

Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Div. de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dpto. de Física

**Escalas de tiempo en la dinámica
estocástica transitoria. Modelos
inestables con parámetros de
control dependientes del tiempo**

T e s i s

PARA OBTENER EL TITULO DE

MAESTRIA EN FISICA

PRESENTA:

Fís. Pedro Orea

ASESOR:

Dr. J. I. Jiménez Aquino

México, D.F., Invierno. 1996.

A mi esposa e hija

Estela Rodríguez O.

Karen Orea Rdez.

Por el amor y cariño que les tengo.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. J. I. Jiménez Aquino su inagotable paciencia y apoyo constante en la elaboración de este trabajo, así como el haberme guiado acertadamente para aprender temas interesantes de la teoría de los Proceso Estocásticos.

En estas lineas quiero agradecerles a los Drs: Emilio Cortés R. y Olegario Alorcón W., por sus comentarios tan importantes en la revisión de tesis.

Aprovecho también la oportunidad para expresar mis agradecimientos a los profesores que me impartieron alguna materia durante mi formación académica en la maestría.

Hago extensivos mis agradecimientos al Departamento de Física de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa por haberme brindado el apoyo durante todo este tiempo.

Finalmente, le agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACyT**) por haberme brindado la ayuda económica que ha permitido la realización de esta tesis.

Nomenclatura

- QDT: Teoría Cuasideterminista
(Quasideterministic Theory)
- NLRT: Tiempos de Relajación no Lineales
(Nonlinear Relaxation Time)
- MFPT: Tiempos Medios de Primer Paso
(Mean First-Passage Time)
- SFQDT: Formulación Estandar de la Teoría Cuasideterminista
(Standar Formulation of Quasideterministic Theory)
- RBG: Ruido Blanco Gaussiano
- RCG: Ruido de Color Gaussiano
- VAG: Variable Aleatoria Gaussiana
- CIF: Condiciones Iniciales Fijas
- CID: Condiciones Iniciales Distribuidas

Indice

1	Introducción	1
1.1	Objetivo Principal	1
1.2	Introducción	1
2	Formalismo de NLRT y QDT con parámetros de control constantes	4
2.1	Descripción de la dinámica de Langevin con RBG.	4
2.1.1	Condiciones iniciales fijas	4
2.1.2	Condiciones iniciales distribuidas	11
2.2	Descripción de la dinámica de Langevin con RCG.	14
2.2.1	Condiciones iniciales fijas y distribuidas.	14
2.3	Descripción de la dinámica de Langevin no lineal	19
3	Formalismo de NLRT Y QDT con parámetros de control dependientes del tiempo	21
3.1	Descripción de la dinámica de Langevin con RBG.	21
3.1.1	Condiciones iniciales distribuidas	21
3.2	Descripción de la dinámica de Langevin con RCG.	27
3.2.1	Condiciones iniciales distribuidas.	27
4	Modelos dinámicos inestables	30
4.1	Modelo con parámetros de control constantes	30
4.1.1	Cálculo de NLRT para el modelo de Landau con RBG	30
4.1.2	Cálculo de NLRT para el modelo de Landau con RCG	32
4.2	Modelos con parámetros de control dependientes del tiempo	33
4.2.1	Cálculo de NLRT para el modelo de rampa con RBG	33
4.2.2	Cálculo de NLRT para el modelo general con RBG	36
4.2.3	Cálculo de NLRT para el modelo de rampa con RCG	38
4.2.4	Cálculo de NLRT para el modelo general con RCG	39
5	Conclusiones y Perspectivas	42
5.1	Conclusiones	42
5.2	Perspectivas	44

A	Cálculo de las varianzas σ^2 con RBG	45
A.1	Cálculo de la varianza σ_1^2 para el modelo de rampa	45
A.2	Cálculo de la varianza σ_δ^2 para modelo general	46
A.3	Comparación de la varianza σ_1^2 con σ_δ^2	46
A.4	Cálculo de la escala de tiempo t_1	48
A.4.1	Modelo de rampa	48
A.4.2	Modelo general	49
B	Cálculo de las varianzas σ^2 con RCG	50
B.1	Cálculo de la varianza σ_1^2 para el modelo de rampa	50
B.2	Cálculo de la varianza σ_δ^2 para el modelo general	51
B.3	Comparación de la varianza σ_1^2 con σ_δ^2	53
	Referencias	57

CAPITULO 1

Introducción

1.1 Objetivo Principal

El objetivo principal de este trabajo de tesis consiste en extender el formalismo de la teoría cuasideterminista (QDT) y su conexión con los tiempos de relajación no lineales (NLRT), de sistemas estocásticos transitorios con parámetros de control constantes al caso de parámetros de control dependientes del tiempo.

1.2 Introducción

En las últimas tres décadas en el contexto de la Mecánica Estadística fuera de equilibrio, y en particular en la teoría de procesos estocásticos, las ecuaciones diferenciales estocásticas han sido una herramienta muy útil en la descripción de una gran variedad de sistemas físicos en los que la presencia de las fluctuaciones juega un papel muy importante [1]-[3]. En particular el estudio de la relajación dinámica de estados inestables o en general de la relajación dinámica de condiciones iniciales lejos del estado estacionario, es un tema interés en el estudio de fenómenos fuera de equilibrio [4, 5]. Este estudio ha recibido una atención creciente desde el punto de vista teórico [1]-[6], así como también desde el punto de vista experimental [7]-[12].

Entre los diversos métodos que se han propuesto para estudiar la dinámica estocástica transitoria de sistemas inestables, se encuentra el método de escalas de tiempo, donde el interés principal radica en caracterizar la relajación dinámica de dichos sistemas inestables, calculando el tiempo durante el cual la relajación se lleva a cabo.

En este marco teórico de escalas de tiempo dos de los métodos más usuales reportados en la literatura son: los tiempos medios de primer paso (MFPT)[11]-[14] y los tiempos de relajación no lineales (NLRT) [15]-[18]. En esencia los tiempos de primer paso definen un conjunto de tiempos aleatorios t_i durante los cuales el sistema alcanza un valor previamente establecido a partir del estado inestable inicial, por lo que requerimos del cálculo de momentos estadísticos de la distribución de estos tiempos de paso. El estudio de los tiempos de primer paso se basa fundamentalmente en la teoría cuasideterminista (QDT) propuesta por de Pascuale *et al* [12], la cual consiste esencialmente en remplazar el proceso real por un proceso determinista con condiciones iniciales aleatorias.

QDT es una buena aproximación ya que ella nos da una descripción física del mecanismo responsable del decaimiento del estado inestable. Este mecanismo consiste en asumir que las fluctuaciones (ruidos) cambian la condición inicial alrededor del estado inestable e inducen la relajación del sistema. Después de este efecto, la evolución dinámica del sistema es prácticamente determinista. Es importante mencionar que la descripción en términos de MFPT se hace únicamente en el régimen lineal de la ecuación diferencial estocástica [11]-[14].

El segundo método (NLRT) está basado en la evolución de los momentos estadísticos de la variable estocástica relevante, desde un cierto valor en el estado inicial hasta un valor en el estado estacionario. El estudio de NLRT para caracterizar la dinámica estocástica transitoria ha sido dado a través de una descripción en términos de la ecuación de Fokker-Planck [15]-[17], y algunos resultados obtenidos por este formalismo, son similares a los que han sido obtenidos a través de los tiempos de primer paso usando QDT. Por tal razón, nos preguntamos si es posible caracterizar la relajación dinámica de sistemas inestables a través de NLRT usando el formalismo de QDT. La respuesta a esta pregunta ha sido dada en la Ref. [18].

En esta tesis estudiamos el formalismos de QDT y su conexión con NLRT para caracterizar la dinámica estocástica transitoria de sistemas inestables en dos situaciones: la primera es cuando el parámetro de control asociado a la fuerza sistemática de la ecuación de Langevin es una constante [18]-[21]. La segunda, que es la parte más importante de este trabajo consiste en extender el formalismo anterior a situaciones en el que el parámetro de control es una función dependiente del tiempo [22]-[24]. El interés de estos sistemas se encuentra por ejemplo en la mecánica de fluidos, particularmente en el estudio de

inestabilidad hidrodinámica [10]; y en el encendido de un laser semiconductor a partir de un tiempo umbral [22]. Estos sistemas han sido también estudiados por otros autores a través de MFPT y QDT [25]-[27].

Por otro lado el formalismo de QDT desarrollado para caracterizar la dinámica transitoria, a través de NLRT o bien a través de MFPT, ha sido hecho en el contexto de la dinámica de Langevin, cuya fuerza sistemática es derivable de un potencial. De este modo podemos acordar en nombrar a este formalismo como la formulación estandar de la teoría cuasideterminista (SFQDT), en el sentido de que es posible hacer una generalización de ésta formulación [28].

El contenido de este trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en el Cap. 2, se caracteriza la relajación de sistemas transitorios lineales y no lineales, para un conjunto de variables físicas x_i con $i = 1, \dots, n$ a través de NLRT y QDT, cuando el parámetro de control asociado a la fuerza sistemática lineal de la ecuación de Langevin es una constante. Esta formulación se hace cuando la relajación dinámica es inducida por ruido blanco y ruido de color Gaussianos.

En el Cap. 3, extendemos el formalismo desarrollado en el Cap.2, al estudio de sistemas estocásticos lineales, para un conjunto de x_i de variables físicas con parámetros de control dependientes del tiempo. asumiendo que la relajación es inducida por ruido blanco y ruido de color Gaussianos. Como consecuencia de éste estudio mostramos que NLRT se puede escribir en términos de dos escalas de tiempo dadas por $T = t_0 + t_1$, donde t_0 es precisamente el tiempo de primer paso obtenido por otros autores [25]-[27]. La escala de tiempo t_1 es la parte correspondiente de NLRT, y da cuenta de la evolución dinámica en la región cercana a la barrera de potencial. Los resultados obtenidos de éste análisis son las aportaciones originales de este trabajo.

En el Cap. 4, estudiamos algunos modelos analíticos como una aplicación de la teoría desarrollada en los Caps. 2 y 3. Para sistemas no lineales con parámetros de control constantes usamos el modelo de Landau. Para el análisis de modelos con parámetros de control dependientes del tiempo, estudiamos dos modelos que son: El modelo de rampa y otro que podemos llamar modelo general.

En el Cap. 5 damos las conclusiones y perspectivas de este trabajo de tesis. Por último en los Apéndices A y B se dan los cálculos explícitos de los modelos estudiados en la segunda parte de Cap. 4.

CAPITULO 2

Formalismo de NLRT y QDT con parámetros de control constantes

2.1 Descripción de la dinámica de Langevin con RBG.

2.1.1 Condiciones iniciales fijas

En este capítulo desarrollamos la formulación de QDT y NLRT con parámetro de control constante; tomando las ideas de la Ref. [18], para describir la relajación dinámica de sistemas no lineales, de esta forma el estudio que queremos realizar, sobre la relajación dinámica de estados inestables en presencia de fluctuaciones estocásticas, se basa fundamentalmente en la dinámica de Langevin no lineal, que para un conjunto de variables físicas relevantes x_i , con $i = 1, \dots, n$, puede escribirse de la siguiente forma

$$\dot{x}_i = ax_i + n(r)x_i + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Donde a es una constante, conocida como parámetro de control tal que $a > 0$. El primer término se conoce como fuerza sistemática. El segundo término da cuenta de las contribuciones no lineales del sistema, siendo $n(r)$ una función escalar de r , donde r es el modulo al cuadrado del vector \mathbf{X} . Por último, el tercer término se le conoce como fuerza fluctuante o ruido cuyas propiedades estadísticas deberán ser asignadas. En general, en este trabajo supondremos que $\xi_i(t)$ es un proceso Gaussiano, Por lo que requerimos unicamente del conocimiento de sus dos primeros momentos $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ y $\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle$. En particular en ésta sección supondremos que el valor medio está dado por $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ y la función de correlación satisface la relación

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t - t') : \quad (2.2)$$

con δ_{ij} conocida como la delta de Kronecker, y D es la intensidad del ruido. Cuando el ruido cumple con la propiedad (2.2) se le conoce como *ruido blanco*.

Por otro lado, el estudio que queremos realizar de la relajación dinámica transitoria de estados inestables, en el contexto de la dinámica lineal de (2.1), asumimos en general que la fuerza sistemática es derivable de un potencial (tomando las ideas de la mecánica clásica). En este caso el potencial asociado a la fuerza sistemática lineal de (2.1) será $U = -\frac{a}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)$. En el caso particular de tres dimensiones este potencial correspondería a un paraboloides de revolución invertido en la dirección $-z$ con vertice en el origen de coordenadas. Si definimos el vector $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, el origen de coordenadas del "paraboloides" será el vector $\mathbf{X} = (0, 0, \dots, 0)$ y este corresponderá el punto de equilibrio inestable del potencial U . Con base a esta visión de la mecánica clásica, decimos que la relajación dinámica ocurrirá cuando el sistema (partícula) abandone el estado inestable del potencial, por efecto de las fluctuaciones, y evolucione hacia un nuevo estado de equilibrio estacionario que le corresponda, como se verá posteriormente en la Sec. 2.3.

La manera en la que queremos caracterizar la dinámica transitoria de (2.1); se hará, introduciendo una escala de tiempo, que definimos como el tiempo de relajación no lineal (NLRT), y conectarla con la teoría cuasideterminista (QDT) de la cual hablaremos más adelante. Esta escala de tiempo medirá entonces el tiempo durante el cual el sistema (partícula) relaja desde el estado inestable inicial hasta un nuevo estado estacionario estable. La cantidad física relevante en la que estamos interesados en estudiar su relajación dinámica será el momento $\langle r^l(t) \rangle$, donde $l = 1, 2, \dots$ es el orden del momento, y r es el modulo al cuadrado del vector \mathbf{X} , es decir, $r \equiv |\mathbf{X}|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Por lo tanto, la cantidad $\langle r^l(t) \rangle$ comienza su decaimiento desde el estado inicial en $t = 0$; caracterizado por su valor $\langle r^l(0) \rangle$, hasta su estado estacionario estable, en $t = \infty$, caracterizado por $\langle r^l \rangle_{st}$. Si definimos

$$m(t) = \frac{\langle r^l(t) \rangle - \langle r^l \rangle_{st}}{\langle r^l(0) \rangle - \langle r^l \rangle_{st}} \quad (2.3)$$

Esta función como se puede observar en Fig. 2.1, toma los valores

$$m(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = \infty \end{cases} \quad (2.4)$$

de lo anterior concluimos que el área bajo la curva se define como el NLRT, dado por

$$T = \int_0^\infty m(t) dt = \frac{1}{M_0} \int_0^\infty [\langle r^l(t) \rangle - \langle r^l \rangle_{st}] dt \quad (2.5)$$

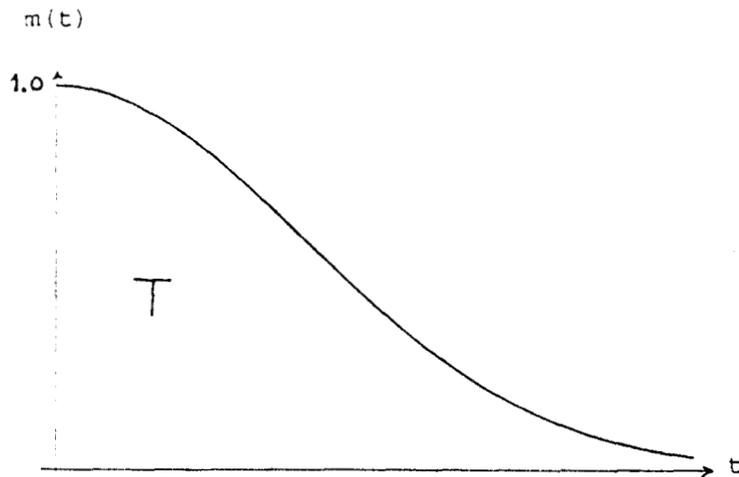


Fig. 2.1: Evolución dinámica de la función $m(t)$

donde definimos $M_0 \equiv \langle r_0^l \rangle - \langle r^l \rangle_{st}$, y $r_0 \equiv r(0)$. El cálculo de $\langle r_0^l \rangle$ puede obtenerse de un análisis de las condiciones iniciales. En esta sección asumimos que las condiciones iniciales son fijas. Esta es una situación en la cual $\langle r_0^l \rangle = 0$. Esto quiere decir que la densidad de probabilidad asociada a r_0 corresponde a la función delta de Dirac $\delta(r_0)$, lo que significa entonces que la probabilidad de encontrar a la partícula en el origen (punto de inestabilidad) es la unidad.

Hagamos ahora un análisis de la forma en la que es posible lograr la conexión de la escala de tiempo (2.5) con la teoría cuasideterminista, de la cual hablaremos a continuación. En esencia QDT introduce una hipótesis a saber: asumir la presencia de fluctuaciones (de cualquier tipo) alrededor del estado inestable, las cuales serán las responsables de la relajación dinámica del sistema. Para ello, vamos a realizar primeramente un estudio cualitativo desde el punto de vista puramente determinista de la dinámica lineal asociada a (2.1) y veremos cómo a partir de este análisis determinista, las fluctuaciones de las condiciones iniciales, se introducen como una hipótesis. El formalismo de QDT se encargará de justificar dicha hipótesis.

El análisis cualitativo determinista puede formularse construyendo la ecuación determinista de la parte lineal de la Ec. (2.1), para la variable r , la cual se escribe como

$$\dot{r} = 2ar. \quad (2.6)$$

La solución de ésta ecuación es

$$r(t) = r(0) e^{2at} . \quad (2.7)$$

De esta solución podemos notar que en $t = 0$, el sistema tiene el valor inicial $r(0)$, y por tanto está localizado en el punto inestable $(\mathbf{X} = 0, 0, \dots, 0)$ del potencial asociado al proceso (2.6). Por lo tanto, en la descripción determinista, $r(0) = 0$, lo que significa que el sistema permanecerá en el estado inestable inicial del potencial por tiempo indefinido, sin que ocurra ninguna relajación dinámica. Sin embargo, si suponemos que alrededor de éste estado inestable existen fluctuaciones de cualquier tipo, una pequeña perturbación será suficiente para provocar la relajación dinámica del sistema alrededor de este punto de inestabilidad.

Esta suposición de la fluctuación de la condición inicial es justamente la hipótesis de la teoría cuasideterminista. Por lo tanto, la conexión de la dinámica (2.7) con QDT se hace incorporando la hipótesis antes mencionada, la cual consiste en hacer que la condición $r_0 = h^2$, donde ahora h es una variable aleatoria. Luego entonces la dinámica (2.7) adquiere el carácter de un proceso cuasideterminista dado por

$$r(t) = h^2 e^{2at} . \quad (2.8)$$

Ahora bien, de éste proceso podemos inferir que h , da cuenta de las fluctuaciones estocásticas iniciales, responsables del decaimiento del estado inestable. Una vez que el sistema abandona el estado inestable éste evoluciona indefinidamente para todo tiempo $t > 0$, puesto que $a > 0$.

La conexión de NLRT con QDT se logra ahora sustituyendo el proceso (2.8) en la ecuación (2.5). Sin embargo ya vimos antes que el proceso (2.8) crece indefinidamente para tiempos $t > 0$, de este modo si queremos obtener tiempos finitos, será necesario detener el crecimiento del proceso (2.8) en alguna parte, para un valor fijo r_f . Debido al carácter estocástico del proceso, éste valor de referencia $r_f \equiv r(t_i)$ podrá alcanzarse para un conjunto de tiempos aleatorios t_i , tal que

$$r_f = h^2 e^{2at_i} . \quad (2.9)$$

Como veremos posteriormente en la Sec. 2.3 cuando estudiemos sistemas inestables no lineales de la forma (2.1), éste valor de referencia corresponderá al valor del estado

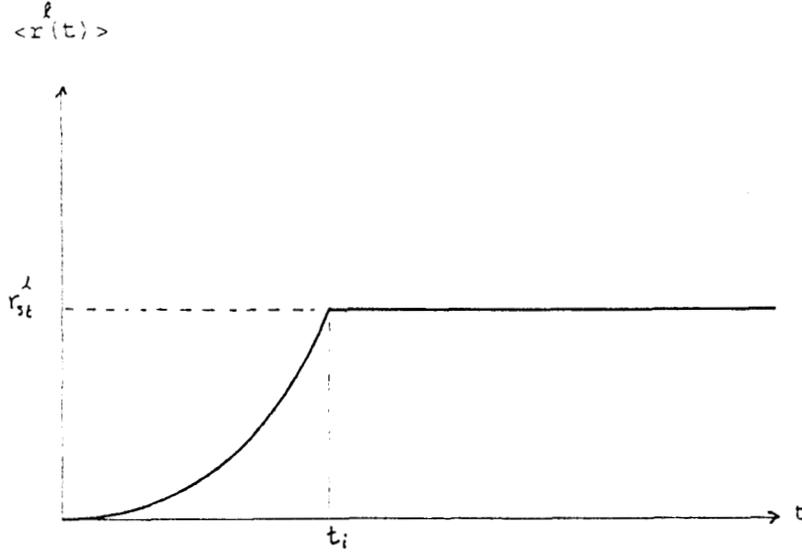


Fig. 2.2: Evolución dinámica de $\langle r^l(t) \rangle$ asociado al proceso (2.10)

estacionario $r_f = r_{st}$ del sistema no lineal, i.e., que éste es el valor que el sistema adquiere en su evolución hacia el estado estacionario correspondiente. Por tanto, r_{st} será la barrera del potencial en el caso lineal que estamos estudiando. En este sentido el proceso (2.8), incluyendo el orden del momento se puede escribir explícitamente como

$$r^l(t) = h^{2l} e^{2lat} \theta(t_i - t) + r_{st}^l \theta(t - t_i), \quad (2.10)$$

donde $\theta(x)$ es la función paso. En la Fig. 2.2 se observa el comportamiento del promedio (2.10). Finalmente, si sustituimos la ecuación (2.10), en la ecuación (2.5) obtenemos la expresión formal de NLRT asociado al promedio $\langle r^l \rangle$, el cual puede escribirse como

$$T_L = -\frac{r_{st}^l}{M_0} \langle t_i \rangle + \frac{r_{st}^l}{M_0} \left\langle e^{-2lat_i} \int_0^{t_i} e^{2las} ds \right\rangle. \quad (2.11)$$

Esta escala de tiempo caracteriza la relajación dinámica de sistemas estocásticos inestables lineales, cuyos parámetros de control son constantes.

Si definimos

$$t_0 = -\frac{r_{st}^l}{M_0} \langle t_i \rangle, \quad (2.12)$$

y

$$t_1 = \frac{r_{st}^l}{M_0} \left\langle e^{-2lat_i} \int_0^{t_i} e^{2las} ds \right\rangle. \quad (2.13)$$

Debemos notar que el promedio de t_i se debe al caracter aleatorio del mismo, como podemos ver de (2.9). El término t_0 se conoce en la literatura como el tiempo medio de primer paso (MFPT). Este en esencia, mide los primeros tiempos de la relajación dinámica del sistema alrededor del estado inestable y por lo tanto, es la contribución relevante de NLRT, puesto que toma en cuenta el efecto de las fluctuaciones iniciales responsable de la de la relajación dinámica. De ahí que t_1 es la escala de tiempo que el sistema toma en alcanzar la barrera de potencial r_{st} . Esta es la región donde el efecto de las fluctuaciones ya no son relevantes.

Vamos ahora a justificar la hipótesis de la fluctuación de las condiciones iniciales introducida en la solución de la ecuación determinista (2.8) de la sección anterior. La justificación de ésta hipótesis se obtiene a través del formalismo de QDT, el cual basa su estudio en términos de la dinámica lineal de Langevin. El análisis inicia con la solución formal de la ecuación lineal de Langevin asociada a (2.1), dada por

$$x_i(t) = h_i(t) e^{at}, \quad (2.14)$$

donde

$$h_i(t) = x_i(0) + \int_0^t e^{-as} \xi_i(s) ds. \quad (2.15)$$

El siguiente paso a realizar será mostrar que $h_i(t)$ juega el papel de una condición inicial efectiva en el límite de tiempos largos, tal que $at \gg 1$. Esto quiere decir que $h_i(\infty) = h_i$, donde h_i es una variable aleatoria Gaussiana (VAG). Para ello, podemos ver de (2.15) que si $\xi_i(t)$ es pequeño entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dh_i(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} \xi_i(t) \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

De ésta ecuación se puede apreciar que $h_i(\infty) = cte$, que llamamos h_i . Bajo éstas condiciones y para tiempos largos, tal que $at \gg 1$, el proceso (2.14) se convierte en un proceso cuasideterminista, de la forma $x_i(t) = h_i e^{at}$, que en términos de la variable r , se puede escribir como

$$r(t) = h^2 e^{2at}, \quad (2.17)$$

la cual es consistente con (2.8), donde ahora $h^2 = h_1^2 + \dots + h_n^2$ desempeña el papel de una condición inicial efectiva.

El siguiente paso consiste en obtener la densidad de probabilidad marginal $P(h)$, que a su vez nos permitirá obtener la estadística de la variable h , necesaria para el cálculo de (2.11). Esto se logra de la siguiente manera: dado que cada variable h_i es una VAG, su estadística está determinada por sus dos primeros momentos $\langle h_i \rangle$ y $\langle h_i^2 \rangle$. El primer momento se obtiene a partir de la ecuación (2.15), ya que $\langle x_i(0) \rangle = 0$ para condiciones iniciales fijas y $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, entonces $\langle h_i(\infty) \rangle \equiv \langle h_i \rangle = 0$. Para el segundo momento obtenemos

$$\langle h_i^2(t) \rangle = 2D \int_0^t e^{-2as} ds, \quad (2.18)$$

así que en el límite de tiempos largos tales que $at \gg 1$, la integral es convergente, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-2as} ds = \frac{1}{2a}. \quad (2.19)$$

Por tanto, para tiempos largos el proceso estocástico (2.15) se transforma en un conjunto de VAG h_i con valor medio $\langle h_i \rangle = 0$ y varianza

$$\sigma^2 = \langle h_i^2 \rangle - \langle h_i \rangle^2 = \frac{D}{a}, \quad (2.20)$$

donde observamos que σ^2 es proporcional a la intensidad del ruido.

Puesto que h_i es una VAG, su densidad de probabilidad es también Gaussiana, y por tanto la densidad de probabilidad conjunta asociada al conjunto de variables independientes (h_1, \dots, h_n) está dada por

$$P(h_1, \dots, h_n) = cte e^{-\alpha^2 (h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2)}, \quad (2.21)$$

donde $\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{a}{2D}$.

La densidad de probabilidad marginal $P(h)$ podrá ahora calcularse a partir de (2.21) mediante la transformación del espacio de variables independientes $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ al espacio de variables independientes $\mathbf{u} = (h, u_2, \dots, u_n)$, es decir

$$P(h_1, \dots, h_n) dh_1 \cdots dh_n \rightarrow P(h, u_2, \dots, u_n) dV, \quad (2.22)$$

donde $dV = J(\mathbf{u}) dh \cdot du_2 \cdots du_n$ es el Jacobiano de la transformación, dado por

$$J(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial h} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial h} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}. \quad (2.23)$$

En nuestro caso, la región $h \leq \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} \leq h + dh$ es un cascarón esférico de radio interno h y radio externo $h + dh$. Se sabe que el volumen dV de dicho cascarón es proporcional a su grosor dh y a la potencia h^{n-1} de su radio, es decir $dV = cte h^{n-1} dh$. Finalmente la densidad de probabilidad marginal para el modulo de h se calcula entonces de (2.22) junto con (2.21) y con ello, se llega al resultado

$$P(h) = \frac{2\alpha^n}{\Gamma(n/2)} h^{n-1} e^{-\alpha^2 h^2} . \quad (2.24)$$

Habiendo construido el formalismo de QDT y su correspondiente conexión con NLRT, estamos ahora en condiciones de calcular la escala de tiempo (2.11), para los casos en que las condiciones iniciales son fijas. En este caso $M_0 = -r_{st}^l$, y (2.11) está dada por

$$T_L = \frac{1}{2a} \left\{ \ln(\alpha^2 r_{st}) - \langle \ln(\alpha^2 h^2) \rangle \right\} - C , \quad (2.25)$$

donde el segundo término es $t_1 \equiv C = \frac{1}{2la} [1 - \frac{\langle h^{2l} \rangle}{r_{st}^l}]$. Haciendo uso de la ecuación (2.24) podemos concluir que $\langle h^{2l} \rangle \sim (\frac{D}{a})^l$, y además $\langle \ln(\alpha^2 h^2) \rangle = \psi(n/2)$. Si ahora hacemos un análisis del resultado anterior en el límite en el que la intensidad de ruido es pequeño, es decir, $D \ll a$, entonces el término $\langle h^{2l} \rangle$ se puede despreciar, de tal modo que (2.25) quede como

$$T_L = \frac{1}{2a} \left\{ \ln \left[\frac{r_{st}}{2(D/a)} \right] - \psi \left(\frac{n}{2} \right) - \frac{1}{l} \right\} , \quad (2.26)$$

donde $\psi(x)$ es la función digamma.

2.1.2 Condiciones iniciales distribuidas

En esta sección vamos a estudiar el efecto de las condiciones iniciales en la relajación dinámica de sistemas inestables. Este estudio consiste en asumir una situación más realista, en la que las condiciones iniciales ya no están fijas en el estado inestable, sino que ahora se supondrán distribuidas alrededor de dicho estado, y por tanto tendrán asociada una densidad de probabilidad con cierta anchura. La condición inicial fija (CIF) estudiada en la sección anterior, tiene asociada una distribución de probabilidad $\delta(r_0)$, esto significa desde el punto de vista experimental, que la anchura o incertidumbre de la distribución inicial, es más pequeña que la intensidad de las fluctuaciones que ocasionan el decaimiento. Sin embargo en muchas situaciones experimentales, ambas cantidades serán originadas por

una única fuente de ruido, así que ellas pueden ser del mismo orden de magnitud. De ahí la necesidad de introducir las condiciones iniciales, con lo que podrán describirse mejor los resultados experimentales.

Nosotros también estamos interesados en el estudio del efecto de las condiciones iniciales en la relajación del estado inestable. Para ello, vamos a describir la forma de preparar al sistema en el estado inicial al tiempo $t = 0$; dado que la parte lineal de la ecuación (2.1) define la dinámica del sistema para tiempos $t > 0$. Esto se puede lograr, asumiendo que el sistema se encuentra localizado en $t = 0$, alrededor de un estado estacionario estable. Por lo tanto, podemos definir en forma matemática la evolución dinámica del sistema para tiempos $t < 0$, desde un estado arbitrario en $t = -\infty$. La preparación de las condiciones iniciales del sistema en $t = 0$, será entonces el estado estacionario de la siguiente ecuación dinámica

$$\dot{x}_i = -a_0 x_i + \xi_i(t), \quad -\infty < t < 0. \quad (2.27)$$

donde $a_0 > 0$.

Este modelo describe la situación física en el cual el sistema sufre un cambio brusco en $t = 0$, en el parámetro de control, de $-a_0 \rightarrow a$, el cual deja al sistema inicialmente localizado alrededor de un estado inestable.

Por tanto, la probabilidad del estado estable asociado con las condiciones iniciales al tiempo $t = 0$, será una Gaussiana de la forma $P_{st}(x_i(0)) \propto e^{-\alpha_0^2 x_i^2(0)}$ donde $\alpha_0^2 = \frac{a_0}{2D}$, lo cual significa que se ha tomado la misma intensidad del ruido D para tiempos $t < 0$. De aquí inferimos inmediatamente que $\langle x_i(0) \rangle = 0$ y $\langle x_i^2(0) \rangle = \frac{D}{a_0}$.

Calculemos ahora la estadística del proceso (2.15) en el límite de tiempos largos, de acuerdo con el formalismo de QDT. El primer momento es claramente $\langle h_i \rangle = 0$. Para el segundo momento requerimos de la siguiente expresión

$$\langle h_i^2 \rangle = \langle x_i^2(0) \rangle + 2D \int_0^t e^{-2as} ds, \quad (2.28)$$

y en el límite de tiempos largos, tales que $at \gg 1$, obtenemos

$$\langle h_i^2 \rangle = \langle x_i^2(0) \rangle + \frac{D}{a}. \quad (2.29)$$

De forma tal que la varianza σ^2 de h_i es ahora

$$\sigma^2 = \langle h_i^2 \rangle - \langle h_i \rangle^2 = \sigma_0^2 + \frac{D}{a}. \quad (2.30)$$

donde $\sigma_0^2 \equiv \langle x_i^2(0) \rangle - \langle x_i(0) \rangle^2$, corresponde al efecto de las fluctuaciones de las condiciones iniciales en $t = 0$, y está dada por $\sigma_0^2 = \langle x_i^2(0) \rangle = \frac{D}{a_0}$. Así que ahora sustituyendo este valor en (2.30) tenemos

$$\sigma^2 = CD, \quad (2.31)$$

donde $C = (\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a})$.

La densidad de probabilidad asociada a la variable h_i será una Gaussiana de la forma $P_{st}(h_i) \propto e^{-\alpha^2 h_i^2}$, donde ahora $\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{2CD}$. Por tanto, la densidad de probabilidad conjunta es la misma que la expresión dada en (2.21), con la diferencia de que aquí σ^2 está dada por (2.31). De aquí concluimos que la densidad de probabilidad marginal $P(h)$ es también la misma que (2.24). Siguiendo los mismo pasos que se hicieron para encontrar $P(h)$ en la sección anterior, podemos también obtener la densidad de probabilidad marginal $P(X_0)$ donde definimos $X_0 \equiv X(0)$ como $X_0^2 = x_1^2(0) + \dots + x_n^2(0)$. Esta densidad de probabilidad se calcula usando la densidad de probabilidad conjunta $P_{st}(x_1(0), \dots, x_n(0))$, y también la densidad de probabilidad $P_{st}(x_i(0))$, dada anteriormente. Por lo tanto

$$P_{st}(X_0) = \frac{2\alpha_0^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} X_0^{n-1} e^{-\alpha_0^2 X_0^2}. \quad (2.32)$$

De ésta expresión podemos ahora calcular explícitamente la constante M_0 de (2.5). El término $\langle r_0^l \rangle$ de M_0 se calcula usando (2.32), dando como resultado $\langle r_0^l \rangle = (2D/a_0)^l$. Por lo tanto $M_0 = (2D/a_0)^l - r_{st}^l$.

Despejando t , de (2.9) y sustituyendola en (2.11) teniendo en cuenta que ahora se tiene condiciones iniciales distribuidas (CID), se obtiene la escala de tiempo T_L , la cual es igual a

$$T_L = -\frac{r_0^l}{2aM_0} \left\{ \ln \left[\frac{r_{st}}{2(a_0^{-1} + a^{-1})D} \right] - \langle \ln(\alpha^2 h^2) \rangle \right\} - C. \quad (2.33)$$

donde $C = -\frac{r_{st}^l}{2alM_0} [1 - \frac{\langle h^{2l} \rangle}{r_{st}^l}]$; siendo $\langle h^{2l} \rangle = [(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a})D]^l$. Si ahora hacemos un análisis del resultado anterior en el límite en el que la intensidad de ruido es pequeño comparada con los parámetros de control a_0 y a , es decir, $D \ll a_0$ y a su vez $D \ll a$. En éstas condiciones los términos $\langle r_0^l \rangle$ y $\langle h^{2l} \rangle$ se pueden despreciar: y así $M_0 = -r_{st}^l$. Bajo esta aproximación la expresión (2.33), nos queda como

$$T_L = \frac{1}{2a} \left\{ \ln \left[\frac{r_{st}}{2(a_0^{-1} + a^{-1})D} \right] - v \left(\frac{n}{2} \right) - \frac{1}{l} \right\}. \quad (2.34)$$

2.2 Descripción de la dinámica de Langevin con RCG.

2.2.1 Condiciones iniciales fijas y distribuidas.

En esta sección vamos a estudiar la caracterización de la dinámica lineal asociada a (2.1), asumiendo ahora que el ruido es Gaussiano de color [19]. En este estudio vamos a generalizar los resultados ya obtenidos en la en dicha referencia para un conjunto de n variables físicas y para cualquier orden l del momento relajante.

Para este tipo de ruido tenemos que el valor medio $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, y función de correlación dada por

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \frac{D}{\tau} \delta_{ij} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}}, \quad (2.35)$$

donde D es la intensidad del ruido y τ es el tiempo de correlación.

El estudio correspondiente con ruido de color es un caso menos ideal, puesto que estamos tomando en cuenta los efectos de memoria presentes en el tiempo de correlación finito, dado por τ . Veremos también que el ruido de color introduce de manera natural, el acoplamiento del estado inicial del sistema al tiempo $t = 0$, con el ruido $\xi_i(t)$, es decir que la correlación $\langle x_i(0) \xi_i(t) \rangle$ en general es distinta de cero.

Primeramente debemos mencionar que el tiempo característico asociado a la caracterización de relajación dinámica del estado inestable inducido por ruido de color, tiene la misma estructura algebraica que la ecuación (2.5). En segundo lugar, el formalismo de QDT se construye con base en las ideas de la sección (2.1.1), salvo que ahora debemos tomar en cuenta los efectos del carácter no markoviano del proceso para calcular la estadística de la variable aleatoria h_i .

El formalismo de QDT parte también de la solución de la ecuación lineal de (2.1), dada por (2.15), donde nuevamente

$$h_i(t) = x_i(0) + \int_0^t \xi_i(s) e^{-a s} ds. \quad (2.36)$$

Se sabe ya, que en el límite de tiempos largos tales que $at \gg 1$, el proceso (2.36) satisface la propiedad de ser una variable aleatoria Gaussiana $h(\infty) = h_i$. Por lo que requerimos de los dos primeros momentos $\langle h_i \rangle$, $\langle h_i^2 \rangle$ para obtener la densidad de probabilidad $P(h_i)$.

De la ecuación (2.36) podemos notar que $\langle h_i \rangle = \langle x_i(0) \rangle$. Para el segundo momento $\langle h_i^2(t) \rangle$, requerimos de la autocorrelación

$$\begin{aligned} \langle h_i^2(t) \rangle = & \langle x_i^2(0) \rangle + \int_0^t \int_0^t \langle \xi_i(s) \xi_i(s') \rangle e^{-a(s+s')} ds ds' + \\ & + 2 \int_0^t \langle x_i(0) \xi_i(s') \rangle e^{-as'} ds'. \end{aligned} \quad (2.37)$$

En ésta expresión vemos que, el primer término da cuenta del efecto de las condiciones iniciales del sistema. El segundo toma en cuenta el efecto de las fluctuaciones causadas por el ruido ξ_i y el tercer término, da cuenta justamente del acoplamiento del sistema en su estado inicial, con el ruido. De la expresión (2.37) podemos notar que existen tres casos posibles a estudiar, en el caso de la relajación dinámica de sistemas inducidos por ruido de color.

El Primero es el caso más simple, en el que la condición inicial $x_i(0)$ está fija en el estado inestable, de modo que $x_i(0) = 0$, y por tanto, $\langle x_i(0) \xi_i(t) \rangle = 0$. El segundo será cuando la condición inicial $x_i(0)$ esté distribuida alrededor del estado inestable, pero desacoplado con el ruido, de modo que también $\langle x_i(0) \xi_i(t) \rangle = 0$. Esto significa que la fuente de ruido para $t < 0$ no es la misma que para $t > 0$, de manera que el sistema puede iniciar desde un punto distribuido aleatoriamente. El tercer caso exhibe una situación más interesante, puesto que toma en cuenta la distribución de las condiciones iniciales alrededor del estado inestable y además el acoplamiento de estas condiciones iniciales con el ruido, así que $\langle x_i(0) \xi_i(t) \rangle \neq 0$.

En el caso en el que $\langle x_i^2(0) \rangle \neq 0$, el cálculo de este término requiere nuevamente de la suposición hecha de la condición inicial, es decir, de la forma de preparar al sistema en un estado estacionario estable en $t = 0$. De manera que la correspondiente ecuación dinámica para $-\infty < t < 0$ será

$$\dot{x}_i = -a_0 x_i + \xi_i(t), \quad -\infty < t < 0 \quad (2.38)$$

cuya solución es

$$x_i(0) = \int_{-\infty}^0 \xi_i(s) e^{a_0 s} ds. \quad (2.39)$$

El proceso (2.38) es ahora no Markoviano. Sin embargo, dicho proceso puede formularse en términos de dos variables Markovianas (x_i, ξ_j) [16] tal que

$$\dot{x}_i = -a_0 x_i + \xi_i(t), \quad -\infty < t < 0$$

$$\dot{\xi}_i = \frac{\xi_i}{\tau} + \frac{\eta_i(t)}{\tau}, \quad (2.40)$$

donde ahora $\langle \eta_i(t)\eta_j(t') \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t-t')$. La densidad de probabilidad estacionaria asociada al proceso (2.40) es la Gaussiana $P_{st}(x_i(0)) \sim e^{-\alpha_0^2 x_i^2(0)}$, donde $\alpha_0^2 = \frac{1}{2\langle x_i^2(0) \rangle} = \frac{a_0(1+a_0\tau)}{2D}$. De manera que, de ésta densidad de probabilidad concluimos que el valor medio $\langle x_i(0) \rangle = 0$, y por tanto de (2.37) se obtiene que el valor medio de $\langle h_i \rangle = 0$. El segundo momento $\langle x_i^2(0) \rangle = \frac{D}{a_0(1+a_0\tau)}$, así que la varianza σ_0^2 será

$$\sigma_0^2 = \langle x_i^2(0) \rangle - \langle x_i(0) \rangle^2 = c_0(\tau)D. \quad (2.41)$$

donde $c_0(\tau) = \frac{1}{a_0(1+a_0\tau)}$. De manera que el efecto del ruido de color con respecto al ruido blanco para la fluctuación de las condiciones iniciales, consiste en la renormalización de la intensidad del ruido D por el factor $\frac{1}{(1+a_0\tau)}$, es decir $D' = \frac{D}{(1+a_0\tau)}$.

Analícemos ahora los tres casos de la ecuación (2.37).

i) *Condiciones iniciales fijas (CIF)*

Para este caso simple tenemos que el unico término diferente de cero será el segundo término de (2.37), así que

$$\langle h_i^2(t) \rangle = \frac{D}{a(1+a\tau)} \left[1 - e^{-2at} + \frac{2a\tau}{(1-a\tau)} \left(e^{-(a+\tau^{-1})t} - e^{-2at} \right) \right], \quad (2.42)$$

y para tiempos tales que $at \gg 1$ garantizamos que (2.42) se transforma en una variable aleatoria Gaussiana con valor medio $\langle h_i \rangle = 0$, y varianza

$$\sigma_f^2 = \langle h_i^2 \rangle - \langle h_i \rangle^2 = c_1(\tau)D. \quad (2.43)$$

donde $c_1(\tau) = \frac{1}{a(1+a\tau)}$ y el subíndice f denota que hemos considerado el caso de condición inicial fija. También el efecto del ruido de color con respecto al ruido blanco, consiste en la renormalización de D por el factor $\frac{1}{(1+a\tau)}$.

ii) *Condiciones iniciales distribuidas. Caso desacoplado*

Este caso, como hemos mencionado, consiste en asumir que $\langle x_i(0) \xi_i(t) \rangle = 0$. Por lo tanto sólo debemos añadir un término a la Ec. (2.42) que proviene de (2.37). Así que

$$\langle h_i^2(t) \rangle = \langle x_i^2(0) \rangle + \frac{D}{a(1+a\tau)} \left[1 - e^{-2at} + \frac{2a\tau}{(1-a\tau)} \left(e^{-(a+\tau^{-1})t} - e^{-2at} \right) \right], \quad (2.44)$$

y en el límite de tiempos largos tales que $at \gg 1$, obtenemos

$$\sigma_d^2 = \langle h_i^2 \rangle - \langle h_i \rangle^2 = [c_0(\tau) + c_1(\tau)]D. \quad (2.45)$$

donde $c_0(\tau)$ y $c_1(\tau)$ ya han sido definidos, el subíndice d denota el caso desacoplado.

iii) *Condiciones iniciales distribuidas. Caso acoplado*

Aquí debemos de tomar en cuenta los tres términos de la ecuación (2.37), de modo que

$$\begin{aligned} \langle h_i^2(t) \rangle = \langle x_i^2(0) \rangle + \frac{D}{a(1+a\tau)} \left[1 - e^{-2at} + \frac{2a\tau}{(1-a\tau)} \left(e^{-(a+\tau^{-1})t} - e^{-2at} \right) \right] \\ + \frac{2D\tau}{(1+a_0\tau)(1+a\tau)} \left[1 - e^{-(a+\tau^{-1})t} \right], \end{aligned} \quad (2.46)$$

para tiempos largos tales que $at \gg 1$ garantizamos que el proceso (2.46) llega a ser una variable aleatoria Gaussiana con valor medio $\langle h_i \rangle = 0$, y varianza

$$\sigma_a^2 = \langle h_i^2 \rangle - \langle h_i \rangle^2 = [c_0(\tau) + c_1(\tau) + c_2(\tau)]D. \quad (2.47)$$

donde $c_2(\tau) = \frac{2\tau}{(1+a_0\tau)(1+a\tau)}$ y el subíndice a denota al caso acoplado.

Para cualquiera de los tres casos la densidad de probabilidad $P(h_i)$, tiene la forma de $P(h_i) \sim e^{-\alpha^2 h_i^2}$, donde $\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$, y σ^2 corresponderá a los casos i), ii) y iii). La estructura de la ecuación para la densidad de probabilidad conjunta $P(h_1, \dots, h_n)$ es la misma que (2.24), salvo la expresión para α^2 . Así que la densidad de probabilidad marginal para la variable aleatoria Gaussiana h está dada nuevamente por

$$P(h) = \frac{2\alpha^n}{\Gamma(n/2)} h^{n-1} e^{-\alpha^2 h^2} \quad (2.48)$$

También la densidad de probabilidad marginal asociada al modulo de X_0 es

$$P_{st}(X_0) = \frac{2\alpha_0^n}{\Gamma(n/2)} X_0^{n-1} e^{-\alpha^2 X_0^2}, \quad (2.49)$$

ahora, $\alpha_0^2 = \frac{1}{2\sigma_0^2}$, y σ_0^2 corresponde a la expresión (2.41). De ésta expresión se puede obtener el primer término de M_0 , que es igual $\langle r_0^l \rangle = (c_0(\tau)D)^l$, de ahí que $M_0 = (c_0(\tau)D)^l - r_{st}^l$.

En general el NLRT para sistemas inestables inducidos por ruido de color, puede escribirse de una forma diferente con respecto al NLRT para ruido blanco. Esto se puede obtener a partir de la expresión (2.11) dado explícitamente por

$$T_L = -\frac{r_{st}^l}{2aM_0} \left[\ln(\alpha^2 r_{st}) - \langle \ln(\alpha^2 h^2) \rangle \right] - C. \quad (2.50)$$

donde $C = -\frac{r_{st}^l}{2aM_0} \left[1 - \frac{\langle h^{2l} \rangle}{r_{st}^l} \right]$. Antes de obtener el tiempo característico debemos calcular las cantidades $\langle h^{2l} \rangle$ y $\langle \ln h^2 \rangle$ con la ayuda de (2.48). Para el valor de

$\langle h^{2l} \rangle$ se obtiene que $\langle h^{2l} \rangle \sim (c(\tau)D)^l$ y para $\langle \ln(\alpha^2 h^2) \rangle = \psi(n/2)$. Nuevamente hacemos uso de la aproximación de intensidad de ruido pequeño, tal que $(c(\tau)D) \ll 1$, donde $c(\tau)$ dependerá del caso que se desee estudiar. Por lo tanto, el primer término de M_0 y término $\langle h^{2l} \rangle$ se puede despreciar. Así que el tiempo característico asociado a la cantidad $\langle r^l \rangle$, para caracterizar el decaimiento de estados inestables inducidos por ruido Gaussiano de color, puede escribirse de la siguiente forma

$$T_L = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{1}{2D}\right) + B(\tau) + B_0 + \mathcal{O}(D). \quad (2.51)$$

El primer término de ésta expresión contiene al término logarítmico que es universal de los estados inestables. El término $B(\tau)$ da cuenta de las contribuciones no Markovianas, y su forma explícita dependerá de los tres casos ya mencionados. B_0 es una constante que depende de los parámetros involucrados en el sistema.

i) *Condiciones iniciales fijas.*

Para este caso la contribución no Markoviana $B(\tau)$ y la constante B_0 , se pueden obtener con ayuda de (2.43). Ellos están dados por

$$B(\tau) = \frac{1}{2a} \ln(1 + a\tau), \quad (2.52)$$

y

$$B_0 = \frac{1}{2a} \ln \left[ar_{st} e^{-\psi(n/2)} - \frac{1}{l} \right]. \quad (2.53)$$

ii) *Condiciones iniciales distribuidas. Caso desacoplado.*

En el caso, en que la condición inicial está distribuida alrededor del estado inestable, pero desacoplado del ruido. En este caso $B(\tau)$ y B_0 se pueden escribir, usando (2.45), como

$$B(\tau) = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{(1 + a\tau)(1 + a_0\tau)}{1 + (a^2 + a_0^2)/(a_0 + a)\tau} \right], \quad (2.54)$$

y

$$B_0 = \frac{1}{2a} \left[\ln \left(\frac{r_{st} e^{-\psi(n/2)}}{a_0^{-1} + a^{-1}} \right) - \frac{1}{l} \right]. \quad (2.55)$$

Si hacemos $n.l = 1$ en (2.53) y (2.55) se recupera los resultados de [19].

iii) *Condiciones iniciales distribuidas. Caso acoplado.*

Cuando la variable $x_1(0)$ está acoplada con el ruido, y además está distribuida alrededor del estado inestable del sistema, las expresiones para $B(\tau)$ y B_0 , usando (2.47) son ahora

$$B(\tau) = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{(1 + a\tau)(1 + a_0\tau)}{1 + (a + a_0)\tau} \right]. \quad (2.56)$$

y B_0 es igual a (2.55).

2.3 Descripción de la dinámica de Langevin no lineal

En las secciones anteriores, hemos estudiado la caracterización, a través de NLRT, de sistemas estocásticos inestables únicamente en el régimen lineal. En el lenguaje de potencial dijimos que el potencial lineal asociado a la dinámica lineal asociada a (2.1) tenía su barrera en el estado estacionario correspondiente de un potencial no lineal, es decir en $r = r_{st}$.

En esta sección veremos ahora que si, estudiamos la caracterización de cualquier sistema dinámico no lineal, con su correspondiente potencial no lineal, no necesitamos imponer ninguna barrera al potencial, puesto que las no linealidades de la misma son una barrera natural. En este sentido NLRT caracteriza la relajación completa del sistema no lineal desde el punto inicial de inestabilidad hasta el estado estacionario de dicho sistema. Este estado estacionario es conocido también como régimen de saturación.

Debemos remarcar que la caracterización de la relajación completa del sistema a través de QDT y NLRT es posible siempre y cuando el parámetro de control asociado a la fuerza sistemática lineal sea constante. Por el contrario, si el parámetro de control es función del tiempo, la caracterización dinámica se puede hacer únicamente en el régimen lineal, como veremos en el Cap. 3. Por lo tanto, la dinámica no lineal con ruido aditivo se escribe al igual que (2.1), tal que

$$\dot{x}_i = ax_i + n(r)x_i + \xi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.57)$$

donde a es el parámetro de control, y obviamente $n(r)x_i$ da cuenta de las contribuciones no lineales del sistema, siendo $n(r)$ una función escalar de r , y éste último es el módulo al cuadrado del vector \mathbf{X} .

La expresión (2.5) nos describe el NLRT asociado al momento de r^l , i.e. $\langle r^l \rangle$. Queremos ahora calcular la expresión de la escala de tiempo cuando se toma en cuenta las contribuciones no lineales del sistema. Para ello, debemos hacer la correspondiente conexión de (2.5) con QDT, para tales sistemas. Esto puede lograrse con el requerimiento

de la ecuación de evolución no lineal y determinista para la variable r , esto es

$$\dot{r} = f(r), \quad (2.58)$$

donde $f(r)$ es una función que tiene dos raíces. Una raíz es para $r = 0$ que corresponde al estado inestable, luego $f'(r)|_{r=0} > 0$. La otra será cuando $r = r_{st}$, la cual corresponde al estado estable, tal que $f'(r)|_{r=r_{st}} < 0$. Por lo tanto, $f(r)$ puede escribirse en forma general como

$$f(r) = \frac{r(r_{st} - r)}{c_0 + rg(r)}, \quad (2.59)$$

donde la constante $c_0 = \frac{r_{st}}{2a}$ y $g(r)$ una función polinomial dada por $g(r) = \sum_{n=0}^m g_n r^n$.

Por otro lado, la ecuación determinista asociada con (2.56) para la variable r es

$$\dot{r} = 2ar + 2rn(r). \quad (2.60)$$

Esta ecuación es compatible con (2.58) y (2.59), puesto que de acuerdo con la forma analítica de $n(r)$, (2.60) podrá escribirse en la forma de (2.59). En general podemos escribir la escala de tiempo (2.5) asociado a la cantidad $\langle r^l \rangle$, para la dinámica (2.56) como

$$T = -\frac{C_0}{M_0} \left\langle \ln \left(\frac{r_{st}}{h^2} \right) \right\rangle + \frac{1}{r_{st}} \left\langle \int_{r_0=h^2}^{r_{st}} \left[g(r)(1 + S(r)) + C_0 \frac{S(r)}{r} \right] dr \right\rangle. \quad (2.61)$$

donde $S(r) = \sum_{k=1}^{l-1} \left(\frac{r}{r_{st}} \right)^k$, es un polinomio. El primer término de (2.61) es el tiempo característico en el régimen lineal ya discutido en las secciones anteriores. El segundo término de (2.61) obviamente da cuenta de las contribuciones no lineales del modelo. Otra forma de escribir a (2.61), sería

$$T = T_L + C + \frac{1}{r_{st}} \left\langle \int_{r_0=h^2}^{r_{st}} \left[g(r)(1 + S(r)) + C_0 \frac{S(r)}{r} \right] dr \right\rangle, \quad (2.62)$$

donde $C = -\frac{r_{st}^l}{2alM_0} \left[1 - \frac{\langle h^{2l} \rangle}{r_{st}^l} \right]$. La expresión (2.62) es la escala de tiempo asociada a $\langle r^l \rangle$, y caracteriza la relajación completa del sistema dinámico no lineal (2.55). Si el orden del momento $l = 1$, obtenemos el resultado particular

$$T = T_L + C + \frac{1}{r_{st}} \left\langle \int_{r_0=h^2}^{r_{st}} g(r) dr \right\rangle. \quad (2.63)$$

En el que la cantidad $S(r) = 0$.

En el siguiente capítulo se generaliza el formalismo de QDT y NLRT a sistemas con parámetros de control dependientes del tiempo.

CAPITULO 3

Formalismo de NLRT Y QDT con parámetros de control dependientes del tiempo

3.1 Descripción de la dinámica de Langevin con RBG.

3.1.1 Condiciones iniciales distribuidas

En el desarrollo de esta sección queremos caracterizar la dinámica transitoria de sistemas estocásticos lineales cuyos parámetros de control son funciones dependientes del tiempo, usando nuevamente el formalismo de NLRT y QDT. Por lo que la ecuación dinámica de Langevin para estos sistemas descritos por un conjunto de n variables físicas será de la forma

$$\dot{x}_i = a(t) x_i + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n . \quad (3.1)$$

donde $a(t)$ es el parámetro de control que en general depende del tiempo. Asumimos que ξ_i es nuevamente Gaussiano con valor medio $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ y función de correlación

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t - t') , \quad (3.2)$$

donde D es la intensidad del ruido.

El tiempo de relajación no lineal asociado a la cantidad $\langle r^l \rangle$ es otra vez

$$T = \frac{1}{M_0} \int_0^\infty [\langle r^l(t) \rangle - \langle r^l \rangle_{st}] dt . \quad (3.3)$$

donde $M_0 = \langle r_0^l \rangle - \langle r^l \rangle_{st}$, y r es el módulo al cuadrado del vector \mathbf{X} .

La conexión entre NLRT y QDT se realiza siguiendo los mismos pasos de la sec. 2.1 del Cap. 2. De manera que la ecuación determinista para la variable r será

$$\dot{r} = 2a(t) r. \quad (3.4)$$

cuya solución es

$$r(t) = r(0) e^{2W(t)}, \quad (3.5)$$

donde

$$W(t) = \int_0^t a(s) ds. \quad (3.6)$$

De lo anterior podemos observar que $W(0) = 0$, por lo que el sistema se localiza en $r(0)$ que corresponde al origen de coordenadas $\mathbf{X} = (0, 0, \dots, 0)$, del potencial inestable asociado al proceso (3.4), es decir $U = -\frac{a(t)}{2}r$. En esta descripción determinista $r(0) = 0$, por lo que el sistema permanecerá en el estado inestable inicial del potencial, y ninguna relajación dinámica de dicho sistema podrá ocurrir. Sin embargo, si suponemos que existen pequeñas perturbaciones alrededor del estado inestable, estas serán suficientes para desencadenar la relajación dinámica del sistema [18]. Por lo tanto, la conexión del proceso (3.5) con un proceso cuasideterminista, se hace introduciendo la hipótesis de fluctuaciones de las condiciones iniciales, que consisten en suponer que $r(0) = h^2$, siendo h una variable aleatoria. En estas condiciones el proceso (3.5) se convierte en un proceso cuasideterminista dado por

$$r(t) = h^2 e^{2W(t)}, \quad (3.7)$$

donde ahora h da cuenta del efecto de las fluctuaciones iniciales responsables del decaimiento del estado inestable del sistema.

Con el propósito de garantizar el crecimiento de la evolución dinámica del proceso (3.7) hacia un estado estable que corresponda, como se vio en la Sec. 2.3, debemos imponer una condición específica a la función $W(t)$. Esta condición debe ser tal que la función $W(t)$ sea siempre una función creciente y positiva en el tiempo, para todo tiempo $t > 0$ excepto en los casos en los cuales el parámetro de control define un retraso en la inestabilidad [25], en este caso como veremos la condición de $W(t) > 0$ se satisface en el límite de tiempos largos. Por retraso en la inestabilidad queremos decir, que existe un intervalo de tiempo durante el cual el sistema aún permanece en el estado inestable del potencial. De esta forma, se requerirá de algún mecanismo capaz de romper dicho

retraso, para que el sistema abandone el estado inicial y evolucione nuevamente hacia un valor de referencia que se le impone al sistema. Podemos decir entonces, que el estudio de la dinámica estocástica transitoria de sistemas cuyos parámetros de control exhiben un retraso en la inestabilidad nos conduce a un análisis más interesante que cuando no se tiene el retraso. Esto se verá con más detalle en el siguiente capítulo, cuando se estudien algunos modelos específicos. El mecanismo que requerimos para vencer dicho retraso será nuevamente la presencia de las fluctuaciones que deberán satisfacer ciertas condiciones junto con los parámetros involucrados del sistema para que ocurra el rompimiento del retraso en la inestabilidad, y a su vez induzca la relajación dinámica del sistema.

Para la dinámica lineal (3.1), el proceso (3.7) crecerá indefinidamente una vez que el sistema abandone al estado inestable inicial, por lo que requerimos detener dicho crecimiento por un valor referencial r_{st} , tal que $r_{st} = r(t_i)$, donde t_i es un conjunto de tiempos aleatorios. Por lo tanto, el proceso completo de (3.7) tomando en cuenta el orden l del momento, se puede escribir como

$$r^l(t) = h^{2l} e^{2lW(t)}\theta(t_i - t) + r_{st}^l\theta(t - t_i), \quad (3.8)$$

donde $\theta(t)$ es la función paso.

Finalmente sustituyendo (3.8) en (3.3) obtenemos la expresión formal de los NLRT para la dinámica lineal de (3.1) asociada al promedio $\langle r^l \rangle$ cuando se tiene dependencia temporal en el parámetro de control, que se puede escribir como

$$T = -\frac{r_{st}^l}{M_0} \langle t_i \rangle + \frac{r_{st}^l}{M_0} \left\langle e^{-2l W(t_i)} \int_0^{t_i} e^{2l W(x)} dx \right\rangle. \quad (3.9)$$

De esta expresión podemos obtener (2.11) con la sustitución directa de $W(t) = at$, por lo tanto (3.9) es una generalización del caso constante. Esta escala de tiempo caracteriza la relajación dinámica de sistemas estocásticos de estados inestables con parámetros de control dependientes del tiempo, en el régimen lineal.

Si definimos

$$t_0 = -\frac{r_{st}^l}{M_0} \langle t_i \rangle, \quad (3.10)$$

y

$$t_1 = \frac{r_{st}^l}{M_0} \left\langle e^{-2l W(t_i)} \int_0^{t_i} e^{2l W(x)} dx \right\rangle. \quad (3.11)$$

A t_0 se le conoce en la literatura como el tiempo de primer paso (MFPT). Este tiempo como ya se dijo en el capítulo anterior corresponde al tiempo inicial de la relajación

dinámica al rededor del estado inestable. La segunda escala de tiempo t_1 es la nueva contribución de NLRT, y corresponde al tiempo durante el cual el sistema se aproxima a la barrera del potencial localizado en r_{st} . A esta zona, se le puede considerar como una región de aproximación determinista, donde el ruido practicamente no afecta a la evolución del sistema.

Lo que sigue es desarrollar la teoría que justifique la hipótesis de las fluctuaciones de las condiciones iniciales $r(0) = h^2$, hecha en la sección anterior. Esto se hará a través del formalismo de QDT, también ya estudiado en capítulos anteriores, con la diferencia de que ahora tenemos que el parámetro de control es en general dependiente del tiempo. Nuevamente partiendo de la solución formal de (3.1), dada por

$$x_i(t) = h_i(t) e^{W(t)}, \quad (3.12)$$

donde

$$h_i(t) = x_i(0) + \int_0^t e^{-W(s)} \xi_i(s) ds. \quad (3.13)$$

De esta expresión podemos obtener fácilmente (2.15) con la sustitución directa de $W(t) = at$, entonces (3.13) es la generalización del caso constante.

Como lo señala QDT, el proceso $h_i(t)$ deberá ser una VAG en el límite de tiempos largos. Debido a las propiedades asignadas a la función $W(t)$ y al hecho de asumir valores pequeños de $\xi_i(t)$, garantizamos la convergencia del integrando y de la integral de (3.13). De modo que entonces también

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dh_i(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-W(t)} \xi_i(t) \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

y por lo tanto $h_i(\infty) = cte$, dada por $h_i(\infty) = h_i$. En este sentido el proceso (3.12) se convierte en un proceso cuasideterminista, es decir $x_i = h_i e^{W(t)}$, que en términos de la variable r , nos queda como

$$r(t) = h^2 e^{2W(t)}, \quad (3.15)$$

el cual es consistente con (3.7), donde $h^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2$ juega el papel de una condición inicial efectiva.

El siguiente paso es construir la densidad de probabilidad marginal $P(h)$. a partir de la densidad de probabilidad conjunta $P(h_1, \dots, h_n)$. Para esto requerimos de $P(h_i)$, que obviamente esta determinada por sus dos primeros momentos $\langle h_i \rangle$ y $\langle h_i^2 \rangle$. El primer

momento es $\langle h_i \rangle = \langle x_i(0) \rangle$. Para el segundo momento se requiere de la expresión

$$\langle h_i^2(t) \rangle = \langle x_i^2(0) \rangle + 2D \int_0^t e^{-2W(s)} ds. \quad (3.16)$$

Que vendría a ser la generalización de (2.28) para el caso constante.

El primer término (3.16) corresponde al efecto de las fluctuaciones de las condiciones iniciales en $t = 0$. El segundo término proviene de las fluctuaciones inducidas por el ruido. Puesto que éste término es convergente en el límite de tiempo largos, entonces definimos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-2W(s)} ds = k_0. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, la varianza $\sigma^2 = \langle h_i^2 \rangle - \langle h_i \rangle^2$ será igual a

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + 2Dk_0, \quad (3.18)$$

donde $\sigma_0^2 = \langle x_i^2(0) \rangle - \langle x_i(0) \rangle^2$.

El primer término de (3.16) se calcula a través de un estudio de condiciones iniciales tipo estado estacionario, como ya se ha hecho en capítulos previos. En este caso, el parámetro de control dependiente del tiempo puede verse en la siguiente situación física. Para el tiempo $t < 0$ el parámetro $a(t)$ tiene el valor $-a_0$ con $a_0 > 0$, y el sistema está localizado en un estado estable. Por lo tanto, para valores del tiempo $t < 0$, el sistema está descrito por la dinámica

$$\dot{x}_i = -a_0 x_i + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

De la sección 2.1.2 tenemos que $\sigma_0^2 = \frac{D}{a_0}$, donde la intensidad del ruido D del sistema para $t < 0$ y $t > 0$ hemos asumido que son iguales. Con lo cual concluimos

$$\sigma^2 = (a_0^{-1} + 2k_0) D, \quad (3.20)$$

donde notamos que σ^2 es proporcional a la intensidad del ruido.

Puesto que h_i es una VAG, su densidad de probabilidad también es del tipo Gaussiano. entonces su densidad de probabilidad marginal está dada, al igual que (2.24), por

$$P(h) = \frac{2\alpha^n}{\Gamma(n/2)} h^{n-1} e^{-\alpha^2 h^2}. \quad (3.21)$$

donde $\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$. y σ^2 corresponde a la ecuación (3.20).

Por otro lado, la densidad de probabilidad asociada a las condiciones iniciales, para la variable $x_i(0)$ también será del tipo Gaussiano, con lo cual concluimos nuevamente que

$$P_{st}(X_0) = \frac{2\alpha_0^n}{\Gamma(n/2)} X_0^{n-1} e^{-\alpha_0^2 X_0^2}, \quad (3.22)$$

donde $\alpha_0^2 = \frac{1}{2\sigma_0^2} = \frac{D}{2a_0}$.

De esta ultima expresión podemos calcular el primer término de la constante M_0 , dando como resultado $\langle r_0^l \rangle \sim (\frac{D}{a_0})^l$.

Habiendo construido el formalismo de QDT y su conexión con NLRT cuando el parámetro de control es función del tiempo, nos encontramos en condiciones de calcular las escalas de tiempo $T = t_0 + t_1$. Estas escalas de tiempo serán calculadas en la Sec. 4.2 del Cap. 4, donde se estudian los modelos dinámicos con parámetros de control dependientes del tiempo e inducidos con ruido blanco.

3.2 Descripción de la dinámica de Langevin con RCG.

3.2.1 Condiciones iniciales distribuidas.

Lo mismo que en la sección anterior, queremos caracterizar la relajación dinámica de estados inestables gobernados por la ecuación (3.1), pero ahora inducido por ruido de color Gaussiano [27]. Partiendo de nueva cuenta de la expresión (3.1)

$$\dot{x}_i = a(t) x_i + \xi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.23)$$

El término $\xi_i(t)$ es un ruido Gaussiano con media cero y función de correlación

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \frac{D}{\tau} \delta_{ij} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

donde D es la intensidad del ruido y τ es el tiempo de correlación.

La estructura algebraica definida para NLRT y QDT, en la sección (3.1) en principio sería la misma que se debería desarrollar en esta sección; por tal razón nosotros partimos de la expresión (3.13), la cual es

$$h_i(t) = x_i(0) + \int_0^t e^{-W(s)} \xi_i(s) ds. \quad (3.25)$$

Lo que sigue es mostrar que $h_i(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana en el límite de tiempos largos, pero esta demostración ya fue hecha en la sección previa. Por lo tanto, dado que h_i es una VAG, concluimos que su densidad de probabilidad $P(h_i)$ es también Gaussiana. Para construir $P(h_i)$ se requiere de los dos primeros momentos de variable h_i , e.d., $\langle h_i \rangle$ y $\langle h_i^2 \rangle$. De la expresión (3.25) tenemos que $\langle h_i \rangle = \langle x_i(0) \rangle$ y para la función de autocorrelación se tiene que

$$\begin{aligned} \langle h_i^2(t) \rangle &= \langle x_i^2(0) \rangle + \int_0^t \int_0^t e^{-[W(s)+W(s')]} \langle \xi_i(s) \xi_i(s') \rangle ds ds' \\ &\quad + 2 \int_0^t e^{-W(s')} \langle x_i(0) \xi_i(s') \rangle ds'. \end{aligned} \quad (3.26)$$

De esta expresión obtenemos directamente (2.36) con la sustitución de $W(t) = at$, por lo tanto (3.26) es una generalización del caso constante. El primer término de

(3.26) corresponde a las fluctuaciones de las condiciones iniciales del sistema. El segundo término proviene de las fluctuaciones inducidas por el ruido. El tercer término contiene el acoplamiento entre estado inicial del sistema $x_i(0)$ y del ruido ξ_i .

El comportamiento asintótico del segundo momento dado por (3.26) se puede analizar cualitativamente a partir de la condición impuesta en la función $W(t) > 0$ [25, 27]. Para ello, podemos definir lo siguiente: sea $I_0(t, \tau)$ la integral del segundo término de (3.26) e independiente de la intensidad del ruido D . La segunda definición $I_1(t, \tau)$ es la integral del tercer término de la expresión en cuestión y nuevamente es independiente de D . Ambos términos son convergentes en el límite de tiempos largos, por lo que ahora definimos

$$k_0(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} I_0(t, \tau), \quad (3.27)$$

y

$$k_1(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t, \tau). \quad (3.28)$$

Por lo tanto, en el límite de tiempos largos h_i se convierte en una VAG, con valor promedio $\langle h_i \rangle = \langle x_i(0) \rangle$ y varianza igual a

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + Dk_0(\tau) + 2Dk_1(\tau). \quad (3.29)$$

donde $\sigma_0^2 = \langle x_i^2(0) \rangle - \langle x_i(0) \rangle^2$.

La varianza σ_0^2 se obtiene al igual que en el caso de ruido de color con parámetro de control constante estudiado en la sección (2.2) del Cap. 2. De la expresión (2.40) tenemos que $\sigma_0^2 = c_0(\tau)D$, donde $c_0(\tau) = \frac{1}{a_0(1+a_0\tau)}$, nuevamente se supone que la intensidad del ruido D del sistema para $t < 0$ y $t > 0$ es la misma. Con esto concluimos que

$$\sigma^2 = [c_0(\tau) + k_0(\tau) + 2k_1(\tau)]D. \quad (3.30)$$

donde c_0 corresponde a los efectos de las fluctuaciones de las condiciones iniciales del sistema en $t = 0$. La constante k_0 da cuenta de la parte no acoplada entre el ruido y el sistema, así como de los efectos no Markovianos. La constante k_1 toma en cuenta el efecto del acoplamiento, entre el ruido y el estado inicial del sistema en $t = 0$, y también de las contribuciones no Markovianas.

Dados los dos primeros momentos $\langle h_i \rangle$ y $\langle h_i^2 \rangle$, estamos en condición de construir la densidad de probabilidad marginal para la variable h . Esta densidad va a ser la misma

que se obtuvo en la sección (2.1.1), y está dada por

$$P(h) = \frac{2\alpha^n}{\Gamma(n/2)} h^{n-1} e^{-\alpha^2 h^2}, \quad (3.31)$$

donde $\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$, y σ^2 corresponde ahora a (3.30).

Por otra parte, la densidad de probabilidad asociada a las condiciones iniciales, para la variable $x_i(0)$, es también

$$P_{st}(X_0) = \frac{2\alpha_0^n}{\Gamma(n/2)} X_0^{n-1} e^{-\alpha_0^2 X_0^2}, \quad (3.32)$$

donde $\alpha_0^2 = \frac{1}{2\sigma_0^2}$, y σ_0^2 corresponde a la expresión (2.40) del Cap. 2.

El cálculo del primer término de M_0 se puede calcular usando (3.32) y se obtiene como resultado $\langle r^l(0) \rangle \sim (D'/a_0)^l$, donde $D' = \frac{D}{(1+a_0\tau)}$.

Una vez, construido el formalismo de QDT y su conexión con NLRT cuando el parámetro de control es función del tiempo, nuevamente nos encontramos en condiciones de calcular las escalas de tiempo $T = t_0 + t_1$. Estas escalas de tiempo serán calculadas en la Sec. 4.2.2 del Cap. 4, donde se estudian los modelos dinámicos con parámetros de control dependientes del tiempo e inducidos con ruido de color.

CAPITULO 4

Modelos dinámicos inestables

4.1 Modelo con parámetros de control constantes

4.1.1 Cálculo de NLRT para el modelo de Landau con RBG

En esta sección vamos a calcular el NLRT asociado a sistemas no lineales (2.57) para un modelo específico, conocido como el modelo de Landau o también conocido como el modelo de potencial biestable [18]. Este modelo es típico en el marco de nuestra teoría, por tener un estado inestable y dos estados estables. La ecuación de Langevin asociada a este modelo para un conjunto de x_i variables independientes está dada por

$$\dot{x}_i = ax_i - brx_i + \xi_i(t) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad (4.1)$$

donde r es el modulo al cuadrado del vector \mathbf{X} . El segundo término contiene la contribución no lineal $n(r) = -br$ de acuerdo con (2.57). El término fluctuante $\xi_i(t)$, tiene valor medio cero y función de correlación

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t - t') \quad . \quad (4.2)$$

La ecuación determinista asociada a r tiene ahora la forma de

$$\dot{r} = 2ar - 2br^2 \quad , \quad (4.3)$$

y el valor del estado estacionario será $r_{st} = \frac{a}{b}$. También la Ec. (4.3) puede escribirse de la forma (2.59), esto es

$$\dot{r} = \frac{r(r_{st} - r)}{\frac{r_{st}}{2a}} \quad . \quad (4.4)$$

De donde concluimos que $g(r) = 0$ y $C_0 = \frac{r_{st}}{2a}$. Por lo tanto, el NLRT asociado al momento $\langle r^l \rangle$, de acuerdo con la Ec. (2.62) del Cap. 2, está dado por

$$T = T_L + C + \frac{1}{2a} \left\langle \int_{h^2}^{r_{st}} \frac{S(r)}{r} dr \right\rangle. \quad (4.5)$$

Haciendo el algebra pertinente, y tomando en cuenta que $\langle h^{2l} \rangle$ es despreciable en el límite de intensidad de ruido pequeño, concluimos que (4.5) se puede escribir con ayuda de (2.50) como

$$T = \frac{1}{2a} \left\{ \ln(\alpha^2 r_{st}) - \psi(n/2) + \psi(l) + \gamma \right\}, \quad (4.6)$$

donde $\psi(x)$ es la función digamma y $\gamma = 0.577$ es la constante de Euler, y $\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ dependerá de las condiciones iniciales del sistema.

La expresión (4.6) también puede adoptar la forma

$$T = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{1}{2D}\right) + B_0 + \mathcal{O}(D). \quad (4.7)$$

El primer término es el término universal y característico del decaimiento de estados inestables. La constante B_0 contiene los parámetros asociados al modelo.

Las situaciones en las que estamos interesados para las condiciones iniciales son: condiciones iniciales fijas y condiciones iniciales distribuidas.

i) *Condiciones iniciales fijas*

Para este caso, la varianza σ^2 está dada por $\sigma^2 = \frac{D}{a}$ de acuerdo con (2.20), entonces la constante B_0 tiene la forma

$$B_0 = \frac{1}{2a} \left[\ln(a r_{st}) - \psi(n/2) + \psi(l) + \gamma \right]. \quad (4.8)$$

ii) *Condiciones iniciales distribuidas*

Para este caso se tiene que $\sigma^2 = \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a}\right)D$ de (2.31). Por lo tanto B_0 es igual a

$$B_0 = \frac{1}{2a} \left[\ln\left(\frac{r_{st}}{a_0^{-1} + a^{-1}}\right) - \psi(n/2) + \psi(l) + \gamma \right]. \quad (4.9)$$

4.1.2 Cálculo de NLRT para el modelo de Landau con RCG

Partimos nuevamente de la ecuación de Lagevin (4.1)

$$\dot{x}_i = ax_i - brx_i + \xi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.10)$$

ahora el valor medio del ruido $\langle \xi_i \rangle = 0$ y su función de correlación es

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \frac{D}{\tau} \delta_{ij} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}}. \quad (4.11)$$

Donde D es la intensidad del ruido y τ es el tiempo de correlación [19]. El NLRT tiene la misma estructura algebraica que (4.6)

$$T = \frac{1}{2a} \left\{ \ln(\alpha^2 r_{st}) - \psi(n/2) + \psi(l) + \gamma \right\}, \quad (4.12)$$

Esta escala de tiempo puede también escribirse como

$$T = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{1}{2D}\right) + B(\tau) + B_0 + \mathcal{O}(D). \quad (4.13)$$

De nueva cuenta el primer término logarítmico es universal en estados inestables. Lo nuevo en esta expresión es el segundo término, que corresponde a las contribuciones no markovianas: cuya expresión explícita se dará a continuación. El tercer término nuevamente corresponde a una constante. De acuerdo con el valor de σ^2 tendremos expresiones explícitas para $B(\tau)$ y B_0 .

i) *Condiciones iniciales fijas*

Este caso es el más fácil de estudiar, pero es menos realista. Para hallar el NLRT requerimos de la expresión de la varianza, ésta viene dada por (2.43) siendo $\sigma_f^2 = \frac{D}{a(1+a\tau)}$, por lo tanto $B(\tau)$ y B_0 se obtiene con ayuda de (4.12), dando como resultado

$$B(\tau) = \frac{1}{2a} \ln(1 + a\tau). \quad (4.14)$$

y

$$B_0 = \frac{1}{2a} \left[\ln(ar_{st}) - \psi(n/2) + \psi(l) + \gamma \right]. \quad (4.15)$$

ii) *Condiciones iniciales distribuidas, caso desacoplado*

Para este caso, tenemos que la varianza viene dada por (2.45), y con ayuda de (4.12) se tiene

$$B(\tau) = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{(1 + a_0\tau)(1 + a\tau)}{1 + \frac{(a_0^2 + a^2)\tau}{a_0 + a}} \right], \quad (4.16)$$

y

$$B_0 = \frac{1}{2a} \left[\ln \left(\frac{\tau_{st}}{a_0^{-1} + a^{-1}} \right) - \psi(n/2) + \psi(l) + \gamma \right]. \quad (4.17)$$

iii) *Condiciones iniciales distribuidas, caso acoplado*

Este caso es el más realista que se pudiera considerar físicamente. Su varianza viene dada por (2.47), haciendo el algebra correspondiente obtenemos

$$B(\tau) = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{(1 + a_0\tau)(1 + a\tau)}{1 + (a_0 + a)\tau} \right]. \quad (4.18)$$

La expresión de B_0 es la misma que (4.17).

Si hacemos un análisis de las expresiones de $B(\tau)$ anteriores, podemos obtener en el límite de tiempo de correlación pequeño tal que $\tau \ll 1$, las siguientes aproximaciones haciendo uso de la propiedad $\ln(1+x) \approx x$. Por lo tanto, para cada caso tenemos lo siguiente. para el caso i) tenemos $B(\tau) = \frac{\tau}{2}$; para el caso ii) $B(\tau) = \frac{a_0\tau}{a_0+a}$, y finalmente para iii) se tiene $B(\tau) = 0$. Por tanto el caso acoplado corresponde en este límite de aproximación para τ al caso de ruido blanco.

4.2 Modelos con parámetros de control dependientes del tiempo

4.2.1 Cálculo de NLRT para el modelo de rampa con RBG

Correspondiente a esta parte vamos a estudiar el decaimiento de la dinámica estocástica lineal (3.1) modulada por variaciones lentas en el tiempo, de los parámetros de control que definen un retraso en la inestabilidad [25]. Entre estos modelos, podemos encontrar el modelo de rampa, cuya expresión analítica está dada por

$$a(t) = bt - a_0, \quad (4.19)$$

con $b > a_0 > 0$. Nosotros estamos interesados en describir la dinámica transitoria de la Ec. (3.1), cuando el parámetro de control es modulado por la Ec. (4.19), y a su vez sufre un cambio continuo desde valores por abajo hasta valores por encima de un valor umbral $\bar{f} = \frac{a_0}{b}$, donde \bar{f} es el valor para el cual dicho parámetro cambia de signo. La situación

física que se tiene es la siguiente: el parámetro (4.19) es válido para todo tiempo $t > 0$ y para tiempos $t \leq 0$ tiene un valor fijo $-a_0$. Esto significa físicamente que para $t < \bar{t}$, el sistema se encuentra en un estado estacionario estable, puesto que $a(t) < 0$, y para tiempos $t > \bar{t}$, el sistema se encuentra en un estado inestable, pues $a(t) > 0$, y el sistema comenzará a decaer como consecuencia del ruido.

En el Cap. 3 dijimos que cuando el parámetro de control define un retraso en la inestabilidad, requerimos de algún mecanismo capaz de vencer dicho retraso y provocar el decaimiento del estado inestable del sistema. En el contexto de nuestro estudio, este mecanismo no será otra cosa que la presencia de las fluctuaciones estocásticas, presentes en el sistema. Por tanto para lograr el rompimiento del retraso en la inestabilidad e inducir la relajación dinámica del sistema alrededor del estado inestable, debemos establecer las condiciones que deben satisfacer las fluctuaciones con respecto a las constantes del parámetro de control dependiente del tiempo. Para poder establecer lo anterior, hagamos un estudio acerca de lo que queremos decir con retraso en la inestabilidad, cuya definición proviene de un análisis determinista [25].

Desde el punto de vista determinista el proceso (3.5) define un retraso en la inestabilidad, que puede verse de la siguiente manera. Si el parámetro $a(t)$ es barrido en el tiempo, nosotros obtenemos un retraso en la inestabilidad, a partir del punto de bifurcación estático definido por \bar{t} , tal que $a(\bar{t}) = 0$. Definimos ahora el retraso en la inestabilidad como $t^* - \bar{t}$, donde t^* es el tiempo en el que también $W(t^*) = 0$ y es el tiempo en el cual el sistema llega a ser dinámicamente inestable, y $r(t)$ comienza a crecer exponencialmente. t^* es también el tiempo en el que sistema recupera su condición inicial $r(0)$. A partir del valor inicial $r(0)$ el proceso $r(t)$ crece para $t > t^*$. Así que en el intervalo de tiempo $(0, t^*)$ podemos decir que existe una estabilidad acumulada o que el sistema permanece en un estado estable, por lo que $t^* - \bar{t}$ se interpreta como un retraso en la inestabilidad, ya que para tiempos $t > \bar{t}$ el parámetro de control es positivo, pero aún el sistema no ha comenzado su crecimiento exponencial, dado que todavía el sistema se encuentra en el estado estable.

Para el modelo (4.19), el retraso será $t^* - \bar{t} = \bar{t}$, donde $\bar{t} = \frac{a_0}{b}$ y además $t^* = 2\bar{t}$. Por lo que desde el punto de vista determinista, se predice un aumento en el retraso para valores fijos de b y un aumento en el valor de a_0 . Sin embargo, como veremos a continuación, desde el punto de vista estocástico, la presencia de pequeñas fluctuaciones son suficientes

para romper el retraso en la inestabilidad.

Si asumimos que el sistema abandona el estado inestable por efecto de las fluctuaciones, y relaja hacia un valor previamente establecido, entonces nosotros queremos caracterizar esta relajación dinámica a través de NLRT dado por (3.9) y analizar bajo que condiciones esto es posible.

Primeramente, para el modelo (4.19), el NLRT puede ser formulado en términos de la diferencia de tiempos $s = t - \bar{t}$, donde la función $W(t)$ puede escribirse en términos de s como $W(s) = \frac{b}{2}[s^2 - \bar{t}^2]$. Esta función es positiva para $s > \bar{t}$.

Así que en términos de s el NLRT puede escribirse como

$$t_0 = -\frac{r_{st}^l}{M_0} \langle s_i \rangle, \quad (4.20)$$

y

$$t_1 = \frac{r_{st}^l}{M_0} \left\langle e^{-2l W(s_i)} \int_0^{s_i} e^{2l W(x)} dx \right\rangle. \quad (4.21)$$

El proceso cuasideterminista para un conjunto de tiempos aleatorios s_i en el cual el sistema, alcanza el valor del estado estable está dado por

$$r_{st} = h^2 e^{b(s_i^2 - \bar{t}^2)}. \quad (4.22)$$

Claramente t_0 se calcula con la ayuda de la Ec. (4.22), por lo que

$$t_0 = \langle t_i \rangle - \bar{t} = -\frac{r_{st}^l}{M_0} \left\langle \left[\left(\frac{a_0^2}{b} \right) + \frac{1}{b} \ln \left(\frac{r_{st}}{h^2} \right) \right]^{1/2} \right\rangle. \quad (4.23)$$

Para el cálculo de t_0 , introducimos el siguiente parámetro $\lambda_1 \equiv \ln \gamma_1^2$, donde $\gamma_1^2 = \frac{r_{st}}{2C_1 D}$, C_1 es una constante calculada en el apéndice (A.1) en el límite de tiempos tales que $\sqrt{b}s \gg 1$. claramente la condición $\lambda_1 \gg 1$, se satisface si $\gamma_1^2 \gg 1$. Podemos checar que la condición $\gamma_1^2 \gg 1$ se cumple en el límite de intensidad de ruido pequeño tal que $D \ll a_0$ y $D \ll \sqrt{b}$. La última desigualdad debe ser la condición principal para el rompimiento del retraso en la inestabilidad, y por consiguiente para que la inestabilidad sea alcanzada. En este mismo límite de aproximación para el ruido, nosotros podemos calcular el valor de la constante M_0 que está dado por $M_0 \approx -r_{rs}^l$. Al introducir el parámetro λ_1 en t_0 , podemos realizar una expansión en serie de potencia en λ_1^{-1} , obteniendo el siguiente resultado

$$t_0 = \langle t_i \rangle - \bar{t} = \left(\frac{1}{b} \right)^{1/2} \left\{ \lambda_1^{1/2} + \frac{[(a_0^2/b) - \psi(n/2)]}{2 \lambda_1^{1/2}} \right\}. \quad (4.24)$$

donde hemos usado el resultado $\langle \ln \alpha^2 h^2 \rangle = \psi(n/2)$ con la ayuda de (3.21), siendo $\psi(x)$ la función digama. La expresión (4.24) se justifica solo si $\frac{a_0^2}{b} \ll \ln \gamma_1^2$.

La relajación completa hacia el valor r_{st} se hará calculando la otra escala de tiempo t_1 dado en (4.21). El cálculo explícito de t_1 está dado en el apéndice (A.4) donde se muestra que en el límite de tiempos largos tal que $\sqrt{b} s_i \gg 1$

$$t_1 = -\frac{1}{2l} \left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \lambda_1^{-1/2} + \mathcal{O}\left(\lambda_1^{-3/2}\right). \quad (4.25)$$

Finalmente, el tiempo característico NLRT asociado a la relajación dinámica de estados inestables modulado por variaciones lentas del modelo de rampa, se obtiene sumando (4.24) y (4.25), dando como resultado

$$T = \frac{a_0}{b} + \left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \left\{ \lambda_1^{1/2} + \frac{[(a_0^2/b) - \psi(n/2) - (1/l)]}{2 \lambda_1^{1/2}} \right\} + \mathcal{O}\left(\lambda_1^{-3/2}\right). \quad (4.26)$$

4.2.2 Cálculo de NLRT para el modelo general con RBG

El parámetro de control que generaliza el modelo anterior es aquel que es modulado por una familia de funciones dependientes del tiempo de la forma

$$a(t) = bt^\delta - a_0. \quad (4.27)$$

con $b > a_0$, y $\delta > 0$ [26]. Para el caso $\delta = 0$, el parámetro de control es obviamente una constante, dada por $a = b - a_0$ [18]. Para este caso la caracterización dinámica a través de NLRT ha sido ya desarrollada en la sec. 4.1.1 de este capítulo. Para el caso $\delta = 1$, el modelo (4.27) se reduce al modelo de rampa, visto en la sección anterior. Para el caso general $\delta > 0$, también estamos interesados en caracterizar la relajación dinámica de sistemas inestables, a través de NLRT, la cual puede obtenerse de manera analítica, con una aproximación en el límite asintótico de la función $W(t)$ en la que podemos asegurar que $W(t) > 0$, aunque el cálculo de la varianza asociada a la condición inicial efectiva se lleva a cabo con la expresión exacta de $W(t)$. Una vez vencido el retraso en la inestabilidad podemos asegurar el crecimiento de $W(t)$ hacia r_{st} , en el límite asintótico tal que $t \gg \bar{t}$, donde $\bar{t} = (\frac{a_0}{b})^\delta$. En este régimen $W(t) \approx (\frac{b}{p})t^p$, con $p = \delta + 1$. Por lo tanto el proceso (3.7), adquiere la forma de

$$r_{st} = h^2 e^{3t^p}. \quad (4.28)$$

donde $\beta \equiv \frac{2b}{p}$, y t_i es un conjunto de tiempos aleatorios para los cuales el sistema alcanza el valor r_{st} .

Haciendo uso de Ec. (4.28), tenemos

$$t_0 = -\frac{r_{st}^l}{M_0} \left\langle \left[\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{r_{st}}{h^2} \right) \right]^{1/p} \right\rangle. \quad (4.29)$$

Para hacer el cálculo de t_0 , definimos un nuevo parámetro $\lambda_\delta \equiv \ln \gamma_\delta^2$, donde $\gamma_\delta^2 \equiv \frac{r_{st}}{2C_\delta D}$, y C_δ es una constante cuyo resultados se encuentran en el apéndice (A.2), y se realizan, en el límite de tiempos largos tal que $\beta t^p \gg 1$. De nueva cuenta la condición $\lambda_\delta \gg 1$, se satisface si $\gamma_\delta^2 \gg 1$ en el límite de intensidad de ruido pequeño tal que $D \ll a_0$ y $D \ll \beta^{1/p}$, donde esta última desigualdad nos da la condición principal para vencer el aplazamiento de la inestabilidad. En éste mismo límite el primer término de M_0 es despreciable, por lo que $M_0 \approx -r_{st}^l$. El tiempo t_0 se construye haciendo una expansión en serie de potencia de λ_δ^{-1} , teniendo como resultado

$$t_0 = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1/p} \left\{ \lambda_\delta^{1/p} - \frac{\psi(n/2)}{p \lambda_\delta^{(p-1)/p}} \right\}. \quad (4.30)$$

La contribución t_1 al NLRT será evaluada en la evolución asintótica del sistema cercano al estado estable. En el apéndice (A.5) se muestra que la escala tiempo t_1 es

$$t_1 = -\frac{1}{lp} \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1/p} \lambda_\delta^{-(p-1)/p} + \mathcal{O} \left(\lambda_\delta^{-[(p-1)/p+1]} \right). \quad (4.31)$$

Por lo tanto, el tiempo característico que describe la relajación dinámica del sistema lineal, modulado por la familia de funciones (4.27) queda descrito de la forma

$$T = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1/p} \left\{ \lambda_\delta^{1/p} - \frac{[\psi(n/2) + (1/l)]}{p \lambda_\delta^{(p-1)/p}} \right\} + \mathcal{O} \left(\lambda_\delta^{-[(p-1)/p+1]} \right). \quad (4.32)$$

En la Fig. 4.1. se observa el comportamiento de ésta escala de tiempo, como función de la intensidad del ruido D , para ciertos valores de los parámetros involucrados.

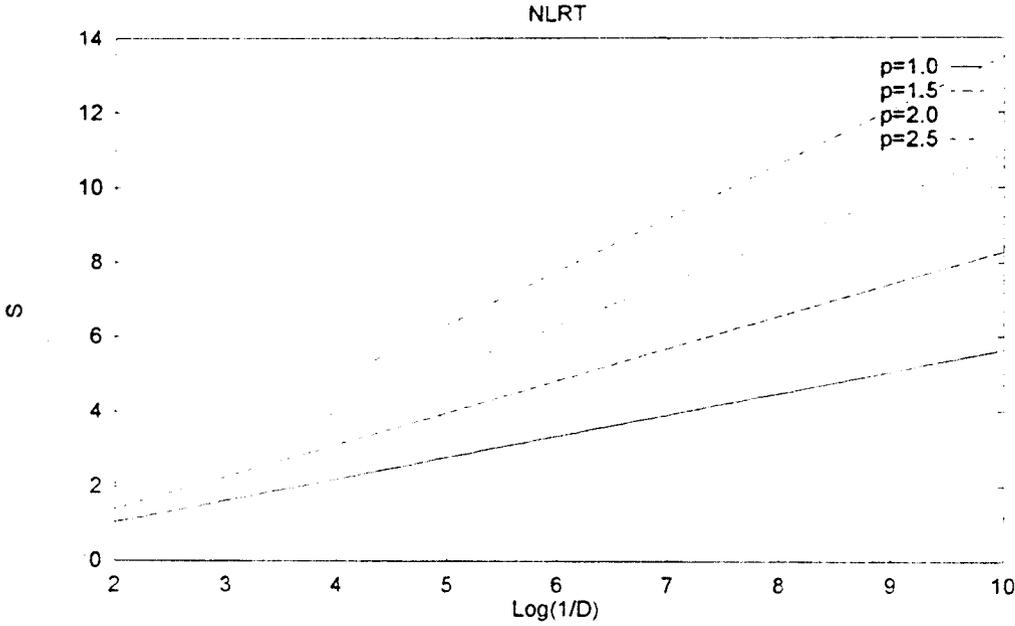


Fig. 4.1: Comportamiento de NLRT (4.32) rescalado como $S = T^p$ como función de la intensidad del ruido D , para el caso particular de una variable física $n = 1$. Los valores de δ son: $\delta = 0, 0.5, 1.0$ y 1.5 . Los valores de los otros parámetros son: $b = 2, a_0 = 1$ y $r_{st} = 1$. Para estos valores se observa un comportamiento lineal.

4.2.3 Cálculo de NLRT para el modelo de rampa con RCG

En esta parte vamos hacer lo mismo que en la sección anterior, e.d., hallar el NLRT asociado a la relajación de la dinámica estocástica lineal (3.1), con la diferencia de que ahora la relajación es inducida por ruido de color Gaussiano. La ecuación explícita para el parámetro de control dependiente del tiempo es nuevamente (4.18). Para este modelo las expresiones para t_0 y t_1 tienen la misma estructura algebraica que las que fueron obtenidas para el caso de ruido blanco de la Sec. 4.2.1, con excepción de la varianza asociada a las condiciones iniciales efectivas, la cual será en este caso, una cantidad que dependerá de la intensidad D del ruido y del tiempo de correlación τ , ver el Apéndice B. La expresión para $W(t)$ es la misma que para el caso de ruido blanco. De manera que para calcular t_0 , requerimos nuevamente introducir el parámetro definido como $\Lambda_1 \equiv \ln(\Gamma_1^2)$, siendo $\Gamma_1^2 = \frac{r_{st}}{2C_1(\tau)D}$, y $C_1(\tau)$ es una constante dada por (B.10) del Apéndice B, en el límite de tiempos largos, tal que $\sqrt{\frac{b}{2}}s \gg 1$. Podemos verificar que $\Lambda_1 \gg 1$ si $\Gamma_1^2 \gg 1$. Esto es cierto en el límite de intensidad de ruido pequeño tal que $D \ll a_0, D \ll \tau b$ y $D \ll \sqrt{b}$.

siendo las dos últimas condiciones el criterio principal para romper el aplazamiento de la inestabilidad. Nuevamente $M_0 \approx -r_{st}^l$. Haciendo una expansión en serie de potencias en Λ_1^{-1} , obtenemos para t_0 lo siguiente

$$t_0 = \langle t_i \rangle - \bar{t} = \left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \left\{ \Lambda_1^{1/2} + \frac{[(a_0^2/b) - \psi(n/2)]}{2\Lambda_1^{1/2}} \right\}, \quad (4.33)$$

donde Λ_1 se puede expresar de la forma siguiente

$$\Lambda_1 = \ln\left(\frac{1}{D}\right) + G(\tau) + G_0, \quad (4.34)$$

donde

$$G(\tau) = \ln\left[\frac{(1 + a_0\tau)}{1 + a_0(1 + a_0\tau)(k_0^1(\tau) + 2k_1^1(\tau))}\right], \quad (4.35)$$

y

$$G_0 = \ln\left[\frac{a_0 r_{st}}{2}\right]. \quad (4.36)$$

El primer término de (4.34) contiene la contribución dominante de la relajación dinámica. El segundo término contiene las contribuciones no markovianas, así como el acoplamiento entre el ruido y el sistema en $t = 0$. El tercer término B_0 es a una constante típica del modelo. Estos mismos resultados para t_0 han sido ya obtenidos por medio de los MFPT [27].

La escala de tiempo t_1 se obtiene de nueva cuenta de (4.21), en el límite de tiempos largos tal que $\sqrt{bs} \gg 1$. En el apéndice (A.4.1) se encuentra el cálculo explícito de t_1 , teniendo como resultado

$$t_1 = -\frac{1}{2l} \left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \Lambda_1^{-1/2} + \mathcal{O}\left(\Lambda_1^{-3/2}\right), \quad (4.37)$$

donde λ_1 se ha sustituido por Λ_1 . Finalmente, el NLRT asociado a la dinámica lineal, para el modelo de rampa está dado por

$$T = \frac{a_0}{b} + \left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \left\{ \Lambda_1^{1/2} + \frac{[(a_0^2/b) - \psi(n/2) - (1/l)]}{2\Lambda_1^{1/2}} \right\} + \mathcal{O}\left(\Lambda_1^{-3/2}\right). \quad (4.38)$$

4.2.4 Cálculo de NLRT para el modelo general con RCG

Al igual que en la sección anterior, vamos a calcular el NLRT del sistema lineal (3.1), tomando en cuenta que ahora el parámetro de control es modulado por una familia de

funciones dependientes del tiempo, como se expresa en (4.27). Lo mismo que en la Sec. (4.2.1.1) de ruido blanco, la expresión para $W(t)$ es aproximada en el límite asintótico tal que $t \gg \bar{t}$, para poder obtener resultados explícitos de t_0 y t_1 . La estructura algebraica de t_0 y t_1 es la misma que (4.30) y (4.31) respectivamente.

Para el cálculo de t_0 se requiere de un nuevo parámetro que generaliza al parámetro anterior del modelo de rampa, que a su vez deberá cumplir con ciertas condiciones. Dicho parámetro está definido como $\Lambda_\delta \equiv \ln(\Gamma_\delta^2)$, siendo $\Gamma_\delta^2 = \frac{r_{st}}{2C_\delta(\tau)}D$, y $C_\delta(\tau)$ es una constante dada por (B.21) del Apéndice B, en el límite de tiempos largos tal que $\beta_0 t^p \gg 1$. Nuevamente la condición $\Lambda_\delta \gg 1$ se satisface si $\Gamma_\delta^2 \gg 1$. La última desigualdad es cierta en el límite de intensidad de ruido pequeño tal que $D \ll a_0$, $D \ll \tau \beta_0^{2/p}$ y $D \ll \beta_0^{1/p}$. Estas dos últimas condiciones corresponden al criterio principal para romper el aplazamiento de la inestabilidad. También $M_0 \approx -r_{st}^l$. Realizamos otra vez la expansión en serie de potencias en Λ_δ^{-1} , para obtener

$$t_0 = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/p} \left\{ \Lambda_\delta^{1/p} - \frac{\psi(n/2)}{p \Lambda_\delta^{(p-1)/p}} \right\}, \quad (4.39)$$

donde

$$\Lambda_\delta = \ln\left(\frac{1}{D}\right) + G(\tau) + G_0, \quad (4.40)$$

donde

$$G(\tau) = \ln\left\{ \frac{(1 + a_0\tau)}{1 + a_0(1 + a_0\tau)[k_0^\delta(\tau) + 2k_1^\delta(\tau)]} \right\}, \quad (4.41)$$

con

$$G_0 = \ln\left\{ \frac{a_0 r_{st}}{2} \right\}. \quad (4.42)$$

El término (4.40) generaliza también la expresión dada en (4.34).

La contribución de t_1 al NLRT se calcula en la aproximación asintótica cercana al estado estacionario estable, tal que $\beta t^p \gg 1$. El cálculo explícito de t_1 se encuentra en el apéndice (A.4.2), y el resultado es

$$t_1 = -\frac{1}{lp} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/p} \Lambda_\delta^{-(p-1)/p} + \mathcal{O}\left(\Lambda_\delta^{-[(p-1)/p+1]}\right), \quad (4.43)$$

donde nuevamente λ_δ se ha sustituido por Λ_δ . Finalmente, el NLRT asociado al modelo (4.28), está dado por

$$T = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/p} \left\{ \Lambda_\delta^{1/p} - \frac{[\psi(n/2) + (1/l)]}{p \Lambda_\delta^{(p-1)/p}} \right\} + \mathcal{O}\left(\Lambda_\delta^{-[(p-1)/p+1]}\right). \quad (4.44)$$

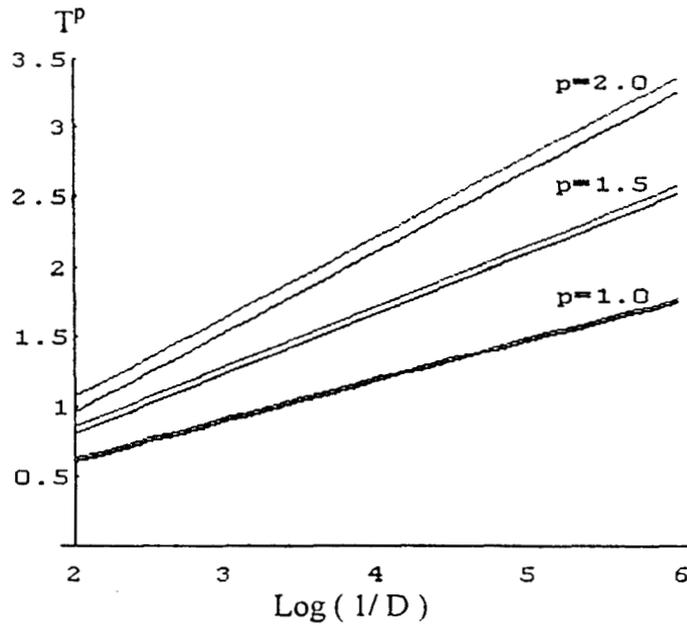


Fig. 4.2: Comportamiento de NLRT (4.44) rescalado como $S = T^p$ como función de la intensidad del ruido D , para el caso particular de una variable física $n = 1$. Los valores de δ son: $\delta = 0, 0.5$ y 1.0 . Los valores de los otros parámetros son: $b = 4, a_0 = 1, \tau = 0.5$ y $\tau = 0.9$. Para estos valores se observa un comportamiento lineal de la escala de tiempo. Las líneas correspondientes a $\tau = 0.5$ están por encima de las líneas que corresponden a $\tau = 0.9$.

En la Fig. 4.2, se muestra el comportamiento del tiempo característico T^p de (4.44), como función de $\text{Log}(\frac{1}{D})$, para diferentes tiempos de correlación. La escala de tiempo exhibe una correlación lineal con la intensidad de ruido pequeño.

Los resultados principales del trabajo de esta tesis se encuentran en las expresiones (4.33), (4.37), (4.38), (4.39), (4.43) y (4.44).

CAPITULO 5

Conclusiones y Perspectivas

5.1 Conclusiones

En este trabajo de tesis hemos desarrollado el formalismo de QDT y su correspondiente conexión con NLRT, para caracterizar la relajación dinámica de sistemas estocásticos transitorios con parámetros de control constantes y parámetros de control dependientes del tiempo, e inducidos por ruido blanco y ruido de color Gaussianos. Un aspecto importante que debemos mencionar en este trabajo, es el hecho de asumir que la fuerza sistemática asociada a la ecuación de Langevin que describe el comportamiento dinámico de los sistemas antes mencionados, es derivable de un potencial. En este contexto acordamos en nombrar a la formulación QDT para estos sistemas, como la formulación estandar de la teoría cuasideterminista (SFQDT), ya que recientemente se ha podido generalizar SFQDT a sistemas multivariables que no son derivables de una función potencial [28].

Los resultados originales de esta tesis están contenidos esencialmente en los Caps. 3 y 4. En el Cap. 3 desarrollamos la formulación estandar de QDT y realizamos su correspondiente conexión con NLRT para caracterizar la relajación dinámica de sistemas estocásticos lineales con parámetros de control dependientes del tiempo. Se muestra que el NLRT para tales sistemas, se puede escribir en términos de dos escalas de tiempo $T = t_0 + t_1$, donde t_0 es el término relevante conocido como los tiempos de primer paso, y t_1 es el término que da cuenta de la relajación dinámica en el régimen asintótico, i.e. en la región cercana a la barrera del potencial r_{st} .

En la primera mitad del Cap. 4, mostramos también que solamente en el caso de sistemas no lineales con parámetros de control constantes la caracterización de la relajación dinámica, puede hacerse en forma completa. En la segunda mitad del Cap. 4, estudiamos

dos modelos con parámetros de control dependientes del tiempo que son: el modelo de rampa dado por $a(t) = bt - a_0$, y el modelo general $a(t) = bt^\delta - a_0$. Ambos modelos estudiados en esta tesis exhiben un retraso en la inestabilidad, por lo que desde el punto de vista estocástico se establecieron las condiciones bajo las cuales es posible destruir los aplazamientos en la inestabilidad para cada modelo. Para ambos modelos se establece la condición general para el rompimiento del retraso en la inestabilidad en el límite de intensidad de ruido pequeño, que en caso de ruido blanco se satisface la condición de $\beta^{1/p} \gg D$ y en el caso de ruido de color, la condición es $\tau\beta_0^{2/p} \gg D$ y $\beta_0^{1/p} \gg D$. De estas condiciones se ve claramente que si $\delta = 1$ se obtienen las condiciones del rompimiento del retraso en la inestabilidad para el modelo de rampa, con ruido blanco y ruido de color respectivamente.

Se demuestra también que la escala de tiempo relevante que describe el decaimiento de tales sistemas para ambos modelos, ya sea con ruido blanco o ruido de color, sigue el comportamiento logarítmico universal dado por $T \sim (\ln \Lambda_\delta^2)^{1/p}$ con $p = \delta + 1$, y $\delta > 0$. En el caso de ruido de color, se pone de manifiesto el efecto del acoplamiento entre el estado inicial del sistema y el ruido. El carácter no Markoviano se encuentra en los tiempos t_0 y t_1 , explícitamente en el término Λ_δ^2 de éstas escalas de tiempo.

Las varianzas de los modelos estudiados en este trabajo se calculan tomando en cuenta la expresión exacta de $W(t)$. De modo que es de esperarse que la varianza σ_δ^2 del modelo general pueda reducirse al caso σ_1^2 del modelo de rampa. En el Apéndice A.3 se muestra que esto es posible analíticamente, para el caso de ruido blanco. Para el caso de ruido de color, en el Apéndice B.3, se muestra la concordancia entre σ_δ^2 y σ_1^2 sólo que una parte se hace analíticamente y la otra parte numéricamente, dada la complejidad algebraica de los resultados analíticos.

5.2 Perspectivas

El estudio de SFQDT para sistemas estocásticos transitorios en presencia de fuerza externa no se hizo en este trabajo, sin embargo no se prevee dificultad alguna para realizar este análisis. Podemos citar por ejemplo, el trabajo realizado por Jiménez-Aquino [22], en el que se estudia SFQDT para un laser semiconductor, en presencia de un campo eléctrico externo.

Existe la posibilidad de estudiar SFQDT para sistemas transitorios en presencia de ruidos no Gaussianos, y poder comparar con el formalismo de NLRT para tales sistemas ha sido ya estudiado en términos de la formulación de Fokker-Planck [29]-[32]. En el marco de SFQDT estamos por investigar su aplicación a otros sistemas físicos y químicos de interés, como pueden ser los cristales líquidos y las reacciones químicas respectivamente.

La formulación estandar de QDT se puede generalizar a sistemas multivariados donde la fuerza sistemática de la ecuación de Langevin no es precisamente derivable de un potencial [28]. Este formalismo teórico generalizado o matricial constituye también una alternativa para estudiar sistemas físicos de dos y tres variables que no son derivables de un potencial. Para el caso de dos variables, la aplicación inmediata la podemos encontrar en los sistemas laser en presencia de fuerzas externas constantes [33] y fuerzas dependientes del tiempo [34]. Es muy posible que también el formalismo matricial pueda aplicarse al estudio de otros sistemas físicos y químicos mencionados en el parrafo anterior.

APENDICE A

Cálculo de las varianzas σ^2 con RBG

A.1 Cálculo de la varianza σ_1^2 para el modelo de rampa

Definamos la varianza σ^2 para el caso $\delta = 1$ como σ_1^2 , que debe calcularse de (3.20). La constante k_0 de (3.20) para este modelo se define como k_0^1 , el cual debe calcularse de (3.17). El término integral de la Ec. (3.17) será

$$I(t) = \int_0^t e^{-bz^2+2a_0z} dz. \quad (A.1)$$

Puesta en términos de $s = t - \bar{t}$, se obtiene

$$I(s) = e^{(a_0^2/b)} \left[\int_0^{\bar{t}} e^{-bz^2} dz + \int_0^s e^{-bz^2} dz \right], \quad (A.2)$$

haciendo los cálculos correspondientes de las integrales, se llega a

$$I(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} e^{(a_0^2/b)} [\Phi(a_0/\sqrt{b}) + \Phi(\sqrt{b}s)], \quad (A.3)$$

donde $\Phi(x)$ es la función error [35]. En el límite de tiempos largos, tal que $\sqrt{b}s \gg 1$, la función error $\Phi(\sqrt{b}s)$ tiende a 1. De manera que k_0^1 tiene la siguiente expresión

$$k_0^1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} e^{(a_0^2/b)} [\Phi(a_0/\sqrt{b}) + 1], \quad (A.4)$$

por lo tanto, la varianza será

$$\sigma_1^2 = C_1 D, \quad (A.5)$$

donde $C_1 = (a_0^{-1} + 2k_0^1)$. En este caso el parámetro α^2 de (3.21) será definido como $\alpha_1^2 \equiv \frac{1}{2\sigma_1^2} = \frac{1}{2C_1 D}$.

A.2 Cálculo de la varianza σ_δ^2 para modelo general

Definamos la varianza σ^2 para el caso $\delta > 0$ como σ_δ^2 , que también debe de obtenerse de (3.20). En este caso la constante k_0 se define como k_0^δ y el término integral correspondiente a (3.17) será

$$I(t) = \int_0^t e^{2a_0z - \beta z^p} dz, \quad (\text{A.8})$$

esta integral nos da como resultado

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2a_0)^k}{k!} \int_0^t z^k e^{-\beta z^p} dz \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{2a_0}{\beta^{\frac{1}{p}}}\right)^k \gamma\left(\frac{k+1}{p}, \beta t^p\right), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde $\gamma(a, z)$ es la función gamma incompleta [35]. De la Ref. [35], observamos que en el límite de z tendiendo a infinito la función $\gamma(a, z)$ se reduce a la función gamma $\Gamma(a)$. En nuestro caso en el límite de tiempos largos, tal que $\beta t^p \gg 1$, la constante k_0^δ toma la forma de

$$k_0^\delta = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{2a_0}{\beta^{\frac{1}{p}}}\right)^k \Gamma\left(\frac{k+1}{p}\right). \quad (\text{A.10})$$

La convergencia de ésta serie se puede probar aplicando el criterio de D'Alambert (criterio de comparación) [35]. Para el caso $\delta > 0$ junto con la condición $(2a_0 < \beta^{1/p})$, podemos mostrar que la serie es convergente usando la identidad

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{z^a \Gamma(z)} = 1. \quad (\text{A.11})$$

Por lo tanto, la varianza para el caso general será dada por

$$\sigma_\delta^2 = C_\delta D, \quad (\text{A.12})$$

donde ahora tenemos $C_\delta = a_0^{-1} + 2 k_0^\delta$, para este caso el parámetro α^2 de (3.21) será $\alpha_\delta^2 \equiv \frac{1}{2\sigma_\delta^2} = \frac{1}{2C_\delta D}$.

A.3 Comparación de la varianza σ_1^2 con σ_δ^2

Si hacemos $\delta = 1$ en la expresión dada por (A.12), debemos esperar que esta varianza coincida con la correspondiente dada por (A.5) para el modelo de rampa. Esta comparación

nos lleva de inmediato a un análisis entre las expresiones (A.10) y (A.4). De modo que, si en (A.10) hacemos $\delta = 1$ ésta ecuación puede escribirse de la siguiente forma

$$k_0^{\delta=1} = \frac{1}{2\sqrt{b}} [\sqrt{\pi} + A + B], \quad (\text{A.13})$$

donde

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{a_0}{\sqrt{b}}\right)^{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{A.14})$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{a_0}{\sqrt{b}}\right)^{2n-1} \Gamma(n). \quad (\text{A.15})$$

Usando las indentidades $\Gamma(n + (1/2)) = (\sqrt{\pi}/2)(2n-1)!!$ y $\Gamma(n) = (n-1)!$ [35], podemos mostrar que

$$A = \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{a_0^2}{b}\right)^n = \sqrt{\pi} [e^{(a_0^2/b)} - 1], \quad (\text{A.16})$$

y

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} \left(\frac{a_0}{\sqrt{b}}\right)^{2k+1} = \sqrt{\pi} \Phi(a_0/\sqrt{b}) e^{(a_0^2/b)}. \quad (\text{A.17})$$

Por lo tanto

$$k_0^{\delta=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} e^{(a_0^2/b)} [\Phi(a_0/\sqrt{b}) + 1], \quad (\text{A.18})$$

como podemos apreciar, la Ec. (A.18) corresponde a la Ec. (A.4) que se obtuvo en el modelo de rampa, por tanto la varianza (A.12) se reduce a (A.5).

Debemos checar también que si $\delta = 0$, la varianza (A.12) debe corresponder al resultado esperado cuando el parámetro de control es constante dado por $a = b - a_0$. Esto es posible ya que si $\delta = 0$, la Ec. (A.10) se reduce a

$$k_0^{\delta=0} = \frac{1}{2b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{a_0}{b}\right)^k \Gamma(k+1) = \frac{1}{2b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_0}{b}\right)^k = \frac{1}{2(b-a_0)}. \quad (\text{A.19})$$

Esta identidad se satisface si $a_0 < b$. Esto puede verificarse con la Ec. (2.31) del Cap. 2.

A.4 Cálculo de la escala de tiempo t_1

A.4.1 Modelo de rampa

En este Apéndice vamos a calcular la escala de tiempo (4.21) del Cap. 4, cuando $\delta = 1$. Para esta cantidad tomamos en cuenta la expresión exacta de $W(s)$, de manera que (4.21) se puede escribir como

$$t_1 = \frac{r_{st}^l}{M_0} J , \quad (A.20)$$

donde ahora

$$J = \left\langle e^{-lbs_i^2} \int_0^{s_i} e^{lby^2} dy \right\rangle . \quad (A.21)$$

Esta integral es similar a la función generalizada de Dawson $F(x)$ definida como [35]

$$F(x) = e^{-x^p} \int_0^x e^{t^p} dt , \quad (A.22)$$

donde $p \geq 2$. Por lo tanto, para obtener t_1 debemos calcular el promedio de la función Dawson (A.22) para $p = 2$. Esto es

$$t_1 = - \left(\frac{1}{bl} \right)^{1/2} \left\langle F(\sqrt{bl} s_i) \right\rangle . \quad (A.23)$$

La Ec. (A.20) muestra la escala de tiempo t_1 en el régimen cercano a su estado estable. Esta evolución asintótica sugiere escribir la función de Dawson en la siguiente forma

$$F(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} , \quad (A.24)$$

donde los coeficientes b_0 y b_n son determinados y dados por

$$b_0 = 0; \quad b_{p-1} = \frac{1}{p}; \quad b_{m+(p-1)} = \frac{m-1}{p} b_{m-1}; \quad m = p, 2p, \dots, np, \dots \quad (A.25)$$

Por lo tanto, la serie satisface la siguiente ecuación

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{np-1} x^{-(np-1)} . \quad (A.26)$$

De esta ecuación observamos que si $x \gg 1$, entonces la función de Dawson se puede aproximar a primer orden como

$$F(x) \approx \frac{1}{p} x^{-(p-1)} . \quad (A.27)$$

En el caso de la escala de tiempo (A.23), el límite de aproximación es tal que $\sqrt{bs} \gg 1$.
y por tanto

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{bl}\right)^{1/2} \langle (\sqrt{bl} s_i)^{-1} \rangle \\ &= -\frac{1}{2l} \left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \left\langle \left[\left(\frac{a_0^2}{b}\right) + \ln \left(\frac{r_{st}}{h^2}\right) \right]^{-1/2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Haciendo una expansión en serie de potencias de λ_1^{-1} , obtenemos la expresión analítica de t_1 , la cual toma la forma

$$t_1 = -\frac{1}{2l} \left(\frac{1}{b}\right)^{1/2} \lambda_1^{-1/2} + \mathcal{O}[(\lambda_1)^{-3/2}]. \quad (\text{A.29})$$

A.4.2 Modelo general

Para el modelo (4.27) que responde al caso general $\delta > 0$, la escala de tiempo (4.21) también se puede expresar como (A.20), con la diferencia de que ahora

$$J = \left\langle e^{-l\beta t_i^p} \int_0^{t_i} e^{l\beta y^p} dy \right\rangle. \quad (\text{A.30})$$

En este caso t_1 también se puede escribir en términos de la función generalizada de Dawson, como

$$t_1 = -\left(\frac{1}{\beta l}\right)^{1/p} \left\langle F[(\beta l)^{1/p} t_i] \right\rangle. \quad (\text{A.31})$$

Por lo tanto, usando la aproximación (A.27) tal que $\beta^{1/p} t \gg 1$, la escala de tiempo (A.31) se puede aproximar a

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{1}{p} \left(\frac{1}{\beta l}\right)^{1/p} \left\langle [(\beta l)^{1/p} t_i]^{-(p-1)} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{lp} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/p} \left\langle \left[\ln \left(\frac{r_{st}}{h^2}\right) \right]^{-(p-1)/p} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Nuevamente, haciendo una expansión en serie de potencias de λ_δ^{-1} , obtenemos la expresión correspondiente para t_1 , dado por

$$t_1 = -\frac{1}{lp} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/p} \lambda_\delta^{-(p-1)/p} + \mathcal{O}[(\lambda_\delta)^{-((p-1)/p)+1}]. \quad (\text{A.33})$$

Este resultado es una generalización de (A.29) para el modelo de rampa.

APENDICE B

Cálculo de las varianzas σ^2 con RCG

B.1 Cálculo de la varianza σ_1^2 para el modelo de rampa

Definamos nuevamente la varianza σ^2 para el modelo de rampa como σ_1^2 , que debe de calcularse de (3.30). Las constantes $k_0(\tau)$ y $k_1(\tau)$ para este modelo se definen como $k_0^1(\tau)$ y $k_0^1(\tau)$ de acuerdo con (3.27) y (3.28) respectivamente. para $k_0^1(\tau)$ requerimos del término $I_0(t, \tau)$ de (3.27), el cual se reduce al cálculo de la integral

$$I_0(t, \tau) = \frac{2}{\tau} \int_0^t e^{-\beta_0 t_1^2 + A t_1} dt_1 \int_0^{t_1} e^{-3\beta_0 t_2^2 + B t_2} dt_2, \quad (B.1)$$

donde $\beta_0 = b/2$, $A = a_0 - \tau^{-1}$ y $B = a_0 + \tau^{-1}$. Esta integral se puede escribir en términos de $s = t - \bar{t}$, dando como resultado

$$I_0(s, \tau) = \frac{\pi}{b\tau} e^{(A^2+B^2)/2b} \left\{ \Phi\left(\frac{B}{\sqrt{2b}}\right) \left[\Phi\left(\frac{A}{\sqrt{2b}}\right) + \Phi\left(\sqrt{\frac{b}{2}} s + \frac{1}{\sqrt{2b}\tau}\right) \right] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} I(s, \tau) \right\}, \quad (B.2)$$

y

$$I(s, \tau) = \int_{-\sqrt{b/2}\bar{t}}^{\sqrt{b/2}s} e^{-[u+(1/\sqrt{2b}\tau)]^2} \Phi\left(u - \frac{1}{\sqrt{2b}\tau}\right) du. \quad (B.3)$$

La constante $k_0^1(\tau)$ para este modelo se obtiene en el límite de tiempos largos, tal que $\sqrt{b/2} s \gg 1$, y por tanto (B.2) se reduce a

$$k_0^1(\tau) = \frac{\pi}{b\tau} e^{(A^2+B^2)/2b} \left\{ \left[\Phi\left(\frac{A}{\sqrt{2b}}\right) + 1 \right] \left[\Phi\left(\frac{B}{\sqrt{2b}}\right) + 1 \right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} I(\infty, \tau) \right\}, \quad (B.4)$$

donde $I(\infty, \tau)$ es igual a

$$I(\infty, \tau) = \int_{-\sqrt{b/2} \bar{t}}^{\infty} e^{-[u+(1/\sqrt{2b} \tau)]^2} \Phi_c \left(u - \frac{1}{\sqrt{2b} \tau} \right) du, \quad (B.5)$$

siendo $\Phi_c(x)$ la función complemento de la función error.

Por otra parte, la constante $k_1^1(\tau)$ de (3.28) se obtiene de acuerdo con $I_1(t, \tau)$, que puede expresarse como

$$I_1(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^0 \int_0^t e^{Bt_1} e^{-\beta_0 t_2^2 + At_2} dt_1 dt_2. \quad (B.6)$$

Esta expresión puede escribirse en términos de $s = t - \bar{t}$, dando como resultado

$$I_1(s, \tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \frac{1}{B\tau} e^{(A^2/2b)} \left[\Phi \left(\frac{A}{\sqrt{2b}} \right) + \Phi \left(\sqrt{\frac{b}{2}} s - \frac{1}{\sqrt{2b} \tau} \right) \right]. \quad (B.7)$$

Nuevamente en el límite de tiempos largos, tal que $\sqrt{b/2} s \gg 1$, la constante $k_1^1(\tau)$ es entonces

$$k_1^1(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \frac{1}{(1 + a_0 \tau)} e^{(A^2/2b)} \left[\Phi \left(\frac{A}{\sqrt{2b}} \right) + 1 \right]. \quad (B.8)$$

Por lo tanto, la varianza para el modelo de rampa puede escribirse como

$$\sigma_1^2 = C_1(\tau) D, \quad (B.9)$$

donde

$$C_1(\tau) = c_0(\tau) + k_0^1(\tau) + 2k_1^1(\tau). \quad (B.10)$$

Teniendo en cuenta la expresión de (B.9), el parámetro α^2 de (3.31) toma la siguiente expresión $\alpha_1^2 \equiv \frac{1}{2\sigma_1^2} = \frac{1}{2C_1(\tau) D}$.

B.2 Cálculo de la varianza σ_δ^2 para el modelo general

La varianza σ^2 para el caso general (4.27), se define como σ_δ^2 , que deberá calcularse de (3.30). Las constantes $k_0(\tau)$ y $k_1(\tau)$ se definen ahora como $k_0^\delta(\tau)$ y $k_1^\delta(\tau)$ de acuerdo con (3.27) y (3.28) respectivamente. Para el cálculo de $k_0^\delta(\tau)$ requerimos del término $I_0(t, \tau)$ de (3.27), donde este término tiene la siguiente expresión

$$I_0(t, \tau) = \frac{2}{\tau} \int_0^t dt_1 e^{-\beta_0 t_1^2 + At_1} \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\beta_0 t_2^2 + Bt_2}, \quad (B.11)$$

con $\beta_0 = \beta/2$, $A = a_0 - \tau^{-1}$ y $B = a_0 + \tau^{-1}$. Esta integral puede reducirse a

$$I_0(t, \tau) = \frac{2}{\tau p^2} \left(\frac{1}{\beta_0}\right)^{2/p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{m!} \left(\frac{B^p}{\beta_0}\right)^{k/p} \left(\frac{A^p}{\beta_0}\right)^{m/p} I(t), \quad (B.12)$$

donde $I(t)$ es

$$I(t) = \int_0^{\beta_0 t^p} x^{(m+1/p)-1} e^{-x} \gamma\left(\frac{k+1}{p}, x\right) dx, \quad (B.13)$$

siendo $\gamma(a, x)$ la función gamma incompleta. Por lo tanto, la constante $k_0^\delta(\tau)$ para el modelo general será obtenida evaluando la integral (B.13), en el límite de tiempos largos, tal que $\beta_0 t^p \gg 1$. Esto da como resultado [36]

$$k_0^\delta(\tau) = \frac{2}{\tau p^2} \left(\frac{1}{\beta_0}\right)^{2/p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{m!} \left(\frac{B^p}{\beta_0}\right)^{k/p} \left(\frac{A^p}{\beta_0}\right)^{m/p} I(s_1, s_2), \quad (B.14)$$

donde la cantidad

$$I(s_1, s_2) = \frac{\Gamma(s_1 + s_2)}{s_2 2^{s_1 + s_2}} {}_2F_1(1, s_1 + s_2; s_2 + 1; 1/2), \quad (B.15)$$

siendo $s_1 = (m + 1)/p$, $s_2 = (k + 1)/p$, y ${}_2F_1(a, b; c; z)$ es la función hipergeométrica.

La inspección analítica de la convergencia de la doble serie se muestra complicada. Sin embargo mediante un cuidadoso análisis numérico, podemos verificar la convergencia de la doble serie, junto con la condición suficiente de que $A^p < \beta_0$ y $B^p < \beta_0$, y también $\tau > 1/[\beta_0^{1/p} - a_0]$. Esto puede observarse en la Fig. B.1, donde se muestra el comportamiento de $k_0^\delta(\tau)$ como una función de τ , para ciertos valores de los parámetros a_0 , b y p , en el régimen permitido de τ . La constante $k_1^\delta(\tau)$ se calcula usando $I_1(t, \tau)$ de (3.28), donde ahora

$$I_1(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^0 \int_0^t e^{Bt_1} e^{-\beta_0 t_2^p + At_2} dt_1 dt_2. \quad (B.16)$$

Esta doble integral nos conduce al siguiente resultado

$$I_1(t, \tau) = \frac{1}{p(1 + a_0\tau)} \left(\frac{1}{\beta_0}\right)^{1/p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{A^p}{\beta_0}\right)^{k/p} \gamma\left(\frac{k+1}{p}, \beta_0 t^p\right), \quad (B.17)$$

En el límite de tiempos largos tal que $\beta_0 t^p \gg 1$, la constante $k_1^\delta(\tau)$ se reduce a

$$k_1^\delta(\tau) = \frac{1}{p(1 + a_0\tau)} \left(\frac{1}{\beta_0}\right)^{1/p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{A^p}{\beta_0}\right)^{k/p} \Gamma\left(\frac{k+1}{p}\right). \quad (B.18)$$

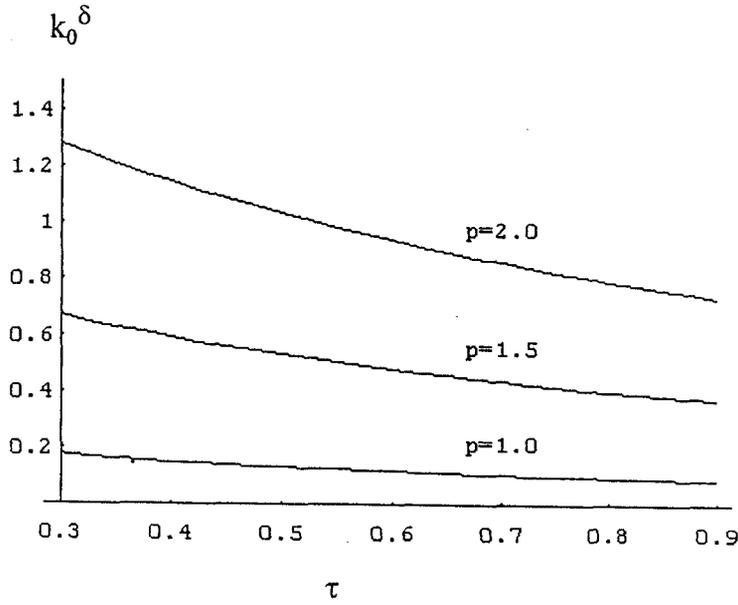


Fig. B.1: Muestra la convergencia de la doble serie de k_0^δ en el régimen permitido de τ , para los valores de los parámetros de $p = 1.0$, $p = 1.5$, $p = 2.0$, $b = 4.0$ y $a_0 = 1.0$.

La convergencia de esta serie se puede checar aplicando el criterio de D’Alambert (criterio de comparación), junto con la condición necesaria $A < \beta_0^{1/p}$, y usando además la identidad

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{z^a \Gamma(z)} = 1. \quad (B.19)$$

Por lo tanto, para $\delta > 0$, la varianza (3.30) puede escribirse como

$$\sigma_\delta^2 = C_\delta(\tau) D, \quad (B.20)$$

donde ahora

$$C_\delta(\tau) = c_0(\tau) + k_0^\delta(\tau) + 2k_1^\delta(\tau). \quad (B.21)$$

Para este caso, el parámetro α^2 de (3.31) será definido como $\alpha_\delta^2 \equiv \frac{1}{2\sigma_\delta^2} = \frac{1}{2C_\delta(\tau) D}$.

B.3 Comparación de la varianza σ_1^2 con σ_δ^2

Al igual que el caso de ruido blanco, también vamos a comparar los resultados obtenidos de σ_δ^2 y σ_1^2 en el caso de ruido de color. Para este propósito, nosotros debemos comparar las cantidades $k_0^\delta(\tau)$ con $k_0^1(\tau)$, y $k_1^\delta(\tau)$ con $k_1^1(\tau)$, cuando hagamos $\delta = 1$. Para el caso

$\delta = 0$ el parámetro de control es una constante, en este caso las cantidades $k_0^\delta(\tau)$ y $k_1^\delta(\tau)$ deberán coincidir con las obtenidas en la Ec. (2.46) del Cap. 2.

Hagamos primero la comparación entre (B.18) y (B.8), ya que esto puede hacerse en forma analítica. Así que para $\delta = 1$, (B.18) se puede escribir como

$$k_1^{\delta=1}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2b}(1+a_0\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\sqrt{2} A}{\sqrt{b}} \right)^k \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \quad (\text{B.22})$$

o

$$k_1^{\delta=1}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2b}(1+a_0\tau)} [\sqrt{\pi} + H_1 + H_2], \quad (\text{B.23})$$

donde

$$H_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\sqrt{2} A}{\sqrt{b}} \right)^{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{B.24})$$

$$H_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \left(\frac{\sqrt{2} A}{\sqrt{b}} \right)^{2n-1} \Gamma(n). \quad (\text{B.25})$$

Haciendo uso de las identidades $\Gamma(n + (1/2)) = (\sqrt{\pi}/2)(2n-1)!!$ y $\Gamma(n) = (n-1)!$ [36], podemos concluir que

$$H_1 = \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{A^2}{2b} \right)^n = \sqrt{\pi} [e^{A^2/2b} - 1], \quad (\text{B.26})$$

y

$$H_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} \left(\frac{A}{\sqrt{2b}} \right)^{2k+1} = \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{A}{\sqrt{2b}}\right) e^{A^2/2b}, \quad (\text{B.27})$$

por lo tanto

$$k_1^{\delta=1} = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \frac{1}{(1+a_0\tau)} e^{(A^2/2b)} \left[\Phi\left(\frac{A}{\sqrt{2b}}\right) + 1 \right], \quad (\text{B.28})$$

que corresponde a la misma expresión (B.8).

Para el caso $\delta = 0$, el resultado (B.18) deberá coincidir con $c_2(\tau)$ obtenido en la Ec. (2.46) del Cap. 2, puesto que (B.18) se puede reducir a

$$k_1^{\delta=0} = \frac{1}{b(1+a_0\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{A}{b} \right)^k \Gamma(k+1), \quad (\text{B.29})$$

o

$$k_1^{\delta=0} = \frac{1}{b(1+a_0\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{b} \right)^k = \frac{\tau}{(1+a_0\tau)(1+a\tau)}, \quad (\text{B.30})$$

donde $a = b - a_0$, y $A < b$. El resultado (B.30) es entonces el mismo que se tiene en la Ec. (2.46), para el término $c_2(\tau)$.

Como segunda parte, debemos mostrar ahora que la Ec. (B.14) se reduce a la Ec. (B.4) si $\delta = 1$. En este caso, debido a lo complicado de la expresión de (B.14), la demostración analítica hasta ahora no ha sido posible obtenerse. Sin embargo, mediante un cálculo numérico, es posible realizar dicha comparación. Por ejemplo en la Fig. B.2, se muestra la comparación numérica entre $k_0^{\delta=1}(\tau)$ y $k_0^1(\tau)$ de (B.14) y (B.4) respectivamente. La concordancia es exacta, e.d. que $k_0^{\delta=1}(\tau) = k_0^1(\tau)$ en el régimen permitido de τ .

Por otro lado, si $\delta = 0$, la doble serie de (B.14) deberá converger al valor $c_1(\tau) = \frac{1}{a(1+a\tau)}$ de la Ec. (2.46), con $a = b - a_0$. En este caso, la Fig. B.3 muestra que ambas curvas también coinciden para valores permitidos de τ .

Por lo tanto, concluimos que la varianza de ambos modelos estudiados en este trabajo coinciden, cuando $\delta = 1$.

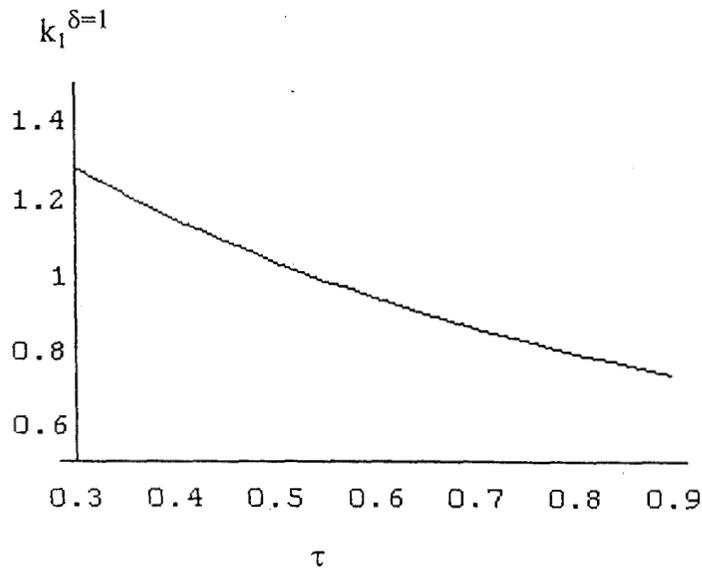


Fig. B.2: Se muestra la comparación cuando $\delta = 1$, de $k_0^{\delta=1}(\tau)$ del modelo general y $k_0^1(\tau)$ del modelo de rampa, para los mismos valores de los parámetros b y a_0 . Los resultados numéricos muestran absoluta concordancia entre ambas curvas, en el régimen permitido de τ .

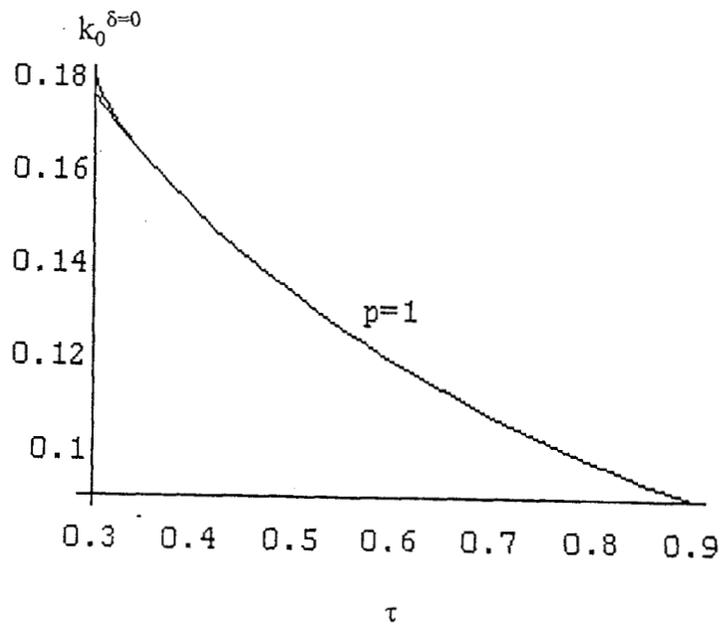


Fig. B.3: La figura muestra la comparación entre $k_0^{\delta}(\tau)$ del modelo general y $k_0^0(\tau)$ con parámetro de control constante. Nuevamente, ambas curvas coinciden en el régimen permitido de τ .

Referencias

- [1] R.L. Stratonovich: *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. I (Gordon and Breach, New York 1963) and vol. II (Gordon and Breach, New York 1967).
- [2] N.G. Van Kampen: *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Nort-Holland, Amsterdam 1981).
- [3] M. Suzuki: *Advances in Chemical Physics*, Vol. 46, (I. Prigogine and S. Rice, 1981).
- [4] F. Moss and P.V.E. McClintock: *Noise in Nonlinear Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge 1988).
- [5] W. Horsthemke and R. Lefever: *Noise Induced Transitions* (Springer Verlag 1983).
- [6] H. Risken: *The Fockker-Planck Equation* (Springer Verlag 1984).
- [7] S. Koch: *Dynamics of First-Order Phase Transitions* (Lecture Notes in Physics, 183. Springer Verlag 1983).
- [8] C. Vidal and A. Pacault: *Nonequilibrium Dynamics in Chemical Systems* (Springer Verlag 1984).
- [9] R. W. Boyd, M.G. Raymer and L.M. Nardicci: *Optical Instabilities* (Cambridge Press 1986).
- [10] H. L. Swinney and J. P. Gollub: *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (Spring Verlag)
- [11] F. de Pascuale, J. M. Sancho, M. San Miguel and P. Tartaglia: *Phys. Rev. A* 33, 4360 (1986).
- [12] F. de Pascuale and P. Tombesi: *Phys. Lett. A* 72, 7 (1979).

- [13] F. Haake, J. W. Haus, and R. Glauber: Phys. Rev. **A23**, 3255 (1981).
- [14] J. M. Sancho, and M. San Miguel, Phys. Rev. **A39**, 2722 (1989).
- [15] J. Casademunt, J. I. Jiménez-Aquino, and J. M. Sancho: Physica **A156**, 628 (1989).
- [16] J. Casademunt, J. I. Jiménez-Aquino, and J. M. Sancho: Phys. Rev. **A40**, 5905 (1989).
- [17] J. I. Jiménez-Aquino, J. Casademunt, and J. M. Sancho: Phys. Lett. **A133**, 364 (1988).
- [18] J. I. Jiménez-Aquino and J. M. Sancho: Phys. Rev. **E47**, 1558 (1993).
- [19] J. I. Jiménez-Aquino: J. Phys **A27**, 4745 (1994).
- [20] J. M. Sancho and M. San Miguel: Z. Phys. **B36**, 357 (1980).
- [21] J. M. Sancho and M. San Miguel: Phys. Rev. **A39**, 2722 (1989).
- [22] J. I. Jiménez-Aquino: Opt. Comm. **114**, 101 (1995).
- [23] J. I. Jiménez-Aquino: Physica **A229**, 444 (1996).
- [24] J. I. Jiménez-Aquino, Emilio Cortés, P. Orea: aceptado en Physica **A**, (1996).
- [25] M. C. Torrent and M. San Miguel: Phys. Rev. **A38**, 245 (1988).
- [26] Manuel O. Caceres and Andreas Becker: Phys. Rev. **A42**, 696 (1990).
- [27] M. C. Torrent, F. Sagues and M. San Miguel: Phys. Rev. **A40**, 6662 (1989).
- [28] J. I. Jiménez-Aquino: aceptado en Physica **A**, (1996).
- [29] J. I. Jiménez-Aquino and J. M. Sancho: J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 6179 (1992).
- [30] J. I. Jiménez-aquino, J. M. Sancho and J. Casademunt: Physica **A195**, 163 (1993).
- [31] J. Masoliver, K. Lindenberg and B. J. West: Phys. Rev. **A34**, 1481 (1986).
- [32] J. Masoliver: Phys. Rev. **A35**, 3918 (1987).

- [33] Salvador Balle, F. de Pasquele and M. San Miguel: *Phys. Rev.* **A41**, 5012 (1990).
- [34] J. Dellunde, M.C. Torrent, J.M. Sancho and M. San Miguel: *Opt. Comm.* **109**, 435 (1990).
- [35] M. Abramowitz and I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York 1972).
- [36] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik: *Table of integrals series and products* (Academic Press, New York, 1965).