

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

**ESTIMACIONES DE ESTABILIDAD EN MODELOS COLECTIVOS
DE RIESGO**

Tesis que para obtener el grado de
Doctora en Ciencias (Matemáticas)
presenta
Patricia Vázquez Ortega

Asesor: **Dr. Evgueni Gordienko**

Jurado Calificador:

Dra. Ekaterina Todorova Kolkolvska

Dr. Luis Antonio Rincón Solís

Dr. Julio César García Corte

Dr. José Raúl Montes de Oca Machorro

Dr. Evgueni Gordienko

Ciudad de México, a 10 de octubre de 2023.

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
I1 Preliminares y algunas denotaciones	vii
I2. Motivación	ix
I3. Planteamiento del problema de la estimación de la estabilidad	xi
I4. Resultados conocidos	xii
I5. Breve reseña de los resultados obtenidos en la tesis	xiii
1. Estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo	1
1.1. Resultados relacionados	3
1.2. Algunas métricas	5
1.3. Resultados obtenidos	6
1.3.1. Desigualdad de estabilidad para la probabilidad de ruina ψ en el caso general	6
1.3.2. Ejemplo numérico de aplicación de la cota superior para $\nu(\psi, \tilde{\psi})$	7
1.3.3. ¿Es posible reemplazar a la métrica de Kantorovich \mathbb{K} por la distancia uniforme \mathcal{U} en la cota superior para $\nu(\psi, \tilde{\psi})$?	8
1.3.4. Desigualdades de estabilidad para distribuciones de cola ligera	9
1.4. Demostraciones	13
2. Estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo a tiempo discreto	21
2.1. Planteamiento del problema de estabilidad	22

2.2.	Propiedades contractivas del operador \mathbf{S} con respecto a la métrica uniforme	24
2.3.	Una cota superior para $\nu(\psi, \tilde{\psi})$	26
3.	Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen	27
3.1.	El proceso multidimensional de riesgo	27
3.2.	Planteamiento del problema de estabilidad de $\mathcal{D}(R(t))$	29
3.3.	Cotas superiores para la distancia uniforme entre las distribuciones de modelos unidimensionales Sparre Andersen	33
3.4.	Hipótesis y resultados preliminares para el estudio de la estabilidad del modelo multidimensional	36
3.5.	Principales resultados: Desigualdades de estabilidad para las distribuciones del modelo multidimensional de riesgo	38
3.6.	Aplicación de la desigualdad (3.22)	39
3.7.	Ejemplo numérico	41
3.8.	Demostraciones	42
4.	Desigualdades de estabilidad para las densidades del tiempo de ruina	51
4.1.	Planteamiento del problema de estabilidad	52
4.2.	Resultados obtenidos	53
4.3.	Caso cuando $\tilde{\mathbf{f}}$ es un estimador estadístico de \mathbf{f}	56
4.4.	Demostraciones	58
	Conclusiones	65
	Apéndice	67
	Bibliografía	73

Resumen

En este trabajo se estudia la estimación de la estabilidad en modelos colectivos de riesgo mediante el desarrollo de nuevos métodos que involucran herramientas teóricas efectivas. Se obtuvieron desigualdades de estabilidad para el modelo clásico de riesgo (también llamado modelo de Cramér-Lundberg) y el modelo Sparre Andersen (en una dimensión y en otros casos, se considera la versión multidimensional).

En la literatura existen pocos resultados sobre este tema. Las cotas superiores obtenidas en este trabajo son resultados nuevos. Para ilustrar la precisión de nuestras estimaciones se ofrecen algunos contraejemplos y ejemplos numéricos.

Introducción

I1. Preliminares y algunas denotaciones

La teoría del riesgo tiene sus orígenes en la tesis doctoral de Filip Lundberg (1903), en la que el autor presentó un modelo que describe el comportamiento del capital (ingresos menos egresos) de una compañía aseguradora. Años más tarde, en 1930, Harald Cramér contribuyó al modelo planteado por Lundberg poniéndolo en el contexto de los procesos estocásticos.

En la teoría del riesgo moderna, este tipo de modelos son llamados *modelos colectivos* y representan la descripción matemática del comportamiento estocástico de la cartera de una compañía de seguros, procesos de acumulación de primas, pagos por reclamaciones, probabilidades de ruina (disminución del capital de la compañía hasta un nivel crítico), etc. Hasta ahora, el modelo de riesgo que ha sido más estudiado es el proceso estocástico *a tiempo continuo* dado por la siguiente ecuación:

$$R(t) := u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde:

- $R(t)$ es el capital actual de la compañía aseguradora;
- $u \geq 0$ es el capital inicial de la compañía aseguradora;
- $c > 0$ es la prima acumulada por unidad de tiempo t ;
- $N(t)$ es el número de reclamaciones que llegan a la compañía en el intervalo $[0, t]$;

- X_1, X_2, \dots es una sucesión de variables aleatorias positivas, independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) que representan a los montos de las reclamaciones y cuya función de distribución común estará denotada por F .

Además, se supone que $\{X_i, i \geq 1\}$ es independiente de $\{N(t), t > 0\}$.

Como una hipótesis básica, vamos a suponer que todas las variables aleatorias consideradas en este trabajo tienen esperanzas finitas.

Frecuentemente, $R(t)$ en (1) es llamado *proceso de riesgo* o *proceso de superávit* y representa la evolución del capital de una compañía aseguradora a través del tiempo $t \geq 0$. (En la Capítulo 2 de este trabajo se considera el proceso de riesgo (1) en su versión a tiempo discreto $t = 0, 1, 2, \dots$).

Presentamos parte de la terminología que usaremos en este texto.

Los siguientes dos modelos (junto con sus versiones multidimensionales) son el objeto principal de nuestro estudio:

1. Modelo de Cramér-Lundberg

También es llamado *modelo clásico de riesgo* o *modelo de Poisson compuesto*. En este modelo, el proceso $R(t)$ se define por (1); aquí se supone que $N(t)$, $t \geq 0$, es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$ (ver, por ejemplo, Asmussen and Albrecher (2010), Dickson (2016), Rincón (2012) y Rolski et al. (1999)).

2. Modelo de Sparre Andersen (*renewal risk model*)

Es una generalización del modelo de Cramér-Lundberg y también está dado por la ecuación (1) pero bajo la hipótesis de que $N(t)$, $t \geq 0$, es un proceso de renovación (ver, por ejemplo, Asmussen and Albrecher (2010) y Rolski et al. (1999)).

Las siguientes son algunas características básicas que se estudian de ambos modelos (y que se aplican en el tratamiento de problemas como reaseguro, paro óptimo, riesgo con inversión, etc.):

- La *distribución del capital* de $R(t)$, denotada por

$$\mathcal{D}(R(t)), \quad t \geq 0; \tag{2}$$

- El *tiempo de ruina*, definido como

$$\tau := \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}; \tag{3}$$

- La distribución de τ ,

$$\mathcal{D}(\tau), \quad (4)$$

(cuando la densidad de τ exista será denotada por p_τ);

- La *probabilidad de ruina con horizonte infinito* definida como:

$$\psi(u) := P(\tau < \infty | R(0) = u), u \geq 0. \quad (5)$$

Subrayamos que la probabilidad dada en (5) es una función del capital inicial $u \geq 0$.

Dado que el problema principal considerado en esta tesis es la *estabilidad cualitativa* de las características anteriores con respecto a las *variaciones de los parámetros* del modelo (1), es necesario especificar dichos conjuntos de parámetros. Las cantidades $\mathcal{D}(R(t))$, τ , $\mathcal{D}(\tau)$ y $\psi(u)$ están determinadas por un conjunto de parámetros que gobierna al modelo (1), el cual denotaremos por $\alpha \in \mathfrak{A}$. Aquí \mathfrak{A} es un conjunto dado de todos los valores de los parámetros. En el caso del modelo de Cramér-Lundberg, $\alpha = (c, \lambda, F)$; aquí, $\mathfrak{A} = (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathfrak{F}$, donde \mathfrak{F} es el conjunto de todas las funciones de distribución de variables aleatorias positivas con esperanzas finitas.

En el modelo de Sparre Andersen, $\alpha = (c, G, F)$. En este caso $\mathfrak{A} = (0, \infty) \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$, donde G es la función de distribución de las variables aleatorias i.i.d. que representan a las longitudes de los *intervalos entre las llegadas de las reclamaciones*.

En el Capítulo 3 de este trabajo se considera una versión multidimensional del modelo (1) y se presentan las descripciones correspondientes de α y \mathfrak{A} .

12. Motivación

Una de las características principales del modelo de riesgo es la probabilidad de ruina. A pesar de que la teoría del riesgo está muy desarrollada (ver, por ejemplo, los libros Asmussen and Albrecher (2010), Dickson (2016) y Rolski et al. (1999)), solo para algunos casos particulares hay fórmulas explícitas para calcular la probabilidad de ruina $\psi(u)$. Por ejemplo, para el modelo de Cramér-Lundberg, se conocen algunas fórmulas algorítmicas efectivas para obtener la probabilidad de ruina cuando la distribución del tamaño de las reclamaciones es exponencial, una mezcla de exponenciales, Gama o discreta (con un número finito de valores). Por esta razón, gran parte de la

teoría del riesgo está dedicada al desarrollo de aproximaciones o a la construcción de cotas (superiores o por ambos lados) de la probabilidad de ruina $\psi(u)$ (ver, por ejemplo, Bening and Korolev (2003), Cai and Dickson (2003), Kalashnikov (1996), Kartashov (2001), y Yuanjiang et al. (2003) y para el modelo clásico de riesgo, Konstantinides et al. (2002a) y Konstantinides et al. (2002b)).

Algunos de estos métodos de aproximación o de acotamiento suponen que una parte del conjunto de parámetros involucrados en el vector α es conocida, en particular, las funciones de distribución F y G ; o bien, requieren la existencia de los dos o tres primeros momentos de la distribución de los montos de las reclamaciones. Alternativamente, otros enfoques suponen que se conocen algunas características de la función generadora de momentos de F y G .

Desafortunadamente, en aplicaciones prácticas es poco frecuente que tal información sea asequible. Ante dicha situación los parámetros suelen estimarse por *métodos estadísticos* o mediante el uso de algunas *aproximaciones teóricas*. En casos como estos, en lugar de investigar al modelo (1) (al que a partir de ahora llamaremos *modelo ideal* y denotaremos por M), el investigador tiene que trabajar con un modelo \widetilde{M} , que sea una aproximación para M . Al definir al modelo \widetilde{M} , en lugar de considerar al conjunto de parámetros *desconocidos* α , debe usarse la aproximación $\widetilde{\alpha}$. De esta manera, el modelo \widetilde{M} queda caracterizado por el conjunto dado $\widetilde{\alpha}$ de parámetros *conocidos*. El modelo \widetilde{M} será llamado *modelo aproximante de riesgo* y (como en (1)) está dado por la ecuación:

$$\widetilde{R}(t) := u + ct - \sum_{i=1}^{\widetilde{N}(t)} \widetilde{X}_i, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Supongamos que para el modelo aproximante \widetilde{M} en (6) pueden calcularse (o aproximarse) las características (2), (4) y (5). Denotaremos por $\mathcal{D}(\widetilde{R}(t))$ a la distribución de $\widetilde{R}(t)$, $\widetilde{\psi}(u)$ la probabilidad de ruina (con horizonte infinito) del modelo (6) y $\mathcal{D}(\widetilde{\tau})$ la distribución del tiempo de ruina $\widetilde{\tau}$ (o en su caso, $p_{\widetilde{\tau}}$ la densidad de $\widetilde{\tau}$).

Es razonable decir que el problema de la aproximación del modelo M , por medio del modelo \widetilde{M} , es *estable* si, cuando en cierto sentido $\widetilde{\alpha}$ aproxima a α , se cumplen las siguientes propiedades:

- $\mathcal{D}(\widetilde{R}(t))$ aproxima a $\mathcal{D}(R(t))$;

- $\{\tilde{\psi}(u), u \geq 0\}$ aproxima a $\{\psi(u), u \geq 0\}$ y
- $\mathcal{D}(\tilde{\tau})$ aproxima a $\mathcal{D}(\tau)$.

Para especificar el concepto de “aproximación”, usaremos diferentes métricas (en particular, métricas en el espacio de funciones de distribución), a veces llamadas *métricas probabilísticas*. En la siguiente sección se introducen las definiciones más precisas.

En el Ejemplo 1.8 del Capítulo 1 vamos a ver que el problema de aproximación podría ser *no estable* con la selección de ciertas métricas (muy “naturales” y usadas). Por lo tanto, una de las tareas principales de este trabajo es seleccionar algunas métricas “adecuadas” y proponer las restricciones correspondientes sobre los procesos de riesgo analizados, que permitan obtener resultados cuantitativos generales acerca de la estabilidad.

I3. Planteamiento del problema de la estimación de la estabilidad

El objetivo del presente trabajo es el desarrollo de métodos para la estimación de la estabilidad en algunos modelos de riesgo. En este trabajo, estamos interesados en obtener resultados *cuantitativos*, que son los más importantes en aplicaciones.

En términos generales, el problema se plantea de la siguiente manera:

- (1) Seleccionar adecuadamente algunas métricas:
 - d_R en el espacio de funciones de distribución en \mathbb{R} ;
 - d_ψ en el espacio de funciones $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$;
 - d_τ en el espacio de funciones de densidad en \mathbb{R} ;
 - d_j , $j = 1, 2, 3$, en el espacio de parámetros \mathfrak{A} ;

tales que, d_R , d_ψ , d_τ y d_j para $j = 1, 2, 3$, sean “tratables” desde el punto de vista de aplicaciones.

- (2) Encontrar funciones continuas $\phi_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, para $j = 1, 2, 3$, tales que, $\phi_j(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 0$, y hallar un conjunto de restricciones sobre los modelos de riesgo considerados que permitan demostrar

las siguientes desigualdades:

$$\bullet \sup_{t \geq 0} d_R(\mathcal{D}(R(t)), \mathcal{D}(\tilde{R}(t))) \leq \phi_1[d_1(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}})]; \quad (7)$$

$$\bullet d_\psi(\psi(\cdot), \tilde{\psi}(\cdot)) \leq \phi_2[d_2(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}})]; \quad (8)$$

$$\bullet d_\tau(p_\tau, p_{\tilde{\tau}}) \leq \phi_3[d_3(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}})]. \quad (9)$$

Las desigualdades (7)-(9) garantizan que la “aproximación” (en la métrica correspondiente) de los parámetros gobernantes de los modelos M y \tilde{M} , aseguran cierta cercanía (en la métrica correspondiente) de las características de interés ((2), (4) y (5)). Por eso vamos a hablar sobre “desigualdades de estabilidad” (o en otra terminología, desigualdades de continuidad).

El planteamiento del problema de búsqueda de desigualdades (como (7), (8) y (9)) va a depender del tipo de proceso de riesgo considerado y de las características correspondientes analizadas. Tales especificaciones se hacen al inicio de los Capítulos 1-4.

I4. Resultados conocidos

Hasta donde sabemos hay pocos trabajos que tratan desigualdades de estabilidad (como en (7)) para la distribución del proceso de riesgo. Por ejemplo, en Beirlant and Rachev (1987) y Rachev (1991) hay resultados de este tipo para el modelo Sparre Andersen. En Gordienko (2004) se demuestra una desigualdad de estabilidad para la distribución de $R(t)$ en modelos generales pero bajo la restricción de que $\mathcal{D}(N(t)) = \mathcal{D}(\tilde{N}(t))$.

Sobre la estabilidad de $\mathcal{D}(R(t))$ para procesos multidimensionales de riesgo, no se encontraron resultados en la literatura relacionados con este tipo de desigualdades.

En el Capítulo 3 de este trabajo se demuestran las desigualdades del tipo (7) que obtuvimos y que además están publicadas en el artículo Gordienko and Vázquez-Ortega (2018).

En cuanto a la desigualdad (8), que concierne a la estabilidad de la probabilidad de ruina (con horizonte infinito), existen muchos trabajos dedicados a la aproximación y el acotamiento de esta probabilidad para modelos clásicos y de Sparre Andersen. No obstante, conocemos pocos artículos donde algunas desigualdades de estabilidad (continuidad) han sido obtenidas. Entre

ellos están: Benouaret and Aïssani (2010), Enikeeva et al. (2001), Kalashnikov (2000) y Rusaityte (2001).

Los métodos desarrollados en estos trabajos son bastante generales y usan la técnica (complicada) de la teoría de procesos de Markov. Comentarios más completos sobre estos trabajos se dan en el Capítulo 1.

Otro enfoque para el estudio de la continuidad de la probabilidad de ruina es el *análisis de sensibilidad* (ver, por ejemplo, Asmussen and Albrecher (2010), Chan and Yang (2005), Vázquez-Abad and LeQuoc (2001) y Loisel and Privault (2009)). *Grosso modo*, esta técnica consiste en estimar las derivadas (o gradientes) de la probabilidad de ruina con respecto a los parámetros involucrados en el modelo (1), por ejemplo, λ , c , o algunos parámetros de la función de distribución particular F de los montos de las reclamaciones. Tales derivadas revelan la manera en la que la probabilidad de ruina depende de dichos parámetros y proveen cierta información sobre la estabilidad de la probabilidad de ruina respecto a pequeñas variaciones de algunos parámetros. Sin embargo, esta información es de carácter *local*. Además, el método es aplicable solamente para una clase reducida de funciones de distribución F “bien parametrizadas”.

En este trabajo, los resultados sobre la desigualdad (8) se presentan en el Capítulo 1 y están publicados en Gordienko and Vázquez-Ortega (2016).

Finalmente, dos desigualdades del tipo (9) se demuestran en el Capítulo 4 de este trabajo para densidades del tiempo de ruina en el modelo de Sparre Andersen con montos de reclamación exponenciales. Dichos resultados se encuentran publicados en Gordienko et al. (2020). No hemos encontrado en la literatura otros resultados conocidos de este tipo.

I5. Breve reseña de los resultados obtenidos en la tesis

En el primer capítulo consideramos el modelo clásico dado por la ecuación (1), donde $N(t)$ es un proceso de Poisson con intensidad λ . El objetivo es desarrollar un nuevo método que nos permita establecer desigualdades simples de estabilidad para la probabilidad de ruina.

Como siempre, en este texto, F es la función de distribución de los montos de las reclamaciones $\{X_i, i \geq 1\}$, y $\psi(u)$, $u \geq 0$, denota la probabilidad de

ruina (con horizonte infinito).

Suponemos que los *parámetros* desconocidos F y λ son aproximados por \tilde{F} y $\tilde{\lambda}$, conocidos. De esta forma, surge el *modelo aproximante* dado por la ecuación (6), donde \tilde{F} es la función de distribución de $\{\tilde{X}_i, i \geq 1\}$ y $\tilde{\lambda}$ es la intensidad de $\tilde{N}(t)$.

La probabilidad de ruina para el modelo (6) se denota por $\tilde{\psi}(u)$, $u \geq 0$.

Usando la técnica de operadores contractivos, proponemos un nuevo enfoque para resolver el problema de estabilidad de la probabilidad de ruina. Uno de los principales resultados del capítulo es la siguiente desigualdad de estabilidad (que se cumple bajo la desigualdad de la ganancia neta):

$$\sup_{u \geq 0} |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)| \leq \mathcal{C}_1 \mathbb{K}(F, \tilde{F}) + \mathcal{C}_2 |\lambda - \tilde{\lambda}|, \quad (10)$$

donde $\mathbb{K}(F, \tilde{F}) = \int_0^\infty |F(x) - \tilde{F}(x)| dx$, es la *métrica de Kantorovich* y, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son constantes que se calculan explícitamente.

Para el caso cuando las distribuciones F y \tilde{F} son de cola ligera, hemos obtenido la versión correspondiente de (10) en la cual, en el lado izquierdo aparece $\sup_{u \geq 0} e^{\alpha u} |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)|$ (para algún $\alpha > 0$) y en la parte derecha la métrica de Kantorovich ponderada.

Como una aplicación importante discutimos el caso cuando \tilde{F} es la función de distribución empírica derivada las observaciones i.i.d. X_1, X_2, \dots, X_n .

En el Capítulo 2, tratamos un problema similar al del Capítulo 1, pero para la versión a tiempo discreto del modelo clásico de riesgo. Usando el mismo método de operadores contractivos y la versión discreta de la métrica de Kantorovich, hemos establecido una versión de la desigualdad de estabilidad para la probabilidad de ruina.

En el Capítulo 3, consideramos un proceso de renovación multidimensional de riesgo. En las últimas dos décadas, este tipo de procesos han atraído atención creciente. En parte, esto se debe a que, dichos procesos pueden modelar varias *líneas dependientes* de la actividad de una compañía aseguradora. Para este proceso estudiamos la estabilidad cuantitativa de la distribución $\mathcal{D}(R(t))$ del superávit multidimensional $R(t) = (R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t))$ de

la compañía. La dinámica de $R(t)$ está dada por el proceso de renovación multivariante indicado en (3.1) del Capítulo 3. Los *parámetros* que rigen a este proceso son:

- La función de distribución F de los vectores aleatorios i.i.d. que representan a los montos (multidimensionales) de las reclamaciones;
- La función de distribución G de los intervalos entre las llegadas de las reclamaciones.

Para el caso cuando F y G son desconocidas y deben estimarse (por ejemplo, estadísticamente) mediante algunas funciones de distribución \tilde{F} y \tilde{G} , se determina un proceso de riesgo *aproximante* (definido por \tilde{F} y \tilde{G}). A la distribución de este proceso la denotaremos por $\mathcal{D}(\tilde{R}(t))$ (en el momento t).

Una consecuencia de uno de los principales resultados (Teorema 3.19) del Capítulo 3 es la siguiente desigualdad de estabilidad:

Bajo algunas condiciones, para cada $T > 0$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} d_{VT}(\mathcal{D}(R(t)), \mathcal{D}(\tilde{R}(t))) \leq \bar{\mathcal{C}}_1 \mu(F, \tilde{F}) + \bar{\mathcal{C}}_2 [\mu(G, \tilde{G})]^{1/2}, \quad (11)$$

donde d_{VT} es la *distancia de variación total* y μ es una combinación de d_{VT} y el *segundo pseudomomento absoluto*.

Formalmente, T no está incluida en el lado derecho de (11), sin embargo, esta desigualdad se cumple bajo la condición de que $\mu(G, \tilde{G}) \leq \varphi(T) \rightarrow 0$, cuando $T \rightarrow \infty$. Así, la desigualdad (11) tiene un carácter local.

Para probar (11) y sus análogos, usamos algunos resultados conocidos sobre la comparación de vectores aleatorios i.i.d.

En el Capítulo 4 volvemos al problema de la ruina, pero ahora estamos interesados en estimar la estabilidad cuantitativa de la distribución del tiempo de ruina τ .

En comparación con la probabilidad de ruina con horizonte infinito, la distribución de τ proporciona (en cierto sentido) más información. En efecto, $P(\tau \leq t)$ es la probabilidad de ruina en el intervalo $[0, t]$ (para cada $t > 0$). En este capítulo consideramos el proceso de riesgo Sparre Andersen con montos de las reclamaciones exponenciales, para el cual, los *parámetros* son el promedio $1/\delta$, $\delta > 0$, del tamaño de las reclamaciones y la densidad f de los tiempos entre las llegadas de las reclamaciones.

Aquí, el proceso de riesgo aproximante se define por $\tilde{\delta}$ y \tilde{f} , que son las aproximaciones dadas de δ y f .

Sean p_τ y \tilde{p}_τ la densidad del tiempo de ruina en los *modelos ideal y aproximante*, respectivamente. Haciendo uso de la representación de p_τ (dada en Borovkov and Dickson (2008)), la cual está dada en términos de las convoluciones de f , obtuvimos la siguiente desigualdad de estabilidad:

$$\sup_{t \geq 0} |p_\tau(t) - \tilde{p}_\tau(t)| \leq b_1 \mu(f, \tilde{f}) + b_2 |\delta - \tilde{\delta}|,$$

donde, μ es cierta métrica en el espacio de densidades y está expresada en términos de la métrica de variación total y de la distancia segunda diferencia pseudomomento.

También se discute el caso cuando \tilde{f} es un estimador estadístico de la función desconocida f .

Capítulo 1

Estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo

Uno de los modelos más estudiados en la teoría del riesgo es el modelo clásico de riesgo, también llamado modelo de Cramér-Lunberg. De la Introducción recordamos que este proceso se define como:

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0; \quad (1.1)$$

donde $N(t)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$ independiente de la sucesión de variables aleatorias i.i.d. $\{X_i\}$, la cual representa a los montos sucesivos de las reclamaciones (con función de distribución F); $u \geq 0$ es el capital inicial y $c > 0$ es la prima acumulada por unidad de tiempo.

En nuestro planteamiento del problema de la estimación de la estabilidad, nos referimos a (1.1) como el *modelo ideal*.

Es común que en aplicaciones el parámetro λ y/o la función de distribución F sean desconocidas. Ante esta situación, tales incógnitas normalmente se aproximan por algunos “parámetros” que denotaremos por $\tilde{\lambda}$ y \tilde{F} , respectivamente. Dicha aproximación puede derivarse de estimaciones estadísticas o de algunas consideraciones teóricas (ver por ejemplo, Benouaret and Aïssani (2010), Enikeeva et al. (2001) y Kalashnikov (2000)). Es así como surge la

2 Estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo

necesidad de considerar una versión del modelo de riesgo dado en (1.1), que esté gobernado por los parámetros $\tilde{\lambda}$ y \tilde{F} :

$$\tilde{R}(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{X}_i, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

que será llamado *modelo aproximante*.

Retomando la definición de probabilidad de ruina (con horizonte infinito):

$$\psi(u) := P\left(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 \mid R(0) = u\right), \quad (1.3)$$

el análisis de su estabilidad se hace cuando en el modelo ideal:

- La función de distribución F de los montos de las reclamaciones o el parámetro λ son desconocidos y en tal caso no es posible determinar (o aproximar) a la probabilidad de ruina $\psi(u)$;
- F es conocida, pero demasiado complicada, lo cual implica que los cálculos para la obtener $\psi(u)$ sean poco prácticos.

Bajo cualquiera de estas situaciones, se va a suponer que la función de distribución F es aproximada por una función \tilde{F} para la cual es posible calcular la probabilidad de ruina $\tilde{\psi}$.

Como en (1.3), la probabilidad de ruina para el modelo aproximante (1.2) se define como:

$$\tilde{\psi}(u) := P\left(\inf_{t \geq 0} \tilde{R}_t < 0 \mid \tilde{R}(0) = u\right). \quad (1.4)$$

En este capítulo se demuestran desigualdades de estabilidad como la siguiente (ver (8) en la Introducción):

$$d_\psi(\psi(\cdot), \tilde{\psi}(\cdot)) \leq \phi_2[d_2(\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}})], \quad (1.5)$$

que estime la cercanía entre $\tilde{\psi}$ y ψ en términos de las desviaciones de los “parámetros” $\boldsymbol{\alpha}$ y $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$.

El análisis de estabilidad se realiza en los siguientes casos:

- Primero, cuando la función de distribución F es arbitraria;
- Segundo, cuando F tiene cola ligera.

Dado que las variables aleatorias X_1, X_2, \dots son idénticamente distribuidas (respectivamente $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots$), en lo que sigue vamos a denotar por X (y respectivamente por \tilde{X}) a la variable aleatoria genérica correspondiente. También, siempre vamos a suponer que se cumplen las siguientes hipótesis.

Hipótesis 1.1. $\mu := EX < \infty$ y $\tilde{\mu} := E\tilde{X} < \infty$.

Hipótesis 1.2.

$$\rho := \frac{\lambda\mu}{c} < 1 \quad y \quad \tilde{\rho} := \frac{\lambda\tilde{\mu}}{c} < 1. \quad (1.6)$$

Cada desigualdad en (1.6) se conoce como *condición de ganancia neta*; regularmente se usan para que $E(R(t))$ y $E(\tilde{R}(t))$ (en los modelos (1.1) y (1.2)) crezcan con el tiempo y a su vez que $\psi(u) < 1$ y $\tilde{\psi}(u) < 1$.

1.1. Resultados relacionados

Numerosos métodos de aproximación de la probabilidad de ruina han sido propuestos para el modelo clásico (1.1) (consulte, por ejemplo, los libros Asmussen and Albrecher (2010), Dickson (2016) y Rincón (2012)). Una situación similar ocurre en la teoría de acotamiento (superior o por ambos lados) de la probabilidad de ruina (ver, por ejemplo, los libros Asmussen and Albrecher (2010), Rolski et al. (1999), así como los artículos Cai and Dickson (2003), Kartashov (2001), Kalashnikov (1996) y Kalashnikov (1997)). La aplicación de estos métodos requiere información *exacta* sobre los valores de algunos momentos de la función de distribución F , o sobre ciertos parámetros de la función generadora de F .

Dichos métodos de aproximación están ligeramente relacionados con nuestros resultados de este capítulo. El enfoque que presentamos es distinto y permite que la función de distribución F sea totalmente desconocida (pudiendo ser aproximada, por ejemplo, por una función de distribución empírica obtenida a partir de datos estadísticos).

En nuestro caso, se plantea el problema de la búsqueda de desigualdades para una distancia entre las probabilidades de ruina $\psi(u)$ y $\tilde{\psi}(u)$, $u \geq 0$. Hay algunos artículos que contienen resultados relacionados con nuestras desigualdades de estabilidad: Benouaret and Aïssani (2010), Enikeeva et al. (2001), Kalashnikov (2000) y Rusaityte (2001). En estos trabajos se estudian

algunos modelos de riesgo generales que en particular incluyen procesos de riesgo Sparre Andersen (y por supuesto, el proceso clásico de riesgo).

En Benouaret and Aïssani (2010) se utiliza la métrica de variación total ponderada, mientras que en Enikeeva et al. (2001) la desviación de la probabilidad de ruina se mide por la distancia $\int_0^\infty e^{\bar{\alpha}u} |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)| du$ (con un $\bar{\alpha} > 0$).

En Rusaityte (2001), se estudia la estabilidad de la probabilidad de ruina para procesos de riesgo Markov-modulados con inversiones y se usa la métrica uniforme ponderada $\sup_u \omega(u) |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)|$, donde ω es una función creciente que se aleja del cero (típicamente a infinito). En este artículo, bajo el cumplimiento de condiciones de Liapunov, el autor aplica técnicas de procesos regenerativos para obtener las desigualdades de estabilidad (o continuidad). Las desviaciones de las distribuciones de los montos de las reclamaciones se miden en la métrica uniforme ponderada. Los resultados obtenidos en este trabajo se aplican solamente para las distribuciones de cola ligera.

En los artículos Benouaret and Aïssani (2010), Enikeeva et al. (2001), Kalashnikov (2000) y Rusaityte (2001) las desigualdades de continuidad para la probabilidad de ruina se demuestran aplicando un método complicado. Esencialmente, la técnica usada consiste en expresar a la probabilidad de ruina en términos de la distribución estacionaria de una cadena de Markov ergódica. Luego, se usan los resultados de Kartashov (1986), Meyn and Tweedie (1993) y Mitrophanov (2005) para acotar la distancia de variación total ponderada entre dos distribuciones estacionarias.

Comparando los resultados obtenidos en los artículos de arriba con nuestras desigualdades (1.9), (1.15) y (1.17) (presentadas más adelante), dichos artículos tienen las siguientes desventajas:

- Las desviaciones de los parámetros gobernantes se estiman usando la métrica “fuerte” de variación total ponderada W . Debido a que la convergencia débil y la convergencia en la métrica de Kantorovich **no** implican la convergencia con respecto a W , estas desigualdades no pueden ser aplicadas, por ejemplo, en los casos cuando las funciones de distribución desconocidas se aproximan por funciones de distribución empíricas.
- Las desigualdades de dichos trabajos son locales, es decir, se cumplen solamente si los parámetros de los procesos de riesgo comparados son

suficientemente cercanos.

- Las partes derechas de tales desigualdades, son funciones no lineales de la distancia entre los parámetros. De hecho, estas funciones son potenciales (con potencia menor que 1).

En nuestros resultados, las distancias de Kantorovich y Kantorovich ponderada entran en la parte derecha de la desigualdad, a través de funciones lineales.

Aquí destacamos que nuestras desigualdades de estabilidad (1.9), (1.15) y (1.17):

- Utilizan métricas probabilísticas “débiles”, lo que las hace compatibles con la *convergencia débil* de distribuciones empíricas;
- Las desigualdades son “globales”, es decir, las desviaciones de los parámetros pueden ser arbitrarias;
- Su estructura es simple y fácil de interpretar en aplicaciones.

Cabe mencionar la desigualdad de estabilidad obtenida (como resultado auxiliar) en Santana Cobian et al. (2017), donde $|\psi(u) - \tilde{\psi}(u)|$ está acotada básicamente por $c(u)|F(x) - \tilde{F}(x)|$. Desafortunadamente, para reclamaciones no acotadas, $c(u) = \text{constante}$ que depende del capital inicial $u \geq 0$ y también se supone que $\lambda = \tilde{\lambda}$.

1.2. Algunas métricas

En esta sección presentamos dos métricas que se usan más adelante. Sea \mathfrak{X} el conjunto de todas las funciones $x : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$.

Definición 1.3. *La métrica uniforme ν en \mathfrak{X} se define como:*

$$\nu(x, y) := \sup_{u \geq 0} |x(u) - y(u)|, \quad x, y \in \mathfrak{X}. \quad (1.7)$$

Es fácil demostrar que (\mathfrak{X}, ν) es un espacio métrico completo.

Denotamos por \mathfrak{F} al conjunto de todas funciones de distribución F de variables aleatorias positivas.

Definición 1.4. Sean $F, G \in \mathfrak{F}$. La función $\mathbb{K} : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \rightarrow [0, \infty]$, definida por

$$\mathbb{K}(F, G) := \int_0^\infty |F(x) - G(x)| dx, \quad (1.8)$$

se llama *métrica de Kantorovich*.

Los hechos dados en la siguiente proposición son bien conocidos (véase por ejemplo, el libro Rachev and Rüschendorf (1998)).

Proposición 1.5. (a) Si $\int_0^\infty x dF(x) < \infty$ y $\int_0^\infty x dG(x) < \infty$ entonces $\mathbb{K}(F, G) < \infty$.

(b) Sea $\{F; F_n\} \in \mathfrak{F}$ una sucesión de funciones de distribución (de variables aleatorias positivas) tales que $\int_0^\infty x dF_n < \infty$ y $\int_0^\infty x dF < \infty$. Entonces $\mathbb{K}(F_n, F) \rightarrow 0$ si y solo si:

- (i) $F_n \Rightarrow F$ (converge débilmente); y
- (ii) $\int_0^\infty x dF_n(x) \rightarrow \int_0^\infty x dF(x)$ (cuando $n \rightarrow \infty$).

1.3. Resultados obtenidos

1.3.1. Desigualdad de estabilidad para la probabilidad de ruina ψ en el caso general

Ahora todo está listo para especificar y demostrar la desigualdad (8) dada en la Introducción.

Sean ν y \mathbb{K} la métrica uniforme y la métrica de Kantorovich definidas en (1.7) y (1.8), respectivamente; ψ y $\tilde{\psi}$ las probabilidades de ruina definidas en (1.3) y (1.4).

Teorema 1.6. Supongamos que se cumplen las Hipótesis 1.1 y 1.2. Entonces:

$$\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq K[\lambda \mathbb{K}(F, \tilde{F}) + |\lambda - \tilde{\lambda}| \tilde{\mu}], \quad (1.9)$$

donde

$$K = \min \left\{ \frac{1}{c - \mu\lambda}, \frac{1}{c - \tilde{\mu}\tilde{\lambda}} \right\}. \quad (1.10)$$

La desigualdad (1.9) da una cota superior para la desviación $|\psi(u) - \tilde{\psi}(u)|$, que es *uniforme* sobre todas las posibles reservas iniciales.

1.3.2. Ejemplo numérico de aplicación de la cota superior para $\nu(\psi, \tilde{\psi})$

La desigualdad (1.9) se cumple para cada función de distribución de los tamaños de las reclamaciones $F, \tilde{F} \in \mathfrak{F}$ (suponiendo que los promedios son finitos), en particular, para las denominadas *distribuciones de cola pesada*. Al parecer no existen fórmulas explícitas para calcular las probabilidades de ruina para distribuciones de cola pesada. Por tal razón, para dar una ilustración numérica de la precisión de la desigualdad dada en (1.9), vamos a considerar el caso cuando los montos de las reclamaciones siguen la distribución Gama.

Ejemplo 1.7. Para $\varepsilon > 0$, sean F y $\tilde{F} = \tilde{F}_\varepsilon$ funciones de distribución con las siguientes densidades: $Gama(\alpha = 2, \beta = 1)$ y $Gama(\alpha = 2, \beta = 1 + \varepsilon)$, respectivamente. Usando la fórmula (3) del Apéndice, podemos calcular numéricamente $\psi(u)$ y $\tilde{\psi}(u)$. También calculamos numéricamente $\nu(\psi, \tilde{\psi}_\varepsilon) = \sup_{u \geq 0} |\psi(u) - \tilde{\psi}_\varepsilon(u)|$ y el término $\frac{\lambda}{c - \mu\lambda} \mathbb{K}(F, \tilde{F}_\varepsilon)$ en el lado derecho de (1.9). Los resultados obtenidos (para $\lambda = \tilde{\lambda} = 1$) se presentan en las Tablas 1.1 y 1.2. El parámetro ρ fue definido en (1.6).

$c = 3, \quad \rho = 2/3$		
ε	$\nu(\psi, \tilde{\psi})$	$\frac{\lambda}{c - \mu\lambda} \mathbb{K}(F, \tilde{F}_\varepsilon)$
0.5	0.2931	0.6667
0.2	0.1594	0.3333
0.1	0.0908	0.1818
0.01	0.0104	0.0198

Tabla 1.1: Comparación del lado izquierdo y derecho de (1.9) cuando $c = 3$.

Como podemos ver en las Tablas 1.1 y 1.2, la desigualdad (1.9) ofrece mejores aproximaciones cuando ρ es *pequeño*.

En el mismo ejemplo, para $c = 100$ ($\rho = 1/50$ y $\varepsilon = 0.01$) el lado izquierdo de la desigualdad (1.9) es 0.000198, mientras que el lado derecho es 0.000202 (una buena aproximación).

$c = 10, \quad \rho = 1/5$		
ε	$\nu(\psi, \tilde{\psi})$	$\frac{\lambda}{c-\mu\lambda} \mathbb{K}(F, \tilde{F}_\varepsilon)$
0.5	0.0685	0.0833
0.2	0.0345	0.0417
0.1	0.0189	0.0227
0.01	0.0021	0.0025

Tabla 1.2: Comparación de los lados izquierdo y derecho de (1.9) cuando $c = 10$.

1.3.3. ¿Es posible reemplazar a la métrica de Kantorovich \mathbb{K} por la distancia uniforme \mathcal{U} en la cota superior para $\nu(\psi, \tilde{\psi})$?

Desde el punto de vista de aplicaciones, es preferible que en el lado derecho de la desigualdad (1.9) tengamos una métrica *tan débil como sea posible*. Al inicio de la presente sección comentamos que la convergencia en \mathbb{K} , es equivalente a convergencia débil más convergencia de los primeros momentos (ver Proposición 1.5). Es razonable preguntar: ¿la métrica de Kantorovich \mathbb{K} en (1.9) puede ser reemplazada, por ejemplo, por la distancia uniforme \mathcal{U} ? (Aquí, $\mathcal{U}(F, \tilde{F}) := \sup_{x \geq 0} |F(x) - \tilde{F}(x)|$.) La respuesta a esta pregunta es negativa puesto que la convergencia de los promedios es necesaria para poder asegurar la estabilidad de las probabilidades de ruina. Efectivamente, es bien sabido (véanse los libros Asmussen and Albrecher (2010) y Rincón (2012)) que $\psi(0) = \lambda\mu/c$. Entonces, para $\lambda = \tilde{\lambda}$,

$$|\psi(0) - \tilde{\psi}(0)| = \frac{\lambda}{c} |\mu - \tilde{\mu}|.$$

El siguiente ejemplo ilustra que, también para $u > 0$, la aproximación de los promedios es necesaria.

Ejemplo 1.8. Denotamos por X y \tilde{X} a las variables aleatorias con funciones de distribución F y \tilde{F} , respectivamente. Sean $\lambda = \tilde{\lambda} = 1$, $c = 3$, $X \equiv 1$ y para $n = 1, 2, \dots$,

$$\tilde{X} = \tilde{X}_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1 - 1/n, \\ n & \text{con probabilidad } 1/n. \end{cases}$$

Es fácil ver que $\mathcal{U}(F, \tilde{F}_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ (véase la Figura 1.1) y en particular, $\tilde{F}_n \Rightarrow F$ (la convergencia débil). Sin embargo, $E\tilde{X}_n = 2 - 1/n \rightarrow$

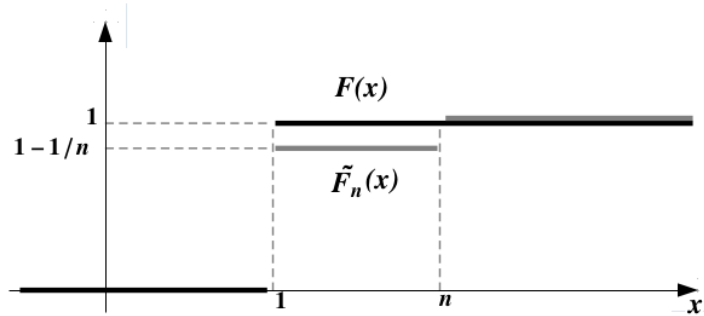


Figura 1.1: Funciones de distribución de X y X_n .

$EX = 1$. Seleccionando, por ejemplo, $u = 3$ y usando fórmulas conocidas (ver la fórmula (4) en el Apéndice) para calcular $\psi(u)$ cuando X es una variable aleatoria con un conjunto finito de valores, obtenemos que

$$\psi(3) \approx 0.0018, \text{ y}$$

$$\tilde{\psi}_n(3) = 1 - \frac{1}{3} \left[e - \frac{2}{3} e^{2/3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{18} e^{1/3} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \rightarrow 0.5009,$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Vemos que, a pesar de que $\mathcal{U}(F, \tilde{F}) \rightarrow 0$ y $\tilde{F} \Rightarrow F$, no se cumple que $\tilde{\psi} \rightarrow \psi$. Por lo tanto, la convergencia uniforme de las funciones de distribución F y \tilde{F} de los montos de las reclamaciones no es suficiente para garantizar la convergencia de las probabilidades de ruina.

1.3.4. Desigualdades de estabilidad para distribuciones de cola ligera

Comenzamos esta sección presentando algunas definiciones y resultados conocidos que explican las razones por las que consideramos a las funciones de distribución de cola ligera como un caso especial.

Hipótesis 1.9. *Supongamos que existen números r_* , $\tilde{r}_* \in (0, \infty]$ tales que:*

- (i) $Ee^{rX} < \infty$ para $r < r_*$ y $Ee^{rX} \rightarrow \infty$ cuando $r \uparrow r_*$.
- (ii) $Ee^{r\tilde{X}} < \infty$ para $r < \tilde{r}_*$ y $Ee^{r\tilde{X}} \rightarrow \infty$ cuando $r \uparrow \tilde{r}_*$.

Es bien sabido (ver Asmussen and Albrecher (2010), Rincón (2012) y Rolski et al. (1999)) que, bajo tales hipótesis, existen *coeficientes de ajuste* (consulte la Definición A.3 del Apéndice) que denotaremos por $\gamma \in (0, r_*)$ y $\tilde{\gamma} \in (0, \tilde{r}_*)$ para los modelos (1.1) y (1.2), respectivamente. Usando los coeficientes de ajuste se demuestran (véase Asmussen and Albrecher (2010), Rincón (2012) y Rolski et al. (1999)) las *desigualdades de Lundberg*:

$$\psi(u) \leq e^{-\gamma u}, \quad \tilde{\psi}(u) \leq e^{-\tilde{\gamma} u}, \quad u \geq 0. \quad (1.11)$$

Estas desigualdades indican que, para los casos cuando el capital inicial u es grande la métrica uniforme ν , definida en (1.7), no es efectiva para medir la desviación $\tilde{\psi}$ de ψ . En tal situación es mejor fijar un número $\alpha \in (0, \gamma_*)$, donde $\gamma_* := \min(\gamma, \tilde{\gamma})$ y considerar la distancia siguiente.

Definición 1.10. *Sea $\alpha \in (0, \gamma_*)$. La métrica uniforme ponderada ν_α en el espacio \mathfrak{X} se define como:*

$$\nu_\alpha(x, y) := \sup_{u \geq 0} e^{\alpha u} |x(u) - y(u)|. \quad (1.12)$$

En el Teorema 1.13 de abajo, obtenemos una cota superior para $\nu_\alpha(\psi, \tilde{\psi})$, donde α puede ser escogido para ser arbitrariamente cercano a γ_* (pero no igual). En este teorema, la métrica de Kantorovich (definida en (1.8)) se cambia por la siguiente métrica ponderada.

Definición 1.11. *Sean \mathfrak{F} el espacio de funciones de distribución de las v.a. positivas y $\beta > 0$ un número fijo. La métrica de Kantorovich ponderada (con valores en $[0, \infty]$) se define como:*

$$\mathbb{K}_\beta(F, G) := \int_0^\infty e^{\beta x} |F(x) - G(x)| dx, \quad F, G \in \mathfrak{F}. \quad (1.13)$$

Proposición 1.12.

- (a) Si $\int_0^\infty e^{\beta x} dF(x) < \infty$ y $\int_0^\infty e^{\beta x} dG(x) < \infty$, entonces $\mathbb{K}_\beta(F, G) < \infty$.
- (b) Supongamos que $\int_0^\infty e^{\beta x} dF(x) < \infty$ y $\int_0^\infty e^{\beta x} dF_n(x) < \infty$, para $n \geq 1$.

Entonces $\mathbb{K}_\beta(F_n, F) \rightarrow 0$ si y solo si

$$(i) F_n \Longrightarrow F \text{ (converge débilmente) y}$$

$$(ii) \int_0^\infty e^{\beta x} dF_n(x) \rightarrow \int_0^\infty e^{\beta x} dF(x), \text{ (cuando } n \rightarrow \infty).$$

Ahora sean $\alpha \in (0, \gamma_*)$ un número arbitrario pero fijo y β una cota superior arbitraria pero fija de γ , tal que

$$\text{mín}(r_*, \tilde{r}_*) > \beta \geq \gamma. \quad (1.14)$$

Para estas constantes elegidas, sean ν_α y \mathbb{K}_β la métrica uniforme ponderada y la métrica de Kantorovich ponderada definidas en (1.12) y (1.13), respectivamente.

Teorema 1.13. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis 1.1, 1.2 y 1.9. Entonces*

$$\nu_\alpha(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{\beta c(1 - M_\alpha)} \left[\int_0^\infty e^{x\beta} d\tilde{F}(x) - 1 \right] |\lambda - \tilde{\lambda}| +$$

$$\frac{\lambda}{c(1 - M_\alpha)} \mathbb{K}_\beta(F, \tilde{F}), \quad (1.15)$$

donde

$$M_\alpha := \frac{\tilde{\lambda}}{c} \int_0^\infty e^{\alpha x} [1 - \tilde{F}(x)] dx < 1. \quad (1.16)$$

El siguiente resultado, obtenido para el caso cuando $\tilde{\lambda} = \lambda$, proporciona una cota más precisa que (1.15).

Proposición 1.14. *Sea $\tilde{\lambda} = \lambda$. Entonces, bajo las hipótesis del Teorema 1.13,*

$$\nu_\alpha(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{\lambda}{c(1 - M_\alpha)} \left[\sup_{u \geq 0} e^{\alpha u} \int_u^\infty |F(x) - \tilde{F}(x)| dx \right.$$

$$\left. + \sup_{u \geq 0} e^{-(\gamma - \alpha)u} \int_0^u e^{\gamma x} |F(x) - \tilde{F}(x)| dx \right]. \quad (1.17)$$

Desigualdad en el caso de aproximación por distribuciones empíricas

Como un ejemplo de aplicación de la desigualdad (1.9), vamos a analizar una situación importante desde el punto de vista práctico. Es decir, cuando se necesita estimar la probabilidad de ruina $\psi(u)$ en el modelo de riesgo (1.1) *sin suponer ninguna información preliminar* sobre la intensidad λ de los intervalos entre las llegadas de las reclamaciones y/o la función de distribución F de los montos de las reclamaciones. En lugar de eso vamos a suponer que se conocen las observaciones X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. de la variable aleatoria X , con función de distribución F . Supongamos también que se conocen los datos estadísticos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ para los intervalos entre las llegadas de las reclamaciones.

Existen diferentes métodos para la estimación estadística no paramétrica de la probabilidad de ruina (véase, por ejemplo, Frees (1986), Bening and Korolev (2003), Mnatsakanov et al. (2008), Marceau and Rioux (2001)). Como un nuevo enfoque proponemos el siguiente procedimiento.

Usando los datos estadísticos dados, se calcula el estimador de λ :

$$\hat{\lambda}_n := \frac{n}{\tau_1 + \dots + \tau_n},$$

y la función de distribución empírica

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i \leq x\}}, \quad x \geq 0.$$

La función de distribución \hat{F}_n y $\hat{\lambda}_n$ se usan como las correspondientes estimaciones de F y λ , por lo tanto, aparecen como *parámetros gobernantes* en el modelo aproximante (1.2).

En este caso, el cálculo de la probabilidad de ruina $\tilde{\psi} \equiv \tilde{\psi}_n$ para el proceso aproximante (1.2) solo requiere facilidades computacionales adecuadas, ya que la variable aleatoria \tilde{X}_n con la distribución \hat{F}_n , toma n valores X_1, X_2, \dots, X_n con probabilidades iguales a $1/n$. Existen fórmulas explícitas bien conocidas para calcular la probabilidad de ruina en el modelo clásico si el tamaño de reclamación es una variable aleatoria con un número finito de

valores (consulte, por ejemplo, el libro de Kaas et al. (2008)).

Hay que subrayar que $\hat{\lambda}_n$ y \hat{F}_n son objetos aleatorios. Entonces, para cada $u \geq 0$ la probabilidad de ruina $\psi(u)$ es una variable aleatoria.

Es bien sabido que si $\int_0^\infty x dF(x) < \infty$, entonces $\int_0^\infty |F(x) - \hat{F}_n(x)| dx \rightarrow 0$ casi seguramente cuando $n \rightarrow \infty$ (véase por ejemplo Rachev (1991)). También $\hat{\lambda}_n \rightarrow \lambda$, casi seguramente.

Aplicando la desigualdad (1.9) vemos que, $\tilde{\psi}_n(u)$ es una estimación consistente de $\psi(u)$, es decir, con probabilidad uno, $\sup_{u \geq 0} |\psi(u) - \tilde{\psi}_n(u)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Si adicionalmente suponemos que para algún $\delta > 0$, $\mu_{2+\delta} := \int_0^\infty x^{2+\delta} dF(x) < \infty$, entonces de los resultados de Bobkov and Ledoux (2019) puede deducirse que

$$E \int_0^\infty |F(x) - \hat{F}_n(x)| dx \leq \left[1 + \frac{2}{\delta} \mu_{2+\delta}^{1/2} \right] \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

Luego, usando la normalidad asintótica se demuestra que

$$E|\lambda - \tilde{\lambda}_n| \leq c(\lambda) \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Asumimos que se conocen algunas cotas superiores $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ y $\bar{\mu}$ para λ , μ y $\tilde{\mu}$, respectivamente. Sustituyendo estas cotas en (1.9) y combinando tal modificación de la desigualdad (1.9) con (1.18) y (1.19) obtenemos una cota superior para la tasa de convergencia del promedio $E\nu(\psi, \tilde{\psi})$:

$$E \sup_{u \geq 0} |\psi(u) - \tilde{\psi}_n(u)| \leq \left\{ \frac{\bar{\lambda}}{c - \bar{\mu}\bar{\lambda}} \left[1 + \frac{2}{\delta} \mu_{2+\delta}^{1/2} \right] + \bar{\mu}c(\bar{\lambda}) \right\} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La última desigualdad (junto con la desigualdad de Markov) puede servir para el control del error de aproximación de la probabilidad de ruina como una función del volumen de datos estadísticos.

1.4. Demostraciones

Demostración de la Proposición 1.12.

(a) Esta parte se sigue inmediatamente de la definición de \mathbb{K}_β .

(b) Supongamos que $F_n \Rightarrow F$ y que $\int_0^\infty e^{\beta x} dF_n(x) \rightarrow \int_0^\infty e^{\beta x} dF(x)$,
cuando $n \rightarrow \infty$.

Para cada $c > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\beta(F_n, F) &= \int_0^\infty e^{\beta t} |F_n(t) - F(t)| dt \\ &\leq \int_0^c e^{\beta t} |F_n(t) - F(t)| dt + \int_c^\infty e^{\beta t} [1 - F_n(t)] dt + \int_c^\infty e^{\beta t} [1 - F(t)] dt \\ &=: I_{1,n} + I_{2,n} + I. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Fijando un $\varepsilon > 0$ arbitrario, escogemos $c > 0$ tal que $I < \varepsilon$. La convergencia débil $F_n \Rightarrow F$ implica que $F_n(x) \rightarrow F(x)$ casi donde quiera en $[0, \infty)$. Por lo tanto, por el Teorema de la Convergencia Dominada, existe N tal que en (1.20) $I_{1,n} < \varepsilon$ para $n \geq N$.

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\beta t} dF_n(t) - \int_0^\infty e^{\beta t} dF(t) &= \beta \int_0^c e^{\beta t} [F(t) - F_n(t)] dt + \\ &\left[\beta \int_c^\infty e^{\beta t} [1 - F_n(t)] dt - \beta \int_c^\infty e^{\beta t} [1 - F(t)] dt \right]. \end{aligned} \tag{1.21}$$

El lado izquierdo de (1.21) se aproxima a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Para $n \geq N$, el valor absoluto del primer sumando en el lado derecho de (1.21) es menor que $\beta\varepsilon$ y el último sumando también es menor que $\beta\varepsilon$.

Tomando en cuenta (1.20), encontramos que

$$\mathbb{K}(F_n, F) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \tag{1.22}$$

Ahora suponemos que se cumple (1.22). Dado que $\mathbb{K}_\beta(F_n, F) \geq \mathbb{K}(F_n, F)$, tenemos que $F_n \Rightarrow F$ (ya que la convergencia en la métrica de Kantorovich implica convergencia débil, ver Rachev and Rüschendorf (1998)).

Finalmente,

$$\left| \int_0^\infty e^{\beta t} dF_n(t) - \int_0^\infty e^{\beta t} dF(t) \right| \leq \beta \int_0^\infty e^{\beta t} |F_n(t) - F(t)| dt \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. □

A continuación, usaremos la notación $\bar{F}(x) := 1 - F(x)$; $\widetilde{\bar{F}}(x) := 1 - \widetilde{F}(x)$, $x \geq 0$.

Las siguientes ecuaciones integrales para probabilidades de ruina (definidas en (1.3) y (1.4)) son comúnmente conocidas (ver Teorema A.1 en el Apéndice, o bien, Rolski et al. (1999) y Rincón (2012)):

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right), \quad u \geq 0 \quad (1.23)$$

$$\widetilde{\psi}(u) = \frac{\widetilde{\lambda}}{c} \left(\int_u^\infty \widetilde{\bar{F}}(t) dt + \int_0^u \widetilde{\psi}(u-t) \widetilde{\bar{F}}(t) dt \right), \quad u \geq 0. \quad (1.24)$$

De la Proposición 1.17 (abajo) se sigue que la ecuación (1.23) tiene solución única en el espacio \mathfrak{X} .

Definimos dos operadores relacionados con la ecuaciones (1.23) y (1.24).

Definición 1.15. Para cada $x \in \mathfrak{X}$ las funciones Tx y $\widetilde{T}x$ se definen como sigue:

$$Tx(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \bar{F}(t) dt \right), \quad u \geq 0; \quad (1.25)$$

$$\widetilde{T}x(u) = \frac{\widetilde{\lambda}}{c} \left(\int_u^\infty \widetilde{\bar{F}}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \widetilde{\bar{F}}(t) dt \right), \quad u \geq 0. \quad (1.26)$$

Lema 1.16. $Tx, \widetilde{T}x \in \mathfrak{X}$ para cada $x \in \mathfrak{X}$.

Demostración. Puesto que $x(\cdot) \in [0, 1]$, para cada $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} Tx(u) &= \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \bar{F}(t) dt \right) \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \bar{F}(t) dt \right) \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{F}(t) dt = \frac{\lambda}{c} EY = \frac{\lambda\mu}{c} < 1. \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de la condición dada en (1.6).

Del mismo modo se prueba que $\widetilde{T}x \in \mathfrak{X}$. □

Este lema significa que (1.25) y (1.26) definen los operadores $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ y $\tilde{T} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$. Vamos a ver que estos operadores son contractivos en \mathfrak{X} .

Proposición 1.17. *Sean T y \tilde{T} los operadores definidos en (1.25) y (1.26), respectivamente. Entonces, bajo la condición (1.6), T es contractivo en (\mathfrak{X}, ν) con módulo $\rho = \lambda\mu/c < 1$, y respectivamente, \tilde{T} es contractivo en (\mathfrak{X}, ν) con módulo $\tilde{\rho} = \tilde{\lambda}\tilde{\mu}/c$. Es decir, para cada $x, y \in \mathfrak{X}$,*

$$\nu(Tx, Ty) \leq \rho\nu(x, y), \quad (1.27)$$

$$\nu(\tilde{T}x, \tilde{T}y) \leq \tilde{\rho}\nu(x, y). \quad (1.28)$$

Demostración. Por (1.25), para cada $x, y \in \mathfrak{X}$,

$$\begin{aligned} \nu(Tx, Ty) &= \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \left| \int_0^u x(u-t)\bar{F}(t)dt - \int_0^u y(u-t)\bar{F}(t)dt \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u \bar{F}(t) \sup_{s \in [0, u]} |x(s) - y(s)| dt \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \nu(x, y) \int_0^\infty \bar{F}(t) dt = \frac{\lambda\mu}{c} \nu(x, y). \end{aligned}$$

La desigualdad

$$\nu(\tilde{T}x, \tilde{T}y) \leq \frac{\tilde{\lambda}\tilde{\mu}}{c} \nu(x, y) \quad (1.29)$$

se verifica de manera similar. □

De acuerdo con (1.23), (1.24) y las funciones definidas en (1.25) y (1.26), ψ y $\tilde{\psi}$, son los únicos puntos fijos de T y \tilde{T} , es decir:

$$\psi = T\psi \text{ y } \tilde{\psi} = \tilde{T}\tilde{\psi}. \quad (1.30)$$

Corolario 1.18. *Sean ψ y $\tilde{\psi}$ las probabilidades de ruina definidas en (1.3) y (1.4), respectivamente. Entonces*

$$\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{c}{c - \lambda\mu} \nu(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}). \quad (1.31)$$

Demostración. De (1.30), la desigualdad del triángulo y la propiedad de contracción del operador T se sigue que

$$\begin{aligned} \nu(\psi, \tilde{\psi}) &= \nu(T\psi, \tilde{T}\tilde{\psi}) \leq \nu(T\psi, T\tilde{\psi}) + \nu(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}) \\ &\leq \rho\nu(\psi, \tilde{\psi}) + \nu(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}), \end{aligned}$$

o bien,

$$\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\rho} \nu(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}) = \frac{c}{c-\lambda\mu} \nu(T\tilde{\psi}, \tilde{T}\tilde{\psi}).$$

□

Demostración de los Teoremas del 1.6 y 1.13

Demostración del Teorema 1.6. De acuerdo con las definiciones dadas en (1.25) y (1.26) y la desigualdad del triángulo, tenemos que para cada $x \in \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned} \nu(Tx, \tilde{T}x) &\leq \sup_{u \geq 0} \left| \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \bar{F}(t) dt \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \tilde{\bar{F}}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \tilde{\bar{F}}(t) dt \right) \right| + \\ &\quad \sup_{u \geq 0} \left| \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{c} \left(\int_u^\infty \tilde{\bar{F}}(t) dt + \int_0^u x(u-t) \tilde{\bar{F}}(t) dt \right) \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty |\bar{F}(t) - \tilde{\bar{F}}(t)| dt + \frac{|\lambda - \tilde{\lambda}|}{c} \int_0^\infty (1 - \tilde{F}(t)) dt \\ &= \frac{\lambda}{c} \mathbb{K}(F, \tilde{F}) + \frac{|\lambda - \tilde{\lambda}|}{c} \tilde{\mu}. \end{aligned}$$

Combinando la última desigualdad con (1.31) obtenemos que

$$\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{c - \lambda\mu} \left[\lambda \mathbb{K}(F, \tilde{F}) + |\lambda - \tilde{\lambda}| \tilde{\mu} \right].$$

Para demostrar la desigualdad similar con $\frac{1}{c - \tilde{\lambda}\tilde{\mu}}$ en lugar de $\frac{1}{c - \lambda\mu}$ se usa la desigualdad (1.29). Y de esta manera queda demostrada la desigualdad (1.9). □

Demostración del Teorema 1.13. Primero notamos que $\alpha < \min(\gamma, \tilde{\gamma}) < \min(r_*, \tilde{r}_*)$, donde r_*, \tilde{r}_* son números que aparecen en la Hipótesis 1.9. Por lo tanto, la constante

$$M_\alpha := \frac{\tilde{\lambda}}{c} \int_0^\infty e^{\alpha t} \tilde{\bar{F}}(t) dt, \quad (1.32)$$

es finita, igual que la función $I(r) := \frac{\tilde{\lambda}}{c} \int_0^\infty e^{rt} \tilde{F}(t) dt$, $r \in [0, \tilde{r}_*)$. Tenemos que $I(0) = \frac{\tilde{\lambda}\tilde{\mu}}{c} < 1$ e $I(r)$ es estrictamente creciente con $I(\tilde{\gamma}) = 1$, donde $\tilde{\gamma}$ es el coeficiente de ajuste en el modelo aproximante de riesgo. Por lo tanto, $M_\alpha < 1$, es decir se cumple la condición (1.16).

Considerando la métrica ν_α (que toma valores en $[0, \infty]$) definida en (1.12), ahora vamos a demostrar que el operador \tilde{T} en (1.26) satisface la siguiente desigualdad:

$$\nu_\alpha(\tilde{T}x, \tilde{T}y) \leq M_\alpha \nu_\alpha(x, y); \quad x, y \in \mathfrak{X}, \quad (1.33)$$

donde $M_\alpha < 1$ es la constante definida en (1.32).
Por (1.26),

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(\tilde{T}x, \tilde{T}y) &= \sup_{u \geq 0} e^{\alpha u} \frac{\tilde{\lambda}}{c} \left| \int_0^u x(u-t) \tilde{F}(t) dt - \int_0^u y(u-t) \tilde{F}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{\tilde{\lambda}}{c} \sup_{u \geq 0} \int_0^u \tilde{F}(t) |x(u-t) - y(u-t)| e^{\alpha(u-t)} dt \\ &\leq \nu_\alpha(x, y) \frac{\tilde{\lambda}}{c} \int_0^\infty e^{\alpha t} \tilde{F}(t) dt = M_\alpha \nu_\alpha(x, y). \end{aligned}$$

Ahora, por (1.33) y la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(\psi, \tilde{\psi}) &= \nu_\alpha(T\psi, \tilde{T}\tilde{\psi}) \\ &\leq \nu_\alpha(\tilde{T}\tilde{\psi}, \tilde{T}\psi) + \nu_\alpha(\tilde{T}\psi, T\psi) \\ &\leq M_\alpha \nu_\alpha(\psi, \tilde{\psi}) + \nu_\alpha(\tilde{T}\psi, T\psi). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ya que $\alpha < \min(\gamma, \tilde{\gamma})$, de (1.11) vemos que $\nu_\alpha(\psi, \tilde{\psi}) < \infty$ y, por lo tanto, podemos sustraer $M_\alpha \nu_\alpha(\psi, \tilde{\psi})$ de ambas partes de (1.34). Esto da la desigualdad

$$\nu_\alpha(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1 - M_\alpha} \nu_\alpha(\tilde{T}\psi, T\psi). \quad (1.35)$$

Luego, usando nuevamente las definiciones (1.25), (1.26), y sumando términos apropiados, acotamos el último término en (1.35) como sigue.

$$\begin{aligned}
\nu_\alpha(T\psi, \tilde{T}\psi) &\leq \sup_{u \geq 0} e^{\alpha u} \left| \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{F}(t) dt \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{\tilde{F}}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{\tilde{F}}(t) dt \right) \right| + \\
&\quad \sup_{u \geq 0} e^{\alpha u} \left| \left[\frac{\lambda}{c} - \frac{\tilde{\lambda}}{c} \right] \left(\int_u^\infty \bar{\tilde{F}}(t) dt + \int_0^u \psi(u-t) \bar{\tilde{F}}(t) dt \right) \right| \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Para el término I_1 en el lado derecho de (1.36) tenemos:

$$I_1 \leq \frac{\lambda}{c} \left[\sup_{u \geq 0} \left(e^{\alpha u} \int_u^\infty |\bar{F}(t) - \bar{\tilde{F}}(t)| dt + e^{\alpha u} \int_0^u \psi(u-t) |\bar{F}(t) - \bar{\tilde{F}}(t)| dt \right) \right]. \tag{1.37}$$

En vista de (1.11), $\psi(u-t) \leq e^{-\gamma u + \gamma t}$. Por lo tanto,

$$I_1 \leq \frac{\lambda}{c} \left[\sup_{u \geq 0} \left(\int_u^\infty e^{\alpha t} |\bar{F}(t) - \bar{\tilde{F}}(t)| dt + e^{\alpha u} e^{-\gamma u} \int_0^u e^{\gamma t} |\bar{F}(t) - \bar{\tilde{F}}(t)| dt \right) \right]. \tag{1.38}$$

Ya que $\alpha < \gamma \leq \beta$, (1.38) da

$$I_1 \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{\beta t} |\bar{F}(t) - \bar{\tilde{F}}(t)| dt. \tag{1.39}$$

Se procede de manera similar para estimar el término I_2 en (1.36), por lo tanto:

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{|\lambda - \tilde{\lambda}|}{c} \left[\sup_{u \geq 0} \left(e^{\alpha u} \int_u^\infty \bar{\tilde{F}}(t) dt + e^{\alpha u} e^{-\gamma u} \int_0^u e^{\gamma t} \bar{\tilde{F}}(t) dt \right) \right] \\
&\leq \frac{|\lambda - \tilde{\lambda}|}{c} \int_0^\infty e^{\beta t} [1 - \bar{\tilde{F}}(t)] dt.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

La última integral da $\frac{1}{\beta} \left[\int_0^\infty e^{\beta t} d\tilde{F}(t) - 1 \right]$.

Finalmente, combinando las desigualdades (1.35), (1.36), (1.39) y (1.40) obtenemos la desigualdad (1.15) en Teorema 1.13.

□

Para demostrar la Proposición 1.14 es suficiente observar que la desigualdad (1.17) es una consecuencia de (1.35), (1.37) y (1.38).

Capítulo 2

Estimación de la estabilidad de la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo a tiempo discreto

La desigualdad de estabilidad que se presenta en este capítulo es un resultado que fue obtenido en la tesis de maestría Vázquez-Ortega (2015). Incluimos este resultado para mostrar que el método de operadores contractivos también funciona para procesos de riesgo a tiempo discreto. Además, es importante mencionar que, hasta el momento no hemos encontrado resultados parecidos de este tipo en la literatura.

El *modelo clásico de riesgo a tiempo discreto* (ver por ejemplo Dickson (2016) y Rincón (2012)) es el proceso $\{R(t) : t = 0, 1, 2, \dots\}$ dado por las siguientes ecuaciones recurrentes:

$$R(t) = u + t - \sum_{i=1}^t X_i, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad \left(\sum_{i=1}^0 X_i := 0 \right), \quad (2.1)$$

donde el número entero $u \in [0, \infty)$ es el capital inicial; X_1, X_2, \dots es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$ que representan a los montos acumulados de las reclamaciones en un periodo de longitud uno.

En (2.1) las unidades para contar el dinero se eligen de tal manera que la prima acumulada (por unidad de tiempo) sea igual a uno.

- (a) Denotamos por X a la variable aleatoria genérica de la sucesión X_1, X_2, \dots
- (b) Como en el capítulo anterior, F denota a la función de distribución de X .

Hipótesis 2.1. Supongamos que se cumple la *condición de ganancia neta* para el modelo (2.1), es decir:

$$\mu := EX < 1. \quad (2.2)$$

El *modelo de riesgo aproximante* de riesgo a tiempo discreto (es decir, que aproxima al (2.1)) correspondiente es el proceso $\{\tilde{R}(t) : t = 0, 1, 2, \dots\}$ dado por las ecuaciones:

$$\tilde{R}(t) = u + t - \sum_{i=1}^t \tilde{X}_i, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad \left(\sum_{i=1}^0 \tilde{X}_i := 0 \right), \quad (2.3)$$

donde $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots$ son variables aleatorias i.i.d. con valores en el conjunto $\{0, 1, \dots\}$.

Notación 2.2. (a) \tilde{X} es la variable aleatoria genérica de la sucesión $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots$

- (b) \tilde{F} denota la función de distribución de los montos de las reclamaciones \tilde{X} , en el modelo (2.3).

Hipótesis 2.3. Se cumple la condición de ganancia neta para el modelo aproximante, es decir:

$$\tilde{\mu} := E\tilde{X} < 1. \quad (2.4)$$

2.1. Planteamiento del problema de estabilidad

Considerando el tiempo discreto $t = 0, 1, 2, \dots$, retomamos las definiciones de probabilidad de ruina $\psi(u)$ y $\tilde{\psi}(u)$ dadas en (1.3) y (1.4) en el Capítulo 1, que ahora estarán asociadas a los procesos (2.1) y (2.3), respectivamente.

El problema de la estimación de la estabilidad de las probabilidades de ruina ψ y $\tilde{\psi}$ (con horizonte infinito) se plantea exactamente como en el Capítulo 1. En el presente caso contamos solamente con un parámetro gobernante del proceso. Esto es, la función de distribución F (y respectivamente, \tilde{F}). La meta es encontrar una métrica apropiada (en el espacio de funciones de distribución discretas) que permita demostrar una desigualdad de estabilidad como:

$$\sup_{u=0,1,2,\dots} |\psi(u) - \tilde{\psi}(u)| \leq cd(F, \tilde{F}), \quad (2.5)$$

donde c es una constante que será especificada más adelante.

Para abordar este problema vamos a hacer uso de una fórmula recurrente para la probabilidad de ruina asociada al modelo (2.1). Precisamente, la fórmula (ver Teorema A.5 en el Apéndice):

$$\psi(u) = \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} \psi(u-m)\bar{F}(m), \quad u = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

(donde $\bar{F}(t) := 1 - F(t)$) representa un método recursivo para calcular la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo a tiempo discreto. (En (2.6), la suma es el análogo discreto de la ecuación integral (1.23) dada en el Capítulo anterior para el cálculo de la probabilidad de ruina a tiempo continuo.)

Una ecuación análoga a (2.6) se cumple para la probabilidad de ruina $\tilde{\psi}$ para el modelo dado en (2.3), al sustituir F por \tilde{F} .

Notación 2.4. Sea \mathfrak{Y} el conjunto de funciones que se define de la siguiente manera:

$$\mathfrak{Y} := \{y \equiv y(u) \in [0, 1] : u = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Si consideramos la métrica uniforme ν (ver (1.7) en el Capítulo 1) que ahora está definida en el espacio de funciones \mathfrak{Y} , resulta que (\mathfrak{Y}, ν) es un espacio métrico completo.

Definición 2.5. Sean F y \tilde{F} las funciones de distribución de las variables aleatorias X y \tilde{X} correspondientes a los modelos (2.1) y (2.3), respectiva-

mente. Para cada $y \in \mathfrak{Y}$ definimos las funciones:

$$Sy(u) := \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} y(u-m)\bar{F}(m), \quad u \geq 0; \quad (2.7)$$

$$\tilde{S}y(u) := \sum_{m=u}^{\infty} \tilde{\bar{F}}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} y(u-m)\tilde{\bar{F}}(m), \quad u \geq 0. \quad (2.8)$$

Lema 2.6. Para cada $y \in \mathfrak{Y}$, se cumple que $Sy, \tilde{S}y \in \mathfrak{Y}$.

Demostración. Para cada $u \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} Sy(u) &= \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} y(u-m)\bar{F}(m) \\ &\leq \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} \bar{F}(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}(m) = EX < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Sy \in \mathfrak{Y}$.

De manera análoga se demuestra que $\tilde{S}y \in \mathfrak{Y}$. □

El lema anterior refleja que las expresiones (2.7) y (2.8) definen los operadores $S : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$ y $\tilde{S} : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}$.

2.2. Propiedades contractivas del operador S con respecto a la métrica uniforme

Proposición 2.7. Sean ν la métrica uniforme definida en (1.7) y S el operador definido en (2.7). Entonces S es una contracción en (\mathfrak{Y}, ν) con módulo $\mu = EX < 1$, es decir, para cada $x, y \in \mathfrak{Y}$,

$$\nu(Sx, Sy) \leq \mu\nu(x, y). \quad (2.9)$$

Similarmente, el operador \tilde{S} definido en (2.8) es una contracción en (\mathfrak{Y}, ν) con módulo $\tilde{\mu} = E\tilde{X} < 1$, es decir, para cada $x, y \in \mathfrak{Y}$,

$$\nu(\tilde{S}x, \tilde{S}y) \leq \tilde{\mu}\nu(x, y). \quad (2.10)$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathfrak{Y}$ arbitrarios pero fijos. Estimamos

$$\begin{aligned}
 \nu(Sx, Sy) &= \sup_{u \geq 1} \left| \sum_{m=0}^{u-1} x(u-m) \bar{F}(m) - \sum_{m=0}^{u-1} y(u-m) \bar{F}(m) \right| \\
 &\leq \sup_{u \geq 1} \sum_{m=0}^{u-1} |x(u-m) - y(u-m)| \bar{F}(m) \\
 &\leq \sup_{u \geq 1} \sum_{m=0}^{u-1} \sup_{s \in [0, u]} |x(s) - y(s)| \bar{F}(m) \\
 &\leq \nu(x, y) \sup_{u \geq 1} \sum_{m=0}^{u-1} \bar{F}(m) \leq \nu(x, y) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}(m) \\
 &\leq \nu(x, y) EX = \mu \nu(x, y),
 \end{aligned}$$

donde, por la Hipótesis 2.1, $\mu < 1$.

La desigualdad (2.10) se demuestra de manera similar. \square

Nota 2.8. De la ecuación (2.6) (y su análoga para $\tilde{\psi}(u)$) y las definiciones de los operadores S y \tilde{S} dadas en (2.7) y (2.8), respectivamente, se sigue que

$$S\psi = \psi, \quad \tilde{S}\tilde{\psi} = \tilde{\psi}. \quad (2.11)$$

Y de la Proposición 2.7 se obtiene que las funciones $\psi(u)$ y $\tilde{\psi}(u)$, $u \geq 0$ son soluciones únicas de las ecuaciones (2.11).

Corolario 2.9. Sea ν la métrica uniforme definida en (1.7), entonces

$$\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu} \nu(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}), \quad (2.12)$$

donde $\mu < 1$ es la constante de contracción de la Proposición 2.7.

Demostración. Por (2.11), la desigualdad del triángulo y la propiedad de contracción de S tenemos que

$$\begin{aligned}
 \nu(\psi, \tilde{\psi}) &= \nu(S\psi, \tilde{S}\tilde{\psi}) \leq \nu(S\psi, S\tilde{\psi}) + \nu(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}) \\
 &\leq \mu \nu(\psi, \tilde{\psi}) + \nu(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}).
 \end{aligned}$$

Entonces $\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \mu \nu(\psi, \tilde{\psi}) + \nu(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi})$, o bien $\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1-\mu} \nu(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi})$, con $1-\mu > 0$ por la condición de ganancia neta dada en la Hipótesis 2.1. \square

2.3. Una cota superior para $\nu(\psi, \tilde{\psi})$

Teorema 2.10. Sean $\psi, \tilde{\psi} \in \mathfrak{Y}$ las probabilidades de ruina para los modelos (2.1) y (2.3), entonces

$$\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1 - \mu} \mathbf{d}(F, \tilde{F}),$$

donde ν es la métrica uniforme definida en (1.7) en el Capítulo 1 y $\mathbf{d}(F, \tilde{F}) := \sum_{m=0}^{\infty} |F(m) - \tilde{F}(m)|$.

Para probar el Teorema 2.10 necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.11. Sean S, \tilde{S} los operadores definidos en (2.7) y (2.8). Entonces

$$\nu(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}) \leq \mathbf{d}(F, \tilde{F}).$$

Demostración. De las definiciones (2.7) y (2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} & \nu(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}) \\ &= \sup_{u \geq 0} \left| \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} \tilde{\psi}(u-m) \bar{F}(m) - \sum_{m=u}^{\infty} \tilde{\bar{F}}(m) - \sum_{m=0}^{u-1} \tilde{\psi}(u-m) \tilde{\bar{F}}(m) \right| \\ &\leq \sup_{u \geq 0} \left[\sum_{m=u}^{\infty} |\bar{F}(m) - \tilde{\bar{F}}(m)| + \sum_{m=0}^{u-1} \tilde{\psi}(u-m) |\bar{F}(m) - \tilde{\bar{F}}(m)| \right] \\ &\leq \sup_{u \geq 0} \left[\sum_{m=u}^{\infty} |\bar{F}(m) - \tilde{\bar{F}}(m)| + \sum_{m=0}^{u-1} |\bar{F}(m) - \tilde{\bar{F}}(m)| \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} |\bar{F}(m) - \tilde{\bar{F}}(m)| \\ &= \mathbf{d}(F, \tilde{F}). \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 2.10. Por el Corolario 2.9 y la Proposición 2.11 tenemos que $\nu(\psi, \tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1 - \mu} \nu(S\tilde{\psi}, \tilde{S}\tilde{\psi}) \leq \frac{1}{1 - \mu} \mathbf{d}(F, \tilde{F})$. □

Capítulo 3

Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen

En este capítulo estudiamos la estabilidad de la distribución del capital corriente de una compañía aseguradora en un modelo multidimensional de riesgo. El proceso considerado es bastante general y es una versión del proceso de riesgo Sparre Andersen (proceso de renovación).

El resultado principal de este capítulo consta de una desigualdad de estabilidad como la dada en (7) (en la Introducción). Como veremos más adelante, tal desigualdad está expresada en términos de la distancia de variación total y el segundo pseudomomento absoluto y lse demuestra suponiendo que se cumplen algunas condiciones sobre las distribuciones de los montos de las reclamaciones y de los intervalos entre las llegadas de las reclamaciones.

3.1. El proceso multidimensional de riesgo

En años recientes, los procesos multidimensionales de riesgo han despertado un interés creciente. En particular, se han estudiado procesos bivariados de riesgo que representan dos flujos dependientes de reclamaciones (ver por ejemplo, Badila et al. (2015), Cai and Li (2005), Chan et al. (2003), Chen et al. (2011), Cojocararu (2015), Hu and Jiang (2013), Huang et al. (2014),

Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de 28 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen

Ivanovs and Boxma (2015) y Li et al. (2007).

Un modelo multidimensional de riesgo puede ser entendido como un proceso que modela varias líneas de negocios (estocásticamente dependientes) de una compañía aseguradora, por ejemplo, daños al vehículo, gastos médicos por daños personales, seguro de vida, etc.

El modelo m -dimensional de riesgo que vamos a considerar se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}(t) \equiv \begin{pmatrix} R_1(t) \\ \vdots \\ R_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} t - \sum_{n=1}^{N(t)} \begin{pmatrix} X_{1n} \\ \vdots \\ X_{mn} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

donde

- $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ representa el capital inicial de la compañía aseguradora;
- $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^T$ es la entrada de primas por unidad de tiempo;
- $\mathbf{X}_n = (X_{1n}, \dots, X_{mn})^T$, $n = 1, 2, \dots$ es una sucesión de vectores aleatorios i.i.d. que representa a los montos sucesivos de las reclamaciones;
- $N(t)$, $t \geq 0$ es un proceso de renovación definido por la sucesión de variables aleatorias positivas i.i.d. $\{\xi_k, k \geq 1\}$ cuya función de distribución está denotada por G . Esto es, para $t \geq 0$,

$$N(t) := \max\{k \geq 0 : S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k \leq t\}, \quad \text{con } S_0 := 0. \quad (3.2)$$

Vamos a suponer que el proceso $N(t)$ es independiente de la sucesión $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$.

Vale la pena mencionar que en general, las componentes X_{1n}, \dots, X_{mn} del vector \mathbf{X}_n son variables aleatorias dependientes.

Denotamos por F a la función de distribución común de los vectores aleatorios \mathbf{X}_n , $n \geq 1$. De esta manera los vectores \mathbf{u} , \mathbf{c} y las funciones de distribución F y G determinan el proceso (3.1). Por esta razón diremos que tales parámetros *gobiernan* al modelo.

3.2. Planteamiento del problema de estabilidad de $\mathcal{D}(R(t))$

Cuando el modelo de riesgo (3.1) es estudiado desde el punto de vista práctico, es posible suponer que los valores de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{c} son conocidos. Sin embargo, es difícil esperar que se conozca información precisa sobre las funciones de distribución F y G . Con frecuencia estas funciones son desconocidas y en ese caso podrían ser estimadas usando algunas estimaciones teóricas adecuadas o ciertos métodos estadísticos. Sean \tilde{F} y \tilde{G} resultado de tales estimaciones. En esta situación el proceso (3.1), que vamos a denominar *modelo ideal*, podría ser analizado mediante el proceso $\tilde{\mathbf{R}}(t)$, que llamaremos *modelo aproximante* y se define como sigue:

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{R}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{R}_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} t - \sum_{n=1}^{\tilde{N}(t)} \begin{pmatrix} \tilde{X}_{1n} \\ \vdots \\ \tilde{X}_{mn} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

donde $\tilde{\mathbf{X}}_n = (\tilde{X}_{1n}, \dots, \tilde{X}_{mn})$, $n \geq 1$ son vectores aleatorios i.i.d. con función de distribución \tilde{F} ; $\tilde{N}(t)$, $t \geq 0$ es un proceso de renovación (definido como en (3.2)) por las variables aleatorias $\tilde{\xi}_k$, $k \geq 1$ con función de distribución \tilde{G} . De este modo, el par de funciones de distribución \tilde{F} y \tilde{G} se usan como una aproximación de las funciones de distribución desconocidas F y G .

Nota 3.1. En (3.1) y (3.3), $\sum_{n=1}^0 := 0$.

Notación 3.2. (a) Sea $|\cdot|$ la norma Euclidiana en \mathbb{R}^m ;

- (b) \mathbf{X} y $\tilde{\mathbf{X}}$ son los vectores aleatorios genéricos para \mathbf{X}_n y $\tilde{\mathbf{X}}_n$ con función de distribución F y \tilde{F} , respectivamente;
- (c) ξ y $\tilde{\xi}$ (los tiempos entre las llegadas de las reclamaciones) son variables aleatorias con función de distribución G y \tilde{G} , respectivamente.

Una pregunta importante desde el punto de vista práctico es: ¿en qué grado el *modelo aproximante* (3.3) es útil para analizar al *modelo ideal* (3.1)? En otras palabras, es razonable examinar la afinidad entre ambos modelos. A su vez, la afinidad de los modelos, obviamente depende de cierta “cercañía” entre (\tilde{F}, \tilde{G}) y (F, G) . Como lo hemos discutido a lo largo de este

Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de 30 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen

trabajo, tal cercanía puede ser medida en términos de algunas métricas probabilísticas definidas en el espacio de distribuciones. De esta manera surge el problema de la estimación cuantitativa de la estabilidad (o continuidad, en otra terminología) de la distribución del capital corriente $R(t)$.

En términos generales, este problema se plantea como la obtención de la desigualdad de estabilidad (7), dada en la Introducción:

$$\sup_{t \in [0, T]} d_R(\mathcal{D}(R(t)), \mathcal{D}(\tilde{R}(t))) \leq \phi_1[d_1(\alpha, \tilde{\alpha})],$$

donde, en nuestro caso, $\alpha = (F, G)$ y $\tilde{\alpha} = (\tilde{F}, \tilde{G})$.

Vamos a buscar este tipo de desigualdades tomando a d_R como la métrica de variación total, la cual es denotada por d_{VT} y, d_1 como una combinación de la métrica d_{VT} y la segunda diferencia pseudomomento absoluto. La función $\phi_1(x)$ va a ser una combinación de una función lineal y una constante multiplicada por el factor $x^{1/2}$.

Hasta el momento, solamente hemos encontrado tres trabajos relacionados con la estimación de la estabilidad de las distribuciones del capital (o superávit) en la versión unidimensional de los modelos (3.1) y (3.3): Beirlant and Rachev (1987), Gordienko (2004) y el Capítulo 16 en Rachev (1991). Primero, vamos a analizar (en una manera muy general) el resultado obtenido en Beirlant and Rachev (1987), mismo que se encuentra en Rachev (1991). Estos resultados se han obtenido bajo las siguientes condiciones.

Hipótesis 3.3.

$$(a) E\mathbf{X} = E\tilde{\mathbf{X}}; \quad a := E\xi = E\tilde{\xi}.$$

$$(b) E|\mathbf{X}|^2 < \infty, \quad E|\tilde{\mathbf{X}}|^2 < \infty; \quad 0 < Var(\xi), \quad Var(\tilde{\xi}) < \infty.$$

Para simplificar la notación, a lo largo del capítulo escribiremos las distancias entre los vectores aleatorios (o variables aleatorias), teniendo en cuenta las distancias entre las distribuciones correspondientes.

Definición 3.4. Sean X y Y variables aleatorias no negativas con funciones de distribución F_X y F_Y , respectivamente. La métrica segunda diferencia pseudomomento se define como:

$$\kappa_2(X, Y) := 2 \int_0^\infty x |F_X(x) - F_Y(x)| dx. \quad (3.4)$$

Bajo el cumplimiento de la Hipótesis 3.3 y algunas condiciones adicionales dadas en Beirlant and Rachev (1987) y Rachev (1991), los autores establecen la siguiente desigualdad de estabilidad para los procesos (3.1) y (3.3) cuando $m = 1$:

$$\nu \left(\sum_{n=1}^{N(t)} X_n, \sum_{n=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{X}_n \right) \leq \psi_1[\kappa_2(X, \tilde{X})] + \psi_2[\kappa_2(\xi, \tilde{\xi})], \quad (3.5)$$

donde ν es la distancia uniforme que se define (entre las variables aleatorias no negativas Σ y $\tilde{\Sigma}$) como:

$$\nu(\Sigma, \tilde{\Sigma}) := \sup_{x \geq 0} |F_{\Sigma}(x) - F_{\tilde{\Sigma}}(x)|.$$

En (3.5), $t > 0$ es un número (tiempo) arbitrario pero fijo y las funciones ψ_1 y ψ_2 están definidas, respectivamente, en las ecuaciones (2.16) y (2.20) de los Lemas 2.3 y 2.4, respectivamente, en Beirlant and Rachev (1987) (ver desigualdades (6) y (8) del Apéndice).

Más adelante retomaremos la desigualdad (3.5) para analizar un ejemplo numérico.

A continuación damos las definiciones de las métricas probabilísticas necesarias para la presentación de nuestras desigualdades de estabilidad.

Definición 3.5. Sean \mathbf{Y} y \mathbf{Z} vectores aleatorios con valores en \mathbb{R}^m .

(a) La distancia de variación total se define como:

$$\mathbf{d}_{\mathbf{VT}}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) := 2 \sup_{B \in \mathcal{B}_m} |P(\mathbf{Y} \in B) - P(\mathbf{Z} \in B)|, \quad (3.6)$$

donde \mathcal{B}_m denota la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^m .

(b) El segundo pseudomomento absoluto (definido para los vectores aleatorios \mathbf{Y} y \mathbf{Z}):

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) := \int_{\mathbb{R}^m} |x|^2 d|P_{\mathbf{Y}}(x) - P_{\mathbf{Z}}(x)|. \quad (3.7)$$

(c) Vamos a usar la siguiente métrica, denotada por $\boldsymbol{\mu}$, que es la combinación de métricas $\mathbf{d}_{\mathbf{VT}}$ y \mathbf{v}_2 :

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) := \max\{\mathbf{d}_{\mathbf{VT}}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}), \frac{1}{2}\mathbf{v}_2(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\}. \quad (3.8)$$

**Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de
32 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen**

Nota 3.6. La integración en (3.7) es con respecto a la variación total de la medida $P_Y(\cdot) - P_Z(\cdot)$. Además, si \mathbf{Y} y \mathbf{Z} tienen densidades, entonces $d_{\mathbf{V}T}$ y \mathbf{v}_2 tienen representaciones más simples, como lo veremos más adelante en (3.11) y (3.12).

Pronto vamos a ver que del resultado principal de este capítulo se sigue que, bajo el cumplimiento de las Hipótesis 3.3 y 3.14 (dadas más adelante), para cada $T > 0$ tenemos que:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} d_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \tilde{\mathbf{R}}(t)) \leq c_1 \mu(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + c_2 [\mu(\xi, \tilde{\xi})]^{1/2}, \quad (3.9)$$

siempre que

$$\mu(X, \tilde{X}) \leq \gamma_1, \quad \mu(\xi, \tilde{\xi}) \leq \gamma_2(T). \quad (3.10)$$

La constante γ_1 y la función $\gamma_2(T)$ serán especificadas en la Sección 3.5, en donde también se verá que $\gamma_2(T) \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$.

Nota 3.7. A pesar de que el intervalo $[0, T]$ no aparece en el lado derecho de la desigualdad (3.9), sería preferible obtener en el lado izquierdo, el supremo sobre todos los valores de $t \geq 0$, es decir, una cota superior para $\sup_{t \geq 0} d_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \tilde{\mathbf{R}}(t))$. Desafortunadamente, hasta la culminación del presente trabajo, no logramos obtener dicha cota superior. Cabe mencionar que, las restricciones en (3.10) surgen de la técnica utilizada para probar la desigualdad (3.9) (ver (3.22) y (3.26) más adelante).

Observamos que, en la situación cuando el modelo aproximante (3.3) surge a partir de estimaciones estadísticas de las densidades desconocidas de \mathbf{X} y ξ (en el modelo (3.1)), las cotas superiores para los valores promedio de $\mu(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$ y $\mu(\xi, \tilde{\xi})$ pueden obtenerse a partir de resultados conocidos sobre la estimación de densidades (ver por ejemplo Devroye and Györfi (1985) y Schick and Wefelmeyer (2008)).

Nota 3.8.

(a) Es fácil ver que, en el lado izquierdo de (3.9),

$$d_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \tilde{\mathbf{R}}(t)) = d_{\mathbf{V}T} \left(\sum_{n=1}^{N(t)} \mathbf{X}_n, \sum_{n=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{\mathbf{X}}_n \right). \text{ De esta manera, comparando}$$

el superávit actual, no se toman en cuenta posibles ruinas, es decir, están permitidos “superávits negativos”.

3.3 Cotas superiores para la distancia uniforme entre las distribuciones de modelos unidimensionales Sparre Andersen 33

(b) Suponiendo que los vectores aleatorios \mathbf{Y} y \mathbf{Z} tienen densidades $f_{\mathbf{Y}}$ y $f_{\mathbf{Z}}$, respectivamente, por el Teorema de Radon-Nikodym, las métricas (3.6) y (3.7) pueden reescribirse en una forma más simple, esto es:

$$\mathbf{d}_{\mathbf{VT}}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \int_{\mathbb{R}^m} |f_{\mathbf{Y}}(x) - f_{\mathbf{Z}}(x)| dx, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \int_{\mathbb{R}^m} |x|^2 |f_{\mathbf{Y}}(x) - f_{\mathbf{Z}}(x)| dx. \quad (3.12)$$

Para fines prácticos, estas expresiones para $\mathbf{d}_{\mathbf{VT}}$ y \mathbf{v}_2 , son más útiles (en comparación con (3.6) y (3.7)).

3.3. Cotas superiores para la distancia uniforme entre las distribuciones de modelos unidimensionales Sparre Andersen

El método empleado para demostrar las desigualdades de estabilidad que se presentan en este capítulo está basado en las técnicas que se proponen en los artículos Gordienko (2004, 2005) y Gordienko and Ruiz de Chávez (2002). El objetivo de esta sección es exponer un ejemplo numérico que ilustre el hecho de que el uso de estos resultados permiten mejorar la cota (3.5) que se ofrece en Beirlant and Rachev (1987) y Rachev (1991) para la versión unidimensional de los modelos (3.1) y (3.3).

Más específicamente, ahora vamos a comparar los resultados obtenidos en Beirlant and Rachev (1987) y Gordienko and Ruiz de Chávez (2002) para una distribución particular. Para tales fines se va considerar el caso particular cuando $N(t) = \tilde{N}(t)$, $t \geq 0$. En este caso, la desigualdad (2.16) del Lema 2.3 en Beirlant and Rachev (1987) (ver (6) en el Apéndice) se convierte en la siguiente cota:

$$\nu \left(\sum_{n=1}^{N(t)} X_n, \sum_{n=1}^{N(t)} \tilde{X}_n \right) \leq (12)^{1/3} 5^{1/6} \left(1 + \sup_{x \geq 0} p_t(x) \right) [EN(t)]^{-1/3} [\kappa_2(X, \tilde{X})]^{1/3}, \quad (3.13)$$

donde $t > 0$ es un número arbitrario pero fijo.

La desigualdad (3.13) está demostrada en Beirlant and Rachev (1987) suponiendo el cumplimiento de la Hipótesis 3.3 y bajo la condición de que la

34 Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen

variable aleatoria $[EN(t)]^{-1} \times \sum_{n=1}^{N(t)} \tilde{X}_n$ tiene densidad acotada denotada por $p_t(x)$.

Por ejemplo, si $N(t)$ es un proceso de Poisson, entonces, haciendo uso de la normalidad asintótica se puede ver que el término $\left(1 + \sup_{x \geq 0} p_t(x)\right) \times [EN(t)]^{-1/3}$ en la desigualdad (3.13) se comporta asintóticamente cuando $t \rightarrow \infty$ como una constante multiplicada por $t^{1/6}$.

En Gordienko and Ruiz de Chávez (2002) se proporciona una desigualdad de estabilidad alternativa a (3.13). Más adelante presentamos esta desigualdad y la comparamos con (3.13). En dicho trabajo se usan las siguientes hipótesis.

Hipótesis 3.9. *Existe un entero $s \geq 1$ tal que, las variables aleatorias $\sum_{n=1}^s X_n$ y $\sum_{n=1}^s \tilde{X}_n$ tienen densidades absolutamente continuas y acotadas f y \tilde{f} , respectivamente, con derivadas acotadas f' , \tilde{f}' en $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.*

Continuamos denotando por X y \tilde{X} a las variables aleatorias genéricas de las sucesiones $\{X_n\}$ y $\{\tilde{X}_n\}$, respectivamente.

Sean $\sigma^2 = Var(X) > 0$ y $\tilde{\sigma}^2 = Var(\tilde{X}) > 0$; f_k, \tilde{f}_k denotan las densidades de las siguientes sumas normadas:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_k}{\sigma\sqrt{k}} \quad \text{y} \quad \frac{\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_k}{\tilde{\sigma}\sqrt{k}}, \quad k \geq s. \quad (3.14)$$

En Gordienko and Ruiz de Chávez (2002) está demostrado que, bajo el cumplimiento de la Hipótesis 3.9,

$$d := \sup_{k \geq s} \sup_{x \geq 0} |f'_k(x)| < \infty \quad \text{y} \quad \tilde{d} := \sup_{k \geq s} \sup_{x \geq 0} |\tilde{f}'_k(x)| < \infty. \quad (3.15)$$

Notación 3.10. Sea

$$\tilde{c} := \frac{(1 + s^{-1})d}{\sigma^2} + \frac{\tilde{d}}{\tilde{\sigma}^2}. \quad (3.16)$$

El Teorema 1 en Gordienko and Ruiz de Chávez (2002) y algunos argumentos adicionales simples conducen a la siguiente proposición.

Proposición 3.11. *Bajo las Hipótesis 3.3 y 3.9, para los procesos (3.1) y (3.3), con $m = 1$ se cumple que*

$$\sup_{t \geq 0} \nu \left(\sum_{n=1}^{N(t)} X_n, \sum_{n=1}^{N(t)} \tilde{X}_n \right) \leq \max\{2s - 1, \tilde{c}\} \max\{\nu(X, \tilde{X}), \frac{1}{2} \kappa_2(X, \tilde{X})\}. \quad (3.17)$$

3.3 Cotas superiores para la distancia uniforme entre las distribuciones de modelos unidimensionales Sparre Andersen 35

Aquí, como siempre, para las variables aleatorias no negativas Z y \tilde{Z} , se denota $\nu(Z, \tilde{Z}) := \sup_{x \geq 0} |F_Z(x) - F_{\tilde{Z}}(x)|$. (Ver (3.4) para la definición de κ_2 .)

Observemos que en el lado derecho de (3.17) aparecen la distancia uniforme ν y κ_2 . El hecho importante que debe notarse es que, en (3.17) el término $\max\{\nu, \frac{1}{2}\kappa_2\}$ es de primer grado, mientras que en la desigualdad (3.13) aparece el término $(\kappa_2)^{1/3}$. Como lo veremos en el siguiente ejemplo, lo anterior representa una diferencia significativa en la precisión de estas cotas.

Ejemplo 3.12. Sea X una variable aleatoria con densidad $Gama(\alpha = 4, \beta = 1)$. Para un $\varepsilon > 0$ dado, sea \tilde{X} la variable aleatoria con densidad $Gama(\tilde{\alpha}_\varepsilon = 4 + \varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon = 1 + \varepsilon/4)$. Escogemos $N(t)$ como un proceso de Poisson con parámetro $\lambda = 1$ y sea $t = 1$. Es fácil verificar que se satisface la Hipótesis 3.3 y que se cumple la Hipótesis 3.9 con $s = 1$.

Ahora notemos que las densidades f_k y \tilde{f}_k de las variables aleatorias en (3.14) también tienen distribución Gama.

Luego, calculamos numéricamente (por computadora) las constantes d , \tilde{d} y \tilde{c} en (3.15) y (3.16), así como las distancias $\nu(X, \tilde{X})$ y $\kappa_2(X, \tilde{X})$. De esta manera, ese evalúa el lado derecho de la desigualdad (3.17) (para varios valores de ε).

Por otro lado, calculamos la densidad p_t de la variable aleatoria $[EN(1)]^{-1} \times \sum_{n=1}^{N(1)} \tilde{X}_n$ mencionada arriba así como su valor máximo. Lo anterior permite calcular el lado derecho de (3.13). Los resultados obtenidos de tales cálculos para $\varepsilon = 0.0015, 0.01, 0.015, 0.1$ se presentan en la Tabla 3.1.

Vale la pena mencionar que la distancia ν involucrada en el lado izquierdo de (3.13) y de (3.17) no puede ser mayor que 1.

ε	Lado derecho de (3.17)	Lado derecho de (3.13)
0.0015	0.000729	0.036904
0.01	0.002663	0.568356
0.015	0.007832	0.814386
0.1	0.093072	1.8593

Tabla 3.1: Comparación de las desigualdades (3.17) y (3.13)

3.4. Hipótesis y resultados preliminares para el estudio de la estabilidad del modelo multidimensional

Retomamos el modelo multidimensional de riesgo (3.1) y su correspondiente modelo aproximante (3.3). Como ya se mencionó antes, el objetivo planteado para estos modelos es demostrar una desigualdad de estabilidad como (3.9). Por cuestiones prácticas es preferible que las constantes involucradas en la desigualdad buscada sean determinadas únicamente por los parámetros (conocidos) del modelo aproximante. Para lograr dicho objetivo, además de la Hipótesis 3.3, será necesario imponer algunas condiciones adicionales sobre las distribuciones de $\widetilde{\mathbf{X}}$ y $\widetilde{\xi}$. Estas restricciones requieren de la existencia de densidades *suficientemente buenas* de las funciones de distribución \widetilde{F} y \widetilde{G} . Tales restricciones se explican más precisamente en las siguientes líneas.

Notación 3.13. Sea $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. $Dg := (D_1g, \dots, D_mg)$ y $D^2g := (D_{ij}g : i, j = 1, 2, \dots, m)$ representan el gradiente y el Jacobiano de g , respectivamente. Decimos que

$$Dg \in \mathbb{L}_1 \text{ si } D_i g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^m), \quad i = 1, \dots, m.$$

y

$$D^2g \in \mathbb{L}_1 \text{ si } D_{ij}g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^m), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

y también,

$$\|D^2g\|_{\mathbb{L}_1} := \max_{1 \leq i, j \leq m} \|D_{ij}g\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^m)}.$$

Vamos a suponer que se cumplen las siguientes condiciones para el vector aleatorio $\widetilde{\mathbf{X}}$ y la variable aleatoria $\widetilde{\xi}$.

Hipótesis 3.14. (a) $E|\widetilde{\mathbf{X}}|^{m+2} < \infty$ y la matriz de covarianza de $\widetilde{\mathbf{X}}$ es positiva definida.

(b) El vector aleatorio $\widetilde{\mathbf{X}}$ es absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^m . Existe un número entero $s \geq 1$ tal que la

densidad f_s del vector aleatorio $\widetilde{\mathbf{X}}_1 + \cdots + \widetilde{\mathbf{X}}_s$ es acotada y dos veces diferenciable. Además, $\mathbf{D}f_s$ y \mathbf{D}^2f_s son acotadas, continuas, pertenecen a \mathbb{L}_1 ; y existe $\alpha > 0$ tal que para todo $1 \leq i, j \leq m$,

$$\int_{|x| > \alpha n} |D_{ij}f_s(x)| dx = O(n^{-1}) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

(c) $E|\widetilde{\xi}|^3 < \infty$ y $Var(\widetilde{\xi}) > 0$.

(d) La variable aleatoria $\widetilde{\xi}$ tiene una densidad que satisface las propiedades análogas a las dadas en (b) (posiblemente con diferentes s y α).

Notación 3.15. Sean g_n y h_n , que denotan las densidades del vector aleatorio $\frac{1}{\sqrt{n}}(\widetilde{\mathbf{X}}_1 + \cdots + \widetilde{\mathbf{X}}_n)$ y de la variable aleatoria $\frac{1}{\sqrt{n}}(\widetilde{\xi}_1 + \cdots + \widetilde{\xi}_n)$, respectivamente. Aquí, $n = s, s + 1, \dots$

El siguiente resultado está demostrado en Gordienko (2005) (ver Lema 4.1 en esta referencia).

Proposición 3.16. *Bajo la Hipótesis 3.14,*

$$\bar{d} := \sup_{n \geq s} \|\mathbf{D}^2g_n\|_{\mathbb{L}_1} < \infty, \quad (3.18)$$

$$\gamma := \sup_{n \geq \bar{s}} \|h_n''\|_{\mathbb{L}_1} < \infty. \quad (3.19)$$

Por consiguiente, la Hipótesis 3.14 permite establecer la finitud de los valores \bar{d} y γ que van a aparecer en las definiciones de las constantes involucradas en los lados derechos de las desigualdades de estabilidad (3.22) y (3.26) dadas más adelante (Sección 3.5).

Nota 3.17. • El inciso (a) de la Hipótesis 3.14 limita la pesadez de las colas de la distribución de $\widetilde{\mathbf{X}}$, pero no es más restrictivo en los casos más típicos cuando $m \leq 2$.

- Las suposiciones (b) y (c) en la Hipótesis 3.14 se satisfacen para muchas clases de densidades que frecuentemente se usan en Teoría del Riesgo. Algunos ejemplos son la densidad Gama y la densidad uniforme para las cuales las constantes \bar{d} y γ involucradas en (3.18) y (3.19) pueden ser calculadas por computadora.

3.5. Principales resultados: Desigualdades de estabilidad para las distribuciones del modelo multidimensional de riesgo

El primer resultado que presentaremos requiere la finitud de los siguientes momentos de las variables aleatorias ξ y $\tilde{\xi}$.

Hipótesis 3.18. Suponga que existe un número $b < \infty$ tal que

$$E(\xi - a)^4 \leq b \text{ y } E(\tilde{\xi} - a)^4 \leq b. \quad (3.20)$$

Aquí, $a = E\xi = E\tilde{\xi}$.

Usando la notación de la Hipótesis 3.14 y de la Proposición 3.16, sean:

$$\mathbf{c} := \max\{2s - 1, 3\bar{d}m\}, \quad \bar{c} := \gamma + 192ba^{-4}. \quad (3.21)$$

Teorema 3.19. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis 3.3, 3.14 y 3.18. Entonces, para cada número $T > 0$ arbitrario pero fijo,*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} d_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \tilde{\mathbf{R}}(t)) \leq \mathbf{c}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + 2\gamma\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi}) + \bar{c}\sqrt{\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})}, \quad (3.22)$$

siempre que

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) \leq (4\mathbf{c})^{-1}, \quad (3.23)$$

$$\text{y } \boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi}) \leq \min\{(4\gamma)^{-1}, \left(\frac{a}{2T}\right)^2\}. \quad (3.24)$$

(Las métricas $d_{\mathbf{V}T}$ y $\boldsymbol{\mu}$ fueron definidas en (3.6)-(3.8).)

Si consideramos los casos en los cuales los tiempos entre las llegadas de las reclamaciones ξ y $\tilde{\xi}$ son *acotados*, entonces (como lo muestra el siguiente teorema) es posible obtener una desigualdad mejor que la dada en (3.22). En esta última, podemos reemplazar $[\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})]^{1/2}$ por el término $\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})|\log[\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})]|$ que se aproxima a cero más rápido.

Teorema 3.20. *Supongamos que se satisfacen las Hipótesis 3.3 y 3.14 y que para algún $\bar{b} < \infty$,*

$$\xi \leq \bar{b} \text{ y } \tilde{\xi} \leq \bar{b}. \quad (3.25)$$

Entonces, para cada número $T > 0$ arbitrario pero fijo,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \tilde{\mathbf{R}}(t)) &\leq \mathbf{c}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + \gamma\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi}) \log_{\alpha}[\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})] \\ &+ 2 \left(\gamma + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right) \boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

siempre que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) &\leq (4\mathbf{c})^{-1} \text{ y} \\ \boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi}) &\leq \min\{(4\gamma)^{-1}, \exp(-aT/\bar{b}^2)\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En (3.26) $\alpha = \exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\bar{b}}\right)^2\}$ y bajo la condición (3.27) se tiene que $\log_{\alpha}[\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})] > 0$.

Nótese que la longitud T del intervalo de referencia no aparece en el lado derecho de las desigualdades (3.22) y (3.26). Por lo tanto, es razonable formular la siguiente pregunta: ¿es posible sustituir $\sup_{t \geq 0} \mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \tilde{\mathbf{R}}(t))$ por $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \tilde{\mathbf{R}}(t))$ en los lados izquierdos de dichas desigualdades? En el caso afirmativo, tendríamos que evitar las restricciones dadas en (3.24) y (3.27). Como se verá más adelante, en la Sección 3.8, estas restricciones surgen de la técnica que hemos utilizado para demostrar los Teoremas 3.19 y 3.20, y por el momento no hemos encontrado una manera de evitarlas (si nos referimos a obtener desigualdades explícitas). Sin embargo, formulamos la siguiente conjetura:

Conjetura 3.21. *Bajo las Hipótesis 3.3 y 3.14, $\sup_{t \geq 0} \mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \tilde{\mathbf{R}}(t)) \rightarrow 0$ cuando $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) \rightarrow 0$ y $\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi}) \rightarrow 0$.*

En la Sección 3.8 ofrecemos algunos argumentos para una posible prueba de esta conjetura.

3.6. Aplicación de la desigualdad (3.22)

Una aplicación potencial de las desigualdades de continuidad (3.22) y (3.26) en la gestión de riesgos se describe a continuación. Estamos hablando

Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de 40 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen

del problema conocido como *optimización del nivel de dividendos*, el cual tiene una solución explícita solo en algunos casos particulares (ver, por ejemplo, Albrecher et al. (2011), Ekström and Lu (2014), Marciniak and Palmowski (2016) y Yin et al. (2014)).

Supongamos que una compañía de seguros planea comenzar a pagar dividendos a sus inversionistas, digamos, en el plazo de un año. La compañía desea estimar y proyectar un nivel aceptable de dividendos en un intervalo de tiempo dado, digamos $I := [d_{min} - d_{max}]$. El nivel d_{max} es preferible (desde el punto de vista de los inversionistas), pero si para $t = 1$ (un año), la $P(R(1) \geq d_{max})$ es relativamente pequeña, entonces la compañía preferirá planificar otro nivel de dividendos $d \in I$.

En este ejemplo nos centramos en la variante unidimensional del proceso de riesgo (3.1). En la mayoría de las situaciones típicas, las funciones de distribución F y G involucradas en este proceso son desconocidas. Sin embargo, podría ser que en el momento de elegir el nivel de dividendo, la compañía haya acumulado algunos datos estadísticos, es decir, hay n observaciones X_1, \dots, X_n i.i.d. del tamaño de la reclamación X que siguen la distribución F y m observaciones T_1, \dots, T_m i.i.d. del tiempo entre las llegadas de las reclamaciones T que siguen la distribución G .

El enfoque más razonable es utilizar estimaciones estadísticas de las distribuciones desconocidas F y G . Supongamos que F y G tienen densidades f y g , respectivamente, y que estas densidades tienen segundas derivadas acotadas. Luego, utilizando los datos estadísticos anteriores, se pueden construir los llamados *estimadores del kernel* \hat{f}_n y \hat{g}_m (de f y g , respectivamente) de tal manera que, cuando $n, m \rightarrow \infty$,

$$Ed_{\mathbf{v}_T}(f, \hat{f}_n) = O(n^{-2/5}), \quad Ed_{\mathbf{v}_T}(g, \hat{g}_m) = O(m^{-2/5}), \quad (3.28)$$

$$Ev_2(f, \hat{f}_n) = O(n^{-4/5}) \quad y \quad Ev_2(g, \hat{g}_m) = O(m^{-4/5}). \quad (3.29)$$

Es bien sabido (ver, por ejemplo, Devroye and Györfi (1985) y Schick and Wefelmeyer (2008)) que bajo las suposiciones anteriores sobre f y g no se puede mejorar la tasa de convergencia en (3.28) y (3.29) y que hay cotas superiores explícitas que corresponden a (3.28) y (3.29).

Ahora, utilizando los estimadores \hat{f}_n y \hat{g}_m en el modelo aproximante (3.3), el problema de encontrar $P(\tilde{R}(1) \geq d)$, $d \in I$ no es difícil desde un punto de vista computacional. Básicamente, se reduce al cálculo de las convoluciones de las densidades.

Sean $\varepsilon, \delta > 0$ dados. Queremos que para cada $d \in I$, $|P(R(1) \geq d) - P(\tilde{R}(1) \geq d)| \leq \varepsilon$ con probabilidad mayor que $1 - \delta$. Por la desigualdad de Markov y (3.22), para cada $d \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(|P(R(1) \geq d) - P(\tilde{R}(1) \geq d)| \leq \varepsilon) \\ & \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon} E|P(R(1) \geq d) - P(\tilde{R}(1) \geq d)| \\ & \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon} \left[cE\boldsymbol{\mu}(f, \hat{f}_n) + 2\gamma E\boldsymbol{\mu}(g, \hat{g}_m) + \bar{c}E\sqrt{\boldsymbol{\mu}(g, \hat{g}_m)} \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Además, tomemos en cuenta que en (3.30), $E\sqrt{\boldsymbol{\mu}(g, \hat{g}_m)} \leq (E\boldsymbol{\mu}(g, \hat{g}_m))^{1/2}$. (En (3.30) el símbolo \mathbb{P} es la probabilidad en el espacio donde están definidas las muestras X_1, \dots, X_n y T_1, \dots, T_m y, en tal espacio de probabilidad $P(\tilde{R}(1) \geq d)$ es una variable aleatoria.)

Por la definición de $\boldsymbol{\mu}$ en (3.8) vemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}(f, \hat{f}_n) &= \max\{\mathbf{d}_{\mathbf{V}\mathbf{T}}(f, \hat{f}_n), \frac{1}{2}\mathbf{v}_2(f, \hat{f}_n)\}, \\ \boldsymbol{\mu}(g, \hat{g}_m) &= \max\{\mathbf{d}_{\mathbf{V}\mathbf{T}}(g, \hat{g}_m), \frac{1}{2}\mathbf{v}_2(g, \hat{g}_m)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo uso de las desigualdades correspondientes a (3.28) y (3.29) (vea, por ejemplo, Devroye and Györfi (1985)), podemos encontrar una cota inferior para el lado derecho de (3.30). Esto permitiría a la compañía decidir si los tamaños dados de la muestra n y m son o no suficientemente grandes para hacer que el lado izquierdo de (3.30) sea mayor que $1 - \delta$. En el caso positivo (i.e. n y m son suficientemente grandes), $P(\tilde{R}(1) \geq d)$ es un buen estimador de $P(R(1) \geq d)$.

3.7. Ejemplo numérico

Vamos a evaluar el lado derecho de la desigualdad (3.22), bajo la suposición de que las variables aleatorias ξ y $\tilde{\xi}$ son idénticamente distribuidas y que los vectores aleatorios bidimensionales \mathbf{X} , $\tilde{\mathbf{X}}$ se distribuyen de tal manera que sus componentes tienen densidades Gama. Por ahora, solo estamos en condiciones de realizar cálculos suponiendo la independencia de las componentes.

**Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de
42 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen**

Ejemplo 3.22. Sean $\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^2$ vectores aleatorios tales que, \mathbf{X} tiene componentes independientes $Y \sim Gama(\alpha_1 = 5.01, \beta_1 = 1.002)$ y $Z \sim Gama(\alpha_2 = 4.01, \beta_2 = 1.0025)$, mientras que $\widetilde{\mathbf{X}}$ es un vector aleatorio con componentes independientes $\widetilde{Y} \sim Gama(\widetilde{\alpha}_1 = 5, \widetilde{\beta}_1 = 1)$ y $\widetilde{Z} \sim Gama(\widetilde{\alpha}_2 = 4, \widetilde{\beta}_2 = 1)$.

Al calcular numéricamente las constantes \bar{d} y c en (3.18) y (3.21), obtenemos que $\bar{d} = 0.37508$ y $c = 2.25048$. (Es fácil verificar que en este caso podemos tomar $s = 1$).

Por otro lado, evaluando las integrales involucradas en (3.11) y (3.12), establecemos que para este ejemplo $\mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}) = 0.00172092$ y $\mathbf{v}_2(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}) = 0.0950752$. Usando estos datos, se verifica que se cumple la condición (3.23).

Finalmente, de acuerdo con la definición de $\mathbf{d}_{\mathbf{V}T}$ dada en (3.6), la versión de la desigualdad (3.22) cuando ξ y $\widetilde{\xi}$ son idénticamente distribuidas, proporciona la siguiente cota:

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{B \in \mathcal{B}_2} |P(\mathbf{R}(t) \in B) - P(\widetilde{\mathbf{R}}(t) \in B)| \leq 0.0534912,$$

donde \mathcal{B}_2 es una σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^2 .

3.8. Demostraciones

Demostración del Teorema 3.19. Sea $t \in [0, T]$. Usando (3.1), (3.3) y propiedades conocidas de la métrica de variación total, encontramos que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \widetilde{\mathbf{R}}(t)) &= \mathbf{d}_{\mathbf{V}T} \left(\sum_{n=1}^{N(t)} \mathbf{X}_n, \sum_{n=1}^{\widetilde{N}(t)} \widetilde{\mathbf{X}}_n \right) \\ &\leq \mathbf{d}_{\mathbf{V}T} \left(\sum_{n=1}^{N(t)} \mathbf{X}_n, \sum_{n=1}^{N(t)} \widetilde{\mathbf{X}}_n \right) + \mathbf{d}_{\mathbf{V}T} \left(\sum_{n=1}^{N(t)} \widetilde{\mathbf{X}}_n, \sum_{n=1}^{\widetilde{N}(t)} \widetilde{\mathbf{X}}_n \right) \\ &=: I_{1t} + I_{2t}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ahora usaremos una definición equivalente de la métrica de variación total $\mathbf{d}_{\mathbf{V}T}$ (ver por ejemplo Rachev (1991)):

$$\mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} |E\varphi(\mathbf{Y}) - E\varphi(\mathbf{Z})|,$$

donde \mathfrak{B} es el conjunto de todas las funciones medibles $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas por 1.

Para cualquier $\varphi \in \mathfrak{B}$,

$$\left| E\varphi \left(\sum_{n=1}^{N(t)} \mathbf{X}_n \right) - E\varphi \left(\sum_{n=1}^{N(t)} \widetilde{\mathbf{X}}_n \right) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| E\varphi \left(\sum_{n=1}^k \mathbf{X}_n \right) - E\varphi \left(\sum_{n=1}^k \widetilde{\mathbf{X}}_n \right) \right| \times \\ P(N(t) = k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} d_{VT} \left(\sum_{n=1}^k \mathbf{X}_n, \sum_{n=1}^k \widetilde{\mathbf{X}}_n \right) P(N(t) = k). \quad (3.32)$$

Haciendo modificaciones menores en la demostración del Teorema 3.1 dado en Gordienko (2005) podemos establecer que, bajo las Hipótesis 3.3 y 3.14, para cada $k \geq 1$ tenemos que

$$d_{VT} \left(\sum_{n=1}^k \mathbf{X}_n, \sum_{n=1}^k \widetilde{\mathbf{X}}_n \right) \leq \mathbf{c} \max\{d_{VT}(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}), \zeta_2(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}})\}, \quad (3.33)$$

siempre que

$$\max\{d_{VT}(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}), \zeta_2(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}})\} \leq (4\mathbf{c})^{-1}. \quad (3.34)$$

En las desigualdades (3.33) y (3.34), ζ_2 es la métrica de Zolotarev de orden 2 (ver Rachev (1991) y Zolotarev (1979)), y \mathbf{c} es la constante definida en (3.21). Es bien sabido (ver por ejemplo Rachev (1991), pág. 376) que bajo la Hipótesis 3.3

$$\zeta_2(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}) \leq \frac{1}{2} \mathbf{v}_2(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}), \quad (3.35)$$

donde \mathbf{v}_2 es el segundo pseudomomento absoluto introducido en (3.7) y (3.12). Por lo tanto, la condición (3.23) implica (3.34).

Combinando las desigualdades (3.32), (3.33) y (3.35), para el término I_{1t} en (3.31) obtenemos que

$$I_{1t} \leq \mathbf{c}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}), \quad (3.36)$$

para todo $t > 0$.

Ahora, para acotar el término I_{2t} en (3.31) primero haremos uso de una técnica conocida como *acoplamiento*.

La distancia $d_{VT}(N(t), \widetilde{N}(t))$ es únicamente determinada por las distribuciones (marginales) de $N(t)$ y $\widetilde{N}(t)$. Suponiendo que $N(t)$ y $\widetilde{N}(t)$ están

Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de
44 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen

definidas en un espacio de probabilidad común, aplicamos el Teorema de Dobrushin (ver, por ejemplo, Rachev (1991), pág. 160), la cual establece que la distribución conjunta de $(N(t), \tilde{N}(t))$ puede ser escogida de tal manera que

$$\mathbf{d}_{\mathbf{v}_T}(N(t), \tilde{N}(t)) = 2P(N(t) \neq \tilde{N}(t)). \quad (3.37)$$

Por otro lado, es bien sabido que para cualesquiera vectores aleatorios \mathbf{Y}, \mathbf{Z} ,

$$\mathbf{d}_{\mathbf{v}_T}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \leq 2P(\mathbf{Y} \neq \mathbf{Z}). \quad (3.38)$$

Luego, ya que

$$P(N(t) = \tilde{N}(t)) \leq P\left(\sum_{n=1}^{N(t)} \tilde{\mathbf{X}}_n = \sum_{n=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{\mathbf{X}}_n\right),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{n=1}^{N(t)} \tilde{\mathbf{X}}_n \neq \sum_{n=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{\mathbf{X}}_n\right) &\leq 1 - P(N(t) = \tilde{N}(t)) \\ &= P(N(t) \neq \tilde{N}(t)) = \frac{1}{2} \mathbf{d}_{\mathbf{v}_T}(N(t), \tilde{N}(t)) \end{aligned} \quad (3.39)$$

debido a (3.37).

Retomando el término I_{2t} en (3.31), por (3.38) (después de la aplicación de (3.39)) obtenemos que

$$\begin{aligned} I_{2t} &= \mathbf{d}_{\mathbf{v}_T}\left(\sum_{n=1}^{N(t)} \tilde{\mathbf{X}}_n, \sum_{n=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{\mathbf{X}}_n\right) \\ &\leq \mathbf{d}_{\mathbf{v}_T}(N(t), \tilde{N}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} |P(N(t) = k) - P(\tilde{N}(t) = k)|. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ahora denotamos por $S_0 = \tilde{S}_0 := 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ y $\tilde{S}_k = \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_k$, $k = 1, 2, \dots$. Notemos que para $k \geq 0$, $\{N(t) = k\} = \{S_{k+1} > t\} \setminus \{S_k > t\}$, por lo tanto,

$$P(N(t) = k) = P(S_{k+1} > t) - P(S_k > t) = F_{S_k}(t) - F_{S_{k+1}}(t).$$

Similarmente, obtenemos que

$$P(\tilde{N}(t) = k) = F_{\tilde{S}_k}(t) - F_{\tilde{S}_{k+1}}(t).$$

En consecuencia, para $k \geq 0$, cada sumando en (3.40) puede estar delimitado como sigue:

$$\begin{aligned} |P(N(t) = k) - P(\tilde{N}(t) = k)| &\leq |F_{S_k}(t) - F_{\tilde{S}_k}(t)| + |F_{S_{k+1}}(t) - F_{\tilde{S}_{k+1}}(t)| \\ &=: \mathcal{J}_k(t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aplicando (3.41) en la desigualdad (3.40) tenemos que $I_{2t} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}_k(t)$. Luego, fijando un entero $K \geq 0$ (que será especificado más adelante) expresamos a I_{2t} como la siguiente suma:

$$I_{2t} \leq \sum_{k=0}^K \mathcal{J}_k(t) + \sum_{k>K} \mathcal{J}_k(t). \quad (3.42)$$

Para estimar el primer sumando de (3.42) procedemos de la siguiente manera. Para $k \leq K$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k(t) &= |F_{S_k}(t) - F_{\tilde{S}_k}(t)| + |F_{S_{k+1}}(t) - F_{\tilde{S}_{k+1}}(t)| \\ &\leq \sup_{t \geq 0} |F_{S_k}(t) - F_{\tilde{S}_k}(t)| + \sup_{t \geq 0} |F_{S_{k+1}}(t) - F_{\tilde{S}_{k+1}}(t)| \\ &= \nu(S_k, \tilde{S}_k) + \nu(S_{k+1}, \tilde{S}_{k+1}). \end{aligned}$$

Lo siguiente se cumple por una desigualdad conocida (ver Rachev (1991)) para las métricas ν y d_{VT}

$$\mathcal{J}_k(t) \leq \frac{1}{2} d_{VT}(S_k, \tilde{S}_k) + \frac{1}{2} d_{VT}(S_{k+1}, \tilde{S}_{k+1}). \quad (3.43)$$

Una cota superior para cada sumando de (3.43) es obtenida a partir del siguiente resultado de Gordienko (2005):

Teorema [Gordienko (2005)]. *Bajo las Hipótesis 3.3 y 3.14 más la restricción de que $\mu(\xi, \tilde{\xi}) \leq (4\gamma)^{-1}$, para $k = 1, 2, \dots$ se cumple que*

$$\mathbf{d}_{VT}(S_k, \tilde{S}_k) \leq \gamma \max\{\mathbf{d}_{VT}(\xi, \tilde{\xi}), \mathbf{\zeta}_2(\xi, \tilde{\xi})\}, \quad (3.44)$$

donde γ es la constante definida en (3.19).

Por lo tanto, la aplicación de (3.44) en (3.43) implica que

$$\mathcal{J}_k(t) \leq \gamma \max\{\mathbf{d}_{VT}(\xi, \tilde{\xi}), \mathbf{\zeta}_2(\xi, \tilde{\xi})\}.$$

**Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de
46 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen**

Luego, de (3.35) se sigue que

$$\mathcal{J}_k(t) \leq \gamma \max\{\mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\xi, \tilde{\xi}), \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}_2(\xi, \tilde{\xi}) = \gamma\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})\}.$$

La última desigualdad nos permite reescribir a (3.42) de la siguiente manera

$$I_{2t} \leq (K + 1)\gamma\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi}) + \sum_{k>K} \mathcal{J}_k(t). \quad (3.45)$$

Ahora necesitamos evaluar $\mathcal{J}_k(t)$ para $k > K$.

Ya que $F_{S_{k+1}}(t) \leq F_{S_k}(t)$ y $F_{\tilde{S}_{k+1}}(t) \leq F_{\tilde{S}_k}(t)$, de (3.41) obtenemos que

$$\mathcal{J}_k(t) \leq 2 \left[P(S_k \leq t) + P(\tilde{S}_k \leq t) \right]. \quad (3.46)$$

Recordemos que $t \in (0, T]$, y supongamos que $ak > T$. La aplicación de la desigualdad de Markov para la suma de variables aleatorias i.i.d. centradas $\zeta_i = \xi_i - a$ nos da:

$$\begin{aligned} P(S_k \leq t) &\leq P(S_k - ak \leq T - ak) \\ &\leq P\left(\left|\sum_{i=1}^k \zeta_i\right| \geq ak - T\right) \leq \frac{E\left(\sum_{i=1}^k \zeta_i\right)^4}{(ak - T)^4} \\ &\leq \frac{3bk^2}{(ak - T)^4}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde b es la constante de (3.20).

La desigualdad en (3.47) se debe a que (ver la demostración del Teorema 2.3.5, pág. 66 en Durrett (2010)):

$$E\left(\sum_{i=1}^k \zeta_i\right)^4 = \sum_{1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq k} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \zeta_{i_3} \zeta_{i_4}$$

Por la independencia de las variables aleatorias $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ y el hecho de que $E\zeta_i = 0$, los términos de la forma $E(\zeta_{i_1}^3 \zeta_{i_2})$, $E(\zeta_{i_1}^2 \zeta_{i_2} \zeta_{i_3})$ y $E(\zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \zeta_{i_3} \zeta_{i_4})$ (cuando i_1, i_2, i_3, i_4 son diferentes) se anulan. Por lo que, la suma anterior se reduce a:

$$E\left(\sum_{i=1}^k \zeta_i\right)^4 = kE\zeta_1^4 + 3(k^2 - k)(E\zeta_1^2)^2 \leq Ck^2, \quad (3.48)$$

donde $C \leq \infty$.

Ahora, para obtener la constante C de la desigualdad (3.48) y que aparece de forma explícita en (3.47), denotamos por $\|X\|_\alpha = [E|X|^\alpha]^{1/\alpha}$ a la norma usual. Se sabe (ver por ejemplo Resnick (1998)), pág. 189) que, si $0 < \alpha < \beta$ y $\|X\|_\beta < \infty$ (es decir, $X \in L_\beta$), entonces $X \in L_\alpha$ y $\|X\|_\alpha < \|X\|_\beta$. Entonces, para $\alpha = 2$ y $\beta = 4$ tenemos que

$$\|X\|_2 = [E(X^2)]^{1/2} \leq [E(X^4)]^{1/4} = \|X\|_4,$$

de donde $[E(X^2)]^2 \leq E(X^4)$.

Aplicando esta desigualdad en (3.48) para $X = \zeta_1$, obtenemos que

$$kE(\zeta_1)^4 + 3(k^2 - k)[E(\zeta_1^2)]^2 \leq kE(\zeta_1)^4 + 3(k^2 - k)E(\zeta_1)^4 \leq b[k + 3k^2 - 3k] \leq 3k^2b.$$

De manera similar, usando la condición (3.20), obtenemos que (para $t \in (0, T]$):

$$P(\tilde{S}_k \leq t) \leq \frac{3bk^2}{(ak - T)^4}.$$

Así, de (3.46) resulta que

$$\mathcal{J}_k(t) \leq \frac{12bk^2}{(ak - T)^4}. \quad (3.49)$$

Ahora denotamos por $\boldsymbol{\mu} \equiv \boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})$ y tomamos $K := \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}}} \right\rceil + 1$, donde $\lceil x \rceil$ representa la parte entera de x .

Entonces, de la condición (3.24) se tiene que $K \geq \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}}} \geq \frac{2T}{a}$. Además, ya que $k \geq K$ obtenemos que $ak - T \geq \frac{ak}{2}$. Así, de (3.49) $\mathcal{J}_k(t) \leq \frac{192b}{a^4} \frac{1}{k^2}$ para $k > K$. Luego, en (3.45) resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{k>K} \mathcal{J}_k(t) &\leq \frac{192b}{a^4} \sum_{k>K} \frac{1}{k^2} < \frac{192b}{a^4} \int_K^\infty \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{192b}{a^4} \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}}} \right\rceil + 1} \leq \frac{192b}{a^4} \sqrt{\boldsymbol{\mu}(\xi, \tilde{\xi})}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

**Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de
48 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen**

Para obtener la cota final para I_{2t} aplicamos (3.50) en (3.45) y obtenemos que

$$I_{2t} \leq \gamma \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + 2 \right) \mu + \frac{192b}{a^4} \sqrt{\mu}. \quad (3.51)$$

La última desigualdad se cumple para todo $t \in (0, T]$.

Finalmente, sustituyendo (3.51) (la cota final para I_{2t}) y (3.36) (la cota final para I_{1t}) en (3.31), obtenemos la desigualdad de estabilidad deseada (3.22). \square

Demostración del Teorema 3.20. Para demostrar la desigualdad (3.26), se repiten todos los pasos hechos en la demostración del Teorema 3.19, hasta las desigualdades (3.45) y (3.46). Ahora, para encontrar una cota superior alternativa de $P(S_k \leq t)$ y $P(\tilde{S}_k \leq t)$ en (3.46), usamos la condición de acotamiento (3.25) y la desigualdad de Hoeffding para sumas de variables aleatorias independientes acotadas (ver, por ejemplo, Petrov (1975)). Apli-

cando dicha desigualdad a la suma $\sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i$, donde $\bar{\zeta}_i = a - \xi_i$, obtenemos que

$$\begin{aligned} P(S_k \leq t) &\leq P(S_k \leq T) \\ &= P \left(\sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \geq ak - T \right) \leq \exp \left[-\frac{2(ak - T)^2}{kb^2} \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

para todo k tal que $ak - T > 0$.

Notemos que por (3.27) $\mu < 1$. Ahora vamos a escoger

$$K = \lceil \log_{\alpha} \mu \rceil + 1, \quad (3.53)$$

donde $\alpha = e^{-\frac{1}{2}(a/\bar{b})^2}$.

Después de un poco de álgebra, de (3.27) y (3.53) obtenemos que $K \geq \frac{2T}{a}$. Así, $ak - T \geq \frac{ak}{2}$ para todo $k \geq K$.

Aplicando las últimas desigualdades a (3.52) vemos que

$$P(S_k \leq t) \leq \alpha^k \text{ para todo } k \geq K.$$

Análogamente se verifica que

$$P(\tilde{S}_k \leq t) \leq \alpha^k \text{ para todo } k \geq K.$$

Al aplicar las últimas dos desigualdades a (3.46) se sigue que $\mathcal{J}_k(t) \leq 4\alpha^k$, para $k \geq K$. Como consecuencia, para el segundo sumando en (3.42) obtenemos que

$$\sum_{k>K} \mathcal{J}_k(t) \leq 4\alpha \frac{\alpha^K}{1-\alpha}.$$

Ya que $K = \lceil \log_\alpha \boldsymbol{\mu} \rceil + 1 \geq \log_\alpha \boldsymbol{\mu}$, en (3.45) obtenemos que

$$I_{2t} \leq \gamma (\log_\alpha \boldsymbol{\mu} + 2) \boldsymbol{\mu} + \frac{4\alpha}{1-\alpha} \boldsymbol{\mu}.$$

Por último, basta aplicar esta última desigualdad junto con (3.36) en (3.31) para deducir la desigualdad de estabilidad (3.26). \square

Notas sobre la Conjetura 3.21

Sean $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}}) \rightarrow 0$ y $\boldsymbol{\mu}(\xi, \widetilde{\xi}) \rightarrow 0$, y supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.19. Entonces, para cada $T > 0$ dado,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \widetilde{\mathbf{R}}(t)) \rightarrow 0. \quad (3.54)$$

Analizando la demostración del Teorema 3.19 vemos que la restricción $t \leq T$ surge del acotamiento del término $I_{2t} = \mathbf{d}_{\mathbf{V}T} \left(\sum_{n=1}^{N(t)} \widetilde{\mathbf{X}}_n, \sum_{n=1}^{\widetilde{N}(t)} \widetilde{\mathbf{X}}_n \right)$ en (3.31).

Por ejemplo, si consideramos a \widetilde{X}_n en el caso unidimensional, con $r := E\widetilde{X}_1$, aplicando las propiedades conocidas de la métrica $\mathbf{d}_{\mathbf{V}T}$, vemos que

$$I_{2t} = \mathbf{d}_{\mathbf{V}T} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}} \sum_{n=1}^{N(t)} \widetilde{X}_n - \frac{r}{a}t, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t}} \sum_{n=1}^{\widetilde{N}(t)} \widetilde{X}_n - \frac{r}{a}t \right). \quad (3.55)$$

Ya que $\boldsymbol{\mu}(\xi, \widetilde{\xi}) \rightarrow 0$ y además $N(t)/t \xrightarrow{c.s.} 1/a$, $\widetilde{N}(t)/t \xrightarrow{c.s.} 1/a$, $EN(t)/t \rightarrow 1/a$ y $E\widetilde{N}(t)/t \rightarrow 1/a$, cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene que $Var(\widetilde{\xi}) \rightarrow Var(\xi)$. Entonces, podemos esperar que las densidades de las dos sumas en (3.55) converjan a las densidades normales correspondientes que deberían estar cerca unas de otras (aunque algunas condiciones adicionales podrían ser necesarias). Tales consideraciones junto con (3.54) pueden llevar a la conclusión de que $\sup_{t \geq 0} \mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(\mathbf{R}(t), \widetilde{\mathbf{R}}(t)) \rightarrow 0$.

Desigualdades de estabilidad para la distribución del capital de
50 procesos multidimensionales de riesgo tipo Sparre Andersen

Capítulo 4

Desigualdades de estabilidad para las densidades del tiempo de ruina

En este capítulo volvemos a los problemas de estabilidad asociados con la ruina de una compañía de seguros, ocupándonos ahora del *tiempo de ruina*.

En la teoría y práctica actuarial, en ciertas situaciones, la distribución del tiempo de ruina τ tiene que ser estimada. Un ejemplo de esto se da cuando ocurre un desastre natural repentino, en este caso, el flujo de las reclamaciones hacia la compañía aumenta considerablemente. Además, la distribución de τ provee probabilidades de ruina en todos los intervalos finitos, pues $P(\tau \leq t) = P(\text{ruina en } [0, t])$.

Para el modelo de riesgo Sparre Andersen, se conocen métodos relativamente simples para obtener las densidades del tiempo de ruina, solo para algunas distribuciones particulares de los tiempos entre las llegadas de las reclamaciones (ver, por ejemplo, Asmussen and Albrecher (2010), Dickson and Willmot (2005), Dickson et al. (2005), Drekić and Willmot (2003), Gerber and Shiu (1998) y Shi and Landriault (2013)).

En casos más generales se deben aplicar algunas aproximaciones o estimaciones estadísticas. Así, como lo explicamos en la Introducción, surge el problema de la evaluación de la estabilidad.

Más adelante, probaremos las desigualdades de estabilidad para la densi-

dad del tiempo de ruina para una versión del modelo Sparre Andersen.

4.1. Planteamiento del problema de estabilidad

Retomamos el proceso de riesgo Sparre Andersen, el cual fue definido en la ecuación (1) de la Introducción:

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

siendo, en este caso, $N(t)$, $t \geq 0$ un *proceso de renovación demorado* generado por la sucesión de variables independientes T_0, T_1, T_2, \dots . Suponemos que T_0 tiene densidad f_0 y las variables aleatorias i.i.d. $T_j, j \geq 1$ tienen función de densidad común f .

Vamos a considerar una versión particular del modelo (4.1) cuando la variable aleatoria X (genérica de la sucesión X_1, X_2, \dots) tiene *densidad exponencial* con parámetro $\delta > 0$.

Denotaremos por $p_\tau(t)$, para $t \geq 0$, a la densidad del *tiempo de ruina* τ (el cual se define como $\tau := \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$). De acuerdo con Borovkov and Dickson (2008), la densidad (defectuosa) $p_\tau(t)$ puede ser calculada mediante la siguiente ecuación:

$$p_\tau(t) = e^{-\delta(u+ct)} \times \left[f_0(t) + \frac{1}{u+ct} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta(u+ct))^n}{n!} \int_0^t (u+cv) f^{*n}(t-v) f_0(v) dv \right], t > 0. \quad (4.2)$$

Debido a que $P(\tau = \infty) > 0$, la densidad en (4.2) es “defectuosa”.

En (4.2) y lo que sigue, $f * h$ denota la convolución de las densidades f, h ; y $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$ representa la n -ésima convolución de f consigo misma. (Ver la demostración de (4.2) en el Teorema 1 de Borovkov and Dickson (2008)).

Para obtener cotas superiores para la divergencia de p_τ en términos de las desviaciones de las densidades de f_0 y f , vamos a emplear la fórmula (4.2).

Como siempre, es este trabajo, suponemos que nos encontramos en la situación en la que los *parámetros gobernantes* δ , f_0 y f del proceso (4.1) son desconocidos, pero pueden ser aproximados por algunos *parámetros* conocidos, digamos $\tilde{\delta}$, \tilde{f}_0 y \tilde{f} , respectivamente. Estos últimos pueden ser obtenidos a partir de algunas suposiciones teóricas o estimaciones estadísticas.

Bajo este escenario introducimos el siguiente *modelo aproximante de riesgo*:

$$\tilde{R}(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{X}_i, \quad t \geq 0, \quad (4.3)$$

cuyas componentes se definen de manera análoga como se hizo para el proceso (4.1). Sin embargo, los *parámetros gobernantes* de este proceso son denotados por $\tilde{\delta}$, \tilde{f}_0 y \tilde{f} . Sea \tilde{p}_τ la densidad del tiempo de ruina $\tilde{\tau} := \inf\{t > 0 : \tilde{R}(t) < 0\}$ para el proceso (4.3).

Estamos interesados en encontrar cotas superiores para la distancia $\sup_{t \geq 0} |p_\tau(t) - \tilde{p}_\tau(t)|$, que estén expresadas en términos de $|\delta - \tilde{\delta}|$ y de ciertas distancias entre las densidades f y \tilde{f} y, respectivamente, f_0 y \tilde{f}_0 .

4.2. Resultados obtenidos

La Proposición 4.2 y el Teorema 4.4 dados a continuación proporcionan cotas superiores para $d(p_\tau, \tilde{p}_\tau)$.

A diferencia de resultados sobre la estabilidad (continuidad) de la probabilidad de ruina que discutimos en el Capítulo 1 (ver también los artículos recientes Gajek and Rudz (2018), Touazi et al. (2017), Bareche and Cherfaoui (2019)), no encontramos en la literatura desigualdades de estabilidad para las densidades del tiempo de ruina.

Hacemos hincapié en que, en este trabajo no proponemos nuevas técnicas o algoritmos para estudiar p_τ cuando se conocen las densidades f y f_0 . Nuestro objetivo principal es estudiar el caso cuando $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_0^{(n)}$ y $\tilde{f} = \tilde{f}^{(n)}$ son estimadores estadísticos apropiados de las densidades desconocidas f y f_0 . (Aquí, n es el número de observaciones entre las llegadas de las reclamaciones.)

El Teorema 4.4 y los resultados de la Sección 4.3, implican que, bajo

algunas restricciones sobre f_0 y f se cumplen las siguientes desigualdades:

$$E \left(\sup_{t \geq 0} |p_\tau(t) - \tilde{p}_\tau^{(n)}(t)| \right) = O \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)^{2/5}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde \tilde{p}_τ es la densidad del tiempo de ruina para el proceso (4.3) con las densidades $\tilde{f}_0^{(n)}$ y $\tilde{f}^{(n)}$.

Más adelante vamos a usar las siguientes distancias entre densidades de variables aleatorias no negativas.

Definición 4.1. (a) *La métrica L^∞ :*

$$\mathbf{d}(f, \tilde{f}) := \text{ess sup}_{t \geq 0} |f(t) - \tilde{f}(t)|. \quad (4.4)$$

(b) *La distancia de variación total $\mathbf{d}_{\mathbf{VT}}$ definida en (3.11) del Capítulo 3:*

$$\mathbf{d}_{\mathbf{VT}}(f, \tilde{f}) := \int_0^\infty |f(t) - \tilde{f}(t)| dt. \quad (4.5)$$

(c) *Para un $a \in \mathbb{R}$ dado, la distancia segunda diferencia pseudomomento entre las densidades f_a y \tilde{f}_a se define como:*

$$\kappa_2(f_a, \tilde{f}_a) = 2 \int_{-\infty}^\infty |t| |F_a(t) - \tilde{F}_a(t)| dt. \quad (4.6)$$

En (4.6)

$$F_a(t) = \int_{-\infty}^t f(z+a) dz \quad \text{y} \quad \tilde{F}_a(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{f}(z+a) dz. \quad (4.7)$$

Sean T_0 y T_1, T_2, \dots los tiempos entre las llegadas de las reclamaciones en el modelo de riesgo (4.1), y respectivamente, \tilde{T}_0 y $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots$ los tiempos independientes entre las llegadas de las reclamaciones en el modelo aproximante (4.3).

Correspondientemente, f_0 y \tilde{f}_0 son las densidades de T_0 y \tilde{T}_0 , mientras que f y \tilde{f} son las densidades de T_1 y \tilde{T}_1 . Las variables aleatorias T_2, T_3, \dots , están distribuidas como T_1 y a su vez, $\tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \dots$ están distribuidas como \tilde{T}_1 .

La Proposición 4.2 y el Teorema 4.4 (enunciados a continuación) ofrecen cotas superiores para la distancia $\mathbf{d}(p_\tau, \tilde{p}_\tau)$.

Proposición 4.2. *Si*

$$M := \sup_{t \geq 0} f_0(t) < \infty, \quad (4.8)$$

entonces

$$\mathbf{d}(p_\tau, \tilde{p}_\tau) \leq \mathbf{d}(f_0, \tilde{f}_0) + \tilde{\delta}[u + cE\tilde{T}_0]\mathbf{d}(f, \tilde{f}) + 2M(\delta e)^{-1}|\delta - \tilde{\delta}|. \quad (4.9)$$

Notemos que si $\delta = \tilde{\delta}$, entonces la condición (4.8) puede ser omitida, y en este caso, se obtiene la ventaja de que, las constantes sobrevivientes en el lado derecho de (4.9) no involucran a ningún parámetro de los montos de las reclamaciones X_1, X_2, \dots , ni de las densidades f_0 y f (que se suponen desconocidas). Aún cuando en el lado derecho de (4.9) aparezcan las distancias $\mathbf{d}(f_0, \tilde{f}_0)$ y $\mathbf{d}(f, \tilde{f})$, como se verá más adelante, estas pueden ser estimadas (por ejemplo, estadísticamente), de tal manera que no se requiera el uso de los parámetros desconocidos de las densidades f_0 y f .

Por otro lado, la desigualdad (4.9) no es aplicable para ningún valor de u relativamente grande. Más aún, el lado derecho de (4.9) depende de u en una manera atípica (recordando que p_τ y \tilde{p}_τ se anulan más rápido cuando $u \rightarrow \infty$). La cota (4.11) (que se da más adelante) no tiene tal defecto, sin embargo, su demostración requiere más restricciones.

Para demostrar nuestro segundo resultado, vamos a suponer que se cumplan las siguientes condiciones.

Hipótesis 4.3. (a) $ET_1 = E\tilde{T}_1$.

(b) Las variables aleatorias T_1 y \tilde{T}_1 tienen varianzas positivas y finitas.

(c) Existe un entero $s \geq 1$ tal que la densidad $g := \tilde{f}^{*s}$ tiene primera derivada absolutamente continua denotada por g' , y $\varphi(t) := tg''(t) \in \mathbb{L}_1[0, \infty)$.

(d) $\tilde{M} := \sup_{t \geq 0} \tilde{f}_0(t) < \infty$.

Teorema 4.4. *Supongamos que se cumple la Hipótesis 4.3. Entonces existe una constante finita \mathbf{b} (únicamente determinada por \tilde{f}) tal que si*

$$\max \left\{ \mathbf{d}_{VT}(f, \tilde{f}), \frac{1}{2}\kappa_2(f, \tilde{f}) \right\} \leq (2\mathbf{b})^{-1} \quad (4.10)$$

entonces,

$$\mathbf{d}(p_\tau, \tilde{p}_\tau) \leq \mathbf{d}(f_0, \tilde{f}_0) + \mathbf{b}\tilde{M} \max \left\{ \mathbf{d}_{\mathbf{V}T}(f, \tilde{f}), \frac{1}{2} \inf_{a \in \mathbb{R}} \kappa_2(f_a, \tilde{f}_a) \right\} + 2M(\delta e)^{-1} |\delta - \tilde{\delta}|. \quad (4.11)$$

De nuevo, en el caso cuando $\delta = \tilde{\delta}$, la constante en el lado derecho de (4.11) depende solamente del *modelo aproximante* que se presume conocido. Las cotas superiores para la constante \mathbf{b} en (4.10) y (4.11) pueden ser obtenidas mediante algunas evaluaciones computacionales sencillas (ver Gordienko and Ruiz de Chávez (1998)) para algunas clases particulares de densidades \tilde{f} , tales como la uniforme, exponencial o Gama. Seguramente, en los casos en los que $\tilde{f} = \tilde{f}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, son estimadores estadísticos, las cotas estimadas solo son útiles cuando se aplica la estimación paramétrica (digamos, densidades Gama).

4.3. Caso cuando \tilde{f} es un estimador estadístico de f

Consideremos un proceso de renovación ordinario, es decir, tal que $f_0 = f$. Supondremos que la densidad f en (4.2) es desconocida, pero se conocen n observaciones T_1, \dots, T_n i.i.d. de la variable aleatoria T con densidad f . Estos datos estadísticos pueden ser usados para construir un estimador $\tilde{f} \equiv \tilde{f}_n$, que sea usado para la densidad de los intervalos entre las llegadas de las reclamaciones en el modelo aproximante de riesgo (4.3). En tales situaciones, la parte derecha de las desigualdades (4.9) y (4.11) es aleatoria. Por lo tanto, es razonable trabajar con los correspondientes valores esperados. Seguramente, los datos estadísticos T_1, \dots, T_n pueden ser usados de muchas maneras (existe una amplia literatura sobre este tema). En nuestro caso, vamos a suponer que la densidad acotada f tiene segunda derivada acotada.

Sea d la métrica definida en (4.4). Es bien sabido que (ver por ejemplo, Yu (1993)) que existe un estimador de kernel, que denotaremos por \tilde{f}_n , tal que

$$Ed(f, \tilde{f}_n) = O \left[\left(\frac{\ln(n)}{n} \right)^{2/5} \right] \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Además, la tasa de convergencia en (4.12) no puede ser mejorada para esta clase de densidades.

La situación es muy similar con la métrica de variación total $\mathbf{d}_{\mathbf{V}\mathbf{T}}$ definida en (4.5). En el Capítulo 5 de Devroye and Györfi (1985), se demuestra que, bajo ciertas condiciones adicionales (principalmente en la *cola de la densidad*), existe un estimador de kernel tal que

$$E\mathbf{d}_{\mathbf{V}\mathbf{T}}(f, \tilde{f}_n) = O[(1/n)^{2/5}] \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad (4.13)$$

y de nuevo, $E\mathbf{d}_{\mathbf{V}\mathbf{T}}(f, \tilde{f}_n)$ no puede anularse más rápido (en la clase de densidades consideradas).

Por otro lado, no conocemos ningún resultado sobre la tasa de convergencia de $E\kappa_2(f_a, \tilde{f}_{a,n})$, donde κ_2 es la segunda diferencia pseudomomento definida en (4.6). Yendo en esta dirección, sean $a \in \mathbb{R}$ un número arbitrario pero fijo y las funciones de distribución F_a y \tilde{F}_a definidas en (4.7). Denotamos $F \equiv F_a$ y consideramos la *función de distribución empírica* correspondiente:

$$\hat{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{T_i - a \leq t\}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

El enfoque estándar para estimar la función de distribución desconocida F , es usar \hat{F}_n , $n = 1, 2, \dots$. Bajo este esquema, mostraremos la siguiente cota superior para $E\kappa_2(F, \hat{F}_n)$.

Proposición 4.5. *Supongamos que para algún $\alpha > 0$, $\mathcal{H} := E|T_1 - a|^{4+\alpha} < \infty$. Entonces*

$$E\kappa_2(F, \hat{F}_n) \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{2} + \frac{4\mathcal{H}}{\alpha} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

(La Proposición 4.5 se demuestra en la siguiente sección.)

Notemos que la convergencia en (4.15) es más rápida que en (4.12) y (4.13).

Aplicando (4.12), (4.13) y (4.15) a la desigualdad (4.11), podemos concluir que las estimaciones estadísticas de la densidad f pueden construirse de tal manera que

$$Ed(p_\tau, \tilde{p}_\tau^{(n)}) = O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{2/5}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4.4. Demostraciones

Demostración de la Proposición 4.2. Sea \mathbf{d} la métrica definida en (4.4); f y \tilde{f} son las densidades introducidas en la descripción de los modelos (4.1) y (4.3).

Primero mostraremos por inducción que

$$\mathbf{d}(f^{*n}, \tilde{f}^{*n}) \leq n\mathbf{d}(f, \tilde{f}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

Efectivamente, suponiendo que se cumple la desigualdad (4.16) tenemos que para cualquier $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \left| f^{*(n+1)}(t) - \tilde{f}^{*(n+1)}(t) \right| &\leq \left| \int f^{*n}(t-v)f(v)dv - \int \tilde{f}^{*n}(t-v)f(v)dv \right| + \\ &\quad \left| \int \tilde{f}^{*n}(t-v)f(v)dv - \int \tilde{f}^{*n}(t-v)\tilde{f}(v)dv \right| \\ &\leq \mathbf{d}(f^{*n}, \tilde{f}^{*n}) + \mathbf{d}(f, \tilde{f}) \leq (n+1)\mathbf{d}(f, \tilde{f}). \end{aligned}$$

Sea $t \geq 0$ un número arbitrario pero fijo, y $u_t := u + ct$. Entonces, aplicando (4.2) y la versión correspondiente para el modelo aproximante de riesgo (4.3), tenemos que:

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_\tau(t) - p_\tau(t)| &= \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} \left[\tilde{f}_0(t) + \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v \tilde{f}^{*n}(t-v) \tilde{f}_0(v) dv \right] - \right. \\ &\quad \left. e^{-\delta u_t} \left[f_0(t) + \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v f^{*n}(t-v) f_0(v) dv \right] \right|. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sumando y restando términos apropiados en (4.17) y aplicando la des-

igualdad del triángulo tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\tilde{p}_\tau(t) - p_\tau(t)| &\leq \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} \left[\tilde{f}_0(t) + \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v \tilde{f}^{*n}(t-v) \tilde{f}_0(v) dv \right] - \right. \\
&\quad \left. e^{-\tilde{\delta}u_t} \left[\tilde{f}_0(t) + \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v f^{*n}(t-v) \tilde{f}_0(v) dv \right] \right| + \\
&\quad \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} \left[\tilde{f}_0(t) + \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v f^{*n}(t-v) \tilde{f}_0(v) dv \right] - \right. \\
&\quad \left. e^{-\tilde{\delta}u_t} \left[f_0(t) + \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v f^{*n}(t-v) f_0(v) dv \right] \right| + \\
&\quad \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} \left[f_0(t) + \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v f^{*n}(t-v) f_0(v) dv \right] - \right. \\
&\quad \left. e^{-\delta u_t} \left[f_0(t) + \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v f^{*n}(t-v) f_0(v) dv \right] \right| \\
&:= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Tras la aplicación de la desigualdad (4.16), el sumando $I_1(t)$ en el lado derecho de (4.18) se acota como sigue:

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v \left| \tilde{f}^{*n}(t-v) - f^{*n}(t-v) \right| \tilde{f}_0(v) dv \\
&\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \left[u \int_0^t \left| \tilde{f}^{*n}(t-v) - f^{*n}(t-v) \right| \tilde{f}_0(v) dv + \right. \\
&\quad \left. c \int_0^t v \left| \tilde{f}^{*n}(t-v) - f^{*n}(t-v) \right| \tilde{f}_0(v) dv \right] \\
&\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \left[u \mathbf{d}(\tilde{f}^{*n}, f^{*n}) \int_0^t \tilde{f}_0(v) dv + \right. \\
&\quad \left. c \mathbf{d}(\tilde{f}^{*n}, f^{*n}) \int_0^t v \tilde{f}_0(v) dv \right] \\
&\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \left[u \int_0^{\infty} \tilde{f}_0(v) dv + c \int_0^{\infty} v \tilde{f}_0(v) dv \right] \mathbf{d}(\tilde{f}^{*n}, f^{*n}) \\
&\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \tilde{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^{n-1}}{(n-1)!} [u + cET_0] \mathbf{d}(f, \tilde{f}) \\
&= \tilde{\delta} [u + cET_0] \mathbf{d}(f, \tilde{f}). \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Para estimar el sumando $I_2(t)$ en la parte derecha de (4.18) notemos que, $v \leq t$ y $u_v \leq u_t$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \left| \tilde{f}_0(t) - f_0(t) \right| + \\
&\quad e^{-\tilde{\delta}u_t} \frac{1}{u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t u_v \tilde{f}^{*n}(t-v) \left| \tilde{f}_0(v) - f_0(v) \right| dv \\
&\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \sup_{t \geq 0} \left| \tilde{f}_0(t) - f_0(t) \right| + \\
&\quad e^{-\tilde{\delta}u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^t \frac{u_v}{u_t} \tilde{f}^{*n}(t-v) \sup_{t \geq 0} \left| \tilde{f}_0(t) - f_0(t) \right| dv \\
&\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \mathbf{d}(f_0, \tilde{f}_0) + e^{-\tilde{\delta}u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \int_0^{\infty} \tilde{f}^{*n}(t-v) dv \mathbf{d}(f_0, \tilde{f}_0) \\
&\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \mathbf{d}(f_0, \tilde{f}_0) + e^{-\tilde{\delta}u_t} (e^{\tilde{\delta}u_t} - 1) \mathbf{d}(f_0, \tilde{f}_0) \\
&= \mathbf{d}(f_0, \tilde{f}_0). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Ahora, para estimar el término $I_3(t)$ en la parte derecha de (4.18) tenemos que:

$$\begin{aligned}
I_3(t) &\leq f_0(t) \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} - e^{-\delta u_t} \right| + \frac{1}{u_t} \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} - e^{-\delta u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta u_t)^n}{n!} \right| \times \\
&\quad \int_0^t u_v f^{*n}(t-v) f_0(v) dv \\
&\leq \sup_{t \geq 0} f_0(t) \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} - e^{-\delta u_t} \right| + \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} - e^{-\delta u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta u_t)^n}{n!} \right| \times \\
&\quad \sup_{t \geq 0} \int_0^t \frac{u_v}{u_t} f^{*n}(t-v) f_0(v) dv \\
&\leq M \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} - e^{-\delta u_t} \right| + \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} - e^{-\delta u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta u_t)^n}{n!} \right| \times \\
&\quad M \int_0^{\infty} f^{*n}(t-v) dv \\
&\leq M \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} - e^{-\delta u_t} \right| + M \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} - e^{-\delta u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta u_t)^n}{n!} \right| \\
&\leq M \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} - e^{-\delta u_t} \right| + M \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} (1 - e^{\tilde{\delta}u_t}) - e^{-\delta u_t} (1 - e^{\delta u_t}) \right| \\
&= 2M \left| e^{-\tilde{\delta}u_t} - e^{-\delta u_t} \right|.
\end{aligned}$$

Sea, por ejemplo, $\tilde{\delta} > \delta$. Entonces

$$I_3(t) = 2M e^{-\delta u_t} \left| e^{-(\tilde{\delta}-\delta)u_t} - 1 \right| \leq 2M e^{-\delta u_t} u_t |\tilde{\delta} - \delta| \leq 2M (\delta e)^{-1} |\tilde{\delta} - \delta|, \quad (4.21)$$

ya que $\sup_{x \geq 0} x e^{-x} = e^{-1}$.

La igualdad (4.21) se verifica de manera análoga para $\delta > \tilde{\delta}$.

Notando que los lados derechos de las desigualdades (4.19), (4.20) y (4.21) no dependen de $t \geq 0$, podemos combinarlas con (4.18); como consecuencia obtenemos (4.9). □

Demostración del Teorema 4.4. Los términos I_2 y I_3 en la desigualdad (4.18) se acotan exactamente como en (4.20) y (4.21). Para el término I_1 , la

primera desigualdad en (4.19) muestra que

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq e^{-\tilde{\delta}u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \tilde{M} \int_0^{\infty} |\tilde{f}^{*n}(x) - f^{*n}(x)| dx \\ &= \tilde{M} e^{-\tilde{\delta}u_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{\delta}u_t)^n}{n!} \mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}^{*n}, f^{*n}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

El Lema 1 en Gordienko and Ruiz de Chávez (1998) establece que bajo las condiciones del Teorema 4.4, para $n = 1, 2, \dots$,

$$\mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}^{*n}, f^{*n}) \leq \mathbf{b}\Delta, \quad (4.23)$$

siempre que

$$\Delta := \max\{\mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}, f), \zeta_2(\tilde{f}, f)\} \leq (2\mathbf{b})^{-1}. \quad (4.24)$$

En (4.24) ζ_2 es la métrica de Zolotarev de orden 2.

Aplicando la desigualdad $\zeta_2 \leq \frac{1}{2}\kappa_2$, la cual se cumple bajo la igualdad de los primeros momentos (ver por ejemplo Rachev (1991)), vemos que (4.10) asegura el cumplimiento de (4.24). Así, por (4.23),

$$\mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}^{*n}, f^{*n}) \leq \mathbf{b} \max\{\mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}, f), \frac{1}{2}\kappa_2(\tilde{f}, f)\}. \quad (4.25)$$

Recordamos que f y \tilde{f} son las densidades de las variables aleatorias T_1 y \tilde{T}_1 , respectivamente. Sea a un número arbitrario. Consideramos las variables aleatorias $X_1 = T_1 - a$ y $\tilde{X}_1 = \tilde{T}_1 - a$ con las densidades correspondientes $h_a(\cdot) = f(\cdot + a)$ y $\tilde{h}_a(\cdot) = \tilde{f}(\cdot + a)$.

La desigualdad (4.25) es también cierta para el par de densidades (h_a, \tilde{h}_a) . De (4.5) se sigue que $\mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}, f) = \mathbf{d}_{VT}(\tilde{h}_a, h_a)$ y $\mathbf{d}_{VT}(f^n, f^{*n}) = \mathbf{d}_{VT}(\tilde{h}_a^{*n}, h_a^{*n})$. Por lo tanto, para todo $n \geq 1$,

$$\mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}^{*n}, f^{*n}) \leq \mathbf{b} \inf_{a \in \mathbb{R}} \max\{\mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}, f), \frac{1}{2}\kappa_2(\tilde{h}_a, h_a)\}.$$

Combinando esta desigualdad con (4.22) obtenemos que

$$\sup_{t \geq 0} I_1(t) \leq \tilde{M}\mathbf{b} \max\left\{\mathbf{d}_{VT}(\tilde{f}, f), \frac{1}{2} \inf_{a \in \mathbb{R}} \kappa_2(\tilde{h}_a, h_a)\right\},$$

que junto con (4.18) y las cotas (4.20) y (4.21) dadas en la demostración de la Proposición 4.2, proporciona la desigualdad deseada (4.11). □

Demostración de la Proposición 4.5. Por (4.6) y el Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} E\kappa_2(F, \hat{F}_n) &= 2E \int_{-\infty}^{\infty} |x| |F(x) - \hat{F}_n(x)| dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| E|F(x) - \hat{F}_n(x)| dx \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| \left(E[F(x) - \hat{F}_n(x)]^2 \right)^{1/2} dx. \end{aligned}$$

En vista de (4.14), $E[F(x) - \hat{F}_n(x)]^2 = \frac{1}{n}[F(x)(1 - F(x))]$.
Por lo tanto

$$\begin{aligned} E\kappa_2(F, \hat{F}_n) &\leq \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| [F(x)(1 - F(x))]^{1/2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{-1}^1 |x| [F(x)(1 - F(x))]^{1/2} dx + \\ &\quad \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{-1} |x| [F(x)(1 - F(x))]^{1/2} dx + \\ &\quad \frac{2}{\sqrt{n}} \int_1^{\infty} x [F(x)(1 - F(x))]^{1/2} dx. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por la desigualdad de Markov, para $x \geq 1$

$$F(x)(1 - F(x)) \leq (1 - F(x)) \leq P(|T_1 - a| > x) \leq \frac{\mathcal{H}}{x^{4+\alpha}}.$$

También, para $x \leq -1$,

$$F(x)(1 - F(x)) \leq F(x) \leq P(|T_1 - a| \geq -x) \leq \frac{\mathcal{H}}{|x|^{4+\alpha}}.$$

Sustituyendo estas desigualdades en (4.26) e integrando con $F(1 - F) \leq 1/4$, obtenemos (4.15). □

Conclusiones

En el presente trabajo se trata el problema de la estabilidad cuantitativa de varias características de procesos de riesgo. Los modelos considerados incluyen al proceso Crámer-Lundberg, el proceso de renovación multidimensional y el proceso de riesgo Sparre Andersen con reclamaciones exponenciales.

Hemos obtenido nuevas desigualdades de estabilidad para:

- La probabilidad de ruina;
- Las distribuciones del capital (superávit) corriente;
- La densidad del tiempo de ruina.

Creemos que nuestros resultados son importantes no solo desde el punto de vista teórico, sino que también pueden ser útiles en aplicaciones prácticas (de modelos de riesgo). Esta creencia está respaldada por el hecho común de que en las aplicaciones reales, los parámetros de los modelos y las distribuciones de los modelos son desconocidos, al menos parcialmente, y deben estimarse estadísticamente.

Vale la pena mencionar que, a pesar de que el modelo de Crámer-Lundberg fue propuesto alrededor de 1903, este y otros modelos de riesgo aún están siendo intensamente estudiados. La mayor parte del estudio incluye métodos analíticos directos y técnicas de aproximación analíticas o numéricas. Por su parte, la “teoría” de la estabilidad cuantitativa de los modelos de riesgo apenas está dando sus primeros pasos.

Para obtener nuestras desigualdades de estabilidad (que son resultados nuevos y están publicados en revistas líderes actuariales), por un lado desarrollamos una nueva técnica con operadores contractivos y, por otro lado, hemos aplicado resultados relativamente recientes sobre la comparación de

distribuciones de sumas de variables y vectores aleatorios.

Cabe señalar que el método de operadores contractivos es simple pero efectivo para los procesos de riesgo de Crámer-Lundberg. Es razonable esperar que este método pueda ser útil para estudiar otros procesos de riesgo. (Véase por ejemplo, el artículo Gajek and Rudz (2018)).

La metodología utilizada en este trabajo es estándar: análisis matemático y en algunas ocasiones, técnicas computacionales para obtener algunas estimaciones numéricas.

Como ya hemos señalado, los estudios de estabilidad de los procesos de riesgo, se encuentran en una etapa inicial. Como consecuencia, hay muchas direcciones para continuar la investigación realizada en esta tesis. Por ejemplo, el problema de obtener la desigualdad de estabilidad en métrica débiles para el modelo de Sparre Andersen está abierto. Una línea de investigación interesante es la estabilidad de la probabilidad de ruina en modelos multi-dimensionales de riesgo. También, por ahora no es claro cómo descartar la suposición de exponencialidad de las reclamaciones en la afirmaciones presentadas en el Capítulo 4 de este trabajo.

Apéndice

Probabilidad de ruina

Una ecuación integral para la probabilidad de ruina ψ a tiempo continuo

El siguiente teorema es un resultado muy conocido en la Teoría de la Ruina. Se trata de una ecuación integral para la probabilidad de ruina $\psi(u)$, $u \geq 0$ (con horizonte infinito).

Teorema A.1. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis 1.1 y 1.2, dadas en el Capítulo 1. La probabilidad de ruina es una función $\psi(u)$, $u \geq 0$, para la cual:*

(i)

$$\psi(0) = \lambda\mu/c; \quad (1)$$

(ii)

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\int_u^\infty \bar{F}(y)dy + \int_0^u \psi(u-y)\bar{F}(y)dy \right). \quad (2)$$

Además, en la clase de funciones con valores en el intervalo $[0, 1]$, la ecuación (2) tiene solución única.

Coeficiente de ajuste

Hipótesis A.2. *Supongamos que existe $\bar{r} > 0$ tal que $Ee^{rY} < \infty$ para cada $r \in (0, \bar{r})$.*

Definición A.3. El número $R \in (0, \bar{r})$ se llama coeficiente de ajuste si R es la solución única (si ésta existe) de la ecuación

$$\theta(r) := \lambda(Ee^{rY} - 1) - cr = 0,$$

donde λ es el parámetro del proceso de Poisson $N(t)$ en el modelo de Cramér-Lundberg.

Probabilidad de ruina para distribuciones Gama

El siguiente resultado fue tomado del artículo Yuanjiang et al. (2003) (ver Teorema 2 de esta referencia, pág. 139) y ofrece una fórmula explícita para calcular la probabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo en el caso particular cuando los montos de las reclamaciones siguen una distribución Gama.

Teorema A.4. Supongamos que los montos de las reclamaciones en el modelo (1.1) del Capítulo 1 siguen una distribución Gama con parámetros $n = 2$ y $\alpha > 0$. Entonces, la probabilidad de no ruina $\bar{\psi}$ se calcula como:

$$\bar{\psi}(u) = 1 + \frac{\nu_2(\nu_1 + \alpha)^2}{(\nu_1 - \nu_2)\alpha^2} e^{\nu_1 u} + \frac{\nu_1(\nu_2 + \alpha)^2}{(\nu_2 - \nu_1)\alpha^2} e^{\nu_2 u}, \quad (3)$$

donde $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$, λ es el parámetro del proceso de Poisson $N(t)$, c es la entrada de primas por unidad de tiempo y

$$\nu_1 = \frac{\lambda - 2c\alpha + \sqrt{\lambda^2 + 4c\alpha\lambda}}{2c},$$

$$\nu_2 = \frac{\lambda - 2c\alpha - \sqrt{\lambda^2 + 4c\alpha\lambda}}{2c}.$$

Probabilidad de ruina para variables aleatorias que toman un número finito de valores

En el libro Kaas et al. (2008) (pág. 107) se encuentra el siguiente resultado que presenta una fórmula explícita para calcular la probabilidad de ruina

en el modelo clásico de riesgo, para el caso cuando los tamaños de las reclamaciones son variables aleatorias discretas con un número finito de valores.

Sea $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$. Si los tamaños de las reclamaciones X toman un número finito de valores positivos, digamos x_1, x_2, \dots, x_m con probabilidades p_1, p_2, \dots, p_m , entonces la probabilidad de ruina ψ es igual a:

$$\psi(u) = 1 - \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{k_1, \dots, k_m} (-z)^{k_1 + \dots + k_m} e^z \prod_{j=1}^m \frac{p_j^{k_j}}{k_j!}, \quad (4)$$

donde $z = \frac{\lambda}{c}(u - k_1x_1 - \dots - k_mx_m)_+$. La suma se extiende sobre todos los valores de $k_1, \dots, k_m = 0, 1, 2, \dots$ tal que z sea positivo.

Ecuaciones recurrentes para la probabilidad de ruina ψ a tiempo discreto (en el modelo clásico de riesgo)

El siguiente teorema nos proporciona una fórmula conocida para calcular la probabilidad de ruina para el proceso de riesgo a tiempo discreto (2.1), en el Capítulo 1.

Teorema A.5. *La probabilidad de ruina satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\psi(u) = \sum_{m=u}^{\infty} \bar{F}(m) + \sum_{m=0}^{u-1} \psi(u-m)\bar{F}(m), \quad u = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

donde $\bar{F}(t) := 1 - F(t)$ y por convenio $\sum_{m=0}^{-1} \psi(-m)\bar{F}(m) := 0$.

La demostración del Teorema A.5 puede encontrarse por ejemplo en Rincón (2012).

Desigualdades de estabilidad de Beirlant and Rachev (1987)

Las siguientes desigualdades de estabilidad son resultados del artículo Beirlant and Rachev (1987) (ver los Lemas 2.3 y 2.4, pág. 182, 183 de ese trabajo).

Lema A.6 (Lema 2.3 de Beirlant and Rachev (1987)). Sean $\{X_i\}$ y $\{\tilde{X}_i\}$ dos sucesiones de variables aleatorias i.i.d. y sea $N(t)$ independiente de $\{X_i\}$ y $\{\tilde{X}_i\}$, con $H(t) = EN(t) < \infty$. Suponer que $\kappa_r(X_1, \tilde{X}_1) = r \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} |F_{X_1}(x) - F_{\tilde{X}_1}(x)| dx < \infty$, $r > 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} x^j d(F_{X_1}(x), F_{\tilde{X}_1}(x)) = 0$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, para algún $r = m-1+1/p \geq 1$ ($m = 1, 2, \dots; 1 \leq p < \infty$). Además, sea $\tilde{Z}(t) = \frac{1}{H(t)} \sum_{i=0}^{N(t)} \tilde{X}_i$ con densidad acotada $p_{\tilde{Z}(t)}$. Entonces

$$\begin{aligned} \nu \left(\sum_{i=0}^{N(t)} X_i, \sum_{i=0}^{N(t)} \tilde{X}_i \right) &\leq \psi_1(\kappa_r(X_1, \tilde{X}_1)) \\ &= \left(1 + \sup p_{\tilde{Z}(t)}(x) \right) \times c_{m,p} \left(\varphi_2 \left(\kappa_r \left(X_1, \tilde{X}_1 \right) \right) \right)^{1/1+r} \\ &\quad \times (H(t))^{(1-r)/(1+r)}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} c_{m,p} &= \frac{(2m)!(2m+1)^{1/2}}{m(3-2/p)^{1/2}} \quad y \\ \varphi_2(\kappa_r) &= \begin{cases} \kappa_r^{1/p} & m = 1, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(r)} \kappa_r & m > 1, \quad 1 \leq p < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Lema A.7 (Lema 2.4 de Beirlant and Rachev (1987)). Sean $\{\xi_i\}$ y $\{\tilde{\xi}_i\}$ dos sucesiones de variables aleatorias i.i.d., ambas independientes de $\{\tilde{X}_i\}$. Suponer que $H(t) = EN(t) < \infty$, $\tilde{H}(t) = E\tilde{N}(t) < \infty$, $\theta(\tilde{\xi}_1) = \sup_k \sup_x p_{k-1/2} \sum_{i=1}^k \tilde{\xi}_i(x) < \infty$, $\kappa_r(\xi_1, \tilde{\xi}_1) < \infty$ y $\int_0^{\infty} x^j d(F_{\xi_1}(x) - F_{\tilde{\xi}_1}(x)) = 0$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, para algún $r = m-1+1/p (\geq 2)$ ($m = 1, 2, \dots; 1 \leq p < \infty$). Finalmente, sea $F_{\tilde{X}_1}(a) < 1$ para todo $a > 0$ y $E\tilde{X}_1 < \infty$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\nu \left(\sum_{i=0}^{N(t)} \tilde{X}_i, \sum_{i=0}^{\tilde{N}(t)} \tilde{X}_i \right) &\leq \psi_2(\boldsymbol{\kappa}_r(\xi_1, \tilde{\xi}_1)) \\
&= (1 + \theta(\tilde{\xi}_1)) \boldsymbol{\kappa}_r^{1/(r+1)}(\xi_1, \tilde{\xi}_1) + \inf_{a>0} \left\{ 2c_{m,p}(1 + \theta(\tilde{\xi}_1)) \right. \\
&\quad \times \left(\varphi_2(\boldsymbol{\kappa}_r(\xi_1, \tilde{\xi}_1)) \right)^{1/(1+r)} \chi_{\tilde{X}_1, r}(a) \\
&\quad \left. + a^{-1} E \tilde{X}_1 \max \left(H(t), \tilde{H}(t) \right) \right\}, \tag{8}
\end{aligned}$$

donde φ_2 está dado por (7) y $\chi_{\tilde{X}_1, r}(a) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{(1-r/2)/(1+r)} F_{\tilde{X}_1}^k(a)$.

Bibliografía

- Albrecher, H., Bäuerle, N., and Thonhauser, S. (2011). Optimal dividend-payout in random discrete time. *Statistics and Risk Modeling*, 28:251–276.
- Asmussen, S. and Albrecher, H. (2010). *Ruin Probabilities*. Advanced series on statistical science & applied probability. World Scientific.
- Badila, E. S., Boxma, O. J., and Resing, J. A. C. (2015). Two parallel insurance lines with simultaneous arrivals and risks correlated with inter-arrival times. *Insurance: Mathematics and Economics*, 61(C):48–61.
- Bareche, A. and Cherfaoui, M. (2019). Sensitivity of the stability bound for ruin probabilities to claim distributions. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 21.
- Beirlant, J. and Rachev, S. T. (1987). The problem of stability in insurance mathematics. *Insurance: Mathematics and Economics*, 6(3):179 – 188.
- Bening, V. and Korolev, V. Y. (2003). Nonparametric estimation of the ruin probability for generalized risk processes. *Theory of Probability and Its Applications*, 47.
- Benouaret, Z. and Aïssani, D. (2010). Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independent claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, (2):83–92.
- Bobkov, S. and Ledoux, M. (2019). *One-dimensional empirical measures, order statistics, and Kantorovich transport distances*, volume 261. American Mathematical Society.

- Borovkov, K. A. and Dickson, D. C. M. (2008). On the ruin time distribution for a Sparre Andersen process with exponential claim sizes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(3):1104–1108.
- Cai, J. and Dickson, D. C. (2003). Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the sparre andersen model with interest. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32(1):61 – 71.
- Cai, J. and Li, H. (2005). Multivariate risk model of phase type. *Insurance: Mathematics and Economics*, 36(2):137 – 152.
- Chan, K. C. G. and Yang, H. (2005). Sensitivity analysis on ruin probabilities with heavy-tailed claims. *Statistical Methodology*, 2:59–63.
- Chan, W. S., Yang, H., and Zhang, L. (2003). Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32(3):345–358.
- Chen, Y., Yuen, K. C., and Ng, K. W. (2011). Asymptotics for the ruin probabilities of a two-dimensional renewal risk model with heavy-tailed claims. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27(3):290–300.
- Cojocaru, I. (2015). Ruin probabilities in multivariate risk models with periodic common shock. *Scandinavian Actuarial Journal*, (2):159–174.
- Devroye, L. and Györfi, L. (1985). *Nonparametric Density Estimation: The \mathbb{L}_1 View*. John Wiley & Sons, New York.
- Dickson, D. C. M. (2016). *Insurance Risk and Ruin*. International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press, 2 edition.
- Dickson, D. C. M., Hughes, B. D., and Lianzeng, Z. (2005). The density of the time to ruin for a Sparre Andersen process with Erlang arrivals and exponential claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(5):358–376.
- Dickson, D. C. M. and Willmot, G. E. (2005). The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model. *ASTIN Bulletin*, 35(01):45–60.
- Drekic, S. and Willmot, G. E. (2003). On the density and moments of the time of ruin with exponential claims. *ASTIN Bulletin*, 33(1):11–21.

- Durrett, R. (2010). *Probability: Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 4 edition.
- Ekström, E. and Lu, B. (2014). The optimal dividend problem in the dual model. *Adv. in Appl. Probab.*, 46(3):746–765.
- Enikeeva, F., Kalashnikov, V., and Rusaityte, D. (2001). Continuity estimates for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, (1):18–39.
- Frees, E. W. (1986). Nonparametric estimation of the probability of ruin. *ASTIN Bulletin*, 16(S1):S81–S90.
- Gajek, L. and Rudź, M. (2018). Banach contraction principle and ruin probabilities in regime-switching models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 80.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1):48–72.
- Gordienko, E. (2004). Stability estimates of generalized geometric sums and their applications. *Kybernetika*, 40(2):257–272.
- Gordienko, E. (2005). Comparing the distributions of sums of independent random vectors. *Kybernetika*, 41(4):519–529.
- Gordienko, E. and Ruiz de Chávez, J. (1998). New estimates of continuity in M/GI/1/∞ queues. *Queueing Systems*, 29:175–188.
- Gordienko, E. and Ruiz de Chávez, J. (2002). New continuity estimates of geometric sums. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 15(3):235–249.
- Gordienko, E., Ruiz de Chávez, J., and Vázquez-Ortega, P. (2020). Note on stability of the ruin time density in a sparre andersen risk model with exponential claim sizes. *Applicationes Mathematicae*, 48:77–88.
- Gordienko, E. and Vázquez-Ortega, P. (2016). Simple continuity inequalities for ruin probability in the classical risk model. *ASTIN Bulletin*, 46(3):801–814.

- Gordienko, E. and Vázquez-Ortega, P. (2018). Continuity inequalities for multidimensional renewal risk models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 82(C):48–54.
- Hu, Z. and Jiang, B. (2013). On joint ruin probabilities of a two-dimensional risk model with constant interest rate. *Journal of Applied Probability*, 50(2):309–322.
- Huang, W., Weng, C., and Zhang, Y. (2014). Multivariate risk models under heavy-tailed risks. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 30(3):341–360.
- Ivanovs, J. and Boxma, O. (2015). A bivariate risk model with mutual deficit coverage. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64:126 – 134.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., and Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*. SpringerLink : Bücher. Springer Berlin Heidelberg.
- Kalashnikov, V. V. (1996). Two-sided bounds of ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1996(1):1–18.
- Kalashnikov, V. V. (1997). *Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications: Risk Analysis, Reliability, Queueing*. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands.
- Kalashnikov, V. V. (2000). *Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications*. Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen.
- Kartashov, N. V. (1986). Inequalities in theorems of ergodicity and stability for markov chains with common phase space. ii. *Theory of Probability and Its Applications - THEOR PROBAB APPL-ENGL TR*, 30.
- Kartashov, N. V. (2001). *Interval estimates of the classical ruin probability for some classes of distributions of claims*. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 63, 87–97.
- Konstantinides, D., Tang, Q., and Tsitsiashvili, G. (2002a). Estimates for the ruin probability in the classical risk model with constant interest force in the presence of heavy tails. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31:447–460.

- Konstantinides, D., Tang, Q., and Tsitsiashvili, G. (2002b). Two-sided bounds for ruin probability under constant interest force. *Journal of Mathematical Sciences*, 123:3824–3833.
- Li, J., Liu, Z., and Tang, Q. (2007). On the ruin probabilities of a bidimensional perturbed risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(1):185 – 195.
- Loisel, S. and Privault, N. (2009). Sensitivity analysis and density estimation for finite-time ruin probabilities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230(1):107 – 120.
- Marceau, É. and Rioux, J. (2001). On robustness in risk theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(2):167–185.
- Marciniak, E. and Palmowski, Z. (2016). On the optimal dividend problem for insurance risk models with surplus-dependent premiums. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 168(2):723–742.
- Meyn, S. P. and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag, London.
- Mitrophanov, A. Y. (2005). Sensitivity and convergence of uniformly ergodic markov chains. *Journal of Applied Probability*, 42:1003–1014.
- Mnatsakanov, R., Ruymgaart, L., and Ruymgaart, F. (2008). Nonparametric estimation of ruin probabilities given a random sample of claims. *Mathematical Methods of Statistics*, 17:35–43.
- Petrov, V. (1975). *Sums of Independent Random Variables*. Springer-Verlag, New York.
- Rachev, S. T. (1991). *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*. John Wiley and Sons, Chichester.
- Rachev, S. T. and Rüschendorf, L. (1998). *Mass Transportation Problems: Volume I: Theory*. Mass Transportation Problems. Springer.
- Resnick, S. (1998). *A Probability Path*. Birkhäuser Boston.
- Rincón, L. (2012). *Introducción a la teoría del riesgo*. 1ra. ed. UNAM, Facultad de Ciencias, México.

- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons.
- Rusaityte, D. (2001). *Stability Bounds for Ruin Probabilities in a Markov Modulated Risk Model with Investments*. Working Paper Nr. 178. Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen.
- Santana Cobian, D. J., González-Hernández, J., and Rincón, L. (2017). Approximation of the ultimate ruin probability in the classical risk model using erlang mixtures. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 19.
- Schick, A. and Wefelmeyer, W. (2008). Convergence rates in weighted L_1 spaces of kernel density estimators for linear processes. *Alea*, (4):117–129.
- Shi, T. and Landriault, D. (2013). Distribution of the time to ruin in some Sparre Andersen risk models. *ASTIN Bulletin*, 43:39–59.
- Touazi, A., Benouaret, Z., Aïssani, D., and Adjabi, S. (2017). Nonparametric estimation of the claim amount in the strong stability analysis of the classical risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 74.
- Vázquez-Abad, F. J. and LeQuoc, P. (2001). Sensitivity analysis for ruin probabilities: canonical risk model. *Journal of the Operational Research Society*, 52(1):71–81.
- Vázquez-Ortega, P. (2015). Cotas superiores para la estimación de la estabilidad de ruina en el modelo clásico de riesgo. Master's thesis, Universidad Autónoma Metropolitana.
- Yin, C., Wen, Y., and Zhao, Y. (2014). On the optimal dividend problem for a spectrally positive Lévy process. *ASTIN Bulletin*, 44(3):635–651.
- Yu, B. (1993). Density estimation in the L^∞ norm for dependent data with applications to the Gibbs sampler. *Annals of Statistics*, 21(2):711–735.
- Yuanjiang, H., Xucheng, L., and Zhang, J. (2003). Some results of ruin probability for the classical risk process. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, 7:133–146.

-
- Zolotarev, V. M. (1979). Ideal metrics in the problems of probability theory and mathematical statistics. *Australian Journal of Statistics*, 21(3):193–208.

	ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA	
Casa abierta al tiempo UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA	No. 00084 Matricula: 2123802891	
Estimaciones de estabilidad en modelos colectivos de riesgo.	<p>En la Ciudad de México, se presentaron a las 14:00 horas del día 17 del mes de agosto del año 2023 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:</p> <p style="text-align: center;"> DR. EVGUENI ILICH GORDIENKO DR. LUIS ANTONIO RINCON SOLIS DRA. EKATERINA TODOROVA KOLKOVSKA DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE </p> <p>Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:</p> <p style="text-align: center;">DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)</p> <p style="text-align: center;">DE: PATRICIA VAZQUEZ ORTEGA</p> <p>y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:</p> <p style="text-align: center; font-size: 1.2em; color: blue;"><u>APROBAR</u></p> <p>Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.</p>	
<div style="text-align: center;"> PATRICIA VAZQUEZ ORTEGA ALUMNA </div>		
<div style="text-align: center;"> REVISÓ MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES </div>		
<div style="text-align: center;"> DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI DR. ROMAN LINARES ROMERO </div>	<div style="text-align: center;"> PRESIDENTE DR. EVGUENI ILICH GORDIENKO </div>	<div style="text-align: center;"> VOCAL DR. LUIS ANTONIO RINCON SOLIS </div>
<div style="text-align: center;"> VOCAL DRA. EKATERINA TODOROVA KOLKOVSKA </div>	<div style="text-align: center;"> VOCAL DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO </div>	<div style="text-align: center;"> SECRETARIO DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE </div>