



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00118

Matrícula: 2153805257

MODELOS DE UNO Y DOS  
DOMINIOS PARA LA  
TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE  
MOVIMIENTOS ENTRE UN FLUIDO  
HOMOGÉNEO Y UN MEDIO POROSO.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 1 del mes de diciembre del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA  
DR. CARLOS GILBERTO AGUILAR MADERA  
DR. RICARDO ALBERTO LOBO OEHMICHEN  
DR. CARLOS OMAR CASTILLO ARAIZA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (INGENIERIA QUIMICA)

DE: ROEL HERNANDEZ RODRIGUEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

ROEL HERNANDEZ RODRIGUEZ  
ALUMNO

REVISÓ  
  
LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

VOCAL

DR. CARLOS GILBERTO AGUILAR MADERA

VOCAL

DR. RICARDO ALBERTO LOBO OEHMICHEN

SECRETARIO

DR. CARLOS OMAR CASTILLO ARAIZA

---

**Modelos de uno y dos dominios para el transporte de cantidad  
de movimiento entre un fluido homogéneo y un medio poroso.**

Tesis que presenta:

**I. Q. Roel Hernández Rodríguez**

Para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias (Ingeniería Química)**

---

Jurado Calificador

Presidente: Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Secretario: Dr. Carlos Omar Castillo Araiza

Vocal: Dr. Carlos Gilberto Aguilar Madera

Vocal: Dr. Ricardo Alberto Lobo Oehmichen

Ciudad de México, Diciembre 2017





División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica  
Posgrado en Ingeniería Química

---

**Modelos de uno y dos dominios para el transporte de cantidad de  
movimiento entre un fluido homogéneo y un medio poroso.**

---

Tesis que presenta:

**I. Q. Roel Hernández Rodríguez**

Para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias (Ingeniería Química)**

Asesor:

**Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia**

Ciudad de México, Diciembre 2017





## **Agradecimientos**

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACyT) por la beca de maestría que me otorgó (No de CVU y de Becario: 711177 / 592972).

A mi asesor, el Dr. J. Alberto Ochoa Tapia, con quien estoy profundamente agradecido por su dedicación, paciencia y esfuerzo brindado para guiarme en el desarrollo y culminación de este proyecto. Asimismo, agradezco sus consejos y su amistad brindada, que lograron un crecimiento en mí como persona.

Al Dr. Francisco J. Valdés Parada, quien a pesar de no haber sido mi asesor o sinodal debido a las circunstancias, contribuyó a través de las discusiones y clases fructíferas que tuve con él.

Al Dr. Eliseo Hernández Martínez, mi amigo y primer asesor, con quien estoy muy agradecido por motivarme, por sus consejos, por su amistad y por enseñarme gran parte de lo que sé.

A mi familia, quienes a pesar de la distancia, siempre me han dado su apoyo incondicional en todos los sentidos. A mi madre Octavia Rodríguez Martínez, a mi padre Jaime Hernández Arroyo, a mis hermanos Brisceida Hernández Rodríguez y Jaime Hernández Rodríguez

A mi mejor amiga y novia, Daniela Elvira Torres Herver, quien siempre ha estado conmigo en las buenas y en las malas. Gracias Dan.

A mis amigos, quienes siempre han estado allí para hacerme la vida más amena: Alberto, Filiberto, Gabriela y Alejandro.



## Resumen

Para describir el flujo de un fluido entre dos regiones homogéneas adyacentes, particularmente entre una región de fluido y un medio poroso, es indispensable conocer a las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso. En el contexto del método del promedio volumétrico, la determinación de las variaciones espaciales de la permeabilidad requiere el planteamiento y solución de un problema de cerradura local para dicha inter-región. Desafortunadamente, las predicciones de la permeabilidad sin la imposición de restricciones de longitudes de escala o suposiciones sobre el problema de cerradura local, no están disponibles hasta el momento. Este hecho ha dado lugar a la incertidumbre sobre la validez de un problema de cerradura local simplificado para dicho fin. Para responder a esta pregunta en este trabajo se utilizó una simulación analítica directa que permitió obtener de manera exacta a los perfiles de velocidad local y promedio, los cuales a su vez permitieron determinar a las variaciones espaciales de permeabilidad con la misma precisión. Como consecuencia, se obtuvo un marco de comparación y una forma cerrada de las ecuaciones promedio (*i.e.*, los modelos de uno y dos dominios). En general, los resultados aquí presentados indican que un problema de cerradura local simplificado es una alternativa adecuada para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad, aunque también sugieren que este podría estar limitado a ciertos valores de la porosidad del medio poroso.





# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>v</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>vii</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>ix</b>
<b>1. Generalidades</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Motivación del trabajo . . . . .	13
1.4. Hipótesis . . . . .	13
1.5. Objetivos . . . . .	14
1.5.1. General . . . . .	14
1.5.2. Particulares . . . . .	14
<b>2. Modelos microscópico y macroscópico</b>	<b>15</b>
2.1. Problema local . . . . .	15
2.2. Promediado . . . . .	18
2.3. Modelo de un dominio (ODA) . . . . .	20
2.4. Modelo de dos dominios (TDA) . . . . .	21
2.5. Flujo unidireccional y completamente desarrollado . . . . .	21
2.5.1. Condiciones de frontera . . . . .	22
2.6. Problema de cerradura local (PCL) . . . . .	26

2.7.	Simulación analítica directa . . . . .	29
2.7.1.	Predicción de la velocidad promedio . . . . .	31
2.7.2.	Zonas independientes de la microestructura del medio poroso . . . . .	32
2.7.3.	Zonas dependientes de la microestructura del medio poroso . . . . .	33
2.7.4.	Observaciones de la simulación analítica directa (DAS) . . . . .	37
<b>3.</b>	<b>Coefficientes de transporte efectivos</b>	<b>41</b>
3.1.	Permeabilidad basada en la simulación analítica directa (DAS) . . . . .	41
3.1.1.	Inter-región fluido-pared superior . . . . .	43
3.1.2.	Inter-región fluido-medio poroso . . . . .	44
3.1.3.	Región homogénea del medio poroso . . . . .	45
3.1.4.	Inter-región medio poroso pared inferior . . . . .	46
3.1.5.	Observaciones sobre la permeabilidad basada en la simulación analítica directa	46
3.2.	Permeabilidad basada en el problema de cerradura local (PCL) . . . . .	48
3.2.1.	Región homogénea del medio poroso . . . . .	50
3.2.2.	Inter-región fluido-medio poroso . . . . .	50
3.2.3.	Inter-región medio poroso-pared inferior . . . . .	51
3.2.4.	Observaciones sobre la permeabilidad basada en el problema de cerradura local	52
<b>4.</b>	<b>Discusión de resultados</b>	<b>55</b>
4.1.	Solución del modelo de un sólo dominio (ODA) . . . . .	55
4.1.1.	Análisis del modelo de un dominio (ODA) . . . . .	59
4.2.	Solución del modelo de dos dominios (TDA) . . . . .	62
4.2.1.	Análisis de modelo de dos dominios (TDA) . . . . .	66
4.3.	Otra alternativa para cerrar el modelo de un sólo dominio (ODA) . . . . .	71
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>
<b>A.</b>	<b>Ecuaciones promedio</b>	<b>87</b>
A.1.	Ecuaciones del modelo de un dominio (ODA) . . . . .	87
A.1.1.	Ecuación de continuidad . . . . .	87

A.1.2. Ecuación de movimiento . . . . .	88
A.2. Ecuaciones del modelo dos dominios (TDA) . . . . .	89
A.3. Caso de estudio . . . . .	90
<b>B. Problema de cerradura local</b>	<b>93</b>
B.1. Uso de la descomposición espacial . . . . .	93
B.2. Problema de cerradura local (PCL) . . . . .	95
<b>C. Problema de cerradura macroscópico</b>	<b>99</b>
C.1. El problema de cerradura macroscópico . . . . .	99
C.2. Problemas de valor a la frontera de las variables de cerradura macroscópicas . . . . .	101
C.3. Determinación de los parámetros de salto . . . . .	104
<b>D. Solución analítica de los modelos de uno y dos dominios</b>	<b>107</b>
D.1. Solución analítica del modelo de un dominio . . . . .	107
D.1.1. Integrales en la inter-región fluido-medio poroso de $\varepsilon_\beta(\xi_0)$ and $R(\xi_0)$ . . . . .	110
D.2. Solución analítica del modelo de dos dominios . . . . .	120
D.3. Variaciones espaciales de la fracción volumétrica . . . . .	122
D.3.1. Inter-región fluido-pared superior . . . . .	122
D.3.2. Inter-región fluido-medio poroso . . . . .	123
D.3.3. Región homogénea de medio poroso . . . . .	123
D.3.4. Inter-región medio poroso-pared inferior . . . . .	124



# Índice de figuras

1.1. Modelos de uno y dos dominios para la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de fluido y un medio poroso. . . . .	5
2.1. Configuración del sistema fluido-medio poroso. . . . .	17
2.2. Vectores de posición en la región de promediado. . . . .	19
2.3. Perfiles de velocidad del ODA y del TDA en la frontera macroscópica. . . . .	24
2.4. Muestra representativa de la región de la frontera. . . . .	28
2.5. Configuración simplificada del sistema fluido-medio poroso. . . . .	30
2.6. Sistemas de coordenadas locales para la velocidad local en la región- $\eta$ y en cada poro de la región homogénea- $\omega$ . . . . .	31
2.7. Región de promediado en la inter-región: a) pared superior-fluido, b) fluido-medio poroso y c) medio poroso-pared inferior. . . . .	35
2.8. Perfiles de velocidad promedio en la inter-región medio poroso-fluido para (a) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y (b) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ . . . . .	38
2.9. Perfiles de velocidad promedio en la inter-región medio poroso-pared inferior para (a) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y (b) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ . . . . .	39
2.10. Tamaño de la región de promediado en las inter-regiones (a) fluido-medio poroso y (b) medio poroso-pared inferior. . . . .	40
3.1. Variaciones espaciales de la porosidad en las inter-regiones (a) medio poroso-pared inferior y (b) fluido-medio poroso para diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ y con $r_0 = 10^2\ell$ y $L_\eta = 10^3r_0$ . . . .	43
3.2. Variaciones espaciales de la permeabilidad en las inter-regiones (a) medio poroso-pared inferior y (b) medio poroso-fluido para $r_0 = 10^2\ell$ , $L_\eta = 10^3r_0$ y diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ . . . .	48

3.3. Celda unitaria representativa del sistema fluido-medio poroso donde el medio poroso está compuesto por un arreglo de placas paralelas. . . . .	49
3.4. Dependencia espacial de la permeabilidad en las inter-regiones (a) medio poroso-pared inferior y (b) medio poroso-fluido para $r_0 = 10^2 \ell$ , $L_\eta = L_\omega = 10^3 r_0$ y diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ . . . . .	53
4.1. Perfiles de velocidad del ODA con el término $f_\beta(y)$ , el ODA con el término de Darcy y la DAS para (a, b y c) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y (e, f y g) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ . . . . .	58
4.2. Perfiles de velocidad del ODA considerando el término de Darcy con $K_\beta^{DAS}(y)$ y $K_\beta^{PCL}(y)$ para (a, b y c) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y (e, f y g) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ . . . . .	60
4.3. Predicciones de la posición de la superficie divisoria considerando la variación espacial de $K_\beta^{DAS}(y)$ y de $K_\beta^{PCL}(y)$ para diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ . . . . .	65
4.4. Predicciones de los coeficientes de salto obtenidos considerando la variación espacial de $K_\beta^{DAS}(y)$ y de $K_\beta^{PCL}(y)$ para diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ . . . . .	67
4.5. Perfiles de velocidad obtenidos del ODA que considera al término de Darcy con $K_\beta^{DAS}(y)$ y del TDA con los dos conjuntos de coeficientes de salto para (a, b y c) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y (e, f y g) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ . . . . .	69
4.6. Variaciones espaciales del coeficiente $h_\beta(y)$ y del producto $\varepsilon_\beta(y)h_\beta(y)$ para diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ . . . . .	73
4.7. Perfiles de velocidad obtenidos del ODA con el coeficiente $h_\beta(y)$ , el ODA con el término de Darcy aparente y la DAS para (a, b y c) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$ y (e, f y g) $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ . . . . .	75
B.1. Muestra representativa de la inter-región medio poroso-fluido . . . . .	95
C.1. Ejemplo de los campos de las variables de cerradura macroscópicas para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ , $y_0 = -0.75$ y $\delta = 32r_0$ . . . . .	103
C.2. Algoritmo para determinar tanto a la posición de la superficie divisoria ( $y_0$ ) como a los coeficientes de salto. . . . .	105



# Índice de tablas

3.1. Comparación de las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso para $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.2$ y $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ . . . . .	52
4.1. Porcentajes de error relativo de ambos ODA con respecto a la DAS para predecir a la velocidad en la inter-región fluido-medio poroso para diferentes valores de la porosidad. . . . .	59
4.2. Porcentajes de error relativo del ODA que considera a $K_{\beta}^{PCL}(y)$ con respecto a aquel que considera a $K_{\beta}^{DAS}(y)$ en la inter-región fluido-medio poroso. . . . .	61
4.3. Predicciones de las velocidades de deslizamiento mediante el TDA con los dos conjuntos de parámetros de salto. . . . .	70
4.4. Predicción del flujo volumétrico en la región de fluido a partir de del TDA y del ODA para diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ . . . . .	71
4.5. Porcentaje de error relativo del ODA que considera a $h_{\beta}(y)$ con respecto a la DAS para predecir a la velocidad promedio en la inter-región fluido-medio poroso para diferentes valores de $\varepsilon_{\beta\omega}$ . . . . .	74



# Nomenclatura

$\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})$	interfase sólido-fluido
$\mathbf{b}_{\beta}$	vector que mapea $\langle v_{\beta} \rangle^{\beta}$ en $\tilde{p}_{\beta}$ , $\text{m}^{-1}$
$\mathbf{B}_{\beta}$	vector que mapea $\langle v_{\beta} \rangle^{\beta}$ en $\tilde{\mathbf{v}}_{\beta}$
$b_{\alpha\lambda}$	variable de cerradura macroscópica que mapea $\left. \frac{d\langle v_{\beta} \rangle_{\lambda}^{\beta}}{dy} \right _{y_0}$ en $\hat{v}_{\alpha}$ ( $\alpha, \lambda = \eta, \omega$ ), m
$\mathbf{d}_{\beta}$	vector que mapea $\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}$ en $\tilde{p}_{\beta}$ , $\text{m}^{-1}$
$\mathbf{D}_{\beta}$	tensor de segundo orden que mapea $\langle \mathbf{v}_{\beta} \rangle^{\beta}$ en $\tilde{\mathbf{v}}_{\beta}$ , $\text{m}^2$
$f(y)$	fracción de celda unitaria contenida en la región de promediado
$f_{\beta}(y)$	fracción de fluido de la fracción de celda unitaria contenida en la región de promediado
$\mathbf{g}$	vector de gravedad, $\text{m}/\text{s}^2$
$\mathbf{I}$	tensor identidad
$\mathbf{K}_{\beta}(\mathbf{x})$	tensor de permeabilidad dependiente de la posición, $\text{m}^2$
$\mathbf{K}_{\beta\omega}$	tensor de permeabilidad de la región homogénea— $\omega$ , $\text{m}^2$
$L_{\lambda}$	longitud característica de cada región del sistema macroscópico ( $\lambda = \eta, \omega$ ), m
$\ell$	longitud característica de la celda unitaria, m
$\ell_{\beta}$	longitud característica de poro, m
$\mathbf{n}_{\beta\sigma}$	vector unitario normal dirigido de la fase— $\beta$ a la fase— $\sigma$
$n_p(y)$	número de celdas unitarias enteras localizadas en el medio poroso
$n_0$	número total de celdas unitarias contenidas en la región de promediado
$p_{\beta}$	presión de la fase— $\beta$ , Pa
$\hat{p}_{\beta}$	desviaciones macroscópicas de la presión de la fase— $\beta$ , Pa
$\langle p_{\beta} \rangle^{\beta}$	promedio intrínseco de la presión del modelo de un dominio, Pa
$\langle p_{\beta} \rangle_{\alpha}^{\beta}$	promedio intrínseco de la presión en la región $\alpha$ ( $\alpha = \eta, \omega$ ) del modelo

	de dos dominios, Pa
$r_0$	longitud característica de la región de promediado, m
$s_{\alpha\lambda}$	variable de cerradura macroscópica que mapea $\langle v_\beta \rangle_\lambda^\beta \Big _{y_0}$ en $\hat{v}_\alpha (\alpha, \lambda = \eta, \omega)$
$\mathcal{V}(\mathbf{x})$	región de promediado
$\mathbf{v}_\beta$	velocidad de la fase $-\beta$ , m/s
$\hat{v}_\alpha$	desviaciones macroscópicas de la velocidad en la región $-\alpha$ ( $\alpha = \eta, \omega$ ), m/s
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$	promedio intrínseco de la velocidad del modelo de un dominio, m/s
$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\alpha^\beta$	promedio intrínseco de la velocidad en la región $-\alpha$ del modelo de dos dominios ( $\alpha = \eta, \omega$ ), m/s
$x$	coordenada horizontal, m
$\mathbf{x}$	vector de posición que localiza al centroide de la región de promediado, m
$y$	coordenada vertical, m
$y_0$	posición de la superficie divisoria, m
$y_\alpha$	límites de la zona de diferencias entre los modelos de uno y dos dominios ( $\alpha = \eta, \omega$ ), m
$\mathbf{y}$	vector de posición relativo al centroide de la región de promediado, m

### *Símbolos griegos*

$\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$	fracción volumétrica dependiente de la posición
$\varepsilon_{\beta\omega}$	fracción volumétrica de la región homogénea $-\omega$
$\varepsilon_{\beta\eta}$	fracción volumétrica en la región porosa $-\eta$
$\psi_\beta$	función arbitraria asociada a la fase $-\beta$
$\rho_\beta$	densidad del fluido $-\beta$ , Kg/m <sup>3</sup>
$\mu_\beta$	viscosidad del fluido $-\beta$ , Pa · s

### *Sub y superíndices*

$\beta$	fase fluida
$\sigma$	fase sólida del medio poroso
$W$	fase sólida de la pared impermeable

*Sub y superíndices*

DAS	Direct Analytical Simulation (Simulación Analítica Directa)
DNS	Direct Numerical Simulation (Simulación Numérica Directa)
GTE	Generalized Transport Equation (Ecuación de Transporte Generalizada)
ODA	One-Domain Approach (Enfoque de un Sólo Dominio)
TDA	Two-Domain Approach (Enfoque de dos Dominios)



# Capítulo 1

## Generalidades

### 1.1. Introducción

El flujo de un fluido sobre y a través de un medio poroso se encuentra en muchas situaciones o aplicaciones de la ingeniería química. Ejemplos de estas aplicaciones son reactores de lecho fijo (Duarte et al., 1984; Froment et al., 2011), procesos de secado (Shukla, 1990; McCabe et al., 1993), procesos de adsorción (Seader et al., 1998), intercambiadores de calor (Alkam y Al-Nimr, 1999; Targui y Kahalerras, 2013, 2014), sistemas de filtración, aislamiento térmico, transporte de nutrientes hacia estructuras celulares (Yu, 2012), por decir algunos. La importancia del flujo de un fluido en estas aplicaciones, recae en la influencia que tiene sobre la transferencia de masa y calor desde o hacia el medio poroso, lo cual puede favorecer o perjudicar a sus desempeños. Este hecho resalta la necesidad de conocer de manera precisa el campo de la velocidad del fluido y a su vez del desarrollo de modelos matemáticos que conduzcan a predicciones confiables del mismo.

El estudio de la velocidad de un fluido en la configuración antes mencionada, usualmente se ha llevado a cabo mediante el uso de modelos en términos de ecuaciones de medio efectivo, donde uno de los principales objetivos ha consistido en describir a la velocidad en la zona de transición entre la región homogénea del fluido y la del medio poroso (*i.e.* inter-región). Dentro de esta zona de transición la microestructura del medio poroso puede cambiar drásticamente, lo cual puede tener efectos significativos en la descripción del transporte (Beaver y Joseph, 1967). Entre los estudios reportados en la literatura se pueden identificar dos alternativas de modelado para esta situación. La primera se conoce como el modelo de un dominio (ODA por sus siglas en inglés, *The One-Domain Approach*), donde



el transporte se describe mediante una ecuación promedio que es válida en todos lados (*i.e.*, fluido homogéneo, medio poroso homogéneo e inter-región) debido a que considera variaciones espaciales de sus coeficientes efectivos en la inter-región (*i.e.*, la permeabilidad y la porosidad). La segunda alternativa se conoce como el modelo de dos dominios (TDA por sus siglas en inglés, *The Two-Domain Approach*), donde el transporte se describe mediante una ecuación promedio con coeficientes constantes para cada región homogénea y además la inter-región se reemplaza por una superficie divisoria. Esta alternativa involucra el desarrollo de condiciones de salto para acoplar a las ecuaciones en la superficie divisoria, las cuales a su vez contienen coeficientes de salto cuya predicción requiere de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos involucrados en el ODA. Sin embargo, una de las principales dificultades tanto en el ODA y por consecuencia en el TDA, consiste en determinar a las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos. Es a partir de estos coeficientes que se incorpora el efecto de la microestructura en la inter-región sobre la descripción del transporte en todo el sistema. Para el transporte de cantidad de movimiento, se han utilizado interpolaciones heurísticas entre las propiedades de la región de fluido homogéneo y del medio poroso para describir a las variaciones espaciales de la permeabilidad (Goyeau et al., 2003), pero dichos modelos no garantizan una predicción precisa de este coeficiente y así como del transporte dentro y fuera de la inter-región. Este problema se puede tratar mediante el planteamiento y solución de un problema de valor a la frontera, que en el contexto del método de promedio volumétrico (Whitaker, 1999) se conoce como un problema de cerradura local (PCL). Recientemente, para la inter-región fluido-medio poroso se ha desarrollado el PCL para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad (Valdés-Parada et al., 2007a, 2009a). No obstante, las soluciones exactas de los PCL pueden ser muy complicada de obtener, lo cual a obligado a proponer versiones simplificadas de estos. Dichas versiones simplificadas se obtienen al filtrar información redundante mediante el uso de postulados de escalamiento (Wood y Valdés-Parada, 2013) en la forma de restricciones temporales y de longitudes de escala. Debido a lo anterior y al reconocer que en la inter-región un medio poroso puede presentar cambios drásticos de su microestructura, hay razones para dudar sobre la utilidad de un PCL simplificado para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad en una inter-región fluido-medio poroso.

Con respecto a lo anterior, en este trabajo se propone analizar los alcances y efectos que tiene el hecho de utilizar un PCL simplificado para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad. Para ello se considera un modelo de medio poroso idealizado que consiste en un arreglo de placas paralelas. Esta configuración permitirá obtener expresiones analíticas del perfil de velocidad promedio

como resultado de promediar el perfil de velocidad local y determinar de manera exacta a las variaciones espaciales de la permeabilidad y de la porosidad. A partir de esta información será posible llevar a cabo una comparación con los resultados que se obtendrían con el método clásico utilizado para describir la transferencia de cantidad de movimiento en un sistema fluido-medio poroso.

Con ese fin, este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el resto de este capítulo se presenta una revisión bibliográfica de los trabajos relacionados con los modelos de uno y dos dominios propuestos para describir a la transferencia de cantidad movimiento entre una región de fluido y una de medio poroso. Particularmente dicha revisión está orientada a mostrar cómo habitualmente se han determinado a las variaciones espaciales de los coeficientes de transporte efectivos del ODA y a los coeficientes de salto presentes en las condiciones de frontera en el TDA. En el Capítulo 2 se presentan los modelos de uno y dos dominios para el transporte de cantidad de movimiento entre una región de fluido y una medio poroso. Además se presenta una alternativa que permite obtener el perfil de velocidad promedio al promediar volumétricamente al perfil de velocidad local y no por la solución de las ecuaciones promedio. A esta forma de obtener el perfil de velocidad promedio, en este trabajo, se conoce como una simulación analítica directa. En el Capítulo 3 se determinan las variaciones espaciales de la porosidad y de la permeabilidad que son necesarios para proporcionar la forma cerrada del ODA y para determinar a los coeficientes de salto que cierran a las condiciones de salto en el TDA. Aquí la porosidad se obtiene directamente al relacionar la geometría del medio de medio poroso utilizado, mientras que las variaciones espaciales de la permeabilidad se obtienen de dos maneras: a partir de la información de una simulación analítica directa y mediante la solución de un problema PCL simplificado. En el Capítulo 4 se evalúan los efectos que tiene sobre la transferencia de cantidad de movimiento el hecho de utilizar un PCL para determinar las variaciones espaciales de la permeabilidad. Esto se lleva a cabo comparando los perfiles de velocidad obtenidos del ODA, del TDA y de la simulación analítica directa. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones generales y comentarios relativos con este trabajo.

## **1.2. Antecedentes**

Los fenómenos de la transferencia de cantidad de movimiento en la zona de transición entre una región de fluido homogéneo y un medio poroso son importantes en muchas aplicaciones de la ingeniería química, ya que pueden influenciar a lo que ocurre en las regiones homogéneas. En vista de

ello, muchos esfuerzos han sido enfocados a entender y describir a estos fenómenos, principalmente mediante el desarrollo de ecuaciones macroscópicas. Como se mencionó en la introducción, entre los estudios reportados en la literatura, se pueden distinguir dos alternativas de modelado que hacen uso de estas ecuaciones (ver Figuras 1.1). Estas alternativas se conocen como los modelos de uno y dos dominios y se describen a continuación.

- En el ODA se supone que el sistema fluido-medio poroso está compuesto por dos regiones homogéneas y una zona de transición. Esta zona de transición se conoce como *inter-región* o frontera macroscópica. El transporte se describe mediante una ecuación promedio conocida como ecuación de transporte generalizada (GTE por sus siglas en inglés, *Generalized Transport Equation*). El término *generalizada* significa que la ecuación es válida en todo el sistema (*i.e.*, en las regiones homogéneas y en la inter-región) debido a que en la inter-región sus coeficientes efectivos son dependientes de la posición. Esto es consecuencia de que en la derivación de la ecuación promedio no se involucra alguna suposición o restricción de longitud de escala. Una ventaja del ODA es que no requiere de condiciones de frontera dentro de la inter-región, aunque ello no evita el hecho de determinar la dependencia espacial de sus coeficientes efectivos.
- En el TDA se supone que el sistema fluido-medio poroso se compone por dos regiones homogéneas separadas por una superficie divisoria, la cual reemplaza a la inter-región. El transporte se describe mediante una ecuación promedio escalada con coeficientes efectivos constantes (*i.e.*, independientes de la microestructura del medio poroso) para cada región homogénea. Además se requiere el desarrollo de condiciones de frontera conocidas como *condiciones de salto* para acoplar a las ecuaciones en la superficie divisoria. Estas condiciones de salto contienen *coeficientes de salto* que tienen el objetivo de incorporar los efectos del cambio de la microestructura en la inter-región sobre la descripción del transporte.

El ODA y el TDA se pueden obtener mediante el marco teórico del método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999), donde el uso de cualquiera de ellos puede depender de diversos factores (*e.g.*, del nivel de descripción que se necesite o de las capacidades computacionales con las que se cuenta). En la práctica es más frecuente encontrar el modelado de sistemas compuestos al menos por dos regiones homogéneas mediante el TDA, de hecho, las primeras propuestas de modelado fueron en términos del TDA en lugar del ODA. En ese caso dos de las principales dificultades han sido establecer adecuadas condiciones de frontera en la superficie divisoria, así como, de la ecuación que describe

a la transferencia de cantidad de movimiento en la región de medio poroso. A continuación se mencionan algunos de los trabajos más importantes que hacen uso del ODA o del TDA para describir a la transferencia de cantidad de movimiento en un sistema fluido-medio poroso, haciendo énfasis en las alternativas que se han propuesto para determinar a las variaciones espaciales de sus coeficientes efectivos y coeficientes de salto.

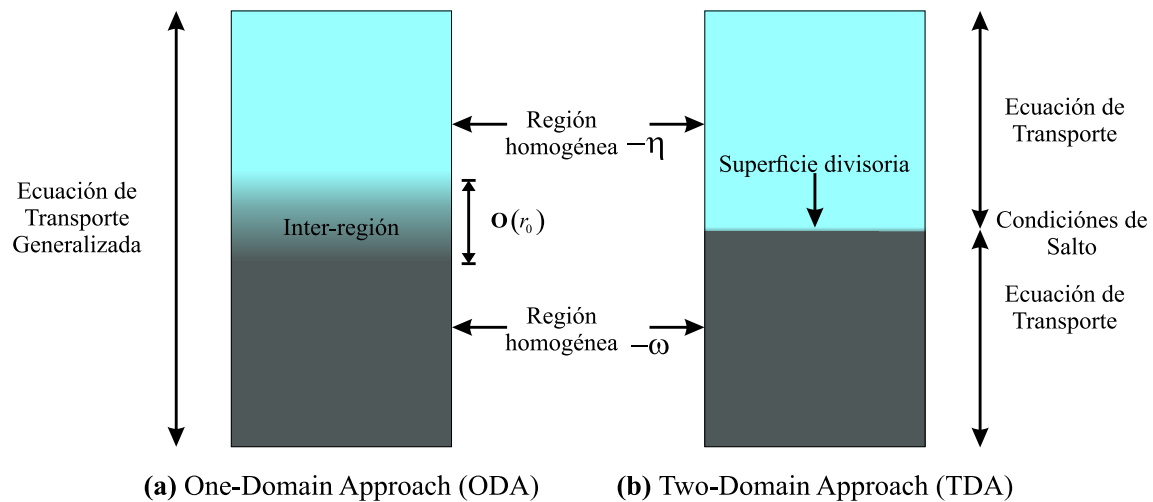


Figura 1.1: Modelos de uno y dos dominios para la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de fluido y un medio poroso.

Inicialmente Beavers y Joseph (1967) estudiaron teórica y experimentalmente los efectos de una frontera permeable sobre el flujo de un fluido. Como sistema físico consideraron el flujo de un fluido a través de un canal parcialmente lleno con un medio poroso en condiciones de flujo uniforme, unidimensional y por efecto de una caída de presión constante. Para modelar a la velocidad del fluido utilizan a la ecuación Stokes en la región de fluido homogéneo y a la ley Darcy en el medio poroso. Además, para acoplar a estas ecuaciones y tratar de incorporar el efecto de la microestructura de la inter-región, proponen una condición de frontera semiempírica de la velocidad de deslizamiento, la cual es similar a una ley de enfriamiento de Newton. Esta condición de frontera está escrita en términos de un coeficiente ajustable  $\alpha$ , el cual supuestamente es una cantidad adimensional que sólo depende de la microestructura del medio poroso en la inter-región, aunque esto no fue demostrado. Al fijar el valor de  $\alpha$  entre 0.1 y 4, dependiendo del material utilizado, encuentran que su modelo es capaz de describir las observaciones macroscópicas experimentales. Este amplio rango de valores del coeficiente  $\alpha$  muestra la importancia de la microestructura del medio poroso en la inter-región para

describir el flujo del fluido. Estudios experimentales de Beavers et al. (1970) proporcionaron evidencia adicional sobre la utilidad de dicha condición de frontera. En ese caso, utilizan el mismo sistema experimental, pero con instrumentos de medición más sofisticados.

El trabajo de Beaves y Joseph (BJ) fue el punto de partida de un gran número de investigaciones acerca del flujo de un fluido sobre y través de un medio poroso. Muchos trabajos se enfocaron en dar una justificación matemática de su condición de frontera, debido a su origen semiempírico y a su utilidad mostrada para reproducir datos experimentales. Taylor (1971) y en un trabajo complementario por Richardson (1971) mostraron teórica y experimentalmente que el coeficiente de deslizamiento  $\alpha$  no sólo depende de la microestructura del medio poroso en inter-región, sino también de la altura del fluido que fluye sobre el medio poroso. Estos autores consideraron un medio poroso simplificado que consiste en una placa ranurada, la cual les permitió obtener expresiones analíticas del coeficiente  $\alpha$ . Concluyen que un incremento en la altura del fluido genera un decremento del valor de  $\alpha$ , hasta alcanzar un valor constante. Al comparar la teoría con datos experimentales, estimaron que los valores de  $\alpha$  asociados a la geometría simplificada se encuentran entre 1.308 y 7 para porosidades cercanas a la unidad. Al mismo tiempo, Saffman (1971) dedujo teóricamente la condición de frontera de BJ, utilizando un método estadístico y un análisis de tipo capa límite. En ese trabajo se obtiene una expresión del coeficiente  $\alpha$  en términos de una constante de integración, por lo que su dependencia con la microestructura del medio poroso en la inter-región no está definida explícitamente. Sin embargo, se menciona que su valor depende de la posición de la superficie divisoria, aún incierta hasta ese momento. Otros estudios mostraron la utilidad de la condición de frontera de BJ para modelar el flujo de un gas sobre un material poroso. Tal análisis se presentó por Beavers et al. (1974) al hacer pasar una corriente de aire sobre un medio poroso hecho de fibras metálicas de níquel (Ni).

A pesar de que en varios estudios se mostró la utilidad del modelo de BJ, este no proporciona información de los fenómenos que ocurren en la región de la frontera, ya que la ley de Darcy no involucra algún término de esfuerzo viscoso. Esto motivó a Neale y Nader (1974) a sugerir a la ecuación de Darcy-Brinkman en lugar de la ley de Darcy para describir a la velocidad del fluido en el medio poroso. Además proponen a la continuidad de la velocidad y del esfuerzo en la superficie divisoria como condiciones de frontera con un sentido físico más realista a aquella propuesta por BJ. Al resolver analíticamente a las ecuaciones obtienen un perfil de velocidad suavizado en la inter-región, mientras que al comparar las expresiones con las obtenidas en el trabajo de BJ se percatan que las soluciones

son idénticas, siempre y cuando que  $\alpha$  sea igual a  $\sqrt{\mu_{eff}/\mu_\beta}$ . Donde  $\mu_{eff}$  es la viscosidad efectiva y  $\mu_\beta$  es la viscosidad del fluido. De esta manera, Neale y Nader (1974) admiten que la condición de frontera de BJ es una buena aproximación, aunque físicamente incorrecta, para estudiar el flujo de un fluido sobre y a través de un medio poroso cuando los efectos de capa límite son despreciables. La principal limitación en el trabajo de Neale y Nader (1974) consiste en el hecho de que todavía no es posible predecir de manera precisa a la  $\mu_{eff}$  del medio poroso. Además la validez del término de corrección de Brinkman a la ley de Darcy ha sido el objeto de extensa y controversial literatura (Vafai y Kim, 1990, 1995; Nield, 1991).

Motivado por el trabajo Whitaker (1969), Ross (1983) desarrolló una ecuación para describir a la velocidad promedio entre una región de fluido homogéneo y un medio poroso anisótropo. La ecuación es válida tanto en las regiones homogéneas como en la inter-región, pero los coeficientes son independientes de la posición. Además consideran el caso donde el medio poroso es isotrópico, como el del trabajo de BJ, obteniendo una expresión del parámetro  $\alpha$  en términos de un tensor de segundo orden. Este tensor tiene como objetivo relacionar a la velocidad promedio con la velocidad local (*i.e.* mapear). Posteriormente, Beckermann et al. (1987) estudiaron numérica y experimentalmente a la convección natural entre una región de fluido y un medio poroso isotrópico, ambas en posición vertical dentro de una cavidad rectangular. Ellos plantean un ODA que resulta de combinar un TDA con la ayuda de una función escalón unitario, la cual adquiere el valor de uno o cero para recuperar a la ecuación asociada a cada región. Esto significa que su modelo no considera el efecto de la microestructura de la inter-región. El TDA involucrado consiste en la ecuación de Navier-Stokes para la región de fluido homogéneo y la ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer (DBF) para el medio poroso. Los valores de la permeabilidad se obtienen usando la ecuación de Ergun para lechos empacados (Ergun, 1952). Aquí las predicciones teóricas presentan un buen ajuste con los datos experimentales, mostrando que la cantidad de fluido que se transporta de la región de fluido al medio poroso depende en gran medida de los números adimensionales de Darcy (Da) y Rayleigh (Ra). Cabe señalar que, el sistema experimental utilizado no satisface una separación de longitudes características.

Desde otra perspectiva, Sahraoui y Kaviany (1992) estudiaron el efecto del flujo paralelo y perpendicular sobre el coeficiente  $\alpha$ . Para ello resuelven numéricamente a la ecuación de Navier-Stokes cerca de la frontera entre una región de fluido y un medio poroso que consiste en un arreglo de cilindros. El estudio numérico indica que el coeficiente  $\alpha$  además de ser dependiente de la microestructura

del medio poroso en la inter-región, también depende de la dirección de flujo, de la porosidad, del número de Reynolds ( $Re$ ), de la altura del fluido sobre el medio poroso y de la posición de la superficie divisoria. Estos resultados y al igual que los de Taylor (1971) contrastan con la idea propuesta por BJ, de que el coeficiente de deslizamiento  $\alpha$  sólo depende de la microestructura del medio poroso en la inter-región. Esta discrepancia puede ser consecuencia de las geometrías simplificadas de los medios porosos considerados.

En los trabajos mencionados hasta este punto, las condiciones de frontera utilizadas para acoplar a las ecuaciones promedio son condiciones de frontera semiempíricas, por lo que no hay garantía de que los modelos proporcionen una descripción precisa de los fenómenos dentro y fuera de la inter-región. Usando el método del promedio volumétrico, Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) estudiaron la configuración del sistema propuesto por BJ y proporcionaron dos alternativas para superar a este problema. En la primera dedujeron una GTE que se obtiene al promediar volumétricamente a la ecuación de Stokes. Esta ecuación es similar a la ecuación de Darcy-Brinkman y posee dos características principales: a) la permeabilidad en el término de Darcy depende de la posición y b) contiene un segundo término conocido como la segunda corrección de Brinkman que se obtiene de considerar a las variaciones espaciales de porosidad. A partir de dicha GTE estos autores presentan un ODA y exploran su utilidad para reproducir los datos experimentales de BJ (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995b). En ese caso las variaciones espaciales de la porosidad y de la permeabilidad se obtienen a partir de un polinomio de tercer orden y de la ecuación de Blake-Kozeny con la porosidad variable, respectivamente. Desafortunadamente, el ODA no proporcionó una representación satisfactoria de todos los datos experimentales, aunque aportó una perspectiva de la importancia de la inter-región. En la segunda alternativa Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) desarrollaron una metodología para obtener una condición de frontera de la transferencia de cantidad de movimiento. La metodología se basa en usar dicha GTE, que también tiene la propiedad de reducirse la ecuación de Stokes en la región de fluido homogéneo y a la ecuación de Darcy-Brinkman en la región de medio poroso homogéneo, las cuales constituyen las ecuaciones del TDA. El desarrollo dio lugar a una condición de salto del esfuerzo que está escrita en términos de un coeficiente ajustable  $\beta$ , cuyo valor estimado es del orden de uno y se debe determinar del ajuste de datos experimentales. Además para completar el modelo impusieron la continuidad de la velocidad promedio en la superficie divisoria. Aquí Ochoa-Tapia y Whitaker (1995b) también hicieron una comparación de estos resultados con los datos experimentales obtenidos por BJ. Fijando el valor del coeficiente de salto  $\beta$  entre -1 y 1.47, dependiendo de la naturaleza del material poroso utilizado, re-



produjeron satisfactoriamente a los datos experimentales. Ello sugirió la validez de la metodología de condiciones de salto de Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a).

Relacionado con lo anterior, Kuznetsov (1996) utilizó la condición de salto de Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) para acoplar la ecuación de Darcy-Brinkman con la ecuación de Stokes y modelar el flujo a través de una serie de configuraciones de un canal parcialmente lleno con un medio poroso. Particularmente analizó el efecto del número de Darcy ( $Da$ ) y del coeficiente de salto  $\beta$  sobre los perfiles de velocidad promedio, mostrando que un incremento en el número de Darcy genera un incremento en la velocidad dentro de los canales y que un incremento en el coeficiente  $\beta$  provoca un decremento de la velocidad dentro de los mismos, lo cual es especialmente notable para valores negativos de  $\beta$ . Más tarde Ochoa-Tapia y Whitaker (1998b) utilizaron su metodología de condiciones de salto para deducir una condición de frontera de transferencia de cantidad de movimiento entre una región de fluido homogéneo y un medio poroso, cuando los efectos inerciales son importantes. En ese caso se utiliza una GTE que resulta de promediar a la ecuación de Navier-Stokes, la cual se reduce a la ecuación de Navier-Stokes en la región de fluido homogéneo y en la ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer en el medio poroso homogéneo. La condición de salto está escrita en términos de los coeficientes  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , cuyas interpretaciones físicas se asociaron a esfuerzos viscosos en exceso y a esfuerzos inerciales en exceso, respectivamente. Se estimó que ambos coeficientes también son del orden de la unidad y se deben de determinar del ajuste de datos experimentales.

El trabajo de Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) proporcionó una alternativa para el desarrollo teórico de condiciones frontera para la transferencia de masa, calor y cantidad de movimiento entre una región fluido homogéneo y un medio poroso. Sin embargo, estas condiciones de frontera involucran coeficientes de salto cuyas dependencias en la microestructura de la inter-región no fueron definidas y sus interpretaciones físicas no estaban bien entendidas, por lo que las condiciones de frontera son *condiciones de frontera abiertas*. Una alternativa para esto fue propuesta por Wood et al. (2000), quienes desarrollaron una metodología para obtener una condición de salto cerrada para la transferencia de masa en una superficie catalítica no uniforme adyacente a una región de fluido. La condición de frontera está en términos del coeficiente de reacción efectiva, cuya dependencia con las propiedades superficiales se determinó mediante el planteamiento y solución de un problema de valor a la frontera similar a los asociados a las regiones homogéneas, aunque el dominio de solución en este caso es una región representativa de la superficie catalítica no uniforme. En el contexto del método del promedio volumétrico dicho problema de valor a la frontera se conoce como problema de cerradura local (PCL)

(Whitaker, 1999). Por su parte, para la transferencia de cantidad de movimiento, Goyeau et al. (2003) propusieron una metodología que permite obtener una expresión semi-analítica del coeficiente de salto  $\beta$  de la condición de salto del esfuerzo. Su metodología consiste en acoplar un ODA que considera a la inter-región mediante la variaciones de sus coeficientes de transporte efectivos y un TDA compuesto por la ecuación de Stokes y la ecuación de Darcy-Brinkman. En su trabajo indican que el coeficiente de salto  $\beta$  depende de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos y de la velocidad promedio en la inter-región. En ese caso debido a la falta de información relacionada con la microestructura de la inter-región, sugirieron representar a las variaciones espaciales de la fracción volumétrica mediante funciones Heaviside, lineal, sinusoidal y error. Además utilizaron a la ecuación de Carman-Kozeny con la porosidad variable para describir a las variaciones de la permeabilidad. Las predicciones del coeficiente  $\beta$  se compararon con los valores estimados por Ochoa-Tapia y Whitaker (1995b) para reproducir los datos experimentales de BJ, encontrando predicciones similares. Asimismo Goyeau et al. (2003) analizaron la configuración del sistema propuesto por BJ mediante el ODA. Estos resultados también se compararon con los obtenidos por BJ y Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a), encontrando predicciones muy parecidas. Estos autores indican que para tener una descripción detallada de los fenómenos en todo el sistema es necesario que el ODA considere a la inter-región y concluyeron que su análisis constituye un paso intermedio hasta la determinación exacta del coeficiente de salto  $\beta$ , el cual puede involucrar el desarrollo de un PCL, cuyo dominio de solución debe incluir a la inter-región.

Motivados por el trabajo de Wood et al. (2000), Valdés-Parada et al. (2006) reformularon la metodología de condiciones de salto de Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) para un problema de transferencia de masa entre una región de fluido homogéneo y un medio poroso catalítico, obteniendo una condición de salto de transporte de masa libre de coeficientes ajustables (*i.e.*, *condición de frontera cerrada*). La condición de frontera está escrita en términos de un coeficiente de reacción efectiva, cuyo objetivo es incorporar el efecto de la microestructura de la inter-región sobre la descripción del transporte en todo el sistema. Para determinar a este coeficiente se planteó y resolvió un PCL simplificado, cuyo dominio de solución consiste en una muestra representativa de la región de la frontera que incluye a la inter-región. Siguiendo la misma idea, Valdés-Parada et al. (2007a) desarrollaron una condición de salto del esfuerzo libre de coeficientes ajustables. En ese caso, el coeficiente de salto es un tensor de esfuerzos mixto que combina los llamados esfuerzos de Brinkman y globales (*i.e.*, el inverso del tensor de permeabilidad). Para determinar a las variaciones de la permeabilidad se desarrolló un PCL, aunque en ese momento sólo se propuso una metodología aproximada, debido a la complejidad de su solución.

Dicha metodología aproximada se basa en utilizar a la ecuación de Carman-Kozeny con la porosidad variable. Además, para completar el modelo, impusieron la continuidad de la velocidad en la superficie divisoria. No fue hasta que Valdés-Parada et al. (2009b) resolvieron una versión simplificada del PCL y determinaron a las variaciones espaciales de la permeabilidad que cierran el ODA propuesto en Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a,b). Al mismo tiempo se propuso una metodología para determinar al coeficiente de salto  $\beta$ . Para ello, fue necesario introducir a las variaciones espaciales de la permeabilidad, la fracción volumétrica, la solución del ODA y del TDA en una definición del coeficiente de salto  $\beta$  proporcionada en Valdés-Parada et al. (2007a). Esto condujo a una expresión semianalítica de dicho coeficiente, encontrando que sus valores calculados son idénticos a los obtenidos mediante la metodología propuesta en Goyeau et al. (2003). Por último, muestran que la rugosidad de un medio poroso en la inter-región posee efectos relevantes sobre los cambios espaciales de la permeabilidad y en consecuencia sobre el coeficiente de salto  $\beta$ , para valores intermedios del número de Darcy ( $Da$ ), *i.e.*,  $Da \sim 10^{-4} - 10^{-6}$ .

Para problemas de almacenamiento de granos en silos, Jiménez-Islas et al. (2009) estudiaron numéricamente a la convección natural en una cavidad cuadrada que contiene una región de fluido y un medio poroso isotrópico. Ambas regiones se colocaron de manera horizontal y se consideró una generación de calor en el medio poroso. Para modelar a la velocidad del fluido se propuso un ODA siguiendo las ideas Beckermann et al. (1987), por lo que los coeficientes efectivos son constantes y no se considera a la inter-región. Aquí el TDA consiste en la ecuación de Navier-Stokes para la región de fluido homogéneo y la ecuación de Darcy-Brinkman para el medio poroso. Concluyeron que el ODA propuesto es una buena alternativa para describir a la convección natural y evitar la necesidad de imponer condiciones de frontera en la superficie divisoria entre la región de fluido y el medio poroso. Las principales limitaciones de este trabajo consiste en que no se considera el efecto de la microestructura de la inter-región sobre el transporte, que ciertamente los trabajos anteriores han mostrado que sus efectos son importantes.

Los trabajos de Valdés-Parada et al. (2007a; 2009) aportan una metodología de condiciones de salto cerradas que completan el TDA, el cual para la transferencia de cantidad de movimiento en un sistema fluido-medio poroso consiste en las ecuaciones de Stokes y Darcy-Brinkman, de acuerdo con Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a). Sin embargo, su metodología tiene varias limitaciones, los cuales se mencionan a continuación. Primero, el hecho de que determinar el coeficiente de salto  $\beta$  depende de resolver el ODA, hace que la metodología de condiciones de salto sea poco atractiva. Esto se debe

a que si se cuenta con la solución del ODA, no tiene sentido hablar de un TDA, debido a que el perfil de velocidad promedio del TDA siempre es y será una aproximación al obtenido por el ODA. Segundo, la metodología de condiciones de salto sólo está relacionada con el salto en el esfuerzo, ya que usualmente se impone la continuidad de la velocidad. Por último, la posición de la superficie divisoria se desconoce aún en ese momento. Estos y otros problemas fueron atendidos recientemente por Valdés-Parada et al. (2013), quienes desarrollaron una metodología de condiciones de salto más general. Esta metodología consiste en derivar un problema de cerradura macroscópico y utilizar dos restricciones integrales. Este último permite obtener tanto a la condición de salto del esfuerzo como a la de la velocidad. Para determinar a los coeficientes de salto ahora sólo es necesario resolver los problemas de cerradura macroscópicos, los cuales a su vez requieren conocer los cambios espaciales de la fracción volumétrica y de la permeabilidad en la inter-región involucrados en el ODA. Cabe señalar que los coeficientes de salto, de alguna manera, colapsan la información de microestructura de la inter-región en el TDA, la cual está dada explícitamente por las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos.

Recientemente, Chavarría-Ornelas (2016) obtuvo el perfil de velocidad promedio correspondiente al ODA de un sistema compuesto por dos medios porosos, al promediar el perfil de velocidad local y no por la solución de la ecuación promedio. Esto se llevó a cabo al considerar a los medios porosos como arreglos periódicos de placas paralelas. Una contribución similar fue presentada por Ochoa-Tapia et al. (2017), quienes determinaron el perfil de velocidad promedio correspondiente al ODA en un sistema fluido-medio poroso. Aquí el medio poroso se considera como un arreglo periódico de tubos capilares del mismo diámetro. Ambos estudios, a pesar de las geometrías simplificadas, demuestran la transición suavizada del perfil de velocidad promedio (*capa de Brinkman*) cerca de las fronteras y su consistencia con el término de corrección Brinkman a la ley de Darcy. Es importante resaltar que, ambos perfiles de velocidad promedio no están sujetos a suposiciones o restricciones de longitudes de escala más allá a las de los sistemas originales. Con esto en mente, estas ideas ofrecen la oportunidad de determinar de manera exacta a las variaciones espaciales de la permeabilidad para cerrar el ODA. Esta idea se retomará más adelante.

A lo largo de esta revisión se enfatiza la importancia de la microestructura de la inter-región en el modelado de los fenómenos de transporte, en particular para la transferencia de cantidad de movimiento, ya sea mediante un ODA o un TDA. Estos efectos son capturados a través de las variaciones espaciales de coeficientes de transporte efectivos. Esto hace evidente la necesidad de contar con una

metodología que permita determinar de manera rigurosa a las variaciones espaciales de dichos coeficientes. Actualmente esto se puede lograr mediante el planteamiento y solución de un PCL, como lo describen Valdés-Parada et al. (2007a, 2009) y como lo enfatizan Goyeau et al. (2003) en su trabajo. Sin embargo, la solución exacta de un PCL es muy complicada de obtener, por lo que en los trabajos descritos arriba han optado en proponer versiones simplificadas estos. Estas simplificaciones se basan en suposiciones o restricciones de longitudes de escala, los cuales se conocen como postulados de escalamiento (Wood y Valdés-Parada, 2013). Hasta el momento no se tiene la certeza de cuanta información se pierde al hacer dichas simplificaciones. Este hecho ha proporcionado razones para dudar sobre la utilidad y eficiencia de un PCL para determinar a la dependencia espacial de los coeficientes de transporte efectivos.

### **1.3. Motivación del trabajo**

En el modelado de la transferencia de cantidad de movimiento en sistemas compuestos por una región de fluido y una de medio poroso, ya sea mediante el ODA o el TDA, es imprescindible conocer a las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso. Esto con el objetivo de incorporar el efecto de la microestructura de la inter-región para una descripción precisa del transporte en todo el sistema. Actualmente en el contexto del método del promedio volumétrico, este hecho requiere el planteamiento y solución de un problema de cerradura local, cuyas principales ventajas son que permite determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad de manera teórica y que no está limitado por la geometría del medio poroso.

Sin embargo, la determinación de las variaciones espaciales de la permeabilidad sin la imposición de restricciones de longitudes de escala o suposiciones sobre el PCL no están disponibles hasta el momento. Esto ha puesto en duda la utilidad de un PCL simplificado para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad.

### **1.4. Hipótesis**

Un problema cerradura local simplificado permite determinar adecuadamente a las variaciones espaciales de la permeabilidad en una inter-región fluido-medio poroso.

## **1.5. Objetivos**

### **1.5.1. General**

Analizar el alcance y los efectos de un problema de cerradura local simplificado en el modelado de la transferencia de cantidad de movimiento entre una región de fluido y una de medio poroso.

### **1.5.2. Particulares**

1. Determinar los cambios espaciales de la permeabilidad y de la fracción volumétrica de manera exacta y aproximada.
2. Predecir los coeficientes de salto considerando a las variaciones espaciales de la permeabilidad exactas y aproximadas.
3. Comparar los perfiles de velocidad del modelo de un dominio, que considera a las variaciones espaciales de la permeabilidad exactas y aproximadas, con los obtenidos mediante una simulación analítica directa.
4. Comparar los perfiles de velocidad del modelo de dos dominios, que usa a los coeficientes de salto exactos y aproximados, con los obtenidos mediante una simulación analítica directa.

## Capítulo 2

# Modelos microscópico y macroscópico

En este capítulo se presentan las ecuaciones de los modelos de uno y dos dominios que describen el flujo de un fluido sobre y a través de un medio poroso. En el modelo de un dominio la ecuación promedio se obtiene del promediado de las ecuaciones que gobiernan el transporte en la microescala, junto con la ayuda del teorema del promediado espacial. Por otro lado, en el modelo de dos dominios las ecuaciones promedio se obtienen imponiendo un conjunto de suposiciones clásicas en el método del promedio volumétrico sobre la ecuación del modelo de un dominio. Además, para completar este último se desarrollan las condiciones de salto que permiten acoplar a las ecuaciones en la posición de la superficie divisoria. Posteriormente, para cerrar el modelo de un dominio y a las condiciones de salto, se presenta el problema de cerradura local que permite determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso. Por último, se determina el perfil de velocidad promedio correspondiente al modelo de un dominio, del promediado del perfil de velocidad local y no por la solución de la ecuación promedio.

### 2.1. Problema local

Para analizar los efectos que tiene sobre el perfil de velocidad promedio, el hecho de utilizar un PCL simplificado para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad en una inter-región fluido-medio poroso, se considera convenientemente como caso estudio el sistema físico que se muestra en la Figura 2.1. El sistema consiste en el flujo de un fluido a través de un canal parcialmente lleno con un medio poroso, de tal manera que, el fluido fluye sobre y través de dicho medio poroso.

El sistema se compone por dos regiones y tres fases como se describe a continuación:

### 1. Regiones

- Región de fluido (región  $\eta$ ), zona que contiene únicamente a la fase fluida, cuya longitud característica es  $L_\eta$ .
- Región de medio poroso (región  $\omega$ ), zona que contiene a la fase sólida y a la fase fluida, cuya longitud característica es  $L_\omega$ .

### 2. Fases

- Fase fluida, denotada como la fase  $\beta$ .
- Fase sólida del medio poroso, denotada como la fase  $\sigma$ .
- Fase sólida de las paredes que limitan al sistema, denotada como la fase  $W$ .

Además, se considera que el sistema está sujeto a las siguientes suposiciones:

1. Flujo incompresible, *i.e.*, la densidad del fluido ( $\rho_\beta$ ) se mantiene constante con respecto al tiempo y a la posición.
2. Fluido Newtoniano, *i.e.*, que la relación entre un esfuerzo cortante aplicado sobre el fluido y la velocidad de deformación asociada es una constante. Esta constante es la viscosidad dinámica ( $\mu_\beta$ ).
3. Medio poroso rígido y homogéneo, *i.e.*, que los coeficientes de transporte efectivos se mantienen constantes con respecto al tiempo y a la posición dentro de una región de promediado localizada suficientemente lejos de las fronteras.
4. Efectos inerciales despreciables con respecto a los esfuerzos viscosos, *i.e.*  $Re \ll 1$ .
5. Proceso de transporte en estado estacionario.

Bajo estas suposiciones iniciales, las ecuaciones locales que gobiernan el transporte de masa total y de cantidad de movimiento de la fase  $\beta$  son

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } \beta \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad \text{en la fase } \beta \quad (2.1b)$$



las cuales están sujetas a la condición de frontera de no deslizamiento en la interfase sólido-fluido ( $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$ ).

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (2.1c)$$

y a las condiciones de frontera de entradas y salidas del sistema macroscópico, que se pueden escribir como

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\beta,e} \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta,e} \quad (2.2)$$

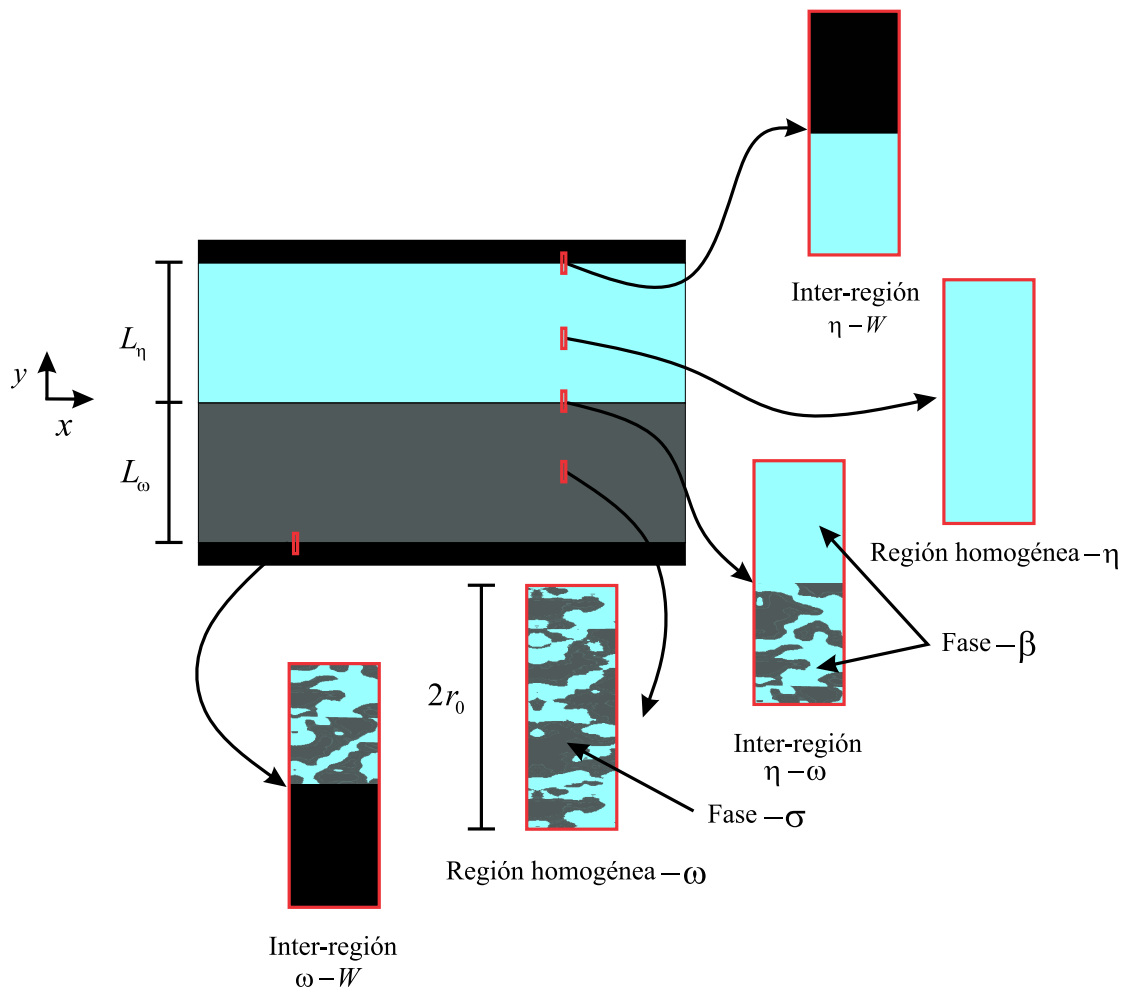


Figura 2.1: Configuración del sistema fluido-medio poroso.

Debido a que el análisis en términos de las ecuaciones antes mencionadas puede llegar a ser muy complicado, en las siguientes secciones se derivan los modelos macroscópicos con el objetivo de

mostrar sólo la información esencial del transporte en la microescala. Esto se lleva a cabo usando como marco de referencia al método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999).

## 2.2. Promediado

El primer paso para el desarrollo de los modelos macroscópicos consiste en localizar una región de promediado  $\mathcal{V}$ , de volumen  $V$ , en cada punto del sistema como las que se muestran en la Figura 2.1. Notar que  $\mathcal{V}$  puede estar localizada tanto en las dos regiones homogéneas (región homogénea- $\eta$  y región homogénea- $\omega$ ) como en las tres inter-regiones (*i.e.*, inter-región  $\eta - W$ , inter-región  $\eta - \omega$  e inter-región  $\omega - W$ ), por lo que la región de promediado se puede expresar como

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_\beta(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_\sigma(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_W(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

donde  $\mathcal{V}_\beta(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{V}_\sigma(\mathbf{x})$  y  $\mathcal{V}_W(\mathbf{x})$  son las regiones ocupadas por la fase- $\beta$ , por la fase- $\sigma$  y por la fase- $W$  dentro de  $\mathcal{V}$ . Cabe señalar que, para proporcionar adecuadas cantidades promedio, la región de promediado debe satisfacer la siguiente desigualdad

$$\ell_\beta \ll r_0 \ll L_\lambda, \quad \lambda = \eta, \omega \quad (2.4)$$

donde  $\ell_\beta$  es la longitud característica del tamaño de poro,  $r_0$  es la longitud característica de la región de promediado y  $L_\lambda$  son las longitudes características del sistema macroscópico. A continuación, en términos de dicha región de promediado, se definen los siguientes operadores de promedio superficial y de promedio intrínseco como

$$\langle \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{y}_\beta \in \mathcal{V}_\beta(\mathbf{x})} \psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dV \quad (2.5a)$$

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathbf{y}_\beta \in \mathcal{V}_\beta(\mathbf{x})} \psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dV \quad (2.5b)$$

en este caso  $\psi_\beta = p_\beta$  ó  $\mathbf{v}_\beta$ . En las definiciones de arriba se han utilizado vectores de posición asociados a la región de promediado, los cuales se detallan en la Figura 2.2. El vector  $\mathbf{x}$  localiza el centroide de la región de promediado relativo a un sistema de referencia fijo, el vector  $\mathbf{r}_\beta$  localiza cualquier punto de la fase- $\beta$  dentro de la región de promediado relativo al mismo sistema de referencia y el vector  $\mathbf{y}_\beta = \mathbf{r}_\beta - \mathbf{x}$  localiza a la fase- $\beta$  relativo al centroide de la región de promediado. Los operadores

de promedio superficial e intrínseco están relacionados mediante la ecuación de Dupuit-Forchheimer dada por

$$\langle \Psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \Psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \quad (2.6)$$

donde  $\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$  es la fracción de volumen de la fase  $\beta$  contenida en la región de promediado definida como

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{V_\beta(\mathbf{y})} 1 dV = \frac{V_\beta(\mathbf{x})}{V} \quad (2.7)$$

Es claro que  $\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$  depende de la posición del centroide de la región de promediado. Particularmente en las regiones homogéneas,  $\varepsilon_\beta(\mathbf{x})$  adquiere los siguientes valores

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{en la región homogénea } \eta \\ \varepsilon_{\beta\omega} & \text{en la región homogénea } \omega \end{cases} \quad (2.8)$$

donde  $\varepsilon_{\beta\omega}$  es la fracción volumétrica o porosidad de la región homogénea  $\omega$ .

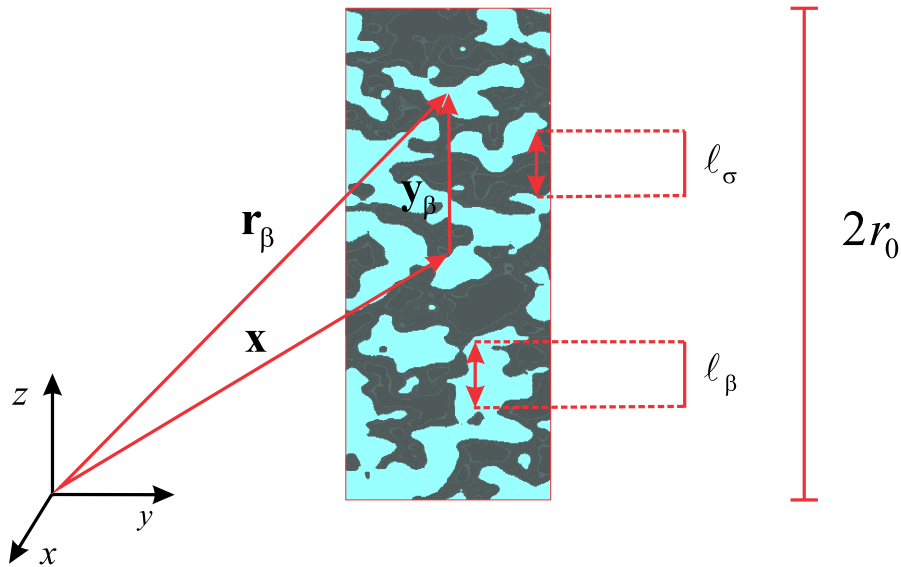


Figura 2.2: Vectores de posición en la región de promediado.

Se debe hacer notar que, aquí se consideran tres inter-regiones, en donde es necesario determinar las variaciones espaciales de los coeficientes de transporte efectivos. Sin embargo, para cumplir con el objetivo de este trabajo, el análisis se enfoca en la inter-región  $\eta - \omega$ . Adicionalmente, los resultados se restringirán desde la localización de la pared inferior ( $y = -L_\omega$ ) hasta la pared superior ( $y = L_\eta$ ).

### 2.3. Modelo de un dominio (ODA)

El siguiente paso consiste en obtener a la ecuación macroscópica del modelo de un dominio, usando los operadores definidos anteriormente y con ayuda del teorema del promediado espacial (Howes y Whitaker, 1985). Estas ecuaciones fueron derivadas inicialmente por Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) y más recientemente por Valdés-Parada et al. (2007a), aunque el desarrollo detallado también se puede encontrar en el Apéndice A de este trabajo. Para conservar la brevedad en la presentación del mismo, se tiene que la ecuación promedio resultante está dada por

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \\ & - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left( \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} \right) - \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.9b)$$

donde se ha introducido la siguiente definición

$$-\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[ -\mathbf{l} \left( p_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) + \mu_\beta \left( \nabla \mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right] dA \quad (2.10)$$

Las Ecs. (2.9) se conocen como las GTE de la transferencia de masa total y de cantidad de movimiento, debido a que pueden describir el transporte en todo el sistema puesto que contienen coeficientes efectivos dependientes en la posición. Es importante mencionar el significado físico de cada término de estas ecuaciones, particularmente de la Ec. (2.9b). El primer término del lado derecho de la Ec. (2.9b) corresponde a las fuerzas normales debidas al gradiente de la presión macroscópica, el segundo término es la fuerza volumétrica debida a la gravedad y el tercer término se refiere a las fuerzas viscosas macroscópicas debidas al fluido, el cual se conoce en la literatura como el término de corrección de Brinkman a la ley de Darcy. El penúltimo término involucra a las fuerzas viscosas macroscópicas debidas a la variación de la porosidad, el cual se conoce como la segunda corrección de Brinkman. Finalmente, el término  $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$  se refiere a las resistencias interfaciales que ejerce el medio poroso al flujo del fluido, aunque para darle un significado físico más fácil de entender, se supone que este término se puede escribir como

$$-\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = -\mu_\beta \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (2.11)$$

el cual es un término de Darcy con las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad  $\mathbf{K}_\beta(\mathbf{x})$ . El

inverso de este tensor en las regiones homogéneas adquiere los siguientes valores

$$\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{región homogénea } -\eta \\ \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} & \text{región homogénea } -\omega \end{cases} \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{K}_{\beta\omega}$  es el tensor de permeabilidad en la región homogénea  $-\omega$ , el cual se puede obtener al resolver un problema de cerradura local como lo muestra Whitaker (1999).

## 2.4. Modelo de dos dominios (TDA)

Por otro lado, cuando en las regiones homogéneas se satisfacen las siguientes restricciones de longitudes de escala (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995a)

$$r_0^2 \ll L_v L_v; \quad r_0^2 \ll L_p L_p; \quad r_0 \ll L_v, L_p; \quad \ell_\beta \ll r_0 \quad (2.13)$$

de las Ecs. (2.9) se pueden obtener a las ecuaciones promedio escaladas del TDA, las cuales están dadas por

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta = 0 \quad \text{Región homogénea } -\eta \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle_\eta^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \quad \text{Región homogénea } -\eta \quad (2.14b)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega = 0 \quad \text{Región homogénea } -\omega \quad (2.14c)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \varepsilon_{\beta\omega}^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega - \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \quad \text{Región homogénea } -\omega \quad (2.14d)$$

donde contrario a la ecuación del ODA, todos los coeficientes efectivos involucrados en las ecuaciones anteriores son constantes. Estas ecuaciones deben acoplarse en la posición de la superficie divisoria; sin embargo, no son válidas en la inter-región debido a las variaciones de la microestructura del medio poroso. Por esta razón, es necesario el desarrollo de condiciones de salto para la transferencia de cantidad de movimiento (Ochoa-Tapia y Whitaker 1995a). Cabe señalar que las Ecs. (2.14b) y (2.14d) son las ecuaciones de Stokes y Darcy-Brinkman, respectivamente.

## 2.5. Flujo unidireccional y completamente desarrollado

Con el fin hacer el análisis más sencillo y contar con un problema similar a la configuración experimental estudiada por BJ, se supone que el flujo es unidireccional y completamente desarrollado.

De esta manera, con ayuda de la Ec. (2.6), la Ec. (2.9b) se reduce a

$$0 = -\frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} + \mu_\beta \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy^2} + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle^\beta}{dy} + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} \langle v_\beta \rangle^\beta - \mu_\beta \varepsilon_\beta K_\beta^{-1} \langle v_\beta \rangle^\beta \quad \forall y \in (-L_\omega, L_\eta) \quad (2.15)$$

donde  $\langle v_\beta \rangle = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \mathbf{e}_x$  y  $K_\beta(y) = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x$  son las componentes tangenciales de la velocidad y de la permeabilidad a la frontera macroscópica. Esta última se puede obtener a partir de la Ec. (2.10) como

$$-f_{\beta,x}(y) = -\varepsilon_\beta(y) K_\beta^{-1}(y) \langle v_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta(y)} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(y)} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[ -\delta_{xj} \mathbf{e}_j \left( p_\beta - \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_y \right) - \mu_\beta \left( \nabla v_\beta - \nabla \langle v_\beta \rangle^\beta \Big|_y \right) \right] dA \quad (2.16)$$

Aquí se supuso que la componente  $K_{xy}^{-1}(y) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \mathbf{e}_y \ll K_\beta^{-1}(y) \langle v_\beta \rangle^\beta$ , lo cual es válido para flujo completamente desarrollado. Análogamente, bajo las suposiciones antes mencionadas, las ecuaciones (2.14b) y (2.14d) adquieren la siguiente forma

$$0 = -\frac{d^2 \langle p_\beta \rangle_\eta^\beta}{dx} + \mu_\beta \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} \quad \text{en la región homogénea } -\eta \quad (2.17a)$$

$$0 = -\frac{d^2 \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta}{dx} + \mu_\beta \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \quad \text{en la región homogénea } -\omega \quad (2.17b)$$

No obstante, como se mencionó anteriormente, las Ecs. (2.17) no son válidas en la zona de transición debido a las variaciones de la microestructura del medio poroso. Este problema se atenderá en la siguiente sección, al desarrollar las condiciones de salto para la transferencia de cantidad de movimiento mediante la metodología propuesta en Valdés-Parada et al. (2013), aunque como el sistema físico y las condiciones de salto necesarias son idénticos a los presentados en Valdés-Parada et al. (2013), sólo se mencionan los pasos y argumentos más relevantes para el desarrollo de dichas condiciones de salto.

### 2.5.1. Condiciones de frontera

Antes de derivar a las condiciones de salto, se debe notar que para el tipo de flujo y configuración experimental estudiada por BJ, se puede suponer que las caídas de presión son constantes e iguales en todo el sistema

$$\frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} = \frac{d\langle p_\beta \rangle_\eta^\beta}{dx} = \frac{d\langle p_\beta \rangle_\omega^\beta}{dx} \quad (2.18)$$

por lo que a partir de la velocidad de Darcy, la caída de presión se puede escribir como

$$\frac{d\langle p_\beta \rangle_\omega^\beta}{dx} = -\frac{\mu_\beta \varepsilon_\beta \omega}{K_{\beta\omega}} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad (2.19)$$

Entonces las ecuaciones anteriores del ODA y del TDA toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{ODA} \quad 0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2} + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} + \left( \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1} \right) \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \\ + \varepsilon_\beta \omega K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad \forall y \in (-L_\omega, L_\eta) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\text{TDA} \quad 0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} + \varepsilon_\beta \omega K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad \forall y \in (y_0, L_\eta) \quad (2.21a)$$

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta \omega K_{\beta\omega}^{-1} \left( \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta - \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \right) \quad \forall y \in (-L_\omega, y_0) \quad (2.21b)$$

En las ecuaciones anteriores del TDA,  $y_0$  indica la posición de la superficie divisoria en la dirección normal a la frontera macroscópica. Cabe señalar que, al utilizar el TDA especialmente dentro de la inter-región  $\eta - \omega$ , es inevitable introducir errores o desviaciones macroscópicas en la predicción de la velocidad con respecto al ODA. Con esto en mente, en la Figura 2.3 se muestra que la zona donde las desviaciones macroscópicas son diferentes de cero, está limitada por  $y \in (-y_\omega, y_\eta)$ , la cual no necesariamente coincide con la zona donde los coeficientes efectivos sufren cambios drásticos, *i.e.*, la inter-región  $\eta - \omega$  que está limitada por  $y \in (-r_0, r_0)$ .

De acuerdo con Valdés-Parada et al. (2013), el primer paso para desarrollar y cerrar a las condiciones de salto, consiste en cuantificar a las desviaciones macroscópicas de la velocidad en cada región, las cuales se definen como

$$\hat{v}_\lambda = \langle v_\beta \rangle_\lambda^\beta - \langle v_\beta \rangle_\lambda^\beta \quad \lambda = \eta, \omega \quad (2.22)$$

A este paso se le denomina como el *problema de cerradura macroscópico*, cuyo desarrollo detallado se presenta en el Apéndice C de este trabajo. Con el objetivo de mantener fluidez del mismo, basta con escribir que la solución formal de las desviaciones macroscópicas de la velocidad está dada por

$$\hat{v}_\eta = s_{1\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} + s_{2\eta} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} + b_{1\eta} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + b_{2\eta} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (2.23a)$$

$$\hat{v}_\omega = s_{1\omega} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} + s_{2\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} + b_{1\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + b_{2\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (2.23b)$$

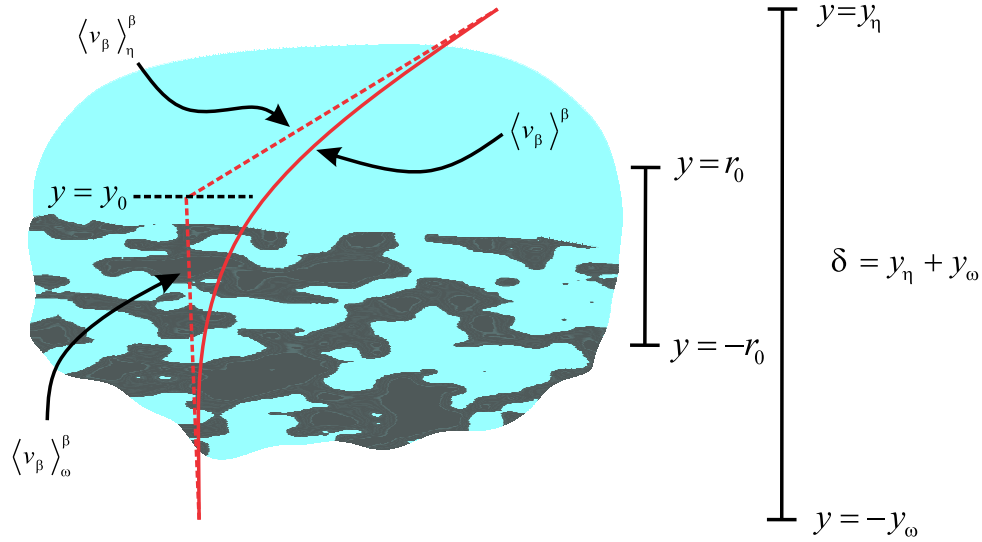


Figura 2.3: Perfiles de velocidad del ODA y del TDA en la frontera macroscópica.

donde los coeficientes que multiplican a la velocidad promedio y su derivada evaluadas en  $y_0$  (*i.e.*, términos fuente) se denominan como variables de cerradura macroscópicas, las cuales se obtienen al resolver los problemas de cerradura macroscópicas asociados. La derivación y solución de estos problemas de cerradura también se pueden encontrar en el Apéndice C. Conviene enfatizar que para resolver a los problemas de cerradura macroscópicas, se debe conocer a las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, la posición de la superficie divisoria ( $y_0$ ) y las posiciones de los límites de la zona donde las desviaciones macroscópicas son diferentes de cero ( $y_\omega$  y  $y_\eta$ ). Todos estos parámetros se desconocen hasta este punto del desarrollo. En la siguiente sección se presenta el desarrollo de las condiciones de salto que acoplan las Ecs. (2.21) en la posición de la superficie divisoria.

### Condiciones de salto

El objetivo de las condiciones de salto es que el TDA satisfaga en promedio el ODA (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995a, b), por lo que deben minimizar los errores introducidos de usar el TDA fuera de su dominio de validez, *i.e.*, en la inter-región  $\eta - \omega$ . Para llevar a cabo esto, Valdés-Parada et al. (2013) proponen dos restricciones promedio que permiten obtener tanto a la condición de salto de la velocidad como la del esfuerzo, las cuales se mencionan a continuación.

#### *Primera restricción promedio*

Esta restricción requiere que el promedio de los campos de las desviaciones macroscópicas de la



velocidad sea cero en la zona comprendida en  $y \in (-y_\omega, y_\eta)$ , i.e.,

$$\frac{1}{y_\omega + y_\eta} \int_{-y_\omega}^{y_0} \hat{v}_\omega dy + \frac{1}{y_\omega + y_\eta} \int_{y_0}^{y_\eta} \hat{v}_\eta dy = 0 \quad (2.24)$$

donde al sustituir las Ecs. (2.23), conduce a la siguiente *condición de salto de la velocidad*

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} - e_1 \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} = e_2 \left( \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta - e_3 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \right) \quad (2.25)$$

Aquí  $e_1$ ,  $e_2$ , y  $e_3$  son los coeficientes de salto para la velocidad, los cuales están definidos en términos de integrales de las variables de cerradura macroscópicas de acuerdo a

$$e_1 = - \frac{\int_{-y_\omega}^{y_0} b_{2\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} b_{2\eta} dy}{\int_{-y_\omega}^{y_0} b_{1\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} b_{1\eta} dy} \quad (2.26a)$$

$$e_2 = - \frac{\int_{-y_\omega}^{y_0} s_{1\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} s_{1\eta} dy}{\int_{-y_\omega}^{y_0} b_{1\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} b_{1\eta} dy} \quad (2.26b)$$

$$e_3 = - \frac{\int_{-y_\omega}^{y_0} s_{2\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} s_{2\eta} dy}{\int_{-y_\omega}^{y_0} s_{1\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} s_{1\eta} dy} \quad (2.26c)$$

### Segunda restricción promedio

Esta restricción requiere que el promedio de las ecuaciones gobernantes de las desviaciones macroscópicas sea cero en la región comprendida en  $y \in (-y_\omega, y_\eta)$ , i.e.,

$$\frac{1}{y_\omega + y_\eta} \int_{-y_\omega}^{y_0} (\text{Ec. C.2a}) dy + \frac{1}{y_\omega + y_\eta} \int_{y_0}^{y_\eta} (\text{Ec. C.2b}) dy = 0 \quad (2.27)$$

donde al reemplazar a las Ecs. (C.2a) y (C.2b), se obtiene la siguiente *condición de salto para el esfuerzo*

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} - g_1 \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} = g_2 \left( \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta - g_3 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \right) \quad (2.28)$$

Similarmente  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  son los coeficientes de salto del esfuerzo definidos en términos de las variables de cerradura macroscópicas como

$$g_1 = -\frac{q_\eta}{q_\omega} \quad g_2 = -\frac{z_\omega}{q_\omega} \quad g_3 = -\frac{z_\eta}{z_\omega} \quad (2.29)$$

donde por simplicidad se han utilizado las siguientes definiciones

$$q_\eta = \left(1 - \ln \frac{\varepsilon_\beta(y_0)}{\varepsilon_{\beta\eta}}\right) + \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta + \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy}\right) b_{1\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} \left(M_\beta + \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy}\right) b_{1\eta} dy \quad (2.30a)$$

$$q_\omega = -\left(1 - \ln \frac{\varepsilon_\beta(y_0)}{\varepsilon_{\beta\omega}}\right) + \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta + \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy}\right) b_{2\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} \left(M_\beta + \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy}\right) b_{2\eta} dy \quad (2.30b)$$

$$z_\eta = \int_{y_0}^{y_\eta} M_\beta dy + \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta + \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy}\right) s_{1\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} \left(M_\beta + \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy}\right) s_{1\eta} dy \quad (2.30c)$$

$$z_\omega = \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1}\right) dy + \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta + \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy}\right) s_{2\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} \left(M_\beta + \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy}\right) s_{2\eta} dy \quad (2.30d)$$

De esta manera, las condiciones de salto que acoplan a las ecuaciones del TDA en la posición de la superficie divisoria están dadas por las Ecs. (2.25) y (2.28). Es importante notar que, los coeficientes de salto dependen de conocer a los campos de las variables de cerradura macroscópicas, los cuales a su vez dependen de conocer a las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos y a las posiciones  $y_0$ ,  $y_\eta$  y  $y_\omega$ . En el Apéndice C se describe el procedimiento para determinar tanto a los coeficientes de salto como a las posiciones  $y_0$ ,  $y_\omega$  y  $y_\eta$ . A continuación, se presenta el PCL que permite determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región  $\eta - \omega$ .

## 2.6. Problema de cerradura local (PCL)

En el contexto del método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999), la determinación de las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región  $\eta - \omega$ , requiere el planteamiento y solución de un PCL. Tal estudio fue presentado recientemente por Valdés-Parada et al. (2007a, 2009). El desarrollo detallado del PCL puede seguirse en dicha referencia o en el Apéndice B de este trabajo. Con el fin de conservar la brevedad en la presentación, basta con mencionar que bajo las siguientes restricciones de longitudes de escala

$$\frac{r_0}{L_v} < 1; \quad \frac{r_0}{L_{v1}}; \quad \frac{\ell_\beta^2}{r_0 L} \ll 1 \quad (2.31)$$

el tensor de permeabilidad puede calcularse a partir de la siguiente expresión

$$-\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}_\beta + \nabla \mathbf{B}_\beta) dA \quad (2.32)$$

donde el vector  $\mathbf{b}_\beta$  y el tensor  $\mathbf{B}_\beta$  son variables de cerradura locales que indican cómo los términos fuente se distribuyen en las desviaciones locales de la velocidad y la presión. Las variables de cerradura se pueden obtener al resolver el siguiente PCL

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \mathbf{b}_\beta + \nabla^2 \mathbf{B}_\beta + \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (2.33b)$$

$$C.F.1: \quad \mathbf{B}_\beta = -\mathbf{I} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (2.33c)$$

$$C.F.2: \quad \text{en } y = h_s \quad \frac{\partial \mathbf{B}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{b}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (2.33d)$$

$$C.F.3: \quad \text{en } y = -h_s \quad \frac{\partial \mathbf{B}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{b}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (2.33e)$$

$$Periodicidad: \quad \mathbf{B}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{B}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.33f)$$

$$Periodicidad: \quad \mathbf{b}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{b}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.33g)$$

$$Promedio: \quad \langle \mathbf{B}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad (2.33h)$$

$$Promedio: \quad \langle \mathbf{b}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad (2.33i)$$

de donde se puede notar que la permeabilidad es una propiedad intrínseca, *i.e.*, que no depende de las propiedades del fluido. El PCL se debe resolver en una celda unitaria representativa que incluya la inter-región  $\eta - \omega$ , como la que se muestra en la Figura 2.4. El tamaño de la celda unitaria se denota como  $2h_s$ , cuyo valor se desconoce en esta etapa. Para resolver el PCL es conveniente utilizar los siguientes cambios de variables sugeridos por Whitaker (1999)

$$\mathbf{d}_\beta = \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_\beta \cdot \mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}); \quad \mathbf{D}_\beta = \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{B}_\beta + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

los cuales permiten escribir a las Ecs. (2.33a) de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \mathbf{d}_\beta + \nabla^2 \mathbf{D}_\beta + \mathbf{I} \quad \text{en } \mathcal{V}_\beta \quad (2.35b)$$

$$C.F.1: \quad \mathbf{D}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (2.35c)$$

$$C.F.2 : \quad \text{en} \quad y = h_s \quad \frac{\partial \mathbf{D}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{d}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (2.35d)$$

$$C.F.3 : \quad \text{en} \quad y = -h_s \quad \frac{\partial \mathbf{D}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{d}_\beta}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (2.35e)$$

$$\text{Periodicidad} : \quad \mathbf{D}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{D}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.35f)$$

$$\text{Periodicidad} : \quad \mathbf{d}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{d}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.35g)$$

$$\text{Promedio} : \quad \langle \mathbf{d}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{0} \quad (2.35h)$$

Ahora el tensor de permeabilidad se puede calcular como

$$\mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{D}_\beta \rangle \quad (2.36)$$

Aquí el PCL se presentó en forma vectorial debido a que en ocasiones para determinar a una sola de las componentes del tensor de permeabilidad, tal como  $K_\beta(y) = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x$ , son necesarias al menos dos de las componentes del tensor  $\mathbf{D}_\beta$ .

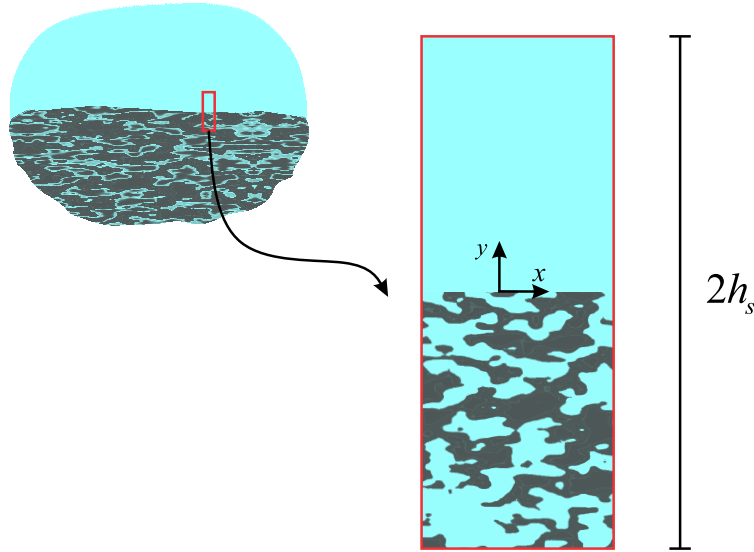


Figura 2.4: Muestra representativa de la región de la frontera.

Como ya ha mencionado anteriormente, las predicciones del tensor de permeabilidad sin la imposición de restricciones de longitudes de escala o suposiciones sobre el PCL, no están disponibles hasta el momento. Esto ha motivado a dudar sobre la utilidad de un PCL para dicho fin. Con el objetivo de responder a esta pregunta, en la siguiente sección se obtiene el perfil de velocidad promedio del promediado del perfil de velocidad local. Esto proporciona un marco de comparación a partir del cual se

puede obtener una perspectiva de la utilidad del PCL para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad. Además, en el siguiente capítulo con esta información se determinarán las variaciones espaciales de la permeabilidad de manera exacta.

## 2.7. Simulación analítica directa

Con el objetivo de obtener un marco de comparación que permita analizar los efectos que tiene sobre los perfiles de velocidad predichos por los modelos de uno y dos dominios, el hecho de utilizar un PCL simplificado para determinar la funcionalidad espacial de la permeabilidad, se propone obtener el perfil de velocidad promedio de promediar directamente el perfil de velocidad local. Esto requiere de la solución del problema local dado por las Ecs. (2.1) en todo el sistema bajo estudiado. Sin embargo, la solución de dichas ecuaciones puede llegar a ser muy complicado o muchas veces imposible debido a la compleja estructura de un medio poroso. De hecho, esta es una de las principales motivaciones de utilizar ecuaciones promedio. Este inconveniente se puede evitar si se utiliza una representación simplificada del medio poroso que conserve las principales características del mismo y que además la velocidad local se pueda determinar analíticamente. Como se mencionó anteriormente, tal análisis fue llevado a cabo por Ochoa-Tapia et al. (2017) al considerar el medio poroso como un arreglo periódico de tubos capilares del mismo diámetro y por Chavarría-Ornelas (2016) al considerar a dos estratos porosos como arreglos periódicos de placas paralelas.

Con el fin de obtener perfil de velocidad promedio a partir del promediado del perfil de velocidad local, en este trabajo se considera que el medio poroso está compuesto por un arreglo de placas paralelas del mismo espesor y separadas entre sí por la misma distancia  $\ell_\beta$ , tal como se muestra en la Figura 2.5. La separación entre una placa y otra se considerará como cada poro que compone a la región homogénea  $\eta$ . Al usar esta configuración, el flujo en la región  $-\eta$  y en cada poro de la región  $-\omega$ , están conectados únicamente en las entradas y salidas del sistema. Como consecuencia, bajo las suposiciones iniciales de flujo unidireccional y completamente desarrollado, el perfil de velocidad local en la región  $-\eta$  corresponde a la expresión bien conocida de flujo de Poiseuille dada por

$$v_\beta^f = v_{max}^f \left[ 1 - \left( \frac{y_f}{B} \right)^2 \right] \quad -B \leq y_f \leq +B \quad (2.37)$$

donde  $v_{max}^f$  es la velocidad máxima del fluido en la región  $-\eta$ , la cual está definida como

$$v_{max}^f = -\frac{dp_\beta}{dx} \frac{B^2}{2\mu_\beta} \quad (2.38)$$

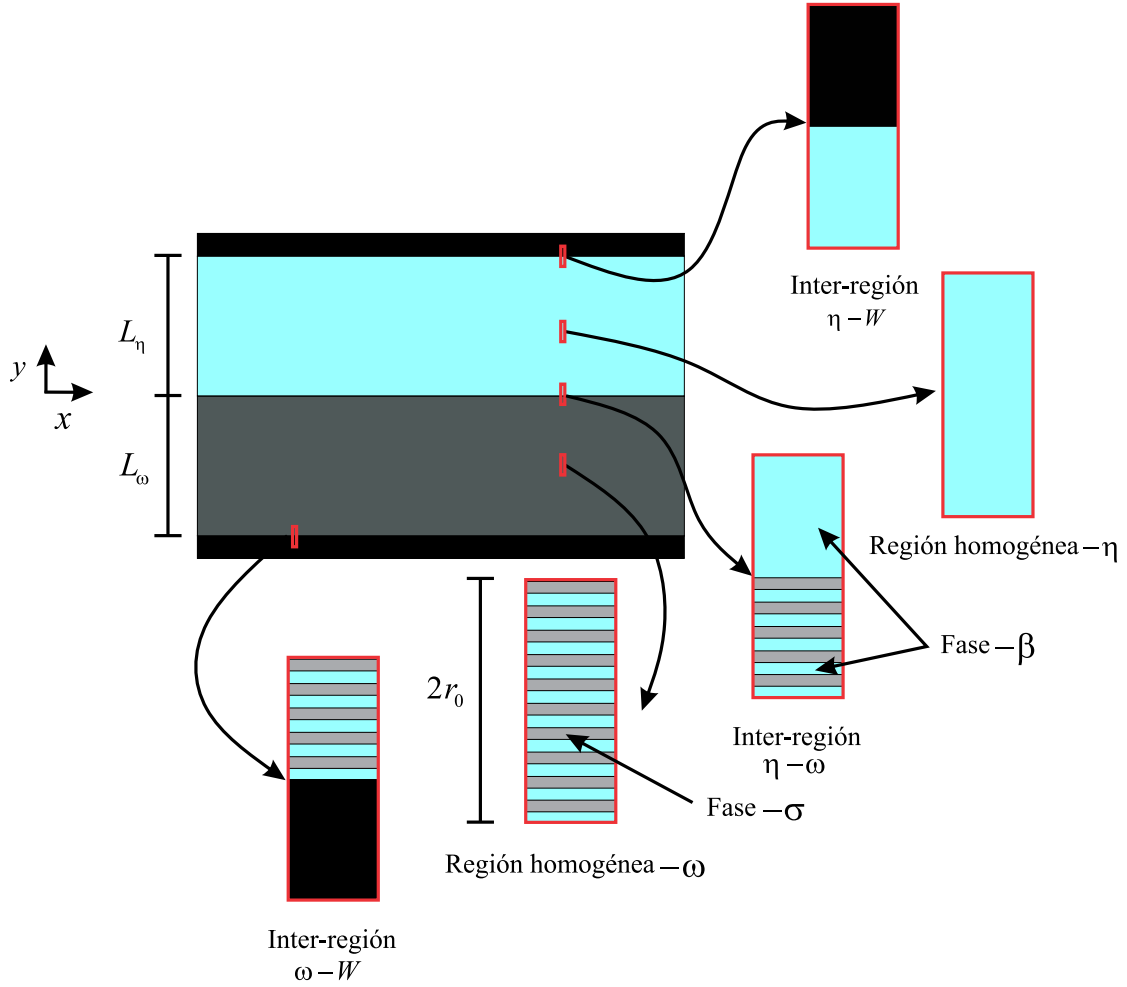


Figura 2.5: Configuración simplificada del sistema fluido-medio poroso.

donde a su vez  $B = L_\eta/2$  es la mitad de la longitud característica de la región  $\eta$ . Análogamente, la velocidad local del fluido en cada poro puede determinarse mediante la siguiente expresión

$$v_\beta^p = v_{max}^p \left[ 1 - \left( \frac{y_p}{b} \right)^2 \right] \quad -b \leq y_p \leq +b \quad (2.39)$$

donde  $v_{max}^p$  es la velocidad máxima del fluido en cada poro y está dada por

$$v_{max}^p = - \frac{dp_\beta}{dx} \frac{b^2}{2\mu_\beta} \quad (2.40)$$

Aquí  $b = \ell_\beta/2$  es la mitad de la longitud característica de cada poro que constituye a la región  $\eta$ . Cabe señalar que en las Ecs. (2.37) y (2.39),  $y_f$  y  $y_p$  son los ejes verticales de los sistemas de coordenadas locales, cuyos orígenes se localizan en la mitad de la región  $\eta$  y en la mitad de cada poro, respectivamente. Lo anterior se muestra en las Figuras 2.6.

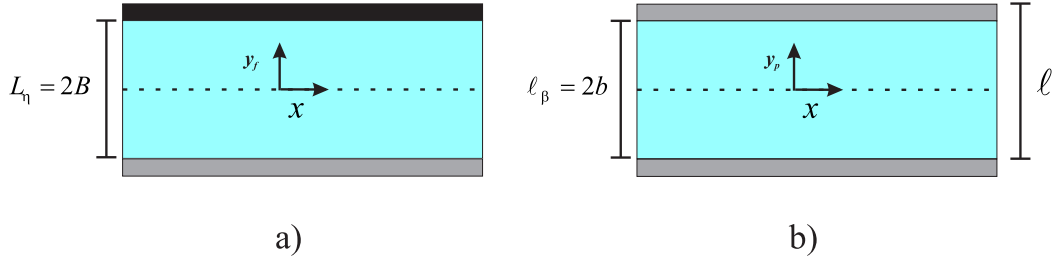


Figura 2.6: Sistemas de coordenadas locales para la velocidad local en la región- $\eta$  y en cada poro de la región homogénea- $\omega$

### 2.7.1. Predicción de la velocidad promedio

Debido a que tanto en la región- $\eta$  como en cada poro de la región- $\omega$  existe un sistema de coordenadas local asociado a cada perfil de velocidad local, primero es conveniente escribir a cada expresión de la velocidad local y a la posición del centroide de la región de promediado con respecto a un sistema de coordenadas global. El origen de este sistema de coordenadas se muestra en la Figura 2.5, el cual está localizado en donde la región- $\eta$  se une con la región- $\omega$ . De esta manera, la relación entre los ejes de coordenadas  $y_f$  y  $y$  está dada por

$$y_f = y - B \quad (2.41)$$

la cual permite escribir a la Ec. (2.37) como

$$v_\beta^f = v_{max}^f \left[ 1 - \left( \frac{y}{B} - 1 \right)^2 \right] \quad 0 \leq y \leq L_\eta \quad (2.42)$$

Por otro lado, es conveniente definir que la región de promediado es un paralelepípedo, cuyo volumen está dado por

$$V = 2r_0 (L_x L_z) \quad (2.43)$$

donde  $L_x L_z$  es el área de la base y  $2r_0$  es la altura del volumen de la región de promediado. Este último se supone que está compuesto por un número entero ( $n_0$ ) de celdas unitarias de altura  $\ell$ , de modo que

$$2r_0 = n_0 \ell \quad (2.44)$$

Como consecuencia, los operadores de promedio superficial y de promedio intrínseco dados por las

Ecs. (2.5) adquieren la siguiente forma

$$\langle v_\beta \rangle = \frac{1}{2r_0} \int_{\zeta=y-r_0}^{\zeta=y+r_0} v_\beta(\zeta) d\zeta \quad (2.45)$$

$$\langle v_\beta \rangle^\beta = \frac{L_x L_z}{V_\beta(y)} \int_{\zeta=y-r_0}^{\zeta=y+r_0} v_\beta(\zeta) d\zeta \quad (2.46)$$

En las ecuaciones anteriores se ha tomado en cuenta que la velocidad local sólo depende de la dirección  $y$ . A continuación se presenta el promediado del perfil de velocidad local en las cinco zonas del sistema aquí estudiado, las cuales están limitadas por las posiciones del centroide de la región de promediado y se han clasificado en zonas independientes y dependientes de la microestructura del medio poroso.

## 2.7.2. Zonas independientes de la microestructura del medio poroso

### Inter-región fluido-pared superior

La primera zona independiente de la microestructura del medio poroso es la inter-región fluido-pared superior (inter-región  $\eta - W$ ), la cual está definida por las siguientes posiciones del centroide de la región de promediado

$$L_\eta - r_0 \leq y \leq L_\eta + r_0 \quad (2.47)$$

de modo que  $\mathcal{V}$  contendrá porciones de la región  $-\eta$  y de la pared impermeable. Al introducir la Ec. (2.42) en la Ec. (2.45), conduce a

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_{\eta W}}{v_{\text{máx}}^f} = \frac{B}{2r_0} \left[ \frac{2}{3} - \frac{\alpha_f}{B} + \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_f}{B} \right)^3 \right] \quad \alpha_f = y - B - r_0 \quad (2.48)$$

donde la integración se ha llevado a cabo tomando en cuenta que  $v_\beta^f = 0$  para  $y \geq L_\eta$ . Aquí se debe notar que, la velocidad promedio puede considerarse igual a cero en  $y = L_\eta$  sólo si  $r_0 \ll B$ , de lo contrario la velocidad promedio será igual a cero hasta  $y = L_\eta + r_0$ . Esta última posición es cuando la región de promediado se localiza completamente dentro la pared impermeable. Esta es la condición de frontera superior que se utilizará para resolver a la ecuación promedio del ODA.



### Región homogénea de fluido

La segunda zona independiente del medio poroso es la región homogénea de fluido (región homogénea– $\eta$ ), la cual está restringida por las posiciones del centroide de la región de promediado dadas por

$$r_0 \leq y \leq 2B - r_0 \quad (2.49)$$

en este caso,  $\mathcal{V}$  contendrá únicamente a la región– $\eta$ . Al reemplazar a la Ec. (2.42) en la Ec. (2.45), se obtiene

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta}{v_{\text{máx}}^f} = \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{B} \right)^2 - \left( \frac{y}{B} - 1 \right)^2 \right] \quad (2.50)$$

Se debe notar que, esta expresión se puede reducir a la Ec. (2.42), siempre que la longitud característica de la región de promediado sea mucho menor a la mitad de la longitud característica de la región de fluido, *i.e.*,  $r_0 \ll B$ .

### 2.7.3. Zonas dependientes de la microestructura del medio poroso

#### Región homogénea del medio poroso

Por otro lado, la primera región que depende de la microestructura de medio poroso es, por supuesto, la región homogénea del medio poroso (*i.e.*, región homogénea– $\omega$ ). Esta zona está acotada por las siguientes posiciones del centroide de la región de promediado

$$-L_\omega + r_0 \leq y \leq -r_0 \quad (2.51)$$

Aquí, uno debe recordar que la región de promediado consiste en un número entero de celdas unitarias ( $n_0$ ) de altura  $\ell$  y que el campo de velocidad local se repite en cada celda. Como consecuencia, la Ec. (2.46) se puede escribir como

$$\langle v_\beta \rangle_\omega = \frac{1}{n_0 \ell} \sum_{i=1}^{i=n_0} \int_{y_p=-b}^{y_p=+b} v_\beta^p(y_p) dy_p \quad (2.52)$$

donde al introducir la Ec. (2.39), conduce a

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\omega}{v_{\text{max}}^p} = \frac{2}{3} \epsilon_\beta \omega \quad (2.53)$$

Adicionalmente, es conveniente expresar a la velocidad máxima del fluido en cada poro en términos de la velocidad máxima del fluido en la región homogénea de fluido mediante la siguiente relación

$$\frac{v_{max}^p}{v_{max}^f} = \left( \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N} \right)^2 \quad (2.54)$$

donde  $N = \frac{B}{\ell}$  es la relación entre la longitud característica de la región de fluido y el tamaño de poro. Así, la Ec. (2.53) se puede escribir como

$$\frac{\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}}{v_{max}^f} = \frac{2}{3} \left( \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N} \right)^2 \varepsilon_{\beta\omega} \quad (2.55)$$

Cabe señalar que, la Ec. (2.53) o la Ec. (2.55) se conocen como la velocidad de filtración, que bajo las suposiciones antes mencionadas es una constante.

### Inter-región fluido-medio poroso

La segunda zona dependiente de la microestructura del medio poroso es la inter-región fluido-medio poroso (*i.e.*, inter-región  $\eta - \omega$ ). Esta zona está limitada por las posiciones del centroide de la región de promediado dadas por

$$-r_0 \leq y \leq r_0 \quad (2.56)$$

En esta zona  $\mathcal{V}$  incluirá porciones de la región  $-\eta$  y de la región  $-\omega$ , de tal manera que, el volumen se puede descomponer en

$$V = V_{\eta}(y) + V_{\omega}(y) = L_x L_z 2r_0 \quad (2.57)$$

Sin embargo,  $V_{\omega}(y)$  puede estar compuesto por un número entero de poros ( $n_p(y)$ ) y por una fracción de poro ( $f(y)$ ) como se muestra en la Figura 2.7(b). El valor de  $n_p(y)$  se obtiene usando la función entero mayor como

$$n_p(y) = \left\lfloor - \left( \frac{y - r_0}{\ell} \right) \right\rfloor \quad (2.58)$$

mientras que  $f(y)$  está dada por

$$f(y) = - \left( \frac{y - r_0}{\ell} \right) - n_p \quad (2.59)$$

aunque la porción de  $f(y)$  que contribuye a la velocidad promedio se define como

$$f_{\beta}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq (1 - \varepsilon_{\beta\omega}) \\ f - (1 - \varepsilon_{\beta\omega}) & \text{si } f > (1 - \varepsilon_{\beta\omega}) \end{cases} \quad (2.60)$$

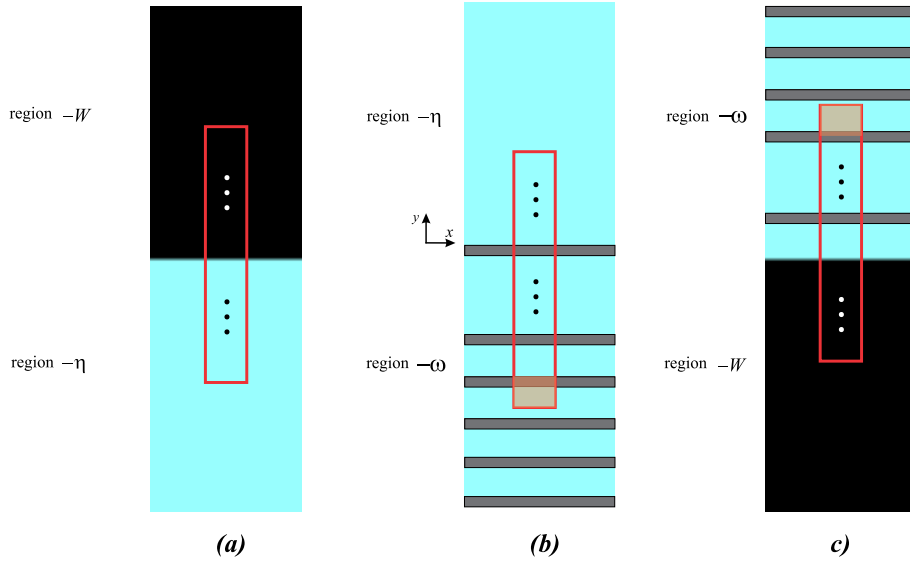


Figura 2.7: Región de promediado en la inter-región: a) pared superior-fluido, b) fluido-medio poroso y c) medio poroso-pared inferior.

Tomando en cuenta lo anterior, la Ec. (2.45) se puede escribir como

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega} = \frac{1}{2r_0} \left[ n_p \int_{y_p=-b}^{y_p=+b} v_\beta^p(y_p) dy_p + \int_{y_p=\alpha_p}^{y_p=+b} v_\beta^p(y_p) dy_p + \int_{\zeta=0}^{\zeta=y+r_0} v_\beta^f(\zeta) d\zeta \right] \quad (2.61)$$

o de otra forma

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega} = \frac{1}{2r_0} \left[ n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell \bar{v}_\beta^{p,\eta\omega} + (y+r_0) \bar{v}_\beta^{f,\eta\omega} \right] \quad (2.62)$$

La primera contribución de la ecuación anterior se obtiene de  $\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta = \langle v_\beta \rangle_\omega / \varepsilon_\beta \omega$ , donde  $\langle v_\beta \rangle_\omega$  está dada por la Ec. (2.55). Por su parte, la segunda contribución se puede obtener al usar la Ec. (2.39) en la siguiente definición

$$\bar{v}_\beta^{p,\eta\omega} = \frac{1}{f_\beta \ell} \int_{y_p=\alpha_p}^{y_p=b} v_\beta^p(y_p) dy_p, \quad \alpha_p = b - f_\beta \ell \quad (2.63)$$

lo cual conduce a

$$f_\beta \ell \bar{v}_\beta^{p,\eta\omega} = v_{\max}^f \frac{\varepsilon_\beta \omega \ell}{2} \left( \frac{\varepsilon_\beta \omega}{2N} \right)^2 \left[ \frac{2}{3} - \frac{\alpha_p}{b} \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_p}{b} \right)^2 \right) \right] \quad (2.64)$$

Finalmente, la tercera contribución de la Ec. (2.62) se puede derivar al reemplazar a la Ec. (2.39) en la siguiente expresión

$$\bar{v}_\beta^{f,\eta\omega} = \frac{1}{y+r_0} \int_{\zeta=0}^{\zeta=y+r_0} v_\beta^f(\zeta) d\zeta \quad (2.65)$$

para obtener

$$(y + r_0) \bar{v}_\beta^{f, \eta \omega} = v_{\text{máx}}^f \frac{(y + r_0)^2}{B} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{y}{B} + \frac{r_0}{B} \right) \right] \quad (2.66)$$

### Inter-región medio poroso-pared inferior

La última zona dependiente de la microestructura del medio poroso es la inter-región medio poroso-pared inferior (*inter-región*  $\eta - \omega$ ), la cual está circunscrita a las posiciones del centroide de la región de promediado expresadas como

$$-L_\omega - r_0 \leq y \leq -L_\omega + r_0 \quad (2.67)$$

En esta zona,  $\mathcal{V}$  estará compuesta por porciones de la región  $-\omega$  y de la pared inferior, por lo que el volumen se puede expresar como sigue

$$V = V_\omega(y) + V_W(y) = L_x L_z 2r_0 \quad (2.68)$$

De manera similar a la inter-región  $\eta - \omega$ , el volumen  $V_\omega(y)$  puede contener un número entero de poros ( $n_p(y)$ ) y una fracción de poro ( $f(y)$ ) como se muestra en la Figura 2.7(c). En este caso  $n_p(y)$  se puede obtener de

$$n_p(y) = \left\lfloor \frac{y + L_w + r_0}{\ell} \right\rfloor \quad (2.69)$$

y además  $f(y)$  está dada por

$$f(y) = \frac{y + L_w + r_0}{\ell} - n_p \quad (2.70)$$

Usando la expresión anterior se puede determinar que la porción de  $f(y)$  contribuye en la velocidad promedio está determinada por

$$f_\beta(y) = \begin{cases} f & \text{si } f < \varepsilon_{\beta\omega} \\ \varepsilon_{\beta\omega} & \text{si } f \geq \varepsilon_{\beta\omega} \end{cases} \quad (2.71)$$

Como consecuencia, la Ec. (2.45) se puede reescribir como

$$\langle v_\beta \rangle_{\omega W} = \frac{1}{2r_0} \left[ n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell \bar{v}_\beta^{p, \omega W} \right] \quad (2.72)$$

La primera contribución en la ecuación anterior se obtiene de  $\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta = \langle v_\beta \rangle_\omega / \varepsilon_{\beta\omega}$ , donde  $\langle v_\beta \rangle_\omega$  también está dada por la Ec. (2.55). Por otro lado, la segunda contribución se puede determinar al introducir la Ec. (2.39) en la siguiente definición

$$f_\beta \ell \bar{v}_\beta^{p, \omega W} = \frac{1}{f_\beta \ell} \int_{y_p = -b}^{y_p = f_\beta \ell - b} v_\beta^p(y_p) dy_p \quad (2.73)$$

para obtener

$$f_{\beta} \ell \bar{v}_{\beta}^{p,\omega w} = v_{\text{máx}}^f \left( \frac{\varepsilon_{\beta} \omega}{2N} \right)^2 \frac{(f_{\beta} \ell)^2}{3b} \left[ 3 - \frac{f_{\beta} \ell}{b} \right] \quad (2.74)$$

A diferencia de la inter-región  $\eta - \omega$ , no hay contribución de la región  $-\eta$ . Se debe notar que, la velocidad promedio es cero en  $y = -L_{\omega} - r_0$ , *i.e.*, cuando la región de promediado se localiza completamente dentro de la pared impermeable inferior. Esta es condición de frontera inferior que se utilizará para resolver la ecuación promedio del ODA.

#### 2.7.4. Observaciones de la simulación analítica directa (DAS)

En esta sección se obtuvo analíticamente el perfil de velocidad promedio, para el sistema fluido-medio poroso aquí estudiado, a partir del promediado del perfil de velocidad local. Como consecuencia, el perfil de velocidad promedio obtenido es un resultado exacto, ya que no se impuso alguna restricción de longitud de escala o suposición más allá a las del sistema original. A esta forma de obtener el perfil de velocidad promedio se le denominará, de aquí en adelante, como una simulación analítica directa (DAS por sus siglas en inglés, *Direct Analytical Simulation*). En este punto se debe señalar que, a pesar de que la configuración utilizada parece una simplificación exagerada, los modelos simples de medios porosos han sido ampliamente utilizados en la literatura (Eidsath et al., 1993; Larson y Higdon, 1989; Prat 1989, 1990, 1992; Min and Kim, 2005; entre muchos otros). Ciertamente se pueden utilizar configuraciones más complicadas del medio poroso para las cuales la velocidad local aún se pueda obtener analíticamente. Algunas de estas configuraciones se discuten en Ochoa-Tapia et al. (2017). A continuación, se presentan los perfiles de velocidad promedio descritos a partir de la DAS para un sistema fluido-medio poroso con  $L_{\eta} = L_{\omega} = 10^3 r_0$  y considerando diferentes tamaños de la región de promediado para dos valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso.

- Las Figuras 2.8 muestran los perfiles de velocidad promedio en la inter-región fluido-medio poroso. De estos perfiles, se puede apreciar que la velocidad promedio incrementa súbitamente de la velocidad de Darcy (*i.e.*, en  $y = -r_0$ ) a una velocidad asociada a la primera posición de la región homogénea de fluido (*i.e.*, en  $y = r_0$ ). Claramente, se observa una zona de transición suavizada entre ambos valores de la velocidad, cuya amplitud incrementa con el tamaño de la región de promediado. De acuerdo con Ochoa-Tapia et al. (2017), esta zona es consistente con los términos de corrección de Brinkman a la ley Darcy en el TDA y en el ODA.

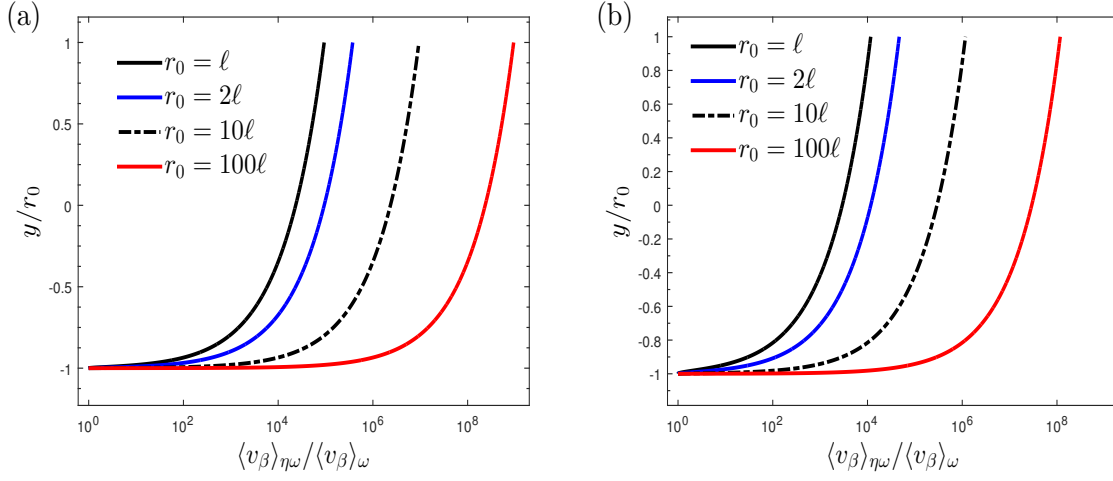


Figura 2.8: Perfiles de velocidad promedio en la inter-región medio poroso-fluido para (a)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$  y (b)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ .

- Análogamente, las Figuras 2.9 muestra los perfiles de velocidad promedio en la inter-región medio poroso-pared inferior. En este caso, el perfil de velocidad promedio presenta oscilaciones desde la localización de la pared inferior (*i.e.*,  $y = -L_\omega$ ) hasta alcanzar a la velocidad de Darcy (*i.e.*,  $y = -L_\omega + r_0$ ). Las amplitudes de las oscilaciones disminuyen cuando incrementa la porosidad de la región homogénea del medio poroso y el número de oscilaciones incrementa conforme crece el tamaño de la región de promediado, hasta comportarse como una línea recta para  $r_0 = 100\ell$ . Este hecho resalta la importancia del tamaño de la región de promediado para suavizar las no uniformidades del medio poroso. Para cumplir con esto,  $r_0$  debe ser mucho más grande que la longitud característica más grande de la escala de poro ( $\ell$ ) y a su vez mucho más pequeño que la longitud característica más pequeña asociada al sistema macroscópico ( $L_\lambda$ ).
- Por otro lado, las Ecs. (2.48) y (2.50) indican que la velocidad promedio adimensional en la inter-región fluido-pared superior y en la región homogénea del fluido son independientes de la porosidad y del tamaño de la región de promediado. Por su parte, la Ec. (2.55) indica que la velocidad promedio adimensional en la región homogénea del medio poroso es una constante que sólo depende de la porosidad.
- Siguiendo a Ochoa-Tapia et al. (2017) para determinar el tamaño apropiado de  $r_0$ , uno puede tomar como criterio la media de los perfiles de velocidad promedio para diferentes valores de

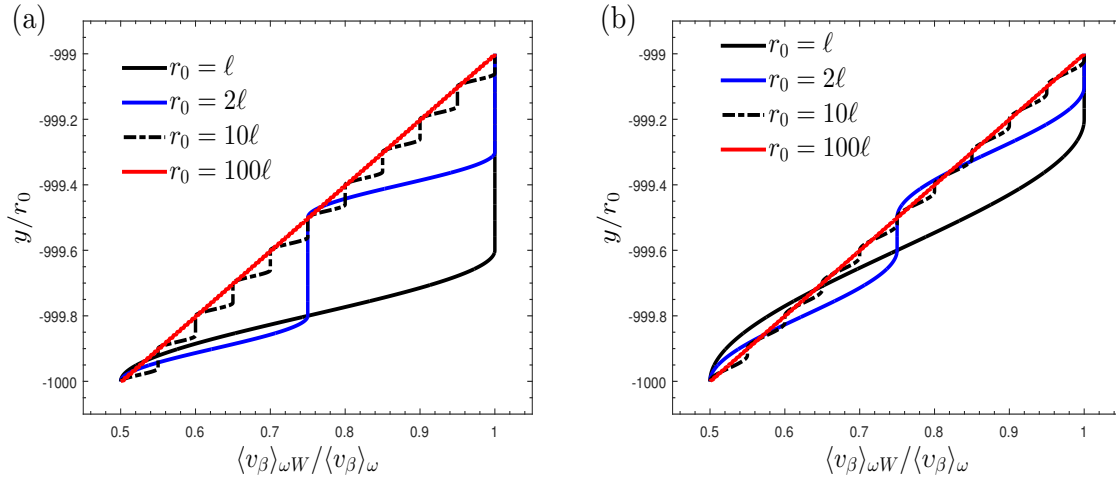


Figura 2.9: Perfiles de velocidad promedio en la inter-región medio poroso-pared inferior para (a)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$  y (b)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ .

la relación  $r_0/\ell$ . El valor adecuado de  $r_0$  será aquel donde la media de la velocidad promedio comience a comportarse como una constante. Con esto en mente, en las Figuras 2.10 se muestran las medias de la velocidad en la inter-región fluido-medio poroso y medio poroso-pared inferior como función de  $r_0/\ell$ , respectivamente. En ambos casos se encuentra que para proporcionar adecuadas cantidades promedio, con la configuración del medio poroso utilizada, el tamaño de  $r_0$  debe ser al menos  $20\ell$ . Sin embargo, debido a que en la Figura 2.9a el perfil de velocidad promedio aún presenta oscilaciones para  $r_0 = 20\ell$ , en este trabajo se utilizara a  $r_0 = 10^2\ell$ .

Como se mencionó anteriormente, la información de la DAS es un resultado exacto, a partir del cual se puede determinar de manera exacta a las variaciones espaciales de la permeabilidad para cerrar el ODA y determinar a los coeficientes de salto con las misma precisión. Esto se puede llevar a cabo al calcular a cada término de la definición de la permeabilidad dada por la Ec. (2.16) en cada zona del sistema fluido-medio poroso, tal como se mostrará en el siguiente capítulo.

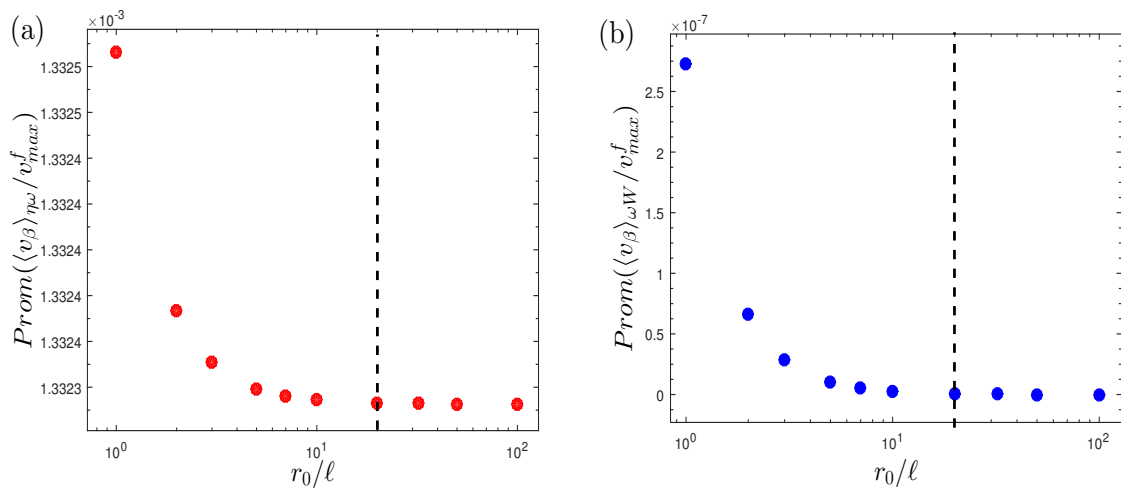


Figura 2.10: Tamaño de la región de promediado en las inter-regiones (a) fluido-medio poroso y (b) medio poroso-pared inferior.



## Capítulo 3

# Coeficientes de transporte efectivos

En este capítulo se determina la dependencia espacial de la componente tangencial de la permeabilidad y de la porosidad, los cuales están involucrados en el ODA y en las condiciones de salto del TDA presentados en el capítulo anterior. La permeabilidad se obtiene de dos maneras, utilizando la información de la DAS y mediante la solución del PCL simplificado, ambos también presentados en el capítulo anterior. Por su parte, la porosidad se obtiene al relacionar directamente el volumen del fluido contenido en la región de promediado con el volumen total del mismo. Para mantener la consistencia entre las predicciones, en todos los casos se considera la geometría del medio poroso que consiste en un arreglo de placas paralelas.

### 3.1. Permeabilidad basada en la simulación analítica directa (DAS)

En el capítulo anterior, se definió un término de Darcy con las variaciones espaciales de la componente tangencial de la permeabilidad, el cual está dado por

$$-f_{\beta}(y) = -\varepsilon_{\beta}(y)K_{\beta}^{-1}(y)\langle v_{\beta} \rangle^{\beta} = \frac{1}{V_{\beta}(y)} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(y)} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[ -\delta_{x_j} \mathbf{e}_j \left( p_{\beta} - \langle p_{\beta} \rangle^{\beta} \Big|_y \right) - \mu_{\beta} \left( \nabla v_{\beta} - \nabla \langle v_{\beta} \rangle^{\beta} \Big|_y \right) \right] dA \quad (3.1)$$

Cabe señalar que, a partir de esta expresión se puede determinar de manera exacta a la dependencia espacial de la permeabilidad. Para llevar a cabo a esto, es necesario determinar a los términos involucrados dentro de dicha expresión. Sin embargo, al considerar al medio poroso que consiste en un

arreglo de placas paralelas, la Ec. (3.1) se reduce a

$$-f_{\beta}(y) = -\varepsilon_{\beta}(y)K_{\beta}^{-1}(y)\langle v_{\beta} \rangle^{\beta} = \frac{1}{V_{\beta}(y)} \int_{A_{\beta\sigma}(y)} n_y \left( \frac{dv_{\beta}}{dy} - \frac{d\langle v_{\beta} \rangle^{\beta}}{dy} \right) dA \quad (3.2)$$

De esta manera, sólo queda determinar a la porosidad, el promedio intrínseco de la velocidad y a todo el término de integral superficial. El promedio intrínseco de la velocidad se obtendrá a partir de las expresiones del promedio superficial de la velocidad predicha a partir de la DAS junto con la ecuación de Dupuit-Forchheimer, por lo que es necesario determinar de antemano a la dependencia espacial de la porosidad. En ese sentido, la porosidad se puede obtener evaluando a la Ec. (2.7) en cada posición de la región de promediado. Para mantener la fluidez en la presentación de este trabajo, basta con mencionar que para el sistema fluido medio poroso aquí estudiado la dependencia espacial de la porosidad está dada por la siguiente expresión

$$\varepsilon_{\beta}(y) = \begin{cases} \frac{L_{\eta} + r_0 - y}{2r_0} & L_{\eta} - r_0 < y \leq L_{\eta} + r_0 \\ 1 & r_0 \leq y \leq L_{\eta} - r_0 \\ \frac{n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell + y + r_0}{2r_0} & -r_0 < y < r_0 \\ \varepsilon_{\beta\omega} & -L_{\omega} + r_0 \leq y \leq -r_0 \\ \frac{n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell}{2r_0} & -L_{\omega} - r_0 \leq y < -L_{\omega} + r_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

El desarrollo detallado de  $\varepsilon_{\beta}(y)$  se encuentra en el Apéndice D de este trabajo, pero se debe notar que, para expresar a  $\varepsilon_{\beta}(y)$  se utilizó la notación involucrada en la DAS del capítulo anterior. En las Figuras 3.1 se muestran las variaciones espaciales de  $\varepsilon_{\beta}(y)$  en las inter-regiones medio poroso-pared inferior y fluido-medio poroso para diferentes valores de la porosidad en la región homogénea del medio poroso. Donde, en general, se puede notar que  $\varepsilon_{\beta}(y)$  varía linealmente con la posición en ambas inter-regiones. Particularmente en la inter-región medio poroso-pared inferior,  $\varepsilon_{\beta}(y)$  crece del valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}/2$  en  $y = -L_{\omega}$  al valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$  en  $y = -L_{\omega} + r_0$ , mientras que en la inter-región fluido-medio poroso,  $\varepsilon_{\beta}(y)$  aumenta del valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$  en  $y = -r_0$  al valor de 1 en  $y = r_0$ . Adicionalmente, se encontró que en la inter-región fluido-pared superior el valor de  $\varepsilon_{\beta}(y)$  no dependen de la porosidad, aunque también varía

linealmente del valor de 1 en  $y = L_\eta - r_0$  al valor de 0.5 en  $y = L_\eta$ . Estas últimas variaciones no son presentadas. En los siguientes apartados se determina de manera exacta a las variaciones espaciales de la permeabilidad en cada zona del sistema fluido-medio poroso.

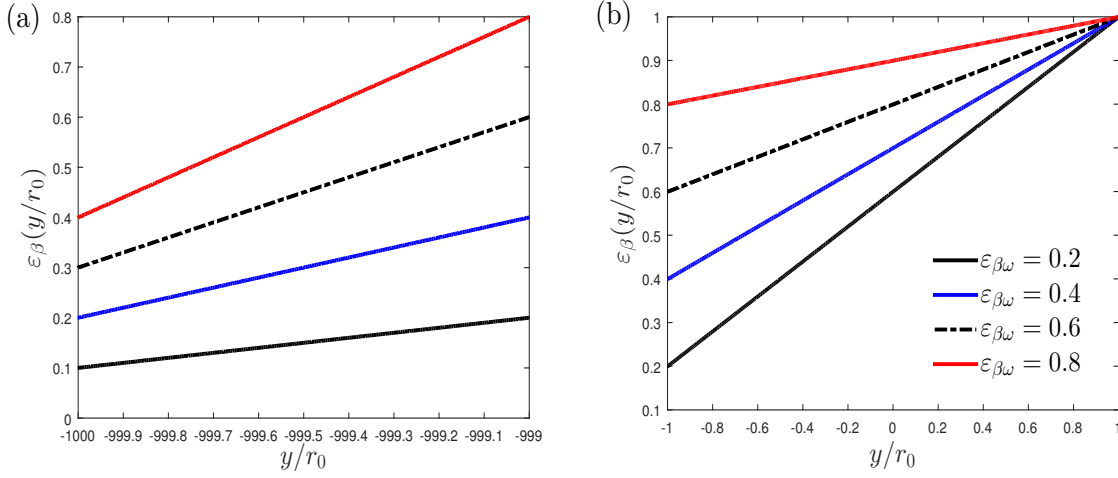


Figura 3.1: Variaciones espaciales de la porosidad en las inter-regiones (a) medio poroso-pared inferior y (b) fluido-medio poroso para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$  y con  $r_0 = 10^2 \ell$  y  $L_\eta = 10^3 r_0$

### 3.1.1. Inter-región fluido-pared superior

En la inter-región fluido-medio poroso, la Ec. (3.2) toma la siguiente forma

$$-\varepsilon_{\beta\eta W}(y)K_{\beta\eta W}^{-1}(y)\langle v_\beta \rangle_{\eta W}^\beta = \frac{1}{V_{\beta\eta W}(y)} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(y)} n_y \left( \frac{dv_\beta}{dy} - \frac{d\langle v_\beta \rangle_{\eta W}^\beta}{dy} \Big|_y \right) dA \quad (3.4)$$

donde  $\varepsilon_{\beta\eta\omega}(y)$  es la variación de la porosidad en esta zona de transición, la cual está dada por la Ec. (3.3). Aquí el promedio intrínseco de la velocidad se obtiene usando a la Ec. (2.48) en  $\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \langle v_\beta \rangle_{\eta\omega} / \varepsilon_{\beta\eta\omega}(y)$ . Por otro lado, la integral superficial se toma como la suma de las derivadas de las velocidades local y promedio evaluadas en las áreas interfaciales contenidas en la región de promediado. En la configuración del placas paralelas, todas las áreas interfaciales son iguales y se pueden expresar como

$$A_{\beta\sigma}|_{y_f=\pm B} = A_{\beta\sigma}|_{y_p=\pm b} = L_x L_z \quad (3.5)$$

Sin embargo, en esta zona de transición sólo hay un área interfacial contenida en la región de promediado como se muestra en la Figura 2.7(a), la cual se localiza en  $y_f = +B$ . Como consecuencia, la Ec.

(3.4) se puede escribir como

$$-\varepsilon_{\beta\eta W}(y)K_{\beta\eta W}^{-1}(y)\langle v_{\beta}\rangle_{\eta W}^{\beta} = \left( \frac{dv_{\beta}^f}{dy} \Big|_{y_f=+B} - \frac{d\langle v_{\beta}\rangle_{\eta W}^{\beta}}{dy} \Big|_y \right) \frac{1}{V_{\beta}(y)} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(y)} dA \quad (3.6)$$

donde se debe reconocer que

$$\frac{1}{V_{\beta}(y)} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(y)} dA = \frac{1}{B - \alpha_f}; \quad \alpha_f = y - B - r_0 \quad (3.7)$$

Por lo que la Ec. (3.6) se transforma en

$$-\varepsilon_{\beta\eta W}(y)K_{\beta\eta W}^{-1}(y)\langle v_{\beta}\rangle_{\eta W}^{\beta} = \frac{1}{B - \alpha_f} \left( \frac{dv_{\beta}^f}{dy} \Big|_{y_f=+B} - \frac{d\langle v_{\beta}\rangle_{\eta W}^{\beta}}{dy} \Big|_y \right) \quad (3.8)$$

donde la derivada de la velocidad local en la región de fluido está dada por

$$\frac{dv_{\beta}^f}{dy_f} \Big|_{y_f=+B} = -v_{\text{máx}}^f \frac{2}{B} \quad (3.9)$$

mientras que la derivada del promedio intrínseco de la velocidad se puede encontrar en el Apéndice ???. La Ec. (3.8) describe de manera exacta a las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región fluido-pared superior, que está acotada por  $L_{\eta} - r_0 < y \leq L_{\eta} + r_0$ .

### 3.1.2. Inter-región fluido-medio poroso

Enfocando ahora la atención a la inter-región fluido-medio poroso, la Ec. (3.2) toma la siguiente forma

$$-\varepsilon_{\beta\eta\omega}(y)K_{\beta\eta\omega}^{-1}(y)\langle v_{\beta}\rangle_{\eta\omega}^{\beta} = \frac{1}{V_{\beta\eta\omega}(y)} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(y)} n_y \left( \frac{dv_{\beta}}{dy} - \frac{d\langle v_{\beta}\rangle_{\eta\omega}^{\beta}}{dy} \Big|_y \right) dA \quad (3.10)$$

donde  $\varepsilon_{\beta\eta\omega}(y)$  es la variación de la porosidad asociada a esta zona, la cual está dada por la Ec. (3.3). El promedio intrínseco de la velocidad se obtiene introduciendo a la Ec. (2.62) en  $\langle v_{\beta}\rangle_{\eta\omega}^{\beta} = \langle v_{\beta}\rangle_{\eta\omega} / \varepsilon_{\beta\eta\omega}(y)$ . Por otro lado, el número total de áreas interfaciales contenidas en la región de promediado está compuesto por las áreas en el número entero de poros, en la fracción de poro y por aquella en donde la región- $\eta$  se une con la región- $\omega$ . De esta forma, la Ec. (3.10) puede escribirse como

$$-\varepsilon_{\beta\eta\omega}(y)K_{\beta\eta\omega}^{-1}(y)\langle v_{\beta}\rangle_{\eta\omega}^{\beta} = \frac{1}{n_p\ell_{\beta} + f_{\beta}\ell + y + r_0} \left( (2n_p + \lambda_{\eta\omega}) \frac{dv_{\beta}^p}{dy_p} \Big|_{y_p=+b} + \frac{dv_{\beta}^f}{dy} \Big|_{y_f=+B} - (\lambda_{\eta\omega} - 1) \frac{d\langle v_{\beta}\rangle_{\eta\omega}^{\beta}}{dy} \Big|_y \right) \quad (3.11)$$

donde la derivada de la velocidad local en la región de fluido está dada por la Ec. (3.9), mientras que la derivada de la velocidad local en cada poro de la región de medio poroso es

$$\left. \frac{dv_{\beta}^p}{dy_p} \right|_{y_p=\pm b} = -v_{\text{máx}}^f \frac{2}{b} \left( \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N} \right)^2 \quad (3.12)$$

La derivada del promedio intrínseco de la velocidad se puede encontrar en el Apéndice ???. Además, en la Ec. (3.11)  $\lambda_{\eta\omega}$  es una función indicadora del área interfacial asociada a la fracción de poro, la cual se define como

$$\lambda_{\eta\omega} = \begin{cases} 0 & \text{si } f < (1 - \varepsilon_{\beta\omega}) \\ 1 & \text{si } f \geq (1 - \varepsilon_{\beta\omega}) \end{cases} \quad (3.13)$$

Uno debe recordar que esta zona de transición está restringida por  $-r_0 < y < r_0$ .

### 3.1.3. Región homogénea del medio poroso

En la región homogénea de medio poroso, la Ec. 3.2 toma la siguiente forma

$$-\varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} = \frac{1}{V_{\beta\omega}} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} n_y \left( \frac{dv_{\beta}}{dy_p} - \frac{d\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta}}{dy} \right) dA \quad (3.14)$$

Sin embargo, la derivada de la velocidad promedio es igual a cero, por lo que la ecuación anterior se reduce a

$$-\varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} = \frac{1}{V_{\beta\omega}} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} n_y \left( \frac{dv_{\beta}}{dy} \right) dA \quad (3.15)$$

Por otra parte, se debe recordar que en esta región el perfil de velocidad local se repite en cada poro y que el número de poros contenidos en la región de promediado es un número entero, por lo que con una sola celda unitaria se puede determinar a la permeabilidad en esta región. Cabe señalar que, cada poro contiene dos áreas interfaciales, las cuales se localizan en  $y_p = \pm b$ . Como consecuencia, la Ec. (3.15) toma la siguiente forma

$$-\varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} = \frac{1}{\ell_{\beta}} \left( 2 \left. \frac{dv_{\beta}^p}{dy_p} \right|_{y_p=\pm b} \right) \quad (3.16)$$

Donde al reemplazar a la derivada de la velocidad local de un poro dada por la Ec. (3.12) y al promedio intrínseco de la velocidad obtenida con ayuda de la Ec. (2.55), se obtiene que la permeabilidad en el seno del medio poroso es

$$K_{\beta\omega} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}^3 \ell^2}{12} \quad (3.17)$$

Esta expresión indica que la permeabilidad en la región homogénea del medio poroso es una constante para un valor de la porosidad de la región homogénea del medio poroso y un tamaño de celda unitaria.

Este resultado está acotado por  $-L_\omega + r_0 \leq y \leq -r_0$

### 3.1.4. Inter-región medio poroso pared inferior

Finalmente, en la inter-región medio poroso-pared inferior, la Ec. (3.2) se puede escribir como

$$-\varepsilon_{\beta\omega W}(y)K_{\beta\omega W}^{-1}(y)\langle v_\beta \rangle_{\omega W}^\beta = \frac{1}{V_{\beta\omega W}(y)} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(y)} n_y \left( \frac{dv_\beta}{dy} - \frac{d\langle v_\beta \rangle_{\omega W}^\beta}{dy} \Big|_y \right) dA \quad (3.18)$$

siendo  $\varepsilon_{\beta\omega W}(y)$  la porosidad asociada a esta zona de transición. Análogamente, el promedio intrínseco de la velocidad se puede obtener al introducir a la Ec. (2.72) en  $\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \langle v_\beta \rangle_{\eta\omega} / \varepsilon_{\beta\eta\omega}(y)$ . En este caso, el número total de áreas interfaciales estará dada por las áreas contenidas en el número entero de poros y en la fracción de poro, lo cual conduce a escribir a la Ec. (3.18) como

$$-\varepsilon_{\beta\omega W}(y)K_{\beta\omega W}^{-1}(y)\langle v_\beta \rangle_{\omega W}^\beta = \frac{1}{n_p \ell_\beta + f_\beta \ell} \left( (2n_p + \lambda_{\omega W} + 1) \frac{dv_\beta^p}{dy_p} \Big|_{y_p=+b} - (\lambda_{\omega W} + 1) \frac{d\langle v_\beta \rangle_{\omega W}^\beta}{dy} \Big|_y \right) \quad (3.19)$$

donde  $\lambda_{\omega W}$  es una función indicadora del área interfacial asociada a la fracción de poro contenida en la parte superior de la región de promediado, la cual se define como

$$\lambda_{\omega W} = \begin{cases} 0 & \text{si } f < \varepsilon_{\beta\omega} \\ 1 & \text{si } f \geq \varepsilon_{\beta\omega} \end{cases} \quad (3.20)$$

La derivada de la velocidad local está dada por las Ec. (3.12), mientras que la derivada del promedio intrínseco de la velocidad se puede encontrar en el Apéndice ???. El dominio de validez de la Ec. (3.19) está restringida por  $-L_\omega - r_0 \leq y < -L_\omega + r_0$ .

### 3.1.5. Observaciones sobre la permeabilidad basada en la simulación analítica directa

Con base en lo anterior, la dependencia espacial del  $K_\beta(y)$  en cada zona del sistema fluido-medio poroso se puede obtener a partir de las Ecs. (3.8), (3.11), (3.17) y (3.19). Conviene enfatizar que, las predicciones que se obtendrán de estas ecuaciones son exactas, al menos para la configuración del medio poroso utilizada. Dichas ecuaciones se resumen en la siguiente expresión

$$K_{\beta}^{-1}(y)\langle v_{\beta} \rangle = \begin{cases} \frac{-1}{B - \alpha_f} \left( \varphi^f - \frac{d\langle v_{\beta} \rangle_{\eta W}^{\beta}}{dy} \Big|_y \right) & L_{\eta} - r_0 < y \leq L_{\eta} + r_0 \\ 0 & r_0 \leq y \leq L_{\eta} - r_0 \\ \frac{-1}{\Phi_{\eta\omega}} \left( (2n_p + \lambda_{\eta\omega}) \varphi^p + \varphi^f - (\lambda_{\eta\omega} - 1) \frac{d\langle v_{\beta} \rangle_{\eta\omega}^{\beta}}{dy} \Big|_y \right) & -r_0 \leq y \leq r_0 \\ \frac{-2}{\ell_{\beta}} \varphi^p & -L_{\omega} + r_0 \leq y < -r_0 \\ \frac{-1}{\Phi_{\omega W}} \left( (2n_p + \lambda_{\omega W} + 1) \varphi^p - (\lambda_{\omega W} + 1) \frac{d\langle v_{\beta} \rangle_{\omega W}^{\beta}}{dy} \right) & -L_{\omega} - r_0 \leq y < -L_{\omega} + r_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

donde, por simplicidad, se definieron

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta\omega}(y) &= n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell + y + r_0; & \Phi_{\omega W}(y) &= n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell; \\ \varphi^p &= \frac{dv_{\beta}^p}{dy} \Big|_{y_p=+b}; & \varphi^f &= \frac{dv_{\beta}^f}{dy} \Big|_{y_f=+B} \end{aligned}$$

En las Figuras 3.2 se muestran las predicciones de la dependencia espacial del inverso de la permeabilidad normalizada en las inter-regiones medio poroso-pared inferior y fluido-medio poroso tomando a  $L_{\eta} = L_{\omega} = 10^3 r_0$ ,  $r_0 = 10^2 \ell$  y diferentes valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso. En la primera zona de transición, el inverso de la permeabilidad normalizada decrece suavemente en todos los casos del valor de 2 en  $y = -L_{\omega}$  hasta 1 en  $y = -L_{\omega} + r_0$ , ver Figura 3.2(a). Esto indica que hay mayores resistencia al flujo cerca de la pared inferior con respecto a las que se encuentran en la región homogénea de medio poroso. Nótese que estas resistencias varían de la misma forma para cualquier valor de la porosidad. En la segunda zona de transición, el inverso de la permeabilidad normalizada decrece rápidamente del valor de 1 en  $y = -r_0$  hasta un valor muy cercano a 0 en  $y = r_0$ , ver Figura 3.2(b). Esto indica que las resistencias al flujo disminuyen conforme la región de promediado pasa de la región homogénea del medio poroso a la región homogénea de fluido, los cual se debe a que el volumen del fluido contenido en la región de promediado incrementa. Esta última característica también la comparte la permeabilidad en el seno del medio poroso. Por otra parte, las variaciones espaciales del inverso de la permeabilidad normalizada en la inter-región fluido-pared superior no son afectadas por el tipo de medio poroso y su porosidad asociada, lo cual se debe a que hay una separación de longitudes características. Estas variaciones del inverso de la permeabilidad normalizada no son presentadas.

Es importante mencionar que, a pesar de que las variaciones espaciales tanto de  $\varepsilon_{\beta}(y)$  como de

$K_\beta(y)$  se obtuvieron partir de considerar una geometría simple del medio poroso, pueden proporcionar una perspectiva del porqué las ecuaciones del TDA no son válidas dentro de las inter-regiones, *i.e.*, debido a los cambios rápidos que sufre  $\varepsilon_\beta(y)$  y  $K_\beta(y)$  dentro de dichas zonas.

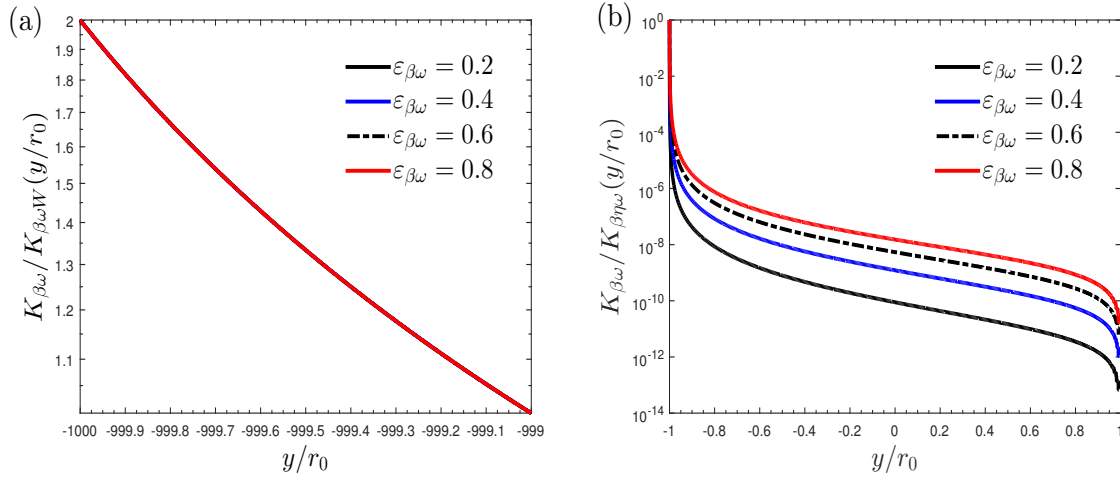


Figura 3.2: Variaciones espaciales de la permeabilidad en las inter-regiones (a) medio poroso-pared inferior y (b) medio poroso-fluido para  $r_0 = 10^2\ell$ ,  $L_\eta = 10^3r_0$  y diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

### 3.2. Permeabilidad basada en el problema de cerradura local (PCL)

Para cumplir con el principal objetivo de este trabajo, en esta sección se determina la dependencia espacial de la permeabilidad tal y como lo indican Valdés-Parada et al. (2007a), *i.e.*, mediante la solución del PCL dado por las Ecs. (2.35). En este caso, el PCL debe resolverse en una celda unitaria representativa del sistema fluido-medio poroso, la cual debe ser lo suficientemente grande de tal modo que incluya a la zona donde los coeficientes efectivos sufren cambios rápidos de una región homogénea a otra, *i.e.*, la inter-región. Nótese que la celda unitaria de la inter-región fluido-medio poroso puede ser tan compleja como la que se muestra en la Figura 2.4. No obstante, para ser consistentes con la forma en que se obtuvo la dependencia espacial de la fracción volumétrica y de la permeabilidad en la sección anterior, se considera una celda unitaria como la que se muestra en la Figura 3.3. Con esto en mente, la componente tangencial de la permeabilidad que se puede extraer de la Ec. (2.36) está dada por

$$K_\beta^{PCL}(y) = \langle D_\beta \rangle = \int_{y-r_0}^{y+r_0} D_\beta(\xi) d\xi \quad (3.22)$$



donde  $K_{\beta}^{PCL} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}_{\beta} \cdot \mathbf{e}_x$  y  $D_{\beta} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{D}_{\beta} \cdot \mathbf{e}_x$ . A continuación el PCL dado por las Ecs. (2.35) se reduce a

$$0 = \frac{d^2 D_{\beta}}{dy^2} + 1 \quad \text{en} \quad \mathcal{V}_{\beta} \quad (3.23a)$$

$$C.F.1: \quad D_{\beta} = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (3.23b)$$

$$C.F.2: \quad \text{en} \quad y = h_s \quad \frac{dD_{\beta}}{dy} = 0 \quad (3.23c)$$

$$C.F.3: \quad \text{en} \quad y = -h_s \quad \frac{dD_{\beta}}{dy} = 0 \quad (3.23d)$$

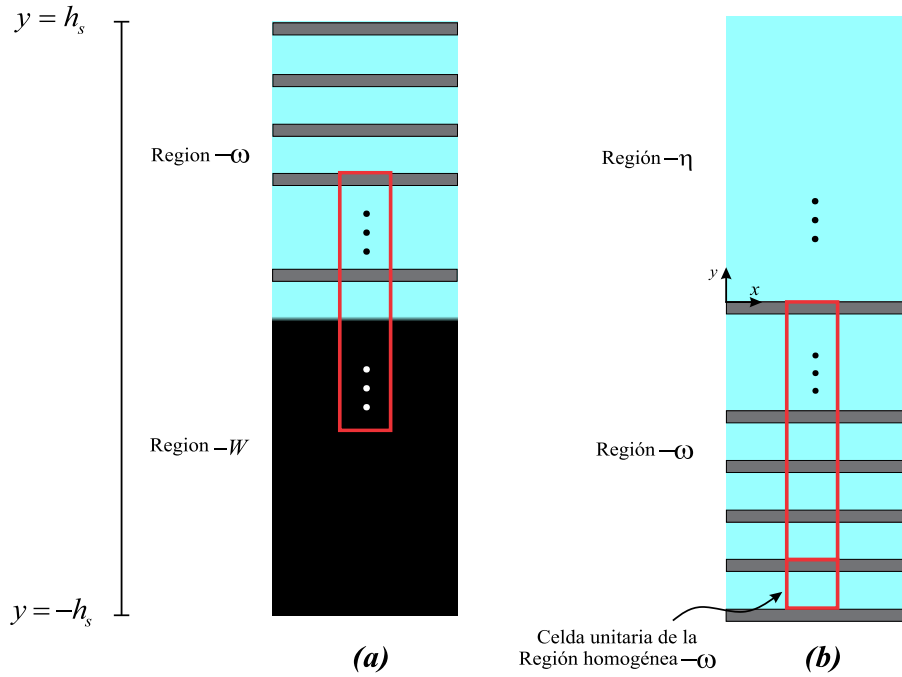


Figura 3.3: Celda unitaria representativa del sistema fluido-medio poroso donde el medio poroso está compuesto por un arreglo de placas paralelas.

Una gran ventaja de dicha configuración del medio poroso utilizada para la solución del PCL es que, el campo de la variable de cerradura local en la región de fluido y en cada poro de la región de medio poroso no está conectado, lo cual es similar al campo de la velocidad local descrito en la DAS. Al resolver el PCL dado por las ecuaciones de arriba, se tiene que el campo de  $D_{\beta}$  en la región de fluido está dada por

$$D_{\beta}^f(y) = -\frac{y^2}{2} + h_s y; \quad 0 \leq y \leq h_s \quad (3.24)$$

mientras que en cada poro es

$$D_{\beta}^p(y_p) = \frac{b^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y_p}{b} \right)^2 \right]; \quad -b \leq y_p \leq +b \quad (3.25)$$

Una vez hecho esto, se debe aplicar la Ec. (3.22) en cada posición de la región de promediado para obtener la dependencia espacial de la permeabilidad. Esto se llevará a cabo en los siguientes apastados. Conviene recordar que, en la región homogénea del fluido el inverso de la permeabilidad es igual a cero.

### 3.2.1. Región homogénea del medio poroso

En la región homogénea del medio poroso, el promedio superficial del campo de la variable de cerradura  $D_{\beta}$  se puede escribir como

$$\langle D_{\beta} \rangle_{\omega} = \frac{1}{n_0 \ell} \sum_{i=1}^{i=n_0} \int_{y_p=-b}^{y_p=+b} D_{\beta}^p(y_p) dy_p \quad (3.26)$$

Donde al reemplazar a la Ec. (3.25) y efectuar la integral conduce

$$\langle D_{\beta} \rangle_{\omega} = \frac{\varepsilon_{\beta} \omega}{3} \left( \frac{\varepsilon_{\beta} \omega \ell}{2} \right)^2 \quad (3.27)$$

Cabe señalar que aquí se ha tomado en cuenta que sólo es necesario utilizar a una celda unitaria para determinar a la permeabilidad en la región homogénea del medio poroso. Por lo tanto, la permeabilidad en esta región a partir del PCL está dada por

$$K_{\beta\omega}^{PCL} = \frac{\varepsilon_{\beta}^3 \omega \ell^2}{12} \quad (3.28)$$

Nótese que esta ecuación es idéntica a la Ec. (3.17), la cual fue obtenida mediante la DAS. Esto sugiere que el PCL es una buena alternativa para determinar la permeabilidad en el seno del medio poroso.

### 3.2.2. Inter-región fluido-medio poroso

En la inter-región fluido-medio poroso, la Ec. (3.22) se puede escribir como sigue

$$K_{\beta}^{PCL}(y) = \frac{1}{2r_0} \left[ n_p \ell_{\beta} \langle D_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} + f_{\beta} \ell \bar{D}_{\beta}^{p,\eta\omega} + (y + r_0) \bar{D}_{\beta}^{f,\eta\omega} \right] \quad (3.29)$$

Se debe notar que esta expresión es similar a la Ec. (2.62), ya que los términos dentro de los corchetes son las contribuciones del campo de la variable de cerradura debido a: 1) el número de celdas unitarias enteras, 2) la fracción de poro y 3) la porción de la región homogénea— $\eta$ . Todas ellas contenidas en la región de promediado. La primera contribución está dada por  $\langle D_\beta \rangle_\omega^\beta = \langle D_\beta \rangle_\omega / \varepsilon_{\beta\omega}$ , donde  $\langle D_\beta \rangle_\omega$  se obtiene de la Ec. (3.27). La segunda contribución se puede obtener usando a la Ec. (3.25) en la siguiente definición

$$f_\beta \ell \bar{D}_\beta^{p,\eta\omega} = \int_{y_p=\alpha_p}^{y_p=b} D_\beta^p(y_p) dy_p; \quad \alpha_p = b - f_\beta(y)\ell \quad (3.30)$$

para obtener

$$f_\beta \ell \bar{D}_\beta^{p,\eta\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{\beta\omega} \ell}{2} \right)^3 \left[ \frac{2}{3} - \frac{\alpha_p}{b} + \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_p}{b} \right)^3 \right] \quad (3.31)$$

Por último, la tercera contribución se puede derivar al introducir la Ec. (3.24) en

$$(y+r_0) \bar{D}_\beta^{f,\eta\omega} = \int_{\zeta=0}^{\zeta=y+r_0} D_\beta^f(\zeta) d\zeta \quad (3.32)$$

la cual conduce a

$$(y+r_0) \bar{D}_\beta^{f,\eta\omega} = (y+r_0) \left[ \frac{h_s}{2} - \frac{1}{6} (y+r_0)^2 \right] \quad (3.33)$$

### 3.2.3. Inter-región medio poroso-pared inferior

Finalmente, en la inter-región medio poroso-pared inferior, la Ec. (3.22) se puede escribir como sigue

$$K_{\beta\omega W}^{PCL}(y) = \frac{1}{2r_0} \left[ n_p \ell_\beta \langle D_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell \bar{D}_\beta^{p,\omega W} \right] \quad (3.34)$$

Este resultado es similar al obtenido en la inter-región fluid-medio poroso, con la excepción de que no hay contribución de la región de fluido. El primer término dentro de los corchetes está dada por  $\langle D_\beta \rangle_\omega^\beta = \langle D_\beta \rangle_\omega / \varepsilon_{\beta\omega}$ , mientras que la segunda contribución se puede obtener al introducir la Ec. (3.25) en la siguiente expresión

$$\bar{D}_\beta^{p,\omega W} = \frac{1}{f_\beta \ell} \int_{y_p=-b}^{y_p=f_\beta \ell - b} D_\beta^p(y_p) dy_p \quad (3.35)$$

para obtener

$$f_\beta \ell \bar{D}_\beta^{p,\omega W} = (f_\beta \ell)^2 \left[ \frac{b}{2} - \frac{f_\beta \ell}{6} \right] \quad (3.36)$$

$y/r_0$	$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$			$\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$		
	$K_{\beta}^{DAS}(y/r_0)$	$K_{\beta}^{PCL}(y/r_0)$	% Error	$K_{\beta}^{DAS}(y/r_0)$	$K_{\beta}^{PCL}(y/r_0)$	% Error
-1	$5.33 \times 10^{-7}$	$5.33 \times 10^{-7}$	0	$4.27 \times 10^{-6}$	$4.27 \times 10^{-6}$	0
-0.8	$9.19 \times 10^{-2}$	$1.93 \times 10^{-2}$	78.95	$1.64 \times 10^{-2}$	$1.93 \times 10^{-2}$	18.26
-0.6	$4.15 \times 10^{-2}$	$7.47 \times 10^{-2}$	79.76	$6.70 \times 10^{-2}$	$7.47 \times 10^{-2}$	11.43
-0.4	$1.04 \times 10^{-1}$	$1.62 \times 10^{-1}$	55.40	$1.54 \times 10^{-1}$	$1.62 \times 10^{-1}$	4.92
-0.2	$2.04 \times 10^{-1}$	$2.77 \times 10^{-1}$	35.61	$2.81 \times 10^{-1}$	$2.77 \times 10^{-1}$	1.27
0	$3.49 \times 10^{-1}$	$4.17 \times 10^{-1}$	19.22	$4.49 \times 10^{-1}$	$4.17 \times 10^{-1}$	7.19
0.2	$5.46 \times 10^{-1}$	$5.76 \times 10^{-1}$	5.41	$6.61 \times 10^{-1}$	$5.76 \times 10^{-1}$	12.86
0.4	$8.02 \times 10^{-1}$	$7.51 \times 10^{-1}$	6.37	$9.19 \times 10^{-1}$	$7.51 \times 10^{-1}$	18.28
0.6	1.12	$9.39 \times 10^{-1}$	16.55	1.23	$9.39 \times 10^{-1}$	23.48
0.8	1.52	1.13	25.43	1.59	1.13	28.46
1	2	1.33	33.24	2	1.33	33.24

Tabla 3.1: Comparación de las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso para  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.2$  y  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ .

### 3.2.4. Observaciones sobre la permeabilidad basada en el problema de cerradura local

En síntesis, la dependencia espacial de la permeabilidad en todo el sistema fluido-medio poroso, obtenida mediante la solución del PCL simplificado está dada por la siguiente expresión

$$K_{\beta}^{PCL}(y) = \begin{cases} 0 & r_0 \leq y \leq L_{\eta} - r_0 \\ \frac{1}{2r_0} \left[ n_p \ell_{\beta} \langle D_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} + f_{\beta} \ell \bar{D}_{\beta}^{p,\eta\omega} + (y+r_0) \bar{D}_{\beta}^{f,\eta\omega} \right] & -r_0 < y < r_0 \\ \frac{\varepsilon_{\beta\omega}^3 \ell^2}{12} & -L_{\omega} + r_0 \leq y \leq -r_0 \\ \frac{1}{2r_0} \left[ n_p \ell_{\beta} \langle D_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} + f_{\beta} \ell \bar{D}_{\beta}^{p,\omega W} \right] & -L_{\omega} - r_0 \leq y < -L_{\omega} + r_0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Con ayuda de esta expresión, en las Figuras 3.4 se muestran los cambios espaciales del inverso de la permeabilidad normalizada en las inter-regiones medio poroso-pared inferior y fluido-medio poroso para cuatro valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso. Asimismo, en estas figuras se esboza la dependencia espacial de mismo coeficiente, pero obtenida mediante la DAS. Esto con el objetivo de conseguir una perspectiva del alcance del PCL simplificado para predecir los cambios espaciales de la permeabilidad. En la inter-región medio poroso-pared inferior, mostrada en

la Figura 3.4(a), es claro que ambas predicciones son idénticas para cualquier valor de la porosidad. Esto sugiere que el PCL simplificado puede ser eficaz para determinar la dependencia espacial de la permeabilidad en esta zona de transición, aunque originalmente el PCL fue desarrollado para la inter-región fluido-medio poroso. Por su parte, en la inter-región fluido-medio poroso, mostrada en la Figura 3.4(b), se observan diferencias entre ambas predicciones. Estas diferencias disminuyen cuando incrementa la porosidad de la región homogénea del medio poroso y cuando la región de promediado se desplazada de esta misma región a la región homogénea de fluido.

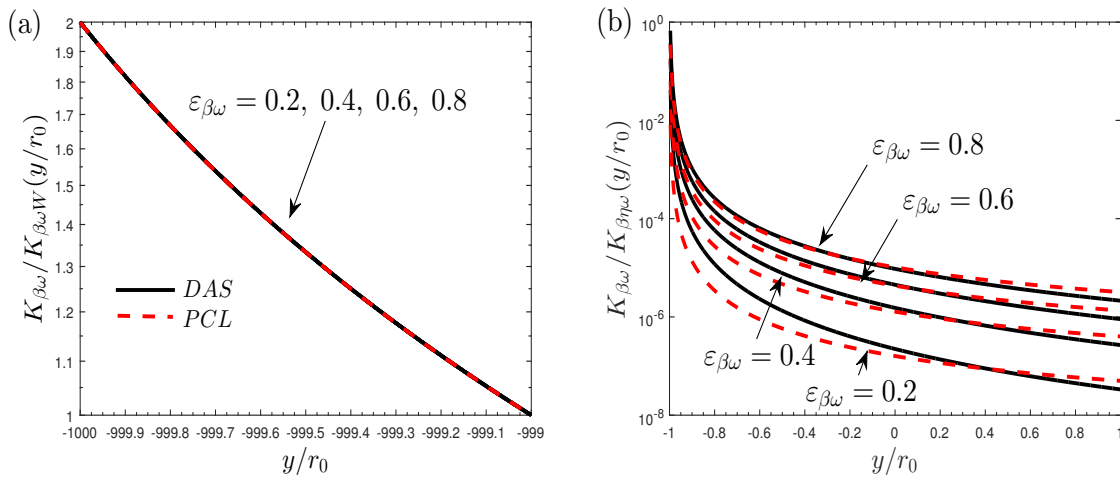


Figura 3.4: Dependencia espacial de la permeabilidad en las inter-regiones (a) medio poroso-pared inferior y (b) medio poroso-fluido para  $r_0 = 10^2 \ell$ ,  $L_\eta = L_\omega = 10^3 r_0$  y diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

Con el fin de tener una mejor idea de la magnitud de las diferencias entre ambas predicciones de la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso, se propone calcular el porcentaje de error relativo de acuerdo a

$$\% \text{ Error} = 100 \% \times \frac{K_\beta^{DAS}(y) - K_\beta^{PCL}(y)}{K_\beta^{DAS}(y)} \quad (3.38)$$

En la Tabla 3.1 se presentan los valores de estos porcentajes para  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$  y  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ . Nótese que, para  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$  el porcentaje cambia del 78% en  $y/r_0 = -0.8$  hasta un valor del 33% en  $y/r_0 = 1$ , mientras que para  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$  el porcentaje cambia del 18% en  $y/r_0 = -0.8$  hasta un valor del 33% en  $y/r_0 = 1$ . Esto confirma que las diferencias entre ambas predicciones disminuyen cuando incrementa la porosidad de la región homogénea del medio poroso. Ciertamente las diferencias entre ambas predicciones son considerables, pero se debe notar que ambas predicciones logran conservar el mismo orden de magnitud, lo cual puede indicar que los errores inducidos en las predicciones de los

perfiles de velocidad obtenidas ya sea mediante el ODA o el TDA pueden mínimos con respecto al obtenido mediante a la DAS. En el siguiente capítulo se evaluarán los modelos desarrollados hasta este punto, con el fin de analizar los efectos que tiene sobre los perfiles de velocidad predichos por el ODA y el TDA, el hecho de utilizar un PCL para determinar la dependencia espacial de la permeabilidad.

## Capítulo 4

# Discusión de resultados

En este capítulo se evalúan los efectos que tiene el hecho de utilizar a un PCL simplificado para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad. Esto se lleva a cabo comparando a los perfiles de velocidad que resultan de resolver el ODA y el TDA con el obtenido mediante la DAS. Las soluciones del ODA y del TDA primero se efectúan tomando en cuenta a las variaciones espaciales de la permeabilidad obtenidas con la información de la DAS y posteriormente con aquellas que fueron obtenidas mediante la solución del PCL simplificado. Además, se debe mencionar que en ambos casos se utilizan las mismas expresiones de las variaciones espaciales de la porosidad. Cabe recordar que, en el TDA las variaciones espaciales de la permeabilidad y de la porosidad se utilizan en la solución de los problemas de cerradura macroscópicos y con ello determinar a los coeficientes de salto.

### 4.1. Solución del modelo de un sólo dominio (ODA)

Como primer paso hasta el análisis de los efectos que tiene sobre el ODA el hecho de utilizar a un PCL simplificado, se propone evaluar la validez de la igualdad expresada por la Ec. (2.10). Para este fin, es necesario resolver el ODA con las variaciones espaciales del término  $f_\beta(y) = \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x$  y con el término de Darcy que considera a las variaciones espaciales de  $K_\beta^{DAS}(y)$ . Ambas dependencias espaciales están dadas por la Ec. (3.21), la cual se obtuvo con la información de la DAS, por lo que las predicciones son exactas. Con esto en mente, la ecuación promedio del ODA para el sistema bajo consideración puede escribirse como sigue

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy^2} + \varepsilon_\beta^{-1}(y) \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy} + \varepsilon_\beta^{-1}(y) \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} \langle v_\beta \rangle^\beta - \eta_\beta(y) + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad (4.1)$$

donde se introdujo el término  $\eta_\beta(y)$ , el cual para cada caso se transforma como sigue

$$\eta_\beta(y) = \begin{cases} f_\beta(y) & \text{Caso 1} \\ \varepsilon_\beta(y)K_\beta^{-1}(y)\langle v_\beta \rangle^\beta & \text{Caso 2} \end{cases} \quad (4.2)$$

Con el fin de completar el ODA, es preciso imponer condiciones de frontera en los límites superior e inferior que restrinjan el dominio de validez de la Ec. (4.1). Aquí, uno puede sugerir condiciones de frontera macroscópicas de no deslizamiento en las posiciones  $y = -L_\omega$  y  $y = L_\eta$ , debido a que estas localizan a las paredes impermeables del sistema físico. Sin embargo, la velocidad promedio no necesariamente es cero en dichas posiciones. Esto sólo es cierto si  $r_0 \ll L_\eta$ , lo cual puede demostrarse usando la Ec. (2.48). Para superar a esta dificultad y al mismo tiempo conservar generalidad, uno debe recordar que la velocidad promedio es cero únicamente cuando el volumen de la región de promediado no contiene a la fase  $-\beta$ , lo cual se satisface cuando las posiciones del centroide de la región de promediado se localizan por lo menos en  $y = L_\eta + r_0$  y  $y = -L_\omega - r_0$ . De esta manera, las condiciones de frontera que completan el ODA están dadas por

$$\langle v_\beta \rangle^\beta = 0 \quad \text{en} \quad y = L_\eta + r_0 \quad (4.3a)$$

$$\langle v_\beta \rangle^\beta = 0 \quad \text{en} \quad y = -L_\omega - r_0 \quad (4.3b)$$

Ciertamente estas condiciones de frontera están localizadas en los límites inferior y superior de las inter-regiones medio poroso-pared inferior y fluido-pared superior, respectivamente. No obstante, la presentación de los resultados se acotará desde la localización de la pared inferior hasta la pared superior. Para asegurar que el sistema ilustrado en la Figura 2.1 satisface la separación de longitudes características dada por  $\ell \ll r_0 \ll L_\lambda$ , en todos los casos se fijó a  $L_\eta = L_\omega = 10^3 r_0$  y  $r_0 = 10^2 \ell$ . Esto implica que hay tres órdenes de magnitud entre las longitudes características de la región de promediado y la del sistema macroscópico, mientras que hay dos órdenes de magnitud entre las longitudes características del poro y de la región de promediado. Debido a la dependencia no trivial con respecto a la posición de los coeficientes efectivos, para resolver ambos ODA se utilizó un esquema de diferencias finitas con suficientes nodos computacionales, de tal manera que las soluciones fuesen independiente de dicho número de nodos. Ejemplos de los perfiles de velocidad promedio obtenidos se muestran a continuación.

En las Figuras 4.1(a) y (d) se muestra la comparación de los perfiles de velocidad obtenidos mediante el ODA con el término  $f_\beta(y)$ , el ODA con el término de Darcy que considera a  $K_\beta^{DAS}$  y la DAS



para dos valores de la porosidad. Una primera apreciación de estos resultados sugiere que los perfiles de velocidad predichos por ambos ODA tienen un buen ajuste entre ellos mismos y estos a su vez con el descrito por la DAS. Con la finalidad de tener una mejor distinción de las predicciones, en las Figuras 4.1(b) y (d) se presentan ampliaciones de los perfiles de la velocidad en la zona donde la velocidad es máxima, mientras que en las Figuras 4.1(d) y (f) se presentan ampliaciones de los perfiles de velocidad en la inter-región fluido-medio poroso. Es interesante notar que, aún con estos acercamientos no se pueden observar desviaciones significativas entre los tres perfiles de velocidad dibujados.

Para tener una mejor idea de las capacidades predictivas de ambos ODA con respecto a la DAS, se considera conveniente calcular el porcentaje de error relativo para describir a la velocidad en la inter-región fluido-medio poroso de acuerdo a la siguiente expresión

$$\% \text{ Error} = 100 \% \times \int_{y=-r_0}^{y=+r_0} \frac{|\langle v_\beta \rangle^\beta|_{DAS} - \langle v_\beta \rangle^\beta|_{ODA}}{|\langle v_\beta \rangle^\beta|_{DAS}} dy \quad (4.4)$$

En Tabla 4.1 se presentan estos porcentajes de error para diferentes valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso. Donde se puede notar que, para el ODA con el término  $f_\beta(y)$  el orden del porcentaje de error es  $\mathbf{O}(10^{-1})$ , el cual decrece en un orden para el ODA con el término de Darcy. Con base en estos resultados, se pueden hacer los siguientes comentarios:

- El término  $f_\beta(y)$  se puede expresar como un término de Darcy con las variaciones espaciales de  $K_\beta^{DAS}(y)$  sin la imposición de suposiciones o restricciones de longitudes de escala. Esta idea fue inicialmente propuesta por Ochoa-Tapia y Whitaker (1995b), aunque no fue demostrada. Por el contrario, Valdés-Parada et al. (2007a) presentaron dicha demostración, aunque fue necesario imponer suposiciones y restricciones de longitudes de escala.
- El hecho de que las desviaciones entre el ODA con respecto a la DAS sean despreciables, sugiere que la metodología utilizada para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad, permite incorporar de manera exacta el efecto de la microestructura del medio poroso sobre las predicciones del perfil de velocidad promedio. Sin embargo, esta metodología está limitada por la geometría del medio poroso utilizada en la DAS. Como ya fue mencionado, algunas geometrías más complicadas a la aquí utilizada se discuten en Ochoa-Tapia et al. (2017).

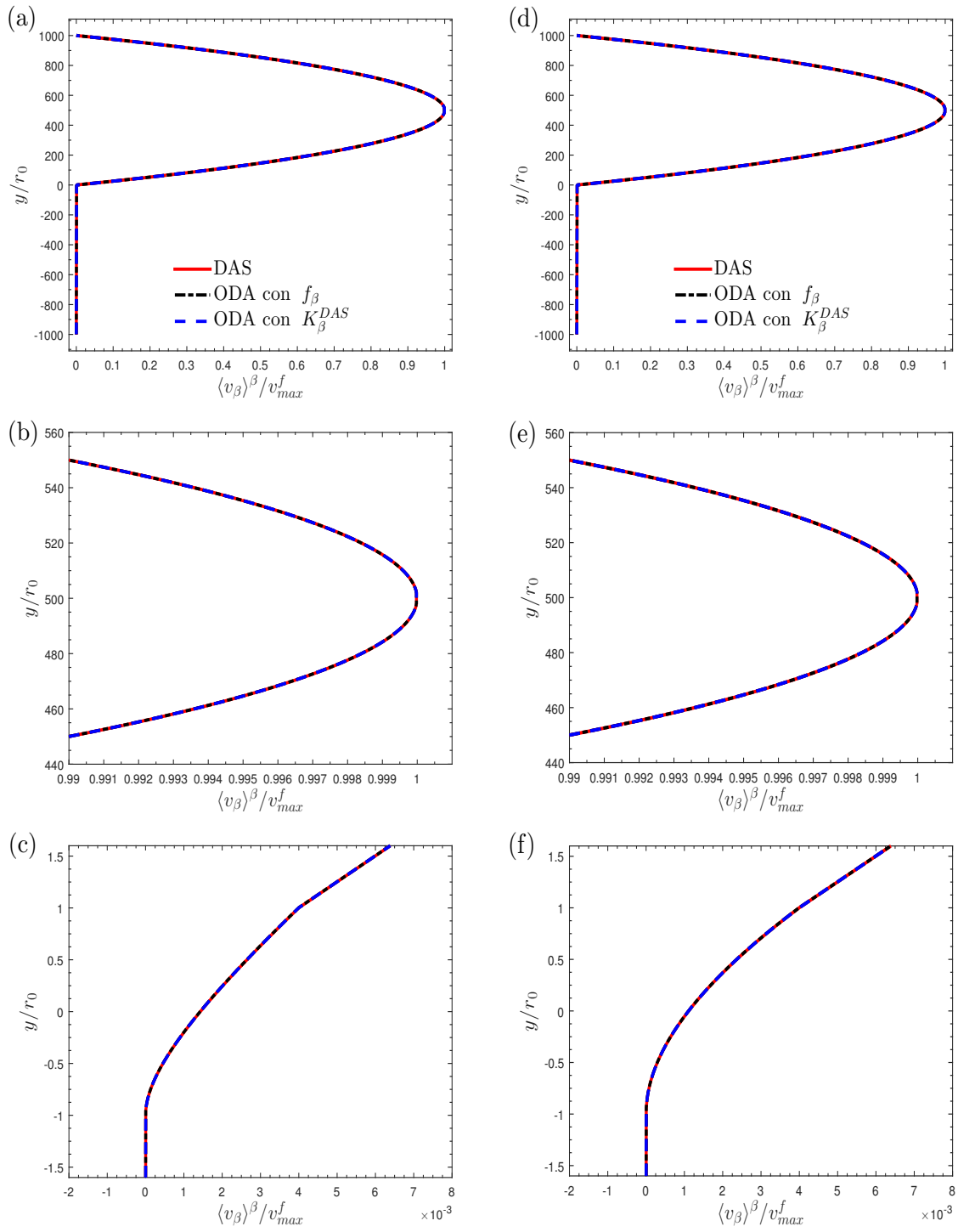


Figura 4.1: Perfiles de velocidad del ODA con el término  $f_\beta(y)$ , el ODA con el término de Darcy y la DAS para (a, b y c)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$  y (e, f y g)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ .

$\varepsilon_{\beta\omega}$	ODA con $f_{\beta}(y)$	ODA con $K_{\beta}^{DAS}(y)$
0.1	$3.33 \times 10^{-1}$	$1.18 \times 10^{-1}$
0.2	$4.01 \times 10^{-1}$	$1.38 \times 10^{-1}$
0.3	$2.28 \times 10^{-1}$	$7.49 \times 10^{-2}$
0.4	$2.36 \times 10^{-1}$	$7.61 \times 10^{-2}$
0.5	$9.49 \times 10^{-1}$	$2.97 \times 10^{-1}$
0.6	$1.93 \times 10^{-1}$	$6.41 \times 10^{-2}$
0.7	$2.13 \times 10^{-1}$	$6.75 \times 10^{-2}$
0.8	$1.39 \times 10^{-1}$	$4.40 \times 10^{-2}$
0.9	$1.49 \times 10^{-1}$	$4.52 \times 10^{-2}$

Tabla 4.1: Porcentajes de error relativo de ambos ODA con respecto a la DAS para predecir a la velocidad en la inter-región fluido-medio poroso para diferentes valores de la porosidad.

#### 4.1.1. Análisis del modelo de un dominio (ODA)

Dirigiendo la atención a los perfiles de velocidad descritos por el ODA que utiliza a las variaciones espaciales de la permeabilidad predichas mediante la solución de un PCL simplificado ( $K_{\beta}^{PCL}(y)$ ), en las Figuras 4.2(a) y (b) se presenta la comparación de los perfiles de velocidad de dicho ODA con aquellos que surgen cuando las variaciones espaciales la permeabilidad se predicen con la información de la DAS ( $K_{\beta}^{DAS}(y)$ ) para dos valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso. Cabe señalar que, la solución de ambos ODA también se llevo a cabo usando un esquema de diferencias finitas con suficientes nodos computacionales, de tal manera que las soluciones fuesen independiente de dicho número de nodos. Una primera valoración de los resultados obtenidos, indica que los perfiles de velocidad de ambos ODA son similares. Sin embargo, las ampliaciones presentadas tanto en las Figuras 4.2(b) y (e) como en las Figuras 4.2(c) y (f), muestran que los perfiles de velocidad de ambos ODA poseen desviaciones en la zona donde la velocidad es máxima y así como también en la inter-región fluido-medio poroso. Nótese que, cuando la porosidad de la región homogénea del medio poroso incrementa, las desviaciones entre los perfiles de la velocidad disminuyen. Esto es consistente con el hecho de que la diferencia entre las predicciones de la permeabilidad a partir del PCL simplificado y las obtenidas con la información de la DAS disminuye cuando la porosidad de la región homogénea del medio poroso incrementa.

Para cuantificar las capacidades predictivas del ODA que considera a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  con respecto a aquel

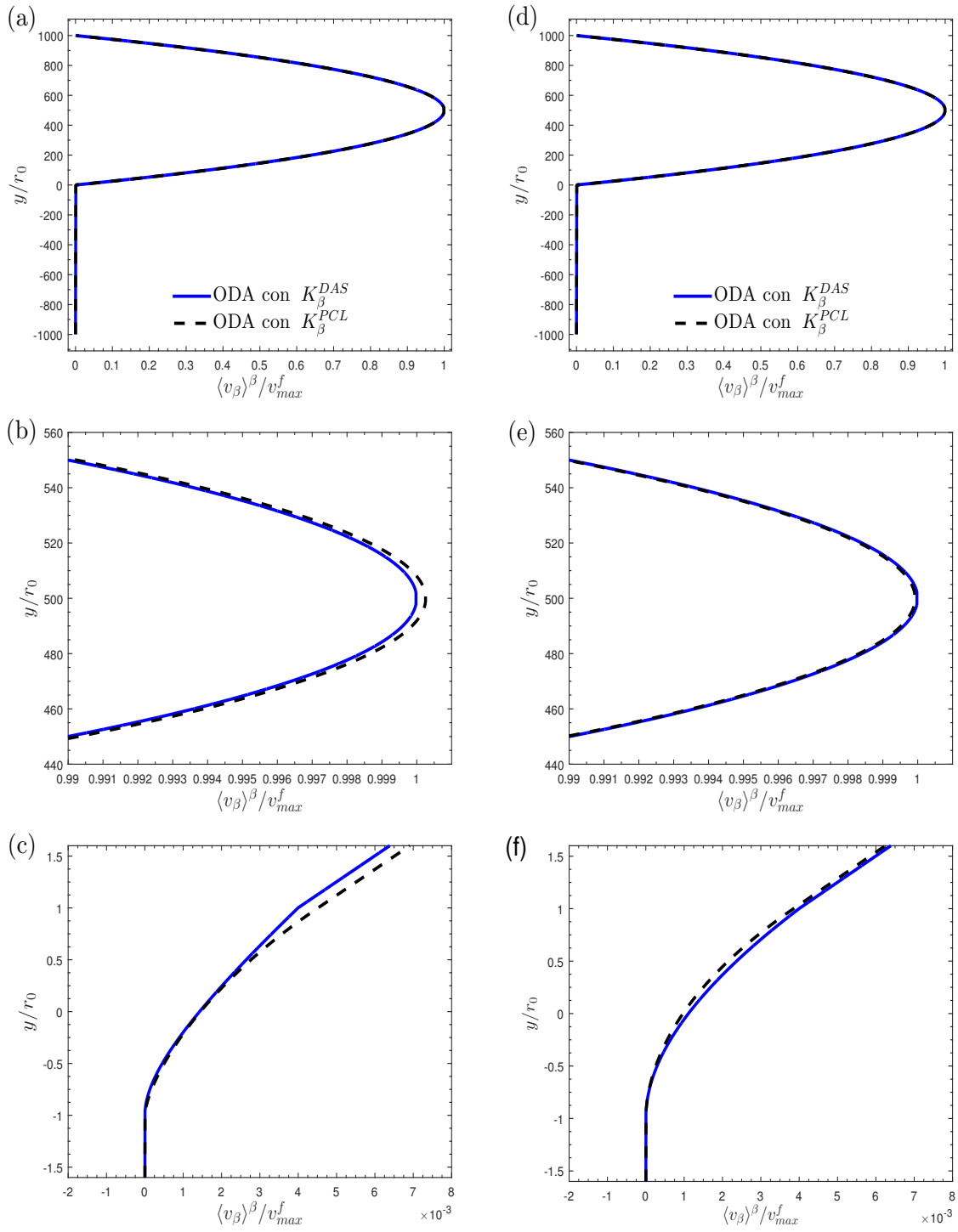


Figura 4.2: Perfiles de velocidad del ODA considerando el término de Darcy con  $K_\beta^{DAS}(y)$  y  $K_\beta^{PCL}(y)$  para (a, b y c)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$  y (e, f y g)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ .

que considera  $K_{\beta}^{DAS}(y)$ , se define el porcentaje de error relativo para predecir a la velocidad promedio en la inter-región fluido-medio poroso como sigue

$$\% \text{ Error} = 100 \% \times \int_{y=-r_0}^{y=+r_0} \frac{\left| \langle v_{\beta} \rangle^{\beta} \Big|_{K_{\beta}^{DAS}} - \langle v_{\beta} \rangle^{\beta} \Big|_{K_{\beta}^{PCL}} \right|}{\langle v_{\beta} \rangle^{\beta} \Big|_{K_{\beta}^{DAS}}} dy \quad (4.5)$$

En la Tabla 4.2 se muestran los valores de este porcentaje de error para varios valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso. Como puede notarse, el porcentaje de error es menor al 10% cuando  $\varepsilon_{\beta\omega}$  se encuentra entre 0.3 y 0.9, presentando un valor mínimo para  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.5$ . Sin embargo, para  $\varepsilon_{\beta\omega} < 0.3$  el porcentaje de error incrementa hasta alcanzar un valor del 29%, lo cual sugiere que el uso de PCL simplificado para predecir a las variaciones espaciales de la permeabilidad podría estar acotado a ciertos valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

$\varepsilon_{\beta\omega}$	Inter-región $\eta - \omega$	$v_{\text{máx}}^f$
0.1	29.25	$6.85 \times 10^{-2}$
0.2	19.46	$5.14 \times 10^{-2}$
0.3	12.17	$3.76 \times 10^{-2}$
0.4	6.54	$2.61 \times 10^{-2}$
0.5	2.19	$1.66 \times 10^{-2}$
0.6	2.21	$7.48 \times 10^{-3}$
0.7	5.69	$2.80 \times 10^{-4}$
0.8	8.87	$7.35 \times 10^{-3}$
0.9	11.64	$1.37 \times 10^{-2}$

Tabla 4.2: Porcentajes de error relativo del ODA que considera a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  con respecto a aquel que considera a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  en la inter-región fluido-medio poroso.

Para finalizar esta sección, cabe recordar que, los errores en las predicciones de los coeficientes efectivos en la inter-región fluido-medio poroso pueden tener efectos significativos sobre las predicciones en las regiones homogéneas del campo que se esté estudiando. Esto fue mostrado para el caso de difusión pasiva dentro de un sistema compuesto por una región de fluido adyacente a un medio poroso por Valdés-Parada et al. (2007b). Con el fin de tener una idea de la magnitud de estos efectos para el caso del campo de velocidad promedio, en la Tabla 4.2 también se presenta el porcentaje de error del ODA que toma en cuenta a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  con respecto a aquel que toma en cuenta a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  para

predecir a la velocidad máxima ( $v_{max}^f$ ) para diferentes valores de la porosidad. Dicho porcentaje de error se calculó de acuerdo a la siguiente expresión

$$\% \text{ Error} = 100\% \times \frac{\left| \text{máx} \left( \langle v_{\beta} \rangle^{\beta} \Big|_{K_{\beta}^{DAS}} \right) - \text{máx} \left( \langle v_{\beta} \rangle^{\beta} \Big|_{K_{\beta}^{PCL}} \right) \right|}{\text{máx} \left( \langle v_{\beta} \rangle^{\beta} \Big|_{K_{\beta}^{DAS}} \right)} \quad (4.6)$$

En este caso, el orden del porcentaje de error es cercano a  $\mathbf{O}(10^{-2})$ , lo cual indica que los errores en las predicciones de  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  para la inter-región fluido-medio poroso, no tienen efectos significativos para predecir a la velocidad máxima. Esto puede atribuirse principalmente a la geometría simplificada del medio poroso y a que se satisface una separación de longitudes características. En condiciones opuestas, dichos errores podrían incrementarse considerablemente.

Los resultados de esta sección indican que un PCL simplificado puede ser, en general, aceptable para predecir a las variaciones espaciales de la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso. Sin embargo, también indican que su uso puede estar limitado a cierto rango de valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso, debido a que los errores en las predicciones los perfiles de velocidad promedio se vuelven considerables (*i.e.*, con un porcentaje de error mayor al 10%). Una forma de respaldar a estos resultados puede ser considerar configuraciones más realistas del medio poroso, tales como un sistema particulado o como un arreglo de capilares, con las cuales se lleven a cabo simulaciones numéricas directas (DNS por sus siglas en inglés, *Direct Numerical Simulations*) para determinar a las variaciones de la permeabilidad. Esta idea está fuera de los objetivos planteados en este trabajo, aunque se retomara en trabajos futuros.

## 4.2. Solución del modelo de dos dominios (TDA)

Para iniciar el análisis del TDA que describe el sistema bajo consideración, cave recordar que dicho enfoque está compuesto por las ecuaciones de Stokes y Darcy Brinkman, las cuales están dadas por

$$0 = \frac{d^2 \langle v_{\beta} \rangle_{\eta}^{\beta}}{dy} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega,\infty}^{\beta} \quad (4.7a)$$

$$0 = \frac{d^2 \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta}}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \left( \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} - \langle v_{\beta} \rangle_{\omega,\infty}^{\beta} \right) \quad (4.7b)$$

Además, puesto que estas ecuaciones no son válidas dentro de la inter-región fluido-medio poroso, debido a que no consideran a las variaciones de la microestructura del medio poroso cerca de las fronteras, fue necesario derivar a las condiciones de salto asociadas esta zona de transición. De acuerdo a la Sección 2.5.1, estas condiciones de salto pueden escribirse como

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} - e_1 \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} = e_2 \left( \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta - e_3 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \right) \quad \text{en } y = y_0 \quad (4.8a)$$

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} - g_1 \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} = g_2 \left( \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta - g_3 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \right) \quad \text{en } y = y_0 \quad (4.8b)$$

Sin embargo, para resolver el TDA, aún es necesario especificar condiciones de frontera en los límites inferior y superior que restrinjan el dominio de validez de las Ecs. (4.7). Para este fin, se proponen a las siguientes condiciones de frontera

$$\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta = 0 \quad \text{en } y = L_\eta \quad (4.9)$$

$$\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta = \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad \text{en } y = -L_\omega + r_0 \quad (4.10)$$

Nótese que, contrario a la ecuación del ODA, el dominio de solución de las Ecs. (4.7) inicia desde el límite inferior de la región homogénea del medio poroso ( $y = -L_\omega + r_0$ ) hasta la localización de la pared superior ( $y = L_\eta$ ), donde se impusieron como condiciones de frontera a la velocidad de Darcy y a la velocidad no deslizamiento, respectivamente. Esto se debe a que las Ecs. (4.7) no consideran a las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos incluso en las inter-regiones fluido-pared superior y medio poroso-pared inferior. De esta manera, el TDA puede resolverse analíticamente, lo cual da como resultado a las siguientes expresiones

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{v_{\text{máx}}^f} = \frac{\langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta}{v_{\text{máx}}^f} + c_\omega \left[ \exp \left( \sqrt{\frac{\epsilon_{\beta\omega}}{K_{\beta\omega}}} (y - y_0) \right) - \exp \left( \sqrt{\frac{\epsilon_{\beta\omega}}{K_{\beta\omega}}} (2y_{\text{inf}} - y_0 - y) \right) \right] \quad (4.11a)$$

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{v_{\text{máx}}^f} = u_{\text{sup}} + \frac{\langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta}{v_{\text{máx}}^f} \frac{\epsilon_{\beta\omega}}{2K_{\beta\omega}} (y_{\text{sup}}^2 - y^2) + c_\eta (y - y_{\text{sup}}) \quad (4.11b)$$

donde  $c_\omega$  y  $c_\eta$  son constantes de integración dadas por

$$c_\eta = \frac{k_3}{k_1} - c_\omega \frac{k_2}{k_1} \quad (4.12)$$

$$c_\omega = \frac{d_2}{d_1} \quad (4.13)$$

en las cuales se han utilizado las siguientes definiciones

$$A_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{K_{\beta\omega}}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{K_{\beta\omega}}} \exp\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{K_{\beta\omega}}}(y_{\text{inf}} - y_0)\right) \quad (4.14a)$$

$$A_2 = 1 - \exp\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{K_{\beta\omega}}}(y_{\text{inf}} - y_0)\right) \quad (4.14b)$$

$$k_1 = 1 - e_2(y_0 - y_{\text{sup}}) \quad (4.14c)$$

$$k_2 = -e_1A_1 + e_2e_3A_2 \quad (4.14d)$$

$$k_3 = e_2\left(\frac{p}{2}(y_{\text{sup}}^2 - y_0^2) + u_{\text{sup}} - e_3p\frac{K_{\beta\omega}}{\varepsilon_{\beta\omega}}\right) + py_0 \quad (4.14e)$$

$$d_1 = \left[A_1 + g_1\frac{k_2}{k_1} - g_2\left(A_1 + g_3\frac{k_2}{k_1}(y_0 - y_{\text{sup}})\right)\right] \quad (4.14f)$$

$$d_2 = g_2\left[p\frac{K_{\beta\omega}}{\varepsilon_{\beta\omega}} - g_3\left(\frac{p}{2}(y_{\text{sup}}^2 - y_0^2) + \frac{k_3}{k_1}(y_0 - y_{\text{sup}}) + u_{\text{sup}}\right)\right] \quad (4.14g)$$

$$p = \frac{\langle v_{\beta} \rangle_{\omega, \infty}^{\beta} \varepsilon_{\beta\omega}}{v_{\text{máx}}^f K_{\beta\omega}} \quad (4.14h)$$

Los detalles de esta solución analítica se pueden encontrar en el Apéndice D. Con el fin de obtener el perfil de velocidad y al mismo tiempo analizar los efectos que tiene sobre el TDA, el hecho de utilizar a un PCL simplificado para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad, es necesario determinar tanto a la posición de la superficie divisoria ( $y_0$ ) como a los coeficientes de salto. Esto se llevó a cabo siguiendo el algoritmo descrito en la Figura C.2, donde primero se consideró a las variaciones espaciales de  $\varepsilon_{\beta}(y)$  junto con las de  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  y posteriormente a las variaciones de  $\varepsilon_{\beta}(y)$  junto con las de  $K_{\beta}^{DAS}(y)$ , lo cual dio lugar a dos conjuntos de parámetros de salto. Cabe recordar que las variaciones espaciales de la fracción volumétrica y de la permeabilidad se utilizan, en general, para resolver a los problemas de cerradura macroscópicos, los cuales se pueden encontrar en el Apéndice C. Usando este procedimiento, se obtuvieron los resultados presentados en las Figuras 4.3 y 4.4, donde se pueden hacer los siguientes comentarios:

- En la Figura 4.3 se muestran los valores de la posición de la superficie divisoria considerando las dos predicciones de las variaciones espaciales de la permeabilidad mencionadas anteriormente para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Como puede notarse, en todos los casos de ambas predicciones de la permeabilidad,  $y_0$  se localiza dentro de la región de medio poroso, lo que implica que  $y_0$  siempre es negativa. Además, cuando la porosidad incrementa,  $y_0$  se desplaza hacia adentro de la región de medio poroso. Estos resultados contrastan con los presentado por Valdés-Parada et al.



(2013), ya que en su trabajo muestran que la posición de la superficie divisoria es, para cualquier valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ , positiva e igual a  $y_0 = 1.02r_0$ . Esta discrepancia se atribuye principalmente a la configuración del medio poroso utilizada por dichos autores. Ellos emplean un medio poroso que consiste en un arreglo de cuadrados que no se tocan entre sí, lo cual permite que el flujo en las dos regiones homogéneas esté conectado. En nuestro caso, el flujo no está conectado, debido a que el medio poroso consiste en un arreglo de placas paralelas. Por otra parte, en la Figura 4.3 se puede ver que los valores de  $y_0$  son sensibles al origen de las predicciones de las variaciones espaciales de la permeabilidad. Cuando se utiliza a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$ , las posiciones de  $y_0$  se localizan por debajo de aquellas que se obtienen utilizando a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$ . Al mismo tiempo, cuando  $\varepsilon_{\beta\omega}$  incrementa, las diferencias entre ambas predicciones de  $y_0$  decrece. Nótese también que la pendiente de las predicciones cuando se utiliza a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  es mayor con respecto a cuando se utiliza a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$ .

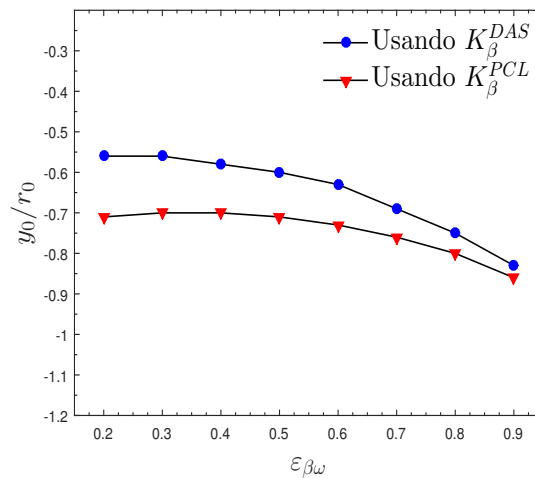


Figura 4.3: Predicciones de la posición de la superficie divisoria considerando la variación espacial de  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  y de  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

- Por otro lado, en las Figuras 4.4 se presentan los valores de los coeficientes de salto considerando las dos predicciones de la permeabilidad para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Donde se puede ver que, en la mayoría de los casos, los valores y las magnitudes de los coeficientes de salto obtenidos cuando se utiliza a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  son similares a aquellas obtenidas cuando se usa a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$ , lo cual es más notorio al incrementarse la porosidad de la región homogénea del medio poroso. Esto sugiere que, el hecho de utilizar a un PCL simplificado para determinar a las variaciones

espaciales de la permeabilidad, tiene efectos tenues sobre las predicciones de los coeficientes de salto. Este comportamiento puede ser, en parte, consecuencia de la forma en que fue expresada la idea de que el ODA sea satisfecho en promedio por el TDA, *i.e.*, a las dos restricciones integrales propuestas por Valdés-Parada et al. (2013) para este fin. Por otra parte, para cada coeficiente de salto se pueden hacer las siguientes observaciones: 1) los coeficiente  $e_1$  y  $e_2$  crecen con la porosidad y ambos son del mismo orden de magnitud siempre que  $r_0$  sea al menos  $100\ell$ , lo cual sugiere que la principal causa del salto de la velocidad en la superficie divisoria es el esfuerzo de la región de fluido; 2) el coeficiente  $e_3$  decrece sustancialmente con la porosidad, advirtiendo que la diferencia entre las velocidades decrecen de la misma forma; 3) en valor absoluto, el coeficiente  $g_1$  disminuye con la porosidad hasta alcanzar un valor cercano a la unidad, indicando que los esfuerzos en la superficie divisoria son similares cuando la porosidad crece; 4) en valor absoluto, el coeficiente  $g_2$  también disminuye con la porosidad, aunque los valores que alcanza son del orden de  $\mathbf{O}(10^3)$  siempre que  $r_0$  sea al menos  $100\ell$ ; 5) por último, el coeficiente  $g_3$  si bien crece ligeramente con la porosidad, es cercano a cero, lo cual insinúa que el salto en el esfuerzo es causado principalmente por la velocidad promedio de la región homogénea del medio poroso.

#### 4.2.1. Análisis de modelo de dos dominios (TDA)

Una vez determinado los parámetros de salto (*i.e.*, la posición de la superficie divisoria y los coeficientes de salto) para cada una de las predicciones de la permeabilidad (*i.e.*,  $K_\beta^{DAS}(y)$  y  $K_\beta^{PCL}(y)$ ), se puede evaluar los efectos que tiene sobre el TDA el hecho de utilizar a un PCL para determinar a la permeabilidad. Aquí se considera que el sistema fluido-medio poroso tiene el mismo tamaño que el propuesto en el ODA ( $L_\eta = L_\omega = 10^3 r_0$  y a  $r_0 = 10^2 \ell$ ). De esta manera, en las Figuras 4.5(a) y (b) se muestra la comparación de los perfiles de velocidad resultantes del TDA que considera a los dos conjuntos de parámetros de salto y del ODA que considera el término de Darcy con  $K_\beta^{DAS}(y)$  para dos valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso. Ciertamente, como en los casos anteriores, a esta escala es difícil apreciar las desviaciones entre los perfiles de velocidad resultantes de ambos enfoques. Al hacer acercamientos en la zona donde la velocidad es máxima, los cuales se presentan en las Figuras 4.5(b) y (e), se puede notar que las predicciones del TDA tienen una sobrestimación de velocidad máxima con respecto al ODA para ambos valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Sin embargo,

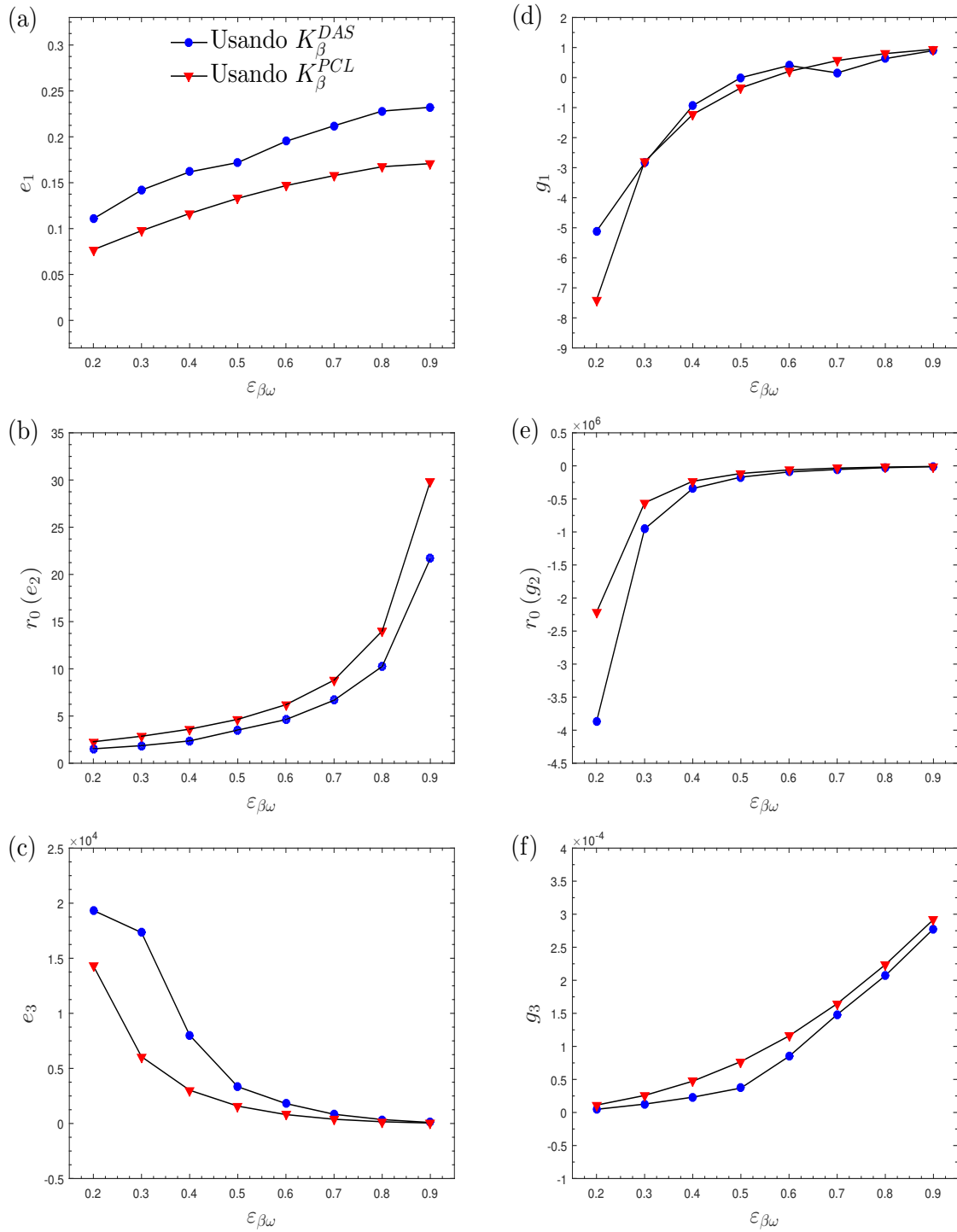


Figura 4.4: Predicciones de los coeficientes de salto obtenidos considerando la variación espacial de  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  y de  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

las magnitudes de estas sobreestimaciones corresponden, en todos los casos, a un porcentaje de error menor al 0.2%. Por otro lado, los acercamientos en la inter-región fluido-medio poroso, esbozados en las Figuras 4.5(c) y (f), muestran que las predicciones del TDA no reproducen a detalle gran parte del ODA dentro de esta zona de transición, pero sí sus características principales. Este resultado es de esperarse, puesto que el TDA no considera de manera explícita a la inter-región fluido-medio poroso, debido a que sus coeficientes efectivos son independientes de la posición. Lo anterior enfatiza que, el TDA siempre será una aproximación del ODA, a pesar de que las variaciones espaciales de los coeficientes de transporte efectivos utilizados para determinar a los coeficientes de salto sean exactos.

Dirigiendo la atención a las predicciones del TDA para cada valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ , se puede notar que los perfiles de velocidad obtenidos cuando el TDA utiliza a los parámetros de salto asociados a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  y a aquellos asociados a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  se encuentran muy cercanos entre sí. Evidentemente hay ligeras desviaciones entre los perfiles de velocidad, aunque estas desviaciones disminuyen cuando incrementa la porosidad de la región homogénea del medio poroso, conduciendo a que dichos perfiles se superpongan. Esta situación se atribuye a la proximidad de los valores de los coeficientes de salto, pero no necesariamente a la posición de la superficie divisoria. Por otro lado, también se puede ver que el salto de la velocidad en la superficie divisoria es menor cuando el TDA utiliza los coeficientes de salto asociados a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  con respecto a cuando este mismo utiliza a los coeficientes de salto asociados a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$ .

Ahora, uno debe recordar que el propósito de las condiciones de salto es que el TDA satisfaga en promedio el ODA (blackOchoa-Tapia y Whitaker, 1995a). Con el fin de apreciar los efectos que tienen sobre la veracidad de esto, el hecho de utilizar a un PCL para predecir a la permeabilidad, se propone calcular las velocidades de deslizamiento dado por ambas predicciones del TDA y el promedio de la velocidad del ODA en la inter-región fluido-medio poroso. Esto último se lleva a cabo usando la siguiente expresión

$$\langle u \rangle_0 = \frac{1}{2r_0} \int_{y=-r_0}^{y=+r_0} u dy \quad \text{donde} \quad u = \langle v_{\beta} \rangle^{\beta} / v_{\text{máx}}^f \quad (4.15)$$

En la Tabla 4.3 se muestran los valores de  $\langle u \rangle_0$  y las velocidades de deslizamiento del TDA con los dos conjuntos de parámetros de salto para diferentes valores  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Como puede notarse las velocidades de deslizamiento de cada región homogénea obtenidas por ambos casos del TDA, si bien no son iguales, comparten el mismo orden de magnitud para cada valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Ciertamente este hecho puede atribuirse a la diferencia entre las posiciones de la superficie divisoria obtenidas usando las

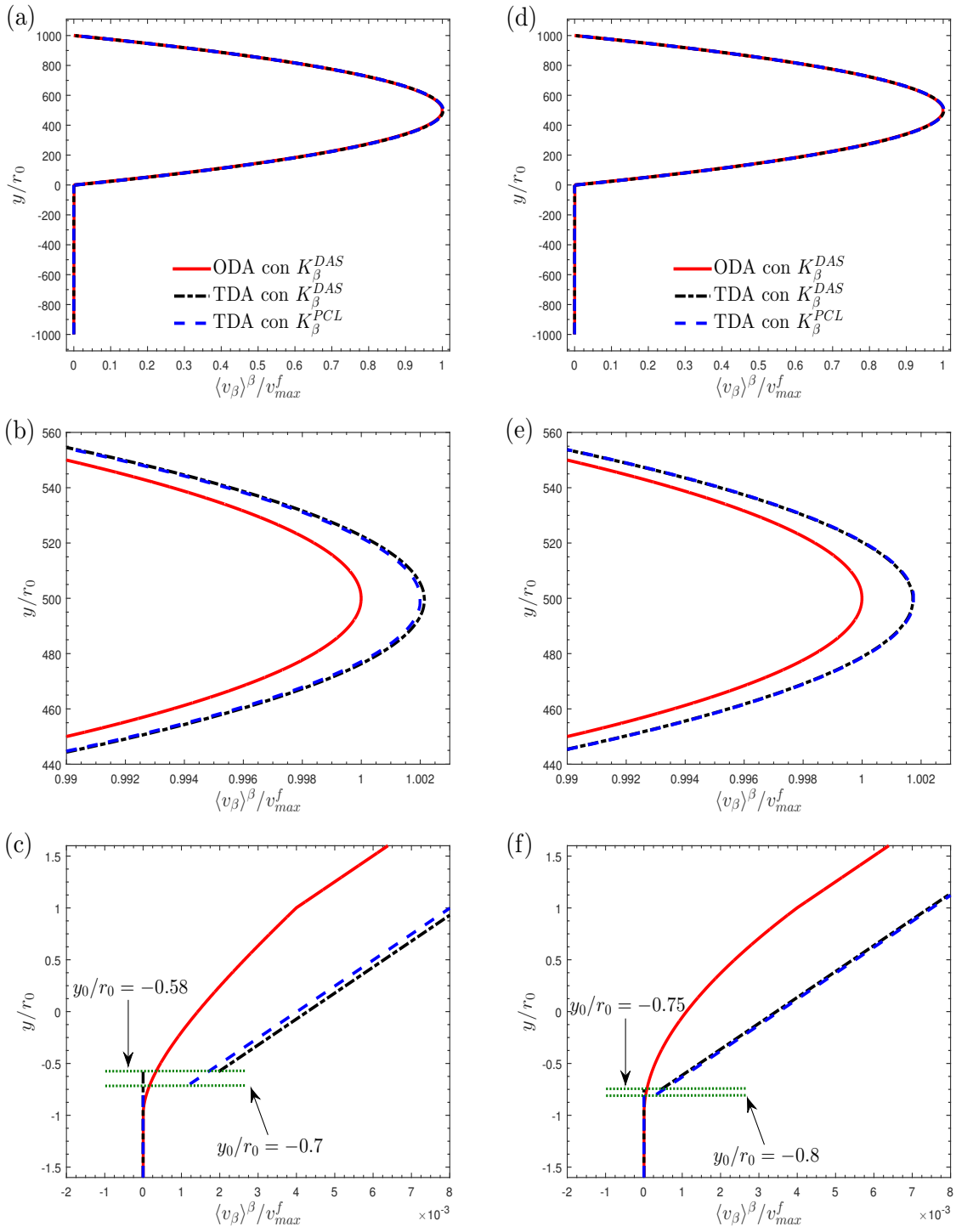


Figura 4.5: Perfiles de velocidad obtenidos del ODA que considera al término de Darcy con  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  y del TDA con los dos conjuntos de coeficientes de salto para (a, b y c)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$  y (e, f y g)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ .

dos predicciones de la permeabilidad (ver Figure 4.3). Por otro lado, se puede ver el valor de  $\langle u \rangle_0$  es cercano a las velocidades de deslizamiento  $u_\omega|_{y_0}$  también predichas por ambos casos del TDA para cualquier valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Lo anterior sugiere que ambos casos del TDA satisfacen en promedio el ODA, lo cual a su vez indica que, el hecho de utilizar a un PCL simplificado para determinar a las variaciones espaciales de la permeabilidad tiene efectos mínimos para que el TDA satisfaga en promedio al ODA. Caber señalar que, estos resultados contrastan con los presentados por Valdés-Parada et al. (2013), debido a que su trabajo encuentran que el valor de  $\langle u \rangle_0$  está aproximadamente a la mitad de las dos velocidades de deslizamiento predichos por el TDA.

$\varepsilon_{\beta\omega}$	ODA con $K_\beta^{DAS}(y)$	TDA con $K_\beta^{DAS}(y)$		TDA con $K_\beta^{PCL}(y)$	
	$\langle u \rangle_0$	$u_\omega _{y_0}$	$u_\eta _{y_0}$	$u_\omega _{y_0}$	$u_\eta _{y_0}$
0.2	$1.75 \times 10^{-3}$	$8.80 \times 10^{-9}$	$2.96 \times 10^{-3}$	$7.37 \times 10^{-9}$	$1.86 \times 10^{-3}$
0.3	$1.67 \times 10^{-3}$	$1.94 \times 10^{-8}$	$2.48 \times 10^{-3}$	$1.89 \times 10^{-8}$	$1.51 \times 10^{-3}$
0.4	$1.60 \times 10^{-3}$	$3.45 \times 10^{-8}$	$1.97 \times 10^{-3}$	$3.64 \times 10^{-8}$	$1.22 \times 10^{-3}$
0.5	$1.54 \times 10^{-3}$	$4.76 \times 10^{-8}$	$1.30 \times 10^{-3}$	$6.14 \times 10^{-8}$	$9.57 \times 10^{-4}$
0.6	$1.49 \times 10^{-3}$	$7.14 \times 10^{-8}$	$9.93 \times 10^{-4}$	$9.60 \times 10^{-8}$	$7.22 \times 10^{-4}$
0.7	$1.45 \times 10^{-3}$	$1.13 \times 10^{-7}$	$6.92 \times 10^{-4}$	$1.48 \times 10^{-7}$	$5.11 \times 10^{-4}$
0.8	$1.40 \times 10^{-3}$	$1.83 \times 10^{-7}$	$4.54 \times 10^{-4}$	$2.35 \times 10^{-7}$	$3.22 \times 10^{-4}$
0.9	$1.37 \times 10^{-3}$	$3.38 \times 10^{-7}$	$2.14 \times 10^{-4}$	$4.30 \times 10^{-7}$	$1.50 \times 10^{-4}$

Tabla 4.3: Predicciones de las velocidades de deslizamiento mediante el TDA con los dos conjuntos de parámetros de salto.

De acuerdo con Valdés-Parada et al. (2013), no es posible hacer una comparación punto por punto entre los perfiles del ODA y el TDA cerca de las fronteras, debido a que el ODA involucra una inter-región, mientras que el TDA reemplaza a esta zona por una superficie divisoria (Ver Figura 2.1). Sin embargo, en problemas de flujo de fluidos en ocasiones uno está interesado en conocer a las cantidades globales (*i.e.*, flujo volumétrico, flujo másico, fuerza ejercida por el fluido, por decir algunos) donde el TDA es usualmente utilizado. Con el fin de comparar las capacidades predictivas de ambos TDA con respecto al ODA para la medición de una cantidad global, en la Tabla 4.4 se muestran los valores del flujo volumétrico por unidad de ancho del canal para diferentes valores de la porosidad de la región

homogénea del medio poroso, los cuales fueron obtenidos mediante la siguiente expresión

$$\frac{Q}{w} = \int_{y=0}^{y=L\eta} u_i(y) dy \quad \text{donde} \quad u = \langle v_\beta \rangle_i^\beta / v_{\text{máx}}^f \quad (4.16)$$

De estos resultados, se puede ver que los valores de  $\frac{Q}{w}$  predichos por ambos casos del TDA son idénticos a aquellos obtenidos del ODA. El porcentaje de error relativo con respecto a la ODA es, en todos los caso, igual a  $\mathbf{O}(10^{-1})$ , lo cual indica que los errores introducidos por utilizar cualquiera de los dos casos del TDA son despreciables. Por lo tanto, se puede decir que el enfoque del TDA puede ser tan bueno como el ODA para determinar a los valores de las cantidades globales antes mencionadas. En efecto, esto es cierto principalmente cuando se satisface la separación de longitudes características dada  $r_0 \ll L\eta$ , ya que de lo contrario el error puede incrementar considerablemente.

$\varepsilon_{\beta\omega}$	ODA	TDA con $K_\beta^{DAS}(y)$	TDA con $K_\beta^{PCL}(y)$
0.2	669.664	669.265	669.012
0.3	669.664	669.024	668.818
0.4	669.664	669.807	668.670
0.5	669.664	668.511	668.560
0.6	669.664	668.420	668.483
0.7	669.664	668.389	668.437
0.8	669.664	668.390	668.423
0.9	669.664	668.430	668.457

Tabla 4.4: Predicción del flujo volumétrico en la región de fluido a partir de del TDA y del ODA para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

### 4.3. Otra alternativa para cerrar el modelo de un sólo dominio (ODA)

En su forma actual, no es tarea fácil encontrar una solución analítica de la Ec. (4.1), debido a la dependencia espacial no trivial de la porosidad y de la permeabilidad. Al respecto, Aguilar-Madera et al. (2011b) usaron formulaciones de ecuaciones integrales en términos de funciones de Green para resolver analíticamente a dicha ecuación. Sin embargo, la solución obtenida en su trabajo es una solución analítica implícita, por lo que todavía se requiere de un método iterativo para encontrar el

campo de velocidad. Una alternativa para proporcionar una solución analítica explícita de la Ec. (4.1), puede consistir en cerrar a dicha ecuación por sólo determinar la variación espacial de las contribuciones locales ( $\mathbf{h}_\beta(\mathbf{x})$ ) del vector de esfuerzos superficiales ( $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$ ). De acuerdo a la Ec. (2.10), dicha contribución está dada por

$$\mathbf{h}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left( -\mathbf{l}p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} \right) dA \quad (4.17)$$

La gran ventaja de esto es que la Ec. (2.9) se puede escribir de forma conservativa como sigue

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mathbf{h}_\beta(\mathbf{x}) \quad (4.18)$$

Resultado que, bajo las suposiciones de flujo unidireccional y completamente desarrollado, se reduce

$$0 = \mu_\beta \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle}{dy^2} + \mu_\beta \varepsilon_\beta(y) K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty} - \varepsilon_\beta(y) h_\beta(y) \quad \forall y \in (-L_\omega, L_\eta) \quad (4.19)$$

Nótese que la forma de esta última ecuación es mucho más simple a la ecuación del ODA que está dada por la Ec. (4.1). Adicionalmente, bajo las suposiciones antes mencionadas, el coeficiente  $h_\beta(y)$  toma la siguiente forma

$$h_\beta(y) = \frac{\mu_\beta}{V_\beta(y)} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(y)} n_y \frac{dv_\beta}{dy} dA \quad (4.20)$$

Cabe mencionar que la variación espacial de este coeficiente se obtuvo de manera similar a la variación de la permeabilidad definida por la Ec. (3.21). En la Figura 4.6(a) se muestra la variación espacial del coeficiente  $h_\beta(y)$  en la inter-región fluido-medio poroso para diferentes valores de la porosidad de la región homogénea del medio poroso. Como puede notarse este coeficiente varía linealmente de una región homogénea a otra cuando  $\varepsilon_{\beta\omega} > 0.6$ , mientras que para  $\varepsilon_{\beta\omega} < 0.6$  los cambios este coeficiente son de tipo parabólicos. Por otro lado, en la Figura 4.6(b) se puede ver el cambio espacial del producto  $\varepsilon_\beta(y)h_\beta(y)$  es lineal para cualquier valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Esta característica se aprovechará para la solución de la Ec. (4.19). Cabe señalar que, las predicciones del coeficiente  $h_\beta(y)$  proporcionan una nueva forma cerrada del ODA de la transferencia de cantidad de movimiento.

Con base en lo anterior, por primera vez y aunque para un sistema muy sencillo, se tiene la oportunidad de obtener la solución analítica explícita del ODA. De esta manera, al considerar a las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (4.3), las variaciones espaciales de  $h_\beta(y)$  y de  $\varepsilon_\beta(y)$ , la solución analítica del ODA puede expresarse como sigue



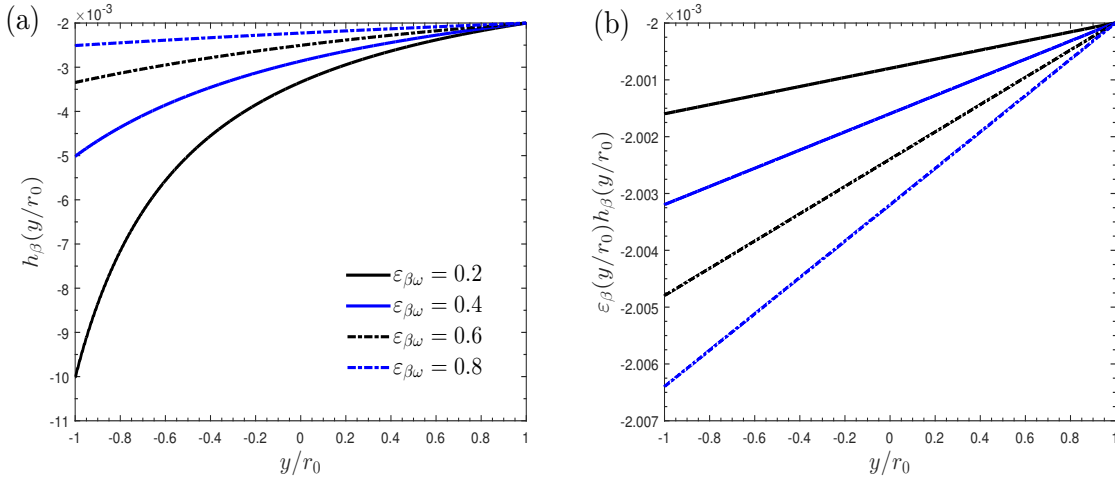


Figura 4.6: Variaciones espaciales del coeficiente  $h_\beta(y)$  y del producto  $\varepsilon_\beta(y)h_\beta(y)$  para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

$$\frac{\langle v_\beta \rangle}{v_{\text{máx}}^f} = \begin{cases} c_1 \left[ \left( \frac{y}{r_0} \right) - \left( \frac{L_\eta}{r_0} + 1 \right) \right] - m_2 A_2(y) - E_2(y) & L_\eta - r_0 < y \leq L_\eta + r_0 \\ w_2 + \frac{m_2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{r_0} \right)^2 \right] + c_2 \left[ \left( \frac{y}{r_0} \right) - 1 \right] & r_0 \leq y \leq L_\eta - r_0 \\ w_2 + c_3 \left[ \left( \frac{y}{r_0} \right) - 1 \right] - m_2 B_2(y) - D_2(y) & -r_0 < y < r_0 \\ \varepsilon_{\beta\omega} \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{\varepsilon_{\beta\omega} \ell}{L_\eta} \right)^2 & -L_\omega + r_0 \leq y \leq -r_0 \\ w_{\beta\omega} + c_4 \left[ \left( \frac{y}{r_0} \right) + \frac{L_\omega}{r_0} - 1 \right] - m_2 J_2(y) - P_2(y) & -L_\omega - r_0 \leq y < -L_\omega + r_0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Donde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$  son constantes de integración, mientras que  $A_2(y)$ ,  $B_2(y)$ ,  $D_2(y)$ ,  $E_2$ ,  $J_2(y)$  y  $P_2(y)$  son las integrales del producto  $\varepsilon_\beta(y)h_\beta(y)$  en cada zona sistema fluido-medio poroso aquí considerado. Los detalles de su desarrollo se pueden encontrar en el Apéndice D de este trabajo. Ejemplos de los perfiles de velocidad predichos por la solución analítica del ODA y la DAS se presentan en la Figura 4.7 para dos valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Aquí se consideró que el dominio de solución tiene el mismo tamaño que el propuesto en los casos anteriores ( $L_\eta = L_\omega = 10^3 r_0$  y  $r_0 = 10^2 \ell$ ).

En general, las Figuras 4.7 muestran que la solución analítica predice el perfil de velocidad tanto en las regiones homogéneas como en la inter-región fluido medio poroso.

Con el fin de tener una idea cuantitativa de las capacidades predictivas de la solución analítica del ODA aquí obtenida con respecto a la DAS para reproducir a la velocidad en la inter-región fluido-medio poroso, en la Tabla 4.5 se muestra el porcentaje de error relativo obtenido mediante una expresión similar a la Ec. (4.4) para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Nótese que en todos los casos el porcentaje de error es del orden de  $\mathbf{O}(10^{-4})$ , lo cual indica la nueva forma de cerrar el ODA puede ser adecuada para resolver analíticamente el ODA.

$\varepsilon_{\beta\omega}$	ODA con $h_{\beta}(y)$	ODA con $K_{\beta}^{*DAS}(y)$
0.1	$3.52 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$
0.2	$5.63 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$
0.3	$6.87 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$
0.4	$7.41 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$
0.5	$7.36 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$
0.6	$6.79 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$
0.7	$5.73 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$
0.8	$4.23 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$
0.9	$2.31 \times 10^{-4}$	$2.49 \times 10^{-3}$

Tabla 4.5: Porcentaje de error relativo del ODA que considera a  $h_{\beta}(y)$  con respecto a la DAS para predecir a la velocidad promedio en la inter-región fluido-medio poroso para diferentes valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

Conviene enfatizar que, la importancia de contar con una solución analítica explícita puede consistir en la reducción del costo computacional para resolver problemas que involucren la dispersión de masa o de calor donde la velocidad promedio se considere como un dato de entrada, tal como aquellos presentados por Aguilar-Madera et al. (2011a,b).

Una situación interesante que se encontró en esta sección es que, el coeficiente  $h_{\beta}(y)$  también se puede escribir como un término de Darcy con las variaciones espaciales de un coeficiente  $K_{\beta}^{*DAS}(y)$ , el cual se denominó en este trabajo como un coeficiente de permeabilidad aparente. Estos resultados también se pueden observar en las Figuras 4.7. Además, en la Tabla 4.5 se muestra el porcentaje de error asociado a dicho ODA que considera a dicho término de Darcy velocidad en la inter-región fluido-medio poroso. Donde se muestra que el orden del porcentaje de error es  $\mathbf{O}(10^{-3})$ .

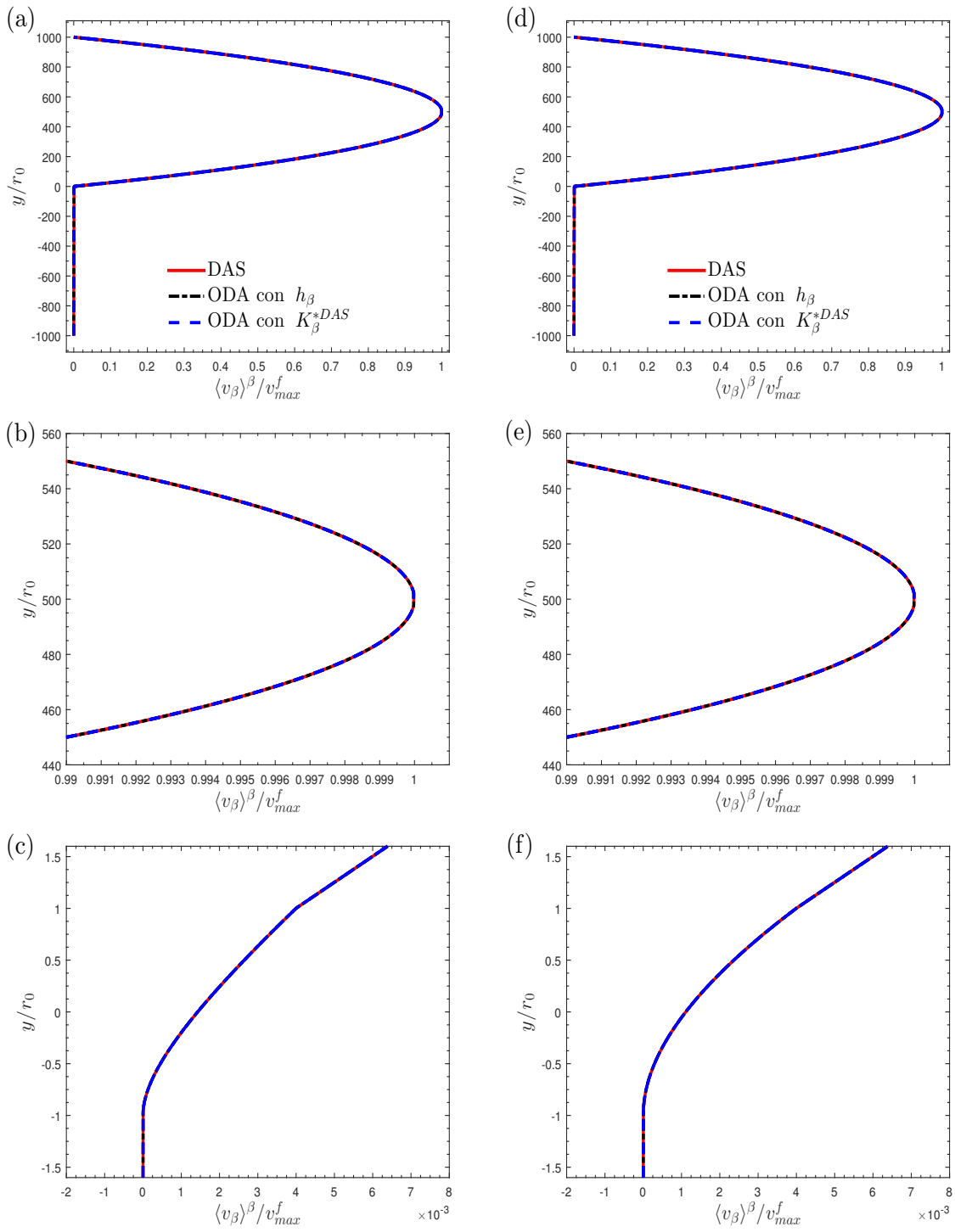


Figura 4.7: Perfiles de velocidad obtenidos del ODA con el coeficiente  $h_\beta(y)$ , el ODA con el término de Darcy aparente y la DAS para (a, b y c)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.4$  y (e, f y g)  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ .



## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo se estudió el alcance y los efectos que tiene el hecho de utilizar a un problema de cerradura local (PCL) simplificado, derivado en el contexto del método del promedio volumétrico, para determinar a la permeabilidad en la zona de transición (*i.e.*, inter-región) entre dos regiones homogéneas, en particular entre una región de fluido y un medio poroso saturado por el mismo fluido. Cabe recordar que, la importancia de la determinación de este coeficiente efectivo consiste en que permite cerrar a la ecuación del modelo de un dominio (ODA) y a las condiciones de salto del modelo de dos dominios (TDA), ambos para la transferencia de cantidad de movimiento. Algunos comentarios y conclusiones que surgen en el desarrollo de este trabajo se presentan a continuación:

- Con el fin de proporcionar un marco de comparación para el perfil de velocidad promedio del ODA y del TDA, se llevó a cabo una simulación analítica directa (DAS por sus siglas en inglés, *Direct Analytical Simulation*). Esta alternativa de modelado consistió en considerar una geometría simplificada del medio poroso, la cual permitió obtener el perfil de velocidad promedio como resultado de directamente promediar el perfil de velocidad local y no por la solución de las ecuaciones promedio, por lo que el resultado obtenido es exacto. Usando dicha alternativa se confirmó que existen tres zonas de transición en el sistema tipo Beavers y Joseph (1967) aquí considerado (*i.e.*, fluido-pared superior, fluido-medio poroso y medio poroso-pared inferior), cuyos tamaños están determinados por el tamaño de la región de promediado. De acuerdo con Ochoa-Tapia et al. (2017), estas zonas de transición son consistentes con el término de corrección de Brinkman a la ley de Darcy.

- Para mostrar el alcance y limitaciones del uso del PCL para determinar a la permeabilidad ( $K_{\beta}^{PCL}(y)$ ) en las tres inter-regiones antes mencionadas, se planteó una metodología para calcular de manera exacta el mismo coeficiente efectivo ( $K_{\beta}^{DAS}(y)$ ). Esta metodología se basó en utilizar la información de la DAS en la definición implícita de la permeabilidad dada por la Ec. (3.2). Comparando ambas predicciones de la permeabilidad,  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  y  $K_{\beta}^{DAS}(y)$ , se encontró que en la inter-región medio poroso-pared inferior el PCL proporciona excelentes predicciones de este coeficiente efectivo, con un porcentaje error menor al 1%. Por otro lado, se encontró que en la inter-región fluido-medio poroso el uso del PCL puede estar limitado a ciertos valores  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Sin embargo, se debe mencionar que ambas predicciones conservan el mismo orden de magnitud, sugiriendo que sus efectos sobre los perfiles de velocidad podrían ser despreciables.
- Con el fin de evaluar el alcance del ODA para reproducir el perfil de velocidad en las tres inter-regiones antes mencionadas, se compararon los perfiles de velocidad del ODA que considera a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  con aquellos obtenido mediante la DAS. Los resultados muestran que el ODA puede describir de manera exacta el perfil de velocidad promedio en cualquier zona del sistema aquí estudiado, además se demuestra que el término de esfuerzos superficiales  $f_{\beta}(y) = \mathbf{f}_{\beta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x$  puede escribirse como un término Darcy con las variaciones espaciales de la permeabilidad sin la imposición de restricciones de longitudes de escala. Cabe señalar que esto último no necesariamente tenía que ser cierto, debido a que esta suposición se llevó a cabo con base en la definición de la permeabilidad de región homogénea del medio poroso. Ciertamente, Valdés-Parada et al. (2007a) demostraron esta idea, aunque fue con la ayuda de restricciones de longitudes de escala.
- Por lo que se refiere a los perfiles de velocidad del ODA cuando este utiliza a  $K_{\beta}^{PCL}$ , se encontró que el porcentaje de error de las capacidades predictivas del ODA en la inter-región fluido-medio poroso son menores al 12% cuando el valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$  se encuentra entre 0.3 y 0.9, mientras que cuando el valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$  está fuera de este rango el porcentaje puede incrementar hasta un 29%. Estos resultados, a pesar de aquellos obtenidos en la Sección 3.2.4, indican que el uso del PCL para determinar a la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso podría ser adecuado para el rango de valores de  $\varepsilon_{\beta\omega}$  antes mencionados.
- En relación con los parámetros de salto, se encontró que la posición de la superficie divisoria depende de la predicción de las variaciones espaciales de la permeabilidad considerada en la solución de los problemas de cerradura macroscópicos. Cuando se considera a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$ , los

valores de  $y_0$  se encuentran alejados de aquellos que se obtienen considerando a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$ . En contraste, los valores los coeficientes de salto cuando se considera a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  son bastante cercanos a aquellos que se obtienen cuando se considera a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$ . Cabe señalar que las desviaciones en cada uno de los parámetros de salto disminuyen cuando incrementa el valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ .

- Comparando los perfiles de velocidad del TDA que considera a los dos conjuntos de parámetros salto con los obtenidos mediante ODA que considera a  $K_{\beta}^{DAS}$ , se mostró que ambos TDA reproducen el ODA con un porcentaje de error menor al 0.2% para cualquier valor de  $\varepsilon_{\beta\omega}$ . Por otro lado, se halló que los perfiles de velocidad del TDA con los parámetros de salto asociados a  $K_{\beta}^{PCL}(y)$  reproducen a aquellos obtenidos del TDA con los parámetros asociados a  $K_{\beta}^{DAS}(y)$  con un porcentaje de error menor  $1 \times 10^{-2}$ . Estos resultados se atribuyen a la proximidad de los valores de los coeficientes de salto, los cuales indican que los errores introducidos por utilizar a un PCL para determinar a la permeabilidad en la inter-región fluido-medio poroso son atenuados.

Para finalizar, se debe mencionar que, se reconocen las limitaciones de la configuración del medio poroso utilizada en este trabajo. Sin embargo, se puede decir que los resultados aquí presentados, aunque de manera aproximada, proporcionan una perspectiva de los alcances y efectos que tiene el utilizar al PCL simplificado para determinar los cambios espaciales de la permeabilidad en una inter-región fluido-medio poroso. Un análisis más riguroso para respaldar a estos resultados puede ser considerar geometrías más realistas donde se determine a las variaciones de la permeabilidad mediante simulaciones numéricas directas (DNS por sus siglas en inglés, *Direct Numerical Simulations*), *i.e.*, determinar a la permeabilidad por la solución del modelo local en dominios representativos que incluyan a la inter-región fluido-medio poroso. Sin embargo, se espera que esos resultados sean idénticos a los aquí presentados.





# Bibliografía

1. Aguilar-Madera, C. G., Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B. and Ochoa-Tapia, J. A. (2011a). Convective heat transfer in a channel partially filled with a porous medium. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(8), 1355-1368.
2. Aguilar-Madera, C. G., Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B. and Ochoa-Tapia, J. A. (2011b). One-domain approach for heat transfer between a porous medium and a fluid. *International journal of heat and mass transfer*, 54(9), 2089-2099.
3. Alkam, M. K. and Al-Nimr, M. A. (1999). Improving the performance of double-pipe heat exchangers by using porous substrates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(19), 3609-3618.
4. Beavers, G. S. and Joseph, D. D. (1967). Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of fluid mechanics*, 30(01), 197-207.
5. Beavers, G. S., Sparrow, E. M. and Magnuson, R. A. (1970). Experiments on coupled parallel flows in a channel and a bounding porous medium. *Journal of Basic Engineering*, 92(4), 843-848.
6. Beavers, G. S., Sparrow, E. M. and Masha, B. A. (1974). Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow. *AIChE Journal*, 20(3), 596-597.
7. Beckermann, C., Ramadhyani, S. and Viskanta, R. (1987). Natural convection Flow and heat transfer between a fluid layer and a porous layer inside a rectangular enclosure. *Journal of heat transfer*, 109, 363.
8. Chavarría Ornelas, J. (2016). Modelado de flujo en sistemas estratificados. Maestría en ciencias (Ingeniería Química). Universidad Autónoma Metropolitana.

9. Duarte, S. P., Ferretti, O. A. and Lemcoff, N. O. (1984). A heterogeneous one-dimensional model for non-adiabatic fixed bed catalytic reactors. *Chemical engineering science*, 39(6), 1025-1031.
10. Ergun, S. (1952). Fluid flow through packed columns. *Chem. Eng. Prog.*, 48, 89-94.
11. Froment, G. F., Bischoff, K. B. and De Wilde, J. (2011). *Chemical Reactor-Analysis and Design*.
12. Goyeau, B., Lhuillier, D., Gobin, D. and Velarde, M. G. (2003). Momentum transport at a fluid-porous interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(21), 4071-4081.
13. Jiménez-Islas, H., Calderón-Ramírez, M., Navarrete-Bolaños, J. L., Botello -Álvarez, J. E., Martínez-González, G. M. and López-Isunza, F. (2009). Estudio numérico de la convección natural en una cavidad cuadrada en 2-D con interfase fluido-medio poroso y generación de calor. *Revista mexicana de ingeniería química*, 8(2), 169-185.
14. Kuznetsov, A. V. (1996). Analytical investigation of the fluid flow in the interface region between a porous medium and a clear fluid in channels partially filled with a porous medium. *Applied scientific research*, 56(1), 53-67.
15. McCabe, W. L., Smith, J. C. and Harriott, P. (1993). *Unit operations of chemical engineering* (Vol. 5, p. 154). New York: McGraw-Hill.
16. Neale, G. and Nader, W. (1974). Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law: coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 52(4), 475-478.
17. Nield, D. A. (1991). The limitations of the Brinkman-Forchheimer equation in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 12(3), 269-272.
18. Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1995a). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(14), 2635-2646.

19. Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1995b). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-II. Comparison with experiment. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(14), 2647-2655.
20. Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1997). Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(11), 2691-2707.
21. Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1998a). Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: the one-equation model. *Journal of Porous Media*, 1(1).
22. Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1998b). Momentum jump condition at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: inertial effects. *Journal of Porous Media*, 1(3), 201-217.
23. Richardson, S. (1971). A model for the boundary condition of a porous material. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 49(02), 327-336.
24. Ross, S. M. (1983). Theoretical model of the boundary condition at a fluid-porous interface. *AIChE journal*, 29(5), 840-846.
25. Saffman, P. G. (1971). On the boundary condition at the surface of a porous medium. *Studies in Applied Mathematics*, 50(2), 93-101.
26. Sahraoui, M. and Kaviany, M. (1992). Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(4), 927-943.
27. Seader, J. D., Henley, E. J. and Roper, D. K. (1998). *Separation process principles*.
28. Shukla, K. N. (1990). *Diffusion processes during drying of solids (Vol. 11)*. World Scientific.
29. Targui, N. y Kahalerras, H. (2013). Analysis of a double pipe heat exchanger performance by use of porous baffles and pulsating flow. *Energy conversion and management*, 76, 43-54.
30. Targui, N. and Kahalerras, H. (2014). Analysis of a double pipe heat exchanger performance by use of porous baffles and nanofluids. *Analysis*, 1, 9396.

31. Taylor, G. I. (1971). A model for the boundary condition of a porous material. Part 1. *Journal of Fluid Mechanics*, 49(02), 319-326.
32. Vafai, K. and Kim, S. J. (1990). Fluid mechanics of the interface region between a porous medium and a fluid layer-an exact solution. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 11(3), 254-256.
33. Vafai, K. and Kim, S. J. (1995). On the limitations of the Brinkman-Forchheimer-extended Darcy equation. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 16(1), 11-15.
34. Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B. and Ochoa-Tapia, J. A. (2006). Diffusive mass transfer between a microporous medium and an homogeneous fluid: Jump boundary conditions. *Chemical engineering science*, 61(5), 1692-1704.
35. Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B. and Ochoa-Tapia, J. A. (2007a). Jump momentum boundary condition at a fluid-porous dividing surface: Derivation of the closure problem. *Chemical engineering science*, 62(15), 4025-4039.
36. Valdés-Parada, F. J., Ochoa-Tapia, J. A. and Alvarez-Ramirez, J. (2007b). Diffusive mass transport in the fluid-porous medium inter-region: Closure problem solution for the one-domain approach. *Chemical Engineering Science*, 62(21), 6054-6068.
37. Valdés-Parada, F. J., Alvarez-Ramírez, J., Goyeau, B. and Ochoa-Tapia, J. A. (2009a). Computation of jump coefficients for momentum transfer between a porous medium and a fluid using a closed generalized transfer equation. *Transport in Porous Media*, 78(3), 439-457.
38. Valdés-Parada, F. J., Alvarez-Ramirez, J., Goyeau, B. and Ochoa-Tapia, J. A. (2009b). Jump condition for diffusive and convective mass transfer between a porous medium and a fluid involving adsorption and chemical reaction. *Transport in porous media*, 78(3), 459-476.
39. Valdés-Parada, F. J., Aguilar-Madera, C. G., Ochoa-Tapia, J. A. and Goyeau, B. (2013). Velocity and stress jump conditions between a porous medium and a fluid. *Advances in Water Resources*, 62, 327-339.
40. Whitaker, S. (1969). Advances in theory of fluid motion in porous media. *Industrial and Engineering Chemistry*, 61(12), 14-28.

41. Whitaker, S. (1999). The method of volume averaging, theory and applications of transport in porous media. Dordrecht: Kluwer Academic.
42. Wood, B. D., Quintard, M. and Whitaker, S. (2000). Jump conditions at non-uniform boundaries: the catalytic surface. *Chemical Engineering Science*, 55(22), 5231-5245.
43. Wood, B. D. and Valdés-Parada, F. J. (2013). Volume averaging: Local and nonlocal closures using a Green's function approach. *Advances in water resources*, 51, 139-167.
44. Yu, P. (2012). Numerical simulation on oxygen transfer in a porous scaffold for animal cell culture. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(15), 4043-4052.



# Apéndice A

## Ecuaciones promedio

En este apéndice se presentan los detalles relacionados con el desarrollo de las ecuaciones promedio del ODA y del TDA. El desarrollo se lleva a cabo usando un marco teórico proporcionado por el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999), el cual parte del planteamiento del modelo que gobierna el problema en la escala local. Con esto en mente, para el problema aquí estudiado, se tiene que el modelo local está dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{A.1a})$$

$$0 = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{A.1b})$$

$$\mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{A.1c})$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\beta,e} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta,e} \quad (\text{A.1d})$$

### A.1. Ecuaciones del modelo de un dominio (ODA)

#### A.1.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad macroscópica, se puede obtener al aplicar el operador de promedio superficial a la Ec. (A.1a), lo cual da como resultado a

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

Ahora para intercambiar integración por diferenciación espacial, se utiliza el teorema del promediado espacial (Howes y Whitaker, 1985) en la ecuación anterior para obtener

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

Cabe señalar que en la ecuación anterior se ha tomado en cuenta a la condición de no deslizamiento dada por la Ec. (A.1c). Adicionalmente, al emplear la relación de Dupuit-Forchheimer, la Ec. (A.3) se puede escribir en términos de promedios intrínsecos como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = -\nabla \ln \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.4})$$

### A.1.2. Ecuación de movimiento

Dirigiendo la atención a la deducción de la ecuación macroscópica de cantidad de movimiento, el desarrollado inicia al aplicar el operador de promedio superficial a la Ec. (A.1b), lo cual conduce a

$$0 = -\langle \nabla p_\beta \rangle + \langle \rho_\beta \mathbf{g} \rangle + \langle \mu_\beta \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (\text{A.5})$$

donde al considerar como constantes a la densidad, viscosidad y gravedad dentro de la región de promediado toma la forma

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (\text{A.6})$$

Usando el teorema del promediado espacial (Howes y Whitaker, 1985) en el primer término del lado derecho de esta ecuación da lugar a

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \nabla \langle p_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} p_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} dA \quad (\text{A.7})$$

Con ayuda de la ecuación de Dupuit-Forchheimer para la presión y el teorema del promediado espacial para  $\psi_\beta = 1$ , la Ec. (A.7) puede escribirse como

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left( p_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta \right) dA \quad (\text{A.8})$$

De forma similar, al utilizar al menos dos veces el teorema del promediado espacial en el último término de la Ec. (A.3) se obtiene

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla \cdot \left[ \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_\beta dA \right] + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{A.9})$$



Resultado que, después introducir a la condición de frontera de no deslizamiento, se reduce a

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta dA \quad (\text{A.10})$$

De esta manera, al reemplazar a las Ecs. (A.8) y (A.10) en la Ec. (A.5) da lugar a

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left( p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta \right) dA + \frac{\mu_\beta}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA \quad (\text{A.11})$$

De donde al usar la ecuación de Dupuit-Forchheimer para la velocidad y el teorema del promediado espacial para  $\psi_\beta = 1$ , se puede deducir la siguiente ecuación macroscópica de cantidad de movimiento

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left( \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right) - \mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) \quad (\text{A.12})$$

donde se ha introducido la siguiente definición

$$-\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left[ -\mathbf{1} \left( p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta \right)|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \left( \nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \right) \right] dA \quad (\text{A.13})$$

De acuerdo con Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a,b) y Valdés-Parada et al. (2007a), un forma más conveniente de escribir al vector  $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x})$  es

$$-\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}) = -\mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (\text{A.14})$$

el cual es un término de Darcy con las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad, lo cual permite escribir a la Ec. (A.12) como

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \left( \varepsilon_\beta^{-1} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \right) - \mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (\text{A.15})$$

o en términos de promedios intrínsecos como

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \mu_\beta \varepsilon_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{A.16})$$

## A.2. Ecuaciones del modelo dos dominios (TDA)

A continuación, cuando las siguientes restricciones de longitudes de escala se satisfacen en ambas regiones homogéneas (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995a)

$$r_0^2 \ll L_{v1} L_v; \quad r_0^2 \ll L_{p1} L_p; \quad r_0 \ll L_v, L_p; \quad \ell_\beta \ll r_0 \quad (\text{A.17})$$

las Ecs. (A.3) y (A.15) toman la siguiente forma

- Región homogénea— $\eta$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta = \mathbf{0} \quad (\text{A.18a})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle_\eta^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \varepsilon_{\beta\omega}^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta \quad (\text{A.18b})$$

- Región homogénea— $\omega$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega = \mathbf{0} \quad (\text{A.18c})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega^\beta - \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \quad (\text{A.18d})$$

Sin embargo, como las restricciones de longitudes de escala dadas por la Ec. (A.17) no se satisfacen dentro de inter-egión fluido-medio poroso, las ecuaciones anteriores no son validas dentro de dicha zona de transición. Esto hace necesario derivar las condiciones de salto para unir el transporte de cantidad de movimiento en la región homogénea del fluido con el transporte de cantidad de movimiento en la región homogénea del medio poroso.

### A.3. Caso de estudio

Con el fin de hacer el análisis más sencillo en el sistema aquí considerado, se supone que el flujo es unidireccional y completamente desarrollado, por lo que los cambios más importantes de las cantidades se llevan a cabo en la dirección vertical (*i.e.*, en la dirección  $x$ ) y la única componente de la velocidad que existe es la que va en la dirección del flujo (*i.e.*, en la dirección  $x$ ). Nótese que el sistema considerado es similar a la configuración experimental estudiada por Beavers y Joseph (1967). Con base en lo anterior, se lleva a cabo el producto escalar de la Ec. (A.15) con el vector unitario  $\mathbf{e}_x$ , para obtener, después de usar la ecuación de Dupuit-Forchheimer, la siguiente forma de la ecuación del ODA

$$0 = -\frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} + \mu_\beta \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy^2} + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle^\beta}{dy} + \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} \langle v_\beta \rangle^\beta - \mu_\beta \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}(y) \cdot \langle v_\beta \rangle^\beta \quad (\text{A.19})$$

donde  $\langle v_\beta \rangle = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \cdot \mathbf{e}_x$  y  $K_\beta(y) = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}_\beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x$  son las componentes tangenciales de la velocidad y de la permeabilidad a la frontera macroscópica. Análogamente, al tomar el producto escalar de las Ecs. (A.18b) y (A.18d) con el vector unitario  $\mathbf{e}_x$ , da lugar a las siguiente forma de las ecuaciones del TDA

$$0 = -\frac{d^2 \langle p_\beta \rangle_\eta^\beta}{dx} + \mu_\beta \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} \quad \text{en la región homogénea} - \eta \quad (\text{A.20a})$$

$$0 = -\frac{d^2 \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta}{dx} + \mu_\beta \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \quad \text{en la región homogénea} - \omega \quad (\text{A.20b})$$



## Apéndice B

# Problema de cerradura local

En este apéndice se presentan los detalles relacionados con el desarrollo del problema de cerradura local (PCL) obtenido por Valdés-Parada et al. (2007a), el cual permite determinar a las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad y así cerrar el ODA.

### B.1. Uso de la descomposición espacial

En este punto, se debe notar que la ecuación promedio del ODA (Ec. A.15) está en términos de cantidades locales y cantidades promedio a través de la Ec. (A.13). Con el fin de eliminar a las cantidades locales, se propone utilizar la descomposición espacial definida por Gray (1975) como

$$\psi_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \tilde{\psi}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} \quad (\text{B.1})$$

Sin embargo, nótese que los promedios en esta ecuación están evaluados en  $\mathbf{r}_\beta$ , mientras que los promedios en la ecuación del ODA están evaluados en  $\mathbf{x}$ . Debido a esto, es necesario aproximar los valores promedio evaluados en  $\mathbf{r}_\beta$  con su valor en  $\mathbf{x}$  mediante una expansión en series de Taylor como sigue

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{r}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} + \mathbf{y}_\beta \cdot \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{y}_\beta \mathbf{y}_\beta : \nabla \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} + \dots \quad (\text{B.2})$$

donde el estimado de orden de magnitud de cada término de la serie anterior es

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O} \left( \langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{y}_\beta \cdot \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O} \left( \frac{r_0}{L_\lambda} \langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{y}_\beta \mathbf{y}_\beta : \nabla \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O} \left( \frac{r_0^2}{L_\lambda^2} \langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.5})$$

Al utilizar la restricción de escala definida anteriormente por

$$\frac{r_0}{L_\lambda} \ll 1, \quad \lambda = \omega, \eta$$

se pueden despreciar todos los términos del lado derecho de la Ec. (B.2) con respecto al primero. Esto permite hacer la suposición de que el promedio intrínseco en la descomposición espacial de Gray (1975) está evaluada en  $\mathbf{x}$ , *i.e.*

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x} + \mathbf{y}_\beta} \approx \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{B.6})$$

Como consecuencia, dicha descomposición espacial se puede expresar de la siguiente forma

$$\psi_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}_\beta} + \tilde{\psi}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} \quad (\text{B.7})$$

En particular, las descomposiciones espaciales de la presión y velocidad local pueden escribirse como

$$p_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} = \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \tilde{p}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} \quad (\text{B.8a})$$

$$\mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} \quad (\text{B.8b})$$

Usando estos resultados, la Ec. (A.13) se reduce a

$$-\mu_\beta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \left( -\mathbf{l} \tilde{p}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta \Big|_{\mathbf{r}_\beta} \right) dA \quad (\text{B.9})$$

De esta manera, la ecuación del ODA ahora está definida en términos de promedios y desviaciones. En otras palabras, la ecuación del ODA ahora es una ecuación abierta debido a que involucra a dos incógnitas y sólo una ecuación. Para superar a esto, es necesario deducir y resolver el problema de valor a la frontera asociado a las desviaciones, lo cual se logra convencionalmente mediante un proceso conocido como *problema de cerradura*.

## B.2. Problema de cerradura local (PCL)

Con el fin de obtener el problema de valor a la frontera asociado a las desviaciones de  $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$  y  $\tilde{p}_\beta$ , es necesario introducir las Ecs. (B.8) en las Ecs. (A.1) y posteriormente restar a este resultado las Ecs. (A.4) y (A.15), para obtener

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{fuente}} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \underbrace{\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{fuente}} - \underbrace{\mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{fuente}} + \underbrace{\mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{fuente}} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.11})$$

Por otro lado, al introducir la descomposición espacial de la velocidad en la Ec. (A.1), se obtiene la condición de frontera interfacial para el problema de las desviaciones

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = -\underbrace{\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{fuente}} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{B.12})$$

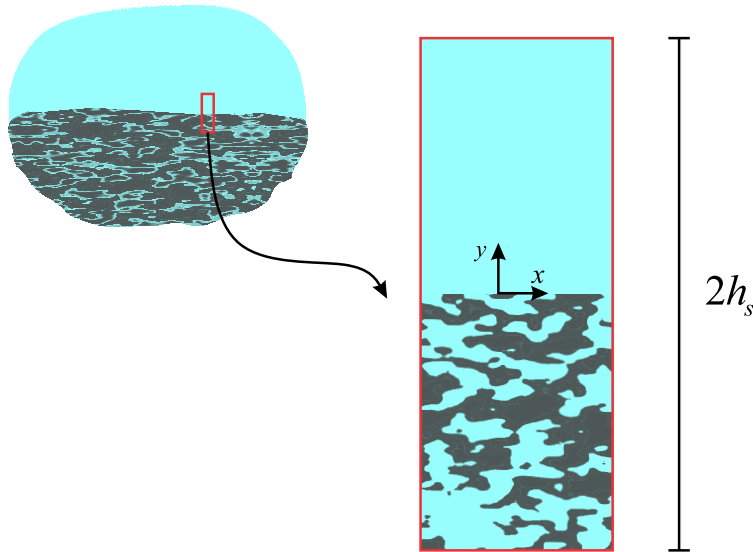


Figura B.1: Muestra representativa de la inter-región medio poroso-fluido

Además, para completar el problema de las desviaciones, se pueden imponer las siguientes condi-

ciones de frontera

$$\text{en } y = h \quad \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \tilde{\mathbf{v}}_\eta = \mathbf{0}; \quad \tilde{p}_\beta = \tilde{p}_{\beta,\eta} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\text{en } y = -h \quad \tilde{\mathbf{v}}_\beta = \tilde{\mathbf{v}}_\omega; \quad \tilde{p}_\beta = \tilde{p}_{\beta,\omega} \quad (\text{B.14})$$

$$\tilde{p}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{p}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.15})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{\mathbf{v}}_\beta(\mathbf{r}); \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.16})$$

Dichas condiciones de frontera se basan en que el dominio de solución del problema de las desviaciones es una celda unitaria periódica de tamaño  $2h$ , como la que se muestra en la Figura B.1. Esta celda unitaria debe ser lo suficientemente grande, de tal forma que incluya a la inter-región fluido-medio poroso y que las desviaciones en las fronteras superior e inferior correspondan a las asociadas en las regiones homogéneas. Con esto en mente, debido a la linealidad del problema de las desviaciones se puede utilizar el principio de superposición para escribir la siguiente solución formal de los campos de las desviaciones

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{C}_\beta : \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{B}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.17a})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{A}_\beta : \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \mathbf{b}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.17b})$$

donde  $\mathbf{A}_\beta$ ,  $\mathbf{C}_\beta$ ,  $\mathbf{B}_\beta$  y  $\mathbf{b}_\beta$  se conocen como variables de cerradura locales. Ahora al introducir las Ecs. (B.17) en las Ecs. (B.10)-(B.16), se pueden extraer los siguientes PCL

*Problema I*

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\beta = \varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \mathbf{b}_\beta + \nabla^2 \mathbf{B}_\beta - \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \varepsilon_\beta \mathbf{l} + \varepsilon_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{B}_\beta = -\mathbf{l} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{B.20})$$

$$\text{en } y = h \quad \mathbf{B}_\beta = \mathbf{0} \quad \mathbf{b}_\beta = \mathbf{0} \quad (\text{B.21})$$

$$\text{en } y = -h \quad \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_\beta \quad \mathbf{b}_\beta = \mathbf{b}_\omega \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{B}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{B}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{b}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{b}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.24})$$



*Problema II*

$$\nabla \cdot \mathbf{C}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.25})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \mathbf{A}_\beta + \nabla^2 \mathbf{C}_\beta - \varepsilon_\beta^{-1} \nabla^2 \varepsilon_\beta \mathbf{I} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{C}_\beta = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (\text{B.27})$$

$$\text{en } y = h \quad \mathbf{C}_\beta = \mathbf{0} \quad \mathbf{A}_\beta = \mathbf{0} \quad (\text{B.28})$$

$$\text{en } y = -h \quad \mathbf{C}_\beta = \mathbf{0} \quad \mathbf{A}_\beta = \mathbf{0} \quad (\text{B.29})$$

$$\mathbf{C}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{C}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.30})$$

$$\mathbf{A}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{A}_\beta(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.31})$$

No obstante, de acuerdo con Valdés-Parada et al. (2007a), si se satisface la siguiente restricción de longitud de escala

$$\frac{\ell_\beta^2}{r_0 L} \ll 1 \quad (\text{B.32})$$

los campos de desviaciones se pueden reducir a

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{B}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.33a})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{b}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.33b})$$

lo cual sugiere que para determinar los campos de las desviaciones sólo será necesario resolver el *Problema I*. Por último, al introducir a las Ecs. (B.33) en la Ec. (B.9) se obtiene que el tensor de permeabilidad es

$$-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{l}\mathbf{b}_\beta + \nabla \mathbf{B}_\beta) dA \quad (\text{B.34})$$

el cual proporciona la forma cerrada de la ecuación promedio del ODA dada por la Ec. (A.15).



## Apéndice C

# Problema de cerradura macroscópico

### C.1. El problema de cerradura macroscópico

Para cuantificar las desviaciones macroscópicas de la velocidad entre el ODA y el TDA, es necesario plantear y resolver formalmente los problemas de valor a la frontera que gobiernan los campos de estas desviaciones. Para ello, se introducen las siguientes variables de las desviaciones macroscópicas

$$\langle v_\beta \rangle^\beta = \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + \hat{v}_\eta \quad \langle v_\beta \rangle^\beta = \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + \hat{v}_\omega \quad (\text{C.1})$$

Estas definiciones sugieren que las ecuaciones que gobiernan a las desviaciones macroscópicas pueden obtenerse al substraer las Ecs. (2.17) a la Ec. (2.15), lo cual da como resultado a

$$0 = \underbrace{L(\hat{v}_\eta) + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy}}_{\text{Fuente}} \Big|_{y_0} + \underbrace{M_\beta \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}_{\text{Fuente}} \Big|_{y_0} \quad \forall y \in (y_0, y_\eta) \quad (\text{C.2a})$$

$$0 = \underbrace{L(\hat{v}_\eta) + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy}}_{\text{Fuente}} \Big|_{y_0} + \underbrace{(M_\beta + \varepsilon_\beta \omega K_\beta^{-1}) \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}_{\text{Fuente}} \Big|_{y_0} \quad \forall y \in (-y_\omega, y_0) \quad (\text{C.2b})$$

donde se han utilizado las siguientes definiciones

$$L(\cdot) = \left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} + M_\beta \right\} (\cdot) \quad (\text{C.3a})$$

$$M_\beta = \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1} \quad (\text{C.3b})$$

Nótese que, en las Ecs. (C.2) se ha considerado que la longitud característica de la región donde las desviaciones macroscópicas son diferentes de cero [ $\mathbf{O}(\delta = y_\omega + y_\eta)$ ], es mucho menor que la longitud

característica asociada a los cambios de las cantidades promedio  $[\mathbf{O}(L_\lambda)]$ , *i.e.*,  $\delta \ll L_\lambda$ . Lo anterior permite aproximar mediante una expansión en series de Taylor, a los valores de los términos que involucran a la velocidad promedio y su derivada en la posición de la superficie divisoria y tratarlos como fuentes constantes dentro de la región donde las desviaciones son diferentes de cero. Para completar el problema de las desviaciones macroscópicas de la velocidad, es razonable imponer las siguientes condiciones de frontera

$$\text{en } y = y_\eta \quad \hat{v}_\eta = 0; \quad \frac{d\hat{v}_\eta}{dy} = 0 \quad (\text{C.4a})$$

$$\text{en } y = -y_\omega \quad \hat{v}_\omega = 0; \quad \frac{d\hat{v}_\omega}{dy} = 0 \quad (\text{C.4b})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} = \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} \quad (\text{C.4c})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (\text{C.4d})$$

Las primeras dos condiciones de frontera están basadas en que fuera de la zona localizada en  $y \in (-y_\omega, y_\eta)$ , las desviaciones entre el ODA y el TDA deben ser despreciables. Por su parte, las últimas dos condiciones de frontera se basan en que la velocidad y el esfuerzo dados por el ODA son cantidades continuas dentro de la zona ubicada en  $y \in (-y_\omega, y_\eta)$ . Adicionalmente, usando a las Ecs. (C.1), las Ecs. (C.4c) y (C.4d) pueden escribirse como

$$\text{en } y = y_0 \quad \hat{v}_\eta + \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} = \hat{v}_\omega + \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} \quad (\text{C.5a})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{d\hat{v}_\eta}{dy} + \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = \frac{d\hat{v}_\omega}{dy} + \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (\text{C.5b})$$

Por lo tanto, el problema de valor a la frontera de las desviaciones macroscópicas de la velocidad está dado por las Ecs. (C.2), las cuales están sujetas a las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (C.4a), (C.4b) y (C.5). Debido a la linealidad de este problema de valor a la frontera, se puede usar el principio de superposición para expresar los campos de las desviaciones macroscópicas de la velocidad en términos de las fuentes constantes como

$$\hat{v}_\eta = s_{1\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} + s_{2\eta} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} + b_{1\eta} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + b_{2\eta} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (\text{C.6a})$$

$$\hat{v}_\omega = s_{1\omega} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} + s_{2\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} + b_{1\omega} \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + b_{2\omega} \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (\text{C.6b})$$

donde los coeficientes que multiplican a los términos fuente se denominan como variables de cerradura macroscópicas, las cuales se obtienen al resolver los problemas de cerradura macroscópicas asociados. La derivación y solución de estos problemas de cerradura se presentan en la siguiente sección.

## C.2. Problemas de valor a la frontera de las variables de cerradura macroscópicas

Con el fin de obtener los problemas de cerradura macroscópicas, es necesario introducir los campos de las desviaciones macroscópicas (Ecs. C.6) en las ecuaciones que gobiernan a estas mismas desviaciones (Ecs. C.2) y así como a sus respectivas condiciones de frontera (Ecs. C.4a, C.4b y C.5). Lo anterior permite extraer los cuatro problemas de cerradura macroscópicas siguientes

*Problema I*

$$L(s_{1\eta}) + M_\beta = 0 \quad \forall y \in (y_0, y_\eta) \quad (\text{C.7a})$$

$$L(s_{1\omega}) = 0 \quad \forall y \in (-y_\omega, y_0) \quad (\text{C.7b})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad s_{1\eta} = s_{1\omega} - 1 \quad (\text{C.7c})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{ds_{1\omega}}{dy} = \frac{ds_{1\eta}}{dy} \quad (\text{C.7d})$$

$$\text{en } y = y_\eta \quad s_{1\eta} = 0; \quad (\text{C.7e})$$

$$\text{en } y = -y_\omega \quad s_{1\omega} = 0; \quad (\text{C.7f})$$

*Problema II*

$$L(s_{2\eta}) = 0 \quad \forall y \in (y_0, y_\eta) \quad (\text{C.8a})$$

$$L(s_{2\omega}) + M_\beta + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} = 0 \quad \forall y \in (-y_\omega, y_0) \quad (\text{C.8b})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad s_{2\eta} = s_{2\omega} + 1 \quad (\text{C.8c})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{ds_{2\omega}}{dy} = \frac{ds_{2\eta}}{dy} \quad (\text{C.8d})$$

$$\text{en } y = y_\eta \quad s_{2\eta} = 0 \quad (\text{C.8e})$$

$$\text{en } y = -y_\omega \quad s_{2\omega} = 0 \quad (\text{C.8f})$$

*Problema III*

$$L(b_{1\eta}) + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} = 0 \quad \forall y \in (y_0, y_\eta) \quad (\text{C.9a})$$

$$L(b_{1\omega}) = 0 \quad \forall y \in (-y_\omega, y_0) \quad (\text{C.9b})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad b_{1\eta} = b_{1\omega} \quad (\text{C.9c})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{db_{1\omega}}{dy} = \frac{db_{1\eta}}{dy} + 1 \quad (\text{C.9d})$$

$$\text{en } y = y_\eta \quad b_{1\eta} = 0 \quad (\text{C.9e})$$

$$\text{en } y = -y_\omega \quad b_{1\omega} = 0 \quad (\text{C.9f})$$

*Problema IV*

$$L(b_{2\eta}) = 0 \quad \forall y \in (y_0, y_\eta) \quad (\text{C.10a})$$

$$L(b_{2\omega}) + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} = 0 \quad \forall y \in (-y_\omega, y_0) \quad (\text{C.10b})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad b_{2\eta} = b_{2\omega} \quad (\text{C.10c})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{db_{2\omega}}{dy} = \frac{db_{2\eta}}{dy} - 1 \quad (\text{C.10d})$$

$$\text{en } y = y_\eta \quad b_{2\eta} = 0 \quad (\text{C.10e})$$

$$\text{en } y = -y_\omega \quad b_{2\omega} = 0 \quad (\text{C.10f})$$

Como se ya se ha mencionado anteriormente, para resolver a los problemas de cerradura macroscópicos se debe contar con las variaciones espaciales de la fracción volumétrica ( $\varepsilon_\beta(y)$ ) y de la permeabilidad ( $K_\beta(y)$ ) en la inter-región fluido-medio poroso. Para este fin, el coeficiente  $\varepsilon_\beta(y)$  se obtiene

directamente de relacionar la geometría del medio poroso utilizado en la DAS, el cual consiste en un arreglo de placas paralelas. Por otro lado, el coeficiente de permeabilidad se obtiene mediante dos alternativas: a partir de la información de la DAS y del problema de cerradura local (PCL).

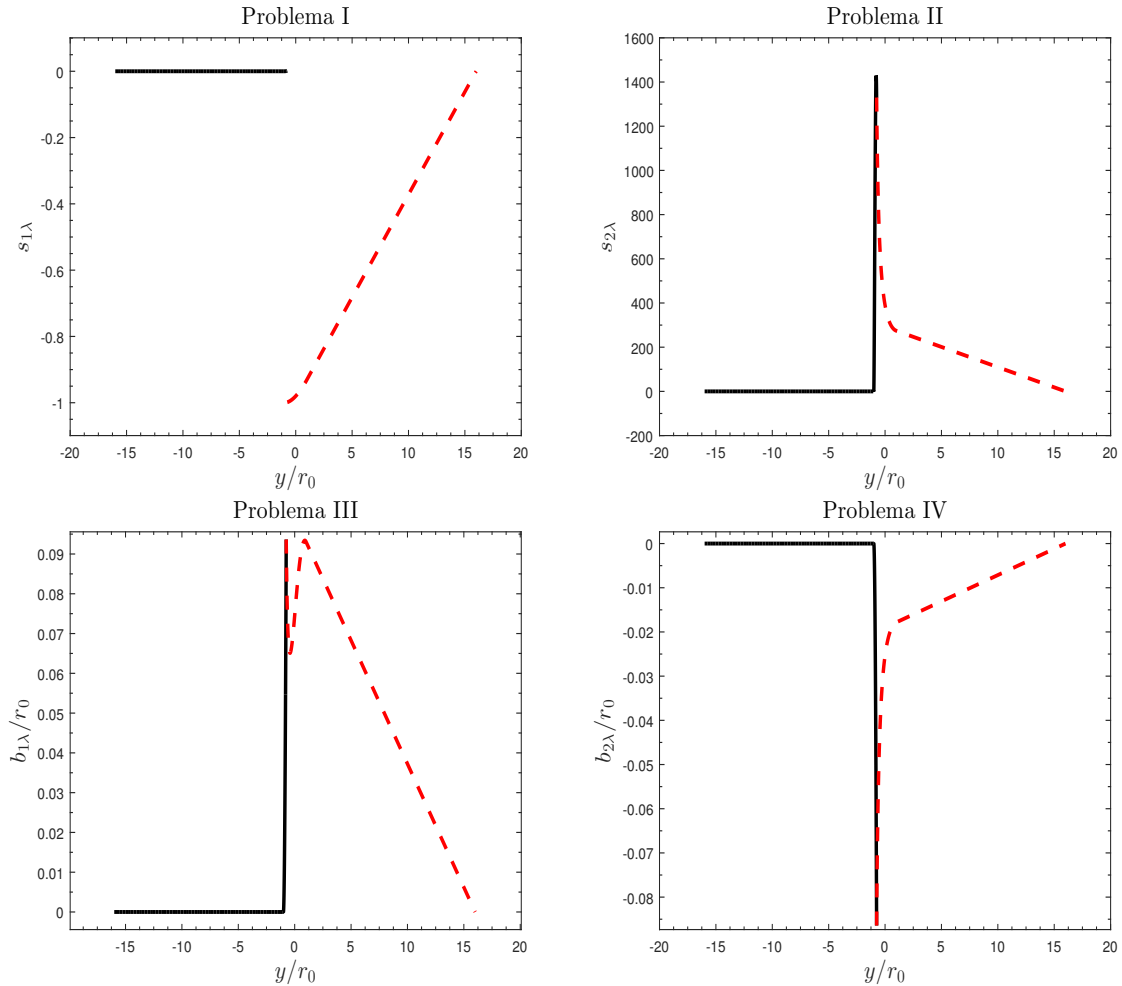


Figura C.1: Ejemplo de los campos de las variables de cerradura macroscópicas para  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ ,  $y_0 = -0.75$  y  $\delta = 32r_0$ .

Una vez determinadas las variaciones espaciales tanto de la porosidad como de la permeabilidad, se puede resolver a los problemas de cerraduras antes mencionados. Debido a la dependencia no trivial con la posición de los coeficientes efectivos, los problemas de cerradura macroscópicos se resolvieron numéricamente utilizando un esquema de diferencias finitas con suficientes nodos computacionales, de tal manera que la solución fuese independiente de dicho número de nodos. Un ejemplo de los campos de las variables de cerradura macroscópicas se muestran en las Figuras C.1 para  $\varepsilon_{\beta\omega} = 0.8$ ,

$y_0 = -0.75$  y  $\delta = 32r_0$ . Donde puede notarse que en la parte del dominio que corresponde a la región homogénea  $-\omega$  ( $y \leq -r_0$ ), en general, el campo de las variables de cerradura se comporta como una constante cercana a cero. En contraste, en la parte del dominio que corresponde a la región homogénea  $-\eta$ , el campo de las variables de cerradura se comporta como una línea recta que tiende a cero. Además, se puede ver que los mayores cambios en el campo de las variables de cerradura se presentan dentro del dominio correspondiente a la inter-región fluido-meido poroso ( $-r_0 \leq y \leq r_0$ ), donde ciertamente los coeficientes efectivos tienen cambios drásticos de una región homogénea a otra.

### C.3. Determinación de los parámetros de salto

Además de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos, para resolver a los problemas de cerradura macroscópicos también se requiere conocer la posición de la superficie divisoria ( $y_0$ ) y las posiciones de los límites donde las desviaciones macroscópicas entre en ODA y el TDA son diferentes de cero ( $y_\omega$  y  $y_\eta$ ). Sin embargo, los valores de estas posiciones no se conocen *a priori*. Con el fin de determinar a dichas posiciones y al mismo tiempo a los coeficientes de salto, se debe utilizar las condiciones de frontera de tipo Neumann dadas por las Ecs. (C.4a) y (C.4b). Donde al introducir a las Ecs. (C.6), conducen a

$$f_\eta = \frac{ds_{1\eta}}{dy} \Big|_{y_\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} + \frac{ds_{2\eta}}{dy} \Big|_{y_\eta} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} + \frac{db_{1\eta}}{dy} \Big|_{y_\eta} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + \frac{db_{2\eta}}{dy} \Big|_{y_\eta} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = 0 \quad (\text{C.11a})$$

$$f_\omega = \frac{ds_{1\omega}}{dy} \Big|_{-y_\omega} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} + \frac{ds_{2\omega}}{dy} \Big|_{-y_\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} + \frac{db_{1\omega}}{dy} \Big|_{-y_\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + \frac{db_{2\omega}}{dy} \Big|_{-y_\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = 0 \quad (\text{C.11b})$$

De esta manera, estas ecuaciones deben ser satisfechas en el algoritmo que se muestra en la Figura C.2. Por simplicidad se puede asumir que  $y_\omega = y_\eta$ . Nótese que todos los valores de las incógnitas antes mencionadas se determinan simultáneamente.



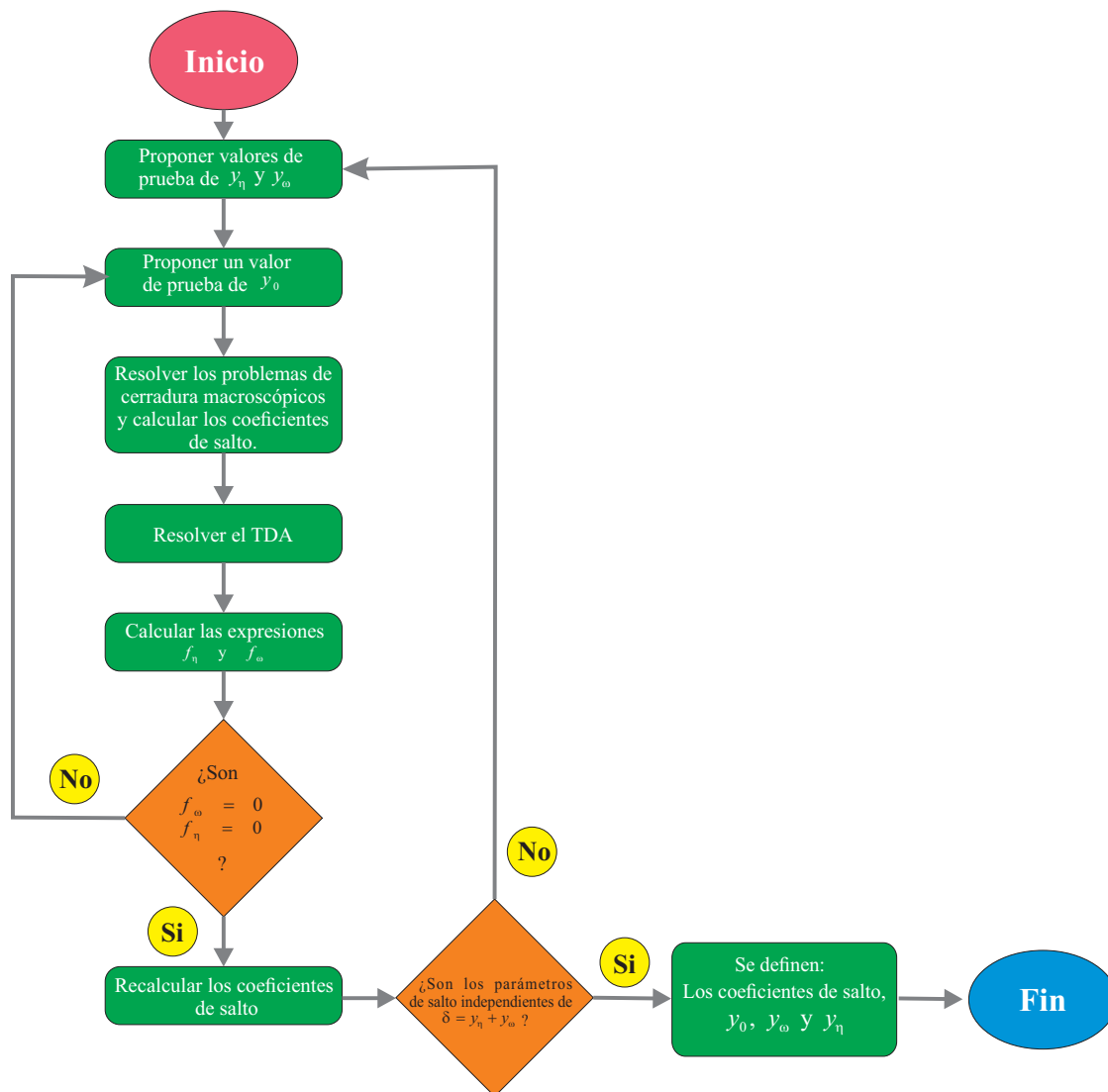


Figura C.2: Algoritmo para determinar tanto a la posición de la superficie divisoria ( $y_0$ ) como a los coeficientes de salto.



## Apéndice D

# Solución analítica de los modelos de uno y dos dominios

### D.1. Solución analítica del modelo de un dominio

Para resolver el ODA con el término  $h_\beta(y) = \mathbf{h}_\beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x$ , es conveniente escribir la ETG en términos de promedio superficial como

$$0 = \mu_\beta \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle}{dy^2} + \varepsilon_\beta(y) \mu_\beta K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty} - \varepsilon_\beta(y) h_\beta(y) \quad (\text{D.1})$$

la cual está sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$\text{en } Y = L_\eta + r_0 \quad \langle v_\beta \rangle = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$\text{en } Y = -L_\omega - r_0 \quad \langle v_\beta \rangle = 0 \quad (\text{D.3})$$

Además considerando la siguientes variables y parámetros adimensionales

$$Y = \frac{y}{r_0}; \quad w_\beta = \frac{\langle v_\beta \rangle}{v_{\text{máx}}^f}; \quad K_\beta^*(y) = \frac{K_\beta(y)}{r_0^2}; \quad F(Y) = \frac{h(y)r_0^2}{\mu_\beta v_{\text{máx}}^f}; \quad (\text{D.4})$$

el ODA toma la siguiente forma

$$0 = \frac{d^2 w_\beta}{dY^2} + \varepsilon_\beta(Y) K_{\beta\omega}^{-1} w_{\omega,\infty} + F(Y) \quad (\text{D.5})$$

$$\text{en } Y = H_\eta + 1 \quad w_\beta = 0 \quad (\text{D.6})$$

$$\text{en } Y = -H_\omega - 1 \quad w_\beta = 0 \quad (\text{D.7})$$

Como consecuencia, la solución analítica del ODA en cada zona del sistema fluido-medio poroso aquí estudiado está dada por

■ *Inter-región fluido-pared superior*

$$w_\beta(Y) = c_1 [Y - (H_\eta + 1)] - m_2 A_2(Y) - B_2(Y) \quad H_\eta - 1 < Y \leq H_\eta + 1 \quad (\text{D.8})$$

donde

$$A_2(Y) = \frac{a_1}{2} \left[ \frac{1}{3} (Y^3 - (H_\eta + 1)^3) - (H_\eta - 1)^2 (Y - (H_\eta + 1)) \right] + b_1 \left[ \frac{1}{2} (Y^2 - (H_\eta + 1)^2) - (H_\eta - 1) (Y - (H_\eta + 1)) \right] \quad (\text{D.9})$$

$$B_2(Y) = F_1 \left[ \frac{1}{2} (Y^2 - (H_\eta + 1)^2) - (H_\eta - 1) (Y - (H_\eta + 1)) \right] \quad (\text{D.10})$$

$$c_1 = F_1 - \frac{1}{2} (w_1 + m_2 A_2|_{Y=H_\eta-1}) \quad (\text{D.11})$$

$$A_2|_{Y=H_\eta-1} = \frac{2}{3} a_1 - 2b_1 - 2H_\eta a_1 \quad (\text{D.12})$$

$$F_1 = \frac{-2}{H_\eta} \quad (\text{D.13})$$

■ *Región de fluido homogéneo*

$$w_\beta(Y) = w_2 + \frac{m_2 \varepsilon \beta \eta}{2} (1 - Y^2) + c_2 (Y - 1) \quad 1 \leq Y \leq H_\eta - 1 \quad (\text{D.14})$$

donde

$$c_2 = \frac{1}{H_\eta - 2} \left[ w_1 - w_2 - \frac{m_2 \varepsilon \beta \eta}{2} (1 - (H_\eta - 1)^2) \right] \quad (\text{D.15})$$

$$w_1 = \frac{2(H_\eta - 2)}{H_\eta} \left[ F_1 - \frac{1}{2} m_2 A_2|_{Y=H_\eta-1} + m_2 \varepsilon \beta \eta (H_\eta - 1) \right] + \frac{2}{H_\eta} \left[ w_2 + \frac{m_2 \varepsilon \beta \eta}{2} (1 - (H_\eta - 1)^2) \right] \quad (\text{D.16})$$

■ *Inter-región fluido-medio poroso*

$$w_\beta(Y) = w_2 + c_4 (Y - 1) - m_2 B_2(Y) - D_2(Y) \quad -1 < Y < 1 \quad (\text{D.17})$$

donde

$$c_4 = \frac{1}{2} [-w_{\beta\omega} + w_2 - m_2 B_2|_{Y=-1} - D_2|_{Y=-1}] \quad (\text{D.18})$$

$$w_2 = \frac{4(H_\eta - 2)}{(H_\eta^2 - 4)} \left[ F_1 - \frac{1}{2} m_2 A_2|_{Y=H_\eta-1} + m_2 \varepsilon_{\beta\eta} (H_\eta - 1) \right] + \frac{4}{H_\eta^2 - 4} \left[ \frac{m_2 \varepsilon_{\beta\eta}}{2} (1 - (H_\eta - 1)^2) \right] + \frac{H_\eta^2}{H_\eta^2 - 4} c_5 \quad (\text{D.19})$$

$$c_5 = -\frac{2}{H} \left[ \frac{m_2 \varepsilon_{\beta\eta}}{2} (1 - (H_\eta - 1)^2) \right] + \frac{2(H_\eta - 2)}{H_\eta} \left[ m_2 \frac{dB_2}{dY} \Big|_{Y=1} + \frac{dD_2}{dY} \Big|_{Y=1} - m_2 \varepsilon_{\beta\eta} \right] + \frac{(H_\eta - 2)}{H_\eta} [w_{\beta\omega} + m_2 B_2|_{Y=-1} + D_2|_{Y=-1}] \quad (\text{D.20})$$

■ *Región de medio poroso homogéneo*

Como se señaló anteriormente lejos de la región de la frontera la velocidad en el seno del medio poros es constantes y está dada por

$$w_\beta(Y) = \varepsilon_{\beta\omega} \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{hH_\eta} \right)^2 \quad -H_\omega + 1 \leq Y \leq -1 \quad (\text{D.21})$$

■ *Inter-región medio poroso-pared inferior*

$$w_\beta(Y) = w_{\beta\omega} + c_5 (Y + H_\omega - 1) - m_2 J_2(Y) - P_2(Y) \quad -H_\omega - 1 \leq y < -H_\omega + 1 \quad (\text{D.22})$$

donde

$$J_2(Y) = \frac{a_3}{2} \left[ \frac{1}{3} (Y^3 - (1 - H_\omega)^3) - (H_\omega - 1)^2 (Y + H_\omega - 1) \right] + b_3 \left[ \frac{1}{2} (Y^2 - (1 - H_\omega)^2) + (H_\omega + 1) (Y + H_\omega - 1) \right] \quad (\text{D.23})$$

$$P_2(Y) = \frac{P_2}{2} \left[ \frac{1}{3} (Y^3 - (1 - H_\omega)^3) - (H_\omega - 1)^2 (Y + H_\omega - 1) \right] + k_2 \left[ \frac{1}{2} (Y^2 - (1 - H_\omega)^2) + (H_\omega + 1) (Y + H_\omega - 1) \right] \quad (\text{D.24})$$

En resumen, el perfil de velocidad promedio en forma adimensional está dado por

$$w_\beta(Y) = \begin{cases} c_1 [Y - (H_\eta + 1)] - m_2 A_2(Y) - E_2(Y) & H_\eta - 1 < Y \leq H_\eta + 1 \\ w_2 + \frac{m_2}{2} (1 - Y^2) + c_2 (Y - 1) & 1 \leq Y \leq H_\eta - 1 \\ w_2 + c_3 (Y - 1) - m_2 B_2(Y) - D_2(Y) & -1 < Y < 1 \\ \varepsilon_{\beta\omega} \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{hH}\right)^2 & -H_\omega + 1 \leq Y \leq -1 \\ w_{\beta\omega} + c_4 (Y + H_\omega - 1) - m_2 J_2(Y) - P_2(Y) & -H_\omega - 1 \leq Y < -H_\omega + 1 \end{cases} \quad (D.25)$$

### D.1.1. Integrales en la inter-región fluido-medio poroso de $\varepsilon_\beta(\xi_0)$ and $R(\xi_0)$

En esta sección se desarrollan las expresiones de las integrales definidas por

$$I_{\eta\omega}[\psi(\xi_0)] = \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} \int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} \psi(\zeta_0) d\zeta_0 dz_0 \quad (D.26)$$

donde  $\psi(\xi_0)$  puede ser ya sea  $\varepsilon_\beta(\xi_0)$  o  $R(\xi_0)$ , las cuales están dadas por

$$\varepsilon_\beta(\xi_0) = \frac{n_p(\xi_0) \ell_\beta + \ell f_\beta + r_0 + \xi_0}{2r_0} \quad (D.27)$$

$$R(\xi_0) = \frac{1}{2r_0} \left[ [2n_p(\xi_0) + i_\beta(\xi_0)] \frac{dv_z^c}{dy_c} \Big|_{y_c=b} + \frac{dv_z^f}{dy_c} \Big|_{y_f=B} \right] \quad (D.28)$$

Al aplicar el operador integral, definido en la Ec. (D.26), a las Ecs. (D.27) y (D.28) se obtiene

$$I_{\eta\omega}[\varepsilon_\beta(\xi_0)] = \frac{\ell_\beta}{2r_0} I_{\eta\omega}[n_p(\xi_0)] + \frac{\ell}{2r_0} I_{\eta\omega}[f_\beta(\xi_0)] + \frac{1}{2r_0} I_{\eta\omega}[r_0 + \xi_0] \quad (D.29)$$

$$I_{\eta\omega}[R(\xi_0)] = \frac{1}{2r_0} \left[ \{2I_{\eta\omega}[n_p(\xi_0)] + I_{\eta\omega}[i_\beta(\xi_0)]\} \frac{dv_z^c}{dy_c} \Big|_{y_c=b} + I_{\eta\omega}[1] \frac{dv_z^f}{dy_c} \Big|_{y_f=B} \right] \quad (D.30)$$

Las expresiones de las contribuciones  $I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)]$ ,  $I_{\eta\omega} [f_\beta(\xi_0)]$  y  $I_{\eta\omega} [i_\beta(\xi_0)]$  se desarrollan en las siguientes páginas. Sin embargo, los resultados son los siguientes

$$I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)] = \frac{\ell}{2} n_0 (n_0 - 1) (\xi_0 - r_0) - \frac{\ell^2}{12} n_p (n_p - 1) (1 - 2n_p) - \frac{\ell^2}{2} n_p f (1 - n_p - f) \quad (\text{D.31})$$

$$I_{\eta\omega} [f_\beta(\xi_0)] = \frac{\ell}{2} \varepsilon_{\beta\omega}^2 n_0 (\xi_0 - r_0) + \frac{\ell^2}{2} \varepsilon_{\beta\omega}^2 \left[ n_p \frac{n_p - 1}{2} + n_p f \right] + \frac{\ell^2}{6} \left[ n_p \varepsilon_{\beta\omega}^3 + (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^3 \mathcal{U} \{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \quad (\text{D.32})$$

$$I_{\eta\omega} [r_0 + \xi_0] = \frac{1}{6} \left[ (r_0 + \xi_0)^3 - 8r_0^3 \right] \quad (\text{D.33})$$

$$I_{\eta\omega} [i_\beta(\xi_0)] = \ell n_0 \varepsilon_{\beta\omega} (\xi_0 - r_0) + \ell^2 \varepsilon_{\beta\omega} \left[ n_p \frac{n_p - 1}{2} + n_p f \right] + \frac{\ell^2}{2} \left[ \varepsilon_{\beta\omega}^2 n_p + (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U} \{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \quad (\text{D.34})$$

$$I_{\eta\omega} [1] = \left[ \frac{1}{2} (\xi_0^2 - r_0^2) + r_0 \xi_0 - r_0^2 \right] \quad (\text{D.35})$$

donde

$$n_p = \left\lfloor \frac{r_0 - \xi_0}{\ell} \right\rfloor \quad (\text{D.36})$$

$$f = \frac{r_0 - \xi_0}{\ell} - n_p \quad (\text{D.37})$$

**Derivación de la fórmula para  $I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)]$**

Aquí se necesita obtener la integral dada por

$$I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)] = \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} \int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} n_p(\zeta_0) d\zeta_0 dz_0 \quad (\text{D.38})$$

donde

$$n_p(\zeta_0) = \left\lfloor \frac{r_0 - \zeta_0}{\ell} \right\rfloor \quad (\text{D.39})$$

Es conveniente escribir la Ec. (D.38) en términos de la variable  $\chi_0$  dada por

$$\chi_0 = \frac{r_0 - \zeta_0}{\ell} \quad (\text{D.40})$$

y el diferencial

$$d\xi_0 = -\ell d\chi_0$$

De esta manera la Ec. (D.38) toma la forma

$$I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)] = -\ell \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} \int_{\chi_0=n_0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] d\chi_0 dz_0 \quad (\text{D.41})$$

donde

$$f(z_0) = \frac{r_0 - z_0}{\ell} - \lfloor \frac{r_0 - z_0}{\ell} \rfloor = \frac{r_0 - z_0}{\ell} - n_p(z_0) \quad (\text{D.42})$$

Entonces es posible escribir la integral en términos de  $\chi_0$ , como

$$\int_{\chi_0=n_0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] d\chi_0 = \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] d\chi_0 - \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_0} [\chi_0] d\chi_0 \quad (\text{D.43})$$

La primera integral del lado derecho se puede escribir como

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] d\chi_0 = \sum_{n=0}^{n=n_p-1} \int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} n d\chi_0 + \int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} n_p d\chi_0 \quad (\text{D.44})$$

donde

$$\int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} n d\chi_0 = n \quad \text{and} \quad \int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} n_p d\chi_0 = n_p f$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{n=n_p-1} \int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} n d\chi_0 = \sum_{n=0}^{n=n_p-1} n = \sum_{n=1}^{n=n_p-1} n = \frac{n_p(n_p-1)}{2} \quad (\text{D.45})$$

donde la fórmula (19.9) de Spiegel (1968) fue utilizada para reemplazar la suma de  $n$ . Usando este resultado en la Ec. (D.44) rinde

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] d\chi_0 = \frac{n_p(n_p-1)}{2} + n_p f \quad (\text{D.46})$$

Que con  $f = 0$  y  $n_0$  en lugar de  $n_p$  toma la forma

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_0} [\chi_0] d\chi_0 = \frac{n_0(n_0-1)}{2} \quad (\text{D.47})$$



Por lo tanto, el resultado de la integral dada por la Ec. (D.44) es

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] d\chi_0 = \frac{1}{2} [(n_p - 1)n_p - (n_0 - 1)n_0 + 2n_p f] \quad (\text{D.48})$$

Esto permite escribir

$$\int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} n_p(\zeta_0) d\zeta_0 = \frac{\ell}{2} [(n_0 - 1)n_0 - (n_p - 1)n_p - 2n_p f] \quad (\text{D.49})$$

Con este resultado, la Ec. (D.38) se puede escribir como

$$\begin{aligned} I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)] &= \frac{\ell}{2} \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_0(n_0 - 1) dz_0 - \frac{\ell}{2} \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p^2(z_0) dz_0 \\ &\quad + \frac{\ell}{2} \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p(z_0) dz_0 - \ell \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p(z_0) f(z_0) dz_0 \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

Un cambio de variable análogo, al indicado por la Ec. (D.40), permite escribir las últimas tres integrales en el lado derecho de la Ec. (D.50) en la siguiente forma

$$\int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p^2(z_0) dz_0 = -\ell \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0]^2 d\chi_0 \quad (\text{D.51})$$

$$\int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p(z_0) dz_0 = -\ell \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] d\chi_0 = -\frac{\ell}{2} \left[ \frac{n_p(n_p - 1)}{2} + n_p f \right] \quad (\text{D.52})$$

$$\int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p(z_0) f(z_0) dz_0 = -\ell \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] \chi_0 d\chi_0 - \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p^2(z_0) dz_0 \quad (\text{D.53})$$

Donde para el resultado mostrado en la Ec. (D.52) se utilizó la Ec. (D.46). Además, previamente al cambio de variable en la Ec. (D.53),  $f(z_0)$  fue reemplazado con la Ec. (D.42). La integral dada en el lado derecho de la Ec. (D.51) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0]^2 d\chi_0 &= \sum_{n=0}^{n=n_p-1} \int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} n^2 d\chi_0 + \int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} n_p^2 d\chi_0 \\ &= \sum_{n=0}^{n=n_p-1} n^2 + n_p^2 f \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

Qué después de usar la fórmula (19.10) (Spiegel, 1968) da lugar a

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0]^2 d\chi_0 = \frac{n_p(n_p-1)(2n_p-1)}{6} + n_p^2 f \quad (\text{D.55})$$

Por lo tanto, el resultado de la integral mostrada en la Ec. (D.51) es

$$\int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p^2(z_0) dz_0 = -\ell \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0]^2 d\chi_0 = -\ell \left[ \frac{n_p(n_p-1)(2n_p-1)}{6} + n_p^2 f \right] \quad (\text{D.56})$$

Ahora, volviendo a la primera integral en el lado derecho de la Ec. (D.53)

$$\begin{aligned} \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] \chi_0 d\chi_0 &= \sum_{n=0}^{n=n_p-1} \int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} n \chi_0 d\chi_0 + \int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} n_p \chi_0 d\chi_0 \\ &= \sum_{n=0}^{n=n_p-1} \frac{n}{2} [(n+1)^2 - n^2] + \frac{n_p}{2} [(n_p+f)^2 - n_p^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=n_p-1} n(2n+1) + \frac{n_p}{2} (2n_p f + f^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{n=n_p-1} n^2 + \sum_{n=1}^{n=n_p-1} n \right\} + \frac{n_p}{2} (2n_p f + f^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{n_p(n_p-1)(2n_p-1)}{6} + \frac{n_p(n_p-1)}{2} \right\} + \frac{n_p f}{2} (2n_p + f) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] \chi_0 d\chi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{n_p(n_p-1)(4n_p+1)}{6} + n_p f (2n_p + f) \right\} \quad (\text{D.57})$$

Hacia la derivación de  $I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)]$ , es conveniente usar la Ec. (D.53) en la Ec. (D.50) para obtener

$$\begin{aligned} I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)] &= \frac{\ell}{2} n_0 (n_0 - 1) (\xi_0 - r_0) + \frac{\ell}{2} \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p^2(z_0) dz_0 \\ &\quad + \frac{\ell}{2} \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p(z_0) dz_0 + \ell^2 \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0] \chi_0 d\chi_0 \quad (\text{D.58}) \end{aligned}$$

Que después del uso de las Ecs. (D.55), (D.52) and (D.57) conduce a

$$\begin{aligned} I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)] &= \frac{\ell}{2} n_0 (n_0 - 1) (\xi_0 - r_0) \\ &\quad - \frac{\ell^2}{2} \left[ \frac{n_p(n_p-1)(2n_p-1)}{6} + n_p^2 f \right] - \frac{\ell^2}{2} \left[ \frac{n_p(n_p-1)}{2} + n_p f \right] \\ &\quad + \frac{\ell^2}{2} \left\{ \frac{n_p(n_p-1)(4n_p+1)}{6} + n_p f (2n_p + f) \right\} \quad (\text{D.59}) \end{aligned}$$

o

$$I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)] = \frac{\ell}{2} n_0 (n_0 - 1) (\xi_0 - r_0) - \frac{\ell^2}{2} n_p (n_p - 1) \left[ \frac{2n_p - 1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{4n_p + 1}{6} \right] - \frac{\ell^2}{2} n_p f [n_p + 1 - (2n_p + f)]$$

o

$$I_{\eta\omega} [n_p(\xi_0)] = \frac{\ell}{2} n_0 (n_0 - 1) (\xi_0 - r_0) - \frac{\ell^2}{12} n_p (n_p - 1) (1 - 2n_p) - \frac{\ell^2}{2} n_p f (1 - n_p - f) \quad (\text{D.60})$$

### Derivación de la fórmula para $I_{\eta\omega} [f_\beta(\xi_0)]$

En este apartado se obtiene la integral dada por

$$I_{\eta\omega} [f_\beta(\xi_0)] = \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} \int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} f_\beta(\zeta_0) d\zeta_0 dz_0 \quad (\text{D.61})$$

donde

$$f_\beta(\zeta_0) = \frac{r_0 - \zeta_0}{\ell} - \lfloor \frac{r_0 - \zeta_0}{\ell} \rfloor - \varepsilon_{\sigma\omega} \quad (\text{D.62})$$

que existe siempre que  $f_\beta(\zeta_0) > 0$ . Entonces usando la variable  $\chi_0$ , definida en por la Ec. (D.40), la Ec. (D.42) se puede escribir como

$$f_\beta(\chi_0) = [\chi_0 - \lfloor \chi_0 \rfloor - \varepsilon_{\sigma\omega}] \mathcal{U} \{ \chi_0 - \lfloor \chi_0 \rfloor - \varepsilon_{\sigma\omega} \} \quad (\text{D.63})$$

donde  $\mathcal{U} [t - a]$  es la función Heaviside definida como

$$\mathcal{U} [t - a] = \begin{cases} 0, & \text{if } t < a \\ 1, & \text{if } t \geq a \end{cases} \quad (\text{D.64})$$

De esta manera la primera integral en la Ec. (D.61) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} f_\beta(\zeta_0) d\zeta_0 &= -\ell \int_{\chi_0=n_0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} f_\beta(\chi_0) d\chi_0 \\ &= -\ell \int_{\chi_0=n_0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} [\chi_0 - \lfloor \chi_0 \rfloor - \varepsilon_{\sigma\omega}] \mathcal{U} \{ \chi_0 - \lfloor \chi_0 \rfloor - \varepsilon_{\sigma\omega} \} d\chi_0 \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

En esta expresión, la integral en términos de  $\chi_0$  se puede escribir, en términos de la suma de dos integrales como sigue

$$- \int_{\chi_0=n_0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} f_\beta(\chi_0) d\chi_0 = \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_0} f_\beta(\chi_0) d\chi_0 - \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} f_\beta(\chi_0) d\chi_0 \quad (\text{D.66})$$

La segunda de estas integrales también se puede descomponer como

$$\begin{aligned} \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} f_\beta(\chi_0) \chi_0 d\chi_0 &= \sum_{n=0}^{n=n_p-1} \int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} [\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}] \mathcal{U}\{\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}\} d\chi_0 \\ &+ \int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} [\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}] \mathcal{U}\{\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}\} d\chi_0 \end{aligned} \quad (\text{D.67})$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} [\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}] \mathcal{U}\{\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}\} d\chi_0 &= \int_{\chi_0=n+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n+1} [\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}] d\chi_0 \\ &= \frac{1}{2} (\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \Big|_{\chi_0=n+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n+1} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\omega}^2 \end{aligned} \quad (\text{D.68})$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} [\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}] \mathcal{U}\{\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}\} d\chi_0 &= \int_{\chi_0=n_p+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n_p+f} [\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}] d\chi_0 \\ &= \frac{1}{2} (\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \Big|_{\chi_0=n_p+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n_p+f} = \frac{1}{2} (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

Usando los resultados de las dos últimas ecuaciones en la Ec. (D.67) da lugar a

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} f_\beta(\chi_0) d\chi_0 = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{\beta\omega}^2 n_p + (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \quad (\text{D.70})$$

Este resultado también se puede utilizar para evaluar la integral con límites  $[0, n_0]$  y posteriormente con la Ec. (D.70) de la Ec. (D.66)

$$- \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_0} f_\beta(\chi_0) d\chi_0 = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{\beta\omega}^2 (n_0 - n_p) - (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \quad (\text{D.71})$$

Por lo tanto, el resultado de la integral en la Ec. (D.65) es

$$\int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} f_\beta(\zeta_0) d\zeta_0 = \frac{\ell}{2} \left[ \varepsilon_{\beta\omega}^2 (n_0 - n_p) - (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \quad (\text{D.72})$$

La combinación de este resultado con la Ec. (D.61) da lugar a

$$\begin{aligned}
I_{\eta\omega} [f_{\beta}(\xi_0)] &= \frac{\ell}{2} \varepsilon_{\beta\omega}^2 n_0 \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} dz_0 - \frac{\ell}{2} \varepsilon_{\beta\omega}^2 \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p(z_0) dz_0 \\
&\quad - \frac{\ell}{2} \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} (f(z_0) - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{f(z_0) - \varepsilon_{\sigma\omega}\} dz_0 \quad (D.73)
\end{aligned}$$

Se debe notar que en el lado derecho de esta ecuación, los primera integral se puede obtener directamente y el resultado de la segunda ya fue obtenida en la Ec. (D.52). Por lo tanto, ahora se obtendrá el resultado para la tercera integral; primero se debe escribir en términos de la variable  $\chi_0$  como

$$\begin{aligned}
&\int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} (f(z_0) - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{f(z_0) - \varepsilon_{\sigma\omega}\} dz_0 = \\
&\quad - \ell \underbrace{\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p+f} (\chi_0 - \lfloor \chi_0 \rfloor - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{\chi_0 - \lfloor \chi_0 \rfloor - \varepsilon_{\sigma\omega}\} dz_0}_{I_1(\xi_0)} \quad (D.74)
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
I_1(\xi_0) &= \sum_{n=0}^{n=n_p-1} \int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} (\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}\} dz_0 \\
&\quad + \int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} (\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}\} dz_0 \quad (D.75)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} (\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}\} dz_0 = \\
&\quad \int_{\chi_0=n+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n+1} (\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 dz_0 = \frac{1}{3} (\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega})^3 \Big|_{\chi_0=n+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n+1} = \frac{1}{3} \varepsilon_{\beta\omega}^3 \quad (D.76)
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
&\int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} (\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}\} dz_0 = \int_{\chi_0=n_p+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n_p+f} (\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 dz_0 \\
&\quad = \frac{1}{3} (\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega})^3 \Big|_{\chi_0=n_p+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n_p+f} = \frac{1}{3} (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^3 \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \quad (D.77)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I_1(\xi_0) = \frac{1}{3} \left[ n_p \varepsilon_{\beta\omega}^3 + (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^3 \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \quad (\text{D.78})$$

y como consecuencia

$$\int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} (f(z_0) - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U}\{f(z_0) - \varepsilon_{\sigma\omega}\} dz_0 = -\frac{\ell}{3} \left[ n_p \varepsilon_{\beta\omega}^3 + (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^3 \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \quad (\text{D.79})$$

Por lo tanto, el uso de esta ecuación junto con la Ec. (D.52), permite escribir a la Ec. (D.73) como

$$\begin{aligned} I_{\eta\omega} [f_{\beta}(\xi_0)] &= \frac{\ell}{2} \varepsilon_{\beta\omega}^2 n_0 (\xi_0 - r_0) + \frac{\ell^2}{2} \varepsilon_{\beta\omega}^2 \left[ n_p \frac{n_p - 1}{2} + n_p f \right] \\ &\quad + \frac{\ell^2}{6} \left[ n_p \varepsilon_{\beta\omega}^3 + (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^3 \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.80})$$

**-Derivación de la fórmula para  $I_{\eta\omega} [i_{\beta}(\xi_0)]$**

Por último, para determinar la siguiente integral

$$I_{\eta\omega} [i_{\beta}(\xi_0)] = \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} \int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} i_{\beta}(\zeta_0) d\zeta_0 dz_0 \quad (\text{D.81})$$

donde

$$i_{\beta} = \begin{cases} 0, & \text{if } f < \varepsilon_{\sigma\omega} \\ 1, & \text{if } f \geq \varepsilon_{\sigma\omega} \end{cases} \quad (\text{D.82})$$

o en términos de la función Heaviside

$$i_{\beta}(\zeta_0) = \mathcal{U}[f(\zeta_0) - \varepsilon_{\sigma\omega}] \quad (\text{D.83})$$

donde

$$f(\zeta_0) = \frac{r_0 - \zeta_0}{\ell} - n_p(\zeta_0) \quad \text{and} \quad n_p(\zeta_0) = \left\lfloor \frac{r_0 - \zeta_0}{\ell} \right\rfloor \quad (\text{D.84})$$

Usando el cambio de variable indicado por la Ec. (D.40)

$$\int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} i_{\beta}(\zeta_0) d\zeta_0 = -\ell \int_{\chi_0=n_0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} i_{\beta}(\chi_0) d\chi_0$$

Pero

$$- \int_{\chi_0=n_0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} i_{\beta}(\chi_0) d\chi_0 = \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_0} i_{\beta}(\chi_0) d\chi_0 - \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} i_{\beta}(\chi_0) d\chi_0 \quad (\text{D.85})$$

Como antes, la segunda integral se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} i_\beta(\chi_0) d\chi_0 &= \sum_{n=0}^{n=n_p-1} \int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} \mathcal{U}\{\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}\} d\chi_0 \\ &+ \int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} \mathcal{U}\{\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}\} d\chi_0 \end{aligned} \quad (\text{D.86})$$

donde

$$\int_{\chi_0=n}^{\chi_0=n+1} \mathcal{U}\{\chi_0 - n - \varepsilon_{\sigma\omega}\} d\chi_0 = \int_{\chi_0=n+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n+1} d\chi_0 = \chi_0 \Big|_{\chi_0=n_p+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n_p+1} = \varepsilon_{\beta\omega} \quad (\text{D.87})$$

y

$$\int_{\chi_0=n_p}^{\chi_0=n_p+f} \mathcal{U}\{\chi_0 - n_p - \varepsilon_{\sigma\omega}\} d\chi_0 = \int_{\chi_0=n_p+\varepsilon_{\sigma\omega}}^{\chi_0=n_p+f} d\chi_0 = (f - \varepsilon_{\sigma\omega}) \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \quad (\text{D.88})$$

Por lo tanto, la Ec. (D.86) toma la forma

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} i_\beta(\chi_0) d\chi_0 = n_p \varepsilon_{\beta\omega} + (f - \varepsilon_{\sigma\omega}) \mathcal{U}\{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\}$$

Este resultado se puede usar para obtener

$$\int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_0} i_\beta(\chi_0) d\chi_0 = n_0 \varepsilon_{\beta\omega}$$

Las últimas dos ecuaciones se pueden utilizar en la Ec. (D.85) para obtener

$$\int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} i_\beta(\zeta_0) d\zeta_0 = \ell \{ \varepsilon_{\beta\omega} (n_0 - n_p) - (f - \varepsilon_{\sigma\omega}) \mathcal{U}[f - \varepsilon_{\sigma\omega}] \} \quad (\text{D.89})$$

o

$$\int_{\zeta_0=-r_0}^{\zeta_0=z_0} i_\beta(\zeta_0) d\zeta_0 = \ell \{ \varepsilon_{\beta\omega} (n_0 - n_p) - f_\beta(z_0) \} \quad (\text{D.90})$$

donde  $f_\beta$  fue previamente definida por la Ec. (D.62). Ahora la combinación de las Ecs. (D.90) y (D.81)

da lugar a

$$I_{\eta\omega} [i_\beta(\xi_0)] = \ell \varepsilon_{\beta\omega} n_0 (\xi_0 - r_0) - \ell \varepsilon_{\beta\omega} \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} n_p(z_0) dz_0 - \ell \int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} f_\beta(z_0) dz_0 \quad (\text{D.91})$$

En esta expresión el resultado de la primer integral está dada por la Ec. (D.52) y la segunda, suñado el cambio de variable  $\chi_0 = \frac{r_0 - z_0}{\ell}$  y la Ec. (D.63), toma la forma

$$\int_{z_0=+r_0}^{z_0=+\xi_0} f_\beta(z_0) dz_0 = -\ell \int_{\chi_0=0}^{\chi_0=n_p(z_0)+f} f_\beta(\chi_0) d\chi_0 \quad (\text{D.92})$$

El resultado de la integral en el lado derecho está dada por la Ec. (D.70). Por lo tanto usando la Ecs. (D.52), (D.92) y (D.70) en la Ec. (D.91) se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} I_{\eta\omega} [i_\beta(\xi_0)] &= \ell \varepsilon_{\beta\omega} n_0 (\xi_0 - r_0) + \ell^2 \varepsilon_{\beta\omega} \left[ n_p \frac{n_p - 1}{2} + n_p f \right] \\ &+ \frac{\ell^2}{2} \left[ \varepsilon_{\beta\omega}^2 n_p + (f - \varepsilon_{\sigma\omega})^2 \mathcal{U} \{f - \varepsilon_{\sigma\omega}\} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.93})$$

## D.2. Solución analítica del modelo de dos dominios

Para el sistema fluido-medio poroso aquí estudiado, se tiene que las ecuaciones del TDA están dadas por

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad \forall y \in (y_0, L_\eta - r_0) \quad (\text{D.94a})$$

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \left( \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta - \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \right) \quad \forall y \in (-L_\omega + r_0, y_0) \quad (\text{D.94b})$$

las cuales están sujetas a las siguientes condiciones de frontera

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} - e_1 \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} = e_2 \left( \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta - e_3 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \right) \quad (\text{D.95a})$$

$$\text{en } y = y_0 \quad \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} - g_1 \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} = g_2 \left( \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta - g_3 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \right) \quad (\text{D.95b})$$

$$\text{en } y = y_{sup} = L_\eta \quad \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta = v_{sup} = 0 \quad (\text{D.95c})$$

$$\text{en } y = y_{inf} = -L_\omega + r_0 \quad \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta = v_{inf} = \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad (\text{D.95d})$$

Conviene subrayar que las primeras dos condiciones de frontera corresponden a las condiciones de salto desarrolladas mediante la metodología propuesta en Valdés-Parada et al. (2013). Esto se debe a que el TDA no es válido dentro de la inter-región fluido-medio poroso. Por su parte, las últimas dos condiciones de frontera son la de no deslizamiento localizada en la pared impermeable superior y de la velocidad de Darcy localizada en límite inferior de la región de medio poroso homogéneo.



Lo anterior es porque el TDA también no considera las variaciones espaciales de sus coeficientes de transporte efectivos en las inter-regiones fluido-pared y medio poroso-pared. Considerando a las variables y parámetros adimensionales dados por las Ecs. (D.4), las Ecs. (D.94) y (D.95) toman la siguiente forma

$$0 = \frac{d^2 u_\eta}{dY^2} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{*-1} u_{\omega,\infty} \quad \forall Y \in (Y_0, Y_{\text{sup}}) \quad (\text{D.96a})$$

$$0 = \frac{d^2 u_\omega}{dY^2} - \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{*-1} (u_\omega - u_{\omega,\infty}) \quad \forall Y \in (Y_{\text{inf}}, Y_0) \quad (\text{D.96b})$$

$$\text{en } Y = Y_0 \quad \frac{du_\eta}{dY} - e_1 \frac{du_\omega}{dY} = E_2 (u_\eta - e_3 u_\omega) \quad (\text{D.96c})$$

$$\text{en } Y = Y_0 \quad \frac{du_\omega}{dY} - g_1 \frac{du_\eta}{dY} = F (u_\omega - g_3 u_\eta) \quad (\text{D.96d})$$

$$\text{en } Y = Y_{\text{sup}} = H_\eta \quad u_\eta = u_{\text{sup}} \quad (\text{D.96e})$$

$$\text{en } Y = Y_{\text{inf}} - H_\omega + 1 \quad u_\omega = u_{\text{inf}} \quad (\text{D.96f})$$

Como consecuencia, la solución analítica del TDA es

$$u_\omega = B + c_\omega \left[ \exp\left(\sqrt{P}(Y - Y_0)\right) - \exp\left(\sqrt{P}(2Y_{\text{inf}} - Y_0 - Y)\right) \right] \quad (\text{D.97a})$$

$$u_\eta = u_{\text{sup}} + \frac{PB}{2} (Y_{\text{sup}}^2 - Y^2) + c_\eta (Y - Y_{\text{sup}}) \quad (\text{D.97b})$$

donde  $c_\eta$  y  $c_\omega$  son constantes de integración definidas como

$$c_1 = \frac{k_3}{k_1} - c_3 \frac{k_2}{k_1} \quad (\text{D.98})$$

$$c_3 = \frac{G_2}{G_1} \quad (\text{D.99})$$

el los cuales se han utilizado las siguientes parámetros

$$A_1 = \sqrt{P} + \sqrt{P} \exp\left(2\sqrt{P}(Y_{\text{inf}} - Y_0)\right) \quad (\text{D.100a})$$

$$A_2 = 1 - \exp\left(2\sqrt{P}(Y_{\text{inf}} - Y_0)\right) \quad (\text{D.100b})$$

$$k_1 = 1 - E_2(Y_0 - Y_{\text{sup}}) \quad (\text{D.100c})$$

$$k_2 = -e_1 A_1 + E_2 e_3 A_2 \quad (\text{D.100d})$$

$$k_3 = E_2 \left( \frac{PB}{2} (Y_{\text{sup}}^2 - Y_0^2) + u_{\text{sup}} - e_3 B \right) + PBY_0 \quad (\text{D.100e})$$

$$G_1 = \left[ A_1 + g_1 \frac{k_2}{k_1} - F \left( A_1 + g_3 \frac{k_2}{k_1} (Y_0 - Y_{\text{sup}}) \right) \right] \quad (\text{D.100f})$$

$$G_2 = F \left[ B - g_3 \left( \frac{PB}{2} (Y_{\text{sup}}^2 - Y_0^2) + \frac{k_3}{k_1} (Y_0 - Y_{\text{sup}}) + u_{\text{sup}} \right) \right] \\ + g_1 \left( -PB Y_0 + \frac{k_3}{k_1} \right) \quad (\text{D.100g})$$

con

$$B = u_{\omega, \infty} \quad (\text{D.101})$$

$$P = \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{*-1} \quad (\text{D.102})$$

### D.3. Variaciones espaciales de la fracción volumétrica

Para el caso del medio poroso aquí considerado, el cual consiste en un arreglo de placas paralelas, la fracción volumétrica sólo depende de la dirección vertical (*i.e.*, dirección  $y$ ). Por lo tanto, la Ec. (2.7) se reduce a

$$\varepsilon_{\beta}(y) = \frac{V_{\beta}(y)}{V} \quad (\text{D.103})$$

Donde volumen total de la región de promediado ( $V$ ), como se mencionó anteriormente, está dado por

$$V = L_x L_z (2r_0) \quad (\text{D.104})$$

Entonces, para determinar a las variaciones espaciales de  $\varepsilon_{\beta}(y)$  en todo el sistema fluido-medio poroso aquí considerad, sólo que determinar el volumen de la fase del fluido ( $V_{\beta}(y)$ ) contenido en cada posición de la región de promediado. Esto se llevar cabo en las siguientes apartados.

#### D.3.1. Inter-región fluido-pared superior

En la inter-región fluido-pared superior el volumen ocupado por la fase- $\beta$  es igual al volumen de la región región- $\eta$  contenido en la región de promediado, el cual se puede expresar como

$$V_{\beta}(y) = L_x L_z (B - \alpha_f), \quad \alpha_f = y - B - r_0 \quad (\text{D.105})$$

Reemplazando la Ec. (D.105) en la Ec. (D.103) se obtiene que

$$\varepsilon_{\beta\eta W}(y) = \frac{2B + r_0 - y}{2r_0} \quad (\text{D.106})$$

Se debe recordar que está inter-región está restringida por la Ec. (2.47).

### D.3.2. Inter-región fluido-medio poroso

En la región homogénea- $\eta$ , el volumen ocupado por la fase- $\beta$  será igual al volumen de la región de promediado, por lo que la fracción volumétrica es igual a la unidad, *i.e.*,  $\varepsilon_{\beta\eta} = 1$ . Enfocando ahora la atención en la inter-región fluido-medio poroso, el volumen ocupado por la fase- $\beta$  consiste en el volumen de la fase- $\beta$  dentro la región- $\omega$  y en la región- $\eta$  contenidos en la región de promediado , *i.e.*

$$V_{\beta}(y) = V_{\beta\eta}(y) + V_{\beta\omega}(y) \quad (\text{D.107})$$

donde fácilmente se puede encontrar que

$$V_{\beta\eta}(y) = L_x L_z (y + r_0) \quad (\text{D.108})$$

La parte del fluido correspondiente al medio poroso,  $V_{\beta\omega}(y)$ , es un poco más complicado que eso, ya que puede consistir en el volumen de la fase- $\beta$  en el número entero de poros ( $n_p(y)$ ) y en la fracción de poro ( $f(y)$ ), *i.e.*

$$V_{\beta\omega}(y) = V_{\beta n_p}(y) + V_{\beta f_{\beta}}(y) = wL (n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell) \quad (\text{D.109})$$

Introduciendo las Ecs. (D.108) y (D.109) en la Ec. (D.103) se  $\varepsilon_{\beta}(y)$  es

$$\varepsilon_{\beta\eta\omega}(y) = \frac{n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell + y + r_0}{2r_0} \quad (\text{D.110})$$

Los límites de esta zona están dadas por la Ec. (2.56).

### D.3.3. Región homogénea de medio poroso

Aquí es conveniente recordar que la altura de la región de promediado consiste en  $n_0$  celdas unitarias de longitud de lado  $\ell$ , por lo que el volumen de la fase- $\beta$  se puede escribir como

$$V_{\beta\omega} = L_x L_z n_0 \ell_{\beta} \quad (\text{D.111})$$

De tal forma que la fracción volumétrica en la región de medio poroso homogéneo está dada por

$$\varepsilon_{\beta\omega} = \frac{\ell_{\beta}}{\ell} \quad (\text{D.112})$$

La validéz de esta expresión está limitada por la Ec. (2.51).

### D.3.4. Inter-región medio poroso-pared inferior

Finalmente, en la inter-región medio poroso-pared inferior el volumen ocupado por la fase- $\beta$  consta del volumen de la fase- $\beta$  dentro de la región- $\omega$  contenido en la región de promediado, *i.e.*

$$V_{\beta}(y) = V_{\beta\omega}(y) \quad (\text{D.113})$$

que análogamente a la inter-región  $\eta - \omega$ ,  $V_{\beta\omega}(y)$  puede estar compuesto por el volumen de la fase- $\beta$  contenido en el número entero de poros ( $n_p$ ) y en la fracción de poro ( $f_{\beta}$ ) como

$$V_{\beta\omega} = V_{\beta n_p}(y) + V_{\beta f_{\beta}}(y) = L_x L_z (n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell) \quad (\text{D.114})$$

Al introducir la expresión anterior en la Ec. (D.103) conduce a

$$\varepsilon_{\beta\omega}(y) = \frac{n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell}{2r_0} \quad (\text{D.115})$$

Esta expresión está acotada por la Ec. (2.67). Con base en lo anterior, las variaciones espaciales de la fracción volumétrica en todo el sistema fluido-medio poroso se pueden resumir en siguiente expresión

$$\varepsilon_{\beta}(y) = \begin{cases} \frac{2B + r_0 - y}{2r_0} & L_{\eta} - r_0 < y \leq L_{\eta} + r_0 \\ 1 & r_0 \leq y \leq L_{\eta} - r_0 \\ \frac{n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell + y + r_0}{2r_0} & -r_0 < y < r_0 \\ \varepsilon_{\beta\omega} & -L_{\omega} + r_0 \leq y \leq -r_0 \\ \frac{n_p \ell_{\beta} + f_{\beta} \ell}{2r_0} & -L_{\omega} - r_0 \leq y < -L_{\omega} + r_0 \end{cases} \quad (\text{D.116})$$



