



Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Matemáticas

LÍMITES PROYECTIVOS EN ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

Tesis que presenta

Luis Roberto Hernández Chávez

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

bajo la dirección de

Dra. Maria de Lourdes Palacios Fabila
UAM-I,

Ciudad de México, México.
4 de Abril del 2018

Dedicado
A mis padres María Cruz y Leobardo por su gran cariño y dedicación para conmigo.
A mis hermanos Hugo, Oliver y Nancy que sin su apoyo y su guía no podría haber llegado
a donde estoy.
A Carina, mi pareja académica y sentimental.
A Diego y Thiago que gracias a ellos me es posible pensar en un buen futuro.
A mis amigos por su compañía y lealtad.
Y en especial a Lourdes Palacios y Carlos Signoret por todas las enseñanzas.

Índice general

1. Preliminares	1
2. Límites Projectivos de Álgebras	9
2.0.1. Sistemas Projectivos de Álgebras Topológicas	13
2.0.2. Representación de Algebras localmente multiplicativamente convexa como límite projectivo (Descomposición de Arens-Michael)	16
2.0.3. Aplicaciones de la descomposición Arens-Michael	25
2.0.4. Álgebras localmente m-convexas advertiblemente completas.	30
2.0.5. Propiedades espectrales de álgebras advertiblemente completas local- mente multiplicativamente convexas	37
2.0.6. Ejemplos	48
3. Descomposición de Arens-Michael Generalizada	59
3.0.7. La topología definida por una colección de F-seminormas	61
3.0.8. Generalizaciones de la descomposición de Arens-Michael.	70
3.0.9. Aplicaciones	79
3.0.10. Generalización más reciente (T.Müldner)	94
4. Resultados	101

5. Bornología	109
5.0.11. Definiciones	109
5.0.12. Homomorfismos lineales acotados	110
5.0.13. Ejemplos fundamentales de bornologías	111
5.1. Construcciones bornológicas fundamentales	117
5.2. Aplicaciones	122
5.2.1. Topología definida por una Bornología	125
6. Conclusiones y Perspectivas	129

Introducción

El estudio de los límites proyectivos, como concepto categórico, surgió en la teoría de conjuntos y la topología; luego ha sido utilizado en varias áreas de las matemáticas. En este trabajo estudiamos el límite proyectivo topológico y el límite proyectivo bornológico, en las categorías de las álgebras topológicas y de los espacios vectoriales bornológicos, respectivamente.

Las álgebras localmente multiplicativamente convexas (*l.m.c.*) aparecieron en la literatura en el año de 1946 bajo el nombre de álgebras pseudo normadas; esta definición se debe a R. Arens (ver [9]). Un resultado fundamental para este tipo de álgebras fue publicado en 1952 por R. Arens en [10] y E. Michael en [31] de manera independiente. Tal resultado se conocería más tarde como la descomposición de Arens-Michael. Se trata de la representación de cualquier álgebra localmente m -convexa completa A como un límite proyectivo de álgebras de Banach y constituye una propiedad fundamental en la teoría de las álgebras m -convexas.

Mediante esta poderosa herramienta varias preguntas básicas sobre las propiedades de las álgebras m -convexas pueden ser reducidas a las preguntas y el estudio correspondientes en los factores de dicha representación.

De 1952 a la fecha se han dado diversas generalizaciones de la descomposición de Arens-Michael, entre las cuales mencionamos algunas a continuación. En 1989 M. Akkar, O.H. Cheikh y M. Oudadess en [8] dieron la descomposición de las álgebras localmente A -convexas completas de Hausdorff (las cuales son más generales que las álgebras localmente m -convexas) como límite proyectivo de álgebras A -normadas. En el mismo año M. Abel en [1] dio la descomposición de las álgebras localmente m -(k -convexas) completas de Hausdorff (que también son más generales que las álgebras localmente m -convexas) como límite proyectivo de álgebras k -Banach. Para el año 2000 V.K. Balachandran en [12], generalizó los resultados obtenidos en 1989 por Akkar, Cheikh y Oudadess por un lado y Abel por el otro, obteniendo la descomposición de las álgebras localmente m -pseudoconvexas completas y de Hausdorff como límite proyectivo de álgebras k_λ -Banach.

En 1975 T. Müldner publicó un artículo en donde mostraba la descomposición de las álgebras completas de Hausdorff con multiplicación conjuntamente continua como límite proyectivo de álgebras de Fréchet. Sin embargo, utilizó fuertemente un lema, el cual, después se supo, es verdadero, aunque la prueba que propuso era incorrecta. Por esta razón, en el año 2012, M. Abel en [3] corrigió el error de Müldner y obtuvo la descomposición más general que hasta el momento se conoce. Todas estas descomposiciones utilizan argumentos similares a los usados en la descomposición de Arens-Michael original.

Por otro lado, en el Análisis Funcional moderno, es importante considerar espacios vectoriales bornológicos, ya que esta teoría permite el estudio de numerosas propiedades de las funcionales lineales en un marco donde el concepto de función acotada sustituye al de función continua. Este es el caso, por ejemplo, de la teoría de las Distribuciones.

El estudio de los límites proyectivos en la categoría de las álgebras topológicas y de los espacios vectoriales bornológicos no se limita sólo a la descomposición de Arens-Michael y sus generalizaciones. En este trabajo también analizamos cuáles son las propiedades que se preservan y cuáles son las que no lo hacen, bajo el proceso de tomar límites proyectivos, en cada una de las categorías antes mencionadas.

Este trabajo se divide en cinco capítulos:

En el capítulo 1 introducimos las definiciones necesarias y los resultados fundamentales para establecer las ideas y el desarrollo de todo el trabajo. También presentamos algunos resultados de topología que serán usados más adelante.

En el capítulo 2 introducimos el concepto de sistema proyectivo y de límite proyectivo en la categoría de las álgebras topológicas. Presentamos la versión que aparece en [30] de la descomposición de Arens-Michael. Como ilustración de ésta, presentamos varias aplicaciones relacionadas con el espectro y el radio espectral de un álgebra m -convexa, así como aplicaciones que involucren el concepto de ser advertiblemente completa y la propiedad Q. Presentamos ejemplos donde se aplica la descomposición de Arens-Michael para mostrar cómo algunas propiedades se preservan bajo esta descomposición.

En el capítulo 3 mostramos la descomposición de Arens-Michael generalizada y presentamos una aplicación de ella en el álgebra de Multiplicadores de un álgebra localmente m -pseudoconvexa. Finalmente, enunciamos y demostramos, dando elementos originales, la última y más general descomposición dada por M. Abel en el año 2012.

El capítulo 4 está dedicado al estudio de algunas propiedades que se preservan bajo el proceso de tomar el límite proyectivo de un sistema proyectivo de álgebras topológicas.

Asímismo damos contraejemplos pertinentes para demostrar que algunas propiedades no se preservan bajo la acción de tomar límite proyectivo. La propiedad Q es muy importante; por eso para esta propiedad se presentan condiciones adicionales de manera que bajo la acción de tomar límite proyectivo el resultado sea de nuevo un álgebra con la propiedad Q .

El último capítulo está dedicado al estudio de los espacios vectoriales bornológicos; ahí presentamos las nociones de sistema proyectivo bornológico y de límite proyectivo bornológico. Introducimos el concepto de Mackey Q -álgebra, el cual involucra a ambas, la topología y la bornología. Aquí obtenemos un resultado original para el límite proyectivo de un sistema proyectivo de álgebras de este tipo.

Resumen

En este trabajo se estudia a fondo la descomposición de Arens-Michael y sus generalizaciones más usadas en la literatura, aportando una prueba alterna para cada una de las descomposiciones. Se obtienen algunos resultados originales para el caso de límites proyectivos de álgebras con propiedades como lo son las álgebras localmente m -pseudoconvexas, álgebras espectrales, Q -álgebras y álgebras topológicamente Q . Por último se prueba que la bornología del límite proyectivo bornológico, coincide con la bornología de Von-Newmann del límite proyectivo topológico.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen las definiciones necesarias y los resultados fundamentales para establecer las ideas y el desarrollo de todo el trabajo.

Definición.- 1.0.1 *Un álgebra sobre el campo $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial A en donde está definido un producto asociativo*

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto ab \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $(ka)b = k(ab) = a(kb)$
- $a(b + c) = ab + ac$; $(b + c)a = ba + ca$

para cualesquiera $k \in \mathbb{K}$ y $a, b, c \in A$.

Definición.- 1.0.2 *Sea τ una topología en un espacio vectorial X (sobre el campo $\mathbb{K}$) tal que:*

- a) Cada punto de X es un conjunto cerrado*
- b) Las operaciones de espacio vectorial son continuas con respecto a τ*

Bajo estas condiciones se dice que τ es una topología vectorial en X y que X es un espacio vectorial topológico.

Se dirá que la suma es continua si la función

$$\begin{aligned} + : X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

es continua; es decir, que si $x_1, x_2 \in X$ y V es una vecindad de $x_1 + x_2$, entonces existen vecindades V_1 de x_1 y V_2 de x_2 tales que $V_1 + V_2 \subseteq V$.

En forma similar, decir que la multiplicación por escalar es continua significa que la función

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\ (k, x) &\longmapsto kx \end{aligned}$$

es continua; es decir, si $k \in \mathbb{K}, x \in X$ y V es una vecindad de kx , entonces existe un número real $r > 0$ y una vecindad W de x tales que $tW \subseteq V$ siempre que $|t - k| < r$.

Definición.- 1.0.3 *Un álgebra topológica sobre el campo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) es un espacio vectorial topológico A en donde está definido un producto asociativo separadamente continuo que hace de A un álgebra sobre $\mathbb{K}$.*

Decir que la multiplicación en A es separadamente continua significa que las funciones l_x y $r_x : A \longrightarrow A$ dadas por $l_x(z) = xz$ y $r_x(z) = zx$ son funciones continuas para cada $x \in A$. Nótese que l_x es continua si dada U una vecindad de 0, entonces existe V una vecindad de 0 tal que $xV \subseteq U$ (y análogamente para r_x).

Definición.- 1.0.4 *Por otro lado, si la multiplicación del álgebra topológica dada es continua en ambas variables (conjuntamente continua), se dirá que el álgebra tiene multiplicación continua.*

Decir que la multiplicación en A es continua (conjuntamente continua) significa que dada U una vecindad de 0, entonces existe V una vecindad de 0 tal que $V^2 \subseteq U$.

En terminos de elementos, se tiene que si $x, y \in A$ y U es una vecindad de 0 en A , entonces existe V una vecindad de 0 en A tal que $(x + V)(y + V) \subseteq xy + U$

Definición.- 1.0.5 *Una norma en el $\mathbb{K}$ -espacio vectorial X ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que:*

$$1) \|x\| \geq 0 \text{ para toda } x \in X.$$

$$2) \|x\| = 0 \text{ si y sólo si } x = 0.$$

3) $\|kx\| = |k|\|x\|$ para todas $k \in \mathbb{K}$ y $x \in X$.

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todas $x, y \in X$.

La función $\|\cdot\|$ es una seminorma en X si cumple las propiedades 1, 3 y 4.

Definición.- 1.0.6 Un espacio normado es una pareja $(X, \|\cdot\|)$ en donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X . Se sobreentiende que se dota a X de la topología inducida por la norma; así, X es un espacio vectorial topológico.

Un espacio normado sobre el campo complejo $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada si es un álgebra y la norma es submultiplicativa, es decir, si cumple:

5) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todas $x, y \in A$.

Definición.- 1.0.7 Un álgebra **localmente convexa** es un álgebra topológica A cuyo espacio vectorial topológico subyacente es un espacio localmente convexo, es decir, cuya topología puede ser dada mediante una familia de seminormas $(\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda)$ definidas en A .

Nota: Si el álgebra A es localmente convexa y la familia de seminormas que definen la topología satisface que para cada $\alpha \in \Lambda$, existe una $\beta \in \Lambda$ tal que $\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta$ para todas $x, y \in A$. Entonces la topología del álgebra A hace al producto conjuntamente continuo.

Se puede dar la topología de un álgebra localmente convexa mediante una base local de vecindades del origen, es decir una familia $\mathfrak{N}(0)$ formada por los conjuntos convexos que contienen al 0 de manera que un conjunto que contiene al 0 es abierto si contiene a un elemento de $\mathfrak{N}(0)$. Los demás abiertos son trasladados $(x + U)$ de los abiertos que contienen al 0.

Así pues, $\mathfrak{N}(0)$ consiste de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\mathfrak{B}_{\alpha, \epsilon} = \{x \in A : \|x\|_\alpha < \epsilon\}.$$

Estos son conjuntos **balanceados** (es decir, $|\lambda| \leq 1$, entonces $\lambda B \subseteq B$) y **convexos** (es decir, $0 \leq \lambda \leq 1$ y $x, y \in B$, entonces $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B$) y $\mathfrak{N}(0)$ es una base local de la topología de A .

Recíprocamente, si $\mathfrak{N}(0)$ es una base local de vecindades convexas y balanceadas del 0, entonces para cada $U_\alpha \in \mathfrak{N}(0)$, se define la α -seminorma como

$$\|x\|_\alpha = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in U_\alpha\}.$$

Definición.- 1.0.8 Un conjunto es **absolutamente convexo**, si es balanceado y convexo.

Definición.- 1.0.9 Un subconjunto U de un álgebra topológica A es absorbente si para cada $x \in A$ existe un $c_x > 0$ tal que, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, con $|\lambda| \leq c_x$ se tiene que $\lambda x \in U$.

Definición.- 1.0.10 Sea E un álgebra topológica. Un subconjunto U de E se dice que es un **barril algebraico** (α -barril), si es absolutamente convexo, absorbente y multiplicativo. Se dirá que un subconjunto W es un **barril topológico** (m -barril) si es un α -barril cerrado.

Definición.- 1.0.11 Un álgebra es **localmente multiplicativamente convexa** (l.m.c.) si es un álgebra, la cual es en particular un espacio vectorial topológico con una base local que consiste de conjuntos multiplicativos y convexos.

Definición.- 1.0.12 Sea E un álgebra localmente m -convexa cuya topología está definida por una familia $\Gamma = (p_\alpha)_{\alpha \in I}$ de seminormas submultiplicativas. Se dirá que Γ es una **familia fundamental de seminormas** de la topología de E si para cualquier conjunto finito de índices $H \subset I$, existe un índice $\alpha \in I$ y un número real $\epsilon > 0$, tal que

$$p_\alpha(x) \geq \epsilon p_i(x)$$

para cualquier $i \in H$ y para cualquier $x \in E$.

Topología producto: Sea $\{X_\alpha, T_\alpha\}$ una familia arbitraria de espacios topológicos. Sea X su producto cartesiano i.e.,

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

y $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ la proyección sobre el factor correspondiente. Es posible dotar a X de la topología producto, es decir aquella que tiene como sub-base a los conjuntos de la forma

$$\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\},$$

donde cada U_α es un abierto de X_α . Es decir, la topología producto es la topología generada por los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha \in B} U_\alpha \times \prod_{\beta \in A-B} X_\beta,$$

donde B es algún subconjunto finito de A y U_α es abierto en X_α para cada $\alpha \in B$. Las intersecciones finitas de elementos de la sub-base darán lugar a los elementos de la base.

Lema 1.0.13 Sean (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $\{(Z_\alpha, \tau_\alpha); \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Si Y tiene la topología inicial dada por los morfismos $g_\alpha : Y \rightarrow Z_\alpha$. Entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua si y solo si $g_\alpha \circ f$ es continua para toda $\alpha \in I$.

Demostración: Supongamos que f es continua. Puesto que Y tiene la topología inicial dada por los morfismos g_α , entonces g_α es continuo para cada $\alpha \in I$, de esta manera $g_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in I$.

Ahora, supóngase que $g_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in I$. Sea $\mathcal{O}$ un abierto en Y , entonces se puede suponer que

$$\mathcal{O} = \bigcap_{\alpha \in H} g_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

con U_α abierto de Z_α y H un subconjunto finito de I .

Dado que U_α es un abierto de Z_α y $g_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in I$, se tiene que $(g_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$ es un abierto en X , entonces $V = \bigcap_{\alpha \in H} (g_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$ sigue siendo un abierto

en X . Sea $x \in V$, entonces $x \in (g_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$ para cada $\alpha \in H$, así $(g_\alpha \circ f)(x) \in U_\alpha$ para cada $\alpha \in H$, luego $f(x) \in g_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ para cada $\alpha \in H$, de esta manera $f(x) \in \bigcap_{\alpha \in H} (g_\alpha)^{-1}(U_\alpha)$.

Por lo tanto, $f(V) \subseteq \mathcal{O}$, lo cual implica la continuidad de f . ■

Corolario 1.0.14 Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha); \alpha \in I\}$ es una colección de espacios topológicos, y si (Y, τ_Y) también es un espacio topológico, entonces, una función $g : Y \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es continua si y solo si $\pi_\alpha \circ g$ es continua para cada $\alpha \in I$.

Nota: Si A es un álgebra topológica y U es un subconjunto balanceado, entonces U es balanceado, si y solo si para cada $x \in A$ existe $\delta_x > 0$ tal que $x \in \delta U$.

Lema 1.0.15 Sean E y F dos álgebras y $u : E \rightarrow F$ un morfismo de álgebras y B un subconjunto absolutamente convexo, absorbente y multiplicativo del álgebra F . Entonces, el conjunto $u^{-1}(B) \subset E$ tiene las mismas propiedades; en otras palabras la imagen inversa por un morfismo de álgebras de un a -barril es de nuevo un a -barril. En particular, si E y F son álgebras topológicas y dado un morfismo

$$u : E \rightarrow F$$

continuo, entonces la imagen inversa por u de un m -barril de F es un m -barril de E también.

Demostración: Sea $B \subset F$ un a -barril. Sean $x \in u^{-1}(B)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Como $x \in u^{-1}(B)$, entonces $u(x) \in B$, luego $\lambda u(x) \in B$, ya que B es balanceado, entonces $u(\lambda x) \in B$, así $\lambda x \in u^{-1}(B)$. Por lo tanto $u^{-1}(B)$ es balanceado. Sean $x, y \in u^{-1}(B)$ y $0 \leq t \leq 1$, considérese $tx + (1-t)y$, entonces se tiene

$$tu(x) + (1-t)u(y) \in B$$

por ser B convexo, entonces $u(tx + (1-t)y) \in B$, así $u(tx + (1-t)y) \in B$, de esta manera $tx + (1-t)y \in u^{-1}(B)$. Por lo tanto, $u^{-1}(B)$ es convexo.

Sea $x \in E$, entonces $u(x) \in F$, de esta forma existe $\gamma > 0$ tal que $u(x) \in \gamma B$, así $x \in u^{-1}(\gamma B)$; dado que $u^{-1}(\gamma B) = \gamma u^{-1}(B)$, entonces $x \in \gamma u^{-1}(B)$. Por lo tanto, $u^{-1}(B)$ es absorbente.

Sean $x, y \in u^{-1}(B)$, entonces $u(x) \in B$ y $u(y) \in B$, luego $u(x)u(y) \in B$, así $u(xy) \in B$, es decir $xy \in u^{-1}(B)$. Por lo tanto, $u^{-1}(B) \cdot u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B)$.

Por último si el morfismo u es continuo, entonces, la imagen inversa de un conjunto cerrado es cerrado, es decir la imagen inversa continua de un m -barril es nuevamente un m -barril. ■

Definición.- 1.0.16 Sea E cualquier conjunto. Una colección no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de E es llamado un filtro si satisface:

- 1) Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- 2) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Definición.- 1.0.17 Una subcolección $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ es un filtro base (base de filtro) para $\mathcal{F}$, si y solo si cada elemento de $\mathcal{F}$ contiene algún elemento de $\mathcal{F}_0$

Definición.- 1.0.18 Un subconjunto no vacío $\mathcal{B}$ del conjunto potencia de un conjunto E es llamado filtro base (base de filtro) de algún filtro $\mathcal{G}$ en E si satisface las siguientes condiciones:

- 1') La intersección de dos conjuntos de $\mathcal{B}$ contienen un conjunto de $\mathcal{B}$;
- 2') el conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{B}$,

Y así $\mathcal{G}$ consiste en todos aquellos subconjuntos de E que contienen un conjunto de $\mathcal{B}$. Es decir $\mathcal{G} = \{F\}$ tal que $B \subset F$, $B \in \mathcal{B}$. Por esto, tal colección es llamada un filtro-base.

Definición.- 1.0.19 El conjunto $\mathcal{U}_x$ de todas las vecindades de $x \in X$ es un filtro en X y cualquier base de vecindades de x es un filtro base para $\mathcal{U}_x$. Este filtro es llamado el **filtro de vecindades** de x .

Definición.- 1.0.20 Sea E un espacio vectorial topológico. Se dice que el filtro $\mathcal{F}$ converge a a si cualquier vecindad de a contiene algún conjunto de $\mathcal{F}$. Esta situación se denota de la siguiente manera:

$$\mathcal{F} \rightarrow a.$$

Definición.- 1.0.21 Sea (E, E') un par dual. Si A es un subconjunto de E , el subconjunto de E' que consiste de aquellos x' para los cuales

$$\sup\{| \langle x, x' \rangle | : x \in A\} \leq 1$$

es llamada la polar de A (en E') y denotada por A°

Definición.- 1.0.22 Sean E y F espacios vectoriales topológicos y sea $\mathcal{H}$ un conjunto de morfismos de E en F . Se dirá que el conjunto $\mathcal{H}$ es equicontinuo en el punto $a \in E$ si para cualquier vecindad $\mathcal{W}$ de cero en F existe una vecindad $\mathcal{V}$ de a en E tal que $f(x) - f(a) \in \mathcal{W}$ para toda $x \in \mathcal{V}$ y $f \in \mathcal{H}$. Se dice que $\mathcal{H}$ es equicontinuo en E si es equicontinuo en cualquier punto de E .

Lema 1.0.23 Un subconjunto M del dual topológico E' de un espacio vectorial topológico E es equicontinuo si y sólo si está contenido en la polar V° de una vecindad de cero en E .

Demostración: Supóngase que $M \subset E'$ es equicontinuo. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad V de cero en E tal que $| \langle x, u \rangle | \leq \epsilon$ para todo $x \in V$ y $u \in M$. Tomamos si $\epsilon = 1$, entonces se tiene

$$| \langle x, u \rangle | \leq 1 \text{ para todo } x \in V \text{ y } u \in M$$

así $M \subset V^\circ$.

Inversamente, sea $M \subset V^\circ$, donde V es vecindad de cero en E . Entonces, tomando $\mathcal{U} = \epsilon V$, se tiene que $\mathcal{U}$ es una vecindad de cero para la cual $| \langle x, u \rangle | \leq \epsilon$, para todo $f \in M$ y para todo $x \in \mathcal{U}$. Así M es equicontinuo en el cero, entonces es uniformemente equicontinuo. Por lo tanto, es equicontinuo. ■

Capítulo 2

Límites Proyectivos de Álgebras

En el transcurso de este capítulo se considerarán álgebras topológicas con producto separadamente continuo, en caso contrario se hablará de un producto continuo. Sea E un Álgebra y $\{(E_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de pares (E_α, f_α) donde, para cada índice $\alpha \in I$, E_α es un álgebra topológica y

$$f_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha$$

es un morfismo de álgebras.

Así, se puede considerar la topología inicial en E definida por los morfismos $f_\alpha; \alpha \in I$, a la cual se le llama la topología débil en E para la cual estos morfismos son continuos. Por supuesto, esta topología es compatible con la estructura de espacio vectorial del álgebra E dada, haciendo de E un espacio vectorial topológico.

En efecto una base local de E consiste de conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \tag{2.1}$$

donde los conjuntos U_{α_i} corren sobre las bases locales de las álgebras topológicas E_α , $\alpha \in I$. Más aun, el mismo espacio vectorial topológico en E es también compatible con la estructura de álgebra de E , es decir E se convierte en un álgebra topológica sobre la base de la siguiente proposición.

Proposición 2.0.24 (*Proposición 1.1, p.79 en [30]*) Sea E un álgebra dada, $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de álgebras topológicas y para cada índice $\alpha \in I$, un morfismo de álgebras

$$f_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha.$$

Entonces, la topología inicial definida en E por los morfismos f_α , $\alpha \in I$, hace de E un álgebra topológica. En particular, el álgebra E así topologizada tiene una multiplicación continua si las álgebras topológicas dadas E_α , $\alpha \in I$ la tienen.

Demostración: Por el comentario anterior, la topología bajo consideración es una topología de espacio vectorial sobre E con una base local dada por (2.1). Además, para cualquier $x \in E$, el endomorfismo

$$l_x : E \longrightarrow E \quad (2.2)$$

$$l_x(y) := xy$$

es continuo. Por el lema 1.0.13 es suficiente probar que para cualquier $\alpha \in I$ el morfismo composición

$$f_\alpha \circ l_x$$

es continuo. Sean $y \in E$, $\mathcal{O}_\alpha$ una vecindad de $f_\alpha \circ l_x(y)$, lo cual implica que $\mathcal{O}_\alpha$ es vecindad de $f_\alpha(xy) = f_\alpha(x)f_\alpha(y)$, pero el producto es continuo en cada E_α .

Así, existen $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ vecindades de $f_\alpha(x)$ y $f_\alpha(y)$ respectivamente tales que

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{W} \subset \mathcal{O}_\alpha$$

De esta manera, si $\mathcal{V} = f_\alpha^{-1}(\mathcal{W})$ por continuidad de f_α , $\mathcal{V}$ es vecindad de y . Luego,

$$(f_\alpha \circ l_x)(\mathcal{V}) = (f_\alpha \circ l_x)(f_\alpha^{-1}(\mathcal{W})) = f_\alpha(x \cdot f_\alpha^{-1}(\mathcal{W})) \subset f_\alpha(x) \cdot \mathcal{W} \subset \mathcal{O}_\alpha$$

Entonces, $f_\alpha \circ l_x$ es continuo para todo α . Por lo tanto l_x es continuo. ■

Ahora, si las álgebras topológicas E_α , $\alpha \in I$, son localmente convexas, se concluye por (2.1) que la topología inicial en E definida por los morfismos f_α , $\alpha \in I$, hace del álgebra E un álgebra localmente convexa también.

Se sigue de la proposición 2.0.24 que el álgebra localmente convexa E así definida tiene una multiplicación continua si las álgebras E_α la tienen.

Con respecto a esto, la misma proposición implica que cualquier subálgebra de un álgebra topológica dada con multiplicación continua es en la topología relativa (i.e., la “topología de imagen inversa” definida por la inyección (inclusión)) un álgebra topológica del mismo tipo que la dada.

Similarmente se concluye que cualquier subálgebra de un álgebra localmente convexa es, en

la topología relativa, un álgebra topológica del mismo tipo que la original.
Por otro lado, se obtiene que:

La topología inicial definida en un álgebra E dada por los morfismos f_α , $\alpha \in I$, como arriba, en caso de que las álgebras E_α , $\alpha \in I$ sean l.m.c. hace de E una álgebra l.m.c. también.

Esto se sigue de la proposición 2.0.24 y el lema 1.0.15.

De hecho, se prueba que la topología de imagen inversa, correspondiente al morfismo de álgebra dado

$$h : E \longrightarrow F$$

con F siendo un álgebra l.m.c., todavía define a E como un álgebra l.m.c.. En particular se concluye de nuevo que cualquier subálgebra de un álgebra l.m.c. es, en la topología relativa, un álgebra topológica del mismo tipo.

Sea E un álgebra topológica dotada con la topología inicial definida por la familia $\{(E_\alpha, f_\alpha)\}$, $\alpha \in I$, como antes, donde la topología de cada una de las álgebras E_α , $\alpha \in I$ es de Hausdorff. Entonces la topología de E es de Hausdorff si y sólo si para cualquier elemento $x \neq 0$ en E , existe un índice $\alpha \in I$ tal que $f_\alpha(x) \neq 0$ en E_α .

En efecto, si E es de Hausdorff y $x \neq 0$ en E , entonces existe una vecindad U de cero en E con $x \notin U$, entonces por (1.1)

$$x \notin \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subseteq U,$$

con U_{α_i} un elemento de la base local de E_{α_i} . Así

$$x \notin f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \text{ para algún } \alpha_i \in I,$$

luego

$$f_{\alpha_i}(x) \notin U_{\alpha_i} \text{ para algún } \alpha_i \in I,$$

entonces

$$f_{\alpha_i}(x) \neq 0 \text{ en } E_{\alpha_i}.$$

Inversamente, sea $x \neq 0$, entonces $f_\alpha(x) \neq 0$ para algún $\alpha \in I$, entonces existe U_α vecindad de cero en E_α , tal que $f_\alpha(x) \notin U_\alpha$, pues E_α es de Hausdorff. Entonces

$$x \notin f_\alpha^{-1}(U_\alpha).$$

Mientras que el último conjunto pertenece a la base local de E , lo cual es lo deseado. En particular en el caso que $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia de álgebras topológicas y se considera el respectivo producto cartesiano.

$$E = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha \quad (2.3)$$

definido por los conjuntos E_α , $\alpha \in I$. Así, con las operaciones coordenada a coordenada, el conjunto (2.3) se convierte en un álgebra, de modo que los respectivos “morfismos canónicos proyección”

$$\pi_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha, \alpha \in I$$

son usados para definir la topología inicial en E , la cual da, por definición, la “Topología de producto cartesiano” en E definida por los espacios topológicos E_α , $\alpha \in I$.

Por otro lado, por definición de la operación en el álgebra E , se ve fácilmente que los morfismos proyección π_α , $\alpha \in I$, son morfismos de álgebra de las respectivas álgebras. Así, se concluye que E dotado con la topología de producto cartesiano se convierte en un álgebra topológica, la cual tiene multiplicación continua si este es el caso para cada una de las álgebras topológicas dadas E_α , $\alpha \in I$.

En este sentido, se tiene una base local para el álgebra topológica E así definida.

$$\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \quad (2.4)$$

donde los conjuntos U_{α_i} corren sobre las bases locales de las álgebras topológicas E_α , $\alpha \in I$. Equivalentemente, se consideran conjuntos de la forma.

$$\prod_{\alpha \in I} U_\alpha, \text{ con } U_\alpha = E_\alpha$$

excepto para un número finito de índices $\alpha \in I$, para los cuales los respectivos conjuntos U_α están variando como en (2.4).

Similarmente se sigue de la discusión precedente que el producto cartesiano de álgebras localmente convexas (respectivamente con multiplicación continua) es álgebra topológica del mismo tipo que las álgebras factores.

En particular esto es válido para álgebras l.m.c. como se sigue del siguiente:

Lema 2.0.25 *Sea $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de álgebras l.m.c., entonces el álgebra producto cartesiano*

$$E = \prod_{\alpha \in I} E_{\alpha}$$

dotada con la topología de producto cartesiano es un álgebra l.m.c. Además, cualquier subálgebra de E es un álgebra l.m.c.

Demostración: Por el comentario anterior, una base local para la topología producto está dada por (2.4); de esta manera, basta con probar que los elementos de (2.4) son multiplicativos y convexos, pero por 1.0.15 se tiene que $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ es un m -barril ya que cada U_{α_i} lo es. Por otro lado se sabe que la intersección finita de m -barriles es un m -barril, así la base local para la topología producto consta de m -barriles. Por lo tanto, el álgebra producto cartesiano con la topología producto es un álgebra l.m.c.

Por otro lado, si A es una subálgebra de E , entonces si A es dotada con la topología inicial dada por el morfismo inclusión, se tiene que A es un álgebra localmente m -convexa. En efecto, sea U una vecindad de cero, entonces

$$U = V \cap A,$$

donde V es una vecindad de cero en E . Así, si $x, y \in U$, entonces $x, y \in V$ y $x, y \in A$. De esta manera, como V es submultiplicativa se tiene que $xy \in V$ y ya que A es una subálgebra, se sigue que $xy \in A$. Por lo tanto $xy \in U$.

Para la convexidad, sean $x, y \in U$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda + \mu = 1$, entonces

$$\lambda x + \mu y \in V \text{ y } \lambda x + \mu y \in A.$$

Por lo tanto $\lambda x + \mu y \in U$. Con lo cual se concluye que U es un conjunto multiplicativo y convexo. ■

Por otro lado, el álgebra topológica dada por el producto cartesiano es de Hausdorff si y sólo si cada uno de los factores lo es; aquí se aplica un argumento similar que para el producto cartesiano de espacios.

Finalmente, un álgebra topológica producto cartesiano es completa si y sólo si cada uno de los factores es completa. Esto es consecuencia del caso mas general del producto cartesiano de espacios completos.

2.0.1. Sistemas Proyectivos de Álgebras Topológicas

Definición.- 2.0.26 Dado un conjunto parcialmente ordenado I , un **sistema inverso de álgebras topológicas** es un par ordenado $((E_{\alpha})_{\alpha \in I}, (f_{\alpha\beta})_{\beta \geq \alpha})$, donde

$$(E_\alpha)_{\alpha \in I}$$

es una familia indexada de álgebras topológicas y

$$(f_{\alpha\beta} : E_\beta \rightarrow E_\alpha)_{\beta \geq \alpha}$$

es una familia indexada de morfismos continuos para los cuales $f_{\alpha\alpha} = id_{E_\alpha}$ para toda $\alpha \in I$ y tal que el siguiente diagrama conmuta siempre que $\gamma \geq \beta \geq \alpha$

$$\begin{array}{ccc} E_\gamma & \xrightarrow{f_{\alpha\gamma}} & E_\alpha \\ & \searrow f_{\beta\gamma} & \nearrow f_{\alpha\beta} \\ & E_\beta & \end{array} \quad (2.5)$$

Definición.- 2.0.27 El **límite proyectivo (límite inverso)** del sistema proyectivo $((E_\alpha)_{\alpha \in I}, (f_{\alpha\beta})_{\beta \geq \alpha})$ es un álgebra $\varprojlim E_\alpha$ y una familia de proyecciones $(f_\alpha : \varprojlim E_\alpha \rightarrow E_\alpha)_{\alpha \in I}$ tales que

- $f_{\alpha\beta} \circ f_\beta = f_\alpha$
- Para cualquier álgebra topológica A y morfismos $g_\alpha : A \rightarrow E_\alpha$ que satisfacen $f_{\alpha\beta} \circ g_\beta = g_\alpha$ para todo $\alpha \leq \beta$ existe un único morfismo $\theta : A \rightarrow \varprojlim E_i$ que hace conmutar al siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim E_\alpha & \xleftarrow{\theta} & A \\ & \searrow f_\alpha & \nearrow g_\alpha \\ & E_\alpha & \\ & \searrow f_\beta & \nearrow g_\beta \\ & E_\beta & \end{array} \quad (2.6)$$

Si se considera el álgebra producto cartesiano $F = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$.

En la categoría de las álgebras topológicas, el límite proyectivo de cualquier sistema proyectivo $((E_\alpha)_{\alpha \in I}, (f_{\alpha\beta})_{\beta \geq \alpha})$ de álgebras topológicas existe. Más aun está dado por

$$\varprojlim E_\alpha = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in F : x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta), \text{ si } \alpha \leq \beta \text{ en } I\} \quad (2.7)$$

Así, por definición de las operaciones de álgebra en F y la hipótesis de los morfismos $f_{\alpha\beta}$, $\varprojlim E_\alpha$ es una sub-álgebra de F .

En efecto sean $x, y \in \varprojlim E_\alpha$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\alpha, \beta \in I$, tales que $\alpha \leq \beta$, considérese lo siguiente

- 1) $(x + y)_\alpha = x_\alpha + y_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta) + f_{\alpha\beta}(y_\beta) = f_{\alpha\beta}(x_\beta + y_\beta) = f_{\alpha\beta}((x + y)_\beta)$.
- 2) $(\lambda x)_\alpha = \lambda x_\alpha = \lambda f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\beta}(\lambda x_\beta) = f_{\alpha\beta}((\lambda x)_\beta)$.
- 3) $(xy)_\alpha = x_\alpha y_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta) f_{\alpha\beta}(y_\beta) = f_{\alpha\beta}(x_\beta y_\beta) = f_{\alpha\beta}((xy)_\beta)$.

Esto hace de $\varprojlim E_\alpha$ una subálgebra del álgebra producto cartesiano, la cual puede ser la trivial. Con respecto a esto, si las álgebras $E_\alpha, \alpha \in I$ tienen elementos identidad, por decir $1_\alpha, \alpha \in I$ y el morfismo de álgebra $f_{\alpha\beta}$, con $\alpha \leq \beta$ preservan la identidad (la cual se supone), la identidad $1 = (1_\alpha)$ en F pertenece también a la sub-álgebra E de F definida por (2.7).

El álgebra $\varprojlim E_\alpha$ así definida es el álgebra límite proyectivo del sistema proyectivo dado $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ y usualmente es denotada por

$$E = \varprojlim (E_\alpha, f_{\alpha\beta}).$$

Por otro lado, dado un sistema proyectivo de álgebras, se define una familia $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ de morfismos dados por la siguiente relación

$$f_\alpha = \pi_\alpha|_E : E \rightarrow E_\alpha, \quad (2.8)$$

para cualquier $\alpha \in I$, donde el morfismo π_α es el morfismo proyección canónica.

La respectiva álgebra límite proyectivo $\varprojlim E_\alpha$ está dotada con la topología inicial definida por los morfismos $f_\alpha, \alpha \in I$. El álgebra topológica así definida es llamada el álgebra límite proyectivo o inverso del sistema proyectivo dado.

Por lo anterior y el lema 2.0.25 se concluye que:

Un límite proyectivo de álgebras localmente m -convexas es un álgebra del mismo tipo (Pues es una subálgebra de un álgebra $l.m.c.$)

Por supuesto si las álgebras $E_\alpha, \alpha \in I$ son normadas, entonces la respectiva álgebra límite proyectivo es un álgebra $l.m.c.$ Más aun, si las álgebras $E_\alpha, \alpha \in I$ son álgebras de Banach como será el caso en la sección siguiente, entonces el álgebra límite proyectivo es un álgebra $l.m.c.$

Lo importante aquí es que el recíproco es verdad; es decir las álgebras $l.m.c.$ parecen ser sólo las de este tipo de (o al menos subálgebra apropiada de ese tipo, si no son completas). Esto es en efecto un resultado fundamental de toda la teoría de álgebras $l.m.c.$

Finalmente se resaltaré que un álgebra topológica límite proyectivo $E = \varprojlim (E_\alpha, f_{\alpha,\beta})$ es de Hausdorff si este es el caso para cada una de las álgebras $E_\alpha, \alpha \in I$ (pues es una subálgebra de $F = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$).

Se concluye esta sección con el siguiente.

Lema 2.0.28 *Cualquier álgebra topológica límite proyectivo $E = \varprojlim (E_\alpha, f_{\alpha,\beta})$ es una subálgebra cerrada del álgebra topológica producto cartesiano $F = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$. En particular, E es completa, si este es el caso para cada una de las álgebras topológicas dadas E_α , $\alpha \in I$.*

Demostración: El hecho de ser subálgebra se ha demostrado anteriormente. Para ver que es cerrada, sea (x^n) sucesión de elementos de E tales que $(x^n) \rightarrow x$, así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$$

entonces, por la continuidad de f_α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_\alpha^n = x_\alpha$$

luego

$$x_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_\alpha^n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha\beta}(x_\beta^n) = f_{\alpha\beta}(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_\beta^n)) = f_{\alpha\beta}(x_\beta).$$

Por lo tanto, el álgebra E es una subálgebra cerrada del álgebra producto cartesiano F . ■

2.0.2. Representación de Algebras localmente multiplicativamente convexa como límite proyectivo (Descomposición de Arens-Michael)

El objetivo principal en la siguiente discusión es dar una representación de cualquier álgebra *l.m.c.* completa E como un límite proyectivo de álgebras de Banach.

Como se acaba de mencionar esta representación constituye una conclusión fundamental de toda la teoría de las álgebras *l.m.c.*

A través de esta herramienta, preguntas básicas sobre un álgebra *l.m.c.* pueden ser en muchos casos reducidas a sus análogas para los respectivos factores que son álgebras de Banach, donde tal vez ya se sabe la respuesta.

Se comienza con suponer que se da un álgebra E *l.m.c.* junto con una base local $\mathfrak{N} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de E que consiste de m -barriles.

Ahora se consideran las respectivas funcionales de Minkowski de los miembros de $\mathfrak{N}$; de esta manera se obtiene una familia $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in I}$ de seminormas submultiplicativas (continuas) que definen la topología de E .

Por otro lado, para cualquier índice $\alpha \in I$, el par (E, p_α) es un álgebra seminormada, tal que se puede definir la respectiva álgebra normada (cociente) E_α .

$$E_\alpha = E/p_\alpha^{-1}(0) \quad (2.9)$$

Donde $p_\alpha^{-1}(0) = \ker(p_\alpha) = \{x \in E : p_\alpha(x) = 0\} \equiv N_\alpha$ el cual es un ideal bilateral cerrado (del álgebra topológica) E .

Cuya norma está dada de la siguiente manera

$$\|x_\alpha\|_\alpha = p_\alpha(x),$$

donde $x_\alpha = x + \ker p_\alpha$.

Entonces, tomando la completación de (2.9) se obtiene para cualquier $\alpha \in I$ la correspondiente álgebra de Banach

$$\tilde{E}_\alpha = \widetilde{(E/p_\alpha^{-1}(0))}.$$

Además, se considera el respectivo morfismo (canónico) cociente

$$\rho_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha := E/N_\alpha, \alpha \in I,$$

el cual es un morfismo suprayectivo de álgebras y también $\tilde{\rho}_\alpha$ el morfismo definido por

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho_\alpha} & E_\alpha \\ & \searrow i_\alpha \circ \rho_\alpha = \tilde{\rho}_\alpha & \downarrow i_\alpha \\ & & \tilde{E}_\alpha \end{array} \quad (2.10)$$

el cual es, de nuevo, un morfismo de álgebras del álgebra dada E en el álgebra de Banach E_α , $\alpha \in I$.

Ahora se define un orden parcial en el conjunto de índices I por la siguiente relación:

Si α y β son elementos de I , se dice que

$$\alpha \leq \beta \quad \text{si} \quad U_\beta \subseteq U_\alpha;$$

equivalentemente, si

$$p_\alpha(x) \leq p_\beta(x) \text{ para todo } x \in E$$

Entonces se concluye que I , dotado del orden parcial anterior, se convierte en un conjunto dirigido, pues basta considerar $U_\gamma = U_\alpha \cap U_\beta$, si $\alpha, \beta \in I$.

Nota: Un conjunto es dirigido si para todo $\alpha, \beta \in I$ existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Así para cualquier $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \leq \beta$, se obtiene que $p_\alpha(x) \leq p_\beta(x)$ para cada $x \in E$.

Luego

$$N_\beta \equiv \ker(p_\beta) \subseteq \ker p_\alpha \equiv N_\alpha$$

por lo tanto la relación

$$f_{\alpha,\beta} : x + N_\beta = [x]_\beta \longmapsto f_{\alpha,\beta}(x + N_\beta) : x + N_\alpha = [x]_\alpha$$

con $x \in E$ define un morfismo de álgebra suprayectivo

$$f_{\alpha,\beta} : E_\beta \longrightarrow E_\alpha.$$

Se concluye que la familia $\{(E_\alpha, f_{\alpha,\beta})\}$, con $\alpha \in I$, define un sistema proyectivo de álgebras normadas, correspondiente a la base local dada $\mathfrak{N}$ de E . Además, considerando la extensión continua

$$\overline{f_{\alpha,\beta}} : \tilde{E}_\beta \rightarrow \tilde{E}_\alpha$$

del morfismo $f_{\alpha,\beta}$, se obtiene un sistema proyectivo de álgebras de Banach

$$\{(\tilde{E}_\alpha, \overline{f_{\alpha,\beta}})\} \quad \alpha \in I.$$

De la discusión anterior, se sigue que el álgebra

$$\varprojlim E_\alpha$$

es un álgebra *l.m.c.*, así como el álgebra *l.m.c.* completa

$$\varprojlim \tilde{E}_\alpha.$$

El objetivo principal en lo que sigue es encontrar la conexión entre las dos álgebras precedentes y el álgebra dada E .

Lema 2.0.29 *Sea $E = \varprojlim (E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un límite proyectivo de álgebras topológicas. Entonces una base local de E está dada por la familia*

$$\{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \mathfrak{N}_\alpha \quad \alpha \in I\}$$

donde $\mathfrak{N}_\alpha$ es una base local del álgebra E_α con $\alpha \in I$.

Demostración: Por (2.4) y (2.8) se obtiene que una base local de E es de la forma

$$\bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$$

donde los conjuntos U_{α_i} corren sobre las bases locales de las álgebras E_{α} , es decir $\mathfrak{N}_{\alpha}$, $\alpha \in I$. Por otro lado, ya que I es un conjunto dirigido existe un índice $\alpha \in I$ tal que $\alpha_i \leq \alpha$, con $i = 1, 2, \dots, n$ entonces se obtiene

$$f_{\alpha_i} = f_{\alpha_i \alpha} \circ f_{\alpha},$$

luego, se tiene

$$\bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha}^{-1}(f_{\alpha_i \alpha}^{-1}(U_{\alpha_i})) = f_{\alpha}^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i \alpha}^{-1}(U_{\alpha_i})\right) = f_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha})$$

donde el conjunto $V_{\alpha} = \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i \alpha}^{-1}(U_{\alpha_i})$ es una vecindad de cero en E_{α} . Así, existe $U_{\alpha} \in \mathfrak{N}_{\alpha}$, con $U_{\alpha} \subseteq V_{\alpha}$ lo cual prueba la afirmación. ■

Ahora, debido al lema anterior, también se tiene el siguiente resultado el cual se aplicará en el siguiente teorema

Lema 2.0.30 *Sea $E = \varprojlim (E_{\alpha}, f_{\alpha\beta})$ un álgebra límite proyectivo como en el lema anterior y B cualquier subespacio vectorial de E . Entonces, se tiene*

$$\overline{B} = \bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1}(\overline{f_{\alpha}(B)}) = \varprojlim \overline{f_{\alpha}(B)} \quad (2.11)$$

donde los morfismos $f_{\alpha}, \alpha \in I$, están dados por (2.8). En particular si B es cerrado se obtiene

$$B = \varprojlim f_{\alpha}(B) = \varprojlim \overline{f_{\alpha}(B)} \quad (2.12)$$

Demostración: Obsérvese que la familia

$$\{(f_{\alpha}(B), f_{\alpha\beta}|_{f_{\beta}(B)})\}, \quad \alpha \in I \quad (2.13)$$

define un sistema proyectivo de espacios vectoriales topológicos, para esto se tiene que ver que satisface lo siguiente

$$1) \quad f_{\alpha\beta}|_{f_{\beta}(B)} : f_{\beta}(B) \longrightarrow f_{\alpha}(B)$$

- 2) $f_{\alpha\alpha}|_{f_\alpha(B)} = id_{f_\alpha(B)}$
- 3) $f_{\alpha\gamma}|_{f_\gamma(B)} = f_{\alpha\beta}|_{f_\beta(B)} \circ f_{\beta\gamma}|_{f_\gamma(B)}$
- 4) $f_{\alpha\beta}|_{f_\beta(B)}$ es continuo.

En efecto,

- 1) $f_{\alpha\beta}(f_\beta(b)) = f_\alpha(b)$
- 2) $f_{\alpha\alpha}|_{f_\alpha(B)}(f_\alpha(b)) = f_\alpha(b) = id_{f_\alpha(B)}$
- 3) $f_{\alpha\beta}|_{f_\beta(B)} \circ f_{\beta\gamma}|_{f_\gamma(B)}(f_\gamma(b)) = f_{\alpha\beta}|_{f_\beta(B)}(f_\beta(b)) = f_\alpha(b)$
- 4) $f_{\alpha\beta}|_{f_\beta(B)}$ es continuo ya que $f_{\alpha\beta}$ lo es.

Por lo tanto, $\{(f_\alpha(B), f_{\alpha\beta}|_{f_\beta(B)})\}$ es un sistema proyectivo de espacios vectoriales topológicos. Por otro lado, ya que

$$f_{\alpha\beta}(\overline{f_\beta(B)}) \subseteq \overline{f_{\alpha\beta}(f_\beta(B))} = \overline{f_\alpha(B)} \text{ para toda } \alpha \leq \beta$$

se obtiene que la familia

$$\{(\overline{f_\alpha(B)}, f_{\alpha\beta}|_{\overline{f_\beta(B)}})\}, \quad \alpha \in I \quad (2.14)$$

define también un sistema proyectivo de espacios vectoriales topológicos.

Ahora la segunda igualdad de (2.11) es consecuencia directa de la misma definición. Para la continuidad de una función se conoce la siguiente caracterización $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si para cualquier $A \subset X$ se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ si y sólo si para cualquier $B \subset Y$ se tiene $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Se sabe que $B \subseteq \overline{f_\alpha^{-1}(f_\alpha(B))}$ para todo $\alpha \in I$.

Entonces $\overline{B} \subset \overline{f_\alpha^{-1}(f_\alpha(B))}$, de esta manera, por la equivalencia arriba mencionada se tiene que por la continuidad de f_α

$$\overline{f_\alpha^{-1}(Y)} \subset f_\alpha^{-1}(\overline{Y})$$

así, si

$$Y = f_\alpha(B)$$

se tiene que

$$\overline{f_\alpha^{-1}(f_\alpha(B))} \subset f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$$

entonces

$$\overline{B} \subset f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)}) \text{ para todo } \alpha \in I$$

por lo tanto

$$\overline{B} \subset \bigcap_{\alpha} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)}).$$

Sea $x \in \bigcap_{\alpha} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$, entonces $x \in f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$ para toda $\alpha \in I$, así $f_\alpha(x) = x_\alpha \in \overline{f_\alpha(B)}$, para todo $\alpha \in I$. Entonces para cualquier (abierto básico) vecindad U_α de x_α en E_α (i.e., un elemento del sistema fundamental de vecindades abiertas del punto en cuestión), se tiene que

$$U_\alpha \cap f_\alpha(B) \neq \emptyset, \quad \text{así} \quad f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap B \neq \emptyset$$

donde $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es una vecindad abierta básica de $x \in E$ (por el lema 2.0.29) lo cual prueba la afirmación, es decir $\overline{B} = \bigcap_{\alpha} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$. Por otro lado, se tiene que

$$B \subseteq \bigcap_{\alpha} f_\alpha^{-1}(f_\alpha(B)) \subseteq \bigcap_{\alpha} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$$

entonces, por lo anterior, (2.13) y (2.14) se tiene que

$$B \subseteq \varprojlim f_\alpha(B) = \varprojlim \overline{f_\alpha(B)} = \overline{B} = B. \quad \blacksquare$$

Ahora se presenta el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.0.31 (Teorema 3.1, p.88 en [30]) *Sea E un álgebra l.m.c. (de Hausdorff) y $\mathfrak{N} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una base local de E que consiste de m -barriles. Más aun, se denota por $\tilde{E}$ la completación de E y sea E_α (respectivamente $\tilde{E}_\alpha$), $\alpha \in I$ las correspondientes álgebras normadas (respectivamente de Banach)*

$$E_\alpha = E/p_\alpha^{-1}(0) \quad (\widetilde{E}_\alpha = \widetilde{E/p_\alpha^{-1}(0)}).$$

Entonces se tienen las siguientes relaciones

$$E \subseteq \varprojlim E_\alpha \subseteq \varprojlim \widetilde{E}_\alpha = \tilde{E}$$

salvo un isomorfismo de álgebras topológicas.

En particular, para cualquier álgebra l.m.c. completa E con $\mathfrak{N}$ como antes, se tiene la relación

$$E = \varprojlim E_\alpha = \varprojlim \widetilde{E}_\alpha$$

salvo un isomorfismo de álgebras topológicas.

Demostración: Teniendo en cuenta las álgebras l.m.c.

$$\varprojlim E_\alpha \quad y \quad \varprojlim \widetilde{E}_\alpha$$

se tiene el siguiente morfismo

$$\phi : E \longrightarrow \varprojlim E_\alpha : x \mapsto \phi(x) := (\rho_\alpha(x))_{\alpha \in \Lambda},$$

donde se establece que

$$\rho_\alpha(x) = x + \ker(p_\alpha) = [x]_\alpha, \quad \alpha \in I$$

así, $\phi(x), x \in E$, es un elemento de $\varprojlim E_\alpha$ pues

$$\rho_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ \rho_\beta$$

y entonces $\rho_\alpha(x) = (f_{\alpha\beta} \circ \rho_\beta)(x) = f_{\alpha\beta}(\rho_\beta(x))$. Así, el morfismo está bien definido, ahora es sencillo ver que ϕ define un morfismo entre las respectivas álgebras. Entonces se probará que ϕ define de hecho un isomorfismo algebraico (inyectivo).

En efecto, si $\phi(x) = 0$, entonces $[x]_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in I$ es decir $x \in \ker(p_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$, entonces

$$p_\alpha(x) = 0 \text{ para todo } \alpha \in I$$

por lo tanto

$$x \in p_\alpha^{-1}(0) \text{ para todo } \alpha \in I$$

así, ya que E es de Hausdorff se tiene que $x = 0$. Entonces, el morfismo ϕ es uno a uno; además se obtiene

$$f_\alpha \circ \phi = \rho_\alpha, \quad \alpha \in I$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \varprojlim E_\alpha \\ & \searrow \rho_\alpha & \downarrow f_\alpha \\ & & E_\alpha \end{array} \quad (2.15)$$

lo cual implica que ϕ es continuo, pues ρ_α es continuo para todo $\alpha \in I$, es decir

$$f_\alpha \circ \phi \text{ es continuo para todo } \alpha \in I$$

y dado que $\varprojlim E_\alpha$ tiene la topología inicial dada por los morfismos f_α , entonces por el teorema 1.0.13 se sigue que ϕ es continuo.

Además, el morfismo ϕ^{-1} es continuo, pues basta ver la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim E_\alpha & \xrightarrow{\phi^{-1}} & E \\ & \searrow f_\alpha & \downarrow \rho_\alpha \\ & & E_\alpha \end{array} \quad (2.16)$$

y observar que E tiene la topología inicial dada por los morfismos ρ_α . Por el teorema 1.0.13 se sigue que el morfismo ϕ^{-1} es continuo.

Finalmente, se ha probado que ϕ define un isomorfismo de álgebras topológicas del álgebra dada E en $\varprojlim E_\alpha$.

Por otro lado se tiene

$$f_\alpha(\phi(E)) = \rho_\alpha(E) = E_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I$$

así, por el lema 2.0.30

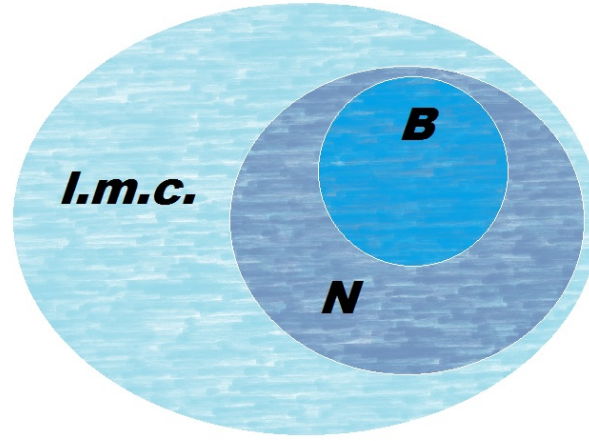
$$E \subseteq \overline{E} = \overline{\phi(E)} = \varprojlim \overline{f_\alpha(\phi(E))} = \varprojlim \overline{E_\alpha} = \varprojlim \tilde{E}_\alpha.$$

Así, ya que el último espacio es completo, finalmente se concluye que

$$\tilde{E} = \overline{E} = \varprojlim \overline{E_\alpha} = \overline{\varprojlim E_\alpha} = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$$

salvo un isomorfismo de álgebras topológicas. ■

El siguiente diagrama ilustra las álgebras involucradas en el teorema anterior



- l.m.c.-Álgebras localmente multiplicativamente convexas
- N-Álgebras normadas
- B-Álgebras de Banach

Se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.0.32 *Cualquier álgebra (de Hausdorff) l.m.c. es, salvo un isomorfismo de álgebras topológicas, una subálgebra de un producto cartesiano de álgebras de Banach. Estas proporcionan de hecho, un sistema proyectivo de álgebras de Banach, tal que el álgebra dada es también una subálgebra densa en la respectiva álgebra límite proyectivo.*

Definición.- 2.0.33 *Un álgebra topológica es de Fréchet si su espacio vectorial topológico subyacente es metrizable y completo.*

En particular, si E tiene una base local numerable $\mathfrak{N} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (es claro que se puede asumir la base local $\mathfrak{N}$, la cual consiste de una sucesión decreciente de subconjuntos de E) i.e., E es una álgebra *l.m.c.* metrizable, se obtiene el siguiente corolario del teorema 2.0.31.

Corolario 2.0.34 *Cualquier álgebra de Fréchet l.m.c. es (salvo un isomorfismo de álgebras topológicas) el límite proyectivo de una “sucesión decreciente” de álgebras de Banach.*

NOTA: La sucesión E_n , $n \in \mathbb{N}$ de álgebras de Banach consideradas en el corolario anterior es tal que para todo $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene un morfismo (continuo) de álgebra

$$\bar{f}_{mn} : \tilde{E}_n \longrightarrow \tilde{E}_m .$$

el cual por lo general no es uno a uno; es por esta razón que aparecen las comillas. Se destacará para uso posterior la situación descrita por el teorema anterior a través de la siguiente definición.

Definición.- 2.0.35 *Sea E un álgebra completa l.m.c. y una base local $\mathfrak{N} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ que consiste de m -barriles. Se llamará una descomposición de Arens-Michael de E , correspondiente a la particular base local $\mathfrak{N}$ bajo consideración a una expresión de la forma*

$$E = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$$

válida para el teorema anterior salvo un isomorfismo de álgebras topológicas.

Además, por abuso de terminología, se hará referencia a una descomposición de Arens-Michael de cualquier álgebra *l.m.c.* E dada, no necesariamente completa.

2.0.3. Aplicaciones de la descomposición Arens-Michael

Sobre la base del teorema 2.0.31 de la sección anterior se logra obtener varios resultados en la teoría clásica de álgebras de Banach para clases más generales de álgebras topológicas representadas como límite proyectivo de álgebras de Banach. Entonces, por este procedimiento las propiedades deseadas de las álgebras bajo discusión son reducidas de hecho, a la cuestión análoga para álgebras de Banach, donde puede ser conocido o incluso tener una respuesta simple. Como una básica aplicación de esta técnica, considérese el siguiente teorema 2.0.41

En lo que sigue se aplica repetidamente la notación y la terminología del teorema 2.0.31. Más aun, al referirse a la base local $\mathfrak{N}$ de un álgebra *l.m.c.* E dada, siempre se entenderá que $\mathfrak{N}$ consiste de m -barriles.

Definición.- 2.0.36 Dada un álgebra E sin unidad, se dice que un elemento $x \in E$ es casi regular derecho (respectivamente izquierdo) o **casi invertible derecho**, si se tiene la relación

$$x + y - xy = 0 \quad (y + x - yx = 0) \quad (2.17)$$

para algún elemento $y \in E$; el elemento $x \in E$ es casi invertible si es casi invertible izquierdo y derecho. Tal elemento $y \in E$, si existe, es necesariamente único (es el casi inverso o adverso de x). Así, la operación binaria, la cual está definida en E por

$$x \circ y := x + y - xy \quad (2.18)$$

con $x, y \in E$, es usualmente llamado la operación círculo (o casi multiplicación) en E .

Observación 2.0.37 Un elemento $x \in E$ es casi invertible, si y solo si $x - e$ es invertible.

Observación 2.0.38 Un elemento $x \in E$ es casi invertible, si y solo si λx es casi invertible, para $\lambda \neq 0$.

Definición.- 2.0.39 Sea E un álgebra con un elemento identidad y x cualquier elemento de E . Entonces, el espectro de x es

$$Sp_E(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ no es invertible}\}$$

es decir, el conjunto de todos los números complejos λ tales que $\lambda e - x$ no es invertible. El complemento de $Sp_E(x)$ es el conjunto **resolvente** de x ; está formado por todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los que $(\lambda e - x)^{-1}$ existe.

Si el álgebra E no tiene elemento identidad, se define el espectro de la siguiente manera

$$Sp_E(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{\lambda}x \in E \text{ no es casi invertible}\} \cup \{0\}.$$

El **radio espectral** de x es el número $r_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_E(x)\}$. Es el radio del menor disco circular en $\mathbb{C}$ con centro en cero, que contiene a $Sp_E(x)$.

Observación 2.0.40 De la observación 2.0.37 y 2.0.38, se tiene que las definiciones anteriores de radio espectral son equivalentes en presencia de un elemento identidad.

Así se tiene el siguiente

Teorema 2.0.41 (Teorema 4.1, p.91 en [30]) Sea E un álgebra l.m.c. completa y $E = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$ una descomposición de Arens-Michael de E correspondiente a la base local $\mathfrak{N} = (\overline{U}_\alpha)_{\alpha \in I}$ de E . Entonces se concluye lo siguiente:

- 1) Un elemento $x \in E$ es casi regular si y sólo si $[x]_\alpha$ es casi regular en $\tilde{E}_\alpha$, para cualquier $\alpha \in I$.
- 2) El álgebra E tiene un elemento identidad si y sólo si es cierto para cada una de las álgebras $\tilde{E}_\alpha$, $\alpha \in I$.
- 3) Si E tiene identidad, entonces un elemento $x \in E$ es invertible si y sólo si $[x]_\alpha$ es invertible en $\tilde{E}_\alpha$, para cualquier $\alpha \in I$.

Demostración: Como se sigue de la misma definición y de la discusión en la sección previa

- 1) Supóngase que $x = ([x]_\alpha)_{\alpha \in I} \in E = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$, es tal que x es casi regular. Entonces

$$f_\alpha(x) = [x]_\alpha$$

es un elemento casi regular de $\tilde{E}_\alpha$. En efecto, como x es casi regular, existe $y \in E$ tal que $x \circ y = e$, así $f_\alpha(x \circ y) = f_\alpha(x) \circ f_\alpha(y) = f(e) = e$. Por lo tanto, el elemento $[x]_\alpha$ es casi regular, donde el casi inverso está dado por $f_\alpha(y) = [y]_\alpha$.

Recíprocamente, supóngase que $x = ([x]_\alpha)_{\alpha \in I} \in E = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$, con $[x]_\alpha$ un elemento casi regular de $\tilde{E}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Por lo tanto, existe un elemento $y = (y_\alpha) \in \prod_\alpha \tilde{E}_\alpha$ tal que

$$[x]_\alpha \circ y_\alpha = y_\alpha \circ [x]_\alpha = 0 \text{ para todo } \alpha \in I$$

además, para cualquier $\alpha \leq \beta$ en I , se tiene la relación

$$[x]_\alpha \circ \bar{f}_{\alpha\beta}(y_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}([x]_\beta) \circ \bar{f}_{\alpha\beta}(y_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}([x]_\beta \circ y_\beta) = 0$$

mientras una relación similar es también válida para la multiplicación por la izquierda para $\bar{f}_{\alpha\beta}(y_\beta)$.

Así, se obtiene

$$\bar{f}_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha \text{ para todo } \alpha \leq \beta \text{ en } I$$

entonces $y = (y_\alpha) \in \varprojlim \tilde{E}_\alpha = E$, por lo tanto, se concluye la relación

$$x \circ y = y \circ x = 0$$

- 2) Ahora, supóngase que $e = (e_\alpha) \in \prod_\alpha \tilde{E}_\alpha$, con e_α el elemento identidad en $\tilde{E}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Por lo tanto, ya que por $(f_\alpha(\phi(E)) = \rho_\alpha(E) = E_\alpha)$

$$E_\alpha = \rho_\alpha(E), \text{ si } x_\alpha = \rho_\alpha(x) \in E_\alpha$$

entonces se tiene por hipótesis y $(\rho_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ \rho_\beta)$ las siguientes relaciones

$$[x]_\alpha \bar{f}_{\alpha\beta}(e_\beta) = \rho_\alpha(x) \bar{f}_{\alpha\beta}(e_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}(\rho_\beta(x)) \bar{f}_{\alpha\beta}(e_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}(\rho_\beta(x)e_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}(\rho_\beta(x)) = \rho_\alpha(x) = [x]_\alpha \text{ para todo } \alpha \leq \beta \text{ en } I.$$

Similarmente para la multiplicación por la izquierda por $\bar{f}_{\alpha\beta}(e_\beta)$, así el último elemento es una identidad del álgebra E_α , también $\tilde{E}_\alpha = \bar{E}_\alpha$. Así por hipótesis se concluye que $\bar{f}_{\alpha\beta}(e_\beta) = e_\alpha$ para todo $\alpha \leq \beta$ en I . Luego $e = (e_\alpha) \in \varprojlim \tilde{E}_\alpha = E$. Entonces se ve que e es un elemento identidad de E .

- 3) Si $x = ([x]_\alpha) \in E = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$, con $[x]_\alpha$ un elemento regular de $\tilde{E}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, entonces existe $y = (y_\alpha) \in \prod \tilde{E}_\alpha$ tal que

$$[x]_\alpha y_\alpha = y_\alpha [x]_\alpha = e_\alpha$$

donde por (2), $(e_\alpha) = e$ es un elemento identidad de E . Ahora, para toda $\alpha \leq \beta$ en I se tiene

$$[x]_\alpha f_{\alpha\beta}(y_\beta) = f_{\alpha\beta}([x]_\beta) f_{\alpha\beta}(y_\beta) = e_\alpha = f_{\alpha\beta}[x]_\alpha;$$

lo cual implica que $f_{\alpha\beta}(y_\beta)$ es un inverso de $[x]_\alpha$ en E_α . Esto implica que

$$f_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha \text{ para todo } \alpha \leq \beta \text{ en } I$$

por lo tanto

$$y = (y_\alpha) \in \varprojlim \tilde{E}_\alpha = E$$

se concluye que y es inverso de x en E . ■

NOTA: Se ha usado la hipótesis de completitud del álgebra E en el teorema anterior sólo en lo que se refiere a la relación

$$E = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$$

Corolario 2.0.42 *Sea E un álgebra l.m.c. completa. Entonces aplicando la notación del teorema anterior se obtiene*

$$Sp_E(x) = \bigcup_{\alpha \in I} Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) \quad (2.19)$$

para cualquier elemento $x \in E$. Más aun, el radio espectral de un elemento $x \in E$ es dado por

$$r_E(x) = \sup_\alpha r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) = \sup_\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} (p_\alpha(x^n))^{1/n} \quad (2.20)$$

Demostración: Supóngase que $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in Sp_E(x)$ si $\frac{1}{\lambda}x$ es casi singular, entonces por el teorema anterior, el elemento

$$[\frac{1}{\lambda}x]_\alpha = \frac{1}{\lambda}[x]_\alpha \text{ para algún } \alpha \in I$$

debe ser casi singular. Por lo tanto,

$$\lambda \in Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) \text{ para algún } \alpha \in I$$

$$\lambda \in \bigcup_{\alpha} Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)$$

Además, si $0 \in Sp_E(x)$, entonces x debe ser un elemento singular de E . Entonces por el teorema 2.0.41 (3) esto debe ser cierto para algún elemento $[x]_\alpha \in \tilde{E}_\alpha$ y por lo tanto $0 \in Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)$, y recíprocamente por el teorema 2.0.41.

Por otro lado, por la definicion de radio espectral y la igualdad anterior se concluye la primera de las relaciones

$$r_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_E(x)\}$$

$$r_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \bigcup_{\alpha} Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)\}$$

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)\}$$

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)$$

Más aun, la segunda es consecuencia de la respectiva fórmula dada para el radio espectral de un elemento x_α en el álgebra de Banach

$$(\tilde{E}_\alpha, || \cdot ||_\alpha), \alpha \in I$$

Por otro lado, por

- $(E_\alpha = E/p_\alpha^{-1}(0))$
- $(\rho_\alpha(x) = x + \ker p_\alpha = [x]_\alpha)$

se tiene

$$||[x]_\alpha^n||_\alpha = ||\rho_\alpha(x)^n||_\alpha = ||\rho_\alpha(x^n)||_\alpha = p_\alpha(x^n), n \in \mathbb{N} \quad (2.21)$$

así, se tiene que para cualquier $x \in E$ y $\alpha \in I$

$$||[x]_\alpha^n||_\alpha^{1/n} = (p_\alpha(x^n))^{1/n}, n \in \mathbb{N}.$$

Pero como $\tilde{E}_\alpha$ es un álgebra de Banach, se sabe que el radio espectral esta dado de la siguiente manera

$$r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} ||[x]_\alpha^n||_\alpha^{1/n},$$

de esta manera,

$$r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_\alpha(x^n))^{1/n}$$

tomando supremos sobre alfa de ambos lados se obtiene lo deseado. ■

En la siguiente sección se considerará una situación más general, a saber, álgebras *l.m.c.* advertiblemente completas.

2.0.4. Álgebras localmente m-convexas advertiblemente completas.

En esta sección se da un análisis más fino de la situación descrita por el teorema anterior. Se ha señalado que el hecho de que las álgebras involucradas en el teorema 2.0.41 sean completas no es necesario en la parte de la suficiencia de la afirmación. Ahora, el objetivo en lo que sigue es dar una caracterización de las condiciones que son, de hecho, necesarias en la parte de la necesidad del mismo teorema en lugar de considerar álgebras completas. Así se demuestra que las álgebras advertiblemente completas son suficientes; Además, esto también caracteriza la situación respectiva.

Definición.- 2.0.43 *Un álgebra topológica E es **advertiblemente completa** si para cada filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en E que converge (a algún elemento x') en E , existe un elemento $x \in E$, tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

$$x \circ \mathcal{F} \rightarrow 0 \text{ y } \mathcal{F} \circ x \rightarrow 0$$

Definición.- 2.0.44 Sean E un álgebra l.m.c. y $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ una descomposición de Arens-Michael de E . Un elemento $x \in E$ es “**casi-regular coordenada a coordenada**” si para cualquier $\alpha \in I$, el elemento $\rho_\alpha(x)$ es casi regular en $\tilde{E}_\alpha$, o equivalentemente, existe un elemento

$$z = (z_\alpha) \in \prod_\alpha \tilde{E}_\alpha$$

tal que

$$\rho_\alpha(x) \circ z_\alpha = z_\alpha \circ \rho_\alpha(x) = 0 \quad (2.22)$$

para cualquier $\alpha \in I$.

Lema 2.0.45 Sean E un álgebra l.m.c. y $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$ una descomposición de Arens-Michael de E correspondiente a la base local $\mathfrak{N} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de E y x un elemento de E . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

- 1) El elemento dado $x \in E$ es casi regular coordenada a coordenada.
- 2) Existe un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en E tal que

$$\lim(x \circ \mathcal{F}) = \lim(\mathcal{F} \circ x) = 0 \quad (2.23)$$

y más aun

$$\lim \rho_\alpha(\mathcal{F}) = z_\alpha \in E_\alpha \quad (2.24)$$

para todo $\alpha \in I$. En particular, $\mathcal{F}$ converge al elemento $z = (z_\alpha)$ en $\prod_\alpha \tilde{E}_\alpha$.

Demostración: Supóngase que $\rho_\alpha(x) \circ z_\alpha = z_\alpha \circ \rho_\alpha(x) = 0$ es cierto; entonces se tiene que

$$\rho_\alpha(x) \circ \bar{f}_{\alpha\beta}(z_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}(\rho_\beta(x)) \circ \bar{f}_{\alpha\beta}(z_\beta),$$

luego

$$\rho_\alpha(x) \circ \bar{f}_{\alpha\beta}(z_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}(\rho_\beta(x) \circ z_\beta),$$

así

$$\rho_\alpha(x) \circ \bar{f}_{\alpha\beta}(z_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}(z_\beta \circ \rho_\beta(x))$$

y entonces

$$\rho_\alpha(x) \circ \bar{f}_{\alpha\beta}(z_\beta) = \bar{f}_{\alpha\beta}(z_\beta) \circ \rho_\alpha(x) = 0.$$

Por lo tanto, por la unicidad de la operación circulo, se tiene $\bar{f}_{\alpha\beta}(z_\beta) = z_\alpha$ para todo $\alpha \leq \beta$ en I .

De esta manera $z = (z_\alpha) \in \varprojlim \tilde{E}_\alpha$. Ahora, si $\mathcal{G}(z)$ denota el filtro de vecindades de z en el álgebra límite proyectivo, ya que $E = \phi(E)$ es una subálgebra densa del límite proyectivo, se concluye que

$$\phi^{-1}(\mathcal{G}(z) \cap \phi(E))$$

es un filtro base de Cauchy en E .

Sea $\mathcal{F}$ el respectivo filtro de Cauchy en E generado por el filtro base.

Se mostrará que

$$\lim \rho_\alpha(\mathcal{F}) = z_\alpha \in E_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I$$

se satisface, lo cual dirá que el filtro $\mathcal{F}$ en E así construido converge al elemento

$$z = (z_\alpha) \in \varprojlim \tilde{E}_\alpha \subseteq \prod_\alpha \tilde{E}_\alpha$$

En efecto, si W es una vecindad de $z_\alpha \in \tilde{E}_\alpha$ el conjunto

$$V = \prod_{\beta \in I} V_\beta$$

con $V_\alpha = W$ y $V_\beta = \tilde{E}_\beta$ para todo $\beta \neq \alpha$ en I define una vecindad de $z = (z_\alpha) \in \prod_\alpha \tilde{E}_\alpha$.

Entonces $\phi^{-1}(V \cap (\varprojlim \tilde{E}_\alpha) \cap \phi(E))$ pertenece a $\mathcal{F}$.

Luego, se obtiene

$$\rho_\alpha(\phi^{-1}(V \cap (\varprojlim \tilde{E}_\alpha) \cap \phi(E))) = \pi_\alpha(V \cap (\varprojlim \tilde{E}_\alpha) \cap \phi(E)) \subseteq \pi_\alpha(V) \subseteq V_\alpha = W$$

lo cual prueba la afirmación. Además

$$\lim \rho_\alpha(x \circ \mathcal{F}) = \lim(\rho_\alpha(x) \circ \rho_\alpha(\mathcal{F}))$$

$$\lim \rho_\alpha(x \circ \mathcal{F}) = \rho_\alpha(x) \circ \lim \rho_\alpha(\mathcal{F})$$

$$\lim \rho_\alpha(x \circ \mathcal{F}) = \rho_\alpha(x) \circ z_\alpha = 0 = z_\alpha \circ \rho_\alpha(x)$$

$$\lim \rho_\alpha(x \circ \mathcal{F}) = 0 = z_\alpha \circ \rho_\alpha(x) = \lim \rho_\alpha(\mathcal{F} \circ x) \text{ para todo } x \in I$$

lo cual prueba (2.23), así 1) implica 2)

Inversamente, supóngase que 2) se cumple es decir (2.23) y (2.24) son válidas.

Entonces, ya que el morfismo ρ_α es continuo, se tiene

$$0 = \rho_\alpha(\lim(x \circ \mathcal{F})) = \lim \rho_\alpha(x \circ \mathcal{F}) = \rho_\alpha(x) \circ \lim \rho_\alpha(\mathcal{F}) = \rho_\alpha(x) \circ z_\alpha = \rho_\alpha(\lim(\mathcal{F} \circ x)) = z_\alpha \circ \rho_\alpha$$

para todo $\alpha \in I$ ■

NOTA: Concerniente al elemento $z = (z_\alpha) \in \prod_{\alpha \in I} \tilde{E}_\alpha$ en el lema anterior, se concluye en ambos enunciados que $z \in \varprojlim \tilde{E}_\alpha$ tal que el filtro $\mathcal{F}$ en (2) converge a z con respecto a la misma álgebra $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$. Además, se obtiene por

$$\lim(x \circ \mathcal{F}) = \lim(\mathcal{F} \circ x) = 0$$

que

$$\lim(x \circ \mathcal{F}) = x \circ \lim \mathcal{F} = x \circ z = 0$$

y similarmente $z \circ x = 0$, es decir z es el casi inverso en $\tilde{E} = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$ del elemento dado $x \in E$. Así, el lema anterior proporciona un fortalecimiento del teorema 2.0.41 (1) y dice que si un elemento $x \in E$ es casi regular coordenada a coordenada, entonces tiene casi inverso, por decir z , pero pertenece a la completación del álgebra E , que es

$$z \in \tilde{E} = \varprojlim \tilde{E}_\alpha$$

De hecho se tiene una mejor información (que es la ubicación del elemento z en cuestión). A través del siguiente corolario se verá que $z \in E$, si el álgebra dada E es advertiblemente completa, es decir, “completa con respecto a tomar adversos”

Corolario 2.0.46 *Sea E un álgebra l.m.c. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes*

1) E es advertiblemente completa

2) Un elemento $x \in E$ es casi-regular si (y sólo si) es casi-regular coordenada a coordenada

Demostración: Si un elemento $x \in E$, con $\phi(x) = (\rho_\alpha(x)) \in \varprojlim \tilde{E}_\alpha$ es casi-regular, entonces existe un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en E que satisface

$$\lim(x \circ \mathcal{F}) = \lim(\mathcal{F} \circ x) = 0.$$

Por lo tanto, si E es advertiblemente completa, $\mathcal{F}$ converge a un elemento $y \in E$, así $x \circ y = y \circ x = 0$. Por lo tanto, y es el casi-inverso de x en E , lo cual prueba que 1) implica 2) Ahora, supóngase que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en E , el cual satisface

$$\lim(x \circ \mathcal{F}) = \lim(\mathcal{F} \circ x) = 0$$

para algún elemento $x \in E$. Por otro lado, por hipótesis $\mathcal{F}$ converge a un elemento $z = (z_\alpha) \in \varprojlim \tilde{E}_\alpha \cong \tilde{E}$, entonces se tiene

$$z \circ x = x \circ z = 0 \text{ en } \tilde{E}$$

por lo tanto también la relación

$$\rho_\alpha(x) \circ z_\alpha = z_\alpha \circ \rho_\alpha(x) = 0$$

es decir $x \in E$ es casi-regular coordenada a coordenada, como 2) es válido, se tiene que x es casi-regular en E ; es decir existe

$$y \in E \subseteq \tilde{E} \quad , \quad x \circ y = y \circ x = 0$$

así por la relación probada se tiene que $z = y \in E$ ■

El siguiente lema expone una condición mas fuerte para la casi-regularidad que las 2 proposiciones equivalentes en el corolario anterior. Así se tiene el siguiente

Lema 2.0.47 Sean E un álgebra l.m.c.

Un elemento $x \in E$ es casi regular si (y sólo si)

$$f(x) \neq 1 \tag{2.25}$$

para cualquier caracter (funcional multiplicativo) continuo f de E . Entonces, (2.25) implica cualquiera de las dos proposiciones equivalentes del corolario anterior.

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en E tal que para algún elemento $x \in E$, la siguiente relación es cierta

$$\lim(x \circ \mathcal{F}) = \lim(\mathcal{F} \circ x) = 0.$$

Así, si (2.25) es válido se deberá probar que x es casi-regular en E . De otra manera, si (2.25) no sucediera, debería existir un elemento $f \in \mathfrak{M}(E)$, con $f(x) = 1$. Por la continuidad de f , el conjunto

$$U = \{y \in E : |f(y)| < 1\}$$

es una vecindad abierta de cero en E . Por hipótesis para $\mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{F}$, con

$$x \circ B = \{x \circ y : y \in B\} \subseteq U$$

por lo tanto

$$|f(x \circ y)| < 1 \text{ para cualquier } y \in B.$$

Pero

$$f(x \circ y) = f(x + y - xy) = f(x) + f(y) - f(x)f(y) = 1 + f(y) - f(y) = 1$$

para cualquier $y \in B$, lo cual implica que $|f(x \circ y)| = 1$, y esto es una contradicción. Así $f(x) \neq 1$ para todo $f \in \mathfrak{M}(E)$, lo que implica que x es un elemento casi-regular de E . Por lo tanto existe $z \in E$, con $x \circ z = z \circ x = 0$. Entonces se tiene

$$\rho_\alpha(x) \circ \rho_\alpha(z) = \rho_\alpha(z) \circ \rho_\alpha(x) = 0 \text{ para todo } \alpha \in I.$$

Además, por hipótesis para $\mathcal{F}$, $\rho(\mathcal{F})$ es un filtro de Cauchy en $\tilde{E}_\alpha$ (la imagen directa de un filtro de Cauchy bajo un morfismo continuo es un filtro de Cauchy), pero $\tilde{E}_\alpha$ es completa, entonces

$$\lim \rho_\alpha(\mathcal{F}) = y_\alpha \in \tilde{E}_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I \quad (2.26)$$

lo cual implica que

$$\lim \rho_\alpha(x \circ \mathcal{F}) = \lim(\rho_\alpha(x) \circ \rho_\alpha(\mathcal{F})) = \rho_\alpha(x) \circ \lim \rho_\alpha(\mathcal{F}) = \lim \rho_\alpha(\mathcal{F}) \circ \rho_\alpha(x) = 0$$

es decir, $\rho_\alpha(x) \circ y_\alpha = y_\alpha \circ \rho_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in I$, consecuentemente se tiene $y_\alpha = \rho_\alpha(z)$, $\alpha \in I$.

Así, finalmente se tiene que $y = (y_\alpha) = (\rho_\alpha(z)) = z \in E$. Entonces por (2.26) el filtro $\mathcal{F}$ converge a un elemento $y \in E$, es decir el álgebra E es advertiblemente completa, por lo tanto se tiene que (2.25) implica 1) del corolario anterior. ■

Si ahora se añade la condición de conmutatividad se obtiene el siguiente

Teorema 2.0.48 (*Teorema 5.1, p.97 en [30]*) *Sea E un álgebra l.m.c. conmutativa. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

- 1) E es advertiblemente completa.
- 2) Un elemento $x \in E$ es casi-regular si (y sólo si) se tiene la relación siguiente:

$$f(x) \neq 1 \tag{2.27}$$

para todo caracter continuo f de E .

Demostración: Se observa que por el lema anterior y la condición $f(x) \neq 1$ para todo caracter continuo f de E siempre implica 1) es decir independientemente de la conmutatividad del álgebra E . Entonces lo único que hay que probar es que bajo la hipótesis suplementaria, *i.e.*, que el álgebra sea conmutativa, 1) implica 2).

Sea x un elemento de E el cual satisface

$$f(x) \neq 1 \text{ para todo } f \in \mathfrak{M}(E)$$

supóngase por otro lado, que x no es casi-regular. Entonces por el lema y el corolario anterior debe existir un índice $\alpha \in I$ tal que $\rho_{\alpha}(x)$ es un elemento casi-singular del álgebra de Banach conmutativa $\tilde{E}_{\alpha}$. Entonces debe existir un caracter de $\tilde{E}_{\alpha}$ es decir un funcional continuo tal que

$$h_{\alpha} : \tilde{E}_{\alpha} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ con } h_{\alpha}(\rho_{\alpha}(x)) = 1.$$

Así se obtiene un elemento

$$f = h_{\alpha}\rho_{\alpha} \in \mathfrak{M}(E) \text{ tal que } f(x) = 1$$

lo cual contradice la hipótesis para x ■

En particular para álgebras que tienen elemento identidad se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.0.49 *Sea E un álgebra l.m.c. conmutativa, advertiblemente completa con elemento identidad. Entonces un elemento $x \in E$ es invertible si (y sólo si) se tiene*

$$f(x) \neq 0 \text{ para todo } f \in \mathfrak{M}(E) \tag{2.28}$$

Demostración: Ya que la condición (2.28) necesaria sucede (incluso para álgebras no conmutativas), sólo se tiene que probar la condición suficiente. Así, si (2.28) es válida para algún $x \in E$ y e denota el elemento identidad de E , entonces para cualquier $f \in \mathfrak{M}(E)$ se tiene la relación

$$f(e - x) = f(e) - f(x) = 1 - f(x) \neq 1 \quad (2.29)$$

por el teorema anterior $e - x$ es un elemento casi-regular, por lo tanto x es un elemento regular (invertible) de E . ■

En conexión con el resultado anterior, se enfatiza que en presencia de un elemento identidad en el álgebra $l.m.c.$ conmutativa E las dos condiciones (2.27) y (2.28) son equivalentes: El hecho de que (2.27) implique (2.28) se sigue de la prueba anterior. Más aun, si (2.28) es válido, entonces aplicando un resultado similar a (2.29) se tiene que

$$f(e - x) = f(e) - f(x) = 1 - f(x) \neq 0 \quad (2.30)$$

para todo $f \in \mathfrak{M}(E)$; por lo tanto, por hipótesis $e - x$ es un elemento regular de E . Así x es un elemento casi regular. Por lo tanto (2.28) se satisface.

Entonces se concluye que bajo la hipótesis suplementaria de que E es un álgebra conmutativa, ya sea una de las condiciones (2.27) o (2.28) pueden tomarse como hechos equivalentes a la hipótesis de que el álgebra E sea advertiblemente completa.

NOTA: La discusión anterior proporciona una generalización de los enunciados 1) y 3) del teorema 2.0.41 al caso de las álgebras $l.m.c.$ advertiblemente completas. Así el primer enunciado del teorema 2.0.41 está contenido en el corolario 2.0.46, el mismo corolario también indica que para un álgebra $l.m.c.$ la propiedad en cuestión constituye, una caracterización de ser “advertiblemente completa”. Además, el enunciado 3) del teorema 2.0.41 se puede obtener mediante la observación que se hace con respecto al corolario anterior.

2.0.5. Propiedades espectrales de álgebras advertiblemente completas localmente multiplicativamente convexas

En esta sección se extenderán las relaciones (2.19) y (2.20) a álgebras $l.m.c.$ advertiblemente completas, en particular si las álgebras en cuestión son conmutativas; también se obtendrán más caracterizaciones de la misma clase de álgebras.

Teorema 2.0.50 (*Teorema 6.1, p.99 en [30]*) Sea E un álgebra $l.m.c.$ advertiblemente completa. Entonces, considerando una descomposición de Arens-Michael de E , el radio espectral de un elemento $x \in E$ está dado por

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) = \sup_{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{\alpha}(x^n))^{1/n} \quad (2.31)$$

En particular, si E tiene un elemento identidad, entonces el espectro de un elemento $x \in E$ satisface la relación

$$Sp_E(x) = \bigcup_{\alpha \in I} Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)$$

Demostración: Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in Sp_E(x)$ si y sólo si $\frac{1}{\lambda}x$ es casi singular. Por lo tanto, existe un $\alpha \in I$ tal que $[\frac{1}{\lambda}x]_\alpha = \frac{1}{\lambda}[x]_\alpha$ es casi singular, así $\lambda \in Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)$; inversamente si $\lambda \in \bigcup_{\alpha} Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)$, entonces $\lambda \in Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)$ para algún $\alpha \in I$, de esta manera $\frac{1}{\lambda}[x]_\alpha$ es casi singular, así $\lambda \in Sp_E(x)$. Por otro lado, por definición

$$r_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_E(x)\}$$

$$r_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \bigcup_{\alpha} Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)\}$$

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)\} = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha)$$

por (2.21) y debido a que $\tilde{E}_\alpha$ son álgebras de Banach para cada $\alpha \in I$, se sigue que

$$\sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) = \sup_{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} (p_\alpha(x^n))^{1/n}$$

Por otro lado, si E tiene un elemento identidad, el argumento anterior concerniente a un elemento $\lambda \neq 0$ en $Sp_E(x)$, con $x \in E$, sigue siendo válido, más aun, si $0 \in Sp_E(x)$, entonces x es singular, por lo tanto lo mismo es cierto para algún $[x]_\alpha$, con $\alpha \in I$. Esto completa la prueba. ■

Corolario 2.0.51 *Sea E un álgebra l.m.c. advertiblemente completa. Entonces concerniente al radio espectral $r_E(x)$ de un elemento $x \in E$, se tienen las relaciones:*

- 1) $r_E(\lambda x) = |\lambda| r_E(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$
- 2) $r_E(xy) = r_E(yx)$, para cualesquiera $x, y \in E$
- 3) $r_E(x^n) = (r_E(x))^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

En particular, para cualquier par (x, y) de elementos que conmuten de E se obtiene

- 4) $r_E(x + y) \leq r_E(x) + r_E(y)$
- 5) $r_E(xy) \leq r_E(x)r_E(y)$

Demostración: Recuérdese que las afirmaciones 1) – 3) se satisfacen para álgebras normadas; si además el álgebra normada es conmutativa, entonces 4) y 5) también son ciertas. De esta manera considérese una descomposición de Arens-Michael de E . Entonces se tiene que

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) \quad x \in E.$$

Por lo tanto,

$$1) \ r_E(\lambda x) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([\lambda x]_{\alpha}) = \sup_{\alpha} |\lambda| r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) = |\lambda| \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) = |\lambda| r_E(x).$$

$$2) \ r_E(xy) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([xy]_{\alpha}) = \sup_{\alpha} [r_{\tilde{E}_{\alpha}}([yx]_{\alpha})] = r_E(yx).$$

$$3) \ r_E(x^n) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x^n]_{\alpha}) = \sup_{\alpha} [r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha})]^n = [\sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha})]^n = (r_E(x))^n.$$

Si además $xy = yx$, entonces

$$4) \ r_E(x + y) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x + y]_{\alpha}) \leq \sup_{\alpha} [r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) + r_{\tilde{E}_{\alpha}}([y]_{\alpha})] \\ \leq \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) + \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([y]_{\alpha}) = r_E(x) + r_E(y).$$

$$5) \ r_E(xy) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([xy]_{\alpha}) \leq \sup_{\alpha} [r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) r_{\tilde{E}_{\alpha}}([y]_{\alpha})] = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([y]_{\alpha}) \\ = r_E(x) r_E(y). \blacksquare$$

Lo siguiente es ahora una consecuencia inmediata del corolario anterior.

Corolario 2.0.52 *Para cualquier álgebra conmutativa advertiblemente completa l.m.c. E , el radio espectral r_E define una seminorma submultiplicativa en el conjunto*

$$B(E) = \{x \in E : r_E(x) < +\infty\},$$

la cual por lo tanto es en una subálgebra de E .

Demostración: Se sigue de los incisos (1), (4), (5) del corolario anterior. Además el radio espectral es no negativo por definición. ■

Proposición 2.0.53 *(Proposición 6.1, p.101 en [30]) Sea E un álgebra l.m.c. advertiblemente completa, el conjunto*

$$N = \{x \in E : r_E(x) < 1\}$$

está contenido en el grupo G^q de elementos casi regulares de E .

Demostración: Sea $x \in N$ y considérese una descomposición de Arens-Michael de E , luego por el teorema 2.0.50 se tiene que

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}), \quad x \in E.$$

De esta manera

$$r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) < 1 \text{ para toda } \alpha \in I,$$

ya que $r_E(x) < 1$. Así, $[x]_{\alpha}$ es un elemento casi regular del álgebra de Banach $\tilde{E}_{\alpha}$ para toda $\alpha \in I$. Por tanto, por el corolario 2.0.46 se tiene que x es un elemento casi regular en E . Más aun, el casi inverso está dado por

$$r_{\tilde{E}_{\alpha}}([x]_{\alpha}) = - \sum_{n=1}^{\infty} r_{\tilde{E}_{\alpha}}^n([x]_{\alpha}).$$

Esta serie converge ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_{\tilde{E}_{\alpha}}^n\|^{1/n} < 1$; además por ser álgebra de Banach la serie converge en $\tilde{E}_{\alpha}$. De esta manera $r_{\tilde{E}_{\alpha}}^o$ está bien definido. El resultado requerido se sigue del corolario 2.0.46. ■

Como una aplicación del resultado anterior se tiene el siguiente:

Corolario 2.0.54 *Sea E un álgebra l.m.c. advertiblemente completa. Además, sea*

$$\Gamma = \{p_{\alpha}\}, \quad \alpha \in I$$

una familia fundamental de seminormas submultiplicativas que definen la topología de E . Entonces la siguiente condición se satisface

** Para cualquier elemento $x \in E$, la relación $p_{\alpha}(x) < 1$ para todo $\alpha \in I$, implica que x es un elemento casi regular de E .*

Demostración: Debido a que

$$||[x]_\alpha||_\alpha = ||\rho_\alpha(x)||_\alpha = p_\alpha(x)$$

y la hipótesis, se tiene

$$r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) \leq ||[x]_\alpha||_\alpha = p_\alpha(x) < 1 \text{ para todo } \alpha \in I.$$

La desigualdad anterior se debe a que las normas son submultiplicativas pues las seminormas de las cuales se desprenden son submultiplicativas. Así, basta con considerar lo siguiente

$$||x^n|| \leq ||x|| ||x|| \dots ||x|| = (||x||)^n.$$

Se calcula la raíz enésima de ambos lados y se toma límite, de esta manera se obtiene lo que se desea. Así, $[x]_\alpha$ es un elemento casi regular de $\tilde{E}_\alpha$ para toda $\alpha \in I$. ■

La siguiente observación es ahora otro resultado de la terminología previa.

Observación 2.0.55 *Supóngase que se tiene la siguiente relación*

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha).$$

Entonces se tiene que para cualquier álgebra l.m.c. E y para cualquier elemento $x \in E$, con $r_E(x) < +\infty$, existe $\lambda \in Sp_E(x)$ tal que

$$r_E(x) \leq |\lambda|.$$

Se sigue del hecho que la última relación es válida para álgebras Normadas ver [37, pag. 28]. En efecto, como $\tilde{E}_\alpha$ es álgebra de Banach para cada $x \in E$ y cada $\alpha \in I$, se tiene que

$$r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) = |\lambda_\alpha| \text{ para algún } \lambda_\alpha \in Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha),$$

luego, $\lambda_\alpha \in Sp_E(x)$.

Por otro lado

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) = \sup_{\alpha} |\lambda_\alpha|.$$

Así, si se supone que para cada $\lambda \in Sp_E(x)$ se tiene que $r_E(x) > |\lambda|$, entonces

$$r_E(x) < r_E(x).$$

Lo cual es una contradicción. De esta manera se tiene que para cada $x \in E$, existe $\lambda_0 \in Sp_E(x)$ tal que $r_E(x) \leq |\lambda_0|$.

De esta manera se obtiene lo siguiente:

Para cualquier álgebra advertiblemente completa l.m.c. E y para cualquier $x \in E$, con $r_E(x) < \infty$, se tiene la relación

$$r_E(x) = \sup_{\lambda \in Sp_E(x)} |\lambda| = |\lambda_0| \text{ para algún } \lambda_0 \in Sp_E(x).$$

La relación anterior es un hecho muy conocido en la teoría clásica de álgebras de Banach.

Proposición 2.0.56 (Proposición 6.2, p.103 en [30]) Sea E un álgebra l.m.c. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes

1) El conjunto

$$S(E) = \{x \in E : r_E(x) \leq 1\}$$

es una vecindad de cero en E .

2) E es una Q -álgebra.

3) El radio espectral r_E es continuo en el $0 \in E$.

En particular, si el álgebra E es también conmutativa, entonces los tres enunciados anteriores son equivalentes al siguiente.

4) El radio espectral r_E es una función (real valuada) uniformemente continua.

Demostración: Para ver que 2) implica 1), se considera lo siguiente.

Si E es una Q -álgebra, entonces, G^q es vecindad de cero en E , luego existe una vecindad balanceada $\mathcal{U}$ de cero en E contenida en G^q . Mostraremos que $\mathcal{U} \subseteq S(E)$. Supóngase lo contrario, es decir existe $x \in \mathcal{U}$ tal que $r_E(x) > 1$, entonces, deberá existir un $\lambda \in Sp_E(x)$, con $|\lambda| > 1$, dado que E es Q -álgebra satisface las hipótesis anteriores y por el comentario anterior existe un $\lambda \in Sp_E(x)$ tal que $|\lambda| = r_E(x) > 1$, pero entonces $\frac{1}{\lambda}x$ es casi singular (pues $\lambda \in Sp_E(x)$) lo cual es una contradicción al hecho de que, como $\lambda > 1$, entonces $\frac{1}{|\lambda|} < 1$ y así $\frac{1}{\lambda}x \in \frac{1}{\lambda}\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \subseteq G^q$ dado que $\mathcal{U}$ es una vecindad balanceada. De esta manera $\mathcal{U} \subseteq S(E)$, así 2) implica 1).

Por otro lado si 1) es válido, entonces $0 \in E$ es un punto interior de $S(E)$; por lo tanto, el conjunto

$$\frac{1}{2}S(E)$$

tiene interior no vacío también, más aun está contenido en G^q . En efecto, ya que de otra manera, si un elemento $\frac{1}{2}x \in \frac{1}{2}S(E)$ es casi singular, entonces $2 \in Sp_E(x)$ y así $r_E(x) \geq 2$ lo cual es una contradicción, ya que $x \in S(E)$. De esta manera 1) implica 2).

Por otro lado 2) implica que el álgebra E es advertiblemente completa, luego por el corolario 2.0.51, aplicando la propiedad 1) se sabe que $r_E(0) = 0$ y también se sabe que $S(E)$ es una vecindad de cero en E , entonces basta tomar la vecindad $\epsilon S(E)$ para probar la continuidad de r_E en el cero, pues $r_E(\epsilon S(E)) \subset B_\epsilon(r_E(0))$. Así 2) implica 3).

Además si 3) es cierto entonces por la relación

$$r_E(0) = 0$$

se tiene, por la continuidad de r_E en el cero, que para todo $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{V}$ vecindad de cero en E tal que

$$r_E(\mathcal{V}) \subset B_\epsilon(0).$$

Basta ahora considerar a $\epsilon < 1$ y así $\mathcal{V} \subset S(E)$ probando así que $S(E)$ es una vecindad de cero y por lo tanto una Q -álgebra, es decir 3) implica 2).

Por otro lado, si el álgebra E es conmutativa, entonces 3) implica 4). En efecto, si 3) es válido, entonces 2) es válido, es decir E es Q -álgebra y del corolario 2.0.46 se sabe que si un álgebra es Q -álgebra, entonces $r_E(x) < +\infty$ para todo $x \in E$, es decir $E = B(E)$. También por ser E una Q -álgebra, E es un álgebra advertiblemente completa y siendo por hipótesis E conmutativa, por el corolario 2.0.46, r_E es una seminorma submultiplicativa en E , ya que r_E es subaditiva, entonces $|r_E(x) - r_E(y)| \leq r_E(x - y)$, entonces 3) implica 4).

Por último 4) implica 3) siempre sucede, por lo tanto en caso de E ser además conmutativa se tiene que los cuatro enunciados son equivalentes. ■

Como otra aplicación de la discusión precedente se considera las siguientes caracterizaciones de ser advertiblemente completa tanto como de ser Q -álgebras; en particular, cuándo las álgebras involucradas son conmutativas, primero se tiene el siguiente:

Teorema 2.0.57 (Teorema 6.2, p.104 en [30]) Sea E un álgebra l.m.c. más aun, considérense las siguientes dos afirmaciones:

$$1) Sp_E(x) \cup \{0\} = \hat{x}(\mathfrak{M}(E)^+); \quad x \in E$$

2) E es advertiblemente completa

Entonces 1) implica 2). En particular, si el álgebra E es conmutativa, entonces las dos afirmaciones anteriores son equivalentes.

Demostración: Se afirma que 1) implica $f(x) \neq 1$ para todo f en $\mathfrak{M}(E)$. Así, si $f(x) \neq 1$, para cualquier $f \in \mathfrak{M}(E)$, entonces por (1) $1 \notin Sp_E(x)$, esto quiere decir que x es un elemento casi regular de E , lo cual prueba la afirmación. Así por el lema 2.0.47 1) implica 2).

Además si el álgebra E es conmutativa y advertiblemente completa, entonces por el teorema 2.0.48, $\lambda \in Sp_E(x)$ si y sólo si existe un elemento $f \in \mathfrak{M}(E)$, con $f(\frac{1}{\lambda}x) = 1$. Es decir, $f(x) = \hat{x}(f) = \lambda$. Entonces λ pertenece al segundo miembro de (1). Así, en caso de que E sea conmutativa, entonces 2) implica 1) y esto finaliza la prueba. ■

Como corolario se tiene el siguiente resultado muy usado.

Corolario 2.0.58 *Sea E un álgebra l.m.c. conmutativa con un elemento identidad. Entonces, E es advertiblemente completa si y sólo si se tiene la relación*

$$\hat{x}(\mathfrak{M}(E)) = Sp_E(x) \neq \emptyset \quad \text{para todo } x \in E \quad (2.32)$$

Además se obtiene el siguiente corolario del teorema anterior.

Corolario 2.0.59 *Sea E un álgebra l.m.c. conmutativa advertiblemente completa (por lo tanto, un álgebra topológica para la cual (1) del teorema anterior es válido). Entonces se tiene la relación*

$$r_E(x) = \sup_{f \in \mathfrak{M}(E)} |f(x)|$$

para cualquier elemento $x \in E$. Más aun se tiene

$$S(E) = (\mathfrak{M}(E))^o;$$

Así el conjunto $S(E)$ es un m -barril del álgebra m -convexa $B(E)$ cuándo este último está dotado con la topología relativa de E .

Demostración: Por definición de radio espectral se tiene

$$r_E(x) = \sup_{f \in \mathfrak{M}(E)} |f(x)|$$

y por el teorema anterior

$$Sp_E(x) \cup \{0\} = \hat{x}(\mathfrak{M}(E)^+).$$

Así

$$r_E(x) = \sup_{\lambda \in Sp_E(x)} |\lambda| = \sup_{f \in \mathfrak{M}(E)} |f(x)|.$$

Mientras que $S(E) = (\mathfrak{M}(E))^o$ se sigue de lo anterior y de la misma definición

$$(\mathfrak{M}(E))^o = \{x \in E'' : | \langle x, f \rangle | \leq 1 \quad \text{para todo } f \text{ en } \mathfrak{M}(E)\}.$$

Sea $x \in S(E)$; esto es equivalente a

$$r_E(x) \leq 1$$

si y sólo si

$$r_E(x) = \sup_{f \in \mathfrak{M}(E)} |f(x)| \leq 1$$

si y sólo si

$$| \langle x, f \rangle | \leq 1 \quad \text{para todo } f \text{ en } \mathfrak{M}(E)$$

por lo tanto $x \in (\mathfrak{M}(E))^o$. Así se concluye que $S(E)$ es un subconjunto de E cerrado, absolutamente convexo e idempotente, más aun, es por definicion, un subconjunto de $B(E)$, con $r_E(x) = \alpha > 0$ y se tiene por homogeneidad que

$$\frac{1}{\alpha}x \in S(E);$$

entonces el último conjunto es un subconjunto absorbente del álgebra (*l.m.c.*) $B(E)$, luego, por lo que se ha demostrado, es un m -barril en la misma álgebra. ■

En particular se tiene el siguiente resultado

Corolario 2.0.60 *Sea E un álgebra l.m.c. conmutativa advertiblemente completa. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

- 1) E es una Q -álgebra
- 2) $\mathfrak{M}(E)$ (el espectro topológico de E) es un subconjunto equicontinuo de E'

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ vecindad balanceada de cero en E que consiste de elementos casi regulares de E , entonces se tiene la relación

$$\mathcal{U} \subseteq (\mathfrak{M}(E))^{\circ}.$$

En efecto, sea $x \in \mathcal{U}$ y supongamos que $x \notin (\mathfrak{M}(E))^{\circ}$, es decir $|f(x)| > 1$ para algún $f \in \mathfrak{M}(E)$; entonces $f(x) = \lambda \neq 0$ y $|\frac{1}{\lambda}| < 1$, así $\frac{1}{\lambda}x \in \mathcal{U}$ y $f(\frac{1}{\lambda}x) = 1$ lo cual es una contradicción al hecho que $\frac{1}{\lambda}x$ es casi regular. Por lo tanto $|f(x)| \leq 1$ para todo $f \in \mathfrak{M}(E)$ y así $x \in \mathcal{U}$; de esta manera $(\mathfrak{M}(E))^{\circ}$ es una vecindad de cero en E , además

$$\mathfrak{M}(E) \subseteq (\mathfrak{M}(E))^{\circ\circ} = ((\mathfrak{M}(E))^{\circ})^{\circ}.$$

Por lo tanto $\mathfrak{M}(E)$ es equicontinuo. ■

La siguiente es una aplicación del corolario 2.0.58

Lema 2.0.61 *Sea E un álgebra conmutativa advertiblemente completa m -barrilada l.m.c. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

- 1) E es una Q -álgebra.
- 2) $E = B(E)$.

Demostración: Como E es una Q -álgebra, entonces G^q es vecindad de cero; así sea $\mathcal{U}$ vecindad de cero balanceada y absorbente de cero tal que $\mathcal{U} \subseteq G^q$. Si $x \in E$, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha x \in \mathcal{U}$, así $r_E(x) \leq \frac{1}{\alpha}$. De otra manera, $r_E > \alpha$, implicaría que existiría $\lambda \in Sp_E(x)$ tal que $|\lambda| > \frac{1}{\alpha}$, así $|\frac{1}{\alpha\lambda}| < 1$; de esta manera $\frac{1}{\alpha\lambda}\alpha x \in \mathcal{U}$ entonces $\frac{1}{\lambda}x \in \mathcal{U} \subseteq G^q$, lo cual es una contradicción; por lo tanto $r_E(x) \leq \frac{1}{\alpha}$.

Inversamente, si 2) es válido, entonces por el corolario 2.0.59 $S(E)$ es un m -barril de E , que por hipótesis es vecindad de cero en E . Así E es una Q -álgebra. ■

Se concluirá esta sección suministrando una nueva caracterización de Q -álgebras conmutativas.

Definición.- 2.0.62 Un **ideal regular** I de un álgebra E es un ideal bilateral I de E de tal manera que el álgebra cociente E/I tiene un elemento identidad.

Teorema 2.0.63 (Teorema 6.3, p.106 en [30]) Sea E un álgebra l.m.c. cuyo espectro (topológico) es $\mathfrak{M}(E)$. Además, considérense las siguientes afirmaciones:

1) $\mathfrak{M}(E)$ es un subconjunto equicontinuo de E' y un elemento $x \in E$ es casi regular si y sólo si

$$f(x) \neq 1 \quad \text{para todo } f \text{ en } \mathfrak{M}(E).$$

2) E es una Q -álgebra.

3) E es advertiblemente completa y tiene un espectro equicontinuo $\mathfrak{M}(E)$.

4) $\mathfrak{M}(E)$ es equicontinuo y cualquier ideal regular máximo de E es cerrado.

Entonces se tienen las siguientes implicaciones

$$1) \text{ implica } 2) \text{ implica } 3) \text{ y } 2) \text{ implica } 4)$$

En particular, si el álgebra E es conmutativa, entonces todas las afirmaciones anteriores son equivalentes

Demostración: Si 1) es válido, entonces $\mathcal{U} = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}(E))^\circ$ es una vecindad de cero en E , ya que por el lema 1.0.23 $\mathfrak{M}(E) \subset V^\circ$ para alguna vecindad V de cero en E , luego $V \subseteq (V^\circ)^\circ \subseteq (\mathfrak{M}(E))^\circ$, lo cual implica que $(\mathfrak{M}(E))^\circ$ es vecindad de cero; luego $\mathcal{U}$ es tal que si $x \in \mathcal{U}$, entonces $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$, lo que significa que

$$f(x) \neq 1 \quad \text{para todo } f \text{ en } \mathfrak{M}(E).$$

Esto implica que x es un elemento casi regular de E y entonces $\mathcal{U} \subseteq G^q$; por tal razón E es una Q -álgebra.

Por otro lado ya se demostró que ser Q -álgebra implica ser advertiblemente completa y que $\mathfrak{M}(E)$ es equicontinuo por 2.0.60, así 2) implica 3).

Ahora se probará que 2) implica 4)

Considérese un ideal regular máximo M de E y supóngase que $\overline{M} = E$. Así si a es una identidad de E módulo M y G^q el conjunto de los elementos casi regulares de E , el conjunto $a + G^q$ es una vecindad abierta de a en E . Por lo tanto, se obtiene

$$(a + G^q) \cap M \neq \emptyset$$

es decir, existe un $z \in G^q$ tal que $a + z \in M$, lo cual implica que $a + z = m$ para algún $m \in M$; así $a - m \in G^q$. Por lo tanto, si y es el casi inverso de $a - m$, se tiene

$$(a - m) \circ y = (a - m) + y - (a - m)y = 0$$

lo cual implica que

$$a = m + (ay - y) + my$$

debido a que a es unidad de E módulo M , entonces $ay - y$ es un elemento de M , así se tiene que $a \in M$, lo cual es una contradicción al hecho de que a es unidad de E módulo M . Por lo tanto $\overline{M} \neq E$, ya que $\overline{M}$ es también ideal de E y $M \subset \overline{M}$, entonces $M = \overline{M}$.

Ahora, si E es conmutativa, entonces por el teorema 2.0.48, 3) implica 1). Además en ese caso también 4) implica 1). En efecto, supóngase que $f(x) \neq 1$, para cualquier $f \in \mathfrak{M}(E)$, mientras que x es un elemento casi singular de E . Así x pertenecerá a un ideal regular máximo, por decir M de E , siendo también una identidad de E módulo M . Por lo tanto, ya que por hipótesis M es cerrado da lugar a un carácter continuo [30, pag. 72], por decir f de E tal que $f(x) = 1$, lo cual es una contradicción para x . Entonces x debe ser un elemento casi regular de E y esto termina la prueba. ■

NOTA: Se sigue de la discusión anterior que, considerando una álgebra E *l.m.c.* y un elemento $x \in E$, si x es casi regular en E , entonces es también casi regular coordinada a coordinada, en el sentido que tomando una descomposición de Arens-Michael en el álgebra E , por decir $\varprojlim \tilde{E}_\alpha$, $[x]_\alpha$ es un elemento casi regular de la respectiva álgebra de Banach $\tilde{E}_\alpha$, para cualquier $\alpha \in I$. Consecuentemente se obtiene que

$$\bigcup_{\alpha \in I} Sp_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha) \subseteq Sp_E(x), \quad (2.33)$$

para todo $x \in E$ y que

$$r_E(x) \geq \sup_{\alpha} r_{\tilde{E}_\alpha}([x]_\alpha), \quad (2.34)$$

para todo $x \in E$. Por otro lado, si el álgebra *l.m.c.* es secuencialmente completa, se puede probar que (2.34) es, en efecto, una igualdad.

2.0.6. Ejemplos

Ejemplo 2.0.64 Sea $C(\mathbb{R})$ el álgebra de todas las funciones continuas con la topología de convergencia uniforme en compactos (ver [pag. 3][13]). Esta topología está definida por las seminormas

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \text{ con } K \in \Delta$$

donde Δ es el conjunto de todos los conjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Esta topología hace de $C(\mathbb{R})$ un álgebra l.m.c. completa. En efecto, sean $f, g \in C(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} p_K(fg) &= \sup_{x \in K} |(fg)(x)| = \sup_{x \in K} |f(x)g(x)| \leq \\ &\sup_{x \in K} |f(x)| \sup_{x \in K} |g(x)| = p_K(f)p_K(g). \end{aligned}$$

Ahora se probará que es completa. Sean $K \in \Delta$ fijo y (f_n) una sucesión de Cauchy. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, con $n, m \geq N$

$$\|f_n - f_m\|_K \leq \epsilon$$

así

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|_K \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, ya que $\mathbb{C}$ es completo, se tiene que existe $f(x)$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ o lo que es equivalente

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Por otro lado, como f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que para cada $\epsilon > 0$, existe δ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$. Así

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\epsilon \end{aligned}$$

lo cual prueba que f es continua.

Ahora considérese lo siguiente

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_K \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $\|f_n - f\|_K \leq \epsilon$, lo cual prueba que el álgebra $C(\mathbb{R})$ es completa.

Se dará el siguiente orden en Δ , para $K, L \in \Delta$ $K \leq L$ si y solo si $K \subseteq L$, en ese caso se define la función

$$f_{KL} : C(L) \rightarrow C(K)$$

como $f_{KL}(\phi) = \phi|_K$, donde $C(K)$ es el álgebra de Banach de todas las funciones continuas con la norma del supremo en K .

Nótese que $C(\mathbb{R})/\ker p_K \cong C(K)$. En efecto, si se toma $\psi : C(\mathbb{R})/\ker p_K \rightarrow C(K)$, dado de la siguiente forma $\psi(f + \ker p_K) = f|_K$. Para ver que esta asignación está bien definida, sean $\bar{f} = \bar{g}$, entonces $f - g \in \ker p_K$, así $p_K(f - g) = 0$, de esta manera $\sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| = 0$, es decir $|f(x) - g(x)| = 0$ para todo $x \in K$ lo cual implica que $f|_K = g|_K$. Por lo tanto, ψ queda bien definida.

Ahora, sea $\bar{f} \in C(\mathbb{R})/\ker p_K$ tal que $\psi(\bar{f}) = 0$, entonces $f|_K = 0$, lo cual implica que $f \in \ker p_K$, entonces f está en la clase del cero módulo $\ker p_K$. Por lo tanto, ψ es inyectiva. Por otro lado ψ es suprayectiva, pues por el teorema de extensión de Tietze, para cada $f \in C(K)$, existe $F \in C(\mathbb{R})$ tal que $F|_K = f$, de esta manera basta tomar $\bar{F} = F + \ker p_K$. Con lo anterior se obtiene que ψ es un isomorfismo algebraico.

Por otro lado, ψ es una isometría, ya que $\|\psi(\bar{f})\|_K = p_K(f)$ esto último por definición de la norma en el espacio $C(\mathbb{R})/\ker p_K$. Entonces como ψ es una isometría sobreyectiva, entonces es un isomorfismo topológico. Así, por el teorema de descomposición de Arens-Michael, se tiene que $C(\mathbb{R})$ es isomorfo a el límite proyectivo del sistema proyectivo $\{C(K), f_{KL}, \Delta\}$, es decir $C(\mathbb{R}) \cong \varprojlim C(K)$.

Ejemplo 2.0.65 Sea $C^\infty([0, 1])$ el álgebra de las funciones infinitamente diferenciables en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Dotada con las operaciones algebraicas puntuales, $C^\infty([0, 1])$ se convierte en un álgebra con unidad. Si el álgebra $C^\infty([0, 1])$ está dotada de la topología definida por la familia de seminormas

$$p_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sup\{|f^{(k)}(t)| : t \in [0, 1]\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

el álgebra se vuelve un álgebra l.m.c. (aquí $f^{(k)}$ significa la k -ésima derivada de f y $f^{(0)} = f$). En efecto, usando la formula de Leibnitz para la k -ésima derivada de un producto de elementos de $C^\infty([0, 1])$, se prueba que las seminormas p_n son submultiplicativas.

Sean $f, g \in C^\infty([0, 1])$. Entonces

$$(fg)^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} f^{(l)}(t) g^{(k-l)}(t), \quad t \in [0, 1], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

si

$$a_k = \sup\{|f^{(k)}(t)| : t \in [0, 1]\} \quad y \quad b_k = \sup\{|g^{(k)}(t)| : t \in [0, 1]\}, \quad (2.36)$$

usando (2.35) y (2.36) se tiene

$$p_n(fg) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sup\{|(fg)^{(k)}(t)| : t \in [0, 1]\} =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sup\left\{\left|\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} f^{(l)}(t) g^{(k-l)}(t)\right| : t \in [0, 1]\right\} \leq \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sup\left\{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} |f^{(l)}(t) g^{(k-l)}(t)| : t \in [0, 1]\right\} = \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \sup\{|f^{(l)}(t) g^{(k-l)}(t)| : t \in [0, 1]\} = \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} a_l b_{k-l} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!(k-l)!} a_l b_{k-l} \leq \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^k \frac{1}{k!m!} a_k b_m \leq p_n(f) p_n(g), \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Para cada $n, m \in \mathbb{N}$, con $m \leq n$, se define el morfismo

$$\varphi_{mn} : C^n([0, 1]) \longrightarrow C^m([0, 1])$$

Como $\varphi(f) = f$, donde $C^n([0, 1])$ es el álgebra de todas las funciones n -veces diferenciables en el intervalo $[0, 1]$ con la siguiente norma.

$$\|f\|_{C^n([0,1])} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sup\{|f^{(k)}(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

Nótese que

$$C^\infty([0, 1]) / \widetilde{p_n^{-1}(0)} \cong C^n([0, 1]),$$

donde $\sim$ significa la completación del álgebra $C^\infty([0, 1]) / p_n^{-1}(0)$. Para probar lo anterior, basta considerar la siguiente isometría

$$\begin{aligned}
\varphi : C^\infty([0, 1]) / \widetilde{p_n^{-1}(0)} &\longrightarrow C^n([0, 1]) \\
f + N_n &\longmapsto f.
\end{aligned}$$

El morfismo φ está bien definido, ya que si $\bar{f} = \bar{g}$, entonces $f - g \in \ker p_n$, es decir $p_n(f - g) = 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sup\{|(f - g)^{(k)}(t)| : t \in [0, 1]\} = 0$$

así, $(f - g)(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$, de esta manera el morfismo φ queda bien definido. Ahora, sea $\bar{f} \in C^\infty([0, 1])/p_n^{-1}(0)$ tal que $\varphi(\bar{f}) = 0$. Entonces $f = 0$, así $\bar{f} = \bar{0}$ módulo $\ker p_n$, de esta manera, el morfismo φ es un morfismo inyectivo.

Por otro lado, por el teorema de Weierstrass, se tiene que para cualquier número natural n el espacio $\mathcal{P}$ de polinomios es denso en $C^n([0, 1])$, así para cada $f \in C^n([0, 1])$, existe una sucesión de polinomios $f_n \in \widetilde{C^\infty([0, 1])}$ tal que $f_n \rightarrow f$, ya que $\widetilde{C^\infty([0, 1])}$ es completa, $f \in \widetilde{C^\infty([0, 1])}$, así, basta con tomar la clase de f , es decir $\bar{f}$, de esta manera φ es un morfismo suprayectivo.

Es isometría, ya que

$$\|\varphi(\bar{f})\|_{C^n([0, 1])} = p_n(f) = \|\bar{f}\|_n.$$

Por lo tanto, ya que el morfismo φ es una isometría suprayectiva, se tiene que el morfismo φ es un isomorfismo topológico. Así, por el teorema de descomposición de Arens-Michael, se tiene que $C^\infty([0, 1])$ es isomorfo al límite proyectivo del sistema proyectivo $\{C^n([0, 1]), \varphi_{mn}, \mathbb{N}\}$, es decir

$$C^\infty([0, 1]) \cong \varprojlim C^n([0, 1]).$$

Definición.- 2.0.66 Un espacio topológico X es σ -compacto si y solo si es la unión de una familia numerable de subconjuntos compactos (ver [26, pag. 172]) y [17, pag. 240]).

Ejemplo 2.0.67 El álgebra $C^\infty(\mathbb{R})$. Ahora considérese el caso de las funciones de orden C^∞ en $\mathbb{R}$ denotada por $C^\infty(\mathbb{R})$. Con las operaciones algebraicas definidas puntualmente y la topología de convergencia uniforme en todas las derivadas dada por la familia de seminormas

$$p_{K,l}(f) = \sup_{x \in K} |f^{(l)}(x)|,$$

donde K es un compacto de $\mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{N}$, $C^\infty(\mathbb{R})$ se convierte en un álgebra de Fréchet.

En efecto, ya que $\mathbb{R}$ es σ -compacto, existe una familia numerable $\{K_m\}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de compactos, los cuales cubren a $\mathbb{R}$. Más aun $K_m \subset K_{m+1}$, así $\mathbb{R} = \bigcup_{m \geq 0} K_m$ y para cada compacto $K \subset \mathbb{R}$, existe K_m tal que $K \subseteq K_m$. De esta manera se obtiene la siguiente familia de seminormas

$$p_m(f) = \sup\{|f^{(n)}(x)| : x \in K_m, n \leq m\},$$

la cual es equivalente a la familia de seminormas $p_{K,l}$; para ver esto, basta considerar lo siguiente: Si K es compacto y $l \in \mathbb{N}$, entonces por el comentario anterior existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $K \subseteq K_m$. Sea $s = \max\{l + 1, m\}$, se tiene que

$$p_{Kl}(f) \leq p_s(f) \text{ para cada } f \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

por otro lado, si $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces

$$p_m(f) \leq \sum_{l=0}^m p_{Kml}(f).$$

Esto prueba que las familias de seminormas $\{p_{Kl}\}$ y $\{p_m\}$ son equivalentes y por lo tanto el álgebra $C^\infty(\mathbb{R})$ con la topología de convergencia uniforme en todas las derivadas es metrizable.

Ahora se probará que el álgebra $C^\infty(\mathbb{R})$ con la topología de convergencia uniforme en todas las derivadas es completa. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy. Esto significa que $\{f_n\}$ es de Cauchy en cualquier seminorma p_m , entonces la restricción de $\{f_n\}$ a K_m es una sucesión de Cauchy en el álgebra de Banach $C^m(K_m)$ (ver [27, pag. 73]), cuya norma está dada por

$$\|f\|_m = \sup_{r \leq m} \sup_{x \in K_m} |f^{(r)}(x)|, \quad (2.37)$$

Por lo tanto, existe una función $F_m \in C^m(K_m)$ tal que $f_n|_{K_m} \rightarrow F_m$ en la topología de $C^m(K_m)$. Debido a que

$$\|f\|_{C^m(K_m)} \leq \|f\|_{C^{m+1}(K_{m+1})},$$

entonces, es claro que las funciones F_m coinciden en el siguiente sentido

$$F_{m+1}|_{K_m} = F_m.$$

Esto último se da, pues si τ_m es la topología dada por la norma $\|\cdot\|_{C^m(K_m)}$. Entonces se sigue que si f_n converge a F_{m+1} en τ_{m+1} , entonces converge a F_{m+1} en la topología τ_m , pero f_n converge a F_m en la topología τ_m . Puesto que el álgebra $C^m(K_m)$ es de Hausdorff, el límite es único, es decir $F_m = F_{m+1}$ sobre K_m . Por lo tanto, existe una sola función f de tal forma que $f|_{K_m} = F_m$, de esta manera por construcción de f se tiene que

$$p_m(f_n - f) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Esto significa que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $f_n \rightarrow f$ en la topología de $C^\infty(\mathbb{R})$. Es decir, $C^\infty(\mathbb{R})$ es completa.

Por otro lado, se tiene que las seminormas son submultiplicativas. En efecto, sean $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} p_m(fg) &= \sup\{|(fg)^{(n)}(x)| : x \in K_m, n \leq m\} \\ &\leq \sup\{|f^{(n)}(x)| : x \in K_m, n \leq m\} \sup\{|g^{(n)}(x)| : x \in K_m, n \leq m\} \\ &= p_m(f)p_m(g). \end{aligned}$$

Así, la seminormas p_m son submultiplicativas para cada $m \in \mathbb{N}$.

Por el teorema de descomposición de Arens-Michael, se tiene que

$$C^\infty(\mathbb{R}) \cong \varprojlim C^\infty(\mathbb{R}) / \ker p_m$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, tales que $m \leq n$. Entonces se define el morfismo

$$\varphi_{mn} : C^n(K_n) \longrightarrow C^m(K_m)$$

Como $\varphi(f) = f|_{K_m}$, donde $C^n(K_n)$ es el álgebra de todas las funciones n -veces diferenciables sobre el compacto K_n , con norma dada por (2.37).

Nótese que

$$C^\infty(\mathbb{R}) / \widetilde{p_n^{-1}(0)} \cong C^n(K_n),$$

donde $\sim$ significa la completación del álgebra $C^\infty(\mathbb{R}) / p_n^{-1}(0)$. Para probar lo anterior, basta considerar la siguiente isometría

$$\begin{aligned} \varphi : C^\infty(\mathbb{R}) / \widetilde{p_n^{-1}(0)} &\longrightarrow C^n(K_n) \\ f + N_n &\longmapsto f. \end{aligned}$$

El morfismo φ está bien definido, ya que si $\bar{f} = \bar{g}$, entonces $f - g \in \ker p_n$, es decir $p_n(f - g) = 0$, entonces

$$\sup\{|(f - g)^{(r)}(x)| : x \in K_n, r \leq n\} = 0$$

así, $(f - g)(x) = 0$ para todo $x \in K_n$, de esta manera el morfismo φ queda bien definido.

Ahora, sea $\bar{f} \in C^\infty(\mathbb{R}) / \widetilde{p_n^{-1}(0)}$ tal que $\varphi(\bar{f}) = 0$. Entonces $f = 0$, así $\bar{f} = \bar{0}$ módulo $\ker p_n$, de esta manera, el morfismo φ es un morfismo inyectivo.

Por otro lado, por el teorema de Weierstrass ([27, pag. 80]), se tiene que para cualquier número natural n el espacio $\mathcal{P}$ de polinomios es denso en $C^n(\mathbb{R})$, así para cada $f \in C^n(K_n)$, existe una sucesión de polinomios $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f_n \longrightarrow f$, ya que $\widetilde{C^\infty(\mathbb{R})}$ es completa, $f \in \widetilde{C^\infty(\mathbb{R})}$, así, basta con tomar la clase de f , es decir $\bar{f}$, de esta manera φ es un morfismo suprayectivo.

Es isometría, ya que

$$\|\varphi(\bar{f})\|_{C^n(\mathbb{R})} = p_n(f) = \|\bar{f}\|_n.$$

Por lo tanto, ya que el morfismo φ es una isometría suprayectiva, se tiene que el morfismo φ es un isomorfismo topológico. Así, por el teorema de descomposición de Arens-Michael, se tiene que $C^\infty(\mathbb{R})$ es isomorfo al límite proyectivo del sistema proyectivo $\{C^n(\mathbb{R}), \varphi_{mn}, \mathbb{N}\}$, es decir

$$C^\infty(\mathbb{R}) \cong \varprojlim C^n(K_n).$$

Definición.- 2.0.68 Un conjunto B de un álgebra E es **Bornívoro** si absorbe a cualquier subconjunto acotado de E .

Ejemplo 2.0.69 Se denota a $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}$ como el espacio de funciones infinitamente diferenciables tales que $p_{m,n}(f) < \infty$ para todos $m, n = 0, 1, 2, \dots$ donde

$$p_{m,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| \quad (2.38)$$

El espacio $\mathcal{S}$ es llamado el espacio de Schwartz o espacio de funciones rápidamente decrecientes. Así $\mathcal{S}$ es un álgebra topológica con la multiplicación puntual.

Verifiquemos que la multiplicación es continua.

Consideremos las siguientes vecindades

$$V(k, \epsilon) = \{f \in C^\infty : p_{m,n}(f) < 2^{-k}\epsilon \quad n \leq k\}$$

se afirma que

$$V^2(k, \epsilon) \subset V(k, \epsilon).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} p_{m,n}(fg) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m (fg)^{(n)}(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} f^{(q)} g^{(n-q)}(x)| \leq \\ &\sum_{q=0}^n \binom{n}{q} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(q)}(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m g^{(n-q)}(x)| = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} p_{m,n}(f) p_{m,n-q}(g) < \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} 2^{-k}\epsilon 2^{-k}\epsilon < \\ &2^k 2^{-k}\epsilon 2^{-k}\epsilon = 2^{-k}\epsilon^2 < 2^{-k}\epsilon \end{aligned}$$

pues $n - q < k$; de aquí se sigue que la multiplicación es continua. De esta manera se tiene que el espacio $\mathcal{S}$ de Schwartz es un álgebra topológica con la topología inducida por las seminormas $p_{m,n}$. Se verá que el álgebra $\mathcal{S}$ es localmente convexa y de Hausdorff.

Para que sea localmente convexa basta con ver que cada una de las vecindades dadas por las seminormas $p_{m,n}(f)$ es un conjunto convexo. En efecto, sean $f, g \in V_{m,n,\epsilon} = \{f \in C^\infty : p_{m,n}(f) < \epsilon\}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 1$.

Entonces

$$\begin{aligned} p_{m,n}(\alpha f + \beta g) &\leq p_{m,n}(\alpha f) + p_{m,n}(\beta g) \\ &= \alpha p_{m,n}(f) + \beta p_{m,n}(g) < \alpha\epsilon + \beta\epsilon = (\alpha + \beta)\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

lo cual dice que $\alpha f + \beta g \in V_{m,n,\epsilon}$. De esta manera, el espacio $\mathcal{S}$ es localmente convexo. Para ver que es de Hausdorff, basta tomar $f \neq 0$ y encontrar vecindades disjuntas de f y 0 respectivamente. Sea $f \neq 0$ es decir existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$, así, si $|f(x_0)| = r$ basta tomar $V_{m,n,\epsilon}$ y $U_{m,n,\epsilon}$ donde $\epsilon = \frac{r}{2}$, estas vecindades son disjuntas. De otra manera, existiría $h \in V_{m,n,\epsilon} \cap U_{m,n,\epsilon}$, así

$$|x^m h^{(n)}(x)| < \epsilon \quad y \quad |g(x) - x^m h^{(n)}(x)| < \epsilon$$

y de esta manera

$$|g(x)| = |g(x) - x^m h^{(n)}(x) + x^m h^{(n)}(x)| \leq |g(x) - x^m h^{(n)}(x)| + |x^m h^{(n)}(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = r$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto el espacio es de Hausdorff.

Es metrizable, ya que existen un número numerable de seminormas que dan su topología. Esta álgebra $\mathcal{S}$ es un álgebra de Fréchet

Nótese que $\mathcal{S}$ es subespacio vectorial de $C^\infty(\mathbb{R})$, pero que su topología es estrictamente mas fina que la inducida por C^∞ . Sea $\{f_l\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}$; por el comentario anterior, la sucesión dada es también una sucesión de Cauchy en C^∞ , pero este espacio es completo. De esta manera existe un elemento $f \in C^\infty$ tal que $f_l \rightarrow f$ en la topología de C^∞ .

Para m, n arbitrarios, existe una constante $M_{m,n}$ tal que para toda l

$$p_{m,n}(f_l) \leq M_{m,n},$$

es decir,

$$|f_l^{(n)}(x)| \leq M_{m,n}|x|^{-m}.$$

Por la convergencia uniforme de f_l se tiene que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_{m,n}|x|^{-m}$$

y de esta manera

$$|x^m f^{(n)}(x)| \leq M_{m,n}.$$

Así f pertenece a $\mathcal{S}$.

Por lo tanto $\mathcal{S}$ es completo; más aun $\mathcal{S}$ es de Fréchet.

El álgebra $\mathcal{S}$ es barrilada

Sea (U_n) una base de vecindades, con $U_{n+1} \subset U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, esto lo podemos hacer porque el álgebra es de Fréchet y sea B un barril en $\mathcal{S}$. Si B no es vecindad de cero, existe una sucesión (f_n) con $f_n \in U_n$; pero $f_n \notin nB$. Entonces $f_n \rightarrow 0$ y se sigue que $A = \{f_n\} \cup \{0\}$ es compacto. Por lo tanto, la envolvente convexa de A , que es un cerrado, es compacto. Así, es absorbido por B , así existe algún $r > 0$ tal que $f_n \in rB$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

Así $\mathcal{S}$ es barrilada.

Se afirma que el álgebra $\mathcal{S}$ es bornológica.

Sea $(V_n)_{n \geq 1}$ un sistema fundamental numerable decreciente de vecindades balanceadas de cero en $\mathcal{S}$ y sea U un conjunto convexo balanceado y bornívoro de $\mathcal{S}$. Supongamos que U no contiene conjuntos de la forma $(\frac{1}{n})V_n$. Para cada $n \geq 1$ sea f_n un punto de $(\frac{1}{n})V_n$, el cual no pertenece a U . La sucesión $(nf_n)_{n \geq 1}$ converge a cero y así el conjunto $B = \{nf_n | n \geq 1\}$ es acotado. Sin embargo U no absorbe a B ya que si $nf_n \in \lambda U$, $\lambda > 0$ para todo $n \geq 1$ y entonces $f_n \in (\frac{\lambda}{n})U \subset U$ para $n \geq \lambda$, lo que contradice la elección de f_n . Pero esto es imposible ya que U es bornívoro, entonces se ha probado que U contiene un conjunto $(\frac{1}{n})V_n$, el cual es una vecindad de cero. Se introducen los siguientes espacios

- $\mathcal{S}_m^\alpha$: El espacio de todas las funciones continuas α veces diferenciables $f \in \mathbb{R}$ tales que $|x^m f^{(n)}(x)| \rightarrow 0$ cuándo $|x| \rightarrow \infty$, con $n \leq \alpha$.
- $\mathcal{S}_m$: El espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables $f \in \mathbb{R}$ tales que $|x^m f^{(n)}(x)| \rightarrow 0$ cuándo $|x| \rightarrow \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{S}^\alpha$: El espacio de todas las funciones continuas α veces diferenciables $f \in \mathbb{R}$ tales que $|x^m f^{(n)}(x)| \rightarrow 0$ cuándo $|x| \rightarrow \infty$, para todo $m \in \mathbb{N}$ con $n \leq \alpha$.

Con esta notación, es claro que el espacio $\mathcal{S}$ de Schwartz es un subespacio de cualquiera de los tres espacios anteriores. Por otro lado se tiene que para α fijo, $\mathcal{S}^\alpha \subset \mathcal{S}_m^\alpha$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y la inyección $\mathcal{S}^\alpha \hookrightarrow \mathcal{S}_m^\alpha$ es continua ya que la familia de seminormas las cuales definen la topología de $\mathcal{S}_m^\alpha$ es una subfamilia de la familia de seminormas que definen la topología de $\mathcal{S}^\alpha$.

También notamos que si $m \geq m'$, entonces $\mathcal{S}_m^\alpha \subset \mathcal{S}_{m'}^\alpha$ y el morfismo $\mathcal{S}_m^\alpha \hookrightarrow \mathcal{S}_{m'}^\alpha$ es continuo; esto se sigue de la desigualdad $|x^m| \geq |x^{m'}|$.

Por los comentarios anteriores, se tiene que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_m^\alpha$ para cualquier $\alpha, m \in \mathbb{N}$. La topología de $\mathcal{S}$ es idéntica con la topología inicial dada por la familia de los morfismos

$$f_\alpha^m : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}_m^\alpha \quad (\alpha, m \in \mathbb{N})$$

Si $m, m', \alpha, \alpha' \in \mathbb{N}$ y satisfacen $m > m'$ y $\alpha > \alpha'$, entonces el morfismo $\mathcal{S}_m^\alpha \hookrightarrow \mathcal{S}_{m'}^{\alpha'}$ es continuo ya que es la composición de los siguientes morfismos continuos $\mathcal{S}_m^\alpha \hookrightarrow \mathcal{S}_m^{\alpha'} \hookrightarrow \mathcal{S}_{m'}^{\alpha'}$. Notamos que $\mathcal{S} = \bigcap_{\alpha, m} \mathcal{S}_m^\alpha$, más aun, como los morfismos $f_{\alpha, m'}^{\alpha, m} : \mathcal{S}_m^\alpha \hookrightarrow \mathcal{S}_{m'}^{\alpha'}$ y $f_\alpha^m : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}_m^\alpha$ son continuos y además $f_{\alpha'}^{m'} = f_{\alpha, m'}^{\alpha, m} \circ f_\alpha^m$. De esta manera, se tiene que:

$$\mathcal{S} = \varprojlim \{\mathcal{S}_m^\alpha, f_{\alpha, m'}^{\alpha, m}\}$$

Así, $\mathcal{S}$ es límite proyectivo de las álgebras $\mathcal{S}_m^\alpha$.

Por otro lado la topología de las álgebras $\mathcal{S}_m^\alpha$ está definida por una familia finita de seminormas, entonces puede ser definida por una sola seminorma. Dado que la topología es de Hausdorff, se tiene que la seminorma obtenida es en realidad una norma, de tal forma que los espacios $\mathcal{S}_m^\alpha$ son normados y de forma análoga al caso cuándo el espacio es $\mathcal{S}$, se tiene que $\mathcal{S}_m^\alpha$ son completos, por lo tanto se trata de álgebras de Banach.

Resumiendo, se tiene que el álgebra $\mathcal{S}$ es el álgebra límite proyectivo del sistema proyectivo $\{\mathcal{S}_m^\alpha, f_{\alpha, m'}^{\alpha, m}\}$, donde cada álgebra factor es un álgebra de Banach.

Capítulo 3

Descomposición de Arens-Michael Generalizada

Como se ha mencionado, de 1952 a la fecha se han dado diversas generalizaciones de la descomposición de Arens-Michael, en esta sección se presentan algunas de las más recientes y usadas en la literatura.

Definición.- 3.0.70 Sea $\mathbb{K}$ el campo $\mathbb{R}$ de los números reales o $\mathbb{C}$ de los números complejos y X un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$. Una vecindad $\mathcal{O} \subset X$ de cero es **absolutamente k -convexa**, si $\lambda u + \mu v \in \mathcal{O}$ para todo $u, v \in \mathcal{O}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, con

$$|\lambda|^k + |\mu|^k \leq 1$$

y es **absolutamente pseudoconvexa** si $\mathcal{O}$ es absolutamente k -convexa para algún $k \in (0, 1]$, que depende de $\mathcal{O}$.

Definición.- 3.0.71 Un subconjunto $\mathcal{O} \subset X$ es **pseudoconvexo** si $\mathcal{O}$ define un número $k_{\mathcal{O}} \in (0, 1]$ tal que

$$\mathcal{O} + \mathcal{O} \subset 2^{\frac{1}{k_{\mathcal{O}}}} \mathcal{O}.$$

Nótese que cualquiera de esas vecindades $\mathcal{O}$ de cero en X es balanceada. En efecto, basta con tomar $\mu = 0$ y $k = 1$.

También se puede verificar que cualquiera de esas vecindades del cero en $\mathcal{O}$ es pseudoconvexa. Para probar que $\mathcal{O}$ es pseudconvexa, sólo se necesita ver que $\frac{1}{2^{\frac{1}{\rho}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{\rho}}} \leq 1$ para todo

$\rho \in (0, 1]$. En efecto, ya que si $\frac{1}{2^{\frac{1}{\rho}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{\rho}}} > 1$, entonces $\frac{2}{2^{\frac{1}{\rho}}} > 1$, así $2 > 2^{\frac{1}{\rho}}$ luego aplicando logaritmo se tiene $\log 2 > \frac{1}{\rho} \log 2$ lo cual es una contradicción al hecho de que $\rho \in (0, 1]$, por lo tanto $\frac{\mathcal{O}}{2^{\frac{1}{\rho}}} + \frac{\mathcal{O}}{2^{\frac{1}{\rho}}} \subset \mathcal{O}$ lo cual es el resultado deseado.

Definición.- 3.0.72 *Un álgebra topológica A sobre $\mathbb{K}$ con multiplicación separadamente continua es **localmente pseudoconvexa** si tiene una base $\mathcal{L}_A$ de vecindades de cero que consiste de conjuntos absolutamente pseudoconvexos. Si además*

$$\inf\{k_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \in \mathcal{L}_A\} = k > 0,$$

*entonces A es un álgebra **localmente k -convexa** y cuándo $k = 1$, entonces A es un álgebra **localmente convexa**.*

Definición.- 3.0.73 *Un subconjunto $V \subset X$ es **multiplicativamente absorbente**, si para cada $a \in A$ existe un número $N(a, V) > 0$ tal que*

$$aV \cup Va \subset N(a, V)V.$$

Definición.- 3.0.74 *Un álgebra localmente pseudoconvexa A es **localmente multiplicativamente absorbentemente pseudoconvexa** (localmente A -pseudoconvexa), si A tiene una base $\mathcal{L}_A$ de vecindades de cero pseudoconvexas, multiplicativamente absorbentes y A es un álgebra **localmente multiplicativamente pseudoconvexa** (localmente m -pseudoconvexa), si cualquier $\mathcal{O} \in \mathcal{L}_A$ es idempotente.*

Nota: En el caso cuándo $k = 1$, estas álgebras son llamadas localmente A -convexas y localmente m -convexas, respectivamente.

Es posible definir la topología de cualquier álgebra A localmente pseudoconvexa a través de una colección $\mathcal{P}_A = \{p_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ de seminormas k_{λ} -homogéneas, donde $k_{\lambda} \in (0, 1]$ para cada $\lambda \in \Lambda$ ([42] y [12]).

Definición.- 3.0.75 *Sea A un álgebra topológica. Una seminorma p en A es k -homogénea si $p(\mu a) = |\mu|^k p(a)$ para cada $a \in A$ y $\mu \in \mathbb{K}$.*

Definición.- 3.0.76 *En el caso en que para cualquier $a \in A$ y cualquier $p_{\lambda} \in \mathcal{P}_A$ existen números positivos $M = M(a, \lambda)$ y $N = N(a, \lambda)$ tal que $p_{\lambda}(ab) \leq M p_{\lambda}(b)$ y $p_{\lambda}(ba) \leq N p_{\lambda}(b)$ para cada $b \in A$, entonces A es **localmente A -pseudoconvexa** y cuándo $M = N = p_{\lambda}(a)$ para cada $a \in A$ y $\lambda \in \Lambda$, entonces A es un álgebra localmente m -pseudoconvexa.*

Definición.- 3.0.77 Sea A un álgebra topológica, A es un álgebra **$\mathbf{A}$ -(k -normada)**, cuando la topología de A es definida por una norma k -homogénea $\|\cdot\|$, $k \in (0, 1]$, tal que para cualquier $a \in A$ existen números positivos $M(a)$ y $N(a)$ tal que $\|ab\| \leq M(a)\|b\|$ y $\|ba\| \leq N(a)\|b\|$ para cada $b \in A$.
 A es un álgebra m -(k -normada), si $N(a) = M(a) = \|a\|$ para cada $a \in A$.

Definición.- 3.0.78 Un álgebra topológica A es un álgebra **localmente idempotente** si tiene una base de vecindades de cero idempotentes.

Las álgebras topológicas localmente idempotentes fueron introducidas en [46]. Las álgebras localmente m -convexas se han estudiado con profundidad en [13],[10],[15],[31],[30] y las álgebras localmente m -pseudoconvexas en [12], las álgebras localmente idempotentes se han estudiado en [33],[46],[5].

Definición.- 3.0.79 Se dirá que el álgebra topológica A es

- a) Un álgebra **localmente absorbente** si A tiene una base de vecindades multiplicativamente absorbentes de cero.
- b) Un álgebra **localmente uniformemente absorbente** si A tiene una base de vecindades uniformemente multiplicativamente absorbentes de cero (es decir, para cada $a \in A$ fijo y cada vecindad $\mathcal{O}$ de cero en A existe un número positivo $\lambda(a)$ (el cual no depende de $\mathcal{O}$) tal que $a\mathcal{O} \cup \mathcal{O}a \subset \lambda(a)\mathcal{O}$);

3.0.7. La topología definida por una colección de $\mathbf{F}$ -seminormas

Definición.- 3.0.80 Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{K}$. Una **$\mathbf{F}$ -seminorma** es una función $q : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ la cual tiene las siguientes propiedades:

- (q_1) $q(\lambda x) \leq q(x)$ para todo x en X y λ en $\mathbb{K}$, con $|\lambda| \leq 1$;
- (q_2) $\lim_{n \rightarrow \infty} q(\frac{1}{n}x) = 0$ para toda x en X ;
- (q_3) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$ para todo x, y en X .

Si se cumple que $q(x) = 0$ implica que $x = 0$, entonces q es llamada una **$\mathbf{F}$ -norma** en X .

En este caso $d(x, y) = q(x - y)$ para cada $x, y \in X$, define una métrica d en A la cual tiene la propiedad

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \text{ para cada } x, y, z \text{ en } X.$$

Es sabido que la topología de cualquier espacio lineal topológico X coincide con la topología inicial definida por una colección de F -seminormas en X (ver [pg. 39][25]). Para mostrar que la misma situación sucede en el caso de álgebras topológicas, se probará primero el siguiente resultado.

Proposición 3.0.81 (*Proposición 2.1, en [6]*) Sea A un álgebra sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{Q} = \{q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una colección no vacía de F -seminormas en A y $\tau_{\mathcal{Q}}$ la topología inicial en A , definida por la colección $\mathcal{Q}$. Entonces $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$ es un álgebra topológica si $\mathcal{Q}$ satisface las condiciones:

(q_4) Para cada $a \in A$ fijo y para cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier $\lambda \in \Lambda$, existe $\delta_a > 0$ y $\lambda_a \in \Lambda$ tal que $q_\lambda(ab) < \epsilon$ y $q_\lambda(ba) < \epsilon$, siempre que $q_{\lambda_a}(b) < \delta_a$.

Más aun, $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$ es un álgebra topológica con multiplicación continua si $\mathcal{Q}$ satisface la condición

(q_5) Para cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier $\lambda \in \Lambda$ existe un $\delta > 0$ y un $\lambda' \in \Lambda$ tal que $q_\lambda(ab) < \epsilon$ siempre que $q_{\lambda'}(a) < \delta$ y $q_{\lambda'}(b) < \delta$.

Y $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$ es un álgebra localmente idempotente si $\mathcal{Q}$ satisface la condición

(q_6) Para cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier $\lambda \in \Lambda$ $q_\lambda(ab) < \epsilon$ siempre que $q_\lambda(a) < \epsilon$ y $q_\lambda(b) < \epsilon$.

Demostración: Ya que $\tau_{\mathcal{Q}}$ es la topología inicial en A definida por la colección $\mathcal{Q}$, entonces

$$\{\mathcal{O}_{\lambda\epsilon} : \lambda \in \Lambda, \epsilon > 0\}$$

es una sub-base de vecindades de cero en $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$, donde

$$\mathcal{O}_{\lambda\epsilon} = \{a \in A : q_\lambda(a) < \epsilon\}$$

son conjuntos balanceados y absorbentes para cada $\epsilon > 0$ y cada $\lambda \in \Lambda$. En efecto, sean $x \in \mathcal{O}_{\lambda\epsilon}$ y $\gamma \in \mathbb{K}$, con $|\gamma| \leq 1$, así $q_\lambda(\gamma x) \leq q_\lambda(x) < \epsilon$ (esto pasa por q_1), entonces $q_\lambda(\gamma x) < \epsilon$. Por lo tanto, $\gamma \mathcal{O}_{\lambda\epsilon} \subset \mathcal{O}_{\lambda\epsilon}$ siempre que $|\gamma| \leq 1$. Veamos que $\mathcal{O}_{\lambda\epsilon}$ es absorbente; sea $x \in A$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} q_\lambda(\frac{1}{n}x) = 0$ (por q_2), lo cual implica que para $B_\epsilon(0)$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_\lambda(\frac{1}{n}x) \in B_\epsilon(0)$ siempre que $n > N$, de esta manera el escalar que sirve para absorber a x es $\eta = N + 1$.

La suma $(a, b) \mapsto a + b$ en (A, τ_Q) es continua por (q_3) . En efecto, sea $\mathcal{O}_{\lambda\epsilon}$, basta tomar $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{O}_{\lambda\frac{\epsilon}{2}}$, así $\mathcal{U} + \mathcal{V} \subset \mathcal{O}_{\lambda\epsilon}$.

Y la multiplicación sobre $\mathbb{K}$ es continua en (A, τ_Q) por (q_1) .

Si además, $\mathcal{Q}$ satisface la condición (q_4) , entonces la multiplicación $(a, b) \mapsto ab$ en (A, τ_Q) es separadamente continua. Para mostrar esto, sea $\mathcal{O}$ una vecindad arbitraria de cero en la topología τ_Q en A . Entonces existe $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ tal que

$$\bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_k \epsilon} \subset \mathcal{O} \quad (3.1)$$

para cada $a \in A$ fijo y cada $k \in \mathbb{N}$ existen por la condición (q_4) un número $\delta_a(k) > 0$ y un índice $\lambda_a(k) \in \Lambda$ tales que $q_{\lambda_k}(ab) < \epsilon$ y $q_{\lambda_k}(ba) < \epsilon$ siempre que $q_{\lambda_a(k)}(b) < \delta_a(k)$. Sea ahora $\delta(a) = \min\{\delta_a(1), \dots, \delta_a(n)\}$ y

$$V_a = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_a(k)\delta_a}.$$

Entonces V_a es una vecindad de cero en A en la topología τ_Q y

$$aV_a \cup V_a a \subset \bigcap_{k=1}^n [a\mathcal{O}_{\lambda_a(k)\delta_a(k)} \cup \mathcal{O}_{\lambda_a(k)\delta_a(k)}a] \subset \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_k \epsilon} \subset \mathcal{O}.$$

Luego la multiplicación en (A, τ_Q) es separadamente continua. Consecuentemente, (A, τ_Q) es un álgebra topológica.

Si además $\mathcal{Q}$ satisface la condición q_5 , entonces la multiplicación $(a, b) \mapsto ab$ es continua en (A, τ_Q) . Para mostrar esto, sea de nuevo $\mathcal{O}$ una vecindad arbitraria de cero en la topología τ_Q en A . Entonces existe $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ tal que (3.1) se satisface. Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ existen por condición (q_5) , un número $\delta_k > 0$ y un índice $\lambda'_k \in \Lambda$ tal que $q_{\lambda_k}(ab) < \epsilon$, siempre que $q_{\lambda'_k}(a) < \delta_k$ y $q_{\lambda'_k}(b) < \delta_k$. Sea ahora $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ y

$$V = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_{\lambda'_k \delta}.$$

Entonces V es de nuevo una vecindad de cero en A en la topología τ_Q y

$$V \cdot V \subset \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_{\lambda'_k \delta_k} \mathcal{O}_{\lambda'_k \delta_k} \subset \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_k \epsilon} \subset \mathcal{O}.$$

Esto significa que la multiplicación en (A, τ_Q) es continua.

En caso que $\mathcal{Q}$ satisfaga la condición (q_6) . Entonces $\mathcal{O}_{\lambda\epsilon} \mathcal{O}_{\lambda\epsilon} \subset \mathcal{O}_{\lambda\epsilon}$ para cada $\epsilon > 0$ y cada $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, (A, τ_Q) tiene una base de vecindades idempotentes del cero. Entonces, (A, τ_Q) es un álgebra localmente idempotente. ■

Teorema 3.0.82 (Teorema 2.2 en [6]) *Cualquier álgebra topológica (A, τ) define una colección $\mathcal{Q}$ de F -seminormas en A tal que $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$ es un álgebra topológica (en particular, cuándo (A, τ) es un álgebra topológica con multiplicación continua, entonces $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$ es un álgebra con multiplicación continua) y $\tau = \tau_{\mathcal{Q}}$.*

Demostración: Sea M un subconjunto denso de $\mathbb{R}^+$ el cual consiste de todos los números racionales no negativos, que tienen una expansión diádica finita, es decir, podemos escribir a cualquiera de esos números ρ en la forma

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\rho) \cdot 2^{-n},$$

donde $\delta_0(\rho) \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\delta_n(\rho) \in \{0, 1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_n(\rho) = 0$ para n suficientemente grande.

Sea $\mathcal{L}_{(A, \tau)}$ una base de vecindades de cero en (A, τ) , que consiste de conjuntos balanceados, cerrados y $\mathcal{S} = \{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ el conjunto de todas las cadenas $S_\lambda = (U_n(\lambda))$ en $\mathcal{L}_{(A, \tau)}$, es decir

- 1) $U_n(\lambda) \in \mathcal{L}_{(A, \tau)}$,
- 2) $U_{n+1}(\lambda) + U_{n+1}(\lambda) \subset U_n(\lambda)$ para cada n en $\mathbb{N}_0$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, $S_\lambda = (U_n(\lambda)) \in \mathcal{S}$ y $\rho \in M$ sean

$$V_\lambda(\rho) = U_0(\lambda) + \cdots + U_0(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\rho) \cdot U_n(\lambda) \quad (3.2)$$

y

$$q_\lambda(a) = \inf\{\rho \in M : a \in V_\lambda(\rho)\}$$

para cada $a \in A$ y para cada $\lambda \in \Lambda$. Cualquier q_λ es una F -seminorma en A . Para ello se probará que la relación siguiente es verdadera

$$V_\lambda(\rho) + V_\lambda(\sigma) \subset V_\lambda(\rho + \sigma) \quad \text{para todo } \rho, \sigma \in M. \quad (3.3)$$

La prueba se realizará mediante inducción sobre N , donde N es el primer entero tal que a partir de ese número, $\delta_n(\rho) = \delta_n(\sigma) = 0$, $\rho, \sigma \in M$. Si $\rho, \sigma \in \mathbb{N}$, entonces $\delta_n(\rho) = \delta_n(\sigma) = 0$ para $n > N$, con $N = 0$ y así la relación (3.3) se satisface. Ahora, supóngase que para algún $N \in \mathbb{N}_0$, la relación (3.3) se satisface y $\rho, \sigma \in M$ son tales que $\delta_n(\rho) = \delta_n(\sigma) = 0$ siempre que $n > N$. Sean $\rho, \sigma \in M$ tales que $\delta_n(\rho) = \delta_n(\sigma) = 0$ para $n > N + 1$, considérense los siguientes números

$$\rho' = \rho - 2^{-N-1} \cdot \delta_{N+1}(\rho)$$

y

$$\sigma' = \sigma - 2^{-N-1} \cdot \delta_{N+1}(\sigma).$$

Entonces $\rho', \sigma' \in M$, más aun, $\rho' = \sum_{n=0}^N \delta_n(\rho) \cdot 2^{-n}$ y $\sigma' = \sum_{n=0}^N \delta_n(\sigma) \cdot 2^{-n}$, entonces $\delta_n(\rho') = \delta_n(\sigma') = 0$, con $n > N$. Por lo tanto,

$$V(\rho') + V(\sigma') \subset V(\rho' + \sigma')$$

por hipótesis de inducción. Nótese que $V(\rho) = V(\rho') + \delta_{N+1}(\rho)U_{N+1}$ y $V(\sigma) = V(\sigma') + \delta_{N+1}(\sigma)U_{N+1}$.

Así, se sigue que

$$V(\rho) + V(\sigma) \subset V(\rho' + \sigma') + \delta_{N+1}(\rho)U_{N+1} + \delta_{N+1}(\sigma)U_{N+1}. \quad (3.4)$$

Ahora se analizarán las cuatro posibles soluciones para $\delta_{N+1}(\rho)$ y $\delta_{N+1}(\sigma)$ en la relación (3.4).

- 1) El primero y más sencillo es cuándo ambos son cero. Así la relación (3.4) se convierte en la relación (3.3).
- 2) Si $\delta_{N+1}(\rho) = 1$ y $\delta_{N+1}(\sigma) = 0$, entonces por definición de V se tiene que

$$\begin{aligned} V(\rho) + V(\sigma) &\subset V(\rho' + \sigma') + U_{N+1} = V(\rho' + \sigma' + 2^{-N-1}) = \\ &V(\rho - 2^{-N-1}\delta_{N+1}(\rho) + \sigma + 2^{-N-1}) = V(\rho + \sigma) \end{aligned}$$

lo cual es exactamente la relación (3.3).

- 3) Si $\delta_{N+1}(\rho) = 0$ y $\delta_{N+1}(\sigma) = 1$, la prueba es análoga al caso anterior.
- 4) Sólo falta probar el caso cuándo $\delta_{N+1}(\rho) = \delta_{N+1}(\sigma) = 1$. De la relación (3.4) y el hecho de ser U_{N+1} un elemento de una cadena, se sigue que

$$V(\rho) + V(\sigma) \subset V(\rho' + \sigma') + U_N = V(\rho' + \sigma' + 2^{-N}) = V(\rho + \sigma).$$

Así la condición (3.3) queda probada. Ahora nótese que si $\rho \in M \setminus \{0\}$, $V(\rho)$ es absorbente. De esta manera, dado $x \in A$, existe $t > 0$ tal que $x \in tV_\lambda(\rho)$; usando (3.3) se tiene que $x \in V(t\rho)$. Así $q_\lambda(a)$ está bien definida.

Además q_λ satisface (q_1) ya que $V_\lambda(\rho)$ es balanceada, así, si $x \in V_\lambda(\rho)$, entonces $\eta x \in V_\lambda(\rho)$, siempre que $\eta \in \mathbb{K}$ tal que $|\eta| \leq 1$ lo cual implica

$$\{\rho \in M : x \in V_\lambda(\rho)\} \subseteq \{\rho \in M : \eta x \in V_\lambda(\rho)\}$$

tomando ínfimos en ambos lados de la relación anterior se obtiene que

$$q_\lambda(\eta x) \leq q_\lambda(x).$$

Sean $x \in A$ y $\rho \in M \setminus \{0\}$, como $V_\lambda(\rho)$ es absorbente, entonces existe $t > 0$ tal que $x \in tV_\lambda(\rho)$, es decir $\frac{x}{t} \in V_\lambda(\rho)$, lo cual implica que $q_\lambda(\frac{x}{t}) < \rho$. Por otro lado, si $n \geq t$ y como $V_\lambda(\rho)$ es balanceada, se tiene que

$$tV_\lambda(\rho) \subset nV_\lambda(\rho),$$

así, $q_\lambda(\frac{1}{n}x) \leq q_\lambda(\frac{1}{t}x)$ y por lo tanto

$$q_\lambda(\frac{1}{n}x) \leq q_\lambda(\frac{1}{t}x) \leq \rho \text{ para todo } n \geq t;$$

de esta manera se satisface (q_2) .

Para probar (q_3) sean $x, y \in A$ fijos y $\epsilon > 0$. Sean $\rho, \sigma \in M$ tales que

$$x \in V(\rho), y \in V(\sigma),$$

$\rho \leq q_\lambda(x) + \frac{1}{2}\epsilon$ y $\sigma \leq q_\lambda(y) + \frac{1}{2}\epsilon$. Por (3.3) $x + y \in V(\rho + \sigma)$. Por lo tanto, $q_\lambda(x + y) \leq \rho + \sigma \leq q_\lambda(x) + q_\lambda(y) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, se obtiene lo deseado.

Además

$$\ker q_\lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n^\lambda;$$

en efecto, si $a \in \ker q_\lambda$, entonces $q_\lambda(a) < 2^{-n}$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$, por lo tanto, $a \in V_\lambda(2^{-n}) = U_n^\lambda$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$. Por otro lado, si $a \in U_n^\lambda$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $q_\lambda(a) \leq 2^{-n}$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, $q_\lambda(a) = 0$, es decir, $a \in \ker q_\lambda$.

Para mostrar que $\mathcal{Q} = \{q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ satisface la condición (q_4) , sea $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$ (para este λ , se fija una cadena $S_\lambda = (U_n^\lambda)$ en $\mathcal{L}_{(A, \tau)}$) y $\epsilon > 0$. Entonces existe un número $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon$. Ya que la multiplicación $(a, b) \mapsto ab$ en (A, τ) es separadamente continua, entonces existe una vecindad $V_a \in \mathcal{L}_{(A, \tau)}$ tal que

$$aV_a \cup V_aa \subset U_{n_\epsilon}^\lambda.$$

Sea (U_n) una cadena en $\mathcal{L}_{(A,\tau)}$ generada por V_a , es decir $U_0 = V_a$ y los otros miembros de esta cadena están definidos por V_a . Por lo tanto, existe un índice $\lambda_a \in \Lambda$ tal que $S_{\lambda_a} = (U_n^{\lambda_a})$ donde $U_0^{\lambda_a} = V_a$ y $U_n^{\lambda_a} = U_n$ si $n \geq 1$. Ahora, $V_a = V_{\lambda_a}(1)$ y $aV_a \cup V_a a \subset U_{n_\epsilon}^\lambda = V_\lambda(\frac{1}{2^{n_\epsilon}})$. Por lo tanto, para cualquier $a \in A$ fijo y para cualquier $\lambda \in \Lambda$, $\epsilon > 0$ existe un índice $\lambda_a \in \Lambda$ y un número $\epsilon_a > 0$ tal que $q_\lambda(ab) \leq 2^{-n_\epsilon} < \epsilon$ y $q_\lambda(ba) \leq 2^{-n_\epsilon} < \epsilon$ siempre que $q_{\lambda_a}(b) < \epsilon_a = 1$. De esta manera $\mathcal{Q}$ satisface la condición (q_4) . Por lo tanto, por la proposición anterior $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$ es un álgebra topológica.

En particular, cuándo (A, τ) es un álgebra topológica con multiplicación continua, entonces la multiplicación en $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$ es también continua. En efecto, sea $\lambda \in \Lambda$ (para este λ se fija nuevamente una cadena $S_\lambda = (U_n^\lambda)$ en $\mathcal{L}_{(A,\tau)}$) y $\epsilon > 0$. Entonces, existe un número $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon$. Ya que la multiplicación $(a, b) \mapsto ab$ en (A, τ) es continua, entonces existe un elemento $V \in \mathcal{L}_A$ tal que $VV \subset U_{n_\epsilon}^\lambda$. Sea ahora (U_n) la cadena en $(\mathcal{L}_{(A,\tau)})$ para la cual $U_0 = V$. Entonces existe $\lambda' \in \Lambda$ tal que

$$S_{\lambda'} = (U_n^{\lambda'}), \text{ donde } U_0^{\lambda'} = V,$$

si $a, b \in V = V_{\lambda'}(1)$. Entonces $q_{\lambda'}(a) < 1$, $q_{\lambda'}(b) < 1$ y de la siguiente relación

$$ab \in VV \subset U_{n_\epsilon}^\lambda = V_\lambda(\frac{1}{2^{n_\epsilon}}),$$

se sigue que $q_\lambda(ab) \leq \frac{1}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon$. Por lo tanto, para cada $\lambda \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$, existe un $\lambda' \in \Lambda$ y $\epsilon' > 0$ tal que $q_\lambda(ab) < \epsilon$ siempre que $q_{\lambda'}(a) < 1$ y $q_{\lambda'}(b) < 1$ (aquí $\epsilon' = 1$). Esto muestra que $\mathcal{Q}$ satisface la condición (q_5) . Consecuentemente por la proposición anterior $(A, \tau_{\mathcal{Q}})$ es un álgebra topológica con multiplicación continua.

Ahora se mostrará que $\tau = \tau_{\mathcal{Q}}$. Para esto, sea $U \in \mathcal{L}_{(A,\tau)}$, $S_{\lambda_0} = (U_n^{\lambda_0})$ una cadena en $\mathcal{L}_{(A,\tau)}$ para la cual $U_0^{\lambda_0} = U$ y sea $u \in \mathcal{O}_{\lambda_0,1}$, donde $\mathcal{O}_{\lambda,\epsilon} = \{x \in A : q_\lambda(x) < \epsilon\}$. Entonces $q_{\lambda_0}(u) < 1$, así $u \in V_{\lambda_0}(1) = U_0^{\lambda_0} = U$. Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{O}_{\lambda_0,1} \subset U$. Luego, $\epsilon \mathcal{O}_{\lambda_0,1} = \mathcal{O}_{\lambda_0,\epsilon}$, de esta manera $\mathcal{O}_{\lambda_0,\epsilon} \subset U$, ya que $\epsilon \mathcal{O}_{\lambda_0,1} \subset \mathcal{O}_{\lambda_0,1} \subset U$. Entonces $\tau \subset \tau_{\mathcal{Q}}$. Sea ahora $\mathcal{O} \in \mathcal{L}_{(A,\tau_{\mathcal{Q}})}$, entonces existen $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ (con los λ' s anteriores, se fijan m cadenas $S_{\lambda_1} = (U_n^{\lambda_1}), \dots, S_{\lambda_m} = (U_n^{\lambda_m})$ en $\mathcal{L}_{(A,\tau)}$) tales que

$$\bigcap_{k=1}^m \mathcal{O}_{\lambda_k,\epsilon} \subset \mathcal{O}.$$

De nuevo existe un número $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon$. Ahora, sea

$$U = \bigcap_{k=1}^m U_{n_\epsilon}^{\lambda_k},$$

la cual es una vecindad de cero en A en la topología τ . Ya que $U_{n_\epsilon}^{\lambda_k} = V_{\lambda_k}(\frac{1}{2^{n_\epsilon}})$ para cada $k \in \mathbb{N}_m$, entonces si $u \in U$ se sigue que $q_{\lambda_k}(u) \leq \frac{1}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon$ para toda $k \in \mathbb{N}_m$. Por lo tanto, $U \subset \mathcal{O}$ es decir, $\tau_{\mathcal{Q}} \subset \tau$, así $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau$. ■

Corolario 3.0.83 Sea (A, τ) un álgebra localmente pseudoconvexa; $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in A\}$ la colección de seminormas no homogéneas en A , la cual define la topología τ ; $\tau_{\mathcal{P}}$ la topología en A , definida por la colección $\mathcal{P}$; $\mathcal{L}_A$ la base de vecindades de cero en A , para la cual los conjuntos son cerrados y balanceados; $\mathcal{Q} = \{q_S : S \text{ es una cadena en } \mathcal{L}_A\}$ y $\tau_{\mathcal{Q}}$ la topología en A definida por la colección $\mathcal{Q}$ de F -seminormas en A . Entonces $\tau = \tau_{\mathcal{P}} = \tau_{\mathcal{Q}}$.

Demostración: Por definición $\tau = \tau_{\mathcal{P}}$ y por el teorema anterior $\tau = \tau_{\mathcal{Q}}$. Por lo tanto, estas tres topologías coinciden. ■

En el punto de vista de álgebras es importante saber, cuándo cualquier F -seminorma definida por una cadena de $\mathcal{L}_A$ es submultiplicativa.

Proposición 3.0.84 (Proposición 2.4, en [6]) Sea A un álgebra topológica, $\mathcal{L}_A$ la base de todas las vecindades cerradas y balanceadas de cero en A y $S = (U_n)$ una cadena en $\mathcal{L}_A$. Entonces la F -seminorma q_S , definida por S , es submultiplicativa si y solo si los eslabones U_n de S satisfacen la condición

$$U_n \cdot U_m \subset U_{n+m} \quad (3.5)$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $S = (U_n)$ una cadena en $\mathcal{L}_A$ tal que la F -seminorma q_S , definida por S , es submultiplicativa, es decir

$$q_S(ab) \leq q_S(a)q_S(b) \quad \text{para toda } a, b \in A.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ fijos, $a \in U_n = V_S(\frac{1}{2^n})$ y $b \in U_m = V_S(\frac{1}{2^m})$. Entonces $q_S(a) \leq \frac{1}{2^n}$ y $q_S(b) \leq \frac{1}{2^m}$. Por lo tanto,

$$q_S(ab) \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{n+m}}$$

o

$$ab \in V_S(\frac{1}{2^{n+m}}) = U_{n+m}.$$

Así, $U_n \cdot U_m \subset U_{n+m}$.

Recíprocamente, sea ahora $S = (U_n)$ una cadena en $\mathcal{L}_A$ tal que los eslabones U_n de S satisface la condición (3.5) para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Más aun sean ρ, σ números diádicos tales que $a \in V_S(\rho)$, $\rho \leq q_S(a) + \epsilon$, $b \in V_S(\sigma)$ y $\sigma \leq q_S(b) + \epsilon$. Entonces $ab \in V_S(\rho)V_S(\sigma)$.

Para cualquier $s \geq 1$ y $l \geq 0$ sea

$$U_l(s) = U_l + \cdots + U_l.$$

Ya que

$$V_S(\rho)V_S(\sigma) = [U_0(\delta_0(\rho)) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\rho)U_n][U_0(\delta_0(\sigma)) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\sigma)U_n] \subset U_0(\delta_0(\rho)\delta_0(\sigma)) + T_1 + T_2 + T_3$$

donde

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\rho)U_n[U_0(\delta_0(\sigma))] \subset \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\rho)[U_n(\delta_0(\sigma))] = T'_1$$

$$T_2 = [U_0(\delta_0(\rho))] \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\sigma)U_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\sigma)[U_n(\delta_0(\rho))] = T'_2$$

$$T_3 = \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{k=1}^n \delta_k(\rho)\delta_{n-k+1}(\sigma)U_kU_{n-k+1}] \subset \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{k=1}^n \delta_k(\rho)\delta_{n-k+1}(\sigma)U_{n+1}] = T'_3$$

por la condición (3.5).

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ab \in U_0(\delta_0(\rho)\delta_0(\sigma)) + T'_1 + T'_2 + T'_3 &\subset V_S(\delta_0(\rho)\delta_0(\sigma)) + V_S(K_\rho) + \cdots + V_S(K_\rho) + V_S(K_\sigma) + \\ &\cdots + V_S(K_\sigma) + V_S(K_{\rho\sigma}) \subset V_S(\delta_0(\rho)\delta_0(\sigma)) + \delta_0(\sigma)V_S(K_\rho) + \delta_0(\rho)V_S(K_\sigma) + V_S(K_{\rho\sigma}) = \\ &V_S([\delta_0(\rho) + K_\rho][\delta_0(\sigma) + K_\sigma]) = V_S(\rho\sigma) \end{aligned}$$

Pues $V_S(\alpha) + V_S(\beta) \subset V_S(\alpha + \beta)$ para cada α y β números diádicos, donde

$$K_l = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(l) \frac{1}{2^n} \text{ y } K_{lm} = \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{k=1}^n \delta_k(l)\delta_{n-k+1}(m)] \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Por lo tanto,

$$q_S(ab) \leq \rho\sigma \leq (q_S(a) + \epsilon)(q_S(b) + \epsilon),$$

de lo cual se sigue que q_S es submultiplicativa (pues ϵ es arbitrario). ■

Corolario 3.0.85 *Sea A un álgebra topológica, $\mathcal{L}_A$ la base de vecindades cerradas y balanceadas de cero en A y*

$$\mathcal{Q}_A = \{q_S : S \text{ es una cadena en } \mathcal{L}_A\}$$

la colección de F -seminormas submultiplicativas en A , la cual define la topología de A . Entonces A es un álgebra localmente idempotente.

Demostración: Sea A un álgebra topológica tal que cualquier F -seminorma q_S en $\mathcal{Q}_A$ es submultiplicativa, $\mathcal{O} \in \mathcal{L}_A$ un elemento arbitrario y $S = (U_n)$ la cadena en $\mathcal{L}_A$ con $U_0 = \mathcal{O}$. Ya que q_S es submultiplicativa, entonces todos los elementos U_n de la cadena S satisfacen la condición (3.5), por lo tanto $\mathcal{O}$ es un conjunto idempotente, ya que

$$\mathcal{O}\mathcal{O} = U_0U_0 \subset U_{0+0} = U_0 = \mathcal{O}.$$

Por lo tanto, A es un álgebra localmente idempotente. ■

NOTA: Recordemos que un álgebra topológica, para la cual cualquier F -seminorma en $\mathcal{Q}_A$ es submultiplicativa, es una m -álgebra en (ver [pag. 767][33]) y una álgebra topológica m -convexa en ([pag. 335][45]). W. Żelazko y Murali en [46] y [33] respectivamente se preguntaron si cualquier álgebra localmente idempotente es una m -álgebra. Por la proposición 3.0.84, la respuesta es no, pues los elementos idempotentes de una cadena no necesariamente satisfacen la condición (3.5).

3.0.8. Generalizaciones de la descomposición de Arens-Michael.

Para representar a las álgebras topológicas mediante límites proyectivos, serán necesarios los siguientes resultados.

Lema 3.0.86 Sean A un álgebra topológica, $\mathcal{L}_A$ una base de vecindades balanceadas del cero y M un subconjunto de A . Entonces la cerradura de M está dada por

$$\overline{M} = \bigcap_{U \in \mathcal{L}_A} (M + U)$$

Demostración: $x \in \overline{M}$ si y solo si $(x - U) \cap M \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{L}_A$, si y solo si $x \in M + U$ para cada $U \in \mathcal{L}_A$, si y solo si $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{L}_A} (M + U)$. ■

Nota 1: En particular, si el conjunto M es el conjunto $\{0\}$, se tiene que

$$\overline{\{0\}} = \bigcap_{U \in \mathcal{L}_A} (U).$$

Nota 2: La cerradura es en la topología dada por la base de vecindades $\mathcal{L}_A$.

Lema 3.0.87 Sean A un álgebra topológica con multiplicación continua e I un ideal bilateral de A . Entonces $\bar{I}$ es también un ideal bilateral en A .

Demostración: Sean $x \in \bar{I}$, $a \in A$ y W una vecindad de xa . Como la multiplicación es continua, se tiene que existen U, V vecindades de x y de a respectivamente, tales que

$$U \cdot V \subset W.$$

Dado que $x \in \bar{I}$, entonces $U \cap I \neq \emptyset$, es decir existe $x_0 \in U$ tal que $x_0 \in I$, luego $x_0 \cdot V \subset I$, de esta manera se tiene que $(U \cdot V) \cap I \neq \emptyset$ y así $W \cap I \neq \emptyset$. Entonces $xa \in \bar{I}$ y por lo tanto $\bar{I}$ es un ideal derecho en A . Análogamente se prueba que $\bar{I}$ es un ideal izquierdo en A . Por lo tanto $\bar{I}$ es un ideal bilateral en A . ■

Nota 3: La prueba anterior se puede reproducir para el caso cuando el álgebra tiene multiplicación separadamente continua.

Lema 3.0.88 Sea A un álgebra sobre $\mathbb{K}$ localmente uniformemente absorbente (localmente idempotente) de Hausdorff, $\mathcal{L}_A$ la base de todas las vecindades de cero cerradas, balanceadas y uniformemente absorbente (respectivamente, cerradas, balanceadas e idempotentes) de A y $S_A = (U_n)$ una cadena en $\mathcal{L}_A$. Entonces el núcleo

$$N(S_A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

de S_A es un ideal bilateral cerrado en A .

Demostración: Se sigue de los lemas anteriores ■

Teorema 3.0.89 (Teorema 3.2 en [6]) Para cualquier álgebra A (real o compleja) localmente uniformemente absorbente de Hausdorff existe un sistema proyectivo

$$\{A_\lambda; h_{\lambda\mu}, \Lambda\}$$

de álgebras metrizable localmente uniformemente absorbentes y homomorfismos continuos $h_{\lambda\mu}$ de A_λ a A_μ (siempre que $\lambda \leq \mu$) tal que A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa del límite proyectivo $\varprojlim A_\lambda$ de ese sistema. En el caso particular cuándo A es completa, entonces A y $\varprojlim A_\lambda$ son topológicamente isomorfas.

Si A es un álgebra localmente A -pseudoconvexa (localmente A -convexa) de Hausdorff, entonces A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa del límite proyectivo de $\varprojlim A_\lambda$ de álgebras A -(k_λ normadas) (respectivamente, álgebras A -normadas). En particular, cuando A es completa, entonces A y $\varprojlim A_\lambda$ son topológicamente isomorfas.

Demostración: Sea A un álgebra localmente uniformemente absorbente de Hausdorff, $\mathcal{L}_A$ la base de vecindades de cero cerradas, balanceadas y uniformemente absorbentes en A y $\mathcal{S}_A = \{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ la colección de todas las cadenas en $\mathcal{L}_A$. Es decir, cualquier $S_\lambda \in \mathcal{S}_A$ es una suceción $(O_n^\lambda) \in \mathcal{L}_A$, donde sus elementos satisfacen la condición

$$O_{n+1}^\lambda + O_{n+1}^\lambda \subset O_n^\lambda$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Se define el orden $\prec$ en Λ de la siguiente manera: se dice que $\lambda \prec \mu$ en Λ si y solo si $S_\mu \subset S_\lambda$, es decir, si $S_\lambda = (O_n^\lambda)$ y $S_\mu = (O_n^\mu)$, entonces $O_n^\mu \subset O_n^\lambda$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así definido es un orden parcial. En efecto,

- i) Es reflexiva, ya que $O_n^\lambda \subset O_n^\lambda$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
- ii) Es antisimétrica, ya que si $\lambda \prec \mu$ y $\mu \prec \lambda$, entonces $O_n^\mu \subset O_n^\lambda$ y $O_n^\lambda \subset O_n^\mu$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así $O_n^\mu = O_n^\lambda$.
- iii) Es transitiva, ya que si $\lambda \prec \mu$ y $\mu \prec \gamma$, entonces $O_n^\mu \subset O_n^\lambda$ y $O_n^\gamma \subset O_n^\mu$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de esta manera $O_n^\gamma \subset O_n^\mu \subset O_n^\lambda$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $O_n^\gamma \subset O_n^\lambda$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\lambda \prec \gamma$.

Con lo cual $(\Lambda, \prec)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Para mostrar que $(\Lambda, \prec)$ es un conjunto dirigido, sea $S_{\lambda_1} = (O_n^{\lambda_1})$ y $S_{\lambda_2} = (O_n^{\lambda_2})$ cadenas arbitrarias pero fijas en $\mathcal{S}_A$ y sea $S_\mu = (O_n^\mu)$ una cadena en $\mathcal{S}_A$ la cual se define de la siguiente manera: sea $O_1^\mu \in \mathcal{L}_A$ tal que $O_1^\mu \subset O_1^{\lambda_1} \cap O_1^{\lambda_2}$ para cada $n \geq 1$, sea U_{n+1} una vecindad de cero en $\mathcal{L}_A$ tal que $U_{n+1} + U_{n+1} \subset O_n^\mu$ y O_{n+1}^μ una vecindad en $\mathcal{L}_A$ tal que

$$O_{n+1}^\mu \subset U_{n+1} \cap O_{n+1}^{\lambda_1} \cap O_{n+1}^{\lambda_2}.$$

Entonces

$$O_{n+1}^\mu + O_{n+1}^\mu \subset U_{n+1} \cap O_{n+1}^{\lambda_1} \cap O_{n+1}^{\lambda_2} + U_{n+1} \cap O_{n+1}^{\lambda_1} \cap O_{n+1}^{\lambda_2} \subset U_{n+1} + U_{n+1} \subset O_{n+1}^\mu$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que $S_\mu \in \mathcal{S}_A$ y $O_n^\mu \subset O_n^{\lambda_1} \cap O_n^{\lambda_2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lambda_1 \prec \mu$ y $\lambda_2 \prec \mu$. En efecto, ya que $O_n^\mu \subset O_n^{\lambda_1} \cap O_n^{\lambda_2} \subset O_n^{\lambda_1}$ y $O_n^\mu \subset O_n^{\lambda_1} \cap O_n^{\lambda_2} \subset O_n^{\lambda_2}$ con lo cual se prueba que $(\Lambda, \prec)$ es un conjunto dirigido.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea q_λ la F -seminorma en A , definida por la cadena $S_\lambda = (O_n^\lambda)$,

$$N_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n^\lambda$$

donde N_λ es un ideal bilateral cerrado por el lema 3.0.88, $A_\lambda = A/\ker q_\lambda$ y π_λ el homomorfismo canónico de A sobre A_λ . Más aun, sea $\bar{q}_\lambda(\pi_\lambda(a)) = q_\lambda(a)$ para cada $a \in A$. Ya que $\ker q_\lambda = N_\lambda$, entonces $\bar{q}_\lambda$ es una F -norma en A_λ . En efecto, sea $\bar{a} \in A_\lambda$ tal que $\bar{q}_\lambda(\bar{a}) = 0$, entonces $q_\lambda(a) = 0$, así $a \in \ker q_\lambda = N_\lambda$, por lo tanto a es congruente con cero módulo N_λ , de esta manera $\bar{q}_\lambda$ es una F -norma.

Sea τ_{A_λ} la topología en A_λ definida por $\bar{q}_\lambda$. Así $(A_\lambda, \tau_{A_\lambda})$ es un álgebra metrizable localmente uniformemente absorbente para toda $\lambda \in \Lambda$.

Para cualquier $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \prec \mu$, sea $h_{\lambda\mu}$ el morfismo definido por $h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a)) = \pi_\lambda(a)$ para cada $a \in A$. Entonces $h_{\lambda\mu}$ es un homomorfismo continuo de A_μ sobre A_λ , $h_{\lambda\lambda}$ es el morfismo identidad en A_λ para toda $\lambda \in \Lambda$ y $h_{\lambda\mu} \circ h_{\mu\gamma} = h_{\lambda\gamma}$ para toda $\lambda, \gamma, \mu \in \Lambda$, con $\lambda \prec \mu \prec \gamma$. En efecto, dado que $\lambda \prec \mu$, entonces $q_\lambda(a) \leq q_\mu(a)$ para toda $a \in A$, se sigue de tomar ínfimos en la siguiente contención

$$\{\rho \in M : a \in V_\mu(\rho)\} \subset \{\rho \in M : a \in V_\lambda(\rho)\},$$

luego

$$\bar{q}_\lambda(h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a))) = \bar{q}_\lambda(\pi_\lambda(a)) = q_\lambda(a) \leq q_\mu(a) = \bar{q}_\mu(\pi_\mu(a))$$

lo cual prueba la continuidad de $h_{\lambda\mu}$.

Así $\{A_\lambda, h_{\lambda\mu}, \Lambda\}$ es un sistema proyectivo de álgebras metrizables localmente uniformemente absorbentes A_λ con homomorfismos continuos $h_{\lambda\mu}$ y

$$\varprojlim A_\lambda = \{(\pi_\lambda(a))_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda : h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a)) = \pi_\lambda(a), \text{ siempre que } \lambda \prec \mu\}$$

es el límite proyectivo de ese sistema.

Sea e el morfismo definido por $e(a) = (\pi_\lambda(a))_{\lambda \in \Lambda}$ para cada $a \in A$ y Pr_λ la proyección de $\prod_{\mu \in \Lambda} A_\mu$ sobre A_λ para cada $\lambda \in \Lambda$. Ya que $Pr_\lambda(e(a)) = \pi_\lambda(a)$ para cada $a \in A$ y cada $\lambda \in \Lambda$ y π_λ es continuo para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces e es un morfismo continuo de A en $\prod_{\mu \in \Lambda} A_\mu$. Más aun, si $a, b \in A$ son tales que $e(a) = e(b)$, entonces $\pi_\lambda(a) = \pi_\lambda(b)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, $a + N_\lambda = b + N_\lambda$, lo cual implica que $a - b \in N_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Entonces

$$a - b \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = \bigcap_{O \in \mathcal{L}_A} O = 0_A$$

dado que A es un espacio de Hausdorff. Lo cual significa que $a = b$. Así e es un morfismo inyectivo.

Por otro lado, el morfismo inverso

$$e^{-1} : e(A) \longrightarrow A$$

es también continuo. En efecto nótese que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} e(A) & \xrightarrow{e^{-1}} & A \\ & \searrow Pr_\lambda & \downarrow \pi_\lambda \\ & & A_\lambda \end{array} \quad (3.6)$$

de esta manera se tiene que e^{-1} es continuo, ya que Pr_λ es continuo para todo $\lambda \in \Lambda$; es decir,

$$\pi_\alpha \circ e^{-1} \text{ es continuo para todo } \lambda \in \Lambda$$

y dado que A tiene la topología inicial dada por los morfismos π_λ , entonces por el teorema 1.0.13 se sigue que e^{-1} es continuo.

Para mostrar que $e(A)$ es denso en $\varprojlim A_\lambda$, sea $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \varprojlim A_\lambda$ un elemento arbitrario y $\mathcal{O}$ una vecindad arbitraria de $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \varprojlim A_\lambda$. Entonces existe una vecindad $\mathcal{U}$ de $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ tal que $\mathcal{O} = \mathcal{U} \cap \varprojlim A_\lambda$. Entonces existe un subconjunto finito $H \subset \Lambda$ tal que $\mathcal{U}' = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset \mathcal{U}$, donde U_λ es una vecindad de $a_\lambda \in A_\lambda$, si $\lambda \in H$ y $U_\lambda = A_\lambda$ si $\lambda \in \Lambda \setminus H$. Sea $\mu \in \Lambda$ tal que $\lambda \prec \mu$ para toda $\lambda \in H$ y

$$V = \bigcap_{\lambda \in H} h_{\lambda\mu}^{-1}(U_\lambda).$$

Entonces V es vecindad de $a_\mu \in A_\mu$. Sea $a \in \pi_\mu^{-1}(V)$. Entonces $\pi_\mu(a) \in V$. Por lo tanto, $\pi_\lambda(a) = h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a)) \in U_\lambda$ para toda $\lambda \in H$. Lo cual significa que $e(a) \in \mathcal{U}' \cap \varprojlim A_\lambda \subset \mathcal{U} \cap \varprojlim A_\lambda = \mathcal{O}$. Así, $e(A)$ es denso en $\varprojlim A_\lambda$.

Si ahora A es un álgebra completa, localmente uniformemente absorbente de Hausdorff, sea $(e(a_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ una red de Cauchy en $e(A)$ y $\mathcal{O}$ cualquier vecindad de cero en (A, τ) . Ya que e es un morfismo abierto de A sobre $e(A)$, entonces $e(\mathcal{O})$ es una vecindad de cero en $e(A)$. Así, existe un índice $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $e(a_\beta) - e(a_\gamma) \in e(\mathcal{O})$ o $a_\beta - a_\gamma \in \mathcal{O}$ siempre que $\beta, \gamma \in \Lambda$, con $\alpha_0 \prec \beta$ y $\alpha_0 \prec \gamma$. Lo cual significa que $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es una red de Cauchy en A . Ya que A es completa, entonces existe un elemento $a_0 \in A$ tal que $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a a_0 en A . Así $(e(a_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $e(a_0)$ en $e(A)$ pues e es continuo. Consecuentemente, $e(A)$ es completo y por lo tanto es cerrado en $\varprojlim A_\lambda$. Debido a que $e(A)$ es denso en $\varprojlim A_\lambda$, entonces $e(A) = \varprojlim A_\lambda$.

Sea ahora A un álgebra localmente A -pseudoconvexa (localmente A -convexa) de Hausdorff y $\mathcal{P} = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una colección saturada de seminormas K_λ -homogéneas en A con $K_\lambda \in (0, 1]$ para cada $\lambda \in \Lambda$ (respectivamente una colección de seminormas homogéneas en A) la cual define la topología de A . Se toma a $A_\lambda = A / \ker p_\lambda$ y las normas $\bar{p}_\lambda$ en A_λ se definen de la siguiente manera:

$$\bar{p}_\lambda(\pi_\lambda(a)) = p_\lambda(a) \text{ para cada } a \in A \text{ y } \lambda \in \Lambda,$$

donde π_λ es el homomorfismo canónico de A sobre A_λ .

Entonces $\ker p_\lambda$ es un ideal bilateral cerrado en A y A_λ es un álgebra A -(k_λ -normada) (si A es un álgebra localmente A -convexa, entonces A_λ es un álgebra A -normada) para cada $\lambda \in \Lambda$ fijo. El orden $\prec$ en Λ se define de la siguiente manera: $\lambda \prec \mu$ si y solo si $p_\lambda(a) \leq p_\mu(a)$ para cada $a \in A$. Entonces $(\Lambda, \prec)$ es un conjunto dirigido. En efecto

- 1) Es reflexiva, ya que $p_\lambda(a) \leq p_\lambda(a)$, entonces $\lambda \prec \lambda$.
- 2) Es antisimétrica, ya que si $\alpha, \beta \in \Lambda$, tal que $\alpha \prec \beta$ y $\beta \prec \alpha$, entonces $p_\alpha(a) \leq p_\beta(a)$ y $p_\beta(a) \leq p_\alpha(a)$, así $p_\alpha = p_\beta$ y de esta manera $\alpha = \beta$.
- 3) Es transitiva, ya que si $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, son tales que $\alpha \prec \beta$ y $\beta \prec \gamma$, entonces $p_\alpha(a) \leq p_\beta(a)$ y $p_\beta(a) \leq p_\gamma(a)$, así $p_\alpha(a) \leq p_\gamma(a)$, lo cual implica que $\alpha \prec \gamma$.

Como antes, para cada $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \prec \mu$, se define el homomorfismo $h_{\lambda\mu}$ de A_μ en A_λ por $h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a)) = \pi_\lambda(a)$ para cada $a \in A$. Entonces $h_{\lambda\mu}$ con $\lambda \prec \mu$ es un morfismo continuo, pues

$$\bar{p}_\lambda(h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a))) = \bar{p}_\lambda(\pi_\lambda(a)) = p_\lambda(a) \leq p_\mu(a) = \bar{p}_\mu(\pi_\mu(a))$$

para cada $a \in A$. De nuevo, en forma similar, $\{A_\lambda : h_{\lambda\mu}, \Lambda\}$ es un sistema proyectivo de álgebras A -(k_λ -normadas) (respectivamente, álgebras A -normadas) y A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa del límite proyectivo $\varprojlim A_\lambda$ de ese sistema. En el caso cuando A es completa, A y $\varprojlim A_\lambda$ son topológicamente isomorfas. ■

Teorema 3.0.90 (Teorema 3.3 en [6]) *Para cualquier álgebra A (real o compleja) localmente idempotente de Hausdorff existe un sistema proyectivo*

$$\{\tilde{A}_\lambda; \tilde{h}_{\lambda\mu}, \Lambda\}$$

de álgebras de Fréchet localmente idempotente y homomorfismos continuos $\tilde{h}_{\lambda\mu}$ de $\tilde{A}_\lambda$ a $\tilde{A}_\mu$ (siempre que $\lambda \leq \mu$) tal que A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa del límite proyectivo $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ de ese sistema. En el caso particular, cuándo además, A es completa, entonces A y $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ son topológicamente isomorfas.

Más aun, si A es un álgebra localmente m -pseudoconvexa (localmente m -convexa) de Hausdorff, entonces A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa del límite proyectivo de $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ de álgebras k_λ -Banach (respectivamente, álgebras de Banach). En particular, cuándo además A es completa, entonces A y $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ son topológicamente isomorfas.

Demostración: Sea A un álgebra localmente idempotente de Hausdorff, $\mathcal{L}_A$ la base de vecindades cerradas y balanceadas de cero en A y $\mathcal{S}_A = \{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ la colección de todas las cadenas en $\mathcal{L}_A$. Similarmente como en la prueba del teorema anterior, se define el orden $\prec$ en Λ de la siguiente manera: se dice que $\lambda \prec \mu$ en Λ si y solo si $S_\mu \subset S_\lambda$. Entonces $(\Lambda, \prec)$ es un conjunto dirigido.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea q_λ la F -seminorma en A definida por la cadena $S_\lambda = (O_n^\lambda)$,

$$N_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n^\lambda$$

(por el lema 3.0.88 N_λ es un ideal bilateral cerrado en A), $A_\lambda = A/N_\lambda$ y sea π_λ el homomorfismo canónico de A sobre A_λ . Más aun, sea $\bar{q}_\lambda(\pi_\lambda(a)) = q_\lambda(a)$ para cada $a \in A$, $\tilde{A}_\lambda$ la completación de A_λ , ν_λ el isomorfismo topológico de A_λ sobre una subálgebra densa de $\tilde{A}_\lambda$ (definida por la completación de A_λ), $\tilde{q}_\lambda$ la extensión de $\bar{q}_\lambda \circ \nu_\lambda^{-1}$ a $\tilde{A}_\lambda$ y $\tilde{\tau}_\lambda$ la topología en $\tilde{A}_\lambda$, definida por $\tilde{q}_\lambda$. Entonces

$$\tilde{q}_\lambda[(\nu_\lambda \circ \pi_\lambda)(a)] = \bar{q}_\lambda(\pi_\lambda(a)) = q_\lambda(a)$$

para cada $a \in A$ y $\ker q_\lambda = N_\lambda$. Por lo tanto, $\tilde{q}_\lambda$ es una F -norma en $\tilde{A}_\lambda$. Ya que A_λ es un álgebra metrizable localmente idempotente, entonces la multiplicación en A_λ es continua, por lo cual $\tilde{A}_\lambda$ es un álgebra. Por lo tanto, $(\tilde{A}_\lambda, \tilde{\tau})$ es un álgebra localmente idempotente de Fréchet para cada $\lambda \in \Lambda$.

Similarmente como en la prueba del teorema anterior para cada $\lambda, \mu \in \Lambda$, con $\lambda \prec \mu$, se define el morfismo $h_{\lambda\mu}$ por $h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a)) = \pi_\lambda(a)$ para toda $a \in A$. Entonces $h_{\lambda\mu}$ es un homomorfismo continuo de A_μ en A_λ , $h_{\lambda\lambda}$ es el morfismo identidad en A_λ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $h_{\lambda\mu} \circ h_{\mu\gamma} = h_{\lambda\gamma}$ para cada $\lambda, \mu, \gamma \in \Lambda$ con $\lambda \prec \mu \prec \gamma$. Ya que $\nu_\lambda \circ h_{\lambda\mu} \circ \nu_\mu^{-1}$ es un homomorfismo continuo de $\nu_\mu(A_\mu)$ en $\tilde{A}_\lambda$, entonces existe una extensión continua $\tilde{h}_{\lambda\mu}$ de $\tilde{A}_\mu$ en $\tilde{A}_\lambda$ tal que $\tilde{h}_{\lambda\mu}$ es un homomorfismo y

$$\tilde{h}_{\lambda\mu}[\nu_\mu(\pi_\mu(a))] = \nu_\lambda[h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a))] = \nu_\lambda[\pi_\lambda(a)]$$

para cada $a \in A$ y $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \prec \mu$. Ya que $\tilde{h}_{\lambda\lambda}$ es el morfismo identidad en $\tilde{A}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $\tilde{h}_{\lambda\mu} \circ \tilde{h}_{\mu\gamma} = \tilde{h}_{\lambda\gamma}$, siempre que $\lambda, \mu, \gamma \in \Lambda$ y $\lambda \prec \mu \prec \gamma$, entonces $\{\tilde{A}_\lambda; \tilde{h}_{\lambda\mu}, \Lambda\}$ es un sistema proyectivo de álgebras localmente idempotentes de Fréchet $\tilde{A}_\lambda$ con homomorfismos continuos $\tilde{h}_{\lambda\mu}$ de $\tilde{A}_\mu$ en $\tilde{A}_\lambda$ y

$$\varprojlim \tilde{A}_\lambda = \{(\nu_\lambda[\pi_\lambda(a)])_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda : \tilde{h}_{\lambda\mu}[\nu_\mu(\pi_\mu(a))] = \nu_\lambda(\pi_\lambda(a)), \text{ siempre que } \lambda \prec \mu\}$$

es el límite proyectivo de ese sistema.

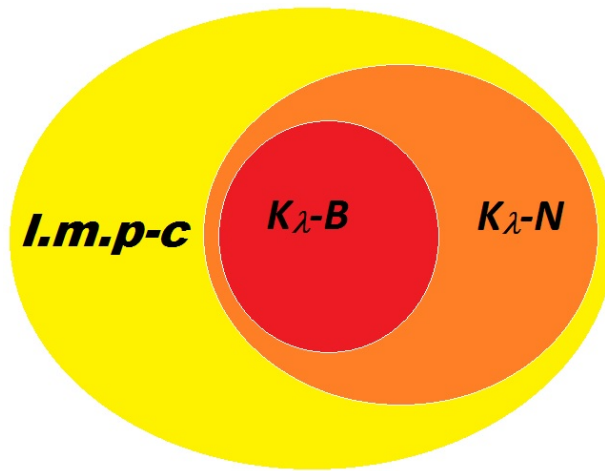
Sea $\tilde{e}$ el morfismo definido por $\tilde{e}(a) = (\nu_\lambda[\pi_\lambda(a)])_{\lambda \in \Lambda}$ de A en $\prod_{\mu \in \Lambda} \tilde{A}_\mu$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Similarmente como en la prueba del teorema anterior, se puede mostrar que $\tilde{e}$ es un isomorfismo

topológico de A sobre un subconjunto denso de $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$.

Más aun, A y $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ son topológicamente isomorfos, si A es completa.

Sea ahora A un álgebra localmente m -pseudoconvexa (localmente m -convexa) de Hausdorff. Entonces cualquier álgebra A_λ en la primera parte de la prueba es un álgebra k_λ -normada (respectivamente normada) pues la completación $\tilde{A}_\lambda$ de A_λ es un álgebra k_λ -Banach (respectivamente de Banach). Como en la primera parte de la prueba, se puede mostrar que A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa del límite proyectivo $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ de álgebras k_λ -Banach (respectivamente de Banach). Más aun A y $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ son topológicamente isomorfas si A es completa. ■

El siguiente diagrama ilustra las álgebras involucradas en el teorema anterior



- l.m.p-c.-Álgebras localmente multiplicativamente pseudo-convexas
- K_λ -N.-Álgebras normadas
- K_λ -B.-Álgebras de Banach

A la última parte del teorema anterior se le conoce como la descomposición de Arens-Michael generalizada.

Corolario 3.0.91 Sea A un álgebra de Hausdorff con unidad, $\mathcal{L}_A$ la base de vecindades cerradas y balanceadas de cero en A y

$$\mathcal{Q}_A = \{q_S : S \text{ es una cadena en } \mathcal{L}_A\}$$

la colección de F -seminormas, la cual define la topología de A . Si toda q_S es submultiplicativa, entonces A es localmente m -pseudoconvexa.

Demostración: Sea A un álgebra de Hausdorff con elemento unidad e_A tal que toda F -seminorma q_S en $\mathcal{Q}_A$ es submultiplicativa. Entonces, por el corolario 3.0.85 A es un álgebra localmente idempotente. Para cualquier S en $\mathcal{L}_A$, sea $A_S = A / \ker q_S$, π_S el homomorfismo canónico de A sobre A_S y $\bar{q}_S$ el morfismo definido por $\bar{q}_S(\pi_S(a)) = q_S(a)$ para toda $a \in A$. Entonces $\bar{q}_S$ es una F -norma submultiplicativa en A_S . Por lo tanto, la extensión $\tilde{q}_S$ es una F -norma submultiplicativa en la completación $\tilde{A}_S$. Para mostrar que $\tilde{A}_S$ es un álgebra localmente acotada (es decir, $\tilde{A}_S$ contiene una vecindad acotada de cero); sea

$$O_S = \{x \in \tilde{A}_S : \tilde{q}_S(x) \leq 1\},$$

x_0 un elemento arbitrario en O_S y (α_n) una sucesión arbitraria en $\mathbb{K}$ la cual converge a cero. Podemos suponer que $|\alpha_n n| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (en caso contrario, se puede usar la subsucesión (α_{k_n}) en lugar de (α_n) , para la cual $|\alpha_{k_n} n| \leq 1$, pues (α_{k_n}) converge a cero también). Ya que

$$0 \leq \tilde{q}_S(\alpha_n x_0) = \tilde{q}_S((\alpha_n e_A)x_0) \leq \tilde{q}_S((\alpha_n n) \frac{1}{n} e_A) \tilde{q}_S(x_0) \leq \tilde{q}_S(\frac{1}{n} e_A),$$

entonces

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{q}_S(\alpha_n x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} e_A) = 0$$

se sigue que $(\alpha_n x_0)$ converge al elemento cero de A . Lo cual significa que O_S es una vecindad acotada de cero en $\tilde{A}_S$. Por lo tanto, A_S es un álgebra localmente acotada y por consiguiente localmente m -pseudoconvexa. Consecuentemente, por el teorema 3.0.90 A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa W del límite proyectivo $\varprojlim \tilde{A}_S$ de álgebras localmente m -pseudoconvexas completas $\tilde{A}_S$. Por lo tanto, W es subálgebra del producto $\prod_{S \in \mathcal{L}_A} \tilde{A}_S$. Ya que el producto de álgebras localmente m -pseudoconvexas es localmente m -pseudoconvexa en la topología producto y cualquier subálgebra de un álgebra localmente m -pseudoconvexa es localmente m -pseudoconvexa en la topología relativa, entonces W es localmente m -pseudoconvexa. Consecuentemente, A es también localmente m -pseudoconvexa. ■

Corolario 3.0.92 *Cualquier m -álgebra de Hausdorff con unidad es localmente m -pseudoconvexa.*

Demostración: Sea $S = (U_n)$ una cadena en $\mathcal{L}_A$, así $U_n \subset U_{n+m}$ y $U_m \subset U_{n+m}$, luego

$$U_n \cdot U_m \subset U_{n+m} \cdot U_{n+m} \subset U_{n+m}$$

lo anterior debido a que A es una m -álgebra. Por lo tanto, $U_n \cdot U_m \subset U_{n+m}$ y por la proposición 3.0.84, q_S es una seminorma submultiplicativa. Así por el corolario anterior, el álgebra es localmente m -pseudoconvexa. ■

3.0.9. Aplicaciones

En esta sección, se consideran álgebras topológicas dotadas de una topología de Hausdorff que hace que la multiplicación sea continua.

Definición.- 3.0.93 Un **multiplicador** izquierdo (derecho) en E es un morfismo lineal $T : E \rightarrow E$ tal que $T(xy) = T(x)y (= xT(y))$ para cada $x, y \in A$.

T es llamado un **multiplicador bilateral** (o un multiplicador) en A si es un multiplicador izquierdo y derecho. Se denota como $\mathcal{M}_l(E)(\mathcal{M}_r(E))$ el conjunto de todos los multiplicadores izquierdos (derechos) en E y por $\mathcal{M}(E)$ el conjunto de todos los multiplicadores en E .

Definición.- 3.0.94 Un álgebra E es **propia** si $xE = \{0\}$ implica que $x = 0$ (o $Ex = \{0\}$ implica que $x = 0$), donde 0 denota el elemento cero de E .

Sea E un álgebra propia. Para $x \in E$ y debido a la asociatividad de la multiplicación en E , los operadores l_x y r_x dados por

$$l_x(y) = xy \text{ y } r_x(y) = yx \text{ para cada } y \in E,$$

respectivamente, definen inclusiones de E en $\mathcal{M}(E)$ de tal manera que E es identificado con un ideal bilateral de $\mathcal{M}(E)$.

Definición.- 3.0.95 Una **identidad aproximada** en un álgebra E es una red $\{e_\delta\}_{\delta \in \Lambda}$ en E tal que

$$xe_\delta \xrightarrow{\delta} x \text{ y } e_\delta x \xrightarrow{\delta} x$$

para cada $x \in A$.

Nótese que cualquier álgebra con una identidad aproximada es propia. En efecto, sean $\{e_\delta\}$ una identidad aproximada en E y $x \in E$ tal que $xE = \{0\}$, entonces

$$xe_\delta = 0 \text{ para cada } \delta \in \Lambda,$$

pero $xe_\delta \rightarrow x$, así $x = 0$. De forma análoga se tiene que $Ex = \{0\}$ implica que $x = 0$.

Sean $p_1, p_2, \dots, p_n$ una colección de k_{p_j} -seminormas en E y sea $k = \min_{1 \leq j \leq n} \{k_{p_j}\}$; entonces la función $q = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ definida como

$$q(x) := \max\{p_1^{\frac{k}{k_{p_1}}}(x), p_2^{\frac{k}{k_{p_2}}}(x), \dots, p_n^{\frac{k}{k_{p_n}}}(x)\}$$

es también una pseudo-seminorma en E (con índice de homegeneidad k).
Para demostrar esto, considérese lo siguiente

1) Por definición, $q : E \rightarrow \mathbb{R}^+$

2) Se probará que $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$. En efecto, sean $x, y \in E$, entonces

$$q(x + y) = p_i^{\frac{k}{k_{p_i}}}(x + y) = (p_i(x + y))^{\frac{k}{k_{p_i}}} \leq p_i^{\frac{k}{k_{p_i}}}(x) + p_i^{\frac{k}{k_{p_i}}}(y).$$

3) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in E$, entonces

$$q(\lambda x) = p_i^{\frac{k}{k_{p_i}}}(\lambda x) = (p_i(\lambda x))^{\frac{k}{k_{p_i}}} = (\lambda^{k_{p_i}} p_i(x))^{\frac{k}{k_{p_i}}} = \lambda^k p_i^{\frac{k}{k_{p_i}}}(x) = \lambda^k q(x).$$

Por lo anterior q es una pseudo-seminorma con índice de homogeneidad k .

Definición.- 3.0.96 Una familia $\mathcal{P}$ de pseudo-seminormas es llamada saturada si satisface la siguiente condición

$$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathcal{P} \quad \text{entonces} \quad p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \in \mathcal{P}. \quad (3.7)$$

Sea $\mathfrak{G}$ el conjunto de todas las pseudo-seminormas en E .

Definición.- 3.0.97 Para cualquier subconjunto $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{G}$, sea

$$\overline{\mathcal{P}} = \{q \in \mathfrak{G} : q = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n, p_j \in \mathcal{P}\}.$$

El conjunto $\overline{\mathcal{P}}$ satisface la condición (3.7) y es llamada la **cerradura saturada** de $\mathcal{P}$.

Lema 3.0.98 $\mathcal{P}$ y $\overline{\mathcal{P}}$ inducen en E la misma topología.

Demostración: Es suficiente observar que

$$p(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \text{ para cada } p \in \mathcal{P}$$

si y solo si

$$q(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \text{ para cada } q \in \overline{\mathcal{P}}.$$

En efecto, supongamos que

$$p(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \text{ para cada } p \in \mathcal{P}.$$

Sea $q \in \overline{\mathcal{P}}$, entonces $q(x_\alpha - x) = \max\{p_1^{\frac{k}{k_{p_1}}}(x_\alpha - x), \dots, p_n^{\frac{k}{k_{p_n}}}(x_\alpha - x)\}$.

Sea $q(x_\alpha - x) = p_i^{\frac{k}{k_{p_i}}}(x_\alpha - x)$, pero

$$p_i(x_\alpha - x) \rightarrow 0,$$

entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe γ tal que

$$p_i(x_\alpha - x) \leq \epsilon \text{ siempre que } \gamma < \alpha,$$

lo cual implica que

$$p_i^{\frac{k}{k_{p_i}}}(x_\alpha - x) \leq \epsilon^{\frac{k}{k_{p_i}}} < \epsilon \text{ siempre que } \gamma < \alpha.$$

Por lo tanto,

$$q(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \text{ para cada } q \in \overline{\mathcal{P}}.$$

Recíprocamente, supóngase que

$$q(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \text{ para cada } q \in \overline{\mathcal{P}}.$$

Sea $p \in \mathcal{P} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$, entonces $p \in \overline{\mathcal{P}}$.

Así

$$p(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \text{ para cada } p \in \mathcal{P}. \blacksquare$$

Serán necesarias algunas proposiciones para obtener el resultado deseado.

Proposición 3.0.99 (*Proposición 3.2.10 p.113 en [12]*) Sea $(E, \mathcal{P})$ y $(F, \mathcal{Q})$ dos espacios localmente convexos, donde $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es un conjunto saturado de k_α -seminormas en E que definen su topología, y $\mathcal{Q} = \{q_\beta : \beta \in \Lambda\}$ es un conjunto de k_β -seminormas en F que definen su topología. Entonces una transformación lineal $T : E \rightarrow F$ es continua si y solo si para cada $q_\beta \in \mathcal{Q}$, existe un $p_\alpha \in \mathcal{P}$ y una constante $C = C_{\alpha\beta} > 0$ tal que

$$q_\beta(T(x)) \leq C \cdot p_\alpha(x)^{\frac{k_\beta}{k_\alpha}} \quad \text{para cada } x \in E. \quad (3.8)$$

Donde, k_α y k_β son los índices de homogeneidad de p_α y p_β respectivamente.

Demostración: Suponiendo verdadera la relación (3.8) se probará la continuidad de T . En efecto, sea V una vecindad de cero en Y , donde

$$V = \{y \in Y : q_\beta(y) \leq \epsilon\},$$

entonces, basta considerar a U la vecindad de cero en X , la cual está dada por

$$U = \{x \in X : p_\alpha(x) \leq (\frac{\epsilon}{C})^{\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}}\},$$

con C la constante que existe por (3.8). Por lo tanto, se tiene que

$$q_\beta(T(u)) \in V,$$

lo cual implica la continuidad de T en el cero y por lo tanto T es continua.

Recíprocamente, por la continuidad de T en el cero, se tiene que dados q_β y $\epsilon > 0$, existen p_α y $\delta > 0$ tales que

$$p_\alpha(x) \leq \delta \quad \text{implica que} \quad q_\beta(T(x)) \leq \epsilon. \quad (3.9)$$

Para un x con $p_\alpha(x) \neq 0$, se escribe $x_1 = (\frac{\delta}{p_\alpha(x)})^{\frac{1}{\rho_\alpha}} x$. Entonces $p_\alpha(x_1) = \delta$, de esta manera, por (3.9), se tiene que $q_\beta(T(x_1)) \leq \epsilon$. Así, la relación (3.8) se satisface, con $C = \epsilon \delta^{\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}}$.

Ahora, si $p_\alpha(x) = 0$, se tendría que $p(n x) = 0$ para cada n entero, entonces $p_\alpha(n x) \leq \delta$, lo cual implicaría que $q_\beta(n T(x)) \leq \epsilon$, por lo tanto $q_\beta(T(x)) \leq \frac{\epsilon}{n^{\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}}}$. De esta manera $q_\beta(T(x)) = 0$. Con lo cual se cumple la relación (3.8). ■

En el caso cuándo $E = (E, p)$ es un espacio k_p -seminormado y $F = (F, q)$ es un espacio k_q -seminormado, la relación (3.8) toma la forma

$$q(T(x)) \leq C \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} \quad \text{para cada } x \in E. \quad (3.10)$$

Se denotará por $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de todas las transformaciones lineales continuas de (E, p) en (F, q) . Para $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se establece

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : q(T(x)) \leq C \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} \quad \text{para cada } x \in E\}. \quad (3.11)$$

De aquí se deriva la siguiente proposición.

Proposición 3.0.100 *La relación (3.11) define una k_q -seminorma en $\mathcal{L}(E, F)$. Por lo tanto, $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio k_q -seminormado.*

Demostración: De la definición se sigue que

- 1) $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- 2) Se probará que $\|\cdot\|$ es subaditiva.
Sean $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$ y considerense

$$\begin{aligned} H &= \{B > 0 : q(T(x)) \leq B \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} \text{ para cada } x \in E\}, \\ I &= \{C > 0 : q(S(x)) \leq C \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} \text{ para cada } x \in E\} \end{aligned}$$

y

$$J = \{D > 0 : q((T + S)(x)) \leq D \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} \text{ para cada } x \in E\}.$$

Nótese que $\inf H = \|T\|$, $\inf I = \|S\|$ e $\inf J = \|T + S\|$.

Por otro lado, sea $A \in H + I$, entonces $A = B + C$, con $B \in H$ y $C \in I$. Así

$$\begin{aligned} q((T + S)(x)) &= q(T(x) + S(x)) \leq q(T(x)) + q(S(x)) \leq B \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} + C \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} = \\ &= (B + C) \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} = A \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $q((T + S)(x)) \leq A \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}}$ para cada $x \in E$. Entonces $A \in J$, lo cual implica que $H + I \subseteq J$, de esta manera $\inf J \leq \inf H + I = \inf H + \inf I$.

- 3) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \inf\{B > 0 : q(\lambda T(x)) \leq B \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} \text{ para cada } x \in E\} \\ &= \inf\{B > 0 : \lambda^{k_q} q(T(x)) \leq B \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} \text{ para cada } x \in E\} \\ &= \lambda^{k_q} \inf\{B > 0 : q(T(x)) \leq B \cdot p(x)^{\frac{k_q}{k_p}} \text{ para cada } x \in E\} = \lambda^{k_q} \|T\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\cdot\|$ define una k_q -seminorma y en consecuencia el espacio $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio k_q -seminormado. ■

Se puede decir más en el caso particular del álgebra de operadores lineales acotados $\mathcal{L}(E)$ en el espacio k_p -seminormado (E, p) .

Proposición 3.0.101 Sea (E, p) un espacio k_p -seminormado. Entonces $\mathcal{L}(E)$, el álgebra de todos los operadores lineales acotados en E , es un álgebra k_p -seminormada bajo la k_p -seminorma

$$\|T\| = \sup_{p(x) \leq 1} p(T(x)).$$

Más aun, si p es una k_p -norma en E , entonces también lo es $\|\cdot\|$ en $\mathcal{L}(E)$, y si (E, p) es k_p -normada y completa, entonces $\|\cdot\|$ también lo es en $\mathcal{L}(E)$.

Demostración: Para probar que $\|\cdot\|$ es una k_p -seminorma de álgebra, por la proposición anterior solo queda por probar que la k_p -seminorma $\|\cdot\|$ es submultiplicativa. En efecto, sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$, entonces

$$p(T_1 T_2 x) \leq \|T_1\| p(T_2 x) \leq \|T_1\| \|T_2\| p(x).$$

Pero $\|T_1 T_2\|$ es la constante positiva más pequeña que satisface la desigualdad anterior, por lo tanto $\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$.

Ahora, supóngase que p es una k_p -norma, entonces si $\|T\| = 0$, se tiene que $p(T(x)) = 0$ para cada $x \in E$, lo cual implica que $T(x) = 0$ para cada $x \in E$. Por lo tanto, $T \equiv 0$, así $\|\cdot\|$ es una k_p -norma.

Ahora, supóngase que p es también completa, si $(T_n) \in \mathcal{L}(E)$ es una sucesión de Cauchy, entonces se tiene que

$$\|T_n - T_m\| \leq \epsilon \tag{3.12}$$

siempre que $n > m > N$, con $N \in \mathbb{N}$. Esto implica que

$$p((T_n(x) - T_m(x))) \leq p((T_n - T_m)(x)) \leq \|T_n - T_m\| p(x) < \epsilon p(x)$$

siempre que $n > m > N$, con $N \in \mathbb{N}$.

Lo cual implica que $T_n(x)$ es una sucesión de Cauchy en E . Entonces, sea $Tx = \lim T_n x$ (este límite existe, ya que E es completo). Así, T es lineal. Sea $Ty = \lim T_n y$ y $Tx = \lim T_n x$, entonces $Tx + Ty = \lim(T_n x + T_n y) = \lim T_n(x + y) = T(x + y)$. Por unicidad del límite (por ser E de Hausdorff), se tiene que $T(x + y) = T(x) + T(y)$. Similarmente, $T\lambda x = \lambda Tx$. Por último, si m tiende a infinito en (3.12), entonces se tiene

$$\|T_n - T\| \leq \epsilon,$$

siempre que $n > N$, con $N \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\lim T_n = T \in \mathcal{L}(E)$. ■

Proposición 3.0.102 *Si (E, p) es un álgebra k_p -Banach (k_p -normada y completa), propia y T es un multiplicador en E , Entonces T es acotado. Más aun $\mathcal{M}(E)$ es una subálgebra cerrada y conmutativa de $\mathcal{L}(E)$. Por lo tanto, una subálgebra k_p -Banach conmutativa.*

Demostración: En efecto, si el álgebra E es propia, sean T un multiplicador bilateral de E y $x, y, z \in E$, entonces

$$x[T(ay + bz)] = T(x)[ay + bz] = T(x)ay + T(x)bz = xaT(y) + xbT(z) = x[aT(y) + bT(z)],$$

así

$$T(ay + bz) = aT(y) + bT(z).$$

Así T es lineal. Más aun, si $y, z \in A$ y $\{y_n\} \subset E$ sucesión tal que

$$p(y_n - y) \rightarrow 0 \text{ y } p(Ty_n - z) \rightarrow 0,$$

entonces para cada $x \in E$

$$\begin{aligned} p(xz - xTy) &= p(xz - Txy_n + Txy_n - xTy) \leq p(xz - xTy_n) + p(Txy_n - xTy) \leq \\ &p(x)p(z - Ty_n) + p(Tx)p(y_n - y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $xz = xTy$ y dado que E es propia, se tiene que $z = Ty$.

Por el teorema de la gráfica cerrada, el multiplicador T es continuo. De esta manera $\mathcal{M}(E)$ es una subálgebra de $\mathcal{L}(E)$. ■

Proposición 3.0.103 *Si $(E, \mathcal{P})$ es un álgebra localmente m -pseudoconvexa, entonces el álgebra $\mathcal{L}(E)$ es también un álgebra localmente m -pseudoconvexa bajo la topología definida por el conjunto de pseudo-seminormas $\dot{\mathcal{P}} = \{\dot{p} : p \in \mathcal{P}\}$, donde, para $T \in \mathcal{L}(E)$, se define*

$$\dot{p}(T) = \sup_{p(x) \leq 1} p(T(x)).$$

Demostración: Como $(E, \mathcal{P})$ es un álgebra localmente m -pseudoconvexa, entonces su topología puede ser dada por una familia de pseudo-seminormas, donde cada $p_\alpha \in \mathcal{P}$ es submultiplicativa. Considérese las algebras k_{p_α} -seminormadas

$$E_\alpha = (E, p_\alpha)$$

Por la proposición 3.0.101 se tiene que el algebra $\mathcal{L}(E_\alpha)$ es un álgebra k_{p_α} -seminormada bajo la k_{p_α} -seminorma

$$\|T\| = \sup_{p_\alpha(x) \leq 1} p_\alpha(T(x)).$$

Luego, si $\mathcal{L}(E)$ está dotada de la topología inicial dada por los morfismos

$$i_\alpha : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E_\alpha),$$

entonces $\mathcal{L}(E)$ se vuelve un álgebra localmente m -pseudoconvexa bajo la topología definida por el conjunto de pseudo-seminormas $\dot{\mathcal{P}} = \{\dot{p} : p \in \mathcal{P}\}$ donde,

$$\dot{p}(T) = \sup_{p(x) \leq 1} p(T(x)). \blacksquare$$

Teorema 3.0.104 *Sea $(E, \mathcal{P})$ un álgebra completa localmente m -pseudoconvexa de Hausdorff, donde $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una familia saturada de K_λ -seminormas en E ; supóngase que E tiene una identidad aproximada $(e_\delta)_{\delta \in \Delta}$ y que cada factor $E_\alpha = E / \ker p_\alpha$ en su descomposición de Arens-Michael generalizada es completa. Entonces*

$$\mathcal{M}(E) \cong \varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha)$$

salvo un isomorfismo de álgebras topológicas.

Demostración: Nótese que bajo las hipótesis anteriores, los morfismos f_α del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim E_\alpha & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & E \\ & \searrow f_\alpha & \downarrow \rho_\alpha \\ & & E_\alpha \end{array} \quad (3.13)$$

resultan ser suprayectivos para cada $\alpha \in \Lambda$. Así, para cada $x_\beta \in E_\beta$, existe un elemento $(w_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \varprojlim E_\alpha$ tal que $f_\beta((w_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}) = x_\beta$ consecuentemente $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\beta}(f_\beta((w_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})) = w_\alpha$, entonces

$$w_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta) \text{ siempre que } \alpha \leq \beta.$$

Para cada $\alpha \leq \beta$, se define el morfismo $h_{\alpha\beta} : \mathcal{M}(E_\beta) \rightarrow \mathcal{M}(E_\alpha)$ por

$$[h_{\alpha\beta}(T_\beta)](x_\alpha) = f_{\alpha\beta}(T_\beta(x_\beta))$$

para ver que $h_{\alpha\beta}$ está bien definido, primero se verificará que $\ker f_{\alpha\beta}$ es T_β -invariante para cada $T_\beta \in M(E_\beta)$, es decir

$$T_\beta(\ker f_{\alpha\beta}) \subseteq \ker f_{\alpha\beta} \text{ si } \alpha \leq \beta$$

Sea $y_\beta \in T_\beta(\ker f_{\alpha\beta})$, entonces $y_\beta = T(x_\beta)$, con $x_\beta \in \ker f_{\alpha\beta}$, luego $f_{\alpha\beta}(y_\beta) = f_{\alpha\beta}(T(x_\beta)) = f_{\alpha\beta}(T(\lim_{\delta} x_\beta e_\delta)) = f_{\alpha\beta} \lim_{\delta} T(x_\beta e_\delta) = \lim_{\delta} f_{\alpha\beta} T(x_\beta e_\delta) = \lim_{\delta} [f_{\alpha\beta}(x_\beta) f_{\alpha\beta} \circ T e_\delta] = 0$. Por lo tanto, $T_\beta(\ker f_{\alpha\beta}) \subset \ker f_{\alpha\beta}$.

Ahora se verificará que $h_{\alpha\beta}$ está bien definido. En efecto, si $\alpha \leq \beta$, $x \in \ker p_\alpha$ y $T_\beta \in \mathcal{M}(E_\beta)$. Entonces

$$0_{E_\alpha} = \ker p_\alpha = x + \ker p_\alpha = \rho_\alpha(x) = (f_\alpha \circ \varphi)(x) = (f_{\alpha\beta} \circ f_\beta \circ \varphi)(x)$$

lo cual se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & \varprojlim E_\alpha \\ & \searrow \rho_\alpha & \swarrow f_\alpha \\ & E_\alpha & \\ & \uparrow f_{\alpha\beta} & \swarrow f_\beta \\ & E_\beta & \end{array} \quad (3.14)$$

donde $\rho_\alpha(x) = x + \ker p_\alpha$ y $f_\alpha = Pr_\alpha|_{\varprojlim E_\alpha}$. Lo anterior implica que

$$(f_\beta \circ \varphi)(x) \in \ker f_{\alpha\beta}.$$

Ya que $\ker f_{\alpha\beta}$ es T_β invariante, entonces $T_\beta(f_\beta \circ \varphi(x)) \in \ker f_{\alpha\beta}$, así

$$f_{\alpha\beta}(T_\beta(f_\beta \circ \varphi)(x)) = 0,$$

entonces $f_{\alpha\beta}(T_\beta(x_\beta)) = 0_{E_\alpha}$, es decir $[h_{\alpha\beta}(T_\beta)](x_\alpha) = 0_{E_\alpha}$.

Además, se probará que $h_{\alpha\beta}(T_\beta)$ es de hecho un multiplicador en E_α :

En efecto, sean $x_\alpha, y_\alpha \in E_\alpha$. Entonces

$$[h_{\alpha\beta}(T_\beta)](x_\alpha y_\alpha) = f_{\alpha\beta}(T_\beta(x_\beta y_\beta)) = f_{\alpha\beta}(x_\beta T_\beta(y_\beta)) = f_{\alpha\beta}(x_\beta) f_{\alpha\beta}(T_\beta(y_\beta)) = x_\alpha [h_{\alpha\beta}(T_\beta)](y_\alpha).$$

Entonces $h_{\alpha\beta}(T_\beta)$ es un multiplicador derecho. De manera similar se prueba que es un multiplicador izquierdo.

El morfismo $h_{\alpha\beta}$ es un morfismo lineal:

En efecto, sean $T_\beta, S_\beta \in \mathcal{M}(E_\beta)$ y $x_\alpha \in E_\alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} [h_{\alpha\beta}(T_\beta + S_\beta)](x_\alpha) &= f_{\alpha\beta}(T_\beta + S_\beta)(x_\beta) = f_{\alpha\beta}(T_\beta(x_\beta) + S_\beta(x_\beta)) = \\ &= f_{\alpha\beta}(T_\beta(x_\beta)) + f_{\alpha\beta}(S_\beta(x_\beta)) = [h_{\alpha\beta}(T_\beta)](x_\alpha) + [h_{\alpha\beta}(S_\beta)](x_\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h_{\alpha\beta}(T_\beta + S_\beta) = h_{\alpha\beta}(T_\beta) + h_{\alpha\beta}(S_\beta)$.

Más aun, $h_{\alpha\beta}$ es multiplicativo.

Ahora se verá que $h_{\alpha\beta}$ es continuo. Ya que $f_{\alpha\beta} : E_\beta \rightarrow E_\alpha$ es un morfismo continuo entre álgebras k_α -normadas, entonces para cada $\dot{p}_\alpha$, existe $\dot{p}_\beta$ y una constante $C = C_{\alpha\beta} > 0$ tal que

$$\dot{p}_\alpha(f_{\alpha\beta}(y_\beta)) \leq C(\dot{p}_\beta(y_\beta))^{\frac{k_\alpha}{k_\beta}} \quad \text{para toda } y_\beta \in E_\beta \quad (3.15)$$

en particular, sea $y_\beta = T_\beta(x_\beta)$, tomando el supremo en el lado derecho de (3.15) y considerando que $\mathcal{M}(E_\beta)$ es un álgebra k_β -Banach, se tiene que

$$\dot{p}_\alpha(f_{\alpha\beta}(T_\beta(x_\beta))) \leq C \sup_{\dot{p}_\beta(x_\beta) \leq 1} \{(\dot{p}_\beta(T_\beta(x_\beta)))^{\frac{k_\alpha}{k_\beta}}\} \leq C(\|T_\beta\|_\beta)^{\frac{k_\alpha}{k_\beta}}$$

para cualquier $x_\beta \in E_\beta$ con $\dot{p}_\beta(x_\beta) \leq 1$ y donde $\|\cdot\|_\beta$ es la k_β -norma en el álgebra de multiplicadores $\mathcal{M}(E_\beta)$. (Lo anterior ya que T es acotado en una k -Banach)

Ya que $f_{\alpha\beta}(T_\beta(x_\beta)) = [h_{\alpha\beta}(T_\beta)](x_\alpha)$ siempre que $\alpha \leq \beta$ (por lo tanto $\dot{p}_\alpha(x_\alpha) \leq \dot{p}_\beta(x_\beta)$), entonces

$$\dot{p}_\alpha([h_{\alpha\beta}(T_\beta)](x_\alpha)) \leq C(\|T_\beta\|_\beta)^{\frac{k_\alpha}{k_\beta}}$$

para cualquier $x_\alpha \in E_\alpha$, con $\dot{p}_\alpha(x_\alpha) \leq 1$. Tomando el supremo del lado izquierdo se tiene que

$$\sup_{\dot{p}_\alpha(x_\alpha) \leq 1} \dot{p}_\alpha([h_{\alpha\beta}(T_\beta)](x_\alpha)) \leq C(\|T_\beta\|_\beta)^{\frac{k_\alpha}{k_\beta}}$$

así

$$\|h_{\alpha\beta}(T_\beta)\|_\alpha \leq C(\|T_\beta\|_\beta)^{\frac{k_\alpha}{k_\beta}}.$$

Por lo tanto, cada $h_{\alpha\beta}$ es continuo.

Hasta este momento se tiene la familia de álgebras topológicas $\{\mathcal{M}(E_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ y la familia de morfismos lineales, multiplicativos y continuos

$$h_{\alpha\beta} : \mathcal{M}(E_\beta) \rightarrow \mathcal{M}(E_\alpha), \alpha \leq \beta.$$

Además

$$[h_{\alpha\alpha}(T_\alpha)](x_\alpha) = f_{\alpha\alpha}(T_\alpha(x_\alpha)) = T_\alpha(x_\alpha),$$

es decir $h_{\alpha\alpha}$ es la identidad en el álgebra $\mathcal{M}_{E_\alpha}$. Por otro lado, si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, se tiene $f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ y por lo tanto

$$[(h_{\alpha\beta} \circ h_{\beta\gamma})(T_\gamma)](x_\alpha) = [h_{\alpha\beta}(h_{\beta\gamma}(T_\gamma))](x_\alpha)$$

como $h_{\beta\gamma}(T_\gamma)$ es un multiplicador, por decir T_β , entonces

$$[h_{\alpha\beta}(h_{\beta\gamma}(T_\gamma))](x_\alpha) = [h_{\alpha\beta}(T_\beta)](x_\alpha) = f_{\alpha\beta}(T_\beta)(x_\beta) = f_{\alpha\beta}[h_{\beta\gamma}(T_\gamma)](x_\beta) = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}(T_\gamma)(x_\gamma) = f_{\alpha\gamma}(T_\gamma)(x_\gamma) = [h_{\alpha\gamma}(T_\gamma)](x_\alpha).$$

Por lo tanto, $h_{\alpha\beta} \circ h_{\beta\gamma} = h_{\alpha\gamma}$.

Es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(E_\gamma) & \xrightarrow{h_{\beta\gamma}} & \mathcal{M}(E_\beta) \\ & \searrow h_{\alpha\gamma} & \swarrow h_{\alpha\beta} \\ & \mathcal{M}(E_\alpha) & \end{array} \quad (3.16)$$

De esta manera $\{(\mathcal{M}(E_\alpha), h_{\alpha\beta})\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un sistema proyectivo de álgebras k_α -Banach y es posible considerar su límite inverso.

Sea $T \in \mathcal{M}(E)$, entonces induce un morfismo bien definido

$$T_\alpha : E_\alpha \rightarrow E_\alpha,$$

dado por

$$T_\alpha(x_\alpha) = (T(x))_\alpha \circ T_\alpha(\rho_\alpha(x)) = \rho_\alpha(T(x))$$

Lo cual se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E \\ \rho_\alpha \downarrow & & \downarrow \rho_\alpha \\ E_\alpha & \xrightarrow{T_\alpha} & E_\alpha \end{array}$$

Ahora se probará que T_α es un multiplicador. En efecto, sean $x_\alpha, y_\alpha \in E_\alpha$, luego

$$T_\alpha(x_\alpha y_\alpha) = T_\alpha((xy)_\alpha) = (T(xy))_\alpha = (xT(y))_\alpha = x_\alpha(T(y))_\alpha = x_\alpha(T_\alpha(y_\alpha)).$$

De esta manera T_α es un multiplicador derecho; de manera similar se puede probar que es un multiplicador izquierdo.

Nótese que $(T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es de hecho un elemento del $\varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha)$.

En efecto, para $\alpha \leq \beta$ y $\rho_\alpha(x) = x_\alpha \in E_\alpha$ se tiene que

$$\begin{aligned} (h_{\alpha\beta}(T_\beta))(\rho_\alpha(x)) &= (h_{\alpha\beta}(T_\beta))(x_\alpha) = f_{\alpha\beta}(T_\beta)(x_\beta) = f_{\alpha\beta}((T_\beta)(\rho_\beta(x))) = f_{\alpha\beta}(\rho_\beta(T(x))) = \\ &= f_{\alpha\beta}((f_\beta \circ \varphi)(T(x))) = ((f_{\alpha\beta} \circ f_\beta) \circ \varphi)(T(x)) = (f_\alpha \circ \varphi)(T(x)) = \rho_\alpha(T(x)) = T_\alpha(\rho_\alpha(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h_{\alpha\beta}(T_\beta) = T_\alpha$.

Ahora es posible definir el morfismo

$$\phi : \mathcal{M}(E) \rightarrow \varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha) \quad (3.17)$$

por

$$\phi(T) := (T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$$

Este es un morfismo lineal. Sean $T, S \in \mathcal{M}(E)$, luego

$$\begin{aligned} ((\phi(T) + \phi(S))(x))_\alpha &= (\phi(T) + \phi(S))_\alpha(x_\alpha) = ((T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} + (S_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})_\alpha(x_\alpha) = (T_\alpha + S_\alpha)(x_\alpha) = \\ &= T_\alpha(x_\alpha) + S_\alpha(x_\alpha) = (T(x))_\alpha + (S(x))_\alpha. \end{aligned}$$

Más aun, para $T, S \in \mathcal{M}(E)$ y $x_\alpha \in E_\alpha$, se tiene que

$$\begin{aligned} ((\phi(TS))_\alpha)(x_\alpha) &= (TS)_\alpha(x_\alpha) = ((TS)(x))_\alpha = (T(S(x)))_\alpha = T_\alpha((S(x))_\alpha) = T_\alpha(S_\alpha(x_\alpha)) = \\ &= T_\alpha S_\alpha(x_\alpha). \end{aligned}$$

Lo cual implica que $(TS)_\alpha = T_\alpha S_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Por lo tanto,

$$\phi(TS) = \phi(T)\phi(S)$$

es decir ϕ es multiplicativo.

Ahora se probará que ϕ es uno a uno. Para eso, se toma $T, S \in \mathcal{M}(E)$ tales que

$$(T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} = \phi(T) = \phi(S) = (S_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$$

entonces

$$(T(x))_\alpha = (S(x))_\alpha$$

esto para cada $\alpha \in \Lambda$ y cada $x \in E$. Por lo tanto,

$$\rho_\alpha \circ T = \rho_\alpha \circ S \text{ para cada } \alpha \in \Lambda.$$

Por lo tanto, $T = S$.

Más aun ϕ es un morfismo suprayectivo. En efecto, sea $(W_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha)$, se define el morfismo $W : E \rightarrow E$ mediante

$$W(x) = \varphi^{-1}((W_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda})$$

nótese que $(W_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in \Lambda} \in \varprojlim E_\alpha$. En efecto

$$f_{\alpha\beta}(W_\beta(x_\beta)) = [h_{\alpha\beta}(W_\beta)](x_\alpha),$$

como $W_\beta \in \varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha)$, entonces

$$h_{\alpha\beta}(W_\beta) = W_\alpha$$

así

$$f_{\alpha\beta}(W_\beta(x_\beta)) = W_\alpha(x_\alpha).$$

Por lo tanto, $(W_\alpha(x_\alpha)) \in \varprojlim E_\alpha$.

Se probará que W es un multiplicador. Para esto, sean $x, y \in E$

$$\begin{aligned} W(xy) &= \varphi^{-1}((W_\alpha(xy)_\alpha)_\alpha) = \varphi^{-1}((W_\alpha(x_\alpha y_\alpha))_\alpha) = \varphi^{-1}((x_\alpha W_\alpha(y_\alpha))_\alpha) = \\ &= \varphi^{-1}((x_\alpha)_\alpha) \varphi^{-1}((W_\alpha(y_\alpha))_\alpha) = xW(y). \end{aligned}$$

Similarmente se puede probar que W es un multiplicador izquierdo, así W es un multiplicador en E .

Para la continuidad del morfismo ϕ se tienen que tomar en cuenta cómo son las topologías de $\mathcal{M}(E)$ y de $\mathcal{M}(E_\alpha)$.

Por un lado la topología de $\mathcal{M}(E)$ puede ser dada por el conjunto de k_α -seminormas $(\overline{p_\alpha}, \alpha \in \Lambda)$. Donde

$$\overline{p_\alpha}(T) = \sup_{p_\alpha \leq 1} p_\alpha(T(x)).$$

Por otro lado la topología de $\mathcal{M}(E_\alpha)$ puede estar dada por la k_α -norma $\|\cdot\|_\alpha$ definida como

$$\|S\|_\alpha = \sup_{p_\alpha \leq 1} p_\alpha(S(x)),$$

donde p_α es la k_α -norma inducida por la k_α -seminorma en E_α dada por $p_\alpha(x_\alpha) = p_\alpha(x + \ker p_\alpha) = p_\alpha(x)$.

Por lo anterior se tiene que

$$U_\alpha = \{T \in \mathcal{M}(E) : \overline{p_\alpha}(T) < \epsilon\}$$

es una vecindad sub-básica de $\mathcal{M}(E)$.

Y los básicos de $\mathcal{M}(E_\alpha)$ son de la forma

$$W_\alpha = \{S_\alpha \in \mathcal{M}(E_\alpha) : \|S_\alpha\|_\alpha < \epsilon\}.$$

Se afirma que $T \in U_\alpha$ si y solo si $T_\alpha \in W_\alpha$.

En efecto, sea $T \in U_\alpha$, si y solo si $\overline{p_\alpha}(T) < \epsilon$, si y solo si $\sup_{p_\alpha(x) \leq 1} p_\alpha(T(x)) < \epsilon$, si y solo si $\sup_{p_\alpha(x_\alpha) \leq 1} p_\alpha((T(x))_\alpha) < \epsilon$, si y solo si $\sup_{p_\alpha(x_\alpha) \leq 1} p_\alpha(T_\alpha(x_\alpha)) < \epsilon$, si y solo si $\|T_\alpha\|_\alpha < \epsilon$, si y solo si $T_\alpha \in W_\alpha$.

En estos momentos se puede probar la continuidad del morfismo ϕ ; para ello se considerará lo siguiente:

Sean $g_\alpha : \mathcal{M}(E) \rightarrow \mathcal{M}(E_\alpha)$ y $h_\alpha : \varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha) \rightarrow \mathcal{M}(E_\alpha)$ dos morfismos definidos de la siguiente manera

$$g_\alpha(T) = T_\alpha \text{ y } h_\alpha((T_\beta)_{\beta \in \Lambda}) = T_\alpha$$

respectivamente. Más aun, sea $T \in \mathcal{M}(E)$ y $x \in E$, entonces

$$(h_\alpha \circ \phi)(T) = h_\alpha(\phi(T)) = h_\alpha((T_\beta)_{\beta \in \Lambda}) = T_\alpha = g_\alpha(T).$$

De esta manera se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(E) & \xrightarrow{\phi} & \varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha) \\ & \searrow g_\alpha & \downarrow h_\alpha \\ & & \mathcal{M}(E_\alpha) \end{array}$$

Para probar la continuidad del morfismo ϕ , por el teorema 1.0.13 basta con probar que los morfismos g_α son continuos para cada $\alpha \in \Lambda$.

Para ello, sea W_α una vecindad básica de cero en $\mathcal{M}(E_\alpha)$, por decir

$$W_\alpha = \{S_\alpha \in \mathcal{M}(E_\alpha) : \|S_\alpha\|_\alpha < \delta\}.$$

Sea $U_\alpha = \{T \in \mathcal{M}(E) : \overline{p}_\alpha(T) < \delta\}$ la vecindad de cero en $\mathcal{M}(E)$ tal que

$$g_\alpha(U_\alpha) \subseteq W_\alpha.$$

En efecto, sea $T_\alpha \in g_\alpha(U_\alpha)$, entonces $T_\alpha = g_\alpha(T)$, con $T \in U_\alpha$, entonces $T_\alpha \in W_\alpha$, es decir $g_\alpha(T) \in W_\alpha$, de esta manera se tiene que

$$g_\alpha(U_\alpha) \subseteq W_\alpha.$$

Por lo tanto, g_α es continuo para cada $\alpha \in \Lambda$, con lo cual, el morfismo ϕ resulta ser continuo. Ahora se probará que el morfismo ϕ^{-1} es continuo. Para ello nótese que dado $(T_\beta)_{\beta \in \Lambda} \in \varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha)$, se tiene que

$$g_\alpha \circ \phi^{-1}((T_\beta)_{\beta \in \Lambda}) = g_\alpha(\phi^{-1}((T_\beta)_{\beta \in \Lambda})) = g_\alpha(T) = T_\alpha = h_\alpha((T_\beta)_{\beta \in \Lambda}).$$

Por lo tanto, $g_\alpha \circ \phi^{-1} = h_\alpha$. De esta manera el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha) & \xrightarrow{\phi^{-1}} & \mathcal{M}(E) \\ & \searrow h_\alpha & \downarrow g_\alpha \\ & & \mathcal{M}(E_\alpha) \end{array}$$

Ahora se probará que la topología de $\mathcal{M}(E)$ coincide con la topología inicial dada por los morfismos g_α . En efecto, sea W_α una vecindad básica en $\mathcal{M}(E_\alpha)$, de esta manera $g_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ es un sub-básico de $\mathcal{M}(E)$ en la topología inicial dada por los morfismos g_α , luego

$$\begin{aligned} g_\alpha^{-1} &= \{T \in \mathcal{M}(E) : g_\alpha(T) \in W_\alpha\} \\ &= \{T \in \mathcal{M}(E) : T_\alpha \in W_\alpha\} \\ &= \{T \in \mathcal{M}(E) : T \in U_\alpha\} = U_\alpha, \end{aligned}$$

donde U_α es un sub-básico de la topología original de $\mathcal{M}(E)$. Por lo tanto, las topologías coinciden y entonces se puede considerar que $\mathcal{M}(E)$ tiene la topología inicial dada por los morfismos g_α .

Así, por el teorema 1.0.13 basta con probar que $g_\alpha \circ \phi^{-1}$ es continuo para cada $\alpha \in \Lambda$. Por la conmutatividad del diagrama $g_\alpha \circ \phi^{-1} = h_\alpha$ y dado que $\varprojlim \mathcal{M}(E_\alpha)$ tiene la topología inicial dada por los morfismo h_α , entonces h_α resulta continuo para cada $\alpha \in \Lambda$. Por lo tanto, el morfismo ϕ^{-1} es continuo y así ϕ es un isomorfismo de álgebras topológicas. ■

3.0.10. Generalización más reciente (T.Müldner)

En 1975 T. Müldner trató de generalizar la descomposición de Arens-Michael. La prueba del resultado principal se basa fuertemente en un lema, el cual es verdadero, pero la prueba contenía un error; es por esto que en el año 2012 M. Abel dio una prueba alterna, en la cual subsanó los detalles que existían en la prueba de T. Müldner. Dichos resultados son los siguientes:

Lema 3.0.105 *Sea A un álgebra topológica T_1 con multiplicación continua, $\mathcal{L}_A$ la base de todas las vecindades balanceadas, cerradas de cero en A y $\mathcal{S}_A = (U_n)$ una cadena algebraica en $\mathcal{L}_A$. Entonces el núcleo*

$$N(\mathcal{S}_A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

de $\mathcal{S}_A$ es un ideal bilateral cerrado en A .

Demostración: Por 3.0.86, se tiene que

$$\bar{0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

donde la cerradura se considera en la topología dada por la cadena $\mathcal{S}_A$. Por otro lado se sabe que $\{0\}$ es un ideal bilateral. Por 3.0.87, se tiene que $\bar{0}$ es un ideal bilateral cerrado en A , con la topología dada por la cadena $\mathcal{S}_A$. ■

Teorema 3.0.106 *(Teorema 2.2 en [3]) Para cualquier álgebra topológica de Hausdorff A (real o compleja) con multiplicación continua existe un sistema proyectivo $\{\tilde{A}_\lambda; \tilde{h}_{\lambda\mu}, \Lambda\}$ de álgebras de Fréchet y homomorfismos continuos $\tilde{h}_{\lambda\mu}$ de $\tilde{A}_\mu$ a $\tilde{A}_\lambda$ (siempre que $\lambda \prec \mu$) tal que A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa del límite proyectivo $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ de ese sistema. Si A es completa, entonces A y $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ son topológicamente isomorfas. Más aun, si A es un álgebra localmente pseudoconvexa (en particular localmente convexa) de Hausdorff con multiplicación continua, entonces A es topológicamente isomorfa a una subálgebra densa del límite proyectivo $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ de álgebras de Fréchet localmente pseudoconvexas (respectivamente localmente convexas). Si A es completa, entonces A y $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$ son topológicamente isomorfas.*

Demostración: Sea A un álgebra topológica de Hausdorff con multiplicación continua, $\mathcal{L}_A$ la base de todas las vecindades de cero en A que son cerradas y balanceadas y $\mathcal{S}_A = \{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ la colección de todas las cadenas algebraicas en $\mathcal{L}_A$. Es decir cualquier $S_\lambda \in \mathcal{S}_A$ es una sucesión $(\mathcal{O}_n^\lambda)$ en $\mathcal{L}_A$, cuyos elementos satisfacen las siguientes condiciones

$$\mathcal{O}_{n+1}^\lambda + \mathcal{O}_{n+1}^\lambda \subset \mathcal{O}_n^\lambda$$

y

$$\mathcal{O}_{n+1}^\lambda \cdot \mathcal{O}_{n+1}^\lambda \subset \mathcal{O}_n^\lambda$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Se define el orden $\prec$ en Λ de la siguiente forma:

Se dice que $\lambda \prec \mu$ en Λ si y solo si $S_\mu \subset S_\lambda$, es decir $\mathcal{O}_n^\mu \subset \mathcal{O}_n^\lambda$ para cada n en $\mathbb{N}_0$. De esta manera $(\Lambda, \prec)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Para mostrar que $(\Lambda, \prec)$ es un conjunto dirigido se fijarán $S_{\lambda_1} = (\mathcal{O}_n^{\lambda_1})$ y $S_{\lambda_2} = (\mathcal{O}_n^{\lambda_2})$ dos cadenas arbitrarias en $\mathcal{S}_A$ y sea $S_\mu = (\mathcal{O}_n^\mu)$ la cadena algebraica en $\mathcal{S}_A$ la cual se define de la siguiente manera: sea $O_0^\mu \in \mathcal{L}_A$ tal que

$$O_0^\mu \subset O_0^{\lambda_1} \cap O_0^{\lambda_2}.$$

Además, para cada $n \geq 0$, sea U_{n+1} una vecindad de cero en $\mathcal{L}_A$ tal que

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset O_n^\mu$$

y

$$U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset \mathcal{O}_n^\mu.$$

Sea ahora O_{n+1}^μ una vecindad en $\mathcal{L}_A$ tal que

$$O_{n+1}^\mu \subset U_{n+1} \cap O_{n+1}^{\lambda_1} \cap O_{n+1}^{\lambda_2}.$$

Entonces

$$O_{n+1}^\mu + O_{n+1}^\mu \subset U_{n+1} \cap O_{n+1}^{\lambda_1} \cap O_{n+1}^{\lambda_2} + U_{n+1} \cap O_{n+1}^{\lambda_1} \cap O_{n+1}^{\lambda_2} \subset U_{n+1} + U_{n+1} \subset O_n^\mu$$

y

$$\mathcal{O}_{n+1}^\mu \cdot \mathcal{O}_{n+1}^\mu \subset (U_{n+1} \cap \mathcal{O}_{n+1}^{\lambda_1} \cap \mathcal{O}_{n+1}^{\lambda_2})^2 \subset U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset \mathcal{O}_n^\mu$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que $S_\mu \in \mathcal{S}_A$ y $O_n^\mu \subset O_n^{\lambda_1} \cap O_n^{\lambda_2}$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\lambda_1 \prec \mu$ y $\lambda_2 \prec \mu$. Entonces $\lambda_1 \prec \mu$ y $\lambda_2 \prec \mu$. Esto prueba que $(\Lambda, \prec)$ es un conjunto dirigido.

Sea q_λ la F -seminorma en A , la cual es definida por la cadena $S_\lambda = (\mathcal{O}_n^\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y sea $\mathcal{Q}_A = \{q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Como ha sido mencionado anteriormente, se puede considerar en A la topología que es definida por $\mathcal{Q}_A$. Entonces $\ker q_\lambda$ es un ideal bilateral cerrado en A . Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $A_\lambda = A / \ker q_\lambda$ y sea π_λ el homomorfismo canónico de A sobre A_λ . Más aun, sea $\bar{q}_\lambda(\pi_\lambda(a)) = q_\lambda(a)$ para cada $a \in A$. Entonces la multiplicación en A_λ es continua.

En efecto, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_\epsilon} < \epsilon$, ya que

$$U = \{x \in A_\lambda : \bar{q}_\lambda(x) < \frac{1}{2^{n_\epsilon+1}}\}$$

es una vecindad de cero en A_λ y del hecho que, si $x, y \in U$, se sigue que

$$xy \in V_\lambda(\frac{1}{2^{n_\epsilon+1}})^2 = U_{n_\epsilon+1}(\lambda)^2 \subset U_{n_\epsilon}(\lambda) = V_\lambda(\frac{1}{2^{n_\epsilon}}).$$

Entonces

$$\bar{q}_\lambda(xy) \leq 2^{-n_\epsilon} < \epsilon \text{ para toda } x, y \in U$$

esto quiere decir que la multiplicación en A_λ es continua en $(0_{A_\lambda}, 0_{A_\lambda})$. Consecuentemente, la multiplicación en A_λ es continua.

Sea $\tilde{A}_\lambda$ la completación de A_λ , ν_λ el isomorfismo topológico de A_λ sobre una subálgebra densa de $\tilde{A}_\lambda$, $\tilde{q}_\lambda$ la extensión de $\bar{q}_\lambda \circ \nu_\lambda^{-1}$ de $\tilde{A}_\lambda$ y $\tilde{\tau}_\lambda$ la topología en $\tilde{A}_\lambda$, definida por $\tilde{q}_\lambda$. Entonces

$$\tilde{q}_\lambda[(\nu_\lambda \circ \pi_\lambda)(a)] = \bar{q}_\lambda(\pi_\lambda(a)) = q_\lambda(a) \text{ para cada } a \in A$$

es decir

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\pi_\lambda} & A_\lambda & \xrightarrow{\nu_\lambda} & B_\lambda & \xrightarrow{i_\lambda} & \tilde{A}_\lambda \\ & \searrow q_\lambda & & \searrow \bar{q}_\lambda & & & \\ & & & & \mathbb{C} & & \end{array} \quad (3.18)$$

donde B_λ es la subálgebra densa de $\tilde{A}_\lambda$.

Por lo tanto, $\tilde{q}_\lambda$ es una F -norma en $\tilde{A}_\lambda$, de lo cual se desprende que $\tilde{A}_\lambda$ es metrizable. Así $(\tilde{A}_\lambda, \tilde{\tau}_\lambda)$ es un álgebra de Fréchet para cada $\lambda \in \Lambda$.

Para cada $\lambda\mu \in \Lambda$ con $\lambda \prec \mu$ se define el morfismo $h_{\lambda\mu}$ de la siguiente manera

$$h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a)) = \pi_\lambda(a) \text{ para cada } a \in A.$$

Entonces $h_{\lambda\mu}$ es un homomorfismo continuo de A_μ sobre A_λ ,

- 1) $h_{\lambda\lambda}$ es el morfismo identidad en A_λ para todo $\lambda \in \Lambda$
- 2) $h_{\lambda\mu} \circ h_{\mu\gamma} = h_{\lambda\gamma}$ para cada $\lambda, \mu, \gamma \in \Lambda$, con $\lambda \prec \mu \prec \gamma$.

Ya que $\nu_\lambda \circ h_{\lambda\mu} \circ \nu_\mu^{-1}$ es un homomorfismo continuo de $\nu_\mu(A_\mu)$ en $\tilde{A}_\lambda$, entonces existe una extensión continua $\tilde{h}_{\lambda\mu}$ de $\tilde{A}_\mu$ en A_λ la cual es un morfismo lineal y submultiplicativo, por la continuidad de la multiplicación en $\tilde{A}_\mu$.

Más aun

$$\tilde{h}_{\lambda\mu}[\nu_\mu(\pi_\mu(a))] = \nu_\lambda[h_{\lambda\mu}(\pi_\mu(a))] = \nu_\lambda[\pi_\lambda(a)]$$

es decir

$$(3.19) \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_\mu \swarrow & & \searrow \pi_\lambda \\ A_\mu & \xrightarrow{h_{\lambda\mu}} & A_\lambda \\ \nu_\mu \downarrow & & \downarrow \nu_\lambda \\ B_\mu & \xrightarrow{h_{\lambda\mu}} & B_\lambda \\ i_\mu \downarrow & & \downarrow i_\lambda \\ \tilde{A}_\mu & \xrightarrow{\tilde{h}_{\lambda\mu}} & \tilde{A}_\lambda \end{array}$$

para cada $a \in A$ y $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \prec \mu$. Ya que $\tilde{h}_{\lambda\lambda}$ es el morfismo identidad en $\tilde{A}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $\tilde{h}_{\lambda\mu} \circ \tilde{h}_{\mu\gamma} = \tilde{h}_{\lambda\gamma}$ siempre que $\lambda, \mu, \gamma \in \Lambda$ y $\lambda \prec \mu \prec \gamma$, entonces $\{\tilde{A}_\lambda; \tilde{h}_{\lambda\mu}, \Lambda\}$ es un sistema proyectivo de álgebras de Fréchet $\tilde{A}_\lambda$ con homomorfismos continuos $\tilde{h}_{\lambda\mu}$ de $\tilde{A}_\mu$ en $\tilde{A}_\lambda$ y

$$\varprojlim \tilde{A}_\lambda = \{(\nu_\lambda[\pi_\lambda(a)])_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda : \tilde{h}_{\lambda\mu}[\nu_\mu(\pi_\mu(a))] = \nu_\lambda(\pi_\lambda(a)), \text{ si } \lambda \prec \mu\}$$

es el límite proyectivo de ese sistema.

Sea $\tilde{e}$ el morfismo de A en $\prod_{\mu \in \Lambda} \tilde{A}_\mu$, definida por

$$\tilde{e}(a) = (\nu_\lambda[\pi_\lambda(a)])_{\lambda \in \Lambda} \text{ para toda } a \in A$$

y $\tilde{P}r_\lambda$ la proyección de $\prod_{\mu \in \Lambda} \tilde{A}_\mu$ en $\tilde{A}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Ya que $\tilde{P}r_\lambda(\tilde{e}(a)) = \nu_\lambda[\pi_\lambda(a)]$ para cada $a \in A$ y cada $\lambda \in \Lambda$ y además $\nu_\lambda \circ \pi_\lambda$ es continua para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces $\tilde{e}$ es un morfismo continuo de A en $\prod_{\mu \in \Lambda} \tilde{A}_\mu$. Más aun, si $a, b \in A$ son tales que $\tilde{e}(a) = \tilde{e}(b)$, entonces $\nu_\lambda[\pi_\lambda(a)] = \nu_\lambda[\pi_\lambda(b)]$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, $\pi_\lambda(a) = \pi_\lambda(b)$, así $a - b \in \ker q_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces

$$a - b \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \ker q_\lambda = \bigcap_{\mathcal{O} \in \mathcal{L}_A} \mathcal{O} = \{0_A\}$$

pues A es de Hausdorff, esto significa que $a = b$. Así $\tilde{e}$ es un morfismo uno a uno. Por otro lado, el morfismo inverso

$$\tilde{e}^{-1} : \tilde{e}(A) \longrightarrow A$$

es también continuo. En efecto nótese que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{e}(A) & \xrightarrow{\tilde{e}^{-1}} & A \\ & \searrow \tilde{Pr}_\lambda & \downarrow \nu_\lambda \circ \pi_\lambda \\ & & \tilde{A}_\lambda \end{array} \quad (3.20)$$

de esta manera se tiene que $\tilde{e}^{-1}$ es continuo, ya que $\tilde{Pr}_\lambda$ es continuo para todo $\lambda \in \Lambda$; es decir,

$$\nu_\lambda \circ \pi_\lambda \circ \tilde{e}^{-1} \text{ es continuo para todo } \lambda \in \Lambda$$

y dado que A tiene la topología inicial dada por los morfismos $\nu_\lambda \circ \pi_\lambda$, entonces por el teorema 1.0.13 se sigue que $\tilde{e}^{-1}$ es continuo.

Tomando esto en cuenta, $\tilde{e}$ es un isomorfismo topológico de A en $\tilde{e}(A)$.

Para mostrar que $\tilde{e}(A)$ es denso en $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$, sea $(\tilde{a}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \varprojlim \tilde{A}_\lambda$ un elemento arbitrario y $\mathcal{O}$ una vecindad arbitraria de $(\tilde{a}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$. Entonces existe una vecindad U de $(\tilde{a}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda$ tal que

$$\mathcal{O} = U \cap \varprojlim \tilde{A}_\lambda$$

así, existe un subconjunto finito $H \subset \Lambda$ tal que

$$U' = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset U,$$

donde U_λ es una vecindad de $\tilde{a}_\lambda$ en $\tilde{A}_\lambda$, si $\lambda \in H$ y $U_\lambda = \tilde{A}_\lambda$, si $\lambda \in \Lambda \setminus H$. Sea $\mu \in \Lambda$ tal que $\lambda \prec \mu$ para toda $\lambda \in H$ y

$$V = \bigcap_{\lambda \in H} \tilde{h}_{\lambda\mu}(U_\lambda),$$

entonces V es vecindad de $\tilde{a}_\mu$ en $\tilde{A}_\mu$. Tomando un elemento $a \in (V_\mu \circ \pi_\mu)^{-1}(V)$. Entonces

$$\nu_\mu \circ \pi_\mu(a) \in V$$

así

$$\nu_\mu \circ \pi_\mu(a) \in \tilde{h}_{\lambda\mu}(U_\lambda) \text{ para toda } \lambda \in H,$$

es decir,

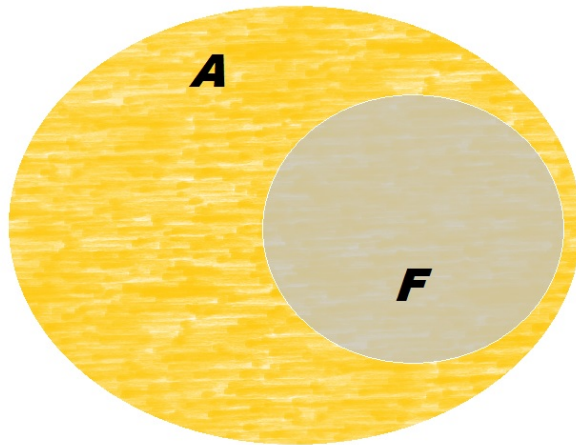
$$\nu_\mu \circ \pi_\mu(a) = \tilde{h}_{\lambda\mu}(\nu_\mu \circ \pi_\lambda(a)) \in U_\lambda \text{ para cada } \lambda \in H,$$

lo cual dice que

$$\tilde{e}(a) \in U \cap \tilde{e}(A).$$

Consecuentemente $\tilde{e}(A)$ es denso en $\varprojlim \tilde{A}_\lambda$. ■

El siguiente diagrama ilustra las álgebras involucradas en el teorema anterior



- A.-Álgebras con multiplicación continua
- F.-Álgebras de Fréchet

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan algunas propiedades de las álgebras topológicas que se preservan bajo la acción de tomar límites proyectivos o, en su defecto, se presentan contraejemplos de aquellas propiedades que no se preservan.

Cabe mencionar que los resultados marcados con * se han obtenido en el transcurso del estudio y desarrollo de la tesis.

En el transcurso de la sección anterior se ha hablado acerca de la importancia de las álgebras *l.m.c.* y por ende, de la importancia de las álgebras *l.m.p – c.*; de esta manera, el primer resultado que se presenta está relacionado con este tipo de álgebras.

***Proposición 4.0.107** *Sea $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}; I\}$ un sistema proyectivo de álgebras localmente m –pseudoconvexas. Entonces el álgebra límite proyectivo asociado al sistema proyectivo es localmente m –pseudoconvexa.*

Demostración: Por el Lema 2.0.29 una base de la topología de $A = \varprojlim A_\alpha$ está dada por

$$\{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \mathfrak{N}_\alpha, \alpha \in I\},$$

donde $\mathfrak{N}_\alpha$ es una base de vecindades de cero en A_α . Pero como A_α es localmente m –pseudoconvexa, entonces los conjuntos que forman la base local de A_α son conjuntos absolutamente pseudoconvexos multiplicativos (idempotentes), es decir, si

$$x, y \in U_\alpha \text{ y } \lambda, \beta \in \mathbb{K},$$

entonces

$$\lambda x + \beta y \in U_\alpha, \text{ siempre que } |\lambda|^k + |\beta|^k \leq 1 \text{ para algún } k \in (0, 1].$$

Para probar que el álgebra límite proyectivo es localmente m -pseudoconvexa, basta con probar que $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es un conjunto absolutamente pseudoconvexo.

En efecto, sean $z, w \in f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ tales que $|\lambda|^k + |\beta|^k \leq 1$, entonces $f_\alpha(z) \in U_\alpha$ y $f_\alpha(w) \in U_\alpha$, de esta manera

$$\lambda f_\alpha(z) + \beta f_\alpha(w) \in U_\alpha,$$

luego

$$f_\alpha(\lambda z) + f_\alpha(\beta w) \in U_\alpha,$$

entonces

$$f_\alpha(\lambda z + \beta w) \in U_\alpha,$$

así

$$\lambda z + \beta w \in f_\alpha^{-1}(U_\alpha).$$

Por lo tanto, $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es un conjunto absolutamente pseudoconvexo.

Por último, nótese que $zw \in f_\alpha^{-1}(U_\alpha)f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, pero

$$f_\alpha(zw) = f_\alpha(z)f_\alpha(w) \in U_\alpha U_\alpha \subseteq U_\alpha,$$

con lo cual se tiene que

$$zw \in f_\alpha^{-1}(U_\alpha).$$

Por lo tanto, el conjunto $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es un conjunto idempotente. Lo cual implica que el álgebra límite proyectivo es localmente m -pseudoconvexa. ■

En el capítulo anterior también se habló de las álgebras advertiblemente completas y su importancia, el siguiente resultado es acerca de este tipo de álgebras.

***Proposición 4.0.108** *Sea $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}; \alpha \in I\}$ un sistema proyectivo de álgebras topológicas, donde cada A_α es advertiblemente completa de Hausdorff con unidad e_α e I es un conjunto dirigido. Entonces el álgebra límite proyectivo $A = \varprojlim A_\alpha$ es advertiblemente completa.*

Demostración: Sea (x^γ) una red de Cauchy en A y sea $x \in A$ tal que

$$x^\gamma \cdot x \longrightarrow e.$$

Entonces, aplicando f_α , se tiene que

$$f_\alpha(x^\gamma \cdot x) \longrightarrow f_\alpha(e) = e_\alpha,$$

lo cual es lo mismo que

$$f_\alpha(x^\gamma) \cdot f_\alpha(x) \longrightarrow e_\alpha.$$

Ahora se probará que $f_\alpha(x^\gamma) = x_\alpha^\gamma$ es una red de Cauchy en A_α .

Sea $\mathcal{O}$ una vecindad de cero en A_α , entonces por la continuidad de f_α se tiene que $f_\alpha^{-1}(\mathcal{O})$ es una vecindad de cero en A , debido a que x^γ es una sucesión de Cauchy en A , entonces para $f_\alpha^{-1}(\mathcal{O})$ existe $\delta \in I$ tal que

$$x^\gamma - x^\eta \in f_\alpha^{-1}(\mathcal{O})$$

siempre que $\gamma, \eta \geq \delta$.

De esta manera

$$x_\alpha^\gamma - x_\alpha^\eta \in \mathcal{O},$$

siempre que $\gamma, \eta \geq \delta$. Por lo tanto, x_α^γ es una sucesión de Cauchy en A_α .

Por lo anterior y debido a que

$$x_\alpha^\gamma \cdot x_\alpha \longrightarrow e_\alpha,$$

se tiene que $x_\alpha^\gamma \longrightarrow x_\alpha$, con $x_\alpha \in A_\alpha$, pues cada A_α es un álgebra advertiblemente completa. Se demostrará que

$$x^\gamma \longrightarrow x$$

con $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$, donde x_α es el correspondiente límite de la red x_α^γ .

Sea V una vecinda de cero en A , ya que la topología de A es la topología inicial dada por los morfismos f_α , entonces se puede suponer que

$$V = \bigcap_{\beta \in H} f_\beta^{-1}(U_\beta),$$

donde cada U_β es un abierto de A_β y $H \subset I$, con H finito.

Como U_β es una vecindad de cero en A_β y $x_\beta^\gamma \longrightarrow x_\beta$, se tiene que existe $\nu_\beta \in I$ tal que

$$x_\beta^\gamma - x_\beta \in U_\beta \text{ para cada } \gamma \geq \nu_\beta.$$

Por lo tanto, existe un número finito de ν_β (tantos como $\beta \in H$), puesto que el conjunto I es dirigido, entonces existe $\theta \in I$ tal que $\nu_\beta \leq \theta$ para cada $\beta \in H$. Luego, si $\gamma \geq \theta$, entonces

$$x^\gamma - x \in \bigcap_{\beta \in H} f_\beta^{-1}(U_\beta),$$

pues

$$f_\beta(x^\gamma - x) = f_\beta(x^\gamma) - f_\beta(x) = x_\beta^\gamma - x_\beta \in U_\beta$$

ya que $\gamma \geq \theta \geq \nu_\beta$. Por lo tanto, $x^\gamma \longrightarrow x$.

Solo queda por demostrar que el elemento x está en el álgebra límite proyectivo. En efecto, considérese lo siguiente

$$f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\beta}(\lim_\gamma x_\beta^\gamma) = \lim_\gamma (f_{\alpha\beta}(x_\beta^\gamma)) = \lim_\gamma (x_\alpha^\gamma) = x_\alpha.$$

Entonces $x \in A$. ■

Los siguientes resultados son extensiones de resultados presentados en el capítulo 2, en el sentido que se cumplen para el caso general cuando se parte de un álgebra, la cual es el límite proyectivo de cierto sistema proyectivo.

***Proposición 4.0.109** *Sea E un álgebra topológica tal que E es el límite proyectivo de un sistema proyectivo $\{E_\alpha, f_{\alpha\beta}; \alpha \in I\}$ de álgebras topológicas sin unidad. Entonces un elemento $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in E$ es casi invertible si y solo si x_α es casi invertible en E_α para cada $\alpha \in I$.*

Demostración: Supóngase que $x \in E$ es casi invertible, entonces, existe $y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in E$ tal que $x \circ y = 0$.

Luego

$$0 = f(0) = f_\alpha(x \circ y) = f_\alpha(x + y - xy) = f_\alpha(x) + f_\alpha(y) - f_\alpha(x)f_\alpha(y) = x_\alpha + y_\alpha - x_\alpha y_\alpha = x_\alpha \circ y_\alpha,$$

entonces x_α es casi invertible para cada $\alpha \in I$.

Ahora, supóngase que x_α es casi invertible para cada $\alpha \in I$, entonces, para cada $\alpha \in I$ existe $y_\alpha \in E_\alpha$ tal que $x_\alpha \circ y_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in I$. Sea $y \in \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ tal que $y = (y_\alpha)_{\alpha \in I}$, de esta manera se tiene que

$$(x \circ y)_\alpha = (x + y - xy)_\alpha = x_\alpha + y_\alpha - x_\alpha y_\alpha = 0, \text{ para cada } \alpha \in I.$$

Por lo tanto, $x \circ y = 0$. Resta probar que el elemento $y \in E$, pero

$$x_\alpha \circ f_{\alpha\beta}(y_\beta) = f_{\alpha\beta}(x_\beta) \circ f_{\alpha\beta}(y_\beta) = f_{\alpha\beta}(x_\beta) + f_{\alpha\beta}(y_\beta) - f_{\alpha\beta}(x_\beta)f_{\alpha\beta}(y_\beta) = f_{\alpha\beta}(x_\beta \circ y_\beta) = f_{\alpha\beta}(0) = 0.$$

Dado que el casi inverso es único, se tiene que $f_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha$. Por lo tanto, $y \in E$. ■

***Corolario 4.0.110** Sea $E = \varprojlim E_\alpha$ un álgebra límite proyectivo sin unidad. Entonces, para un elemento $x \in E$

$$Sp_E(x) = \bigcup_{\alpha \in I} Sp_{E_\alpha}(x_\alpha)$$

para cualquier elemento $x \in E$. Más aun, el radio espectral de un elemento $x \in E$ está dado por

$$r_E(x) = \sup r_{E_\alpha}(x_\alpha)$$

Demostración: Supóngase que $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in Sp_E(x)$ si $\frac{1}{\lambda}x$ es casi singular, entonces por la proposición anterior, el elemento

$$\frac{1}{\lambda}x_\alpha$$

debe ser casi singular para algún $\alpha \in I$. Por lo tanto,

$$\lambda \in Sp_{E_\alpha}(x_\alpha) \text{ para algún } \alpha \in I$$

$$\lambda \in \bigcup_{\alpha} Sp_{E_\alpha}(x_\alpha)$$

Además, si $0 \in Sp_E(x)$, entonces x debe ser un elemento singular de E . Entonces por la proposición anterior esto debe ser cierto para algún elemento $x_\alpha \in E_\alpha$ y por lo tanto $0 \in Sp_{E_\alpha}(x_\alpha)$, y recíprocamente por la proposición anterior.

Por otro lado, por la definición de radio espectral y la igualdad anterior se concluye la primera de las relaciones

$$r_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_E(x)\}$$

$$r_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \bigcup_{\alpha} Sp_{E_{\alpha}}(x_{\alpha})\}$$

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp_{E_{\alpha}}(x_{\alpha})\}$$

$$r_E(x) = \sup_{\alpha} r_{E_{\alpha}}(x_{\alpha})$$

Ahora se darán algunos resultados relativos a la propiedad Q y TQ . Con respecto a esto, se ha mostrado en los ejemplos de la sección anterior que en general, el límite proyectivo de álgebras topológicas con la propiedad Q no necesariamente es un álgebra con la propiedad Q . Aún no ha sido posible poder decir qué hipótesis se necesitan pedir para que el resultado anterior sea válido, pero aquí se muestran resultados parciales con respecto a ello.

***Proposición 4.0.111** *Sea $\{E_{\alpha}; f_{\alpha\beta}, I\}$ un sistema proyectivo finito de Q -álgebras. Entonces el álgebra límite proyectivo E asociado a ese sistema es una Q -álgebra.*

Demostración: Dado que E_{α} es una Q -álgebra para cada $\alpha \in I$, entonces existe U_{α} vecindad de cero en E_{α} tal que

$$U_{\alpha} \subset G^q(E_{\alpha}).$$

Sea

$$W = \bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}),$$

de esta manera, se tiene que $W \subset G^q(E)$. En efecto, si $x \in W$, entonces

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha})$$

así

$$x_{\alpha} = f_{\alpha}(x) \in U_{\alpha} \subset G^q(E_{\alpha}).$$

Por 4.0.109, se tiene que x es casi invertible si y solo si x_{α} es casi invertible en E_{α} para cada $\alpha \in I$. Por lo tanto, E es una Q -álgebra. ■

Como una generalización del concepto de ser casi invertible, M. Abel estudio la noción de ser topológicamente casi invertible. Estos conceptos se definen de la siguiente manera

Definición.- 4.0.112 Sea A un álgebra topológica, un elemento $x \in A$ es **topológicamente casi invertible** en A si existe una red $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de A tal que

$$(y_\lambda \circ x)_{\lambda \in \Lambda}$$

converge a cero en A .

Se denotará al conjunto de los elementos topológicamente casi invertibles por

$$Tqinv(A)$$

Observación 4.0.113 Si A un álgebra topológica, entonces

$$Qinv(A) \subset Tqinv(A).$$

Definición.- 4.0.114 Un álgebra topológica A es una TQ -**álgebra** si el conjunto $Tqinv(A)$ es abierto en A .

Definición.- 4.0.115 Un álgebra topológica A es **advertiva** si

$$Tqinv(A) = Qinv(A).$$

Proposición 4.0.116 Sea $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}; I\}$ un sistema proyectivo de álgebras advertivas. Entonces $A = \varprojlim A_\alpha$ es un álgebra advertiva.

Demostración: Sea $A = \varprojlim A_\alpha$ el álgebra límite proyectivo del sistema proyectivo $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}; I\}$, donde cada A_α es un álgebra advertiva (aquí π_β denota el morfismo proyección de $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ sobre A_β y $f_\alpha = \pi_\alpha|_A$ para cada $\alpha \in I$). Para probar que A es un álgebra advertiva es suficiente mostrar que $Tqinv A \subset Qinv A$. Sea $a = (a_\alpha)_{\alpha \in I} \in Tqinv A$. Entonces existe una red $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in A$ tal que $(a \circ a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ y $(a_\lambda \circ a)_{\lambda \in \Lambda}$ convergen a 0_{A_α} . Ya que f_α es continuo para cada $\alpha \in I$, entonces $(f_\alpha(a \circ a_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ y $(f_\alpha(a_\lambda \circ a))_{\lambda \in \Lambda}$ convergen a 0_A para cada $\alpha \in I$. Por lo tanto, $a_\alpha \in Tqinv A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Por suposición, cada A_α es advertiva. Así $a_\alpha \in Qinv A$ para cada $\alpha \in I$, ahora para cada $\alpha \in I$ existe un elemento $b_\alpha \in A_\alpha$ tal que $a_\alpha \circ b_\alpha = b_\alpha \circ a_\alpha = 0_{A_\alpha}$. Ya que

$$a_\alpha \circ f_{\alpha\beta}(b_\beta) = f_{\alpha\beta}(a_\beta) \circ f_{\alpha\beta}(b_\beta) = f_{\alpha\beta}(a_\beta \circ b_\beta) = f_{\alpha\beta}(0_{A_\beta}) = 0_{A_\alpha}$$

y de forma similar

$$f_{\alpha\beta}(b_\beta) \circ a_\alpha = 0_{A_\alpha}$$

siempre que $\alpha \leq \beta$, entonces $b_\alpha = f_{\alpha\beta}(b_\beta)$ (pues el casi inverso es único) siempre que $\alpha \leq \beta$. De esta manera $b = (b_\alpha)_{\alpha \in I} \in A$. Por lo tanto, A es advertiva. ■

Lema 4.0.117 *Cualquier Q -álgebra es advertiva.*

Demostración: Nótese que $Qinv(A) \subset Tqinv(A)$ siempre sucede. En efecto, sea $a \in Qinv(A)$, entonces existe $b \in A$ tal que $a \circ b \rightarrow 0$, luego si se considera la red constante $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, con $b_\lambda = b$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Se tiene que $(a \circ b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a cero. Por lo tanto, $a \in Tqinv(A)$.

Sea $a \in Tqinv(A)$, entonces existe una red $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $(a \circ b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a cero. Así para cada vecindad de cero V , existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $a \circ b_\lambda \in V$ siempre que $\lambda > \lambda_0$. Dado que el álgebra es Q , se tiene que $Qinv(A)$ es una vecindad de cero, por lo tanto existe un $\gamma \in \Lambda$ tal que $a \circ b_\lambda \in Qinv(A)$ siempre que $\lambda > \gamma$. Luego, existe $c \in A$ tal que $(a \circ b_\lambda) \circ c = 0$, entonces $a \circ (b_\lambda \circ c) = 0$. Por lo tanto, $a \in Qinv(A)$. ■

Corolario 4.0.118 *Si A es una Q -álgebra, entonces A es una TQ -álgebra.*

Demostración: Por el lema anterior, se tiene que A es advertiva, entonces

$$Tqinv(A) = Qinv(A),$$

ya que el conjunto $Qinv(A)$ es abierto en A , entonces $Tqinv(A)$ es abierto en A . Por lo tanto, A es una TQ -álgebra. ■

***Observación 4.0.119** *Sea $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}; I\}$ un sistema proyectivo de TQ -álgebras. Entonces el álgebra límite proyectivo del sistema no necesariamente es TQ -álgebra.*

En efecto, supongase que si es cierto, es decir el álgebra límite proyectivo de un sistema proyectivo de TQ -álgebras es una TQ -álgebra. Sea $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}; J\}$ un sistema proyectivo de Q -álgebras. Entonces E_α es una TQ -álgebra para cada $\alpha \in J$. Así por la suposición inicial, se tiene que $E = \varprojlim E_\alpha$ es una TQ -álgebra.

Por 4.0.117 se tiene que cada E_α es advertiva y por la proposición 4.0.116 se tiene que E es advertiva. Entonces $Qinv(A) = TQinv(A)$. Ya que E es TQ , entonces $Qinv(A)$ es abierto en A , lo cual dice que el límite proyectivo de un sistema proyectivo de Q -álgebras es una Q -álgebra. Lo anterior es falso, pues basta considerar el álgebra $C(\mathbb{R})$ con la topología compacto abierta. Por lo tanto, la suposición es falsa y de esta manera se obtiene lo deseado.

Capítulo 5

Bornología

En este capítulo se introducen las nociones básicas de bornología, espacios vectoriales bornológicos, morfismos lineales acotados y convergencia bornológica.

5.0.11. Definiciones

Una **bornología** en un conjunto X es una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisfacen los siguientes axiomas:

(B.1) : $\mathcal{B}$ es una cubierta de X , es decir $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;

(B.2) : $\mathcal{B}$ es cerrado bajo inclusiones, es decir si $A \in \mathcal{B}$ y $B \subset X$ tal que $B \subset A$, entonces $B \in \mathcal{B}$;

(B.3) : $\mathcal{B}$ es cerrado bajo uniones finitas, es decir, si $A, B \in \mathcal{B}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Un par $(X, \mathcal{B})$ que consiste de un conjunto X y una bornología $\mathcal{B}$ en X es llamado un **conjunto bornológico** y los elementos de $\mathcal{B}$ son llamados los **subconjuntos acotados** de X .

Una **base de la bornología** $\mathcal{B}$ de X es una subfamilia $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$ tal que cualquier elemento de $\mathcal{B}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{B}_0$. Una familia $\mathcal{B}_0$ de subconjuntos de X es una base para una bornología si y solo si $\mathcal{B}_0$ cubre a X y cualquier unión finita de elementos de $\mathcal{B}_0$ está contenida en un miembro de $\mathcal{B}_0$. Entonces la colección de los subconjuntos de X los cuales están contenidos en algún elemento de $\mathcal{B}_0$, definen una bornología $\mathcal{B}$ en X teniendo a $\mathcal{B}_0$ como base.

Sea E un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Una bornología vectorial $\mathcal{B}$ en E es una bornología compatible con la estructura de espacio vectorial de E , es decir,

- 1) $\mathcal{B}$ es estable bajo suma vectorial, es decir, si $A, B \in \mathcal{B}$, entonces $A + B \in \mathcal{B}$;
- 2) $\mathcal{B}$ es estable bajo transformaciones homotéticas, es decir, si $A \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda A \in \mathcal{B}$;
- 3) $\mathcal{B}$ es estable bajo la formación de envolventes balanceadas, es decir, si $A \in \mathcal{B}$, entonces $\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha A \in \mathcal{B}$.

Se llama un **espacio vectorial bornológico** a cualquier par $(E, \mathcal{B})$ que consiste de un espacio vectorial E y una bornología vectorial en E .

Una bornología vectorial en un espacio vectorial E es llamada una **bornología vectorial convexa** si es estable bajo la formación de envolventes convexas. Tal bornología es también estable bajo la formación de envolventes absolutamente convexas, ya que la envolvente convexa de un conjunto balanceado es un conjunto balanceado. Un espacio vectorial bornológico $(E, \mathcal{B})$ cuya bornología $\mathcal{B}$ es convexa es llamado un espacio vectorial bornológico convexo. Un espacio vectorial bornológico $(E, \mathcal{B})$ **separado** (o una **bornología separada**) es aquel en el cual el $\{0\}$ es el único subespacio vectorial acotado de E .

5.0.12. Homomorfismos lineales acotados

Sean X y Y dos conjuntos bornológicos, $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ sus respectivas bornologías y $u : X \rightarrow Y$ un morfismo de X en Y . Se dice que u es un **morfismo acotado** si la imagen bajo u de cualquier subconjunto acotado de X es acotado en Y , es decir, si $B \in \mathcal{B}_X$, entonces $u(B) \in \mathcal{B}_Y$. Por ejemplo el morfismo identidad de cualquier conjunto bornológico es acotado.

Sean X, Y, Z tres conjuntos bornológicos y $u : X \rightarrow Y$, $v : Y \rightarrow Z$ dos morfismos acotados. Entonces $v \circ u : X \rightarrow Z$ es un morfismo acotado. En efecto, sea $B \in \mathcal{B}_X$, entonces $u(B) \in \mathcal{B}_Y$, luego $v(u(B)) \in \mathcal{B}_Z$. Lo cual prueba que $v \circ u$ es un morfismo acotado.

A diferencia de la topología, una bornología $\mathcal{B}_1$ en un conjunto X es **más fina** que otra bornología $\mathcal{B}_2$ en X (o $\mathcal{B}_2$ es **más gruesa** que $\mathcal{B}_1$), si el morfismo identidad $i : (X, \mathcal{B}_1) \rightarrow (X, \mathcal{B}_2)$ es acotado. Esto es equivalente con decir que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Un **isomorfismo bornológico** entre dos conjuntos bornológicos es una biyección u tal que tanto u como su inversa u^{-1} son acotados.

Sean ahora, E y F dos espacios vectoriales bornológicos. Un morfismo lineal acotado de E en F es cualquier morfismo de E en F el cual es al mismo tiempo lineal y acotado. Claramente la composición de dos morfismos lineales acotados es un morfismo lineal acotado. Un ejemplo trivial de un morfismo lineal acotado es el morfismo identidad de cualquier espacio vectorial bornológico en sí mismo. Un **isomorfismo bornológico** entre dos espacios vectoriales bornológicos es un isomorfismo bornológico entre conjuntos el cual también es lineal.

Un funcional acotado en un espacio vectorial bornológico E es un morfismo lineal acotado de E en el campo de escalares $\mathbb{K}$, este último dotado con la bornología usual definida por su valor absoluto, es decir, un conjunto B en $\mathbb{K}$ es acotado si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq k$ para cada $x \in B$.

5.0.13. Ejemplos fundamentales de bornologías

Ejemplo 1.- La bornología canónica de $\mathbb{K}$: Sea $\mathbb{K}$ un campo con un valor absoluto (se supondrá que $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). La colección de subconjuntos de $\mathbb{K}$ los cuales son ‘acotados’ en el sentido usual para el valor absoluto es una bornología convexa en $\mathbb{K}$ llamada la bornología canónica (usual) de $\mathbb{K}$. En efecto, sean A, B dos acotados en $\mathbb{K}$, es decir $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}$, así existen $k, k' \in \mathbb{K}$ tales que

$$|a| \leq k \text{ para cada } a \in A \text{ y } |b| \leq k' \text{ para cada } b \in B.$$

Es claro que esta colección es una bornología en $\mathbb{K}$, se mostrará que es una bornología vectorial:

- Si $x \in A + B$, entonces $x = a + b$ para algún $a \in A$ y $b \in B$, luego

$$|x| = |a + b| \leq |a| + |b| \leq k + k',$$

así $|x| \leq k''$ para cada $x \in A + B$, con $k'' = k + k'$. Por lo tanto, $A + B \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}$.

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, sea $x \in \lambda A$, entonces $x = \lambda a$ para algún $a \in A$, así

$$|x| = |\lambda a| = |\lambda||a| \leq |\lambda|k,$$

es decir $|x| \leq |\lambda|k$ para toda $x \in \lambda A$. Por lo tanto, $\lambda A \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}$.

- Si $x \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$, entonces $x = \lambda a$ para algún $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$, así

$$|x| = |\lambda a| \leq |a| \leq k$$

de esta manera $|x| \leq k$ para cada $x \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$. Por lo tanto, $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}$.

Así, $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ es una bornología vectorial.

- Ahora, sea

$$x \in \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n. \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Entonces $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, con $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$, así

$$|x| = |\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n| \leq |\lambda_1| |a_1| + \cdots + |\lambda_n| |a_n| \leq |\lambda_1| k + \cdots + |\lambda_n| k = k(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|) = k \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right) \leq k,$$

luego $|x| \leq k$ para todo $x \in \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, con $a_i \in A$ y $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Por lo tanto, la bornología $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}$ es una bornología vectorial convexa.

Ejemplo 2.- La bornología definida por una seminorma: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea p una seminorma en E . Un subconjunto A de E se dice que es un subconjunto acotado para la seminorma p si $p(A)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ en el sentido del ejemplo anterior, en el caso particular cuándo $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$. Los subconjuntos de E los cuales son acotados para la seminorma p forman una bornología convexa en E llamada la bornología canónica del espacio seminormado (E, p) ; se denotará por $\mathcal{B}_p$ tal bornología. Esta bornología es separada si y solo si p es una norma. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{B}_p$, entonces existen $k, k' \in \mathbb{K}$ tales que

$$|p(a)| \leq k \text{ para todo } a \in A \text{ y } |p(b)| \leq k' \text{ para todo } b \in B.$$

- Si $x \in A + B$, se sigue que $x = a + b$ para algún $a \in A$ y $b \in B$, luego

$$|p(x)| = p(x) = p(a + b) \leq p(a) + p(b) \leq k + k'$$

de esta manera $|p(x)| \leq k''$ para todo $x \in A + B$, con $k'' = k + k'$. Por lo tanto, $A + B \in \mathcal{B}_p$.

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $a \in A$, entonces, si $x \in \lambda A$, $x = \lambda a$ para algún $a \in A$, luego

$$|p(x)| = p(x) = p(\lambda a) = |\lambda| p(a) \leq |\lambda| k$$

así, $|p(x)| \leq s$ para toda $x \in \lambda A$, con $s = |\lambda| k$. Por lo tanto, $\lambda A \in \mathcal{B}_p$.

- Sea $x \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$, entonces $x \in \lambda A$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, con $|\lambda| \leq 1$, así $x = \lambda a$ para algún $a \in A$ y algún $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$, de esta manera

$$|p(x)| = p(x) = p(\lambda a) = |\lambda| p(a) \leq p(a) \leq k$$

luego, $|p(x)| \leq k$ para cada $x \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$. Por lo tanto, $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A \in \mathcal{B}_p$.

Por lo tanto, $\mathcal{B}_p$ es una bornología vectorial.

■ Ahora, sea

$$x \in \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n. \quad y \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Entonces $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, con $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$, así

$$\begin{aligned} |p(x)| &= p(x) = p(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \leq |\lambda_1| p(a_1) + \dots + |\lambda_n| p(a_n) \leq \\ &|\lambda_1| k + \dots + |\lambda_n| k = k(|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|) = k \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right) \leq k, \end{aligned}$$

luego $|p(x)| \leq k$ para todo $x \in \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, con $a_i \in A$ y $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Por lo tanto, la bornología $\mathcal{B}_p$ es una bornología vectorial convexa.

Por otro lado, supóngase que el $\{0\}$ es el único subespacio vectorial acotado. Sea $x \in E$ tal que $p(x) = 0$, con $x \neq 0$. Considérese el subespacio vectorial generado por x , es decir

$$V_x = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^m \lambda_i x \quad \text{para algunos} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \right\},$$

así, V_x es distinto del subespacio vectorial $\{0\}$. Sea $y \in V_x$, entonces $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$

para cada $i = 1, 2, \dots, m$, luego $p(y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i p(x) = 0$. Lo cual dice que V_x es un subespacio vectorial acotado distinto de cero, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $x = 0$, es decir p es una norma.

Ahora, si p es una norma. Sea A un subespacio vectorial acotado de E , es decir si $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

- $x + y \in A$;
- $\lambda x \in A$;
- existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $p(a) \leq k$ para cada $a \in A$.

Como A es subespacio, se tiene que $nkx \in A$, así $p(nkx) \leq k$, con $n \in \mathbb{N}$ y k la constante que acota al conjunto $p(A)$. Por lo tanto se tiene que $p(x) \leq \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $p(x) = 0$ para cada $x \in A$, ya que p es una norma, entonces $x = 0$ para cada $x \in A$, es decir $A = \{0\}$.

Ejemplo 3.- La bornología definida por una familia de seminormas: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\Gamma = (p_j)_{j \in I}$ una familia de seminormas en E indexadas por un conjunto no vacío I . Se dice que un subconjunto A de E es un subconjunto acotado para la familia de seminormas Γ si para cualquier $j \in I$, $p_j(A)$ es acotado en $\mathbb{R}$. Los subconjuntos de E los cuales son acotados para la familia Γ definen una bornología convexa en E llamada la bornología definida por Γ ; dicha bornología se denotará por $\mathcal{B}_\Gamma$. Tal bornología es separada si y solo si Γ separa a E , es decir si para cualquier $x \in E$, con $x \neq 0$, existe $j \in I$ tal que $p_j(x) \neq 0$. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{B}_\Gamma$, entonces existen $k, k' \in \mathbb{K}$ tales que para cada $j \in I$

$$|p_j(a)| \leq k_j \text{ para todo } a \in A \text{ y } |p_j(b)| \leq k'_j \text{ para todo } b \in B.$$

- Si $x \in A + B$, se sigue que $x = a + b$ para algún $a \in A$ y $b \in B$, luego

$$|p_j(x)| = p_j(x) = p_j(a + b) \leq p_j(a) + p_j(b) \leq k_j + k'_j$$

para cada $j \in I$, de esta manera $|p_j(x)| \leq k''_j$ para todo $x \in A + B$, con $k''_j = k_j + k'_j$. Por lo tanto, $A + B \in \mathcal{B}_\Gamma$.

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $a \in A$, entonces, si $x \in \lambda A$, $x = \lambda a$ para algún $a \in A$, luego

$$|p_j(x)| = p_j(x) = p_j(\lambda a) = |\lambda| p_j(a) \leq |\lambda| k_j$$

para cada $j \in I$ así, $|p_j(x)| \leq s_j$ para toda $x \in \lambda A$, con $s_j = |\lambda| k_j$. Por lo tanto, $\lambda A \in \mathcal{B}_\Gamma$.

- Sea $x \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$, entonces $x \in \lambda A$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, con $|\lambda| \leq 1$, así $x = \lambda a$ para algún $a \in A$ y algún $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$, de esta manera

$$|p_j(x)| = p_j(x) = p_j(\lambda a) = |\lambda| p_j(a) \leq p_j(a) \leq k_j$$

para cada $j \in I$, luego $|p_j(x)| \leq k_j$ para cada $x \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$. Así, $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A \in \mathcal{B}_\Gamma$.

Por lo tanto, $\mathcal{B}_\Gamma$ es una bornología vectorial.

- Ahora, sea

$$x \in \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n. \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Entonces $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, con $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$, así

$$|p_j(x)| = p_j(x) = p_j(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) \leq |\lambda_1| p_j(a_1) + \cdots + |\lambda_n| p_j(a_n) \leq$$

$$|\lambda_1| k + \cdots + |\lambda_n| k = k(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|) = k \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right) \leq k_j,$$

para cada $j \in I$. Luego $|p_j(x)| \leq k_j$ para todo $x \in \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, con $a_i \in A$ y $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Por lo tanto, la bornología $\mathcal{B}_\Gamma$ es una bornología vectorial convexa.

Por otro lado, supóngase que el subespacio vectorial que consta sólo del elemento $\{0\}$ es el único subespacio acotado. Sea $x \in E$ tal que $x \neq 0$ y $p_j(x) = 0$ para cada $j \in I$. Considérese el subespacio vectorial generado por x , es decir

$$V_x = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^m \lambda_i x \quad \text{para algunos } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \right\},$$

así V_x es distinto del subespacio vectorial $\{0\}$. Sea $y \in V_x$, entonces

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x, \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, m.,$$

luego $p_j(y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_j(x) = 0$, lo cual dice que V_x es un subespacio vectorial acotado distinto de cero, pero esto es una contradicción. Por lo tanto,

$p_j(x) \neq 0$ para algun $j \in I$, es decir Γ es una familia de seminormas que separa a E .

Ahora, si Γ es una familia que separa a E , supóngase que existe A un subespacio vectorial acotado de E distinto del subespacio vectorial $\{0\}$, es decir si $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

- $x + y \in A$;
- $\lambda x \in A$;
- existe $k_j \in \mathbb{K}$ tal que $p(a) \leq k_j$ para cada $a \in A$ y para cada $j \in I$.

Como A es subespacio, sea $x \in A$, con $x \neq 0$, así se tiene que $nk_j x \in A$, con $n \in \mathbb{N}$ y k_j la constante que acota al conjunto $p_j(A)$, así $p_j(nk_j x) \leq k_j$, de donde se sigue que $p_j(x) \leq \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $p_j(x) = 0$ para cada $x \in A$ y para cada $j \in I$, lo cual es una contradicción ya que Γ es una familia de seminormas que separa a E ; entonces $A = \{0\}$.

Ejemplo 4.- La bornología de Kolmogorov-Von Neumann de un espacio vectorial topológico: Un subconjunto acotado de un espacio vectorial E es un subconjunto que es absorbido por cualquier vecindad de cero. Esta definición se debe a Andréi Kolmogorov y a John

Von Neumann [24]. La colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos acotados de E forman una bornología vectorial en E llamada la bornología de Kolmogorov-Von Neumann de E o la bornología canónica de E . Se verificará que en efecto $\mathcal{B}$ es una bornología vectorial en E . Sea $\mathcal{V}$ una base de vecindades balanceadas de cero en E . Por definición, un subconjunto A de E es acotado si y solo si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda V$.

- Ya que cualquier vecindad de cero es absorbente, entonces $\mathcal{B}$ es una cubierta de E . Pues

$$E \subseteq \bigcup_{x \in E} \{x\} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A.$$

- Sea $B \in \mathcal{B}$ y $A \subset E$, tal que $A \subset B$, entonces $A \subset B \subset \lambda V$ para algún $\lambda > 0$ y para cada $V \in \mathcal{V}$.
- Sean $A, B \in \mathcal{B}$ y $V \in \mathcal{V}$. Por la continuidad de la suma, existe un $W \in \mathcal{V}$ tal que $W + W \subset V$. Ya que A y B son acotados en E , existen escalares positivos λ y μ tales que $A \subset \lambda W$ y $B \subset \mu W$. Con $\alpha = \max\{\lambda, \mu\}$ se tiene

$$A + B \subset \lambda W + \mu W \subset \alpha W + \alpha W \subset \alpha(W + W) \subset \alpha V.$$

- Sean $A \in \mathcal{B}$ y $\beta \in \mathbb{K}$, entonces por ser A acotado, se tiene que $A \subset \lambda' V$ para algún $\lambda' > 0$ y para cada $V \in \mathcal{V}$. Luego $\beta A \subset |\beta| \lambda' V$, de esta manera $\beta A \subset \lambda V$, donde $\lambda = |\beta| \lambda'$.
- Ahora, como A es acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda V$ para cada $V \in \mathcal{V}$, luego para cada $\gamma \in \mathbb{K}$ tal que $|\gamma| \leq 1$, se tiene que

$$\gamma A \subset |\gamma| \lambda V = \lambda |\gamma| V \subset \lambda V$$

la última contención se debe a que V es balanceada. Por lo tanto,

$$\bigcup_{|\gamma| \leq 1} \gamma A \subset \lambda V$$

para cada $V \in \mathcal{V}$.

De esta manera $\mathcal{B}$ es una bornología vectorial en E .

Esta definición, la cual generaliza la noción de un conjunto acotado en un espacio vectorial normado, juega un papel importante en la teoría de espacios localmente convexos.

5.1. Construcciones bornológicas fundamentales

En esta sección se dan los métodos fundamentales para construir nuevas bornologías a partir de otras. Estos métodos son estándar en el análisis funcional y consisten en formar productos, subespacios y límites proyectivos.

Bornologías iniciales

Teorema 5.1.1 (*Teorema 1, p. 29 en [23]*) Sean I un conjunto no vacío, $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos bornológicos indexada por I y X un conjunto. Supóngase que, para cualquier $i \in I$, se tiene el morfismo $u_i : X \rightarrow X_i$. Considérese el conjunto $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos A de X que tienen la siguiente propiedad:

$$u_i(A) \text{ es acotado en } X_i \text{ para cualquier } i \in I.$$

Entonces

- (i) $\mathcal{B}$ es una bornología en X y es la bornología más gruesa en X para la cual cada morfismo u_i es acotado;
- (ii) Si X y X_i son espacios vectoriales, $\mathcal{B}_i$ es una bornología vectorial en X_i y u_i lineal para cada $i \in I$, entonces $\mathcal{B}$ es una bornología vectorial en X .

Demostración: (i) Se probará que $\mathcal{B}$ es una bornología en X

- Sea $x \in X$, entonces $u_i(\{x\}) = \{y_i\} \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$. Así $\{x\} \in \mathcal{B}$, luego

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$$

- Sean $B \in \mathcal{B}$ y $A \subset X$ tal que $A \subset B$, luego $u_i(A) \subset u_i(B) \in \mathcal{B}_i$, para cada $i \in I$. Dado que $\mathcal{B}_i$ es una bornología para cada $i \in I$, se tiene que

$$u_i(A) \in \mathcal{B}_i \text{ para cada } i \in I.$$

Por lo tanto, A es acotado en X , es decir $A \in \mathcal{B}$.

- Sean $A, B \in \mathcal{B}$, entonces $u_i(A) \in \mathcal{B}_i$ y $u_i(B) \in \mathcal{B}_i$, luego

$$u_i(A \cup B) = u_i(A) \cup u_i(B) \in \mathcal{B}_i$$

lo cual implica que $A \cup B$ es acotado en X , es decir $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Ahora se probará que $\mathcal{B}$ es la bornología más gruesa en X que hace a cada morfismo u_i acotado. En efecto, sea $\mathcal{B}'$ otra bornología para la cual los morfismos u_i son acotados y considérese el morfismo identidad

$$id : (X, \mathcal{B}') \rightarrow (X, \mathcal{B}).$$

Por definición u_i es un morfismo acotado para cada $i \in I$. Entonces, para cada $B \in \mathcal{B}'$ se tiene que $u_i(B)$ es acotado en X_i para cada $i \in I$, así $B \in \mathcal{B}$. De esta manera el morfismo id es un morfismo acotado. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es la bornología mas gruesa para la cual los morfismos u_i son morfismos acotados.

(ii) Ahora, si X es un espacio vectorial y si para cualquier $i \in I$, X_i es un espacio vectorial, $\mathcal{B}_i$ es una bornología vectorial en X_i y el morfismo u_i es lineal, entonces

- Sean $A, B \in \mathcal{B}$, es decir $u_i(A) \in \mathcal{B}_i$ y $u_i(B) \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$, luego

$$u_i(A + B) = u_i(A) + u_i(B) \in \mathcal{B}_i \text{ para cada } i \in I$$

Por lo tanto, $A + B \in \mathcal{B}$.

- Sean $A \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $u_i(A) \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$, así

$$u_i(\lambda A) = \lambda u_i(A) \in \mathcal{B}_i \text{ para cada } i \in I.$$

Por lo tanto, $\lambda A \in \mathcal{B}$.

- Debido a que $\mathcal{B}_i$ es una bornología vectorial, se tiene que $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda B_i \in \mathcal{B}_i$ para cada $B_i \in \mathcal{B}_i$. En particular, para $u_i(A)$, con $A \in \mathcal{B}$, así

$$\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda u_i(A) \in \mathcal{B}_i$$

es decir,

$$u_i\left(\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A\right) \in \mathcal{B}_i.$$

Por lo tanto, $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A \in \mathcal{B}$.

De lo anterior se sigue que la bornología $\mathcal{B}$ es una bornología vectorial en X . ■

Definición.- 5.1.2 La bornología $\mathcal{B}$ en X definida por el teorema anterior es llamada la **bornología inicial** en X para los morfismos u_i .

Nota: Sea Y un conjunto bornológico y sea X dotado con la bornología inicial dada por los morfismos u_i . Entonces un morfismo $u : Y \rightarrow X$ es acotado si y solo si $u_i \circ u$ es acotado para cada $i \in I$.

En efecto, supóngase que u es un morfismo acotado y sea $A \in \mathcal{B}_Y$, entonces $u(A) \in \mathcal{B}_X$. Dado que $\mathcal{B}_X$ es la bornología inicial dada por los morfismos u_i , se tiene que $u_i(u(A)) \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$, donde $\mathcal{B}_i$ es la bornología de X_i para cada $i \in I$. Por lo tanto, $u_i \circ u$ es un morfismo acotado para cada $i \in I$.

Ahora, si $u_i \circ u$ es un morfismo acotado para cada $i \in I$, sea $B \in \mathcal{B}_Y$, entonces $(u_i \circ u)(B) \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$, así $u_i(u(B)) \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$, lo cual implica que $u(B) \in \mathcal{B}_X$. Por lo tanto, u es un morfismo acotado.

El siguiente diagrama ilustra esta situación

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & X \\ & \searrow u_i \circ u & \downarrow u_i \\ & & X_i \end{array} . \quad (5.1)$$

Base de una bornología inicial

Con la notación del teorema 5.1.1, sea:

$$u_i^{-1}(\mathcal{B}_i) = \{u_i^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_i\} \text{ para cualquier } i \in I.$$

Entonces la familia $\mathcal{B}_0 = \bigcap_{i \in I} u_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ es una base de la bornología inicial $\mathcal{B}$ en X para los morfismos u_i . En efecto

- Sea $A \in \bigcap_{i \in I} u_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$, entonces $A \in u_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ para cada $i \in I$. Así $u_i(A) \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$, lo cual dice que $A \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.
- Sea $B \in \mathcal{B}$, entonces $u_i(B) \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$. De esta manera, existe $B_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $u_i(B) \subset B_i$, es decir $B \subset u_i^{-1}(B_i)$. Así la intersección de los conjuntos $u_i^{-1}(B_i)$ pertenece a $\mathcal{B}_0$ y contiene a B .

Por lo tanto, $\mathcal{B}_0$ es una base para la bornología $\mathcal{B}$.

Bornologías producto

Definición.- 5.1.3 Sea $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos bornológicos indexados por un conjunto no vacío I y sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ el producto de los conjuntos X_i . Para cualquier $i \in I$, sea $p_i : X \rightarrow X_i$ la proyección canónica. Entonces la **bornología producto** en X es la bornología inicial en X dada por los morfismos p_i .

El conjunto X , dotado con la bornología producto es llamado el **producto bornológico** de los conjuntos $(X_i, \mathcal{B}_i)$.

Proposición 5.1.4 (Proposición 1, p.30 en [23]) Con la notación de la definición anterior, la bornología producto en X tiene una base que consiste de conjuntos de la forma $B = \prod_{i \in I} B_i$, donde $B_i \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$.

Demostración: ■ Un conjunto de la forma $B = \prod_{i \in I} B_i$ es claramente acotado para la bornología producto, ya que

$$p_i(B) = B_i \in \mathcal{B}_i \text{ para cada } i \in I.$$

Entonces B está en la bornología producto.

■ Si A es un subconjunto de X el cual es acotado para la bornología producto, sea $A_i = p_i(A)$ para cada $i \in I$ y $B = \prod_{i \in I} B_i$. Entonces A_i es acotado en X_i y $A \subset B$. ■

Nota: Si los X_i 's son espacios vectoriales y X es su producto considerado como espacio vectorial, entonces las proyecciones $p_i : X \rightarrow X_i$ son morfismos lineales. Así por el teorema 5.1.1 la bornología producto es una bornología vectorial si todas las bornologías $\mathcal{B}_i$ también lo son.

Bornologías inducidas: Subespacios bornológicos

Definición.- 5.1.5 Sea $(X, \mathcal{B})$ un conjunto bornológico, sea Y un subconjunto de X y sea $u : Y \rightarrow X$ la inclusión canónica. Entonces la **bornología inducida** en Y por $(X, \mathcal{B})$ es la bornología inicial en Y dada por el morfismo u .

El conjunto Y , dotado con la bornología inducida por $(X, \mathcal{B})$, se dice que es un **subconjunto bornológico** de $(X, \mathcal{B})$. Si $(X, \mathcal{B})$ es un espacio vectorial bornológico y Y es un subespacio vectorial de X , la bornología inducida en Y es necesariamente una bornología vectorial, así Y es llamado un **subespacio vectorial bornológico** de X .

Proposición 5.1.6 (*Proposición 1, p.31 en [23]*) Con la notación de la definición anterior, una base para la bornología inducida en Y por $(X, \mathcal{B})$ es dada por la familia

$$\{A \cap Y : A \in \mathcal{B}\}.$$

Demostración: Es consecuencia de las definiciones. ■

Bornologías generadas por una familia de subconjuntos

Definición.- 5.1.7 Sea X un conjunto y sea $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ una familia de bornologías en X indexada por un conjunto no vacío $i \in I$. Para cualquier $i \in I$, sea u_i el morfismo identidad de X sobre $(X, \mathcal{B}_i)$. La intersección de las bornologías $\mathcal{B}_i$ es la bornología inicial en X para los morfismos u_i .

Evidentemente $\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$ es una base para tal bornología. Si X es un espacio vectorial y si, para cualquier $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ es una bornología vectorial, entonces la bornología de la intersección es también una bornología vectorial por el teorema 5.1.1.

Definición.- 5.1.8 Sea X un conjunto (respectivamente espacio vectorial) y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X . La **bornología generada** por $\mathcal{A}$ (respectivamente bornología vectorial) es la intersección de todas las bornologías que contienen a $\mathcal{A}$ (respectivamente la intersección de todas las bornologías vectoriales).

Nótese que siempre existe una bornología la cual contiene a $\mathcal{A}$, llamada la bornología $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ cuyos conjuntos acotados son todos los subconjuntos de X y si X es un espacio vectorial esta bornología es convexa.

Límite proyectivo bornológico

Sistema proyectivo bornológico

Sea I un conjunto dirigido no vacío y sea (X_i, u_{ij}) un sistema proyectivo de conjuntos, indexado por I , tal que para cualquier $i \in I$, X_i es un conjunto bornológico con bornología $\mathcal{B}_i$. El sistema (X_i, u_{ij}) es llamado un **sistema proyectivo de conjuntos bornológicos** si los morfismos $u_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ son acotados siempre que $i \leq j$. Si los X_i 's son espacios vectoriales bornológicos (respectivamente espacios vectoriales bornológicos convexos) y todos los morfismos u_{ij} son acotados y lineales, entonces el sistema (X_i, u_{ij}) es llamado un **sistema proyectivo de espacios vectoriales bornológicos** (respectivamente de espacios vectoriales bornológicos convexos).

Bornologías del límite proyectivo

Sea (X_i, u_{ij}) un sistema proyectivo de conjuntos bornológicos (respectivamente espacios vectoriales bornológicos) y sea X el conjunto (respectivamente espacio vectorial) el cual es el límite proyectivo del sistema (X_i, u_{ij}) . Para cualquier $i \in I$, se denotará por $\mathcal{B}_i$ la bornología de X_i y por u_i la proyección canónica de X sobre X_i . La bornología del límite proyectivo en X con respecto a las bornologías $\mathcal{B}_i$ es la bornología inicial en X para los morfismos u_i . X dotado con tal bornología, es llamado el **límite proyectivo bornológico** del sistema proyectivo bornológico X_i, u_{ij} . Se denota de la siguiente manera

$$X = \varprojlim_{i \in I} (X_i, u_{ij})$$

5.2. Aplicaciones

Lema 5.2.1 *Si X, Y son dos espacios vectoriales topológicos y además X, Y son dotados de la bornología de Von Neumann. Entonces cada morfismo continuo es acotado.*

Demostración: Sean $f : X \rightarrow Y$ un morfismo continuo y B un subconjunto acotado de X . Entonces, para cada W vecindad de cero en Y , se tiene que $f^{-1}(W)$ es vecindad de cero en X . Como B es acotado en X , implica que $B \subset \lambda f^{-1}(W)$ para algún $\lambda > 0$, así $f(B) \subset \lambda W$. Por lo tanto B es acotado en Y . ■

Corolario 5.2.2 *Sea $(E_i)_{i \in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos, sea E un espacio vectorial topológico, y para cualquier $i \in I$, sea $u_i : E \rightarrow E_i$ un morfismo lineal. Si $\mathcal{B}_i$ es la bornología de Von Neumann de E_i para cada $i \in I$ y E es dotado de la topología inicial dada por la familia de morfismos u_i , entonces la bornología de Von Neumann de E asociada a la topología inicial es la bornología inicial de E dada por los morfismos u_i .*

Demostración: Sea $(E_i)_{i \in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos, cuya bornología de Von Neumann es $\mathcal{B}_i$ y $u_i : E \rightarrow E_i$ una familia de morfismos. Si E es dotado de la topología inicial, por decir τ_I , entonces τ_I es la topología más gruesa para la cual los morfismos u_i son continuos para cada $i \in I$. Sea $\mathcal{B}$ la bornología de Von Neumann de E , entonces por el lema anterior, si $B \subset E$ tal que $B \in \mathcal{B}$, entonces $u_i(B)$ es acotado para cada $i \in I$. Así B es acotado para la bornología inicial de E dado por la familia de morfismos u_i . Recíprocamente, sea $B' \in \mathcal{B}_I$, entonces $u_i(B') \in \mathcal{B}_i$ para cada $i \in I$. Sea V una vecindad de cero en E . Ya que la topología τ_I de E tiene abiertos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^n u_i^{-1}(V_i), \text{ donde } V_i \text{ es un abierto de } E_i.$$

Entonces $V = \bigcap_{i=1}^n u_i^{-1}(V_i)$, pero para cada V_i , existe un $\lambda_i > 0$ tal que

$$u_i(B') \subset \lambda_i V_i \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

Si se toma $\lambda = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, se tiene que $\lambda_i V_i \subset \lambda V_i$ para cada $i \in I$. Así

$$u_i(B') \subset \bigcap_{i=1}^n \lambda_i V_i \subset \lambda_i V_i \subset \lambda V_i, \text{ para cada } i = \{1, 2, \dots, n\},$$

entonces $u_i(B') \subset \bigcap_{i=1}^n \lambda V_i$, es decir $B' \subset \lambda \bigcap_{i=1}^n u_i^{-1}(V_i)$, luego $B' \subset \lambda V$. Por lo tanto, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_I$. ■

Lema 5.2.3 *Sea E un espacio localmente convexo cuya topología está definida por una familia de seminormas $(p_i)_{i \in I}$. Entonces la bornología de Von Neumann de E coincide con la bornología definida por la familia $(p_i)_{i \in I}$.*

Demostración: La identidad $id : (X, \mathcal{B}_\Gamma) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ es una biyección, así solo falta probar que id y su inversa id^{-1} son morfismos acotados. En efecto, sea $B \in \mathcal{B}_\Gamma$, entonces $p_i(B)$ es acotado en $\mathbb{R}$ para cada $i \in I$, es decir $p_i(x) \leq k_i$ para cada $x \in B$ y para cada $i \in I$. Por otro lado, sea $V_i \in \mathcal{V}$, entonces $V_i = p_i^{-1}([0, \epsilon_i])$ con $\epsilon_i \in \mathbb{R}$. De esta manera $B \subset \lambda_i V_i$, ya que $x \in p_i^{-1}([0, k_i])$ para cada $x \in B$ y para cada $i \in I$, así $x \in \frac{\epsilon_i}{k_i} p_i^{-1}([0, k_i])$ para cada $x \in B$ y para cada $i \in I$, luego $x \in \frac{k_i}{\epsilon_i} p_i^{-1}([0, \epsilon_i])$ para cada $x \in B$ y para cada $i \in I$, es decir $x \in \lambda_i V_i$, donde $\lambda_i = \frac{k_i}{\epsilon_i}$. Por lo tanto, id es un morfismo acotado.

Ahora, sea $B \in \mathcal{B}$, entonces $B \subset \lambda V$ para cada $V \in \mathcal{V}$ y algún $\lambda > 0$, de esta manera $B \subset \lambda p_i^{-1}([0, \epsilon_i])$, es decir $B \subset p_i^{-1}([0, \lambda \epsilon_i])$, entonces $p_i(B) < \lambda \epsilon_i = k_i$. Así id^{-1} es un morfismo acotado. Por lo tanto,

$$\mathcal{B}_\Gamma \cong \mathcal{B}. \blacksquare$$

***Proposición 5.2.4** *Sea $(X, \{p_\alpha\}_{\alpha \in I})$ un espacio vectorial topológico localmente convexo y completo y sean L_τ el espacio vectorial límite proyectivo topológico y L_B el espacio vectorial límite proyectivo bornológico del sistema proyectivo $\{X_\alpha, \{\phi_{\alpha\beta}\}\}_{\alpha \in I}$. Sean $\mathcal{B}_\Gamma$ la bornología de Von Neumann de X , $\mathcal{B}_{L_\tau}$ la bornología de Von Neumann de L_τ y $\mathcal{B}_{L_B}$ la bornología de L_B . Entonces*

$$\mathcal{B}_\Gamma \cong \mathcal{B}_{L_\tau} = \mathcal{B}_{L_B}.$$

Demostración: Dado que X , dotado de la topología dada por la familia de seminormas $\Gamma = \{p_\alpha\}_{\alpha \in I}$, hace de X un espacio localmente convexo, considerando los factores de la descomposición de Arens-Michael X_α , es decir $X_\alpha = X / \ker p_\alpha$, dotados de la norma $\|\cdot\|_\alpha$, donde $\|\pi_\alpha(x)\|_\alpha = p_\alpha(x)$, con π_α el morfismo canónico de X en X_α .

Por otro lado, se dota a X con la bornología de Von Neumann, la cual por el lema anterior coincide con la bornología inicial dada por la familia de seminormas Γ por decir $\mathcal{B}_\Gamma$. Sea $\mathcal{B}_\alpha$ la bornología de Von Neumann del espacio X_α para cada $\alpha \in I$.

Considérese el subconjunto L del producto de los X_α , donde

$$L = \{(\pi_\alpha(x))_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha : \phi_{\alpha\beta}(\pi_\beta(x)) = \pi_\alpha(x), \alpha \leq \beta\}.$$

Luego, si L es dotado de la bornología inicial dada por $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\phi_\alpha = Pr_\alpha|_L$, donde $Pr_\alpha : \prod_{\gamma \in I} X_\gamma \rightarrow X_\alpha$, entonces L es el límite proyectivo bornológico del sistema proyectivo

$\{X_\alpha, \{\phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in I}\}$ y se denota por L_B , y su bornología por $\mathcal{B}_{L_B}$. Así $\mathcal{B}_{L_B}$ es la bornología más gruesa que hace a los morfismos ϕ_α acotados.

Por otro lado, se sabe que L_τ (límite proyectivo topológico) está dotado de la topología para la cual cada ϕ_α es continuo. Entonces cada ϕ_α es acotado si L_τ es dotado de la bornología de Von Neumann. De esta manera la bornología de Von Neumann de L_τ , la cual se denotará por $\mathcal{B}_{L_\tau}$ es más fina que $\mathcal{B}_{L_B}$, es decir $\mathcal{B}_{L_\tau} \subset \mathcal{B}_{L_B}$.

Ahora nótese que por ser X localmente convexo, existe un isomorfismo topológico ψ tal que $X \cong L_\tau$, es decir ψ es continuo y ψ^{-1} también lo es. Se sigue entonces que ψ es un isomorfismo bornológico. Por lo tanto X y L_τ tienen los mismos acotados salvo un isomorfismo.

Ahora, sea $B \subset L$ tal que $B \in \mathcal{B}_{L_B}$, así $Pr_\alpha(B) \in \mathcal{B}_\alpha$ para toda $\alpha \in I$, es decir $Pr_\alpha(B) \subset \lambda_n V_n^\alpha$, donde $V_n^\alpha = \{\pi_\alpha(x) \in X_\alpha : \|\pi_\alpha(x)\|_\alpha \leq \frac{1}{n}\}$.

Considérese los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & L \\ & \searrow \pi_\alpha & \swarrow Pr_\alpha \\ & X_\alpha & \end{array} \quad (5.2)$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\psi^{-1}} & L \\ & \searrow \pi_\alpha & \swarrow Pr_\alpha \\ & X_\alpha & \end{array} \quad (5.3)$$

Como $\mathcal{B}_{L_\tau}$ y $\mathcal{B}_\Gamma$ tienen los mismos acotados, basta probar que $\psi(B)$ es acotado en $\mathcal{B}_\Gamma$. Así, entonces basta con demostrar que $p_\alpha(\psi^{-1}(B)) \leq M(\alpha)$ para cada $\alpha \in I$.

En efecto, sea $y \in \psi(B)$ arbitrario, entonces $y = \psi(x)$, con $x \in B$.

Luego, de (5.3) se sigue que

$$p_\alpha(y) = \|\pi_\alpha(y)\|_\alpha = \|\pi_\alpha(\psi^{-1}(x))\|_\alpha = \|\pi_\alpha \circ \psi^{-1}(x)\|_\alpha = \|Pr_\alpha(x)\|_\alpha \quad (5.4)$$

pero $x \in B$ y $Pr_\alpha(B) \subset \lambda_n V_n^\alpha$, así

$$Pr_\alpha(x) \in \lambda_n V_n^\alpha;$$

entonces $\|Pr_\alpha(x)\|_\alpha \leq \frac{\lambda_n}{n}$. De esta manera (5.4) toma la siguiente forma

$$p_\alpha(y) = \|Pr_\alpha(x)\|_\alpha \leq \frac{\lambda_n}{n} = M(\alpha)$$

entonces $p_\alpha(\psi^{-1}(B)) \leq M(\alpha)$, así $\psi^{-1}(B) \in \mathcal{B}_\Gamma$.

Por lo tanto, los acotados de $\mathcal{B}_{L_\tau}$ y $\mathcal{B}_{L_B}$ son los mismos y entonces los acotados de $\mathcal{B}_\Gamma$ y $\mathcal{B}_{L_B}$ son los mismos salvo un isomorfismo. ■

5.2.1. Topología definida por una Bornología

Como se ha visto, dado un espacio topológico, se puede hablar de una bornología natural a la cual se le conoce como la bornología de Kolmogorov-Von Neumann (ver [24, pag. 108]). Partiendo de un espacio bornológico se presentará una topología “natural”, la cual muestra la relación que hay entre la bornología y la topología.

Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio vectorial bornológico (es decir, $\mathcal{B}$ es una bornología vectorial en X) y $\tau_\mathcal{B}$ denota el conjunto

$$\{U \subset X : \forall u \in U \forall B \in \mathcal{B} \text{ balanceado}, \exists \lambda > 0 \text{ tal que } u + \lambda B \subset U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Se puede ver que $\tau_\mathcal{B}$ es una topología en X . Esta topología fue introducida en 1950 por B. H. Arnold en [11] y es llamada **la topología definida por una bornología $\mathcal{B}$** . En el caso en el que X es un espacio lineal topológico y $\mathcal{B}$ es la bornología de Von-Neumann en X , entonces la topología $\tau_\mathcal{B}$ es llamada la topología **Mackey cerradura** y es denotada por $\tau_{\mathcal{B}_\tau}$.

Definición.- 5.2.5 *Cuando el conjunto de los elementos invertibles en un álgebra A con unidad con una bornología convexa $\mathcal{B}$, es abierto en la topología $\tau_\mathcal{B}$, entonces se dice que el álgebra A es una Q -álgebra bornológica.*

La definición anterior aparece en [7]. El primer ejemplo de este tipo de álgebras fue dado por H. Hogbe-Nlend en [22]. En 1992 M. Oudades en [34] llamó Mackey Q -álgebras a las álgebras localmente m -convexas (A, τ) para las cuales el conjunto de los elementos invertibles es un abierto en la topología $\tau_{\mathcal{B}_\tau}$.

Se dirá que un álgebra topológica (A, τ) es una Mackey Q -álgebra cuándo el conjunto $Q_{inv}A$ ($InvA$ en caso de tener unidad el álgebra), es abierto en la topología Mackey cerradura $\tau_{\mathcal{B}_\tau}$.

De esta manera, es natural preguntarse si el límite proyectivo de Mackey Q -álgebras es una Mackey Q -álgebra. Para obtener una respuesta a la pregunta anterior será necesario enunciar las siguientes proposiciones

Proposición 5.2.6 *Sea (X, τ) un espacio lineal topológico y $\mathcal{B}_\tau$ la bornología de Von Neumann en X . Entonces $\tau \subset \tau_{\mathcal{B}_\tau}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{O} \in \tau$, $x \in \mathcal{O}$ y $B \in \mathcal{B}_\tau$ balanceado. Entonces, existe U vecindad de cero en X tal que

$$x + U \subset \mathcal{O}.$$

Como $\mathcal{B}_\tau$ es la bornología de Von Neumann, existe un número $\mu > 0$ tal que

$$B \subset \mu U.$$

Ya que B es balanceado

$$x + \frac{1}{\mu}B \subset x + U \subset \mathcal{O},$$

entonces $\mathcal{O} \subset \tau_{\mathcal{B}_\tau}$. ■

Proposición 5.2.7 *Sea (X, τ) un espacio lineal topológico en el cual cualquier red convergente es Mackey convergente. Entonces $\tau = \tau_{\mathcal{B}_\tau}$.*

Demostración: Es suficiente mostrar que $\tau_{\mathcal{B}_\tau} \subset \tau$. Para ello, sea $\mathcal{O} \in \tau_{\mathcal{B}_\tau}$. Entonces $X \setminus \mathcal{O}$ es un conjunto $\tau_{\mathcal{B}_\tau}$ -cerrado. Sea x_0 un elemento arbitrario en la cerradura de $X \setminus \mathcal{O}$ en la topología τ . Entonces existe una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en X la cual converge a x_0 en la topología τ . Por lo tanto, esta red converge en la topología Mackey a x_0 . Entonces $x_0 \in X \setminus \mathcal{O}$. Así $X \setminus \mathcal{O}$ es τ -cerrado. ■

Proposición 5.2.8 *Sea (X, τ) un espacio lineal topológico metrizable. Entonces cualquier sucesión convergente es Mackey convergente.*

Demostración: Sea W una vecindad de cero en $\tau_{\mathcal{B}_\tau}$, entonces para cada $B \in \mathcal{B}$ balanceado, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda B \subset W$.

Por otro lado, como τ es metrizable, entonces tiene una base de vecindades del cero numerable, por decir

$$\mathcal{V} = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Como $\{x_n\}$ converge a cero en la topología τ , se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe λ_n tal que

$$\{x_n\} \subset \lambda_n V_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto,

$$\{x_n\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \lambda_n V_n.$$

Sea (α_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos que convergen a cero, sea $\mu_n = \frac{\lambda_n}{\alpha_n}$ y considérese el siguiente conjunto

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mu_n V_n.$$

Claramente B es acotado y balanceado. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, ya que la sucesión $\frac{\mu_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\alpha_n}$ tiende a $+\infty$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\mu_n}{\lambda_n} \geq \frac{1}{\epsilon} \text{ siempre que } n > l, \text{ es decir } \epsilon \mu_n \geq \lambda_n \text{ siempre que } n > l.$$

Entonces, ya que $\{x_n\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \lambda_n V_n$, se tiene que $\{x_n\} \subset \epsilon \mu_n V_n$ siempre que $n > l$. Pero el conjunto $\bigcap_{n < l} \epsilon \mu_n V_n$ es una vecindad de cero, así existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_m \subset \bigcap_{n < l} \epsilon \mu_n V_n$. De esta manera $A \cap V_m \subset \epsilon \mu_n V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $A \cap V_m \subset \epsilon B$, ya que B es acotado y balanceado, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda B \subset W$. Tomando $\epsilon = \lambda$, se tiene que $A \cap V_m \subset W$. Lo cual es equivalente a decir que $x_n \in W$ siempre que $n > m$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ converge a cero en la topología Mackey. ■

Nótese que de la proposición 5.2.6 se sigue que toda Q -álgebra es Mackey Q -álgebra. Lo anterior se sigue de la siguiente contención

$$\text{Inv}A \in \tau \subset \tau_{B_\tau}.$$

***Observación 5.2.9** Sea $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}; I\}$ un sistema proyectivo de Mackey Q -álgebras. Entonces el álgebra límite proyectivo $\varprojlim A_\alpha$ asociada al sistema proyectivo no necesariamente es una Mackey Q -álgebra.

En efecto, supóngase que es cierto, es decir el límite proyectivo de Mackey Q -álgebras es Mackey Q -álgebra. Sea $A = C(\mathbb{R})$ el álgebra de las funciones continuas, con la topología dada por la familia de seminormas $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$p_n(f) = \sup_{-n \leq x \leq n} |f(x)|.$$

Así, se tiene que A es un álgebra localmente m -convexa completa y metrizable. Por la descomposición de Arens-Michael, $A = \varprojlim B_\alpha$, donde B_α es un álgebra de Banach para cada $\alpha \in I$. Como cada álgebra de Banach es una Q -álgebra, entonces cada B_α es una Mackey Q -álgebra. Por la suposición, se tiene que el álgebra A es una Mackey Q -álgebra, pero como A es metrizable, entonces A es una Q -álgebra (se sigue de las proposiciones 5.2.7 y 5.2.8 antes probadas). Lo cual es una contradicción, ya que A no es Q -álgebra. ■

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

A lo largo de este trabajo presentamos un panorama general y detallado de los resultados y avances que hay en la línea de los límites proyectivos en las categorías de las álgebras topológicas y de los espacios vectoriales bornológicos.

Tomamos como punto de partida la descomposición de Arens-Michael para las álgebras localmente multiplicativamente convexas (*l.m.c.*). Mediante dicha descomposición estudiamos propiedades de las álgebras m -convexas como lo son el espectro, el radio espectral y, bajo ciertas hipótesis extras, la condición de tener la propiedad Q .

Proporcionamos ejemplos de aplicación de la descomposición de Arens-Michael.

Expusimos la descomposición de Arens-Michael generalizada y dimos una aplicación de dicha descomposición al álgebra de multiplicadores de un álgebra m -convexa.

Partiendo de sistemas proyectivos con cierta propiedad, logramos obtener, en algunos casos, la preservación de dicha propiedad bajo el proceso de tomar límite proyectivo. También dimos contraejemplos pertinentes.

Por último definimos el límite proyectivo bornológico y proporcionamos algunos resultados relacionados tanto con los límites proyectivos topológicos, como con la bornología de Von Neumann y los límites proyectivos bornológicos. Mostramos también que la propiedad Mackey- Q no se preserva bajo la acción de tomar límites proyectivos. Tenemos como perspectivas las siguientes:

- Obtener generalizaciones adecuadas de las aplicaciones que ya se tienen, al caso cuándo el límite proyectivo es el dado mediante la descomposición de Arens-Michael en su expresión más general, incluso partiendo de un sistema proyectivo arbitrario.
- Caracterizar las álgebras con la propiedad Q mediante límites proyectivos topológicos.
- Investigar sobre otras propiedades de las álgebras topológicas en general que pueden preservarse en el proceso de tomar límites proyectivos; por ejemplo la condición espectral, A -convexidad local, A -convexidad uniforme local, etcétera.
- Obtener generalizaciones de los resultados obtenidos en espacios vectoriales bornológicos a la categoría de álgebras con una bornología.

Bibliografía

- [1] ABEL, M. Projective limits of topological algebras. *Tartu Ülikooli Toimetised* 836 (1989), 3–27.
- [2] ABEL, M. Advertive topological algebras. *General Topological Algebras* (1999), 14–24.
- [3] ABEL, M. Representation of topological algebras by projective limit of Fréchet algebras. *Communications in Mathematics and Applications* 3, 1 (2012), 9–15.
- [4] ABEL, M. Mackey $\mathbf{Q}$ -algebras. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences* 66, 1 (2017), 40.
- [5] ABEL, M., ET AL. Structure of locally idempotent algebras. *Banach Journal of Mathematical Analysis* 1, 2 (2007), 195–207.
- [6] ABEL, M., ET AL. Representations of topological algebras by projective limits. *Annals of Functional Analysis* 1, 1 (2010), 144–157.
- [7] AKKAR, M. Sur le groupe des elements inversibles d’une algebre bornologique convexe. $\mathbf{Q}$ -algebres bornologiques convexes. *CR Acad. Sci. Paris ser. I Math* 300 (1985), 35–38.
- [8] AKKAR, M., CHEIKH, O., AND OUDADESS, M. Sur la structure des algèbres localement $\mathbf{A}$ -convexes. *Bull. Polish Acad. Sci. Math* 37, 7-12 (1989), 567–570.
- [9] ARENS, R. Convex topological algebras-preliminary report. In *Bulletin of the american mathematical society* (1946), vol. 52, Amer Mathematical soc 201 Charles st, Providence, RI 02940-2213, pp. 829–829.
- [10] ARENS, R. A generalization of normed rings. *Pacific Journal of Mathematics* 2, 4 (1952), 455–471.
- [11] ARNOLD, B., ET AL. Topologies defined by bounded sets. *Duke Mathematical Journal* 18, 3 (1951), 631–642.
- [12] BALACHANDRAN, V. Topological algebras, north-holland math. *Studies Vol. 185* (2000).

- [13] BECKENSTEIN, E., NARICI, L., AND SUFFEL, C. *Topological algebras*, vol. 24. Elsevier, 2011.
- [14] BORCHERS, H.-J. On structure of the algebra of field operators. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* 24, 2 (1962), 214–236.
- [15] DALES, H. G. *Banach algebras and automatic continuity*. Clarendon Press, 2000.
- [16] DOUGLAS, R. G. *Banach algebra techniques in operator theory*, vol. 179. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] DUGUNDJI, J. *Topology*. Allyn and Bacon Inc., Boston, 1966.
- [18] FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [19] FRAGOULOPOULOU, M. *Topological algebras with involution*, vol. 200. Elsevier, 2005.
- [20] HARALAMPIDOU, M. The krull nature of locally c^* -algebras. *Contemporary Mathematics* 328 (2003), 195–200.
- [21] HARALAMPIDOU, M., PALACIOS, L., AND SIGNORET, C. Multipliers in perfect locally m -convex algebras. *Banach J. Math. Anal* 9 (2015), 137–143.
- [22] HOGBE-NLEND, H. Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 3, 1 (1972), 19–56.
- [23] HOGBE-NLEND, H. *Bornologies and functional analysis: introductory course on the theory of duality topology-bornology and its use in functional analysis*, vol. 26. Elsevier, 1977.
- [24] HORVÁTH, J. *Topological vector spaces and distributions*. Courier Corporation, 2012.
- [25] JARCHOW, H. *Locally convex spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] KELLEY, J. L. *General topology*. Springer-Verlag, 1975.
- [27] KIRILLOV, A., AND GVICHIANI, A. Théorèmes et problèmes d’analyse fonctionnelle.
- [28] KÖTHE, G. Topological vector spaces. In *Topological Vector Spaces I*. Springer, 1983, pp. 123–201.
- [29] LARSEN, R. *The Multiplier Problem.*, vol. 105. Springer, 2006.
- [30] MALLIOS, A. *Topological algebras: Selected topics*, vol. 124. Elsevier, 1986.
- [31] MICHAEL, E. A. *Locally multiplicatively-convex topological algebras*. No. 11. American Mathematical Soc., 1952.

- [32] MÜLDNER, T. Projective limits of topological algebras. In *Colloquium Mathematicae* (1975), vol. 33, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, pp. 291–294.
- [33] MURALI, V. Locally idempotent algebras. *Math. Japon* 30 (1985), 736–776.
- [34] OUDADESS, M. A note on m-convex and pseudo-Banach structures. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 41, 1 (1992), 105–110.
- [35] PALACIOS, L., PÉREZ, R., AND CARLOS, S. On Q-algebras and spectral algebras. *Journal of analysis* 1 (2016), 21–28.
- [36] PALMER, T. W. *Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras: Volume 1, *-Algebras*, vol. 1. Cambridge University Press, 1994.
- [37] RICKART, C. E. *General theory of Banach algebras*, vol. 960. van Nostrand Princeton, 1960.
- [38] RUDIN, W. *Análisis funcional*. Reverté, 1979.
- [39] TREVES, F. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels: Pure and Applied Mathematics*, vol. 25. Elsevier, 2016.
- [40] UHLMANN, A. Über die definition der quantenfelder nach wightman und haag. *Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig Math.-Nat. Reihe* 11 (1962), 213–217.
- [41] VAROPOULOS, N. T. Algebre de Banach-sur les formes positives d’une elgebre de Banach. *Comptes rendus hebdomadaires des seances de l academie des sciences* 258, 9 (1964), 2465.
- [42] WAELBROECK, L. *Topological vector spaces and algebras*, vol. 230. Springer, 2006.
- [43] WILLARD, S. *General topology*. Courier Corporation, 1970.
- [44] YOSIDA, K. Functional analysis. reprint of the sixth (1980) edition. Classics in mathematics. *Springer-Verlag, Berlin* 11 (1995), 14.
- [45] ŻELAZKO, W. On the locally bounded and m-convex topological algebras. *Studia Mathematica* 3, 19 (1960), 333–356.
- [46] ŻELAZKO, W. Metric generalizations of Banach algebras.
- [47] ŻELAZKO, W. Selected topics in topological algebras: lectures 1969/70.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00178

Matrícula: 2153804527

LIMITES PROYECTIVOS EN
ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 5 del mes de junio del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ANTONI ADAM WAWRZYŃCZYK WILKIEWICZ
DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA
DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

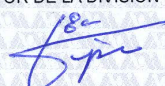
DE: LUIS ROBERTO HERNANDEZ CHAVEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

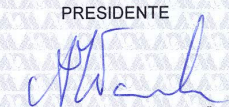
aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI


DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

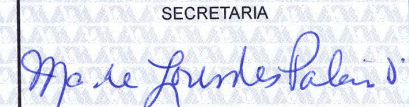
PRESIDENTE


DR. ANTONI ADAM WAWRZYŃCZYK WILKIEWICZ

VOCAL


DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

SECRETARIA


DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA