



Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Sociales y Humanidades
Maestría en Ciencias Económicas

**“Propuesta para la estimación del precio de contratos de
commodities de consumo que presentan reversión a la media”**

Idónea comunicación de resultados
para optar por el grado de
Maestro en Ciencias Económicas

PRESENTA:

Salvador Sánchez Martínez
2221800828
ayufissalv@gmail.com

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Martha Beatriz Mota Aragon

JURADO:

Presidenta:

Dra. Martha Beatriz Mota Aragon

Secretario:

Dr. Humberto Valencia Herrera

Vocal:

Dr. Owen Eli Ceballos Mina

Vocal:

Dr. Jose Antonio Nuñez Mora

Iztapalapa, Ciudad de México a 16 de febrero del 2024

Índice

1. INTRODUCCIÓN	3
2. CAPÍTULO:	
Futuros	9
2.1. Mercado de futuros.	10
2.2. Especificación de un contrato de futuros.	13
2.3. Determinación de precios en el mercado de futuros.	14
2.3.1. Valor futuro de un activo de inversión sin rendimientos.	15
2.3.2. Valor futuro de un activo de inversión con ganancias en efectivo conocidas.	17
2.3.3. El valor futuro de un activo con rendimientos conocidos.	18
2.4. Mercado de commodities	19
2.5. Futuros sobre commodities	21
2.5.1. Futuros sobre commodities que son activos de inversión.	21
2.5.2. Commodities de consumo	23
2.5.3. Rendimientos de conveniencia.	23
2.6. Precios de los minerales	25
3. CAPÍTULO:	
Tasa de interés.	27
3.1. Estructura temporal de la tasa de interés.	30
3.1.1. Procesos Markovianos y procesos de Wiener.	33
3.1.2. Proceso de Wiener generalizado	35
3.1.3. Lema de Itô.	37
3.2. Antecedentes del modelo.	38
3.3. Desarrollo del modelo	44
4. CAPÍTULO	
Evidencia empírica.	49
5. CONCLUSIONES	51
A. Contexto del litio a nivel mundial	52
A.1. Propiedades y usos del litio a nivel mundial	53
A.2. Extracción y abundancia del litio.	56
A.2.1. Tipos de yacimientos	57
A.3. Principales productores de litio a nivel mundial	59
A.4. Perfil del litio a nivel global	61
B. Derivación del Lema de Itô.	62

C. Solución del modelo de Vasicek	64
D. Solución modelo de Dothan	66
Referencias	68

Resumen

Los derivados financieros, especialmente en el mercado de futuros, se utilizan principalmente con fines de cobertura. En el caso específico de los futuros, existe una amplia variedad de contratos para diversos activos financieros, incluyendo commodities. Dentro de estos commodities, se pueden diferenciar dos tipos: aquellos utilizados con fines de inversión y los de consumo. En el caso de los commodities de consumo, su precio puede mostrar una tendencia a volver a su valor promedio a largo plazo, fenómeno conocido formalmente como reversión a la media. Un ejemplo de esto se suele observar en el precio de los minerales.

El objetivo de este trabajo de investigación es proponer un modelo teórico que describa el precio de los futuros de commodities de consumo que presentan reversión a la media, relacionándolo con la variación en las tasas de interés, en un entorno neutral al riesgo. Para lograr este propósito, nos apoyaremos en las teorías de variación en las tasas de interés, centrándonos en el modelo de Vasicek.

Además, cabe reflexionar sobre la aplicabilidad de este modelo en el caso de los minerales y su posible utilidad para países desarrollados.

Palabras clave: Mercado de futuros, commodities, tasa de interés, modelo de Vasicek, reversión a la media.

1 INTRODUCCIÓN

Los inversores y las empresas utilizan diversas herramientas para protegerse contra varios riesgos, como el riesgo de mercado, el riesgo cambiario y el riesgo de tasas de interés, entre otros. Algunos de los instrumentos comúnmente utilizados para la cobertura incluyen contratos de futuros, opciones, swaps y otros, conocidos como derivados financieros. Estos derivados son activos cuyo valor depende de otro activo financiero al que se le denomina activo subyacente. Se emplean para reducir o gestionar el riesgo de pérdida asociado con movimientos adversos en los precios de activos, ya sea para inversiones u operaciones financieras. Los activos subyacentes pueden abarcar acciones, bonos, valores de renta fija, divisas, tipos de interés, commodities, entre otros (Santander, 2023).

Cuando nos referimos a commodities, hablamos de materias primas o insumos para la producción, así como de ciertos activos perecederos. En el mercado de commodities, podemos dividirlos en dos tipos: aquellos que funcionan como activos de inversión y los utilizados con fines de consumo. Estos últimos se caracterizan porque quienes los poseen los conservan con propósitos de consumo. Por lo tanto, aunque el precio del futuro durante su fecha de vencimiento sea menor que el precio de contado del activo subyacente en el mercado, denominado como precio spot, prefieren mantener el activo en lugar de venderlo. Esto se debe a que no pueden operar su industria con el contrato de futuro (J. C. Hull, 2009).

Aunque estos commodities no generan ingresos al poseedor, pueden estar sujetos a importantes costos de almacenamiento. Por otro lado, se hace referencia a los rendimientos de conveniencia, que se refieren a los beneficios de poseer el activo físico. En este sentido, el precio de un commodity de consumo quedará determinado por sus costos de almacenamiento, los rendimientos de conveniencia y por la tasa de interés (J. Hull, 2022).

En el ámbito de los commodities de consumo, es habitual observar que los precios de ciertos tipos de materias primas muestren una tendencia a retornar a su valor promedio a largo plazo, un fenómeno formalmente identificado como reversión a la media. Esta característica es especialmente evidente en la dinámica de los precios de minerales, donde los valores, tras distanciarse significativamente, tienden a regresar hacia su promedio histórico. Este comportamiento insinúa una cierta estabilidad y equilibrio a lo largo del tiempo en los mercados de minerales, destacando la marcada influencia de la reversión a la media en la determinación de precios en este sector (J. Hull, 2022).

Esta idónea comunicación de resultados tiene como objetivo proponer un modelo teórico que describa el precio de los futuros de commodities de consumo que presentan reversión a la media, relacionándolo con la variación en las tasas de interés, en un entorno neutral al riesgo. Para lograr este propósito, nos apoyaremos en las teorías de variación en las tasas de interés, (Vasicek, 1977), (Dothan, 1978), (Brennan y Schwartz, 1979), (Cox, Ingersoll Jr, y Ross, 1985), (Ho y Lee, 1986), (Longstaff, 1989), (J. Hull y White, 1990) centrándonos en el modelo de Vasicek, 1977.

Con el propósito de abordar estos temas, hemos formulado las siguientes preguntas

de investigación:

¿Cuáles son los factores determinantes más influyentes en la formación de precios de commodities de consumo, como minerales, en el mercado de futuros?

¿Cuál es la dinámica temporal de las tasas de interés y cómo esta estructura influye en los precios de los contratos de futuros?

Para abordar estas interrogantes, comenzamos presentando los elementos teórico-conceptuales clave: mercado de futuros, commodities de consumo, tasas de interés y su estructura temporal. Además, ofrecemos una discusión teórica de los principales modelos de un factor para la tasa de interés y cómo esta estructura influye en los precios de los contratos de futuros. Con base en esta discusión teórica, proponemos un modelo teórico para el precio de los contratos de futuros, utilizando el enfoque del modelo de (Vasicek, 1977), aplicándolo específicamente al precio de los commodities de consumo.

Finalmente, con el objetivo de reflexionar sobre una posible aplicabilidad de este modelo a los minerales, en particular, seleccionamos como objeto de estudio los precios en los contratos de futuros del hidróxido de litio en el periodo del 3 de mayo de 2021 al 25 de septiembre de 2023, obtenidos de Bloomberg hasta la fecha mencionada. Elegimos el hidróxido de litio debido a su actual importancia en la transición a nivel mundial en la implementación de energías limpias (ONU, 2023). En este contexto, planteamos la siguiente pregunta:

¿Cómo se correlacionan y afectan mutuamente los precios del mercado de futuros de los minerales, específicamente el hidróxido de litio con las tasas de interés libre de riesgo?

Por último, para responder a la tercera pregunta, formulamos la siguiente hipótesis: existe una correlación positiva entre el precio del hidróxido de litio y la tasa de interés libre de riesgo o incumplimiento¹. En este análisis, utilizaremos la tasa SOFR de Estados Unidos, lo que podría indicar una dependencia de la tasa de interés en la determinación

¹En este contexto, cuando nos referimos a tasa libre de riesgo o incumplimiento, estamos hablando de la misma tasa de interés.

de los precios en los mercados de futuros.

Se eligió este mineral en particular dado que en las últimas décadas la demanda de litio a nivel mundial ha ido en constante aumento debido al crecimiento de su uso en el sector electrónico, en la movilidad eléctrica, en el sector automotriz y por la implementación de energías limpias. Alrededor del 70 % del suministro energético proviene de la quema de combustibles, pero el consumo de estos recursos ha repercutido de manera negativa en el medio ambiente. Por lo tanto, se busca una transición energética con el objetivo prioritario de disminuir la dependencia mundial del petróleo. Dicha transición requiere de diversos minerales, entre los que destacan las tierras raras², elementos que, por su parte, suelen ser escasos, de extracción compleja y, en ocasiones, peligrosa. Además de estos minerales, resalta el rol fundamental del cobre, el cobalto, el coltán, el itrio y, especialmente, el litio en este proceso de cambio hacia una energía más limpia y sostenible (Aleida y Téllez, 2022).

Otra solución propuesta por los gobiernos de todo el mundo al problema de la emisión de gases de efecto invernadero es la sustitución de motores de combustión interna por vehículos eléctricos (EV) con sistemas de almacenamiento eficiente de energía (ONU, 2023). Normalmente, este mineral se comercializa en mercados finales a través de contratos de futuros, los cuales solían caracterizarse por su opacidad (Maxwell, 2015). La información disponible sobre los precios de productos químicos procesados a base de litio, como el carbonato de litio y el hidróxido de litio, suele estar disponible en formatos anuales o mensuales. En contraste, los datos de precios públicamente accesibles con respecto a minerales de litio en su estado sin procesar y compuestos de litio refinados son escasos. Esta falta de información sobre los precios de diversas materias primas de este mineral complica el seguimiento del nivel en el que se llevan a cabo las actividades de valor agregado a lo largo de toda la cadena del litio (LaRocca, 2020).

Las baterías de litio son ampliamente empleadas en motores eléctricos debido a su mejor rendimiento y mayor movilidad. Un ejemplo de esto, es la empresa Tesla Motors, líder global en este campo, cuya Gigafábrica en Nevada produce una cantidad significativa de baterías anualmente, alcanzando una tasa de aproximadamente 20 GWh

²Las tierras raras son en total 17 elementos pertenecientes al grupo 3 de la tabla periódica: escandio, itrio, lantano, cerio, praseodimio, neodimio, prometio, samario, europio, gadolinio, terbio, disprosio, holmio, erbio, tulio, iterbio y lutecio. Su nombre obedece a que no es muy común encontrarlos en sus formas puras en la naturaleza. (Porcher, Sáez, Maestro, y Cascales, 2000)

al año. Se estima que Tesla fabrica alrededor de 3.5 millones de celdas diariamente (Perkins y Murmann, 2018).

Dada la creciente demanda de baterías de iones de litio e hidróxido de litio para dispositivos electrónicos y, especialmente, para vehículos eléctricos, el litio destinado a la fabricación de baterías representó el 77.5 % del aumento en la demanda global entre 2010 y 2017. Las ventas de vehículos eléctricos e híbridos a nivel mundial alcanzaron aproximadamente 2.1 millones en 2018. Si bien los precios de los productos derivados del litio aumentaron debido a preocupaciones sobre restricciones de suministro, a finales de 2018 y durante 2019, descendieron debido a un exceso de producción en relación con la demanda (LaRocca, 2020).

La producción de este mineral está encabezada por países como Australia, China, Portugal, Brasil, Argentina, Chile, Estados Unidos, Bolivia y México. (Aleida y Téllez, 2022). En nuestro país, en 2019, se descubrió un yacimiento en el estado de Sonora, con una reserva de 243 millones de toneladas, convirtiéndose en la mina de litio más grande del mundo hasta la fecha. Esto podría posicionar a México como uno de los principales exportadores de este mineral (Cervantes y Garduño-Rivera, 2022).

La extracción rentable del litio representa un desafío significativo, a pesar de que las materias primas necesarias para su producción son abundantes a nivel global. Esto se debe a que el litio se encuentra en formas diluidas que requieren procesamiento para obtener concentraciones adecuadas del mineral. Los costos de producción varían según el tipo de método de extracción utilizado para obtener litio altamente concentrado. Las decisiones relacionadas con la producción y extracción están influenciadas por los precios de los productos básicos derivados de compuestos de litio (LaRocca, 2020).

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo, se presentan algunos conceptos básicos del mercado de derivados financieros, con un enfoque particular en los futuros. Se abordan conceptos clave como el mercado de futuros, la especificación de un contrato de futuros y la determinación de precios en los mercados de futuros. Posteriormente, se introduce al lector al mercado de commodities y futuros sobre commodities, así como a los rendimientos de conveniencia y los precios de los minerales.

En el segundo capítulo, nos adentramos en el tema de las tasas de interés y su variabilidad en el tiempo. Se incluye una discusión teórica sobre diversos modelos de un factor para la tasa de interés propuestos por distintos autores, dando pie al planteamiento de el modelo teórico para los commodities de consumo que presentan reversión a la media. Finalmente, en el último capítulo, ofrecemos una breve evidencia empírica del contexto del hidróxido de litio, destacándolo como un área de oportunidad para aplicar el modelo en el futuro, seguido de las conclusiones generales del trabajo.

2 CAPÍTULO: Futuros

Dentro de los mercados financieros, se encuentran diversos instrumentos. Entre estos, destacan los derivados, los cuales se emplean principalmente con el propósito de cobertura, tanto en inversiones como en operaciones financieras. Estos instrumentos son activos cuyo valor depende de otro activo al que se le denomina activo subyacente. Los activos subyacentes pueden ser materias primas, acciones, bonos, valores de renta fija, divisas, tipos de interés, entre otros. Algunos ejemplos de estos derivados incluyen certificados, opciones, swaps y futuros (Santander, 2023).

Podemos tener futuros sobre diversos activos, como acciones, bonos, divisas o commodities. Cuando nos referimos al mercado de commodities, hablamos de materias primas o insumos para la producción, así como de ciertos activos perecederos. Un ejemplo de este tipo de activo son los minerales, los cuales suelen intercambiarse mediante contratos de futuros.

Un contrato de futuros es un acuerdo para comprar o vender un activo a un precio determinado en una fecha específica en el futuro. Cuando alguien está dispuesto a comprar una cantidad específica de un futuro, se dice que tiene una posición corta en un contrato de futuros; mientras que el otro negociante, que está dispuesto a vender, se dice que posee una posición larga en el mercado de futuros (J. Hull, Treepongkaruna, Colwell, Heaney, y Pitt, 2013).

Dentro de los activos financieros, podemos distinguir dos tipos: activos de consumo y activos de inversión. Como su nombre indica, un activo de inversión es aquel que muchos inversionistas poseen con propósitos de inversión. La valuación de este tipo de activos está relacionada con la tasa de interés. Una tasa de interés en una situación específica define la cantidad de dinero que un prestatario promete pagar al prestamista. La tasa de interés aplicable queda determinada por el riesgo del crédito y la posibilidad de incumplimiento por parte del prestatario en el pago de los fondos; es decir, el riesgo de que no se paguen los intereses ni el principal prometidos al prestamista (J. Hull, 2022).

El objetivo principal de este capítulo es proporcionar al lector una contextualización sobre conceptos fundamentales en finanzas. Esto incluye tanto el mercado de futuros, así como una explicación detallada sobre cómo se especifica un contrato de futuros y cómo se determinan los precios en este mercado, dependiendo del tipo de activo del que se esté hablando.

Posteriormente, nos enfocamos en el mercado de commodities y los futuros asociados a estos, para finalmente abordar los commodities de consumo, entre los cuales se incluyen algunos minerales. Esto nos lleva a analizar cómo se determina el precio de los minerales, teniendo en cuenta que estamos tratando con futuros y que su valoración está sujeta a las tasas de interés.

2.1 Mercado de futuros.

El mercado de futuros se originó en la Edad Media con el propósito de satisfacer las necesidades de agricultores y comerciantes (Chancellor, 1999). Para ilustrar su funcionamiento, consideremos el caso de una empresa que requiere granos para la elaboración de ciertos productos. Durante periodos de escasez, la oferta de granos es limitada y los precios tienden a ser relativamente altos. Por otro lado, durante periodos de abundancia, la oferta de granos es mayor y los precios tienden a ser más bajos.

Esta variabilidad en los precios crea incertidumbre tanto para el productor de granos como para la empresa que depende de este insumo. En algunos momentos, los precios favorecerán al productor de granos, mientras que en otros momentos el precio será más favorable para la empresa. Ante esta situación, resulta lógico que tanto el empresario como el agricultor busquen protegerse de esta incertidumbre y acuerden un precio para la producción de grano en un momento futuro específico (J. C. Hull, 2009).

Para lograrlo, recurren a un contrato de futuros. Este tipo de contrato ofrece a cada una de las partes involucradas una forma de eliminar o mitigar el riesgo asociado a la incertidumbre del precio futuro del grano. A través del contrato de futuros, se establecen los términos y condiciones del acuerdo, incluyendo el precio acordado y la fecha de entrega del grano. De esta manera, tanto el agricultor como el empresario aseguran un precio establecido de antemano, lo cual les brinda mayor certidumbre y

les permite planificar de manera más efectiva sus actividades comerciales (J. C. Hull, 2009).

En resumen, el contrato de futuros en el mercado de granos, y en general en otros mercados de materias primas, ofrece una herramienta que permite a los participantes eliminar o reducir el riesgo asociado a la fluctuación de los precios en el tiempo. Proporciona una forma de protección y certidumbre tanto para el productor como para el usuario final de los productos, al establecer un precio acordado con anticipación.

Ahora, supongamos que al finalizar la temporada de cosecha una parte del grano se almacena. Si el empresario almacena parte del grano, no incurre en ningún riesgo en cuanto al precio. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el almacenamiento conlleva costos, como el mantenimiento de los granos y las instalaciones de almacenamiento. Por otro lado, si el productor u otra persona almacena el grano, tanto el productor o el almacenista se enfrentan a los riesgos relacionados con el precio futuro del grano. Esto se debe a que el precio del grano puede fluctuar en el tiempo debido a factores como la oferta y la demanda, condiciones climáticas, políticas entre otros. En esta situación, los contratos de futuros nuevamente juegan un papel importante. Estos contratos permiten a las partes involucradas fijar un precio y una fecha de entrega en el futuro para el grano almacenado. Al hacerlo, tanto el productor como el almacenista pueden protegerse contra las fluctuaciones del precio al establecer un acuerdo contractual que asegure un precio determinado en el momento de la entrega (J. C. Hull, 2009).

Es decir, un contrato de futuros es un acuerdo para comprar o vender un activo a un determinado precio en una fecha específica en el futuro³. Existe una gran cantidad de bolsas de valores que comercializan contratos de futuros. Entre las más importantes podemos encontrar la Bolsa de Valores de Nueva York (www.nyse.com) y la bolsa de futuros más grande de Estados Unidos, CME Group (www.cmegroup.com). En Europa, podemos encontrar Eurex (www.eurexchange.com) y Euronext (www.euronext.com), la cual se fusionó con la Bolsa de Valores de Nueva York en 2006, y el London Metal Exchange (LME) (www.lme.com). En Brasil, está la Bolsa, Balcão (www.b3.com.br),

³No confundir con los contratos a plazo, en escénica se comportan igual en el sentido en que ambos se tratan de un acuerdo para comprar o vender un activo en una fecha futura específica a cierto precio. Sin embargo, estos contratos a plazo se negocian en el mercado *over-the-counter* (no inscrito en la bolsa) (J. C. Hull, 2009).

En Japon el Mercado Financiero de Tokio (www.tfx.co.jp), En australia la Bolsa de Futuros de Sydney (www.sfe.com.au) entre otros (J. C. Hull, 2009, pp.1) .

En estas bolsas, las personas negocian entre sí para comprar o vender activos en el futuro. Por ejemplo, supongamos que en enero un comprador desea adquirir un activo específico con una fecha de entrega en julio. El comprador se comunicará con un intermediario, quien a su vez se pondrá en contacto con las bolsas de valores para transmitir las instrucciones del cliente. Al mismo tiempo, otro negociante podría dar instrucciones a un intermediario para vender la misma cantidad del activo con fecha de entrega en julio. Estas instrucciones también se comunicarán a las bolsas de valores, donde se acordará un precio. Si ambas partes están de acuerdo, se completará la transacción (J. C. Hull, 2009).

En esta situación, se afirma que el comprador posee una *posición larga* en un contrato de futuros, mientras que el otro participante, dispuesto a vender, tiene una *posición corta* en el mismo. El valor al que se negocia se denomina precio de futuros, y se determina según la oferta y la demanda de los involucrados. Si en un momento dado hay más vendedores interesados en el activo que compradores, el precio disminuirá debido a la mayor disponibilidad. De manera inversa, si hay una mayor demanda de compradores que de vendedores, el precio aumentará por la mayor petición. El precio de futuros se diferencia del precio al contado o precio spot, que se refiere a una transacción con entrega inmediata o casi inmediata, y generalmente es superior o inferior al precio de futuros (J. C. Hull, 2009 pp. 1-2).

Un contrato de futuros se distingue por el mes en el que está programada la entrega, y la bolsa debe especificar el periodo exacto dentro de ese mes. En muchos contratos de futuros, el periodo de entrega abarcará todo el mes. De esta manera, un inversionista podría instruir a un corredor para adquirir un contrato de futuros de oro para el mes de julio. Durante este período de entrega, hay una ventana en la cual la transacción puede llevarse a cabo, a menudo durante la totalidad del mes. Generalmente, la negociación del contrato llega a su fin en algún momento durante este periodo de entrega. La parte que tiene la posición corta determina cuándo se efectúa la entrega. No obstante, sorprendentemente, la mayoría de los contratos de futuros iniciados no llegan a la fase de entrega. Esto se debe a que la mayoría de los inversores optan por cerrar sus posiciones antes del periodo de entrega especificado en el contrato. La ejecución o recepción de una

entrega suele ser inconveniente y costosa, y es tan poco común que incluso los operadores pueden olvidar cómo funciona el proceso de entrega. No obstante, la posibilidad de la entrega final es crucial, ya que vincula el precio de futuros con el precio spot⁴ (J. C. Hull, 2009, pp.21-22).

2.2 Especificación de un contrato de futuros.

Al momento de desarrollar un nuevo contrato de futuros, es indispensable que la bolsa de valores especifique de manera detallada la naturaleza del acuerdo entre los interesados. Debe especificar el activo que se está comercializando. Por ejemplo, cuando el activo es una materia prima (*commodity*), puede haber mucha variación en la calidad de dicho producto, y la bolsa tiene que estipular los grados aceptables de estos bienes. También se debe especificar el tamaño del contrato, es decir, la cantidad del activo que se entregará con un contrato. Además, se determina el lugar donde se realizará la entrega, la fecha en que se hará y cómo se cotizan los precios, también es importante destacar que en ciertas ocasiones se pueden establecer opciones para determinar la calidad del activo que será entregado o los lugares de entrega (J. C. Hull, 2009, pp. 21-25).

Es fundamental tener en cuenta que el nombre del contrato está vinculado al periodo de entrega, y los meses de entrega pueden variar de un contrato a otro, siendo seleccionados por la bolsa con el fin de satisfacer las demandas de los participantes del mercado. Por lo general, es la parte con posición corta la que toma las decisiones cuando se trata de las alternativas especificadas por la bolsa. Cuando la entrega está lista para llevarse a cabo, la parte con posición corta presenta una notificación de su intención de entrega ante la bolsa, detallando las elecciones que ha hecho respecto a la calidad del activo que será entregado y el lugar de entrega (J. C. Hull, 2009).

J. C. Hull, (2009) asegura que en la mayoría de los contratos, se estipulan restricciones en cuanto a los movimientos diarios, que sirven para regular el máximo número de contratos que un especulador puede mantener, así como los límites de precio. Este

⁴Al cerrar una posición, se realiza una transacción inversa a la que abrió la posición inicial. Por ejemplo, si un inversor tenía una posición larga (compra) en un contrato de futuros, cerraría esa posición vendiendo antes de la fecha de entrega estipulada (J. C. Hull, 2009).

control tiene como objetivo prevenir cambios abruptos en los precios debido a excesiva especulación. Los límites buscan evitar que los especuladores ejerzan una influencia desproporcionada en el mercado. Es importante señalar que hay debate sobre si los límites son beneficiosos o no en el mercado de futuros. El precio alcanza el límite inferior cuando el cierre del día anterior desciende a una cifra igual al límite de precio diario, y se dice que llega al límite superior si el precio aumenta en la misma medida que el límite de precio diario. Un movimiento límite se refiere a cualquier cambio de precio en cualquier dirección que llega al límite de precio diario. Por lo general, la jornada de negociación concluye cuando se alcanza alguno de estos límites. No obstante, la bolsa tiene la facultad de intervenir en ciertas ocasiones y modificar estos límites (pp. 21-25).

2.3 Determinación de precios en el mercado de futuros.

Anteriormente, nos hemos centrado en ejemplos del mercado de futuros en los cuales el activo subyacente es una materia prima. Sin embargo, el mercado de futuros no se limita exclusivamente a este tipo de activos.

Dentro de los activos financieros podemos distinguir dos tipos: activos de consumo y activos de inversión. Como su nombre indica, un activo de inversión es aquel que una buena cantidad de inversionistas poseen con propósitos de inversión. Ejemplos de estos incluyen acciones, bonos, oro, plata e incluso divisas. Por otro lado, un activo de consumo es aquel que se mantiene principalmente para el consumo productivo. Aquí entran los commodities, como el cobre, el hierro, el petróleo, el litio, entre otros. Por tal motivo, la determinación de sus precios se trata de manera diferente y se pueden utilizar argumentos de arbitraje para establecer su precio a partir de su precio spot y otras variables de mercado observables, bajo los siguientes supuestos: (J. C. Hull, 2009, pp. 97-99)

1. No existen costos de transacción al negociar.
2. Los participantes pueden adquirir préstamos de dinero a la misma tasa de interés libre de riesgo a la que prestan dinero.
3. Se aprovechan las oportunidades de arbitraje cuando estas se presentan.

4. Los participantes están sujetos a la misma tasa impositiva sobre todas las utilidades netas obtenidas de sus negociaciones.

Para las siguientes explicaciones utilizaremos la misma notación de (J. C. Hull, 2009):

- T : tiempo hasta la fecha de entrega en un contrato a plazo o de futuros (en años)
- S_0 : precio del activo subyacente al contrato a plazo o de futuros hoy
- F_0 : precio a plazo o de futuros hoy
- r : tasa de interés cupón cero libre de riesgo anual, expresada con una composición continua, para una inversión que vence en la fecha de entrega.

J. C. Hull, (2009) indica que solo es necesario que estos supuestos sean válidos para ciertos actores del mercado, especialmente para los principales operadores de derivados, ya que su habilidad para identificar y aprovechar oportunidades de arbitraje es lo que en última instancia influye en la relación entre los precios a plazo y los precios al contado.

2.3.1 Valor futuro de un activo de inversión sin rendimientos.

Los contratos más sencillos de evaluar son aquellos que se refieren a activos de inversión que no proporcionan ingresos al tenedor. Algunos ejemplos de estos contratos son las acciones que no generan dividendos o los bonos con cupón cero. En estos casos, la determinación de precios en el mercado de futuros se vuelve menos compleja debido a la ausencia de flujos de dinero al poseedor.

En el contexto de acciones que no otorgan dividendos o bonos cupón cero, el precio de futuros o a plazo se basa principalmente en las expectativas de apreciación del activo subyacente y en la oferta y la demanda en el mercado. Dado que no hay pagos intermedios, el precio de estos contratos se centra en la diferencia entre el precio actual del activo y el precio acordado en el contrato a plazo o de futuros.

En el caso de las acciones que no generan dividendos, su valor se basa en el potencial de ganancias de capital, es decir, en la posibilidad de que el precio de la acción aumente en el futuro. Por otro lado, los bonos cupón cero, como su nombre lo indica, no generan pagos de interés periódicos, sino que se emiten a un descuento de su valor nominal y luego se reembolsan al valor nominal en el vencimiento. Esto hace que la determinación de su precio en el mercado de futuros se enfoque en las tasas de interés (J. C. Hull, 2009).

Consideremos un contrato a plazo sobre un activo de inversión con un precio inicial S_0 , el cual no proporciona ingresos cuya fecha de vencimiento es T , junto con una tasa libre de riesgo r . El precio actual a plazo o de futuro es F_0 . La relación entre el precio a plazo y el precio del activo está determinada por la tasa de interés, expresada mediante la siguiente ecuación

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (2.1)$$

En condiciones de arbitraje, podríamos encontrarnos con los siguientes dos escenarios.

Caso 1: Cuando el precio del futuro sea mayor al precio spot en el futuro:

$$F_0 > S_0 e^{rT} \quad (2.2)$$

Si esta condición se cumple, sería posible adquirir el activo a un precio de S_0 y vender en corto contratos a plazo sobre dicho activo. En otras palabras, se podría obtener un préstamo hoy con vencimiento en T por un monto de S_0 a una tasa de interés r , y con este préstamo, adquirir el activo al precio de S_0 . Por lo tanto, al finalizar la fecha del préstamo, se debería pagar un monto igual de

$$S_f = S_0 e^{rT} \quad (2.3)$$

Pero por la ecuación (2.2), sabemos que $F_0 > S_0 e^{rT}$ o, lo que es lo mismo, $F_0 > S_f$. Por lo tanto, al vender el futuro, se obtendría una ganancia G igual a

$$G = F_0 - S_f \quad (2.4)$$

Caso 2: Cuando el precio del futuro sea menor que el precio spot en el futuro

$$F_0 < S_0 e^{rT} \quad (2.5)$$

Si esta condición se cumple, sería posible realizar una venta en corto del activo y tomar una posición larga en contratos a plazo sobre dicho activo. Supongamos que poseemos este activo y lo vendemos en ese momento por un monto de S_0 . Luego, invertimos esa cantidad durante un periodo T y participamos en un contrato de futuros para adquirir el activo al precio F_0 después del mismo tiempo T . Durante este periodo, el monto de la inversión aumentará a

$$S_f = S_0 e^{rT} \quad (2.6)$$

Al pasar el tiempo T , readquirimos la misma cantidad de activo al precio F_0 . Sin embargo, según la ecuación (2.5), sabemos que $F_0 < S_0 e^{rT}$ o, lo que es lo mismo, $F_0 < S_f$. Por lo tanto, al readquirir la misma cantidad de activo, se obtendría una ganancia G igual a

$$G = S_f - F_0 \quad (2.7)$$

Debido al tercer supuesto, los inversionistas pueden aprovechar las oportunidades de arbitraje cuando estas se presentan. Por lo tanto, si llegara a ocurrir cualquiera de los dos casos, los inversionistas comenzarían a comprar o vender el activo subyacente. Estas operaciones, a su vez, tendrían un efecto sobre su precio, lo cual resultaría en un aumento o disminución de los precios. Este cambio en los precios, a su vez, conduciría nuevamente a la ecuación (2.3), estableciendo así la condición de no arbitraje.

2.3.2 Valor futuro de un activo de inversión con ganancias en efectivo conocidas.

Ahora, exploramos un contrato de futuros relacionado con un activo de inversión que garantiza al poseedor ganancias en efectivo completamente previsibles. Dos tipos específicos de activos que se ajustan a esta descripción son las acciones que pagan dividendos conocidos y los bonos con cupón. Las acciones que pagan dividendos conocidos son aquellas de empresas que distribuyen una porción de sus ganancias a los accionistas en forma de dividendos, los cuales suelen ser preestablecidos y regulares, permitiendo al titular anticipar sus ingresos. Un ejemplo adicional son los bonos con cupón, instru-

mentos de deuda emitidos por gobiernos o empresas. El término “cupón” se refiere al pago de intereses periódicos que el tenedor del bono recibe por poseerlo. Al igual que en el caso de las acciones que pagan dividendos, estos pagos de interés son predefinidos y brindan un flujo de ingresos previsible al inversor (J. C. Hull, 2009).

Un activo de inversión que proporciona ingresos con un valor presente I_0 durante un periodo T queda definido por

$$F_0 = (S_0 - I_0)e^{rT} \quad (2.8)$$

Lo que nos está diciendo esta expresión es que al contrato del futuro hay que descontarle el valor presente de los ingresos futuros, I_0 , esperados por el poseedor del futuro. Este descuento se realiza utilizando la tasa de interés libre de riesgo r y se extiende hasta el tiempo T

$$I_0 = \sum_{i=1}^n I_i^{-r\tau_i} \quad (2.9)$$

Donde r es la tasa de rendimiento libre de riesgo compuesta y τ es el periodo de tiempo, medido en años, durante el cual se espera recibir un determinado ingreso I_i durante n periodos, donde $T \geq \tau$. Por ejemplo, si hablamos de dividendos, puede ser trimestral, semestral o anual. Sustituyendo (2.9) en (2.8) obtenemos el precio del contrato de futuros para un activo de inversión que proporciona ganancias conocidas.

$$F_0 = (S_0 - \sum_{i=1}^n I_i^{-r\tau_i})e^{rT} \quad (2.10)$$

2.3.3 El valor futuro de un activo con rendimientos conocidos.

A continuación, examinaremos la situación en la que el activo subyacente en un contrato a plazo produce un rendimiento preestablecido en lugar de contar con ingresos en efectivo predefinidos. En este escenario, los rendimientos se calculan como un porcentaje del valor del activo en el momento del pago. Por lo general, se presupone que los dividendos representan un rendimiento establecido en lugar de un ingreso en efectivo determinado.

Sin embargo, supongamos que el activo subyacente proporciona un rendimiento conocido promedio anual durante la vida del contrato a plazo, expresado como un porcentaje continuo q . Por lo tanto, al traer a valor presente el valor del activo subyacente S_0 , tenemos

$$S_0 = S_0 e^{-qT} \quad (2.11)$$

Según la ecuación (2.1), sabemos que el precio del contrato de futuros para un activo que no proporciona ingresos al tenedor es

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.12), obtenemos que el precio del contrato de futuros para rendimientos conocidos q está dado por

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \quad (2.13)$$

2.4 Mercado de commodities

En 1847, se fundó la Bolsa de Productos Agrícolas de Chicago, donde se comercializaban productos como huevos, aves, mantequilla y otros productos agrícolas perecederos. Durante 1898, los comerciantes de mantequilla y huevos se retiraron de la bolsa para establecer el Mercado de Mantequilla y Huevos de Chicago. Tras esta separación en 1919, cambió su nombre a Bolsa Mercantil de Chicago (CME, por sus siglas en inglés). Con el tiempo, la bolsa se expandió para incluir otros productos y desde entonces ha proporcionado un mercado de futuros para diversas materias primas. En 1972, la CME comenzó a negociar futuros en monedas extranjeras. En la actualidad, los principales mercados donde se negocian commodities incluyen la Bolsa Mercantil de Chicago (CME), la Bolsa Mercantil de Nueva York (NYMEX), la Bolsa de Comercio de Chicago (CBOT), entre otros (J. C. Hull, 2009, p. 3).

Cuando hablamos del mercado de commodities, nos referimos a materias primas o insumos para la producción, así como a ciertos activos perecederos. Dentro de los commodities podemos encontrar productos agrícolas y ganaderos, cuyo precio está determinado principalmente por la oferta y la demanda. Los precios de este tipo de com-

modities tienden a ser estacionales debido a que su almacenamiento suele ser costoso y existe un límite de tiempo durante el cual se puede conservar el producto. Además, el clima juega un papel importante en su determinación de precios. A su vez, estos mismos productos básicos se utilizan para alimentar al ganado; por ejemplo, el maíz. Por lo tanto, el precio del ganado al llegar al sacrificio puede depender de estos productos básicos (J. Hull y cols., 2013).

También podemos encontrar metales como el oro y la plata, pero no solo estos. La Bolsa de Metales de Londres clasifica diferentes tipos de metales. Por ejemplo, los ferrosos, donde se encuentra el acero, y los no ferrosos como el aluminio, cobre, zinc, níquel, estaño y alúmina. También se encuentran los metales para vehículos eléctricos, como el cobalto, molibdeno, litio, hidróxido de litio y el grupo platino, donde se encuentra el platino y el paladio.

A diferencia de los productos agrícolas, una de sus características es que sus precios no se ven afectados por el clima ni son estacionales, y se pueden almacenar. Esto permite a los analistas controlar los niveles de inventarios con la finalidad de determinar en el corto plazo la volatilidad, debido a que el país donde se extrae el metal suele ser diferente a la divisa con la cual se cotiza su precio. En el largo plazo, su valor está determinado por las tendencias a la media. Sin embargo, a medida que se utiliza el metal en distintos procesos de producción y se encuentran nuevas fuentes del metal a nivel mundial, los cambios en las tecnologías y métodos tanto de explotación como de extracción, la geopolítica y la regulación ambiental también tienen un impacto directo en el precio (J. Hull y cols., 2013).

Esta reversión a la media normalmente ocurre únicamente en los metales que son activos de consumo. A medida que el precio de un metal aumenta, se vuelve menos atractivo para utilizarlo en algún proceso de producción, y puede ser más económicamente viable extraerlo de lugares más difíciles, generando así una presión a la baja en los precios. Algo similar ocurre cuando el precio disminuye; es probable que vuelva a ser más atractivo utilizarlo para algunos procesos de producción y menos viable económicamente extraer el metal de lugares difíciles, obteniendo así un precio al alza. Esta situación no ocurre para aquellos metales que son utilizados como activos de inversión, por ejemplo el oro y la plata, ya que esto implicaría condiciones de arbitraje para los inversionistas (J. Hull y cols., 2013).

2.5 Futuros sobre commodities

Ahora vamos a considerar los contratos de futuros sobre commodities. Es importante mencionar que dentro de estos activos podemos distinguir entre dos tipos: los que funcionan como activos de inversión, ejemplo de ello son el oro y la plata, y los que funcionan como activos de consumo.

2.5.1 Futuros sobre commodities que son activos de inversión.

De acuerdo con [J. C. Hull \(2009\)](#), para que un activo sea clasificado como activo de inversión, no es suficiente mantenerlo con propósitos de inversión exclusivamente. Es necesario que el poseedor tenga la intención de invertir y esté dispuesto a venderlo y asumir una posición larga en contratos a plazo si esto resulta más atractivo. Es por esta razón que la plata, a pesar de su relevancia en usos industriales, continúa siendo considerada un activo de inversión.

Para los bienes de inversión como el oro o la plata, los poseedores de estos activos, como los bancos centrales, pueden percibir intereses conocidos como *tasa de arrendamiento del oro* cuando prestan estos activos, lo que genera ingresos para el tenedor. Sin embargo, en esta consideración, haremos caso omiso de este tipo de ingresos y solo tendremos en cuenta los costos de almacenamiento. Si no hay costos de almacenamiento ni ingresos, el precio a plazo de una materia prima como activo de inversión se expresará de la misma manera que en la ecuación [\(2.1\)](#) [\(J. C. Hull, 2009\)](#).

Si consideramos costos de almacenamiento, estos se manejan como ingresos negativos. Sea U el valor presente de todos los costos de almacenamiento durante la vida del contrato, se deduce que

$$F_0 = (S_0 + U)e^{rT} \quad (2.14)$$

Consideremos la siguiente posibilidad de arbitraje, es decir,

$$F_0 > (S_0 + U)e^{rT} \quad (2.15)$$

Entonces, un arbitrista podría adquirir un préstamo a la tasa libre de riesgo por el monto

de $S_0 + U$ y usarlo para comprar una unidad del commodity S_0 , cubriendo así sus costos de almacenamiento U . Posteriormente, vendería en corto el contrato de futuros sobre la unidad del commodity, generando una ganancia igual a $F_0 - (S_0 + U)e^{rT}$ al tiempo T . Sin embargo, a medida que los arbitristas realizan esta inversión, S_0 tendería a aumentar; por lo tanto, F_0 tendería a disminuir. Como consecuencia, la ecuación (2.15) no sería posible mantenerse durante ningún periodo significativo de tiempo.

Ahora consideremos esta otra posibilidad de arbitraje, es decir,

$$F_0 < (S_0 + U)e^{rT} \quad (2.16)$$

Al percibir esta discrepancia, un arbitrajista podría decidir vender la materia prima para eludir los costos de almacenamiento y luego invertir el producto a una tasa de interés libre de riesgo. También podría optar por asumir una posición larga en un contrato a plazo. Esto conllevaría a una ganancia sin riesgo al vencimiento de $(S_0 + U)e^{rT} - F_0 = 0$ en comparación con la posición que los inversores habrían mantenido si hubieran conservado la materia prima.

Si ocurre la misma situación que en el caso anterior, los arbitrajistas comenzarían a tomar posiciones largas en el contrato de futuros, lo que, a su vez, generaría un incremento en los precios de F_0 . Por consecuencia, la ecuación (2.16) no puede cumplirse durante periodos prolongados. Dado que las ecuaciones (2.15) y (2.16) no pueden sostenerse durante periodos prolongados, se debe cumplir la igualdad de la ecuación (2.14).

Si el costo de almacenamiento del commodity es directamente proporcional a una fracción de su precio, denotada como u , donde u representa los costos anuales de almacenamiento como un porcentaje del precio actual neto de cualquier rendimiento obtenido sobre el activo, entonces esto puede interpretarse como un rendimiento negativo. En otras palabras, implica un gasto anual asociado con el mantenimiento del commodity.

$$F_0 = S_0 e^{(r+u)T} \quad (2.17)$$

2.5.2 Commodities de consumo

Como su nombre sugiere, los commodities de consumo son aquellos utilizados en la industria como insumo en la producción de algún bien. En general, este tipo de commodity no genera ingresos al tenedor; sin embargo, pueden estar sujetos a importantes costos de almacenamiento. En el caso de commodities que se mantienen principalmente con propósitos de consumo, los argumentos que respaldan el cumplimiento de la ecuación (2.14) ya no aplican. Esto se debe a que los individuos o empresas que mantienen este commodity lo hacen por su valor de uso y no como una inversión. En este contexto, si la desigualdad (2.16) se cumpliera, la estrategia de arbitraje de vender el commodity, ahorrando así los costos de almacenamiento e invirtiendo el producto a una tasa de interés libre de riesgo, no sería posible porque se niegan a vender el commodity y adquirir contratos a plazo (J. C. Hull, 2009).

Dado que estos contratos no pueden ser consumidos, no existen condiciones para evitar que la ecuación (2.16) se cumpla. Por lo tanto, para un commodity de consumo exclusivo, podemos afirmar lo siguiente:

$$F_0 \leq (S_0 + U)e^{rT} \quad (2.18)$$

La situación es análoga cuando los costos de almacenamiento se expresan como una proporción u del precio al contado es decir,

$$F_0 \leq S_0 e^{(r+u)T} \quad (2.19)$$

2.5.3 Rendimientos de conveniencia.

Los *rendimientos de conveniencia* hacen referencia a las ganancias que resultan de la posesión directa de un activo físico, como ocurre en el caso de commodities. Estos rendimientos comprenden el beneficio o prima asociados con la tenencia de un producto o bien tangible subyacente, en contraste con un contrato o producto derivado. En situaciones particulares, como movimientos inusuales en el mercado, la tenencia directa del bien o valor subyacente puede llegar a ser más rentable que ser propietario

del contrato o instrumento derivado, dada su relativa escasez frente a una elevada demanda (Calvo Ocampo, Cardona Zapata, y cols., 2016).

Como se puede observar en las desigualdades (2.18) y (2.19), son válidas, ya que los usuarios de un commodity de consumo pueden percibir que retener el commodity físico ofrece ventajas que no se obtienen al tener contratos de futuros. Por ejemplo, una planta de baterías eléctricas no valora de la misma manera un contrato de futuros sobre litio sin procesar que el litio procesado que tienen en inventario, ya que este último es un componente esencial para su proceso de refinamiento, mientras que un contrato de futuros no puede utilizarse con este propósito. En resumen, la posesión del activo físico permite a un fabricante mantener en funcionamiento su proceso de producción y, posiblemente, beneficiarse de situaciones temporales de escasez local, ventajas que un contrato de futuros no proporciona de la misma manera.

Si conocemos el valor de los costos de almacenamiento, y este valor tiene un monto presente, U , el rendimiento de conveniencia, y , se define de manera que

$$F_0 e^{yT} = (S_0 + U) e^{rT} \quad (2.20)$$

Para el caso en que el costo de almacenamiento por unidad sea una proporción constante, u , del precio spot, la ecuación queda determinada por

$$F_0 e^{yT} = S_0 e^{(r+u)T} \quad (2.21)$$

o lo que es lo mismo

$$F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T} \quad (2.22)$$

Este rendimiento de conveniencia mide la diferencia en la que el lado izquierdo es menor que el lado derecho. Para el caso de commodities de inversión, el rendimiento de conveniencia cumple que $y = 0$, asegurando que no existe oportunidad de arbitraje.

De acuerdo con J. C. Hull, 2009, (2009) el rendimiento de conveniencia se basa en las proyecciones del mercado sobre la futura disponibilidad del commodity. Si hay una mayor probabilidad de escasez, el rendimiento de conveniencia será más alto. Cuando los usuarios del commodity mantienen grandes inventarios, las posibilidades de escasez a corto plazo son escasas, lo que conduce a un rendimiento de conveniencia más bajo.

En contraste, mantener inventarios bajos resulta en rendimientos de conveniencia más altos (p. 116).

2.6 Precios de los minerales

El análisis de precios de minerales implica diversas etapas, según señalan varios autores (Radetzki y Wårell, 2020). En primer lugar, se examinan mediante los precios de transferencia, seguido por el análisis de precios derivados de contratos bilaterales, precios publicados por el gobierno, precios impulsados por el usuario, precios establecidos por el productor, precios de subasta y los precios determinados en las bolsas de productos básicos.

El valor de cualquier mineral está sujeto a la dinámica competitiva del mercado. En el caso de metales pesados como el oro o la plata, se asemeja más a un modelo competitivo debido a la uniformidad de sus productos, la presencia de numerosos proveedores y la existencia de pocas barreras de entrada al mercado. Esto implica que ningún productor ejerce una influencia directa sobre los precios, a excepción de un breve período de tiempo⁵. Estos minerales se negocian en mercados especializados, como las bolsas de metales o mercados de materias primas, donde la información está ampliamente disponible gracias a las cotizaciones diarias. Algunas de las bolsas de minerales más destacadas en la actualidad incluyen la Bolsa de Metales de Londres (LME), la Bolsa Mercantil de Nueva York (NYMEX) y la Bolsa de Futuros de Shanghái (Maxwell, 2015).

Por otro lado, según Maxwell (2015), en minerales que no se encuentran formalmente listados en el mercado de materias primas, la comercialización se realiza mediante subastas regulares, lo que también proporciona precios transparentes⁶. Este enfoque se emplea comúnmente cuando existe una amplia variedad de grados en un producto. En la mayoría de los casos, los mercados para diversos minerales se desvían de manera significativa del modelo competitivo. En estas circunstancias, hay un número limita-

⁵Durante un periodo muy corto de tiempo

⁶Cuando nos referimos a precios opacos y transparentes, hablamos sobre la capacidad de obtener información clara y fácil sobre el valor de los activos en el mercado. Si el precio es opaco, significa que no es sencillo determinar el valor de los activos con la información disponible en el mercado.

do de productores que tienen un poder de mercado significativo, pero que no desafían activamente las posiciones de mercado de los demás. Estos son a menudo ejemplos de un oligopolio cooperativo, que a veces se acerca a acuerdos de tipo monopolio, como colusión o cartel.

En estos sectores, es común que una empresa establezca un precio para la negociación de contratos de venta de un mineral específico y sus compuestos clave, conocido como el **precio de productor**. Estos precios mantienen cierto nivel de transparencia. En estos mercados, al igual que en el mercado de materias primas, los productores suelen acordar los precios finales con los consumidores a través de contratos bilaterales, donde se establece la cantidad de producto, el lugar y la fecha de entrega, así como la aplicación de una o más transacciones (Maxwell, 2015).

Cuando unas pocas grandes empresas compradoras dominan un mercado, tienen el poder de determinar los precios a los que adquieren minerales, conocidos como **precios impulsados por el usuario**. Estos precios, influenciados por el poder de compra y la capacidad financiera de estas entidades, ya sean privadas o gubernamentales, también poseen un cierto grado de transparencia similar al de los productores (Maxwell, 2015).

Según la investigación de Maxwell (2015), existe una forma más opaca de establecer precios en minerales, típicamente en situaciones de oligopolio no cooperativo. Este escenario surge cuando empresas competidoras buscan aumentar su participación en el mercado y su rentabilidad a largo plazo. Generalmente, implica a un nuevo productor que busca una presencia más significativa en el mercado, dando lugar a negociaciones directas y sensibles comercialmente entre vendedores y compradores para determinar el precio del contrato. Un ejemplo ocurrió en Chile en 1998, donde tres empresas (Cypress Foote Mineral Company, FMC Corporation y Sons of Gwalia) controlaban el suministro de litio y la empresa chilena SQM comenzó a producir a partir de depósitos de salmuera de bajo costo.

Esta forma más opaca de fijación de precios, conocida como fijación de **precios por transferencia**, ocurre en sociedades integradas verticalmente, donde se establecen precios entre las sucursales de una empresa. A diferencia de los precios fijados por agentes independientes, los precios por transferencia no reflejan el verdadero precio de mercado. Aunque no afectan las ganancias antes de impuestos, su impacto puede ser significativo

para empresas multinacionales que realizan transacciones a través de fronteras nacionales, ya que ajustan estos precios para minimizar las obligaciones fiscales. Esto destaca la importancia de distinguir entre precios por transferencia y aquellos determinados por agentes independientes.

En respuesta a estas prácticas, los gobiernos de países exportadores de minerales pueden adoptar sistemas de **precios publicados**, contrarrestando la minimización de impuestos por parte de productores multinacionales y asegurando que los flujos de ingresos fiscales esperados se mantengan intactos (Maxwell, 2015).

3 CAPÍTULO: Tasa de interés.

Una tasa de interés en una situación específica define la cantidad de dinero que un prestatario se compromete a pagar al prestamista. La tasa de interés aplicada se determina según el riesgo crediticio y la probabilidad de que el prestatario no cumpla con el pago de los fondos, es decir, el riesgo de incumplir con los intereses y el capital prometido al prestamista. A medida que aumenta el riesgo crediticio, la tasa de interés ofrecida por el prestatario también aumenta. En términos generales, para cada tipo de divisa, se negocian diversas tasas de interés, que incluyen, entre otros ejemplos, tasas hipotecarias, tasas de depósito y tasas pasivas preferenciales (J. C. Hull, 2009, pp. 73).

Estas tasas de interés suelen presentar fluctuaciones aleatorias a lo largo del tiempo. Este tipo de fluctuaciones suele ser modelado con ayuda del cálculo estocástico. Diversos autores, como (Merton, 1974) y (Vasicek, 1977), pioneros en esta teoría, dieron origen a otros como (Dothan, 1978), (Brennan y Schwartz, 1979), (Cox y cols. (1985), (Ho y Lee, 1986), (Longstaff, 1989), y (J. Hull y White, 1990), ellos han planteado modelos teóricos conocidos como modelos de un factor.

En estos modelos, se representa la tasa de interés instantánea mediante un proceso de difusión que puede estar impulsado por múltiples dimensiones, y está sujeto a ciertos parámetros. Como resultado, el cambio en toda la curva de rendimiento está determi-

nado por esta difusión. En el caso de que la difusión sea unidimensional, este enfoque implica la modelización directa de la tasa de interés a corto plazo, lo que da lugar a lo que se conoce como un modelo de un solo factor. Debido a que la tasa de interés a corto plazo sirve como el punto de partida en cada momento para la curva de rendimiento, los modelos de un solo factor de tasas de interés a corto plazo suponen que el cambio en toda la curva de rendimiento está enteramente determinado por cómo evoluciona este punto inicial (Lamberton y Lapeyre, 2011).

Las tasas de interés a plazo y los valores de renta fija desempeñan un papel esencial en el mercado de deuda y son un factor crucial en la valuación de prácticamente todos los derivados financieros. Cuando se realiza un préstamo al instante en el momento t , el prestatario incurre en una tasa de interés al contado denominada $r(t)$, expresada generalmente como un porcentaje anual. Estas tasas de interés al contado suelen variar entre el 0.1 % y el 20 % anual (Baaquie, 2004).

Denotaremos la tasa *forward* o tasas a plazo como $f(t, x)$. Esta es la tasa de interés instantánea pactada (en forma de contrato) en un tiempo anterior $t < x$, para un préstamo entre tiempos futuros x y $x + dx$. Las tasas *forward* constituyen la estructura temporal de las tasas de interés y están relacionadas con la curva de rendimiento de la tasa de interés. Por lo tanto, podemos definir la tasa de interés al contado $r(t)$ para un préstamo a un día en algún momento t como

$$r(t) = f(t, t) \tag{3.1}$$

Como se mencionó anteriormente, existen diversos tipos de tasas, y una de las más comunes son las tasas del tesoro. Las tasas del tesoro son importantes porque se usan para valuar los bonos del tesoro y, en ocasiones, para definir el pago de un derivado. Estas tasas se refieren a los intereses que un inversionista obtiene al invertir en letras y bonos del tesoro. Dichos bonos son instrumentos de deuda utilizados por el gobierno para obtener préstamos en su propia moneda (J. Hull, 2022).

En términos generales, se parte del supuesto de que existe un riesgo muy bajo de que un gobierno no cumpla con una obligación denominada en su propia moneda. Por lo tanto, las tasas de los bonos del tesoro se consideran tasas libres de riesgo, en el sentido

de que un inversionista que adquiere uno de estos bonos tiene la garantía de que tanto los pagos de intereses como el reembolso del capital se llevarán a cabo según lo establecido. Existe otro tipo de tasa de interés conocida como “tasa de interés cupón cero”. Esta tasa se aplica a una inversión que comienza en el presente y se mantiene durante n años, donde tanto los intereses como el capital se reciben íntegramente al finalizar ese período. En otras palabras, no se generan pagos de intereses a lo largo del tiempo, sino que todo el rendimiento se obtiene al vencimiento de la inversión (J. C. Hull, 2009 pp. 78-79).

Debido a que las tasas de interés pueden ser anuales, trimestrales, mensuales, semestrales, etc., si expresamos esto en términos anuales, se le denomina frecuencia de composición. Cuando la tasa ya está anualizada, como sucede en el caso de una tasa de interés de cupón cero, el monto al final de cada año se expresa mediante la siguiente ecuación

$$P_f = P_0(1 + R)^n \quad (3.2)$$

Donde P_0 es el monto que se invierte durante n años, y denotaremos con R a la tasa de interés anual. Además, utilizaremos ρ para representar la tasa de interés que se compone un número entero m de veces al año.

Por ejemplo, si la tasa de interés es semestral, se dice que se compone dos veces al año ($m = 2$); si es mensual, entonces $m = 12$; y si es semanal, $m = 48$, siendo m el factor de conversión del periodo de vencimiento en años. Como podemos observar, entre más corto sea este periodo, mayor será el valor de m .

Con base en esta consideración, el valor final P_f de la inversión se calcula de la siguiente manera

$$P_f = P_0 \left(1 + \frac{\rho}{m}\right)^{mn} \quad (3.3)$$

Como podemos observar, estas expresiones son válidas para tasas de composición discretas m . ¿Qué sucede si consideramos tasas de composición más grandes? Tomando el límite cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, lo que implica a su vez que: $m \rightarrow \infty$, se puede demostrar que en ese límite, cuando m tiende a ∞ , un monto P_0 invertido durante n años a la tasa r , la cual denominaremos tasa de composición continua, aumentara a

$$P_f = P_0 e^{rn} \quad (3.4)$$

Aún más generalmente, podemos considerar a la tasa de interés r como función del tiempo. En este caso, un monto P_0 invertido durante un tiempo t años a la tasa $r(t)$ aumentara a

$$P_f = P_0 e^{\int_{t_0}^t r(t) dt} \quad (3.5)$$

3.1 Estructura temporal de la tasa de interés.

El cálculo estocástico es una rama de las matemáticas que permite modelar sistemas sujetos a fluctuaciones aleatorias. En finanzas, esta disciplina se utiliza para explicar, entender y predecir el comportamiento de activos financieros y derivados en situaciones de incertidumbre. La teoría de modelado de tasas de interés se basó originalmente en la suposición de una dinámica específica unidimensional para el proceso instantáneo de tasas spot r , cuando se especifica un proceso de Markov para la tasa de interés a corto plazo. Abordar directamente estas dinámicas resulta sumamente práctico, ya que todas las medidas esenciales (tasas y bonos) pueden definirse de manera sencilla a través de argumentos de no arbitraje. Este enfoque se logra al considerar la expectativa de una función del proceso de r (Brigo y Mercurio, 2006).

Considerando un mundo neutral al riesgo, todas las tasas, en teoría, pueden calcularse en todo momento como función de la tasa de interés a corto plazo. La tasa de interés libre de riesgo, representada como r , en el instante t es la tasa aplicable a un intervalo de tiempo infinitesimal en dicho momento. Esta es ocasionalmente conocida como la tasa instantánea a corto plazo. Los precios de bonos, opciones y otros derivados dependen exclusivamente del comportamiento de r en el mundo neutro al riesgo convencional (J. Hull, 2022). De hecho, la existencia de una medida neutral al riesgo implica que el precio libre de arbitraje en el tiempo t de un contrato contingente con pago H_T en el tiempo T está dado por

$$H_t = E_t \{ e^{-\int_t^T r(s) ds} H_T \} \quad (3.6)$$

E_t representa la expectativa condicional al tiempo t . Específicamente, el precio del bono cupón cero en el tiempo t para el vencimiento T se determina por una unidad de moneda

disponible en el tiempo T , lo que implica que $H_T = 1$. De esta manera, obtenemos

$$P(t, T) = E_t\{e^{-\int_t^T r(s)ds}\} \quad (3.7)$$

A partir de esta ecuación se hace evidente que si podemos describir la distribución de $e^{-\int_t^T r(s)ds}$ en función de una dinámica seleccionada para r , dadas las condiciones disponibles en el tiempo t , entonces podemos calcular los precios de los bonos P , a partir de los precios de los bonos se pueden derivar diversos tipos de tasas. Por lo tanto, en realidad, toda la curva de cupón cero se define en función de las propiedades de distribución de r (Brigo y Mercurio, 2006). La relación entre la tasa de interés libre de riesgo continuamente compuesta $R_{t,T}$ para un plazo $T - t$ y el precio de un bono cupón cero $P_{t,T}$ se expresa mediante la fórmula

$$p(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \quad (3.8)$$

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln p_{t,T} \quad (3.9)$$

Además, a partir de la ecuación podemos obtener $r(t, T)$ como

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln\{E_t\{e^{\int_t^T r(s)ds}\}\} \quad (3.10)$$

Esta ecuación nos permite determinar la estructura temporal de las tasas de interés en cualquier punto en el tiempo, basándonos en el proceso neutral al riesgo para r . Esto indica que una vez que se ha definido el proceso para r , podemos conocer todo sobre la curva inicial de tasas cero y cómo evoluciona a lo largo del tiempo.

Si consideramos que el proceso neutral al riesgo para r es Markoviano con un solo factor:

$$dr = m_1(r, t)dt + s_1(r, t)dz \quad (3.11)$$

Donde m_1 y s_1 son funciones, bien comportadas.

Según el lema de Itô, cualquier derivado que dependa de r sigue el proceso:

$$df = (f_t + m_1 f_r + \frac{1}{2} s_1^2 f_{rr})dt + s_1 f_r dz \quad (3.12)$$

Dado que estamos trabajando en el mundo neutral al riesgo tradicional, si el derivado

no proporciona ingresos, este proceso debe tener la forma:

$$df = rfdt + g \quad (3.13)$$

lo que implica que

$$f_t + m_1 f_r + \frac{1}{2} s_1^2 f_{rr} = rf \quad (3.14)$$

Esto es equivalente a la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton para derivados de tasas de interés. Una solución particular a esta ecuación debe ser el precio del bono cupón cero $P(t, T)$ (J. Hull, 2022). La construcción de una cartera localmente libre de riesgo adecuada, como en Black y Scholes (1973), conduce a la existencia de un proceso estocástico que depende únicamente del tiempo actual y de la tasa spot instantánea y no de los vencimientos de los contratos que constituyen la cartera, a este proceso se le conoce comúnmente como precio de riesgo de mercado.

Diversos autores como Merton (1974) y Vasicek (1977), pioneros en esta teoría, dieron origen a otros como Dothan (1978), Brennan (1979), Cox y cols. (1985), Ho (1986), Longstaff (1989) y Hull (1990), quienes plantearon modelos teóricos sobre la tasa de interés al considerarla un proceso estocástico en el tiempo estos modelos teóricos conocidos como modelos de un factor en ellos se representa la tasa de interés instantánea mediante un proceso de difusión que puede estar impulsado por múltiples dimensiones, y esto está sujeto a ciertos parámetros. Como resultado, el cambio en toda la curva de rendimiento está determinado por esta difusión. En el caso de que la difusión sea unidimensional, este enfoque implica la modelización directa de la tasa de interés a corto plazo, lo que da lugar a lo que se conoce como un modelo de un solo factor. Debido a que la tasa de interés a corto plazo sirve como el punto de partida en cada momento para la curva de rendimiento, los modelos de un solo factor de tasas de interés a corto plazo suponen que el cambio en toda la curva de rendimiento está enteramente determinado por cómo evoluciona este punto inicial (Brigo y Mercurio, 2006).

A continuación, se presentará una discusión teórica sobre las distintos modelos propuestos por estos autores. Muchas de estas teorías están basadas en diferentes cálculos realizados en el pasado. En este sentido, proporcionaremos una serie de conceptos matemáticos que serán fundamentales para la discusión de los modelos más adelante. Tal es el caso del trabajo de (1951) conocido como lema de Ito, también es importante

definir que son los procesos de Markov y procesos de Wiener.

3.1.1 Procesos Markovianos y procesos de Wiener.

Un proceso Markoviano es aquel proceso estocástico, dado el valor actual, su comportamiento futuro es independiente de su comportamiento pasado, es decir la forma en que el proceso llegó a su estado actual no tiene relevancia para predecir su comportamiento futuro. De hecho el movimiento Browniano es un proceso Markoviano. El proceso de Wiener o movimiento Browniano⁷, puede ser visto como el limite de una caminata aleatoria a medida que los incrementos en el tiempo y espacio tienden a cero, es decir, es un movimiento aleatorio continuo, sea $B_t = B(t)$ el valor al tiempo para cada t de una variable aleatoria⁸ podemos ver este proceso como: Para cada t existe una variable aleatoria B_t y existe una correlación entre los valores en diferentes momentos (Lawler, 2010).

Definición: Un proceso estocástico B_t se llama un movimiento Browniano (unidimensional) con deriva m y varianza (parámetro) σ^2 , comenzando en el origen, si satisface lo siguiente.

1. $B_0 = 0$.
2. Para $s < t$, la distribución de $B_t - B_s$ es normal con media $m(t - s)$ y varianza $\sigma^2(t - s)$.

Si $m = 0$ y $\sigma^2 = 1$, entonces B_t se llama un movimiento Browniano estándar.

Un planteamiento equivalente es el planteado por (J. Hull, 2022)

Definición: Una variable sigue un proceso de Wiener, si cumple las siguientes propiedades:

⁷En finanzas, estos términos suelen ser usados como sinónimos

⁸A la colección de variables aleatorias indexadas por el tiempo es conocido como un proceso estocástico (Lawler, 2010).

Propiedad 1: El cambio Δz durante un pequeño periodo de tiempo Δt :

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3.15)$$

Donde ϵ es una variable aleatoria que tiene una distribución normal $\phi(1, 0)$.

Propiedad 2: Los valores de Δz para cualquiera 2 intervalos pequeños tiempo Δt , son independientes (es decir sigue un proceso de Markoviano).

Por la propiedad 1 podemos intuir que Δz tiene una distribución normal con ⁹:

$$\begin{array}{ll} \text{Media} & \Delta x = 0 \\ \text{Desviacion Estandar} & \Delta z = \sqrt{\Delta t} \\ \text{Varianza} & \Delta z = \Delta t \end{array} \quad (3.16)$$

De estas dos consideraciones es posible obtener el cambio de la variable z a lo largo de un intervalo finito de tiempo T . Para hacer esto podemos considerar el intervalo T , como la contribución de la suma de pequeños intervalos de tiempo Δt .

$$T = N\Delta t \quad (3.17)$$

Por la **propiedad 1** (3.15) y por (3.17)

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (3.18)$$

Donde $\epsilon_i = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_N)$, y las ϵ_i son variables aleatorias, cada una con distribución normal $\phi(0, 1)$. Al seguir un proceso markoviano, las ϵ_i son independientes entre sí, por lo tanto:

$$\begin{array}{ll} \text{Media} & z(T) - z(0) = 0 \\ \text{Varianza} & z(T) - z(0) = \Delta t + \Delta t + \dots + \Delta t = N\Delta t = T \\ \text{Desviacion Estandar} & z(T) - z(0) = \sqrt{T} \end{array} \quad (3.19)$$

⁹La varianza de un producto de una variable aleatoria ϵ y una constante $\sqrt{\Delta t}$ es igual a la varianza de la variable aleatoria (1) por el cuadrado de la constante Δt .

En cálculo diferencial, es común definir una diferencial al considerar un cambio pequeño y llevarlo al límite de cero. Por ejemplo, si tenemos una variable que depende linealmente del tiempo, para cambios pequeños en el tiempo, podemos definir $\Delta x = a\Delta t$. Llevando el límite cuando Δt tiende a cero, obtenemos $dx = a dt$. Esta misma lógica se aplica en el cálculo estocástico. Por lo tanto, para un proceso de Wiener dz , se define como el límite cuando Δt tiende a cero. Sin embargo, al ser un proceso de Wiener, debe cumplir con las propiedades mencionadas anteriormente (J. Hull, 2022).

$$dz = \epsilon \sqrt{dt} \quad (3.20)$$

3.1.2 Proceso de Wiener generalizado

Un proceso de Wiener generalizado se define de la siguiente manera es decir es una generalización de la ecuación (3.20)

$$dx = a dt + b dz \quad (3.21)$$

Donde a y b son constantes. Para comprender este tipo de procesos es conveniente considerar ambos términos por separado, primero consideremos el caso cuando $b = 0$.

$$dx = a dt \quad (3.22)$$

Este termino me indica que tiene una deriva de a . Integrando (3.22), con respecto al tiempo, desde $t = 0$ hasta t donde $x_0 = x(0)$ y $x = x(t)$ entonces

$$x = x_0 + at \quad (3.23)$$

Obteniendo una ecuacion de una recta la durante un lapso de tiempo T , la variable x experimenta un aumento de aT . Al consideremos la segunda componente, $b dz$ este segundo término lo podemos considerar como ruido o fluctuaciones añadidas a la trayectoria de x , la cantidad de variación o fluctuación está determinada por b veces. Cabe destacar que un proceso de Wiener posee una varianza por unidad de tiempo de 1.0. Por lo tanto, b veces un proceso de Wiener conlleva a una varianza por unidad de tiempo de b^2 . En un intervalo de tiempo pequeño Δt , el cambio δx en el valor de x se

rige por las ecuaciones (3.20) y (3.18) de la siguiente manera

$$dx = a dt + b\epsilon \sqrt{dt} \quad (3.24)$$

Donde ϵ tiene una distribución normal estandar $Z(0,1)$. Por lo tanto Δx tiene una distribución normal con

$$\begin{array}{ll} \text{Media} & \Delta x = a\Delta t \\ \text{Varianza} & \Delta x = b^2\Delta t \\ \text{Desviacion estandar} & \Delta x = b\sqrt{\Delta t} \end{array} \quad (3.25)$$

Con argumentos similares se puede mostrar que el cambio en el valor de x en cualquier intervalo de tiempo T sigue una distribución normal.

$$\begin{array}{ll} \text{Media del cambio en } x & x = aT \\ \text{Varianza del cambio en } x & x = b^2T \\ \text{Desviacion estandar del cambio en } x & x = b\sqrt{T} \end{array} \quad (3.26)$$

Por lo tanto, podemos concluir que un proceso de Wiener generalizado tiene una tendencia por unidad de tiempo de a y una varianza por unidad de tiempo de b^2 , un ejemplo de un proceso de wiener generalizado puede verse en la figura (1).



Figura 1: Ecuación de una recta $y=0.5x$ y proceso de Wiener con deriva 0.5 y varianza de 0.8, elaboración propia en Wolfram Mathematica 13.2

3.1.3 Lema de Itô.

Otro tipo de proceso es el proceso de Itô. Este es el caso más general de un proceso de Wiener, donde a y b son funciones que pueden depender tanto de la variable x como del tiempo t .

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (3.27)$$

Cuya solución está dada por la tendencia esperada y la varianza de un proceso de Itô pueden cambiar con el tiempo, para un pequeño intervalo de tiempo $t + \Delta t$, el valor de la variable cambia a $x + \Delta x$, donde:

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (3.28)$$

Nótese que la ecuación (2) también representa un proceso Markoviano, ya que el cambio en x en el tiempo depende únicamente del tiempo t y no de su historia.

El lema de Itô es una identidad utilizada para encontrar el diferencial de una ecuación dependiente del tiempo de un proceso estocástico. Esta identidad se utiliza principalmente en finanzas para derivar la ecuación de Black-Scholes (Black y Scholes, 1973). El lema de Itô está dado por la siguiente ecuación:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} b dz + \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt \quad (3.29)$$

Supongamos una función que depende del precio de la acción y del tiempo $f(S, t)$. Aplicando el lema de Itô a esta función, obtenemos lo siguiente:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \quad (3.30)$$

3.2 Antecedentes del modelo.

Los modelos de equilibrio generalmente comienzan con suposiciones sobre variables económicas y derivan un proceso para la tasa de interés a corto plazo, r . Luego exploran lo que implica el proceso de r acerca de los precios de bonos y opciones. En un modelo de equilibrio de un solo factor, el proceso de r involucra solo una fuente de incertidumbre. Por lo general, se asume que el proceso de la tasa de interés a corto plazo es estacionario en el sentido de que los parámetros del proceso no son funciones del tiempo. Esto significa que el proceso que consideramos anteriormente puede escribirse de la siguiente forma

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \quad (3.31)$$

La premisa de un único factor no es tan limitante como podría parecer. Un modelo de un solo factor indica que todas las tasas se mueven en la misma dirección en cualquier intervalo de tiempo breve, aunque no necesariamente en la misma proporción. Por lo tanto, la configuración de la curva de tasas cupón cero puede variar a medida que transcurre el tiempo (J. Hull, 2022). En esta sección se examinan los principales modelos de equilibrio de un solo factor.

A partir del modelo de (Black y Scholes, 1973) para el precio de las opciones, tanto Black, Scholes y Merton reconocieron que el mismo enfoque básico podría aplicarse en el desarrollo de una teoría de fijación de precios para las obligaciones corporativas en general. Merton (1974) plantea una teoría para fijar precios a bonos cuando hay una probabilidad significativa de incumplimiento; es decir, plantea una teoría de la estructura de riesgo de la tasa de interés. Merton define el riesgo en términos de las posibles ganancias o pérdidas para los tenedores de bonos como resultado de cambios no anticipados en la probabilidad de incumplimiento y no incluye las ganancias o pérdidas inherentes a todos los bonos causadas por cambios (no anticipados) en las tasas de interés en general. Posteriormente, (Vasicek, 1977) proporciona una caracterización explícita de la estructura temporal de tasas de interés en un mercado eficiente. El desarrollo del modelo se basa en un argumento de arbitraje similar al utilizado por (Black y Scholes, 1973) para la valoración de opciones. El modelo está formulado en tiempo continuo. El modelo de Vasicek plantea que la tasa de interés evoluciona como un proceso de Ornstein-Uhlenbeck¹⁰, es decir, con coeficientes constantes de la siguiente forma:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad (3.32)$$

Donde r_0 , k , θ y σ son constantes positivas, y $W(t)$ es un proceso de Wiener

Este tipo de procesos se caracterizan por presentar reversión a la media y es ampliamente utilizado para describir fenómenos donde la variable tiende a fluctuar alrededor de un valor promedio a largo plazo. Esta ecuación diferencial se puede resolver (ver apéndice B) de manera analítica para cada $s \leq t$:

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta[1 - e^{-k(t-s)}] + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u) \quad (3.33)$$

y que $r(t)$ sigue una distribución normal con media y varianza dadas por:

$$E(r(t)) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (3.34)$$

$$Var(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2k} \left(\frac{1 - e^{-2k(t-s)}}{2a} \right) \quad (3.35)$$

Este resultado implica que $r(t)$ puede ser negativo con probabilidad positiva. Esto re-

¹⁰Este proceso es conocido como paseo aleatorio elástico, y en esencia, es un proceso de Markov con incrementos distribuidos de manera normal.

presenta una desventaja importante para el modelo. La principal ventaja es la facilidad analítica que implica una densidad gaussiana, ya que no es fácil lograr la misma conveniencia analítica al considerar otras distribuciones para el proceso. Ahora notemos que si tomamos el límite cuando $t \rightarrow \infty$, vemos que $r(t)$ converge a una variable aleatoria Gaussiana con media θ y varianza $\sigma^2/2k$. Esto significa que la tasa de interés a corto plazo r tiende a revertir a su media¹¹, al valor de θ . Se puede deducir del propio comportamiento dinámico (3.45) que θ puede ser interpretada como una tasa de interés promedio a largo plazo. Observa que la tendencia del proceso r es positiva cuando la tasa de interés a corto plazo está por debajo de θ y negativa en caso contrario. Esto implica que r es llevada, en todo momento, a estar, en promedio, más próxima al nivel θ (Brigo y Mercurio, 2006). Podemos obtener el precio de un bono de descuento puro (Ver anexo B) de la siguiente expresión.

$$P(t, T) = E_t \{ e^{-\int_t^T r(s) ds} \} \quad (3.36)$$

obteniendo así

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}. \quad (3.37)$$

Donde:

$$A(t, T) = \exp \left[\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) (B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k} (1 - e^{-k(T-t)})^2 \right] \quad (3.38)$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}. \quad (3.39)$$

En el modelo de Vasicek, las volatilidades de los bonos de cupón cero son determinísticas, lo que significa que se pueden obtener fórmulas analíticas para la valoración y cobertura de opciones de bonos (Lamberton y Lapeyre, 2011).

Un año después (Dothan, 1978) planteo un modelo de valoración para bonos libres de incumplimiento para una cierta clase de escenarios en los que la tasa de interés libre

¹¹Existen argumentos económicos que respaldan la idea de la reversión a la media. Cuando las tasas son elevadas, la economía tiende a desacelerarse y la demanda de fondos por parte de los prestatarios disminuye. Esto resulta en una reducción de las tasas. Por otro lado, cuando las tasas son bajas, suele haber una alta demanda de fondos por parte de los prestatarios, lo que tiende a hacer que las tasas aumenten. (J. Hull, 2022)

de riesgo instantánea sigue un proceso de Wiener geométrico.

$$dr(t) = \sigma r(t)dW(t) \quad (3.40)$$

Dothan incorporó un valor constante para el precio del riesgo de mercado, lo cual equivale a asumir de manera directa una dinámica neutral al riesgo del tipo

$$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad (3.41)$$

donde a es una constante real, lo que resulta en un proceso continuo en el tiempo cuya solución esta dada por (Ver anexo C)

$$r(t) = r(s)\exp\left\{\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma(W(r) - W(s))\right\} \quad (3.42)$$

Este modelo resulta en una distribución log-normal para la tasa de interés, lo que significa que no es posible obtener tasas negativas. Esto resuelve el problema que tiene el modelo de Vasicek (1977). Sin embargo, no es ampliamente utilizado, ya que la representación de las tasas de interés mediante una distribución log-normal aumenta la complejidad y presenta problemas de estabilidad. En otras palabras, debido a su complejidad y a las limitaciones en la obtención de soluciones exactas para algunos instrumentos financieros, este modelo no es muy adoptado.

Otro modelo ampliamente estudiado es el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985), o mejor conocido como modelo CIR por las siglas de los autores, este enfoque de equilibrio general introdujo un término de raíz cuadrada en el coeficiente de difusión de la dinámica de la tasa de interés instantánea propuesta por (Vasicek, 1977). Este modelo resultante ha servido como punto de referencia durante muchos años debido a su manejabilidad analítica y a la particularidad de que dada la raíz cuadrada planteada en el, la tasa de interés instantánea siempre es positiva. El modelo planteado es el siguiente (Brigo y Mercurio, 2006).

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad r(0) = r_0 \quad (3.43)$$

El resultado de este modelo, es que r , tiene una distribución de chi-cuadrado no centrada ver (Cox y cols., 1985), (Brigo y Mercurio, 2006) y (Lamberton y Lapeyre, 2011). Con r_0 , k , θ , σ constantes positivas y con $2k\theta > \sigma^2$ hacen que el origen sea inaccesible

asegurando que tasa de interés inicialmente no negativa nunca puede volverse negativa posteriormente. El comportamiento de la tasa de interés sugerido posee las siguientes características empíricamente significativas: “(i) Se descartan tasas de interés negativas. (ii) Si la tasa de interés alcanza cero, posteriormente puede volverse positiva. (iii) La varianza absoluta de la tasa de interés aumenta a medida que la propia tasa de interés se incrementa. (iv) Existe una distribución estable para la tasa de interés...” (Cox y cols., 1985).

Ho y Lee (1986) fueron los primeros en proponer un modelo de estructura temporal exógeno. La estrategia fundamental para transformar un modelo endógeno en uno exógeno implica la inclusión de parámetros que cambian con el tiempo, a diferencia de los modelos que generan la actual estructura temporal de tasas de manera endógena. Estos modelos se crean ajustando adecuadamente los modelos endógenos mencionados previamente. No obstante, su modelo no lograba replicar de manera efectiva la curva inicial de rendimiento, lo que implica que discutir sobre estructuras de volatilidad y realismo en otros aspectos carece en parte de sentido. Su modelo se basaba en la suposición de un árbol binomial que determina la evolución de toda la estructura temporal de tasas.

Un modelo clásico ampliamente examinado es el propuesto por Hull y White (1990). Este modelo puede ajustarse tanto a la estructura temporal de tasas de interés como a la estructura temporal de volatilidades de tasas spot o tasas forward. Sin embargo, al buscar una calibración exacta a la curva de rendimientos actual, es importante tener precaución al realizar un ajuste perfecto a la estructura temporal de volatilidades. Esta precaución es crucial por dos razones. En primer lugar, no todas las volatilidades cotizadas en el mercado son significativas; algunos sectores del mercado tienen menor liquidez, lo que puede hacer que las cotizaciones relacionadas no sean ni informativas ni confiables (Brigo y Mercurio, 2006).

Este modelo es una extensión del modelo de Vasicek, surgido de la necesidad de ajustar con precisión la curva de rendimientos observada en la actualidad. Hull y White incorporaron un parámetro variable en el tiempo en el modelo de Vasicek. El modelo implica que el proceso de la tasa de interés a corto plazo sigue una distribución normal en cada punto temporal. Además, desde una perspectiva analítica, es manejable, ya que permite valorar de manera explícita los bonos cupón cero y las opciones sobre ellos.

La distribución gaussiana de tasas compuestas continuamente facilita la derivación de fórmulas analíticas y la implementación de métodos numéricos eficaces para valorar una amplia gama de instrumentos derivados. No obstante, la posibilidad de tasas negativas y la formulación de un solo factor hacen que el modelo sea menos adecuado para resolver problemas de valoración específicos (Brigo y Mercurio, 2006). El modelo planteado por Hull y White es el siguiente

$$dr = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t) \quad (3.44)$$

Donde ϑ , a y σ son funciones deterministas del tiempo

A pesar de estas limitaciones, la extensión del modelo de Vasicek propuesta por Hull y White es uno de los modelos de tasas de interés más importantes en la historia y todavía se utiliza en la actualidad para la gestión de riesgos. Desde un punto de vista teórico, también permite el desarrollo de herramientas y procedimientos generales que pueden aplicarse fácilmente a otros modelos de tasas de interés a corto plazo. Un resumen de estos modelos se presenta en el cuadro (I).

Modelo	Dinámicas	Distribución
Vasicek	$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$	Normal
CIR	$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$	Chi cuadrada no central
Dothan	$dr_t = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$	Lognormal
Hull y White	$dr_t = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t)$	Normal

Cuadro 1: Fuente: Elaboración propia basada en (Brigo y Mercurio, 2006) descripción de modelos financieros.

Como podemos observar cada modelo tiene sus ventajas y desventajas al momento de querer modelar la tasa de interés tanto a nivel operativo como a nivel explicativo, sin embargo como explica (Brigo y Mercurio, 2006) al plantear o decidir un modelo de tasas de interés debemos de hacernos las siguientes preguntas:

- ¿Las dinámicas aseguran que las tasas sean consistentemente positivas, es decir, $r(t) > 0$ casi con certeza en cada t ?
- ¿Qué tipo de distribución impone la dinámica en la tasa de interés a corto plazo r ? ¿Por ejemplo, se trata de una distribución con colas pesadas?

- ¿Es factible calcular de manera explícita los precios de bonos $P(t, T) = \mathbb{E}_t \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \right]$ (y, por ende, tasas spot, tasas forward y tasas swap) a partir de la dinámica?
- ¿Se pueden determinar de manera explícita los precios de opciones sobre bonos (así como los precios de cap, floor, swaption) mediante la dinámica propuesta?
- ¿El modelo exhibe un comportamiento de reversión a la media, es decir, la expectativa de la tasa de interés a corto plazo converge hacia un valor constante a medida que el tiempo avanza hacia el infinito, sin que su varianza se dispare?
- ¿Cómo se establecen las estructuras de volatilidad que el modelo sugiere?
- ¿La formulación del modelo permite expresar explícitamente la dinámica de la tasa de interés a corto plazo bajo medidas forward?
- ¿En qué medida el modelo es apropiado para realizar simulaciones de Monte Carlo?
- ¿La dinámica seleccionada facilita el uso de técnicas de estimación histórica con fines de estimación de parámetros?

3.3 Desarrollo del modelo

Los supuestos planteados en el modelo son los siguientes:

1. Tanto los impuestos como los costos de transacción son cero. Esto permite que el mercado se comporte de manera eficiente.
2. El mercado es eficiente. Asumiendo que los precios de futuros incorporan toda la información disponible sobre el precio al contado futuro de una materia prima.
3. Asumimos un mundo neutral al riesgo.

En un escenario donde los inversionistas son neutrales al riesgo, los precios se calculan mediante expectativas bajo la medida neutral al riesgo. El rendimiento esperado de todos los activos de inversión coincide con la tasa de interés libre de

riesgo, r . Esto se debe a que estos inversionistas no demandan un sobrepago que los motive a asumir riesgos. Asimismo, es válido afirmar que el valor presente de cualquier flujo de efectivo en un entorno sin riesgo se puede obtener al descontar su valor esperado a la tasa de interés libre de riesgo. En consecuencia, la hipótesis de un mundo sin aversión al riesgo simplifica significativamente el análisis de los instrumentos derivados. Al asumir esto, permitimos crear una cobertura libre de riesgos tomando una posición larga en la opción y una posición corta en el contrato de futuros con la misma fecha de transacción (J. Hull, 2022).

4. Los precios de los futuros dependen únicamente del proceso seguido por r .

Dado que los precios de los futuros dependen únicamente del factor seguido por r , la ecuación establece que el valor en el tiempo t de un derivado de tasas de interés que paga f_T en el momento T se calcula como el valor esperado, en el entorno tradicionalmente neutral al riesgo, al descontar el pago futuro a una tasa libre de riesgo.

$$\mathbb{E}^{\text{RN}} [e^{-r(T-t)} f_T] \quad (3.45)$$

Aquí, r representa la tasa promedio entre $t \leq T$ y T , y $\mathbb{E}^{\text{RN}}$ indica el valor esperado en el contexto del mundo neutral al riesgo. La ecuación (3.45) define el precio, en el instante t , de un bono sin riesgo de cupón cero que paga 1 al vencimiento en T :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\text{RN}} [e^{-r(T-t)}] \quad (3.46)$$

Si $R(t, T)$ es la tasa de interés continua compuesta sin riesgo en el momento t para el período hasta T , se tiene:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (3.47)$$

y por lo tanto:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \quad (3.48)$$

Finalmente, a partir de la ecuación (3.47), se obtiene la relación entre la tasa de interés continua y el precio del bono

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \mathbb{E}^{\text{RN}} [e^{-r(T-t)}] \quad (31.4) \quad (3.49)$$

Esta ecuación posibilita la obtención de la estructura temporal de tasas de interés en

cualquier instante, partiendo del proceso neutral al riesgo para r . Esto implica que una vez que se define el proceso para r , se puede deducir toda la información sobre la curva inicial de tasas cero y su desarrollo a lo largo del tiempo. Suponiendo que el proceso neutral al riesgo para r sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck al igual que el modelo de (Vasicek, 1977).

$$dr = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (3.50)$$

Escogimos este modelo ya que si bien puede presentar tasas de interés negativas, para intervalos largos de tiempo presentan reversión a la media, al igual que el precio de los futuros de la mayoría de los minerales. Dado este proceso se mostró en el apéndice C que

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta[1 - e^{-k(t-s)}] + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u) \quad (3.51)$$

Sea $F(r, t)$ el precio del futuro una función estocástica y diferenciable, al tiempo $t < T$ y dado que r sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. De acuerdo con el lema de Itô tenemos que

$$dF = \frac{\partial F}{\partial r} \sigma dW + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + k(\theta - r) \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sigma^2 \right) dt \quad (3.52)$$

ya que estamos considerando un mundo neutral al riesgo entonces podemos crear una cartera libre de riesgo en el mercado de futuros podemos hacer esto si mantenemos posición larga en el activo subyacente: Compra el activo subyacente en el mercado actual, y poseer una posición corta en un contratos de futuros: vende contratos de futuros sobre el mismo activo. Es decir que se puede construir una cartera con derivados de manera que se elimine el proceso de Wiener. Sea Π el valor de la cartera definida como

$$\Pi = -F + \frac{\partial F}{\partial r} r \quad (3.53)$$

el cambio del portafolio en un intervalo de tiempo Δt

$$\Delta \Pi = -\Delta F + \frac{\partial F}{\partial r} \Delta r \quad (3.54)$$

La versión discreta de (3.50) y de (3.52) se escriben como

$$\Delta r = k(\theta - r(t))\Delta t + \sigma \Delta W(t) \quad (3.55)$$

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial r} \sigma \Delta W + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + k(\theta - r) \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sigma^2 \right) \Delta t \quad (3.56)$$

Sustituyendo (3.55) y (3.56) en (3.54)

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sigma^2 \right) \Delta t \quad (3.57)$$

Ya que estamos considerando neutralidad al riesgo esto implican que la cartera debe generar de manera instantánea la misma tasa de rendimiento que otros activos libres de riesgo a corto plazo. Si la cartera generara un rendimiento superior a este, los arbitrajistas podrían obtener ganancias sin riesgo al pedir prestado dinero para adquirir la cartera. En caso de generar un rendimiento inferior, podrían obtener beneficios sin riesgo al adoptar posiciones cortas en la cartera y comprar activos libres de riesgo. Se concluye que si definimos a $\Delta \Pi$ como

$$\Delta \Pi = rF \Delta t + k(\theta - r) \frac{\partial F}{\partial r} \Delta t \quad (3.58)$$

Donde el primer termino es el precio en corto de mi futuro, vender el contrato de futuros y el segundo termino representa la venta en corto igualando (3.58) y (3.57)

$$\left(-\frac{\partial F}{\partial t} - \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right) \Delta t = \left(-rF + \frac{\partial F}{\partial r} k(\theta - r) \right) \Delta t \quad (3.59)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial F}{\partial t} + k(\theta - r) \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF \quad (3.60)$$

Obteniendo así la ecuación diferencial para el precio de los futuros neutral al riesgo ecuación (3.60).

En el caso de un commodity de consumo, donde el costo de almacenamiento y su costo de conveniencia son proporcionales a una fracción de su precio spot, ver ecuación (2.22), nos interesa conocer cómo evoluciona el precio futuro a medida que transcurre el tiempo. Definimos F como el precio futuro en un momento t , y S como el precio del commodity en el tiempo t , o lo que es lo mismo, el precio spot, con $t \leq T$.

En particular para un commodity de consumo, proponemos el siguiente *ansatz* para el precio del futuro de un commodity como $F(t, T)$ tal que

$$F(t, T) = S(t, T)e^{(r(t)+u-y)B(t, T)} \quad (3.61)$$

Donde suponemos que tanto u como y son constantes al sustituir (3.61) en (3.60) obtenemos lo siguiente

$$\frac{S_t}{S} + B_t(r + u - y) + k\theta B - krB + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 = r \quad (3.62)$$

La cual satisface la ecuación diferencial cuando se cumple que

$$(r + u - y)B_t - krB = r \quad (3.63)$$

$$S_t - k\theta SB + \frac{1}{2}\sigma^2 SB^2 = 0 \quad (3.64)$$

De aquí que tenemos que la solución a la ecuación diferencial para $B(T, t)$ esta dada por

$$B(T, t) = \frac{-1 + e^{\frac{kr(t-T)}{r+u-y}}}{k} \quad (3.65)$$

Por otro lado el precio spot $S(T, t)$ estará dado por

$$S(t, T) = e^{\left(-\frac{4\theta k^3 r(T-t) + 4\theta k^2 (r+u-y)kB(T, t) + 2kr\sigma^2(T-t) - \sigma^2(r+u-y)(-4(kB(T, t)+1) + (kB(T, t)+1)^2 + 3)}{4k^3 r} \right)} \quad (3.66)$$

Donde las ecuaciones (3.65) y (3.66) son solución a las ecuaciones (3.63) y (3.64), y dado que cumplen las condiciones a la frontera $S(T, T) = 1$ y $B(T, T) = 0$, lo que a su vez también hace que se cumpla la condición de frontera para el precio $F(T, t) = 1$. La ecuación (3.65) nos aporta una condición sobre la tasa de interés r y los costos de almacenamiento u con respecto a los costos de conveniencia, es decir, $r + u \neq y$.

4 CAPÍTULO

Evidencia empírica.

Por último, verificaremos si hay correlación entre la tasa de interés (SOFR) y los precios de los contratos de futuros de hidróxido de litio. Es importante recalcar que aunque exista correlación entre dos variables, esto no implica necesariamente causalidad. Sin embargo, esta correlación podría sugerir que el modelo propuesto para el precio de los contratos de futuros para commodities tiene cierto poder explicativo.

Los datos utilizados para realizar este análisis fueron obtenidos de Bloomberg y comprenden información diaria desde el 3 de mayo de 2021 hasta el 25 de septiembre de 2023 y se encuentran en dolares de los siguientes: *COMEX Lithium Hydroxide CIF CJK (Fastmarkets) Composite Commodity Future*. COMEX, parte del grupo CME Group (Chicago Mercantile Exchange), es una bolsa de futuros y opciones de commodities. El hidróxido de litio es un compuesto químico ampliamente utilizado en la fabricación de baterías (Ver apendice A). En este caso, el vendedor es responsable de los costos de transporte, seguro y flete de la mercancía hasta el puerto de destino especificado (*Cost, Insurance, and Freight - CIF*), abarcando en este caso a los países de China, Japón y Corea ([Lithium Hydroxide CIF CJK \(Fastmarkets\) Overview - CME Group](#), s.f.).

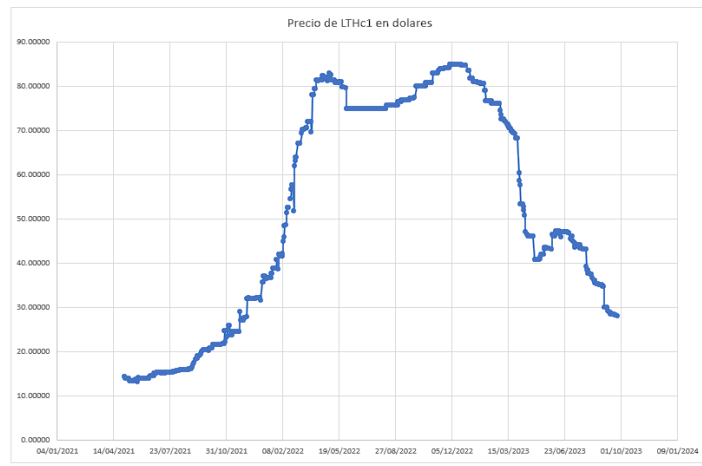


Figura 2: Elaboración propia basada en datos obtenidos de Bloomberg con datos desde el 3 de mayo de 2021 hasta el 25 de septiembre de 2023

Haciendo un análisis gráfico de la Figura (2), podemos observar que, si bien el precio de este mineral tuvo un incremento considerable a partir del 2021, comenzó a disminuir con el paso del tiempo, lo cual sugiere que este mineral tiende a volver a sus valores promedios en el largo plazo lo cual resultaría consistente con lo planteado por (J. Hull y cols., 2013).

Debido a que los datos pertenecen a la bolsa mercantil de Chicago en Estados Unidos, el otro dato utilizado para el análisis es la tasa de interés SOFR. Esta tasa se basa en las transacciones diarias del mercado de recompra respaldadas por valores del Tesoro de los Estados Unidos. La Reserva Federal de Nueva York publica diariamente los promedios SOFR y el índice SOFR en su sitio web (federal reserve bank of New York, 2023).

El coeficiente de correlación para el logaritmo natural de los precios del futuro y la tasa de interés SOFR obtenido es $\rho_{xy} = 0,402897576$. Este valor sugiere que hay una relación positiva entre el precio del futuro del hidróxido de litio y la tasa SOFR, débil o moderada en el sentido de que las dos variables tienden a moverse en la misma dirección, pero la relación no es muy fuerte. Es decir, cuando una variable aumenta, la otra tiende a aumentar, pero la relación no es perfecta. Sin embargo, aún existe una tendencia positiva, respaldando la hipótesis planteada. Será crucial profundizar en el análisis para comprender mejor la naturaleza de esta relación y considerar otros factores que podrían influir en ambas variables, como el costo de conveniencia, según lo señalan algunos autores (Prokopczuk, Symeonidis, Wese Simen, y Wichmann, 2023) y (Dincerler, Khokher, y Simin, 2020).

La información sobre los precios de minerales de litio en estado natural y productos refinados de litio es limitada en fuentes públicas. Por lo general, los precios de los productos químicos derivados del litio, como el carbonato de litio y el hidróxido de litio, están disponibles en forma de reportes anuales o con actualizaciones mensuales limitadas (LaRocca, 2020).

5 CONCLUSIONES

Dentro de los commodities de consumo, como los minerales utilizados en la industria, los individuos o empresas que mantienen estos commodities lo hacen por su valor de uso y no como una inversión. Por tanto, el precio futuro de estos bienes queda determinado principalmente por tres factores principales: la tasa de interés libre de incumplimiento, los costos de almacenamiento y los rendimientos de conveniencia, definidos como el beneficio que obtiene el poseedor del bien físico. En general, el precio de cualquier mineral dependerá de la competitividad de su mercado.

Al considerar un mundo neutral al riesgo, todas las tasas, teóricamente, pueden calcularse en todo momento como función de la tasa de interés a corto plazo. Los precios de bonos, opciones y otros derivados, como los futuros, dependen exclusivamente del comportamiento de r en el mundo neutro al riesgo. En un modelo de equilibrio de un solo factor, el proceso de r involucra solo una fuente de incertidumbre. Por lo general, se asume que el proceso de la tasa de interés a corto plazo es estacionario en el sentido de que los parámetros del proceso no son funciones del tiempo. Un modelo de un solo factor indica que todas las tasas se mueven en la misma dirección en cualquier intervalo de tiempo breve, aunque no necesariamente en la misma proporción. A partir del modelo de (Black y Scholes, 1973), se percataron de que este mismo análisis podía ser aplicado a las estructuras temporales para la tasa de interés (Merton, 1974). Fue en ese entonces cuando surgieron diferentes modelos conocidos como modelos de un factor para la tasa de interés: (Vasicek, 1977), (Dothan, 1978), (Brennan y Schwartz, 1979), (Cox y cols., 1985), (Ho y Lee, 1986), (Longstaff, 1989), (J. Hull y White, 1990), cada uno con sus ventajas y desventajas, tanto a nivel teórico como operativo. Es por tal motivo que se seleccionó el modelo de (Vasicek, 1977) debido a la practicidad y sencillez al momento de resolver las ecuaciones.

Finalmente, se pretende aplicar este modelo para el hidróxido de litio esto debido a su importancia en la implementación de baterías para vehículos eléctricos. Aunque experimentó un aumento significativo a partir del 2021, se observa una disminución con el transcurso del tiempo, indicando que este mineral tiende a regresar a sus niveles promedio a largo plazo. Esta tendencia es coherente con lo propuesto por (J. Hull

y cols., 2013). El coeficiente de correlación sugiere una correlación positiva entre el precio futuro del hidróxido de litio y la tasa SOFR; sin embargo, es débil o moderada en el sentido de que las dos variables tienden a moverse en la misma dirección, pero la relación no es muy fuerte. Por consiguiente, es necesario ampliar el análisis al considerar los otros factores determinantes del precio de commodities de consumo, como los costos de almacenamiento y los rendimientos de conveniencia.

APENDICES

A Contexto del litio a nivel mundial

En el panorama global de recursos minerales, el litio, un metal alcalino, ha adquirido una destacada relevancia en el ámbito económico y tecnológico. Su versatilidad y propiedades únicas lo convierten en un componente fundamental en la fabricación de baterías de iones de litio (LIB), las cuales alimentan una amplia gama de dispositivos electrónicos, desde teléfonos móviles hasta vehículos eléctricos. Esta prominencia coloca al litio en el centro de la transición hacia fuentes de energía más sostenibles y limpias, posicionándolo como un recurso estratégico en el siglo XXI.

A pesar de su creciente demanda, el litio no se distribuye de manera uniforme en el globo terrestre, concentrándose en regiones como Argentina, Chile y Bolivia (triángulo del litio). Esto crea un escenario geoeconómico en el que ciertos países ostentan una posición privilegiada en términos de reservas y producción. Este capítulo explorará las principales reservas de litio a nivel mundial, brindando una visión detallada de las zonas geográficas que desempeñan un papel crucial en la oferta global de este estratégico mineral (Aleida y Téllez, 2022).

La extracción y procesamiento del litio son procesos técnicos de alta complejidad que requieren una comprensión detallada de las particularidades geológicas y químicas del mineral (Guillaume y cols., 2011). Este capítulo se adentrará en los métodos y tecnologías empleadas en la extracción de litio, proporcionando al lector una visión integral de los desafíos y avances en este campo.

A través de esta exploración detallada, buscamos proporcionar al lector una perspectiva completa y actualizada sobre el litio, desde su importancia estratégica hasta los procesos que permiten su obtención, así como los agentes clave que impulsan su industria a nivel mundial.

A.1 Propiedades y usos del litio a nivel mundial

El litio proviene del latín "lithos", que significa piedra. Fue identificado por primera vez en 1817 por el químico sueco Johan August Arfvedson, pero no fue sino hasta un año después que William aisló el metal puro de forma independiente. Es el elemento metálico más ligero, su símbolo en la tabla periódica es Li, tiene un peso atómico de 6.941 u, un bajo punto de fusión y es fuertemente electropositivo, lo que lo hace químicamente reactivo. Además, es de color blanco plateado (Guillaume y cols., 2011). Sus propiedades químicas quedan resumidas en el cuadro (2) .

Propiedad	Valor	Unidades
Simbolo	Li	
Numero atómico	3	
Peso atómico	6.941	
Densidad a 25°C	533	kg/m^3
Punto de fusión	181	°C
Radio atómico	145	pm
Radio iónico de L+	90	pm
Conductividad eléctrica	$11,7 \times 10^6$	S/m
Potencial eléctrico	3.04	V
Capacidad calorífica específica a 25 °C	3.58	J/(g°C)

Cuadro 2: Elaboración propia basado en (Guillaume y cols., 2011)

A partir de 1991, *Sony Co.* comercializó la primera batería de iones de litio (LIB) en el mundo, lo que condujo a una nueva revolución en la electrónica portátil, como las calculadoras eléctricas, computadoras portátiles, celulares, dispositivos electrónicos e incluso linternas. Además, la creciente preocupación de los gobiernos de todo el mundo

por el impacto de los gases de efecto invernadero y su influencia en el cambio climático a nivel global, trajo consigo una nueva implementación de políticas sobre energías limpias, así como la implementación de vehículos eléctricos (EV) con sistemas de almacenamiento eficiente de energía (Li, Lu, Chen, y Amine, 2018). Alrededor del 70 % del suministro energético proviene de la quema de combustibles fósiles, pero el consumo de estos recursos ha repercutido de manera negativa en el medio ambiente, por lo que se busca una transición energética con el objetivo prioritario de disminuir la dependencia mundial del petróleo. Una alternativa al suministro eléctrico son las ya conocidas energías sustentables (por mencionar algunas como la eólica y solar); sin embargo, los recursos necesarios para los aerogeneradores, paneles solares y baterías de almacenamiento de última generación requieren de diversos materiales como el cobre, cobalto, coltán, litio, neodimio, níquel, terbio, entre otros, algunos de los cuales pertenecen a las llamadas tierras raras, las cuales suelen tener una disponibilidad baja y, por lo tanto, son escasas. Además, su extracción en muchos casos puede ser compleja e incluso peligrosa. Sin mencionar que la explotación de estos recursos también impacta en el medio ambiente (Aleida y Téllez, 2022). A pesar de esto, se pretende implementar estas estrategias, todo esto con el fin de reducir las emisiones de gases en la atmósfera.

Esto trajo consigo un incremento exponencial en las investigaciones sobre baterías en todo el mundo, reportando desde 2010 hasta 2017 al menos 119,188 investigaciones nuevas de baterías, según datos de *Web of Science*. Todas estas investigaciones tienen como objetivo fundamental disminuir el peso y el tamaño de las baterías, mejorar su durabilidad, seguridad, además de reducir el costo de producción. Las primeras baterías que no estaban hechas a base de litio¹², se caracterizaban por tener bajas densidades de energía. Lo que llevó a los investigadores a buscar otras opciones de baterías basadas en otros materiales. Fue entonces cuando se percataron de que las propiedades físicas y químicas del litio, en particular los iones de litio, al tener una baja masa atómica, un radio atómico pequeño y una alta conductividad, permitían generar baterías con una alta densidad de energía, compactas, menos pesadas y con una alta potencia en los sistemas portátiles de almacenamiento de energía, generando una revolución en la forma y el diseño de aparatos electrónicos portátiles. Esto a su vez trajo consigo incrementos notables en el rendimiento de las LIB (Li y cols., 2018).

¹²baterías basadas en principalmente en plomo y níquel, en particular hidruro metálico de Ni y el sistema de plomo ácido (Li y cols., 2018)

El mercado de vehículos eléctricos (EV) es sin duda uno de los sectores más ambiciosos e interesantes. Su adopción es esencial para reducir los gases de efecto invernadero en la atmósfera. En la actualidad, prácticamente todas las principales empresas automotrices tienen al menos algún tipo de vehículo híbrido o eléctrico en su catálogo. Debido a la creciente demanda de baterías de iones de litio para dispositivos electrónicos y, en particular, para vehículos eléctricos, el litio destinado a la fabricación de baterías representó el 77.5 % del aumento en la demanda global entre 2010 y 2017. Las ventas de vehículos eléctricos e híbridos a nivel mundial alcanzaron aproximadamente 2.1 millones en 2018 (LaRocca, 2020). Solamente en 2016, el 46 % de la producción total de baterías de ion litio (LIB) fue destinado al sector de vehículos eléctricos (Li y cols., 2018). Sin embargo, uno de los principales desafíos para la implementación de estos vehículos reside en la cuestión de la movilidad y la independencia (Naor, Coman, y Wiznizer, 2021).

En la última década se ha implementado principalmente para la elaboración de baterías ver figura 3. En 2015 el 35 % del uso del litio se consumió en baterías¹³, el 32 % del litio se consumió en aplicaciones de vidrios y cerámicas¹⁴, el 9 % se destinó para lubricantes, el 5 % para colada continua y otro 5 % en tratamiento de aire, el 4 % para la producción de polímeros, el 9 % en otras aplicaciones industriales; las cuales fueron, principalmente saneamiento, síntesis orgánica, construcción, productos farmacéuticos, aleaciones y resinas químicas como otros usos finales menores y un 1 % destinado a la producción de aluminio (Martin y cols., 2017). En 2018 se incrementó el uso del litio para baterías de automóviles o electrodomésticos, el 39 %, vidrio y cerámica, el 30 %, grasas lubricantes, 8 %; polvos fundentes para colada continua y producción de polímeros 5 %, tratamiento de aire 3 %, y otros usos 10 % (ministerio de economía, 2018). En 2021, el porcentaje de litio extraído destinado a producir baterías eléctricas incrementó a un 56 %, mientras que podemos observar una disminución notable en los otros usos del litio en general reportando para vidrio y cerámica, el 23 %, grasas lubricantes, 6 %, polvos fundentes para colada continua 4 %, producción de polímeros

¹³Las baterías pueden dividirse en baterías primarias (baterías de descarga única), las baterías secundarias (baterías recargables) sin embargo la cantidad de litio utilizada para estas últimas es difícil de determinar ya que “Para la producción, normalmente se emplean hidróxido de litio (LiOH), carbonato de litio (Li₂CO₃) y varias sales. Sin embargo, la cantidad exacta de litio que se consume en la industria de las baterías es difícil de estimar, porque solo existen unas pocas fuentes confiables...” (Martin, Rentsch, Höck, y Bertau, 2017)

¹⁴Su adición mejora varias propiedades del vidrio y la cerámica; aumenta la resistencia mecánica y disminuye la contracción de la cerámica fina.

4 %, tratamiento de aire 2 % , y otros usos 6 % (ministerio de economía, 2021). Además la Agencia Internacional de Energía (2020) predice que la demanda de litio aumentará de 25.000 toneladas en 2019 a más de 350.000 toneladas en 2030 en un escenario de desarrollo sostenible (Martin y cols., 2017).

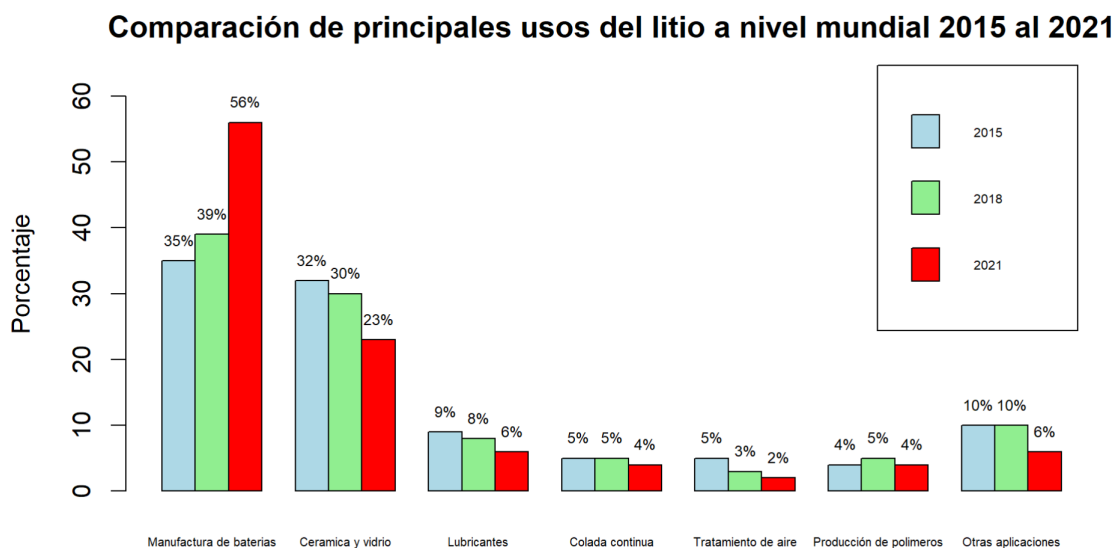


Figura 3: Principales usos del litio a nivel mundial durante el 2015 al 2021, elaboración propia realizada con datos del ministerio de economía.

A.2 Extracción y abundancia del litio.

De acuerdo al ministerio de economía (2021) el litio se encuentra presente en diversos minerales y es moderadamente abundante ya que está presente en la tierra en una proporción de 65 partes por millón (ppm); sin embargo, solo algunos de estos poseen valor económico, siendo los de principal interés, espodumena, amblygonita, lepidolita y petalita. Es posible obtener este mineral en diversos materiales rocosos como arcillas y pegmatitas, así como, en salmueras, pozos petrolíferos, campos geotérmicos y hasta en los océanos, se extrae a partir de 3 tipos de depósitos salmueras, pegmatitas y rocas sedimentarias; sin embargo, los únicos procesos que resultan ser económicamente factibles son salmueras .

A.2.1 Tipos de yacimientos

El litio se extrae a partir de tres tipos de depósitos, donde se encuentran concentraciones comercialmente viables: en salmueras, pegmatitas y rocas sedimentarias.

Salmueras

Las salmueras son cuerpos de agua con elevados niveles de salinidad, tanto en su superficie como en niveles subterráneos. Contienen cantidades relativamente moderadas de litio, el cual se libera de las rocas volcánicas circundantes debido a procesos de erosión (Evans, 2014).

La composición de las salmueras exhibe variaciones significativas en términos de las concentraciones de litio, así como la presencia de otros elementos como potasio, sodio, calcio, magnesio, hierro, boro, bromo, cloro, nitratos, cloruros, sulfatos y carbonatos. Esto implica que cada salmuera debe someterse a un tratamiento individual, considerando su composición específica. En líneas generales, la extracción de litio de las salmueras ha demostrado ser más rentable que la producción a partir de minerales de roca dura, como las pegmatitas (Aleida y Téllez, 2022). Aunque en el pasado prevalecía la producción de litio a partir de roca dura, en la actualidad la mayoría del carbonato de litio se obtiene de salmueras continentales, principalmente debido a su menor costo de producción (ministerio de economía, 2021).

Existen tres categorías de depósitos de salmuera. En primer lugar, tenemos las salmueras continentales, siendo los más comunes aquellos situados en cuencas continentales de desiertos salinos, conocidos como lagos de sal, salinas o salares (Evans, 2014). Un ejemplo destacado es el Salar de Atacama en Chile, que abarca 3,000 kilómetros cuadrados y tiene una concentración de litio promedio de alrededor del 0.14 % (la más alta conocida). Este salar alberga recursos estimados de litio de 6.3 millones de toneladas y es operado por dos de los principales productores mundiales de litio, Sociedad Química y Minera (NYSE: SQM) y Rockwood Holdings (NYSE: ROC), siendo responsable de más del 50 % del litio consumido a nivel global.

Estos depósitos están ubicados cerca de formaciones volcánicas y están compuestos

por arena, minerales y agua con altas concentraciones de sales disueltas (ministerio de economía, 2021).

El segundo tipo de salmuera corresponde a las salmueras geotermales, representando aproximadamente el 3 % de los recursos globales de litio. Estas salmueras están compuestas por una solución salina caliente y concentrada que ha circulado a través de las rocas de la corteza terrestre en áreas caracterizadas por un alto flujo de calor, lo que resulta en un enriquecimiento con litio, boro y potasio. Se pueden hallar pequeñas cantidades de litio en salmueras ubicadas en distintas regiones, como Wairakei (Nueva Zelanda), Reyknes campo (Islandia) y El Tatio (Chile) (ministerio de economía, 2021).

Finalmente, existen las salmueras presentes en campos petrolíferos, las cuales están enriquecidas con litio y se encuentran en yacimientos de petróleo profundos, constituyendo aproximadamente el 3 % de los recursos de litio conocidos a nivel mundial. Según el geólogo (Evans, 2014), Dakota del Norte, Wyoming, Oklahoma, Arkansas y el este de Texas albergan estas salmueras en campos petrolíferos, con concentraciones que pueden llegar hasta los 700 mg/l.

Depósitos pegmatita Las pegmatitas, caracterizadas por ser rocas ígneas de grano grueso que contienen elementos como litio, estaño, tántalo y niobio, representan aproximadamente el 26 % de los recursos mundiales de litio. A pesar de que la extracción de estas formaciones rocosas implica costos considerables, su concentración más elevada en comparación con las salmueras sigue permitiendo que sean económicamente viables. Además, la obtención de otros recursos como estaño y tantalio puede contribuir a compensar los costos asociados. Ejemplos destacados de depósitos de pegmatita se localizan en Greenbushes, Australia, siendo este último un yacimiento con un recurso estimado de 560,000 toneladas de mineral de litio y una concentración media de alrededor del 1.6 % (ministerio de economía, 2021).

Rocas sedimentarias

Estas representan el 8 % de los recursos de litio conocidos, se encuentran en depósitos de arcilla y rocas. En los depósitos de arcilla, el litio está presente en la estructura cristalina, especialmente en el mineral hectorita. Kings Valley, Nevada, es un ejemplo destacado de depósito de hectorita. Además, el litio en las arcillas puede acumularse

por enriquecimiento secundario debido a aguas termales subterráneas (Evans, 2014).

Sin embargo, recientemente se descubrió la mina de litio más grande del mundo en Bacadéhuachi, un pueblo de Sonora en México. La reserva de litio consta de 243 millones de toneladas en 100,000 acres¹⁵ de tierra. El litio en Bacadéhuachi queda atrapado en rocas arcillosas, lo que complica el proceso de extracción (Cervantes y Garduño-Rivera, 2022).

A.3 Principales productores de litio a nivel mundial

De acuerdo con datos del el Servicio Geológico de Estados Unido por sus siglas en inglés (USGS) se estima que existen más de 14 millones de reservas disponibles. Los recursos son considerablemente mayores y se informa que ascienden a aproximadamente 34 millones de toneladas. En 2014, la producción mundial de litio alcanzó aproximadamente 32 000 t. Los principales yacimientos de litio del mundo están ubicados en el “triángulo del litio” que incluye a Bolivia, Chile y Argentina las cuales conforman el 68 % de las reservas mundiales del mineral, seguida en menor cantidad por Australia (ver figura 2). Sin embargo, recientemente en 2019 fue descubierto en Sonora, México un yacimiento de litio de 243 millones de toneladas siendo la mina más grande del mundo (Cervantes y Garduño-Rivera, 2022).

¹⁵1 acre equivale a 404686 m²

Distribución geográfica de los recursos mundiales de litio por país.

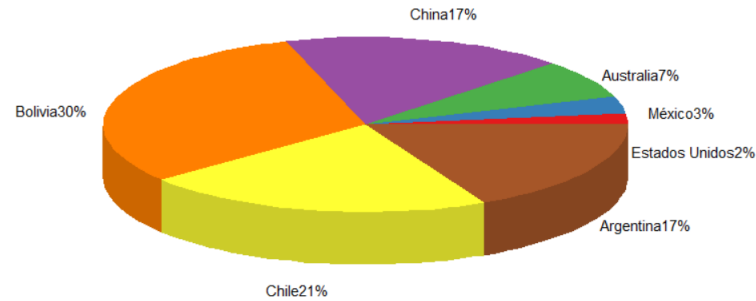


Figura 4: Distribución geográfica de los recursos mundiales de litio por país basado en (Cervantes y Garduño-Rivera, 2022).

De acuerdo a datos del USGS en 2021 el 96 % de la producción total del litio a nivel mundial estuvo liderada por 4 países, en primer lugar Australia con 55.300 toneladas, luego Chile con 28.300 toneladas, posteriormente China con 14.000 toneladas y por último Argentina con 5.970 toneladas. También destaca aunque en menor medida la participación de Brasil con una producción de 1.700 toneladas a la producción mundial (Álvarez, 2023).

De acuerdo con datos de la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) la producción mundial del litio a nivel mundial ha estado a lo largo del tiempo, dominada principalmente por estos 4 países (ver figura 5)

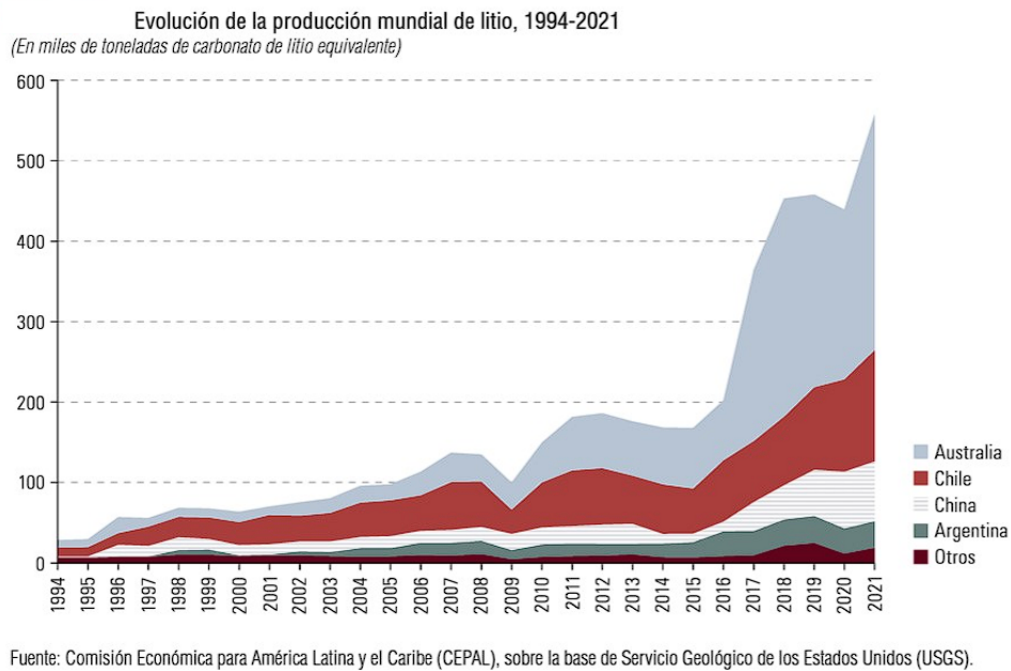


Figura 5: Principales productores de litio fuente CEPAL sobre la base de servicios geológicos de Estados Unidos

A.4 Perfil del litio a nivel global

La producción de litio se ve fuertemente afectada por el valor de la materia prima. El auge en la industria de vehículos eléctricos y la proyección de un aumento en la demanda de litio han generado inquietudes sobre el abastecimiento, lo que ha resultado en un incremento en los precios de este elemento. De hecho, el alza en el precio del litio en 2017 llevó a compañías a ingresar a la industria de extracción y a un rápido crecimiento en la producción global de litio. A partir de 2017, los precios han tenido variaciones, pero en general han tendido a la baja, especialmente en China, donde los precios al contado del carbonato de litio han disminuido debido a una menor preocupación por el abastecimiento y a un crecimiento de la demanda menor de lo anticipado (LaRocca, 2020).

El costo por kilogramo de litio no procesado exportado desde Australia en 2018 fue de 0,34 dólares, mientras que el precio por kilogramo de litio procesado exportado desde

Chile fue de 13,37 dólares. Estos datos comerciales indican la existencia de dos cadenas de valor distintas para el litio. La primera involucra la exportación de minerales de litio no procesados desde Australia hacia China, donde se lleva a cabo su procesamiento, refinamiento y fabricación de baterías. La segunda cadena comprende la exportación de productos químicos de litio procesados desde Chile hacia Corea del Sur, Japón y China, donde se refinan y se utilizan para la fabricación de baterías. Lamentablemente, no se cuentan con datos comparables sobre el valor añadido en las diversas etapas y ubicaciones de producción en estas cadenas de valor a nivel mundial. No obstante, la información disponible sugiere que China está acaparando la mayor parte del valor añadido debido a su papel principal en la refinación de litio. Como se discutió previamente, los actores clave en China son los participantes del sector privado, que han experimentado un rápido crecimiento impulsado por la política industrial del país (LaRocca, 2020).

B Derivación del Lema de Itô.

Un resultado importante para la teoría financiera es el lema de Itô formulado por el matemático japonés Kiyosi Itô en 1951, el lema de Itô permite encontrar la diferencial de un proceso estocástico.

En su forma mas simple el lema de itô establece que para una función estocástica $f(X)$ diferenciable la diferencial de $f(X)$ puede expresarse como

$$df(X) = f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)d[X, X] \quad (\text{B.1})$$

Donde $f'(x)$ y $f(X)''$ representa la primera y segunda derivada de f con respecto a X , dX representa el diferencial del proceso estocástico y $d[X, X]$ es una expresión que involucra la varianza entre los diferenciales de X

A continuación mostraremos como se deduce la ecuación del lema de Itô para una variable que sigue un proceso de Itô. A continuación mostraremos una demostración no rigurosa planteada por (J. Hull, 2022).

Consideremos una función continua y difereciabale $G(x, t)$, considerando cambios en

la variable y estos a su vez resultan en cambios pequeños en G entonces

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t \quad (\text{B.2})$$

Al hacer un desarrollo en serie de Taylor para mayor precisión alrededor de ΔG .

$$\Delta G(x, t) = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} + \dots \quad (\text{B.3})$$

Ahora supongamos que la variable x sigue un proceso de Itô es decir.

$$\begin{aligned} \Delta x &= a(x, t) \Delta t + b(x, t) \Delta z \\ dx &= a(x, t) dt + b(x, t) dz \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Donde $\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t}$, donde ϵ es una distribución normal con media 0 y varianza 1. Calculando Δx^2

$$\Delta x^2 = (a \Delta t + b \Delta z)^2 = a^2 \Delta t^2 + 2ab \Delta t^{\frac{3}{2}} + b^2 \epsilon^2 \Delta t \quad (\text{B.5})$$

Dado que estamos considerando cambios pequeños en el tiempo en la ecuación (B.5) $\Delta t^2 \ll \Delta t$ por lo tanto los podemos despreciar de igual forma el término a las tres medias por lo tanto.

$$\Delta x^2 \approx b^2 \epsilon^2 \Delta t \quad (\text{B.6})$$

Por los mismo argumentos antes mencionados podemos escribir ΔG de la siguiente manera.

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \epsilon^2 dt \quad (\text{B.7})$$

Haciendo el limite cuando $\Delta t \rightarrow 0$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \epsilon^2 dt \quad (\text{B.8})$$

observar el termino $b^2 \epsilon^2$ de la ecuación (B.8). La desviación estándar de la distribución normal es 1 esto implica lo siguiente.

$$\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2 = 1 \quad (\text{B.9})$$

Donde el $\langle \epsilon \rangle$ representa la esperanza. Por propiedad de la distribución normal

sabemos que $\langle \epsilon \rangle = 0$ por la ecuación (B.9) se concluye que $\langle \epsilon^2 \rangle = 1$ por lo tanto la esperanza de $\langle b\epsilon^2 \rangle = b \langle \epsilon^2 \rangle = b$. Por otro lado la varianza de $\epsilon^2 \Delta t$ por las propiedades de la distribución normal es $2\Delta t^2$ dado que estamos considerando el limite cuando Δt tiende a cero su desviación estándar es muy pequeña debido a que va al cuadrado por lo tanto podemos considerarla como no estocástica, por lo tanto podemos escribir la ecuación (B.8).

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \quad (\text{B.10})$$

Por último sustituyendo (B.4) en (B.10)

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} a dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \quad (\text{B.11})$$

reescribiendo la ecuación obtenemos el lema de Itô.

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} b dz + \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt \quad (\text{B.12})$$

C Solución del modelo de Vasicek

Partimos del modelo de Vasicek para tasa en el cual plantea los siguientes supuestos: 1) el precio de riesgo de mercado $q(t, r)$ es una constante independiente del tiempo calendario y del nivel de la tasa de interés instantánea. 2) la tasa de interés instantánea $r(t)$ sigue lo que se conoce como proceso de Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek, 1977).

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad (\text{C.1})$$

Donde r_0, k, θ y σ son constantes positivas, y $W(t)$ es un proceso de Wiener. Derivando (C.1) con respecto al tiempo

$$\frac{dr(t)}{dt} + kr(t) = k\theta + \sigma \frac{dW(t)}{dt} \quad (\text{C.2})$$

Sea $\mu(t) = e^{kt}$ y multiplicando por [C.3](#)

$$ke^{kt}r(t) + e^{kt}\frac{dr(t)}{dt} = k\theta e^{-kt} + \sigma e^{kt}\frac{dW(t)}{dt} \quad (\text{C.3})$$

Lo cual lo podemos reescribir como

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}r(t)) = k\theta e^{kt} + \sigma e^{kt}\frac{dW(t)}{dt} \quad (\text{C.4})$$

o lo que es lo mismo

$$d(e^{kt}r(t)) = k\theta e^{kt}dt + \sigma e^{kt}dW(t) \quad (\text{C.5})$$

Integrando de ambos lados con respecto a t con $s < t$

$$\int_s^t d(e^{kt}r(t)) = \int_s^t [k\theta e^{kt}dt + \sigma e^{kt}dW(t)] \quad (\text{C.6})$$

obteniendo como resultado

$$e^{kt}r(t) - e^{ks}r(s) = \theta[e^{kt} - e^{ks}] + \sigma \int_s^t e^{kt}dW(t) \quad (\text{C.7})$$

Despejando $r(t)$ de [C.7](#)

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta[1 - e^{-k(t-s)}] + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)}dW(u) \quad (\text{C.8})$$

Donde vamos a llamar a $r(s)$ con este resultado [C.8](#) y partiendo de la ecuación [3.47](#) podemos obtener el precio de un bono. Ahora, vamos a considerar $P(t, T)$ en términos de la expectativa condicional:

$$P(t, T) = E_t\{e^{-\int_t^T r(s)ds}\}. \quad (\text{C.9})$$

Utilizando la expresión de $r(t)$ en la ecuación, podemos reescribir la integral:

$$\int_t^T r(s)ds = \int_t^T \left[r_s e^{-k(s-t)} + \theta(1 - e^{-k(s-t)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(s-u)}dW(u) \right] ds. \quad (\text{C.10})$$

Ahora desglosemos esta integral:

$$\int_t^T r(s)ds = \int_t^T r_s e^{-k(s-t)} ds + \int_t^T \theta (1 - e^{-k(s-t)}) ds + \int_t^T \sigma \int_s^t e^{-k(s-u)} dW(u) ds. \quad (\text{C.11})$$

La primera integral es $B(t, T)$.

La segunda integral es $\theta(T - t) - \theta \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}$. La tercera integral es una integral estocástica bajo una esperanza condicional, por lo que su valor esperado condicional es cero.

Reemplazando estos resultados en la fórmula de $P(t, T)$, obtenemos:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}. \quad (\text{C.12})$$

Donde:

$$A(t, T) = \exp \left[\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) (B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2 \right] \quad (\text{C.13})$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}. \quad (\text{C.14})$$

D Solución modelo de Dothan

El modelo de Dothan esta dado por

$$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad (\text{D.1})$$

donde a es una constante real, lo que resulta en un proceso continuo en el tiempo Sea $f(t) = \ln(r(t))$ entonces aplicando el lema de Itô tenemos que

$$df = f' dr + 1/2 f'' dr^2 \quad (\text{D.2})$$

$$df = \frac{1}{r} dr + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) (r^2 \sigma^2 dt) \quad (\text{D.3})$$

$$df = \frac{1}{r} [ardt + \sigma r dW] + \frac{1}{2} (\sigma^2 dt) \quad (\text{D.4})$$

$$df = a dt + \sigma dW - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \quad (\text{D.5})$$

Integrado (D.5) con respecto a t, donde $s \leq t$

$$f(r(t)) = f(r(s)) + (a - \frac{1}{2}\sigma)[t - s] + \sigma[W(t) - W(s)] \quad (\text{D.6})$$

pero recordando que $F(r) = \ln(r(t))$

$$\ln(r(t)) = \ln(r(s)) + (a - \frac{1}{2}\sigma)[t - s] + \sigma[W(t) - W(s)] \quad (\text{D.7})$$

Obteniendo como resultado una distribución lognormal, sacando exponencial de ambos lados obtenemos que

$$r(t) = r(s)\exp\{(a - \frac{1}{2}\sigma)[t - s] + \sigma[W(t) - W(s)]\} \quad (\text{D.8})$$

Referencias

- Aleida, A. A., y Téllez, I. R. (2022). *Minería en México panorama social, ambiental y económico* (Primera edición ed.; P. V. L. Escarlett, Ed.).
- Baaquie, B. E. (2004). *Quantum finance: Path integrals and hamiltonians for options and interest rates*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511617577
- Black, F., y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637–654.
- Brennan, M. J., y Schwartz, E. S. (1979). A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking & Finance*, 3(2), 133–155.
- Brigo, D., y Mercurio, F. (2006). *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit* (Vol. 2). Springer.
- Calvo Ocampo, L. J., Cardona Zapata, H. D., y cols. (2016). *Una aproximación a la estimación de los rendimientos de conveniencia y los precios teóricos de futuros del café en Colombia* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad EAFIT.
- Cervantes, M. Á. M., y Garduño-Rivera, R. (2022). Mining-energy public policy of lithium in Mexico: Tension between nationalism and globalism. *Resources Policy*, 77, 102686.
- Chancellor, E. (1999). *Devil take the hindmost: A history of financial speculation*. Macmillan. Descargado de <https://books.google.com.mx/books?id=BFOQHQAACAAJ>
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., y Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 363–384.
- Dincerler, C., Khokher, Z., y Simin, T. (2020). An empirical analysis of commodity convenience yields. *Quarterly Journal of Finance*, 10(02), 2050009.
- Dothan, L. U. (1978). On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 6(1), 59–69.
- Evans, K. (2014). lithium. En G. Gunn (Ed.), *Critical metals handbook* (p. 230-258). John Wiley & Sons.
- federal reserve bank of New York. (2023, 10). *SOFR Averages and Index data - FEDERAL RESERVE BANK of NEW YORK*. Descargado de <https://www.newyorkfed.org/markets/reference-rates/sofr-averages-and-index>
- Guillaume, C. L., Gregoryanz, E., Degtyareva, O., McMahon, M. I., Hanfland, M., Evans, S., ... Mao, H. (2011). Cold melting and solid structures of dense lithium.

- Nature Physics*, 7(3), 211–214.
- Ho, T. S., y Lee, S.-B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *the Journal of Finance*, 41(5), 1011–1029.
- Hull, J. (2022). *Options, futures, and other derivative securities* (11.^a ed.). Pearson Education.
- Hull, J., Treepongkaruna, S., Colwell, D., Heaney, R., y Pitt, D. (2013). *Fundamentals of futures and options markets*. Pearson Higher Education AU.
- Hull, J., y White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *The review of financial studies*, 3(4), 573–592.
- Hull, J. C. (2009). *Introduccion a los mercados de futuros y opciones* (6.^a ed.). Pearson Educacion.
- Itô, K. (1951). *On stochastic differential equations* (Vol. 4). American Mathematical Society New York.
- Lamberton, D., y Lapeyre, B. (2011). *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. CRC press.
- LaRocca, G. M. (2020). *Global value chains: lithium in lithium-ion batteries for electric vehicles*. Office of Industries, US International Trade Commission.
- Lawler, G. F. (2010). Stochastic calculus: An introduction with applications. *American Mathematical Society*.
- Li, M., Lu, J., Chen, Z., y Amine, K. (2018). 30 years of lithium-ion batteries. *Advanced Materials*, 30(33), 1800561.
- Lithium Hydroxide CIF CJK (Fastmarkets) Overview - CME Group*. (s.f.). Descargado de <https://www.cmegroup.com/markets/metals/battery-metals/lithium-hydroxide-cif-cjk-fastmarkets.html>
- Longstaff, F. A. (1989). A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates. *Journal of financial economics*, 23(2), 195–224.
- Martin, G., Rentsch, L., Höck, M., y Bertau, M. (2017). Lithium market research – global supply, future demand and price development. *Energy Storage Materials*, 6, 171-179. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405829716302392> doi: <https://doi.org/10.1016/j.ensm.2016.11.004>
- Maxwell, P. (2015). Transparent and opaque pricing: The interesting case of lithium. *Resources Policy*, 45, 92-97. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030142071500032X> doi: <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2015.03.007>
- Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest

- rates. *The Journal of finance*, 29(2), 449–470.
- ministerio de economía. (2018). *Perfil del mercado del litio*. Descargado de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/419275/Perfil_Litio_2018__T_.pdf
- ministerio de economía. (2021). *Perfil del mercado del litio*. Descargado de www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/624816/15Perfil_Litio_2020__T_.pdf
- Naor, M., Coman, A., y Wiznizer, A. (2021). Vertically integrated supply chain of batteries, electric vehicles, and charging infrastructure: A review of three milestone projects from theory of constraints perspective. *Sustainability*, 13(7), 3632.
- ONU. (2023, 9). *Objetivos de Desarrollo Sostenible 2030*. Descargado de <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/energy/>
- Perkins, G., y Murmann, J. P. (2018). What does the success of tesla mean for the future dynamics in the global automobile sector? *Management and Organization Review*, 14(3), 471–480.
- Porcher, P., Sáez, P. R., Maestro, P., y Cascales, C. (2000). Tierras raras: materiales avanzados. En *Anales de la real sociedad española de química* (pp. 11–26).
- Prokopczuk, M., Symeonidis, L., Wese Simen, C., y Wichmann, R. (2023). Convenience yield risk. *Energy Economics*, 120, 106536. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140988323000348> doi: <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2023.106536>
- Radetzki, M., y Wårell, L. (2020). *A handbook of primary commodities in the global economy*. Cambridge University Press.
- Santander, B. (2023, 7). *¿Qué son los derivados financieros y qué tipos existen?* Descargado de <https://www.bancosantander.es/glosario/derivados-financieros#:~:text=Un%20derivado%20financiero%20es%20un,materias%20primas%2C%20tipos%20de%20inter%C3%A9s%E2%80%A6>
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2), 177–188.
- Álvarez, J. P. (2023, julio 13). *Cuatro países producen más del 96 % del litio del mundo: dos son latinoamericanos*. Descargado de <https://www.bloomberglinea.com/2023/07/13/cuatro-paises-producen-mas-del-96-del-litio-del-mundo-dos-son-latinoamericanos/>



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00072

Matrícula: 2221800828

Propuesta para la estimación del precio de contratos de commodities de consumo que presentan reversion a la media.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:30 horas del día 16 del mes de febrero del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MARTHA BEATRIZ MOTA ARAGON
DR. JOSE ANTONIO NUÑEZ MORA
DR. OWEN ELI CEBALLOS MINA
DR. HUMBERTO VALENCIA HERRERA

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

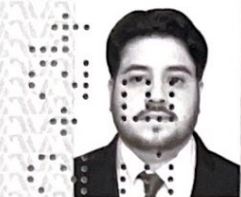
MAESTRO EN CIENCIAS ECONÓMICAS

DE: SALVADOR SANCHEZ MARTINEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



SALVADOR SANCHEZ MARTINEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CSH

DR. JOSE REGULO MORALES CALDERON

PRESIDENTA

DR. MARTHA BEATRIZ MOTA ARAGON

VOCAL

DR. JOSE ANTONIO NUÑEZ MORA

VOCAL

DR. OWEN ELI CEBALLOS MINA

SECRETARIO

DR. HUMBERTO VALENCIA HERRERA