



Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Matemáticas

**“El problema de tres cuerpos, la esfera de
forma y el encaje del problema de Kepler”**

Tesis que presenta

Nelsy Yolanda Pérez Sántiz

Matrícula

2203801541

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias (Matemáticas)

Director

Dr. Josué Meléndez Sánchez

Jurado

Presidente: Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

Secretario: Dr. Josué Meléndez Sánchez

Vocal: Dr. Mario Gerardo Medina Valdez.

Iztapalapa, Ciudad de México, a 11 de diciembre de 2023.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por el apoyo, confianza, amor e inspiración que me han estado brindando. Principalmente a mis padres, que me han dado y enseñado tanto.

A mis amigas, por todo el cariño, confianza y por cada palabra de aliento que me hicieron seguir adelante.

Al Dr. Josué Meléndez Sánchez, mi asesor, por ser un excelente profesor y por la paciencia que tuvo al enseñarme, además de los aportes que hizo a mi tesis.

A los sinodales, el Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña y el Dr. Mario Gerardo Medina Valdez, por el tiempo dedicado, las sugerencias y correcciones que me ayudaron a mejorar esta tesis.

A CONAHCYT por el apoyo económico recibido durante mis estudios.

Índice general

Índice de figuras	4
Introducción	5
1. Preliminares	7
1.1. El problema de N cuerpos	7
1.2. Leyes de conservación	10
1.3. El problema de dos cuerpos	14
1.3.1. Posición y velocidad orbital	17
1.4. Geometría riemanniana	19
1.4.1. Mecánica geométrica	31
1.4.2. Curvatura gaussiana mecánica	39
2. El problema de tres cuerpos en el plano	44
2.1. Formulación del problema y la masa métrica	44
2.2. Espacio y esfera de forma	47
2.3. Construcción de las proyecciones y las coordenadas de Jacobi	50
2.4. Puntos de colisión doble, Euler y Lagrange	57
2.5. Descomposición de Saari	61

3. Construcción del plano hiperbólico como reducción de un problema de tres cuerpos en el plano.	67
3.1. Planteamiento del problema	67
3.2. Construcción del plano hiperbólico	69
3.3. El subproblema del paralelogramo de cuatro cuerpos	75
3.3.1. El problema de los cuatro cuerpos	75
3.3.2. Reducción del problema	77
4. Encaje del problema de Kepler como una superficie de revolución	81
4.1. El problema de Kepler	82
4.2. Geometría de la métrica de Kepler	84
4.3. Encaje como superficie de revolución en \mathbb{R}^3	88
A. Modelos hiperbólicos	96
A.1. Métricas	96
A.2. Geodésicas	100

Índice de figuras

1.1. Una trivialización local.	28
1.2. Subespacios horizontal y vertical de T_pM	30
1.3. Sección de un haz vectorial.	38
2.1. Vectores de Jacobi	52
2.2. La esfera de forma, centrada en colisión triple.	57
3.1. La proyección del espacio forma es una submersión riemanniana.	73
3.2. Los modelos Jemisphere y semi-espacio H	75
3.3. La esfera de forma para la configuración de paralelogramos.	80
4.1. Encaje de la superficie de Kepler con $h = 0$	90
4.2. Encaje de la superficie de Kepler con $h = 1$	91
4.3. <i>Encaje parcial</i> de la superficie de Kepler con $h = -1$	93
A.1. Los dos tipos de geodésicas en H	101
A.2. Geodésicas en H	102
A.3. Isometría entre los modelos de Klein y Jemisphere.	102

Introducción

En mecánica se estudian los movimientos de partículas o sistemas de partículas sujetos a fuerzas conocidas. En este trabajo estudiaremos la dinámica y geometría del problema de dos cuerpos, la reducción a la esfera de forma del problema planar de tres cuerpos y de uno de los subproblemas invariantes del problema de cuatro cuerpos usando potenciales diferentes.

En el capítulo 1 se introduce el problema de N cuerpos y, como caso particular, se expone el problema de dos cuerpos en el plano. La geometría riemanniana es una de las disciplinas que podemos usar para estudiar la mecánica newtoniana. Esto es posible gracias a que la energía cinética de cualquier sistema mecánico da lugar a una métrica riemanniana en su espacio de configuración, esto es, la variedad diferenciable cuyos puntos representan las configuraciones del sistema. Terminamos el capítulo usando geometría riemanniana para dar una formulación geométrica de la mecánica newtoniana.

En el capítulo 2 presentaremos un problema planar de tres cuerpos como una dinámica en el espacio de clases de congruencia de triángulos, donde las masas de los tres cuerpos forman los vértices. Esto es equivalente a reducir la dimensión del problema original, obteniendo el espacio de triángulos congruentes. Además, localizaremos en la *esfera de forma* los puntos de colisión doble, los puntos de Euler y Lagrange para partículas con masas unitarias.

En el capítulo 3 construiremos el plano hiperbólico como reducción de un problema de tres cuerpos por reducción simétrica usando un potencial diferente a uno tipo $1/r^2$,

usando submersiones riemannianas. La reducción por escalamiento solo es posible porque el potencial será homogéneo de grado -2 . El método de reducción usa la métrica de Jacobi-Maupertuis. La sección final corresponde a la esfera de forma correspondiente al problema invariante del paralelogramo de cuatro cuerpos. Este capítulo está basado principalmente en los artículos [25, 27].

Finalmente, el capítulo 4 está dedicado a estudiar la geometría de la métrica de Kepler y el problema de encajamiento en el espacio euclidiano. Más precisamente, los encajes de las métricas con $h \geq 0$ como superficies de revolución en \mathbb{R}^3 son construidos explícitamente, sin embargo, el encaje (global) no existe para $h < 0$ debido a la singularidad de la métrica en la frontera del espacio correspondiente. Los artículos [23, 31] fueron las principales fuentes de este último tema.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen algunos de los temas principales para el desarrollo del sistema de N masas puntuales. Como una aplicación inmediata, se incluye el problema de dos cuerpos con potencial newtoniano. La sección final está dedicada a la geometría riemanniana, un tema necesario para el estudio de los sistemas mecánicos que consideramos en el presente trabajo.

1.1. El problema de N cuerpos

Consideremos N masas puntuales moviéndose en un sistema de referencia Newtoniano, en \mathbb{R}^3 , donde la única fuerza actuando sobre ellos es su mutua atracción gravitacional. Sea \mathbf{q}_i el vector posición de la i -ésima partícula con masa $m_i > 0$.

La segunda ley de Newton dice que la masa por la aceleración de la i -ésima partícula, $m_i \ddot{\mathbf{q}}_i$, es igual a la suma de las fuerzas actuando sobre la partícula. La ley de la gravedad de Newton dice que la magnitud de la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i , es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos, $Gm_i m_j / \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^2$, donde G es la constante de proporcionalidad. La dirección de esta fuerza es a lo largo de un vector unitario desde la partícula i hasta

la partícula j , $(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)/\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$. Colocando todo junto obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{G m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad (1.1.1)$$

donde

$$V = -\sum_{i < j}^N \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (1.1.2)$$

La ecuación (1.1.2) representa la energía potencial, donde $G = 6,67408 \times 10^{-11} m^3/s^2 kg$ es la constante gravitacional y $r_{ij} = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$ la distancia entre los cuerpos i y j .

Considerando una energía potencial más general dado por

$$V_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i < j}^N \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^\alpha}, \quad \alpha \neq 0 \quad (1.1.3)$$

obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{G m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^{\alpha+2}} = -\frac{\partial V_\alpha}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad \alpha \neq 0. \quad (1.1.4)$$

Sean $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ y M la matriz diagonal de tamaño $3N \times 3N$ definida por las masas, esto es, $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N)$. Luego, la ecuación (1.1.4) es de la forma

$$M \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (1.1.5)$$

Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^{3N}$ el conjunto de colisiones de dos o más cuerpos. La ecuación (1.1.5) en realidad es un sistema de ecuaciones de segundo orden en $\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$, el espacio de posiciones.

Definamos $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ por $\mathbf{p} = M \dot{\mathbf{q}}$, entonces $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ es el momento lineal

de la partícula i . Las ecuaciones de movimiento se transforman en

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i &= \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^{\alpha+2}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i},\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

donde H es la energía total (o el hamiltoniano) definido por

$$H = K + V_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2 - \frac{1}{\alpha} \sum_{i < j}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^\alpha}\tag{1.1.7}$$

y K es la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{m_i} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2.\tag{1.1.8}$$

El hamiltoniano (1.1.7) y las ecuaciones hamiltonianas (1.1.6) están definidos en el espacio fase $\mathbb{R}^{6N} \setminus \Delta$. Todo lo anterior está escrito para el problema espacial en \mathbb{R}^3 , pero con cambios menores aplica igualmente para el problema planar en \mathbb{R}^2 y el problema colineal en \mathbb{R} .

Notar que el potencial V_α , ecuación (1.1.3), es

(A1) invariante por rotaciones y traslaciones

(A2) homogéneo de grado $-\alpha$.

Ver el comienzo de la segunda sección de [27].

1.2. Leyes de conservación

Definición 1. ■ *El momento lineal total de un sistema de N masas puntuales es la suma de los momentos lineales de todas las masas puntuales, esto es*

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (1.2.1)$$

■ *El momento angular de N masas puntuales con posiciones $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3$ es*

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \times m_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (1.2.2)$$

donde \times denota el producto cruz vectorial.

■ *El momento de inercia de N masas puntuales es*

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{q}_i\|^2, \quad (1.2.3)$$

donde $\|\mathbf{q}_i\|$ es la distancia entre el eje de rotación y la partícula \mathbf{q}_i , $i = 1, \dots, N$.

Usaremos el teorema de Euler para funciones homogéneas en la deducción de la identidad de Lagrange-Jacobi.

Teorema 1 (Teorema de Euler para funciones homogéneas). *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable en un abierto D , entonces f es homogénea de grado k si y solo si $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$, para cualquier \mathbf{x} en D .*

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x}) = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, por la regla de la cadena

$$\dot{g}(\lambda) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda\mathbf{x}) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\lambda\mathbf{x}) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda\mathbf{x}).$$

Como f es homogénea de grado k

$$g(\lambda) = f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}),$$

entonces

$$\dot{g}(\lambda) = k\lambda^{k-1} f(\mathbf{x}).$$

Por lo tanto, para $\lambda = 1$ obtenemos

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x}).$$

Ahora definamos la función $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda \mathbf{x})}{\lambda^k} - f(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda > 0$. Luego, derivando h respecto a λ

$$\begin{aligned} \dot{h}(\lambda) &= \frac{\mathbf{x} \cdot \nabla f(t\mathbf{x})\lambda^k - k\lambda^{k-1}f(\lambda\mathbf{x})}{\lambda^{2k}} \\ &= \frac{\lambda^{k-1}[(\lambda\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\lambda\mathbf{x}) - kf(\lambda\mathbf{x})]}{\lambda^{2k}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ya que por hipótesis $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$, luego $(t\mathbf{x}) \cdot \nabla f(t\mathbf{x}) = kf(t\mathbf{x})$. Por lo tanto, $h(\lambda)$ es constante. Como $h(1) = 0$, entonces $h(\lambda) \equiv 0$ y por tanto

$$\frac{f(\lambda\mathbf{x})}{\lambda^k} - f(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{o bien,} \quad f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}).$$

■

Proposición 1 (Identidad de Lagrange-Jacobi). Sean I el momento de inercia, K la energía cinética, V_α el potencial y H la energía total del sistema de N -cuerpos (1.1.4),

entonces

$$\ddot{I} = 4K + 2\alpha V_\alpha = 4H - (4 - 2\alpha)V_\alpha. \quad (1.2.4)$$

Demostración. Derivando dos veces la ecuación (1.2.3) respecto a t obtenemos

$$\ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i + 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \cdot \ddot{\mathbf{q}}_i = 2 \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \cdot m_i \ddot{\mathbf{q}}_i,$$

por (1.1.5) y (1.1.8)

$$\ddot{I} = 4K - 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \cdot \frac{\partial V_\alpha}{\partial \mathbf{q}_i}.$$

Como V_α es homogénea de grado $-\alpha$, por el teorema de Euler para funciones homogéneas

$$\ddot{I} = 4K + 2\alpha V_\alpha = 4H - (4 - 2\alpha)V_\alpha.$$

■

Notemos que \ddot{I} es constante cuando $\alpha = 2$. Como I mide el tamaño total del sistema, decimos que una solución $\mathbf{q}(t)$ de las ecuaciones de Newton (1.1.4) es acotada si I está acotado.

Proposición 2 (Proposición 1 de [5]). *Consideremos una solución $\mathbf{q}(t)$ acotada de las ecuaciones de Newton (1.1.4), definida para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. si $\alpha = 2$, entonces $H = 0$,
2. si $0 < \alpha < 2$, entonces $H < 0$,
3. si $\alpha > 2$, entonces $H \geq 0$.

Es decir, para $H > 0$ y $0 < \alpha \leq 2$, no existen soluciones acotadas definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Para $H < 0$ y $\alpha \geq 2$, tampoco existen soluciones definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\mathbf{q}(t)$ una solución acotada de las ecuaciones de Newton.

1. Si $\alpha = 2$ la identidad de Lagrange-Jacobi (1.2.4) se transforma en

$$\ddot{I} = 4H.$$

Luego, integrando dos veces obtenemos

$$I(t) = 2Ht^2 + c_1t + c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración. Como I está acotado, $2Ht^2 + c_1t + c_2$ también debe estar acotado, de lo cual se sigue que $H = c_1 = 0$.

2. Si $0 < \alpha < 2$ entonces $-(4 - 2\alpha)V_\alpha > 0$, pues $V_\alpha < 0$. Luego

$$4H < \ddot{I} = 4H - (4 - 2\alpha)V_\alpha,$$

por lo tanto

$$2Ht^2 + c_1t + c_2 < I.$$

Como I es acotado, $Ht^2 + c_1t + c_2$ debe estar acotado superiormente. Así, $H < 0$.

3. Para el último caso, cuando $\alpha > 2$, tenemos $(4 - 2\alpha)V_\alpha > 0$. Entonces

$$\ddot{I} = 4H - (4 - 2\alpha)V_\alpha < 4H,$$

por lo tanto,

$$I < 2Ht^2 + c_1t + c_2.$$

Como $I \geq 0$, $2Ht^2 + c_1t + c_2$ debe estar acotado inferiormente, de lo cual se sigue que $H \geq 0$.

■

Definición 2. *Un sistema potencial newtoniano es un sistema de ecuaciones*

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i}$$

para $i = 1, \dots, N$, donde V es una función de valor real definida en un conjunto abierto de \mathbb{R}^{3N} llamada la **energía potencial**.

El sistema de ecuaciones (1.1.4) es un ejemplo de sistema potencial newtoniano.

Teorema 2 (Conservación de la energía). *En cualquier sistema potencial newtoniano, la energía total es conservada. Ver [14, Teorema 1.21].*

Definición 3. *Una función $V: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante por traslaciones si para cualquier $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$*

$$V(\mathbf{q}_1 + c, \dots, \mathbf{q}_N + c) = V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N),$$

donde $c \in \mathbb{R}^3$.

Definición 4. *Una función $V: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante por rotaciones si para cualquier $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$*

$$V(R\mathbf{q}_1, \dots, R\mathbf{q}_N) = V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N),$$

donde R es cualquier matriz del grupo especial ortogonal $SO(3)$.

1.3. El problema de dos cuerpos

Consideremos el movimiento de dos masas m_1 y m_2 con vectores posición \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 , respectivamente. Sea $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ la posición relativa de la masa m_2 con respecto a m_1 . Por (1.1.1) las ecuaciones de movimiento son

$$m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = \frac{Gm_1 m_2 \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{-Gm_1 m_2 \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}. \quad (1.3.1)$$

Luego, sumando y restando las ecuaciones (1.3.1) obtenemos

$$m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 = 0, \quad \ddot{\mathbf{q}}_2 - \ddot{\mathbf{q}}_1 = -G(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}$$

o

$$m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 = 0, \quad \ddot{\mathbf{q}} = -\mu\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}, \quad (1.3.2)$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$. La segunda ecuación de (1.3.2) es conocida como la *ecuación de movimiento relativo* o *problema de fuerza central*. Luego, integrando dos veces la primera ecuación de (1.3.2) obtenemos

$$m_1\dot{\mathbf{q}}_1 + m_2\dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{a} \quad \text{y} \quad m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (1.3.3)$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores constantes. Si $\mathbf{q}_{cm} = (m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2)/(m_1 + m_2)$ es el vector de posición del centro de masas, entonces

$$\dot{\mathbf{q}}_{cm} = \frac{\mathbf{a}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{q}_{cm} = \frac{\mathbf{a}t + \mathbf{b}}{m_1 + m_2}. \quad (1.3.4)$$

Esto nos dice que si $\mathbf{a} = 0$, entonces el centro de masas es estacionario y, si $\mathbf{a} \neq 0$ el centro de masas se mueve a velocidad constante en línea recta con respecto al origen O .

Para resolver la ecuación de movimiento relativo primero determinemos algunas constantes de movimiento. Una **constante de movimiento** o **integral primera** es una función $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^1$ que es constante a lo largo de toda trayectoria. Iniciemos tomando el producto cruz de \mathbf{q} con la ecuación de movimiento relativo, en el que obtenemos

$$\mathbf{q} \times \left(\ddot{\mathbf{q}} + \mu\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} \right) = \mathbf{q} \times \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q} \times \mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Ya que por (1.3.2) $\ddot{\mathbf{q}} + \mu\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} = \mathbf{0}$, luego $\mathbf{q} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, integrando $\mathbf{q} \times \ddot{\mathbf{q}}$ obtenemos la llamada *integral del momento angular* $\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}$, donde \mathbf{h} es un vector constante

perpendicular a \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Por lo tanto, el movimiento de m_2 respecto a m_1 pertenece al plano perpendicular a la dirección definida por \mathbf{h} . Esto implica que los vectores de posición y velocidad siempre estarán en el mismo plano, conocido como *plano orbital*.

Trabajemos ahora en un sistema plano con coordenadas polares (r, θ) referido a un origen centrado en la masa m_1 y línea de referencia arbitraria correspondiente a $\theta = 0$. Sean $\hat{\mathbf{r}} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ y $\hat{\theta} = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$ vectores unitarios perpendiculares entre sí. Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} &= r\hat{\mathbf{r}}, \\
 \dot{\mathbf{q}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \\
 \ddot{\mathbf{q}} &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \\
 &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} \\
 &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta},
 \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

son los vectores de posición, velocidad y aceleración, respectivamente. Sustituyendo las expresiones de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ en la integral del momento angular $\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h} &= r\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \\
 &= r\dot{r}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}) + r^2\dot{\theta}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta}) \\
 &= \mathbf{0} + r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}} \\
 &= r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}},
 \end{aligned}$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ es un vector unitario perpendicular al plano formado por $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$. Por lo tanto, $h = |\mathbf{h}| = r^2\dot{\theta}$.

Consideremos ahora el movimiento de la partícula de masa m_2 . En el tiempo $t = 0$ tiene coordenadas (r, θ) , y en $t + \Delta t$ las coordenadas cambian a $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$. El área barrida

por el radio vector r en el tiempo Δt es

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}r(r + \Delta r) \text{sen}(\Delta\theta) \approx \frac{1}{2}r^2\Delta\theta,$$

donde se han omitido términos de segundo y superior orden en las cantidades pequeñas.

Luego, dividiendo entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}h. \quad (1.3.6)$$

Como h es constante la ecuación (1.3.6) nos dice que áreas iguales son barridas en tiempos iguales, llamada la *segunda ley del movimiento planetario de Kepler*.

1.3.1. Posición y velocidad orbital

Ahora obtengamos una ecuación escalar para el movimiento relativo. Sustituyendo las expresiones de \mathbf{q} y $\ddot{\mathbf{q}}$ de (1.3.5) en la ecuación de movimiento relativo (1.3.2), obtenemos

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2}\right) \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right] \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}.$$

Comparando las componentes de $\hat{\mathbf{r}}$ llegamos a

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (1.3.7)$$

Definamos $u = 1/r$ y tomemos en cuenta a la constante $h = r^2\dot{\theta}$. Luego, diferenciando r con respecto a t obtenemos

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -h \frac{du}{d\theta}.$$

Entonces

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{h}{r^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

y, por lo tanto, la ecuación (1.3.7) se reescribe como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (1.3.8)$$

Esto es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con solución general

$$u = \frac{\mu}{h^2}[1 + e \cos(\theta - \omega)], \quad (1.3.9)$$

donde e (amplitud) y ω (fase) son constantes de integración. Sustituyendo de nuevo por r obtenemos

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (1.3.10)$$

donde $p = h^2/\mu$. La ecuación (1.3.10) es la ecuación general de una cónica en coordenadas polares, donde e es la excentricidad y p es la *rectum semilatus* (mitad de la longitud de la cuerda que pasa por un foco paralelo a la directriz de la sección cónica).

Las cuatro cónicas posibles son

círculo:	$e = 0,$	$p = a;$
elipse:	$0 < e < 1,$	$p = a(1 - e^2);$
parábola:	$e = 1,$	$p = 2q;$
hipérbola:	$e > 1,$	$p = a(e^2 - 1),$

donde la constante a es el semieje mayor de la cónica. En el caso especial de la parábola p está definido en términos de q , la distancia a la masa central en la aproximación más cercana.

1.4. Geometría riemanniana

En esta sección presentaremos algunas definiciones y resultados en el contexto de las variedades diferenciables, incluyendo las variedades riemannianas. Ver [3, 8, 10, 12, 14, 20, 31].

Definición 5. Una *variedad diferenciable* de dimensión n es un conjunto M y una familia de mapeos inyectivos $\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de conjuntos abiertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ a M tal que:

1. $\cup_\alpha \phi(U_\alpha) = M$.
2. Para cualquier par α, β , con $\phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $\phi_\alpha^{-1}(W)$ y $\phi_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y los mapeos $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$, $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$ son diferenciables.
3. La familia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es maximal con respecto a las condiciones 1 y 2. Esto es, si $\phi_0 : U_0 \rightarrow M$ es una parametrización tal que $\phi_0^{-1} \circ \phi$ y $\phi^{-1} \circ \phi_0$ son diferenciables para todo $\phi \in \mathcal{A}$, entonces (U_0, ϕ_0) está en \mathcal{A} .

El par (U_α, ϕ_α) (o el mapeo ϕ_α), con $p \in \phi_\alpha(U_\alpha)$, es llamado una **parametrización** (o **sistema de coordenadas**) de M en p ; $\phi_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una **vecindad de coordenadas** en p . Una familia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ que satisfaga 1 y 2 es llamado **estructura diferenciable** en M .

Definición 6. Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones m y n , respectivamente. Una función $\phi : M \rightarrow N$ es **diferenciable** en $p \in M$ si dado una parametrización $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$ en $\phi(p)$ existe una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ en p tal que $\phi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ y la función

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es diferenciable en $\mathbf{x}^{-1}(p)$. Decimos que ϕ es diferenciable en un conjunto abierto de M si es diferenciable en todos los puntos de este conjunto abierto.

Definición 7. Sea M una variedad diferenciable. Una función diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es llamada una **curva diferenciable** en M . Supongamos que $\alpha(0) = p \in M$, y sea \mathcal{D} el conjunto de funciones en M que son diferenciables en p . El **vector tangente a la curva** α en $t = 0$ es una función $\dot{\alpha}(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\dot{\alpha}(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Un **vector tangente** a M en p es un vector tangente a alguna curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p es el **espacio tangente** $T_p M$.

Definición 8. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable entre variedades diferenciables. Dado $p \in M$, la **derivada de f en p** es el mapeo

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ v &\mapsto \left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

donde $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es una curva que satisface $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = v$.

Además, si $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es inyectiva entonces f es una **inmersión en p** . Si f es una inmersión en cada punto de M , f es una **inmersión**.

Definición 9. Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$$

un conjunto con la siguiente estructura diferenciable. Sea $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ una estructura diferenciable maximal en M . Denotemos por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ las coordenadas de U_α y por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$

las bases asociadas a los espacios tangentes de $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$. Para todo α definimos

$$\mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM,$$

por

$$\mathbf{y}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = \left(\mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geoméricamente, esto significa que estamos tomando como coordenadas de un punto $(p, v) \in TM$ las coordenadas $x_1^\alpha \dots x_n^\alpha$ de p junto con las coordenadas de v en las bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$.

Con esta estructura TM es llamado el **haz tangente** de M .

Definición 10. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. El **espacio cotangente** de M en p , denotado por T_p^*M , es el espacio dual del espacio tangente T_pM . Un elemento del espacio cotangente T_p^*M es llamado un **covector** en p . Así, un covector ω_p en p es una función lineal

$$\omega_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}.$$

El **haz cotangente** T^*M de una variedad M es la unión disjunta de los espacios cotangentes en todos los puntos de M :

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M.$$

Definición 11. Un **campo vectorial** en una variedad diferenciable M es una función que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector tangente a M en p :

$$X : M \rightarrow TM$$

$$p \mapsto X(p) := X_p \in T_pM.$$

El campo vectorial se dice *diferenciable* si la función X es diferenciable. El conjunto de

todos los campos vectoriales diferenciables en M es denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definición 12. Una *métrica riemanniana* (o *estructura riemanniana*) en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto p de M un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (esto es, una forma simétrica, bilineal y definida positiva) en el espacio tangente $T_p M$. Es decir, si $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un sistema de coordenadas alrededor de p , con $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \phi(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\phi_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

es una función diferenciable en U .

La función $g_{ij} = g_{ji}$ es llamada la *representación local de la métrica riemanniana* en el sistema de coordenadas $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Una variedad diferenciable con métrica riemanniana dada será llamado una **variedad riemanniana**, denotado por $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Ejemplo 1. El *producto interior euclidiano* en \mathbb{R}^n es la forma bilineal que, cuando se escribe en coordenadas cartesianas, es igual al producto punto

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

donde $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. La norma asociada es llamada la **norma euclidiana** y \mathbb{R}^n el **espacio euclidiano**. La métrica euclidiana en \mathbb{R}^n es la métrica riemanniana constante dado por el producto interior euclidiano, para cada $q \in \mathbb{R}^n$. En coordenadas cartesianas, cada $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ tiene matriz I (matriz identidad), por tanto

$$g_{ij} = \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Otra forma de denotar la métrica es por $\langle \cdot, \cdot \rangle = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$.

En el siguiente ejemplo consideremos una generalización del producto interior en el espacio euclidiano.

Ejemplo 2. Recordemos que la energía cinética de un sistema newtoniano de N -partículas en \mathbb{R}^3 es $K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2$, con $\|\cdot\|$ la norma euclidiana. Escribiendo $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{q}}_1, \dots, \dot{\mathbf{q}}_N)$ y definiendo la matriz diagonal

$$M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N),$$

obtenemos

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}}.$$

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ el producto interior en \mathbb{R}^{3N} con matriz M respecto a la base estándar, y sea $\|\cdot\|$ la norma asociada. Entonces,

$$K = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|_M^2 = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle_M.$$

Ejemplo 3. Sean $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana y $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en M . La terna $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ es llamado un **sistema mecánico conservativo**. La variedad M es llamado **espacio de configuración**. El haz tangente TM es llamado el **espacio fase** o espacio de estado. Un punto en TM es un estado del sistema mecánico, la cual da la posición y velocidad. La **energía cinética** K del sistema mecánico simple es la función $K : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle \quad \text{para todo } v \in TM.$$

La función V es la **energía potencial** del sistema. Finalmente, la función energía total $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$E(v) = K(v) + V(\pi v) \quad \text{para todo } v \in TM,$$

donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la función proyección, esto es, $\pi(v) = p \in M$ para todo $v \in T_pM$.

Una operación importante en métricas riemannianas es el **pullback** por una función diferenciable.

Proposición 3. *Sea $f : M \rightarrow N$ una inmersión entre variedades diferenciables. Entonces, cada métrica riemanniana g en N define una métrica riemanniana f^*g en M dado por*

$$(f^*g)_p(v_1, v_2) = g_{f(p)}(df_p(v_1), df_p(v_2)),$$

para todo $v_1, v_2 \in T_pM$.

Definición 13. *Sean $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. El **gradiente** de f es el campo vectorial $\text{grad } f$ en M definido, para cualquier $p \in M$, por*

$$df(p)(v) = \langle \text{grad } f(p), v \rangle$$

para todo $v \in T_pM$. En notación más compacta

$$df(p) = \langle \text{grad } f(p), \cdot \rangle = \langle \nabla f(p), \cdot \rangle.$$

Definición 14. *Sea M una variedad diferenciable. Una **conexión afín** en M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que*

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$,
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$,
3. $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_XY$,

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Denotaremos ∇_XY por $\nabla(X, Y)$.

El campo vectorial ∇_XY es conocido como la **derivada covariante** de Y a lo largo de X .

Definición 15. El *operador torsión* de una conexión ∇ en M es el operador $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \in \mathfrak{X}(M),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. La conexión se dice *simétrica* si $T = 0$.

Definición 16. Una conexión ∇ en una variedad riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice *compatible con la métrica* si

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

En una variedad riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una **conexión riemanniana**, algunas veces llamado **conexión Levi-Civita**, es una conexión afín que es simétrica y compatible con la métrica.

Un **campo vectorial definido a lo largo de una curva diferenciable** $c : I \rightarrow M$ es una función diferenciable $V : I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{c(t)}M$ para todo $t \in I$. Si V es un campo vectorial definido a lo largo de la curva diferenciable $c : I \rightarrow M$ con $\dot{c} \neq 0$, su **derivada covariante** a lo largo de c es el campo vectorial definido a lo largo de c dado por

$$\frac{DV}{dt}(t) := \nabla_{\dot{c}(t)} V = (\nabla_X Y)_{c(t)},$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X_{c(t)} = \dot{c}(t)$ y $Y_{c(s)} = V(s)$, donde $s \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

Definición 17. Un campo vectorial V definido a lo largo de la curva $c : I \rightarrow M$ es *paralelo a lo largo de c* si

$$\frac{DV}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in I$. La curva c es llamado una **geodésica** de la conexión ∇ si \dot{c} es paralelo a lo largo de c , es decir, si

$$\frac{D\dot{c}}{dt}(t) = 0 \quad (1.4.1)$$

para todo $t \in I$. La ecuación (1.4.1) también la escribiremos como $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$.

Si $c : I \rightarrow M$ es una geodésica, entonces

$$\frac{d}{dt}\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt}\dot{c}(t), \dot{c}(t) \right\rangle = 0,$$

esto es, la longitud del vector tangente $\dot{c}(t)$ es constante.

Ahora veamos las ecuaciones locales que satisface una geodésica c en un sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) alrededor de $c(t_0)$. En U , la curva $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es una geodésica si y solo si

$$0 = \frac{D}{dt}\dot{c}(t) = \sum_k \left(\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Por lo tanto, el sistema de segundo orden

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

produce las ecuaciones deseadas, donde los Γ_{ij}^k están evaluados en el punto $c(t)$. Las funciones Γ_{ij}^k definidas en U son conocidos como los *símbolos de Christoffel*. Ver [8, Capítulo 3].

Ejemplo 4. Las geodésicas de \mathbb{R}^n son las líneas rectas parametrizadas con velocidad constante:

$$\frac{D\dot{c}}{dt}(t) = 0 \iff \ddot{c}(t) = 0 \iff c(t) = x_0 + tv.$$

Ejemplo 5. Las geodésicas en S_R^n son precisamente los "grandes círculos" (intersecciones de

$S_{\mathbb{R}}^n$ con planos de dimensión 2 que pasan por el origen), con parametrizaciones de velocidad constante.

Definición 18. Una **órbita (trayectoria) física** de un sistema mecánico conservativo $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ es una trayectoria diferenciable γ en M que satisface la segunda ley de movimiento de Newton, es decir,

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = -\text{grad } V,$$

donde $\frac{D}{dt}$ es la derivada covariante relativo a la conexión riemanniana de la variedad riemanniana.

Las geodésicas de una variedad riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ son las trayectorias físicas del sistema mecánico $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, V = 0)$ (describiendo una partícula libre en M). De hecho, las trayectorias físicas de cualquier sistema conservativo pueden reinterpretarse adecuadamente como las geodésicas de una determinada métrica.

Definición 19. Un **haz vectorial de dimensión k (diferenciable)** es un par de variedades F (el **espacio total**) y M (el **espacio base**), junto con una función sobreyectiva $\pi : F \rightarrow M$ (la **proyección**), tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Cada conjunto $F_p := \pi^{-1}(p)$ (llamado la **fibra sobre p**) está dotado con la estructura de un espacio vectorial.
2. Para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p y un difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ (ver la figura [1.1](#)), llamado una **trivialización local** de F , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

donde π_1 es la proyección sobre el primer factor.

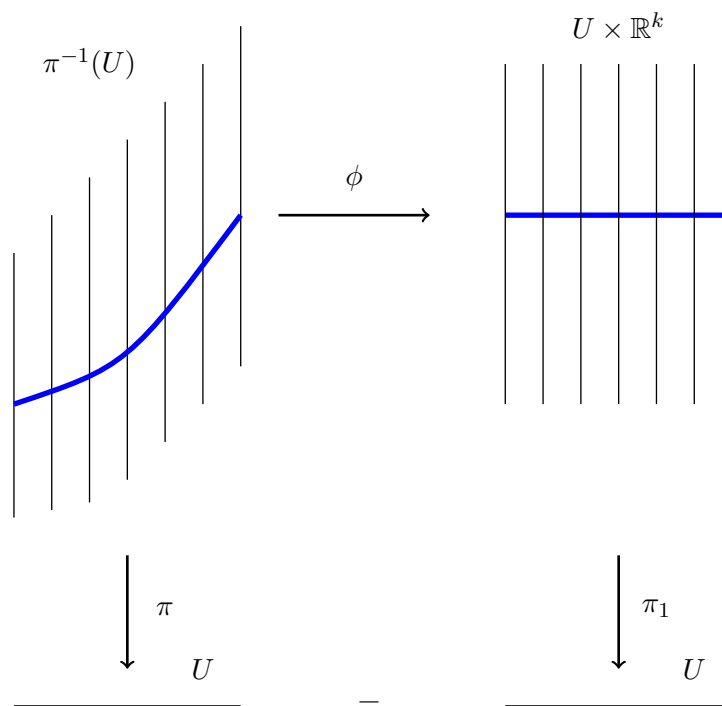


Figura 1.1: Una trivialización local.

Figura tomada de [20]

3. La restricción de ϕ a cada fibra, $\phi : F_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$, es un isomorfismo lineal.

Definición 20. Una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ es una **submersión** si f es sobreyectiva y, para todo $p \in M$, $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ también es sobreyectiva.

Notemos que, en este caso, necesariamente tenemos $\dim(M) = m \geq n = \dim(N)$.

Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable entre variedades diferenciables de dimensiones m y n , respectivamente. Un punto $p \in M$ es un **punto regular** de f si df_p es sobreyectiva. Un punto $q \in N$ es un **valor regular** de f si cada punto en $f^{-1}(q)$ es un punto regular.

Teorema 3. Sea $q \in N$ un valor regular de $f : M \rightarrow N$ y supongamos que el conjunto de nivel $F := f^{-1}(q) = \{p \in M : f(p) = q\}$ es no vacío. Entonces F es una subvariedad de M y $T_p F = \text{Ker}(df_p) \subset T_p M$ para todo $p \in F$.

Ver demostración en [I2, Teorema 5.6]. En este caso, para todo $q \in N$, la fibra $f^{-1}(q) = F_q$ es una subvariedad de M . Sea f una submersión. Un vector tangente de M , tangente a algún F_q con $q \in N$, es llamado un **vector vertical** de la submersión. Si, además, M y N tienen métricas riemannianas la submersión f se dice que es **riemanniana** si, para todo $p \in M$, $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ preserva longitudes de vectores ortogonales a las fibras F_q , con $q = f(p)$.

Definición 21. Sea $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana. Una subvariedad $N \subset M$ se dice **totalmente geodésico de M** si las geodésicas de N son geodésicas de M .

Lo anterior es equivalente a la siguiente definición.

Definición 22. Una subvariedad N de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es **totalmente geodésico** si, para cualquier $m \in M$ y $v \in T_m M$, la geodésica c de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que $c(0) = m$ y $\dot{c}(0) = v$ está contenido en N .

Ejemplo 6. Si N es el conjunto de puntos fijos de alguna isometría de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces N es totalmente geodésico de M .

Demostración. Sea $N = \{p \in M \mid \phi(p) = p\}$ para alguna isometría $\phi : M \rightarrow M$. Sean $q \in N$, $v \in T_q N$. Sea c una geodésica de N tal que $c(0) = q$ y $\dot{c}(0) = v$. Como ϕ es una isometría y $q \in N$, entonces $\phi(q) = q = c(0)$ y $d\phi(v) = v = \dot{c}(0)$. La imagen de c bajo ϕ es la curva c . Por lo tanto, $\phi(c(t)) = c(t)$. Luego, $c \subset N$. Así, N es totalmente geodésico. ■

Ejemplo 7. Las fibras de la submersión riemanniana $\pi : S^{2n+1} \rightarrow P_n(\mathbb{C})$ son subvariedades totalmente geodésicas de S^{2n+1} , ya que son círculos.

Definición 23. Sea $f : M \rightarrow N$ una submersión riemanniana. Un vector $v \in T_p M$ es **horizontal** si es ortogonal a la fibra. El espacio tangente $T_p M$ admite una descomposición $T_p M = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p$, donde \mathcal{H}_p y \mathcal{V}_p denotan los subespacios de vectores horizontales y verticales, respectivamente. \mathcal{H}_p es conocido como el **subespacio horizontal** y \mathcal{V}_p como el **subespacio vertical**.

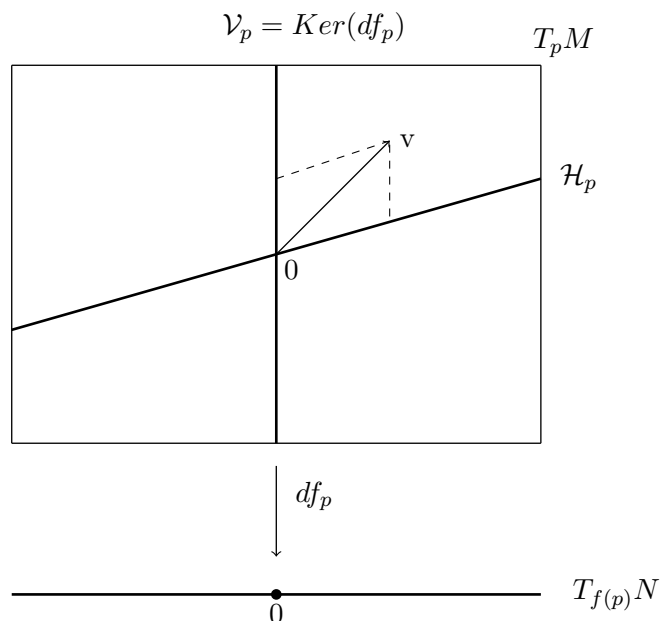


Figura 1.2: Subespacios horizontal y vertical de $T_p M$.

El hecho de que f sea una submersión riemanniana significa que $df_p : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{f(p)}N$ es una isometría para todo $p \in M$. Dado un campo vectorial Y en N podemos encontrar un único campo vectorial horizontal X en M tal que $df_p(X_p) = Y_{f(p)}$, con $X_p \in \mathcal{H}_p$. Decimos que X es el **levantamiento horizontal** de Y .

Del levantamiento horizontal de un campo vectorial, podemos movernos al levantamiento de una curva en N . Dado una curva $\gamma(t)$ en N , podemos elevar cada punto de la curva a M y obtener una curva $\hat{\gamma}(t)$ en M de tal modo que el vector tangente a $\hat{\gamma}$ es horizontal y se mapea al vector tangente a γ en su punto correspondiente.

Proposición 4. Sean $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ variedades riemannianas y $f : M \rightarrow N$ una submersión riemanniana.

1. Sea c una geodésica de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$. Si el vector $\dot{c}(0)$ es horizontal, entonces $\dot{c}(t)$ es horizontal para todo t , y la curva $f \circ c$ es una geodésica de $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, de la misma longitud que c .

2. Inversamente, sean $p \in M$ y c una geodésica de $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ con $c(0) = f(p)$. Entonces existe un único levantamiento horizontal local γ de c ($c = f \circ \gamma$) tal que $\gamma(0) = p$, y γ es también una geodésica de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$.

Definición 24. Un **grupo de Lie** G es una variedad diferenciable que es al mismo tiempo un grupo, de tal manera que las operaciones de grupo

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, \\ (g, h) &\mapsto gh, \\ G &\rightarrow G, \\ g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

son funciones diferenciables.

1.4.1. Mecánica geométrica

Definición 25. Sean M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Decimos que G **actúa diferenciablemente en M (por la izquierda)** si existe una función diferenciable $\Phi : G \times M \rightarrow M$ tal que

1. $\Phi(e, p) = p$ para todo $p \in M$,
2. $\Phi(g, \Phi(h, p)) = \Phi(gh, p)$ para todo $g, h \in G$ y $p \in M$.

Usaremos la notación conveniente gp por $\Phi(g, p)$.

Adicionalmente, si G es un subgrupo de isometrías de M , decimos que G es un grupo de Lie actuando diferenciablemente en M .

Para cada $p \in M$, la **órbita de p** es el conjunto $Gp := \{ gp \mid g \in G \}$. Si $Gp = \{p\}$ entonces p es llamado un **punto fijo** de G . Decimos que G actúa **libremente** (es decir, sin puntos fijos) en M si $gp = p$ implica $g = e$. Si existe un punto $p \in M$ cuya órbita es todo M

(es decir, $Gp = M$), entonces la acción se dice **transitivo**. Notemos que cuando esto pasa solo existe una órbita y, para cada $p, r \in M$ con $p \neq r$, existe un elemento del grupo $g \in G$ tal que $r = gp$.

En la subsección [3.2](#), utilizaremos el siguiente resultado (ver [\[20\]](#), Ejercicio 3-8).

Proposición 5. Sean $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ una variedad riemanniana, N una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow N$ una submersión. Sea G un grupo de Lie actuando diferenciablemente en M por isometrías de $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, y supóngase que $f \circ g = f$ para todo $g \in G$ y que G actúa transitivamente en cada fibra $F_p \subset M$. Entonces existe una única métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ en N tal que f es una submersión riemanniana.

Usaremos algunos resultados de la métrica de Jacobi-Maupertuis (ver [\[12\]](#), Capítulo 5).

Definición 26. Sea $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un sistema mecánico conservativo y $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$M_h := \{p \in M \mid V(p) < h\} \neq \emptyset,$$

conocido como ***h-espacio de configuración***. La métrica de Jacobi-Maupertuis en la variedad M_h está dado por

$$\langle v, w \rangle_h^J(p) := 2[h - V(p)]\langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in T_p M_h$ y $p \in M_h$.

Definición 27. Sea M una variedad diferenciable. Dos métricas riemannianas $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ en M son **conformes** si existe una función positiva $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle X, Y \rangle_1 = \mu \langle X, Y \rangle_2$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 4 (Teorema de Jacobi). Las trayectorias físicas del sistema $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ con valor total de energía h son geodésicas de la variedad riemanniana $(M_h, \langle \cdot, \cdot \rangle_h^J)$.

Para demostrar el teorema necesitaremos los siguientes dos lemas.

Lema 1. Sea $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana con conexión Levi-Civita ∇ y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle^J = e^{2\rho} \langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica conforme relacionada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donde $\rho \in C^\infty(M)$. Entonces, la conexión Levi-Civita de $\langle \cdot, \cdot \rangle^J$ está dado por

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y \rangle \text{grad } \rho$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, donde el gradiente es tomado con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Demostración. Por la fórmula de Koszul

$$2\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle^J = X\langle Y, Z \rangle^J + Y\langle X, Z \rangle^J - Z\langle X, Y \rangle^J - \langle [X, Z], Y \rangle^J - \langle [Y, Z], X \rangle^J + \langle [X, Y], Z \rangle^J.$$

Como

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle^J &= X(e^{2\rho} \langle Y, Z \rangle) = e^{2\rho} X\langle Y, Z \rangle + 2d\rho(X)e^{2\rho} \langle Y, Z \rangle, \\ Y\langle X, Z \rangle^J &= Y(e^{2\rho} \langle X, Z \rangle) = e^{2\rho} Y\langle X, Z \rangle + 2d\rho(Y)e^{2\rho} \langle X, Z \rangle, \\ Z\langle X, Y \rangle^J &= Z(e^{2\rho} \langle X, Y \rangle) = e^{2\rho} Z\langle X, Y \rangle + 2d\rho(Z)e^{2\rho} \langle X, Y \rangle, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 2\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle^J &= e^{2\rho} X\langle Y, Z \rangle + 2d\rho(X)e^{2\rho} \langle Y, Z \rangle + e^{2\rho} Y\langle X, Z \rangle \\ &\quad + 2d\rho(Y)e^{2\rho} \langle X, Z \rangle - e^{2\rho} Z\langle X, Y \rangle - 2d\rho(Z)e^{2\rho} \langle X, Y \rangle \\ &\quad - e^{2\rho} \langle [X, Z], Y \rangle - e^{2\rho} \langle [Y, Z], X \rangle + e^{2\rho} \langle [X, Y], Z \rangle \\ &= 2d\rho(X)e^{2\rho} \langle Y, Z \rangle + 2d\rho(Y)e^{2\rho} \langle X, Z \rangle - 2d\rho(Z)e^{2\rho} \langle X, Y \rangle + e^{2\rho} [X\langle Y, Z \rangle \\ &\quad + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle] \\ &= 2e^{2\rho} \langle \nabla_X Y, Z \rangle + 2d\rho(X)e^{2\rho} \langle Y, Z \rangle + 2d\rho(Y)e^{2\rho} \langle X, Z \rangle - 2d\rho(Z)e^{2\rho} \langle X, Y \rangle \\ &= 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle^J + 2\langle d\rho(X)Y, Z \rangle^J + 2\langle d\rho(Y)X, Z \rangle^J - 2\langle \text{grad } \rho, Z \rangle^J \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Ya que

$$e^{2\rho} \langle \text{grad } \rho, Z \rangle = \langle \text{grad } \rho, Z \rangle^J.$$

Como Z es arbitrario obtenemos

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y \rangle \text{grad } \rho.$$

■

Lema 2. *Una curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es una geodésica reparametrizada en una variedad riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si y solo si satisface*

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = f(t)\dot{c} \tag{1.4.2}$$

para alguna función diferenciable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración. Sean $s : I \rightarrow J$ un difeomorfismo y $\gamma : J \rightarrow M$ la reparametrización de $c : I \rightarrow M$ definida por $c(t) := \gamma(s(t))$. Tenemos

$$\dot{c}(t) = \dot{\gamma}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t) \tag{1.4.3}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{c}} \dot{c} &= \nabla_{\dot{c}} \left(\frac{ds}{dt} \dot{\gamma} \right) = \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \right) \dot{\gamma} + \left(\frac{ds}{dt} \right) \nabla_{\frac{ds}{dt} \dot{\gamma}} \dot{\gamma} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\log \left| \frac{ds}{dt} \right| \right) \dot{c} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = f(t)\dot{c} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \tag{1.4.4}$$

con

$$f(t) = \frac{d}{dt} \left(\log \left| \frac{ds}{dt} \right| \right). \quad (1.4.5)$$

Por lo tanto, si c es una reparametrización de la geodésica γ ($\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$), entonces c satisface

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = f(t)\dot{c}.$$

Por otro lado, si c satisface (1.4.2) con $f(t)$ dado en (1.4.5), de la ecuación (1.4.4) se obtiene directamente

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0.$$

De donde, γ es geodésica y $c(t)$ es una reparametrización $\gamma(s)$ determinado por el cambio de coordenadas

$$s = s(t) = \int \exp \left(\int f(t) dt \right) dt.$$

■

Demostración del teorema de Jacobi. Sea $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una trayectoria física de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ con energía mecánica h . Por lema 1

$$\frac{\tilde{D}\dot{c}}{dt} = \frac{D\dot{c}}{dt} + 2d\rho(\dot{c})\dot{c} - \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle \text{grad } \rho, \quad (1.4.6)$$

donde $\frac{\tilde{D}}{dt}$ es la derivada covariante a lo largo de c con respecto a la métrica de Jacobi y $e^{2\rho} = 2(h - V)$. Como c es una trayectoria física, la segunda ley de movimiento de Newton se satisface, es decir,

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = -\text{grad } V.$$

Por tanto,

$$\frac{D\dot{c}}{dt} = -\text{grad } V = e^{2\rho} \text{grad } \rho. \quad (1.4.7)$$

También, por la conservación de la energía

$$\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2K = 2(h - V) = e^{2\rho}. \quad (1.4.8)$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones (1.4.7) y (1.4.8) en (1.4.6) obtenemos

$$\frac{\tilde{D}\dot{c}}{dt} = 2d\rho(\dot{c})\dot{c},$$

lo cual significa, por lema 2, que c es una geodésica reparametrizada de la métrica de Jacobi. ■

Observación. Una demostración alternativa del teorema de Jacobi la encontramos en [31]. De la demostración podemos ver directamente que el cambio de la reparametrización por longitud de arco está dado por

$$s = \int_{t_0}^t 2(h - V(c(\tau)))d\tau = \int_{t_0}^t \exp(2\rho)d\tau.$$

Definición 28. Un *sistema mecánico* es una terna $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$, donde:

1. M es una variedad diferenciable, llamado el **espacio de configuración**;
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica riemanniana en M produciendo el **operador de masa** $\mu : TM \rightarrow T^*M$, definida por

$$\mu(v)(w) = \langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in T_pM$ y $p \in M$;

3. $\mathcal{F} : TM \rightarrow T^*M$ es una función diferenciable que satisface $\mathcal{F}(T_pM) \subset T_p^*M$ para todo $p \in M$, llamado la **fuerza externa**.

Un **movimiento** de un sistema mecánico es una solución $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ de la ecuación

de Newton

$$\mu \left(\frac{D\dot{c}}{dt} \right) = \mathcal{F}(\dot{c}).$$

Ejemplo 8. Para el sistema mecánico que comprende una sola partícula moviéndose en un espacio n dimensional, el espacio de configuración es claramente \mathbb{R}^n . Si ponemos

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle := m\langle v, w \rangle \quad \text{para todo } v, w \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno euclidiano en \mathbb{R}^n , entonces la conexión Levi-Civita de $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ seguirá siendo la conexión trivial, y

$$\frac{D\dot{x}}{dt} = \ddot{x}.$$

Definiendo

$$\mathcal{F}(x, v)(w) := \langle F(x, v), w \rangle \tag{1.4.9}$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$, vemos que

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{D\dot{x}}{dt} \right) = \mathcal{F}(x, \dot{x}) &\iff \mu \left(\frac{D\dot{x}}{dt} \right) (v) = \mathcal{F}(x, \dot{x})(v) \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n \\ &\iff m\langle \ddot{x}, v \rangle = \langle F(x, \dot{x}), v \rangle \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n \\ &\iff m\ddot{x} = F(x, \dot{x}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los movimientos de la partícula son los movimientos del sistema mecánico $(\mathbb{R}^n, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle, \mathcal{F})$ con \mathcal{F} definido por [\(1.4.9\)](#).

Una expresión muy útil para escribir la ecuación de Newton en coordenadas locales es la siguiente.

Proposición 6. Sea $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$ un sistema mecánico. Si (x_1, \dots, x_n) son coordenadas

locales en M y $(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$ son las coordenadas locales inducidas en TM entonces

$$\mu \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) \right) - \frac{\partial K}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) \right] dx_i.$$

En particular, si $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{F})$ es conservativo entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial v_i}(x(t), \dot{x}(t)) \right) - \frac{\partial K}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

A continuación presentaremos el teorema egregium de Gauss con la notación de formas diferenciales. Ver [34, Capítulo 12] para los detalles. Antes de esto, veremos algunas definiciones.

Definición 29. Una *sección* de un haz vectorial $\pi : F \rightarrow M$ sobre un conjunto abierto $U \subset M$ es una función $e : U \rightarrow F$ tal que $\pi \circ e = \text{Id}_U$, o, equivalentemente, $e(p) \in F_p$ para todo $p \in U$.

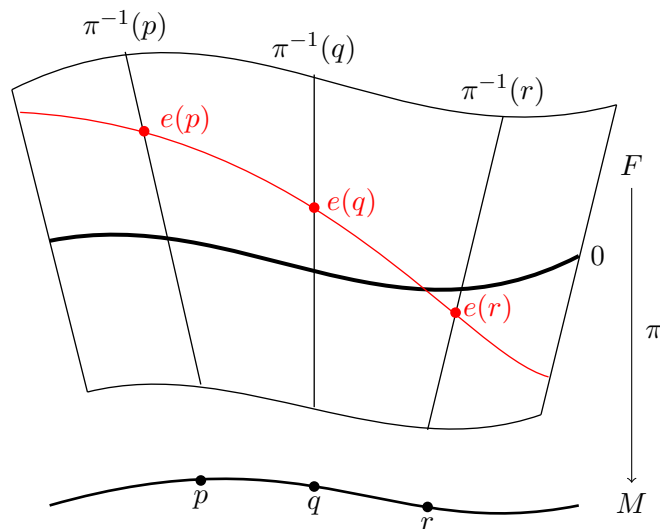


Figura 1.3: Sección de un haz vectorial.

Definición 30. Un **marco** para un haz vectorial $\pi : F \rightarrow M$ sobre un conjunto abierto $U \subset M$ es una colección de secciones e_1, \dots, e_k de F sobre U tal que en cada punto $p \in U$, los elementos $e_1(p), \dots, e_k(p)$ forman una base para la fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$.

Sea U un conjunto abierto en M en el que el haz tangente TM tiene un marco diferenciable e_1, \dots, e_n . Asociado a dicho marco está el **marco dual**, que denotamos por $\theta^1, \dots, \theta^n$; éstos son 1-formas diferenciables que satisfacen $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$.

Teorema 5 (Theorema Egregium). Para una superficie diferenciable, si e_1, e_2 es un marco ortonormal sobre un subconjunto abierto U de la superficie con marco dual θ^1, θ^2 , entonces la curvatura gaussiana K en U está dado por

$$K = \Omega_2^1(e_1, e_2) \quad (1.4.10)$$

o por

$$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2, \quad (1.4.11)$$

donde Ω_2^1 es una 2-forma (ver [34, Capítulo 2]).

Notemos que la ecuación (1.4.10) puede ser tomada como definición de curvatura de Gauss para las variedades riemannianas de dimensión 2.

1.4.2. Curvatura gaussiana mecánica

Para estudiar la geometría de un sistema mecánico simple, estudiamos las curvaturas de la variedad $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_h^J)$ relativo a un valor de energía total h . La curvatura mecánica refleja el comportamiento de las trayectorias físicas, de modo semejante a como la curvatura riemanniana lo hace en las geodésicas en la geometría riemanniana. Llamamos a estas curvaturas las **curvaturas h-mecánicas** del sistema mecánico simple.

Tomemos como nuestro espacio de configuración el plano euclidiano E^2 , y después usemos las coordenadas polares (r, θ) . Pongamos al origen como el centro de la fuerza central.

La función potencial $V(r)$ es una función diferenciable, independiente de θ . Sea M la subvariedad de E^2 con las singularidades de $V(r)$ removidas. Podemos suponer que la masa del cuerpo es igual a uno, tal que la energía cinética K es $K(v) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle$ para todo $v \in E^2$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno euclidiano. La métrica de Jacobi de este sistema mecánico simple relativo al valor de energía h es

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h^J = 2(h - V)\langle \cdot, \cdot \rangle.$$

En coordenadas polares,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h^J = 2(h - V)(dr^2 + r^2d\theta^2).$$

Ahora calculemos la curvatura gaussiana de la métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 = f^2(dr^2 + r^2d\theta^2)$, donde f es una función solo de r .

Tomemos las formas ortonormales $\omega^1 = fdr$ y $\omega^2 = frd\theta$. Entonces

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= f_\theta d\theta \wedge dr = 0, \\ d\omega^2 &= (fr)_r dr \wedge d\theta \\ &= -(fr)_r d\theta \wedge dr \\ &= -\frac{(fr)_r}{f} d\theta \wedge \omega^1 \\ &= -\omega_1^2 \wedge \omega^1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\omega_2^1 = -\frac{(fr)_r}{f} d\theta$. Luego,

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{(fr)_r}{f} \right) dr \wedge d\theta \\ &= -\frac{1}{rf^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{(fr)_r}{f} \right) \omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura gaussiana es

$$K = -\frac{1}{rf^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{(fr)_r}{f} \right).$$

Colocando $f^2 = 2(h - V)$ obtenemos

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2r(h-V)} \frac{d}{dr} \left(\frac{-rV_r}{2(h-V)} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2r(h-V)} \frac{2 \frac{d(rV_r)}{dr} (h-V) + 2r \left(\frac{dV}{dr} \right)^2}{4(h-V)^2} \\ &= \frac{1}{4r(h-V)^3} \left[(h-V) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) + r \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Esto prueba la siguiente proposición.

Proposición 7. *La curvatura gaussiana mecánica K_h es*

$$K_h = \frac{1}{4r(h-V)^3} \left[(h-V) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) + r \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 \right].$$

Así, considerando el potencial $V = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{r^\alpha}$, con $\alpha \neq 0$, la curvatura gaussiana es

$$K_h = \frac{-\alpha^4 h r^{2\alpha-2}}{4(\alpha r^\alpha h + 1)^3}$$

o

$$K_h = \frac{\alpha^2}{4r^2(h-V)^3 V}.$$

Como caso particular, para el problema de dos cuerpos bajo la ley gravitacional de Newton, la función energía potencial del problema de fuerza central es $V(\mathbf{q}) = -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|}$, eligiendo a las masas y a la constante gravitacional igual a uno. Usando la proposición [7](#)

la curvatura gaussiana mecánica es

$$K_h = \frac{-h}{4(rh + 1)^3}, \quad \text{donde } r = \|\mathbf{q}\|.$$

Por lo tanto, tenemos

$$h > 0 \Rightarrow K_h(r) < 0,$$

$$h = 0 \Rightarrow K_h(r) = 0,$$

$$h < 0 \Rightarrow K_h(r) > 0.$$

Además, por [32], la clasificación de las órbitas correspondientes son

$h > 0$	órbita hiperbólica	$K_h < 0$
$h = 0$	órbita parabólica	$K_h = 0$
$h < 0$	órbita elíptica	$K_h > 0$

Observación. 1. Para $h < 0$, todas las geodésicas (excepto las dirigidas hacia la singularidad en el origen) son órbitas cerradas.

2. Para $h < 0$, $K_h(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow -\frac{1}{h}$. Esto corresponde al momento angular $p \rightarrow 0$.

Para un sistema mecánico general, los resultados de la curvatura mecánica se obtienen en una vecindad de los puntos críticos de V y en una vecindad de la frontera $\partial\bar{M}_h$ del espacio de configuración admisible

$$\bar{M}_h := \{\mathbf{q} \in M \mid V(\mathbf{q}) \leq h\},$$

esto es, $\partial\bar{M}_h = \{\mathbf{q} \in M \mid V(\mathbf{q}) = h\}$.

Supongamos que h es un valor regular de V , es decir, $\dot{V} \neq 0$ en el anillo de la frontera

$\{\mathbf{q} \in M \mid V(\|\mathbf{q}\|) = h\}$. Por continuidad, vemos que cerca de la frontera,

$$(h - V) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) + r \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 > 0.$$

Por lo que se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 8. *Supongamos que h es un valor regular de V y que la frontera $\partial\bar{M}_h$ es no vacía. Entonces existe una región anular que es una vecindad de la frontera $\partial\bar{M}_h$, en el cual la curvatura gaussiana mecánica K_h es positivo. De hecho $K_h \rightarrow \infty$ cuando $\mathbf{q} \rightarrow \partial\bar{M}_h$.*

Ahora supongamos que r_0 es un punto crítico de V , es decir, $\dot{V}(r_0) = 0$. Entonces, por la proposición [7](#),

$$K_h(r_0) = \frac{\ddot{V}(r_0)}{4(h - V)^2}.$$

Así, el signo de la curvatura depende del tipo de punto crítico que sea r_0 .

Proposición 9. *Si V tiene un mínimo local (o máximo local) en r_0 , entonces $K_h(r) > 0$ ($K_h < 0$) en una región anular definida por $|r - r_0| < \delta$, para alguna $\delta > 0$.*

Observación. *Si $\ddot{V}(r_0) = 0$, por ejemplo, cuando r_0 es un punto de inflexión, entonces $K_h(r_0) = 0$.*

Capítulo 2

El problema de tres cuerpos en el plano

En este capítulo introducimos algunas definiciones y funciones del problema planar de tres cuerpos en el contexto de la masa métrica, que se usará posteriormente para la construcción de la proyección de forma. Además, se identificarán los puntos de Euler y Lagrange, y los puntos de colisión en la esfera de forma para cuerpos con masas unitarias y con momento de inercia constante $I = 2$. Ver [\[27\]](#), [\[28\]](#).

2.1. Formulación del problema y la masa métrica

Consideremos tres masas puntuales m_1 , m_2 y m_3 moviéndose en el espacio \mathbb{R}^3 , con vectores posición $\mathbf{q}_1(t)$, $\mathbf{q}_2(t)$, $\mathbf{q}_3(t) \in \mathbb{R}^3$. Entonces, por [\(1.1.4\)](#), las ecuaciones de movimiento

son

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 &= \frac{Gm_2m_1(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^{\alpha+2}} + \frac{Gm_3m_1(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1)}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3\|^{\alpha+2}}, \\
 m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \frac{Gm_1m_2(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1\|^{\alpha+2}} + \frac{Gm_3m_2(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2)}{\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3\|^{\alpha+2}}, \\
 m_3 \ddot{\mathbf{q}}_3 &= \frac{Gm_2m_3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3)}{\|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2\|^{\alpha+2}} + \frac{Gm_1m_3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3)}{\|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1\|^{\alpha+2}}.
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Las ecuaciones (2.1.1) son un sistema de ecuaciones de segundo orden en nueve variables, las nueve componentes de $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t), \mathbf{q}_3(t)) \in \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$.

Como en el caso general, notemos que las ecuaciones (2.1.1) son invariantes bajo el grupo de isometrías del espacio, esto es, el grupo de transformaciones de \mathbb{R}^3 generado por traslaciones, rotaciones y reflexiones.

Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano y $\mathbf{q}(t)$ una solución a las ecuaciones (2.1.1). Si existe un tiempo t_0 tal que los tres cuerpos se encuentran en P mientras las tres velocidades son tangentes a P , entonces los tres cuerpos se encuentran en P para todo tiempo t en el dominio de la solución. Esta afirmación restringe el problema espacial de tres cuerpos al plano, definiendo así el *problema planar de tres cuerpos*.

El plano P del problema planar de tres cuerpos se identificará con el plano complejo \mathbb{C} enviando un punto $(x, y) \in P$ al número complejo $\mathbf{q} = x + iy$. Las ubicaciones $\mathbf{q}_i \in \mathbb{C}$ de las tres masas forman los vértices de un triángulo euclidiano.

Definición 31. *Un triángulo planar (localizado) está representado por el vector $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \in \mathbb{C}^3$, cuyas componentes son las ubicaciones de los tres vértices. El espacio vectorial complejo \mathbb{C}^3 de todos los triángulos planares \mathbf{q} es llamado el **espacio de triángulos localizados** o el **espacio de configuración** del problema de tres cuerpos.*

Definición 32. *La **masa métrica** sobre el espacio de configuración es el producto interno hermitiano*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = m_1 \bar{v}_1 w_1 + m_2 \bar{v}_2 w_2 + m_3 \bar{v}_3 w_3, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^3. \tag{2.1.2}$$

Usando la masa métrica reescribamos las ecuaciones de la energía cinética, momento de inercia, momento angular, momento lineal y centro de masa. La energía cinética de un movimiento es

$$K(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{2} (m_1 \|\dot{\mathbf{q}}_1\|^2 + m_2 \|\dot{\mathbf{q}}_2\|^2 + m_3 \|\dot{\mathbf{q}}_3\|^2), \quad (2.1.3)$$

donde $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2, \dot{\mathbf{q}}_3) \in \mathbb{C}^3$ representa el vector de velocidades de las tres masas. La energía potencial correspondiente al problema de tres cuerpos, con $\alpha > 0$ y $G = 1$, está dado por

$$\alpha V(\mathbf{q}) = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}^\alpha} - \frac{m_2 m_3}{r_{23}^\alpha} - \frac{m_1 m_3}{r_{13}^\alpha}. \quad (2.1.4)$$

Entonces, la energía total de un movimiento $\mathbf{q}(t)$ es

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q}). \quad (2.1.5)$$

El momento de inercia

$$I(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = m_1 \|\mathbf{q}_1\|^2 + m_2 \|\mathbf{q}_2\|^2 + m_3 \|\mathbf{q}_3\|^2 \quad (2.1.6)$$

mide el tamaño total de un triángulo localizado. El momento angular

$$\mathbf{J} = \text{Im}(\langle \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \rangle) = m_1 \mathbf{q}_1 \wedge \dot{\mathbf{q}}_1 + m_2 \mathbf{q}_2 \wedge \dot{\mathbf{q}}_2 + m_3 \mathbf{q}_3 \wedge \dot{\mathbf{q}}_3 \quad (2.1.7)$$

mide el giro instantáneo de un triángulo. El momento lineal

$$\mathbf{P} = \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{1} \rangle = m_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{q}}_2 + m_3 \dot{\mathbf{q}}_3 \in \mathbb{C}, \quad (2.1.8)$$

donde $\mathbf{1} = (1, 1, 1) \in \mathbb{C}^3$, mide la velocidad instantánea de traslación del sistema completo

de tres cuerpos. El centro de masa de un triángulo localizado \mathbf{q} corresponde a

$$\mathbf{q}_{cm} = \frac{\langle \mathbf{q}, \mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} = \frac{m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2 + m_3 \mathbf{q}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \in \mathbb{C}. \quad (2.1.9)$$

En la fórmula para el momento angular, usamos la notación

$$(x + iy) \wedge (u + iv) = \det \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = xv - yu, \quad (2.1.10)$$

donde $\mathbf{z} = x + iy$, $\mathbf{w} = u + iv \in \mathbb{C}$. Esta operación de cuña, $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{z} \wedge \mathbf{w}$, es la versión planar del producto cruz. Si \times denota el producto cruz usual de vectores en \mathbb{R}^3 , entonces $(x, y, 0) \times (u, v, 0) = (0, 0, \mathbf{z} \wedge \mathbf{w})$ de modo que \mathbf{J} es la tercer componente del momento angular usual de física.

Definición 33. *El espacio fase del problema planar de tres cuerpos es $T\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$. Los puntos de $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ son de la forma $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. El primer vector \mathbf{q} representa al triángulo planar, es decir, las posiciones de sus tres vértices. El segundo vector $\dot{\mathbf{q}}$ representa las velocidades de sus tres vértices.*

Las funciones del momento angular y energía están definidas en el espacio fase. El momento de inercia y el centro de masa también son funciones en el espacio fase, pero son funciones independientes de $\dot{\mathbf{q}}$, por tanto pueden considerarse como funciones en el espacio de configuración. El momento lineal es otra función en el espacio fase pero independiente de la posición \mathbf{q} .

2.2. Espacio y esfera de forma

La traslación de un triángulo $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \in \mathbb{C}^3$ por $c \in \mathbb{C}$ envía a \mathbf{q} al triángulo planar $\mathbf{q} + c\mathbf{1}$, donde $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$. La rotación de θ radianes alrededor del origen del plano envía \mathbf{q} a $e^{i\theta}\mathbf{q} = (e^{i\theta}\mathbf{q}_1, e^{i\theta}\mathbf{q}_2, e^{i\theta}\mathbf{q}_3)$. Escalar el triángulo \mathbf{q} por un factor positivo

ρ corresponde a la multiplicación por el número real ρ , entonces ρ envía el triángulo \mathbf{q} a $\rho\mathbf{q} = (\rho\mathbf{q}_1, \rho\mathbf{q}_2, \rho\mathbf{q}_3)$.

Definición 34. *El grupo $Iso_+(\mathbb{R}^2)$ de movimientos rígidos del plano es el grupo de isometrías del plano que preservan la orientación.*

Cada elemento de $Iso_+(\mathbb{R}^2)$ es composición de una rotación y una traslación.

Definición 35. *Dos triángulos planares (posiblemente degenerados) son **congruentes orientados** si existe un movimiento rígido que lleva un triángulo al otro.*

Definición 36. *El espacio de forma es el espacio cociente*

$$\mathbb{C}^3 / Iso_+(\mathbb{R}^2). \quad (2.2.1)$$

Es decir, el espacio de forma es el espacio de clases de congruencia orientados de triángulos planares.

Aunque el espacio de forma es homeomorfa a \mathbb{R}^3 , no es isométrico a \mathbb{R}^3 : la geometría del espacio de forma no es euclidiano. Sin embargo, la geometría tiene simetría esférica. Cada esfera centrada en colisión triple es isométrica a la esfera estándar ($S^2 \subset \mathbb{R}^3$), salvo un factor de escala. Identificamos estas esferas con la esfera de forma.

Agregando escalas al grupo $Iso_+(\mathbb{R}^2)$ de movimientos rígidos obtenemos el **grupo de similitudes** G que preservan la orientación.

Definición 37. ■ *El grupo de Lie G está formado por composiciones de rotaciones, traslaciones y escalamientos.*

- *Dos triángulos planares $\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^3$ son **similares orientados** si existe un elemento de G tal que lleva un triángulo al otro, esto es, si $g\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}$ para algún $g \in G$.*

Definición 38. *La esfera de forma es el (sub)espacio cociente*

$$(\mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{C}\mathbf{1}) / G \subset \mathbb{C}^3 / G, \quad (2.2.2)$$

donde $\mathbf{C1}$ es el espacio de colisiones triples. Es decir, la esfera de forma es el espacio de clases de similitud orientada de triángulos planares donde no se permite que los tres vértices del triángulo coincidan.

Llamaremos al mapeo cociente correspondiente la **proyección de forma**:

$$\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \mathbf{C1} \xrightarrow{G} S^2. \quad (2.2.3)$$

Topológicamente, la esfera de forma es S^2 y el espacio de forma es \mathbb{R}^3 . La esfera de forma es una subvariedad y un (sub)cociente del espacio de forma.

El grupo G de traslaciones, rotaciones y escalamientos puede construirse a partir de una sucesión de los subgrupos normales

$$\mathbb{R}^2 \subset Iso_+(\mathbb{R}^2) \subset G, \quad (2.2.4)$$

cuyos grupos cociente correspondientes son

$$Iso_+(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}^2 = S^1, \quad G/Iso_+(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^+. \quad (2.2.5)$$

Aquí \mathbb{R}^2 denota el grupo de traslaciones del plano, $Iso_+(\mathbb{R}^2)$ el grupo de movimientos rígidos del plano, S^1 el grupo de rotaciones del plano y \mathbb{R}^+ el grupo de escalamientos. La relación entre los espacios cocientes (2.2.1) y (2.2.2) se entiende mejor implementando proyecciones, en orden, para cada subgrupo de los subgrupos normales (2.2.4):

$$\mathbb{C}^3 \xrightarrow[\mathbb{R}^2]{} \mathbb{C}^2 \xrightarrow[S^1]{} \mathbb{R}^3 \dashrightarrow[\mathbb{R}^+]{} S^2, \quad (2.2.6)$$

donde la flecha punteada final se utiliza para indicar que el dominio de este mapeo no es todo \mathbb{R}^3 , sino $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. La proyección de forma (2.2.3) es la composición de estos tres mapeos.

2.3. Construcción de las proyecciones y las coordenadas de Jacobi

Construcción de la proyección $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$. El grupo de traslación \mathbb{R}^2 actúa mediante

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \mapsto (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_0), \quad \mathbf{q}_0 \in \mathbb{C},$$

y como tal es la acción de $\mathbb{C}\mathbf{1} \subset \mathbb{C}^3$ en \mathbb{C}^3 por adición vectorial. Por lo tanto, el espacio cociente es simplemente el espacio vectorial cociente $\mathbb{C}^3/\mathbb{C}\mathbf{1}$ de dimensión (real) 4. Podemos identificar este cociente con el complemento ortogonal a $\mathbb{C}\mathbf{1}$. Este complemento ortogonal es el espacio de configuraciones planas de tres cuerpos cuyo centro de masa está en el origen:

$$\mathbb{C}_0^2 := \mathbb{C}\mathbf{1}^\perp = \{\mathbf{q} : \langle \mathbf{1}, \mathbf{q} \rangle = 0\} = \{\mathbf{q} : m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 + m_3\mathbf{q}_3 = 0\}. \quad (2.3.1)$$

Entonces, el origen de \mathbb{C}_0^2 corresponde a la colisión triple $\mathbb{C}\mathbf{1}$.

Coordenadas de Jacobi: Necesitaremos nuevas coordenadas en el subespacio \mathbb{C}_0^2 . La forma cuadrática asociada a la masa métrica es el momento de inercia $I = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$ de la ecuación (2.1.6). Más precisamente, buscamos coordenadas Z_1, Z_2 en \mathbb{C}^2 tal que

$$I = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{q} \perp \mathbf{1}. \quad (2.3.2)$$

Estas coordenadas se atribuyen tradicionalmente a Jacobi, a pesar de haber sido encontradas antes y explicadas más claramente por Lagrange [18].

Proposición 10. *Los vectores $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$, $E_1 = (1/m_1, -1/m_2, 0)$ y $E_2 = (-1/(m_1 + m_2), -1/(m_1 + m_2), 1/m_3)$ forman una base ortogonal relativa a la masa métrica en \mathbb{C}^3 .*

Demostración. Sean $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$, $E_1 = (\frac{1}{m_1}, -\frac{1}{m_2}, 0)$, $E_2 = (-\frac{1}{m_1+m_2}, -\frac{1}{m_1+m_2}, \frac{1}{m_3}) \in \mathbb{C}^3$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\alpha \mathbf{1} + \beta E_1 + \gamma E_2 = \mathbf{0}$$

o

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{m_1} - \frac{\gamma}{m_1 + m_2}, \alpha - \frac{\beta}{m_2} - \frac{\gamma}{m_1 + m_2}, \alpha + \frac{\gamma}{m_3} \right) = \mathbf{0}.$$

Esto se puede ver como el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{m_1} - \frac{\gamma}{m_1 + m_2} = 0, \\ \alpha - \frac{\beta}{m_2} - \frac{\gamma}{m_1 + m_2} = 0, \\ \alpha + \frac{\gamma}{m_3} = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema llegamos a la solución trivial $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{1}$, E_1 , E_2 son linealmente independientes.

Ahora veamos que los vectores $\mathbf{1}$, E_1 y E_2 son ortogonales respecto a la masa métrica definido por la ecuación (2.1.2). Entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{1}, E_1 \rangle &= 1 - 1 + 0 = 0, \\ \langle \mathbf{1}, E_2 \rangle &= \frac{-m_1}{m_1 + m_2} + \frac{-m_2}{m_1 + m_2} + 1 = 0, \\ \langle E_1, E_2 \rangle &= \frac{-1}{m_1 + m_2} + \frac{1}{m_1 + m_2} + 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{1}$, E_1 y E_2 son ortogonales respecto a la masa métrica. ■

Las coordenadas correspondientes $\langle \mathbf{q}, \mathbf{1} \rangle$, $\langle \mathbf{q}, E_1 \rangle$, $\langle \mathbf{q}, E_2 \rangle$ son coordenadas ortogonales para \mathbb{C}^3 .

Definición 39. Las coordenadas $\langle \mathbf{q}, E_1 \rangle = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 := Q_{12}$ y $\langle \mathbf{q}, E_2 \rangle = \mathbf{q}_3 - \frac{m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2}{m_1 + m_2}$ son las **coordenadas de Jacobi** para $\mathbb{C}_0^2 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^3 : \mathbf{q}_{cm} = 0\}$.

Las coordenadas de Jacobi están indicadas en la figura siguiente.

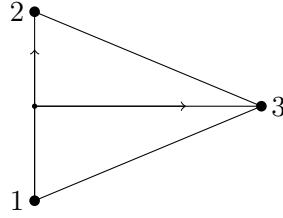


Figura 2.1: Vectores de Jacobi

La normalización de las coordenadas de Jacobi produce las coordenadas de diagonalización unitaria $Z_i = \langle \mathbf{q}, e_i \rangle$, $i = 1, 2$ para \mathbb{C}_0^2 , donde $e_i = E_i / \|E_i\|$. Calculando obtenemos

$$Z_1 = \mu_1(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \quad Z_2 = \mu_2 \left(\mathbf{q}_3 - \frac{m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2}{m_1 + m_2} \right), \quad (2.3.3)$$

donde $1/\mu_1^2 = \|E_1\|^2 = 1/m_1 + 1/m_2$ y $1/\mu_2^2 = \|E_2\|^2 = 1/m_3 + 1/(m_1 + m_2)$. Estas coordenadas de Jacobi normalizadas definen la proyección lineal compleja

$$\pi_{tr} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \pi_{tr}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = (Z_1, Z_2), \quad (2.3.4)$$

que realiza el cociente métrico de \mathbb{C}^3 mediante traslaciones.

Tomando en cuenta que el centro de masa está en el origen, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_{tr}^{-1}(Z_1, Z_2) &= \left(\frac{\mu_1}{m_1} Z_1 - \frac{\mu_2^2}{m_1 + m_2} Z_2, -\frac{1}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1}{\mu_1} Z_1 + \mu_2^2 Z_2 \right), \frac{\mu_2}{m_3} Z_2 \right) \\ &= (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Construcción de la proyección $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Una rotación de θ radianes actúa en los vértices del triángulo \mathbf{q}_j por $\mathbf{q}_j \mapsto e^{i\theta} \mathbf{q}_j$ y por lo tanto actúa en las coordenadas de Jacobi normalizadas por $(Z_1, Z_2) \mapsto (e^{i\theta} Z_1, e^{i\theta} Z_2)$. Las funciones $Z_i \bar{Z}_j$, $i, j = 1, 2$ son invariantes

bajo rotación. Colocando estas funciones en una matriz hermitiana 2×2 definimos

$$\Phi(Z_1, Z_2) = \begin{pmatrix} |Z_1|^2 & Z_1 \bar{Z}_2 \\ \bar{Z}_1 Z_2 & |Z_2|^2 \end{pmatrix} = A \quad (2.3.6)$$

equivalentemente,

$$\Phi(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^T \bar{\mathbf{Z}}, \quad (2.3.7)$$

donde $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$,

$$\mathbf{Z}^T = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{Z}} = (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2).$$

De la factorización (2.3.7), vemos que $\Phi(\mathbf{Z})\mathbf{Z}^T = (|Z_1|^2 + |Z_2|^2)\mathbf{Z}^T$ mientras $\Phi(\mathbf{Z})\mathbf{W}^T = 0$ para $\mathbf{W} \perp \mathbf{Z}$. Así, $\Phi(Z_1, Z_2)$ es la matriz de proyección ortogonal sobre la línea compleja generada por \mathbf{Z} , multiplicado por $\|\mathbf{Z}\|^2$. Dos vectores no cero \mathbf{Z} , \mathbf{U} están relacionados por rotación si y sólo si generan la misma línea compleja y sus longitudes son iguales. Se sigue que la imagen de Φ representa al espacio cociente \mathbb{C}^2/S^1 , y Φ puede ser considerado como el mapeo cociente. Acabamos de mostrar que la imagen de Φ consiste de matrices hermitianas de rango 1 cuyo valor propio no cero es positivo (correspondiente a $\|\mathbf{Z}\|^2$), junto con la matriz cero (correspondiente a $\mathbf{Z} = 0$). En términos del determinante y traza, estas condiciones en A corresponden a $\det(A) = 0$ y $\text{tr}(A) \geq 0$. Reescribiendo las matrices hermitianas como

$$A = \begin{pmatrix} w_4 + w_1 & w_2 + iw_3 \\ w_2 - iw_3 & w_4 - w_1 \end{pmatrix} \quad \text{para } w_j \text{ real, } j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.3.8)$$

tal que $\det(A) = w_4^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2$ y $\text{tr}(A) = 2w_4$. Esta discusión prueba la siguiente proposición.

Proposición 11. *La imagen del mapeo Φ es el cono de matrices hermitianas 2×2 (ecuación*

(2.3.8)) que satisfacen

$$w_4^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 = 0 \quad y \quad w_4 \geq 0. \quad (2.3.9)$$

Este cono realiza el cociente \mathbb{C}^2/S^1 , mediante Φ el mapeo cociente $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/S^1$.

Ahora, se proyecta el espacio real de dimensión 4 de matrices hermitianas sobre \mathbb{R}^3 usando la función

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \mapsto pr(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_1, w_2, w_3).$$

La restricción de esta proyección lineal al cono dado por las ecuaciones (2.3.9) es un homeomorfismo sobre \mathbb{R}^3 . De hecho, resuelve las ecuaciones del cono para w_4 para encontrar $w_4 = +\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$, y por lo tanto, la inversa de la proyección restringida es

$$(w_1, w_2, w_3) \mapsto (w_1, w_2, w_3, \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}).$$

De esta forma, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 12. *La función*

$$\pi^{rot} = pr \circ \Phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (2.3.10)$$

dado por

$$\pi^{rot}(Z_1, Z_2) = \left(\frac{1}{2}(|Z_1|^2 - |Z_2|^2), \operatorname{Re}(Z_1 \bar{Z}_2), \operatorname{Im}(Z_1 \bar{Z}_2) \right) = (w_1, w_2, w_3), \quad (2.3.11)$$

realiza \mathbb{R}^3 como el espacio cociente de \mathbb{C}^2 por el grupo de rotación S^1 .

Observemos que la restricción del mapeo (2.3.10) a la esfera $w_4 = 1$ es el famoso mapeo de Hopf de S^3 a S^2 .

Construcción de la proyección $\mathbb{R}^3 \dashrightarrow S^2$. Este mapeo final es el cociente del espacio de forma por el grupo de escalas \mathbb{R}^+ . Un escalamiento $\lambda \in \mathbb{R}^+$ actúa en \mathbb{C}^3 por $\mathbf{q} \mapsto \lambda \mathbf{q}$ con acción de correspondencia en el espacio de forma $w \mapsto \lambda^2 w$, donde $w = (w_1, w_2, w_3)$. Consecuentemente, podemos identificar la esfera de forma con la esfera $\{|w|^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. El mapeo cociente correspondiente es la proyección radial, la cual es el mapeo final $w \mapsto w/|w|$ en (2.2.6).

Teorema 6 (Teorema 1 de [28]). *El espacio de forma es homeomorfo a \mathbb{R}^3 . El mapeo cociente desde el espacio de triángulos localizados al espacio de forma se realiza mediante la función $\pi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es la composición de una proyección lineal compleja $\pi_{tr} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (2.3.4) y el mapeo homogéneo cuadrático real $\pi^{rot} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (2.3.11). La función $\pi = \pi^{rot} \circ \pi_{tr}$ satisface las siguientes propiedades.*

- (a) *Dos triángulos $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{C}^3$ son congruentes orientados si y sólo si $\pi(\mathbf{q}) = \pi(\mathbf{q}')$.*
- (b) *π es sobreyectiva.*
- (c) *π proyecta el lugar de la colisión triple sobre el origen.*
- (d) *π proyecta el lugar de triángulos colineales sobre el plano $w_3 = 0$, donde (w_1, w_2, w_3) son las coordenadas estándar en \mathbb{R}^3 . Además, w_3 es el área con signo del triángulo correspondiente, salvo una constante que depende de las masas.*
- (e) *$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = (I/2)^2$, donde $I = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$ (ecuación (2.1.6)).*

Demostración. (a) Consideremos $\pi = \pi^{rot} \circ \pi_{tr}$ componiendo la proyección lineal π_{tr} de la ecuación (2.3.4) con el mapeo π^{rot} de (2.3.11). El primer mapeo realiza el cociente por traslaciones y el segundo el cociente por rotaciones, por lo tanto, juntos hacen el cociente completo por movimientos rígidos.

- (b) Por lo anterior, el espacio de forma es homeomorfo a \mathbb{R}^3 , así π es sobreyectiva.

(c) Sea $(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) \in \mathbb{C}^1$ un triángulo en colisión triple. Entonces

$$Z_1 = \mu_1(\mathbf{q} - \mathbf{q}) = 0 \quad y \quad Z_2 = \mu_2 \left(\mathbf{q} - \frac{m_1 \mathbf{q} + m_2 \mathbf{q}}{m_1 + m_2} \right) = 0,$$

por tanto, $\pi_{tr}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = (0, 0)$. Luego $\pi^{rot}(0, 0) = (0, 0, 0)$.

(d) Sea $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \in \mathbb{C}^3$. Si $Q_{ij} = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j$, $Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = 0$ y $Q_{ij} = -Q_{ji}$. Entonces

$$Z_1 = \mu_1 Q_{12} \quad y \quad Z_2 = \mu_2 (p_1 Q_{31} + p_2 Q_{32}),$$

donde $p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, $p_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. Luego,

$$Z_2 = \mu_2 [p_1 Q_{31} + p_2 (Q_{12} + Q_{31})] = \mu_2 (Q_{31} + p_2 Q_{12}).$$

Por tanto

$$Z_1 \wedge Z_2 = \mu_1 Q_{12} \wedge \mu_2 (Q_{31} + p_2 Q_{12}) = -\mu_1 \mu_2 Q_{21} \wedge Q_{31}. \quad (2.3.12)$$

La operación de cuña de la ecuación (2.1.10) representa el área del paralelogramo con aristas $\mathbf{z} = x + iy$ y $\mathbf{w} = u + iv$. Así, el área de nuestro triángulo es $\frac{1}{2} Q_{21} \wedge Q_{31}$. Ya que

$$w_3 = \text{Im}(Z_1 \bar{Z}_2) = -Z_1 \wedge Z_2, \quad (2.3.13)$$

entonces

$$w_3 = \mu_1 \mu_2 Q_{21} \wedge Q_{31} = c \left(\frac{1}{2} Q_{21} \wedge Q_{31} \right),$$

donde $c = 2\mu_1 \mu_2$.

Notemos que $w_3 = 0$ si y sólo si el triángulo correspondiente es degenerado, es decir, los vectores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ son colineales.

(e) De las ecuaciones (2.3.6) y (2.3.8), $2w_4 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2$. Por (2.3.2) $I = |Z_1|^2 + |Z_2|^2$,

entonces $w_4 = \frac{1}{2}I$. Por la ecuación (2.3.9) tenemos que $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = w_4^2$, por lo tanto $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = (\frac{1}{2}I)^2$. ■

2.4. Puntos de colisión doble, Euler y Lagrange

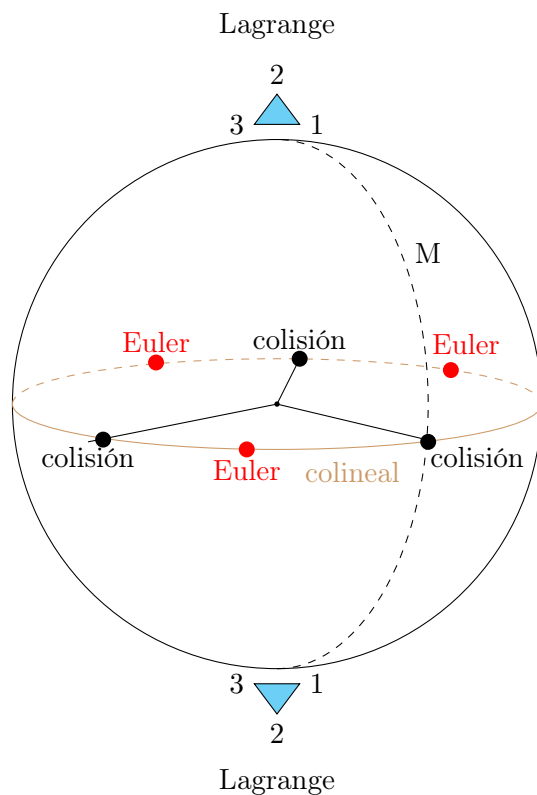


Figura 2.2: La esfera de forma, centrada en colisión triple.

Ahora localicemos en la esfera de forma S^2 los puntos de colisión doble, los puntos de Euler y de Lagrange para tres cuerpos $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ con masas unitarias. Ver figura 2.2. Los tres radios de colisión binaria atraviesan la esfera de forma en los tres puntos que se encuentran en el ecuador colineal que a su vez también contiene los tres puntos de Euler.

Como todos los meridianos, M une los dos puntos de Lagrange y pasa por un punto de colisión binaria.

Como los puntos $(w_1, w_2, w_3) \in S^2$ deben satisfacer $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = (I/2)^2$, nos restringiremos a $I = 2$. Sea $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ un triángulo planar. De (2.3.3) las coordenadas de Jacobi normalizadas Z_1 y Z_2 son

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \quad Z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\mathbf{q}_3 - \frac{1}{2}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \right). \quad (2.4.1)$$

Puntos de colisión doble: Sea $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ un triángulo planar tal que $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$, entonces $Z_1 = 0$ y $Z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \pi^{rot}(Z_1, Z_2) &= \left(\frac{1}{2}(0 - \frac{2}{3}|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1|^2), 0, 0 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1|^2, 0, 0 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}|-3\mathbf{q}_1|^2, 0, 0 \right) \\ &= (-3|\mathbf{q}_1|^2, 0, 0) \\ &= (-1, 0, 0). \end{aligned}$$

Ya que $\text{Re}(Z_1 \bar{Z}_2) = \text{Im}(Z_1 \bar{Z}_2) = 0$ y, como $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$ entonces $2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 = 0$ y por tanto $\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1 = -3\mathbf{q}_1$. Además, ya que $I = |\mathbf{q}_1|^2 + |\mathbf{q}_2|^2 + |\mathbf{q}_3|^2 = 2$ entonces $2|\mathbf{q}_1|^2 + |\mathbf{q}_3|^2 = 2|\mathbf{q}_1|^2 + |-2\mathbf{q}_1|^2 = 6|\mathbf{q}_1|^2 = 2$ y por tanto $|\mathbf{q}_1|^2 = \frac{1}{3}$.

Si $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3$ entonces $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ y $Z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\pi^{rot}(Z_1, Z_2) &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 - \frac{1}{6} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \right), \operatorname{Re} \frac{1}{2\sqrt{3}} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2, \operatorname{Im} \frac{1}{2\sqrt{3}} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{6} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2, \frac{1}{2\sqrt{3}} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{6} \cdot 3, \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 3, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right).\end{aligned}$$

Ya que $Z_1 \bar{Z}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)(\overline{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \in \mathbb{R}$. Además, como $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$ entonces $2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0$ y por tanto $2(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = -3\mathbf{q}_2$. Luego $I = 2|\mathbf{q}_1|^2 + |\mathbf{q}_2|^2 = 2|\mathbf{q}_1|^2 + |\frac{2}{3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)|^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 = 2$, pues, sin pérdida de generalidad $|\mathbf{q}_1|^2 = \frac{1}{3}$, entonces $|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 = 3$.

Análogamente, si $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3$ entonces $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ y $Z_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\pi^{rot}(Z_1, Z_2) &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 - \frac{1}{6} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \right), \operatorname{Re} \frac{-1}{2\sqrt{3}} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2, \operatorname{Im} \frac{-1}{2\sqrt{3}} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{6} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2, -\frac{1}{2\sqrt{3}} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right),\end{aligned}$$

ya que $Z_1 \bar{Z}_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)(\overline{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \in \mathbb{R}$.

Puntos de Euler: Para las soluciones de Euler, las masas se colocan en una línea en cierto orden: $\mathbf{q}_i < \mathbf{q}_j < \mathbf{q}_k$. Supongamos que $\mathbf{q}_{cm} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$ e $I = 2$.

Si $\mathbf{q}_1 = 0$, entonces $\mathbf{q} = (0, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ y $\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$. Luego, $Z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{q}_2$ y $Z_2 =$

$\sqrt{\frac{2}{3}}(\mathbf{q}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{q}_2) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{q}_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\pi^{rot}(Z_1, Z_2) &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}|\mathbf{q}_2|^2 - \frac{3}{2}|\mathbf{q}_2|^2 \right), \operatorname{Re} \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{q}_2\bar{\mathbf{q}}_2, \operatorname{Im} \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{q}_2\bar{\mathbf{q}}_2 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}|\mathbf{q}_2|^2, \frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{q}_2|^2, 0 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right).\end{aligned}$$

Ya que si $I = 2$, entonces $|\mathbf{q}_2|^2 + |\mathbf{q}_3|^2 = 2|\mathbf{q}_2|^2 = 2$, pues $\mathbf{q}_3 = -\mathbf{q}_2$, y por tanto $|\mathbf{q}_2|^2 = 1$.

Si $\mathbf{q}_2 = 0$, entonces $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, 0, \mathbf{q}_3)$ y $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 = 0$. Luego, $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{q}_1$ y $Z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\mathbf{q}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{q}_1) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{q}_1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\pi^{rot}(Z_1, Z_2) &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}|\mathbf{q}_1|^2 - \frac{3}{2}|\mathbf{q}_1|^2 \right), \operatorname{Re} \frac{-\sqrt{3}}{2}\mathbf{q}_1\bar{\mathbf{q}}_1, \operatorname{Im} \frac{-\sqrt{3}}{2}\mathbf{q}_1\bar{\mathbf{q}}_1 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}|\mathbf{q}_1|^2, -\frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{q}_1|^2, 0 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right).\end{aligned}$$

Análogamente, si $I = 2$, entonces $|\mathbf{q}_1|^2 + |\mathbf{q}_3|^2 = 2|\mathbf{q}_1|^2 = 2$, pues $\mathbf{q}_3 = -\mathbf{q}_1$, y por tanto $|\mathbf{q}_1|^2 = 1$.

Finalmente, si $\mathbf{q}_3 = 0$ entonces $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, 0)$ y $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0$. Luego, $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \sqrt{2}\mathbf{q}_1$ y $Z_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\pi^{rot}(Z_1, Z_2) &= \left(\frac{1}{2}(2|\mathbf{q}_1|^2 - 0), 0, 0 \right) \\ &= (|\mathbf{q}_1|^2, 0, 0) \\ &= (1, 0, 0).\end{aligned}$$

Nuevamente, si $I = 2$ entonces $|\mathbf{q}_1|^2 + |\mathbf{q}_2|^2 = 2|\mathbf{q}_1|^2 = 2$, pues $\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_1$, y por tanto $|\mathbf{q}_1|^2 = 1$.

Puntos de Lagrange: Para las soluciones de Lagrange, la configuración inicial es un triángulo equilátero con las tres masas colocadas en los vértices. Por un razonamiento similar a los casos anteriores, de acuerdo a las proyecciones π_{tr} y π^{rot} los puntos de Lagrange son $L^+ = (0, 0, 1)$ y $L^- = (0, 0, -1)$.

Notemos que en la esfera de forma se tienen dos clases de orientación: en el hemisferio norte están los triángulos orientados positivamente (con área positiva) y en el hemisferio sur tenemos los triángulos orientados negativamente (con área negativa).

2.5. Descomposición de Saari

El estudio de la velocidad de las soluciones invariantes por rotación y traslación se realiza a través de la descomposición de Saari. La cual es una fórmula que utiliza un sistema ortonormal de campos vectoriales a lo largo de la solución para descomponer la velocidad en las partes de traslación y rotación. Aunque en este trabajo no utilizaremos esta fórmula, haremos una breve revisión de este tema, enunciando y demostrando la ecuación de Saari. La descomposición

$$K = \text{parte traslacional} + \text{parte rotacional} + \text{parte de forma}$$

aplicada a velocidades es algunas veces llamado la **descomposición de Saari**:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= (\text{parte traslacional} + \text{parte rotacional}) + \text{parte de forma} \\ &= T_q(Gq) \oplus (T_q(Gq))^\perp \\ &= \text{vertical} \oplus \text{horizontal}. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

En la geometría diferencial de los haces, tal descomposición de vectores tangentes se conoce como descomposición **vertical-horizontal**. Esta descomposición, que depende del punto base \mathbf{q} en el que se fijan las velocidades, es ortogonal y nos lleva a lo siguiente.

Proposición 13. *Supóngase que el centro de masa de nuestro triángulo localizado es cero. Entonces, la descomposición de Saari de la energía cinética es*

$$K = \frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{M} + \frac{1}{2} \frac{J^2}{I} + \frac{1}{2} \frac{\|\dot{\mathbf{w}}\|^2}{I}, \quad (2.5.2)$$

donde $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\dot{\mathbf{q}})$ y $J = J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ son los momentos lineal y angular, y $\dot{\mathbf{w}} = \frac{d}{dt}\pi(\mathbf{q}(t))$. En particular,

$$K_{forma} = \frac{1}{2} \frac{\|\dot{\mathbf{w}}\|^2}{I} \quad (2.5.3)$$

donde $I = 2\sqrt{\|\mathbf{w}\|}$.

Demostración. Una base real para la parte traslacional bidimensional del movimiento consiste de $\mathbf{1}$ y $i\mathbf{1}$. Una base real para la parte rotacional unidimensional es $i\mathbf{q}$. La parte rotacional es ortogonal a la parte traslacional ya que el centro de masa es $\frac{1}{M}\langle \mathbf{q}, \mathbf{1} \rangle$, y por hipótesis el centro de masa es el vector cero. Por lo tanto, $\mathbf{1}$, $i\mathbf{1}$ y $i\mathbf{q}$ forman una base ortogonal para la parte vertical $T_q(Gq)$. Normalizando obtenemos la base real ortonormal

$$e_1 = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{M}}, \quad e_2 = \frac{i\mathbf{1}}{\sqrt{M}}, \quad e_3 = \frac{i\mathbf{q}}{\sqrt{I}},$$

donde $M = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = m_1 + m_2 + m_3$, para el espacio vertical. Sea $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^3$ un vector arbitrario basado en el triángulo localizado $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^3$. Expandiendo el vector como una suma directa ortogonal obtenemos

$$\dot{\mathbf{q}} = \langle \dot{\mathbf{q}}, e_1 \rangle_{\mathbb{R}} e_1 + \langle \dot{\mathbf{q}}, e_2 \rangle_{\mathbb{R}} e_2 + \langle \dot{\mathbf{q}}, e_3 \rangle_{\mathbb{R}} e_3 + (\text{forma}), \quad (2.5.4)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ denota la parte real del producto interno hermitiano (2.1.2). Los primeros tres términos forman la parte vertical de $\dot{\mathbf{q}}$ en la ecuación (2.5.1), mientras que el último término

es, por definición, ortogonal a los primeros tres términos y forma la parte horizontal.

Colocando $\mathbf{q}_j = x_j + iy_j$ obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \dot{\mathbf{q}}, e_1 \rangle_{\mathbb{R}} e_1 &= \operatorname{Re} \left(m_1 \bar{\mathbf{q}}_1 \frac{1}{\sqrt{M}} + m_2 \bar{\mathbf{q}}_2 \frac{1}{\sqrt{M}} + m_3 \bar{\mathbf{q}}_3 \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \frac{1}{\sqrt{M}} \\ &= (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3) \frac{1}{M}, \\ \langle \dot{\mathbf{q}}, e_2 \rangle_{\mathbb{R}} e_2 &= \operatorname{Re} \left(m_1 \bar{\mathbf{q}}_1 \frac{i}{\sqrt{M}} + m_2 \bar{\mathbf{q}}_2 \frac{i}{\sqrt{M}} + m_3 \bar{\mathbf{q}}_3 \frac{i}{\sqrt{M}} \right) \frac{i1}{\sqrt{M}} \\ &= (m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 + m_3 \dot{y}_3) \frac{i1}{M}, \\ \langle \dot{\mathbf{q}}, e_3 \rangle_{\mathbb{R}} e_3 &= \operatorname{Re} \left(m_1 \bar{\mathbf{q}}_1 \frac{i\mathbf{q}_1}{\sqrt{I}} + m_2 \bar{\mathbf{q}}_2 \frac{i\mathbf{q}_2}{\sqrt{I}} + m_3 \bar{\mathbf{q}}_3 \frac{i\mathbf{q}_3}{\sqrt{I}} \right) \frac{i\mathbf{q}}{\sqrt{I}} \\ &= [m_1(x_1 \dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1) + m_2(x_2 \dot{y}_2 - \dot{x}_2 y_2) + m_3(x_3 \dot{y}_3 - \dot{x}_3 y_3)] \frac{i\mathbf{q}}{I}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3) \frac{1}{M} + (m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 + m_3 \dot{y}_3) \frac{i1}{M} + [m_1(x_1 \dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1) \\ &\quad + m_2(x_2 \dot{y}_2 - \dot{x}_2 y_2) + m_3(x_3 \dot{y}_3 - \dot{x}_3 y_3)] \frac{i\mathbf{q}}{I} + (\text{forma}) \\ &= \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1} + \frac{J}{I} i\mathbf{q} + (\text{forma}),\end{aligned}$$

pues, por ecuaciones (2.1.7) y (2.1.8), tenemos que

$$\mathbf{P} = m_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{q}}_2 + m_3 \dot{\mathbf{q}}_3 \quad \text{y} \quad J = m_1(x_1 \dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1) + m_2(x_2 \dot{y}_2 - \dot{x}_2 y_2) + m_3(x_3 \dot{y}_3 - \dot{x}_3 y_3).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle &= \left\langle \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1} + \frac{J}{I} i\mathbf{q} + \text{forma}, \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1} + \frac{J}{I} i\mathbf{q} + \text{forma} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1}, \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1} \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1}, \frac{J}{I} i\mathbf{q} \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1}, \text{forma} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{J}{I} i\mathbf{q}, \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1} \right\rangle + \left\langle \frac{J}{I} i\mathbf{q}, \frac{J}{I} i\mathbf{q} \right\rangle + \left\langle \frac{J}{I} i\mathbf{q}, \text{forma} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \text{forma}, \frac{\mathbf{P}}{M} \mathbf{1} \right\rangle + \left\langle \text{forma}, \frac{J}{I} i\mathbf{q} \right\rangle + \langle \text{forma}, \text{forma} \rangle \\
&= \frac{\mathbf{P}\bar{\mathbf{P}}}{M^2} \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle + \frac{\mathbf{P}J}{MI} \langle \mathbf{1}, i\mathbf{q} \rangle + \frac{\mathbf{P}}{M} \langle \mathbf{1}, \text{forma} \rangle + \frac{J\bar{\mathbf{P}}}{IM} \langle i\mathbf{q}, \mathbf{1} \rangle + \frac{J^2}{I} \left\langle \frac{i\mathbf{q}}{\sqrt{I}}, \frac{i\mathbf{q}}{\sqrt{I}} \right\rangle \\
&\quad + \frac{J}{I} \langle i\mathbf{q}, \text{forma} \rangle + \frac{\bar{\mathbf{P}}}{M} \langle \text{forma}, \mathbf{1} \rangle + \frac{J}{I} \langle \text{forma}, i\mathbf{q} \rangle + \langle \text{forma}, \text{forma} \rangle \\
&= \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{M} + \frac{J^2}{I} + \|\text{forma}\|^2.
\end{aligned}$$

Ya que $\mathbf{1}, i\mathbf{q} \in T_q(Gq)$, $(\text{forma}) \in (T_q(Gq))^\perp$ y e_1, e_2, e_3 son ortonormales. Resta mostrar que $\|\text{forma}\|^2 = \frac{\|\dot{\mathbf{w}}\|^2}{I}$. Esto es, mostrar que

$$\|\dot{\mathbf{w}}\|^2 = \|\mathbf{q}\|^2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \quad \text{si} \quad \mathbf{P}(\dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{w}} = d\pi_q(\dot{\mathbf{q}}). \quad (2.5.5)$$

Con este fin, escribamos a la función π^{rot} en coordenadas reales usando $Z_1 = x_1 + iy_1$, $Z_2 = x_2 + iy_2$ y $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Entonces

$$\pi^{rot} = \left(\frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2), x_1x_2 + y_1y_2, x_2y_1 - x_1y_2 \right).$$

Calculando la matriz jacobiana obtenemos

$$d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & -x_2 & -y_2 \\ x_2 & y_2 & x_1 & y_1 \\ -y_2 & x_2 & y_1 & -x_1 \end{pmatrix}. \quad (2.5.6)$$

Sea $d\pi_{\mathbf{q}} = d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot} \circ \pi_{tr}$, donde $\pi = \pi^{rot} \circ \pi_{tr}$ denota el mapeo cociente del teorema 6, con π_{tr} lineal. Como las filas de $d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot}$ son ortogonales y tienen longitud $\|\mathbf{Z}\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$. Además, $\mathbf{q} \in \mathbb{C}_0^2$ es tal que $\|\mathbf{Z}\|^2 = \|\mathbf{q}\|^2$ y π_{tr} es una isometría lineal de \mathbb{C}_0^2 a \mathbb{C}^2 . Entonces

$$d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot}(d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot})^T = \|\mathbf{q}\|^2 \text{Id} = d\pi_{\mathbf{q}} d\pi_{\mathbf{q}}^T.$$

Es conocido que el núcleo de $d\pi = d\pi_{\mathbf{q}}$ es el espacio vertical $T_q(Gq)$. Así, la imagen de $d\pi^T$ es el espacio horizontal, el cual es el complemento ortogonal a e_1, e_2, e_3 y es el espacio llamado “forma”. Por lo tanto, cualquier vector $\dot{\mathbf{q}}$ de la forma requerida en la ecuación (2.5.5) puede ser escrito como $\dot{\mathbf{q}} = d\pi^T \mathbf{v}$, para algún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Así,

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 &= \langle d\pi^T \mathbf{v}, d\pi^T \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, d\pi d\pi^T \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{q}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Además, $\dot{\mathbf{w}} = d\pi(\dot{\mathbf{q}})$ tal que $\dot{\mathbf{w}} = d\pi d\pi^T(\mathbf{v}) = \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{v}$. Por lo tanto,

$$\|\dot{\mathbf{w}}\|^2 = \|\mathbf{q}\|^4 \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{q}\|^2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2.$$

Así, $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \frac{\|\dot{\mathbf{w}}\|^2}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{\|\dot{\mathbf{w}}\|^2}{I}$, pues $\|\mathbf{q}\|^2 = I$. Finalmente, por la ecuación (2.1.3) sabemos que $2K = \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle$, por lo tanto

$$K = \frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{P}\|^2}{M} + \frac{1}{2} \frac{J^2}{I} + \frac{1}{2} \frac{\|\dot{\mathbf{w}}\|^2}{I}.$$

Notemos que, por (e) del teorema 6, se satisface $I = 2\sqrt{\|\mathbf{w}\|}$. ■

Como la energía cinética del espacio de forma está dado en términos de la masa métrica (la masa métrica da una norma al espacio), entonces podemos definir la métrica del espacio

de forma.

Definición 40 (Métrica del espacio de forma). *La métrica del espacio de forma es el doble de la energía cinética del espacio de forma K_{forma} , cuando es visto como una métrica riemanniana en el espacio de forma.*

Por la proposición anterior, la métrica del espacio de forma está dado por

$$ds_{\text{forma}}^2 = \frac{dw_1^2 + dw_2^2 + dw_3^2}{2\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}.$$

Esta métrica define la longitud l de una trayectoria c en el espacio de forma como

$$l(c) = \int_c ds_{\text{forma}} := \int_a^b \sqrt{2K_{\text{forma}}} dt.$$

Además, define la distancia entre dos puntos del espacio de forma como el ínfimo de las longitudes de todas las trayectorias que unen los dos puntos.

Capítulo 3

Construcción del plano hiperbólico como reducción de un problema de tres cuerpos en el plano.

En este capítulo mostraremos como construir el plano hiperbólico a partir de un problema de tres cuerpos cuyo potencial es proporcional a I/Δ^2 , donde I es el momento de inercia del triángulo planar formado por los tres cuerpos y Δ es su área. En [2, 5, 21, 26] los autores nos muestran la reducción del problema planar de tres cuerpos (con masas iguales) a la esfera de forma con un potencial correspondiente a $\alpha = 2$. Finalmente, construimos el espacio reducido para la configuración de paralelogramos, subproblema del problema de los cuatro cuerpos.

3.1. Planteamiento del problema

Como V_α es homogéneo de grado $-\alpha$, la identidad de Lagrange-Jacobi (1.2.4) afirma que a lo largo de las soluciones de energía H tenemos $\ddot{I} = 4H - (4 - 2\alpha)V_\alpha$, lo cual implica que el único caso en el que podemos garantizar que $\ddot{I} = 0$ es cuando $\alpha = 2$ y $H = 0$. Si

además no queremos que el tamaño del sistema cambie, entonces $\dot{I} = 0$.

Veamos el caso $H = 0$, $-V > 0$ con V homogéneo de grado -2 dado en (3.1.2). Sin pérdida de generalidad, restringámonos al subespacio de centro de masa $\mathbb{C}_0^2 = \{\mathbf{q} : m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 + m_3\mathbf{q}_3 = 0\}$. Por lo tanto, $\mathbf{P} = 0$. Formalmente, la reducción de la dinámica requiere fijar el valor del momento angular \mathbf{J} . Con $\mathbf{J} = 0$, el problema consiste en resolver las ecuaciones de Newton en la subvariedad del espacio fase en la cual $H = 0$, $\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{J} = 0$ e $\dot{I} = 0$.

Tres partículas puntuales \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 y \mathbf{q}_3 se mueven en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ según las ecuaciones de Newton

$$m_k \ddot{\mathbf{q}}_k = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k} V(\mathbf{q}), \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.1.1)$$

donde $V(\mathbf{q})$ es la función potencial, m_k son las masas y $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ las posiciones instantáneas de estas tres masas. Aquí,

$$V(\mathbf{q}) = -\frac{\gamma I(\mathbf{q})}{\Delta(\mathbf{q})^2}, \quad (3.1.2)$$

donde $\Delta(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \wedge (\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1)$ es el área del triángulo con vértices $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ y $I(\mathbf{q}) = \frac{\sum_{k < l} m_k m_l \|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_l\|^2}{m_1 + m_2 + m_3}$ es el momento de inercia del triángulo \mathbf{q} respecto a su centro de masa. Notemos que en el subespacio \mathbb{C}_0^2 el momento de inercia se reduce a la ecuación (2.1.6). La constante $\gamma > 0$ es una constante física necesaria para que las unidades del potencial sean las de energía, por lo que γ tiene unidades $(longitud)^4 / (tiempo)^2$.

Observación. *Una de las preguntas abiertas es saber si existen potenciales de la forma de la ecuación (3.1.1) en algún problema físico o químico.*

Las afirmaciones (\mathbf{A}_1) y (\mathbf{A}_2) de la sección 1.1 implican que el grupo G de movimientos rígidos y escalamientos actúan por simetrías en las ecuaciones de Newton (3.1.1): los elementos del grupo transforman soluciones en soluciones. En particular, la G -acción resultante en el espacio fase preserva el conjunto de nivel cero común de todas las invariantes H ,

\mathbf{P} , \mathbf{J} , \dot{I} . Por lo tanto, el espacio cociente del conjunto de nivel cero $\{H = \mathbf{J} = \mathbf{P} = \dot{I} = 0\}$ por G es un espacio en el que las ecuaciones de Newton mantienen una dinámica inducida bien definida. Llamaremos a la dinámica en este espacio cociente la **dinámica reducida**.

3.2. Construcción del plano hiperbólico

La esfera de forma S^2 se encuentra dentro de \mathbb{R}^3 como el conjunto $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$. Así, la **métrica redonda estándar** es la restricción de la métrica $dw_1^2 + dw_2^2 + dw_3^2$ de \mathbb{R}^3 a la esfera S^2 . Multiplicando esta métrica por el factor conforme $\frac{1}{w_3}$ se obtiene una métrica en cualquiera de los hemisferios de la esfera que es isométrica al plano hiperbólico estándar (ver el apéndice [A](#) o [6](#) para más detalles sobre los modelos hiperbólicos). Este modelo del plano hiperbólico se conoce como el **modelo Jemisphere**. El siguiente resultado afirma que conseguiremos el modelo Jemisphere por reducción si tomamos el potencial [\(3.1.2\)](#).

Teorema 7 (Teorema 1 de [\[27\]](#)). *Cualquier solución a las ecuaciones de Newton [\(3.1.1\)](#) para la cual $H = \mathbf{J} = \mathbf{P} = \dot{I} = 0$, es proyectada, por la proyección del espacio de forma, como una geodésica para el modelo Jemisphere. Inversamente, cada una de estas geodésicas es la proyección de una solución de las ecuaciones de Newton.*

Demostración. El teorema de Jacobi [\[4\]](#) se aplica a cada nivel de energía fijo. En el nivel de energía $H = 0$, las soluciones a las ecuaciones de Newton con energía cero son, salvo reparametrización, geodésicas de la métrica de Jacobi-Maupertuis

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_0^J = 2U(\mathbf{q}) \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \quad (3.2.1)$$

en $\mathbb{C}^3 \setminus \{V = \infty\}$, donde $U = -V = \frac{\gamma^I(\mathbf{q})}{\Delta(\mathbf{q})^2}$. Aquí,

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = 2K(d\mathbf{q}) := m_1|d\mathbf{q}_1|^2 + m_2|d\mathbf{q}_2|^2 + m_3|d\mathbf{q}_3|^2$$

denota el producto interno euclidiano en \mathbb{C}^3 asociado a la energía cinética, visto como una

métrica riemanniana.

Notemos que el potencial (3.1.2) escrito en términos de Z_1 y Z_2 , usando (2.3.2) y (2.3.12), puede escribirse como

$$\begin{aligned} V(Z_1, Z_2) &= -\frac{\gamma(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)}{\left(\frac{1 - Z_1 \wedge Z_2}{\mu_1 \mu_2}\right)^2} \\ &= -\frac{\gamma 4\mu_1^2 \mu_2^2 (|Z_1|^2 + |Z_2|^2)}{(Z_1 \wedge Z_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Como el subespacio $\mathbb{C}_0^2 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^3 : \mathbf{q}_{cm} = 0\} \cong \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3$ es totalmente geodésico para la métrica (3.2.1), entonces podemos restringir la métrica de Jacobi-Maupertuis a este subespacio \mathbb{C}_0^2 . Así,

$$\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle_0^J = 2U(Z_1, Z_2) \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle, \quad \text{con } \mathbf{Z} = (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}_0^2. \quad (3.2.3)$$

Usando la proyección $\pi_{tr} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, definida por (2.3.4) y con inversa dada en (2.3.5), podemos escribir las geodésicas en términos de las coordenadas Z_1 y Z_2 , y viceversa. De hecho, puesto que $m_1|\mathbf{q}_1|^2 + m_2|\mathbf{q}_2|^2 + m_3|\mathbf{q}_3|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2$, tenemos que $\pi_{tr} : \mathbb{C}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una isometría.

Ahora, sea $\pi^{rot} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\pi^{rot}(Z_1, Z_2) = \left(\frac{1}{2}(|Z_1|^2 - |Z_2|^2), \operatorname{Re}(Z_1 \bar{Z}_2), \operatorname{Im}(Z_1 \bar{Z}_2) \right) = (w_1, w_2, w_3).$$

Como $Z_1 \bar{Z}_2$ y (3.2.2) son invariantes bajo rotaciones, y por tanto también (3.2.3), entonces la métrica baja al espacio cociente $\mathbb{C}^2/S^1 \cong \mathbb{R}^3$. Más aún, como $\langle \cdot, \cdot \rangle_0^J$ es invariante bajo

escalamiento complejo, pues para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda \mathbf{q}, \lambda \mathbf{q} \rangle_0^J &= 2U(\lambda \mathbf{q}) \langle \lambda \mathbf{q}, \lambda \mathbf{q} \rangle \\
 &= 2(-\lambda^{-2}V(\mathbf{q}))\lambda^2 \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \\
 &= 2(-V(\mathbf{q})) \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \\
 &= 2U(\mathbf{q}) \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_0^J.
 \end{aligned}$$

Entonces, por la proposición [5](#), existe una única métrica riemanniana $\langle w, w \rangle_0^J$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{V = \infty\}$ tal que π^{rot} es una submersión riemanniana, donde

$$\langle w, w \rangle_0^J = 2U(w) \langle w, w \rangle \quad \text{con} \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{V = \infty\}.$$

A continuación encontraremos una expresión explícita para la métrica $\langle w, w \rangle_0^J$. Sea $d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot}$ la matriz jacobiana [\(2.5.6\)](#), esto es

$$d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & -x_2 & -y_2 \\ x_2 & y_2 & x_1 & y_1 \\ -y_2 & x_2 & y_1 & -x_1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Así, por lema 7 de [2](#), $d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot}$ es suprayectiva con inversa lineal derecha

$$(d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot})^{-1} = \frac{1}{|Z_1|^2 + |Z_2|^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -y_2 \\ y_1 & y_2 & x_2 \\ -x_2 & x_1 & y_1 \\ -y_2 & y_1 & -x_1 \end{pmatrix} = \frac{(d\pi_{\mathbf{Z}}^{rot})^T}{|Z_1|^2 + |Z_2|^2}.$$

Sean $w \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^2$ tal que $\pi^{rot}(\mathbf{Z}) = w$. La fibra sobre w es la subvariedad $F_w = (\pi^{rot})^{-1}(w)$. El espacio vertical $\mathcal{V}_{\mathbf{Z}}$ en \mathbf{Z} es el espacio tangente a su fibra. Además, por el

teorema [3](#),

$$\mathcal{V}_{\mathbf{Z}} = T_{\mathbf{Z}}(F_w) = \text{Ker}(d\pi_{\mathbf{Z}}^{\text{rot}}),$$

con espacio horizontal

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Z}} := \mathcal{V}_{\mathbf{Z}}^{\perp} = \{\mathbf{Z} : \langle \mathbf{Z}, \hat{\mathbf{Z}} \rangle = 0 \quad \forall \quad \hat{\mathbf{Z}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{Z}}\}.$$

Notemos que los complementos ortogonales de un subespacio con distintas métricas conformes son iguales, esto es, $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}} = \{\mathbf{Z} : \langle \mathbf{Z}, \hat{\mathbf{Z}} \rangle_0^J = 0 \quad \forall \quad \hat{\mathbf{Z}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{Z}}\}$. Además, la restricción de $d\pi_{\mathbf{Z}}^{\text{rot}}$ a $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$ es un isomorfismo lineal entre $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$ y $T_w\mathbb{R}^3$. La métrica riemanniana en \mathbb{C}^2 da productos interiores a $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$ y a $T_w\mathbb{R}^3$, la primera por restricción y la segunda por restricción a la horizontal compuesto con el diferencial $d\pi_{\mathbf{Z}}^{\text{rot}}$. Entonces, el producto interior para \mathbb{R}^3 ($T_w\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$), con $\hat{\mathbf{Z}} = (\hat{Z}_1, \hat{Z}_2) \in \mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$ y $d\pi_{\mathbf{Z}}^{\text{rot}}(\hat{\mathbf{Z}}) = v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, es

$$\langle d\pi_{\mathbf{Z}}^{\text{rot}}(\hat{\mathbf{Z}}), d\pi_{\mathbf{Z}}^{\text{rot}}(\hat{\mathbf{Z}}) \rangle_0^J := \langle \hat{\mathbf{Z}}, \hat{\mathbf{Z}} \rangle_0^J,$$

donde $\langle \hat{\mathbf{Z}}, \hat{\mathbf{Z}} \rangle_0^J$ es la métrica en \mathbb{C}_0^2 restringida al espacio horizontal $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}$.

Usando las expresiones $w_3 = -Z_1 \wedge Z_2$ (ecuación [\(2.3.13\)](#)), $I = |Z_1|^2 + |Z_2|^2$ para cualquier $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^2$ y $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = (I/2)^2$ (por teorema [6](#), inciso e), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle d\pi_{\mathbf{Z}}^{\text{rot}}(\hat{\mathbf{Z}}), d\pi_{\mathbf{Z}}^{\text{rot}}(\hat{\mathbf{Z}}) \rangle_0^J &= \langle \hat{\mathbf{Z}}, \hat{\mathbf{Z}} \rangle_0^J \\ &= 2U(Z_1, Z_2) \langle \hat{\mathbf{Z}}, \hat{\mathbf{Z}} \rangle \\ &= 2 \frac{\gamma 4 \mu_1^2 \mu_2^2 (|Z_1|^2 + |Z_2|^2)}{(Z_1 \wedge Z_2)^2} \|\hat{\mathbf{Z}}\|^2 \\ &= 8 \frac{\gamma \mu_1^2 \mu_2^2 I}{w_3^2} I \\ &= 8 \frac{\gamma \mu_1^2 \mu_2^2}{w_3^2} I^2 \\ &= 32 \gamma \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}{w_3^2}. \end{aligned}$$

La propiedad de submersión riemanniana implica que π mapea geodésicas para $\langle \cdot, \cdot \rangle_0^J$ que son ortogonales a las fibras a geodésicas en la métrica $\pi_*^{rot} \langle \cdot, \cdot \rangle_0^J$, por la proposición 4. Donde $\pi_*^{rot} \langle \cdot, \cdot \rangle_0^J$ es la métrica Jemisphere

$$\pi_*^{rot} \langle v, v \rangle_0^J = c \frac{dw_1^2 + dw_2^2 + dw_3^2}{w_3^2}, \quad (3.2.5)$$

con $c = 32\gamma\mu_1^2\mu_2^2$. Inversamente, por la proposición 4, cada geodésica en la Jemisphere es la proyección de una geodésica en $\mathbb{C}^3 \setminus \{V = \infty\}$. ■

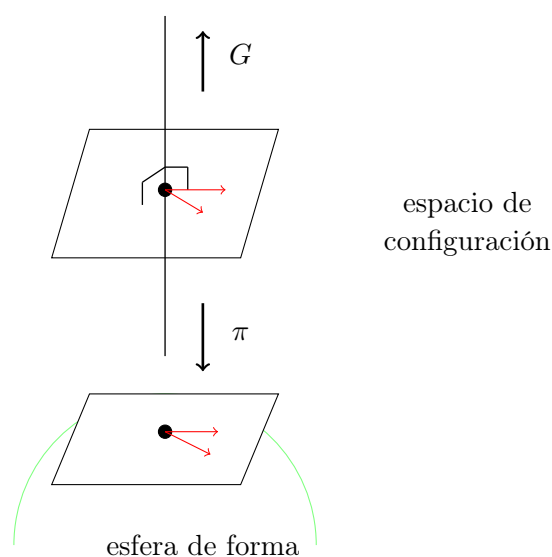


Figura 3.1: La proyección del espacio forma es una submersión riemanniana.

Usaremos el siguiente resultado para obtener la curvatura de H , con métrica $d\bar{s}_H^2$, usando la métrica Jemisphere (3.2.5). Aquí, $d\bar{s}_H^2 = cds^2$.

Lema 3. *Dada una superficie dotada con métricas conformes ds^2 y $d\bar{s}^2 = Uds^2$. Entonces sus curvaturas K y \bar{K} están relacionadas mediante la igualdad*

$$\bar{K} = U^{-1} \left(K - \frac{1}{2} \Delta \log(U) \right),$$

donde el laplaciano Δ es con respecto a la métrica ds^2 .

Del apéndice [A](#) sabemos que

$$\alpha^*(c ds_H^2) = c \frac{dy_2^2 + dy_3^2}{y_3^2} = c ds_J^2.$$

Como la curvatura K de la métrica de \mathbb{R}^2 es $K = 0$, entonces, de acuerdo al lema [3](#),

$$\bar{K} = -\frac{1}{2} U^{-1} \Delta \log(U) \tag{3.2.6}$$

es la curvatura de H . Luego, tomando $U = c/w_3^2$ y ya que

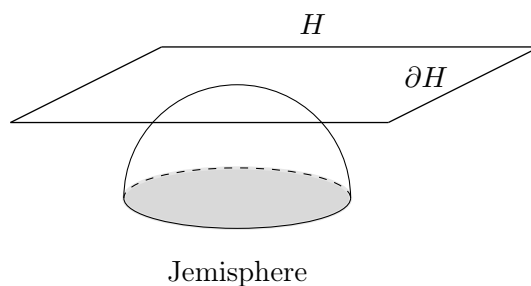
$$\Delta(\log(U)) = \frac{U \Delta U - \|\nabla U\|^2}{U^2},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \Delta \left(\log \frac{c}{w_3^2} \right) &= \frac{\frac{c}{w_3^2} \Delta \left(\frac{c}{w_3^2} \right) - \|\nabla \left(\frac{c}{w_3^2} \right)\|^2}{\left(\frac{c}{w_3^2} \right)^2} \\ &= \frac{\frac{c}{w_3^2} \left(\frac{6c}{w_3^4} \right) - \frac{4c^2}{w_3^6}}{\frac{c^2}{w_3^4}} \\ &= \frac{2}{w_3^2}. \end{aligned}$$

Así, sustituyendo lo anterior en [\(3.2.6\)](#) obtenemos

$$\bar{K} = -\frac{1}{2} \frac{w_3^2}{c} \frac{2}{w_3^2} = -\frac{1}{c}.$$

Figura 3.2: Los modelos Jemisphere y semi-espacio H .

3.3. El subproblema del paralelogramo de cuatro cuerpos

En esta sección introduciremos un subproblema invariante del problema de cuatro cuerpos con potencial fuerte donde las partículas se mueven en el plano y cuyas posiciones son simétricas con respecto a los ejes en el plano, manteniendo así la configuración de un paralelogramo. Para hacer esto definamos las superficies invariantes correspondientes a los problemas del paralelogramo y colineal.

3.3.1. El problema de los cuatro cuerpos

Cuatro partículas puntuales \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 , \mathbf{q}_3 y \mathbf{q}_4 se mueven en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ según las ecuaciones de Newton

$$m_k \ddot{\mathbf{q}}_k = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k} V_2(\mathbf{q}), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3.3.1)$$

donde m_k son las masas, $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ las posiciones instantáneas de los cuatro cuerpos y $V_2(\mathbf{q})$ la función potencial (1.1.3) (con $\alpha = 2$), esto es,

$$V_2(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^2}. \quad (3.3.2)$$

Denotaremos una configuración del problema planar de cuatro cuerpos como $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \in \mathbb{C}^4$, con espacio de configuración $\mathbb{C}^4 \setminus \Delta$, donde $\Delta = \{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^4 : \mathbf{q}_i =$

\mathbf{q}_j para algún $i \neq j$) denota el conjunto de colisiones simultáneas de dos o más cuerpos.

Consideremos dos subproblemas invariantes para el problema planar de 4 cuerpos con masas unitarias. Uno de estos subproblemas es el problema colineal de cuatro cuerpos cuyo espacio de configuración reducido es denotado por \mathcal{C} . El otro corresponde al problema del paralelogramo de cuatro cuerpos con espacio de configuración reducido dado por

$$\mathcal{P} := \{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \in \mathbb{C}^4 : \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_3 \text{ y } \mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_4\}. \quad (3.3.3)$$

Del ejemplo [6](#) sabemos que los conjuntos de puntos fijos de involuciones isométricas son siempre totalmente geodésicos. Sean

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) = -(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \quad \text{y} \quad \Phi_{\mathcal{C}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) = (\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2, \bar{\mathbf{q}}_3, \bar{\mathbf{q}}_4)$$

involuciones isométricas. Definamos

$$\mathcal{P} = \pi(\text{Fix } \Phi_{\mathcal{P}}) \cong S^2 \setminus \{4 \text{ puntos}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = \pi(\text{Fix } \Phi_{\mathcal{C}}) \cong \mathbb{R}P^2 \setminus RP\Delta, \quad (3.3.4)$$

donde π es el mapeo de Hopf. Aquí, $\text{Fix}(f) = \{p \in M \mid f(p) = p\}$, para cualquier función $f : M \rightarrow M$, $S^2 \setminus \{4 \text{ puntos}\} \cong \mathbb{C}P^1$ y $RP\Delta$ es la proyección real de $\Delta \cap \overline{\mathbb{C}_0^3}$, donde \mathbb{C}_0^3 es el espacio de configuraciones cuyo centro de masa es cero (ecuación [3.3.5](#)).

La superficie \mathcal{P} es topológicamente equivalente a S^2 menos 4 puntos, o una camisa. Las perforaciones de S^2 son debido a dos colisiones binarias ($\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3$ y $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_4$) y dos colisiones binarias simultáneas ($\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_4$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3$ y $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_4$). Ver figura [3.3](#).

3.3.2. Reducción del problema

Considerando la simetría del problema: $\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_3$ y $\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_4$. El potencial (negativo) (3.3.2) se reduce a

$$U_2 = \frac{1}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4\|^2} + \frac{1}{2\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3\|^2} + \frac{1}{2\|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4\|^2}.$$

Comenzando la reducción mediante el grupo de traslaciones \mathbb{R}^2 , podemos identificar el cociente $(\mathbb{C}^4 \setminus \Delta)/\mathbb{R}^2$ con el espacio de configuraciones cuyo centro de masa están en el origen, esto es,

$$\mathbb{C}_0^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^4 \setminus \Delta : \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 = 0\}. \quad (3.3.5)$$

Notemos que de \mathbb{C}_0^3 podemos concluir que el momento lineal total \mathbf{P} es cero. Además, que $\mathbb{C}_0^3 \cong \mathbb{C}^3 \setminus \{r_{ij} = 0\}$, donde r_{ij} representa la distancia $\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$.

Consideremos las coordenadas de Jacobi

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \mapsto (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) =: (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad (3.3.6)$$

y el mapeo de Hopf

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2), z_1 \bar{z}_2 \right) = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.3.7)$$

Además, por teorema 6,

$$I = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}, \quad I = \text{constante}. \quad (3.3.8)$$

La siguiente proposición describe la relación entre los puntos del espacio de configuración \mathcal{P} y las distancias mutuas r_{ij} .

Proposición 14 (Lema 6 de [16]). *Para $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{P}$, tenemos*

1. $r_{12}^2 = |z_1|^2 = \frac{I}{2} + w_1,$

2. $r_{14}^2 = |z_2|^2 = \frac{I}{2} - w_1$,
3. $r_{13}^2 = |z_1 + z_2|^2 = I + 2w_2$,
4. $r_{24}^2 = |z_1 - z_2|^2 = I - 2w_2$.

En particular, observemos que $w_1 = 0$ si y solo si la configuración es un rombo. Por otra parte, $w_2 = 0$ si y solo si la configuración es un rectángulo. Así, tenemos que en el polo norte o sur la configuración es un cuadrado. Ver figura [3.3](#).

Demostración. 1. De [\(3.3.8\)](#) obtenemos $|z_2|^2 = I - |z_1|^2$. Luego, sustituyendo la igualdad anterior en $\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2) = w_1$ y despejando $|z_1|^2$, obtenemos

$$|z_1|^2 = \frac{I}{2} + w_1.$$

2. De la simetría del problema $\mathbf{q}_4 = -\mathbf{q}_2$ y de las coordenadas de Jacobi [\(3.3.6\)](#) tenemos por una parte que

$$r_{14}^2 = \|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4\|^2 = \|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\|^2 = |-z_2|^2 = |z_2|^2.$$

Por otra parte, sustituyendo $|z_1|^2 = I - |z_2|^2$ en $\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2) = w_1$ y despejando $|z_2|^2$ llegamos a $|z_2|^2 = \frac{I}{2} - w_1$. Por lo tanto, $r_{14}^2 = |z_2|^2 = \frac{I}{2} - w_1$.

3. De la simetría del problema $\mathbf{q}_3 = -\mathbf{q}_1$, y de las coordenadas de Jacobi [\(3.3.6\)](#) obtenemos

$$z_1 + z_2 = (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + (-\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1.$$

Por lo tanto, $r_{13}^2 = |z_1 + z_2|^2$. De las propiedades de los números complejos vemos que

$$w_2 = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \tag{3.3.9}$$

y

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2.$$

Obteniendo así $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2w_2 + |z_2|^2$. Por lo tanto, tomando en cuenta a la ecuación (3.3.8), $r_{13}^2 = I + 2w_2$.

4. Análogamente, de la simetría del problema $\mathbf{q}_4 = -\mathbf{q}_2$, y de las coordenadas de Jacobi (3.3.6) obtenemos $z_1 - z_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4$. Entonces $|z_1 - z_2|^2 = r_{24}^2$. Luego, usando (3.3.8) y (3.3.9), llegamos a

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 - 2w_2 + |z_2|^2 \\ &= I - 2w_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $r_{24}^2 = I - 2w_2$.

■

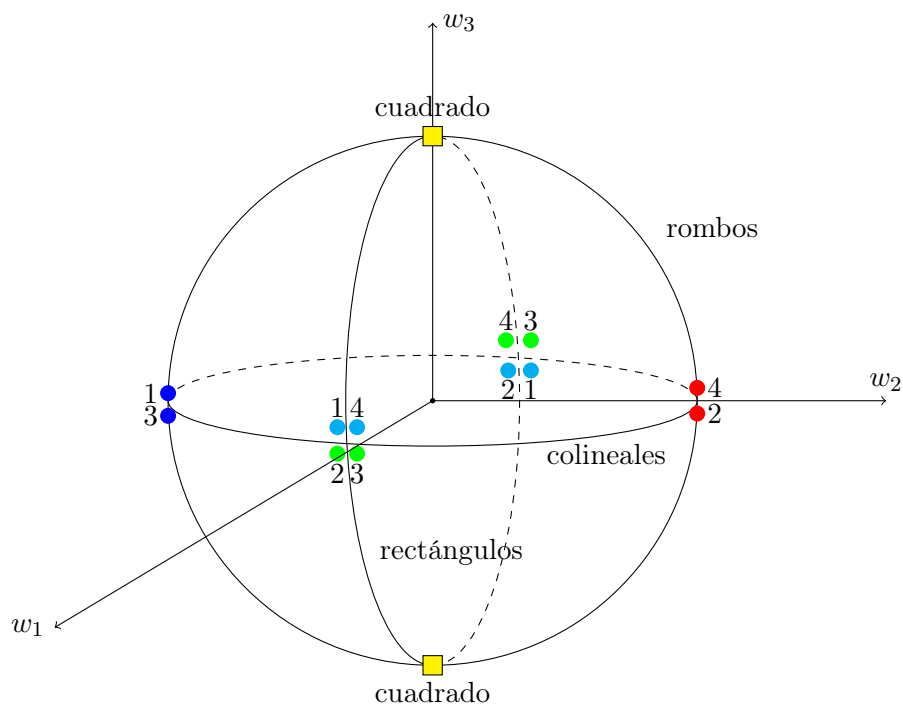


Figura 3.3: La esfera de forma para la configuración de paralelogramos.

La esfera de forma o espacio reducido correspondiente a la configuración de paralelogramos en el caso de masas iguales. El ecuador corresponde a paralelogramos colineales. Existen dos colisiones binarias y dos colisiones binarias simultáneas en el ecuador. Los rombos y rectángulos son grandes círculos y estos intersectan en los polos, que corresponden a cuadrados distinguidos solo por su orientación.

Observación. Usando un potencial similar (o igual) a (3.1.2) descrito en el capítulo 3, y por un procedimiento similar al realizado en la sección 3.2, también es posible construir un modelo del plano hiperbólico a partir del problema de cuatro cuerpos, con la configuración de paralelogramos, induciendo la métrica de Jacobi-Maupertuis al espacio cociente $(\mathbb{C}^4 \setminus \Delta)/G$ por medio del proceso de reducción de $\mathbb{C}^4 \setminus \Delta$ mediante el grupo G de traslaciones, rotaciones y escalamientos.

Capítulo 4

Encaje del problema de Kepler como una superficie de revolución

Entre los ejemplos de variedades diferenciables, las superficies más simples son las funciones real valuadas definidas en el plano y las gráficas de funciones dentro del espacio euclidiano tridimensional. Por otro lado, las superficies de rotación son otra familia simple de variedades en \mathbb{R}^3 . En un contexto físico, el problema de Kepler y la métrica de Jacobi (métrica de Kepler) correspondiente también son invariantes bajo rotaciones del plano. Por lo tanto, es natural preguntarse si esta métrica puede representarse como una superficie de revolución en \mathbb{R}^3 . En este capítulo se estudiará la geometría de la métrica de Kepler y el problema de encajamiento. Los encajes de las métricas con $h \geq 0$ como superficies de revolución en \mathbb{R}^3 son construidos explícitamente, sin embargo, el *encaje global* no existe para $h < 0$ debido a la singularidad de la métrica en la frontera del espacio correspondiente. Concluiremos el capítulo mostrando un teorema, debido a Richard Moeckel, (ver teorema [8](#)) que afirma que el problema de no poder encajar el espacio de configuración admisible correspondiente a $h < 0$ no es exclusivo del problema de Kepler.

4.1. El problema de Kepler

El problema de Kepler o problema de fuerza central (caso especial del problema de dos cuerpos) se refiere al movimiento de una masa puntual en el plano bajo una fuerza central. Denotemos como $\mathbf{q} = (x, y)$ la posición de la masa $m > 0$. Las ecuaciones de Newton son

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -Gm \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}, \quad (4.1.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal.

Observación. Notemos que si $\mathbf{q}(t)$ es una solución de (4.1.1), entonces $Q(t) = k\mathbf{q}(t)$, $k > 0$, resuelve una ecuación similar con G reemplazado por k^3G . Así, podemos asumir que $G = 1$.

Usando (1.1.7) y definiendo $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$ el problema de Kepler con $G = m = 1$ se convierte en el hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|},$$

y ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3}. \quad (4.1.2)$$

Veamos que la constante de movimiento h (la energía total $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h$ es una constante de movimiento) la podemos restringir a los niveles de energía $h = 0, 1, -1$.

Proposición 15. Si $k^3l^2 = 1$, con $k, l \in \mathbb{R}$, $k > 0$ y $l \neq 0$, y $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ es una solución de (4.1.2) con energía h , entonces $(Q(t), P(t)) = (k\mathbf{q}(t), kl\mathbf{p}(t))$ también es solución de (4.1.2) pero con energía k^2l^2h .

Demostración. Si $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ es una solución, entonces se satisfacen las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{p}(t), \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = l\ddot{\mathbf{q}}(t) = -l \frac{\mathbf{q}(t)}{\|\mathbf{q}(t)\|^3}.$$

Por lo tanto, usando $l^2 = 1/k^3$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &= kl\dot{\mathbf{q}}(lt) \\
 &= kl\mathbf{p}(lt) \\
 &= P(t), \\
 \dot{P} &= kl\dot{\mathbf{p}}(lt) \\
 &= -kl^2 \frac{\mathbf{q}(lt)}{\|\mathbf{q}(lt)\|^3} \\
 &= -\frac{k\mathbf{q}(lt)}{k^3\|\mathbf{q}(lt)\|^3} \\
 &= -\frac{k\mathbf{q}(lt)}{\|k\mathbf{q}(lt)\|^3} \\
 &= -\frac{Q(t)}{\|Q(t)\|^3}.
 \end{aligned}$$

Luego, usando nuevamente la hipótesis $k^3l^2 = 1$, llegamos a

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\|kl\mathbf{p}(lt)\|^2}{2} - \frac{1}{\|k\mathbf{q}(lt)\|} \\
 &= \frac{k^2l^2\|\mathbf{p}(lt)\|^2}{2} - k^2l^2 \frac{1}{\|\mathbf{q}(lt)\|} \\
 &= k^2l^2 H(\mathbf{q}(lt), \mathbf{p}(lt)) \\
 &= k^2l^2 h.
 \end{aligned}$$

Así, eligiendo k, l podemos escalar la energía por cualquier constante positiva para conseguir $h = 0, 1, -1$. ■

Sean $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} + V(\mathbf{q}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - U(\mathbf{q})$ cualquier sistema hamiltoniano planar y h un nivel de energía fijo. La correspondiente métrica de Jacobi-Maupertuis en el espacio de configuración admisible (o h -espacio de configuración con desigualdad estricta)

$$\bar{M}_h = \{\mathbf{q} = (x, y) : h + U(x, y) \geq 0\}$$

está dado por

$$\mathbf{g} = 2(h + U(x, y))(dx^2 + dy^2), \quad U = -V > 0.$$

Para el problema de Kepler, si $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ es una solución con energía h , el teorema de Jacobi [4](#) nos asegura que $\mathbf{q}(t) \in \bar{M}_h$ es una geodésica de la métrica \mathbf{g} . Inversamente, dicha geodésica siempre puede ser reparametrizada para dar una solución $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ de [\(4.1.2\)](#) con energía h . En este contexto, tenemos que

$$\mathbf{g} = 2 \left(h + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) (dx^2 + dy^2) = 2 \left(h + \frac{1}{r} \right) (dx^2 + dy^2), \quad (4.1.3)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $U = -V = \frac{1}{r}$. Para $h \geq 0$ el espacio de configuración admisible corresponde a $\bar{M}_h = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Para $h < 0$ tenemos un disco, $\bar{M}_h = \left\{ r \leq \frac{1}{|h|} \right\}$. La métrica no está definida en la singularidad de colisión, $r = 0$, y tampoco en la frontera de \bar{M}_h cuando $h < 0$.

4.2. Geometría de la métrica de Kepler

Ahora estudiemos la geometría diferencial de la métrica [\(4.1.3\)](#). Eliminar el factor 2 de la métrica no afecta a las geodésicas, la métrica resultante será llamada la **métrica de Kepler**. Por la proposición [15](#), podemos restringir nuestra atención a los casos $h = 0, 1, -1$. Para $h = 0, 1$ tenemos una métrica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, mientras que para $h = -1$ el espacio \bar{M}_h es el disco unitario $\mathfrak{D} = \{r \leq 1\}$. Comencemos escribiendo la métrica de Kepler en diferentes sistemas coordenados.

Debido a la simetría circular (invariante bajo rotaciones en el plano) de [\(4.1.3\)](#), es natural comenzar con las coordenadas polares, entonces

$$\mathbf{g} = \left(h + \frac{1}{r} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2) = \left(h + \frac{1}{r} \right) dr^2 + r(hr + 1)d\theta^2. \quad (4.2.1)$$

Una forma estándar para una métrica rotacionalmente simétrica es

$$\mathbf{g} = ds^2 + a(s)^2 d\theta^2,$$

donde s es el parámetro de longitud de arco a lo largo de un segmento de línea radial.

Comparando las métricas anteriores e integrando el factor

$$ds = \sqrt{h + \frac{1}{r}} dr$$

obtenemos

$$s = \begin{cases} 2\sqrt{r} & h = 0 \\ \sqrt{r(1+r)} + \sinh^{-1}(\sqrt{r}) & h = 1 \\ \sqrt{r(1-r)} + \sin^{-1}(\sqrt{r}) & h = -1 \end{cases}$$

Además, $a(r) = \sqrt{r(hr+1)}$. Para encontrar $a(s)$ es necesario invertir las fórmulas de $s(r)$, y esto puede hacerse explícitamente solo para el caso $h = 0$. Como $a(r) = \sqrt{r}$ y $s = 2\sqrt{r}$ entonces $a(s) = s/2$, y por tanto

$$\mathbf{g} = ds^2 + \frac{s^2}{4} d\theta^2, \quad h = 0.$$

Notemos que usando la parametrización $(s, \theta) \mapsto (\frac{s}{2} \cos \theta, \frac{s}{2} \sin \theta, \frac{\sqrt{3}}{2}s)$ de un cono circular, su métrica inducida para la métrica euclidiana es igual a \mathbf{g} . En efecto, los vectores tangentes del cono son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \left(\frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \left(-\frac{s}{2} \sin \theta, \frac{s}{2} \cos \theta, 0 \right). \end{aligned}$$

Luego, $\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle = 1$, $\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \rangle = s^2/4$ y $\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \theta} \rangle = 0$.

Si una métrica general con simetría de rotación en coordenadas polares es escrito como $\mathbf{g} = E(u)du^2 + 2F(u)dud\theta + G(u)d\theta^2$, entonces las **coordenadas isotérmicas** son caracterizadas por requerir que $F(u) = 0$ y $E(u) = G(u)$. Así, comparando $\mathbf{g} = G(u)du^2 + G(u)d\theta^2$ con la métrica (4.2.1) vemos que

$$r(hr + 1)du^2 = \left(h + \frac{1}{r} \right) dr^2,$$

donde $G(u) = r(hr + 1)$. Integrando obtenemos

$$u = \ln r, \quad r = e^u,$$

y la métrica se transforma en

$$\mathbf{g} = e^u(1 + he^u)(du^2 + d\theta^2).$$

Para $h = 0, 1$ tenemos $-\infty < u < \infty$, mientras que para $h = -1$ tenemos $-\infty < u \leq 0$.

Finalmente, queremos coordenadas simplécticas (τ, θ) tales que $F(\tau) = 0$ y $E(\tau)G(\tau) = 1$. Notemos que cuando $h = 0$, las coordenadas polares son siempre simplécticas con $\tau = r$, $E(\tau) = \frac{1}{\tau}$ y $G(\tau) = \tau$. Usando (4.2.1) vemos que $G(\tau) = r(hr + 1)$ y $E(\tau)d\tau^2 = \left(h + \frac{1}{\tau} \right) dr^2$. Como $E(\tau)G(\tau) = 1$ entonces

$$d\tau = (hr + 1)dr,$$

que al integrar obtenemos $\tau = \frac{hr^2}{2} + r$. Así, para $h = \pm 1$

$$\tau = r \pm \frac{r^2}{2},$$

y por tanto, resolviendo la ecuación cuadrática, $r = \pm(-1 + \sqrt{1 \pm 2\tau})$. Luego, como $G(\tau) =$

$\pm r^2 + r$ entonces

$$\begin{aligned}
 G(\tau) &= \pm(-1 + \sqrt{1 \pm 2\tau})^2 \mp 1 \pm \sqrt{1 \pm 2\tau} \\
 &= \pm 1 \mp 2\sqrt{1 \pm 2\tau} \pm 1 + 2\tau \mp 1 \pm \sqrt{1 \pm 2\tau} \\
 &= \pm\sqrt{1 \pm 2\tau} + 2\tau \pm 1 \\
 &= \pm\sqrt{1 \pm 2\tau}(\sqrt{1 \pm 2\tau} - 1).
 \end{aligned}$$

Si $G(\tau) = \phi(\tau)$, la métrica toma la forma

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\phi(\tau)} d\tau^2 + \phi(\tau) d\theta^2.$$

El rango de τ es $(0, \infty)$ para $h = 0, 1$ y $(0, \frac{1}{2})$ para $h = -1$.

La primera forma fundamental de una superficie proporciona información sobre algunas propiedades geométricas tales como la longitud de una curva, el área de una región, las trayectorias más cortas y la curvatura gaussiana de la superficie. Veamos algunos invariantes geométricos de la superficie de Kepler.

De las funciones $G(\tau) = \tau$ (para $h = 0$), $\phi(\tau) = \sqrt{1 + 2\tau}(\sqrt{1 + 2\tau} - 1)$ (para $h = 1$) y $\phi(\tau) = -\sqrt{1 - 2\tau}(\sqrt{1 - 2\tau} - 1)$ (para $h = -1$) obtenemos la longitud de arco de los rayos radiales, $s = \infty$ para $h = 0, 1$ y $s = \pi/2$ para $h = -1$. El área del disco de radio r centrado en el origen está dado por

$$A(r) = \int \int \sqrt{EG - F^2} dt d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\tau(r)} dt d\theta = 2\pi\tau(r) = 2\pi \left(\frac{hr^2}{2} + r \right).$$

Finalmente, la curvatura de Gauss puede ser calculada usando fórmulas estándares en cualquiera de los sistemas coordenados. El más fácil es en las coordenadas simplécticas donde

tenemos

$$K = -\frac{1}{2}\ddot{\phi}(\tau) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ \frac{-1}{2(1+2\tau)^{3/2}} = \frac{-1}{2(1+r)^3} & h = 1 \\ \frac{1}{2(1-2\tau)^{3/2}} = \frac{1}{2(1-r)^3} & h = -1. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Notemos que en el caso $h = 1$ tenemos curvatura negativa, mientras para $h = -1$ tenemos curvatura positiva con $K(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 1$.

Finalmente, observemos que, para la energía negativa, la métrica de Kepler es un ejemplo de la métrica de Zoll, esto es, una métrica cuyas geodésicas son todas cerradas [4, 35].

4.3. Encaje como superficie de revolución en \mathbb{R}^3

Dado que la métrica de Kepler es rotacionalmente simétrica, es natural preguntarse si puede realizarse como una superficie de revolución en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 . Este ejemplo también está discutido en [31, sección 2.3].

Sean (ρ, θ, z) las coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3 , la métrica euclidiana es

$$\mathbf{g}_E = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Buscamos un encaje de la forma $\rho = f(r)$, $z = g(r)$ que da la métrica

$$\mathbf{g} = (\dot{f}(r)^2 + \dot{g}(r)^2)dr^2 + f(r)^2 d\theta^2,$$

donde \dot{f} y \dot{g} denotan la derivada usual de una función, es decir, $\dot{f} = \frac{df}{dr}$ y $\dot{g} = \frac{dg}{dr}$. Comparando con (4.2.1) tenemos que

$$\dot{f}(r)^2 + \dot{g}(r)^2 = h + \frac{1}{r}, \quad \sqrt{r(hr + 1)} = f(r). \quad (4.3.1)$$

Derivando la segunda ecuación de arriba y substituyendo el resultado en la primera ecuación

de (4.3.1), obtenemos (para $h = 0$)

$$\dot{g}(r) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Por lo tanto, por (4.3.1) e integrando $\dot{g}(r)$, cuando $h = 0$ llegamos a

$$\rho = f(r) = \sqrt{r}, \quad z = g(r) = \sqrt{3r},$$

el cual describe una línea en el plano (ρ, z) con pendiente $\sqrt{3}$. De [31] sabemos que el mapeo $(r, \theta) \rightarrow (\rho, \theta)$ es isométrico si y sólo si $\dot{f}(r)^2 + \dot{g}(r)^2 = h + \frac{1}{r}$ y $\sqrt{r(hr + 1)} = f(r)$.¹

Entonces, rotando la línea alrededor del eje z obtenemos un cono circular isométrico a la superficie de Kepler correspondiente. El ángulo entre el eje z y el cono es $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$. Si se corta el cono a lo largo de una curva radial y se aplanan se obtiene un semiplano perfecto, es decir, después del aplanamiento, el ángulo entre los dos bordes cortados es exactamente π . Las geodésicas, que representan las órbitas parabólicas del problema de Kepler, pueden representarse dibujando líneas rectas en una hoja de papel y pegar los bordes del papel para formar un cono. La curva que genera la superficie está dado paramétricamente como $(\rho, z) = (\sqrt{r}, \sqrt{3r})$. La superficie y una geodésica se muestra en [4.1].

Ahora supongamos $h = 1$. Encontramos que

$$f(r) = \sqrt{r(r+1)}, \quad \dot{g}(r)^2 = \frac{3+4r}{4r(r+1)}.$$

Ocupando las identidades del libro [19, págs. 60-63] podemos integrar $\dot{g}(r)$. De la fórmula

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 + b^2)}} dt = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \operatorname{nc}^2 u du, \quad t = a \operatorname{nc} u, \quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

¹Si dos superficies M_1 y M_2 pueden parametrizarse de modo que sus primeras formas fundamentales coincidan, entonces las superficies son isométricas. La isometría entre M_1 y M_2 se define por una correspondencia uno a uno de los puntos con coordenadas iguales. Inversamente, si M_1 y M_2 son isométricas, entonces pueden ser parametrizadas de tal forma que sus primeras formas fundamentales coincidan.

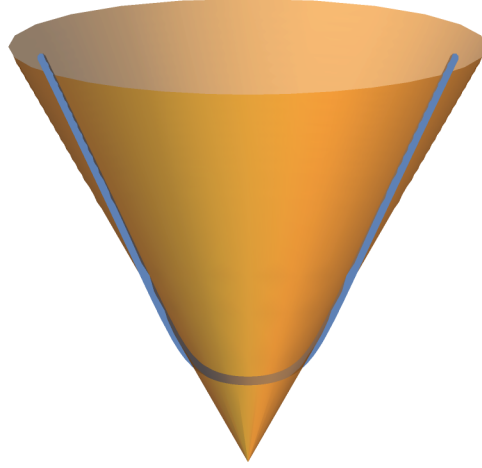


Figura 4.1: Encaje de la superficie de Kepler con $h = 0$.

y por el cambio de variable $t(r) = \sqrt{3 + 4r}$, obtenemos

$$g(r) = \int_0^r \sqrt{\frac{3 + 4r}{4r(r + 1)}} dr = \int_{\sqrt{3}}^{t(r)} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2 - 3)(t^2 + 1)}} = \frac{3}{2} \int \text{nc}^2 u \, du,$$

donde $\text{nc}(u, k) = \sqrt{1 + \frac{4r}{3}}$. Luego, usando la identidad

$$\int \text{dn}^2 u \, du = k^2 u + \text{dn} \, u \, \text{sc} \, u - k^2 \int \text{nc}^2 u \, du$$

llegamos a

$$g(r) = \frac{3}{2} \left(u + 4 \text{dn} \, u \, \text{sc} \, u - 4 \int \text{dn}^2 u \, du \right) = \frac{3}{2} u + 6 \text{dn}(u, k) \text{sc}(u, k) - 6E(u, k),$$

donde $\text{dn}(u, k)$, $\text{sc}(u, k)$, y $\text{nc}(u, k)$ son funciones elípticas de Jacobi y $E(u, k) = \int \text{dn}^2 u \, du$ es la integral elíptica de Jacobi de segundo tipo con módulo $k = 1/2$. La curva que genera

la superficie está dado paramétricamente como $(\rho, z) = (\sqrt{r(r+1)}, g(r))$ y la superficie se muestra en [4.2](#).

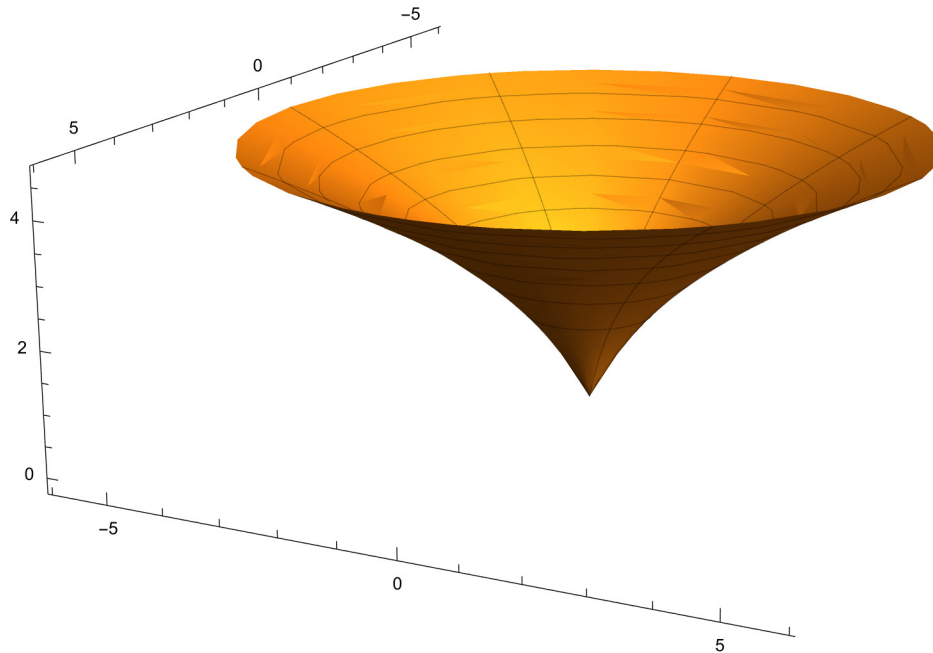


Figura 4.2: Encaje de la superficie de Kepler con $h = 1$

Finalmente, consideremos la superficie de Kepler con $h = -1$. Dado que la métrica de Kepler se anula en la frontera del disco unitario $\mathfrak{D} = \{r \leq 1\}$, no es posible obtener un encaje válido para $0 \leq r \leq 1$. En cambio, podría ser válido para $0 \leq r < 1$ usando el cambio de coordenadas (ρ, z) .

Un encaje con $\rho = f(r)$, $z = g(r)$ debe satisfacer

$$f(r) = \sqrt{r(1-r)}, \quad \dot{f}(r)^2 + \dot{g}(r)^2 = \frac{1}{r} - 1.$$

Substituyendo la primera de estas ecuaciones en la segunda obtenemos

$$\dot{g}(r)^2 = \frac{3-4r}{4r(1-r)}.$$

Claramente, esto puede ser válido solo para $0 < r \leq 3/4$, el cual nos indica que un encaje para toda la superficie es imposible. Nuevamente, con ayuda de las identidades de [19] podemos integrar $\dot{g}(r)$. De la fórmula

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{(b^2 - t^2)(a^2 + t^2)}} dt = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \text{cn}^2 u du, \quad t = b \text{cn } u, \quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

y con el cambio de variable $t(r) = \sqrt{3 - 4r}$, obtenemos

$$g(r) = \int_0^r \sqrt{\frac{3 - 4r}{4r(1 - r)}} dr = -\int_{\sqrt{3}}^{t(r)} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(3 - t^2)(1 + t^2)}} = \frac{3}{2} \int \text{cn}^2 u du,$$

donde $\text{cn}(u, k) = \sqrt{1 - \frac{4r}{3}}$ es la función elíptica de Jacobi. Luego, usando la identidad

$$\int \text{dn}^2 u du = k^2 u + k^2 \int \text{cn}^2 u du$$

llegamos a

$$g(r) = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \int \text{dn}^2 u du - u \right) = 2E(u, k) - \frac{3}{2}u,$$

donde $E(u, k) = \int \text{dn}^2 u du$ es la integral elíptica de Jacobi de segundo tipo con módulo $k = \sqrt{3}/2$. La curva que genera la superficie está dada paramétricamente como $(\rho, z) = (\sqrt{r(1 - r)}, g(r))$ y la superficie se muestra en [4.3].

La falta de un encaje global puede ser explicado de un modo diferente usando diferentes coordenadas. En coordenadas simplécticas, el criterio para la existencia de un encaje como superficie de revolución es $|\dot{\phi}| \leq 2$, ver la Proposición 2.3 en [15]. Para la superficie de Kepler con $h = -1$ tenemos $\phi(\tau) = -\sqrt{1 - 2\tau}(\sqrt{1 - 2\tau} - 1)$ y por tanto

$$\dot{\phi}(\tau) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2\tau}}.$$

Entonces, $|\dot{\phi}| \leq 2$ si y solo si $\tau \leq 15/32$. Como $\tau = r - r^2/2$, entonces $r - r^2/2 \leq 15/32$ si y solo si $r \leq 3/4$.

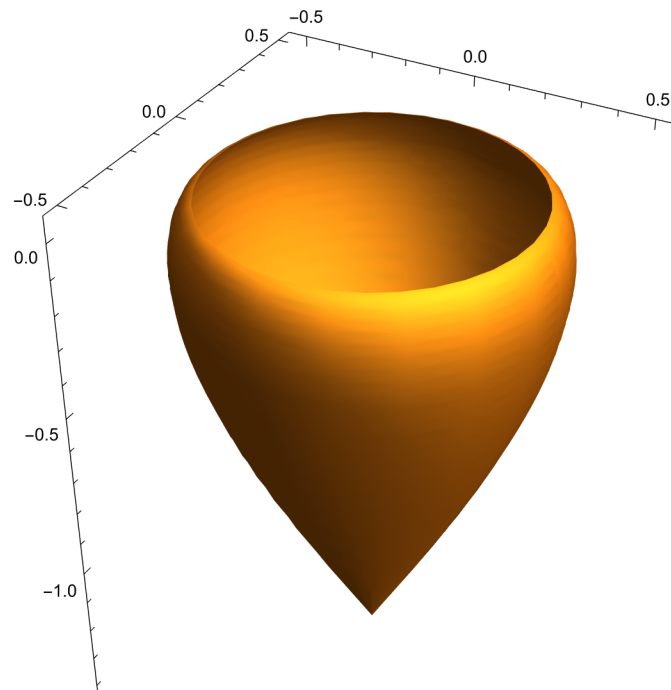


Figura 4.3: *Encaje parcial* de la superficie de Kepler con $h = -1$

La falta de un encaje cerca de la frontera del espacio de configuración admisible no es especial del problema de Kepler, sino una característica general de los problemas de fuerza central planar. Considerar la métrica de Jacobi-Maupertuis asociado al potencial $U(r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En coordenadas polares tenemos

$$\mathbf{g} = (h + U)dr^2 + r^2(h + U)d\theta^2, \quad (4.3.2)$$

donde se ha eliminado el factor 2 como antes. En la frontera del espacio de configuración admisible podría estar una curva donde $U(r) + h = 0$ con un anillo o collar abierto alrededor donde $U(r) + h > 0$. Resulta que generalmente es imposible encajar tal anillo abierto como

una superficie de revolución.

Teorema 8 (Teorema 1 en [23]). *Supongamos que $U(r)$ es una función analítica tal que $U(r) + h$ tiene un cero aislado en $r = r_0 > 0$. Además, supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $U(r) + h > 0$ en $r_0 - \epsilon < r < r_0$ o $r_0 < r < r_0 + \epsilon$ o ambos. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que la métrica (4.3.2) en la parte del espacio de configuración $M_h = \{U(r) + h \geq 0\}$ con $0 < |r - r_0| < \delta$ no admite un encaje como una superficie de revolución en \mathbb{R}^3 .*

Demostración. Como en los casos anteriores, un encaje general toma la forma $\rho = f(r)$, $z = g(r)$ en coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3 donde $f(r)$, $g(r)$ deben satisfacer

$$f(r) = r\sqrt{U+h} \quad \dot{f}(r)^2 + \dot{g}(r)^2 = U+h.$$

Así, de la segunda ecuación obtenemos

$$\dot{g}(r)^2 = -\frac{r\dot{U}(r)(r\dot{U}(r) + 4(U+h))}{4(U+h)}. \quad (4.3.3)$$

Es suficiente mostrar que el lado derecho de esta ecuación es siempre negativo en un intervalo de la forma $(r_0 - \delta, r_0)$ o $(r_0, r_0 + \delta)$ tal que $U(r) + h \geq 0$. Ya que $U(r)$ es analítico y r_0 es un cero de orden finito [1], digamos $d > 1$, entonces podemos escribir

$$U(r) = -h + c\frac{(r-r_0)^d}{d} + \mathcal{O}(|r-r_0|^{d+1})$$

para algún $c \neq 0$. Si d es par, entonces debemos tener $c > 0$, así $U(r) + h \geq 0$ en ambos intervalos $(r_0 - \delta, r_0)$ o $(r_0, r_0 + \delta)$. Si d es impar, entonces $U(r) + h$ cambia de signo en r_0 y queremos encontrar el intervalo que cumpla $U(r) + h \geq 0$.

Denotemos como $G(r)$ el lado derecho de la ecuación (4.3.3) y pongamos $\Delta r = r - r_0$. De la serie de Taylor para $U(r)$ obtenemos

$$G(r) = -\frac{1}{4}c\Delta r^{d-2}(d\Delta r^2 + \mathcal{O}(\Delta r))$$

para $\Delta r \neq 0$. Si d es par, entonces $c > 0$ y $\Delta r^{d-2} > 0$ y por tanto $G(r) < 0$ para $|\Delta r| < 0$. Así, la métrica en $(r_0 - \delta, r_0)$ o $(r_0, r_0 + \delta)$ no puede ser encajada como una superficie de revolución. Si d es impar existen dos casos. Si $c > 0$ queremos el lado de r_0 que satisfaga $\Delta r > 0$, es decir, con $r \in (r_0, r_0 + \delta)$. Entonces, $\Delta r^{d-2} > 0$ y por tanto $G(r) < 0$ para $\Delta r > 0$ suficientemente pequeño. Si $c < 0$ nos interesamos en el lado de r_0 con $\Delta r < 0$, es decir, con $r \in (r_0 - \delta, r_0)$. Así, $c\Delta r^{d-2} > 0$ y por tanto $G(r) < 0$ para $\Delta r < 0$ suficientemente pequeño. ■

Apéndice A

Modelos hiperbólicos

A.1. Métricas

La geometría riemanniana se ocupa principalmente de las propiedades que conservan las isometrías. Si (M, g_1) y (N, g_2) son variedades riemannianas, un difeomorfismo ϕ de M a N es una **isometría** si $\phi^*g_2 = g_1$. Decimos que (M, g_1) y (N, g_2) son isométricos si existe una isometría entre ellos. Podemos encontrar tres clases de *espacios modelo* (o variedades riemannianas modelo) altamente simétricos de la geometría riemanniana: el espacio euclidiano \mathbb{R}^n , las esferas S^n y el espacio hiperbólico H^n . En este apartado sólo se mencionan algunas propiedades del espacio hiperbólico, ver [6] para más detalles.

En el espacio hiperbólico H^n existen cinco modelos analíticos donde cada modelo tiene su propia métrica, geodésica, isometría, etc. Además, cada uno está definido en un subconjunto diferente de \mathbb{R}^{n+1} , llamado su **dominio**.

- El modelo del semi-espacio $H = \{(1, x_2, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\}$, con métrica riemanniana

$$ds_H^2 = \frac{dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}.$$

- El modelo del disco de Poincaré $I = \{(x_1, \dots, x_n, 0) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$, con métrica

riemanniana

$$ds_I^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2}.$$

- El modelo Jemisphere $J = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \text{ y } x_{n+1} > 0\}$, con métrica riemanniana

$$ds_J^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}.$$

- El modelo de Klein $K = \{(x_1, \dots, x_n, 1) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$, con métrica riemanniana

$$ds_K^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)} + \frac{(x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2}.$$

- El modelo del hiperboloide $L = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1 \text{ y } x_{n+1} > 0\}$, con métrica riemanniana

$$ds_L^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2.$$

Para ver que estos cinco modelos son isométricamente equivalentes, necesitamos describir las isometrías entre ellos. Usemos el modelo de la Jemisphere como modelo central y definamos para cada uno de los demás una función hacia o desde J .

- La función $\alpha : J \rightarrow H$ es la proyección central desde el punto $(-1, 0, \dots, 0)$, definida por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(1, \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1}\right).$$

- La función $\beta : J \rightarrow I$ es la proyección central desde $(0, \dots, 0, -1)$, definida por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1}, 0\right).$$

- La función $\eta : K \rightarrow J$ es la proyección vertical, definida por

$$(x_1, \dots, x_n, 1) \mapsto \left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} \right).$$

- La función $\delta : L \rightarrow J$ es la proyección central desde $(0, \dots, 0, -1)$, definida por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}} \right).$$

Cada función puede ser usada en el modo estándar para extraer la métrica riemanniana del codominio al dominio y verificar así que las funciones son isometrías. Se harán dos de los cuatro cálculos pullback correspondientes a las funciones α y γ .

Primero veamos que $\alpha^*(ds_H^2) = ds_J^2$. Como

$$y_2 = \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, y_{n+1} = \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1}$$

entonces

$$dy_i = \frac{2dx_i(x_1 + 1) - 2x_i dx_1}{(x_1 + 1)^2} = \frac{2}{x_1 + 1} \left(dx_i - \frac{x_i}{x_1 + 1} dx_1 \right).$$

Así,

$$\begin{aligned}
\alpha^*(ds_H^2) &= \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_2^2 + \cdots + dy_{n+1}^2) \\
&= \frac{(x_1 + 1)^2}{4x_{n+1}^2} \left[\frac{4}{(x_1 + 1)^2} \left(dx_2^2 - \frac{2x_2 dx_2}{x_1 + 1} dx_1 + \frac{x_2^2}{(x_1 + 1)^2} dx_1^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{4}{(x_1 + 1)^2} \left(dx_{n+1}^2 - \frac{2x_{n+1} dx_{n+1}}{x_1 + 1} dx_1 + \frac{x_{n+1}^2}{(x_1 + 1)^2} dx_1^2 \right) \right] \\
&= \frac{(x_1 + 1)^2}{4x_{n+1}^2} \frac{4}{(x_1 + 1)^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 - \frac{2dx_1}{x_1 + 1} \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i + \frac{dx_1^2}{(x_1 + 1)^2} \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + \frac{2x_1 dx_1^2}{x_1 + 1} + \frac{dx_1^2}{(x_1 + 1)^2} (1 - x_1^2) \right) \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left(\sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + dx_1^2 \right) \\
&= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 \\
&= ds_J^2.
\end{aligned}$$

Ya que $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$,

$$x_1 dx_1 = -(x_2 dx_2 + \cdots + x_{n+1} dx_{n+1})$$

y

$$x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 - x_1^2.$$

Ahora probemos que $\eta^*(ds_J^2) = ds_K^2$. Como $y_i = x_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $y_{n+1}^2 = 1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2 = 1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$. Entonces, $dy_i = dx_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ y

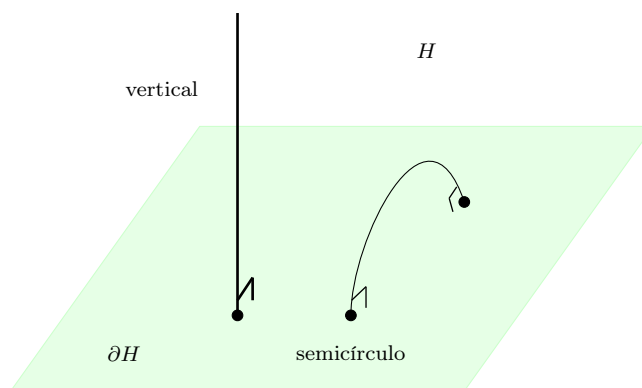
$y_{n+1}dy_{n+1} = -(x_1dx_1 + \cdots + x_ndx_n)$. Así,

$$\begin{aligned}
 \eta^*(ds_J^2) &= \frac{dy_1^2 + \cdots + dy_n^2}{y_{n+1}^2} + \frac{dy_{n+1}^2}{y_{n+1}^2} \\
 &= \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2} + \frac{(x_1dx_1 + \cdots + x_ndx_n)^2}{y_{n+1}^4} \\
 &= \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2} + \frac{(x_1dx_1 + \cdots + x_ndx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^2} \\
 &= ds_K^2.
 \end{aligned}$$

A.2. Geodésicas

Es posible encontrar líneas rectas o geodésicas en los cinco modelos analíticos del espacio hiperbólico. Aunque las geodésicas pueden ser encontradas resolviendo ecuaciones diferenciales, es posible deducir la naturaleza de todas las geodésicas mediante simples propiedades de simetría de la métrica hiperbólica una vez establecido la existencia de una geodésica en el modelo del semiespacio.

Teorema 9. *Las geodésicas en el modelo del semi-espacio H del espacio hiperbólico son líneas verticales en H y semicírculos (con la distancia o métrica euclidiana) cuyos puntos extremos se encuentran e intersectan la frontera $\{(1, x_2, \dots, x_n, 0)\}$ del espacio hiperbólico H ortogonalmente.*

Figura A.1: Los dos tipos de geodésicas en H

Definición 41. Sea S^n una esfera de dimensión n en el espacio euclidiano $(n+1)$ -dimensional \mathbb{R}^{n+1} . Sea P un plano tangente a la esfera S^n en el punto S , que tomamos como polo sur de S^n . Sea N el punto de S^n opuesto a S , punto que consideraremos el polo norte de S^n . Si $x \in S^n \setminus \{N\}$ es cualquier punto, existe un único punto $\pi(x) \in P$ en la recta que contiene a N y x .

La definición anterior se conoce como **proyección estereográfica** de x en P . Notemos que π tiene una extensión natural, denotada también por π , la cual toma todo \mathbb{R}^{n+1} excepto el plano $\{x : x_{n+1} = 1\}$ en P .

Teorema 10 (Conformidad o la preservación de ángulos). Sean $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, P , S , N y π (extendido) como en la definición. Entonces π preserva ángulos entre curvas en $S^n \setminus \{N\}$.

Teorema 11 (Preservación de esferas). Suponiendo la configuración del teorema anterior. Si C es una esfera en S^n que pasa por el polo norte $N \in S^n$ y tiene dimensión c , entonces la imagen $\pi(C) \subset P$ es un plano en P de dimensión c . Si por el contrario C no pasa por N , entonces la imagen $\pi(C)$ es una esfera en P de dimensión c .

Por los teoremas [10](#) y [11](#), los semicírculos (ortogonales en la frontera) en J corresponden a semicírculos (ortogonales en la frontera) y líneas verticales en H . Por lo tanto, las

geodésicas en J son los semicírculos (ortogonales en la frontera) en J .

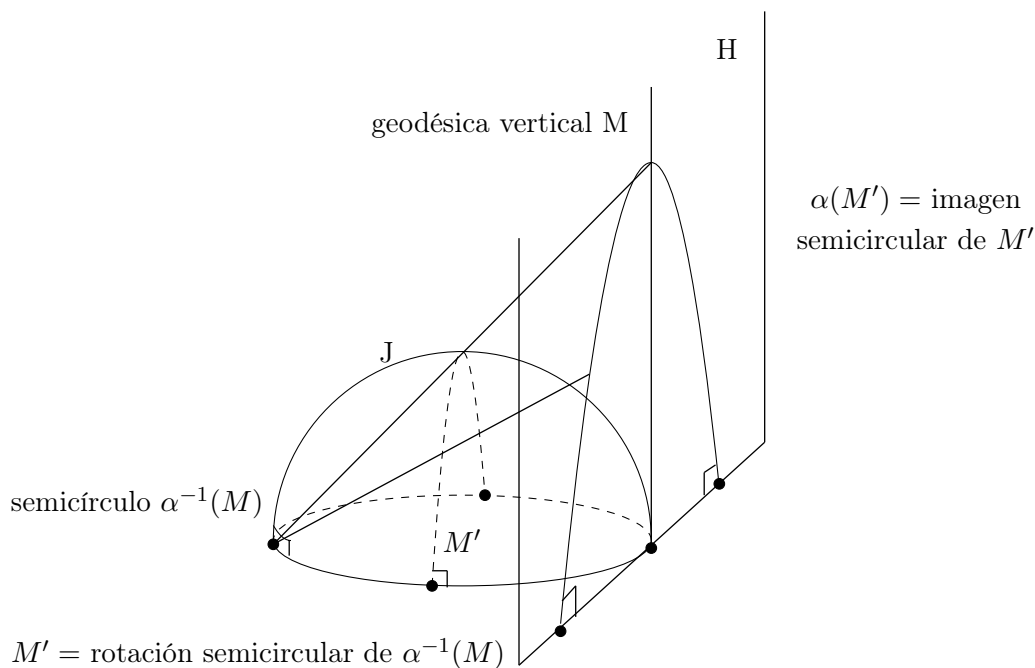


Figura A.2: Geodésicas en H

Los semicírculos en el modelo Jemisphere corresponden, bajo proyección vertical, a segmentos de rectas en K .

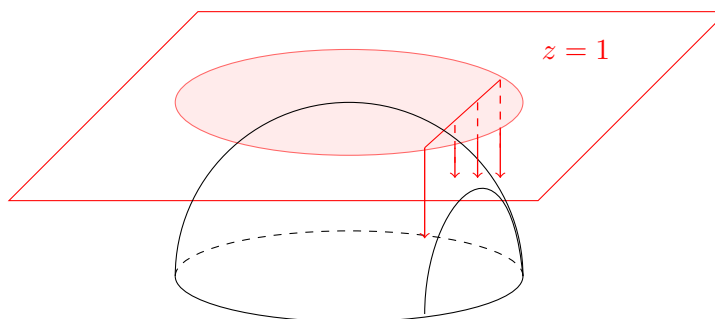


Figura A.3: Isometría entre los modelos de Klein y Jemisphere.
La proyección a lo largo de la vertical es una isometría entre los modelos de Klein y Jemisphere del plano hiperbólico.

Para describir las geodésicas en la métrica Jemisphere en términos de las coordenadas de Hopf-Jacobi usemos la isometría η con $n = 2$. Esto es, el modelo de Klein se encuentra como el disco $w_1^2 + w_2^2 < 1$ perteneciendo al plano $w_3 = 1$, tangente a la esfera $|w| = 1$ en el polo norte (recordemos que $I = 2$). Los puntos $(w_1, w_2, 1)$ del modelo de Klein son proyectados a puntos (w_1, w_2, w_3) de la Jemisphere, donde $w_3 = \sqrt{1 - w_1^2 - w_2^2}$. Considerando que las geodésicas del modelo de Klein son las cuerdas $Aw_1 + Bw_2 = C$ y ya que se mapean sobre las geodésicas de la Jemisphere, entonces las mismas ecuaciones lineales en w_1, w_2 caracterizan a las geodésicas en el modelo Jemisphere.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, Lars V., *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1953.
- [2] Alvarez-Ramírez, M. and García, A. and Meléndez, J. and Reyes-Victoria, J. G., *The three-body problem and equivariant Riemannian geometry*, J. Math. Phys., 58(8), 2017.
<https://doi.org/10.1063/1.5000075>
- [3] Arnold, V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [4] Besse, Arthur L., *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], 93, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.
- [5] Bor, Gil and Montgomery, Richard, *Poincaré and the N -body problem*, Miscelánea Mat., (58), 83-102, 2014.
- [6] Cannon, James W. and Floyd, William J. and Kenyon, Richard and Parry, Walter R., *Hyperbolic geometry*, *Flavors of geometry*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 31, 59-115, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [7] Chenciner, Alain and Montgomery, Richard, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math. (2), 152 (3), 881–901, 2000.
<https://doi.org/10.2307/2661357>.

- [8] do Carmo, Manfredo P., *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [9] Fujiwara, Toshiaki and Fukuda, Hiroshi and Ozaki, Hiroshi, *Evolution of the moment of inertia of three-body figure-eight choreography*, J. Phys. A, 36(42), 10537-10549, 2003. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/42/009>
- [10] Gallot, Sylvestre and Hulin, Dominique and Lafontaine, Jacques, *Riemannian geometry*, 3 ed., Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [11] *Geometrical themes inspired by the N-body problem*, Lecture notes from the 7th Mini-Meeting on Differential Geometry held at the Center for Research in Mathematics (CI-MAT), Lecture Notes in Mathematics, 2204, vii+125, Springer, Cham, 2018.
- [12] Godinho, Leonor and Natário, José, *An introduction to Riemannian geometry*, Universitext, With applications to mechanics and relativity, Springer, Cham, 2014.
- [13] Hassani, Sadri, *Mathematical physics*, A modern introduction to its foundations, 2 ed., Springer, Cham, 2013.
- [14] Holm, Darryl D. and Schmah, Tanya and Stoica, Cristina, *Geometric mechanics and symmetry*, Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics, 12, Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [15] Hwang, Andrew D., *A symplectic look at surfaces of revolution*, Enseign. Math. (2), 49(1-2), 157-172, 2003.
- [16] Jackman, Connor and Meléndez, Josué, *Hyperbolic shirts fit a 4-body problem*, J. Geom. Phys., 123, 173-183, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2017.09.006>.
- [17] Jackman, Connor and Montgomery, Richard, *No hyperbolic pants for the 4-body problem with strong potential*, Pacific J. Math., 280 (2), 401-410, 2016. <https://doi.org/10.2140/pjm.2016.280.401>.

- [18] Lagrange, Joseph-L., *Essai sur le Problème des Trois Corps*, in Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris. IX, 1772.
- [19] Lawden, Derek F., *Elliptic functions and applications*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [20] Lee, John M., *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [21] Meléndez, J. and Alvarez-Ramírez, M. and García, A., *The three-body problem as a geodesic billiard map with singularities*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 85, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105238>
- [22] Meyer, Kenneth R. and Offin, Daniel C., *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Applied Mathematical Sciences, 90, Springer, Cham, 2017.
- [23] Moeckel, Richard, *Embedding the Kepler problem as a surface of revolution*, Regul. Chaotic Dyn., 23 (6), 695-703, 2018.
- [24] Montgomery, Richard, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Mathematical Surveys and Monographs, 91, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [25] Montgomery, Richard, *Constructing the hyperbolic plane as the reduction of a three-body problem*, 2016. De la base de datos arXiv.
- [26] Montgomery, Richard, *Fitting hyperbolic pants to a three-body problem*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 25(3), 921-947, 2005. <https://doi.org/10.1017/S0143385704000653>
- [27] Montgomery, Richard, *The hyperbolic plane, three-body problems, and Mněv's universality theorem*, Regul. Chaotic Dyn., 22(6), 688-699, 2017. <https://doi.org/10.1134/S1560354717060077>.

-
- [28] Montgomery, Richard, *The three-body problem and the shape sphere*, Amer. Math. Monthly, 122(4), 299-321, 2015. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.04.299>.
- [29] Murray, Carl D. and Dermott, Stanley F., *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [30] Musielak, Zdzislaw and Quarles, Billy, *Three body dynamics and its applications to exoplanets*, SpringerBriefs in Astronomy, Springer, Cham, 2017.
- [31] Pin, Ong Chong, *Curvature and mechanics*, Advances in Math., 15, 269-311, 1975. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(75\)90139-5](https://doi.org/10.1016/0001-8708(75)90139-5).
- [32] Pollard, Harry, *Mathematical introduction to celestial mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.
- [33] Toponogov, Victor Andreevich, *Differential geometry of curves and surfaces*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.
- [34] W. Tu, Loring, *Differential Geometry*, Springer Cham, 2017.
- [35] Zoll, Otto, *Ueber Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien*, Math. Ann., 57 (1), 108–133, 1903. <https://doi.org/10.1007/BF01449019>

Índice alfabético

- acción
 - diferenciable, [31](#)
 - libre, [31](#)
 - transitiva, [32](#)
- campo vectorial, [21](#)
 - a lo largo de una curva, [25](#)
 - diferenciable, [21](#)
 - paralelo a lo largo de una curva, [25](#)
- conexión
 - afín, [24](#)
 - compatible con la métrica, [25](#)
 - Levi-Civita, [25](#)
 - riemanniana, [25](#)
 - simétrica, [25](#)
- conjunto de colisión, [8](#), [76](#)
 - triple, [50](#)
- constante de movimiento, [15](#)
- coordenadas
 - de Jacobi, [51](#)
 - de diagonalización unitaria, [52](#)
 - isotérmicas, [86](#)
- covector, [21](#)
- curva
 - diferenciable, [20](#)
- curvaturas h-mecánicas, [39](#)
- derivada
 - covariante, [24](#), [25](#)
 - de f en p , [20](#)
- descomposición
 - de Saari, [61](#)
 - vertical-horizontal, [62](#)
- dinámica reducida, [69](#)
- dominio, [96](#)
- ecuaciones
 - de movimiento, [8](#)
 - hamiltonianas, [9](#)
- ecuación
 - de movimiento relativo, [15](#)
- energía
 - cinética, [9](#), [23](#)
 - potencial, [8](#), [14](#), [23](#)
 - general, [8](#)

- total, [9](#), [23](#)
- esfera
 - de forma, [48](#)
- espacio
 - base, [27](#)
 - cotangente, [21](#)
 - de configuración, [23](#), [36](#), [45](#), [50](#)
 - admisible, [42](#)
 - de estado, [23](#)
 - de forma, [48](#), [65](#)
 - de posiciones, [8](#)
 - de triángulos localizados, [45](#)
 - euclidiano, [22](#)
 - fase, [9](#), [23](#), [47](#)
 - tangente, [20](#)
 - total, [27](#)
- espacios modelo, [96](#)
- estado del sistema mecánico, [23](#)
- estructura
 - diferenciable, [19](#)
 - riemanniana, [22](#)
- fibra de un haz vectorial, [27](#)
- fuerza externa, [36](#)
- función
 - diferenciable, [19](#)
 - proyección, [24](#)
- fórmula de Koszul, [33](#)
- geodésica, [26](#)
- gradiente, [24](#)
- grupo de
 - traslaciones, [49](#)
 - escalamientos, [49](#)
 - Lie, [31](#)
 - movimientos rígidos, [48](#), [49](#)
 - rotaciones, [49](#)
 - similitudes, [48](#)
- h-espacio de configuración, [32](#)
- hamiltoniano, [9](#)
- haz
 - cotangente, [21](#)
 - tangente, [21](#)
 - vectorial, [27](#)
- identidad
 - de Lagrange-Jacobi, [11](#)
- inmersión, [20](#)
- integral
 - del momento angular, [15](#)
 - primera, [15](#)
- invariante
 - por rotaciones, [9](#), [14](#)
 - por traslaciones, [9](#), [14](#)
- isometría, [96](#)
- levantamiento horizontal, [30](#)

- mapeo
 - de Hopf, [54](#)
- marco
 - de un haz vectorial, [39](#)
 - dual, [39](#)
- masa métrica, [45](#)
- modelo
 - Jemisphere, [69](#)
- momento
 - angular, [10](#)
 - de inercia, [10](#)
 - lineal total, [10](#)
- movimiento, [36](#)
- métrica
 - de Jacobi-Maupertuis, [32](#)
 - de Kepler, [84](#)
 - del espacio de forma, [66](#)
 - euclidiana, [22](#)
 - redonda estándar, [69](#)
 - riemanniana, [22](#)
- métricas
 - conformes, [32](#)
- norma euclidiana, [22](#)
- operador
 - de masa, [36](#)
 - torsión, [25](#)
- parametrización, [19](#)
- plano orbital, [16](#)
- problema
 - de cuatro cuerpos, [75](#)
 - de fuerza central, [15](#), [82](#)
 - de Kepler, [82](#)
- producto interior
 - euclidiano, [22](#)
- proyección
 - de forma, [49](#)
 - de un haz vectorial, [27](#)
 - estereográfica, [101](#)
 - lineal compleja, [52](#)
- pullback, [24](#)
- punto
 - fijo, [31](#)
 - regular, [28](#)
- puntos
 - de colisión doble, [58](#)
 - de Euler, [59](#)
 - de Lagrange, [61](#)
- rectum semilatus, [18](#)
- representación local de la métrica riemanniana en el sistema de coordenadas, [22](#)
- sección de un haz vectorial, [38](#)
- segunda ley del movimiento planetario de Kepler, [17](#)

- sistema
 - de coordenadas, [19](#)
 - mecánico, [36](#)
 - conservativo, [23](#)
 - potencial newtoniano, [14](#)
- subespacio
 - horizontal, [29](#)
 - vertical, [29](#)
- submersión, [28](#)
 - riemanniana, [29](#)
- símbolos de Christoffel, [26](#)
- teorema
 - de Euler, [10](#)
 - de Jacobi, [32](#)
 - de la conservación de la energía, [14](#)
 - de la preservación de ángulos, [101](#)
 - sobre la preservación de esferas, [101](#)
- theorema Egregium, [39](#)
- totalmente geodésico, [29](#)
- trayectoria física, [27](#)
- trivialización local, [27](#)
- triángulo
 - localizado, [45](#)
 - planar, [45](#)
- triángulos
 - congruentes orientados, [48](#)
 - similares orientados, [48](#)
- valor regular, [28](#)
- variedad
 - diferenciable, [19](#)
 - riemanniana, [22](#)
- vecindad de coordenadas, [19](#)
- vector
 - horizontal, [29](#)
 - tangente, [20](#)
 - a la curva, [20](#)
 - vertical, [29](#)
- órbita
 - en un punto, [31](#)
 - física, [27](#)



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00234

Matrícula: 2203801541

El problema de tres cuerpos, la esfera de forma y el encaje del problema de Kepler.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 11 del mes de diciembre del año 2023 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA
DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ
DR. JOSUE MELENDEZ SANCHEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: NELSY YOLANDA PEREZ SANTIZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



NELSY YOLANDA PEREZ SANTIZ
ALUMNA

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMÁN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA

VOCAL

DR. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ

SECRETARIO

DR. JOSUE MELENDEZ SANCHEZ