

**Optimización de las Reglas de
Sintonizado IMC para Controladores
Tipo Proporcional - Integral**

T E S I S

Que para obtener el grado de
**MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA QUÍMICA**

Presenta

Galo Rafael Urrea García



**División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química**

Asesor

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

México, D. F.

Octubre de 2004

**Optimización de las Reglas de
Sintonizado IMC para Controladores
Tipo Proporcional - Integral**

T E S I S

Que para obtener el grado de
**MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA QUÍMICA**

Presenta

Galo Rafael Urrea García



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Iztapalapa

**División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química**

Asesor

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

México, D. F.

Octubre de 2004

Deseo agradecer al Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez por su tiempo y asesoría dedicados para la dirección de esta tesis.

De igual manera agradezco a los miembros del jurado por sus valiosos comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar la calidad de este trabajo:

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez
Dra. América Berenice Morales Díaz
M. en C. Carlos Martínez Vera

También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por otorgarme el apoyo económico para la realización de mis estudios de maestría.

Contenido

Resumen General	v
Índice de Figuras	vi
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Sintonizado IMC	1
1.2 Estado del Arte	2
1.3 Motivación y Relevancia	3
1.4 Sintonizado SIMC	3
1.5 Planteamiento del Sintonizado Óptimo	4
Capítulo 2 Procedimiento de Sintonizado SIMC	5
2.1 Paso 1. Obtener un Modelo Aproximado de Primer ó Segundo Orden más Retardo	5
2.2 Paso 2. Derivar los Ajustes del Controlador con Base en el Modelo	7

Capítulo 3. Sintonizado Óptimo PI	9
3.1 Planteamiento de los Modelos	10
3.1.1 Modelo de la Planta	10
3.1.2 Modelo de Respuesta de Primer Orden	10
3.2 Planteamiento del Problema de Sintonizado Óptimo	11
3.2.1 Planteamiento del Error	11
3.2.2 Función Objetivo	11
3.2.3 Solución al Problema de Optimización	12
3.3 Comentarios Respecto al Procedimiento Numérico de Sintonizado	13
 Capítulo 4. Optimización	 15
4.1. Introducción	15
4. 2. Métodos de Solución	16
4. 2. 1. Algoritmos Secuenciales de Búsqueda	
Aleatoria	16
4. 2. 2. Algoritmos Hit and Run	18
 Capítulo 5. Ejemplos	 20
5.1. Procesos de Primer Orden más Tiempo de Retardo	20
5. 2. Procesos de Orden Mayor	25
5. 3. Sintonizado para Trayectoria de Referencia	28
5. 4. Sistema de Control para dos Reactores Químicos	29
5. 4. 1. Descripción del Sistema	30
5. 5. Sintonizado con Restricciones en la Entrada de Control	39
 Capítulo 6. Conclusiones Generales y Observaciones	
 para Trabajo a Futuro	 41
6. 1. Conclusiones Generales	41

	Contenido
6. 2. Observaciones para Trabajo a Futuro	42
Capítulo 7. Referencias	43
Apéndice A. Caracterización del Proceso	46
Apéndice B. Respuestas de Procesos	49
Apéndice C. Aproximación de las Constantes de Tiempo de Numerador Positivas	52
Apéndice D. Definición de Términos	54

Resumen General

Las reglas de sintonizado Modelo Interno de Control (siglas en inglés IMC) han demostrado producir propiedades de desempeño y robustez aceptables cuando se usan en el control de procesos típicos (columnas de destilación, reactores químicos, etc.). En general las reglas analíticas de sintonizado IMC se derivan para compensadores PI/PID haciendo coincidir un modelo de proceso aproximado con un modelo de referencia de baja dimensión. En el caso de procesos con tiempo de retardo, se obtiene un modelo aproximado haciendo una aproximación finita-dimensional al operador de retardo por medio de expansiones de Padé o de Taylor.

En esta tesis se estudia la optimización de las reglas de sintonizado IMC en controladores PI para hacer coincidir el comportamiento prescrito de lazo cerrado (la respuesta del modelo de referencia) para algunos casos típicos que surgen en el control de procesos, incluyendo plantas de primer orden mas tiempo de retardo.

Para este fin, se calculan los ajustes óptimos por medio de optimización numérica basada en algoritmos de búsqueda aleatoria. Se encuentran pequeñas desviaciones entre el sintonizado IMC y el óptimo para tiempos de retardo moderados. Sin embargo, se muestran desviaciones significativas para tiempos de retardo mayores, lo cual motiva el uso de técnicas de sintonizado basadas en optimización numérica para refinar los ajuste IMC.

Índice de Figuras

Figura	Descripción	Página
5.1	Evolución del valor de RSIE J_2 para tres condiciones iniciales diferentes $K_{c,r}$.	21
5.2	Retrato de fase $(K_{c,r}, \tau_{l,r})$ correspondiente a la evolución del RSIE J_2^{opt} .	22
5.3	Ajuste óptimo $\{K_c^{opt}, \tau_l^{opt}\}$ y el valor óptimo correspondiente de RSIE J_2 como función del tiempo de retardo θ_r , para el proceso $g(s) = \frac{1}{s+1} \exp(-\theta_r s)$.	23
5.4	Respuesta de salida del proceso bajo los ajustes óptimos y SIMC para $g(s) = \frac{1}{s+1} \exp(-\theta_r s)$ y para $\theta_r=1$ y $\theta_r=3$.	24
5.5	Respuesta del proceso controlado (5.2) bajo los ajustes de control PI óptimos y SIMC.	26
5.6	Respuesta del proceso controlado (5.2) bajo los ajustes óptimos, para diferentes valores de la constante de tiempo de lazo cerrado τ_c .	27

5.7	Respuesta del proceso controlado (16) bajo el sintonizado de Isaksson y Graebe y el óptimo con $\tau_c=3.5$.	28
5.8	Sintonizado óptimo PI para referencia en forma de rampa.	29
5.9	Control de dos reactores químicos de tanque agitado.	30
5.10	Diagrama de bloques de un sistema de control de dos reactores químicos.	36
5.11	Diagrama de bloques equivalente para el sistema de control de dos reactores químicos.	37
5.12	Diagrama de bloques simplificado para el sistema de control de dos reactores químicos.	37
5.13	Respuesta de salida para el sistema de control de dos reactores químicos bajo los ajustes óptimos y SIMC.	39
5.14	Dinámica de la respuesta de salida y de la entrada de control para los ajustes SIMC y óptimo, para el proceso $g(s) = \frac{1}{s+1} \exp(-\theta_r s)$ bajo la restricción $\left \frac{du}{dt} \right \leq 0.5$.	40

Capítulo 1

Introducción

1.1 Sintonizado IMC

El sintonizado Modelo Interno de Control (siglas en inglés IMC) se refiere a un conjunto de procedimientos de sintonizado basados en el principio de modelo interno. La idea básica detrás de las metodologías de modelo interno es calcular un controlador y/o establecer sus valores con relación a una respuestas preescrita formulada como un modelo (interno) preescrito. En esta forma, los diseños IMC pertenecen a la clase de ajustes de control basados en un modelo, cuyo origen se puede remontar al método de sintonizado PID propuesto por Dahlin¹.

1.2 Estado del Arte

Este método de sintonizado ha originado una amplia variedad de corrientes de investigación (ver, por ejemplo, O'Dwyer² y las referencias presentadas). En el campo de control de procesos, ha habido algo de investigación alrededor de estas líneas, incluyendo el trabajo de sintonizado PI/PID IMC por Rivera y col.³, y las reglas de sintonizado de síntesis directa de Smith y Corripio⁴. Las guías para sintonizado IMC existentes para procesos típicos han sido revisadas por Chien y Fruehauf⁵.

Varios trabajos subsecuentes sobre sintonizado IMC se han enfocado al problema de refinar los resultados clásicos del método IMC. Por ejemplo, Horn et al.⁶ propusieron un diseño de filtro mejorado para derivar controladores de bajo orden asignados para proporcionar supresión efectiva de disturbios. Para modelos de procesos de orden bajo, los controladores tienen la forma de un controlador PID en serie con un filtro (pasa bajas). Se debe enfatizar que las configuraciones de control PI y PID estándar se obtienen en tanto que el modelo de proceso sea de primer o segundo orden, respectivamente.

Estando al tanto de este hecho, Isaksson y Graebe⁷ presentaron una reducción de modelo analítica conveniente para el diseño PID, la cual se basa en, ya sea retener el polo dominante o los coeficientes de bajo orden de la planta. Esencialmente lo primero proporciona una sobrelimitación de la magnitud de la planta, mientras que lo último proporciona una sublimitación de un término crucial para el desempeño robusto a bajas frecuencias.

Cominos y Munro⁸ han revisado los métodos de sintonizado y las especificaciones de diseño recientes para controladores PI/PID, incluyendo las técnicas IMC. Al igual que Isaksson y Graebe, Skogestad⁹ ha empleado la estructura IMC para derivar reglas para reducción del modelo y sintonizado del controlador PI/PID.

1.3 Motivación y Relevancia

El control PI/PID son estrategias de control que se han empleado exitosamente durante muchos años. La simplicidad, robustez y amplio margen de aplicación son algunas de las razones que han hecho del control PI tan popular en los sectores académico e industrial.

Aunque el controlador PI sólo tiene dos parámetros de ajuste, no es fácil, sin un procedimiento sistemático, hallar buenos valores de ajuste. De hecho, una visita a una planta de procesos revelará que un gran número de controladores están pobremente sintonizados⁹.

1.4 Sintonizado SIMC

Las reglas de sintonizado IMC de Skogestad (SIMC) están derivadas analíticamente, son simples y funcionan bien sobre un amplio margen de procesos. Una característica sobresaliente es que, debido a que el SIMC esta propuesto para controladores PI/PID, se debe obtener un modelo de proceso de primer o segundo orden. Para este fin, Skogestad ha propuesto un procedimiento simple basado en una “regla media” para obtener un modelo de proceso aproximado. El resultado es un modelo aproximado de primer o segundo mas retardo. Una vez que se obtienen estos modelos de orden reducido, se calculan las ganancias del controlador PI/PID, para ajustar la respuesta de lazo cerrado a la respuesta de un modelo de referencia de primer o segundo orden. Este procedimiento da origen a un conjunto de reglas de sintonizado analíticas simples.

Además a la aproximación involucrada en el procedimiento de reducción del modelo, se introduce otra aproximación durante el cálculo de los parámetros de control PI/PID. De hecho, el procedimiento de hacer coincidir la respuesta de lazo cerrado a la respuesta del modelo de referencia conduce a un controlador infinito-dimensional con una estructura de un predictor Smith. Para obtener una estructura de control PI/PID, el operador de retardo se expande hasta un primer orden (por medio de una aproximación de Taylor).

1.5 Planteamiento del Sintonizado Óptimo

Dadas éstas dos fuentes de aproximación y el hecho de que las reglas de sintonizado IMC están orientadas a hacer coincidir la respuesta de un modelo de referencia preescrito, en este punto surge una pregunta natural: ¿Qué tan lejos están las reglas de sintonizado SIMC de los ajustes óptimos PI/PID? Por un ajuste óptimo nos referimos a parámetros de controlador PI/PID que minimizan una distancia desde la respuesta de lazo cerrado a la respuesta del modelo de referencia¹⁰. En esta tesis se explora este tema comparando el ajuste SIMC con el ajuste óptimo obtenido a partir de técnicas de optimización numérica correspondiente a plantas típicas, incluyendo procesos de primer orden e integradores mas retardo.

Capítulo 2

Procedimiento de Sintonizado SIMC

Esta sección proporciona una descripción breve de el procedimiento de sintonizado de control PI/PID basado en IMC como fue descrito por Skogestad (2003). Este procedimiento sigue los siguientes dos pasos:

2.1 Paso 1 Obtener un Modelo Aproximado de Primer o Segundo Orden más Retardo.

Se reconoce que los modelos de primer y segundo orden son sólo una abstracción de la dinámica del proceso real que resulta útil, y que tales modelos de orden reducido son convenientes

Capítulo 2. Procedimiento de Sintonizado SIMC

para obtener reglas de sintonizado simples para controladores industriales PI/PID. De esta manera, el primer paso es diseñar un procedimiento simple de reducción de modelo que conserve las principales características del proceso. Esto es, dada una planta descrita por

$$g_0(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k \prod_j (-T_{0,j}^{inv} s + 1)}{\prod_i (\tau_{0,i} s + 1)} \exp(-\theta_0 s) \quad (2.1)$$

donde $T_{0,j}^{inv}$ son las constantes de tiempo de respuesta inversa, $\tau_{0,j}$ son las constantes de tiempo de lazo abierto ordenadas de acuerdo a su magnitud, y θ_0 es el tiempo de retardo de lazo abierto, el primer paso es obtener un modelo aproximado de primer o segundo orden $g(s)$ en la forma

$$g(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \exp(-\theta s) \quad (2.2)$$

Para este fin, la regla media de Skogestad establece que la constante de tiempo (retardo) más grande despreciada (denominador) se debe distribuir en partes iguales entre el tiempo de retardo efectivo y la constante de tiempo más pequeña retenida. Entonces para obtener un modelo de primer orden, se usa la siguiente relación:

$$\tau_1 = \tau_{0,1} + \frac{\tau_{0,2}}{2}$$

y

$$\theta = \theta_0 + \frac{\tau_{0,2}}{2} + \sum_{i \geq 3} \tau_{0,i} + \sum_j T_{0,j}^{inv} + \frac{h}{2}$$

donde h es el periodo de muestreo. Por otra parte, para obtener un modelo de segundo orden, uno debe usar las relaciones

$$\tau_1 = \tau_{0,1} \quad (2.3.a)$$

y

$$\tau_2 = \tau_{0,2} + \frac{\tau_{0,3}}{2} \quad (2.3.b)$$

y

$$\theta = \theta_0 + \frac{\tau_{0,3}}{2} + \sum_{i \geq 4} \tau_{0,i} + \sum_j T_{0,j}^{inv} + \frac{h}{2} \quad (2.3.c)$$

De manera similar al método de reducción de modelo propuesto por Isaksson y Graebe⁷, las relaciones descritas están orientadas a mantener ciertas propiedades de robustez de las reglas de

sintonizado PI/PID. Esto es, manteniendo los polos dominantes, el modelo reducido esencialmente proporciona una sobrelimitación sobre la magnitud de la planta.

2.2 Paso 2. Derivar los ajustes del controlador con base en el modelo.

El modelo aproximado (2.2) es el punto de partida para derivar las reglas de sintonizado SIMC. Un modelo de segundo orden conduce a un compensador PID y el modelo de primer orden produce un compensador PI.

Para el caso de compensación PI, usando $y_{ref}(s)$ para denotar el comando de referencia (o setpoint), se obtiene la regla de sintonizado SIMC especificando una respuesta deseada de primer orden de la forma

$$\frac{y_m(s)}{y_{ref}(s)} = \frac{1}{\tau_c s + 1} \exp(-\theta s) \quad (2.4)$$

lo cual conduce al controlador

$$c(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{k(\tau_c s + 1 - \exp(-\theta s))} \quad (2.5)$$

Se obtiene un compensador finito adimensional cuando el operador de tiempo de retardo $\exp(-\theta s)$ se aproxima por medio de una expansión de Taylor alrededor de $\theta=0$. En el caso SIMC, esto se hace con la expansión de primer orden $\exp(-\theta s) \approx 1 - \theta s$. De esta manera se obtiene

$$c(s) = \frac{\tau_1}{k(\tau_c + \theta)} \left[1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right]$$

Volviéndose un controlador PI con la ganancia y el tiempo integral dados por

$$K_c = \frac{\tau_1}{k(\tau_c + \theta)} \quad \text{y} \quad \tau_I = \tau_1$$

Para obtener respuesta rápida con buena robustez, se recomienda elegir la constante de tiempo de lazo cerrado $\tau_c = \theta$. Adicionalmente, para procesos con retardo dominante con

Capítulo 2. Procedimiento de Sintonizado SIMC

$\tau_1/\theta \gg 1$, se recomienda el tiempo integral modificado $\tau_I = 4(\tau_c + \theta)$. La regla de sintonizado SIMC resultante es

$$K_c = \frac{1}{k} \frac{\tau_1}{2\theta} \quad \tau_I = \min\{\tau_1, 8\theta\} \quad (2.6)$$

El paso clave para obtener la regla de sintonizado SIMC resultante (2.6) es la coincidencia entre la respuesta de la planta y la respuesta del modelo (2.4). Sin embargo, se utilizan dos aproximaciones para llegar a las reglas finales SIMC:

- i) la aproximación de reducción del modelo (2.2), y
- ii) La expansión de Taylor $\exp(-\theta s) \approx 1 - \theta s$ para obtener una estructura de control PI.

Aún si la planta original $g_o(s)$ es un proceso de primer orden mas tiempo de retardo, no se puede obtener una coincidencia exacta del modelo con una estructura de control PI siendo la principal obstrucción el operador de tiempo de retardo $\exp(-\theta s)$. Debido a esto se considera la existencia de parámetros de control óptimos $\{K_c^{opt}, \tau_I^{opt}\}$ que minimizan la distancia entre la respuesta del proceso $y(t)$ y la respuesta del modelo $y_m(s)$.

Capítulo 3

Sintonizado Óptimo PI

El objetivo de este capítulo es describir la formulación del control PI óptimo. Se prefiere el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia porque el problema de optimización corresponde a encontrar la coincidencia óptima entre trayectorias.

En el dominio del tiempo se facilita la implementación de procedimientos numéricos para resolver sistemas complejos ó no lineales que se encuentran a menudo en los problemas de sintonizado óptimo. Además de que muchos requerimientos de desempeño en el control de procesos están en el dominio del tiempo, tales como: tiempo de respuesta, tiempo de asentamiento, sobretiro, error de estado estacionario, etc.

3.1 Planteamiento de los Modelos

3.1.1 Modelo de la Planta

Se puede dar una realización estado espacio de la planta $g_0(s)$ llevada por un controlador PI retardado $c(s) = K_c(1 + 1/\tau_I s)$ como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= Ax_t + bK_c[e_{t-\theta} + \tau_I^{-1}z_{t-\theta}] \\ \dot{z}_t &= e_t \\ y_t &= Cx_t\end{aligned}\tag{3.1}$$

Donde A, b y C son matrices de dimensiones convenientes, $e_t = y_{ref} - y_t$ es el error de regulación, y $y_t = Cx_t$ es la salida regulada. Para ser consistente con la descripción del dominio Laplaciano se consideran las siguientes condiciones iniciales

$$x_t = 0 \text{ y } z_t = 0, \text{ para todo } t \in (-\theta, 0)\tag{3.2}$$

3.1.2 Modelo de Respuesta de Primer Orden

Por otra parte, la realización estado espacio de la respuesta del modelo de primer orden (2.4) esta dada por

$$\dot{y}_{m,t} = -\tau_c^{-1}(y_{m,t} - y_{ref,t-\theta}^*)\tag{3.3}$$

con condición inicial

$$y_{m,t} = 0 \text{ para } t = 0\tag{3.4}$$

donde

$$y_{ref,t}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \theta \\ y_{ref} & \text{si } t \geq \theta \end{cases}\tag{3.5}$$

3.2 Planteamiento del Problema de Sintonizado Óptimo

3.2.1 Planteamiento del Error

El problema de sintonizado consiste en escoger los parámetros de control PI $\{K_c, \tau_I\}$ tales que la trayectoria y_t sea tan cercana como sea posible a la respuesta deseada $y_{m,t}$.

Se define el error instantáneo, ε_t , como:

$$\varepsilon_t = y_t - y_{m,t}$$

Se considera el error integral al cuadrado (2-norm) $\|\varepsilon\|_2^2 = \int_0^\infty \varepsilon_t^2 dt$ para medir la distancia entre trayectorias. El error integral al cuadrado (SIE) proporciona una medición absoluta de la cercanía entre la trayectoria de la respuesta y_t y la trayectoria de la respuesta del modelo $y_{m,t}$.

3.2.2 Función Objetivo

Para definir la función objetivo se define un SIE relativo comparando $\|\varepsilon\|_2^2$ con la distancia

Debido a que $y_{m,0}=0$, para $y_{ref}=1$ se puede calcular tal distancia como $\int_0^\infty (y_{ref} - y_{m,t})^2 dt$.

De esta forma, la función objetivo es el error integral al cuadrado relativo (RSIE) dado por la relación entre el error integral al cuadrado y la distancia entre la trayectoria del modelo $y_{m,t}$ y la referencia constante y_{ref} .

$$J_2 \stackrel{def}{=} \frac{\|\varepsilon\|_2^2}{\int_0^\infty (y_{ref} - y_{m,t})^2 dt}$$

Resolviendo la ecuación (3.3), se obtiene

$$J_2 = \frac{2\|\varepsilon\|_2^2}{\tau_c} \quad (3.6)$$

De esta manera, J_2 da una medida de coincidencia entre las trayectorias de la respuesta y del modelo con relación a la velocidad de convergencia de la respuesta deseada reflejada por la constante de tiempo de lazo cerrado τ_c . Los parámetros de control óptimo $\{K_c, \tau_I\}$ se encuentran resolviendo el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\min_{\{K_c, \tau_I\}} J_2 \quad (3.7)$$

sueto a las dinámicas (3.1)-(3.5).

Se debe enfatizar que el controlador PI es llevado por el error de regulación $e_t = y_t - y_{ref}$.

El procedimiento de optimización se realiza sobre el error instantáneo $\varepsilon_t = y_t - y_{m,t}$, debido a que el diseño del control IMC corresponde a un problema de aproximar la coincidencia respecto a la trayectoria deseada $y_{m,t}$. De hecho, se debe considerar la minimización del ISE en el error de coincidencia del modelo, $y_t - y_{m,t}$, porque, como se describe en los trabajos de sintonizado IMC, los parámetros de control PI se escogen para hacer coincidir la respuesta del proceso controlado con la respuesta de un modelo interno (referencia).

3.2.3 Solución al Problema de Optimización

No es tarea fácil encontrar la solución analítica al problema de optimización (3.7). Así que procedemos a usar técnicas numéricas. Hemos optado por técnicas de optimización heurística basadas en algoritmos recursivos de búsqueda aleatoria reportados por Zabinsky¹¹. Para este fin, se usaron las siguientes aproximaciones numéricas para las dinámicas (3.1)-(3.5)

- i) Las trayectorias y_t y $y_{m,t}$ se calcularon con un método de Runge-Kutta de 4/5° orden. El máximo paso de integración se estableció a 0.001 veces la constante de tiempo más larga o dominante del proceso $g_0(s)$.
- ii) El error integral al cuadrado $\|\varepsilon\|_2^2$ se aproximó como $\int_0^T \varepsilon_t^2 dt$, para T suficientemente grande. Hemos usado $T=100\tau_c$ para capturar la respuesta completa del sistema de control, es decir, la parte transitoria de la respuesta del sistema de control.

3.3 Comentarios Respecto al Procedimiento Numérico de Sintonizado

- ❖ En la práctica, es frecuente que la referencia de salida $y_{ref,t}$ sea conocida pero no sea constante, e.g. cambios de setpoint en forma de rampa. En tales casos, se puede considerar el error de coincidencia instantáneo como $\varepsilon_t = y_t - y_{ref,t-\theta}$, con $\varepsilon_t = 0$ para todo $t \leq \theta$.

- ❖ Aunque los algoritmos de búsqueda aleatoria son menos eficientes en comparación con procedimientos basados en el gradiente, tienen las ventajas de que

- i) su implementación es muy fácil, requiriendo únicamente un generador aleatorio, y
- ii) no se requiere información del gradiente.

De esta manera, debe ser claro que, al resolver el problema de optimización (3.7), se busca una implementación fácil y estabilidad, la cual es ofrecida por los algoritmos de búsqueda aleatoria¹¹.

- ❖ Se busca la solución global al problema de optimización (3.7) sujeto a las dinámicas (3.1)-(3.5). Sin embargo, este tipo de problemas de optimización comúnmente está plagado con varios mínimos locales. Para reducir la probabilidad de estancarse en mínimos locales, los algoritmos de búsqueda aleatoria propuestos por Zabinsky¹¹ usan

- i) muestreo aleatorio para exploración, con lo cual se examinan las características macroscópicas de la función objetivo y se busca identificar áreas promisorias en el espacio de los parámetros, y
- ii) el muestreo aleatorio recursivo para explotación, el cual se enfoca en las características microscópicas.

Esto se hace realizando muestreo aleatorio por un número de veces, entonces mueve y redimensiona el espacio de muestreo de acuerdo a las muestras previas e inicia otro muestreo aleatorio en la nueva región de muestreo. De esta manera se incrementa la probabilidad de alejarse de los mínimos locales.

- ❖ Se nota que la complejidad computacional de calcular un sintonizado óptimo PI es significativamente mayor en comparación con las reglas de sintonizado analíticas simples. El sintonizado óptimo requiere correr un programa en algún lenguaje de programación, lo cual lo hace menos atractivo para aplicarse en los sitios de trabajo. Sin embargo, con la aparición de computadoras portátiles, es factible la implementación de tales procedimientos de sintonizado basados en optimización.

Capítulo 4

Optimización

4.1 Introducción

La estructura de la mayoría de los problemas de optimización es sorprendentemente similar. De hecho, esta similitud es la que ha dado origen al intercambio interdisciplinario que ha caracterizado el presente progreso en este campo. La similitud en la estructura permite el desarrollo de una estructura lógica dentro de la cual se puede estudiar casi cualquier problema.

Las relaciones usadas en la función objetivo pueden ser de dos tipos. Primero, se puede postular un modelo matemático para representar el sistema de proceso, en el cual las relaciones analíticas junto con las restricciones apropiadas, definen la respuesta del proceso.

Alternativamente, para un procesos existente se puede obtener por experimentación la respuesta a varias señales de entrada. Un modelo desarrollado a partir de este tipo de información experimental se llama modelo de caja negra, debido a que no es necesario conocer las ecuaciones

gobernantes. Algunas veces, especialmente para modelos matemáticos complejos, un sistema que es representado adecuadamente por un modelo matemático se puede tratar de otra manera, de tal forma que las salidas sean determinadas numéricamente para un conjunto dado de valores de entrada. Estas salidas se tratan en la misma forma que las salidas de caja negra.

Las funciones de caja negra son muy atractivas para los ingenieros porque pueden intentar diferentes subrutinas existentes y ver el efecto sobre la solución óptima. Estas funciones de caja negra pueden ser funciones altamente no lineales, y pueden involucrar muchos óptimos locales. Las funciones pueden ser no diferenciables o aún discontinuas. Las variables de diseño pueden ser continuas o discretas o una mezcla de las dos.

4.2 Métodos de Solución

Los algoritmos para optimización global a menudo se pueden categorizar en métodos determinísticos y estocásticos. En la optimización determinística se asume que se tiene información perfecta sobre la función de optimización y ésta información se usa para determinar la dirección de búsqueda en cada paso del algoritmo.

La optimización estocástica se refiere a la minimización de una función en la presencia de aleatoriedades en el proceso de optimización. Algunas veces es benéfico introducir aleatoriedad deliberadamente en el proceso de búsqueda como una forma de acelerar la convergencia y hacer al algoritmo menos sensible a los errores de modelado. Esto se puede realizar mediante algoritmos iterativos de optimización donde hay una elección aleatoria al calcular la dirección de la búsqueda mientras se itera hacia la solución

4.2.1 Algoritmos Secuenciales de Búsqueda Aleatoria

A primera vista los algoritmos de búsqueda aleatoria secuenciales son métodos muy simples, pero tienen ciertas ventajas. Se pueden adaptar con facilidad a mezclas de variables continuas y discretas, y su simplicidad las hace convenientes para funciones de caja negra. La forma básica de un algoritmo de búsqueda aleatoria secuencial es tener un método para generar un punto

candidato basado en el punto actual y posiblemente en varios puntos previos, y entonces probar la aceptación o rechazo del punto candidato.

Rastrigin¹⁴ propuso originalmente una familia de algoritmos donde el punto candidato se especifica moviendo en dirección D_k una cierta longitud de paso S_k :

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k + S_k D_k & \text{si el punto candidato es aceptado} \\ X_k & \text{si el punto candidato es rechazado} \end{cases}$$

donde X_k es el punto actual en la iteración $k^{\text{ésima}}$, y $X_k + S_k D_k$ es el punto candidato.

Típicamente el punto candidato se acepta si mejora la función objetivo, de otra manera es rechazado. En general un método de búsqueda aleatoria secuencial se puede describir por

Generar un punto candidato, W_k
Actualizar el nuevo punto,

En 1981, Solís y Wets¹⁶ proporcionaron una prueba general con las cuales un algoritmo de búsqueda aleatoria secuencial convergerá asintóticamente con probabilidad de uno al óptimo global. Para interpretar las condiciones de convergencia de manera amplia, el método de generar y aceptar los puntos candidatos no debe excluir consistentemente ninguna región del espacio de diseño.

Varios trabajos sobre algoritmos de tamaño reportan un desempeño sorprendente para tales métodos simples de búsqueda aleatoria secuencial. De hecho hubo varios reportes de que el número de evaluaciones de función era lineal en el número de variables. La mayoría de los primeros reportes se efectuaron sobre una función de prueba hiperesférica. Schumer y Steiglitz¹⁸ concluyeron que “a pesar de su simplicidad, la búsqueda aleatoria adaptiva es una técnica atractiva para problemas con gran número de dimensiones”

Un intento para proporcionar una explicación general para el desempeño lineal reportado de la búsqueda aleatoria secuencial se basó en un análisis teórico de búsqueda adaptiva pura (PAS)^{19,20}. La búsqueda adaptiva pura es un método de búsqueda aleatoria secuencial que mejora consistentemente la función objetivo en cada iteración²⁰. Pero para interpretarla de forma amplia, cada punto candidato se genera de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto del nivel de mejora (conjunto de puntos con valores mejorados de la función objetivo). Se ha probado²⁰ que

el número esperado de iteraciones es una función lineal de la dimensión del problema. Este resultado de linealidad se mantiene para una función convexa y para un problema de optimización global (no convexa) sobre un dominio continuo.

El resultado de linealidad teórico se extiende a problemas de optimización global discreta finita²¹. Los resultados actuales^{22,23} extienden los resultados de desempeño a formas más generales de PAS, llamados búsqueda adaptiva vacilante (HAS). La búsqueda adaptiva vacilante relaja la consideración de que cada iteración produce un punto mejorado y permite al algoritmo “divagar” antes que mejorar. Estos resultados teóricos combinados con la experiencia numérica motiva que los algoritmos de búsqueda aleatoria secuencial sean apropiados para las funciones del tipo caja negra de grandes dimensiones que son características del ambiente de diseño de ingeniería.

4.2.2 Algoritmos Hit and Run

La pregunta remanente es como se puede implementar un algoritmo con desempeño cercano a PAS sobre problemas de optimización global con funciones de caja negra y mezcla de variables continuas y discretas. En 1984, Smith²⁴ mostró que el método hit-and-run se puede usar para generar puntos que son uniformemente distribuidos. El algoritmo Hit-and-Run mejorado (IHR)²⁵ acopla la idea de PAS con el generador hit-and-run para producir un algoritmo de búsqueda aleatoria secuencial que es fácilmente implementado. El concepto es que si el hit-and-run pudiera generar un punto aproximadamente uniforme, entonces PAS predice que sólo necesitamos un número lineal de tales puntos.

El paso principal del algoritmo IHR es²⁵

$$X_{k+a} = \begin{cases} X_k + \lambda_k D_k & \text{si } f(X_k + \lambda_k D_k) < f(X_k) \\ X_k & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde la dirección del vector D_k se genera como en hit-and-run (distribuido uniformemente sobre una hiperesfera) y el tamaño de paso λ_k es uniforme sobre todas las longitudes de paso que mantienen la factibilidad. Si la región factible se describe por ecuaciones lineales, específicamente los límites superiores e inferiores, entonces esto es muy fácil de calcular. Debido a que el algoritmo IHR básico exhibió buen desempeño, tanto teórica como computacionalmente, se han explorado diferentes variaciones.

Una segunda variación al algoritmo hit-and-run fue incorporar un método de función de penalización para restricciones altamente no lineales. Se introdujo un factor de penalización variable, y la actualización secuencial del factor de penalización se puede enlazar al programa de convergencia si se desea.

Una tercera variación a IHR fue extender el generador hit-and-run para ser aplicable a dominios discretos^{26,27}. El hit-and-run como se describió hasta ahora fué definido sobre un dominio continuo. Se realizó una extensión al dominio discreto sobre imponiendo el dominio discreto sobre un sistema continuo de números reales.

Capitulo 5

Ejemplos

El objetivo de esta sección es ilustrar los efectos de la aproximación del operador del tiempo de retardo y del proceso de reducción del modelo en el desempeño del control PI sintonizado con reglas SIMC

5.1 Procesos de Primer Orden mas Tiempo de Retardo

A continuación, se compara el sintonizado SIMC (2.6) con el sintonizado óptimo calculado de resolver numéricamente el problema de optimización (3.7), para procesos de primer orden más retardo. La idea es mostrar los efectos de la aproximación del operador de retardo, $\exp(-\theta s) \approx 1 - \theta s$, sobre la optimización del sintonizado PI. Además de que el modelo de primer orden más tiempo de retardo se usa comúnmente en la práctica para aproximar las dinámicas de procesos de orden mayor y para sintonizar controladores PI.

Dado que $g(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1} \exp(-\theta s)$, se pueden obtener los resultados normalizados usando

las siguientes variables adimensionales o reducidas:

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta / \tau_1 \\ K_{c,r} &= k K_c \\ \tau_{I,r} &= \tau_I / \tau_1 \\ \tau_{c,r} &= \tau_c / \tau_1\end{aligned}\tag{5.1}$$

de manera que el proceso normalizado se puede expresar como $g(s) = \frac{1}{s + 1} \exp(-\theta_r s)$.

De esta forma, el tiempo de retardo reducido θ_r es el único parámetro de la planta y la constante de tiempo de lazo cerrado reducida $\tau_{c,r}$ es el único parámetro del controlador. Debido a que estamos siguiendo la recomendación de Skogestad para establecer τ_c , tenemos que $\tau_{c,r} = \theta_r$. De esta forma, el tiempo de retardo reducido θ_r es el único parámetro libre.

Para $\theta_r = 1$ y $y_{ref} = 1$, en la figura 5.1 se muestra la evolución del RSIE J_2 para tres diferentes condiciones iniciales $K_{c,r}^o$, $\tau_{I,r}^o$. Como una consecuencia de la búsqueda aleatoria, el RSIE muestra intervalos constantes y decrementos. De hecho, para ciertas iteraciones la prueba en la dirección de la búsqueda aleatoria no produce un decremento del RSIE, así que se debe rechazar la dirección de la prueba.

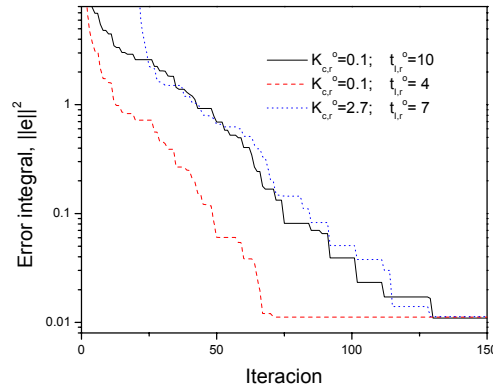


Figura 5.1. Evolución del valor de RSIE J_2 para tres condiciones iniciales diferentes $K_{c,r}$.

La figura 5.2 muestra el retrato de fase $(K_{c,r}, \tau_{l,r})$ correspondiente a la evolución del RSIE descrita antes. Se nota que todas las trayectorias convergen al mismo punto $K_{c,r}=0.725$ y $\tau_{l,r}=1.623$, la cual se considera como el ajuste óptimo. Se debe enfatizar que el ajuste SIMC (2.6) se ha tomado como la suposición inicial, lo cual llega a la convergencia alrededor de las 200 iteraciones. El algoritmo de la búsqueda aleatoria se ha implementado en una PC-Pentium III, y cada corrida dura alrededor de un minuto.

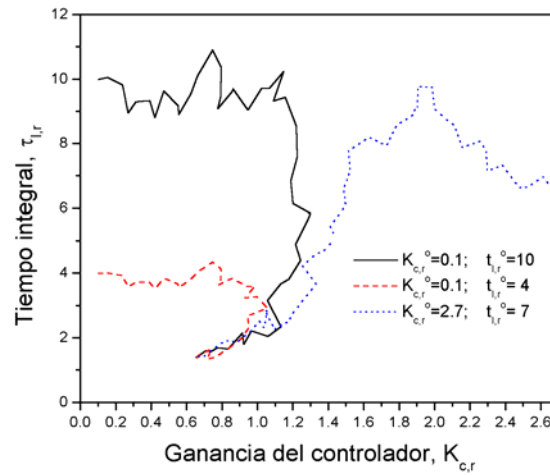


Figura 5.2. Retrato de fase $(K_{c,r}, \tau_{l,r})$ correspondiente a la evolución del $RSIE J_2^{opt}$.

La figura 5.3 muestra el ajuste óptimo $\{K_c^{opt}, t_l^{opt}\}$ y el RSIE J_2 óptimo correspondiente como función del tiempo de retardo reducido, θ_r . Se nota que en las gráficas correspondiente a J_2^{opt} y $K_{c,r}$, se ha usado la escala semilogarítmica para una mejor visualización. Se encuentra un comportamiento similar para θ_r pequeño, lo cual puede corresponde ya sea a un tiempo de retardo pequeño θ o a una constante de tiempo de proceso τ_1 grande. El último caso se puede ver como un proceso que se comporta aproximadamente como un proceso de tiempo de integración¹². Se puede observar lo siguiente:

- i) Respecto al ajuste SIMC, el ajuste óptimo se obtiene aumentando tanto la ganancia del controlador K_c y el tiempo integral τ_l . Esto es, el ajuste óptimo produce una ganancia del controlador y un tiempo integral mayor que el ajuste SIMC.

- ii) A medida que aumenta el tiempo de retardo reducido, el RSIE J_2^{opt} decae más rápido que el RSIE correspondiente al sintonizado SIMC. Esto muestra que se espera cierto aumento en el desempeño para grandes tiempos de retardo.
- iii) Para $\theta_r > 0.125$, el RSIE para ambos ajustes es menor que el 10%. Para $\theta_r > 1.5$, el RSIE para el ajuste óptimo es menor de 1% y alrededor de 7% para el ajuste SIMC. Esto significa que el sintonizado SIMC y el sintonizado óptimo deben dar un desempeño similar.
- iv) Para $\theta_r < 0.125$, el ajuste SIMC produce un RSIE alrededor del 40%, mientras que el ajuste óptimo da un RSIE alrededor del 10%.

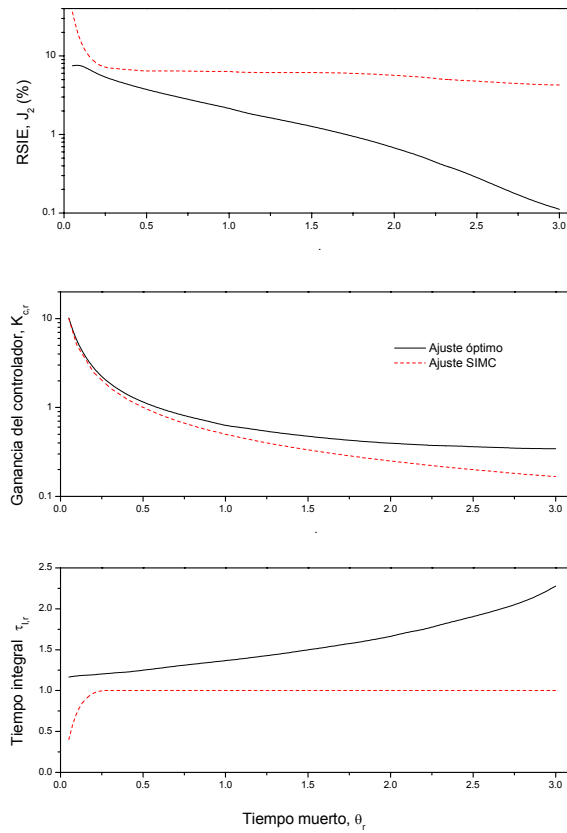


Figura 5.3. Ajuste óptimo $\{K_c^{opt}, \tau_{I,r}^{opt}\}$ y el valor óptimo correspondiente de RSIE J_2 como función

del tiempo de retardo θ_r , para el proceso $g(s) = \frac{1}{s+1} \exp(-\theta_r s)$.

Los resultados anteriores indican que el sintonizado óptimo conduce a controladores PI con capacidad de estabilización aumentada (aumentando K_c) y propiedad de regulación disminuida (aumentando τ_I). Excepto para tiempos de retardo relativo pequeño $\theta_r = \theta / \tau_I$, con el ajuste óptimo no se obtiene mejora significativa en el desempeño de control, representada por el RSIE J_2 . De esta manera se concluye que la aproximación del tiempo de retardo $\exp(-\theta s) \approx 1 - \theta s$ no introduce degradación significativa al desempeño del control PI, así que las reglas de sintonizado SIMC (2.6) se pueden considerar aceptablemente cercanas al ajuste óptimo.

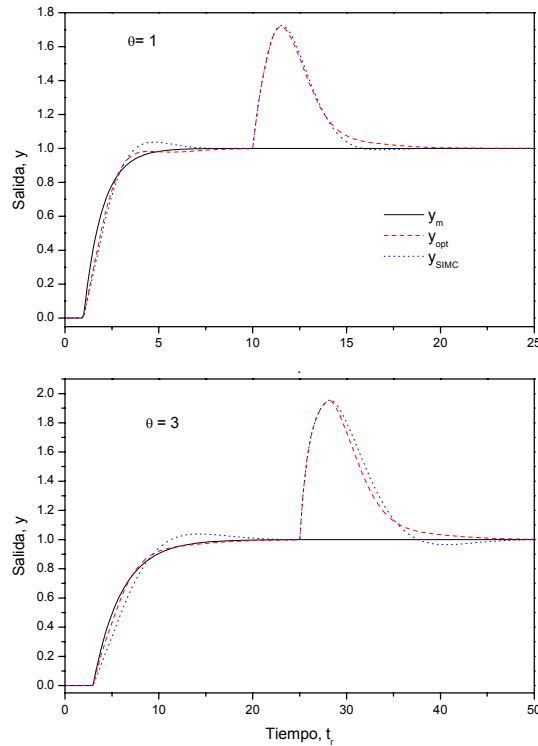


Figura 5.4. Respuesta de salida del proceso bajo los ajustes óptimos y SIMC para

$$g(s) = \frac{1}{s+1} \exp(-\theta_r s) \text{ y para } \theta_r=1 \text{ y } \theta_r=3.$$

Esto se ilustra en la figura 5.4, la cual presenta la respuesta del proceso bajo los ajuste óptimos y SIMC. De hecho, se encuentran diferencias marginales entre las respuestas óptimas y SIMC para $\theta_r=1$ y $\theta_r=3$, aún en el caso de disturbios externos, mostrando que para procesos de

primer orden más tiempo de retardo el compensador PI sintonizado con reglas SIMC es bastante aceptable en comparación con el ajuste PI óptimo, aún en la presencia de disturbios externos. Solamente para procesos de tipo integrador donde θ_r es pequeño, el uso de sintonizado óptimo puede ofrecer mejoras importantes en el desempeño.

5.2 Procesos de Orden Mayor

Una segunda fuente de aproximación es el proceso de reducción del modelo, con el cual se convierte un proceso de orden mayor en un modelo de primer o segundo orden. Para este fin, se usa un proceso de 7° orden⁹:

$$g_0(s) = \frac{(-0.3s + 1)(0.08 + 1)}{(2s + 1)(s + 1)(0.4s + 1)(0.2s + 1)(0.05s + 1)^3} \quad (5.2)$$

Este proceso es interesante porque contiene polos lentos y rápidos (de 100 a 0.5) y ceros de fase mínima y no mínima. La Regla T3 de Skogestad⁹ produce la aproximación

$$\frac{0.08s + 1}{0.2s + 1} \approx \frac{1}{0.12s + 1}$$

y la regla media (2.2) da un proceso de primer orden más tiempo de retardo con $k=1$, $\theta=1.47$ y $\tau_I=2.5$. En este caso la regla SIMC (2.6) resulta en $K_c^{SIMC}=0.85$ y $\tau_I^{SIMC}=2.5$. Por otra parte, el ajuste óptimo resultante es $K_c^{opt}=1.009$ y $\tau_I^{opt}=1.28$.

La figura 5.5 muestra que al menos para este proceso de orden mayor las reglas de sintonizado óptimo basadas en el modelo original de 7° orden no proporciona una mejora significativa en el desempeño en comparación con las reglas de sintonizado SIMC basadas en el modelo reducido de primer orden mas tiempo de retardo. Esto es lo que se podría esperar a partir de los cálculos hechos para el proceso de primer orden mas tiempo de retardo en la subsección anterior. De hecho, para este caso se tiene el retardo normalizado $\theta_r=0.588$, para el cual no se obtiene una mejora significativa en el desempeño del control, representado por el RSIE J_2 , con el ajuste óptimo (ver Figura 5.3).

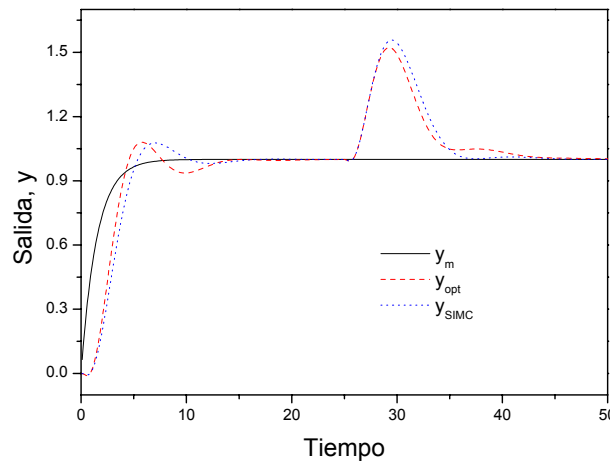


Figura 5.5. Respuesta del proceso controlado (5.2) bajo los ajustes de control PI óptimos y SIMC.

Este ejemplo es representativo en el sentido en que se han resuelto todos los casos reportados en la Tabla 4 de Skogestad⁹, encontrando resultados similares. De esta manera, se puede concluir que las reglas de sintonizado SIMC ofrecen procedimientos para un fácil sintonizado PI/PID con respuesta y con márgenes de robustez aceptables. Esto se puede atribuir a los siguientes hechos:

- i) Retener los polos dominantes proporciona una sobrelimitación sobre las escalas de tiempo dominantes del proceso, lo cual es crucial para un desempeño robusto a bajas frecuencias, y
- ii) Agregar polos rápidos y ceros de respuesta inversa al tiempo de retardo efectivo θ y seleccionar a la constante de tiempo de lazo cerrado τ_c no mayor que θ proporciona una protección contra dinámicas inestables de alta frecuencia. Esto es, el controlador PI se diseña de manera que el proceso controlado no sea más rápido que la dinámica efectiva retrasada del proceso.

Se nota que tanto el sintonizado óptimo y el SIMC producen una respuesta de lazo cerrado con un sobretiro significativo (alrededor del 15%), lo cual se puede deber a la presencia de un cero en el lado derecho (respuesta inversa). Se pueden obtener tiempos de asentamiento aceptables probando con constantes de tiempo de lazo cerrado más grandes

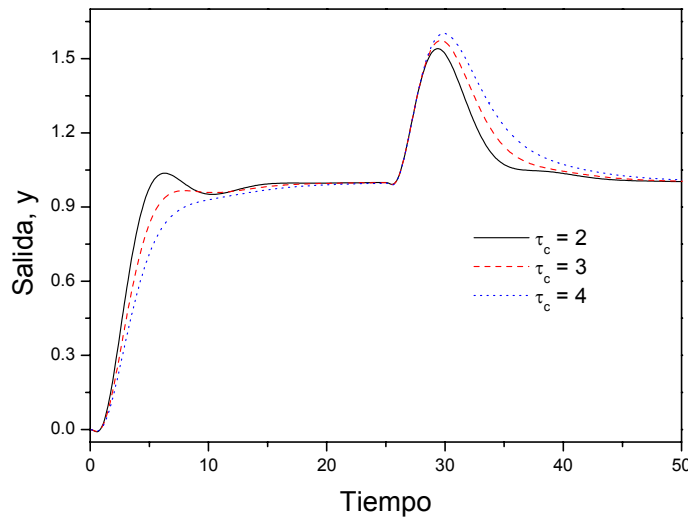


Figura 5.6. Respuesta del proceso controlado (5.2) bajo los ajustes óptimos, para diferentes valores de la constante de tiempo de lazo cerrado τ_c .

En la Figura 5.6 se muestra la respuesta del proceso controlado bajo los ajustes óptimos para tres diferentes valores de la constante de tiempo de lazo cerrado τ_c . Se observa que mientras mayor sea el valor de τ_c , el bajotiro es menos severo y la respuesta de salida es más lenta. De esta forma, con este ejemplo se muestra como se pueden usar los procedimientos de diseño óptimos basados en técnicas de optimización numéricas para refinar ajustes de control PI obtenidos a partir de simples reglas analíticas IMC.

Hasta ahora, sólo hemos considerado las reglas de sintonizado IMC reportadas por Skogestad⁹. Sin embargo, Isaksson y Graebe⁷ también han reportado reglas analíticas de sintonizado basadas en procedimientos de reducción de modelo. Se considera el proceso de 3^{er} orden

$$g_0(s) = \frac{-2s + 1}{(s + 1)^3} \quad (5.3)$$

Este caso es más severo que el proceso (5.2). De hecho, el proceso (5.3) tiene un cero de fase no mínima en +0.5, el cual está más cercano al origen que el polo dominante localizado en -1. Tal situación impone una limitación seria en el desempeño del proceso controlado¹³. Para este proceso, se puede obtener un modelo de primer orden mas retardo con $\tau_I = 1.5$ y $\theta = 3.5$. El sintonizado IMC obtenido con el método de Isaksson y Graebe es $K_c = 0.36$ y $\tau_I = 2.0$.

En la Figura 5.7 se muestra el tiempo de respuesta, bajo cambio de setpoint y disturbio, para este sintonizado y para el óptimo. En este caso, $\theta_r=2.333$ así que se puede obtener una mejora moderada en el desempeño con el ajuste PI óptimo lo que se refleja en un menor sobredisparo en la respuesta al cambio escalón en el setpoint y buena compensación a los disturbios.

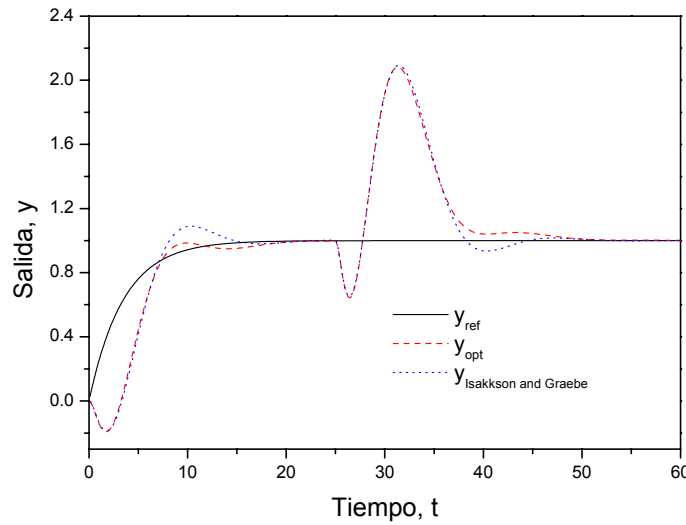


Figura 5.7. Respuesta del proceso controlado (16) bajo el sintonizado de Isakkson y Graebe y el óptimo con $\tau_c=3.5$

5.3 Sintonizado para Trayectoria de Referencia

Hemos considerado el sintonizado IMC cuando la respuesta deseada satisface un modelo interno de primer orden. Con frecuencia, la respuesta deseada esta dada como una trayectoria de referencia explícita $y_{ref}(t)$. En este caso, el problema de optimización se puede plantear como minimizar el ISE, donde el error instantáneo está dado por $\epsilon_t = y_t - y_{ref,t}$. Para ilustrar esto, se considera un cambio en el setpoint que siga la trayectoria en forma de rampa

$$y_{ref}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 15^{-1}t & \text{si } 0 \leq t \leq 15 \\ 1 & \text{si } t > 15 \end{cases}$$

En este caso, el ajuste óptimo es $K_c=0.432$ y $\tau_I=2.65$.

La figura 5.8 presenta la respuesta del sistema controlado, mostrando que no es posible el trazo cercano de la trayectoria de la rampa con un controlador PI (óptimo) debido a la presencia del cero inestable localizado en $+0.5$. Sin embargo, se elimina el bajotiro mientras que se logra la convergencia al setpoint sin sobretiro. Este ejemplo ilustra como se pueden extender las metodologías IMC para considerar situaciones de sintonizado PI/PID más generales por medio de técnicas de optimización numérica.

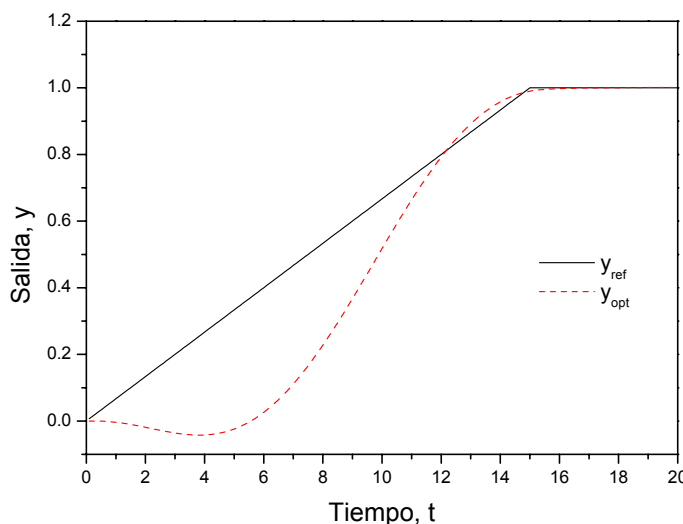


Figura 5.8. Sintonizado óptimo PI para referencia en forma de rampa.

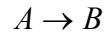
5.4 Sistema de Control para dos Reactores Químicos

En esta sección se describe el desarrollo paso a paso de un sistema de control a un proceso de dos reactores químicos²⁸ que se ilustran en la Figura 5.9, terminando con la aplicación y comparación de los procedimientos de sintonizado descritos para controladores PI.

Aunque todos los ejemplos presentados se tomaron de trabajos aplicados al área de ingeniería química. En este ejemplo se presenta de manera mas detallada la aplicación de los procedimientos de sintonizado en el control de procesos en ingeniería química.

5.4.1 Descripción del Sistema

Una corriente de líquido entra en el tanque 1 a una velocidad de flujo volumétrico de F ft³/m y contiene un reactante A a una concentración de c_0 moles de A/ft³. El reactante A se descompone en los tanques de acuerdo con la reacción química irreversible.



La reacción es de primer orden y ocurre a una velocidad

$$r = kc$$

donde r = moles de A que se consumen/(ft³)(tiempo)

c = concentración de A, moles de A / ft³

k = constante de velocidad de reacción, función de la temperatura.

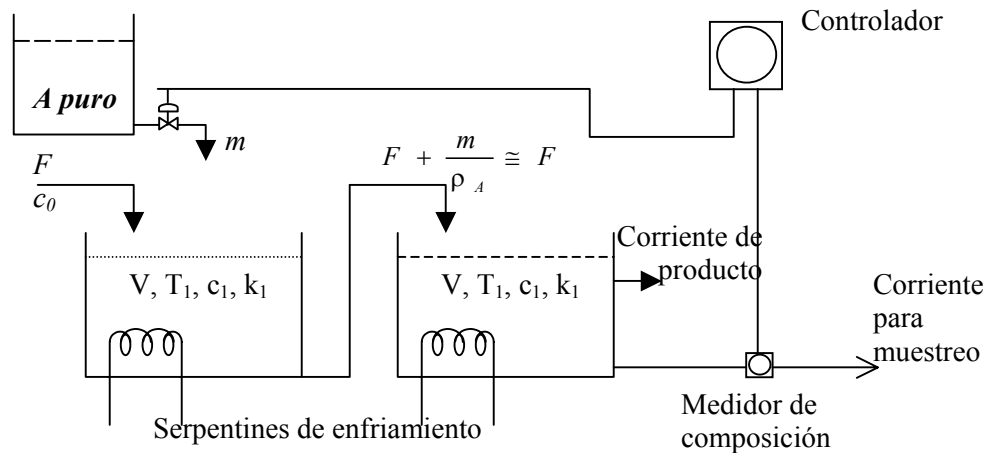


Figura 5.9. Control de dos reactores químicos de tanque agitado

La reacción se realiza en dos tanques agitados en serie. Los tanques se mantienen a diferentes temperaturas. La temperatura en el tanque 2 será mayor que la temperatura en el tanque 1, con el resultado de que k_2 , la constante de velocidad en el tanque 2, es mayor que la del tanque 1, k_1 . Debemos despreciar cualquier cambio en las propiedades físicas debido a la reacción química.

El propósito del sistema de control es mantener c_2 , la concentración de A que sale del tanque 2, en algún valor deseado a pesar de variaciones en la concentración de entrada c_0 . Esto se realizará añadiendo una corriente de A puro al tanque 1 por medio de una válvula de control..

Funciones de Transferencia del Reactor

Se empieza el análisis haciendo un balance de materia de A alrededor del tanque 1; así,

$$V \frac{dc_1}{dt} = Fc_0 - \left(F + \frac{m}{\rho_A} \right) c_1 - k_1 V c_1 + m \quad (5.4)$$

donde m = tasa de flujo molar de A puro a través de la válvula, lbmol/min

ρ_A = densidad de A puro, lb mol/ft³

V = volumen de retención del tanque, constante, ft³

Se considera que el flujo volumétrico de A a través de la válvula m/ρ_A es mucho menor que el flujo de entrada F con el resultado que la Ec. (5.4) se puede escribir como

$$V \frac{dc_1}{dt} + (F + k_1 V) c_1 = Fc_0 + m \quad (5.5)$$

Esta última ecuación se pueda escribir en la forma

$$\tau_1 \frac{dc_1}{dt} + c_1 = \frac{1}{(1 + k_1 V / F)} c_0 + \frac{1}{F(1 + k_1 V / F)} m \quad (5.6)$$

donde

$$\tau_1 = \frac{V}{F + k_1 V}$$

en estado estable, $\frac{dc_1}{dt} = 0$, y la Ec. (5.6) se vuelve

$$c_{1s} = \frac{1}{(1 + k_1 V / F)} c_{0s} + \frac{1}{F(1 + k_1 V / F)} m_s \quad (5.7)$$

donde s se refiere al estado estable.

Restando la Ec. (5.7) de la (5.6) e introduciendo las variables de desviación

$$C_I = c_I - c_{Is}$$

$$C_0 = c_0 - c_{0s}$$

$$M = m - m_s$$

Se obtiene

$$\tau_1 \frac{dC_1}{dt} + C_1 = \frac{1}{(1 + k_1 V / F)} C_0 + \frac{1}{F(1 + k_1 V / F)} M \quad (5.8)$$

Calculando la transformada de Laplace de la Ec. (5.8) se obtiene la función de transferencia del primer reactor:

$$C_1(s) = \frac{1/(1 + k_1 V / F)}{\tau_1 s + 1} C_0(s) + \frac{1/[F(1 + k_1 V / F)]}{\tau_1 s + 1} M(s) \quad (5.9)$$

Una balance de materia de A alrededor del tanque 2 da

$$V \frac{dc_2}{dt} = F(c_1 - c_2) - k_2 V c_2 \quad (5.10)$$

Al igual que en el tanque 1, la última ecuación se puede escribir en términos de variables de desviación y arreglar para dar

$$\tau_2 \frac{dC_2}{dt} + C_2 = \frac{1}{(1 + k_2 V / F)} C_1 \quad (5.11)$$

donde

$$\tau_2 = \frac{V}{F + k_2 V}$$

$$C_2 = c_2 - c_{2s}$$

Tomando la transformada de Laplace de la Ec. (5.11) se obtiene la función de transferencia para el segundo reactor:

$$C_2(s) = \frac{1/(1 + k_2 V / F)}{\tau_2 s + 1} C_1(s) \quad (5.12)$$

Para obtener algunos resultados numéricos, debemos asumir que se aplican los siguientes datos al sistema:

$$\begin{aligned} \text{Peso molecular de } A &= 100 \text{ lb/lb mol} \\ \rho_A &= 0.8 \text{ lb mol/ft}^3 \\ c_{0s} &= 0.1 \text{ lb mol A/ft}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= 100 \text{ ft}^3/\text{min} \\
 m_s &= 1.0 \text{ lb mol/min} \\
 k_1 &= 1/6 \text{ min}^{-1} \\
 k_2 &= 2/3 \text{ min}^{-1} \\
 V &= 300 \text{ ft}^3
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estas constantes en los parámetros del problema se obtienen los siguientes valores

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= 2 \text{ min} \\
 \tau_2 &= 1 \text{ min} \\
 c_{1s} &= 0.0733 \text{ lb mol A/ft}^3 \\
 c_{2s} &= 0.0244 \text{ lb mol A/ft}^3 \\
 m_s/\rho_A &= 1.25 \text{ ft}^3/\text{min}
 \end{aligned}$$

Válvula de control

Se asume que la válvula de control seleccionada para el proceso tiene las siguientes características:

- ❖ El flujo de A a través de la válvula cambia linealmente desde cero a 2 ft³/min mientras la presión de la válvula cambia desde 3 a 15 psig.
- ❖ La constante de tiempo τ_v la válvula es tan pequeña comparada con las otras constantes de tiempo en el sistema que su dinámica puede despreciarse.

A partir de los datos dados, la sensibilidad de la válvula se calcula como

$$K_v = \frac{2-0}{15-3} = \frac{1}{6} \frac{\text{ft}^3/\text{min}}{\text{psi}}$$

Debido a que $\frac{m_s}{\rho_A} = 1.25 \frac{\text{ft}^3}{\text{min}}$, la presión de operación normal de la válvula es

$$m = [1.25 + K_v(p - 10.5)]\rho_A \quad (5.13)$$

En términos de variables de desviación, esto se puede escribir

$$M = K_v \rho_A P \quad (5.14)$$

Donde

$$M = m - 1.25\rho_A$$

$$P = p - 10.5$$

Tomando la transformada de Lapalce de la Ec. (5.14) se obtiene

$$\frac{M(s)}{P(s)} = K_v \rho_A \quad (5.15)$$

como la función de transferencia de la válvula.

Elemento de medición

Se asume que el elemento de medición convierte la concentración de A en una señal neumática. Específicamente, la salida del elemento de medición cambia desde 3 a 15 psig mientras la concentración de A cambia de 0.01 a 0.05 lb mol A/ft³. Se asume que el aparato de medición de la concentración es lineal y tiene un retardo despreciable. Por lo tanto, la sensibilidad (o ganancia) del aparato de medición es

$$K_m = \frac{15 - 3}{0.05 - 0.01} = 300 \text{ psi}$$

Debido a que c_{2s} es 0.0244 lb mol/ft³, la señal normal del aparato de medición es

$$\frac{0.0244 - 0.01}{0.05 - 0.01} (15 - 3) + 3.0 = 4.32 + 3.0 = 7.32 \text{ psig}$$

por lo tanto, la ecuación para el aparato de medición es

$$b = 7.32 + K_m(c_2 - 0.0244) \quad (5.16)$$

donde b es la presión de salida (psig) del aparato de medición. En términos de las variables de desviación, la Ec. (5.16) se vuelve

$$B = K_m C_2 \quad (5.17)$$

Donde $B = b - 7.32$ y $C_2 = c_2 - c_{2s}$.

Por lo tanto, la función de transferencia para el aparato de medición es

$$\frac{B(s)}{C_2(s)} = K_m \quad (5.18)$$

Un aparato de medición que cambia las unidades entre las señales de entrada y salida se llama transductor, en el presente caso, la señal de la concentración es convertida a una señal neumática.

Controlador

Por conveniencia, debemos asumir que el controlador tiene acción proporcional, en cuyo caso la relación entre la presión de salida del controlador y el error es

$$p = p_s + K_c(c_R - b) = p_s + K_c \left(\varepsilon + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon dt \right) \quad (5.19)$$

donde c_R = señal neumática deseada (o setpoint), psig

K_c = sensibilidad del controlador, psig/psig

τ_I = constante de tiempo integral, min

ε = error = $c_R - b$, psig

En términos de las variables de desviación, la Ec. (5.19) se vuelve

$$P = K_c \left(\varepsilon + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon dt \right) \quad (5.20)$$

La transformada de Laplace de esta ecuación da la función de transferencia del controlador

$$G_c = \frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \quad (5.21)$$

Considerando que el setpoint y la señal del aparato de medición son iguales cuando el sistema está en estado estacionario bajo condiciones normales, tenemos para el valor de referencia del setpoint

$$c_{Rs} = b = 7.32 \text{ psig}$$

La variable de desviación correspondiente para el setpoint es

$$C_R = c_R - c_{Rs}$$

Retardo de transporte

Una porción del líquido que deja el tanque 2 se retira continuamente a través de una línea de muestreo, conteniendo un elemento medidor de concentración, a una tasa de 0.1 ft³/min. El elemento de medición se debe colocar a cierta distancia del proceso, debido a que se debe mantener

cuidado en las condiciones ambientales para tener mediciones exactas de la concentración. La línea de muestra tiene una longitud de 50 ft, y el área de sección transversal de la línea es de 0.001 ft².

La línea de muestreo se puede representar por un retardo en la medición con parámetros

$$\theta = \frac{\text{volumen}}{\text{tasa de flujo}} = \frac{(50)(0.001)}{0.1} = 0.5 \text{ min}$$

Por lo tanto, la función de transferencia para la línea de muestreo es

$$e^{-\theta s} = e^{-0.5s}$$

Diagrama de bloques

Ahora se ha terminado el análisis de cada componente del sistema de control y se ha obtenido una función de transferencia para cada uno. Estas funciones de transferencia ahora se pueden combinar de manera que el sistema global se represente por el diagrama de bloques de la Figura 5.10.

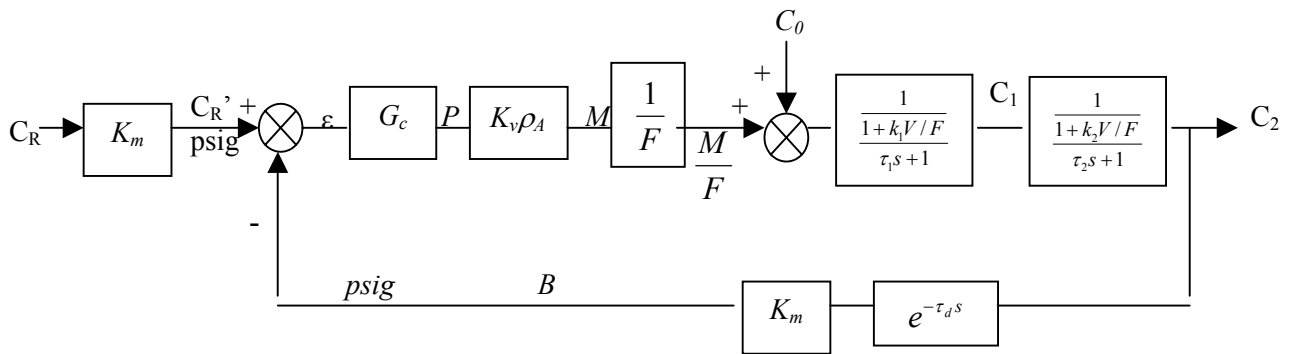


Figura 5.10. Diagrama de bloques de un sistema de control de dos reactores químicos.

En la Figura 5.10, un bloque que contiene la función de transferencia K_m se coloca en la entrada positiva del comparador para relacionar el setpoint en unidades de concentración a una señal neumática, lo cual hace coincidir las unidades de la señal de retroalimentación B.

En la Figura 5.11 se muestra un diagrama equivalente en el cual se han combinado algunos bloques y en la Figura 5.12 se simplifica mas el diagrama para mostrar el sistema y la función de transferencia del proceso a los que se le realizan los procedimientos de sintonizado.

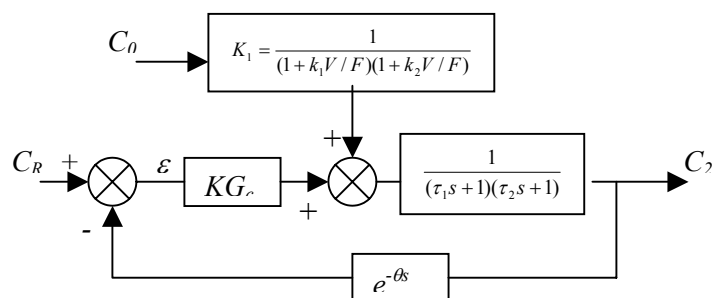


Figura 5.11. Diagrama de bloques equivalente para el sistema de control de dos reactores químicos.

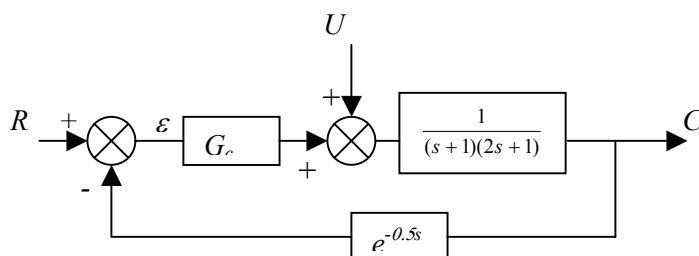


Figura 5.12. Diagrama de bloques simplificado para el sistema de control de dos reactores químicos.

Las cantidades numéricas para los parámetros de las funciones de transferencia son los siguientes:

$$\tau_1 = 2$$

$$\tau_2 = 1$$

$$K_1 = \frac{1}{4.5}$$

$$\text{Ganancia de lazo abierto} = K = \frac{K_m K_v \rho_A}{F \left(1 + \frac{k_1 V}{F}\right) \left(1 + \frac{k_2 V}{F}\right)} = 0.09$$

De esta manera, la función de transferencia de proceso queda

$$g_0(s) = \frac{e^{-0.5s}}{(s+1)(2s+1)} \quad (5.22)$$

Sintonización

Aplicando el procedimiento de reducción de modelo se obtiene un modelo de primer orden mas tiempo muerto con parámetros $\theta = 1.5$ y $\tau_l = 2$.

Aplicando el sintonizado SIMC se obtienen los ajustes para el controlador PI: $K_c^{SIMC} = 2/3$ y $\tau_I^{SIMC} = 2$. Al realizar el procedimiento de sintonizado óptimo se obtienen los valores $K_c^{opt} = 0.9754$ y $\tau_I^{opt} = 3.17294$. En la Figura 5.13 se muestra el salida del controlador PI bajo los ajustes óptimo y SIMC para un cambio escalón en el setpoint y para un disturbio. En esta figura se aprecia que, para este sistema, con el sintonizado óptimo se obtiene un refinamiento respecto al sintonizado SIMC al presentar un menor sobredisparo y una respuesta aceptable a la perturbación.

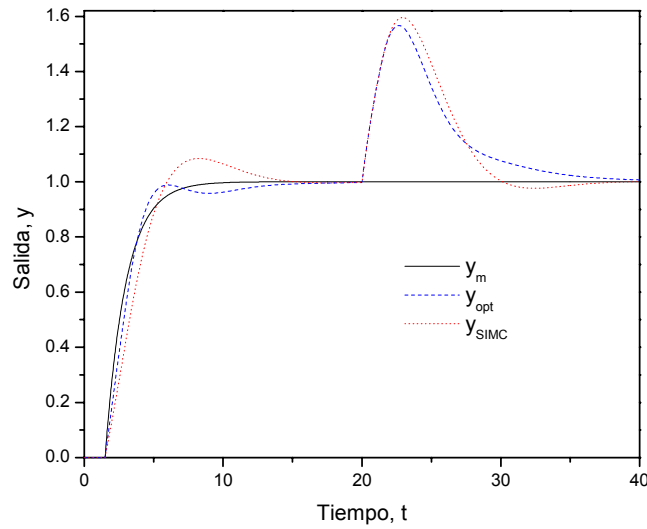


Figura 5.13. Respuesta de salida para el sistema de control de dos reactores químicos bajo los ajustes óptimos y SIMC.

5.5 Sintonizado con Restricción en la Entrada de Control

En este ejemplo se considera el proceso $g(s)=\exp(-s)/(s+1)$ sujeto a la restricción en la entrada de control (ver Cominos y Munro⁸):

$$\left| \frac{du}{dt} \right| \leq 0.5 \quad (5.23)$$

Esto es, la tasa de cambio de la entrada de control no puede ser más grande que 0.5, lo cual puede reflejar restricciones impuestas por la dinámica del actuador (válvulas, equipo de transferencia de calor, etc.).

Para incorporar esta restricción se aproxima la derivada temporal por una diferencial hacia atrás de primer orden, de tal forma que la restricción (5.23) se aproxima como $|u_t - u_{t-T}| \leq 0.5T$, donde T se puede interpretar como el paso de integración usado ó el periodo de muestreo. El ajuste SIMC, el cual no considera la entrada de control restringida, es $K_c=0.5$ y $\tau_I=1$. Por otra parte, el ajuste óptimo obtenido refinando este ajuste SIMC es $K_c=0.56$ y $\tau_I=1.57$.

La figura 5.14 presenta la dinámica de la respuesta de salida y de la entrada de control para los ajustes SIMC y óptimos. Se nota que el ajuste SIMC conduce a un sobretiro severo inducido por el tiempo integral tan pequeño. El ajuste óptimo produce un comportamiento más suave con casi 50% menos en el RSIE debido a que el controlador PI se ha desintonizado ligeramente aumentando tanto la ganancia del controlador y el tiempo integral.

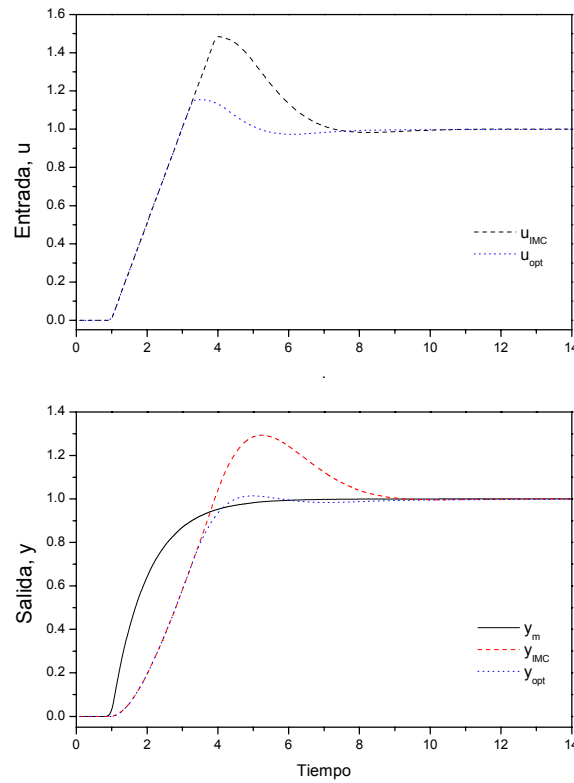


Figura 5.14. Dinámica de la respuesta de salida y de la entrada de control para los ajustes SIMC y

óptimo, para el proceso $g(s) = \frac{1}{s+1} \exp(-\theta_r s)$ bajo la restricción $\left| \frac{du}{dt} \right| \leq 0.5$.

Capítulo 6

Conclusiones Generales y Observaciones para Trabajos Futuros

6.1 Conclusiones Generales

En esta tesis se estudió la optimización de las reglas de sintonizado IMC para hacer coincidir la respuesta de un modelo de referencia. Se mostró que para un gran intervalo de tiempos de retardo, la expansión del operador de tiempo de retardo $\exp(-\theta s) \approx 1 - \theta s$ no limita seriamente el desempeño de los controladores PI sintonizados con las reglas IMC. Por otra parte, los procedimientos heurísticos de reducción de modelo, similares a la regla media, para obtener procesos de primer o segundo orden funcionan bien debido a que proporcionan al controlador PI/PID protección contra dinámicas de alta frecuencia inducidas por tiempos de retardo reales y dinámicas de respuesta inversa. Aunque las reglas de sintonizado analíticas IMC dan un desempeño

Capítulo 6. Conclusiones Generales y Observaciones para Trabajos Futuros

industrial aceptable PI/PID para una gran variedad de plantas, los procedimientos basados en la optimización son reglas heurísticas (búsqueda aleatoria, algoritmos genéticos, etc.) pueden ofrecer un mejor sintonizado de control PI con un mínimo de esfuerzo computacional bajo condiciones de coincidencia de modelo no consideradas por los métodos analíticos de sintonizado IMC.

6.2 Observaciones para Trabajos Futuros

Se debe realizar una exploración adicional del sintonizado PI/PID óptimo incorporando restricciones en el desempeño (sobretiro máximo) y en la entrada de control (saturación en la entrada de control). La incorporación de este tipo de restricciones no lineales dentro de una formulación analítica IMC parece ser una tarea difícil, sin embargo, se puede manejar fácilmente dentro de la estructura de optimización numérica descrita anteriormente.

En el ejemplo de la sección 5.5 se muestra que resintonizar los ajustes analíticos IMC puede conducir a mejoras significativas en el desempeño cuando están presentes o se imponen restricciones difíciles al sistema de control.

De manera similar al método propuesto por Panagopoulus *et al.*¹⁰, la técnica de optimización numérica, ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia, es una estructura confiable para extender los resultados existentes en reglas analíticas de sintonizado IMC. Se ha mostrado que los procedimientos analíticos de reducción del modelo y sintonizado PI/PID, uno de los cuales es el de Skogestad, dan una respuesta aceptable para la mayoría de las condiciones. Sin embargo, el sintonizado óptimo IMC proporciona una herramienta *adicional* para refinar los ajustes analíticos a expensas de una modesta complejidad y esfuerzo computacional.

Capítulo 7

Referencias

- (1) Dahlin, E. G. Designing and tuning digital controllers, *Inst. Contr. Syst.*, **1968**, 41, 77-81.
- (2) O'Dwyer, A. Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules, *Word Scientific Publishing*, Singapore, 2003.
- (3) Rivera D. E., Morari M., Skogestad S. Internal model control 4. PID controller design. *Ind. Eng. Chem. Res.* **1986**, 25, 252-265
- (4) Smith C. A., Corripio A. B. *Principles and Practice of Automatic Process Control*, John Wiley & Sons, New York, 1985
- (5) Chien I. L., Fruehauf P. S. Consider IMC tuning to improve controller performance. *Chem. Eng. Progress* **1990**, 33-41.
- (6) Horn, C. C.; Arulandu, C. J.; Gombas, C. J.; VanAntwerp, J. D.; Braatz, R. D. Improved filter design in internal model control, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **1996**, 35, 3437-3441.
- (7) Isaksson, A. J.; Graebe, S. F. Analytical PID parameter expression for higher order systems, *Automatica*, **1999**, 35, 1121-1130.
- (8) Cominos, P.; Munro, N. PID controllers: recent tuning methods and design to specification,

- IEE Proc. Control Theory Appl.*, **2002**, 149, 46-53.
- (9) Skogestad S., Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *J Process Control* **2003**, 13, 291-309.
- (10) Panagopoulus, H.; Astrom, K. J.; Hagglund, T. Design of PID controllers based on constrained optimization, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, **2002**, 149, 32-40.
- (11) Zabinsky Z. B. Stochastic methods for practical global optimization, *J. of Global Optimization*, **1998**, 13, 433-444.
- (12) Tyreus B. D. and Luyben W. L., Tuning PI controllers for integrator/dead time processes, *Ind. Eng. Chem. Res.* **1992**, 31, 2628-2631.
- (13) Astrom, K. J.; Hagglund, T. *PID controllers: Theory, design and tuning*, Instrument Society of America, North Carolina, 1995.
- (14) Rastrigin, L. A. Extremal control by the method of random scanning, *Automation and Remote Control*, **1960**, 21, 891-896.
- (15) Kirkpatrick, S.; Gelatt, C. D. Jr.; Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing, *Science*, **1983**, 220(4598), 671-679.
- (16) Solis, F. J.; Ets, R. J.-B. Minimization by Random Search Techniques, *Mathematics of Operations Research*, **1981**, 6, 19-30.
- (17) Locatelli, M. Convergence Properties of simulated annealing for continuous global optimization, *Journal of Applied Probability*, **1996**, 33, 1127-1140.
- (18) Schumer, M. A.; Steiglitz, K. Adaptive step size random search, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **1968**, AC-13, 270-276.
- (19) Patel, N. R.; Smith, R. L.; Zabinsky, Z. B. Pure adaptive search in Monte Carlo optimization, *Mathematical Programming*, **1988**, 4, 317-328.
- (20) Zabinsky, Z. B.; Smith, R. L. Pure adaptive search in global optimization, *Mathematical Programming*, **1992**, 53, 323-338.
- (21) Zabinsky, Z. B.; Wood, G. R.; Steel, M. A.; Baritomp, W. P. Finite pure adaptive search, *Mathematical Programming*, **1995**, 69, 443-448.
- (22) Bulger, D. W.; Wood, G. R. Hesitant adaptive search for global optimization, *Mathematical Programming*, **1998**, 81(1), 89-102.
- (23) Wood, G. R.; Zabinsky, Z. B.; Kristinsdottir, B. P. Hesitant adaptive search: the distribution of the number of iterations to convergence, technical report. Central Queensland University.
- (24) Smith, R. L. Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions, *Operations Research*, **1984**, 32, 1296-1308.

- (25) Zabinsky, Z. B.; Smith, R. L.; McDonald, J. F.; Romeijn, H. E.; Kaufman, D. Eimproving Hit and Run for global optimization, *Journal of Global Optimization*, **1993**, 3, 171-192.
- (26) Neogi, S.; Zabinsky, Z. B. ; Tuttle, M. E. Optimal design of composites using mixed discrete and continuous variables, *Proceedings of the ASME Winter Annual Meeting, Symposium on Processing, Design and Performance of Composite Materials*, **1994**, 52, 91-107.
- (27) Romeijn, H. E.; Zabinsky, Z. B.; Graesser, D. L.; Neogi, S. Simulated annealing for mixed integer/continuous global optimization, technical report Erasmus University, *Journal of Optimization: Theory and Applications*, **1999**, 101(1)
- (28) Coughanowr, D. R., *Process Systems Analysis and Control*, McGraw-Hill, New York, 1991.

Apéndice A

Caracterización del proceso

En la mayoría de los métodos para ajuste del controlador se caracteriza al proceso mediante un modelo simple de primer o segundo con tiempo muerto.

Considérese el diagrama de bloques de un circuito de control por retroalimentación

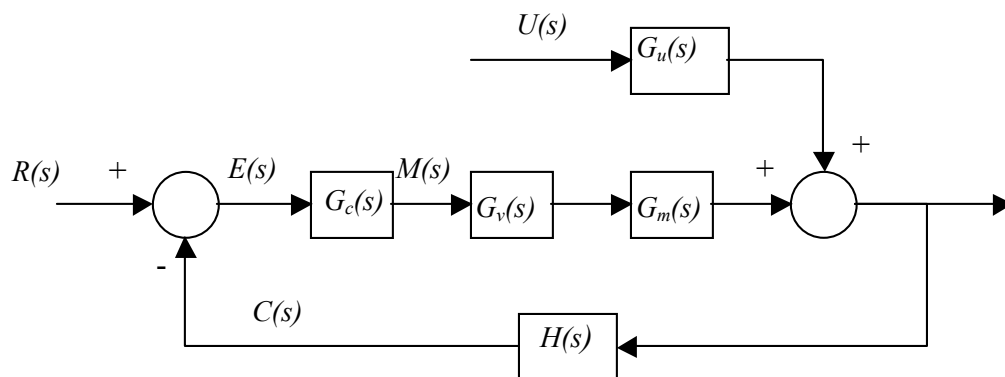


Figura 1.A. Diagrama de bloques del circuito de control por retroalimentación.

Apéndice A. Caracterización del Proceso

Los símbolos que aparecen en el diagrama son

- $R(s)$ transformada de Laplace de la señal del punto de control
- $M(s)$ transformada de Laplace de la señal de salida del controlador
- $C(s)$ transformada de Laplace de la señal de salida del transmisor
- $E(s)$ transformada de Laplace de la señal de error
- $U(s)$ transformada de Laplace de la señal de perturbación
- $G_c(s)$ función de transferencia del controlador
- $G_v(s)$ función de transferencia de la válvula de control (o elemento final de control)
- $G_m(s)$ función de transferencia del proceso entre la variable controlada y la variable manipulada
- $G_u(s)$ función de transferencia del proceso entre la variable controlada y el disturbio
- $H(s)$ función de transferencia del sensor transmisor

En la Figura (2.A) se muestra el diagrama equivalente de bloques donde sólo hay dos bloques en el circuito de control, uno para el controlador y otro para los demás componentes del circuitos.

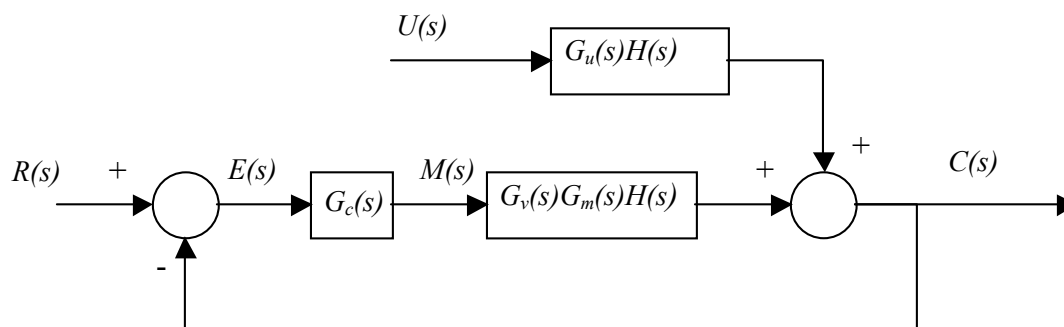


Figura 2.A. Diagrama de bloques equivalente y simplificado en el cual todos los instrumentos de campo y el proceso se concentran en bloques individuales

La ventaja de esta representación simplificada estriba en que se destacan las dos señales del circuito que generalmente se observan y registran: La salida del controlador $M(s)$ y la señal del transmisor $C(s)$. Si a la combinación de las funciones de transferencia de la válvula de control, del proceso y del sensor transmisor se le designa como $G(s)$:

Apéndice A. Caracterización del Proceso

$$G(s) = G_v(s)G_m(s)H(s)$$

Es precisamente esta función de transferencia combinada la que se aproxima mediante los modelos de orden inferior con el objeto de caracterizar la respuesta dinámica del proceso. Los modelos que comúnmente se utilizan para caracterizar al proceso son los siguientes:

Modelo de primer orden más tiempo muerto

$$G(s) = \frac{Ks^{-t_0s}}{\tau s + 1}$$

Modelo de segundo orden más tiempo muerto

$$G(s) = \frac{Ks^{-t_0s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{Ks^{-t_0s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

Para procesos subamortiguados ($\xi < 1$), donde:

K = ganancia del proceso en estado estacionario

t_0 = tiempo muerto efectivo del proceso

τ, τ_1, τ_2 = constantes de tiempo efectivas del proceso

ξ = razón de amortiguamiento efectiva del proceso

De modo que el problema consiste en la manera en que se pueden determinar dichos parámetros para un circuito particular; la solución consiste en realizar algunas pruebas dinámicas en el sistema real o la simulación del circuito en una computadora.; la prueba más simple que se puede realizar es la de escalón que se describe en el Apéndice B.

Apéndice B

Respuestas de procesos

El objetivo de la simulación dinámica, es poder relacionar las respuestas de las salidas de un sistema, con respecto a las señales de entrada (disturbio), esto permite obtener un mejor conocimiento y entendimiento de las características dinámicas del sistema. En la Figura 1.B se describe la relación de una señal de entrada, respecto a una respuesta de salida del proceso.

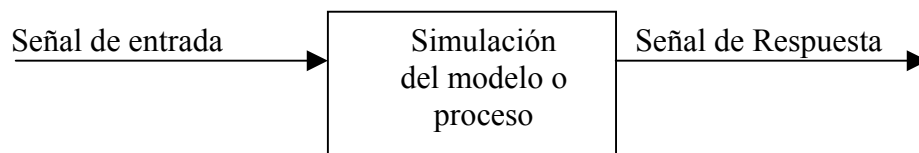


Figura 1.B. Relación de señal de entrada-salida del modelo ó proceso

Poniendo a prueba un proceso, se puede emplear señales de entrada estándares tales como, escalón, pulso unitario, impulso unitario, rampa unitaria y varias señales aleatorias. Utilizando un lenguaje de simulación, todas estas señales o cambios son fácilmente implementables en simulación

dinámica. Las respuestas obtenidas difieren de forma, dependiendo de las características del sistema, y se pueden demostrar por simulación. Las características de la respuesta de un sistema real, por lo tanto, son más complejas. Para poder explicar tal fenómeno, es necesario examinar las respuestas de un sistema menos complejo, utilizando la respuesta en escalón entrada-salida de un sistema.

Respuesta en Escalón para Sistemas de Primer Orden

La respuesta más simple de un sistema lineal, se describe matemáticamente por una ecuación diferencial de primer orden como la siguiente:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = y_0$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_0 - y}{\tau}$$

donde y es el valor de la respuesta del proceso, t es el tiempo, y τ es la constante de tiempo del proceso.

En la Figura 2.B se muestra que las condiciones iniciales están dadas en $y=0$ cuando $t=0$ para una respuesta en escalón. La solución de la ecuación diferencial con las condiciones límite es,

$$y = y_0(1 - e^{-t/\tau})$$

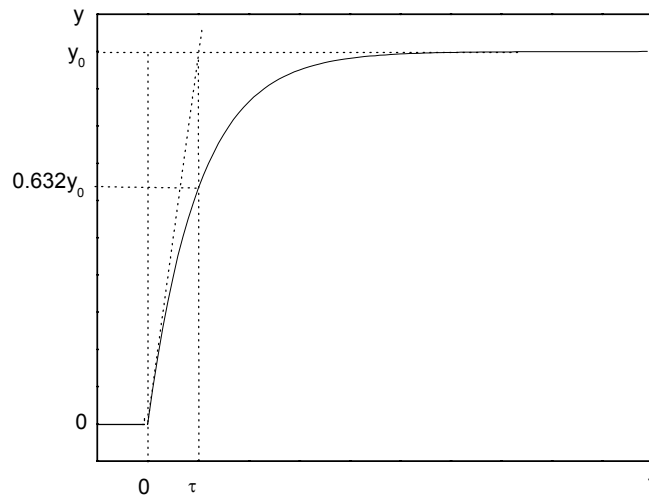


Figura 2.B. Respuesta exponencial de primer orden para una señal de entrada-salida (disturbio) en escalón

Sustituyendo el valor $t = \tau$, tenemos

$$y_{\tau} = y_0(1 - e^{-1}) = 0.632y_0$$

Por lo tanto, el valor de la constante de tiempo τ es simplemente el tiempo en el cual la respuesta logra el 63.2 por ciento de su valor en estado estacionario, cuando se sigue un disturbio en escalón para el sistema.

Apéndice C

Aproximación de las Constantes de Tiempo de Numerador Positivas

A continuación consideramos como obtener un modelo en la forma (9) si tenemos constantes de tiempo de numerador positivo T_0 en el modelo original $g_0(s)$. Se propone cancelar el término del numerador (T_0s+1) contra un término del denominar “vecino” (τ_0s+1) (donde T_0 y τ_0 son positivos y reales) usando las siguientes aproximaciones:

$$\frac{T_0s+1}{\tau_0s+1} \approx \begin{cases} T_0/\tau_0 & \text{para } T_0 \geq \tau_0 \geq \theta & (\text{Re gla T1}) \\ T_0/\theta & \text{para } T_0 \geq \theta \geq \tau_0 & (\text{Re gla T1a}) \\ 1 & \text{para } \theta \geq T_0 \geq \tau_0 & (\text{Re gla T1b}) \\ T_0/\tau_0 & \text{para } \tau_0 \geq T_0 \geq 5\theta & (\text{Re gla T2}) \\ \frac{(\tilde{\tau}_0/\tau_0)}{(\tilde{\tau}_0 - \tau_0)s+1} & \text{para } \tilde{\tau}_0 \stackrel{def}{=} \min(\tau, 5\theta) \geq T_0 & (\text{Re gla T3}) \end{cases}$$

Apéndice C. Aproximación de las Constantes de Tiempo de Numerador Positivas

Aquí θ es el retardo efectivo (final), cuyo valor exacto depende de la aproximación subsecuente de las constantes de tiempo (regla media), así que uno necesita suponer θ e iterar. Si hay mas de una constante de tiempo de numerador positivo, entonces se deben aproximar a cada T_0 una a la vez, empezando con la T_0 más grande.

Normalmente seleccionamos τ_0 como la constante de tiempo del denominador más cercana y más grande ($\tau_0 > T_0$) y usamos las reglas T1, T1a ó T1b. Si no existe una τ_0 más grande, ó si hay una constante de tiempo del denominador menor mas “cercana a” T_0 , entonces se selecciona τ_0 como la constante de mas cercana y mas pequeña ($\tau_0 < T_0$) y se usan las reglas T1, T1a ó T1b.

Para definir “cercana a” mas precisamente, hagamos que τ_{0a} (grande) y τ_{0b} (pequeña) denoten las constantes del denominador vecinas a T_0 . Entonces, seleccionamos $\tau_0 = \tau_{0b}$ (pequeña) si

$$\frac{T_0}{\tau_{0b}} < \frac{\tau_{0a}}{T_0} \text{ y } \frac{T_0}{\tau_{0b}} < 1.6 \text{ (se deben satisfacer ambas condiciones).}$$

Apéndice D

Definición de Términos

Ajuste o Sintonizado. El ajuste es el procedimiento mediante el cual se adecuan los parámetros del controlador por retroalimentación para obtener una respuesta específica de circuito cerrado. Los valores de los parámetros de ajuste dependen de la respuesta de circuito cerrado que se desea, así como de las características dinámicas o personalidad de los otros elementos del circuito de control y particularmente, del proceso.

Variable controlada y variable manipulada. La *variable controlada* es la cantidad o condición que se mide y controla. La *variable manipulada* es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Por lo común, la variable controlada es la salida (el resultado) del sistema. *Controlar* significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar una desviación del valor medido a partir de un valor deseado.

Apéndice D. Definición de Términos

Planta. Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de las partes de una máquina que funcionan juntas, el propósito de la cual es ejecutar una operación particular. En este trabajo llamaremos *planta* a cualquier objeto físico que se va a controlar (tal como una columna de destilación, un horno de calefacción, un reactor químico, etc.)

Proceso. En este trabajo llamaremos *proceso* a cualquier operación que se va a controlar.

Sistema. Un *sistema* es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Un sistema no necesariamente es físico. El concepto de sistema se aplica a fenómenos abstractos y dinámicos, tales como los que se encuentran en la economía. Por lo tanto, la palabra sistema debe interpretarse como una implicación de sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

Perturbaciones. Una *perturbación* es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, en tanto que una perturbación *externa* se produce fuera del sistema y es una entrada.

Control de Retroalimentación. El *control de retroalimentación* se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la distancia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continúa haciendo con base en esta diferencia. Aquí sólo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, dado que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema.

Control en Lazo Abierto. Se refiere a la situación en la cual se desconecta el controlador del sistema, es decir, el controlador no realiza ninguna función relativa a como mantener la variable controlada en el punto de control.

Control en Lazo Cerrado. Se refiere a la situación en la cual se conecta el controlador al proceso; el controlador compara el punto de control (la referencia) con la variable controlada y determina la acción correctiva.

Dinámica. Es la conducta de un proceso dependiente del tiempo.

Apéndice D. Definición de Términos

Modelo Nominal. Es una descripción aproximada de la planta que se usa para el diseño del control.

Robusto. Significa que el controlador sea insensible a las incertidumbres en el modelo del proceso en base al cual se diseña el sistema de control.

Incertidumbre. Grado o medida probable en que el valor observado o calculado de una magnitud puede apartarse del valor real.

Control. Es el ajuste de las variables manipuladas disponibles, para ayudar a lograr una operación aceptable a pesar de la presencia de incertidumbres.

Función de transferencia. Es un método operacional para expresar mediante transformaciones de Laplace la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada de un proceso. Es una propiedad de un sistema dinámico. Es independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.

Setpoint. Es el valor de referencia o punto de operación del proceso.