Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Conectificaciones por trayectorias y condensaciones sobre espacios conexos

TESIS QUE PRESENTA

Irina Druzhinina

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

ASESOR: Richard G. Wilson

México, D.F. Septiembre del 2003

UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
SECRETARIA ACADEMICA
Av. Michoacán y La Purísima, Col. Vicentina, Iztapalapa, D.F. C.P. 09340

Conectificaciones por trayectorias y condensaciones sobre espacios conexos

Irina Druzhinina

Agradecimientos

Este trabajo lo dedico a toda mi familia, a mi querido esposo Mikhail Tkachenko y a mis hijos Andrey y Aleksandr.

En primer lugar agradezco a los profesores de la Universidad Estatal de Moscú que me enseñaron las matemáticas y, sobre todo, al profesor A. Arhangel'skii que me enseñó los principios de Topología General y dirigió mi tesis de maestría.

Agradezco a los miembros del Departamento de Matemáticas de UAM donde me dieron la posibilidad de elaborar esta tesis. Deseo manifestar mi agradecimiento especial a mi asesor Dr. Richard G. Wilson por ofrecer el tema de investigación, por sus enseñanzas y apoyo durante la dirección de la tesis. Por último, agradezco al Dr. Constancio Hernández García por la ayuda técnica en la preparación de este trabajo.

Irina Druzhinina

Contenido

Introducción

Hace 26 años en el artículo [**20**] sobre los espacios LOTS densamente ordenados, Neumann-Lara y Wilson demostraron que todo espacio metrizable fuertemente cero-dimensional sin subespacios abiertos compactos tiene una compactificación conexa. De este resultado surgió la idea de estudiar los espacios que admitan un encaje denso en espacios conexos. El estudio profundo de tales espacios se inició en [**29**] por Watson y Wilson. Los casos de espacios T_0 y T_1 resultaron ser triviales (véase [**29**]):

- Todo espacio T_0 se puede encajar densamente en un espacio T_0 conexo.
- Un espacio X en el cual se cumple el axioma T_1 admite un encaje denso en un espacio T_1 conexo si y sólo X no tiene puntos aislados.

Por lo tanto, la atención se concentró en el caso de espacios de Hausdorff. Se dice que un espacio de Hausdorff X es *conectificable* si X se puede encajar densamente en un espacio de Hausdorff conexo Y. En este caso Y se llama *conectificación* de X. Es fácil ver que si X es conectificable, entonces X no puede contener subconjuntos abiertos propios no vacíos H-cerrados (y como consecuencia, no tiene puntos aislados ni tampoco subespacios abiertos compactos). En [**29**], Watson y Wilson dieron la caracterización completa de la clase de espacios numerables conectificables:

- Un espacio de Hausdorff numerable X es conectificable si y sólo si X no tiene puntos aislados;
- Todo espacio de Hausdorff numerable, conectificable y primero numerable admite una conectificación numerable primero numerable.

Aunque la caracterización completa de espacios de Hausdorff conectificables no se conoce todavía, en los artículos [**29, 24**] se han hecho avances significativos. Así, las siguientes clases de espacios T_2 resultaron ser subclases de la clase de espacios conectificables:

- Tychonoff con una base numerable y sin puntos de compacidad local [**29**];
- paracompactos primero numerables con una π-base σ-localmente finita (en particular, metrizables) sin subespacios abiertos compactos [**24**].

Por otra parte, en [**29**] se presenta un ejemplo de un espacio Tychonoff sin subespacios abiertos compactos que no admite una conectificación de Hausdorff.

En los artículos [**1, 2, 15**] se continúa el estudio de la clase de espacios conectificables dando enfoque a la existencia de conectificaciones de Tychonoff, o bien, metrizables. Los autores del artículo [**1**] establecieron lo siguiente:

- Si X es un espacio metrizable separable sin subespacios abiertos compactos, entonces X se puede encajar densamente en un continuo metrizable.
- Si X es un espacio metrizable localmente separable sin subespacios abiertos compactos, entonces X admite una conectificación de Tychonoff.

En el mismo artículo se pregunta si un espacio metrizable sin subespacios abiertos compactos tiene una conectificación metrizable. Gruenhage y otros en [**15**] respondieron negativamente presentando un ejemplo adecuado, pero establecieron un resultado positivo:

- Si un espacio metrizable X se puede encajar densamente en un espacio metrizable Y tal que cada subconjunto abierto-cerrado de X tenga un punto límite en $Y \setminus X$, entonces X admite una conectificación metrizable.

En particular, de este resultado se deduce que:

- Cada espacio metrizable sin puntos de compacidad local admite una conectificación metrizable.

Notamos que el estudio de los espacios conectificables no se ha terminado por que hay varias preguntas sin resolver (véase, por ejemplo, [**1, 2**]). Mencionamos aquí dos problemas:

- Sea X un espacio Tychonoff con una red numerable sin subespacios abiertos compactos. ¿Admite X una conectificación de Tychonoff?
- Sea X un espacio metrizable separable sin subespacios abiertos compactos. ¿Admite X una conectificación de Tychonoff?

En 1999, Fedeli y Le Donne formularon en [**10**] el problema de encaje denso en un espacio conexo por trayectorias y en sus artículos recientes [**11, 12, 13**] lograron avances esenciales en dicha problemática.

Un espacio de Hausdorff X se llama *conectificable por trayectorias* si X se puede encajar densamente en un espacio de Hausdorff Y conexo por trayectorias. En este caso llamaremos a Y *conectificación por trayectorias* de X. Según Fedeli y Le Donne [**12**], a los espacios cuyas componentes de conexidad por trayectorias son abiertas, los llamaremos espacios OPC.

En el artículo [**10**] se establece que

- Un espacio T_1 se puede encajar densamente en espacio T_1 conexo por trayectorias si y sólo si no tiene puntos aislados.

Si consideramos el caso de espacios de Hausdorff numerables ya se nota la diferencia entre la clase de espacios conectificables y la de espacios conectificables por trayectorias. Si $\mathbb{Q}$ es el espacio de los racionales y p es un ultrafiltro abierto libre en $\mathbb{Q}$, entonces el espacio $\mathbb{Q} \cup \{p\}$, donde las vecindades abiertas de p tienen la forma $\{p\} \cup F$ con $F \in p$, es de Hausdorff numerable sin puntos aislados y, por lo tanto, es conectificable. Fedeli y Le Donne prueban en [**10**] que este espacio no admite ninguna conectificación por trayectorias. En el mismo artículo se establece que

- Un espacio de Hausdorff numerable y primero numerable es conectificable por trayectorias si y sólo si no tiene puntos aislados.

En el artículo [**11**] se consideran subespacios de la recta real $\mathbb{R}$ y se pregunta si es cierto qué un subespacio X de $\mathbb{R}$ es conectificable si y sólo si X es conectificable por trayectorias. Aunque la respuesta es negativa en general (el subespacio $\{0\} \cup \bigcup \{(1/(2n+2), 1/(2n+1)] : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ de $\mathbb{R}$ es conectificable, pero no es conectificable por trayectorias [**10**]), la situación es diferente si se consideran conectificaciones unipuntuales por trayectorias. Se dice que Y es *conectificación unipuntual (por trayectorias) de* X si Y es una conectificación (por trayectorias) de X y $|Y \setminus X| = 1$. En efecto, en [**11**] se establece el siguiente teorema:

Sea X un subespacio de $\mathbb{R}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) X tiene una conectificación unipuntual;
(ii) X tiene una conectificación unipuntual por trayectorias;
(iii) cada componente de X es abierta y no compacta;
(iv) X es localmente conexo y cada componente de X no es compacta.

Además, los autores de [**11**] muestran que la situación es diferente en el caso del plano euclidiano. Por ejemplo, si F es el abanico de Knaster-Kuratowski (véase [**9**], 6.3.23) y $X = F \setminus \{(1/2, 1/2)\}$, entonces F es una conectificación unipuntual de X, pero X no admite una conectificación unipuntual por trayectorias. Motivados por algunos contraejemplos, Fedeli y Le Donne propusieron el problema de caracterizar espacios de Hausdorff que tienen una conectificación unipuntual por trayectorias.

En el Capítulo 1 de esta tesis presentamos algunos resultados relacionados con el problema que acabamos de mencionar. En particular, se establece una condición necesaria para que un espacio de Hausdorff tenga una conectificación unipuntual por trayectorias (proposición 1.1.1); también demostramos que si un espacio de Hausdorff X tiene esta condición y es localmente compacto pero no compacto (teorema 1.1.2) o bien, es normal y OPC (teorema 1.1.6), entonces X tiene una conectificación unipuntual por trayectorias. Por otro lado, presentamos un ejemplo de un espacio metrizable separable que tiene dicha condición necesaria pero no admite una conectificación unipuntual por trayectorias (véase 1.1.7).

En el artículo **[12]**, Fedeli y Le Donne investigan los espacios cuyas componentes de conexidad por trayectorias son abiertas (espacios OPC). En particular, se considera el espacio $L \times \{0, 1\}$, donde L es la recta larga, como un ejemplo de espacio OPC sin subespacios abiertos H-cerrados que no admite ninguna conectificación por trayectorias. Además, notamos que cualquier continuo en el plano euclidiano que no es conexo por trayectorias nos da un ejemplo de espacio métrico segundo numerable sin subespacios propios abiertos compactos que no admite una conectificación por trayectorias **[10]**.

Desarrollamos el tema considerando espacios OPC regulares o metrizables en el Capitulo 2 de la tesis. Allí demostraremos un resultado auxiliar (lema 2.1.1) que será la herramienta principal para obtener los siguientes resultados:

- Un espacio OPC de Hausdorff (regular) y primero numerable con componentes de conexidad por trayectorias no localmente tenuemente compactos admite una conectificación por trayectorias (regular) primero numerable (2.2.1).
- Un espacio OPC de Hausdorff (regular) segundo numerable con componentes de conexidad por trayectorias no localmente H-cerrados admite una conectificación por trayectorias (regular) segundo numerable (2.2.2).
- Un espacio OPC metrizable tiene una conectificación por trayectorias metrizable si sus componentes de conexidad por trayectorias no son localmente compactas (2.2.3).

- Un espacio metrizable localmente conexo por trayectorias con componentes no compactas tiene una conectificación por trayectorias metrizable (2.2.8).

En la segunda parte de la tesis (Capítulo 3) se estudia la existencia de subtopologías conexas. Se dice que un espacio (X, τ) tiene una subtopología τ' si τ' es una topología para X más débil que τ, es decir, $\tau' \subset \tau$. Notamos que un espacio (X, τ) admite una subtopología conexa si y sólo si (X, τ) se puede condensar sobre un espacio conexo.

Si un espacio X tiene una subtopología con una cierta propiedad clásica (compacidad, metrizabilidad, conexidad), entonces esto puede darnos alguna información útil sobre la topología original de X. Un problema viejo de Alexandroff era la existencia de subtopologías compactas. En este tema podemos mencionar los trabajos de Parkhomenko [**21, 22**], Pytkeev [**25**] y Smirnov [**26**]. Parkhomenko, en particular, ofreció un método general para la construcción de ejemplos de espacios segundo numerables que admiten subtopologías compactas. Smirnov usaba subtopologías compactas para obtener aplicaciones en la teoría de dimensión. Entre los resultados de Pytkeev mencionamos los siguientes (véase los teoremas 1 y 3 en [**25**]):

> Si X es un espacio topológico homeomorfo a un conjunto de Borel no σ-compacto de un espacio métrico separable completo, entonces X se puede condensar sobre I^ω;
> Si X es un espacio metrizable de peso κ con $\kappa = \kappa^\omega$, entonces X tiene una subtopología homeomorfa a la potencia numerable $(J(\kappa))^\omega$ del erizo con κ espinas; además, X tiene una subtopología compacta homeomorfa a $(J(\kappa), \tau)^\omega$, donde τ es una topología compacta para el erizo $J(\kappa)$ más débil que la usual.

Los espacios que tienen subtopologías metrizables (espacios submetrizables) también han sido estudiados profundamente. Aquí mencionamos dos resultados (se puede encontrarlos, por ejemplo, en el artículo panorámico de Gruenhage [**16**]): cada espacio paracompacto con diagonal G_δ es submetrizable; si Y es una imagen regular de un espacio metrizable bajo un mapeo continuo cerrado, entonces Y es submetrizable.

En 1996, Tkachenko, Tkachuk, Uspenskiy y Wilson empezaron los estudios de subtopologías conexas en [**27**]. El caso de los espacios T_0 y T_1 resultó ser fácil. Los autores mostraron que cada espacio T_0 admite una subtopología T_0 conexa y cada espacio T_1 X de cardinalidad > 1 tiene una topología T_1 más débil conexa si y sólo si X es infinito. La situación no trivial surge cuando se requiere una subtopología conexa de Hausdorff o regular. En este mismo artículo se establece que cada espacio regular no compacto con red numerable, así como, cada espacio de Hausdorff numerable que no es H-cerrado, admiten subtopologías de Hausdorff conexas. No obstante, se quedaron sin resolver los problemas de caracterizar los espacios de Hausdorff (o regulares) que tengan subtopologías conexas de Hausdorff (o regulares). Últimamente los estudios de estos problemas han sido desarrollado en [**28, 23, 14, 17, 3**]. La mayoría de los resultados obtenidos concierne el caso de subtopologías conexas de Hausdorff. En [**28, 23, 14**], simultaneamente, se demostró que un espacio de Hausdorff disconexo con una π-base numerable admite una subtopología de Hausdorff conexa si y sólo si X no es H-cerrado. Otra serie de resultados acerca de una clase de espacios de Hausdorff con base σ-localmente finita fue obtenida en [**17, 3**]. Primero, en [**17**] se probó que un espacio de dicha clase admite una subtopología T_2 conexa si su peso es un cardinal sucesor. Recientemente este resultado fue extendido en [**3**] para los espacios de esta clase cuyo peso no es numerable.

El caso de espacios regulares, o bien metrizables, fue considerado en [**28, 17**]. Por un teorema en [**28**], cada espacio metrizable no compacto con peso $\leq 2^{\omega}$ tiene una subtopología de Hausdorff segundo numerable conexa; en [**17**] se establece que cada espacio metrizable no compacto admite una subtopología de Hausdorff conexa. Por otra parte, la unión libre de un número numerable de copias de conjunto de Cantor es un ejemplo de un espacio metrizable separable no compacto que no admite una subtopología regular conexa [**27**]. No obstante, la existencia de subtopologías regulares (o metrizables) conexas no fue desarrollado en los artículos mencionados.

En la tesis estudiamos la situación cuando existen subtopologías metrizables conexas. En el Capítulo 3 se establecen los siguientes resultados:

- Un espacio regular X con red numerable admite una subtopología metrizable separable conexa cuando X contiene a un *subespacio cerrado que se puede condensar sobre un espacio* regular no compacto conexo (3.1.4).
- Un espacio metrizable de peso $\leq 2^{\omega}$ admite una subtopología metrizable separable conexa si X contiene a un subconjunto cerrado que se puede condensar sobre un espacio metrizable no compacto conexo (3.1.6).

Además, se deduce que:

- Un espacio metrizable de peso 2^ω admite una subtopología metrizable separable conexa (3.2.3).
- Un espacio metrizable X de peso $> 2^\omega$ tiene una subtopología metrizable conexa si X tiene un subconjunto discreto cerrado de cardinalidad igual al peso de X (3.2.6).

En particular, un espacio metrizable X de peso $\kappa > 2^\omega$ con $cf(\kappa) > \omega$ admite una subtopología metrizable conexa. Se queda abierto el problema si cada espacio metrizable de peso $> 2^\omega$ admite una subtopología metrizable conexa.

Se concluye el Capítulo 3 con la sección 3.3 donde demostraremos que subespacios abiertos y también complementos de subconjuntos σ-discretos de espacios metrizables conexos tienen subtopologías metrizables conexas. Como consecuencia, todo espacio metrizable de peso $< 2^\omega$ con una copia cerrada de los irracionales y, también, el producto numerable de los espacios metrizables no compactos de peso $< 2^\omega$ admiten una subtopología metrizable separable conexa (3.3.9 y 3.3.10).

Los resultados contenidos en la tesis fueron expuestos en el Seminario de Topología del Departamento de Matemáticas de la UAM (Iztapalapa) y también, en el Seminario del Departamento de Matemáticas de la Universidad Jaume I, España.

La mayor parte de los resultados sobre conectificaciones por trayectorias están publicados en **[7]**., los resultados contenidos en el Capítulo 3 están en **[6]**.

Notación y terminología

En la tesis vamos a usar la siguiente notación :

(X, τ) – un espacio topológico con la topología τ;
$T_i (i = 0, 1, 2, 3)$ – un axioma de separación;
$|X|$ – la cardinalidad del conjunto X;
$w(X)$ – el peso de X;
$\pi w(X)$ – el π-peso de X;
$cf(\kappa)$ – la cofinalidad del número cardinal κ;
ω – el primer ordinal (y cardinal) infinito;
$\mathfrak{c}$ – la cardinalidad del continuo igual a 2^ω;
$\mathbb{R}$ – la recta real con la topología euclideana;
$\mathbb{R}^2$ – el plano euclideano;
$\mathbb{Q}$ – el subespacio de racionales en $\mathbb{R}$;
$[0,1], [0,1), (0,1), (a,b)$ y etc. – los subespacios correspondientes de $\mathbb{R}$;
$\mathbb{I}$ – el intervalo cerrado $[0,1]$ con la topología euclideana;
$\mathbb{I}^\omega$, $\mathbb{R}^\omega$ – las potencias numerables de $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$, respectivamente;
$J(\kappa)$ – el erizo con κ espinas (véase [9], 4.1.5);
$\mathcal{H}(\kappa)$ – el espacio de Hilbert de peso κ;
αX – la compactificación de Alexandroff del espacio localmente compacto X;
$\oplus\{X_s : s \in S\}$ – la suma topológica de los espacios X_s con $s \in S$;
$f \triangle g$ – el producto diagonal de los funciones f y g con el mismo dominio;
$\triangle_{s \in S} f_s$ – el producto diagonal de las funciones de familia $\{f_s : s \in S\}$;
$\tau \restriction A$ – la restricción de la topología τ a A, es decir, si (X, τ) es un espacio y $A \subset X$, entonces $\tau \restriction A = \{U \cap A : U \in \tau\}$;
$\cong$ – el signo de un homeomorfismo, es decir, la expresión $X \cong Y$ significa que X es homeomorfo a Y;
$cl_X A$, $cl_\tau A$, o simplemente, clA, $\overline{A}$ (si no hay la posibilidad de confusión) es la notación para la cerradura del subconjunto A en un espacio (X, τ).

Un espacio X es *conexo por trayectorias* si para cualesquiera dos puntos x_1, x_2 de X existe un mapeo continuo $f : \mathbb{I} \to X$ tal que $f(0) = x_1$ y $f(1) = x_2$.

Un espacio X es *localmente conexo por trayectorias* si para cada $x \in X$ y cada vecindad abierta U de x se puede encontrar una vecindad abierta V de x tal que para cualquier $y \in V$ existe un mapeo continuo $f : \mathbb{I} \to U$ con $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Notamos que un espacio localmente conexo por trayectorias es localmente conexo y cada espacio conexo localmente conexo por trayectorias es conexo por trayectorias.

Si $x \in X$, entonces la *componente de conexidad por trayectorias* de x en X es la unión de todos los subespacios de X conexos por trayectorias que contienen a x. Es fácil ver que las componentes de conexidad por trayectorias de dos puntos distintos son disjuntos o coinciden. Vamos a decir que un espacio X es **OPC** si todas sus componentes de conexidad por trayectorias son conjuntos abiertos en X. Si X es un espacio OPC entonces $X = \oplus\{X_s : s \in S\}$, donde $\{X_s : s \in S\}$ es la familia de todas las componentes de conexidad por trayectorias.

Un espacio de Hausdorff X es *H-cerrado* si X es cerrado en cada espacio de Hausdorff que lo contiene; se dice que un espacio X es *tenuemente compacto* si cada familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X es finita. Notemos que un espacio de Hausdorff X es H-cerrado si cada cubierta abierta tiene una subfamilia finita cuya unión es densa en X. A su vez, un espacio X es tenuemente compacto si y sólo si cada cubierta abierta numerable tiene una subfamilia finita cuya unión es densa en X. Por lo tanto, cada espacio H-cerrado es tenuemente compacto y un espacio tenuemente compacto segundo numerable es H-cerrado. En la clase de espacios metrizables los conceptos de ser compacto y de ser tenuemente compacto coinciden. Un espacio X se llama *localmente H-cerrado* si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad H-cerrada. Un espacio X se llama *localmente tenuemente compacto* si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que $\overline{U}$ es tenuemente compacto.

Se dice que un espacio de Hausdorff X es *conectificable (por trayectorias)* si X se puede encajar densamente en un espacio de Hausdorff Y conexo (por trayectorias). En este caso Y se llama *conectificación (por trayectorias)* de X.

Un mapeo continuo $f : X \to Y$ se llama *condensación* si f es una biyección. Una topología τ' para un espacio (X, τ) más débil que τ se llama *subtopología*. Se dice que X admite una *condensación conexa* si existe una condensación f de X sobre un espacio conexo Y. Es claro que (X, τ) tiene una subtopología conexa si y sólo si X admite una condensación conexa.

Un espacio metrizable X tiene *extensión alcanzable* si X contiene a un conjunto discreto y cerrado de cardinalidad igual al peso de X.

CAPÍTULO 1

Conectificaciones unipuntuales por trayectorias

En este capítulo consideramos algunos aspectos de la existencia de una conectificación unipuntual por trayectorias para un espacio de Hausdorff. Recordamos que un espacio de Hausdorff X admite una *conectificación por trayectorias* si X se puede encajar densamente en un espacio de Hausdorff Y conexo por trayectorias. Si $|Y \setminus X| = 1$, se dice que Y es una *conectificación unipuntual por trayectorias* de X. En la siguiente proposición establecemos una condición necesaria para que un espacio Hausdorff tenga una conectificación unipuntual por trayectorias.

PROPOSICIÓN 1.1.1. *Si X es un espacio de Hausdorff que admite una conectificación unipuntual por trayectorias, entonces cada componente de conexidad por trayectorias de X contiene a una copia cerrada del intervalo* $[0,1)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea Y una conectificación unipuntual por trayectorias de X. Entonces $Y = X \cup \{p\}$, donde $p \notin X$. Sean C una componente de conexidad por trayectorias de X y x_0 un punto cualquiera de C. Debido a que Y es conexo por trayectorias, existe un homeomorfismo $h : [0,1] \to Y$ tal que $h(0) = x_0$ y $h(1) = p$ (véase, por ejemplo, [9] 6.3.12). Como la imagen $J = h([0,1))$ es conexa por trayectorias, está contenida en X e intersecta a C, tenemos que $J \subseteq C$. La imagen $h([0,1])$ es un conjunto cerrado en el espacio de Hausdorff Y, por lo tanto, $J = X \cap h([0,1])$ es cerrado en X. □

A continuación diremos que un espacio X tiene la propiedad CC si cada componente de conexidad por trayectorias de X contiene a una copia cerrada en X del intervalo semiabierto $[0,1)$.

TEOREMA 1.1.2. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto no compacto. Entonces X admite una conectificación por trayectorias con un punto si y sólo si X tiene la propiedad CC.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad se sigue de la proposición 1.1.1. Demostremos que la propiedad CC es suficiente. Sean C una componente de conexidad por trayectorias de X y $J \subseteq C$ un conjunto cerrado en

X tal que existe un homeomorfismo $h : [0,1) \to J$. Sea $Y = X \cup \{p\}$ la compactificación de Alexandroff de X.

Consideramos la extensión $\tilde{h} : [0,1] \to Y$ de h tal que $\tilde{h}(t) = h(t)$ si $t \in [0,1)$ y $\tilde{h}(1) = p$. Afirmamos que $\tilde{h}$ es continua. Basta probar la continuidad de $\tilde{h}$ en el punto 1. Sea V una vecindad abierta de $p = \tilde{h}(1)$ en Y. Entonces $V = \{p\} \cup (X \setminus F)$, donde F es un compacto en X. Como $\tilde{h}^{-1}(F) = h^{-1}(F)$ es un subconjunto compacto en $[0,1)$, existe $t \in [0,1)$ tal que $h^{-1}(F) \subseteq [0,t]$. De tal manera, $U = (t,1]$ es una vecindad abierta del punto 1 tal que $\tilde{h}(U) \subseteq V$, que demuestra la continuidad de $\tilde{h}$.

Por lo tanto, $J \cup \{p\} = \tilde{h}([0,1])$ es conexo por trayectorias y $C \cup \{p\} = C \cup (J \cup \{p\})$ también lo es. Esto es cierto para cualquier componente de conexidad por trayectorias C de X. Puesto que $Y = \bigcup\{C \cup \{p\} : C$ es una componente de conexidad por trayectorias de $X\}$, tenemos que Y es conexo por trayectorias y es una conectificacion unipuntual por trayectorias de X. $\square$

LEMA 1.1.3. *Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto no compacto y Z cualquier extensión T_2 de X, en la cual X es denso. Si $Y = X \cup \{p\}$ es la compactificación de Alexandroff de X, entonces la función $f : Z \to Y$ tal que $f(z) = z$ si $z \in X$ y $f(z) = p$ si $z \in Z \setminus X$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Tomaremos cualquier subconjunto cerrado $A \subseteq Y$ y probaremos que $f^{-1}(A)$ es cerrado en Z. Notamos que A es un compacto. Si $A \subseteq X$, entonces $f^{-1}(A) = A$ es compacto y por eso es cerrado en el espacio de Hausdorff Z. Si $p \in A$, entonces $f^{-1}(A) = (A \setminus \{p\}) \cup (Z \setminus X)$. Primero, notamos que X es abierto en Z debido a que es localmente compacto y denso en Z, por lo tanto, $Z \setminus X$ es cerrado en Z. Además, $A \setminus \{p\} = A \cap X$ es cerrado en X y por eso

$$cl_Z(A \setminus \{p\}) \subseteq (A \setminus \{p\}) \cup (Z \setminus X).$$

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} cl_Z(f^{-1}(A)) &= cl_Z((A \setminus \{p\}) \cup (Z \setminus X)) \\ &= cl_Z(A \setminus \{p\}) \cup (Z \setminus X) \\ &\subseteq (A \setminus \{p\}) \cup (Z \setminus X) = f^{-1}(A). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $f^{-1}(A)$ es cerrado en Z y queda demostrado que f es continua. $\square$

TEOREMA 1.1.4. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto no compacto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *X admite una conectificación por trayectorias con un punto;*
(ii) *X admite una conectificación por trayectorias;*
(iii) *la compactificación de Alexandroff de X es conexa por trayectorias.*

DEMOSTRACIÓN. La implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ es evidente; $(ii) \Rightarrow (iii)$ se sigue del lema 1.1.3 y del hecho que las funciones continuas preservan conexidad por trayectorias; $(iii) \Rightarrow (i)$ es obvia. □

En el siguiente teorema presentamos otra clase de espacios que admiten una conectificación por trayectorias con un punto.

TEOREMA 1.1.5. *Sea X un espacio normal (respectivamente, metrizable) con un número finito de componentes de conexidad por trayectorias. Si X tiene la propiedad CC , entonces X admite una conectificación unipuntual por trayectorias la cual es normal (respectivamente, metrizable).*

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por $C_1, C_2, \ldots, C_m$ todas las componentes de conexidad por trayectorias de X. Entonces $X = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$ y cada C_k contiene a un subconjunto J_k cerrado en X y homeomorfo a $[0,1)$. Sea $f_k : [0,1) \to J_k$ el homeomorfismo respectivo ($k = 1, 2, \ldots, m$). Puesto que X es normal, podemos escoger subconjuntos abiertos $O_1, O_2, \ldots, O_m$ en X tales que $J_k \subseteq O_k$ y $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$ y cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $J_{k,n}$ la imagen del intervalo semiabierto $[(n-1)/n, 1)$ bajo el homeomorfismo f_k. Notamos que todos los $J_{k,n}$ son cerrados en X.

Ahora nuestro propósito es construir para cada $k = 1, 2, \ldots, m$ un sistema $\mathcal{U}_k = \{U_{k,n} : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos en X con las propiedades siguientes:

(i) $J_{k,n} \subseteq U_{k,n} \subseteq cl_X U_{k,n} \subseteq O_k$;
(ii) $cl_X U_{k,n+1} \subseteq U_{k,n}$;
(iii) $cl_X U_{k,n+1} \cap f_k([0,(n-1)/n]) = \emptyset$;
(iv) $\bigcap_{n=1}^{\infty} cl_X U_{k,n} = \emptyset$.

Primero, para cada k, $1 \leq k \leq m$ construiremos un sistema $\{V_{k,n} : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos en X con las propiedades semejantes a (i)-(iii):

(i') $J_{k,n} \subseteq V_{k,n} \subseteq cl_X V_{k,n} \subseteq O_k$;
(ii') $cl_X V_{k,n+1} \subseteq V_{k,n}$;
(iii') $cl_X V_{k,n+1} \cap f_k([0,(n-1)/n]) = \emptyset$.

Sea $V_{k,1}$ un conjunto abierto tal que $J_{k,1} \subseteq V_{k,1} \subseteq cl_X V_{k,1} \subseteq O_k$. Ya que $J_{k,2} \subseteq V_{k,1} \setminus \{f_k(0)\}$, se puede escoger un conjunto abierto $V_{k,2}$ tal que $J_{k,2} \subseteq V_{k,2}$ y $cl_X V_{k,2} \subseteq V_{k,1} \setminus \{f_k(0)\}$. Supongamos que $n \geq 2$

y hemos escogido para todos $i \leq n$ los abiertos $V_{k,i}$ que cumplen con (i')-(iii'). Tenemos que $J_{k,n+1} \subseteq V_{k,n} \setminus f_k([0,(n-1)/n])$ y ahora se puede escoger un abierto $V_{k,n+1}$ tal que $J_{k,n+1} \subseteq V_{k,n+1} \subseteq cl_X V_{k,n+1} \subseteq V_{k,n} \setminus f_k([0,(n-1)/n])$.

Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} cl_X V_{k,n} = \emptyset$, entonces ponemos $U_{k,n} = V_{k,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la construcción del sistema $\mathcal{U}_k$ termina. Supongamos que $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl_X V_{k,n} \neq \emptyset$. De la propiedad (iii') concluimos que $F \cap J_k = \emptyset$. Luego escogemos los conjuntos abiertos $W_{k,n}$ tales que $J_{k,n} \subseteq W_{k,n}$, $cl_X W_{k,n} \cap F = \emptyset$ y $cl_X W_{k,n+1} \subseteq W_{k,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora ponemos $U_{k,n} = V_{k,n} \cap W_{k,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que el sistema $\mathcal{U}_k = \{U_{k,n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene las propiedades (i)-(iv). En efecto, (i) y (iii) se siguen inmediatamente de (i') y (iii'). Falta demostrar que se cumplen (ii) y (iv):

$$\begin{aligned} cl_X U_{k,n+1} &= cl_X(V_{k,n+1} \cap W_{k,n+1}) \subseteq cl_X(V_{k,n+1}) \cap cl_X(W_{k,n+1}) \\ &\subseteq V_{k,n} \cap W_{k,n} = U_{k,n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} cl_X U_{k,n} &\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (cl_X V_{k,n} \cap cl_X W_{k,n}) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} cl_X V_{k,n} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} cl_X W_{k,n} \subseteq F_{k,1} \cap cl_X W_{k,1} = \emptyset. \end{aligned}$$

Así hemos construido el sistema $\mathcal{U}_k$ que tiene las propiedades (i)-(iv) para cada $k = 1, 2, \ldots, m$.

Ahora sea p un punto que no pertenece a X; consideremos un espacio $Y = X \cup \{p\}$ con la topología siguiente:

$U \subseteq X$ es abierto en Y si y sólo si U es abierto en X;
los conjuntos $U_n = \{p\} \cup \bigcup_{k=1}^{m} U_{k,n}$, $n \in \omega$ forman una base para Y en el punto p.

Es evidente que X es denso en Y. Verifiquemos que Y es normal. Ya que $\bigcap_{n=1}^{\infty} cl_X U_{k,n} = \emptyset$ y $cl_X U_{k,n+1} \subseteq U_{k,n}$, es claro que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta que intersecta sólo un número finito de los $U_{k,n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$). Por lo tanto, para cada $x \in X$ existen una vecindad abierta $U(x) \ni x$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $U(x) \cap \bigcup_{k=1}^{m} U_{k,n} = \emptyset$. Es decir, $U(x)$ y U_n son abiertos en Y que separan los puntos x y p. Esto es suficiente para afirmar que Y es de Hausdorff. Sean A y B dos conjuntos cerrados ajenos en Y. Debido a que X es normal y abierto en Y basta considerar el caso cuando uno de estos conjuntos contiene al punto p. Supongamos que $p \in B$. Ya que A y $B \setminus \{p\}$ son cerrados ajenos en X, existen los abiertos O_A y O_B que los separan ($A \subseteq O_A$, $(B \setminus \{p\}) \subseteq O_B$, $O_A \cap O_B = \emptyset$). Puesto que $p \notin A$ y A es cerrado en Y, existe una vecindad abierta $U_n = \{p\} \cup \bigcup_{k=1}^{m} U_{k,n}$

de p que no intersecta a A. De la propiedad (ii) tenemos que $A \cap \bigcup_{k=1}^{m} cl_X U_{k,n+1} = \emptyset$. Sea O un conjunto abierto en X (y en Y) tal que $A \subseteq O$ y $O \cap \bigcup_{k=1}^{m} cl_X U_{k,n+1} = \emptyset$. Notamos que $O \cap U_{n+1} = \emptyset$. Entonces $V = O \cap O_A$ y $U = U_{n+1} \cup O_B$ son los conjuntos abiertos y ajenos en Y que separan A y B.

Ahora si X es metrizable y $\mathcal{B}$ es una base σ-localmente finita para X, entonces $\mathcal{B} \cup \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base σ-localmente finita para Y, es decir, Y es metrizable.

Falta probar que Y es conexo por trayectorias. Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$ consideremos una función $\tilde{f}_k : [0,1] \to J_k \cup \{p\}$ tal que $\tilde{f}_k(t) = f_k(t)$ para $t \in [0,1)$ y $\tilde{f}_k(1) = p$. Veamos que $\tilde{f}_k$ es continua. En los puntos $t \in [0,1)$ $\tilde{f}_k$ es continua ya que es igual a f_k y en el punto $t = 1$ la función $\tilde{f}_k$ es continua porque para cada vecindad U_n del punto $p = \tilde{f}_k(1)$ tenemos que $\tilde{f}_k(((n-1)/n, 1]) \subseteq J_{k,n} \cup \{p\} \subseteq U_n$. Tenemos que $J_k \cup \{p\} \cong [0,1]$ es conexo por trayectorias para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, y también lo son $C_k \cup \{p\} = C_k \cup (J_k \cup \{p\})$ y $Y = \bigcup_{k=1}^{m}(C_k \cup \{p\})$. □

Observamos que en el teorema anterior, si X es un espacio segundo numerable, entonces la conectificación Y también lo es. Además, si X es un espacio OPC, es decir, todas las componentes de conexidad por trayectorias de X son abiertas, entonces el teorema 1.1.5 es cierto para cualquier número de componentes. En efecto, si $X = \bigcup_{k \in S} C_k$, donde cada componente de conexidad por trayectorias C_k es abierta, entonces para cada $k \in S$ se puede construir un sistema $\mathcal{U}_k$ con las propiedades (i)-(iv), si ponemos $O_k = C_k$, y después, considerar el mismo espacio $Y = X \cup \{p\}$ con las vecindades abiertas del punto p de la forma $U_n = \{p\} \cup \bigcup_{k \in S} U_{k,n}$. Resumiendo esta observación tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 1.1.6. *Sea X un espacio normal (respectivamente, metrizable) y OPC. Si X tiene la propiedad CC , entonces X admite una conectificación unipuntual por trayectorias Y la cual es normal (respectivamente, metrizable). Además, si X es segundo numerable, entonces Y también lo es.*

En el ejemplo que sigue mostraremos que en los resultados anteriores no se puede omitir la condición sobre las componentes de conexidad por trayectorias.

EJEMPLO 1.1.7. Existe un espacio metrizable separable con un número numerable infinito de componentes de conexidad por trayectorias que no admite conectificación unipuntual por trayectorias aunque tiene la propiedad CC.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbb{R}^2_+$ el semiplano cerrado euclideano ($x \geq 0$) con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$. Denotemos por Q_y el conjunto de los racionales en el eje vertical y sea $\mathcal{B} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ una base numerable en $\mathbb{R}^2_+$. Definamos un mapeo inyectivo $\phi : \mathcal{B} \to Q_y$ tal que si $r = \phi(U_i)$, entonces $\{(x,r) : x > 0\} \cap U_i \neq \emptyset$. Ahora para cada $r \in Q_y$ escogemos un número $x_r > 0$ de la siguiente manera: si $r \in \phi(\mathcal{B})$ entonces $(x_r, r) \in \{(x,r) : x > 0\} \cap U_i$; si $r \notin \phi(\mathcal{B})$ entonces x_r es cualquier número positivo. Es claro que el conjunto $\{(x_r, r) : r \in Q_y\}$ es denso en $\mathbb{R}^2_+$.

Denotemos por C_r el segmento horizontal semiabierto que une los puntos $(0,r)$ y (x_r, r) (el último punto no pertenece a C_r).Sea $X = \bigcup_{r \in Q_y} C_r$. El espacio X es metrizable separable como subespacio del $\mathbb{R}^2$, cada C_r es una componente de conexidad por trayectorias de X. Es claro que cada C_r es homeomorfa al intervalo semiabierto $[0,1)$ y es cerrada en X.

Probaremos que X no tiene conectificación unipuntual por trayectorias de Hausdorff. Supongamos que un espacio $Y = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$ es conexo por trayectorias. Para cada $r \in Q_y$ sea $f_r : [0,1] \to Y$ un encaje tal que $f_r(0) = (0,r)$ y $f_r(1) = p$. Debido a que $f_r([0,1))$ es conexo por trayectorias, intersecta a C_r y está contenido en X, tenemos que $f_r([0,1)) \subseteq C_r$, es decir, $f_r([0,1)) = \{(x,r) : 0 \leq x < \tilde{x}\}$, donde $\tilde{x} \leq x_r$. Si fuera $\tilde{x} < x_r$, tendríamos que $f_r([0,1))$ no es cerrado en X. Esto contradice el hecho que $f_r([0,1)) = f_r([0,1]) \cap X$. Por lo tanto, $f_r([0,1)) = \{(x,r) : 0 \leq x < x_r\} = C_r$ y, además, $p \in cl_Y C_r$. Todo eso es cierto para cada $r \in Q_y$.

Ahora sea U un abierto en Y que contiene al punto p. Para cada $r \in Q_y$ tenemos que $\emptyset \neq U \cap C_r$ es un abierto en C_r y, por lo tanto, contiene a un intervalo $\{(x,r) : x_{U,r} < x < x_r\}$ con $0 \leq x_{U,r} < x_r$. Entonces $\bigcup_{r \in Q_y} \{(x,r) : x_{U,r} < x < x_r\} \subseteq U$.

Tomemos un punto $(x_0, r_0) \in X$ y demostraremos que este punto no se puede separar del punto p. En efecto, sean U y V dos abiertos en Y tales que $p \in U$ y $(x_0, r_0) \in V$. Si $p \in V$ entonces $U \cap V \neq \emptyset$. Si $p \notin V$ entonces V es abierto en X y existe un abierto $\widetilde{V}$ en $\mathbb{R}^2_+$ tal que $V = \widetilde{V} \cap X$. Ya que el conjunto $\{(x_r, r) : r \in Q_y\}$ es denso en $\mathbb{R}^2_+$, existe $s \in Q_y$ tal que $(x_s, s) \in \widetilde{V}$. Entonces $\widetilde{V} \cap C_s = V \cap C_s \supseteq \{(x,s) : x_{V,s} < x < x_s\}$ para algún $x_{V,s}$ con $0 \leq x_{V,s} < x_s$. Si $x' = \max\{x_{V,s}, x_{U,s}\}$, entonces $\{(x,s) : x' < x < x_s\} \subseteq U \cap V$. Otra vez tenemos que $U \cap V \neq \emptyset$. Así hemos demostrado que Y no satisface el axioma de Hausdorff.

$\square$

CAPíTULO 2

Conectificaciones por trayectorias de espacios OPC

En este capítulo investigamos cuándo los espacios con componentes de conexidad por trayectorias abiertas (espacios OPC) admiten una conectificación por trayectorias. Recordamos que un espacio de Hausdorff Y conexo por trayectorias se llama *conectificación por trayectorias* de un espacio de Hausdorff X si X se puede encajar densamente en Y. En este caso se dice que X es *conectificable por trayectorias.* Si $|Y \setminus X| \geq 1$, Y se llama *propia conectificación por trayectorias* de X.

La primera sección consta de los lemas preliminares. En el lema 2.1.1 se afirma que un espacio OPC es conectificable por trayectorias si cada una de sus componentes de conexidad por trayectorias tiene una propia conectificación por trayectorias. El lema 2.1.3 establece las condiciones necesarias para que un espacio conexo por trayectorias tenga una propia conectificación por trayectorias. En la segunda sección se formulan los teoremas sobre los espacios OPC que admiten una conectificación por trayectorias. Si un espacio OPC de Hausdorff y primero (respectivamente, segundo) numerable X tiene componentes de conexidad por trayectorias no tenuemente compactas, entonces X admite una conectificación por trayectorias primero (respectivamente, segundo) numerable (véase teoremas 2.2.1 y 2.2.2). Mencionamos también dos resultados sobre los espacios metrizables: un espacio OPC metrizable tiene una conectificación por trayectorias metrizable si sus componentes de conexidad por trayectorias no son localmente compactas (el teorema 2.2.3); un espacio metrizable localmente conexo por trayectorias con componentes no compactas tiene una conectificación por trayectorias metrizable (2.2.8).

2.1. Lemas preliminares

En esta sección presentamos dos lemas auxiliares que usaremos en la siguiente sección.

LEMA 2.1.1. *Sea* $X = \bigcup\{C_s : s \in S\}$ *un espacio de Hausdorff, donde* C_s *son sus componentes de conexidad por trayectorias. Si cada* C_s *es abierta y admite una propia conectificación por trayectorias* C_s^*, *entonces* X *es conectificable por trayectorias. Además,*

(a) si X y cada C_s^* son regulares, entonces para X existe una conectificación por trayectorias regular;
(b) si X y cada C_s^* son primero (respectivamente, segundo) numerables, entonces para X existe una conectificación por trayectorias primero (respectivamente, segundo) numerable;
(c) si X y cada C_s^* son metrizables, entonces para X existe una conectificación por trayectorias metrizable.

DEMOSTRACIÓN. Se puede suponer que $|S| > 1$. Sea $X^* = \oplus\{C_s^* : s \in S\}$ la suma topológica de los C_s^*. Es claro que X es denso en X^*, ya que cada C_s es denso en C_s^*. Ahora, para cada $s \in S$ escogemos un punto $p_s \in C_s^* \setminus C_s$ y definimos por Y a un espacio cociente obtenido de X^* al identificar todos los puntos p_s $(s \in S)$ en un punto $p \in Y$.

Como el conjunto $\{p_s : s \in S\}$ es cerrado en X^*, el mapeo natural $q : X^* \to Y$ es cerrado y $q(X)$ es homeomorfo a X. Ya que X es denso en X^*, $q(X)$ es denso en Y. Tenemos que $Y = \bigcup\{q(C_s^*) : s \in S\}$, donde cada conjunto $q(C_s^*)$ es conexo por trayectorias y $\bigcap\{q(C_s^*) : s \in S\} \neq \emptyset$ (contiene al punto p), por lo tanto Y es conexo por trayectorias .

Veamos que Y es un espacio T_2. Basta probar que los puntos $y_1 \neq p$ e $y_2 = p$ tienen vecindades abiertas ajenas en Y. Si $\{x\} = q^{-1}(y_1)$, entonces existe $s \in S$ tal que $x \in C_s^*$ y $x \neq p_s$. Sean U_1, U_2 vecindades abiertas ajenas en C_s^* (y en X^*) tales que $x \in U_1$ y $p_s \in U_2$. Entonces $V_1 = q(U_1)$ y $V_2 = Y \setminus q(C_s^* \setminus U_2)$ son conjuntos abiertos y ajenos en Y tales que $y_1 \in V_1$ y $y_2 = p \in V_2$.

a) Supongamos que X y todos los espacios C_s^* son regulares. Para demostrar que el espacio Y también es regular tenemos que encontrar dos conjuntos abiertos en Y que separen un conjunto cerrado arbitrario $B \subset Y \setminus \{p\}$ y el punto p; los otros casos son claros.

Consideremos los conjuntos cerrados y ajenos $A = q^{-1}(B)$ y $P = q^{-1}(p) = \{p_s : s \in S\}$ en X^*. Para cada $s \in S$ el conjunto $A \cap C_s^*$ es cerrado en C_s^* y no contiene al punto p_s. Sean U_s y V_s dos abiertos en C_s^* (y en X^*) tales que $A \cap C_s^* \subseteq U_s$, $p_s \in V_s$ y $U_s \cap V_s = \emptyset$. Entonces $U = \bigcup\{U_s : s \in S\}$ y $V = \bigcup\{V_s : s \in S\}$ son abiertos en X^* que separan los conjuntos A y P. Ahora $W_1 = q(U)$ es abierto en Y y $B \subseteq W_1$; el punto p pertenece a $W_2 = q(V)$, que también es abierto en Y, ya que $V = q^{-1}q(V)$; además, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

b) Supongamos que X y todos los espacios C_s^* son segundo numerables. Ya que todos los conjuntos C_s son abiertos en X, necesariamente $|S| \leq \aleph_0$. En consecuencia, $X^* = \oplus\{C_s^* : s \in S\}$ es segundo numerable también. Es claro que el espacio cociente Y, que consideramos anteriormente, puede no tener base local numerable en el punto p. Por eso, ahora vamos a considerar el conjunto Y con una topología t más débil que la topología cociente. Precisamente, cambiaremos la topología sólo en el punto p de la manera siguiente.

Para cada $s \in S$, sea $B_s = \{U_{s,n} : n \in \omega\}$ una base numerable para C_s^* en el punto p_s. Ahora hagamos la familia $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$, donde $V_n = q(\bigcup\{U_{s,n} : s \in S\})$, una base numerable en el punto $p \in (Y, t)$. En todos los puntos $y \in Y \setminus \{p\}$ la topología sigue siendo la misma. Como $q^{-1}(V_n) = \bigcup\{U_{s,n} : s \in S\}$ es abierto en X^*, el mapeo $q : X^* \to (Y, t)$ es continuo. Todos los conjuntos $q(C_s^*)$ son conexos por trayectorias, por ser imágenes continuas de tales espacios; además, todos contienen al punto p, por lo tanto, Y también es conexo por trayectorias. No es difícil probar que Y con esta topología todavía es de Hausdorff. Ahora si $\mathcal{B}$ es una base numerable en $X^* \setminus \{p_s : s \in S\}$, entonces la familia $\{q(B) : B \in \mathcal{B}\} \cup \mathcal{V}$ es una base numerable en Y. De tal manera tenemos que $q(X) \cong X$ es denso en un espacio Y de Hausdorff segundo numerable y conexo por trayectorias.

En el caso cuando X y cada C_s^* son primero numerables los argumentos son idénticos.

c) Supongamos que X y todos los espacios C_s^* son metrizables. Para obtener una conectificación por trayectorias metrizable de X consideremos el espacio $Z = (Y, t)$ definido en el caso anterior. La única diferencia será que para cada $s \in S$ escogemos la base numerable $B_s = \{U_{s,n} : n \in \omega\}$ para C_s^* en el punto p_s de tal manera que $cl_{X^*} U_{s,n+1} \subset U_{s,n}$, $n \in \omega$. Es evidente que Z es T_1. Ahora veamos que Z es regular. Debido a que $Z \setminus \{p\} = q(X) \cong X$, basta probar que $cl_Z V_{n+1} \subseteq V_n$ para cada $n \in \omega$. Primero, observamos que aunque q no es cerrado, si $A \subseteq X^*$ es un conjunto cerrado que contiene a $\{p_s : s \in S\}$, entonces $q(A)$ es cerrado en Z debido a que $q^{-1}q(A) = A$. Para cada $n \in \omega$ tenemos que

$$cl_{X^*}\left(\bigcup\{U_{s,n+1} : s \in S\}\right) = \bigcup\{cl_{X^*} U_{s,n+1} : s \in S\} \subseteq \bigcup\{U_{s,n} : s \in S\}.$$

Como $q(cl_{X^*}(\bigcup\{U_{s,n+1} : s \in S\}))$ es cerrado en Y, finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned} cl_Z V_{n+1} &= cl_Z\left(q\left(\bigcup\{U_{s,n+1} : s \in S\}\right)\right) = q\left(\bigcup\{cl_{X^*} U_{s,n+1} : s \in S\}\right) \\ &\subseteq q\left(\bigcup\{U_{s,n} : s \in S\}\right) = V_n . \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que el espacio Z tiene una base σ-localmente finita. Para cada $s \in S$ y $n \in \omega$, sea $\mathcal{B}_{s,n}$ una base σ-localmente finita en el espacio $C_s^* \setminus cl_{X^*} U_{s,n}$. Entonces $\mathcal{B}_s = \bigcup\{\mathcal{B}_{s,n} : n \in \omega\}$ es una base σ-localmente finita para el espacio $C_s^* \setminus \{p_s\}$ y $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_s : s \in S\}$ es una base σ-localmente finita para el espacio $X^* \setminus \{p_s : s \in S\}$.

Consideremos la familia $\mathcal{B}_n^* = \{V : V = q(U), U \in \bigcup\{\mathcal{B}_{s,n} : s \in S\}\}$ que ya es σ-localmente finita en Z. En efecto, existe una vecindad abierta del punto p, precisamente V_n, que no intersecta ningun elemento $V \in \mathcal{B}_n^*$. Por eso, es claro que la familia $\mathcal{B}^* = \cup\{\mathcal{B}_n^* : n \in \omega\} \bigcup \cup\{V_n : n \in \omega\}$ será una base σ-localmente finita para Z.

Ya tenemos que el espacio Z es regular y tiene una base σ-localmente finita, es decir Z es metrizable. Como en los casos anteriores es claro que Z es conexo por trayectorias y $q(X) \cong X$ es denso en Z. □

Recordemos que un espacio X se llama *tenuemente compacto* si cada familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X es finita. Anunciemos un resultado de Watson y Wilson (véase el lema 2.1 en [**29**]):

> *Si $\{B_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos en un espacio de Hausdorff sin puntos aislados entonces existe una familia $\{C_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos ajenos dos a dos tal que $C_\alpha \subseteq B_\alpha$ para cada $\alpha \in \kappa$.*

De este resultado se sigue inmediatamente:

LEMA 2.1.2. *Si X es un espacio no tenuemente compacto sin puntos aislados, entonces en X existe una familia infinita localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos ajenos dos a dos.*

Usaremos este hecho en la demostración del lema siguiente que es principal en la sección.

LEMA 2.1.3. *Sea X un espacio de Hausdorff conexo por trayectorias. Si existe un punto $x_0 \in X$ con una base numerable de conjuntos abiertos cuyas cerraduras no son tenuemente compactas, entonces X tiene una propia conectificación por trayectorias. Además,*
(a) si X es primero (respectivamente, segundo) numerable, entonces para X existe una propia conectificación por trayectorias primero (respectivamente, segundo) numerable;
(b) si X es regular, entonces para X existe una propia conectificación por trayectorias regular;
(c) si X es metrizable, entonces para X existe una propia conectificación por trayectorias metrizable.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}(x_0) = \{B_i : i \in \omega\}$ una base numerable en el punto x_0 tal que $B_{i+1} \subset B_i$ para cada $i \in \omega$ y $cl_X B_i$ no es tenuemente compacta para cada $i \in \omega$. Ahora vamos a construir de manera inductiva un sistema de familias infinitas localmente finitas.

Debido a que $cl_X B_0$ no es tenuemente compacta y no tiene puntos aislados (X es conexo por trayectorias), existe una familia infinita localmente finita Γ_0 de subconjuntos abiertos no vacíos de $cl_X B_0$ ajenos dos a dos (el lema 2.1.2). Es claro que Γ_0 es localmente finita en X. Partiendo ω en un número infinito de subconjuntos infinitos se puede representar Γ_0 en la forma $\Gamma_0 = \bigcup\{\gamma_m^0 : m \in \omega\}$ donde cada $\gamma_m^0 = \{U_{m,n}^0 : n \in \omega\}$ es una subfamilia infinita localmente finita de Γ_0. Tenemos que $U_{m,n}^0 \cap U_{k,l}^0 = \emptyset$ si $(m,n) \neq (k,l)$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad, que existe una vecindad abierta V_0 de x_0 que no intersecta ningún elemento de Γ_0. Hagamos $k_0 = 0$.

Sea $B_{k_1} \subseteq V_0$ un elemento de la base $\mathcal{B}(x_0)$ $(k_1 \geq 1)$. De manera similar construimos una familia infinita localmente finita Γ_1 que es la unión del sistema $\{\gamma_m^1 : m \in \omega\}$ de familias infinitas localmente finitas $\gamma_m^1 = \{U_{m,n}^1 : n \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos no vaciós $U_{m,n}^1$ en $cl_X B_{k_1}$ tales que $U_{m,n}^1 \cap U_{k,l}^1 = \emptyset$ para cualesquiera $(m,n) \neq (k,l)$, y además, una vecindad abierta V_1 del punto x_0 tal que $U_{m,n}^1 \cap V_1 = \emptyset$ para cada $(m,n) \in \omega \times \omega$. Notamos que $U_{m,n}^0 \cap U_{k,l}^1 = \emptyset$ para cualesquiera $(m,n,k,l) \in \omega^4$.

Seguimos de la misma manera escogiendo $B_{k_{i+1}} \subseteq V_i$ $(i \geq 1,\ k_{i+1} \geq k_i)$ y construyendo $\Gamma_{i+1} = \bigcup\{\gamma_m^{i+1} : m \in \omega\}$ para cada $i \in \omega$ con las mismas propiedades. Esto finaliza la construcción.

Hagamos $C_i = B_{k_i}$ para cada $i \in \omega$. Es claro que la familia $\mathcal{C}(x_0) = \{C_i : i \in \omega\}$ sigue siendo una base numerable en x_0. Entonces tenemos el sistema $\Gamma = \bigcup\{\Gamma_i : i \in \omega\} = \bigcup\{\gamma_m^i : i, m \in \omega\}$ donde cada Γ_i y cada γ_m^i son familias localmente finitas de conjuntos abiertos $U_{m,n}^i \subseteq C_i \setminus C_{i+1}$ tal que $U_{m,n}^i \cap U_{k,l}^j = \emptyset$ si $(i,m,n) \neq (j,k,l)$.

Ahora para cada $\gamma_m^i \in \Gamma$ definamos otra familia $\mathcal{F}_m^i = \{F_{m,n}^i : n \in \omega\}$ con $F_{m,n}^i = \cup\{U_{m,k}^i : k \geq n\}$. Mencionemos unas propiedades de estas familias que necesitaremos a continuación:

- (i) $F_{m,n}^i \subseteq C_i \setminus C_{i+1}$ para cada $(m,n,i) \in \omega^3$;
- (ii) $F_{m,p}^i \subseteq F_{m,n}^i$ si $p \geq n$;
- (iii) $F_{m,n}^i \cap F_{k,l}^j = \emptyset$ si $(i,m) \neq (j,k)$;
- (iv) la familia $\bigcup\{\mathcal{F}_m^i : m, i \in \omega\}$ es localmente finita en $X \setminus \{x_0\}$.

Demostraremos sólo la propiedad (iv) ya que las demás son claras. Primero, para cada $x \in X \setminus \{x_0\}$ encontramos una vecindad abierta $\widetilde{U}_x$ y un elemento C_k $(k > 0)$ de la base $\mathcal{C}(x_0)$ ajenos entre sí. Como $\widetilde{U}_x \cap C_k = \emptyset$, de la propiedad (i) se sigue que $\widetilde{U}_x \cap F_{m,n}^i = \emptyset$ si $m, n \in \omega$ y $i \geq k$. Sea j un número menor que k. Ya que $\Gamma_j = \{U_{m,n}^j : m, n \in \omega\}$ es una familia localmente finita, existe una vecindad abierta U_j de x que intersecta solamente un número finito de conjuntos $U_{m,n}^j \in \Gamma_j$ y por eso U_j intersecta sólo un número finito de $F^j_{m,n}$, $(m,n) \in \omega \times \omega$. Entonces el conjunto $U_x = (\bigcap_{j<k} U_j) \cap \tilde{U}_x$ es una vecindad abierta de x que intersecta sólo un número finito de elementos de la familia $\bigcup\{\mathcal{F}^i_m : m, i \in \omega\}$. Esto demuestra la propiedad (iv).

Ahora podemos empezar a construir un espacio que será una propia conectificación por trayectorias de X. Sea $I = (0,1)$ el subespacio de la recta real $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana. Supongamos que $X \cap I = \emptyset$. Hagamos $Y = X \cup I$ y vamos a definir una topología en este conjunto. Primero, escogemos una base cualquiera $\mathcal{B}_1$ para el espacio $X \setminus \{x_0\}$ y una base numerable $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$ en I. Ahora para cada número entero $i \geq 1$, sea $\{p^i_m : m \in \omega\}$ el conjunto de todos los racionales que pertenecen a $I_i = [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i})$. Construiremos una familia $\mathcal{B}_2 = \{W_k : k \in \omega\}$ de conjuntos

$$W_k = V_k \cup \bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k,\ m, i \in \omega\}$$

Los conjuntos W_k serán vecindades básicas abiertas de los puntos $y \in I$. Finalmente, consideremos la familia

$$\mathcal{B}_3 = \{D_n : n \in \omega\} \text{ donde } D_n = (0, \frac{1}{n+1}) \cup C_n.$$

Afirmamos que la familia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ es una base de una topología τ en $Y = X \cup I$. Basta probar que para cualesquiera $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ y cada punto $y \in U_1 \cap U_2$ existe un elemento $U \in \mathcal{B}$ tal que $y \in U \subseteq U_1 \cap U_2$. Si $U_1 \in \mathcal{B}_1$ y U_2 es cualquier elemento de $\mathcal{B}$, entonces $U_1 \cap U_2$ es un abierto en $X \setminus \{x_0\}$, por lo tanto, este caso es obvio. Consideremos los demas casos: 1) $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_2$, 2) $U_1 \in \mathcal{B}_2$, $U_2 \in \mathcal{B}_3$ y el último 3) $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_3$.

1) $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_2$. Es decir, existen $k, l \in \omega$ tales que

$$U_1 = W_k = V_k \cup \bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k, m, i \in \omega\},$$

$$U_2 = W_l = V_l \cup \bigcup \{F^i_{m,l} : p^i_m \in V_l, m, i \in \omega\}.$$

Si supongamos que $k > l$, entonces según las propiedades (ii) y (iii) para las familias $\mathcal{F}^i_m$ tenemos:

$$U_1 \cap U_2 = W_k \cap W_l = (V_k \cap V_l) \cup \bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k \cap V_l,\ m, i \in \omega\}$$

Sea y un elemento de $U_1 \cap U_2$. Si y pertenece a algún $F^i_{m,k} \in U_1 \cap U_2$ (notamos que $F^i_{m,k}$ es un conjunto abierto en $X \setminus \{x_0\}$), entonces existe un elemento $U \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tal que

$$y \in U \subseteq F^i_{m,k} \subset U_1 \cap U_2.$$

Si $y \in V_k \cap V_l$, existe un elemento $V_p \in \mathcal{V}$ tal que $y \in V_p \subseteq V_k \cap V_l$ y $p \geq k$. Entonces si tomamos $U = W_p \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ según la propiedad (ii) tenemos:

$$y \in U = W_p = V_p \cup \bigcup \{F^i_{m,p} : p^i_m \in V_p,\, m, i \in \omega\} \subseteq W_k \cap W_l = U_1 \cap U_2;$$

2) $U_1 \in \mathcal{B}_2$ y $U_2 \in \mathcal{B}_3$. Existen $k, l \in \omega$ tales que

$$U_1 = W_k = V_k \cup \bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k,\, m, i \in \omega\} \text{ y}$$

$$U_2 = D_l = (0, \frac{1}{l+1}) \cup C_l.$$

Entonces, ya que $F^i_{m,k} \cap C_l = \emptyset$ si $i < l$ y $F^i_{m,k} \cap C_l = F^i_{m,k}$ si $i \geq l$ (véase la propiedad (i)), tenemos:

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= W_k \cap D_l \\ &= (V_k \cap (0, \frac{1}{l+1})) \cup \bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k,\, m \in \omega,\, i \geq l\}. \end{aligned}$$

Si $y \in V_k \cap (0, \frac{1}{l+1})$, existe un elemento $V_p \in \mathcal{V}$ tal que $y \in V_p \subseteq V_k \cap (0, \frac{1}{l+1})$ y $p \geq k$. Si un punto racional $p^i_m \in V_p$, entonces $p^i_m \in I_i \cap (0, \frac{1}{l+1}) = [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}) \cap (0, \frac{1}{l+1})$. Lo último se cumple cuando $\frac{1}{i+1} < \frac{1}{l+1}$, es decir, $i > l$. Por esa razón si tomamos $U = W_p \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ tenemos

$$\begin{aligned} y \in U = W_p &= V_p \cup \bigcup \{F^i_{m,p} : p^i_m \in V_p,\, m, i \in \omega\} \\ &\subseteq V_p \cup \bigcup \{F^i_{m,p} : p^i_m \in V_p, m \in \omega, i > l\} \\ &\subseteq (V_k \cap (0, \frac{1}{l+1})) \cup \bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k,\, m \in \omega,\, i \geq l\} \\ &= W_k \cap D_l = U_1 \cap U_2. \end{aligned}$$

Si $y \in W_k \cap D_l \cap X$ la demostración es trivial.

3) $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_3$. Existen $k, l \in \omega$ (supongamos que $k > l$) tales que

$$U_1 = D_k = (0, \frac{1}{k+1}) \cup C_k \ \text{ y } U_2 = D_l = (0, \frac{1}{l+1}) \cup C_l.$$

La demostración es inmediata del hecho de que $U_1 \cap U_2 = D_k$.

Hemos demostrado que la familia $\mathcal{B}$ es la base de una topología τ para Y. Es claro que $\tau \restriction X$ coincide con la topología inicial en X y también $\tau \restriction I$ coincide con la topología euclidiana en I. Más aún, el subespacio $I \cup \{x_0\}$ de (Y, τ) es homeomorfo al intervalo semiabierto $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ya que los conjuntos $(0, \frac{1}{n+1}) \cup \{x_0\}$ $(n \in \omega)$ forman una base en el punto x_0 para el subespacio $I \cup \{x_0\}$. En consecuencia, X y $I \cup \{x_0\}$ son subespacios de (Y, τ) conexos por trayectorias. Como $Y = X \cup (I \cup \{x_0\})$, es claro que Y también es conexo por trayectorias. Notamos que X es denso en (Y, τ).

Hace falta demostrar que Y es un espacio de Hausdorff. Sean y_1 e y_2 dos puntos distintos de Y. El caso $y_1, y_2 \in X$ es evidente. Para $y_1, y_2 \in I$ existen $V_m, V_k \in \mathcal{V}$ que separan y_1 e y_2 en I; entonces W_m y W_k son dos conjuntos ajenos τ-abiertos que separan y_1 e y_2 en Y (aquí usamos (iii)). Si $y_1 \in I$ e $y_2 = x_0$, encontramos $V_k \in \mathcal{V}$ tal que $y \in V_k$ y $V_k \cap (0, \frac{1}{l}) = \emptyset$ para algún $l \geq 1$. Afirmamos que W_k y D_l son las vecindades abiertas en τ para y_1 y x_0, respectivamente, cuya intersección es vacía. En efecto, si $F^i_{m,k} \subseteq W_k$, entonces $p^i_m \in V_k$ y, por eso, $p^i_m \notin (0, \frac{1}{l})$. Eso implica que $I_i \setminus (0, \frac{1}{l}) \neq \emptyset$, es decir, $i < l$ y $F^i_{m,k} \subseteq C_i \setminus C_{i+1} \subseteq C_i \setminus C_l$. Ahora tenemos:

$$W_k \cap D_l = (V_k \cap (0, \frac{1}{l+1})) \cup \bigcup \{F^i_{m,k} \cap C_l : p^i_m \in V_k,\, m, i \in \omega\} = \emptyset.$$

Falta considerar el caso cuando $y_1 \in I$ e $y_2 = x \in X \setminus \{x_0\}$. Sea U_x una vecindad abierta de x en $X \setminus \{x_0\}$ (y por eso abierta en Y) que intersecta sólo un número finito de elementos $F^i_{m,n}$ (véase (iv)). Sea $F^{i_1}_{m_1,n_1}, F^{i_2}_{m_2,n_2}, \dots F^{i_k}_{m_k,n_k}$ la lista de dichos elementos. Hagamos $t = \max(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Encontramos un elemento $V_n \in \mathcal{V}$ tal que $y_1 \in V$ y $n > t$. Entonces $y_1 \in W_n$ y $W_n \cap U_x = \emptyset$ por la definición de W_n. Eso finaliza la demostración de que Y es de Hausdorff.

(a) Supongamos que X es un espacio primero numerable. Es evidente que $X \setminus \{x_0\}$ es un subespacio primero numerable de Y, $\mathcal{B}_2$ es una base numerable para I en Y y $\mathcal{B}_3$ es una base numerable en x_0 para Y. Es decir, Y es primero numerable.

Ahora supongamos que X es segundo numerable. Escogemos una base numerable $\mathcal{B}_1$ para $X \setminus \{x_0\}$. Ya que las familias $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ son numerables, tenemos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ es una base numerable para Y.

(b) Supongamos que X es regular. Para construir una propia conectificación por trayectorias regular de X, es necesario hacer unos cambios en la construcción anterior. Primero, escogemos la base $\mathcal{B}(x_0)$ tal que $cl_X B_{i+1} \subset B_i$ para cada $i \in \omega$. Luego para cada $U^i_{m,n} \in \gamma^i_m$ consideremos una sucesión $\{U^i_{m,n,t} : t \in \omega\}$ tal que

$$U^i_{m,n,0} = U^i_{m,n} \text{ y } cl_X U^i_{m,n,t+1} \subset U^i_{m,n,t} \text{ para cada } t \in \omega.$$

Sea $F^i_{m,n} = \bigcup\{U^i_{m,k,n} : k \geq n\}$. Ya que la familia $\{U^i_{m,k,n} : k \in \omega\}$ es localmente finita, tenemos

$$cl_X F^i_{m,n+1} = \bigcup\{cl_X U^i_{m,k,n+1} : k \geq n+1\} \subset \bigcup\{U^i_{m,k,n} : k \geq n\} = F^i_{m,n}.$$

Ahora no es difícil probar que las familias $\mathcal{F}^i_m = \{F^i_{m,n} : n \in \omega\}$ satisfacen las condiciones $(i), (iii), (iv)$ y una nueva condición (ii') análoga a (ii):

(ii') $cl_X F^i_{m,p} \subseteq F^i_{m,n}$, si $p \geq n$.

Los otros pasos de la construcción del espacio Y los dejamos sin cambio. Entonces Y es una propia conectificación por trayectorias de X. Para probar que Y es regular, basta mostrar que para cada $y \in Y$ y cada $U \in \mathcal{B}$ con $y \in U$ existe un τ-abierto O tal que $y \in O \subseteq cl_Y O \subseteq U$.

Es evidente cuando $y \in X \setminus \{x_0\}$. Si $y = x_0$, entonces $U \in \mathcal{B}_3$, eso es, $U = D_n = (0, \frac{1}{n+1}) \cup C_n$ para algún $n \in \omega$. Ahora es fácil probar que el conjunto $O = D_{n+1}$ sirve en este caso. Falta considerar el caso $y \in I$. Sin perder generalidad suponemos que $U \in \mathcal{B}_2$. Es decir, para algún $n \in \omega$

$$U = W_n = V_n \cup \bigcup \{F^i_{m,n} : p^i_m \in V_n, m, i \in \omega\}.$$

Escogemos un elemento $V_k \in \mathcal{V}$ con $k > n$ tal que $y \in V_k \subseteq cl_I V_k \subset V_n$ y $V_k \cap (0, \frac{1}{l}) = \emptyset$ para algún número intero $l \geq 1$. Notamos que $cl_Y V_k = cl_I V_k$ ya que $x_0 \notin cl_Y V_k$. Consideremos el elemento

$$W_k = V_k \cup \bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k, m, i \in \omega\}$$

de $\mathcal{B}$. Para cada punto racional $p^i_m \in V_k$ tenemos que $i < l$ y $F^i_{m,k} \cap C_l = \emptyset$ para todos los $F^i_{m,k}$ que forman W_k. Por eso la vecindad τ-abierta $D_l = (0, \frac{1}{l+1}) \cup C_l$ de x_0 no intersecta a ninguno de los $F^i_{m,k}$ que forman W_k. De aquí se sigue que $x_o \notin cl_Y(\bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k, m, i \in \omega\})$ y por eso concluimos que

$$cl_Y \left(\bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k, m, i \in \omega\} \right) = cl_X \left(\bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k, m, i \in \omega\} \right).$$

Más aún, como la familia $\{\mathcal{F}^i_m : m, i \in \omega\}$ es localmente finita en $X \setminus \{x_0\}$ por (iv), se tiene que

$$cl_Y \left(\bigcup \{F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k, m, i \in \omega\} \right) = \bigcup \{cl_X F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k, m, i \in \omega\}.$$

Aplicando la propiedad (ii') y el hecho de que $cl_Y V_k \subset V_n$ obtendremos

$$\begin{aligned} cl_Y W_k &= cl_Y V_k \cup \bigcup \{cl_X F^i_{m,k} : p^i_m \in V_k, m, i \in \omega\} \\ &\subset V_n \cup \bigcup \{F^i_{m,n} : p^i_m \in V_n, m, i \in \omega\} = W_n. \end{aligned}$$

Para finalizar este último caso tenemos que

$$y \in W_k \subseteq cl_Y W_k \subset W_n = U.$$

Así queda demostrado que Y es una conectificación por trayectorias regular del espacio dado X.

(c) Supongamos que X es un espacio metrizable. Si construimos para X una conectificación por trayectorias Y como en el caso (b), entonces Y es regular. Además, si eligimos $\mathcal{B}_1$ tal que sea una base

σ-localmente finita para $X \setminus \{x_0\}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base σ-localmente finita para Y. Por lo tanto, Y es un espacio metrizable. $\square$

2.2. Espacios OPC y sus conectificaciones

En esta sección presentamos unos resultados acerca de los espacios OPC que tienen una conectificación por trayectorias. Notamos que si un espacio X no es *localmente tenuemente compacto*, entonces existe $x_o \in X$ con una base de conjuntos abiertos cuyas cerraduras no son tenuemente compactas.

TEOREMA 2.2.1. *Sea X un espacio OPC de Hausdorff y primero numerable con componentes de conexidad por trayectorias no localmente tenuemente compactos. Entonces X admite una conectificación por trayectorias primero numerable. Si X es regular, entonces X tiene una conectificación por trayectorias regular primero numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $X = \oplus\{X_s : s \in S\}$, donde X_s son componentes de conexidad por trayectorias. Cada X_s satisface las condiciones del lema 2.1.3 y admite una propia conectificación por trayectorias X_s^*. Si X es regular, entonces todas X_s^* son regulares. Falta aplicar el lema 2.1.1. $\square$

El siguiente resultado es análogo al teorema 2.2.1 para los espacios segundo numerables.

TEOREMA 2.2.2. *Sea X un espacio OPC de Hausdorff y segundo numerable con componentes de conexidad por trayectorias no localmente H-cerradas. Entonces X tiene una conectificación por trayectorias segundo numerable. Si X es regular, entonces X tiene una conectificación por trayectorias regular segundo numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = \oplus\{X_s : s \in S\}$, donde X_s son sus componentes de conexidad por trayectorias. Tenemos que $|S| \leq \aleph_0$ y cada espacio X_s es abierto en X, segundo numerable y no localmente H-cerrado. Por lo tanto X no es localmente tenuemente compacto, es decir, según el lema 2.1.3, cada X_s tiene una propia conectificación por trayectorias X_s^* segundo numerable (en el caso si X es regular cada X_s^* también lo es). Para terminar la demostración aplicamos el lema 2.1.1. $\square$

En lo sucesivo consideramos conectificaciones por trayectorias de los espacios metrizables.

TEOREMA 2.2.3. *Sea X un espacio OPC metrizable cuyas componentes de conexidad por trayectorias no son localmente compactas. Entonces X tiene una conectificación por trayectorias metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = \oplus\{X_s : s \in S\}$, donde X_s son sus componentes de conexidad por trayectorias. Tenemos que cada espacio X_s es abierto, metrizable y no localmente compacto. Por lo tanto para cada $s \in S$ existe un punto $x_s \in X_s$ tal que las cerraduras de todas sus vecindades abiertas son subespacios metrizables y no compactos y por eso no son tenuemente compactos. Aplicando el lema 2.1.3 para cada X_s construimos una propia conectificación por trayectorias metrizable. Después usamos el lema 2.1.1 para terminar la demostración. $\square$

Del teorema anterior y de la afirmación del teorema 1.1.5 surge un problema abierto:

PROBLEMA 2.2.4. *¿Existe un espacio metrizable localmente compacto no compacto conexo por trayectorias tal que su compactificación de Alexandroff no sea conexa por trayectorias?*

Ahora mostraremos que el espacio en el problema 2.2.4 admite una propia conectificación por trayectorias (su compactificación de Alexandroff es conexa por trayectorias) si agregamos la condición de ser localmente conexo.

TEOREMA 2.2.5. *Sea X un espacio metrizable, localmente compacto no compacto, conexo por trayectorias y localmente conexo. Entonces existe una conectificación por trayectorias de X propia y metrizable.*

La afirmación del teorema se sigue de los dos lemas que presentamos a continuación.

LEMA 2.2.6. *La compactificación de Alexandroff de un espacio localmente compacto de Hausdorff localmente conexo y conexo es localmente conexo.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema 3-9 en [18] establece una condición necesaria y suficiente para que un espacio de Hausdorff Z localmente compacto y conexo sea localmente conexo. Esta condición es:

Si K es un conjunto compacto en Z y U es un conjunto abierto que contiene a K, entonces todas las componentes de $Z \setminus K$, excepto un número finito, están contenido en U. $(*)$

Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto, conexo y localmente conexo y $Y = \alpha X = X \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandroff de X. Demostraremos que el espacio compacto y conexo Y cumple la condición $(*)$.

Sean K un compacto en Y y U un conjunto abierto en Y que contiene a K. Si $K \subseteq X$, entonces $K \subseteq U \cap X$ y como X es de Hausdorff localmente compacto, localmente conexo y conexo, entonces la condición $(*)$ se cumple para K y $V = U \cap X$ en X y por eso para K y U en Y. Si $\infty \in K$, entonces $\infty \in U$, es decir, $U = (X \setminus T) \cup \{\infty\}$, donde T es un subconjunto compacto de X. Sea $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ el conjunto de todas las componentes de $Y \setminus K = X \setminus K$ que intersectan a T. El subespacio $X \setminus K$ es abierto en X y, por lo tanto, es localmente conexo. Usando el hecho que las componentes de un espacio localmente conexo son abiertas, obtenemos que todas las C_α son conjuntos abiertos en X y, además, son ajenos entre sí. La familia $\{C_\alpha \cap T : \alpha \in A\}$ es una cubierta abierta de T con conjuntos ajenos. Como T es compacto, la familia $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene que ser finita. Es decir casi todas las componentes de $Y \setminus K$ se encuentran en $X \setminus T \subset U$. □

LEMA 2.2.7. *La compactificación de Alexandroff de un espacio X metrizable, localmente compacto, conexo y localmente conexo es metrizable y conexo por trayectorias.*

DEMOSTRACIÓN. Debido a que el espacio X satisface las condiciones del lema 2.2.6, la compactificación de Alexandroff αX es un espacio compacto conexo y localmente conexo. Ahora notemos que X tiene una base numerable. En efecto, de ser metrizable y localmente compacto se sigue que X es localmente separable y puede ser presentado como unión topológica $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ de los espacios metrizables separables (véase, por ejemplo **[9]** 4.4F(c)). Como X es conexo, tenemos que $|A| = 1$, es decir, X es metrizable separable y, por lo tanto, tiene una base numerable. Ya que $w(\alpha X) = w(X)$, tenemos que αX es un espacio metrizable, compacto, conexo y localmente conexo. El teorema 3-15 en **[18]** afirma que tal espacio es conexo por trayectorias. De tal manera hemos establecido que la compactificación de Alexandroff de un espacio metrizable, localmente compacto, no compacto, conexo y localmente conexo es una conectificación por trayectorias propia y metrizable de este espacio. □

Usando el resultado del teorema 2.2.5 se puede generalizar la afirmación del teorema 2.2.3 de la manera siguiente:

TEOREMA 2.2.8. *Un espacio metrizable localmente conexo por trayectorias con componentes no compactas tiene una conectificación por trayectorias métrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un espacio metrizable, localmente conexo por trayectorias y $\{C_s : s \in S\}$ la familia de componentes de X donde cada C_s no es compacto. Es obvio que X es localmente conexo, por lo tanto cada componente C_s es abierta y por eso localmente conexa por trayectorias. Se sabe que un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias es conexo por trayectorias (véase, por ejemplo [9] 6.3.10(a)). Entonces ya tenemos que cada componente $C_s (s \in S)$ es conexa por trayectorias y claro que es metrizable. Ahora notamos que para cada C_s con $s \in S$ se puede construir una propia conectificación por trayectorias metrizable C_s^*: aplicamos el teorema 2.2.5 en el caso si C_s es localmente compacto y el teorema 2.2.3 en lo contrario. Para finalizar la demostración aplicamos el lema 2.1.1. $\square$

CAPÍTULO 3

Condensaciones sobre espacios conexos

En este capítulo estudiamos la existencia de subtopologías conexas metrizables. Recordamos que un espacio (X, τ) tiene una subtopología τ' si τ' es una topología para X más débil que τ, es decir, $\tau' \subset \tau$. Observe que un espacio (X, τ) admite una subtopología metrizable conexa si (X, τ) se puede condensar sobre un espacio metrizable conexo.

En la sección 3.1 se establece que un espacio regular X con red numerable admite una subtopología metrizable separable conexa cuando X contiene a un subespacio cerrado que se puede condensar sobre un espacio regular no compacto conexo (el teorema 3.1.4). Después demostramos en el teorema 3.1.6 que un espacio metrizable de peso $\leq 2^{\omega}$ admite una subtopología metrizable separable conexa si X contiene a un subconjunto cerrado que se puede condensar sobre un espacio metrizable no compacto conexo. En consecuencia, cada espacio metrizable de peso $\leq 2^{\omega}$ con una copia cerrada de los irracionales admite una subtopología metrizable separable conexa (el corolario 3.3.9).

En la sección 3.2 se deduce que un espacio metrizable de peso 2^{ω} admite una subtopología metrizable separable conexa (el corolario 3.2.3), asímismo, un espacio metrizable de peso $> 2^{\omega}$ con extensión alcanzable tiene una subtopología metrizable conexa (véase el teorema 3.2.6). En particular, el corolario 3.2.7 afirma que un espacio metrizable X de peso κ con $cf(\kappa) > \omega$ admite una subtopología metrizable conexa. Se queda abierto el problema de si cada espacio metrizable de peso $\geq 2^{\omega}$ admite una subtopología metrizable conexa.

En la sección 3.3 demostramos que subespacios abiertos y también complementos de subconjuntos σ-discretos de espacios metrizables conexos tienen subtopologías metrizables conexas.

3.1. Condensaciones sobre espacios metrizables separables conexos

El resultado principal de esta sección es el teorema 3.1.4, que se basa en tres lemas auxiliares.

LEMA 3.1.1. *Un espacio regular no compacto X con red numerable admite una condensación sobre un espacio metrizable separable no* *compacto. Además, si $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado, existe una condensación φ de X sobre un espacio metrizable separable no compacto Y tal que $\varphi(F)$ es cerrado en Y.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{N}$ una red numerable y $\mathcal{B}$ una base, ambas para X. Definimos $\mathcal{H} = \{(U,V) : U,V \in \mathcal{B}, \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset\}$ y denotamos por $\mathcal{P}$ la familia de todos los pares $(M,N) \in \mathcal{N}^2$ para los cuales existe por lo menos un par $(U,V) \in \mathcal{H}$ tal que $M \subseteq U$ y $N \subseteq V$. La familia $\mathcal{P}$ es numerable, es decir, $\mathcal{P} = \{P_n : n \in \omega\}$. Para cada par $P_n = (M_n, N_n) \in \mathcal{P}$ fijamos sólo un par $(U_n, V_n) \in \mathcal{H}$, tal que $M_n \subseteq U_n$, $N_n \subseteq V_n$. Ya que $\overline{U_n} \cap \overline{V_n} = \emptyset$ y el espacio X es normal, se puede definir una función continua $f_n : X \to \mathbb{I}$ tal que $f_n(\overline{U_n}) = \{0\}$ y $f_n(\overline{V_n}) = \{1\}$. Tenemos que $f_n(M_n) = \{0\}$ y $f_n(N_n) = \{1\}$.

La familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \omega\}$ separa los puntos en X. En efecto, si x, y son puntos distintos de X, entonces existen $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Tenemos que $(U,V) \in \mathcal{H}$ y escogemos $M, N \in \mathcal{N}$ tales que $x \in M \subset U$, $y \in N \subset V$. Así que el par (M,N) pertenece a $\mathcal{P}$. Sea $k \in \omega$ un número tal que $P_k = (M,N)$. Ahora tenemos que la función f_k separa los puntos x e y, ya que $f_k(x) = 0$ y $f_k(y) = 1$. Finalmente, consideramos el producto diagonal

$$f = \Delta_{n\in\omega} f_n : X \to \mathbb{I}^\omega.$$

La función f es continua e inyectiva.

Debido a que X es un espacio no compacto, existe una función continua no acotada $\psi : X \to \mathbb{R}$. Entonces $\tilde{f} = f \Delta \psi : X \to \mathbb{I}^\omega \times \mathbb{R}$ es una condensación de X sobre un espacio metrizable separable no compacto $\tilde{f}(X) \subseteq \mathbb{I}^\omega \times \mathbb{R}$.

Sean $F \subseteq X$ un conjunto cerrado y $g : X \to Z$ una función continua inyectiva sobre un espacio metrizable separable Z. Consideremos una función continua $h : X \to \mathbb{I}$ tal que $F = h^{-1}(0)$. Entonces

$$\varphi = g \Delta h : X \to Z \times \mathbb{I}$$

es una condensación de X sobre un espacio metrizable separable $Y = \varphi(X) \subseteq Z \times \mathbb{I}$. Ya que

$$Y \setminus \varphi(F) = (Z \times (0,1]) \cap Y$$

es abierto en Y, $\varphi(F)$ es cerrado. Es claro que Y no es compacto si Z no lo es. □

Del lema 3.1.1 se sigue:

LEMA 3.1.2. *Si un espacio regular con red numerable X se puede condensar sobre un espacio regular conexo no compacto, entonces X*

también admite una condensación sobre un espacio metrizable separable conexo no compacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea Y un espacio regular conexo no compacto y $f : X \to Y$ una función continua biyectiva. Si $\mathcal{N} = \{N_i : i \in \omega\}$ es una red numerable para X, entonces $f(\mathcal{N}) = \{f(N_i) : i \in \omega\}$ es una red numerable para Y. Aplicando el lema 3.1.1, encontramos una función continua biyectiva $g : Y \to Z$ sobre un espacio metrizable separable no compacto Z. El espacio Z es conexo siendo la imagen continua de un espacio conexo. Entonces, $g \circ f : X \to Z$ es la condensación que buscamos. $\square$

El lema siguiente es la clave de la demostración del teorema 3.1.4.

LEMA 3.1.3. *Sea X un espacio regular con red numerable. Supongamos que $A \subseteq X$ es un conjunto cerrado y $f : A \to \mathbb{I}^\omega$ es una función continua inyectiva tal que para cada $n \in \omega$ se cumple $\mathbb{I}_n \setminus \pi_n(f(A)) \neq \emptyset$, donde $\pi_n : \mathbb{I}^\omega \to \mathbb{I}_n$ es la proyección sobre el factor $\mathbb{I}_n$. Entonces f se puede extender a una función continua inyectiva $\tilde{f} : X \to \mathbb{I}^\omega$. Además, si $f(A) \subseteq (0,1)^\omega$, entonces la extensión $\tilde{f}$ se puede escoger de tal manera que $\mathbb{I}_n \setminus \pi_n(\tilde{f}(X)) \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Según el lema 3.1.1 existen un espacio metrizable separable Y y una condensación $\varphi : X \xrightarrow{\text{sobre}} Y$ tales que $\varphi(A)$ es cerrado en Y. Para cada $n \in \omega$ denotamos con f_n la composición $\pi_n \circ f : A \to \mathbb{I}_n$. Sea $h_n : X \to \mathbb{I}_n$ una extensión continua de f_n, $n \in \omega$. Consideremos el producto diagonal

$$\tilde{\varphi} = \varphi \Delta (\Delta_{n \in \omega} h_n) : X \to Y \times \mathbb{I}^\omega.$$

Es claro que $\tilde{\varphi}$ es continua inyectiva y el espacio $\widetilde{X} = \tilde{\varphi}(X) \subseteq Y \times \mathbb{I}^\omega$ es metrizable separable. Sea $\tilde{A} = \tilde{\varphi}(A)$. Probaremos que

$$\widetilde{X} \setminus \tilde{A} = ((Y \setminus \varphi(A)) \times \mathbb{I}^\omega) \cap \widetilde{X},$$

es decir, $\widetilde{X} \setminus \tilde{A}$ es abierto en $\widetilde{X}$. En efecto, si $t \in \widetilde{X} \setminus \tilde{A}$, existe un punto único $x \in X \setminus A$ tal que $t = \tilde{\varphi}(x) = (\varphi(x), h_0(x), h_1(x), \dots)$. Ya que $x \in X \setminus A$ tenemos que $\varphi(x) \in Y \setminus \varphi(A)$, esto es, $t \in ((Y \setminus \varphi(A)) \times \mathbb{I}^\omega) \cap \widetilde{X}$. Por otra parte, si $t \in ((Y \setminus \varphi(A)) \times \mathbb{I}^\omega) \cap \widetilde{X}$, existe un punto único $x \in X$ tal que $t = \tilde{\varphi}(x)$. Entonces $\varphi(x) \in Y \setminus \varphi(A)$, y por lo tanto $x \in X \setminus A$, es decir, $t = \tilde{\varphi}(x) \in \widetilde{X} \setminus \tilde{A}$. De tal manera tenemos que $\tilde{A}$ es cerrado en $\widetilde{X}$.

Sean $\pi : Y \times \mathbb{I}^\omega \to \mathbb{I}^\omega$ la proyección y $p = \pi \restriction \tilde{A} : \tilde{A} \to \mathbb{I}^\omega$. Observamos que p es continua y $p \circ \tilde{\varphi} \restriction A = f$, es decir, p es inyectiva. Además, ya que $p(\tilde{A}) = f(A)$, tenemos que $\mathbb{I}_n \setminus \pi_n(p(\tilde{A})) \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$.

Ahora supongamos que p se puede extender a una función continua inyectiva $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to \mathbb{I}^\omega$ (véase el diagrama).

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[drr, "f"'] & X \arrow[rr, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[dr, dashed, "\widetilde{f}"] & & \widetilde{X} \arrow[dl, dashed, "\widetilde{p}"'] \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \widetilde{A} \arrow[dll, "p"] \\
& & \mathbb{I}^\omega & &
\end{tikzcd}$$

Entonces $\widetilde{f} = \widetilde{p} \circ \widetilde{\varphi} : X \to \mathbb{I}^\omega$ sería una extensión continua inyectiva de f.

Por lo anterior, sin perder generalidad podemos suponer desde el principio que el espacio dado X es metrizable separable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para $X \setminus A$ tal que para cada $U \in \mathcal{B}$ se cumple $\overline{U} \cap A = \emptyset$. Sea $\mathcal{P} = \{(U, V) : U, V \in \mathcal{B}, \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset\}$. Escogemos $L \subseteq \omega$ tal que L y $M = \omega \setminus L$ sean subconjuntos infinitos. Puesto que la familia $\mathcal{P}$ es numerable, se puede enumerarla con los elementos de M. Así que $\mathcal{P} = \{(U_n, V_n) : n \in M\}$.

Para cada $n \in M$ existe una función continua

$$g_n : \overline{U}_n \cup \overline{V}_n \to [1/3, 2/3]$$

tal que $g_n(\overline{U}_n) = \{1/3\}$ y $g_n(\overline{V}_n) = \{2/3\}$. Definamos $\psi_n : A \cup \overline{U}_n \cup \overline{V}_n \to \mathbb{I}_n$ por la regla:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{si } x \in A \\ g_n(x), & \text{si } x \in \overline{U}_n \cup \overline{V}_n \end{cases}$$

Debido a que ψ_n es una función continua definida en un conjunto cerrado se puede extenderla continuamente a todo espacio X. Sea $\widetilde{f}_n : X \to \mathbb{I}_n$ una tal extensión. La definición de $\widetilde{f}_n$ nos asegura que $\widetilde{f}_n(a) = f_n(a)$ para cada $a \in A$ y para cada $n \in M$. Notamos que si $f(A) \subseteq (0,1)^\omega$, entonces la extensión $\widetilde{f}_n$ de ψ_n se puede escoger de tal manera que $\widetilde{f}_n(X) \subseteq (0,1)^\omega$.

Afirmamos que la familia $\mathcal{F}_1 = \{\widetilde{f}_n : n \in M\}$ separa los puntos en $X \setminus A$. En efecto, si x, y son puntos distintos en $X \setminus A$, entonces existen $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Tenemos que el par $(U, V) \in \mathcal{P}$, es decir existe $m \in M$ tal que $(U, V) = (U_m, V_m) \in \mathcal{P}$. Según la definición, $\widetilde{f}_m(x) = g_m(x) = 1/3$ y $\widetilde{f}_m(y) = g_m(y) = 2/3$. Notamos que la familia $\mathcal{F}_1$ separa también los puntos en A ya que f es inyectiva.

Para separar los puntos en $X \setminus A$ del conjunto A vamos a construir otra familia de funciones continuas $\mathcal{F}_2 = \{\widetilde{f}_n : n \in L\}$. Primero, para cada $n \in L$ seleccionamos un punto $r_n \in \mathbb{I}_n \setminus f_n(A)$ y enumeramos los elementos de la base $\mathcal{B}$ con los números de L, esto es, $\mathcal{B} = \{U_n : n \in L\}$. Luego para cada $n \in L$ definimos la función $\psi_n : A \cup \overline{U}_n \to \mathbb{I}_n$, donde $U_n \in \mathcal{B}$, según la regla:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{si } x \in A \\ r_n, & \text{si } x \in \overline{U}_n \end{cases}$$

Es claro que cada ψ_n es continua y se puede extenderla a una función continua $\tilde{f}_n : X \to \mathbb{I}_n$. Si $f(A) \subseteq (0,1)^\omega$ escogemos $r_n = 0$ para cada $n \in L$. Como el punto 1 no pertenece a $\psi_n(A \cup \overline{U}_n)$, se puede extender ψ_n a $\tilde{f}_n$ de tal manera que $\tilde{f}_n(X) \subseteq [0,1)$.

Sean $x \in A$ y $y \in X \setminus A$. Fijamos $m \in L$ tal que $y \in U_m \in \mathcal{B}$, entonces tenemos $\tilde{f}_m(x) = f_m(x) \in f_m(A)$ y $\tilde{f}_m(y) = r_m \in \mathbb{I}_m \setminus f_m(A)$, esto es, $\tilde{f}_m(x) \neq \tilde{f}_m(y)$. Así que hemos construido la familia $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\tilde{f}_n : n \in \omega\}$ de funciones continuas de X a I que separa los puntos en X. Por lo tanto el producto diagonal

$$\tilde{f} = \Delta_{n\in\omega}\tilde{f}_n : X \to \mathbb{I}^\omega$$

es una función continua inyectiva y $\tilde{f}\restriction A = f$. Además, si $f(A) \subseteq (0,1)^\omega$, entonces $1 \notin \tilde{f}_n(X)$, es decir, $\mathbb{I}_n \setminus \ \pi_n(\tilde{f}(X)) \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. $\square$

TEOREMA 3.1.4. *Sea X un espacio regular con red numerable y $P \subseteq X$ un conjunto cerrado que admite una condensación sobre un espacio regular conexo no compacto. Entonces X se puede condensar sobre un espacio metrizable separable conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Del lema 3.1.2 podemos concluir que existen P^* un espacio metrizable separable conexo no compacto y $i : P \to P^*$ una función continua inyectiva sobre P^*. Como P^* no es compacto, existe $A = \{a_k : k \in \omega\}$ un subconjunto infinito cerrado y discreto en P^*. Sea $B = \{b_k : k \in \omega\} \subseteq (0,1)^\omega$ algún conjunto denso en $\mathbb{I}^\omega$ tal que $b_k \neq b_l$ si $k \neq l$.

Definamos una función $f : A \to \mathbb{I}^\omega$ tal que $f(a_k) = b_k$ para cada $k \in \omega$. Claro que f es continua e inyectiva. Para cada $n \in \omega$ sea $f_n = \pi_n \circ f$, donde π_n es la proyección $\mathbb{I}^\omega$ sobre el factor $\mathbb{I}_n$. Tenemos que $f_n : A \to \mathbb{I}_n$ y $f_n(A) \subseteq (0,1)$ para cada $n \in \omega$. Así que la función f y el conjunto cerrado $A \subset P^*$ cumplen con las condiciones del lema 3.1.3 y podemos extender f continua e inyectivamente a todo espacio P^*. Sea $\tilde{f} : P^* \to \mathbb{I}^\omega$ tal extensión. Tenemos que $\tilde{f}\restriction A = f$ y $\mathbb{I}_n \setminus \tilde{f}_n(P^*) \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$, donde $\tilde{f}_n = \pi_n \circ \tilde{f}$.

Notamos que $\widetilde{f}(P^*)$ es conexo como la imagen continua del espacio conexo P^*. Además, $\widetilde{f}(P^*)$ es denso en $\mathbb{I}^\omega$, puesto que $B = \widetilde{f}(A) \subseteq \widetilde{f}(P^*)$. El siguiente diagrama visualiza nuestra demostración (se definen abajo las funciones g y $\widetilde{g}$).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drrr, bend right, "\widetilde{g}"'] & \supseteq & P \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"] & P^* \arrow[d, "\widetilde{f}"] & \supseteq & A \arrow[d, "f"] \\
 & & & \mathbb{I}^\omega & \supseteq & B
\end{tikzcd}$$

La función $g = \widetilde{f} \circ i : P \to \mathbb{I}^\omega$ es continua e inyectiva como la composición de dos tales funciones. Debido a que $\mathbb{I}_n \setminus \pi_n(g(P)) = \mathbb{I}_n \setminus \widetilde{f}_n(P^*) \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$, se puede aplicar el lema 3.1.3 para la función g y el conjunto cerrado $P \subseteq X$. Así que existe una función continua inyectiva $\widetilde{g} : X \to \mathbb{I}^\omega$ tal que $\widetilde{g} \restriction P = g$. Notense que $\widetilde{f}(P^*) = g(P) = \widetilde{g}(P) \subseteq \widetilde{g}(X) \subseteq \mathbb{I}^\omega$. Por lo tanto $\widetilde{g}(P)$ es denso en $\mathbb{I}^\omega$ y en $\widetilde{g}(X)$. Esto implica que $\widetilde{g}(X)$ es conexo, ya que $\widetilde{g}(P)$ es conexo. Finalmente, $\widetilde{g}(X)$ es un espacio metrizable separable como un subespacio de $\mathbb{I}^\omega$. □

El resultado del próximo teorema es, en cierto sentido, una generalización del teorema 3.1.4. Su demostración requiere un hecho bien conocido que enunciamos en el lema siguiente.

LEMA 3.1.5. *Un espacio metrizable no compacto X de peso $\leq 2^\omega$ admite una condensación sobre un espacio metrizable separable no compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Se sabe que cada espacio metrizable de peso $\leq 2^\omega$ es homeomorfo a un subespacio de la potencia numerable del erizo con 2^ω espinas $(J(\mathfrak{c}))^\omega$ (véase 4.4.9 en [9]). En su caso, es fácil ver que $J(\mathfrak{c})$ se puede condensar sobre un subespacio del plano $\mathbb{R}^2$ con la topología natural. Entonces existe una función continua inyectiva $f : X \to Y \subseteq (\mathbb{R}^2)^\omega$ sobre un espacio metrizable separable Y.

Si X no es compacto, escogemos una función continua no acotada $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Tenemos que $\widetilde{f} = f \Delta \varphi : X \to Y \times \mathbb{R}$ es una condensación de X sobre un espacio metrizable separable no compacto $\widetilde{f}(X)$. □

TEOREMA 3.1.6. *Sea X un espacio metrizable con $w(X) \leq 2^\omega$. Si existe un conjunto cerrado $P \subseteq X$ que admite una condensación sobre un espacio metrizable conexo no compacto, entonces X se puede condensar sobre un espacio metrizable separable conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Del lema 3.1.5 se sigue inmediatamente que se puede condensar P sobre un espacio P^* metrizable separable conexo no compacto. Sea $i : P \to P^*$ tal condensación. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $P^* \subseteq \mathbb{I}^\omega$. Para cada $n \in \omega$ definimos $i_n = \pi_n \circ i$, donde $\pi_n : \mathbb{I}^\omega \to \mathbb{I}_n$ es la proyección sobre el factor $\mathbb{I}_n$. Entonces $i_n : P \to \mathbb{I}_n$ es una función continua definida en el conjunto cerrado $P \subseteq X$ y se puede extenderla a todo espacio X. Sea $\varphi_n : X \to \mathbb{I}_n$ una extensión continua de i_n. Notemos que la familia $\mathcal{F}_1 = \{\varphi_n : n \in \omega\}$ separa los puntos de P.

Construyamos una base σ-discreta para X de la siguiente manera. Para cada número entero $n \geq 1$ consideramos una cubierta Θ_n para X de bolas abiertas de radio $1/(2n)$ respecto a una métrica ρ para X. Sea Γ_n una cubierta abierta σ-discreta de cardinalidad $\leq w(X)$ inscrita en Θ_n. Si $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$, entonces Γ es una base σ-discreta para X de cardinalidad igual a $w(X)$. Se puede representar Γ así: $\Gamma = \bigcup\{\gamma_i, i \in \omega\}$, donde cada γ_i es una familia discreta de cardinalidad $\kappa_i \leq 2^\omega$ y $\gamma_i \subseteq \Gamma_n$ para algún $n \geq 1$. A su vez $\gamma_i = \{U_{i,\alpha} : \alpha < \kappa_i\}$, donde $U_{i,\alpha}$ son abiertos en X y si $\gamma_i \subseteq \Gamma_n$, entonces $\operatorname{diam}(U_{i,\alpha}) < 1/n$ para cada $\alpha < \kappa_i$.

Para cada $i \in \omega$ denotemos por $\mathcal{B}_i$ a una base numerable para una topología de Hausdorff segundo numerable en el conjunto de índices κ_i. Sea Λ una familia de conjuntos abiertos en X que tienen la forma $V = X \setminus P$ ó $V = (\bigcup\{U_{i,\alpha} : \alpha \in B\}) \cap (X \setminus P)$, donde $i \in \omega$ y $B \in \mathcal{B}_i$. Notemos que la familia Λ es numerable. Para cada $V \in \Lambda$ consideremos una función continua $f_V : X \to \mathbb{I}$ tal que $X \setminus V = f_V^{-1}(0)$. Si $V \in \Lambda$, entonces $V \cap P = \emptyset$ y, por lo tanto, $f_V(P) = \{0\}$.

Afirmamos que la familia $\mathcal{F}_2 = \{f_V : V \in \Lambda\}$ separa los puntos en $X \setminus P$. En efecto, sean x e y dos distintos puntos en $X \setminus A$. Existe un número $n > 0$ tal que $\rho(x, y) > 1/n$. Puesto que Γ_n es una cubierta para X, existe $i \in \omega$ tal que $\gamma_i \subseteq \Gamma_n$ y $x \in \bigcup \gamma_i$. Sea $\beta < \kappa_i$ tal que $x \in U_{i,\beta}$.

Si $y \notin \bigcup \gamma_i$, fijamos cualquier elemento $B \in \mathcal{B}_i$ con $\beta \in B$ y sea $V = (\bigcup\{U_{i,\alpha} : \alpha \in B\}) \cap (X \setminus P)$. Entonces $V \in \Lambda$, $x \in V$ y $y \notin V$. Por la definición de f_V se sigue que $f_V(x) > 0$ y $f_V(y) = 0$.

Si $y \in \bigcup \gamma_i$, debido a que la familia γ_i consta de los conjuntos con diametro menor que $1/n$, existen distintos índices $\alpha, \beta < \kappa_i$ tales que $x \in U_{i,\alpha}$, $y \in U_{i,\beta}$. Sea $B \in \mathcal{B}_i$ tal que $\alpha \in B$, pero $\beta \notin B$. Entonces $V = (\bigcup\{U_{i,\gamma} : \gamma \in B\}) \cap (X \setminus P)$ es un elemento de Λ que contiene a x, pero no contiene a y. Otra vez tenemos que $f_V(x) > 0$ y $f_V(y) = 0$.

Notemos que la función $f_{X \setminus P}$ separa los puntos de P de los puntos de $X \setminus P$; por consecuencia la unión $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ es una familia de funciones continuas de X a $\mathbb{I}$ que separa los puntos en X. Entonces el producto diagonal de las funciones de $\mathcal{F}$ es una función continua inyectiva $f : X \to \mathbb{I}^\omega \times \mathbb{I}^\Lambda \cong \mathbb{I}^\omega$. La imagen $f(X)$ es un espacio metrizable separable, mientras que $f(P) = i(P) \times \{0\}^{\Lambda}$ es homeomorfo a $i(P) = P^*$, es decir, es metrizable separable conexo no compacto. Además, $f(P)$ es cerrado en $f(X)$. En efecto, el conjunto

$$\begin{aligned} f(X) \setminus f(P) &= (\mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \cdots \times \mathbb{I} \times f_{X\setminus P}(X \setminus P) \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \dots) \cap f(X) \\ &= (\mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \cdots \times \mathbb{I} \times (0,1] \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \times \dots) \cap f(X) \end{aligned}$$

es abierto en $f(X)$.

Para terminar la demostración resta aplicar el teorema 3.1.4 al espacio $f(X)$ y el conjunto cerrado $f(P) \subseteq f(X)$. Así que existe una condensación g de $f(X)$ sobre un espacio Z metrizable separable conexo. Entonces $g \circ f \colon X \to Z$ es la condensación que buscamos. □

3.2. Espacios metrizables con extensión alcanzable

Según [17] se dice que un espacio X tiene *extensión alcanzable* si existe un conjunto discreto cerrado $A \subseteq X$ tal que $|A| = w(X)$.

LEMA 3.2.1. *Cada espacio metrizable X de peso κ con $cf(\kappa) > \omega$ tiene extensión alcanzable.*

DEMOSTRACIÓN. El espacio X tiene una base σ-discreta $\mathcal{B}$ de cardinalidad κ, esto es, $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} \gamma_n$, donde cada familia γ_n es discreta en X. Ya que $cf(\kappa) > \omega$, existe $n \in \omega$ tal que $|\gamma_n| = \kappa$. Por lo tanto X contiene a un conjunto discreto cerrado de cardinalidad κ. □

Notemos que si X es un espacio metrizable con peso igual a un número cardinal infinito κ tal que κ es un cardinal sucesor o bien, $\kappa^\omega = \kappa$, entonces X tiene extensión alcanzable.

Un resultado de Pytkeev establece que cada espacio metrizable de peso κ con $\kappa = \kappa^\omega$ tiene una topología más débil homeomorfa a la potencia numerable del erizo con κ espinas $J(\kappa)^\omega$ (véase el teorema 3 en [25]). El teorema 3.2.6 extiende este resultado y prueba que cada espacio metrizable de peso $\geq 2^\omega$ con extensión alcanzable admite una topología más débil conexa metrizable. Empezamos con un lema.

LEMA 3.2.2. *Sea (X, τ) un espacio metrizable. Si $A \subseteq X$ es un subconjunto infinito cerrado y discreto e Y es un espacio metrizable de la misma cardinalidad que A, entonces X admite una topología metrizable $\mu \subseteq \tau$ tal que $(A, \mu{\restriction}A)$ es homeomorfo a Y y A es cerrado en (X, μ).*

DEMOSTRACIÓN. Como $|Y| = |A|$, se puede enumerar los elementos de A usando Y como un conjunto de índices: $A = \{a_y : y \in Y\}$. Sea $i : A \to Y$ una función continua biyectiva dada por $i(a_y) = y$, $y \in Y$. En el conjunto A definimos una nueva topología μ_A por la regla: un conjunto $B \subseteq A$ pertenece a μ_A si y sólo si $i(B)$ es abierto en Y. Sea $\mathcal{B}_Y = \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n$ una base σ-discreta para Y, donde cada σ_n es una familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos de Y. Debido a que X es normal por colecciones, existe una familia discreta $\gamma = \{U_y : y \in Y\}$ de conjuntos abiertos no vacíos en (X, τ) tal que $U_y \cap A = \{a_y\}$ para cada $y \in Y$.

Ahora nuestra meta es introducir una topología metrizable μ para X más débil que τ, tal que $\mu\restriction A = \mu_A$ y A sigue siendo cerrado en (X, μ). Sea $\{U_{y,i} : i \in \omega\}$ una base numerable para (X, τ) en el punto a_y tal que $U_{y,0} = U_y$ y $cl_\tau(U_{y,i+1}) \subseteq U_{y,i}$ para cada $i \in \omega$. Notamos que la familia $\gamma_i = \{U_{y,i} : y \in Y\}$ es discreta en (X, τ) para cada $i \in \omega$. Consideremos la familia $\mathcal{B}^*$ que consta de todos los subconjuntos de X que tienen la forma

$$O(i, W) = \bigcup\{U_{y,i} : y \in W\},$$

para algún $i \in \omega$ y algún elemento $W \in \mathcal{B}_Y$. Ahora introducimos la topología μ para X como sigue:

si $U \subseteq X \setminus A$, entonces $U \in \mu$ si y sólo si $U \in \tau$;
si $U \cap A \neq \emptyset$, entonces $U \in \mu$ si y sólo si para cada $x \in U \cap A$ existe un elemento $O \in \mathcal{B}^*$ tal que $x \in O \subseteq U$.

Es claro que $\mu \subseteq \tau$ y A es cerrado en (X, μ). Si tomamos un conjunto $O(i, W) \in \mathcal{B}^*$, entonces $O(i, W) \cap A = \{a_y : y \in W\}$ y por lo tanto, la familia $\{O(i, W) \cap A : O(i, W) \in \mathcal{B}^*\}$ es una base para (A, μ_A). Por consecuencia, tenemos que $\mu\restriction A = \mu_A$.

Verifiquemos que la topología μ es metrizable. Primero, construyamos una base σ-discreta para (X, μ). Observemos que $\mathcal{B}^* = \bigcup\{\mathcal{B}(i, n) : i \in \omega,\ n \in \omega\}$, donde $\mathcal{B}(i, n) = \{O(i, W) : W \in \sigma_n\}$. Probemos que $\mathcal{B}(i, n)$ es una familia discreta en (X, μ). Sea x un punto arbitrario de $X \setminus A$ y sea O_x una vecindad τ-abierta de x que intersecta a lo más un elemento $U_{y,i}$ de γ_i. Si $O_x \cap O(i, W) \neq \emptyset$ para algún $W \in \sigma_n$, existe $y \in W$ tal que $O_x \cap U_{y,i} \neq \emptyset$. Como σ_n es discreta en Y, $y \notin W'$ para cada $W' \in \sigma_n$ distinto de W. En consecuencia $O_x \cap O(i, W') = \emptyset$ para cada $W' \in \sigma_n$ con $W' \neq W$. De tal manera, $O_x \cap (X \setminus A)$ es una vecindad μ-abierta de x, la cual intersecta a lo más un elemento de la familia $\mathcal{B}(i, n)$. Ahora tomemos un punto cualquiera a_z de A. Existe $W_z \in \mathcal{B}_Y$ tal que $z \in W_z$ y W_z intersecta a lo más un elemento de σ_n. El conjunto $O(i, W_z) = \bigcup\{U_{y,i} : y \in W_z\}$ es una vecindad μ-abierta de a_z. Si $O(i, W_z) \cap O(i, W) \neq \emptyset$ para algún $W \in \sigma_n$, es fácil ver que $W_z \cap W \neq \emptyset$, esto es, $O(i, W_z)$ intersecta a lo más un elemento de $\mathcal{B}(i, n)$. De tal manera hemos probado que para cualesquiera $i, n \in \omega$

la familia $\mathcal{B}(i,n)$ es discreta en (X,μ); por lo tanto, $\mathcal{B}^*$ es σ-discreta en (X,μ).

Ahora consideremos los subespacios $X_i = X \setminus \bigcup\{cl_\tau(U_{y,i}) : y \in Y\}$ $(i \in \omega)$ abiertos en ambos espacios (X,τ) y (X,μ), y para cada $i \in \omega$ fijamos una familia σ-discreta $\mathcal{B}_i$ de conjuntos τ-abiertos en X_i que forma una base para X_i. Cada familia $\mathcal{B}_i$ es σ-discreta en (X,μ), ya que $A \subset U_i = \bigcup\{U_{y,i} : y \in Y\}$ y U_i es un conjunto μ-abierto que no intersecta a X_i, es decir, U_i es una vecindad de cualquier punto $a_z \in A$ que no intersecta a los elementos de $\mathcal{B}_i$.

Obviamente, $\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{B}_i$ es una base σ-discreta para $X \setminus A$ en ambas topologías τ y μ. Por lo tanto, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* \cup \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{B}_i$ es una base σ-discreta para (X,μ).

La regularidad de μ en los puntos $x \in X \setminus A$ se sigue del hecho que $\mu\restriction(X \setminus A)) = \tau\restriction(X \setminus A))$. Nos resta probar que μ es regular en cada punto $a_y \in A$. Primero, verifiquemos que

$$cl_\mu O(i,W) = cl_\tau O(i,W) \cup \{a_y : y \in cl_Y W \setminus W\}. \tag{1}$$

Debido a que la familia γ_i es τ-discreta, tenemos

$$cl_\tau O(i,W) = \bigcup\{cl_\tau(U_{y,i}) : y \in W\}. \tag{2}$$

Es evidente que $cl_\tau O(i,W) \subseteq cl_\mu O(i,W)$. Si $x \in X \setminus A$ y $x \notin cl_\tau O(i,W)$, entonces existe una vecindad τ-abierta V_x de x que no intersecta a $O(i,W)$. Entonces $V_x \cap (X \setminus A)$ es una vecindad μ-abierta de x que no intersecta a $O(i,W)$, es decir, $x \notin cl_\mu O(i,W)$. Ahora sea $z \in Y \setminus cl_Y W$; tomemos $W_1 \in \mathcal{B}_Y$ tal que $z \in W_1$ y $W_1 \cap W = \emptyset$. Entonces $O(i,W_1) = \bigcup\{U_{y,i} : y \in W_1\}$ es una vecindad μ-abierta de a_z que no intersecta a $O(i,W)$, esto es, $a_z \notin cl_\mu O(i,W)$. Por otra parte, si $z \in cl_Y W$, entonces cualquier conjunto $W' \in \mathcal{B}_Y$ con $z \in W'$ intersecta a W. Por lo tanto, cualquier $O' \in \mathcal{B}^*$ con $a_z \in O'$ intersecta a $O(i,W)$, es decir, $a_z \in cl_\mu O(i,W)$. De tal manera hemos demostrado (1).

Supongamos ahora que $a_{y_0} \in O$, donde $y_0 \in Y$ y O es algún elemento de $\mathcal{B}^*$. Tenemos que $O = O(i,W) = \bigcup\{U_{y,i} : y \in W\}$, donde $i \in \omega$, $y_0 \in W \in \mathcal{B}_Y$. Tomamos $W_1 \in \mathcal{B}_Y$ tal que $y_0 \in W_1$ y $cl_Y W_1 \subseteq W$. Entonces $O_1 = \bigcup\{U_{y,i+1} : y \in W_1\}$ es una vecindad μ-abierta de a_{y_0}. Aplicando (1) y (2), obtendremos

$$\begin{aligned} cl_\mu O_1 &= cl_\tau O_1 \cup \{a_y : y \in cl_Y W_1 \setminus W_1\} \\ &= \bigcup\{cl_\tau(U_{y,i+1}) : y \in W_1\} \cup \{a_y : y \in cl_Y W_1 \setminus W_1\} \\ &\subseteq \bigcup\{U_{y,i} : y \in W_1\} \cup \{a_y : y \in cl_Y W_1 \setminus W_1\} \\ &\subseteq \bigcup\{U_{y,i} : y \in W\} = O. \end{aligned}$$

Hemos demostrado que la topología μ es regular en cualquier punto de A, es decir, es regular. Por lo anterior, se queda establecido que el espacio (X, μ) es metrizable y su subespacio cerrado $(A, \mu \restriction A)$ es homeomorfo a Y. □

COROLARIO 3.2.3. *Un espacio metrizable con peso igual a 2^ω admite una condensación sobre un espacio metrizable separable conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, τ) un espacio metrizable de peso 2^ω. Primero, notemos que $cf(2^\omega) > \omega$ y por eso X tiene extensión alcanzable. Por el lema 3.2.2, X admite una topología metrizable μ, más débil que τ, tal que (X, μ) contiene a una copia cerrada de la recta real. Ahora basta aplicar el teorema 3.1.6 para el espacio (X, μ). □

En la demostración del teorema 3.2.6 vamos a usar el teorema de Dugundji que establece que cada función continua $f : F \to L$ definida en un subconjunto cerrado F de un espacio metrizable X admite una extensión continua $\tilde{f} : X \to L$ si L es un espacio topológico lineal localmente convexo (véase [8]).

A continuación recordamos las definiciones de un espacio de Hilbert y el σ-producto de una familia de espacios topológicos; además, mencionamos algunas de sus propiedades.

Sea κ un número cardinal infinito. Consideremos el conjunto de funciones reales x definidas sobre κ tales que $|\{\alpha \in \kappa : x(\alpha) \neq 0\}| \leq \omega$ y $\sum_{\alpha \in \kappa} x(\alpha)^2 < \infty$. La formula $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\alpha \in \kappa}(x(\alpha) - y(\alpha))^2}$ define una métrica en este conjunto. Este conjunto con la métrica $\rho(x, y)$ se llama *espacio de Hilbert de peso κ* y se denota por $\mathcal{H}(\kappa)$. Se sabe que $\mathcal{H}(\kappa)$ es un espacio lineal localmente convexo. Además, cada espacio metrizable de peso $\leq \kappa$ se encaja en $\mathcal{H}(\kappa)$ (véase, por ejemplo, la demostración del teorema 6, cap. I en [4]).

Sean $\{X_s : s \in S\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{s \in S} X_s$ producto topológico y $p = \{p_s\}$ un punto fijo de X. Si S es infinito, se considera un subespacio Y de X definido como $\{x \in X : \{s \in S : x_s \neq p_s\}$ es finito $\}$. El subespacio Y se llama el σ-producto de la familia $\{X_s : s \in S\}$ con base en p. El proximo lema establece unas propiedades de σ-productos que necesitaremos en lo sucesivo.

LEMA 3.2.4. *Sea Y el σ-producto con base en p de una familia $\{X_s : s \in S\}$ de espacios topológicos. Entonces:*

(a) *Y es denso en $X = \prod_{s \in S} X_s$;*
(b) *Y es conexo, si X_s es conexo para cada $s \in S$;*
(c) $|Y| = |S| \cdot \max_{s \in S} |X_s|$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea $U = \prod_{s\in S} U_s$ un conjunto abierto básico en X; es decir, cada U_s es abierto en X_s y $U_s = X_s$ para cada $s \in S\setminus S'$, donde S' es un subconjunto finito de S. Consideremos un punto $x \in X$ tal que $x_s = p_s$ para cada $s \in S \setminus S'$ y $x_s \in U_s$ si $s \in S'$. Es claro que $x \in U \cap Y$. Eso demuestra que Y es denso en X.

(b) Denotemos por $\mathcal{F}(S)$ a la colección de todos los conjuntos finitos de S. Si $F \in \mathcal{F}(S)$ definimos $P_F(p) = \{x \in X : x_s = p_s \text{ si } s \in S \setminus F\}$. No es difícil ver que

$$Y = \bigcup_{F\in\mathcal{F}(S)} P_F(p) \qquad (*)$$

Notemos que $p \in P_F(p)$ para cada $F \in \mathcal{F}(S)$ y $P_F(p) \cong \prod_{s\in F} X_s$. Si todos los espacios X_s son conexos, tenemos que cada subespacio $P_F(p)$ es conexo . Por lo anterior se puede concluir que Y también es conexo.

(c) La afirmación se sigue inmediatamente de la igualdad $(*)$. □

Para demostrar el teorema 3.2.6 nos hace falta el siguiente lema.

LEMA 3.2.5. *Sea κ un número cardinal $\geq 2^\omega$. En $\mathcal{H}(\kappa)$ existe un subespacio cerrado propio P tal que*

(a) *P es homeomorfo a $\mathcal{H}(\kappa)$;*
(b) *en $(\mathcal{H}(\kappa) \setminus P)^\omega$ existe un subespacio conexo Y de cardinalidad κ denso en $(\mathcal{H}(\kappa))^\omega$.*

DEMOSTRACIÓN. En adelante suponemos que si $x \in \mathcal{H}(\kappa)$, entonces $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$.

(a) Consideremos el conjunto $P = \{x \in \mathcal{H}(\kappa) : x_0 = x_1 = 0\}$. Es fácil ver que el subespacio $P \subseteq \mathcal{H}(\kappa)$ es cerrado, propio y homeomorfo a $\mathcal{H}(\kappa)$. Por ejemplo, $h : \mathcal{H}(\kappa) \to P$ dado por $h(\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}) = \{y_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$, donde $y_0 = y_1 = 0$, $y_\alpha = x_{\alpha-2}$ para $2 \leq \alpha < \omega$ y $y_\alpha = x_\alpha$ para $\omega \leq \alpha < \kappa$, es un homeomorfismo. Además, P es denso en ninguna parte.

(b) Primero, vamos a mostrar que $\mathcal{H}(\kappa) \setminus P$ es conexo por trayectorias. Sean x, y dos puntos distintos en $\mathcal{H}(\kappa) \setminus P$. Tenemos que $x_0 \neq 0$ ó $x_1 \neq 0$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $x_0 \neq 0$. Consideremos el conjunto

$$I(x, y) = \{z \in \mathcal{H}(\kappa) : z_\alpha = x_\alpha + t(y_\alpha - x_\alpha),\ \alpha \in \kappa,\ t \in [0, 1]\}.$$

Es claro que $x \in I(x, y)$ $(t = 0)$ e $y \in I(x, y)$ $(t = 1)$. Si $I(x, y) \cap P = \emptyset$, entonces $I(x. y)$ es una trayectoria que une los puntos x e y en $\mathcal{H}(\kappa)\setminus P$. Ahora supongamos que $I(x, y) \cap P \neq \emptyset$, esto es, existe un número $r \in (0. 1)$ tal que

$$\begin{cases} x_0 + r(y_0 - x_0) = 0 \\ x_1 + r(y_1 - x_1) = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} ry_0 = x_0(r-1) & (*) \\ ry_1 = x_1(r-1) & (**) \end{cases}$$

Notemos que $y_0 \neq 0$ por $(*)$, debido a que $x_0 \neq 0$. Consideremos dos casos cuando $x_1 = 0$ y $x_1 \neq 0$.

Sea $x_1 = 0$. De la igualdad $(**)$ se sigue que $y_1 = 0$. Tomemos un punto $a \in \mathcal{H}(\kappa) \setminus P$ tal que $a_0 = 0, a_1 = 1$ y $a_\alpha = 0$ si $\alpha \in \kappa \setminus \{0,1\}$. Sea

$$I(x,a) = \{z \in \mathcal{H}(\kappa) : z_\alpha = x_\alpha + t(a_\alpha - x_\alpha),\ \alpha \in \kappa,\ t \in [0,1]\}.$$

Tenemos que x y a pertenecen a $I(x,a)$ y además, si $z \in I(x,a)$, entonces $z_0 = x_0(1-t)$ y $z_1 = t$ para algún $t \in [0,1]$. Es claro que en este caso z_0 y z_1 no pueden simultaneamente ser iguales a cero, es decir $I(x,a) \cap P = \emptyset$. De la misma manera se muestra que $I(a,y) = \{z \in \mathcal{H}(\kappa) : z_\alpha = a_\alpha + t(y_\alpha - a_\alpha),\ \alpha \in \kappa,\ t \in [0,1]\}$ no intersecta a P. Entonces $I(x,a) \cup I(a,y)$ es una trayectoria que une los puntos x e y en $\mathcal{H}(\kappa) \setminus P$.

Sea $x_1 \neq 0$. De la igualdad $(**)$ se sigue que $y_1 \neq 0$. Tomaremos un punto $a \in \mathcal{H}(\kappa) \setminus P$ tal que $a_0 = x_0, a_1 = y_1$ y $a_\alpha = 0$ si $\alpha \in \kappa \setminus \{0,1\}$. Consideremos $I(x,a) = \{z \in \mathcal{H}(\kappa) : z_\alpha = x_\alpha + t(a_\alpha - x_\alpha),\ \alpha \in \kappa,\ t \in [0,1]\}$ y $I(a,y) = \{z \in \mathcal{H}(\kappa) : z_\alpha = a_\alpha + t(y_\alpha - a_\alpha),\ \alpha \in \kappa,\ t \in [0,1]\}$. Si $z \in I(x,a)$, entonces $z_0 = x_0 \neq 0$, y por lo tanto, $I(x,a) \cap P = \emptyset$. Si $z \in I(a,y)$, entonces $z_1 = y_1 \neq 0$, y por lo tanto, $I(a,y) \cap P = \emptyset$. Tenemos que $I(x,a) \cup I(a,y)$ es una trayectoria que une los puntos x e y en $\mathcal{H}(\kappa) \setminus P$.

Sea D un subespacio denso en $\mathcal{H}(\kappa) \setminus P$ de cardinalidad κ. Notemos que D también es denso en $\mathcal{H}(\kappa)$ ya que P es denso en ninguna parte. Se puede suponer que D es conexo, porque siempre es posible extenderlo añadiendo para cada par de puntos distintos $x, y \in D$ una trayectoria que une estos puntos en $\mathcal{H}(\kappa) \setminus P$. Claro que esta operación no aumenta la cardinalidad de D, ya que $\kappa \geq 2^\omega$. Finalmente, definimos Y como el σ-producto en $D^\omega \subseteq (\mathcal{H}(\kappa) \setminus P)^\omega$ con base en cualquier punto $p \in D^\omega$. Del lema 3.2.4 se sigue que Y es de cardinalidad κ, conexo y denso en D^ω. Notemos que Y también es denso en $(\mathcal{H}(\kappa))^\omega$, ya que D^ω es denso $(\mathcal{H}(\kappa))^\omega$. □

TEOREMA 3.2.6. *Un espacio metrizable de peso $> 2^\omega$ que tiene extensión alcanzable admite una condensación sobre un espacio conexo metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, τ) un espacio metrizable con extensión alcanzable y supongamos que $w(X) = \kappa > 2^\omega$. Consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\kappa)$. Sean $P \subseteq \mathcal{H}(\kappa)$ un subespacio cerrado propio homeomorfo a $\mathcal{H}(\kappa)$ y $Y \subseteq (\mathcal{H}(\kappa) \setminus P)^\omega$ un subespacio conexo de cardinalidad κ denso en $(\mathcal{H}(\kappa))^\omega$ (véase el lema 3.2.5).

Por condiciones del teorema, X contiene a un conjunto cerrado discreto A de cardinalidad κ. Sea μ una topología metrizable para X más débil que τ tal que A es μ-cerrado y $(A, \mu\restriction A) \cong Y$ (véase el lema 3.2.2). Debido a que $\mu \subseteq \tau$, tenemos que $w(X,\mu) = d(X,\mu) \leq d(X,\tau) = w(X,\tau) = \kappa$.

Sea $f : (A, \mu\restriction A) \to Y$ un homeomorfismo. Para cada $n \in \omega$ denotemos por p_n a la proyección de $\mathcal{H}(\kappa)^\omega$ sobre el factor $\mathcal{H}(\kappa)_n$ y consideremos la composición $f_n = p_n \circ f : A \to \mathcal{H}(\kappa)_n$. Entonces $f_n(A) \subseteq \mathcal{H}(\kappa) \setminus P$. Fijemos un encaje $e : (X, \mu) \to P$ (esto es posible ya que P es homeomorfo a $\mathcal{H}(\kappa)$). Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos μ-abiertos tal que $A = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ y $cl_\mu U_{n+1} \subset U_n$ para cada $n \in \omega$. Luego definimos funciones continuas $g_n : A \cup (X \setminus U_n) \to \mathcal{H}(\kappa)$ como sigue:

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in A; \\ e(x) & \text{si } x \in X \setminus U_n. \end{cases}$$

Por el teorema de Dugundji [8], se puede extender cada g_n a una función continua $\tilde{g}_n : X \to \mathcal{H}(\kappa)$.

Afirmamos que la familia $\{\tilde{g}_n : n \in \omega\}$ separa los puntos en X. En efecto, los puntos de A se separan ya que f es una función inyectiva. Dados x_1 y x_2 de $X \setminus A$, existe $n \in \omega$ tal que $\{x_1, x_2\} \subset X \setminus U_n$, por lo tanto $\tilde{g}_n(x_1) = e(x_1) \neq e(x_2) = \tilde{g}_n(x_2)$. Si $x \in X \setminus A$, existe $n \in \omega$ tal que $x \in X \setminus U_n$. Entonces $\tilde{g}_n$ separa el punto x de A debido a que $\tilde{g}_n(A) = f_n(A) \subseteq \mathcal{H}(\kappa) \setminus P$ y $\tilde{g}_n(x) = e(x) \in P$.

Finalmente, consideremos el producto diagonal

$$g = \Delta_{n\in\omega}\tilde{g}_n : (X, \mu) \to \mathcal{H}(\kappa)^\omega.$$

La función g es continua, inyectiva y la imagen $Z = g(X)$ es un espacio metrizable conexo. En efecto, tenemos que $g(A) = f(A) = Y \subseteq Z$. Como Y es conexo y denso en $\mathcal{H}(\kappa)^\omega$, Y es denso en Z y Z es conexo. De tal manera, existe una topología metrizable conexa τ' para X con $\tau' \subseteq \mu \subseteq \tau$. □

COROLARIO 3.2.7. *Un espacio metrizable X de peso $\kappa > 2^\omega$ con $cf(\kappa) > \omega$ admite una subtopología metrizable conexa.*

PROBLEMA 3.2.8. *¿Es cierto qué cada espacio metrizable de peso $> 2^\omega$ admite una subtopología metrizable conexa?*

3.3. Subespacios de espacios metrizables conexos

En esta sección se establecen dos resultados acerca de las subtopologías conexas en subespacios de espacios metrizables conexos. En la siguiente proposición tratamos los subespacios abiertos.

PROPOSICIÓN 3.3.1. *Cada subespacio abierto no vacío de un espacio metrizable conexo admite una condensación sobre un espacio metrizable conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Y un subespacio propio abierto no vacío de un espacio metrizable conexo X. Entonces $|Y| \geq 1$. Sean $y_o \in Y$ un punto cualquiera y $F = X \setminus Y$. Escogemos dos conjuntos abiertos U, V ajenos entre si tales que $F \subset U$ y $y_0 \in V$. Como F es cerrado en un espacio perfectamente normal, existe una familia $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en X tal que $F = \bigcap \mathcal{U}$. Se puede escoger $\mathcal{U}$ de tal manera que $U_0 = U$ y $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ para cada $n \in \omega$. Sea $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$ una base numerable en y_0 tal que $V_0 = V$ y $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \in \omega$. Observe que $U_n \cap V_m = \emptyset$ para todos $n, m \in \omega$.

Considere el conjunto cociente Z obtenido de X al identificarse todos los puntos de $F \cup \{y_0\}$ con un punto $z_0 \in Z$. Sea $q : X \to Z$ la proyección. En el conjunto Z definimos una topología τ como sigue:

> en los puntos $Z \setminus \{z_0\}$ la topología τ coincide con la topología cociente usual τ_q, es decir, si $z_0 \notin U$, entonces U es abierto, si y sólo si, $q^{-1}(U)$ es abierto en X;
> en el punto z_0 topología τ está definida por medio de la base local $\mathcal{B}_{z_0} = \{q(C_n) : n \in \omega\}$, donde $C_n = U_n \cup V_n$.

Notemos que $q : X \to (Z, \tau)$ es continua ya que $\tau \subseteq \tau_q$ (observe que $C_n = q^{-1}q(C_n)$ es abierto en X). Tenemos que Z es un espacio conexo siendo imagen continua del espacio conexo X. Falta demostrar que Z es metrizable.

Es claro que Z es T_1. Para probar que Z es regular es suficiente verificar la regularidad en el punto z_0. Primero, notamos que $q(\overline{U}_n \cup \overline{V}_n) = q(\overline{C}_n)$ es cerrado en Z para cada $n \in \omega$. Efectivamente, si $z \in Z \setminus q(\overline{C}_n)$, entonces $z \neq z_0$ y $q^{-1}(z) = \{x\}$ para algún $x \in X \setminus \overline{C}_n$. Esto es, existe un conjunto abierto $W \subseteq X$ tal que $x \in W$ y $W \cap \overline{C}_n = \emptyset$. Por la definición de la topología τ tenemos que $q(W)$ es abierto en (Z, τ). Es claro que $q(W) \cap q(\overline{C}_n) = \emptyset$. Además, tenemos que $C_{n+1} \subset \overline{C}_{n+1} \subset C_n$. Por lo tanto,

$$\overline{q(C_{n+1})} = q(\overline{C}_{n+1}) \subset q(C_n).$$

Por lo anterior, Z es un espacio regular.

Ahora demostraremos que Z tiene una base σ-localmente finita. Para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{A}_n$ una familia $\sigma-$localmente finita en X que forma una base para el subespacio $X \setminus (\overline{U}_n \cup \overline{V}_n)$. Entonces $\mathcal{B}_n = q(\mathcal{A}_n) = \{q(A) : A \in \mathcal{A}_n\}$ es una familia σ-localmente finita en Z, ya que la τ-vecindad $q(U_n \cup V_n)$ de z_0 no intersecta ningún elemento de $\mathcal{B}_n$. A continuación consideremos la familia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{z_0} \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$. Es claro que la familia $\mathcal{B}$ es σ-localmente finita y es una base para Z.

Hemos demostrado que Z es un espacio metrizable conexo. El mapeo $q \restriction Y$ es la condensación de Y sobre Z. □

Se sabe que si A es un subconjunto numerable de un espacio compacto metrizable X, entonces el complemento $X \setminus A$ admite una condensación sobre un espacio compacto metrizable (véase el problema 305 del cap. III en [**5**]). Modificando el argumento en [**5**] se puede demostrar que $X \setminus A$ admite una subtopología metrizable conexa si X es un espacio metrizable conexo y $A \subseteq X$ es numerable. De hecho, en el teorema 3.3.7 se establecerá el resultado más general: si D es un subconjunto σ-discreto de un espacio metrizable conexo X, entonces el complemento $X \setminus D$ admite una subtopología metrizable conexa.

Una cubierta de conjuntos cerrados ajenos entre si en un espacio topológico X se llama una *partición* de X. Una partición $\mathcal{P}$ de X es *continua* si para cada elemento $P \in \mathcal{P}$ y para cada conjunto abierto U con $P \subseteq U$ existe un conjunto abierto $V \subseteq U$ tal que $P \subseteq V$ y si $P' \in \mathcal{P}$ y $P' \cap V \neq \emptyset$, entonces $P' \subseteq U$. En la demostración del teorema 3.3.7 usaremos un resultado conocido (véase, por ejemplo, el problema 322 del cap. I en [**5**] o el teorema 9.9 en [**30**]) que demostraremos en la proposición 3.3.3.

LEMA 3.3.2. *Una partición $\mathcal{P}$ de X es continua si y sólo si para cada $P \in \mathcal{P}$ y para cada abierto U con $P \subseteq U$ existe un conjunto abierto V y una subfamilia $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ tales que $P \subseteq V \subseteq U$ y $V = \bigcup\{P' : P' \in \mathcal{P}'\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Verifiquemos que la condición es necesaria. Sean $\mathcal{P}$ una partición continua de X, $P \in \mathcal{P}$ y U un conjunto abierto tal que $P \subseteq U$. Vamos a construir por inducción una familia de conjuntos abiertos $\{V_i : i \in \omega\}$ tal que $P \subseteq V_i \subseteq V_{i+1} \subseteq U$ para cada $i \in \omega$ y si un elemento $P' \in \mathcal{P}$ intersecta V_i para algún $i \in \omega$, tenemos que $P' \subseteq U$.

Por la definición de una partición continua existe un abierto W tal que $P \subseteq W \subseteq U$ y para cualquier $P' \in \mathcal{P}$ que intersecta W tenemos que $P' \subseteq U$. Ponemos $V_0 = W$. Si hemos construido V_i para cada $i \leq k$, entonces otra vez aplicando la misma definición para cada $P' \in \mathcal{P}$ con $P' \cap V_k \neq \emptyset$ escogemos un conjunto abierto $W_{P'}$ tal que $P' \subseteq W_{P'} \subseteq U$

y si $P'' \in \mathcal{P}$ intersecta $W_{P'}$, entonces $P'' \subseteq U$. Para terminar la construcción hacemos $V_{k+1} = V_k \cup \bigcup\{W_{P'} : P' \in \mathcal{P},\ P' \cap V_k \neq \emptyset\}$.

Ahora tomemos $V = \bigcup_{i\in\omega} V_i$. Si un elemento $P' \in \mathcal{P}$ intersecta a V, entonces existe $i \in \omega$ tal que $P' \cap V_i \neq \emptyset$. Por la construcción tenemos que $P' \subseteq V_{i+1} \subseteq V$. Debido a que todos los elementos de $\mathcal{P}$ son ajenos entre si y cubren todo X, existe un subconjunto $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ tal que $V = \bigcup\{P' : P' \in \mathcal{P}'\}$.

La suficiencia es evidente. □

PROPOSICIÓN 3.3.3. *Sean X y Y dos espacios T_1. Un mapeo cociente f de X sobre Y es cerrado si y sólo si la partición $\mathcal{F} = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ de X es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que la condición es necesaria. En efecto, sean f un mapeo cociente cerrado, $F = f^{-1}(y)$ para algún $y \in Y$ y U un conjunto abierto en X tal que $F \subseteq U$. Entonces $G = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U))$ es abierto en X, $F \subseteq G \subseteq U$ y $f^{-1}f(G) = G$. Si $F' \in \mathcal{F}$, es decir, $F' = f^{-1}(y')$ para algún $y' \in Y$ y $F' \cap G \neq \emptyset$, entonces $F' = f^{-1}(y') \subseteq f^{-1}f(F' \cap G) \subseteq G$. Por la definición, la partición $\mathcal{F}$ es continua.

Verifiquemos que la condición es suficiente. Supongamos que la partición $\mathcal{F} = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ es continua. Sean A cualquier conjunto cerrado en X e y un punto arbitrario de $Y \setminus f(A)$. Consideramos $F = f^{-1}(y) \in \mathcal{F}$ y $U = X \setminus A$. Tenemos que $F \subset U$ y, según el lema 3.3.2, existe en X un conjunto abierto V tal que $F \subseteq V \subseteq U$ y $V = \bigcup\{F' : F' \in \mathcal{F}'\}$ para alguna subfamilia $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$. Entonces $f^{-1}f(V) = V$, por eso $f(V)$ es abierto en Y. Tenemos que $y \in f(V)$ y $f(V) \cap f(A) = \emptyset$. Esto demuestra que $f(A)$ es cerrado en Y. □

Se requieren dos lemas para la demostración del teorema 3.3.7. Recordamos que un espacio X se llama *perfecto* si cada conjunto cerrado no vacío en X es G_δ.

LEMA 3.3.4. *En un espacio perfecto, cada conjunto σ-discreto es la unión numerable de conjuntos cerrados discretos ajenos dos a dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea D un conjunto σ-discreto en un espacio perfecto X. Entonces $D = \bigcup_{k\in\omega} C_k$, donde cada C_k es discreto y se puede suponer que $C_k \cap C_l = \emptyset$ si $k \neq l$. Si para algún $k \in \omega$ el conjunto C_k no es cerrado, entonces $F_k = \overline{C}_k \setminus C_k$ es cerrado en $\overline{C}_k$, por lo tanto, es cerrado también en X. Debido a que X es perfecto, tenemos que $F_k = \bigcap_{i\in\omega} O_{k,i}$, donde cada $O_{k,i}$ es abierto en X y se puede suponer que $O_{k,i+1} \subset O_{k,i}$ para cada $i \in \omega$. Definimos $\widetilde{C}_{k,0} = \overline{C}_k \setminus O_{k,0} = C_k \setminus O_{k,0}$ y sea $C_{k,0} = \widetilde{C}_{k,0}$. Para cada $i \geq 1$ sea $\widetilde{C}_{k,i} = \overline{C}_k \setminus O_{k,i} = C_k \setminus O_{k,i}$ y

$C_{k,i} = \widetilde{C}_{k,i} \setminus (\bigcup_{j<i} C_{k,j})$. Es claro que cada $C_{k,i}$ es discreto y cerrado en $\overline{C}_k$, por lo tanto, es cerrado también en X. Además tenemos

$$\bigcup_{i\in\omega} C_{k,i} = \bigcup_{i\in\omega} \widetilde{C}_{k,i} = \bigcup_{i\in\omega}(\overline{C}_k \setminus O_{k,i}) = \overline{C}_k \setminus \bigcap_{i\in\omega} O_{k,i} = \overline{C}_k \setminus F_k = C_k.$$

Sea $\phi : \omega^2 \to \omega$ una biyección. Si ponemos $D_{\phi(k,i)} = C_{k,i}$, tenemos que $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$. Para cada $n \in \omega$, el conjunto D_n es cerrado y discreto y $D_n \cap D_m = \emptyset$ si $m \neq n$. □

En la demostración del lema siguiente usaremos un teorema de suma numerable para dimensión (véase 7.2.1 en **[9]**) que establece lo siguiente:

TEOREMA 3.3.5. *Si un espacio normal X admite una cubierta numerable $\{F_j\}_{j\in\omega}$ de conjuntos cerrados tal que* $\dim F_j \leq n$ *para cada* $j \in \omega$, *entonces* $\dim X \leq n$.

LEMA 3.3.6. *Sea X un espacio metrizable conexo con $|X| > 1$. Si $D \subsetneq X$ es un conjunto σ-discreto, entonces $X \setminus D$ es denso en X.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $U \subsetneq D$ abierto no vacío en X. Ya que X no tiene puntos aislados, U es infinito. Por el lema 3.3.4 podemos expresar D como la unión numerable de los conjuntos cerrados y discretos ajenos dos a dos: $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$. Entonces $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$, donde $U_n = U \cap D_n$. Cada conjunto U_n es cerrado y discreto en U. De tal manera tenemos que U es la unión numerable de conjuntos cerrados de dimensión cero. Del teorema de suma numerable para dimensión se sigue que el espacio U es de dimensión cero. Por consiguiente, existe una base $\mathcal{B}$ para U de conjuntos abiertos y cerrados en U. Sea $B \in \mathcal{B}$ un conjunto no vacío tal que $B \subsetneq \mathrm{cl}_X(B) \subsetneq U$. Entonces $B = \mathrm{cl}_U(B) = \mathrm{cl}_X(B)$ es un conjunto propio abierto y cerrado en X, que contradice la conexidad de X. □

TEOREMA 3.3.7. *Sea X un espacio metrizable conexo (no compacto). Si $D \subsetneq X$ es un conjunto σ-discreto, entonces $X \setminus D$ se puede condensar sobre un espacio metrizable conexo (no compacto).*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 3.3.4 se puede presentar D como $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$, donde cada D_n es cerrado y discreto y $D_m \cap D_n = \emptyset$ si $m \neq n$. Enumeremos los elementos de D_n como $\{d_{n,\alpha} : \alpha \in A_n\}$, donde $|A_n| = |D_n|$. Debido a que X es normal por colecciones, para cada $n \in \omega$ existe una familia discreta $\mathcal{V}_n = \{V_{n,\alpha} : \alpha \in A_n\}$ tal que $V_{n,\alpha} \cap D_n = \{d_{n,\alpha}\}$. Sea ρ una métrica sobre X que genera la topología de X. Designamos

$$O(x, \epsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \epsilon\}.$$

Para cada $n \in \omega$ vamos a definir de manera inductiva un conjunto $C_n = \{x_{n,\alpha} : \alpha \in A_n\}$ tal que se cumplan las condiciones siguientes:

(i) $C_n \subseteq X \setminus D$;
(ii) C_n es cerrado y discreto en X;
(iii) $\rho(x_{n,\alpha}, d_{n,\alpha}) < 1/(n+1)$ para cada $\alpha \in A_n$;
(iv) la función $\varphi : D \to C = \bigcup_{n\in\omega} C_n$ definida por $\varphi(d_{n,\alpha}) = x_{n,\alpha}$ es una biyección.

Sea $n = 0$. En vista del lema 3.3.6, $X \setminus D$ es denso en X. Por lo tanto, para cada $\alpha \in A_0$ tenemos

$$W_{0,\alpha} = (V_{0,\alpha} \cap O(d_{0,\alpha}, 1)) \cap (X \setminus D) \neq \emptyset.$$

Para cada $\alpha \in A_0$ escogemos un punto $x_{0,\alpha} \in W_{0,\alpha} \subseteq V_{0,\alpha}$. Tenemos que $\rho(x_{0,\alpha}, d_{0,\alpha}) < 1$ y el conjunto $C_0 = \{x_{0,\alpha} : \alpha \in A_0\} \subseteq X \setminus D$ es cerrado y discreto en X, debido a que la familia $\{V_{0,\alpha} : \alpha \in A_0\}$ es discreta.

Supongamos que ya están construidos los conjuntos C_n para cada $n \leq k$. El conjunto $D \cup \bigcup_{n\leq k} C_n$ es σ-discreto y, por el lema 3.3.6, $X \setminus (D \cup \bigcup_{n\leq k} C_n)$ es denso en X. Por lo tanto, para cada $\alpha \in A_{k+1}$ se puede escoger un punto

$$x_{k+1,\alpha} \in (V_{k+1,\alpha} \cap O(d_{k+1,\alpha}, 1/(k+2))) \cap \left(X \setminus (D \cup \bigcup_{n\leq k} C_n) \right).$$

Es fácil ver que para el conjunto $C_{k+1} = \{x_{k+1,\alpha} : \alpha \in A_{k+1}\}$ se cumplen las condiciones (i)-(iii); esto termina nuestra construcción. Es claro que el conjunto $C = \bigcup_{n\in\omega} C_n$ satisface (iv). En particular, $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

Ahora consideramos la siguiente partición de X:

$$\mathcal{P} = \{\{x_{n,\alpha}, d_{n,\alpha}\} : n \in \omega,\ \alpha \in A_n\} \bigcup \{\{x\} : x \in X \setminus (C \cup D)\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{P}$ es una partición continua. Para demostrarlo, primero, notemos que para cada $n \in \omega$, el conjunto $\bigcup_{m<n}(C_m \cup D_m)$ es cerrado y discreto en X. Por lo tanto, para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta $V(n, x)$ de x que no intersecta el conjunto $(\bigcup_{m<n}(C_m \cup D_m)) \setminus \{x\}$.

Sea $\{x\} \in \mathcal{P}$ y fijemos $\epsilon > 0$. Escojamos $n \in \omega$ tal que $2/(n+1) < \epsilon$. Definimos $U_x = O(x, 1/(n+1)) \cap V(n, x)$. Tenemos que $U_x \subseteq O(x, \epsilon)$ y $U_x \cap \bigcup_{m<n}(C_m \cup D_m) = \emptyset$. Si $x_{k,\alpha} \in U_x$ para algún $k \geq n$ y $\alpha \in A_k$, entonces

$$\rho(x, d_{k,\alpha}) \leq \rho(x, x_{k,\alpha}) + \rho(x_{k,\alpha}, d_{k,\alpha}) < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{k+1} < \epsilon.$$

Es decir, $d_{k,\alpha} \in O(x,\epsilon)$. Análogamente, si para algún $p \geq n$ y $\alpha \in A_p$ tenemos que $d_{p,\alpha} \in U_x$, entonces $x_{p,\alpha} \in O(x,\epsilon)$. Es decir, si $P \in \mathcal{P}$ intersecta a U_x, entonces $P \subseteq O(x,\epsilon)$. En consecuencia, $\mathcal{P}$ es continua en todos los elementos que constan de un punto.

Ahora tomemos un elemento $P = \{x_{n,\alpha}, d_{n,\alpha}\} \in \mathcal{P}$ y su vecindad $O_{n,\alpha} = O(x_{n,\alpha},\epsilon) \cup O(d_{n,\alpha},\epsilon)$ para un número arbitrario $\epsilon > 0$. Elijamos $t \in \omega$ tal que $2/(t+1) < \epsilon$. Sea

$$U_{n,\alpha} = (O(x_{n,\alpha}, 1/(t+1)) \cap V(t, x_{n,\alpha})) \cup (O(d_{n,\alpha}, 1/(t+1)) \cap V(t, d_{n,\alpha})).$$

Tenemos que $U_{n,\alpha} \subseteq O_{n,\alpha}$ y $U_{n,\alpha} \cap (\bigcup_{m<t}(C_m \cup D_m) \setminus \{x_{n,\alpha}, d_{n,\alpha}\}) = \emptyset$. Sea $P' = \{x_{k,\beta}, d_{k,\beta}\}$ un elemento de $\mathcal{P}$ que intersecta a $U_{n,\alpha}$.

Si $x_{k,\beta} \in U_{n,\alpha}$, entonces tenemos que $k \geq t$ y se cumple por lo menos uno de los siguientes desigualdades:

$$\text{(i)}\quad \rho(x_{n,\alpha}, x_{k,\beta}) < \frac{1}{t+1} \qquad \text{(ii)}\quad \rho(d_{n,\alpha}, x_{k,\beta}) < \frac{1}{t+1}.$$

Si se cumple (i), entonces

$$\rho(x_{n,\alpha}, d_{k,\beta}) \leq \rho(x_{n,\alpha}, x_{k,\beta}) + \rho(x_{k,\beta}, d_{k,\beta}) < \frac{1}{t+1} + \frac{1}{k+1} < \epsilon,$$

es decir, $d_{k,\beta} \in O(x_{n,\alpha},\epsilon) \subset O_{n,\alpha}$. Si se cumple (ii), entonces

$$\rho(d_{n,\alpha}, d_{k,\beta}) \leq \rho(d_{n,\alpha}, x_{k,\beta}) + \rho(x_{k,\beta}, d_{k,\beta}) < \frac{1}{t+1} + \frac{1}{k+1} < \epsilon.$$

Otra vez tenemos que $d_{k,\beta} \in O(d_{n,\alpha},\epsilon) \subset O_{n,\alpha}$ y, por lo tanto, $P' \subseteq O_{n,\alpha}$.

Si $d_{k,\beta} \in U_{n,\alpha}$, entonces de forma similar se verifica que $x_{k,\beta} \in O_{n,\alpha}$, es decir, $P' \subset O_{n,\alpha}$. Esto demuestra que $\mathcal{P}$ es continua en el elemento $\{x_{n,\alpha}, d_{n,\alpha}\}$. De tal manera hemos demostrado que la partición $\mathcal{P}$ es continua.

Sean $Y = X/\mathcal{P}$ el espacio cociente y $q : X \to Y$ el mapeo natural. Evidentemente Y es T_1. Como $\mathcal{P}$ es continua, q es un mapeo cerrado. Debido a que las fibras $q^{-1}(y)$ son compactas , tenemos que q es perfecto. Por lo tanto Y es metrizable y conexo como la imagen perfecta de un espacio metrizable conexo. Además, si X no es compacto, Y tampoco lo es. Por la definición de $\mathcal{P}$, la restricción $i = q \restriction (X \setminus D)$ es un mapeo continuo inyectivo y sobre, es decir, $i : X \setminus D \to Y$ es la condensación requerida. □

COROLARIO 3.3.8. *El espacio de los números irracionales admite una topología metrizable separable conexa no compacta más débil que la topología euclideana.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathbb{R}$ es el espacio de los números reales y $\mathbb{Q}$ el conjunto de los racionales, entonces el espacio de los números irracionales $P = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En vista del teorema 3.3.7 existe la condensación $i : P \to Y$ sobre un espacio Y metrizable conexo no compacto. Es claro que Y tambíen es separable. □

Notemos que en realidad el espacio P se condensa sobre cualquier espacio polaco (es decir, espacio métrico completo separable) sin puntos aislados (véase Sección 37 Teorema 2 en [**19**]); en particular, sobre la recta real $\mathbb{R}$.

COROLARIO 3.3.9. *Un espacio metrizable de peso $\leq 2^\omega$ que contiene a un subespacio cerrado homeomorfo a los números irracionales admite una condensación sobre un espacio metrizable separable conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos el corolario 3.3.8 y el teorema 3.1.6. □

COROLARIO 3.3.10. *Sea Y un espacio homeomorfo a uno de los siguientes espacios:*

a) *$X \times P$, donde X es un espacio metrizable de peso $\leq 2^\omega$ y P es el espacio de los irracionales;*

b) *$\prod_{n\in\omega} X_n$, donde cada X_n es un espacio metrizable no compacto de peso $\leq 2^\omega$.*

Entonces Y tiene una subtopología metrizable separable conexa.

DEMOSTRACIÓN. El espacio Y contiene un conjunto cerrado homeomorfo al espacio de los irracionales. En efecto, en el caso a) esto es obvio; en el caso b) tenemos que cada X_n contiene un conjunto numerable infinito que es cerrado y discreto, por lo tanto, Y contiene un conjunto cerrado $F \cong \mathbb{N}^\omega$, que a su vez, es homeomorfo al espacio de los irracionales. Ya que Y en ambos casos es un espacio metrizable de peso $\leq 2^\omega$, aplicamos el corolario 3.3.9 para terminar la demostración. □

Conclusiones

En la tesis se han desarrollado dos lineas de investigación relacionadas con espacios conexos: conectificaciones por trayectorias y condensaciones sobre espacios conexos.

En la primera parte (Capítulo 1 y Capítulo 2) se establecieron los resultados nuevos acerca de los espacios conectificables por trayectorias. En el Capítulo 1 demostramos que los espacios de Hausdorff localmente compactos no compactos, así como los espacios normales OPC admiten conectificaciones unipuntuales por trayectorias si y sólo si cada componente de conexidad por trayectorias contiene a un subconjunto cerrado homeomorfo al intervalo $[0, 1)$. En el Capítulo 2 los resultados más interesantes se encuentran en los teoremas 2.2.3 y 2.2.8. Estos teoremas establecen dos clases de espacios metrizables que tienen conectificaciones por trayectorias metrizables: espacios OPC metrizables con componentes de conexidad por trayectorias no localmente compactas y espacios metrizables localmente conexos por trayectorias con componentes de conexidad no compactas. Claro que esta linea de investigación no está cerrada. Queda abierto el problema de caracterizar los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que admiten una conectificación unipuntual por trayectorias. Además, no se sabe si existe un espacio metrizable con componentes de conexidad por trayectorias abiertas no compactas que no es conectificable por trayectorias (véase el problema 2.2.4).

En la segunda parte de la tesis (Capítulo 3) presentamos los resultados sobre subtopologías conexas. Dedujimos que un espacio metrizable X de peso $\leq 2^{\omega}$ admite una subtopología metrizable separable conexa si X contiene a un subconjunto cerrado que se puede condensar sobre un espacio metrizable no compacto conexo (3.1.6). Otro resultado dice que todo espacio metrizable de peso $> 2^{\omega}$ con extensión alcanzable tiene una subtopología metrizable conexa (teorema 3.2.6). No obstante quedó abierta la pregunta si lo último es cierto para cualquier espacio metrizable de peso $> 2^{\omega}$ (véase el problema 3.2.8). En la última sección del Capítulo 3 planteamos el problema de caracterizar la clase de subespacios de un espacio metrizable conexo que tienen una subtopología metrizable conexa. Hemos demostrado que subespacios abiertos y también complementos de subconjuntos σ-discretos son de dicha clase (3.3.1 y 3.3.7). En esta dirección podemos seguir, investigando, por ejemplo, si un conjunto denso de tipo G_δ en un espacio metrizable X admite una condensación sobre un espacio metrizable conexo.

Bibliografía

[1] O.T. Alas, M.G. Tkachenko, V.V. Tkachuk and R.G. Wilson, *Connectifying some spaces*, Topology Appl. **71** (1996), 203–215.

[2] O.T. Alas, M.G. Tkachenko, V.V. Tkachuk and R.G. Wilson, *Connectedness and local connectedness of topological groups and extensions*, Comment. Math. Universitatis Carolinae, v.40 no.4, 1999, 735–753.

[3] O.T. Alas and R.G. Wilson, Weaker connected Hausdorff topologies on spaces with a σ-locally finite base, ...

[4] P.S. Aleksandroff and B.A. Pasynkov, *Introduction to dimension theory* (in Russian), Nauka Publishing House, Moscow 1973.

[5] A.V. Arhangel'skii and V.I. Ponomarev, *Fundamentals of General Topology in Problems and Exercises* (in Russian), Nauka, Moscow, 1974.

[6] I. Druzhinina, *Condensation onto connected metrizable spaces*, aceptada en Houston J. Math.

[7] I. Druzhinina and R.G. Wilson, *Pathwise connectifications of OPC spaces*, Q&A in General Topology **20** (2002), 75–84.

[8] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math., 1951, **1**, 353–367.

[9] R. Engelking, *General Topology*, Helderman Verlag, Berlin 1989.

[10] A. Fedeli and A. Le Donne, *Dense embeddings in pathwise connected spaces*, Topology Appl. **96** (1999), 15–22.

[11] A. Fedeli and A. Le Donne, *One-point connectifications of subspaces of the Euclidean line*, Rend. Mat.(1998), 677–682.

[12] A. Fedeli and A. Le Donne, *Connectifications and open componentes*, Q&A in General Topology **18** (2000), 41–45.

[13] A. Fedeli and A. Le Donne, *The Sorgenfrey line has a locally pathwise connected connectification*, Proc. AMS 120(1) (2000), 311–314.

[14] A. Fedeli and A. Le Donne, *On subconnected spaces*, Q&A in General Topology **18** (2000), 97–102.

[15] G. Gruenhage, J. Kulesza, A. Le Donne, *Connectifications of metrizable spaces*, Topology Appl. **82** (1998), 171–179.

[16] G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, In: Handbook of Set-Theoretic Topology, Edited by K. Kunen and J.E. Vaughan, Elsevier Science Publishers B.V., 1984. 423–502.

[17] G. Gruenhage, V.V. Tkachuk, and R.G. Wilson, *Weaker connected and weaker nowhere locally compact topologies for metrizable and similar spaces*, Topology Appl. **120** (2002), 365–384.

[18] J.G. Hocking and G.S. Young, *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, INC.,1961.

[19] K. Kuratowski, *Topology*, v.1, Academic Press New York and London, PWN Warszawa, 1966.

[20] V. Neumann-Lara and R.G. Wilson, *When is a LOTS densely orderable?*, Topology Appl. **30** (1988), 225–235.

[21] A.S. Parkhomenko, *On one-to-one continuous mapping* (in Russian), Mat. Sbornik, 1939, **5**, 197–210.

[22] A.S. Parkhomenko, *On condensations to compact spaces* (in Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem., 1941, **5**, 225–232.

[23] J. R. Porter, *Connected Hausdorff subtopologies*, Comment. Math. Univ. Carolin. **42** (2001) no.1, 195–201.

[24] J.R. Porter and R.G. Woods, *Subspaces of connected spaces*, Topology Appl. **68** (1996), 113–131.

[25] E.G. Pytkeev, *Upper bounds of topologies*, Mat. Zametki **20** (1976) no.4, 489–500.

[26] Yu.M. Smirnov, *Condensations onto bicompacta and relationships with bicompact extensions and retractions* (in Russian), Fundamenta Mathematicae, 1968, **63**, no. 2, 199–211.

[27] M.G. Tkachenko, V.V. Tkachuk, V. Uspenskij, and R.G. Wilson, *In quest of weaker connected topologies*, Comment. Math. Univ. Carolin. **37** (1996) no.4, 825–841.

[28] V.V. Tkachuk and R.G. Wilson, *Weaker connected Hausdorff topologies on spaces with a countable network*, Houston J. Math. **27** (2001) no.4, 851–860.

[29] S. Watson and R. Wilson, *Embeddings in connected spaces*, Houston J. Math. 19(3) (1993), 469–481.

[30] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Publ. Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1970.