos casos en esta aproximación para los cuales podemos encontrar solución exacta a las ecuaciones geodésicas, el primer caso es considerar el caso fotónico, lo cual implicaría que la ecuación (4.60) es de cuarto orden en potencias de  $\tilde{r}$  y el segundo caso a estudiar es considerar partículas de prueba con geodésicas tipo tiempo y nulas, para ello truncaremos la serie de (4.60) hasta cuarto orden, asumiendo que  $\Delta_q$  es pequeño tal que puede ser despreciado.

**Caso A**  $\delta = 0$

Primero para estudiar el caso en el que la partícula de prueba es luz, la información viene dada en  $\delta$ , para este caso  $\delta = 0$  y para el caso masivo  $\delta = 1$ , esto implica que tanto  $q$  como  $g$  son nulos y también lo será  $\Delta_q = \tilde{Q}q + \tilde{G}g$ . Por lo tanto la expresión (4.61) se reduce a

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \gamma}\right)^2 = \tilde{r}^4 E^2 - (b_1 \tilde{r} + b_2 \tilde{r}^2 + b_4 \tilde{r}^4)k. \quad (4.62)$$

Escribimos esta expresión como una serie de potencias de  $\tilde{r}$

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \gamma}\right)^2 = \sum_{i=1}^4 a_i \tilde{r}^i = a_1 \tilde{r} + a_2 \tilde{r}^2 + a_3 \tilde{r}^3 + a_4 \tilde{r}^4 \quad (4.63)$$

donde

$$a_1 = -b_1 k, \quad a_2 = -b_2 k, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = E^2 - b_4 k.$$

Si hacemos el siguiente cambio de variable  $\tilde{r} = 1/x$ , la ecuación (4.63) se reduce a una ecuación diferencial con un polinomio de tercer orden

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 = x^4 (a_1 \tilde{r} + a_2 \tilde{r}^2 + a_3 \tilde{r}^3 + a_4 \tilde{r}^4) \quad (4.64)$$

donde hemos usado que  $d\tilde{r} = -dx/x^2$ . Esta expresión finalmente toma la forma

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4. \quad (4.65)$$

Haciendo una sustitución adicional  $x = 4y/a_1 - a_2/3a_1$ , esta última ecuación se transforma en el la forma estándar de la función de Weierstrass:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \quad (4.66)$$

donde

$$g_2 = \frac{a_2^2}{12} - \frac{a_1 a_3}{4}, \quad g_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{48} - \frac{a_2^3}{216} - \frac{a_0 a_3^2}{16} \quad (4.67)$$

La ecuación diferencial (4.68) es de tipo elíptica y esta es resuelta por la función de Weierstarss en [14]:

$$y(\gamma) = \wp(\gamma - \gamma'_{in}; g_2, g_3) \quad (4.68)$$

donde  $\gamma'_{in} = \gamma_{in} + \int_{y_{in}}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + g_2 y - g_3}}$  con  $y_{in} = \pm \frac{a_3}{4} (\tilde{r}_{in})^{-1} + \frac{a_2}{12}$ . Por lo tanto, la solución para (4.63) adquiere la forma

$$\tilde{r} = \frac{a_3}{4\wp(\gamma - \gamma'_{in}; g_2, g_3) - \frac{a_2}{3}}. \quad (4.69)$$

**Caso B**  $\delta \neq 0$ ,  $\Delta_q \simeq 0$  y  $b_4 = 0$

En este caso estamos considerando partículas de prueba con carga eléctrica y magnética  $q$  y  $g$  respectivamente. Si consideramos que el parámetro de Born-Infeld  $b$  es lo suficientemente pequeño como para poder despreciar ordenes cuadráticos y sólo quedarnos con términos lineales de este. Esto quiere decir que podemos tomar a  $b_4 = 0$  en (4.61), por lo tanto obtendríamos una ecuación diferencial de cuarto orden en potencias de  $\tilde{r}$ :

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \gamma}\right)^2 = \tilde{r}^4 E^2 - (b_1 \tilde{r} + b_2 \tilde{r}^2)k - (b_1 \tilde{r} + b_2 \tilde{r}^2)\delta \tilde{r}^2. \quad (4.70)$$

Nuevamente escribimos esta ecuación como una serie de potencias  $\sum_{i=1}^4 a_i \tilde{r}^i$ , donde podemos identificar a las constantes como:

$$a_1 = -b_1 k, \quad a_2 = -b_2 k, \quad a_3 = -b_1 \delta, \quad a_4 = E^2 - b_2 \delta,$$

donde  $b_1 = -1$ ;  $b_2 = 1 - 2\tilde{b}\tilde{Q}$ . Siguiendo el mismo razonamiento que el caso anterior obtenemos que la solución es idénticamente a (4.69) donde la diferencia reside en el valor de las constantes  $a_i$ .

#### 4.5.1.2. Caso (b) $b \gg 1$

Ahora consideramos el caso para valores grandes de  $b$ , para esto tenemos que (4.41) depende de una función elíptica, por lo tanto primero analicemos esta función. De acuerdo con (3.111) la función elíptica  $F\left(\arccos\left\{\frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1}\right\}, 1/\sqrt{2}\right)$  para valores pequeños de  $Q^2/b^2r^4$  está dada por

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{Q}}F\left(\arccos\left\{\frac{br^2/Q-1}{br^2/Q+1}\right\}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq r^{-1} - \frac{1}{10}\frac{Q^2}{b^2}r^{-5}. \quad (4.71)$$

Adimensionalizando haciendo  $\tilde{r} = r/r_s$  con  $r_s = 2M$  obtenemos que  $\Delta_q I(\tilde{r})$  está dado por

$$\Delta_q I(\tilde{r}) \simeq \Delta_q \left( \tilde{r}^{-1} - \frac{1}{10} \frac{\tilde{Q}^2}{(br_s)^2} \tilde{r}^{-5} \right) \simeq \frac{\Delta_q}{\tilde{r}} \quad \text{para} \quad \Delta_q < 1 \quad (4.72)$$

Antes de realizar una aproximación para  $\tilde{\Delta}_r$  es importante realizar un análisis cualitativo sobre la función  $\tilde{\Delta}_r$ . Para ello en la Fig.(4.4) se muestran las graficas de la función  $\tilde{\Delta}_r$  para distintos valores del parámetro  $b$ , con lo cual podemos notar que para valores de  $\tilde{r} > 0$  se mantiene el comportamiento de un polinomio de orden dos en  $\tilde{r}$ , por lo tanto es posible proponer a la función  $\tilde{\Delta}_r$  como un polinomio de orden dos el cual tiene como raíces a los horizontes de eventos:

$$\tilde{\Delta}_r = (\tilde{r} - r_{h-})(\tilde{r} - r_{h+}) \quad (4.73)$$

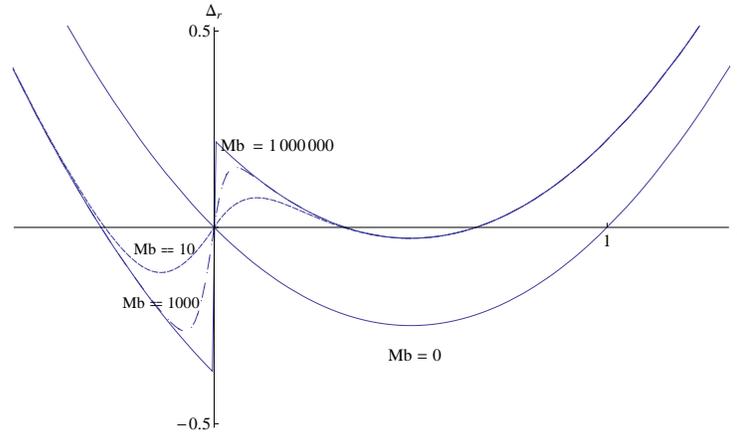


Figura 4.4: En esta gráfica se muestra el comportamiento de  $\tilde{\Delta}_r$  para distintos valores de parámetro  $b = 0, 100/M, 1000/M, 1000000/M$ .

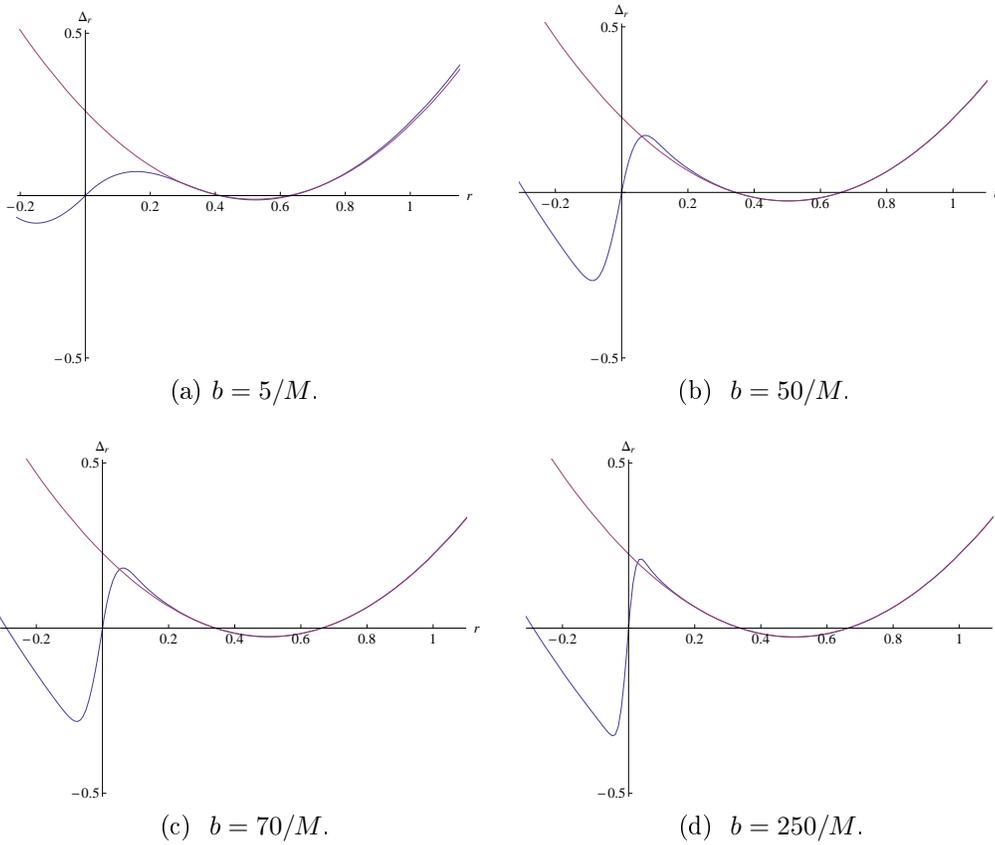


Figura 4.5: En esta gráfica se compara la función exacta de  $\tilde{\Delta}_r$  contra la aproximación propuesta, donde la parábola es la función aproximada la cual tiene como raíces a los horizontes de y la función  $\tilde{\Delta}_r$  exacta tiene cuatro raíces dos negativas(sin significado físico) y dos positivas(horizontes).

donde  $r_{h-}$  y  $r_{h+}$  son los horizontes de eventos interior y exterior respectivamente.

En la Fig.(4.5) se compara la aproximación propuesta (4.73) con la función exacta de  $\tilde{\Delta}_r$  podemos notar que esta aproximación es buena para valores mayores a  $r_{h-}$ . Si utilizamos esta aproximación (4.73) junto con (4.72) en la ec. (4.41). Podemos escribir esta ecuación diferencial como

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \gamma}\right)^2 = \tilde{r}^4 E^2 + 2\tilde{r}^3 \Delta_q + \tilde{r}^2 \Delta_q^2 - (\tilde{r} - r_{h-})(\tilde{r} - r_{h+})(k + \delta \tilde{r}^2). \quad (4.74)$$

Por simplicidad es conveniente escribir a  $\tilde{\Delta}_r$  como una serie de potencias de  $\tilde{r}$

$$(\tilde{r} - r_{h-})(\tilde{r} - r_{h+}) = s_0 + s_1 \tilde{r} + s_2 \tilde{r}^2 \quad (4.75)$$

donde los coeficientes son  $s_0 = r_{h+}r_{h-}$ ,  $s_1 = -(r_{h-} + r_{h+})$ ,  $s_2 = 1$ . Por lo tanto

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \gamma}\right)^2 = \tilde{r}^4 E^2 + 2E \tilde{r}^3 \Delta_q + \tilde{r}^2 \Delta_q^2 - (s_0 + s_1 \tilde{r} + \tilde{r}^2)(k + \delta \tilde{r}^2). \quad (4.76)$$

Ahora nuevamente escribimos esta última ecuación como una serie de potencias  $\sum_{i=0}^4 a_i \tilde{r}^i$ :

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \gamma}\right)^2 = a_0 + a_1 \tilde{r} + a_2 \tilde{r}^2 + a_3 \tilde{r}^3 + a_4 \tilde{r}^4$$

con coeficientes

$$\begin{aligned} a_4 &= (E^2 - \delta), & a_3 &= (2E \Delta_q - \delta s_1), \\ a_2 &= (\Delta_q^2 - k - \delta s_0), & a_1 &= -s_1 k, & a_0 &= -k s_0. \end{aligned}$$

Si hacemos el siguiente cambio de variable  $\tilde{r} = \pm \frac{1}{x} + \tilde{r}_R$ , donde  $\tilde{r}_R$  es una de las raíces de  $a_0 + a_1 \tilde{r} + a_2 \tilde{r}^2 + a_3 \tilde{r}^3 + a_4 \tilde{r}^4 = 0$ . Primero evaluamos nuestro cambio de variable,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 = x^4 \left( a_0 + a_1 \left(\pm \frac{1}{x} + \tilde{r}_R\right) + a_2 \left(\pm \frac{1}{x} + \tilde{r}_R\right)^2 + a_3 \left(\pm \frac{1}{x} + \tilde{r}_R\right)^3 + a_4 \left(\pm \frac{1}{x} + \tilde{r}_R\right)^4 \right),$$

Desarrollando este polinomio y agrupando en términos como

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 = x^4 \left( a_0 + a_1 \tilde{r}_R + a_2 \tilde{r}_R^2 + a_3 \tilde{r}_R^3 + a_4 \tilde{r}_R^4 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) \right),$$

donde la suma de los primeros cinco términos son idénticamente iguales a cero, es decir  $a_0 + a_1 \tilde{r}_R + a_2 \tilde{r}_R^2 + a_3 \tilde{r}_R^3 + a_4 \tilde{r}_R^4 = 0$ . Por lo tanto podemos escribir esta ecuación como un polinomio de tercer orden:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3.$$

Si finalmente hacemos el cambio de variable  $x = (4y - b_2/3)/b_3$  podemos identificar a esta como la ecuación de Weierstrass

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 = 4y^3 - g_2y + g_3$$

donde

$$g_2 = \frac{b_2^2}{12} - \frac{b_1b_3}{4}, \quad g_3 = \frac{b_1b_2b_3}{48} - \frac{b_2^3}{216} - \frac{b_0b_3^2}{16}.$$

La ecuación diferencial (4.76) es de tipo elíptica y es ta es resuelta por la función de Weierstarss en [14]

$$y(\gamma) = \wp(\gamma - \gamma'_{in}; g_2, g_3)$$

donde  $\gamma'_{in} = \gamma_{in} + \int_{y_{in}}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + g_2y - g_3}}$  con  $y_{in} = \pm \frac{b_3}{4}(\tilde{r}_{in})^{-1} + \frac{b_2}{12}$ , por lo tanto, la solución para (4.76) adquiere la forma

$$\tilde{r} = \pm \frac{b_3}{4\wp(\gamma - \gamma'_{in}; g_2, g_3) - \frac{b_2}{3}} + \tilde{r}_R. \quad (4.77)$$

#### 4.5.1.3. Caso (c) $\infty \gg b > 1$

Para este tercer caso de la misma manera podemos proponer un polinomio de orden dos cuyas raíces son los horizontes y comparar con la expresión exacta para verificar que efectivamente la aproximación es buena, como se muestra en la Fig.(4.5a)-(4.5d). Para este caso de la misma maneta obtenemos una solución de la forma (4.77). Recordando que la expresión para los horizontes  $r_{h+}$  y  $r_{h-}$  se encuentran numéricamente. Por lo tanto la solución en este caso está dada por (4.77).

#### 4.5.2. Solución de la ecuación $\theta(\gamma)$

La solución de la ec. (4.51) con  $a < 0$  y  $D > 0$  está dado por la función elemental

$$\theta(\gamma) = \arccos\left(\frac{1}{2a}(\sqrt{D} \sin(\sqrt{-a}\gamma - \gamma_{in}^{\vartheta}) - b)\right), \quad (4.78)$$

donde  $\gamma_{in}^{\vartheta} = \sqrt{-a}\gamma_{in} - \arcsin\left(\frac{\gamma_{in}+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$  y  $\gamma_{in}$  es el valor inicial de  $\gamma$ .

#### 4.5.3. Solución de la ecuación $\phi(\gamma)$

Ahora consideremos la ecuación diferencial para  $\phi(\gamma)$  la cual está dada por la ec. (4.49). Esta expresión puede ser simplificado mediante el uso de (4.42) y realizando el

cambio de variable  $\xi = \cos \theta$

$$d\phi = -\frac{d\xi}{\sqrt{\Theta_\xi}} \frac{\tilde{L}}{1-\xi^2} - \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\Theta_\xi}} \frac{\Delta_g}{1-\xi^2}, \quad (4.79)$$

donde  $\Theta_\xi$  está dada por (4.51). Esta integral es bien conocida en por lo tanto esta ecuación puede ser fácilmente integrada y la solución para  $a < 0$  y  $D > 0$  está dada por

$$\phi(\gamma) = \frac{1}{2}(I_+ + I_-) \Big|_{\xi_{in}}^{\xi(\gamma)} + \phi_{in}, \quad (4.80)$$

donde

$$I_\pm = -\frac{\tilde{L} \pm \Delta_g}{|\tilde{L} \pm \Delta_g|} \arcsin \frac{k + \kappa - (\tilde{L} \pm \Delta_g)^2 \mp (k + \kappa + (\tilde{L} \pm \Delta_g)^2)\xi}{\sqrt{D}(\xi \mp 1)}. \quad (4.81)$$

Para el caso especial en el que  $k = \tilde{L}^2$  y  $\tilde{L} = \pm \Delta_g$  este resultado se reduce a una forma muy simple

$$\phi(\gamma) = \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{L}}{|\tilde{L}|} \arcsin \frac{1 \pm 3\xi}{\xi \mp 1} \right) \Big|_{\xi_{in}}^{\xi(\gamma)} + \phi_{in}. \quad (4.82)$$

#### 4.5.4. Geodésicas en el plano ecuatorial

Ahora por simplicidad consideremos geodésicas en el plano ecuatorial es decir cuando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . El objetivo de esta subsección es comparar las geodésicas de la solución de EBI con las geodésicas de RN. Para ello consideremos un potencial como el que se muestra en la figura (4.2a) y consideremos una partícula de prueba con una energía  $E = 0,9654$  y una solución caracterizada por los parámetros  $\tilde{Q} = 0,4$ ,  $\tilde{G} = 0,25$ ,  $q = 0,050$ ,  $g = 0,1$ ,  $k = 4$ ,  $\tilde{L} = 6$  y  $b = 5,0/M$ .

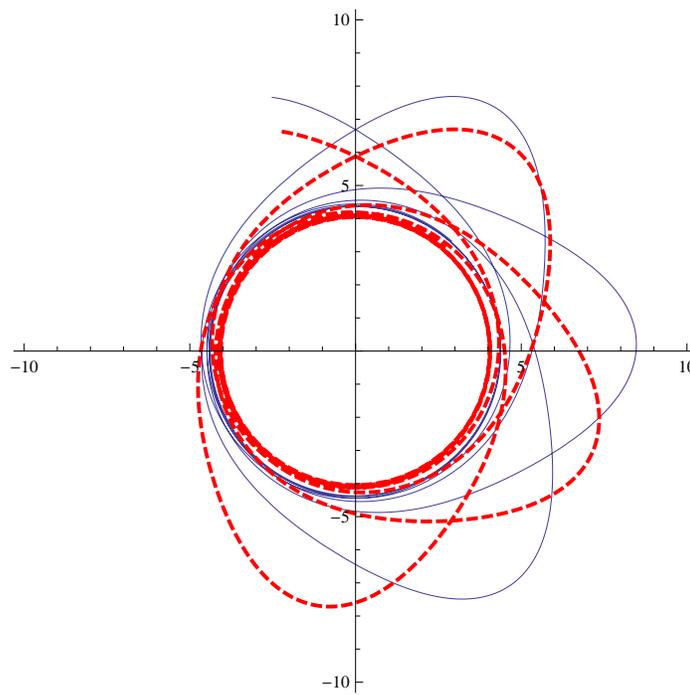


Figura 4.6: En esta figura se comparan las geodésicas de la solución de RN (geodésica en color rojo) contra la solución de EBI (geodésicas color azul). Con parámetros  $\tilde{Q} = 0,4$ ,  $\tilde{G} = 0,25$ ,  $q = 0,050$ ,  $g = 0,1$ ,  $k = 4$ ,  $\tilde{L} = 6$ ,  $b = 5,0/M$  y  $E = 0,9654$ .



# Conclusiones

En este trabajo hemos (se ha) estudiado la solución a las ecuaciones de Einstein con una fuente con carga eléctrica, en el formalismo del electromagnetismo no lineal de Born-Infeld. Se realizó una revisión breve de la clasificación de Petrov, la cual describe las posibles simetrías algebraicas del tensor de Weyl. Desde que aparecieron los trabajos de Petrov, se han propuesto otros enfoques para la clasificación, entre los más conocidos y revisados en este trabajo están: la clasificación espinorial de Penrose y el enfoque centrado en “*las direcciones principales nulas*”. En este enfoque se buscan soluciones para un vector nulo  $k^\mu$  de  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  tal que este vector satisface la ecuación de Debever-Penrose (DP):

$$k^b k_{[s} C_{a]bc[d} k_{r]} k^c = 0.$$

La clasificación de Petrov se basa en las diferentes multiplicidades de los vectores nulos. Con esto existen 6 tipos de Petrov a saber:

$$I : [1111] \quad , \quad II : [112] \quad , \quad D : [22] \quad , \quad III : [13] \quad , \quad N : [4] \quad , \quad O : [0]$$

es decir, en el tipo  $I$  existen 4 direcciones principales simples, en  $II$  tenemos dos vectores de DP simples y uno 2-degenerado, en  $D$  se cuenta con dos direcciones dobles, en  $III$  existe un vector triple y uno no-degenerado, en  $N$  sólo tenemos un vector de DP 4-degenerado, por último el tipo  $O$  es conocido como el espacio tiempo conformalmente plano, en este caso el tensor de Weyl es nulo. El espacio-tiempo tipo D es de gran interés en este trabajo, ya que incluye todas las soluciones tipo agujero negro conocidas.

Por este motivo se realizó una breve revisión de las soluciones Tipo-D, las cuales se construyen para el acoplamiento de la Teoría de BI con las ecuaciones de Einstein en [7]. Estas soluciones son construidas bajo el supuesto de que las tétradas nulas de las métricas tipo-D coinciden con los vectores propios del campo electromagnético no lineal y suponiendo que las dos direcciones principales son geodésicas nulas y de “shear” libre. Debido a la dualidad electro-magnetismo de las métricas tipo D, se puede generalizar este resultado para cargas magnéticas.

Se hizo también un breve repaso de la geometría del agujero negro de Reissner-Nordström, la cual es solución de las ecuaciones de Einstein y de las de Maxwell (electromagnetismo lineal). Posteriormente se introdujo el formalismo del electromagnetismo no lineal, a partir del cual se construyó la solución de la teoría de Einstein-Born-Infeld (EBI) la cual llamamos simplemente solución EBI. El objetivo principal de este trabajo,

sin embargo, fue investigar las consecuencias de esta teoría electromagnética no lineal para agujeros negros cargados. Se puso particular énfasis en el estudio de sus geodésicas.

La solución de RN está caracterizada, por dos parámetros que son la masa  $M$  y la carga  $Q$ . La primera diferencia es que en la solución EBI se introduce un tercer parámetro que es el parámetro  $b$  de Born-Infeld. Este parámetro  $b$  está relacionado con la intensidad del campo electromagnético en el origen. Se mostró que cuando se toma el límite  $b \rightarrow \infty$  se obtiene el agujero negro de Reissner-Nordström (RN) a partir del agujero negro EBI, y por lo tanto se puede concluir que la solución EBI y la solución RN son muy similares para valores grandes del parámetro  $b$ . Sin embargo también es posible obtener la solución de Schwarzschild en el límite  $b \rightarrow 0$ . La razón es clara, la carga es demasiado débil para con respecto a la masa, y así el campo gravitacional gana.

El segundo punto que hay que tener en cuenta es el número de ceros de  $\psi_{BI}$  en la solución de EBI. Del análisis de la componente  $g_{tt}$  del tensor métrico, es evidente que, así como en la solución de RN, es posible tener dos horizontes, un horizonte, o ningún horizonte, dependiendo del valor de los parámetros que intervienen en la teoría, es decir, la carga  $Q$  y la masa  $M$ . Para la solución de EBI se puede observar que los diferentes valores del parámetro  $b$  produce un comportamiento similar para  $\psi_{BI}$  a excepción de un caso particular, el caso extremo.

Uno de los resultados más importantes de este trabajo es el estudio del caso extremo del espacio-tiempo de EBI, es decir, el caso para el cual el horizonte interno  $r_-$  y el horizonte externo  $r_+$  toman el mismo valor. Para la solución de RN la condición de caso extremo está dada por  $Q = M$ . Para la solución de EBI la condición de caso extremo es un poco más larga. Una condición suficiente y necesaria para obtener ceros dobles es que tanto  $\psi_{BI}$  como  $d\psi_{BI}/dr$  se anulen. De la ecuación (3.114) para  $\psi_{BI}$  se obtiene que la condición para el caso extremo es

$$1 + 2 \left( R_0^2 - \sqrt{R_0^4 - Q^2 b^2} \right) = 0 \quad \text{con} \quad R_0 = b r_{ex}, \quad (4.83)$$

de la cual se obtiene el radio del horizonte extremo  $r_{ex}$ :

$$r_{ex}^2 = Q^2 - \frac{1}{4b^2}. \quad (4.84)$$

De este resultado se puede inferir que el horizonte extremo estará determinado por la raíz positiva de (4.84), es decir,  $r_{ex} = \sqrt{Q^2 - \frac{1}{4b^2}}$ , siempre y cuando el discriminante sea estrictamente mayor a cero. Cuando el discriminante es cero, tenemos el caso de una singularidad del espacio-tiempo y para el caso  $Q < 1/2b$  tenemos una singularidad desnuda. Usando la condición  $\psi(r_{ex}) = 0$ , podemos escribir la masa  $M$  en término del horizonte extremo  $r_{ex}$ :

$$M = \frac{r_{ex}}{2} - \frac{b^2 r_{ex}^3}{3} \left( 1 - \sqrt{1 + Q^2/b^2 r_{ex}^4} \right) + \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{Q}} F \left( \arccos \left\{ \frac{b r_{ex}^2/Q - 1}{b r_{ex}^2/Q + 1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.85)$$

En el límite  $b \rightarrow \infty$  (4.84) y (4.85) se reducen a  $r_{ex} \rightarrow Q$  y  $Q \rightarrow M$  respectivamente, como era de esperarse, por tanto en este límite se recupera la condición de caso extremo de la solución de RN  $M = Q$ .

En este trabajo se presentan algunas soluciones analíticas a las ecuaciones geodésicas de partículas de prueba cargadas en el espacio-tiempo de EBI en términos de funciones Weierstrass. Las órbitas obtenidas dependen de la energía de la partícula, momento angular, una constante de separación (constante de Carter), cargas eléctricas y magnéticas. Discutimos la estructura general de las órbitas y se realizó una clasificación completa de sus tipos.



# Bibliografía

- [1] N. Bretón, (2001). gr-qc/0109022. (document)
- [2] N. Bretón, *Geodesic structure of the Born-Infeld black hole*, Class. Quantum Grav. **19** (2002) 601-612. (document)
- [3] S. Grunau and V. Kagramanova, *Geodesics of electrically and magnetically charged test particles in the Reissner-Nordström space-time: analytical solutions*, Phys. Rev. **D 83** (2011) 044009. (document)
- [4] G. W. Gibbons and M. Vyska, *The Application of Weierstrass elliptic functions to Schwarzschild Null Geodesics*, Class.Quant. Grav. **29** (2012) 065016. arXiv:1110.6508. (document)
- [5] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 5th edition (2000). 4.4.1
- [6] J. F. Plebánski, *Lectures on Nonlinear Electrodynamics*, (Copenhagen, 1970). 3, 3.3.2
- [7] A. García, H. Salazar and J. F. Plebański, *Nuovo Cim.* **84** (1984) 65-90. 3.3.3, 4.5.4
- [8] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Univ. Press, (1983), Ch.5; Ch. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co. (1973) 841.
- [9] J. D. Jackson, *Classical Eelectrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1972).
- [10] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of Modern Analysis* Cambridge University Press 4th Edition (1927). (document)
- [11] T. M. Davis R., International Journal of Theoretical Physics, Vol. **15**, No. 5 (1976) 315-317. 2.5.2
- [12] T. M. Davis R., International Journal of Theoretical Physics, Vol. **15**, No. 5 (1976) 319-321. 2.5.2
- [13] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity* Wiley, New York (1972 ). 1.7

- [14] A. I. Markushevich, *Theory Of Functions of a Complex Variable* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967), Vol. III. 4.5.1.1, 4.5.1.2
- [15] D. Christodoulou and R. Ruffini, Phys. Rev. D 4, 3552 (1971). 4.4.2.2
- [16] G. Denardo and R. Ruffini, Phys. Lett. 45 B, 260 (1973) 4.4.2.2
- [17] N. Deruelle and R. Ruffini, Phys. Lett. 52 B, 437 (1974). 4.4.2.2
- [18] E. Hackmann, V. Kagramanova, J. Kunz and C. L"ammerzahl, Phys. Rev. D 78 124018 (2008)
- [19] V. Kagramanova, J. Kunz, E. Hackmann and C. L"ammerzahl, Phys. Rev. D 81 124044 (2010) 4.4.1, 4.4.2.2
- [20] E. Hackmann, C. L"ammerzahl, V. Kagramanova and J. Kunz, Phys. Rev. D 81 044020 (2010) 4.4.1
- [21] H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, 2003) 2.3.2, 2.5.2, 2.5.2
- [22] B. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 2009)
- [23] Sharmila Gunasekaran, David Kubiznak, Robert B. Mann, *Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization* 3.4
- [24] M. Born and L. Infeld, *Foundations of the New Field Theory*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character Vol. 144, No. 852 (Mar. 29, 1934) Vol. 144, No. 852 (Mar. 29, 1934), pp. 425-451. 3