

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE FISICA

**GRAVITACION Y FORMALISMO
DE TETRADAS NULAS**

128415

TESIS

que para obtener el Título de

DOCTOR EN CIENCIAS

presenta

ANA VIOLETA GAFTOI NEGOESCU

México D.F.

1991



Casa abierta al tiempo

IZTAPALAPA
BIBLIOTECA

AGRADECIMIENTOS:

Agradezco al Dr. José Luis López Bonilla todo el apoyo y la valiosa ayuda que me ha brindado en la realización de esta tesis.

Agradezco al Dr. Octavio Obregón sus importantes observaciones y recomendaciones con respecto al contenido y la redacción de la tesis, así como haberme dado la oportunidad de presentar tres seminarios en el Area de Relatividad y Gravitacion de la UAM-Iztapalapa, relacionados con el tema.

Agradezco al Dr. Eduardo Piña Garza la ayuda que me ha proporcionado desde 1974 hasta la fecha: como Jefe del Area de Física de la UAM-Azcapotzalco, como maestro durante mis estudios de maestría en la ESFM-IPN y como sinodal en mi examen de doctorado.

Agradezco al Dr. Mikel Ryan y al Dr. Tonatiuh Matos sus valiosos comentarios y las recomendaciones que me han hecho, en su calidad de sinodales, con respecto al contenido de la presente tesis.

Agradezco a los Doctores: Fernando Magaña Solís, Julio Rubio Oca y Richard Wilson su apoyo durante la realización de mis estudios de doctorado en la UAM-Iztapalapa.

Agradezco a mis compañeros del grupo de relatividad de la UAM-Azcapotzalco su amabilidad al proporcionarme material relacionado con el tema. De manera especial agradezco la cooperación de los profesores: Dr. Jesús Morales Rivas, Dr. José Luis Fernández Chapou, M. en C. Gerardo Ovando Zuñiga, M. en C. Ricardo Becerril Bárcenas, y M. en C. Tomás David Navarrete González en la realización de los trabajos publicados.

Agradezco a mi esposo y a mis hijos la confianza y el apoyo moral que me han brindado para llevar a cabo mis estudios.

Agradezco al Ing. Hugo E. González Maciel su trabajo de mecanografiado; a la Profa. María Emilia González Díaz, Coordinadora de Servicio Social de Ciencias Básicas e Ingeniería, UAM-Azcapotzalco, y a la promotora de Servicio Social María Dolores Cárdenas Valdez, les agradezco su apoyo para la impresión de este trabajo.

Agradezco al Sr. Pablo Chauvet Alducin el apoyo que me brindó como sinodal en mi examen de doctorado.

V. Gafur.

C O N T E N I D O

	página
I N T R O D U C C I O N	
C A P I T U L O I TECNICA DE NEWMAN-PENROSE EN $\mathbb{R}_4$	
Introducción.	1
1. Tétradas nulas - aspectos algebraicos	3
Clasificación Petrov.	21
2. Tétradas nulas - aspectos diferenciales	36
Coeficientes de espín y ecuaciones de Newmann-Penrose	38
Identidades de Bianchi y ecuaciones de Brans-Edgar.	46
 C A P I T U L O II ESPINTENSOR DE LANCZOS	
Introducción.	53
1. Generador del tensor de Weyl	54
2. Ecuaciones de Weyl-Lanczos	59
3. Potencial de Lanczos para diversas métricas	66
 C A P I T U L O III ESPINTENSOR PARA DIVERSAS METRICAS.	
INVARIANTES DE LANCZOS	
Introducción.	71
1. Espíntensor para la métrica de Kerr	73
2. Espíntensor para espacio tiempos vacíos tipo D	77
3. Espíntensor para las métricas de Robinson-Trautman.	87
4. Sobre unos invariantes de Lanczos.	90
 Conclusiones	97
APENDICE	99
REFERENCIAS	102

INTRODUCCION

La presente Tesis se titula "Gravitación y formalismo de Tétradas nulas".

Esta constituida por tres capítulos y durante su realización se han obtenido resultados originales que han generado 6 artículos de los cuales 4 se han publicado en la Revista Mexicana de Física en 1989, 1990 y 1991 y dos se han enviado a la misma revista : un artículo se analiza en el capítulo I. en el capítulo III se presentan 4 artículos y en el apéndice se resume un artículo enviado.

En el primer capítulo se exponen los temas : tetradas reales y nulas (aspectos algebraicos y diferenciales) de importancia básica en el desarrollo de la herramienta de Newman-Penrose (NP). También se presenta la clasificación del campo gravitacional en términos de las cantidades ψ_r , $r=0, \dots, 4$ (proyecciones del tensor de Weyl sobre la tetrada nula) y se analizan las condiciones de integrabilidad para las ecuaciones de Newman-Penrose y las identidades de Bianchi (IB). El análisis de las condiciones de integrabilidad de las IB generó el artículo de investigación "Ecuaciones de Brans-Edgar" publicado en la Revista Mexicana de Física en el número 1 de 1990.

El segundo capítulo "Espintensor de Lanczos" está constituido por 3 secciones : se introduce el concepto de espintensor de Lanczos como generador del tensor de Weyl, se analiza su posible relevancia física y se deducen las ecuaciones de Weyl-Lanczos que permiten obtener (por integración) las componentes del espintensor sobre la tetrada nula. En la última sección se obtiene el superpotencial de Lanczos para diversas métricas. Se presenta un resultado importante : la obtención de las componentes del

espíntensor sobre la tétrada en el caso general para los tipos Petrov III, N y O. El material expuesto en este capítulo es de revisión pero es indispensable para el trabajo desarrollado en el siguiente capítulo.

En el tercer capítulo se obtiene el espíntensor de Lanczos para : la métrica de Kerr, las 11 clases de métricas de Kinnersley y las métricas de Robinson-Trautman. Al final se analizan algunos invariantes de Lanczos. Todos los resultados de este capítulo son originales, lo que permitió la publicación de 3 artículos y otro más que fue enviado y está en arbitraje.

Por último, en el apéndice se analiza el potencial de Lanczos para el espacio-tiempo Minkowskiano (artículo enviado).

Un análisis de los trabajos que se encuentran en la literatura relacionados con el tema, nos permite concluir que es muy importante disponer de espintensores explícitos para muchas métricas, para poder asignarles significado físico e interpretarlos.

Los únicos espintensores explícitos obtenidos mediante la técnica de NP los ha publicado el grupo de relatividad de la UAM Azcapotzalco dirigido por el Dr. José Luis López Bonilla. El Dr. Gerardo Torres del Castillo [43] ha obtenido algunos espintensores utilizando la técnica espinorial.

CAPITULO I TECNICA DE NEWMAN PENROSE EN $\mathbb{R}_4$.

INTRODUCCION

El formalismo de tétradas nulas de Newman y Penrose (NP) se dió a conocer en 1962 [1] y es muy útil en la Relatividad General para el estudio de temas como: soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, clasificación Petrov del campo gravitacional, espíntensor de Lanczos, inmersión del espacio-tiempo, estudio de congruencias nulas, problema de la energía del campo gravitacional, etc.

Las tétradas nulas constituyen un concepto básico (en este formalismo) que permite el estudio local (aspectos algebraicos) del campo gravitacional, así como el manejo de problemas no locales (aspectos diferenciales) que se generan al trasladarnos de punto a punto en $\mathbb{R}_4$.

El formalismo de NP se presenta detalladamente en la tesis de maestría de Torres (1985) [2], Ovando (1985) [4] y la tesis doctoral de Fernández (1986) [3].

En la primera parte de este capítulo presentamos los conceptos de tétrada real, tétrada nula, tétrada dual y mostramos como cambian los elementos de la tétrada nula bajo una transformación de Lorentz. Después se presenta el desarrollo de : un vector, un tensor simétrico de segundo orden, un tensor antisimétrico de segundo orden y un tensor de cuarto orden sobre una base constituida por la tétrada nula. Este análisis permite mostrar de manera concisa la "Clasificación Petrov" del campo gravitacional y el tema de direcciones principales nulas en relación con el concepto de tétrada canónica.

En la segunda sección de este capítulo dedicada a los

aspectos diferenciales de la tétrada nula se introducen los coeficientes de rotación y de espín, se deducen las ecuaciones de Newman-Penrose, las identidades de Bianchi y se analizan las condiciones de integrabilidad de las IB, constituidas por las ecuaciones de Brans-Edgar (BE). (En septiembre de 1991 se recibió una carta del profesor S. Brian Edgar y se nos informa que estas ecuaciones fueron publicadas mucho antes por P. Bell y P. Szekeres [77]).

Con esta herramienta de NP se realiza en los capítulos 2 y 3 el estudio del espintensor de Lanczos.

1. TETRADAS NULAS - ASPECTOS ALGEBRAICOS

En cada evento del espacio de Minkowski se coloca una tétrada real ortonormal que permite construir cuatro vectores nulos: dos reales y dos complejos -la tétrada nula de NP. La tétrada nula de NP constituye una base para objetos geométricos de interés en Relatividad General (RG), en el evento dado. Decimos que "se proyecta" el objeto sobre la tétrada, lo que permite obtener un conjunto específico de cantidades escalares (independientes del sistema de coordenadas pero dependientes de la tétrada) útiles en la caracterización local (algebraica) del objeto que nos interesa.

Sea $e_{(a)}^r$, $a = 1, \dots, 4$ la tétrada real ortonormal construida con tres vectores espaciales: $e_{(1)}^r$, $e_{(2)}^r$, $e_{(3)}^r$ y uno temporal $e_{(4)}^r$ en un evento dado del espacio-tiempo. Se trata de vectores unitarios, reales que forman una base ortonormal (en la notación $e_{(a)}^r$, r - es un índice tensorial y (a) - muestra la ubicación dentro de la tétrada).

$$\eta_{(a)(b)} = e_{(a)}^r e_{(b)r}$$

$$\underset{\sim}{\eta} = \left[\eta_{(a)(b)} \right]_{4 \times 4} = \text{Diag} (1, 1, 1, -1) = \underset{\sim}{\eta}^{-1} = \left[\eta^{(a)(b)} \right] \quad (1)$$

Los elementos de la matriz $\left[\eta_{(a)(b)} \right]$ satisfacen las relaciones :

$$e_{(a)}^r e_{(r)}^r = \delta_{ar}, \quad e_{(a)}^r e_{(4)r} = 0, \quad e_{(4)}^r e_{(4)r} = -1 \quad (2)$$

La signatura es (+ 2) y se usa la convención de Einstein de suma para índices repetidos.

La tétrada colocada en determinado evento se puede rotar libremente, lo que permite elegir un conjunto de cuatro vectores

que genere la mayor simplificación en el problema de nuestro interés.

En 1985 Ovando [4], obtuvo la tétrada nula compleja de NP[4], $(m^r, \bar{m}^r, l^r, n^r)$ caracterizada por :

$$\begin{aligned} m^r m_r = l^r l_r = n^r n_r = 0, \quad m^r \bar{m}_r = -l^r n_r = 1 \\ \bar{l}^r = l^r, \quad \bar{n}^r = n^r, \quad l^r m_r = n^r m_r = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Los elementos de la tétrada se multiplican consigo mismos y dan cero, por esto la tétrada se llama nula y los vectores son nulos. Los elementos de la tétrada se conjugan y siguen dando cero: $\bar{m}^r \bar{m}_r = 0$.

El orden de los elementos de la tétrada es importante. Otros autores utilizan por ejemplo la tétrada $(n^r, l^r, m^r, \bar{m}^r)$, consideran $l^r n_r = +1$, la signatura es (± 2) y los índices toman valores de cero a tres. Decimos que una tétrada es tipo NP si cumple las relaciones (3). Usaremos la signatura $(+2)$ y los índices toman los valores 1,2,3,4.

Las tétradas real y nula compleja (caracterizadas por (1) y (3)) se relacionan a través de $(i = \sqrt{-1})$:

$$\begin{aligned} m^r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e_{(4)}^r - i e_{(2)}^r \right]; \quad \bar{m}^r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e_{(4)}^r + i e_{(2)}^r \right] \\ l^r = \frac{Q^{-1}}{\sqrt{2}} \left[e_{(4)}^r - e_{(3)}^r \right]; \quad n^r = \frac{Q}{\sqrt{2}} \left[e_{(4)}^r + e_{(3)}^r \right] \end{aligned} \quad (4)$$

donde Q - es función arbitraria de las coordenadas ; en la mayoría de las aplicaciones se utiliza $Q = 1$ ó $Q = \sqrt{2}$.

La matriz (1) permite definir la tétrada dual $e^{(a)r}$ con los vectores: $e^{(4)r}, e^{(2)r}, e^{(3)r}, e^{(1)r}$.

$$e^{(a)r} = \eta^{(a)(b)} e_{(b)}^r \quad ; \quad e_{(c)}^r = \eta_{(c)(b)} e^{(b)r} \quad (5)$$

Por ejemplo :

$$e^{(1)r} = \eta^{(1)(b)} e_{(b)}^r = \eta^{(1)(1)} e_{(1)}^r = e_{(1)}^r.$$

$$e^{(2)r} = e_{(2)r}^r, \quad e^{(3)r} = e_{(3)r}^r,$$

$$e^{(4)r} = \eta^{(4)(b)} e_{(b)}^r = \eta^{(4)(4)} e_{(4)}^r = -e_{(4)}^r$$

Si la tétrada real se representa como en la figura (1) , la tétrada dual sería la que se muestra en la figura (2).

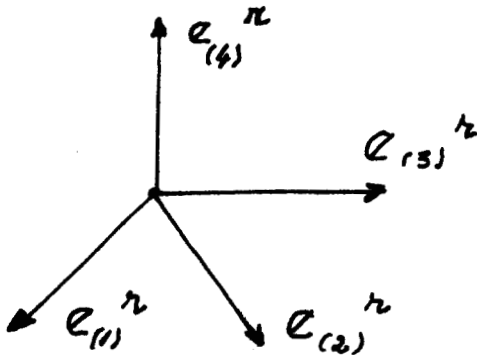


Fig. 1 Tétrada real.

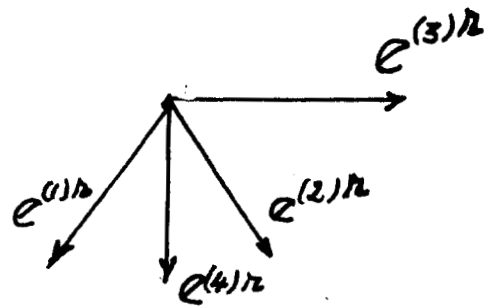


Fig. 2 Tétrada dual.

Con las matrices η y η^{-1} podemos subir y bajar los índices con paréntesis y además se obtienen las propiedades:

$$e^{(a)r} e_{(c)r} = \delta_{(c)}^{(a)}, \quad e^{(a)r} e_{(a)b} = \delta_b^r$$

La tétrada de NP se ordena en la siguiente forma:

$$\left[Z_{(a)}^r \right] = (m^r, \bar{m}^r, l^r, n^r) \quad , \quad a = 1, \dots, 4 \quad (6)$$

$$\text{o sea: } Z_{(1)}^r = m^r, \quad Z_{(2)}^r = \bar{m}^r, \quad Z_{(3)}^r = l^r, \quad Z_{(4)}^r = n^r \quad \text{y} \quad (3)$$

se expresa como:

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} Z_{(a)}^r & Z_{(b)r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{(a)(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

porque : $Z_{(1)}^r Z_{(2)r} = m^r \bar{m}_r = 1$ ó $Z_{(2)}^r Z_{(2)r} = \bar{m}^r \bar{m}_r = 0$,

$Z_{(4)}^r Z_{(3)r} = n^r l_r = -1$, etc.

La matriz $\underset{\sim}{Z}^{-1} = \underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} Z^{(a)(b)} \end{bmatrix}$ permite introducir una base asociada a (6)

$$Z^{(a)r} = Z^{(a)(b)} Z_{(b)}^r$$

Por ejemplo : $Z^{(1)r} = Z^{(1)(2)} Z_{(2)}^r = \bar{m}^r$

$$Z^{(2)r} = Z^{(2)(1)} Z_{(1)}^r = m^r$$

$$Z^{(3)r} = Z^{(3)(4)} Z_{(4)}^r = -n^r , \text{ etc.}$$

obteniéndose: $\begin{bmatrix} Z^{(a)r} \end{bmatrix} = (\bar{m}^r, m^r, -n^r, -l^r) \quad (8)$

Se observa que $\underset{\sim}{Z}$ y $\underset{\sim}{Z}^{-1}$ se comportan como una "métrica" para bajar y subir los índices entre paréntesis de la tétrada nula.

La rotación de la tétrada nula conduce a la transformación de Lorentz y en lo que sigue mostramos cómo esta transformación afecta las cantidades de NP.

Sea una tétrada real anclada en un evento. Al rotarla se genera otra tétrada real ortonormal $\underset{\sim}{e}^{(a)}_r$ (se obtiene de la

primera mediante una transformación de Lorentz $L_{\sim} = \begin{bmatrix} L_{(a)}^{(a)} \\ L_{(b)}^{(b)} \end{bmatrix}$ que

satisface : $L_{(a)}^{(c)} L_{(b)}^{(r)} \eta^{(a)(b)} = \eta^{(c)(r)}$:

$$\tilde{e}_a^{(c)} = L_{(b)}^{(c)} e_a^{(b)} \quad (9)$$

La matriz $L_{\sim}$ más general la obtuvieron Greenberg-Knauer en 1974 [2] y queda en función de seis parámetros reales. La tétrada nula asociada a la nueva tétrada real es [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{m}^r &= C e^{-iB} (\tilde{m}^r + \alpha \tilde{\beta} \tilde{m}^r + \alpha Q \tilde{l}^r + \tilde{\beta} Q^{-1} \tilde{n}^r) \\ \tilde{\bar{m}}^r &= C e^{iB} (\tilde{\alpha} \tilde{\beta} \tilde{m}^r + \tilde{m}^r + \tilde{\alpha} Q \tilde{l}^r + \tilde{\beta} Q^{-1} \tilde{n}^r) \\ \tilde{l}^r &= C e^{-A} (\tilde{\beta} Q^{-1} \tilde{m}^r + \tilde{\beta} Q^{-1} \tilde{m}^r + \tilde{l}^r + \tilde{\beta} \tilde{\beta} Q^{-2} \tilde{n}^r) \\ \tilde{n}^r &= C e^A (\tilde{\alpha} Q \tilde{m}^r + \alpha Q \tilde{m}^r + \alpha \tilde{\alpha} Q^2 \tilde{l}^r + \tilde{n}^r) \end{aligned} \quad (10)$$

donde $C = |1 - \alpha \tilde{\beta}|^{-1}$; A, B — funciones reales arbitrarias.

$\alpha, \tilde{\beta}$ — funciones complejas arbitrarias con $\alpha \tilde{\beta} \neq 1$.

Esto determina tres clases de rotaciones :

Clase I : $\alpha = 0$ Rotación nula que no altera la dirección de $\tilde{n}^r$.

$$\begin{aligned} \tilde{m}^r &= e^{-iB} (\tilde{m}^r + \tilde{\beta} Q^{-1} \tilde{n}^r) \\ \tilde{\bar{m}}^r &= e^{iB} (\tilde{\bar{m}}^r + \tilde{\beta} Q^{-1} \tilde{n}^r) \\ \tilde{l}^r &= e^{-A} (\tilde{\beta} Q^{-1} \tilde{m}^r + \tilde{\beta} Q^{-1} \tilde{m}^r + \tilde{l}^r + \tilde{\beta} \tilde{\beta} Q^{-2} \tilde{n}^r) \\ \tilde{n}^r &= e^A \tilde{n}^r \end{aligned} \quad (11a)$$

Clase II : $\beta = 0$ Rotación nula sin alterar la dirección de l^r .

$$\tilde{m}^r = e^{-iB} (m^r + \alpha Q l^r)$$

$$\tilde{\bar{m}}^r = e^{iB} (\bar{m}^r + \bar{\alpha} Q l^r)$$

$$\tilde{l}^r = e^{-A} l^r$$

$$\tilde{n}^r = e^A (\bar{\alpha} Q m^r + \alpha Q \bar{m}^r + \alpha \bar{\alpha} Q^2 l^r + n^r) \quad (11b)$$

Clase III $\alpha = \beta = 0$

$$\tilde{m}^r = e^{-iB} m^r, \quad \tilde{\bar{m}}^r = e^{iB} \bar{m}^r,$$

$$\tilde{l}^r = e^{-A} l^r, \quad \tilde{n}^r = e^A n^r \quad (11c)$$

Realmente no ocurre una rotación de los vectores ya que sus direcciones no cambian. La clase III es caso particular de las clases I o II.

Si en (11c) se pone $B = 0$ se obtiene una transformación de Lorentz especial (boost) en el plano $l^r - n^r$; si se elige $A = 0$ y $B \neq 0$ se obtiene una rotación espacial en el plano $m^r - \bar{m}^r$. Posteriormente, veremos cómo estas clases de rotación, afectan las cantidades de Newman-Penrose.

A continuación vamos a mostrar cómo la tétrada (6) constituye una base para distintos objetos: un vector, un tensor simétrico de segundo orden, un tensor antisimétrico de segundo orden y un tensor de cuarto orden (estos casos son de interés en nuestro trabajo posterior).

Sea A_r un vector arbitrario; la tétrada es una base para éste ya que:

$$A^r = A_{(2)}^r m^r + A_{(1)}^r \bar{m}^r - A_{(4)}^r l^r - A_{(3)}^r n^r$$

donde $A_{(c)}^r \equiv A^r Z_{(c)r}$ son las componentes o proyecciones de A_r sobre la tétrada de NP y se representan con : $\theta_1, \bar{\theta}_1, \theta_3, \theta_4$,
(θ_1 es complejo , pero θ_3 y θ_4 son reales).

Explícitamente:

$$A_{(1)}^r = A^r m_r \equiv \theta_1, \quad A_{(2)}^r = A^r \bar{m}_r \equiv \bar{\theta}_1$$

$$A_{(3)}^r = A^r l_r \equiv \theta_3, \quad A_{(4)}^r = A^r n_r \equiv \theta_4$$

y A_r se escribe finalmente:

$$A_r = \theta_1 \bar{m}_r + \bar{\theta}_1 m_r - \theta_3 n_r - \theta_4 l_r \quad (12)$$

Otro ejemplo es el de un tensor real simétrico Q_{ab} que puede desarrollarse en términos de 10 tensores simétricos W_{ab}^r (ya que de las 16 componentes de Q_{ab} , solo 10 son independientes):

$$Q_{ab} = \sum_{r=1}^{10} p^r W_{ab}^r$$

con p^r , proyecciones del tensor Q_{ab} sobre la tétrada de NP.

$$W_{ab}^r = Z_{(r)a} Z_{(r)b} \quad (\text{sin suma sobre } r) \quad \text{con } r = 1, 2, 3, 4.$$

$$W_{ab}^5 = m_a \bar{m}_b + m_b \bar{m}_a$$

$$W_{ab}^6 = n_a l_b + n_b l_a$$

$$W_{ab}^7 = m_a n_b + m_b n_a$$

$$W_{ab}^8 = \bar{W}_{ab}^7$$

$$W_{ab}^9 = m_a l_b + m_b l_a$$

$$W_{ab}^{10} = \bar{W}_{ab}^9$$

Por la propiedad $Q_{ab} = \bar{Q}_{ab}$ se obtiene:

$$p^1 = \bar{p}^2, \quad p^7 = \bar{p}^8, \quad p^9 = \bar{p}^{10} \quad \text{con } p^r, \quad r = 3, 4, 5, 6$$

cantidades reales. Q_{ab} se escribe ahora como :

$$Q_{ab} = \bar{p}^2 W_{1ab} + p^2 W_{2ab} + \sum_{r=3}^6 p^r W_{rab} + \bar{p}^8 W_{7ab} + p^8 W_{8ab} + \\ + \bar{p}^{10} W_{9ab} + p^{10} W_{10ab} \quad (13)$$

Se contrae esta expresión con la tétrada nula y se obtienen las proyecciones del tensor Q_{ab} sobre la tétrada, con la notación :

$$Q_{(q)(r)} = Q_{ab} Z_{(q)}^a Z_{(r)}^b.$$

$$\text{Por ejemplo } p^2 = Q_{(1)(1)} = Q_{ab} Z_{(1)}^a Z_{(1)}^b = Q_{ab} m^a m^b.$$

Del mismo modo se obtienen :

$$p^3 = Q_{(4)(4)}, \quad p^4 = Q_{(3)(3)}, \quad p^5 = Q_{(1)(2)}, \quad p^6 = Q_{(3)(4)}, \\ p^8 = -Q_{(1)(3)}, \quad p^{10} = -Q_{(1)(4)} \quad (14)$$

Si se propone como tensor simétrico a g_{ab} , éste se extiende sobre la tétrada nula como:

$$g_{ab} = m_a \bar{m}_b + \bar{m}_a m_b - n_a l_b - n_b l_a \quad (15)$$

ya que $p^r = 0$, excepto $p^5 = -p^6 = 1$.

En términos de la tétrada real

$$g_{rc} = e_{(a)r}^{\quad (a)} e_{(a)c}^{\quad (a)} = e_{(1)r} e_{(1)c} + e_{(2)r} e_{(2)c} + e_{(3)r} e_{(3)c} - e_{(4)r} e_{(4)c}$$

Concluimos que conociendo al tensor métrico se puede obtener la tétrada en un evento, ya que:

$$x^i \longrightarrow g_{ab} \longrightarrow e_{(a)}^r \longrightarrow (m^r, \bar{m}^r, l^r, n^r)$$

y también dada la tétrada de NP en un evento se puede determinar el tensor métrico en dicho evento mediante la relación (15).

Si se considera $Q_{ab} \equiv E_{ab}$, $Q \equiv Q^r_r = 0$ donde

$E_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{R}{4} g_{ab}$ es el tensor que aparece en la forma dada al tensor de Riemann por Debever-Géhéniau en 1956

$$R_{lmnj} = C_{lmnj} + \frac{1}{2} \left(E_{lj} g_{mn} + E_{mn} g_{lj} - E_{ln} g_{mj} - E_{mj} g_{ln} \right) + \\ + \frac{R}{12} \left(g_{lj} g_{mn} - g_{ln} g_{mj} \right)$$

$R_{ab} = R^c_{abc}$ es el tensor de Ricci y $R = R^a_a$ la curvatura escalar; la expansión de E_{ab} sobre la tétrada [3] es:

$$E_{ab} = 2 \left[\phi_{02} \bar{m}_a \bar{m}_b + \bar{\phi}_{02} m_a m_b + \phi_{00} l_a l_b + \phi_{22} n_a n_b + \right. \\ + \phi_{11} (m_a \bar{m}_b + \bar{m}_a m_b + l_a n_b + n_a l_b) - \bar{\phi}_{01} (m_a l_b + m_b l_a) - \\ \left. - \bar{\phi}_{12} (m_a n_b + m_b n_a) - \phi_{01} (\bar{m}_a l_b + l_a \bar{m}_b) - \phi_{12} (\bar{m}_a n_b + \bar{m}_b n_a) \right] \quad (16)$$

Las cantidades ϕ_{ab} son las proyecciones de E_{ab} sobre la tétrada nula y son equivalentes a 9 cantidades reales (el número de componentes independientes de E_{ab}). Tres de ellas : ϕ_{00} , ϕ_{11} , ϕ_{22} son cantidades reales y ϕ_{01} , ϕ_{02} , ϕ_{12} son cantidades complejas que se obtienen como resultado de las siguientes contracciones (en base a las relaciones (13) y (14)):

$$p^2 = E_{ab} m^a m^b = R_{ab} m^a m^b \equiv 2 \phi_{02} \\ p^3 = E_{ab} n^a n^b = R_{ab} n^a n^b \equiv 2 \phi_{00} \\ p^4 = E_{ab} l^a l^b = R_{ab} l^a l^b \equiv 2 \phi_{22} \\ p^5 = p^6 = E_{ab} m^a \bar{m}^b = E_{ab} l^a n^b \equiv 2 \phi_{11} \\ p^8 = - E_{ab} m^a l^b = - R_{ab} m^a l^b \equiv -2 \phi_{12} \\ p^{10} = - E_{ab} m^a n^b = - R_{ab} m^a n^b \equiv -2 \phi_{01} \quad (17)$$

Las ecuaciones de campo de RG se expresan :

$$E_{ab} - \frac{R}{4} g_{ab} = -8\pi T_{ab} \quad (18)$$

T_{ab} — tensor de materia o/y radiación.

Las ϕ_{ab} tienen las siguientes expresiones;

$$\begin{aligned} \phi_{00} &= -4\pi T_{ab} n^a n^b, & \phi_{01} &= -4\pi T_{ab} n^a m^b, \\ \phi_{02} &= -4\pi T_{ab} m^a m^b, & \phi_{11} &= -4\pi T_{ab} n^a l^b - \frac{R}{8}, \\ \phi_{12} &= -4\pi T_{ab} l^a m^b, & \phi_{22} &= -4\pi T_{ab} l^a l^b \end{aligned} \quad (19)$$

Por ejemplo, si T_{ab} está asociado a un fluido perfecto (métrica de Gödel, cap. II) entonces se puede elegir una tétrada nula tal que $\phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = 0$; concluimos que T_{ab} puede generar simplificaciones en las cantidades ϕ_{ab} .

Por definición un espacio es de Einstein si los tensores métricos y de Ricci son proporcionales entre sí:

$$R_{ab} = \frac{R}{4} g_{ab} \therefore E_{ab} = 0, \phi_{ab} = 0 \quad (20)$$

Si además $R = 0$ entonces $R_{ab} = 0$ y así el cuadriespacio R_4 es vacío.

Bajo una transformación de Lorentz la cantidades ϕ_{ab} se alteran [2] de acuerdo a:

Clase I , $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{00} &= e^{2A} \phi_{00}, & \tilde{\phi}_{01} &= e^A - iB (\phi_{01} + \bar{\beta} Q^{-1} \phi_{00}) \\ \tilde{\phi}_{02} &= e^{-2iB} (\phi_{02} + 2\bar{\beta} Q^{-1} \phi_{01} + \bar{\beta}^2 Q^{-2} \phi_{00}) \end{aligned}$$

$$\tilde{\phi}_{12} = e^{-A-iB} (\phi_{12} + \beta Q^{-1} \phi_{02} + 2\bar{\beta} Q^{-1} \phi_{11} + 2\beta \bar{\beta} Q^{-2} \phi_{01} + \bar{\beta}^2 Q^{-2} \bar{\phi}_{01} + \beta \bar{\beta}^2 Q^{-3} \phi_{00})$$

$$\tilde{\phi}_{22} = e^{-2A} (\phi_{22} + 2\beta Q^{-1} \phi_{12} + 2\bar{\beta} Q^{-1} \bar{\phi}_{12} + 4\beta \bar{\beta} Q^{-2} \phi_{11} + \beta^2 Q^{-2} \phi_{02} + \bar{\beta}^2 Q^{-2} \bar{\phi}_{02} + 2\beta^2 \bar{\beta} Q^{-3} \phi_{01} + 2\beta \bar{\beta}^2 Q^{-3} \bar{\phi}_{01} + \beta^2 \bar{\beta}^2 Q^{-4} \phi_{00})$$

Class II, $\beta = 0$

$$\tilde{\phi}_{00} = e^{2A} (\phi_{00} + 2\bar{\alpha} Q \phi_{01} + 2\alpha Q \bar{\phi}_{01} + \alpha^2 Q^2 \bar{\phi}_{02} + \bar{\alpha}^2 Q^2 \phi_{02} + 4\alpha \bar{\alpha} Q^2 \phi_{11} + \alpha^2 \bar{\alpha}^2 Q^4 \phi_{22} + 2\alpha^2 \bar{\alpha} Q^3 \bar{\phi}_{12} + 2\alpha \bar{\alpha}^2 Q^3 \phi_{12})$$

$$\tilde{\phi}_{01} = e^{A-iB} (\phi_{01} + 2\alpha Q \phi_{11} + \bar{\alpha} Q \phi_{02} + \alpha^2 Q^2 \bar{\phi}_{12} + 2\alpha \bar{\alpha} Q^2 \phi_{12} + \alpha^2 \bar{\alpha} \phi_{22}),$$

$$\tilde{\phi}_{02} = e^{-2iB} (\phi_{02} + 2\alpha Q \bar{\phi}_{12} + \alpha^2 Q^2 \phi_{22}),$$

$$\tilde{\phi}_{11} = \phi_{11} + \bar{\alpha} Q \phi_{12} + \alpha Q \bar{\phi}_{12} + \alpha \bar{\alpha} Q^2 \phi_{22},$$

$$\tilde{\phi}_{12} = e^{-A-iB} (\phi_{12} + \alpha Q \phi_{22}), \quad \tilde{\phi}_{22} = e^{-2A} \phi_{22},$$

Class III $\alpha = \beta = 0$.

$$\tilde{\phi}_{00} = e^{2A} \phi_{00}, \quad \tilde{\phi}_{01} = e^{A-iB} \phi_{01}, \quad \tilde{\phi}_{02} = e^{-2iB} \phi_{02}.$$

$$\tilde{\phi}_{11} = \phi_{11}, \quad \tilde{\phi}_{12} = e^{-A-iB} \phi_{12}, \quad \tilde{\phi}_{22} = e^{-2A} \phi_{22}.$$

Las expresiones de tensores simétricos de segundo orden (ver la relación (16)) son útiles en el estudio del espíntensor de Lanczos (capítulo II), en el análisis del proceso de inmersión de R_4 en E_5 ó E_6 y para una posible clasificación (Churchill-Plebafiski) de E_{ab} .

R^a_{bcd} es el tensor de curvatura del espacio-tiempo definido por :

$$R^i_{jkm} = \Gamma^i_{jm,k} - \Gamma^i_{jk,m} + \Gamma^i_{ck} \Gamma^c_{jm} - \Gamma^i_{cm} \Gamma^c_{jk}$$

$$\text{con } \Gamma^i_{jm} = \frac{1}{2} g^{ir} (g_{rj,m} + g_{rm,j} - g_{jm,r}) = \Gamma^i_{mj}$$

símbolos de Christoffel de segunda especie, donde $(,r)$ es la derivada parcial respecto a x^r .

La tétrada nula, constituye una base también para tensores reales antisimétricos de segundo orden. Para obtener las componentes del tensor F_{ab} con respecto a la tétrada se expresa el tensor como una combinación lineal de seis tensores antisimétricos

$$F_{ab} = \sum_{r=1}^6 p^r_r W_{ab}^r, \quad F_{ab} = -F_{ba} \quad (21)$$

con p^r — proyecciones del tensor sobre la tétrada y los tensores antisimétricos W_{ab}^r tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
W_{1ab} &= V_{ab} = n_a m_b - m_a n_b & W_{2ab} &= \bar{V}_{ab} \\
W_{3ab} &= U_{ab} = -l_a \bar{m}_b + l_b \bar{m}_a & W_{4ab} &= \bar{U}_{ab} \\
W_{5ab} &= M_{ab} = m_a \bar{m}_b - m_b \bar{m}_a - n_a l_b + n_b l_a \\
W_{6ab} &= \bar{M}_{ab}
\end{aligned} \tag{22}$$

Los tensores V_{ab} , U_{ab} y M_{ab} son antisimétricos, autoduales:

$$*V_{ab} = -i V_{ab}, \quad *U_{ab} = -i U_{ab}, \quad *M_{ab} = -i M_{ab}$$

y satisfacen relaciones como:

$$\begin{aligned}
V_{ab} M^{ab} &= 0, \quad M_{ab} U^{ab} = 0, \quad U_{ab} U^{ab} = 0, \quad U_{ab} l^b = 0, \quad \bar{V}_{ab} l^b = 0 \\
V_{ab} l^b &= M_{ab} m^b = m_a, \quad V_{ab} \bar{m}^b = M_{ab} n^b = n_a \\
V_{ac} U^{ac} &= 2, \quad M_{ac} M^{ac} = -4, \quad M_a^c M_{cr} = g_{ar} \\
V_{ac} M^c_r &= -V_{ar}, \quad U_{ac} M^c_r = U_{ar}, \quad V_a^c U_{cr} = n_a l_r - m_a \bar{m}_r \\
V_a^c V_{cr} &= U_a^c U_{cr} = M^{ab} \bar{M}_{ab} = U^{ab} \bar{V}_{ab} = U^{ab} \bar{U}_{ab} = \bar{V}^{ab} V_{ab} = 0 \\
V^{ab} \bar{M}_{ab} &= U^{ab} \bar{M}_{ab} = 0, \quad \bar{V}_{cr} V_a^c = n_r n_a, \quad V_{ab} n^b = 0 \\
U_{ab} m^b &= M_{ab} l^b = -l_a, \quad U_{ab} n^b = M_{ab} \bar{m}^b = -\bar{m}_a
\end{aligned} \tag{23}$$

considerando (22) y (3).

De la relación $\bar{F}_{ab} = F_{ab}$ resulta que:

$$p^1 = \bar{p}^2, \quad p^3 = \bar{p}^4, \quad p^5 = \bar{p}^6$$

Para determinar las cantidades p^r , $r = 1, 3, 5$ se contrae la expresión (21) con elementos de la tétrada y se obtiene

$$p^1 = F_{(2)(3)} \equiv \gamma_2, \quad p^3 = F_{(4)(1)} \equiv \gamma_0$$

$$p^5 = \frac{1}{2} \left[F_{(2)(1)} + F_{(4)(3)} \right] \equiv \gamma_1 \quad (24)$$

con : $F_{(p)(q)} = F_{ab} Z_{(p)}^a Z_{(q)}^b$ y γ_a , $a = 0,1,2$ cantidades complejas que equivalen a las 6 componentes reales independientes de F_{ab} . El desarrollo de F_{ab} con respecto a la tétrada queda:

$$F_{ab} = \gamma_0 U_{ab} + \gamma_1 M_{ab} + \gamma_2 V_{ab} + \bar{\gamma}_0 \bar{U}_{ab} + \bar{\gamma}_1 \bar{M}_{ab} + \bar{\gamma}_2 \bar{V}_{ab} \quad (25)$$

La relación (25) se puede aplicar al tensor de Faraday del campo electromagnético y al tensor antisimétrico que aparece en las ecuaciones de Ricci al sumergir R_4 en E_6 .

El tensor dual de F_{ab} se define como:

$$*F_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{abcd} F^{cd} = -*F_{ba} \quad (26)$$

con los tensores de Levi-Civita:

$$\eta_{abcd} = -\sqrt{-g} \varepsilon_{abcd}, \quad \eta^{abcd} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{abcd} \quad (27)$$

$$g = \det (g_{ab}),$$

$$\varepsilon_{abcd} = \varepsilon^{abcd} = \begin{cases} 1 & \text{si } (abcd) \text{ es permutación par de } (1234) \\ -1 & \text{si } (abcd) \text{ es permutación impar de } (1234) \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Los tensores W_{ab}^r de (22) son autoduales,

$$*W_{ab}^r = (-1)^r W_{ab}^r, \quad r = 1, \dots, 6 \quad \text{lo cual implica}$$

$$*F_{ab} = i(-\gamma_0 U_{ab} - \gamma_1 M_{ab} - \gamma_2 V_{ab} + \bar{\gamma}_0 \bar{U}_{ab} + \bar{\gamma}_1 \bar{M}_{ab} + \bar{\gamma}_2 \bar{V}_{ab}) \quad (28)$$

Los invariantes algebraicos independientes correspondientes al tensor F_{ab} son:

$$F_1 \equiv F_{ab} F^{ab} = 4 (\gamma_0 \gamma_2 + \bar{\gamma}_0 \bar{\gamma}_2 - \gamma_1^2 - \bar{\gamma}_1^2)$$

$$F_2 \equiv {}^*F_{ab} F^{ab} = 4 i (\gamma_1^2 - \bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_0 \bar{\gamma}_2 - \gamma_0 \gamma_2) \quad (29)$$

La proyección de un tensor de tercer orden sobre la tétrada nula se va a analizar en el capítulo II ya que el espintensor de Lanczos K_{ijr} es un tensor de este orden.

Mostraremos en lo que sigue, las componentes del tensor de Weyl C_{ijkl} con respecto a la tétrada y vamos a determinar los cuatro invariantes algebraicos correspondientes a este tensor.

El tensor de Weyl C_{abcd} , es un tensor de cuarto orden que para cuatro dimensiones se define como:

$$C_{ajkm} = R_{ajkm} + \frac{1}{2} \left[R_{ak} g_{jm} + R_{jm} g_{ak} - R_{jk} g_{am} - R_{am} g_{jk} \right] +$$

$$+ \frac{R}{6} \left[g_{am} g_{jk} - g_{ak} g_{jm} \right] \quad (30)$$

y posee las siguientes simetrías :

$$C_{ajkm} = -C_{jakm} = -C_{ajmk} \quad (31.a)$$

y la propiedad cíclica:

$$C_{ajkm} + C_{akmj} + C_{amjk} = 0 \quad (31.b)$$

lo cual implica

$$C_{ajkm} = C_{kma j} \quad (31.c)$$

Cualesquiera de las contracciones del tensor de Weyl se anulan idénticamente

$$C^a{}_{jka} = 0 \quad (31.d)$$

En 1956, Debever-Géhéniau proponen descomponer al tensor de Riemann en tensores algebraicamente irreducibles y relacionan a

cada uno de ellos con propiedades específicas del campo gravitacional. de este modo el tensor de Ricci se relaciona con las fuentes y el tensor conformal de Weyl contiene las propiedades intrínsecas del campo gravitacional o sea se asocia con el campo gravitacional puro ([4] y [6]).

El dual simple del tensor de Weyl es:

$${}^*C_{ajkm} = \frac{1}{2} \eta_{ajbr} C^{br}_{km} \quad (32)$$

que también satisface las propiedades (31).

Mencionamos que cualquier tensor que cumple con todas las propiedades (31) tiene un espintensor de Lanczos [7].

$$W_{abcd} = C_{abcd} + i {}^*C_{abcd} \quad (33)$$

es un tensor complejo que tiene las siguientes propiedades (considerando (33) y (34)):

$$\begin{aligned} W_{abcr} &= -W_{bacr} = -W_{abrc} = W_{crab}, & W^c_{a\ cr} &= 0 \\ {}^*W_{abcr} &= W^*_{abcr} = -i W_{abcr} \end{aligned} \quad (34)$$

Trabajando del mismo modo que en los casos anteriores, se proyecta W_{abcr} sobre la tétrada nula de NP obteniéndose:

$$\begin{aligned} W_{abcr} &= 2 \left[\psi_0 U_{ab\ cr} + \psi_1 (U_{ab\ cr} + U_{cr\ ab}) + \psi_2 (M_{ab\ cr} + \right. \\ &\quad \left. V_{ab\ cr} + V_{cr\ ab}) + \psi_3 (V_{ab\ cr} + V_{cr\ ab}) + \psi_4 V_{ab\ cr} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Las cantidades ψ_r , $r = 0, 1, 2, 3, 4$ son las proyecciones del tensor de Weyl sobre la tétrada. Se contrae el tensor de Weyl (35) con un elemento de la tétrada, el resultado se contrae con otro elemento

y después de 4 contracciones sucesivas resultan expresiones del tipo: $\psi_0 = C_{abjr} n^a m^b n^j m^r$ por ejemplo, considerándose las propiedades (3) de la tétrada nula y las relaciones (23).

Las cantidades ψ_r , $r = 0,1,2,3,4$ son cantidades complejas y contienen la misma información que las 10 componentes reales independientes del tensor de Weyl. Fueron introducidas en 1961 por R.. Sachs, [18] y su aplicación se debe a Newman-Penrose.

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= \frac{1}{8} W_{abcr} V^{ab} V^{cr} = C_{abjr} n^a m^b n^j m^r \\
 \psi_1 &= -\frac{1}{16} W_{abcr} V^{ab} M^{cr} = C_{abjr} n^a l^b n^j m^r \\
 \psi_2 &= \frac{1}{8} W_{abcr} U^{ab} V^{cr} = \frac{1}{3 \cdot 2} W_{abcr} M^{ab} M^{cr} = -C_{abjr} l^a \bar{m}^b n^j m^r \\
 \psi_3 &= -\frac{1}{16} W_{abcr} U^{ab} M^{cr} = C_{abjr} l^a n^b l^j \bar{m}^r \\
 \psi_4 &= \frac{1}{8} W_{abcr} U^{ab} U^{cr} = C_{abjr} l^a \bar{m}^b l^j \bar{m}^r
 \end{aligned} \tag{36}$$

lo cual coincide con la convención de [5].

Las cantidades ψ_r no se alteran bajo una transformación de coordenadas pero sí cambian al rotar la tétrada nula:

Clase I $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}_0 &= e^{2(A - iB)} \psi_0, \quad \tilde{\psi}_1 = e^{(A - iB)} (\psi_1 + \beta Q^{-1} \psi_0) \\
 \tilde{\psi}_2 &= \psi_2 + 2\beta Q^{-1} \psi_1 + \beta^2 Q^{-2} \psi_0 \\
 \tilde{\psi}_3 &= e^{-A + iB} (\psi_3 + 3\beta Q^{-1} \psi_2 + 3\beta^2 Q^{-2} \psi_1 + \beta^3 Q^{-3} \psi_0) \\
 \tilde{\psi}_4 &= e^{2(-A + iB)} (\psi_4 + 4\beta Q^{-1} \psi_3 + 6\beta^2 Q^{-2} \psi_2 + 4\beta^3 Q^{-3} \psi_1 + \beta^4 Q^{-4} \psi_0)
 \end{aligned}$$

(37. a)

Clase II $\beta = 0$
 $\sim$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_0 &= e^{2(A - iB)} (\psi_0 + 4\alpha Q \psi_1 + 6\alpha^2 Q^2 \psi_2 + 4\alpha^3 Q^3 \psi_3 + \alpha^4 Q^4 \psi_4) \\ \tilde{\psi}_1 &= e^{(A - iB)} (\psi_1 + 3\alpha Q \psi_2 + 3\alpha^2 Q^2 \psi_3 + \alpha^3 Q^3 \psi_4) \\ \tilde{\psi}_2 &= \psi_2 + 2\alpha Q \psi_3 + \alpha^2 Q^2 \psi_4 \\ \tilde{\psi}_3 &= e^{-A + iB} (\psi_3 + \alpha Q \psi_4) \\ \tilde{\psi}_4 &= e^{2(-A + iB)} \psi_4\end{aligned}\tag{37.b}$$

Clase III $\alpha = \beta = 0$
 $\sim$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_0 &= e^{2(A - iB)} \psi_0, \quad \tilde{\psi}_1 = e^{(A - iB)} \psi_1, \quad \tilde{\psi}_2 = \psi_2 \\ \tilde{\psi}_3 &= e^{-A + iB} \psi_3, \quad \tilde{\psi}_4 = e^{2(-A + iB)} \psi_4\end{aligned}\tag{37.c}$$

En la deducción de las relaciones (37) se utilizaron las relaciones (36), (11a,b,c) y las identidades (38):

$$\begin{aligned}C_{abcr} n^a \bar{m}^b n^c \bar{m}^r &= C_{abcr} \bar{m}^a n^b l^c \bar{m}^r = C_{abcr} l^a m^b l^c \bar{m}^r = 0 \\ C_{abcr} m^a \bar{m}^b n^c \bar{m}^r &= -\psi_1, \quad C_{abcr} m^a \bar{m}^b l^c \bar{m}^r = \psi_3 \\ C_{abcr} l^a n^b l^c n^r &= C_{abcr} m^a \bar{m}^b m^c \bar{m}^r = \psi_2 + \bar{\psi}_2 \\ C_{abcr} \bar{m}^a n^b m^c \bar{m}^r &= C_{abcr} n^a \bar{m}^b l^c n^r \\ C_{abcr} n^a l^b m^c \bar{m}^r &= \bar{\psi}_2 - \psi_2\end{aligned}\tag{38}$$

Debido a la equivalencia entre las cantidades ψ_r y las 10 componentes reales independientes del tensor de Weyl, las cantidades ϕ_{ab} y las 9 componentes reales independientes del

tensor E_{ab} (relacionado con el tensor de Ricci) y considerando la curvatura escalar R podemos decir que el tensor de Riemann (20 componentes reales independientes) está descrito completamente por las cantidades ψ_r , ϕ_{ab} y R .

El tensor conformal de Weyl tiene 4 invariantes algebraicos independientes:

$$\begin{aligned} C_2 &= C^{abcr} C_{abcr}, \quad {}^*C_2 = {}^*C^{abcr} C_{abcr} \\ C_3 &= C^{abcr} C_{crpq} C^{pq}_{ab}, \quad {}^*C_3 = {}^*C^{abcr} C_{crpq} C^{pq}_{ab} \end{aligned} \quad (39)$$

que en función de las cantidades de NP se expresan (al contraer W_{abcd} (37) consigo mismo) como las siguientes identidades [8]:

$$\begin{aligned} C_2 + i {}^*C_2 &= 16(3\psi_2^2 + \psi_0\psi_4 - 4\psi_1\psi_3), \quad i = \sqrt{-1} \\ C_3 + i {}^*C_3 &= 96(-\psi_2^3 + 2\psi_1\psi_2\psi_3 + \psi_0\psi_2\psi_4 - \psi_0\psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4) \end{aligned} \quad (40)$$

Los invariantes (39) son útiles en el estudio de la inmersión de R_4 en E_5 ó E_6 y en la clasificación de Petrov.

CLASIFICACION PETROV DE CAMPOS GRAVITACIONALES

El primer intento de realizar una clasificación de campos gravitacionales la hizo H.S. Ruse en 1948 utilizando geometría proyectiva. Después, en 1954 A.Z. Petrov publica su "Método matricial" para lograr esta clasificación. En 1957, F.A.E. Pirani muestra la relación de la clasificación Petrov con el tema de radiación gravitacional. Actualmente la clasificación Petrov (CP) es importante en campos de investigación como: radiación gravitacional, comportamiento asintótico del tensor de Weyl,

inmersión de $\mathbb{R}_4$ en $\mathbb{E}_n$ con $n > 4$, congruencias nulas, soluciones exactas, espíntensor de Lanczos, etc.

Un estudio detallado de la CP se encuentra en la tesis de maestría de Ovando (1985), en la cual se presentan diversos métodos para hacer la CP y la relación que existe entre ellas.

La CP consiste en un estudio algebraico (local) del tensor conformal de Weyl definido en 4 dimensiones y tiene como objetivo obtener la información contenida en las 10 componentes independientes de este tensor.

Al tensor complejo W_{abcr} se le asocia una matriz compleja, simétrica con traza cero: $P_{\sim 3 \times 3}$ — la matriz de Petrov que contiene toda la información del tensor conformal.

$$P^A_B = \tilde{C}^{aj}_{km} + i {}^* \tilde{C}^{aj}_{km} \quad (41)$$

en la cual : $AB \longrightarrow 1,2,3$; $aj \longrightarrow 23,31,12$ y

$$\tilde{C}^{aj}_{km} = C^{pq}_{rb} e^{(a)}_p e^{(j)}_q e^{(k)r}_{(m)b} \quad (42)$$

representa la proyección del tensor de Weyl sobre la tétrada real ortonormal $e^{(a)r}_{(a)}$ y su dual $e^{(a)r}_{(a)} = \eta^{(a)(b)} e^{(b)r}_{(b)}$.

La CP consiste en el análisis del problema de eigenvalores de la relación:

$$P^A_B F^B = \lambda F^A \quad \text{con} \quad F^B = F^{aj} + i {}^* F^{aj}$$

F^B es un vector complejo con tres componentes y al cual se le puede asociar un tensor F^{aj} antisimétrico [4].

Las formas canónicas de la matriz de Petrov conducen a 6 tipos distintos de $\mathbb{R}_4$ que se clasifican en base al número de vectores propios linealmente independientes y al número de valores propios distintos conforme a la siguiente tabla

TIPO	Número de vectores l.i.	Número de v.p. distintos	METRICAS	
I	3	3	Petrov	→ Algebraicamente General
D	3	2	Schwarzschild Kerr	→ Tipo I degenerado
II	2	2	Kerr-Schild	
N	2	1	Ondas gravitacionales planas	→ Tipo II degenerado o tipo nulo
III	1	1	Petrov	
O	3	1	De Sitter	→ Conformalmente plano

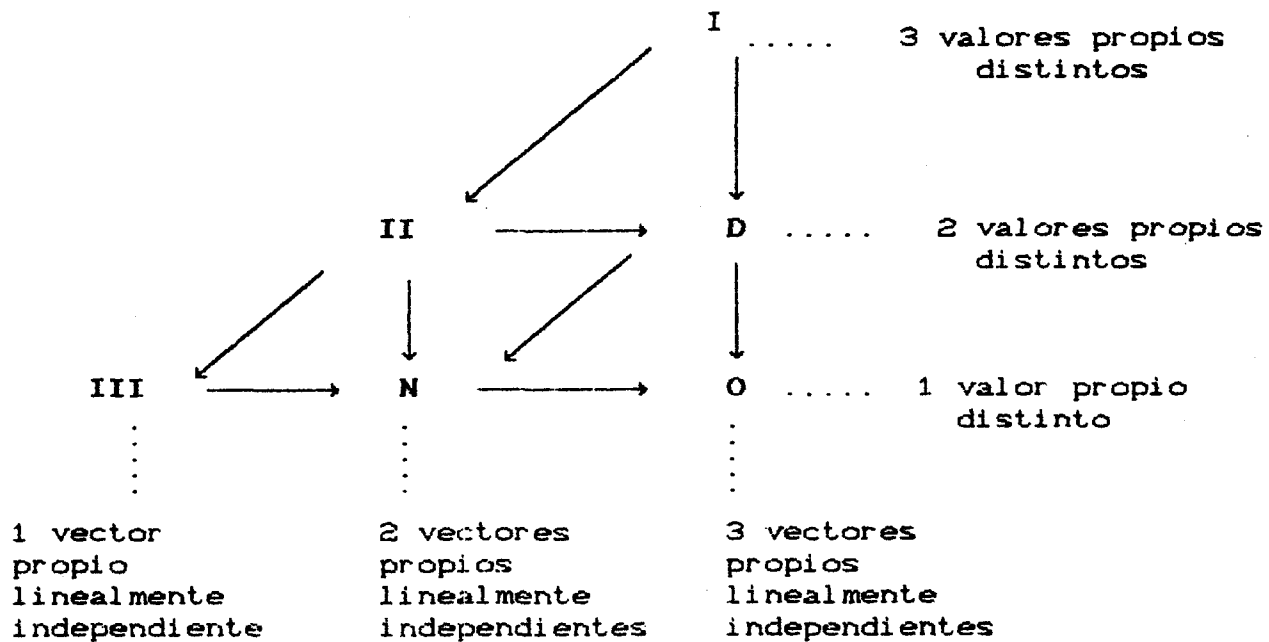
TABLA I. Tipos Petrov de R_4 .

Las métricas de la tabla, ejemplifican los tipos Petrov. Se observan tres tipos Petrov que se diferencian por el número de sus vectores propios linealmente independientes (l.i.), el cual no puede ser menor que el número de valores propios (v.p.) distintos. El tipo O se puede considerar como la degeneración del tipo D en el cual los valores propios coinciden. El tipo I se denomina algebraicamente general y cualquier otro, algebraicamente especial. Para cualquier tipo Petrov la suma de los valores propios es cero y por lo tanto, " Un R_4 tipo O es conformalmente plano, $C_{ijkl}=0$ "

Como P tiene traza cero, la suma de sus tres valores propios es nula y por lo tanto para los tipos II y D los valores propios son diferentes de cero y para N, III, y O los tres valores propios coinciden entre sí y se anulan. Un vector propio de P equivale a un eigentensor del tensor de Weyl.

La tabla anterior es equivalente al diagrama de R. Penrose [9], que se realizó con espinores.

DIAGRAMA DE PENROSE



El tipo Petrov puede cambiar evento por evento, dependiendo de la estructura geométrica del espacio-tiempo. El estudio de esta evolución constituye un problema no-local y las identidades de Bianchi permiten estudiar esta evolución.

En lo que sigue, se menciona la relación de la CP con problemas físicos:

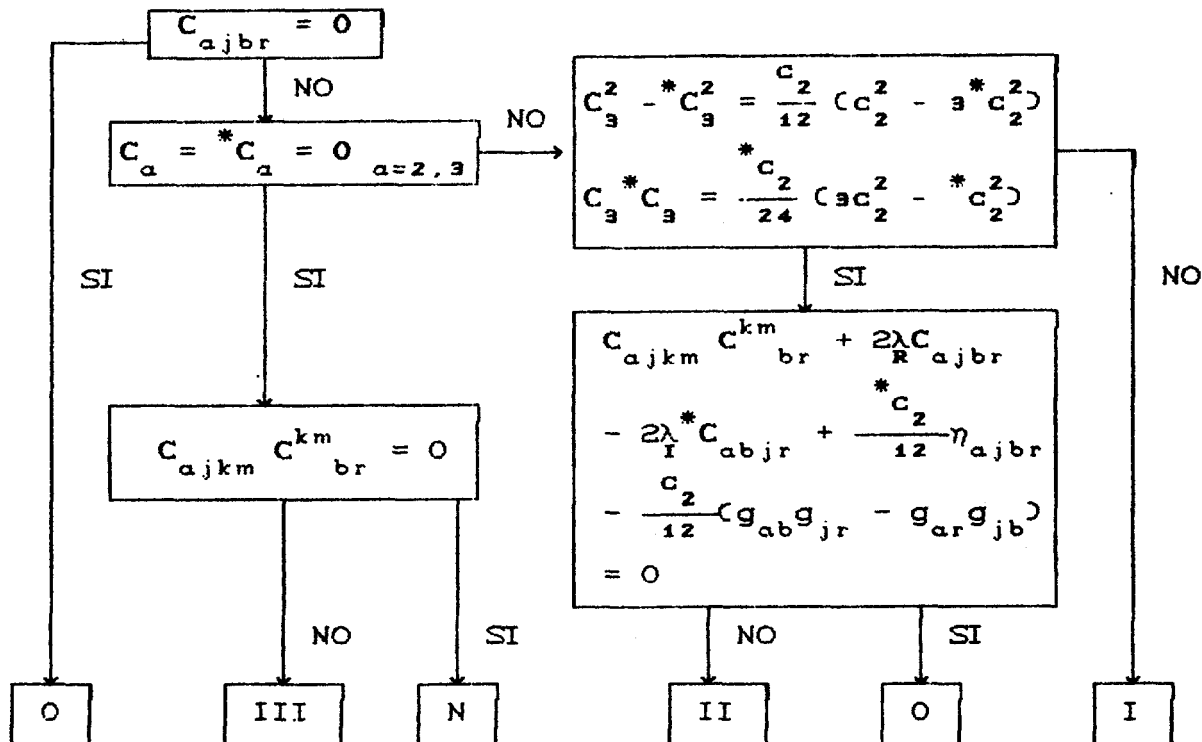
- " En P de $\mathbb{R}_4$ vacío existe radiación gravitacional solo si el tensor de Weyl es tipo II, III ó N " [10].
- " Todas las ondas gravitacionales planas en un evento son de tipo N en dicho punto " [11].
- Teorema de Kundt-Thompson (1962) y Robinson-Schild (1963) [12].
- Todo $\mathbb{R}_4$ con simetría esférica es tipo D.
- Ningún $\mathbb{R}_4$ vacío tipo III es sumergible en $\mathbb{E}_6$.
- Cualquier espacio-tiempo tipo O acepta inmersión en $\mathbb{E}_4$.

- Kinnersley obtuvo todos los R_4 vacíos tipo D.
- Inmersión de R_4 en E_n .
- Búsqueda y análisis de las soluciones exactas de Einstein (encontrar todas las soluciones de algún tipo Petrov específico).

De los métodos existentes en la literatura [4] para la realización de la CP vamos a presentar en forma concisa el método tensorial de Peres, el método tensorial de tétradas nulas, especificando además que el método matricial de Petrov permite obtener la tétrada canónica con el método tensorial bivectorial y conduce al tema de direcciones principales nulas ilustrado en el método tensorial vectorial.

El método tensorial de Peres (MTP), se presenta mediante el siguiente algoritmo:

METODO TENSORIAL DE PERES



donde $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ se determina con las relaciones

$$\lambda^2 = \frac{1}{48}(C_2 + i^*C_2) \quad , \quad \lambda^3 = -\frac{1}{96}(C_3 + i^*C_3)$$

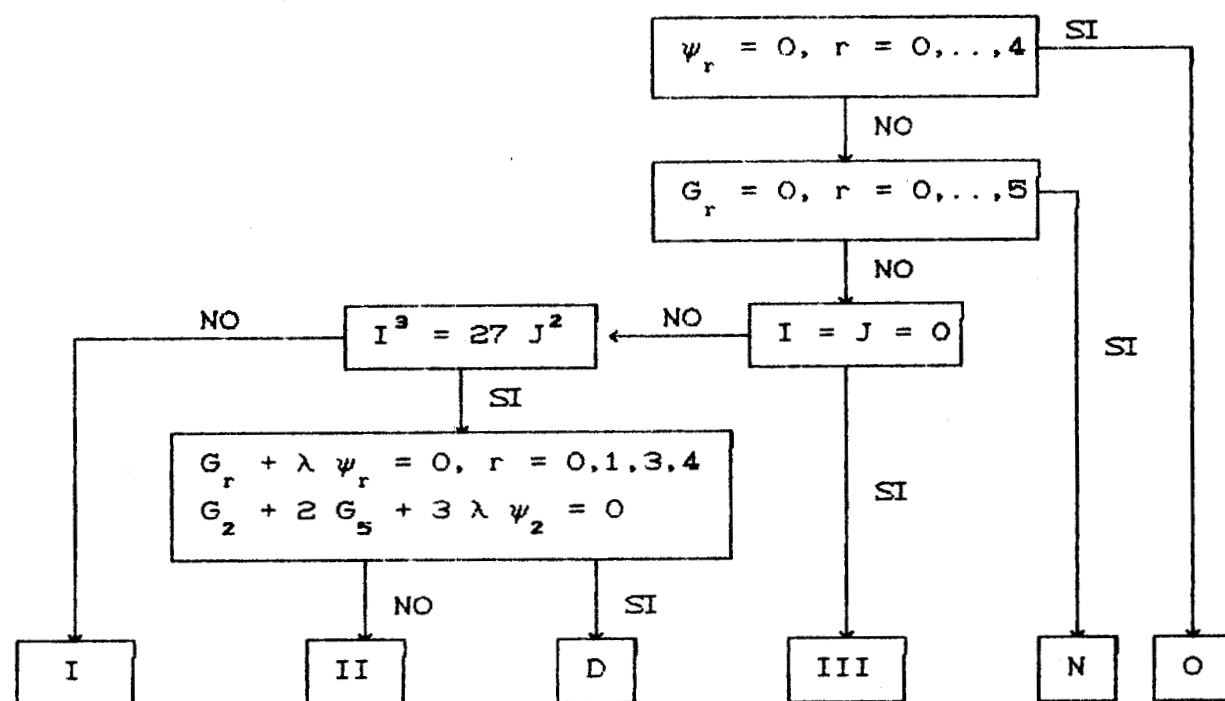
El diagrama de flujo presentado se encuentra en la tesis doctoral de J. L. Fernández(1986)[3] y los cálculos detallados se localizan en la tesis de Ovando [4].

Este proceso tensorial se logra de la siguiente manera: para los tipos Petrov de la tabla 1 podemos indicar su forma canónica de Jordan y obtener el polinomio mínimo que satisface P ; considerando (41) se deduce la relación tensorial correspondiente para C_{ijklm} .

Se observa que en este método los cálculos se realizan en coordenadas arbitrarias y no interviene ninguna tétrada. El método tensorial es importante porque puede transformarse con el formalismo de tétradas nulas generando el método tensorial de tétradas nulas.

Si en el MTP se sustituye la expresión (35) se obtiene un nuevo algoritmo, deducido por Ovando (1985), (alternativo al proceso propuesto por D'Inverno - Russel - Clark (1971) [13]) que se muestra a continuación.

METODO TENSORIAL - TETRADAS NULAS



donde

$$G_0 = 2(\psi_0 \psi_2 - \psi_1^2)$$

$$G_1 = \psi_0 \psi_3 - \psi_1 \psi_2$$

$$G_2 = \psi_2^2 + \psi_0 \psi_4 - 2\psi_1 \psi_3$$

$$G_3 = \psi_1 \psi_4 - \psi_2 \psi_3$$

$$G_4 = 2(\psi_2 \psi_4 - \psi_3^2)$$

$$G_5 = 2(\psi_1 \psi_3 - \psi_2^2)$$

$$I = G_2 - G_5, \quad J = -\psi_3 G_1 + \frac{1}{2}(\psi_2 G_5 + \psi_4 G_0)$$

$$\lambda^2 = \frac{I}{3}, \quad \lambda^3 = -J$$

Este algoritmo es válido para una tetrada de NP arbitraria y su notación es MTN.

El método tensorial bivectorial, MTB, es la continuación del método matricial y permite calcular explícitamente para cada métrica, las tetradas canónicas real y nula así como los vectores

Debever-Penrose. El método matricial conduce a una descomposición canónica del tensor de Weyl que se logra en función de bivectores antisimétricos.

El método tensorial bivectorial permite que el desarrollo del tensor de Weyl dado por [35] se reduzca conforme a la tabla siguiente :

TIPO	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
I	$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$	0	$-\frac{1}{2}\lambda_3$	0	$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$
D	0	0	λ_1	0	0
II	0	0	λ_1	0	1
N	0	0	0	0	1
III	0	0	0	$-\frac{i}{\sqrt{2}}$	0

TABLA II. Componentes de NP del tensor de Weyl en la tétrada canónica.

λ_r - valores propios complejos de P , la matriz de Petrov.

Las cantidades de NP se calculan contrayendo al tensor conformal con la base (U, V, M). Las ψ_r de la tabla se subrayan ya que la tétrada con la cual se calculan es necesariamente una tétrada canónica. Explícitamente, se procede de la siguiente manera :

de la tétrada nula [4] se despeja la tétrada real $e_{(a)r}$ y se sustituye en (42) y (41) considerando las expresiones para las ψ_r , lo que permite obtener la matriz :

$$P = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_0 - \psi_4) & \frac{i}{2}(\psi_4 - \psi_0) & \psi_1 - \psi_3 \\ \frac{i}{2}(\psi_4 - \psi_0) & \frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_0 + \psi_4) & i(\psi_1 + \psi_3) \\ \psi_1 - \psi_3 & i(\psi_1 + \psi_3) & -2\psi_2 \end{vmatrix} \quad (43)$$

que G. Ludwig [14], deduce con espinores y mediante un 5 - espacio complejo (consultar J. L. López - G. Ovando [15]).

Para cada tipo Petrov la matriz P adquiere su correspondiente forma canónica de Jordan, o sea para cada tipo Petrov existe una tétrada nula (no necesariamente única) que se llamará canónica, en la cual P tiene una estructura más simple.

Resumiendo, se observa de la tabla II que existe por lo menos una tétrada en cada punto de R_4 tal que respecto a ella se puede conseguir que :

- a) $\psi_1 = 0$ para cualquier tipo Petrov.
- b) $\psi_0 = \psi_1 = 0$ si el tipo Petrov es algebraicamente especial.
- c) $\psi_0 = \psi_1 = \psi_3 = 0$ si R_4 es de tipo degenerado.
- d) $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$ sólo para los tipos N y III.
- e) $\psi_0 = \psi_4 \neq 0$ en el tipo I y ψ_2 depende sólo del valor propio λ_3 .

El método tensorial vectorial (MTV) permite encontrar vectores nulos reales, las direcciones de Debever - Penrose [16], que contribuyen a la caracterización de los tipos Petrov de R_4 y que son importantes en las investigaciones actuales. Estas direcciones se calculan explícitamente usando la tétrada canónica nula de NP y los valores propios de P .

Se llama dirección principal o dirección de Debever-Penrose (DP) aquella dirección definida por un vector nulo y real K^r que

cumple con cualquiera de las ecuaciones siguientes (el símbolo [] denota antisimetrización para los índices capturados).

$$(a) W_{brmn} K^m = 0$$

$$(b) W_{brm[n} K_{c]} K^m = 0 \longrightarrow W_{brmn} K_c K^m - W_{brmc} K_n K^m = 0$$

$$(c) K^r W_{brm[n} K_{c]} K^m = 0$$

$$(d) K^r K_{[f} W_{brm[n} K_{c]} K^m = 0, \quad K^r K_r = 0, \quad \bar{K}^r = K^r \quad (44)$$

entonces: K^r es

4 - degenerado si satisface (a)

3 - degenerado si satisface (b) y no cumple (a)

2 - degenerado si cumple (c) y no satisface (a) y (b)

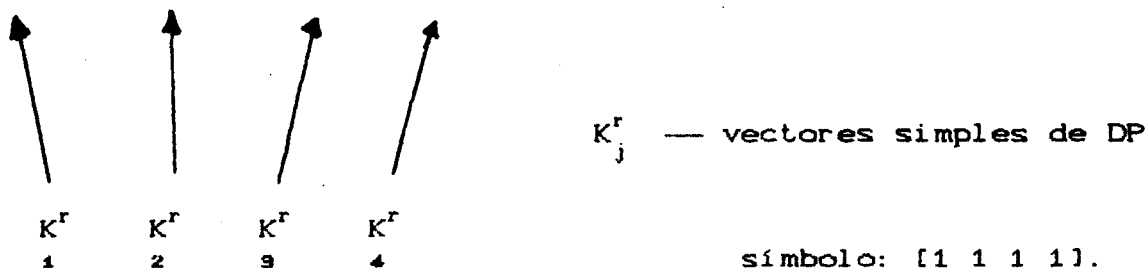
no - degenerado ó simple si cumple (d) y viola (a), (b), (c)

Cualquier múltiplo de una dirección principal nula es también un vector DP [16].

Si se cumple una de las relaciones (44. a, b, c, d) se cumplen las siguientes.

Ejemplificando:

R. Penrose [9] y R. Debever [16] mostraron que todo espacio tiempo tiene 4 vectores con la propiedad (44.d):



Si n^r se elige proporcional a uno de estos vectores entonces

$\psi_0 = 0$ ya que:

$$\psi_0 = \frac{1}{8} W_{abcr} V^{ab} V^{cr} = C_{abjr} n^a m^b n^j m^r$$

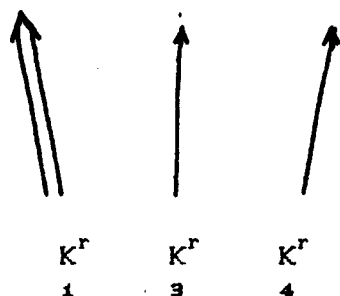
Si n^j cumple: $W_{brmn} K^m = 0$ o sea $C_{abjr} n^j = 0 \Rightarrow \psi_0 = 0$

Inversamente: si para cierta tétrada $\psi_0 = 0$, entonces n^r es de DP.

Si l^r es proporcional a alguno de los vectores K_j^r se obtiene

$$\psi_4 = 0.$$

Si dos vectores colapsan (flecha doble) tenemos:



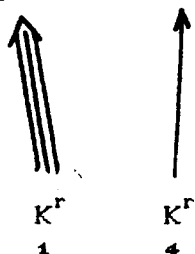
$K_1^r = K_2^r$ — vector 2 - degenerado de DP

K_3^r y K_4^r — vectores simples de DP

símbolo [2 1 1]

Si n^r es proporcional a K_1^r entonces $\psi_0 = \psi_1 = 0$ pero si n^r es proporcional a K_3^r ó K_4^r entonces sólo se puede asegurar que $\psi_0 = 0$; si l^r es proporcional a K_1^r resulta $\psi_3 = \psi_4 = 0$.

Los vectores anteriores satisfacen (44c), si ocurre el triple colapso:



K_1^r — vector 3 - degenerado de DP

K_4^r — vector simple de DP

símbolo [3 1]

y considerando n^r proporcional a K_1^r , $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$; si n^r es proporcional a K_4^r solamente $\psi_0 = 0$, l^r proporcional a K_1^r conduce $\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$. El vector K_4^r cumple (44d) y K_1^r satisface (44d,c) y además (44b).

El último caso consiste en el colapso de las 4 direcciones principales (coinciden entre sí):



K^r_1 - vector 4 - degenerado de DP
símbolo [4].

Si n^r es proporcional a K^r ó l^r es proporcional a K^r entonces $\psi_a = 0$, $a \neq 4$ ó $\psi_b = 0$, $b \neq 0$. El vector K^r cuatridegenerado, satisface (44d,c,b) y además cumple (44a).

Cuando en $\mathbb{R}_4$ (con $C_{abcd} \neq 0$) existe un vector nulo real con la propiedad (44a) entonces dicho vector es único, excepto por un factor (ver [17]).

Cuando n^r o/y l^r son de Debever - Penrose los resultados anteriores se reúnen en la siguiente tabla [2].

Degeneración	n^r	l^r
simple	$\psi_0 = 0$	$\psi_4 = 0$
doble	$\psi_0 = \psi_1 = 0$	$\psi_3 = \psi_4 = 0$
triple	$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0$	$\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$
cuadruples	$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$	$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$

TABLA III. Valores de ψ_r para n^r y l^r direcciones principales.

Simbólicamente, en términos de las direcciones principales nulas y en base al método tensorial vectorial, la C.P. queda:

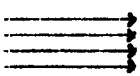
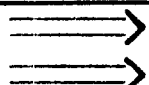
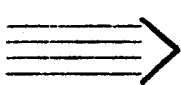
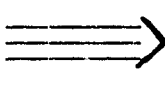
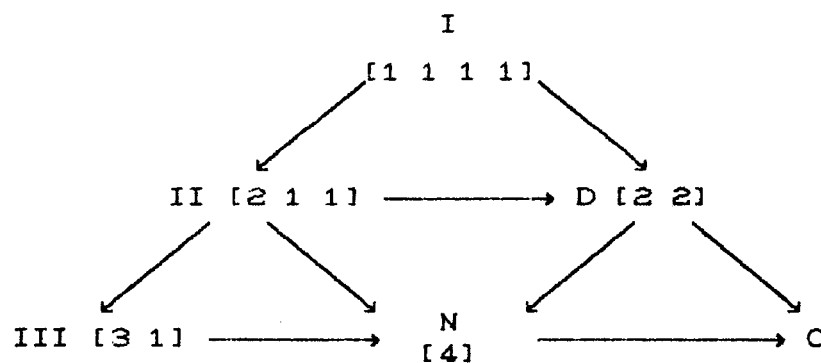
Tipo	Símbolo	Interpretación
I	$[1 \ 1 \ 1 \ 1] \ 6$ 	4 direcciones principales simples
D	$[2 \ 2] \ 6$ 	4 direcciones principales dobles
II	$[2 \ 1 \ 1] \ 6$ 	1 vector doble degenerado 2 vectores simples
N	$[4] \ 6$ 	1 vector de DP cuadridegenerado
III	$[3 \ 1] \ 6$ 	1 vector de DP tridegenerado 1 vector simple
O	No hay direcciones de DP	

TABLA IV. La CP en términos de direcciones principales nulas.

Si en (44 a,b,c,d) adaptamos la tetrada de NP conforme a la tabla III utilizando el MTTN concluimos que los tipos I, II, III, D y N corresponden a $[1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $[2 \ 1 \ 1]$, $[3 \ 1]$, $[2 \ 2]$, y $[4]$ respectivamente lo que se ilustra en el diagrama de Penrose (1960).



Los tipos Petrov enlazados por las flechas son tales que colapsando las DP de uno se obtiene el otro.

La relación entre la tétrada canónica (sus elementos se van a subrayar) de la tabla y los vectores de Debever-Penrose se muestran en la tabla V.

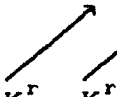
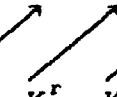
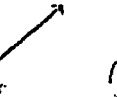
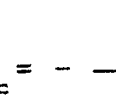
N	$\underline{n}^r$ 	III	$\underline{n}^r$  $\underline{l}^r$ 
D	$\underline{n}^r$  $\underline{l}^r$ 		
II	$\underline{n}^r$  K_1^r  K_2^r 	$K_j^r = \underline{n}^r + \frac{1}{2} w_j \bar{w}_j \underline{l}^r - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{w}_j \underline{m}^r + \frac{i}{\sqrt{2}} w_j \bar{m}^r, w_j^2 = 12\lambda_1, j = 1, 2$	
I	K_{11}^r  K_{12}^r  K_{21}^r  K_{22}^r 	$K_{jc}^r = - \frac{\bar{\beta}_c (i + \phi_j)}{\beta_c (i + \bar{\phi}_j)} \underline{l}^r + \underline{n}^r + \beta_{jc} \underline{m}^r + \bar{\beta}_{jc} \bar{m}^r$ $\beta_{jc} = - \frac{i \bar{\beta}_c}{i + \bar{\phi}_j}, \phi_j^2 = - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}, j, c = 1, 2$ $\beta_c^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}, i = \sqrt{-1}$	

TABLA V. Tipos Petrov, tétrada canónica y vectores de Debever-Penrose.

λ - eigenvalores de la matriz $P_{\sim}$, $\sum \lambda_r = 0$.

De la tabla anterior se observa que $\underline{n}^r$ es una dirección principal repetida cuando el espacio-tiempo es algebraicamente especial; $\underline{l}^r$ solo es de DP para III y D.

Los vectores de DP definen congruencias nulas (familias de curvas) en $\mathbb{R}_4$ las cuales son muy importantes para el estudio del campo gravitacional (problemas de inmersión).

Asi mismo se menciona que en casi todos los cálculos utilizaremos la tétrada canónica.

La importancia de la CP radica en el hecho de que es una clasificación invariante. El tipo Petrov en un evento es independiente del sistema de coordenadas y de la tetrada.

Las investigaciones actuales se realizan sobre los tipos Petrov.

2. TETRADAS NULAS - ASPECTOS DIFERENCIALES

En la primera parte de este capítulo se han presentado aspectos locales del espacio tiempo; se ha considerado una tétrada construida en un evento de $\mathbb{R}_4$. Para saber cómo evoluciona la tétrada nula sobre $\mathbb{R}_4$ se deben estudiar sus propiedades diferenciales lo que dará origen a: coeficientes de rotación, coeficientes de espín, escalares ópticos, cantidades de NP, operadores, relaciones de conmutación, ecuaciones de NP, identidades de Bianchi y ecuaciones de Brans-Edgar, ó sea la herramienta completa del formalismo de N-P.

Concretamente la evolución de la tétrada $(Z_a^r) = (m^r, \bar{m}^r, l^r, n^r)$, $a = 1, 2, 3, 4$ sobre $\mathbb{R}_4$ y los cambios que sufren los objetos tensoriales al movernos en $\mathbb{R}_4$ los describe la derivada covariante de (Z_a^r) con símbolo $(;)$.

$$Z_{(a)b;c} = \gamma_{qah} Z_b^{(q)} Z_c^{(h)} \quad (45)$$

Es un tensor de orden 2, no necesariamente simétrico en b y c , con γ_{qah} - coeficientes de rotación asociados a la tétrada.

Para obtenerlos, se contrae la relación (45) con elementos de la tétrada:

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac} = Z_{(b)r;t} Z_{(a)}^r Z_{(c)}^t \equiv Z_{(b)(a);c} \quad (46)$$

Se observa que los coeficientes de rotación son las proyecciones de la derivada covariante sobre la tétrada nula. Las cantidades γ_{abc} son invariantes bajo transformación de coordenadas, pero cambian al variar la tétrada.

Los coeficientes de rotación presentan antisimetría :

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$$

$$\begin{aligned} \text{ya que: } \gamma_{abc} &= [(Z_{(b)r} Z_{(a)}^r)_{;t} - Z_{(b)r} Z_{(a);t}^r] Z_{(c)}^t = \\ &= - Z_{(a);t}^r Z_{(b)}^r Z_{(c)}^t = - \gamma_{bac} \end{aligned}$$

Por esta razón, γ_{abc} sólo tiene 24 componentes independientes, todas complejas (debido a la tétrada $Z_{(a)}^r$ que es compleja) excepto γ_{433} y γ_{434} que son reales.

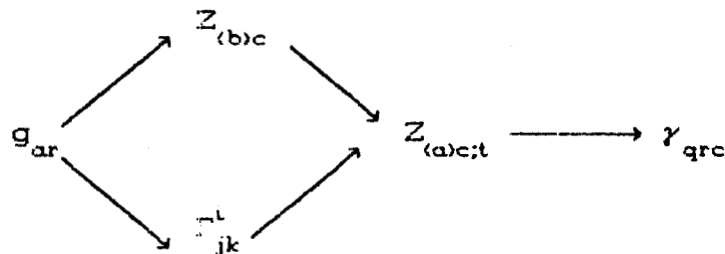
Al conjugar los coeficientes de rotación se intercambian 1 y

2. Por ejemplo:

$$\gamma_{123} = - m_{r;t} \bar{m}^r l^t ; \bar{\gamma}_{123} = - \bar{m}_{r;t} m^r l^t = \gamma_{213}$$

$$\bar{\gamma}_{134} = \gamma_{234} ; \bar{\gamma}_{241} = \gamma_{142} , \text{ etc.}$$

En resumen, γ_{abc} se calcula con el algoritmo:



Pero existe otro algoritmo en el cual no se utilizan derivadas covariantes, solo se emplean derivadas parciales y que se presenta a continuación:

$$\gamma_{abr} - \gamma_{bar} = - [Z_{(a)p;q} - Z_{(a)q;p}] Z_{(b)}^p Z_{(r)}^q \equiv C_{abr} = - C_{arb} \quad (47)$$

Por permutaciones cíclicas se obtiene:

$$\gamma_{bra} - \gamma_{bar} = C_{bra} , \gamma_{rab} - \gamma_{rba} = C_{rab} \text{ y sumando resulta:}$$

$$\gamma_{abr} = \frac{1}{2}(C_{abr} + C_{bra} - C_{rab}) \quad (48)$$

Utilizando en (47) la definición de la derivada covariante y considerando la simetría de Γ_{ij}^m ,

$$C_{abr} = -[Z_{(a)p,q} - Z_{(a)q,p}] Z_{(b)}^p Z_{(r)}^q \quad (49)$$

Resumiendo, ob tenemos un algoritmo alternativo:

$$g_{ar} \longrightarrow Z_{(a)r}, \quad Z_{(b)c,t} \longrightarrow C_{abr} \longrightarrow \gamma_{abr}$$

En C_{abr} , también tenemos 24 componentes independientes.

COEFICIENTES DE ESPIN

En 1962, Newman y Penrose introducen 12 cantidades complejas llamadas coeficientes de espín (que están en función de los coeficientes de rotación) y junto con sus complejos conjugados contienen la misma información que los γ_{abc} .

Los coeficientes de espín son: $\kappa, \rho, \sigma, \tau, \nu, \mu, \lambda, \pi, \epsilon, \gamma, \alpha, \beta$.

El significado geométrico de $\kappa, \sigma, \rho, \nu, \lambda, \mu$ se relaciona con las congruencias nulas definidas por n^a y l^a .

En la notación de NP tenemos:

$$\kappa = \gamma_{414} = -n_{a;b} m^a n^b$$

$$\rho = \gamma_{412} = -n_{a;b} m^a \bar{m}^b$$

$$\sigma = \gamma_{411} = -n_{a;b} m^a n^b$$

$$\tau = \gamma_{413} = -n_{a;b} m^a l^b$$

$$\nu = \gamma_{233} = l_{a;b} \bar{m}^a l^b$$

$$\mu = \gamma_{231} = l_{a;b} \bar{m}^a m^b$$

$$\lambda = \gamma_{232} = l_{a;b} \bar{m}^a \bar{m}^b$$

$$\pi = \gamma_{234} = l_{a;b} \bar{m}^a n^b$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{434} - \gamma_{124}) = -\frac{1}{2}(n_{a;b} l^a n^b - m_{a;b} \bar{m}^a n^b)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{433} - \gamma_{123}) = \frac{1}{2}(l_{a;b} l^b n^a - \bar{m}_{a;b} m^a l^b)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{432} - \gamma_{122}) = \frac{1}{2}(l_{a;b} n^a \bar{m}^b - \bar{m}_{a;b} m^a \bar{m}^b)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma_{431} - \gamma_{121}) = -\frac{1}{2}(n_{a;b} l^a m^b - m_{a;b} \bar{m}^a m^b) \quad (50)$$

De (50) se observa que:

$$\begin{aligned} \gamma_{434} &= \varepsilon + \bar{\varepsilon}, \gamma_{124} = \bar{\varepsilon} - \varepsilon, \gamma_{432} = \alpha + \bar{\beta} \\ \gamma_{433} &= \gamma + \bar{\gamma}, \gamma_{123} = \bar{\gamma} - \gamma, \gamma_{122} = \bar{\beta} - \alpha \end{aligned} \quad (51)$$

Las expresiones (50) y (51) se pueden compactar en la siguiente tabla VI:

γ_{abc}						
$c \backslash ab$	23	31	12	14	24	34
1	μ	$-\bar{\lambda}$	$\bar{\alpha} - \beta$	$-\sigma$	$-\bar{\rho}$	$-(\bar{\alpha} + \beta)$
2	λ	$-\bar{\mu}$	$\bar{\beta} - \alpha$	$-\rho$	$-\bar{\sigma}$	$-(\alpha + \bar{\beta})$
3	ν	$-\bar{\nu}$	$\bar{\gamma} - \gamma$	$-\tau$	$-\bar{\tau}$	$-(\gamma + \bar{\gamma})$
4	π	$-\bar{\pi}$	$\bar{\varepsilon} - \varepsilon$	$-\kappa$	$-\bar{\kappa}$	$-(\varepsilon + \bar{\varepsilon})$

TABLA VI. Coeficientes de rotación y de espín.

Los coeficientes de espín, para una tétrada específica se pueden calcular más fácil con las relaciones (48), (49) y considerando (50):

$$\kappa = C_{414}, \sigma = C_{114}, \rho = \frac{1}{2}(C_{124} + C_{412} + C_{214})$$

$$\nu = C_{332}, \lambda = C_{232}, \mu = \frac{1}{2}(C_{231} + C_{312} + C_{132})$$

$$\tau = \frac{1}{2}(C_{134} + C_{413} + C_{314}), \pi = \frac{1}{2}(C_{234} + C_{342} + C_{432})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(C_{142} + C_{214} + C_{412} + 2C_{434}),$$

$$\gamma = \frac{1}{4}(C_{132} + C_{213} + C_{312} + 2C_{334})$$

$$\alpha = \frac{1}{4}(C_{324} + C_{432} + C_{234} + 2C_{212}),$$

$$\beta = \frac{1}{4}(C_{314} + C_{431} + C_{134} + 2 C_{112}) \quad (52)$$

Dando valores al índice (a) en (45) y considerando los coeficientes de espín de la tabla VI se obtiene la evolución en el espacio-tiempo de los elementos de la tétrada nula:

$$\begin{aligned} m_{a;b} &= m_a [(\alpha - \bar{\beta}) m_b + (\beta - \bar{\alpha}) \bar{m}_b + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) l_b + (\bar{\gamma} - \gamma) n_b] + \\ &\quad l_a (-\rho m_b - \sigma \bar{m}_b + \kappa l_b + \tau n_b) + n_a (\bar{\mu} m_b + \bar{\lambda} \bar{m}_b - \bar{\pi} l_b - \bar{\nu} n_b) \\ \bar{m}_{a;b} &= \bar{m}_a [(\bar{\beta} - \alpha) m_b + (\bar{\alpha} - \beta) \bar{m}_b + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) l_b + (\gamma - \bar{\gamma}) n_b] + \\ &\quad l_a (-\bar{\sigma} m_b - \bar{\rho} \bar{m}_b + \bar{\kappa} l_b + \bar{\tau} n_b) + n_a (\lambda m_b + \mu \bar{m}_b - \pi l_b - \nu n_b) \\ l_{a;b} &= m_a (\lambda m_b + \mu \bar{m}_b - \pi l_b - \nu n_b) + \bar{m}_a (\bar{\mu} m_b + \bar{\lambda} \bar{m}_b - \bar{\pi} l_b - \bar{\nu} n_b) + \\ &\quad + l_a [-(\alpha + \bar{\beta}) m_b - (\bar{\alpha} + \beta) \bar{m}_b + (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) l_b + (\gamma + \bar{\gamma}) n_b] \\ n_{a;b} &= m_a (-\bar{\sigma} m_b - \bar{\rho} \bar{m}_b + \bar{\kappa} l_b + \bar{\tau} n_b) + \bar{m}_a (-\rho m_b - \sigma \bar{m}_b + \kappa l_b + \tau n_b) + \\ &\quad + n_a [(\alpha + \bar{\beta}) m_b + (\bar{\alpha} + \beta) \bar{m}_b - (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) l_b - (\gamma + \bar{\gamma}) n_b] \quad (53) \end{aligned}$$

Al proyectar (53) sobre la tétrada se obtienen las derivadas direccionales:

$$\begin{aligned}
\delta m_a &= -\rho l_a + \bar{\lambda} n_a + (\beta - \bar{\alpha}) m_a, \quad \delta \bar{m}_a = -\bar{\rho} l_a + \mu n_a + (\bar{\alpha} - \beta) \bar{m}_a \\
\delta l_a &= -(\bar{\alpha} + \beta) l_a + \mu m_a + \bar{\lambda} \bar{m}_a, \quad \delta n_a = (\bar{\alpha} + \beta) n_a - \bar{\rho} m_a - \rho \bar{m}_a \\
\bar{\delta} m_a &= -\rho l_a + \bar{\mu} n_a + (\alpha - \bar{\beta}) m_a, \quad \bar{\delta} \bar{m}_a = -\bar{\rho} l_a + \lambda n_a + (\bar{\beta} - \alpha) \bar{m}_a \\
\bar{\delta} l_a &= -(\alpha + \bar{\beta}) l_a + \lambda m_a + \bar{\mu} \bar{m}_a, \quad \bar{\delta} n_a = (\alpha + \bar{\beta}) n_a - \bar{\sigma} m_a - \rho \bar{m}_a \\
\Delta m_a &= -\tau l_a + \bar{\nu} n_a + (\gamma - \bar{\gamma}) m_a, \quad \Delta \bar{m}_a = -\bar{\tau} l_a + \nu n_a + (\bar{\gamma} - \gamma) \bar{m}_a \\
\Delta l_a &= -(\gamma + \bar{\gamma}) l_a + \nu m_a + \bar{\nu} \bar{m}_a, \quad \Delta n_a = (\gamma + \bar{\gamma}) n_a - \bar{\tau} m_a - \tau \bar{m}_a \\
D m_a &= -\kappa l_a + \bar{\pi} n_a + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) m_a, \quad D \bar{m}_a = -\bar{\kappa} l_a + \pi n_a + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \bar{m}_a \\
D l_a &= -(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) l_a + \pi m_a + \bar{\pi} \bar{m}_a, \quad D n_a = (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) n_a - \kappa m_a - \bar{\kappa} \bar{m}_a
\end{aligned}
\tag{54}$$

Con $\delta = m^a \nabla_a$, $\bar{\delta} = \bar{m}^a \nabla_a$, $\Delta = l^a \nabla_a$, $D = n^a \nabla_a$ operadores diferenciales ya que:

$$\nabla_a = ;a \text{ o sea } ;a = \bar{m}_a \delta + m_a \bar{\delta} - n_a \Delta - l_a D \tag{55}$$

Observamos que si $(;a)$ se considera como un vector A_r , (55) es su desarrollo en la base constituida por la tétrada nula conforme a la relación (12).

Al aplicar por ejemplo $\delta = m^b_{;b}$ sobre l^a tenemos $\delta l_a = m^b_{;b} l_a$ con $(l_{a;b})$ de (53) resulta: $\delta l_a = \mu m_a + \bar{\lambda} \bar{m}_a - (\bar{\alpha} + \beta) l_a$.

Los 4 operadores δ , $\bar{\delta}$, Δ y D definidos en términos de la tétrada nula y de la derivada covariante satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\Delta, D] = (\gamma + \bar{\gamma})D + (\epsilon + \bar{\epsilon})\Delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau} + \pi)\delta$$

$$[\delta, D] = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D + \kappa\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})\delta$$

$$[\delta, \Delta] = -\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + \bar{\lambda}\bar{\delta} + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta$$

$$[\bar{\delta}, \delta] = (\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta} - (\bar{\beta} - \omega)\delta \quad (56)$$

Estas relaciones son importantes para el estudio de las condiciones de integrabilidad de las ecuaciones de Newman-Penrose y de las identidades de Bianchi.

Sea $\Gamma(T^r)$ la congruencia o familia de curvas generada por el campo vectorial T^r .

Se consideran las curvas cuyo vector tangente es paralelo a n^r o sea $\Gamma(n^r)$. Estas trayectorias son posibles historias de fotones. Si los elementos de esta congruencia son geodésicas, por definición Dn^b es proporcional a n^b y por lo tanto de (54):

" $\Gamma(n^r)$ es geodésica si y solo si $\kappa = 0$ "

o sea $Dn^a = (\epsilon + \bar{\epsilon})n^a$. Cuando $\epsilon + \bar{\epsilon} = 0$ decimos que sobre $\Gamma(n^r)$ existe una parametrización especial o afín.

De (54) es inmediato el resultado:

"La tétrada $Z_{(a)}^r$, $a = 1, \dots, 4$ acepta transporte paralelo sobre $\Gamma(n^r)$, $DZ_{(a)}^r = 0$, si y solo si $\kappa = \epsilon = \pi = 0$ ".

Al descomponer ρ en sus partes real e imaginaria:

$$\rho \equiv -(\theta + i\omega)$$

se obtienen: $\theta = -\frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho})$ y $\omega = \frac{i}{2}(\rho - \bar{\rho})$.

En 1961, Sachs [18] mostró que σ, θ y ω están asociados con la deformación, expansión, y rotación de $\Gamma(n^r)$ respectivamente. Estos 3 invariantes se conocen como "escalares ópticos" de la congruencia

generada por n^a .

Los escalares ópticos $\Gamma(1^r)$ son λ , θ' y ω' y las propiedades geométricas de $\Gamma(n^r)$ y $\Gamma(1^r)$, en base a las relaciones (54) y (50) se muestran en la tabla VII [3]:

Propiedad	$\Gamma(n^r)$	$\Gamma(1^r)$
Geodésica	κ	ν
Parametrización	$\epsilon + \bar{\epsilon}$	$\gamma + \bar{\gamma}$
Deformación	σ	λ
Expansión	$\theta \equiv -\frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho})$	$-\frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu})$
Rotación	$\omega \equiv \frac{i}{2}(\rho - \bar{\rho})$	$\frac{i}{2}(\mu - \bar{\mu})$

TABLA VII. Escalares ópticos.

Resumiendo, afirmamos que si $\kappa = 0$, $\Gamma(n^r)$ es geodésica; no se deforma cuando $\sigma = 0$; tiene parametrización especial cuando

$\epsilon + \bar{\epsilon} = 0$; θ y ω están asociados con la expansión y rotación de la congruencia $\Gamma(n^r)$: $\rho = \bar{\rho}$ no rota, $\rho = -\bar{\rho}$ no se expande.

Relacionado con los coeficientes de espín, mencionamos que cambian bajo una transformación de Lorentz [2].

ECUACIONES DE NEWMAN-PENROSE

Consideramos la fórmula de Ricci

$$A_{r;ab} - A_{r;ba} = R_{rab}^n A_n \quad (57)$$

con A_r -campo gravitacional vectorial arbitrario y si $A_r = Z_{(a)r}$ al proyectar (57) sobre la tétrada de NP se obtiene:

$$\begin{aligned} R_{(i)(j)(t)(d)} = & \gamma_{jit;c} Z_{(d)}^c - \gamma_{jid;c} Z_{(t)}^c + \gamma_{gid} \gamma_{jt}^g - \\ & - \gamma_{git} \gamma_{jt}^g + \gamma_{jiq} \gamma_{dt}^q - \gamma_{jiq} \gamma_{td}^q \end{aligned} \quad (58)$$

donde $\gamma_{bc}^a = Z^{(a)r} \gamma_{rbc}$ y

$$R_{(i)(j)(t)(d)} \equiv R_{prbc} Z_{(i)}^p Z_{(j)}^r Z_{(t)}^b Z_{(d)}^c$$

Dando valores a i, j, t, d y considerando ϕ_{ab}, ψ_r , los 12 coeficientes de espín, las definiciones $\delta, \bar{\delta}, \Delta$ y D , después de cálculos muy laboriosos resultan las 18 ecuaciones de Newman-Penrose. Son ecuaciones lineales en los operadores $\delta, \bar{\delta}, D$ y Δ y contienen la misma información que el tensor de Riemann.

Para una tétrada dada se determinan los coeficientes de espín y estos permiten obtener las cantidades ψ_a, ϕ_{ab} y R de las ecuaciones de Newman-Penrose las cuales especifican completamente al tensor de curvatura.

ECUACIONES DE NEWMAN PENROSE

$$(a) D\rho - \bar{\delta}\kappa = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + (\epsilon + \bar{\epsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) - \phi_{00},$$

$$(b) D\sigma - \delta\kappa = (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\bar{\epsilon} - \epsilon)\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \psi_0,$$

$$(c) D\tau - \Delta\kappa = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\epsilon - \bar{\epsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \psi_1 - \phi_{01},$$

$$(d) D\alpha - \delta\bar{\epsilon} = (\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\epsilon + \rho)\pi - \phi_{01},$$

$$(e) D\beta - \delta\epsilon = (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \psi_1,$$

$$(f) D\gamma - \Delta\bar{\epsilon} = (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \tau\pi - \nu\kappa + \psi_2 - \phi_{11} + \frac{R}{24},$$

$$(g) D\lambda - \bar{\delta}\pi = \rho\lambda + \bar{\sigma}\nu + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\epsilon - \bar{\epsilon})\lambda - \bar{\phi}_{02},$$

$$(h) D\mu - \delta\pi = \bar{\rho}\mu + \sigma\lambda + \pi\bar{\pi} - (\epsilon + \bar{\epsilon})\mu - \pi(\bar{\alpha} - \beta) - \nu\kappa + \psi_2 - \frac{R}{12},$$

$$(i) D\nu - \Delta\pi = (\pi + \bar{\tau})\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \psi_3 - \bar{\phi}_{12},$$

$$(j) \Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = -(\mu + \bar{\mu})\lambda - (3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \psi_4,$$

$$(k) \delta\rho - \bar{\delta}\delta = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \psi_1 - \phi_{01},$$

$$(l) \delta\alpha - \bar{\delta}\beta = \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) - \psi_2 - \phi_{11} - \frac{R}{24},$$

$$(m) \delta\lambda - \bar{\delta}\mu = (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \psi_3 - \bar{\phi}_{12},$$

$$(n) \delta\nu - \Delta\mu = \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + (\gamma + \bar{\gamma})\mu - \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu - \phi_{22},$$

$$(o) \delta\gamma - \Delta\beta = (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda} - \phi_{12},$$

$$(p) \delta\tau - \Delta\sigma = \mu\sigma + \bar{\lambda}\rho + (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - \kappa\bar{\nu} - \phi_{02},$$

$$(q) \Delta\rho - \bar{\delta}\tau = -\rho\bar{\mu} - \sigma\lambda + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \nu\kappa - \psi_2 + \frac{R}{12},$$

$$(r) \Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = (\rho + \epsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \psi_3,$$

IDENTIDADES DE BIANCHI

Dadas las IB en forma tensorial:

$$R_{abcf;r} + R_{abfr;c} + R_{abrc;f} = 0 \quad (60)$$

considerando

$$R_{abcf} = R_{(a)(j)(l)(d)} Z_a^{(i)} Z_b^{(j)} Z_c^{(f)} Z_f^{(d)}$$

al sustituir en (60) y proyectando sobre la tétrada de NP se obtiene:

$$\begin{aligned} & R_{(k)(q)(l)(p);(h)} + R_{(k)(q)(p)(h);(l)} + R_{(k)(q)(h)(l);(p)} + \\ & + \gamma_{qh}^i R_{(i)(k)(l)(p)} + \gamma_{ql}^i R_{(i)(k)(p)(h)} + \gamma_{qp}^i R_{(i)(k)(h)(l)} \\ & - \gamma_{kh}^i R_{(i)(q)(l)(p)} - \gamma_{kl}^i R_{(i)(q)(p)(h)} - \gamma_{kp}^i R_{(i)(q)(h)(l)} \\ & + (\gamma_{ph}^i - \gamma_{hp}^i) R_{(i)(l)(k)(q)} + (\gamma_{lp}^i - \gamma_{pl}^i) R_{(i)(h)(k)(q)} + \\ & + (\gamma_{hl}^i - \gamma_{lh}^i) R_{(i)(p)(k)(q)} = 0 \end{aligned}$$

Dando valores a los índices k, q, p, h se obtienen las IB expresadas en el formalismo de NP. (Se presentan en el mismo orden que en libro de Kramer-Stephani-Herlt-MacCallum [5]).

Las IB son condiciones de compatibilidad para las 18 ecuaciones de NP. (Si se cumplen todas, las ecuaciones de NP tienen solución). Permiten estudiar la evolución de la gravedad de una región a otra del espacio-tiempo.

IDENTIDADES DE BIANCHI

$$(a) \bar{\delta}\psi_0 - D\psi_1 - D\phi_{01} + \delta\phi_{00} = (4\alpha - \pi)\psi_0 - 2(2\rho + \epsilon)\psi_1 + 3\kappa\psi_2 - \\ (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\phi_{00} - 2(\epsilon + \bar{\rho})\phi_{01} - 2\sigma\bar{\phi}_{01} + 2\kappa\phi_{11} + \bar{\kappa}\phi_{02}.$$

$$(b) \Delta\psi_0 - \delta\psi_1 - D\phi_{02} + \delta\phi_{01} = (4\gamma - \mu)\psi_0 - 2(2\tau + \beta)\psi_1 + 3\sigma\psi_2 - \\ (2\epsilon - 2\bar{\epsilon} + \bar{\rho})\phi_{02} - 2(\bar{\pi} - \beta)\phi_{01} - 2\sigma\phi_{11} + 2\kappa\phi_{12} + \bar{\lambda}\phi_{00}.$$

$$(c) \bar{\delta}\psi_3 - D\psi_4 - \bar{\delta}\bar{\phi}_{12} + \bar{\phi}_{02} = (4\epsilon - \rho)\psi_4 - 2(2\pi + \alpha)\psi_3 + 3\lambda\psi_2 - \\ (2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})\bar{\phi}_{02} - 2(\bar{\tau} - \alpha)\bar{\phi}_{12} - 2\lambda\phi_{11} + 2\nu\bar{\phi}_{01} + \bar{\sigma}\phi_{22}.$$

$$(d) \Delta\psi_3 - \delta\psi_4 - \bar{\delta}\phi_{22} + \bar{\Delta}\phi_{12} = (4\beta - \tau)\psi_4 - 2(2\mu + \gamma)\psi_3 + 3\nu\psi_2 - \\ (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} - 2\alpha)\phi_{22} - 2(\gamma + \bar{\mu})\bar{\phi}_{12} - 2\lambda\bar{\phi}_{12} + 2\nu\phi_{11} + \bar{\nu}\phi_{02}.$$

$$(e) D\psi_2 - \bar{\delta}\psi_1 - \Delta\phi_{00} + \bar{\delta}\phi_{01} - \frac{1}{12}DR = -\lambda\psi_0 + 2(\pi - \alpha)\psi_1 + 3\rho\psi_2 - \\ -2\kappa\psi_3 + 2(\bar{\tau} + \alpha)\phi_{01} - (2\gamma + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\phi_{00} + 2\tau\bar{\phi}_{01} - 2\rho\phi_{11} - \bar{\sigma}\phi_{02}.$$

$$(f) \Delta\psi_2 - \delta\psi_3 - D\phi_{22} + \bar{\delta}\bar{\phi}_{12} - \frac{1}{12}\Delta R = -\sigma\psi_4 + 2(\beta - \tau)\psi_3 + 3\mu\psi_2 + \\ + 2\nu\psi_1 - 2(\bar{\pi} + \beta)\bar{\phi}_{12} - (\bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\phi_{22} - 2\pi\phi_{12} + 2\mu\phi_{11} + \bar{\lambda}\phi_{02}.$$

$$(g) D\psi_3 - \bar{\delta}\psi_2 + D\bar{\phi}_{12} - \delta\bar{\phi}_{02} + \frac{1}{12}\bar{\delta}R = -\kappa\psi_4 + 2(\rho - \epsilon)\psi_3 + 3\pi\psi_2 - \\ -2\lambda\psi_1 + 2(\bar{\rho} - \epsilon)\bar{\phi}_{12} - (2\bar{\alpha} - 2\bar{\beta} - \bar{\pi})\bar{\phi}_{02} + 2\pi\phi_{11} - 2\mu\bar{\phi}_{01} - \bar{\kappa}\phi_{22}.$$

$$(h) \Delta\psi_1 - \delta\psi_2 + \Delta\phi_{01} - \bar{\delta}\phi_{02} + \frac{1}{12}\delta R = \nu\psi_0 + 2(\gamma - \mu)\psi_1 - 3\tau\psi_2 \\ + 2\sigma\psi_3 - 2(\bar{\mu} - \gamma)\phi_{01} - (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} + 2\bar{\alpha})\phi_{02} - 2\tau\phi_{11} + 2\rho\phi_{12} + \bar{\nu}\phi_{00}.$$

$$(i) D\phi_{11} - \delta\bar{\phi}_{01} - \bar{\delta}\phi_{01} + \Delta\phi_{00} + \frac{1}{8}DR = (2\gamma - \mu + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\phi_{00} + \\ + (\pi - 2\alpha - 2\bar{\tau})\phi_{01} + \bar{\nu}\phi_{02} + (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\bar{\tau})\bar{\phi}_{01} + 2(\rho + \bar{\rho})\phi_{11} + \\ + \sigma\bar{\phi}_{02} - \kappa\phi_{12} - \bar{\kappa}\bar{\phi}_{12} .$$

$$(j) D\phi_{12} - \delta\phi_{11} - \bar{\delta}\phi_{02} + \Delta\phi_{01} + \frac{1}{8}\delta R = (-2\alpha + 2\bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\phi_{02} + \\ + (\bar{\rho} + 2\rho - 2\bar{\epsilon})\phi_{12} + (2\gamma - 2\mu - \mu)\bar{\phi}_{01} + 2(\pi - \tau)\bar{\phi}_{11} + \\ + \bar{\nu}\phi_{00} - \bar{\lambda}\bar{\phi}_{01} + \sigma\bar{\phi}_{12} - \kappa\phi_{22} .$$

$$(k) D\phi_{22} - \delta\bar{\phi}_{12} - \bar{\delta}\phi_{12} + \Delta\phi_{11} + \frac{1}{8}\Delta R = (-2\epsilon - 2\bar{\epsilon} + \rho + \bar{\rho})\phi_{22} + \\ + (-\bar{\tau} + 2\pi + 2\bar{\beta})\phi_{12} - (2\beta + 2\bar{\pi} - \tau)\bar{\phi}_{12} - 2(\mu + \bar{\mu})\phi_{11} + \\ + \nu\phi_{01} + \bar{\nu}\bar{\phi}_{01} - \bar{\lambda}\bar{\phi}_{02} - \lambda\phi_{02} .$$

(61)

Con respecto a las relaciones (59) y (61) hacemos las observaciones:

De (59b) tenemos que si $\kappa = \sigma = 0$ resulta $\psi_0 = 0$ y en base a la tabla (IV) se concluye que n^r es una dirección principal nula. Dicho de otro modo, cuando $\Gamma(n^a)$ es geodésica sin deformación entonces n^c es un vector de Debever-Penrose (no necesariamente repetido).

Las relaciones (61i, j, k) muestran que para un espacio-tiempo de Einstein con $\phi_{ab} = 0$, $\delta R = \bar{\delta}R = \Delta R = DR = 0$ lo que implica R constante.

Las ecuaciones de NP serán muy útiles en la integración de las ecuaciones de Weyl-Lanczos (capítulos II y III) que permiten obtener explícitamente las componentes NP del espintensor de Lanczos para diversas métricas.

ECUACIONES DE BRANS-EDGAR

Las identidades de Bianchi (IB) son ecuaciones diferenciales que para admitir solución exigen que se cumplan ciertas condiciones de integrabilidad. Ludwig [19] fue uno de los primeros investigadores que las obtuvo para R^4 vacío mediante el formalismo de NP pero sin hacer el análisis correspondiente para distintos tipos Petrov.

Brans [20] (usando una computadora) sólo obtuvo las condiciones de compatibilidad para el tipo I. Más tarde, Edgar [21] mostró que las doce ecuaciones de Brans [20] se pueden obtener sin el uso de la computadora y señaló algunos errores de impresión de [20].

Las ecuaciones de Brans-Edgar (BE) constituyen las condiciones de integrabilidad para las IB del mismo modo que éstas son condiciones de integrabilidad para las 18 ecuaciones de NP.

Las ecuaciones de BE para R_4 vacío tipos II, III o N se publicaron en la Rev. Mex. Fis. , No 1 (1990) (Autores: R. Becerril, J. López Bonilla, V. Gaftoi, J. Morales). Además se establece que las ecuaciones de NP, de Bianchi y de BE forman un conjunto completamente integrable[78] .

Para obtener las ecuaciones de BE correspondientes a los tipos Petrov II, III o N para R_4 vacío se utilizan las relaciones de conmutación (56) que caracterizan a los operadores δ , $\bar{\delta}$, Δ y D , y los teoremas de Kundt-Thompson [12] y Goldberg-Sachs [22] que se enuncian a continuación:

Teorema de Kundt-Thompson:

" En lo que sigue, cualesquiera dos incisos implica el tercero:

a) R_4 tiene tipo $\neq I$ siendo n^r una dirección principal nula

repetida.

b) $\Gamma(n^r)$ es geodésica con deformación cero.

c) $V^{ab} C_{abc;r}^r V^{cp} = 0$ tipos II y D

$V^{ab} C_{abc;r}^r = 0$ tipo III

$U^{ab} C_{abc;r}^r = 0$ tipos N "

Teorema de Goldberg-Sachs.

a') "Supongamos que en R_4 existe $\Gamma(n^c)$: congruencia nula geodésica con deformación cero tal que $R_{ab} n^a n^b = R_{ab} n^a m^b = R_{ab} m^a m^b = 0$ entonces R_4 es algebraicamente especial y n^r es un vector repetido de DP ".

b') "Si el espacio-tiempo vacío tipo $\neq I$ entonces la dirección principal nula repetida define una congruencia geodésica sin deformación ".

c') "Un R_4 vacío es algebraicamente especial si y sólo si contiene una congruencia nula geodésica sin deformación.

Se observa que los resultados (a'), (b'), (c') están contenidos en (c) y (c') es consecuencia de (a') (b').

Resumiendo, para cada tipo Petrov se determinan las IB correspondientes y se hace uso de los respectivos conmutadores.

a) Espacio-tiempo vacío tipo III

La tétrada se elige de modo que [4]:

tipo III: $\psi_a = 0$, $a \neq 3$ $\psi_3 \neq 0$

vacío : $\phi_{ab} = 0$, $R = 0$

De los teoremas de Goldberg-Sachs y Kundt-Thompson: $\kappa = \sigma = 0$ y las IB quedan:

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \psi_3 &= -2(\alpha + 2\pi) \psi_3, & \delta \psi_3 &= 2(\tau - \beta) \psi_3 \\ \Delta \psi_3 &= -2(\alpha + 2\pi) \psi_3, & D \psi_3 &= 2(\rho - \epsilon) \psi_3\end{aligned}\quad (62)$$

Empleando las relaciones de conmutación (56) y las ecuaciones (62) se obtienen las relaciones de integrabilidad de BE.

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \tau + 2\delta \pi + 2\pi(\beta - \bar{\alpha}) + \tau(\bar{\beta} - \alpha) + 2\bar{\rho} \mu - \rho \bar{\mu} &= 0 \\ \bar{\Delta} \tau + 2\delta \mu - \bar{\nu} \rho + 2\mu(\bar{\alpha} - \beta) - 2\pi \bar{\lambda} + \tau(\bar{\gamma} - \gamma) &= 0 \\ \bar{\delta} \rho + 2D\pi - \rho(\alpha + \bar{\beta}) + 2\pi(\bar{\epsilon} - \epsilon) &= 0 \\ \Delta \pi + \bar{\delta} \mu - \nu \rho - \lambda \tau + \pi(\gamma - \bar{\gamma} + \bar{\mu}) + \mu(\bar{\tau} - \bar{\beta} - \alpha) - \frac{1}{2} \psi_3 &= 0\end{aligned}\quad (63)$$

Estas ecuaciones son independientes de las 18 ecuaciones de NP, no aparecen en la literatura y sus condiciones de integrabilidad conducen a $0 = 0$.

b) R_4 vacío, tipo N.

Existe la tétrada canónica con la propiedad [4]: $\psi_a = 0$, $a \neq 4$, $\psi_4 \neq 0$, $\phi_{ab} = 0$, $R = 0$ y $\kappa = \sigma = 0$.

Con las IB y las relaciones de conmutación se obtienen condiciones que ya están en las 18 ecuaciones de NP.

c) R_4 vacío tipo III.

Se considera una tétrada tal que:

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_3 = 0; \quad \psi_2, \psi_4 \neq 0, \quad \kappa = \sigma = 0$$

Las IB quedan:

$$\begin{aligned}D\psi_4 &= (\rho - 4\epsilon)\psi_4 - 3\lambda\psi_2; & \delta\psi_4 &= (\tau - 4\beta)\psi_4 - 3\nu\psi_2 \\ D\psi_2 &= 3\rho\psi_2; & \Delta\psi_2 &= -3\mu\psi_2; & \bar{\delta}\psi_2 &= -3\pi\psi_2; & \delta\psi_2 &= 3\tau\psi_2\end{aligned}\quad (64)$$

y utilizando los conmutadores (56) se originan las ecuaciones de Brans-Edgar (BE):

$$\bar{\delta}\rho + D\pi - \rho(\alpha + \bar{\beta}) - \pi(\bar{\epsilon} - \epsilon) = 0$$

$$\Delta\pi - \bar{\delta}\mu + \rho\nu - \lambda\tau - \mu(\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau}) - \pi(\bar{\gamma} - \gamma - \bar{\mu}) = 0$$

$$\delta\mu + \Delta\tau - \rho\bar{\nu} - \bar{\lambda}\pi + \mu(\bar{\alpha} + \beta) + \tau(\bar{\gamma} - \gamma) = 0$$

$$\Delta\rho + D\mu + \mu(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \rho(\gamma + \bar{\gamma}) + \tau\bar{\tau} - \pi\bar{\pi} = 0 \quad (65)$$

Estas relaciones no aparecen en la literatura (coinciden con la ecuaciones de Brans-Edgar para el tipo D [20]).

d) R_4 vacío tipo D.

Es un caso particular del tipo I contenido en el estudio de Brans y Edgar.

Las condiciones de integrabilidad (63) y (65) conducen a $0 = 0$ y la comprobación del mismo para el tipo I realizada por Brans conduce al siguiente teorema:

" Las ecuaciones de NP, de Bianchi y de BE forman un conjunto completamente integrable ".

Finalmente al preguntarnos:

- ¿Son compatibles las 11 ecuaciones de las IB ? - Sí son, si se cumplen las ecuaciones de Brans Edgar.
- ¿Las ecuaciones de BE son compatibles ? Si son, por que siempre se obtiene $0 = 0$.

Las ecuaciones de BE son condiciones de integrabilidad para las IB.

CAPITULO II ESPINTENSOR DE LANCZOS

Introducción:

Cornelius Lanczos trabajó durante muchos años (1931 - 1974) con el fin de geometrizar el campo electromagnético sin abandonar la geometría Riemanniana; deseaba encontrar en $\mathbb{R}_4$ un objeto geométrico que incluyera las ecuaciones de Maxwell y de este modo el campo electromagnético estaría contenido en las propiedades intrínsecas del espacio-tiempo.

Lanczos no logró geometrizar el campo electromagnético pero demostró [23] que en todo cuadriespacio de Riemann existe un tensor (no necesariamente único) K_{abc} , llamado espintensor, que genera al tensor conformal de Weyl, a través de una expresión algebraica-diferencial. Este resultado no depende de las ecuaciones de campo. Es válido para toda teoría geométrica sobre $\mathbb{R}_4$, en particular para la relatividad general.

En este capítulo se va a presentar la importancia del espintensor en relatividad general, así como su posible relevancia física. Utilizando el formalismo de NP se obtienen, mediante las ecuaciones de Weyl-Lanczos, espintensores explícitos para diversas métricas [41].

Se hace énfasis en la obtención de las componentes del espintensor para los tipos Petrov III, N y O en el caso general [41].

1. GENERADOR DEL TENSOR DE WEYL

Lanczos trató de extender la relatividad general mediante ecuaciones de campo deducibles de un principio variacional tipo Hilbert (la variación se realizó sobre el tensor métrico g_{ab}) con lagrangiana L cuadrática en el tensor de Riemann R_{abcd} . En 1938 [25] mostró que si $L = L_0 = {}^*R^{abcd} R_{abcd}$ (contracción de R_{abcd} con su doble dual) la variación conduce a $0 = 0$; no aparecen ecuaciones de campo.

Lanczos [23] sugiere que la variación se realice para g_{ab} y ${}^*R^{abcd}$ de manera independiente e introduciendo multiplicadores de Lagrange. De este modo, la ecuación

$$\delta \int L_0 \sqrt{-g} d^4x = 0$$

proporciona nueva información con respecto a la estructura de la geometría Riemanniana. Uno de los multiplicadores introducidos es el tensor de tercer orden K_{ijr} [23] que presenta las siguientes simétrías algebraicas:

$$K_{ija} = -K_{jia}, \quad K_a{}^r{}_r = 0, \quad K_{aij} + K_{ija} + K_{jai} = 0 \quad (1a)$$

y la propiedad diferencial (no todos los K_{ijr} la cumplen)

$$K_{ab;c}{}^c = 0$$

El tensor K_{ijb} genera al tensor conformal de acuerdo con:

$$C_{pqjb} = K_{pqj;b} - K_{pqb;j} + K_{jbp;q} - K_{jbq;p} + \frac{1}{2} [g_{pb}(K_{jq} + K_{qj}) - g_{pj}(K_{qb} + K_{bq}) + g_{qj}(K_{pb} + K_{bp}) - g_{qb}(K_{pj} + K_{jp})] \quad (1b)$$

$$\text{donde } K_{jr} \equiv K_{j r;a}^a \quad (1c)$$

En base a (1b), se afirma que en todo espacio-tiempo existe un tensor de tercer orden que genera al tensor de Weyl; es un

superpotencial para el tensor conformal.

Bampi-Caviglia [7] en 1983, obtuvieron de manera explícita (con tensores) al superpotencial K_{ijr} para cualquier tipo 0 en la CP. Dieron una prueba rigurosa de la existencia de K_{ijr} para todo $\mathbb{R}_4$. Ashtekar [26] en 1984, obtuvo la versión espinorial de (1).

Con respecto al cálculo de K_{ijr} , observamos que no existe regla o fórmula que permita obtener al espintensor a partir de g_{ab} ; esto a diferencia de C_{abcd} que se puede obtener conociendo el tensor métrico, calculando los símbolos de Christoffel y los tensores de Riemann y Ricci.

$$C_{abcd} = C_{abcd} (g_{pq} ; g_{pq,r} ; g_{pq,rb})$$

La ecuación (1b) es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para K_{ijr} (se genera al dar valores a los índices p, q, j, b) y la dificultad de la resolución de este sistema dependerá de g_{ab} . Para obtener K_{ijr} se debe integrar la ecuación (1b), teniendo como dato la métrica y el tensor de Weyl. La mayoría de los autores opinan que es muy difícil resolver (1b) ya que aparentemente el potencial de Lanczos depende en forma explícita de la geometría global de $\mathbb{R}_4$.

Lanczos [23] obtuvo K_{ijr} para campos gravitacionales débiles, Takeno [27] encontró K_{pqr} para el espacio de Minkowski y para espacios H (soluciones tipo ondas planas para campos gravitacionales que coexisten con campos electromagnéticos), Bampi-Caviglia [7] construyeron explícitamente el potencial de Lanczos para cualquier $\mathbb{R}_4$ tipo 0 en la CP (conformalmente plano), Novello-Velloso [28] obtuvieron el superpotencial de Lanczos para un fluido perfecto.

Los autores arriba mencionados utilizaron la técnica

tensorial y no se puede hablar de un método sistemático para la construcción del superpotencial de Lanczos.

Mostraremos que la técnica de Newman-Penrose, utilizada por el grupo de Relatividad de la UAM-Azcapotzalco dirigido por el Dr. J. L. López Bonilla, sí permite determinada sistematización de la manera de obtener a K_{ijr} .

Se menciona que en todos los K_{ijr} conocidos no aparece la estructura global del R_4 correspondiente.

Lanczos [23] resolvió la ecuación (1b) para campos gravitacionales débiles y obtuvo la ecuación de Dirac para espín $\frac{1}{2}$ aunque en su proceso no se especifica de qué partícula se trata. Por esta razón llamó a K_{ijr} -espíntensor. En este artículo Lanczos señala que el espíntensor será importante en la unificación de la mecánica cuántica con la gravedad.

Otros investigadores (Taub [29],[30]) consideran la aparición de la ecuación de Dirac accidental ya que en el problema variacional de Lanczos no se consideran efectos cuánticos. Después de 1962, Lanczos ya no estudio su potencial y nunca le pudo asignar un significado físico exacto (si lo tiene). Es posible que Lanczos haya tenido razón en su esperanza de unificar gravitación y mecánica cuántica a través de K_{ijc} : Maher-Zund [31], Taub [30] y Zund [32] escribieron la ecuación (1b) en forma espinorial y obtuvieron una ecuación para una partícula de masa cero y espín 2 que algunos autores tratan de identificar con el gravitón.

Ashtekar [26] obtuvo la versión espinorial de (1b) con toda la maquinaria de cuantización canónica de la gravedad y parece que el estudio de la formulación hamiltoniana de la relatividad general traerá a escena el espíntensor de Lanczos.

López (1982), García (1985) y Becerril (1986) muestran que el

espíntensor tiene aplicación en la electrodinámica de partículas clásicas cargadas. El tensor de Maxwell asociado al campo de Liénard-Wiechert tiene dos partes: T_{ij}^B la parte acotada y T_{ij}^R la parte radiativa [33]

$$T_{ij} = T_{ij}^B + T_{ij}^R$$

Se encuentra que K_{ijr}^B - espíntensor electromagnético coincide con el superpotencial de Weert

$$T_{ij}^B = K_{ijr}^B \alpha^r$$

lo que condujo a López [76] asignarle un significado físico al potencial de Weert: K_{ijr}^B es un tensor densidad de momento angular intrínseco del campo electromagnético.

López-Tun (1983) emplearon (1b) para introducir una CP del campo de Liénard-Wiechert.

En 1982, López obtuvo un superpotencial no-local para la parte radiativa sin las propiedades (1a).

Becerril (1986) - propone la posibilidad de que ciertas componentes del espíntensor puedan tener algún significado físico a través de las expresiones que propocionan la energía y momento lineal globales de un espacio asintóticamente plano.

Investigadores de Brasil (M. Novello-1990) que están trabajando en la teoría cuántica de la gravedad, encontraron que las variables de Fierz (que aparecen en la teoría cuántica de campos) coinciden con K_{ijr}^B (por esta razón es importante conocer explícitamente los espíntensores para diversas métricas).

Elisa Brinis [34, 35, 36] propone la existencia de un superpotencial para R_{ijab} pero Bampi-Caviglia [7] y Massa-Pagani [37] mostraron que en general esto no es posible.

(Solo si el tensor de Riemann coincide con el tensor de Weyl, o sea $R_{ab} = 0$, se puede hablar del superpotencial correspondiente).

El grupo de relatividad de la UAM-A dirigido por el Dr. J. L. López Bonilla está investigando la posibilidad de identificar al espintensor de la métrica de Kerr con una densidad de momento angular del hoyo negro.

Los únicos espintensores explícitos conocidos, son los publicados por el grupo arriba mencionado [40, 41, 42] y por G. Torres del Castillo [43].

2. ECUACIONES WEYL-LANCZOS

En esta sección se obtienen las expresiones (1) en el formalismo de NP, ya que su forma tensorial no conduce a un método sistemático para la obtención de K_{ijr} , para una métrica dada de R_4 .

En el capítulo I se mostró que al expresar el tensor $W_{abcd} = (C_{abcd} + i^*C_{abcd})$ en función de los bivectores U_{ab} , V_{ab} , y M_{ab} se obtenían las cantidades complejas $\psi_0, \dots, \psi_4$ que son las proyecciones del tensor W_{abcd} sobre la tétrada nula de NP.

Zund (1969) [37], propone trabajar de la misma forma con K_{ijb} , es decir, sea:

$$Q_{bjr} \equiv K_{bjr} + i^*K_{bjr} \text{ con } {}^*K_{bjr} = \frac{1}{2}\eta_{bjpq} K^{pq}{}_r \quad (2a)$$

el cual, en base a (1a) satisface:

$$Q_{bjr} = -Q_{jbr}, \quad Q_b{}^r{}_r = 0 \quad (2b)$$

Se muestra que (2a), al proyectarse sobre la tétrada nula se escribe como:

$$\begin{aligned} Q_{bjr} = & 2 [\Omega_0 U_{bj} l_r + \Omega_1 (M_{bj} l_r - U_{bj} m_r) + \\ & + \Omega_2 (V_{bj} l_r - M_{bj} m_r) - \Omega_3 V_{bj} m_r - \Omega_4 U_{bj} \bar{m}_c + \\ & + \Omega_5 (U_{bj} n_r - M_{bj} \bar{m}_r) + \Omega_6 (M_{bj} n_r - V_{bj} \bar{m}_r) + \Omega_7 V_{bj} n_r] \end{aligned} \quad (3a)$$

siendo Ω_n , $n = 0, \dots, 7$ las proyecciones del espintensor sobre la tétrada nula. Las ocho cantidades complejas Ω_n , son equivalentes a las dieciséis componentes reales independientes de K_{ijb} :

$$\Omega_0 = K_{(1)(4)(4)} = K_{bjr} Z_{(1)}^b Z_{(4)}^j Z_{(4)}^r$$

$$\Omega_1 = K_{(1)(4)(2)} = K_{bjr} Z_{(1)}^b Z_{(4)}^j Z_{(2)}^r$$

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= K_{(3)(2)(4)} \quad , \quad \Omega_3 = K_{(3)(2)(2)} \\
\Omega_4 &= K_{(1)(4)(1)} \quad , \quad \Omega_5 = K_{(1)(4)(3)} \\
\Omega_6 &= K_{(3)(2)(1)} \quad , \quad \Omega_7 = K_{(3)(2)(3)} \quad (3b)
\end{aligned}$$

Observamos que al construir una clasificación algebraica de K_{bjr} , mediante el formalismo de NP, el algoritmo resultante estaría en términos de las cantidades Ω_n con $n = 0, \dots, 7$.

Se considera la propiedad diferencial

$$N_{ab} \equiv K_{ab;c}^c = 0$$

y se contrae con elementos de la tétrada nula, utilizando:

$$\gamma_{bc}^a = -Z_{jl}^{(a)} Z_{(b)}^j Z_{(c)}^l$$

Se deriva covariantemente (como producto) a

$$K_{ij}^r = K_{(a)(b)}^{(c)} Z_i^{(a)} Z_j^{(b)} Z_{(c)}^r \quad \text{para obtener finalmente:}$$

$$\begin{aligned}
N_{(l)(h)} &= K_{(l)(h);r}^{(r)} + K_{(l)(h)}^{(r)} Z_{(r);c}^c - K_{(p)(h)}^{(r)} \gamma_{tr}^p - \\
&\quad - K_{(l)(p)}^{(r)} \gamma_{hr}^p
\end{aligned}$$

Si $th = 23, 14, 12, 34$, se generan 3 ecuaciones tipo NP que tienen la misma información que $K_{ab;c}^c = 0$ solo que expresada explícitamente.

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 - \bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 - 2\nu\Omega_1 + (3\mu + \bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma})\Omega_2 + \\
(\alpha - 3\beta + \tau - \bar{\pi})\Omega_3 + 2\lambda\Omega_5 + (-\alpha - \beta + \tau - 3\pi)\Omega_6 + \\
(3\varepsilon + \varepsilon - \rho - \bar{\rho})\Omega_7 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega_0 - \delta\Omega_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D\Omega_5 + (\mu + \bar{\mu} - 3\gamma - \bar{\gamma})\Omega_0 + \\
(3\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + \beta)\Omega_1 - 2\alpha\Omega_2 + (3\alpha - \bar{\beta} + \tau - \bar{\pi})\Omega_4 + \\
(\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho} - 3\rho)\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta\Omega_1 + \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 - D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + (\gamma + \bar{\gamma} - 2\mu - \bar{\mu})\Omega_1 + \\
& + (-\bar{\alpha} + \beta - 2\tau + \bar{\pi})\Omega_2 + \sigma\Omega_3 - \lambda\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau} + 2\pi)\Omega_5 + \\
& (-\varepsilon - \bar{\varepsilon} + 2\rho - \bar{\rho})\Omega_6 - \kappa\Omega_7 = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Estas relaciones coinciden con (1,2,3) de la sección 5 de Zund [32] (en la ecuación 1 de este trabajo, hay un error de imprenta: el coeficiente de Ω_4 es π , no $\bar{\pi}$).

Se proyecta (1b) sobre la tetrada de NP obteniéndose la relación que existe entre las cantidades Ω_r y las cantidades ψ_n .

Se originan 5 ecuaciones tipo NP:

$$\begin{aligned}
\psi_0 = 2 \Big[& -\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + (\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi})\Omega_0 - 3\sigma\Omega_1 + \\
& + (-3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_4 + 3\kappa\Omega_5 \Big] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\psi_1 = & -\Delta\Omega_0 - 3\delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_4 + 3D\Omega_5 + (3\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu - \bar{\mu})\Omega_0 + \\
& 3(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi} - \tau)\Omega_1 - 6\sigma\Omega_2 + (-3\alpha + \bar{\beta} - 3\pi - \bar{\tau})\Omega_4 + \\
& 3(-\varepsilon + \bar{\varepsilon} + \rho - \bar{\rho})\Omega_5 + 6\kappa\Omega_6 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 = & -\Delta\Omega_1 - \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 + D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + (2\mu - \bar{\mu} + \gamma + \bar{\gamma})\Omega_1 + \\
& + (\bar{\alpha} - \beta - \bar{\pi} - 2\tau)\Omega_2 - \sigma\Omega_3 - \lambda\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - 2\pi - \bar{\tau})\Omega_5 + \\
& + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} + 2\rho)\Omega_6 + \kappa\Omega_7 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\psi_3 = & -3\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 + 3\bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 + 3(-\bar{\mu} + \mu + \bar{\gamma} - \gamma)\Omega_2 + \\
& + 6\nu\Omega_1 + (\bar{\alpha} - 3\beta - 3\tau - \bar{\pi})\Omega_3 - 6\lambda\Omega_5 + 3(\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau} - \pi)\Omega_6 + \\
& + (3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} + 3\rho)\Omega_7 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_4 = 2 \Big[& -\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + 3\nu\Omega_2 + (-\bar{\mu} - 3\gamma + \bar{\gamma})\Omega_3 - 3\lambda\Omega_6 + \\
& + (3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_7 \Big] ,
\end{aligned} \tag{5}$$

Las ecuaciones (5) coinciden con (4, 5, 6, 7, 8) de la sección 5 de Zund [32] si se corrigen los errores tipográficos de este autor.

Las relaciones (4) y (5) se combinan entre sí obteniéndose un sistema equivalente de 8 ecuaciones (que no se encuentran en la literatura [3]) para las 8 incógnitas Ω_r y que son más simples que (4) y (5), llamadas ecuaciones de Weyl-Lanczos.

ECUACIONES DE WEYL-LANCZOS

$$\psi_0 = 2 \left[-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + (\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi})\Omega_0 - 3\sigma\Omega_1 + (-3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_4 + 3\kappa\Omega_5 \right],$$

$$\psi_1 = 2 \left[-\delta\Omega_1 + D\Omega_5 + (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})\Omega_1 - 2\sigma\Omega_2 + (-\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6 + \mu\Omega_0 - \pi\Omega_4 \right],$$

$$\psi_2 = 2 \left[-\delta\Omega_2 + D\Omega_6 + (\bar{\alpha} - \beta - \bar{\pi})\Omega_2 - \sigma\Omega_3 + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_6 + \kappa\Omega_7 + 2\mu\Omega_1 - 2\pi\Omega_5 \right],$$

$$\psi_3 = 2 \left[-\Delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_6 + (\bar{\gamma} - \bar{\mu} - \gamma)\Omega_2 - \tau\Omega_3 + (\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_6 + 2\nu\Omega_1 + \rho\Omega_7 - 2\lambda\Omega_5 \right],$$

$$\psi_4 = 2 \left[-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + (\bar{\gamma} - \bar{\mu} - 3\gamma)\Omega_3 - 3\nu\Omega_2 + (3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_7 - 3\lambda\Omega_6 \right],$$

$$\psi_5 = 2 \left[-\Delta\Omega_0 + \bar{\delta}\Omega_4 + (\bar{\gamma} - \bar{\mu} + 3\gamma)\Omega_0 - 3\tau\Omega_1 + (-3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_4 + 3\rho\Omega_5 \right],$$

$$\psi_6 = 2 \left[-\Delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_5 + (\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu})\Omega_1 + \nu\Omega_0 + (-\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_5 + 2\rho\Omega_6 - \lambda\Omega_4 - 2\tau\Omega_2 \right],$$

$$\psi_7 = 2 \left[-\delta\Omega_3 + D\Omega_7 + (\bar{\alpha} - 3\beta - \bar{\pi})\Omega_3 - 3\pi\Omega_6 + (3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_7 + 3\mu\Omega_2 \right]. \quad (6)$$

Estas ecuaciones se utilizan para construir un espíntensor correspondiente a una métrica dada. Conociendo la métrica se obtiene una tétrada nula adecuada (conviene incluir vectores de Debever-Penrose ya que de este modo se simplifican los coeficientes de espín) y con respecto a ella se determinan: las cantidades $\psi_0, \dots, \psi_4$, los 12 coeficientes de espín y los operadores $\delta, \bar{\delta}, \Delta, D$.

Con estos datos se resuelve el sistema (6) de ecuaciones diferenciales parciales acopladas en las Ω_r . El potencial de Lanczos no es único y por esto el sistema (6) admite varias soluciones. Cabe mencionar que las 8 componentes del espíntensor (Ω_r) se pueden determinar solamente con las ecuaciones del sistema (5), pero se debe observar que disponemos de 5 ecuaciones y tenemos 8 incógnitas. La solución no es única.

Si se considera la propiedad diferencial $K_{ab;c}^c = 0$ que conduce a las ecuaciones (4), se dispone de 8 ecuaciones que son las ecuaciones (6) de Weyl-Lanczos y la solución tiene cierta unicidad.

Al proyectar (1c) $K_{jr} = K_{jr;a}^a = K_{rj}$ sobre la tétrada nula se obtiene:

$$K_{(t)(h)} = K_{(t)(h);q}^{(q)} - K_{(p)(h)}^{(q)} \gamma_{tq}^p + K_{(t)(h)}^{(q)} Z_{(q);a}^a - K_{(t)(p)}^{(q)} \gamma_{hq}^p \quad (7a)$$

Considerando: $th = 11, 12, 13, 14, 33, 44$ se obtienen 6 ecuaciones diferenciales que no se encuentran en la literatura [3]. (se utilizaron las ecuaciones (4) para simplificar algunas

expresiones):

$$K_{(1)(1)} = \delta(\Omega_5 - \bar{\Omega}_2) - \Delta\Omega_4 + D\bar{\Omega}_3 + \bar{\nu}\Omega_0 + \bar{\lambda}(2\bar{\Omega}_1 - \Omega_1) + \\ (-\bar{\alpha} + \beta - 3\bar{\pi})\bar{\Omega}_2 + (-\mu - \bar{\gamma} + 3\gamma)\Omega_4 + (\bar{\alpha} - \beta - 3\tau)\Omega_5 + \\ + 2\sigma\Omega_6 - \sigma\bar{\Omega}_6 + \kappa\bar{\Omega}_7 ,$$

$$K_{(1)(2)} = \delta\bar{\Omega}_5 - \bar{\delta}\Omega_5 + D(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) + \bar{\mu}\Omega_1 + \mu\bar{\Omega}_1 - \bar{\pi}\Omega_2 - \pi\bar{\Omega}_2 + \\ + \lambda\Omega_4 + \bar{\lambda}\bar{\Omega}_4 + (\alpha - \bar{\beta} - 2\pi)\Omega_5 + (\bar{\alpha} - \beta - 2\bar{\pi})\bar{\Omega}_5 + \\ + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho)\Omega_6 + (\bar{\varepsilon} + \varepsilon - 2\bar{\rho})\bar{\Omega}_6 + \kappa\Omega_7 + \bar{\kappa}\bar{\Omega}_7 ,$$

$$K_{(1)(3)} = \delta\Omega_6 + \bar{\delta}\bar{\Omega}_3 - \Delta(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5) + \bar{\nu}(\Omega_1 + 2\bar{\Omega}_1) - \bar{\lambda}\Omega_2 + \\ + (\gamma - \bar{\gamma} - 3\bar{\mu})\bar{\Omega}_2 + (3\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\bar{\Omega}_3 + \nu\Omega_4 + \\ + (\gamma - \bar{\gamma} - 2\mu)\Omega_5 + (\bar{\alpha} + \beta - 2\tau)\Omega_6 - \tau\bar{\Omega}_6 + \sigma\Omega_7 + \\ + \rho\bar{\Omega}_7 ,$$

$$K_{(1)(4)} = -\delta\bar{\Omega}_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5) + \bar{\mu}\Omega_0 + \bar{\lambda}\bar{\Omega}_0 - \bar{\pi}\Omega_1 + \\ (\bar{\alpha} + \beta - 2\bar{\pi})\bar{\Omega}_1 + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho})\bar{\Omega}_2 + \bar{\kappa}\bar{\Omega}_3 + \\ (3\alpha - \bar{\beta} - \pi)\Omega_4 + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - 3\rho)\Omega_5 - \sigma\bar{\Omega}_5 + \\ + \kappa(2\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) ,$$

$$K_{(3)(3)} = \delta\Omega_7 + \bar{\delta}\bar{\Omega}_7 - \Delta(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) + \bar{\nu}\Omega_2 + \nu\bar{\Omega}_2 - \bar{\lambda}\Omega_3 - \lambda\bar{\Omega}_3 + \\ + 2\nu\Omega_5 + 2\bar{\nu}\bar{\Omega}_5 - (\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu)\Omega_6 - (\gamma + \bar{\gamma} + 3\bar{\mu})\bar{\Omega}_6 + \\ (-\tau + \bar{\alpha} + 3\beta)\Omega_7 + (-\bar{\tau} + \alpha + 3\bar{\beta})\bar{\Omega}_7 ,$$

$$K_{(4)(4)} = -\delta\bar{\Omega}_0 - \bar{\delta}\Omega_0 + D(\Omega_1 + \bar{\Omega}_1) + (3\alpha + \bar{\beta} - \pi)\Omega_0 + \\ (3\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})\bar{\Omega}_0 - (\varepsilon + \bar{\varepsilon} + 3\rho)\Omega_1 - (\bar{\varepsilon} + \varepsilon + 3\bar{\rho})\bar{\Omega}_1 + \\ + 2\kappa\Omega_2 + 2\bar{\kappa}\bar{\Omega}_2 - \sigma\Omega_4 + \bar{\kappa}\Omega_5 + \kappa\bar{\Omega}_5 . \quad (7b)$$

Las relaciones (7b) no se utilizan en la obtención de superpotenciales de Lanczos pero son fundamentales, junto con las ecuaciones (4), en la construcción de generadores para

tensores simétricos de orden dos con traza y divergencias nulas
(ver T_{ij} para el campo de Liénard-Wiechert [38] y [39])

El tensor K_{ij} es simétrico con traza nula y admite un desarrollo sobre la tétrada nula conforme a (I.16)

$$\begin{aligned}
 K_{ab} = & K_{(1)(1)} \bar{m}_a \bar{m}_b + \bar{K}_{(1)(1)} m_a m_b + K_{(4)(4)} l_a l_b + K_{(9)(9)} n_a n_b + \\
 & + K_{(1)(2)} (m_a \bar{m}_b + \bar{m}_a m_b + l_a n_b + n_a l_b) - \bar{K}_{(1)(4)} (m_a l_b + m_b l_a) - \\
 & - \bar{K}_{(1)(9)} (m_a n_b + n_a m_b) - K_{(1)(4)} (\bar{m}_a l_b + l_a \bar{m}_b) - \\
 & - K_{(1)(9)} (\bar{m}_a n_b + \bar{m}_b n_a) \quad (7c)
 \end{aligned}$$

Una vez determinadas las Ω_n para una métrica dada con (7b) y (7c) se puede obtener K_{ab} .

En la próxima sección se ilustra la aplicación de las ecuaciones (6) para algunas métricas de interés en Relatividad General.

3. POTENCIAL DE LANCZOS PARA DIVERSAS METRICAS

En esta sección se va a mostrar el superpotencial de Lanczos para diversas métricas: Gödel, Taub, Petrov, [40] y se va a presentar el potencial de Lanczos para lo tipos O, N y III en el caso general [41].

Para obtener espintensores correspondientes a algunas métricas se sigue determinado procedimiento que, en resumen, consiste en lo siguiente:

- buscar una tétrada nula tipo NP adecuada (de preferencia canónica)

- respecto a ella determinar: $\psi_0, \dots, \psi_4$, los doce coeficientes de espín y los operadores δ , $\bar{\delta}$, Δ , y D (existe un programa computacional que facilita el trabajo).

- resolver las ecuaciones (5) de Weyl-Lanczos considerando las 18 ecuaciones de NP.

a) Espintensor para el modelo cosmológico de Gödel (1949) el cual es tipo D [40]:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - 2e^{x^4} dx^1 dx^2 - \frac{1}{2} e^{2x^4} (dx^2)^2 + (dx^4)^2$$

Se puede trabajar en forma tensorial usando (1b) pero el proceso es no trivial [3]. La técnica de NP permite encontrar al espintensor de manera más directa y sistemática.

Se considera la tétrada nula:

$$(m^r) = (1, -e^{-x^4}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}), (l^r) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1, 0)$$

$$(n^r) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0)$$

Se determinan los coeficientes de espín, usando las relaciones (I. 52, 49). Por ejemplo:

$$\kappa = C_{444} = - \left[Z_{(4)p,q} - Z_{(4)q,p} \right] Z^p_{(4)} Z^q_{(4)} =$$

$$= - \left[n_{p,q} - n_{q,p} \right] m^p n^q$$

Se dan valores a (p) y (q), obteniéndose finalmente $\kappa = 0$

Los demás coeficientes de espín son:

$$\sigma = \tau = \nu = \lambda = \pi = 0$$

$$\alpha = \beta = \frac{i}{2\sqrt{2}}, \quad \mu = \rho = \frac{i}{2}, \quad \epsilon = \gamma = \frac{i}{4}$$

De las ecuaciones de Newman-Penrose, utilizando las definiciones de los operadores δ , $\bar{\delta}$, Δ , y D se obtienen:

$$\psi_r = 0 \text{ para } r \neq 2, \quad \psi_2 = -\frac{1}{6}$$

$$\phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = 0, \quad \phi_{00} = \phi_{22} = 2\phi_{11} = -\frac{1}{4}$$

las ecuaciones (6) de Weyl-Lanczos quedan:

$$-\delta\Omega_0 + D\Omega_5 + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_0 - \frac{1}{2}\Omega_4\right) = 0$$

$$-\delta\Omega_1 + D\Omega_5 + \frac{i}{2}\Omega_0 = 0$$

$$-\delta\Omega_2 + D\Omega_6 + i\left(\Omega_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_2 - \frac{1}{2}\Omega_6\right) = -\frac{1}{12}$$

$$-\Delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_6 + \frac{i}{2}\Omega_7 = 0$$

$$-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + i\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\Omega_7 - \frac{1}{2}\Omega_9\right) = 0$$

$$-\Delta\Omega_0 + \bar{\delta}\Omega_4 + i\left(\Omega_0 - \sqrt{2}\Omega_4 + \frac{3}{2}\Omega_5\right) = 0$$

$$-\Delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_5 + i\left(\frac{1}{2}\Omega_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega_5 + \Omega_6\right) = -\frac{1}{12}$$

$$-\delta\Omega_3 + D\Omega_7 + i\left(\frac{3}{4}\Omega_2 - \sqrt{2}\Omega_9 + \Omega_7\right) = 0$$

Comparando con las 18 ecuaciones de NP, observamos que una solución de este sistema de ecuaciones es [40]:

$$\Omega_r = 0, \quad r \neq 1, 6, \quad \Omega_1 = \Omega_6 = \frac{\mu}{9} = \frac{i}{18}$$

$$\delta\Omega_r = 0, \quad r \neq 1, 3, 6, \quad \Omega_1 = \Omega_6 = \frac{\mu}{9},$$

$$\Omega_9 = C \exp\left(-2x^4 - \frac{i}{\sqrt{2}}x^3\right)$$

donde c es una constante arbitraria.

Con este resultado, el espintensor se escribe:

$$K_{abc} = \frac{i}{18} \left[(M_{ab} - \bar{M}_{ab})(n_c + l_c) + (\bar{V}_{abc} - U_{ab})m_c - (V_{ab} - \bar{U}_{ab})\bar{m}_c \right]$$

Sustituyendo V_{ab} , U_{ab} , y M_{ab} se encuentra la expresión explícita del espintensor.

b) Espintensor para la métrica de Taub [40]

$$ds^2 = f^{-1}((dx^1)^2 - (dx^4)^2 + f^2((dx^2)^2 + (dx^3)^2))$$

$$f = \sqrt{1 + Kx^4} \quad K = \text{constante} \neq 0$$

La tétrada nula correspondiente (una de ellas) es :

$$(m^r) = \frac{1}{\sqrt{2f}} (0, 1, -i, 0) \quad (l^r) = \sqrt{f/2} (-1, 0, 0, 1)$$

$$(n^r) = \sqrt{f/2} (1, 0, 0, 1) \quad \text{con} \quad (\bar{m}^r) = \frac{1}{\sqrt{2f}} (0, 1, +i, 0)$$

Considerando $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = t$ se calculan los coeficientes de espín:

$$\rho = \mu = 4\epsilon = 4\gamma = -\frac{K}{2\sqrt{2}} f^{-3/2} \quad \text{y los restantes son cero.}$$

De las ecuaciones de NP usando las definiciones de los operadores se obtiene para el espacio vacío ($\phi_{ab} = 0$, $R = 0$) las cantidades $\psi_r = 0$, $r \neq 2$, $\psi_2 = \frac{K^2}{8} f^{-3}$ o sea se trata de una métrica tipo D.

Para esta métrica, usando las ecuaciones (5) resulta:

$$-2\delta\Omega_0 + D\Omega_4 - 2\epsilon\Omega_4 - \bar{\rho}\Omega_4 = 0$$

$$-\Delta\Omega_0 - 2\delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_4 + 3D\Omega_5 + 4\gamma\Omega_0 + 2\mu\Omega_0 = 0$$

$$\psi_2 = -\Delta\Omega_1 - \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 + D\Omega_6 + \mu\Omega_1 + 2\gamma\Omega_1 + 2\epsilon\Omega_6 + \rho\Omega_6 - 3\Delta\Omega_2 -$$

$$- \delta\Omega_3 + 3\bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 + 4\epsilon\Omega_7 + 2\rho\Omega_7 = 0$$

$$-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 - \bar{\mu}\Omega_3 - 2\gamma\Omega_3 = 0$$

Se comparan estas ecuaciones con las 18 ecuaciones de NP y una de las soluciones posibles es [40]:

$$\Omega_r = 0, \quad r \neq 1, 6 \quad \Omega_1 = \Omega_6 = \frac{1}{6} \mu$$

c) Métrica de Petrov [40]:

$$ds^2 = f^{4/3}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + f^{-2/3}(dx^3)^2 - (dx^4)^2)$$

$$f = kx^4 + 1 \quad \text{siendo } k \text{ una constante.}$$

La tétrada nula elegida es:

$$(m^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f^{-2/3}, -if^{-2/3}, 0, 0), \quad l^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, f^{-1/3}, 1)$$

$$(n^r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, f^{1/3}, 1)$$

Los coeficientes de espín son:

$$\rho = -\mu = 4\epsilon = -\frac{\sqrt{2}k}{3f} \text{ y los demás son cero.}$$

Se encuentran [40] las componentes:

$$\Omega_a = 0, \quad a \neq 1, 6 \quad \Omega_1 = -\Omega_6 = -\frac{1}{6}\mu$$

Los primeros espintensores explícitos los ha obtenido el grupo de Relatividad de UAM-A dirigido por el Dr. J. L. López Bonilla y los resultados han sido publicados en la Revista Mexicana de Física: [40], [42].

Es importante mencionar que este grupo ha obtenido el potencial de Lanczos, caso general, para los cuadriespacios: III, N y O de la clasificación Petrov y los resultados se han publicado en J. Math. Phys. 30 (6) 1990 [41]. Dada la trascendencia de estos resultados se presentan resumidos en lo que sigue.

Potencial de Lanczos para el tipo O ó N:

para este tipo Petrov, la tétrada nula canónica

$$(\underline{Z}_{(a)}^r) = (\underline{m}^r, \underline{\bar{m}}^r, \underline{l}^r, \underline{n}^r) \text{ se puede escoger de modo que:}$$

$\psi_a = 0, \quad a \neq 4: \psi_4 \neq 0$ para el tipo N y $\psi_4 = 0$ si trata del tipo O.

La solución de las ecuaciones de Weyl-Lanczos (comparando con las 18 ecuaciones de NP) es [41]

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -\frac{\kappa}{2}, & \Omega_1 &= -\frac{\rho}{\sigma}, & \Omega_2 &= \frac{\pi}{\sigma}, & \Omega_3 &= \frac{\lambda}{2} \\ \Omega_4 &= -\frac{\sigma}{2}, & \Omega_5 &= -\frac{\tau}{\sigma}, & \Omega_6 &= \frac{\mu}{\sigma}, & \Omega_7 &= \frac{\nu}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

para cualquier métrica tipo N ó O.

Potencial de Lanczos para el tipo O ó III:

siempre existe una tétrada nula (canónica) tal que:

$\psi_a = 0$, $a \neq 3$: $\psi_2 \neq 0$ si es tipo III y $\psi_3 = 0$ para el tipo O.

De las ecuaciones (6) y comparando con las 18 ecuaciones de NP se obtiene [41]:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= -\kappa & \Omega_1 &= -\rho/3 & \Omega_2 &= \pi/3 & \Omega_3 &= \lambda \\ \Omega_4 &= -\sigma & \Omega_5 &= -\tau/3 & \Omega_6 &= \mu/3 & \Omega_7 &= \nu\end{aligned}\quad (9)$$

Se observa que (8) y (9) difieren por un factor de 2. Para verificar que son soluciones de las ecuaciones de Weyl-Lanczos es útil considerar las 18 ecuaciones de NP.

Para el tipo O se puede escoger $\Omega_r = 0$, $r = 0, \dots, 7$ lo cual corresponde a la solución trivial. Los resultados (9) y (8) representan la solución no trivial para la ecuación (1b) correspondiente a este tipo Petrov.

En este capítulo se ha presentado la manera de encontrar al espíntensor para un tipo Petrov dado (N, III, ó O) utilizando la técnica de NP. Está pendiente la obtención de la solución para los tipos Petrov I, II ó D en el caso general.

Es importante señalar que las cantidades Ω_r , $r = 0, \dots, 7$ obtenidas son combinaciones lineales de los coeficientes de espín.

Para algunas métricas, una o varias de las cantidades Ω_n , presentan singularidades que se deben al sistema de coordenadas utilizado; no son singularidades de la curvatura.

CAPITULO III ESPINTENSOR DE LANCZOS PARA DIVERSAS METRICAS INVARIANTES DE LANCZOS.

INTRODUCCION.

Con el fin de comprender, el concepto de espíntensor de Lanczos, además de dominar la técnica adecuada para obtenerlo explícitamente para diversas métricas, se le debe asignar significado físico. Pero para identificar, por ejemplo, las variables de Fierz [28] con espíntensores se sugiere primero tener una lista de espíntensores correspondientes a distintas métricas.

Por esta razón, la primera fase del trabajo de investigación del grupo de Relatividad de la UAM-A dirigido por el Dr. J. L. López Bonilla, relacionado con el tema " Espíntensor de Lanczos " se ha enfocado en la obtención de espíntensores explícitos para distintas métricas ([40], [41], [42] etc).

En la presente tesis se sigue la misma dirección de investigación y en este capítulo se muestra la obtención del espíntensor para la métrica de Kerr (hoyo negro en rotación), que tiene como caso particular la métrica de Schwarzschild.

También se analizan caso por caso las 11 clases de métricas de Kinnersley para el R_4 vacío tipo D y se explica el cálculo de los espíntensores correspondientes.

Otra clase importante de métricas la constituyen las métricas de Robinson-Trautman.

En la última sección de este capítulo se hace un estudio sobre unos invariantes de Lanczos.

Todos los resultados presentados en este capítulo, son

resultados originales.

Cabe señalar que un tópico de investigación muy atractivo sería tratar de asignar significado físico (si es que existe) a los espintensores explícitos obtenidos en este capítulo y en el capítulo anterior.

1. ESPINTENSOR PARA LA METRICA DE KERR

En [41] y [42] se obtuvo el potencial de Lanczos para R_4 arbitrario con los tipos Petrov N, III y O; sigue abierto el problema de construir K_{ijr} para los tipos I, II y D en el caso general. En [40] se han encontrado espintensores para métricas particulares de estos tipos. Como el caso D es más sencillo que los casos I y II se trata de resolver primero el caso general para este tipo Petrov y después trabajar los restantes.

Se considera conveniente deducir K_{abc} para R_4 tipo D vacío ($R_{ab} = 0$) y luego generalizar a R_4 tipo D sin exigir $R_{ij} = 0$.

El resultado esencial de [41] y [42] fue que: " Las proyecciones de K_{abc} sobre la tétrada nula canónica son combinaciones lineales de los correspondientes coeficientes de espín ". Se espera que este resultado siga siendo válido para los tipos Petrov I, II y D.

En el capítulo I, tabla IV se ha mostrado ([41]) que un espacio-tiempo tipo D tiene dos direcciones principales repetidas de DP las cuales permiten construir una tétrada canónica

$(\underline{m}^c, \underline{\bar{m}}^c, \underline{l}^c, \underline{n}^c)$ con la propiedad:

$$\psi_c = 0 \quad , \quad c \neq 2 \quad , \quad \psi_2 \neq 0$$

Hemos visto que los elementos de esta tétrada pueden rotarse (sufren una transformación de Lorentz - rotación de clase III) conforme a (I.11c) y la nueva tétrada es:

$$(e^{-iB} \underline{m}^c, e^{iB} \underline{\bar{m}}^c, e^{-\tilde{A}} \underline{l}^c, e^{\tilde{A}} \underline{n}^c) \quad (1)$$

donde $\tilde{A}$ y B son funciones reales arbitrarias.

Si las cantidades $\tilde{A}$ y B se escogen adecuadamente es más fácil

construir al espintensor de nuestro interés. Vemos que el problema diferencial de resolver las ecuaciones de Weyl-Lanczos (II.5) se simplifica, dependiendo del problema algebraico de una transformación de Lorentz.

La métrica de Kerr (tipo D) [45] es de gran importancia en Relatividad General [46], para la comprensión del colapso gravitacional de una estrella rotando. La solución de Kerr encontrada en 1963 (50 años después del descubrimiento de la métrica de Schwarzschild) no es el campo gravitacional de una estrella cualquiera axial simétrica rotando si no que más bién representada solamente el campo exterior de una fuente muy especial: hoyo negro rotando [47].

Algunas de las propiedades de un hoyo negro rotando son:

- los hoyos negros son soluciones de ecuaciones de campo que describen el campo gravitacional de masas colapsadas, y está caracterizado por: masa M , momento angular M_a y carga eléctrica Q .

- contiene una superficie de horizonte cerrada (adentro de esta superficie el campo gravitacional es tan fuerte que las partículas, los rayos de luz y los campos dependientes de tiempo, producidos adentro ya no pueden dejar esta región).

- dentro de este evento horizonte existe una singularidad genuina de campo gravitacional que se forma durante el colapso (no la podemos ver).

- una vez formado el hoyo negro (probablemente estable) no puede ser destruido.

- la introducción de efectos cuánticos pueden cambiar este panorama.

Todavía no se puede contestar con seguridad a la pregunta: ¿pueden y deben existir los hoyos negros ?

La geometría de un hoyo negro sin carga eléctrica pero con rotación está dada por:

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{c} dr^2 + \Sigma d\theta^2 - \frac{4amr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \sin^2 \theta \left[r^2 + a^2 + \frac{2a^2 mr \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] d\phi^2 - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 \quad (2)$$

en coordenadas (r, θ, ϕ, t) de Boyer-Lindquist con

$$\begin{aligned} A &= r + ia \cos \theta, & \Sigma &= A \bar{A} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ c &= r^2 - 2mr + a^2, & i &= \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

m - masa del agujero negro

a - momento angular por unidad de masa

Con la tétrada canónica [5, 46] correspondiente,

$$\begin{aligned} (m^j) &= \frac{1}{\sqrt{2} A} (0, 1, \frac{i}{\sin \theta}, ia \sin \theta) \\ (l^j) &= \frac{1}{2 \Sigma} (-c, 0, a, r^2 + a^2) \\ (n^j) &= \left(1, 0, \frac{a}{c}, \frac{r^2 + a^2}{c} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

no fue posible construir el espintensor, pero al elegir para $\tilde{A}$ y B :

$$e^{\tilde{A}} = \left[\frac{C}{2\Sigma} \right]^{1/2} \quad e^{iB} = \frac{i \Sigma^{1/2}}{A} \quad (5)$$

sí se logró este objetivo.

Para calcular las cantidades de NP se ha utilizado la tétrada (1) con $\tilde{A}$ y B dados por (5) y siendo los elementos de la tétrada dados por (4).

Se utilizó la computadora con lenguaje REDUCE y se obtuvieron los coeficientes de espín:

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0, \quad \mu = \rho = - \frac{1}{\bar{A}} \left(\frac{C}{2\Sigma} \right)^{1/2}$$

$$\alpha = \beta = - \frac{(a + ir \cos \theta)}{2 \bar{A} \sin \theta \sqrt{2\Sigma}}, \quad \tau = \pi = - \frac{\alpha \sin \theta}{\bar{A} \sqrt{2\Sigma}} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \gamma = \frac{1}{2 \bar{A} \sqrt{2c\Sigma}} \left[mr - a^2 + ia(m - r) \cos \theta \right]$$

$$\phi_{ab} = 0, \quad R = 0, \quad \psi_c = 0, \quad c \neq 2, \quad \psi_2 = - \frac{m}{\bar{A}^3}$$

Se resuelven las ecuaciones de Weyl-Lanczos (II.5) para las Ω_c (proyecciones del espintensor sobre la tétrada (1) de NP) y la solución es:

$$\Omega_0 = \Omega_7 = \frac{\pi}{4} \quad \Omega_3 = \Omega_4 = \frac{\rho}{4}$$

$$\Omega_1 = \Omega_6 = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\rho}{12} \quad \Omega_2 = \Omega_5 = \frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{12}$$

Los coeficientes de espín $\varepsilon, \rho, \beta, \pi, 3$ están dados por (6).

Se observa que las cantidades Ω son combinaciones lineales de los coeficientes de espín (resultado mencionado anteriormente).

Todos los cálculos efectuados para la métrica de Kerr, son válidos para la métrica de Schwarzschild si $a = 0$ (ausencia de rotación del hoyo negro)

El resultado original (6) es muy importante porque permite la posibilidad de asignar significado físico al espintensor: se debe transformar el resultado (6) a coordenadas (x, y, z, t) asintóticamente Minkowskianas, ya que está en coordenadas de Boyer-Lindquist, e investigar si el K_{abc} se comporta como una densidad de momento angular del espacio de Kerr [47].

2. ESPINTENSOR PARA ESPACIO-TIEMPOS VACIOS TIPO D

En 1969, W. Kinnersley en su artículo " Type D Vacuum Metrics " [49], resuelve las ecuaciones de campo para R_4 vacío tipo D usando el formalismo de NP y encuentra que para este espacio-tiempo sólo existen 11 clases de métricas. Además dió la forma explícita de cada una de ellas.

Este autor emplea la signatura (-2) y ordena las coordenadas en la forma (u, r, x, y) ; su vector n^c corresponde a nuestro vector l^c y viceversa.

A continuación se utiliza la técnica de NP para determinar el superpotencial de Lanczos K_{ijr} , para cada una de las once clases de métricas encontradas por Kinnersley, o sea para todo R_4 vacío tipo D. Se utiliza la signatura $(+2)$ y las coordenadas son

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = r, \quad x^4 = u \quad \text{o sea: } (x, y, r, u).$$

En los once casos sólo se indica la tétrada $(m^r, \bar{m}^r, l^r, n^r)$. Utilizando la relación (I.15), se obtiene la métrica correspondiente:

$$g^{ab} = m^a \bar{m}^b + \bar{m}^a m^b - l^a n^b - l^b n^a$$

Las cantidades de NP se calculan con los algoritmos y las ecuaciones mostradas en el capítulo I. Los vectores l^c y n^c siempre estarán alineados con las direcciones de Debever-Penrose [4], lo que implica $\psi_a = 0$, $a \neq 2$ (para un espacio-tiempo tipo D). Por el teorema de Goldberg-Sachs [22]:

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0 \tag{8}$$

para todas las métricas de Kinnersley.

METRICAS DE CLASE IV

a) Caso IV.A

Los vectores de la tétrada son:

$$(n^b) = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad (m^b) = (\xi, \frac{i}{\xi}, \frac{2rx\xi}{a^2 + x^2}, 0)$$

$$(l^b) = (0, \frac{4ar}{a^2 + x^2}, -\frac{r^2 l}{2a(a^2 + x^2)}, 1)$$

$$\xi^2 = \frac{2amx + l(a^2 - x^2)}{2a(a^2 + x^2)} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad (9)$$

a, l y m son constantes reales.

Los coeficientes de espín correspondientes son:

$$\mu = \rho = \sigma = 0$$

$$\gamma = \frac{rl}{2a(a^2 + x^2)} \quad , \quad \tau = -\pi = \bar{\alpha} + \beta = -\frac{\xi(x - ia)}{a^2 + x^2}$$

$$\alpha = \frac{[lx^3 - amx^2 + a^2lx - a^3m + ia(lx^2 - 2amx - la^2)]}{4a\xi(a^2 + x^2)^2}$$

$$\beta = \frac{[lx^2 - 3amx^2 - 3a^2lx + a^3m - ia(lx^2 - 2amx - la^2)]}{4a\xi(a^2 + x^2)^2}$$

$$y \quad \psi_2 = 2\pi(\alpha - \beta) = \frac{(m + il)}{(x + ia)^3} \quad (10)$$

Estas cantidades de NP y las ecuaciones de WL (II.5) permiten obtener las componentes del espintensor de Lanczos:

$$\Omega_0 = 0 \quad , \quad c \neq 2, 5, 6, 7 \quad , \quad \Omega_2 = \frac{\alpha}{3}$$

$$\Omega_5 = \frac{\beta}{3} - \frac{\pi}{6} \quad , \quad \Omega_6 = \frac{\gamma}{3} \quad , \quad \Omega_7 = \frac{\pi\gamma}{2} r \quad (11)$$

La solución (11) es una de las múltiples soluciones de las ecuaciones de WL, ya que K_{abc} carece de unicidad.

b) Caso IV.B

Los elementos de la tétrada son:

$$\begin{aligned} (n^b) &= (0, 0, 1, 0) \quad , \quad (l^b) = (0, 0, \frac{cr^2}{x^2}, 1) \\ (m^b) &= (\xi, \frac{i}{\xi}, \frac{2r\xi}{x}, 0) \quad , \quad \xi^2 = c + \frac{m}{x} \end{aligned} \quad (12)$$

con c y m constantes reales.

Las cantidades de NP son:

$$\begin{aligned} \mu = \rho = \varepsilon = 0 \quad , \quad \tau = -\pi = \alpha + \beta = -\frac{\xi}{x} \\ \gamma = -\frac{cr}{x^2} \quad , \quad \alpha = -\frac{(m + 2cx)}{4x^2\xi} \\ \beta = -\frac{(3m + 2cx)}{4x^2\xi} \quad , \quad \psi_2 = \frac{m}{x^3} \end{aligned} \quad (13)$$

De las ecuaciones WL se obtiene:

$$\Omega_0 = 0 \quad , \quad c \neq 2, 5 \quad , \quad \Omega_2 = \frac{2}{3}\alpha \quad , \quad \Omega_5 = \frac{2}{3}\beta \quad (14)$$

Las métricas de clase IV son la únicas con

$$\mu = \rho = 0$$

MÉTRICAS DE CLASE II

En esta clase, existen seis métricas y todas tienen un espíntensor con la misma estructura. Esto se debe a que siempre es posible elegir una tétrada (manteniendo (8)) tal que:

$$\begin{aligned} \tau = \pi \quad , \quad \alpha = \beta \quad , \quad \rho = \bar{\rho} = 2(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \quad , \quad \pi + \bar{\pi} = 2(\beta + \bar{\beta}) \\ \mu = Q\rho \quad , \quad \gamma = Q\varepsilon \quad , \quad Q = \pm 1 \\ \psi_2 = 4Q(\varepsilon\rho - Q\pi\beta) \end{aligned} \quad (15)$$

Este resultado no se ha encontrado explícitamente en la literatura.

Estas cantidades de NP y las ecuaciones WL implican:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \Omega_7 = Q \frac{\pi}{4} & , & \quad \Omega_3 = \Omega_4 = Q \frac{\rho}{4} \\ \Omega_1 &= \Omega_6 = \frac{\epsilon}{3} + \frac{\rho}{12} & , & \quad \Omega_2 = \Omega_5 = \frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{12}\end{aligned}\quad (16)$$

Si se trata de una tétrada que cumple con (15), el potencial de Lanczos correspondiente estará dado por (16).

Vamos a presentar los resultados obtenidos para las seis métricas empezando con:

a) II.A

Esta métrica es la solución de Kerr-Nut [51] y la tétrada correspondiente es:

$$\begin{aligned}(n^b) &= \left[-\frac{QR}{2\Sigma} \right]^{1/2} (0, 0, 1, 0) \\ (l^b) &= \left[-2QR\Sigma \right]^{-1/2} (0, 2a, R, 2(r^2 + l^2 + a^2)) \\ (m^b) &= \left[2\Sigma \right]^{-1/2} (-i, \csc x, 0, a \sin x + 2l \cot x)\end{aligned}$$

donde $Q = \pm 1$ tal que $-QR > 0$

$$A = r - i(1 - a \cos x) \quad , \quad \Sigma = A\bar{A}$$

$$R = -r^2 + 2mr + l^2 - a^2 \quad (17)$$

con a , l y m constantes reales.

Si $l = 0$ se obtiene la métrica de Kerr [45] presentada en la sección anterior.

Si $a = l = 0$ se obtiene la solución de Schwarzschild.

Con la tétrada (17) se satisface (15).

$$\begin{aligned}\rho = Q\mu &= -\frac{1}{A} \left[-\frac{QR}{2\Sigma} \right]^{1/2} , \\ \tau = \pi &= -\frac{a}{A} \sin x (2\Sigma)^{-1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha = \beta &= \frac{\csc x}{2\bar{A}} (-a + 1 \cos x - ir \cos x)(2\Sigma)^{-1/2} \\
\varepsilon = Q\gamma &= -\frac{Q}{2\bar{A}} \left[a^2 - mr - l^2 + i(m-r)(1-a \cos x) \right] (-2Q\Sigma R)^{-1/2} \\
\psi_2 &= 4Q(\varepsilon\rho - Q\pi\beta) = -\frac{(m+il)}{\bar{A}^3} \quad (18)
\end{aligned}$$

Se concluye que el espintensor está dado por (16) con:

$$Q = -1 \text{ cuando } R > 0$$

$$Q = 1 \text{ en las regiones del espacio-tiempo donde } R < 0.$$

Si en (16) y en (18) se hace $a = 0$ se obtiene como caso particular el espintensor construido en la sección anterior para la métrica de Kerr [44].

b) II.B

En este caso elegimos la tétrada:

$$\begin{aligned}
(n^b) &= \left[-\frac{QN}{2\Sigma} \right]^{1/2} (0, 0, 1, 0) \\
(l^b) &= \left[-2QN\Sigma \right]^{-1/2} (0, 2a, N, 2(r^2 + l^2 + a^2)) \\
(m^b) &= \left[2\Sigma \right]^{-1/2} (-i, \csc x, 0, -a \sinh x + 2l \coth x)
\end{aligned}$$

con $Q = \pm 1$ tal que $QN < 0$ y

$$A = r - i(a \cosh x - l), \Sigma = A\bar{A}, N = r^2 + 2mr - l^2 + a^2 \quad (19)$$

Se verifican (15) porque:

$$\begin{aligned}
\rho = Q\mu &= -\frac{1}{\bar{A}} \left[-\frac{QN}{2\Sigma} \right]^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{a \sinh x}{\bar{A}} (2\Sigma)^{-1/2} \\
\alpha = \beta &= \frac{1}{2\bar{A}} \csc x (a - l \cosh x - ir \cosh x)(2\Sigma)^{-1/2} \\
\varepsilon = Q\gamma &= -\frac{Q}{2\bar{A}} \left[-mr + l^2 - a^2 + i(m+r)(a \cosh x - l) \right] (-2QN\Sigma)^{-1/2} \\
\psi_2 &= -\frac{(m+il)}{\bar{A}^3}, \quad (20)
\end{aligned}$$

y así las Ω_c se determinan de acuerdo a (16).

c) II.C

Para determinar el potencial de Lanczos la tétrada más conveniente es:

$$\begin{aligned} (n^b) &= \left[-\frac{QM}{2\Sigma} \right]^{1/2} (0, 0, 1, 0) \\ (l^b) &= \left[-2QM\Sigma \right]^{-1/2} (0, 2a, M, 2(r^2 + l^2 - a^2)) \\ (m^b) &= \left[2\Sigma \right]^{-1/2} (-i, \operatorname{sech} x, 0, 2l \tanh x - a \cosh x) \end{aligned}$$

donde $Q = \pm 1$ con $-QM > 0$ y

$$A = r - i(a \sinh x - l), \quad \Sigma = A\bar{A}, \quad M = r^2 + 2mr - a^2 - l^2 \quad (21)$$

Las cantidades de NP adquieren los valores:

$$\begin{aligned} \rho = Q\mu &= -\frac{1}{\bar{A}} \left[-\frac{QM}{2\Sigma} \right]^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{a \cosh x}{\bar{A}} (2\Sigma)^{-1/2} \\ \alpha = \beta &= \frac{1}{2\bar{A}} \operatorname{sech} x (a + l \sinh x + ir \sinh x) (2\Sigma)^{-1/2} \\ \varepsilon = Q\gamma &= -\frac{Q}{2\bar{A}} \left[-mr + a^2 + l^2 + i(m+r)(a \sinh x - l) \right] (-2QM\Sigma)^{-1/2} \\ \psi_2 &= -\frac{(m + il)}{\bar{A}^3}, \end{aligned} \quad (22)$$

cumpléndose (15) y en consecuencia (16) aporta el correspondiente espintensor.

d) II.D

$$\begin{aligned} (n^b) &= \left[-\frac{QF}{2\Sigma} \right]^{1/2} (0, 0, 1, 0) \\ (l^b) &= \left[-2QF\Sigma \right]^{-1/2} (0, 2a, F, 2(r^2 + l^2)), \quad Q = \pm 1 \\ (m^b) &= \left[2\Sigma \right]^{-1/2} (-i, e^{-x}, 0, -ae^x + 2l), \quad QF < 0 \\ A &= r - i(a e^x - l), \quad \Sigma = A\bar{A}, \quad F = r^2 + 2mr - l^2 \end{aligned} \quad (23)$$

y las condiciones (15) se verifican con las expresiones :

$$\begin{aligned}
\rho = Q\mu &= -\frac{1}{\bar{A}} \left[-\frac{QF}{2\Sigma} \right]^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{a e^x}{\bar{A}} (2\Sigma)^{-1/2} \\
\alpha = \beta &= -\frac{(1 + ir)}{2\bar{A}} (2\Sigma)^{-1/2}, \quad \psi_2 = -\frac{(m + il)}{\bar{A}^3} \\
\varepsilon = Q\gamma &= -\frac{Q}{2\bar{A}} \left[-mr + l^2 + i(m+r)(a e^x - 1) \right] (-2QF\Sigma)^{-1/2} \quad (24)
\end{aligned}$$

de manera que las Ω_j se obtienen con (16).

e) II.E

Aquí seleccionamos la tétrada nula:

$$\begin{aligned}
(n^c) &= \left[\frac{mr + b}{\Sigma} \right]^{1/2} (0, 0, 1, 0) \\
(l^c) &= \left[\Sigma(mr + b) \right]^{-1/2} (0, 1, (mr + b), r^2 + b^2) \\
(m^c) &= \left[2\Sigma \right]^{-1/2} (-i, \frac{1}{x}, 0, -bx - \frac{x^3}{4}) \\
A &= r - i(b + \frac{x^2}{2}), \quad \Sigma = A\bar{A}, \quad m, b = \text{ctes.} \quad (25)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho = -\mu &= -\frac{1}{\bar{A}} \left[\frac{mr + b}{\Sigma} \right]^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{x}{\bar{A}} (2\Sigma)^{-1/2} \\
\alpha = \beta &= \frac{1}{4x\bar{A}} (2b - x^2 - 2ir) (2\Sigma)^{-1/2}, \\
\varepsilon = -\gamma &= -\frac{(mA + 2b)}{4\bar{A}} \left[\Sigma(mr + b) \right]^{-1/2}, \quad \psi_2 = -\frac{(m + il)}{\bar{A}^3} \quad (26)
\end{aligned}$$

y el espintensor está dado por (16) con $Q = -1$

f) II.F

$$\begin{aligned}
(n^b) &= \left[-\frac{QT}{2\Sigma} \right]^{1/2} (0, 0, 1, 0) \\
(l^b) &= \left[-2QT\Sigma \right]^{-1/2} (0, 2, T, 2r^2), \quad Q = \pm 1 \\
(m^b) &= \left[2\Sigma \right]^{-1/2} (-1, 1, 0, -x^2), \quad -QT > 0 \\
A &= r - ix, \quad \Sigma = A\bar{A}, \quad T = 2mr - 1 \quad (27)
\end{aligned}$$

de donde

$$\rho = Q\mu = -\frac{1}{\bar{A}} \left[-\frac{Q\Gamma}{2\Sigma} \right]^{1/2}, \quad \tau = \pi = -\frac{1}{\bar{A}} (2\Sigma)^{-1/2}$$

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2 = -\frac{m}{\bar{A}^3}$$

$$\varepsilon = Q\gamma = -\frac{Q}{2\bar{A}} (1 - mr + imx) (-2Q\Gamma\Sigma)^{-1/2} \quad (28)$$

y con (16) queda determinado el espintensor de Lanczos.

METRICAS DE CLASE III.

a) III.A

Este espacio-tiempo también se conoce como " métrica C ", y su espintensor ya fue calculado en [40]

b) III.B

Para este R_4 trabajamos con la tétrada nula:

$$(n^j) = (QE)^{1/2} (0, 0, 1, 0), \quad Q = \pm 1$$

$$(l^j) = (QE)^{-1/2} (0, \bar{x}^4, U, \bar{x}^1), \quad QE > 0$$

$$(m^j) = (2\Sigma)^{-1/2} \left(-4a\pi^0, \frac{dn \ x}{\pi^0}, \frac{sn \ x}{2 \pi^0}, -i\sqrt{2} \pi^0 (r^2 + 3\rho^{02}) \right) \quad (29)$$

donde

$$A = r - i\rho^0, \quad \rho^0 = a \operatorname{cn} x, \quad \Sigma = A\bar{A}$$

$$\pi^0 = \left[c \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x + \frac{b}{4a^2} \operatorname{cn}^2 x - \frac{\sqrt{2}}{8a^3} \operatorname{cn} x (m \operatorname{sn} x + 1 \sqrt{2} \operatorname{dn} x) \right]^{1/2}$$

$$E = \frac{1}{\Sigma} \left[\tau \bar{\tau}^0 - \frac{1}{2} (A\psi^0 + \bar{A}\bar{\psi}^0) + 2\rho^0 \pi^{02} (\rho^0 r^2 - 2rt^0 - 3\rho^{03}) \right] - \\ - r^2 \pi^{02} - \mu^0 r - U^0 + 2\rho^{02} \pi^{02},$$

$$t^0 = 2a^2 \sqrt{2} \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x, \quad \psi^0 = (m+1) \left(\operatorname{dn} x - \frac{1\sqrt{2}}{2} \operatorname{sn} x \right)^3$$

$$U^0 = -3\rho^{02} \pi^{02} + \frac{3\sqrt{2}}{4a} \operatorname{cn} x (m \operatorname{sn} x - 1\sqrt{2} \operatorname{dn} x),$$

$$\mu^0 = -\frac{1}{t^0} (1^0 + 2\rho^0 U^0 - 2\rho^{03} \pi^{02})$$

$$1^0 = 1 \operatorname{dn} x (1 - 2 \operatorname{sn}^2 x) - \frac{m}{\sqrt{2}} \operatorname{sn} x (3 - 2 \operatorname{sn}^2 x), \quad (30)$$

las cantidades a , b , c , l y m son constantes arbitrarias y $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{dn} x$ representan funciones elípticas de módulo $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En [49] pág. 1201 pueden consultarse las expresiones para $\vec{x}^1$, $\vec{x}^2$ y U las cuales participan en (1^j).

Con (29) es posible verificar la validez de (15), por ejemplo,

$$\begin{aligned} \tau = \pi &= \frac{i\pi^0}{A\sqrt{2}} (r^2 + 2i\rho^0 r + \rho^{02} - it^0) \\ \rho = Q\mu &= -\frac{1}{A} (QE)^{1/2}, \quad \psi_2 = -\frac{\psi^0}{A^0}, \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (31)$$

así las Ω_c están dadas por (16).

Nótese que para las métricas de clases II y III de Kinnersley, el espíntensor tuvo la estructura (16).

MÉTRICAS DE CLASE I

Estos espacios vacíos corresponden a las soluciones de NUT [52,53] y su tétrada nula está dada por:

$$\begin{aligned} (n^b) &= (0, 0, 1, 0), \quad (m^b) = \frac{1}{A} (-P, -iP, 0, \frac{ic}{\sqrt{2}} \eta) \\ (l^b) &= (0, 0, -M_0, -\frac{1}{2} (\psi^0 \rho + \bar{\psi}^0 \bar{\rho}), 1) \end{aligned} \quad (32)$$

donde

$$A = r - ic, \quad c = \text{cte.}, \quad \rho = -\frac{1}{A}$$

$$\eta = x + iy \quad , \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{M^0}{2} \eta \bar{\eta} \right)$$

$$\psi^0 = \tilde{\psi}^0 + 2i M_0 c \quad , \quad M_0 = -\frac{1}{2} \quad , \quad 0, \frac{1}{2} \quad (33)$$

siendo $\tilde{\psi}^0$ una constante real. Las cantidades de NP nos quedan:

$$\kappa = \sigma = \nu = \lambda = \epsilon = \tau = \pi = 0$$

$$\beta = -\bar{\alpha} = -\frac{M_0 \bar{\rho} \bar{\eta}}{2\sqrt{2}} \quad , \quad \gamma = \frac{\rho^2}{2} \psi^0$$

$$\mu = M_0 \bar{\rho} + \frac{1}{2} \psi^0 (\rho^2 + \rho \bar{\rho}) \quad , \quad \psi_2 = \rho^3 \psi^0 = 2\gamma \rho \quad , \quad (34)$$

y las soluciones de Weyl-Lanczos aceptan la solución:

$$\Omega_0 = 0 \quad , \quad b \neq 1, 6 \quad \Omega_1 = \frac{\rho}{\sigma} = \quad , \quad \Omega_6 = \frac{\gamma}{\sigma} - \frac{M_0}{\sigma} \bar{\rho} \quad (35)$$

para los tres posibles valores de M_0 .

Los resultados obtenidos para las 11 clases de métricas correspondientes al espacio-tiempo vacío tipo D, confirman el resultado de la sección III.1 de que los coeficientes de espín de NP, generan la proyecciones de K_{abc} sobre la tétrada nula.

Queda pendiente el problema de poder asignar sentido físico a los resultados obtenidos.

3. ESPINTENSOR PARA LAS METRICAS DE ROBINSON-TRAUTMAN

Las métricas de Robinson-Trautman tienen las siguientes propiedades [5]:

a) admiten una congruencia nula $\Gamma(n^r)$ geodésica, sin deformación, con expansión y sin rotación.

b) $R_{ab} n^a n^b = R_{ab} m^a m^b = 0$ con R_{ij} - tensor de Ricci

m^c - vector nulo complejo tal que $n^a m_a = 0$.

En el formalismo Newman-Penrose (capítulo I) estas propiedades implican:

$$\kappa = \sigma = 0, \quad \rho = \bar{\rho} \neq 0, \quad \phi_{00} = \phi_{01} = \phi_{02} = 0 \quad (36)$$

cuando n^r y m^r son elementos de la tétrada nula. Con (36) se puede mostrar [5] que existen coordenadas (x^1, x^2, r, u) en las cuales la métrica correspondiente adquiere la estructura (signatura +2):

$$ds^2 = \frac{2r^2}{p^2} \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 \right] - 2du dr - 2H du^2 \quad (37)$$

donde $P(x^1, x^2, u)$ y $H(x^1, x^2, r, u)$ son funciones reales.

Utilizando la tétrada:

$$\begin{aligned} (m^a) &= \frac{P}{2r} (1, i, 0, 0) & (\bar{m}^a) &= \frac{P}{2r} (1, -i, 0, 0) \\ (l^a) &= (0, 0, -H, 1) & (n^a) &= (0, 0, 1, 0) \end{aligned} \quad (38)$$

se determinan los coeficientes de espín restantes (ver (36)):

$$\begin{aligned} \epsilon = \pi = \tau = \lambda = 0, \quad \rho &= -\frac{1}{r}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial r} \\ \alpha = -\bar{\beta} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial P}{\partial \eta}, \quad \nu = \frac{P}{r} \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \mu = -\frac{P}{r} - \frac{H}{r} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{con } \dot{P} \equiv \frac{\partial P}{\partial u}, \quad \eta = x^1 + ix^2, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i \frac{\partial}{\partial x^2} \right)$$

De las ecuaciones de NP (I.59) se obtiene:

$$\psi_0 = \psi_1 = 0 \quad (40)$$

lo cual significa que la métrica considerada es algebraicamente especial.

Las métricas de Robinson-Trautman son importantes en relatividad general y como ejemplo de espacio-tiempos de esta clase se mencionan: la solución de Reissner-Nordström (y por lo tanto la de Schwarzschild [5, 43]) y los cuadriespacios de [40] Taub, C, Siklos, Petrov, Novotny-Horsky, Kasner tipo D. La métrica del espacio de Minskowski también adopta la forma (37) en coordenadas de Newman-Unti [40, 54] lo cual es de gran utilidad en el estudio del campo electromagnético de Liénard-Wiechert.

Para construir el potencial de Lanczos correspondiente a esta clase de métricas, se sustituyen los resultados anteriores: (36), (37), (38), (39) y (40) en las ecuaciones de Weyl-Lanczos (II.5). Se utiliza además la sugerencia de Zund [38]:

$$\Omega_n = 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \quad (41)$$

Se obtiene un sistema no trivial de ecuaciones diferenciales cuya solución (que no se ha localizado en la literatura) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Omega_4 &= \rho F, & F &= p^2 \int p^{-3} \frac{\partial p}{\partial \bar{\eta}} d\eta \\ \Omega_5 &= \frac{2}{3} \beta + G, & G &= -\frac{p}{3} \int p^{-3} \dot{p} d\eta \\ \Omega_6 &= \frac{1}{6} (\mu + 2\gamma) - \frac{\dot{P}}{6P} \\ \Omega_7 &= \frac{\nu}{2} \end{aligned} \quad (42)$$

(En F y G las integrales se efectúan sobre η manteniendo

constantes a $\bar{\eta}$ y u).

La solución (42) es válida para cualquier métrica de Robinson Trautman.

Se observa que las proyecciones del espintensor sobre la tétrada (las cantidades Ω_n dadas por (42)) contienen los coeficientes de espín lo que reafirma el resultado expresado en [44].

Ejemplo: Métrica de Reissner-Nordström

Para esta métrica, de [5]:

$$P = 1 + \frac{1}{2} \eta \bar{\eta}, \quad H = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right)$$

donde (m) es la masa del hoyo negro y (e) es su carga eléctrica.

Los coeficientes de espín son:

$$\kappa = \sigma = \epsilon = \pi = \tau = \nu = 0, \quad \rho = -\frac{1}{r}$$

$$\gamma = \frac{1}{2r^3} (mr - e^2), \quad \alpha = -\bar{\beta} = \frac{1}{4r} \bar{\eta}$$

$$\mu = -\frac{1}{2r^3} (r^2 - 2mr + e^2) \quad y$$

$$\dot{P} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \bar{\eta}} = \frac{1}{2} \eta \quad \text{por lo tanto. } G = 0, \quad F = -\frac{1}{\bar{\eta}^2} (1 + \eta \bar{\eta}).$$

El espintensor correspondiente a esta métrica está dado por (42):

$$\Omega_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, 7$$

$$\Omega_4 = \frac{1}{\bar{\eta}^2 r} (1 + \eta \bar{\eta}), \quad \Omega_5 = \frac{2}{3} \beta = -\frac{1}{6r} \eta$$

$$\Omega_6 = \frac{1}{6} (\mu + 2\gamma) = -\frac{1}{6r} \left(\frac{1}{2} - \frac{2m}{r} + \frac{3e^2}{2r^2} \right) \quad (43)$$

lo cual es equivalente a la expresión espinorial (26) de [43]; si en (43) se considera $e = 0$, resulta el potencial de Lanczos para la métrica de Schwarzschild.

En el capítulo 24 de [5] se encuentran soluciones de Robinson-Trautman para el espacio vacío, campos de Maxwell y para radiación pura a las cuales se les pueden aplicar los resultados (42).

4. - SOBRE UNOS INVARIANTES DE LANCZOS

En esta sección se estudia el hecho de que en todo R_4 la contracción del tensor de Riemann con sus duales conduce a lagrangianas que son divergencias exactas; cuando el espacio-tiempo es vacío, el espín tensor de Lanczos es relevante en este estudio. Se muestra que este análisis es útil para investigar la existencia de vectores constantes en una métrica dada [65].

La relatividad general puede obtenerse mediante un principio variacional tipo Hilbert [55, 56, 57, 58] utilizando:

$$L = L_0 + L_M$$

donde: L_M es la función Lagrangiana para la materia

$L_0 = \sqrt{-g} R$ con $g = \det(g_{ab})$ y $R = R^a_a$ es la curvatura escalar.

Diversos autores [59, 60] han intentado modificar L_0 , sumándole términos cuadráticos en el tensor de Riemann lo que lleva al análisis de las ecuaciones de campo generadas (vía un principio variacional) por las Lagrangianas $\sqrt{-g} R^2$,

$\sqrt{-g} R_{abcd} R^{abcd}$, $\sqrt{-g} R_{ab} R^{ab}$ y de las densidades cuadráticas de Lanczos [25, 61, 62]

$$L_1 = \sqrt{-g} K_1 \equiv \sqrt{-g} {}^*R_{abcd} R^{abcd} \quad (44)$$

$$L_2 = \sqrt{-g} K_2 \equiv \sqrt{-g} {}^*R^*_{abcd} R^{abcd} \quad (45)$$

donde ${}^*R_{ijkl}$ y ${}^*R^*_{abcd}$ son duales [40] del tensor de Riemann.

En 1938 Lanczos [25] probó que los principios variacionales:

$$\delta \int L_1 dx^4 = 0 \quad \text{y} \quad \delta \int L_2 dx^4 = 0$$

conducen a $0 = 0$, es decir no originan ecuaciones de campo; así

L_1 y L_2 no permiten construir teorías gravitacionales alternativas a la relatividad general de Einstein. Estos resultados sugirieron que (44) y (45) se podrían escribir como divergencias ordinarias.

Buchdahl [63, 64] demuestra (mediante una técnica matemática que denominó "cálculo de rotores") que en todo espacio tiempo

$$\sqrt{-g} K_1 = (\sqrt{-g} B^r)_{,r} \quad (46)$$

$$\sqrt{-g} K_2 = (\sqrt{-g} C^r)_{,r} \quad (47)$$

con $(,r)$ derivada ordinaria.

B^r y C^r no tienen carácter tensorial, carecen de unicidad y son muy complicadas. Goenner-Kohler [56, 61] utilizan en (44) la definición de R_{abcd} en términos de los símbolos de Christoffel y obtienen una expresión no-tensorial para B^r (mas sencilla que la de Buchdahl). En esta sección se demuestra que es posible construir tensorialmente a B^r en todo R_4 vacío considerando la existencia de K_{ijr} [23, 39, 3, 40, 41]. Se obtiene además una expresión tensorial para C^r alternativa a la expresión tensorial publicada por Horndeski [66, 67] en base también a la existencia del espíntensor.

Las cantidades K_1 y K_2 son importantes en el estudio del proceso de inmersión de espacios Riemannianos [65].

a) representación de $\sqrt{-g} K_1$ por una divergencia ordinaria.

La Lagrangiana (44) no genera ecuaciones de campo cuando se utiliza como base de un principio variacional tipo Hilbert [55, 56] sin embargo sí puede contribuir [61] al flujo de energía y momento gravitacionales [56] lo que la hace relevante en cualquier teoría del fenómeno gravitatorio.

Si en (44) utilizamos

$$R^i_{jkm} = \Gamma^i_{jm,k} - \Gamma^i_{jk,m} + \Gamma^i_{ck} \Gamma^c_{jm} - \Gamma^i_{cm} \Gamma^c_{jk}$$

para todo R_4 se obtiene (46) donde:

$$B^r = 2\eta^{irab} \Gamma^c_{ki} (\Gamma^k_{cb,a} + \frac{2}{3} \Gamma^r_{cb} \Gamma^k_{ra}) \quad (48)$$

con η^{abcd} -tensor de Levi-Civita [I.27]. Se observa que (48) no es un vector ya que los Γ^a_{bc} no son tensores.

A continuación se va a deducir una expresión tensorial para B^r , en el cuadriespacio vacío, utilizando el superpotencial de Lanczos. (En la literatura no se ha encontrado ninguna expresión tensorial para B^r).

Si en (44) se expresa R_{abcd} en términos del tensor de Weyl (I.30) es inmediato que en todo espacio-tiempo se cumple la identidad

$$\sqrt{-g} K_1 \equiv \sqrt{-g} {}^*C_{abcd} C^{abcd} \quad (49)$$

También sabemos (cap II) que para R_4 arbitrario siempre existe el espintensor de Lanczos K_{ijk} [II.1b] con las propiedades [II.1a,c] que genera al tensor de Weyl (I.30) con la propiedades (I.31 y 32). Concretamente:

$$C_{pqjb} = K_{pqj;b} - K_{pqb;i} + K_{jbp;q} - K_{jbq;p} + g_{pb} T_{jq} - \\ - g_{pj} T_{qb} + g_{qj} T_{pb} - g_{qb} T_{pj}$$

donde $T_{jr} \equiv K^a_{j r;a}$ con las propiedades:

$$\begin{aligned} C_{pqjb} &= -C_{pqbj} = -C_{qpjb} & , \quad C^r_{p rb} &= 0 \\ C_{pqjb} + C_{pjbq} + C_{pbqj} &= 0 & , \quad {}^*C^r_{p rb} &= 0 \\ {}^*C_{pqjb} &= -{}^*C_{qpbj} = -{}^*C_{pqbj} & , \quad {}^*C_{pqjb} &= {}^*C_{jbqj} \\ K_{pqj} &= -K_{qpj} & , \quad K^r_{p r} &= 0 \end{aligned}$$

$$K_{pqj} + K_{qjp} + K_{jqp} = 0, \quad T^r_r = 0$$

Al emplear estas relaciones en (49) se obtiene

$$\sqrt{-g} K_1 = 2\sqrt{-g} \left[\left(K_{pqj} {}^*C^{pqjb} \right)_{;b} - K_{pqj} {}^*C^{pqjb}_{;b} \right] \quad (50)$$

En todo espacio-tiempo son válidas las relaciones [3, 69]

$$C^{a}_{nr m;a} = \frac{1}{2} \left(L_{mn;r} - L_{mr;n} \right) \quad (51)$$

$${}^*C^{pqjb}_{;b} = \frac{1}{2} \eta^{pqrn} L^j_{n;r} \quad (52)$$

donde $L_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab}$ y $R_{ab} = R^c_{abc}$

Cuando R_4 es vacío ($R_{ab} = 0$) la relación (52) implica

${}^*C^{pqjb}_{;b} = 0$, que al sustituir en (50) permite obtener

$$\sqrt{-g} K_1 = (2\sqrt{-g} K_{pqj} {}^*C^{pqjb})_{;b} = (2\sqrt{-g} K_{pqj} {}^*C^{pqjb})_{,b} \quad (53)$$

ya que $\sqrt{-g}_{;r} = 0$ y $(\sqrt{-g} A^r)_{;r} = (\sqrt{-g} A^r)_{,r}$ de [56, 58].

Comparando (46) con (53) resulta:

$$B^r = 2K_{pqj} {}^*C^{pqjr} \quad (54)$$

expresión que a diferencia de (48) sí posee carácter tensorial.

El resultado original (54) solo es aplicable a R_4 vacío (por ejemplo la solución de Kerr [45] y como caso particular la métrica de Schwarzschild).

b) representación de $\sqrt{-g} K_2$ como una divergencia ordinaria.

La función Lagrangiana (45) también puede participar en la distribución de la energía y momento del campo gravitacional [56, 61] a pesar de que:

$\delta \int L_2 dx^4 = 0$ implique $0 = 0$. El escalar K_2 es muy útil en la inmersión de R_4 en E_5 [69, 70, 71] ya que es proporcional al determinante de la segunda forma fundamental y el valor de K_2 permite decidir si el proceso de inmersión es algebraicamente o/y diferencial.

Horndeski [66, 67] mostró que (45) podría escribirse en la forma (47) y dió una expresión tensorial para el vector C^r

$$\sqrt{-g} K_2 = (\sqrt{-g} C^r)_{;r} = (\sqrt{-g} C^r)_{;r} \quad (55)$$

$$\text{con } C^r = \frac{8}{A} A^b A^a_{;t} (C^{*R*rt}{}_{bq} + \frac{1}{9A} \delta^{mtrm}_{pqab} A^p_{;m} A^a_{;n}) \quad (56)$$

donde δ^{abcd}_{pqrt} es la delta de Kronecker generalizada [56, 57] y A^b es cualquier vector no-nulo con $A \equiv A^b A_b = \text{cte} \neq 0$.

En la literatura no se han encontrado aplicaciones de (55) y (56). A continuación se va a mostrar que los resultados (55) y (56) se relacionan con la existencia de vectores no-nulos, constantes en un espacio dado. Se trata de vectores M^r tales que:

$$M^a_{;t} = 0, \quad M \equiv M^b M_b \neq 0 \quad \text{y} \quad (57)$$

$$M_{q;t} = 0 \text{ implica } M = \text{cte.}$$

Los vectores que satisfacen (57) son de interés porque:

a) Un vector con la propiedad $M^a_{;t} = 0$ automáticamente es de Killing porque $M_{a;b} + M_{b;a} = 0$ y esto se asocia con grupos de movimiento o simetrías del espacio-tiempo [5, cap 31 y 32] de gran importancia en el estudio de búsqueda de soluciones exactas en relatividad general.

b) En [5, pag 57 y 58] se encuentran dos teoremas sobre la inmersión de R_4 , en los cuales se involucran vectores con las propiedades (57):

" Si un R_4 admite un vector no-nulo constante entonces dicho espacio-tiempo acepta inmersión en E_7 ".

"Si en un R_4 existen dos vectores no-nulos constantes entonces dicho cuadriespacio es sumergible en E_5 "

Se concluye que la existencia de vectores cumpliendo (57) es de gran utilidad al concebir a R_4 como hipersuperficie de un

espacio pseudo euclidiano.

De (55) y (56) es inmediato que:

"Si un $\mathbb{R}_4$ acepta un vector no-nulo constante entonces $K_2 = 0$.

" Si $K_2 \neq 0$ entonces el espacio-tiempo no admite un vector no-nulo constante ".

Para ilustrar la importancia de (55), (56), (60) y (61) se realizan las aplicaciones:

1.- La métrica de Gödel

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - 2e^{x^4} dx^1 dx^2 - \frac{1}{2} e^{2x^4} (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

es generada por un fluido perfecto con presión cero e intenta simular a un universo rotando. En esta expresión solo existe un vector constante que resulta ser no-nulo

$$A^r = (0, 0, 1, 0), \quad A \equiv A^b A_b = 1, \quad A^a_{;a} = 0 \quad (62)$$

y (58) asegura la inmersión en E_7 de este modelo cosmológico. La métrica de Gödel no es sumergible en E_5 [3, 69, 70] y aún se ignora si admite inmersión en E_6 .

LA determinación de K_2 usando (45) requiere bastantes cálculos pero, con (55, 56, 60, 62) es inmediato que $K_2 = 0$ para la métrica de Gödel.

2.- Para la métrica de Kerr [45] (hoyo negro con rotación),

$K_2 \neq 0$ de [5] y en base (55, 56, 61) concluimos que en la métrica de Kerr no existen vectores no-nulos constantes.

3.- Los $\mathbb{R}_4$ vacíos de Schwarzschild, Taub, métrica de C, tienen

$K_2 \neq 0$ (ver [40]), entonces en base a (55, 56, 61), dichas soluciones no aceptan vectores constantes no-nulos.

Goenner-Kohler [62] probaron (47) para espacio-tiempos arbitrarios pero su C^r no es un vector y está en función de la

segunda forma fundamental de un R_3 tipo espacio inmerso en R_4 , así su expresión es más complicada que (56) y podría ser útil en el problema de Cauchy para relatividad general.

Para el espacio vacío, $R_{ab} = 0$, lo cual significa

$$R_{abcd} = -{}^*R^*_{abcd} = C_{abcd} \text{ y de (45) } \sqrt{-g} K_2 = -\sqrt{-g} C_{abcd} C^{abcd} \quad (63)$$

Considerando las propiedades de los tensores de Weyl y de Lanczos junto con (51) mediante (55) resulta

$$C^r = -2K_{pqj} C^{pqjr} \quad (64)$$

Esta relación tensorial no se encuentra en la literatura y es alternativa a (56) obtenida por Horndeski. El resultado (64) era de esperarse ya que Lanczos [23] se apoyó en K_2 para probar la existencia del superpotencial K_{ijr} .

Las expresiones (54) y (64) tienen la desventaja de que en general es difícil obtener explícitamente a K_{ijr} para una métrica dada.

Se hace notar que para cualquier espacio-tiempo vacío tipo N o III (en la clasificación Petrov [4, 68]) las relaciones (54) y (64) son muy importantes ya que para ellos se conoce K_{ijr} explícitamente [41]; además para los tipos III y N vacíos [4] siempre se tiene $K_1 = K_2 = 0$ de modo que (54) y (64) implican

$$B^r_{;r} = C^r_{;r} = 0$$

Ya se tiene K_{ijr} para la métrica de Kerr [44], entonces queda pendiente estudiar la importancia física (si existe) de (54) y (64) para dicha métrica.

CONCLUSIONES

La tesis "Gravitación y formalismo de tétradas nulas" mediante el uso de la técnica de Newman-Penrose en R_4 ha generado resultados originales de investigación presentados en el siguiente orden:

- "Ecuaciones de Brans-Edgar" en el primer capítulo. Se generó un artículo publicado en la Revista Mexicana de Física. Este trabajo contribuye a la fundamentación del formalismo de NP. (En el capítulo II se introduce el tópico de investigación "Espíntensor de Lanczos" y se revisan los materiales publicados relacionados con el tema).

- " Espíntensor para la métrica de Kerr "

- " Espíntensor para espacio-tiempos vacíos tipo D "

- " Espíntensor para las soluciones de Robinson-Trautman "

- " Sobre unos invariantes de Lanczos ",

presentados en el capítulo III. Se han publicado tres artículos en la Revista Mexicana de Física, y el cuarto se encuentra en refereo.

-En el apéndice se presenta el tema "Potencial de Lanczos para el espacio-tiempo Minkowskiano ".

Estos resultados originales nos permiten disponer de un mayor número de espíntensores explícitos que posteriormente se utilizarán para mostrar la relevancia del espíntensor de Lanczos de Relatividad General.

Se debe mencionar la utilidad de paquetes computacionales "REDUCE" y "MUMATH" en la obtención de las cantidades

Newman-Penrose para una métrica dada.

Es de suma importancia la generalización de los resultados obtenidos en el capítulo III ya que confirman el resultado:

" Las proyecciones de K_{ijr} sobre la tétrada canónica son combinaciones lineales de los correspondientes coeficientes de espín ".

Esta tesis conduce a nuevos tópicos de investigación (problemas abiertos):

- Encontrar espintensores explícitos para los tipos D, I y II en el caso general.
- Asignar significado físico a los espintensores explícitos obtenidos.
- Obtener las ecuaciones de Brans-Edgar para el caso R_4 no-vacío.
- Construir una clasificación algebraica invariante para el espintensor de Lanczos K_{ijr} .
- Estudiar B^r y C^r para la métrica de Kerr mediante el espintensor encontrado para ésta.
- Intentar algún significado físico al K_{ijr} del Apéndice (espacio Minkowskiano).

El formalismo de NP utilizado en este trabajo es una técnica poderosa muy útil también en otros campos de la Relatividad General como:

- Inmersión de espacio-tiempos Riemannianos
- Campo de Liénard-Wiechert
- Clasificación Petrov
- R_4 asintóticamente planos
- Búsqueda de soluciones exactas
- Problema de la energía y momento gravitacionales, entre otros.

APENDICE

1.- POTENCIAL DE LANCZOS PARA EL ESPACIO-TIEMPO MINKOWSKIANO.

Se obtiene un potencial de Lanczos para relatividad especial; se muestra que los campos de Maxwell generan en forma simple un espíntensor par el espacio de Minkowski.

Con el formalismo de NP presentado en el capítulo I y en base a las relaciones II.1 y III.6 se construye K_{abc} para el espacio-tiempo plano (ausencia de gravedad) de manera que

$C_{pqjb} = 0$, $(g_{ab})_{4 \times 4} = \text{Diag}(1, 1, 1, -1)$,
 $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t)$ y la derivada covriante $(;a)$ se reduce a la derivada ordinaria $(,a)$. Takeno [27] ha construido espíntensores para este caso especial, pero su método es muy complicado; utilizando ideas de electrodinámica resulta un método más simple y con más posibilidades de interpretación física.

Lanczos trabajó durante muchos años en la obtención de una teoría geométrica para el campo electromagnético (cap. II, Introducción) y al encontrar al espíntensor K_{ijr} propone [23, pag 384] construirlo vía un " tensor de Faraday ": $F_{ab} = -F_{ba}$

tal que $K_{abc} = F_{ab,c}$ (1)

verificandose las ecuaciones de Maxwell en el vacío :

$$F^b_{a,b} = 0, \quad F_{ab,c} + F_{bc,a} + F_{ca,b} = 0 \quad (2)$$

así las simetrías algebraicas de K_{ijr}

$$K_{pqj} = -K_{qpj}, \quad K_{pqj} + K_{qjp} + K_{jqp} = 0, \quad K^j_p{}^j = 0 \quad (3)$$

son inmediatas de (1).

También (1) y (2) implican $K_{ab} = K^c_{a b;c} = K_{ba} = 0$

Al sustituir (1) en (II.1b)

$$C_{pqjb} = K_{pqj;b} - K_{pqb;j} + K_{jbp;q} - K_{jbq;p} + g_{pb} K_{jq} - g_{pj} K_{qb} + g_{qj} K_{pb} - g_{qb} K_{pj} \quad (II.1b)$$

se obtiene $C_{pqjb} = 0$ como debe ser.

La propiedad diferencial $K_{ab;c}^c = 0$ y la relación (1) conducen a:

$$\square F_{ab} = F_{ab;c}^c = 0 \quad (4)$$

con $\square$ - operador D'Alembertiano.

En conclusión podemos construir un espíntensor para el espacio de Minkowski mediante (1) si logramos encontrar un tensor antisimétrico F_{ab} con la propiedades (2) y (4).

En [72, 73] encontramos el resultado:

" Toda solución de (2) puede escribirse en términos de dos funciones de onda reales y de un tensor antisimétrico constante "

y la solución general de (2) se escribe:

$$F_{ab} = (H_a^c U_{,c} + {}^*H_a^c V_{,c})_{,b} - (H_b^c U_{,c} + {}^*H_b^c V_{,c})_{,a} \quad (5)$$

donde U y V satisfacen la ecuación de onda

$$\square U = \square V = 0 \quad (6)$$

El tensor H_{ab} es antisimétrico y constante

$$H_{pq} = -H_{qp}, \quad H_{pq;c} = 0 \quad (7)$$

y ${}^*H_{ab}$ es su dual [74]

De este modo la ecuación (4) es inmediata de (5, 6, 7).

De (1) se genera un espíntensor de Lanczos para R_4 plano si F_{ab} está dado por (5) con las propiedades (6) y (7).

El tensor (H_{ij}) de (5) es una matriz (4x4) antisimétrica y constante respecto a las coordenadas (x, y, z, t), entonces cualquier matriz de este tipo sirve para construir un H_{pq} . Así el problema se reduce a la búsqueda de soluciones de (6) bien comportadas.

$$\text{La función } R(x^j) = \frac{1}{(x^r - a^r)(x_r - a_r)} \quad (8)$$

(donde a^r es cualquier vector constante) satisface $\square R = 0$, pero tiene singularidades sobre el cono nulo con vértice en a^r .

Lanczos [75] mostró cómo eliminar estas divergencias

($i = \sqrt{-1}$): la función

$$R(x^j - ib^j) \equiv U + iV \quad (9)$$

con b^r - cualquier vector constante tipo tiempo ($b^r b_r < 0$), cumple $\square R = 0$, entonces U y V son funciones de onda que no presentan singularidades (en todo punto del espacio de Minkowski):

$$U(x^j) = \frac{A}{A^2 + B^2}, \quad V(x^j) = \frac{B}{A^2 + B^2} \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} A &= (x^r - a^r)(x_r - a_r) - b^r b_r \\ B &= 2b^r(x_r - a_r) \end{aligned} \quad (11)$$

Sin perder generalidad se toma $a^r = 0$ y $(b^r) = (0, 0, 0, b)$

con $b = \text{cte} \neq 0$ y (11) queda:

$$A = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 + b^2, \quad B = -2bt \quad (12)$$

con (10) bien comportadas y cumpliendo (6).

Considerando (6) y (10) en (1) se obtiene un espíntensor carente de singularidades en todo el espacio-tiempo plano.

Synge [72] ha utilizado (5, 10, 11, 12) para elaborar modelos electromagnéticos de partículas materiales y fotones; por esta razón se estima que (1) podría tener más relevancia física que los espíntensores de Takeno [27].

REFERENCIAS

- [1] - E. T. Newman, R. Penrose
J. Math. Phys. 3 , 566 (1962)
- [2] - J.A. Torres Moreno
Tesis de Maestría, ESFM-IPN (1985)
- [3] - J.L. Fernández Chapou
Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM (1986)
- [4] - G. Ovando Zuñiga
Tesis de Maestría, ESFM-IPN (1985)
- [5] - D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt
" Exact solutions of Einstein's field equations "
Camb. Univ. Press. (1980)
- [6] - R. Debever, J. Géhéniau
Bull. Acad. Belg. Cl. Sci. 43 , 114, 313 y 608 (1956)
- [7] - F. Bampi, G. Caviglia
Gen. Relat. Grav. 15 , 375 (1983)
16 , 423 (1984)
- [8] - S. J. Campbell, J. Wainwright
Gen. Relat. Grav. 8 , 987 (1977)
- [9] - R. Penrose
Ann. of Phys. 10 , 171 (1960)
- [10] - F.A.E. Pirani
Phys. Rev. 105 , 1089 (1957)
- [11] - J. Weber y D. Zipoy
Lett. Nuov. Cim. 18 , 191 (1960)
- [12] - J.L. López Bonilla, J.A. Torres Moreno
Rep. de Inv. No. 165 D.C.B.I., UAM-A (1986)

- [13]- R.A. D'Inverno, R.A. Russell-Clark
J. Math. Phys. 12 , 1258 (1971)
- [14]- G. Ludwig
Am. J. Phys 37 , 1225 (1969)
- [15]- J.L. López Bonilla, G. Ovando Zúñiga
Rep. de Inv. No. 154, D.C.B.I. , UAM-A (1985)
- [16]- R. Debever
Cah,de Phys. 18 , 303 y 327 (1964)
- [17]- D. Lovelock
Proc. Camb. Phil. Soc. 68 , 345 y 348 (1970)
- [18]- R. Sachs
Proc. Roy. Soc. London A264 , 309 (1961)
- [19]- G. Ludwig
Indiana Univ. Math J. 20 , 185 (1970)
- [20]- C. Brans
J. Math. Phys. 18 , 1378 (1977)
- [21]- S. B. Edgar
Int. J. Theor. Phys. 18 , 251 (1979)
- [22]- J. N. Goldberg y R. K. Sachs
Acta Phys. Polon. Suppl 22 , 13 (1962)
- [23]- C. Lanczos
Rev. Mod. Phys. 34 , 379 (1962)
- [24]- C. Lanczos
Rev. Mod. Phys. 21 , 497 (1949)
- [25]- C. Lanczos
Ann. of Math. 39 , 842 (1938)

- [26]- E. T. Newman, H.F. Goenner
General relativity and gravitation
Ed. B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascolini, D. Reidel
(1984) p. 208
- [27]- H. Takeno
Tensor N.S. 15 , 103 (1984)
- [28]- M. Novello-A.L. Velloso
Gen. Relat. Grav. 19 , 1251 (1987)
- [29]- A.H. Taub
Perspectives in geometry and relativity
Ed. B. Hoffmann, 360 (1986)
- [30]- A.H. Taub
Comp. Maths. with Appls. 1 , 377 (1975)
- [31]- W.F. Maher, J.D. Zund
Nuov. Cim. A57 , 638 (1968)
- [32]- J. D. Zund
Ann. Math. Pura. Appl. 104 , 239 (1975)
- [33]- C. Teitelboim
Phys. Rev. D1 , 1572 (1970)
- [34]- E. Brinis
Gen. Relat. Grav. 12 429 (1980)
- [35]- E. Brinis
Rend. Ist. Lomb A111 , 466 (1977)
- [36]- E. Brinis
Meccanica 16 , 75 (1981)
- [37]- E. Massa, E. Pagani
Gen. Relat. Grav. 16 , 805 (1984)
- [38]- J. D. Zund
Ann. Math. Pura. Appl. 82 , 381 (1969)

- [39]- M. García
Tesis de Licenciatura ESFM-IPN (1985)
- [40]- G. Ares de Parga, J.L. López Bonilla, G. Ovando Zuñiga
T. Matos Chassin
Rev. Mex. Fis. 35 , 393 (1989)
- [41]- G. Ares. de Parga, O. Chavoya A. , J.L. López Bonilla
J. Math. Phys. 30 , 1294 (1989)
- [42]- G. Ares de Parga, O. Chavoya, J.L. López Bonilla
J. Morales, J.L. Fernández Ch.
Rev. Mex. Fis. 36 , No.1, 85-93 (1990)
- [43]- G. Torres del Castillo
Rev. Mex. Fis. 37 , No. 2 (1991)
- [44]- V. Gaftoi N. J.L. López Bonilla, J. Morales R.
D. Navarrete G. y G. Ovando L.
Rev. Mex. Fis. 36 , No. 4, 498-502 (1990)
- [45]- R.P. Kerr
Phys. Rev. Lett. 11 , 237 (1963)
- [46]- S. Chandrasekar
" The mathematical theory of blacks holes "
Oxford Univ. Press. (1983)
- [47]- H. Stephani
" General Relativity "
Camb. Univ. Press. (1982)
- [48]- R. Becerril B.
Tesis de Maestría ESFM-IPN (1986)
- [49]- W. Kinnersley
J. Math. Phys. 10 , 1195 (1969)

- [50]- V. Gaftoi N. , J.L. López B. y Morales R.
T. D. Navarrete G. , G. Ovando Z.
Rev. Mex. Fis. 37 , No. 4 (1991)-aceptado
- [51]- M. Demianski y E. Newman
Bull. Acad. Polon. Sci. 14 , 653 (1966)
- [52]- M. Carmeli
" Group theory and general relativity "
Mc Graw-Hill, N.Y. (1977) Chap 11
- [53]- E. Newman, L. Tamburino, T. Unti
J. Math. Phys. 4 , 915 (1963)
- [54]- E. T. Newman, T. W. J. Unti
J. Math. Phys. 4 (1963) 1467
- [55]- C. W. Misner, K.S. Thorne, y A. Wheeler
"Gravitation "
W. H. Freeman, San Fco. U.S.A. cap. 21 (1973)
- [56]- J. López Bonilla
Tesis de Maestría , ESFM, IPN (1979)
"Estudio del pseudotensor de energía y momento de Landau y
Lifshitz para el caso de simetría esferica ".
[57]- D. Lovelock, H. Rund
"Tensors, differential forms and variational principles "
John Wiley and Sons (1975)
- [58]- M. Alvarez C.
Lagrangianas en espacios de Weyl y de Riemann "
Tesis de Maestría , ESFM, IPN (1986)
- [59]- H. A. Buchdahl
Quart Journ. Math. Oxford 19 , 150 (1948)
- [60]- P. Havas
Gen. Rel. Grav. 8 , 631 (1977)

- [61]- H. Goenner , M.Kohler
 Il. Nuovo Cim, B 22 , 79 (1974)
- [62]- H. Goenner , M.Kohler
 H. Nuovo Cim. B 25 , 308 (1975)
- [63]- H. A. Buchdahl
 J. Math. Phys. 1, 537 (1960)
- [64]- H. A. Buchdahl
 J. Austral. Math. Soc. 6, 402 y 424 (1966)
- [65]- V. Gaftoi N. , J.L. López B., D. Navarrete G.,
 G. Ovando J.
 Rev. Mex. Fis. 36 No. 4 503-509 (1990)
- [66]- G. W. Horndeski
 Proc. Cambridge Phil. Soc. 72, 77 (1972)
- [67]- J. López B.
 Rep. Inv. No. 66 D.C.B.I., UAM-A (1982)
- [68]- G. Ares de Parga, O. Chavoya
 J. L. López Bonilla, G. Ovando Zúñiga
 Rev. Mex. Fis. 35 No. 2, 201 (1989)
- [69]- R. Fuentes, V.
 " Inmersión de espacios Riemannianos "
 Tesis de Maestría, Fac. de Ciencias, UNAM (1985)
- [70]- D. Ladino, J. López B.
 Rev. Mex. Fis. 35, 623 (1989)
- [71]- R. Fuentes, J. López B., T. Matos, G. Ovando
 Gen. Relat. Grav. 21, 777 (1989)
- [72]- J. L. Synge
 " Relativity: The special theory "
 North Holland Publ. pag. 362 (1965)

- Gen. Relat. Grav. 21, 777 (1989)
- [72]- J. L. Sunge
 " Relativity: The especial theory "
 North Holland Publ. pag. 362 (1965)
- [73]- P. A. Hogan
 J. Math. Phys. 28 2089 (1987)
- [74]- J. L. López B.
 Rev. Colomb. Fis. 17, 1 (1985)
- [75]- C. Lanczos
 Z. Phys. 59, 574 (1960)
- [76]- G. Ares de Parga, J. L. López Bonilla, G. Ovando,
 T. Matos Chassin
 Rev. Mex. Fis. 36 No 2, 194 (1990).
- [77]- P. Bell, P. Szekeres
 Intern. Journal of Theor. Physics No. 2, 111 (1972).
- [78]- R. Becerril Bárcenas, V. Gaftoi Negoescu, J. López Bonilla
 Rev. Mex. fís.. 36, No. 1, 46 (1990)