



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

U. A. M. IZTAPALAPA BIBLIOTECA

✓
PERSISTENCIA DE INVARIANCIA

DE VARIEDADES

EN CONTROL DE ESTRUCTURA

VARIABLE

TESIS QUE PRESENTA

✓
HORACIO LEYVA CASTELLANOS

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

✓ MAESTRO EN MATEMATICAS

Febrero de 1991 ✓
—

Asesor de tesis:

Dr. Rodolfo Suárez Cortes

✓
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA

UNIDAD IZTAPALAPA

Av. Michoacán y La Purísima, Col. Vicentina, Iztapalapa, D.F. C.P. 09340. Tel.: 686-03-22 TELEFAX: (5) 686-89-99 TELEX: UAMME 176496

I N D I C E

INTRODUCCION	Pág. 1
CAPITULO 1	
SECCION 1 Teoria de Control de Estructura Variable	Pág. 6
SECCION 2 Persistencia de Invariancia de Variedades	Pág. 21
SECCION 3 Control Estabilizante	Pág. 35
CAPITULO 2	
SECCION 1 Estabilización con Factores de Incertidumbre	Pág. 52
SECCION 2 Versión Lineal del Problema de Estabilización	Pág. 67
ANEXO	Pág 73
BIBLIOGRAFIA	Pág 82

U. A. M.

INTRODUCCION

Partimos de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (0.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la variable de control, y tenemos la aplicación $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. El sistema (1) es llamado un sistema de control. Además, el sistema (1) se conoce como "sistema de retroalimentación" (o de lazo cerrado), si $u=u(x)$ es una función de la variable de estado x . En caso de ser esta función discontinua respecto a x , tenemos que la función $F(x, u)$ también es discontinua respecto a la variable de estado.

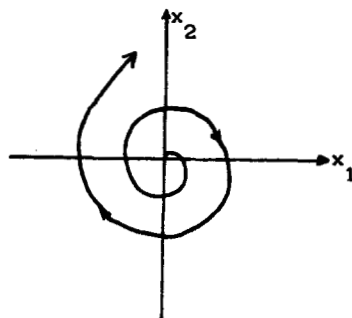
Con el fin de volver más fluida la lectura de la sección (1.1), estudiaremos un ejemplo de un sistema de retroalimentación en $\mathbb{R}^2$ del tipo (0.1), con parte derecha discontinua. Este ejemplo lo obtendremos en base a la siguiente pareja de sistemas de ecuaciones

$$(a) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

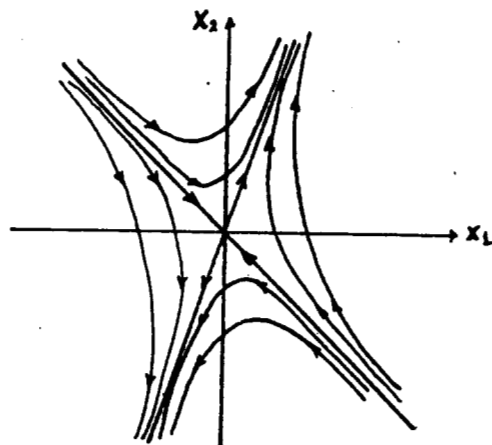
$$(b) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Ambos sistemas son de la forma $\dot{x} = Ax$, donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ en el caso (a); y $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ en el caso (b). Analizaremos cada uno de estos sistemas.

Caso (a). Para este caso tenemos que el origen (0,0) del espacio de estados es un punto de equilibrio inestable. Al ser complejos los valores propios de la matriz A , con parte real positiva, tenemos el siguiente retrato fase para este sistema:



Caso (b). En este segundo caso tenemos los valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Correspondientes a estos, tenemos la invariancia de las rectas (dadas por los vectores propios) $x_2 = 3x_1$ y $x_2 = -x_1$ en el espacio de estados. El origen (0,0) es ahora un punto silla;



Observamos que en los dos sistemas de ecuaciones tenemos que el punto (0,0) es un punto de equilibrio inestable. Analizemos ahora el sistema de control definido como sigue

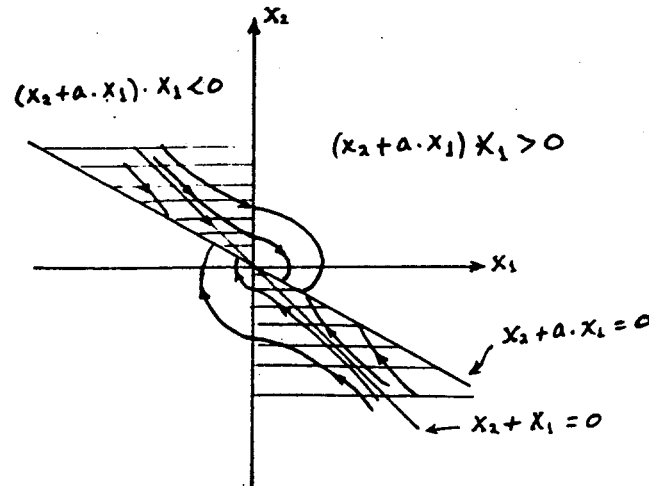
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (0.2)$$

con control

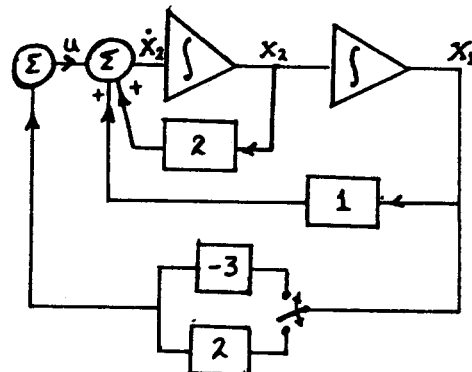
$$u(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } s \cdot x_1 < 0 \\ -3 & \text{si } s \cdot x_1 > 0 \end{cases} \quad (0.3)$$

donde definimos la función $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $s = x_2 + a \cdot x_1$, y consideramos que $0 < a < 1$. Este sistema de control es de la forma $\dot{x} = F(x, u)$, donde la parte derecha es discontinua respecto a x . Además, este sistema de retroalimentación está formado por los subsistemas (a) y (b); para $u = -3$ tenemos el caso (a); el valor $u = 2$ corresponde al caso (b), por lo que el retrato fase de este sistema de control es una "combinación" de los retratos fases de (a) y (b).

Para este ejemplo de sistema de control tenemos la geometría;

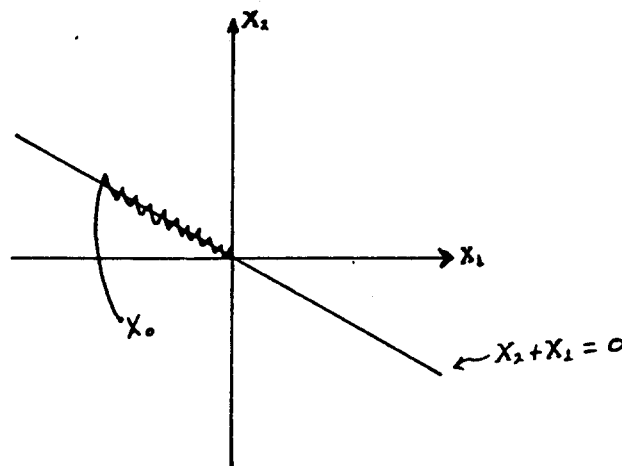


A un sistema de control de la forma dada por (0.2) y (0.3) se le conoce como sistema (de control) de "estructura variable" (que denotaremos como VSS), debido a la variación discontinua de la función $u(x)$ que toma valores diferentes en regiones diferentes. Algo importante que observamos en este sistema de control es que el estado $(0,0)$, que es un punto inestable para los subsistemas (a) y (b), lo podemos convertir en un punto de equilibrio asintóticamente estable al definir apropiadamente al control u en los puntos de discontinuidad. En general, esta característica es una propiedad que se busca al diseñar los sistemas de tipo VSS. En este ejemplo de control, tenemos que los puntos de discontinuidad son $\{(x_1, x_2) / (x_2 + a \cdot x_1) \cdot x_1 = 0\}$, también observamos que los puntos de discontinuidad que forman la recta $x_2 + a \cdot x_1 = 0$ son asintóticamente estables (aunque el sistema no está definido en estos puntos). A esta recta le llamaremos, en general, superficie de cambio o de deslizamiento. El siguiente diagrama representa el sistema de control de "estructura variable" mencionado.



Otro aspecto importante de los sistemas VSS, es la robustez que presentan ante perturbaciones del campo dado por la aplicación discontinua $F(x,u)$.

Un tipo especial de inestabilidad se presenta en los sistemas de control de la forma VSS. La discontinuidad de la función $F(x,u)$ en la ecuación (0.1), aunado al problema de retardo que presentan los sistemas de retroalimentación (la "respuesta $x(t)$ de la planta" a la "acción" del control u no es instantánea), provoca un tipo de inestabilidad conocido por efecto "castaño" (o "chattering"). En el espacio de estados, esta inestabilidad consiste en una oscilación de las trayectorias $x(t)$ sobre la superficie de cambio $s(x)=0$. Gráficamente, para una trayectoria que inicia en x_0 ;



Para eliminar el efecto inestable de "castaño", se define una función de control continua respecto a x , de tal manera que aproxime a $F(*,u)$ cerca del estado $*$. El objetivo de nuestro trabajo es obtener estabilidad en los sistemas de control de "estructura variable", y lo hacemos de la siguiente forma; una vez lograda la invariancia de una variedad $s=0$ que contiene al punto de operación (equilibrio) que nos interesa, buscamos que las trayectorias (solución de nuestro sistema de control) que inician en una vecindad de la superficie invariante, tiendan al punto de operación a través de la superficie $s=0$.

La teoría de control que incluimos en la sección 1.1 esta basada en el trabajo de H. Sira -Ramirez [1]. En la sección 1.2 se consideran trabajos sobre "persistencia de invariancia de variedades bajo perturbaciones del campo" desarrollados por G.S. Osipenko en [4] y [5], el objetivo de incluir este tema es el de aplicarlo en los sistemas de control del tipo VSS para demostrar que aún bajo perturbaciones del sistema VSS, existe una nueva variedad cercana a $s=0$ por la que se desliza el flujo. Esto lo hacemos en la sección 1.3 a manera de conclusión de este trabajo, además presentamos aquí un ejemplo de aplicación de esta teoría. Las dos secciones del capítulo 2 las incluimos a manera de anexo, en estas presentamos trabajos que atacan el mismo problema, a diferencia del capítulo 1, en estos se considera incertidumbre en los sistemas de control y hacen hipótesis de controlabilidad más fuertes; la sección 2.1 corresponde al trabajo de M. J. Corless y G. Leitmann, ver [6]; en la sección 2.2 se presenta un análisis lineal del problema con incertidumbre, ver [7].

C A P Í T U L O 1

Nuestro trabajo lo restringimos, dentro de la teoría de control, a sistemas de control de una entrada. Se considera también que nuestro sistema está definido en un abierto X de un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Como objetivo general en estos sistemas de control, y una vez tenida la invariancia de una hipersuperficie $S \subset X$, buscamos que las trayectorias que inician en el abierto X tiendan a la variedad S y se mantengan en esta para todo tiempo posterior. Además, queremos preservar la estabilidad de esta dinámica ante "pequeñas" perturbaciones del campo. Hablaremos indistintamente de hipersuperficie, superficie, y variedad; pero siempre nos estaremos refiriendo a una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de codimensión 1.

El sistema de control descrito en la introducción, es un ejemplo de control de "estructura variable". Estos sistemas tratan del estudio de ecuaciones de la forma $\dot{X} = F(X, u)$ con parte derecha discontinua. Como veremos a lo largo de este trabajo, este tipo de sistemas de control (de tipo VSS) tienen interesantes características de estabilidad y robustez, por ello ha sido materia de estudio detallado durante los últimos treinta años.

Existen razones tecnológicas de por medio para este creciente interés; la estabilidad con robustez es deseable en el control automático de sistemas, de tal manera que tenemos coincidencia de problemas (y propiedades) con la teoría VSS.

S E C C I O N 1

La Teoría VSS

Tomemos una superficie encajada en el espacio de estados (de un sistema dinámico), como una gráfica formada por las variables de estado que describen la conducta del sistema.

Por motivos de optimización consideremos dos objetivos. El primero es convertir la superficie (considerada conocida) en atractora, con la cuenca de atracción la mayor posible. Como segundo objetivo se persigue mantener la evolución del sistema restringido

a la superficie mencionada. Aquí suponemos que en el sistema actúa una ley de retroalimentación discontinua (aunque no necesariamente lo sea) entre dos controles. como vimos en el ejemplo, se usa de referencia a la superficie para definir la regla de retroalimentación

Suponiendo que el primer objetivo se logra, nos restringimos al estudio del segundo objetivo. Para lograr éste se emplea la teoria de estructura variable.

Para iniciar puntualizamos algunos resultados de la teoría VSS, en base a nociones básicas de topología diferencial, respecto a análisis y diseño de modos (o movimientos) deslizantes en sistemas de control no lineales. La clase de sistemas que consideraremos es un conjunto finito de ecuaciones diferenciales no lineales, pero lineal en el control.

1.1. Definición de Movimiento deslizante

Consideremos el sistema no-lineal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

donde x pertenece a un subconjunto abierto X de $\mathbb{R}^n$; la función de control $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es discontinua; f y g son campos vectoriales de clase C^1 definidos sobre X , con $g(x) \neq 0$, para toda x en X . Sea una función $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , con gradiente no cero en X .

El conjunto

$$S = : \{x \in \mathbb{R}^n: s(x) = 0\} \quad (1.2)$$

representa una sub-variedad $(n-1)$ dimensional en X (por el teorema de la función implícita), llamada en adelante la variedad deslizante o superficie de cambio. La función escalar s será referida a veces como "función coordenada" de la superficie.

Los resultados descritos aquí son de naturaleza local, restringida a una vecindad abierta X y su intersección con la variedad deslizante S , se considera x_0 en tal intersección.

Una ley de control de estructura variable se obtiene al permitir a la función de control tomar uno de los valores de retroalimentación, de acuerdo al signo de $s(x)$, definido por

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0 \end{cases}, \quad u^+ \neq u^- \quad (1.3)$$

Con esta retroalimentación perseguimos hacer al conjunto S un atractor.

A las funciones de control $u^+(x)$ y $u^-(x)$ les llamaremos "valores de control extremo". Sobre ellas suponemos que son funciones de clase C^1 de x , y sin perder generalidad, suponemos también que satisfacen $u^+(x) > u^-(x)$ para cada x en X . Denotamos por $L_h G$ la derivada direccional de la función escalar G con respecto al campo vectorial h .

Supongamos que, como resultado de aplicar la política de control (1.3) a las trayectorias de estado (1.1), se alcanza la superficie deslizante S , de tal forma que podemos definir al sistema (1.1) en el conjunto de discontinuidad S .

Viendo a la función $s=s(x)$ como variable, le aplicamos el operador derivada direccional L_{f+gu} para dar la siguiente definición.

Decimos que existe un régimen deslizante sobre S siempre que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} L_{f+gu^+} s < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} L_{f+gu^-} s > 0 \quad (1.4)$$

Es decir, la tasa de cambio de la función coordenada de la superficie $s(x)$ medida en la dirección del campo controlado $[f+gu^+$ y $f+gu^-$ son los campos controlados], es tal que se asegura la convergencia de las órbitas a la superficie por la aplicación del control (1.3).

Denotemos por ds al gradiente de $s(x)$, y sea $\langle, \rangle$ el producto escalar conocido de vectores y co-vectores. Ver anexo, pág. 76.

Viendo al gradiente $ds(x)$ como vector en el espacio ortogonal al plano tangente de S en x , se tiene que las condiciones (1.4) son

equivalentes a

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f+gu^+ \rangle < 0 \quad , \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f+gu^- \rangle > 0 \quad (1.5)$$

De tal forma que, sobre S, las proyecciones de los campos vectoriales controlados sobre el vector gradiente de $s(x)$ son opuestos en signo.

1.2. Condiciones de Variedad Invariante

En lo que sigue, identificamos el operador de derivada direccional aplicado a s ; $L_{f+gu} s$, con el producto interior $\langle ds, f+gu \rangle$.

Se conoce como movimiento deslizante ideal sobre S, a un sistema de ecuaciones (o "dinámica") definida sobre S, que hace invariante a esta variedad. Existe una dinámica de este tipo conocida como el método del control equivalente, este movimiento deslizante ideal se describe usando las siguientes condiciones de variedad invariante.

$$s(x) = 0 \quad , \quad L_{f+gu_{eq}} s = \langle ds, f+gu_{eq}(x) \rangle = 0 \quad (1.6)$$

donde $u_{eq}(x)$ es una ley de control de retroalimentación de clase C^1 .

La función de control de retroalimentado $u_{eq}(x)$ es llamada el control equivalente. De la definición de derivada direccional y de (1.6), el control equivalente es dado explícitamente por la igualdad

$$u_{eq}(x) = - \frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} = - \left[\frac{\partial s}{\partial x} g \right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial s}{\partial x} f \right] \quad (1.7)$$

En esta igualdad (y en cálculos posteriores) denotaremos al gradiente ds también como $\partial s / \partial x$, y el producto interior $\langle ds, g \rangle$ como $(\partial s / \partial x)g$.

Aquí debe mencionarse la unicidad de u_{eq} que establece, implícitamente, este método

$$\langle ds, f + gu_{eq} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle ds, f \rangle + u_{eq}(x) \langle ds, g \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow u_{eq}(x) = - \frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} = - \left[\frac{\partial s}{\partial x} g \right]^{-1} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} f \quad ; \quad \langle ds, g \rangle \neq 0 \quad (1.8)$$

Sea $\Delta_s(x)$ el subespacio del espacio tangente $T_x X$, definido para cada x por

$$\langle ds, \Delta_s(x) \rangle = 0$$

es decir, considerando como operador al gradiente $ds(x): T_x X \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que $\Delta_s(x) := \text{Ker } ds(x)$. Aquí, $\Delta_s(x)$ es llamada la distribución deslizando asociada con S .

Las condiciones (1.6) son re-escritas como

$$f + g u_{eq}(x) \Big|_{s=0} \in \text{Ker } ds = \Delta_s(x) \text{ con } \Delta_s(x) \text{ de dimensión } n-1.$$

El sistema dinámico $\dot{x} = f(x) + g(x) u_{eq}(x)$ es el que describe la dinámica deslizando ideal. [ideal porque se obtiene de la igualdad $s(x) = 0$].

De aquí se sigue, por las suposiciones sobre $s(x)$, que $\Delta_s(x)$ es dimensionalmente constante y, trivialmente, una distribución involutiva en $T_x X$. De modo que, en virtud del Teorema de Frobenius, $\Delta_s(x)$ es una distribución integrable.

1.3. Condiciones de Existencia.

Diremos que el control equivalente está bien definido siempre que este exista y esté determinado unívocamente de las condiciones de invariancia (1.6).

Lema 1.

Una condición necesaria y suficiente para que el control equivalente esté bien definido es que la condición de

transversalidad

$$\langle ds, g \rangle \neq 0 \quad (1.9)$$

se satisfaga sobre S.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que el control equivalente esta bien definido de (1.7). Entonces necesariamente $\langle ds, g \rangle \neq 0$ sobre S, de otra forma, $\langle ds, f \rangle$ también sería cero para el control equivalente a existir. Sin embargo, en este caso, U_{eq} no será definido de manera única ya que (1.6) sería trivialmente satisfecho por cualquier control. ($\Leftarrow$) Por otro lado, si $\langle ds, g \rangle \neq 0$ en S, entonces evidentemente U_{eq} existe de (1.7). Supóngase, para probar la unicidad, que la condición de invariancia es satisfecha por dos controles equivalente U_{1eq} y U_{2eq} diferentes, si la condición de transversalidad se mantiene, entonces de (1.6) se sigue que

$$\langle ds, f + U_{1eq} g \rangle = \langle ds, f + U_{2eq} g \rangle$$

por bilinealidad;

$$\begin{aligned} \langle ds, f \rangle + U_{1eq} \langle ds, g \rangle &= \langle ds, f \rangle + U_{2eq} \langle ds, g \rangle \\ \Rightarrow (U_{1eq} - U_{2eq}) \langle ds, g \rangle &= 0 \end{aligned}$$

por lo que se concluye

$$U_{1eq} = U_{2eq}. \text{ Se tiene la unicidad.}$$

El lema 1 establece que el campo vectorial g no pertenece a la distribución Δ_s . En otras palabras, g no puede ser tangencial a la variedad deslizando S, y de aquí, g es transversal a $\text{Ker } ds$. La condición de transversalidad representa sólo una condición necesaria para la existencia de un régimen deslizando, como lo prueba el siguiente lema.

Lema 2. Si existe un movimiento deslizando sobre S entonces

$$\langle ds, g \rangle < 0 \quad (1.10)$$

sobre S.

Demostración.

De la definición de un movimiento deslizando, dado por (1.4) ó (1.5), tenemos sobre S

$$\langle ds, f + gu^+ \rangle < 0 \quad \text{y} \quad \langle ds, f + gu^- \rangle > 0$$

y de aquí;

$$\langle ds, (u^+ - u^-)g \rangle = (u^+ - u^-) \langle ds, g \rangle < 0$$

por hipótesis $u^+ > u^-$, se concluye que $\langle ds, g \rangle < 0$. ■

Observación.

Nótese que el signo de la condición de transversalidad es del todo arbitraria. Por ejemplo, si en (1.2) uno define S usando $s_1(x) = -s(x)$, la retroalimentación (1.3) es la contraria y la condición de transversalidad adopta la forma $\langle ds_1, g \rangle > 0$.

El siguiente lema es consecuencia directa de los lemas 1 y 2.

Lema 3.

Una condición necesaria para la existencia de un movimiento deslizando sobre S es que el control equivalente esté bien definido sobre S.

Teorema 1.

Una condición necesaria y suficiente para la existencia local de un régimen deslizando sobre S es que, en X, para x en S

$$u^-(x) < U_{eq}(x) < u^+(x) \quad (1.11)$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Supóngase que existe un movimiento deslizando sobre S, entonces de (1.5) se sigue que, sobre S,

$$\langle ds, f + u^+g \rangle = \langle ds, f \rangle + u^+ \langle ds, g \rangle < 0$$

En virtud de (1.7) y ya que, de lema 2, la condición de transversalidad (1.10) se mantiene necesariamente

$$\frac{\langle ds, f \rangle}{\langle ds, g \rangle} + u^+ = -U_{eq}(x) + u^+ > 0$$

Por otro lado, sobre S, se tiene que $\langle ds, f + u^+g \rangle > 0$; usando el

mismo argumento se sigue que

$$-U_{eq}(x) + u^- < 0 \quad \text{se tiene} \quad (\Rightarrow).$$

($\Leftarrow$) Para probar la implicación inversa del teorema, sea $U_{eq}(x)$ función de retroalimentación de clase C^1 que satisface (1.7) y (1.11). De esto se sigue que

$$0 < U_{eq}(x) - u^-(x) < u^+(x) - u^-(x)$$

y de aquí

$$0 < W_{eq}(x) := \frac{U_{eq}(x) - u^-(x)}{u^+(x) - u^-(x)} < 1$$

de donde se tiene la desigualdad

$$0 < 1 - W_{eq}(x) < 1$$

y de aquí

$$\langle ds, f + U_{eq} g \rangle = W_{eq} \langle ds, f + u^+ g \rangle + (1 - W_{eq}) \langle ds, f + u^- g \rangle = 0$$

se sigue que necesariamente las cantidades $\langle ds, f + u^+ g \rangle$ y $\langle ds, f + u^- g \rangle$ tienen signo opuesto. como vimos antes, podemos siempre redefinir S para tener sobre esta superficie

$$\langle ds, f + u^- g \rangle > 0$$

y entonces $\langle ds, f + u^+ g \rangle < 0$. Sin embargo, esto nos lleva a tener la ley de control

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0 \end{cases}$$

que actuando sobre el sistema (1.1) satisface

$$\left. \langle ds, f + u^+ g \rangle \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + u^+ g \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^+} L_{f+gu^+} + s < 0$$

y

$$\left. \langle ds, f + u^- g \rangle \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f + u^- g \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^-} L_{f+gu^-} - s > 0$$

Es decir, existe un régimen deslizante sobre S . ■

Una función control u de clase C^1 puede existir, ajeno a los

controles extremos acotados (1.3), para el cual S es una variedad invariante. Este es el caso, si existe u_{eq} tal que $u^- < u_{eq} < u^+$. Aquí, la sola existencia de un control equivalente es sólo una condición necesaria para la existencia de un movimiento deslizando pero, claramente, esta no es suficiente. Por ejemplo, supóngase que S es invariante bajo el campo $f+gu$, tal que $\langle ds, g \rangle = 0$, en este caso existe un movimiento deslizando sin existir un control equivalente. Más todavía, siempre que exista u_{eq} tal que $u^- < u_{eq} < u^+$ existen más controles (dentro de las cotas de los controles extremos), para los cuales S sea una superficie invariante. Esta variedad de elección de controles admisibles permiten la posibilidad de diseñar controles para obtener campos controlados que representen un comportamiento, deseado y conocido de antemano, sobre S . Esta observación será importante en la sección 1.3.

Otra observación. Si la suposición $u^+ < u^-$ ha sido hecha en la definición de la estrategia de cambio (1.3), entonces la condición de existencia del teorema 1 habría adoptado las desigualdades inversas. Por esta razón, en general, la condición de existencia es expresada como

$$\min\{u^+(x), u^-(x)\} < u_{eq}(x) < \max\{u^+(x), u^-(x)\}$$

El corolario siguiente establece que si un movimiento deslizando existe sobre S , entonces es posible diseñar controles extremos de retroalimentación, como en (1.3), que localmente obtenga este movimiento deslizando.

Corolario.

Supóngase que un control deslizando existe sobre S , entonces una retroalimentación que obtiene el movimiento deslizando está dado por

$$U = \text{Sign}(s(x)) K |U_{eq}(x)|, \quad \text{con } K > 1$$

Observación.

El corolario es inmediato de (1.11) con la identificación de $u^-(x)$ con $-K |U_{eq}(x)|$ y $u^+(x)$ con $K |U_{eq}(x)|$.

Una forma equivalente de las condiciones necesarias y suficientes para la existencia local de una dinámica deslizando puede ser expresado en términos de la variedad de deslizamiento S , la estabilidad se define por medio de una función de Lyapunov cuadrática que contempla a la función escalar $s(x)$. Básicamente nos referimos a los Teoremas de existencia de Lyapunov, la inconveniencia de establecer la existencia de esta forma es, esencialmente, la misma que usar el conocido método directo de Lyapunov.

Teorema 2.

Un modo deslizando existe localmente si y sólo para todo punto de X , no incluyendo aquellos de S , la siguiente desigualdad es satisfecha;

$$2 s \langle ds, f + gu \rangle = \langle ds^2, f + gu \rangle = L_{f+gu} s^2 < 0 \quad (1.12)$$

Con u escogido de acuerdo a (1.3). Cabe aclarar que siempre suponemos que X es vecindad de x_0 , dada por (1.1).

Demostración.

($\Leftarrow$) Si (1.12) es verdadero para cada punto de X , no incluyendo aquellos de S , entonces la función coordenada $s(x)$ y $\langle ds, f + gu \rangle$, con u obtenida de (1.3), tienen signos opuestos, particularmente para todo punto arbitrariamente cerca de S , (1.12) se mantendrá verdadero, de aquí las condiciones, y un régimen deslizando existe localmente sobre S . ($\Rightarrow$) De otra manera, si un régimen deslizando existe sobre S , entonces (1.4) también se mantiene en una vecindad

de S para valores arbitrariamente pequeños de $s(x)$. Entonces se sigue necesariamente que $s(x)$ y $\langle ds, f+gu \rangle$ tienen signos opuestos siempre que eligamos a u de acuerdo a (1.3). Por consiguiente la desigualdad (1.12) es verdadera sobre esta vecindad abierta, que identificamos con X . ■

La condición (1.12) constituye una versión más popular de (1.4) ó (1.5) y esta fué establecida originalmente de la forma

$$\lim_{\substack{|s| \rightarrow 0 \\ s \neq 0}} L_{f+gu} s^2 < 0$$

1.4. Dinámica deslizando ideal.

De la expresión para el control equivalente, encontrado en (1.7), se sigue que el movimiento sobre S , debido al control equivalente, es representado por,

$$\dot{x} = f + g U_{eq}(x) = \left[I - g \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f \quad (1.13)$$

veamos porque. De la relación $\dot{x} = f + gu$ queremos que $\dot{x}$ sea tangente a S ;

$$\text{i.e. } \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} = 0; \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} (f + g U_{eq}) = 0;$$

lo que implica que;

$$U_{eq} = - \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f, \text{ lo que nos da (1.13).}$$

Observación. Como condición suficiente; si $\frac{\partial s}{\partial x} g$ es invertible (y obviamente $s(x)$ diferenciable), entonces U_{eq} existe y es único (por la misma forma de encontrarlo).

La ecuación (1.13) representa una versión idealizada de movimiento ocurriendo sobre la variedad deslizando S , y ello representa (intuitivamente) una descripción "promedio" para la conducta de las trayectorias controladas de (1.1) y (1.3) sobre la variedad

deslizante S .

Nótese que la condición de variedad invariante (1.8) implica que

$$f + g U_{eq} = \left[I - g \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f \in \text{Ker } ds(x) = \Delta_s(x) \quad (1.14)$$

Por lo tanto, para cualquier campo vectorial en $\text{gen}\{g(x)\}$, es decir, para cualquier vector de la forma $gu(x)$ para $u(x)$ como función de control, se sigue que

$$\left[I - g \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] g u(x) = \left[g - g \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} g \right] u(x) = 0 \quad (1.15)$$

la matriz

$$F := \left[I - g \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right]$$

Satisface $F^2 = F$ y por consiguiente es un operador proyección (tomando cualquier vector en $T_x X$) sobre $\Delta_s(x)$ a lo largo de $\text{gen}\{g(x)\}$. Cualquier componente del campo vectorial f , en el generado del campo vectorial de entrada g , no tiene influencia alguna en la dinámica deslizante ideal.

Observación. Se tiene que $F \cdot v(x) = 0$ para toda $v(x) \in \text{gen}\{g(x)\}$. Por ello, debe tenerse en cuenta que los controles u^+ , u^- y U_{eq} intervienen en el sistema "por medio" del subespacio $\{g(x)\}$.

1.5. Propiedad de Invariancia en Perturbación de modos deslizantes.

Se considera el siguiente sistema perturbado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \xi \quad (1.16)$$

si tenemos que $\xi = \sigma f(x)$, ξ representa una "perturbación paramétrica" nominal del campo vectorial f . Si tenemos $\xi = h(t)$, entonces ξ representa un estado de perturbación externa, independiente del estado x

Definición 1.

Si la perturbación considerada ξ , cae en la imagen de $g(x)$ para todos los valores de x , diremos que se satisface la condición de encuentro.

Definición 2.

El modo deslizante ideal se dice exhibir una propiedad de invariancia fuerte, con respecto a la señal de perturbación ξ , siempre que la dinámica deslizante ideal sea independiente de la señal de perturbación ξ .

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la naturaleza proyectiva de la condición de encuentro.

Teorema 3.

Un régimen deslizante sobre S , del sistema perturbado (1.16), satisface la propiedad de invariancia fuerte con respecto a ξ , si y sólo si el vector perturbación ξ satisface la condición (conocida como "condición de encuentro") $\xi \in \text{gen}\{g(x)\}$.

Demostración.

Para el sistema dinámico (1.16), la conducta deslizante ideal es gobernada por $\dot{x} = F = f + gu + \xi$. La suficiencia se sigue del hecho de que si $\xi \in \text{gen}\{g(x)\}$ entonces $\xi = g(x)v(x)$ para alguna función escalar $v(x)$ de clase C^1 . En este caso el operador proyección F aniquila la influencia de ξ sobre la dinámica equivalente. La necesidad sigue del hecho de que si

$$F\xi = \left[I - g \left(\frac{\partial S}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right] \xi = 0$$

entonces, necesariamente

$$\xi = g \left(\frac{\partial S}{\partial x} g \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) \xi = : U(x)g$$

lo cual implica que $\xi \in \text{Span}\{g(x)\}$. ■

Definición 3.

Un modo deslizante sobre S se dice exhibir la propiedad de invariancia débil con respecto a la señal de perturbación ξ siempre que ξ no satisfaga la condición de encuentro (i.e. siempre que no satisfaga la propiedad de invariancia fuerte).

La justificación para esta definición radica en el hecho de que si $\xi \notin \text{Span}\{g(x)\}$ entonces ξ puede ser descompuesto unívocamente como la suma de dos vectores: uno a lo largo de $\text{Span}\{g(x)\}$ y el otro a lo largo de la distribución deslizante $\text{Ker } ds$, i.e.

$$\xi = g(x)v + n(x)$$

Para alguna v y $n(x) \in \text{Ker } ds$. Nótese que el movimiento deslizante ideal no es afectado por $g(x)v$ mientras que $n(x)$ es tangencial a S , i.e. $n(x)$ no afecta la existencia local de un movimiento deslizante mientras que afecta la dinámica deslizante ideal cuando se restringe al movimiento sobre S .

Teorema 4.

Sea $\xi \in \text{Span}\{g(x)\}$ y $U_{eq}^*(x)$ denota el control equivalente correspondiente a un modo deslizante sobre S del sistema no perturbado (1.1). Sea $u^+(x)$ y $u^-(x)$ las funciones fijas de control retro-extremos de la ley de control de estructura variable, con $u^+(x) > u^-(x)$ en X . Si un modo deslizante existe para el sistema perturbado (1.16), entonces el vector perturbación $\xi = g(x)v(x)$ es tal que $v(x)$ es acotado por

$$U_{eq}^*(x) - u^-(x) > v(x) > U_{eq}^*(x) - u^+(x) \quad (1.17)$$

Demostración:

La necesidad sigue del hecho de que si un modo deslizante existe para el sistema perturbado, entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + gu^+ + \xi \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle ds, f + (v + u^+)g \rangle < 0$$

y

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f + gu^- + \xi \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle ds, f + (v + u^-)g \rangle > 0$$

Esto implica que un movimiento deslizante existe para el sistema no perturbado (1.1) con ley de estructura variable de la forma

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0 \end{cases}$$

Se sigue del Teorema 1 que

$$u^-(x) + v(x) < U_{eq}^*(x) < u^+(x) + v(x)$$

y el resultado se tiene. ■

Hasta ahora hemos descrito la herramienta que, esencialmente, necesitamos de la Teoría VSS. Cabe decir que una revisión natural de esta teoría proseguiría con el tema de "Formas Canónicas Regulares". El objetivo de este trabajo tiene relación con las "formas canónicas regulares", pero podemos prescindir de esta parte teórica.

Sección 2

En esta sección consideramos como variedad invariante, bajo el campo definido por un sistema de ecuaciones, a una variedad cuyo espacio tangente contiene el vector tangente de una trayectoria del sistema.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{u} = F_0(u) \quad (2.1)$$

definido en un conjunto V abierto de $\mathbb{R}^n$, donde F_0 es un campo vectorial C^1 - suave, y supongamos que existe una superficie S_0 C^1 - suave e invariante respecto al sistema (2.1). Para cada $x \in S_0$; denotamos por $E(x)$ el espacio ortogonal (definido bajo el producto interior, ver anexo pág.76) a S_0 en el punto x . Tal que $E = \{U E(x); x \in S_0\}$ es un fibrado C^1 - suave sobre S_0 . En una vecindad de esta superficie se introducen coordenadas locales C^1 -suaves (x,y) , donde $x \in S_0$ y $y \in E(x)$. En las coordenadas (x,y) , (2.1) se puede escribir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + F_1(x,y) \\ \dot{y} &= \varphi(x)y + \phi_1(x,y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde φ , f , F_1 y ϕ_1 son aplicaciones, con $F_1(x,0) = 0$ y $\phi_1(x,0) = 0$. Sin perder generalidad, suponemos que F_1 y ϕ_1 son C^1 -ceranos a cero.

Consideramos el sistema (2.2) como una perturbación del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ \dot{y} &= \varphi(x)y \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde F_1 y ϕ_1 son C^1 -perturbaciones dadas por la C^1 -norma. Por simplicidad, supondremos que $V = S_0 \times \mathbb{R}$. Como una variedad C^1 -cercana a S_0 se entiende al conjunto

$$S = \{(x, v(x)); x \in S_0, v(x) \in \mathbb{R}\}$$

donde $\|v\|_1$ es suficientemente pequeño.

Definición de C^1 -estabilidad. Una variedad invariante (respecto al sistema (2.2)) S_0 es estable con respecto a C^1 -perturbaciones (es C^1 -estable) si, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando $\|F - F_0\|_1 < \delta$, el sistema perturbado $\dot{u} = F(u)$ tiene una variedad invariante C^1 -suave S , tal que $\|S - S_0\|_1 < \varepsilon$. En general, δ depende de ε, F_0 y S_0 .

Sea $X(t, x)$ y $A(t, x)$ la solución del sistema (2.3) en el fibrado E , con $X(0, x) = x$ y $A(0, x) = I$.

Definición de estructura Pseudo-hiperbólica.

El sistema de ecuaciones diferenciales (2.3) es llamado superhiperbólico, de orden $K \geq 1$, sobre la variedad S si existe una cubierta abierta $\Sigma = \{U\}$ (compuesto de sólo un abierto) de S tal que:

- 1) U es trayectorialmente convexo con respecto a $\dot{x} = f(x)$, es decir, cada trayectoria Γ intersecta a U en un conjunto conexo.
- 2) $E|_U = E|_U$ tiene la representación continua $E = E^+ \oplus E^-$, invariante respecto a (2.3). Es decir, si $x \in U$ y $X(t, x) \in U$, entonces

$$A(t, x) E^{\pm} \subset E^{\pm}(X(t, x));$$

3) Existen números positivos α y λ tales que, si $x \in U$, $t > 0$, y $X(t, x) \in U$, entonces

$$|A^+(t, x)| \cdot \left| \frac{\partial X^{-1}}{\partial x}(t, x) \right|^m \leq \alpha \exp(-\lambda t)$$

donde $A^{\pm} = A|E^{\pm}$ y $m = 0, 1, \dots, K$, mientras si $x \in U$, y con $t < 0$ $X(t, x) \in U$, entonces

$$|A^-(t, x)| \cdot \left| \frac{\partial X^{-1}}{\partial x}(t, x) \right|^m \leq \alpha \exp(\lambda t)$$

El conjunto S es llamado conjunto hiperbólico, y la representación $\{E = E^+ \oplus E^-\}$ en S , para la cual se satisfacen las condiciones 1)-3), es llamada estructura Pseudo-hiperbólica. A un sistema con esta estructura le llamaremos sistema Pseudo-hiperbólico.

Consideremos la perturbación

$$\dot{u} = F_0(u) + \rho(u) \quad (2.4)$$

de (2.2), ρ es un campo vectorial C^1 -suave, con $\|\rho\|_1 < \delta$.

Entonces, en una vecindad de S_0 , el sistema (2.4) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + F(x, y) \\ \dot{y} &= \varphi(x)y + \phi(x, y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

en las coordenadas (x, y) , donde $\|F\|_1, \|\phi\|_1 \leq \delta_1$, donde δ_1 es pequeño cuando δ es pequeño.

El carácter persistente de la variedad S_0 (bajo el sistema (2.2))

nos lo da el siguiente teorema.

Teorema 1. Si el sistema (2.3) es Pseudo-hiperbólico de orden 1, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que el sistema (2.4) tiene una variedad invariante C^1 -suave S_1 , con la representación $S_1 = \{(x, v(x)); x \in S_0, v(x) \in E(x)\}$, y $\|v\|_1 < \varepsilon$, en las coordenadas (x, y)

Antes de demostrar el Teorema 1, hagamos antes algunas consideraciones. Lo dicho hasta aquí nos interesa en el siguiente contexto. La superficie S_0 es de dimensión $(n-1)$ y se encuentra encajada en $\mathbb{R}^n$, esta se supone asintóticamente estable en el abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ bajo el sistema (2.2). Además, el punto $0 \in S_0$ es asintóticamente estable en S_0 bajo el sistema $\dot{x} = f(x)$, es decir, el abierto V está contenido en la cuenca del punto 0 .

Además de las anteriores consideraciones, suponemos que la aplicación $F(x) = A(t, x)y : S_0 \times \mathbb{R} \rightarrow S_0 \times \mathbb{R}$ es transversal a la subvariedad S_0 en el punto $x \in S_0$, según la definición de transversalidad que damos en el anexo. Aquí consideramos que la aplicación $A(t, x)y$ es solución del sistema $\dot{x} = \varphi(x)y$.

Una vez aclarado este contexto se tiene la siguiente observación.

Observación 1.

Sobre la superficie S_0 consideramos una cubierta U . Sobre este abierto, y respecto al sistema $\dot{x} = f(x)$, se tiene una estructura Pseudo-hiperbólica de orden 1 con constantes α y λ :

- 1) Por la invariancia de S_0 , tenemos que U es trayectorialmente convexo;
- 2) por la estabilidad de S_0 , se tiene la representación continua

$$E = E|U = E^- \oplus E^+ = E^-, \text{ ya que } E^+ = \{0\}.$$

3) si consideramos la transversalidad, podemos ver que existen (ver[16]) constantes positivas α y λ tales que, para $t < 0$, se tiene

$$|A(t, x)| \cdot \left| \frac{\partial X^{-1}}{\partial x}(t, x) \right|^m \leq \alpha \exp(\lambda t); \quad m = 0, 1.$$

Sea Γ una trayectoria del sistema (2.3) y sea U el conjunto trayectorialmente convexo. Entonces, $\Delta(\Gamma) = \Gamma \cap U$ representa una curva de la forma $\Delta\Gamma = \{x = \varphi(t); t \in (\alpha, \beta)\}$ donde $\varphi(t)$ es la solución del sistema correspondiente a la trayectoria Γ . El punto $0 = \varphi(\alpha)$ es el punto de atracción. La longitud de la curva se define como $|\Delta(\Gamma)| = \beta - \alpha$. Aquí, α es el tiempo de entrada a U y β el tiempo de llegada al punto de equilibrio 0 . Estos tiempos se consideran finitos.

Observación 2.

- 1) Los puntos de entrada al conjunto U conforman una superficie Π^- C^1 -suave. Si la superficie S_0 es $(n-1)$ dimensional, entonces Π^- es de dimensión $(n-2)$.
- 2) Por la unicidad de las soluciones del sistema $\dot{x} = f(x)$ sobre Π^- , se tiene que el ángulo entre el campo f y la superficie Π^- es uniformemente diferente de cero.
- 3) Para una trayectoria Γ son posibles dos situaciones; a) $\Gamma \cap \partial U = \emptyset$; b) $\Gamma \cap \partial U$ es segmento de una trayectoria que inicia en Π^- , y existe $T > 0$ (número finito) tal que $|\Delta(\Gamma)| < T$.

Sea $\rho(x_1, x_2)$ la distancia sobre la variedad S_0 , con la que

definimos

$$\rho(x_1, A) = \inf_{x \in A} \rho(x_1, x);$$

$$\rho(A, B) = \sup_{x \in B} \rho(x, A);$$

$$d(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$$

Restringiendo el sistema (2.3) a la variedad S_0 nos queda la dinámica dada por el sistema $\dot{x} = f(x)$. Si C^1 -perturbamos este sistema, entonces estamos considerando un sistema de la forma $\dot{x} = g(x)$ sobre S_0 , el cual nos permite definir un abierto $U(g)$ trayectorialmente convexo en S_0 .

Proposición 1. Suponiendo que las superficies de entrada, Π^- y $\Pi^-(g)$, coinciden se tiene lo siguiente. Correspondiente a cada $\epsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que; si $\|g-f\| < \delta_2$ y $g \in C^1$, entonces existe una cubierta $\Sigma(g) = \{U(g)\}$ de S_0 para la cual:

- 1) $U(g)$ es conjunto trayectorialmente convexo con respecto al sistema $\dot{x} = g(x)$;
- 2) $d(\partial U(g), \partial U) < \epsilon_2$.

De observación 2, inciso 3), tenemos que la frontera de S_0 consiste de puntos de entrada Π^- y la superficie trayectorialmente convexa Π , la cual llamaremos superficie lateral.

Demostración: Sea g el campo vectorial en las condiciones de proposición 1, y sea $\partial \Pi^-$ los puntos de entrada a Π . Consideremos la superficie $\Pi(g)$ consistente de los intervalos, en $\Delta(\Gamma(g))$, de trayectorias del sistema $\dot{x} = g(x)$. Estos intervalos empiezan en $\partial \Pi^-$ y terminan en ∂ . El teorema concerniente con la dependencia continua de soluciones respecto a un parámetro implica que, para δ_2 suficientemente pequeña, las superficies $\Pi(g)$ y Π están en las

ε_2 -vecindades una de otra.

El conjunto $U(g)$ está determinado por la frontera $\partial U(g) = \Pi^- + \Pi(g)$. Por construcción, $d(\partial U(g), \partial U) < \varepsilon_2$ y $d(U(g), U) < \varepsilon_2$. El número δ_2 debe ser escogido de tal forma que podamos tomar al abierto $U(g)$ como cubierta de S_0 . Esto completa la demostración de la proposición.

Consideremos una solución $(X_1(t, x, y), Y_1(t, x, y))$ del sistema (2.5).

sea el conjunto U trayectorialmente convexo para el sistema $\dot{x} = f(x)$ sobre la variedad S_0 , y sea la superficie $W_0 = \{(x, v_0(x)); x \in \Pi^-\}$, definida sobre los puntos de entrada Π^- , donde $v_0 \in C^1$ y $\|v_0\|_1 < \delta_4$.

A partir de aquí, vemos el sistema (2.5) como una C^1 -perturbación del sistema (2.3). Suponemos que la perturbación es tan pequeña que $E|\Pi^-$ es una superficie sin contacto para el sistema (2.5). Por invariancia con respecto a (2.5), se continúa la superficie W_0 a un tiempo finito T^* , es decir;

$$v_0(X_1(t, x, v_0(x))) = Y_1(t, x, v_0(x)) \quad (2.6)$$

donde $0 < t < T^*$ y $x \in \Pi^-$. Sobre la superficie invariante W_0 el sistema de ecuaciones diferenciales tiene la forma

$$\dot{x} = f(x) + F(x, v_0(x)) \quad (2.7)$$

y tiene una solución $X_1(t, x, v_0(x))$. La aplicación $X_1(t, x, v_0(x))$ es C^1 -cercano a $X(t, x)$ (solución del sistema $\dot{x} = f(x)$) cuando ϕ , F y v_0 son suficientemente C^1 -ceranos a cero.

Si $T^* > T$ entonces, sobre S_0 , en la vecindad de la superficie lateral Π , existe un campo vectorial $g(x) = f(x) + F(x, v_0(x))$ del cual, en base a proposición 3), podemos construir (de manera única) un conjunto trayectorialmente convexo $U(g) = U^*$ para el sistema (2.7). De aquí que la aplicación $v_0: \Pi^- \rightarrow E|_{\Pi^-}$ determina unívocamente:

- 1) La continuación invariante (2.6).
- 2) El conjunto U^* .
- 3) En relación al sistema (2.7) la frontera ∂U^* se separa en una superficie de entrada Π^- , y una superficie lateral Π^* (cerca de Π).

Proposición 2.

Sea U conjunto trayectorialmente convexo respecto al sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ y sea v_0 una sección C^1 -suave del fibrado $E|_{\Pi^-}$, con $\|v_0\|_1 < \delta_4$. Supongamos que el sistema (2.3) es tal que $E^- = \{0\}$ y $E^+ = E$ sobre U y δ_1 un número suficientemente pequeño. Entonces existe una variedad $W = \{(x, v(x)); x \in U\}$, invariante respecto al sistema (2.5), para el cual;

- 1) $(v|_{\Pi^-}) = v_0$
- 2) $\|v\|_1 < \varepsilon_4(\delta_1, \delta_4)$
- 3) v es aplicación C^1 -suave

Demostración.

En base a las condiciones de proposición 2), existe un número t^* y un conjunto U_1 tal que;

$$1) \quad U_1 \supset U^*$$

$$2) \quad |A(t^*, x)| \cdot \left| \frac{\partial X^{-1}}{\partial x}(t^*, x) \right|^m \leq \lambda_1 < 1, \quad \text{donde } x \text{ y } X(t^*, x) \text{ están}$$

en U_1 y $m = 0, 1$. Usando (2.6), extendemos la superficie W_0 al tiempo $T^* = \max(T, t^*)$, donde T es la longitud de la frontera de U^* . Sea U^- el conjunto formado de la superficie lateral Π^* y la traslación Π^- bajo la acción del sistema dinámico (2.7) sobre el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t^*$. En $X(t^*, x)$, $X_1(t^*, x, y)$, etc. omitiremos t^* . Sea $\mathcal{B}$ el espacio de aplicaciones $v: U^* \rightarrow E$ tal que $v|_{U^-} = v_0$, $\|v\| \leq \beta_0$, $\|\frac{\partial v}{\partial x}\| \leq \beta_1$, y $v \in C^1$. A partir de las hipótesis de la proposición 2) mostraremos la existencia de un elemento v^* del espacio $\mathcal{B}$. Considerando la aplicación $X_1(x, v(x))$, donde $v \in \mathcal{B}$. Deducimos del teorema de la función implícita que, para β_0 , β_1 y δ_1 suficientemente pequeños, la aplicación $X_1(x, v(x))$ tiene una inversa. Sea $h = (X_1(\cdot, (\cdot)))^{-1}$, se sigue de la relación

$$\frac{\partial X_1^{-1}}{\partial x} - \frac{\partial X^{-1}}{\partial x} = \frac{\partial X_1^{-1}}{\partial x} \left[\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial x} \right] \frac{\partial X^{-1}}{\partial x} \quad (2.8)$$

que

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial X^{-1}}{\partial x} \right\| \leq \frac{K_1^2(\sigma_2 + \sigma_1 \beta_1)}{1 - K_1(\sigma_2 + \sigma_1 \beta_1)} \quad (2.9)$$

donde $\left\| \frac{\partial X^{-1}}{\partial x} \right\| < K_1$, $\left\| \frac{\partial X^{-1}}{\partial y} \right\| < \sigma_1$, y $\left\| \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial x} \right\| < \sigma_2$; los números σ_1 y σ_2 son pequeños cuando δ_1 es pequeño y son seleccionados tal que $K_1(\sigma_2 + \sigma_1 \beta_1) < 1$. Para probar la proposición 2), debemos encontrar una aplicación v para la cual

$$\begin{aligned}
v(X_1(x, v(x))) &= Y_1(x, v(x)) \\
\circ \quad v(x) &= Y_1(h(x), v(h(x)))
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

se define un operador Δ por la relación

$$\Delta(v)(x) = \begin{cases} v_0(x) & \text{para } x \in U^- \\ Y_1(h(x), v(h(x))) & \text{para } x \in U^* \setminus U^- \end{cases}$$

De la definición de $\mathcal{B}$ y la continuación de v_0 concluimos que $\Delta(v)$ es una aplicación C^k -suave para $v \in \mathcal{B}$. Ahora buscamos una cota para $\|\Delta(v)\|$; si $x \in U^* \setminus U^-$, entonces

$$\begin{aligned}
|\Delta(v)(x)| &= |A(h(x), v(x)) + Y_1(h(x), v(h(x))) - A(h(x), v(x))| \\
&\leq \lambda_1 \|v\| + \sigma_3
\end{aligned}$$

donde σ_3 es pequeño cuando δ_1 es pequeño. De aquí que

$$\|\Delta(v)\| \leq \beta_0, \quad \text{con } \beta_0 = \frac{\sigma_3}{1-\lambda_1}$$

En lo que sigue estimaremos $\left\| \frac{\partial \Delta(v)}{\partial x} \right\|$. Para $x \in U^* \setminus U^-$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \Delta(v)}{\partial x}(x) \right| &\leq |A(h(x))| \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial x}(h(x)) \right| \cdot \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right| \\
&+ \left| \frac{\partial Y_1}{\partial x}(h(x), v(h(x))) \right| \cdot \left| \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right| \\
&+ \left| \frac{\partial Y_1}{\partial y}(h(x), v(h(x))) - A(h(x)) \right| \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial x}(h(x)) \right| \cdot \left| \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|
\end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$\left| \frac{\partial \Delta(v)}{\partial x}(x) \right| \leq (\lambda_1 + \sigma_4) \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\| + \sigma_5(K_1 + \sigma_6) + \sigma_7(K_1 + \sigma_6) \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|$$

donde σ_4 , σ_5 , σ_6 y σ_7 son pequeños cuando δ_1 y δ_4 son pequeños.

Concluimos que

$$\left\| \frac{\partial \Delta(v)}{\partial x} \right\| \leq \beta_1, \quad \text{con} \quad \beta_1 = \frac{\sigma_5(K_1 + \sigma_6)}{1 - (\lambda_1 + \sigma_4 + \sigma_7(K_1 + \sigma_6))}$$

donde $\lambda_1 + \sigma_4 + \sigma_7(K_1 + \sigma_6) < 1$, y $\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\| \leq \beta_1$. De aquí que Δ aplica $\mathcal{B}$ sobre $\mathcal{B}$ para las elecciones indicadas de δ_1 , δ_4 , β_0 y β_1 .

Se observa que, en la C^0 -topología, el operador Δ es contractivo.

En efecto, para $x \in U^* \setminus U^-$, se tiene la desigualdad

$$|\Delta(v_1)(x) - \Delta(v_2)(x)| \leq (\lambda_1 + \sigma_8) \|v_1 - v_2\| \quad (2.11)$$

donde σ_8 es pequeño siempre que lo sean δ_1 , δ_4 , β_0 y β_1 . De aquí que Δ es un operador contractivo en la C^0 -topología. Sea v^* el punto fijo de Δ , es decir, $\Delta v^* = v^*$. Ya que $\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\| \leq \beta_1$, concluimos que v^* satisface la condición de Lipschitz y $\text{Lip } v^* \leq \beta_1$. Ahora probaremos que v^* es aplicación C^1 -suave, con lo cual tendremos que $v^* \in \mathcal{B}$.

La ecuación para $\frac{\partial v^*}{\partial x}$ es

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial Y_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.12)$$

la cual es no-lineal por presentarse $\frac{\partial v}{\partial x}$ en $\frac{\partial h}{\partial x}$.

Consideremos la ecuación (2.12) con $\frac{\partial v}{\partial x}$ reemplazada por W_1 , la cual opera en la misma forma que $\frac{\partial v}{\partial x}$ y es tal que $\|W_1\| \leq \beta_1$. Obtenemos la ecuación

104450

$$W_1 = \Delta_1(W_1) \quad (2.13)$$

donde el operador Δ_1 depende de $v \in \mathcal{B}$ puede ser mostrado, como en el caso de Δ , que para δ_1 , δ_4 , β_0 y β_1 suficientemente pequeños, el operador Δ_1 es contractivo en la C^0 -topología del espacio $\{\omega_1: \|\omega_1\| \leq \beta_1\}$, y todas las estimaciones son uniformes con respecto a v , el punto fijo $W_1^*(v)$ depende continuamente de v , es decir, para $q > 0$ arbitrario existe $p > 0$ tal que $\|W_1^*(v_1) - W_1^*(v_2)\| < q$ cuando $\|v_1 - v_2\| < p$.

Sea la sucesión $v_n \in \mathcal{B}$ y $v_n \rightarrow v^*$ en la C^0 -topología, es decir $v_n(x) = Y_1(h_{n-1}(x), v_{n-1}(h_{n-1}(x)))$. Entonces

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} = \Delta_1(v_{n-1}) \left(\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

consideremos la sucesión $\{W_{1n}\}$, tal que W_{1n} es solución de (2.13) con $v = v_{n-1}$ en Δ_1 , es decir

$$W_{1n} = \Delta_1(v_{n-1})(W_{1n}) \quad (2.15)$$

deducimos de (2.14) y (2.15) que

$$\|W_{1n} - \frac{\partial v_n}{\partial x}\| \leq \ell \|W_{1n} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}\| \quad (2.16)$$

donde $\ell = (\lambda_1 + \sigma_g) < 1$, con σ_g pequeño cuando δ_1 , δ_4 , β_0 y β_1 son pequeños, se sigue de (2.16) que

$$\|W_{1n} - \frac{\partial v_n}{\partial x}\| \leq \ell \left(\left\| \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} - W_{1n-1} \right\| + \|W_{1n-1} - W_{1n}\| \right)$$

sea $\alpha_n = \left\| \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} - W_{1n-1} \right\|$ y $\varepsilon_n = \|W_{1n-1} - W_{1n}\|$; entonces

$$\alpha_n \leq \ell(\alpha_{n-1} + \varepsilon_n) \leq \dots \leq \ell^n \alpha_0 + \ell^n \varepsilon_1 + \dots + \ell^2 \varepsilon_{n-1} + \ell \varepsilon_n \quad (2.17)$$

La sucesión $\{v_n\}$ converge en la topología C^0 ; en consecuencia $\varepsilon_n =$

$$\|W_{1n} - W_{1n-1}\| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty, \text{ y concluimos que } \alpha_n \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Por consiguiente, las sucesiones $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\right\}$ y $\{W_{1n}\}$ convergen al mismo

límite W_1^* , y tenemos que $\frac{\partial v}{\partial x} = W_1^*$

Existe por consiguiente una variedad C^1 -suave $W = \{(x, v(x)); x \in U\}$, invariante con respecto a la aplicación $(X_1, Y_1)(t^*)$.

Probaremos que la variedad W es invariante con respecto a $(X_1, Y_1)(t)$ para t arbitraria, es decir, probaremos que la aplicación v es independiente de t^* . Por construcción, v depende continuamente de t^* . La unicidad de la construcción de v implica que

$$v(t^*) = v(nt^*)$$

para un entero $n > 0$; de aquí, si t_1 y $t_2 > t^*$ son racionales arbitrarios, tenemos $v(t_1) = v(t_2)$. La continuidad de v respecto a t implica que v es independiente de t , con lo que obtenemos la invariancia.

Ahora nos abocamos a demostrar el teorema 1 de esta sección.

Sobre el fibrado $E^+ = E|U$ se considera el nuevo sistema (derivado del sistema (2.3));

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -f(x) \\ \dot{y} &= -\varphi(x)y \end{aligned} \quad (2.18)$$

El conjunto S_0 es trayectorialmente convexo para el sistema $\dot{x} = -f(x)$, y no tiene puntos de entrada, porque la superficie S_0

no tiene puntos de salida bajo el sistema (2.3). Es fácil verificar que el sistema (2.18) y el conjunto E^- satisfacen las condiciones de proposición 2. De aquí que el nuevo sistema (derivado del sistema (2.5));

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -f(x) - F(x,y) \\ \dot{y} &= -\varphi(x)y - \phi(x,y)\end{aligned}\tag{2.19}$$

tenga una variedad invariante C^1 -suave W^- , sobre la cual el sistema (2.19) es C^1 -cercano al sistema (2.18). Concluimos que W^- es invariante para el sistema (2.5), y sobre esta variedad el sistema (2.5) es C^1 -cercano al sistema (2.3).

Al finalizar la sección 3 de este capítulo daremos uso al teorema 1 de esta sección.

SECCION 3

Con el fin de mostrar el diseño de un control estabilizante en la teoría VSS, estudiaremos un ejemplo de un sistema de control. Este ejemplo es interesante porque representa un modelo de control de un proceso de fermentación, el cual es área de aplicaciones importantes hoy en día. En esta introducción obtendremos un sistema de control de estructura variable en $\mathbb{R}^2$ del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu(y) x - u x & (0.1) \\ \dot{y} &= u (y_a - y) - \frac{\mu(y) x}{r} & (0.2)\end{aligned}\tag{3.0}$$

donde tenemos que;

$x=x(t)$ representa la concentración de la biomasa al tiempo t ;

$y=y(t)$ es la concentración del substrato al tiempo t ;

$u=u(x,y)$ es la tasa de dilución correspondiente al estado (x,y) ;

y_a representa la concentración máxima del substrato (constante);

r , μ_m y k son parámetros físicos del proceso.

y donde $\mu(y) = \frac{\mu_m y}{k+y}$. En este sistema consideramos positivos los parámetros μ_m , k , r y y_a . También consideramos positivas las variables de estado x y y .

En este proceso de fermentación, modelado por el sistema (3.0), es importante estabilizar rápidamente la concentración del substrato pues este puede envenenar a las bacterias.

Lo que sigue es un análisis de los puntos críticos de las ecuaciones (0.1) y (0.2).

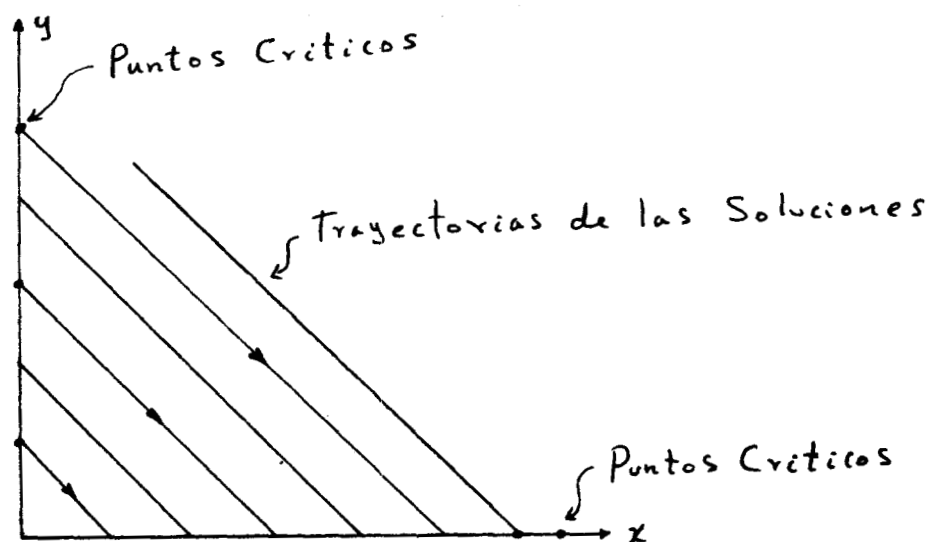
Por conveniencia, dividimos el sistema anterior en dos casos; $u = 0$ y $u > 0$. Posteriormente podremos ver que el caso $u < 0$ no interesa. En el primer caso las ecuaciones (0.1) y (0.2) nos quedan

$$\dot{x} = \mu(y) x \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = - \frac{\mu(y) x}{r} \tag{3.4}$$

De donde se tiene que los puntos de equilibrio son los dados por

las rectas $x = 0$ y $y = 0$. La siguiente figura muestra las trayectorias para este caso particular



Las soluciones del sistema anterior corresponden a rectas de pendiente $-1/r$.

Si al segundo caso ($\mu > 0$), agregamos la condición $0 < u < \mu(y_a)$, se tiene la igualdad

$$\dot{x} = x \mu(y) - u x = 0$$

si $x = 0$, o bien $u = \mu(y)$. Esta segunda igualdad se tiene si

$$y = \frac{u k}{\mu_m - k} \quad (*)$$

Si agregamos la condición de equilibrio en la coordenada "y";

$$\dot{y} = u (y_a - y) - \frac{1}{r} \mu(y_a) x = 0$$

lo cual implica que

$$\frac{u (y_a - y) r}{\mu(y)} = x$$

incorporando la igualdad (*) a esta última, vemos claro que este caso tiene dos puntos de equilibrio, y son

$$P1 = (0 , y_a) ; \quad P2 = (r (y_a - \frac{u k}{\mu_m - u}), \frac{u k}{\mu_m - u})$$

El punto de equilibrio (P2) esta en función del control u . Si consideramos ahora que $u = \mu(y_a)$, puede verse que los puntos de equilibrio, (P1) y (P2), coinciden. Si $u > \mu(y_a)$ se tiene como punto de equilibrio sólo a (P1).

Los conjuntos invariantes del sistema (3.0), con $u > 0$, son las líneas rectas $x = 0$ y $x = r (y_a - y)$. Los puntos críticos (P1) y (P2) están sobre la línea recta $x = r (y_a - y)$.

Ahora estudiamos el sistema (3.0) sobre los conjuntos invariantes. Puede observarse que este sistema se reduce a una dimensión si $x = 0$. En tal caso tenemos la ecuación

$$\dot{y} = u (y_a - y)$$

con solución

$$y = y_a + c \exp \left(- \int_0^T u \, dt \right)$$

donde c es una constante de integración. Observamos que las soluciones convergen asintóticamente al punto (P1). Si se considera que $x = r (y_a - y)$, obtenemos la ecuación

$$\dot{y} = (u - \mu(y)) (y_a - y)$$

Si en esta ecuación tenemos que $0 < u < \mu(y_a)$, entonces observamos que el punto (P2) es asintóticamente estable y el punto (P1) es inestable. En caso de tener $u = \mu(y_a)$ obtenemos que (P1) es punto silla. Si $u > \mu(y_a)$, se tiene que el punto (P1) es asintóticamente estable.

Esto puede verse en el siguiente análisis del sistema (3.0) en una vecindad de los puntos de equilibrio (P1) y (P2). Primero calculamos el Jacobiano de la parte derecha del sistema (3.0);

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \mu(y)-u & \mu'(y) \cdot x \\ -\frac{1}{r} \mu(y) & -u - \frac{1}{r} \mu'(y) \end{bmatrix}$$

donde $\mu'(y) = \frac{\mu_m k}{(k+y)^2}$ representa la derivada de la función $\mu(y)$.

Los valores y vectores propios asociados a $J(x,y)$ son

$$\lambda_1 = -u + u(y_a)$$

$$V_1 = \left(1, -\frac{1}{r} \right)$$

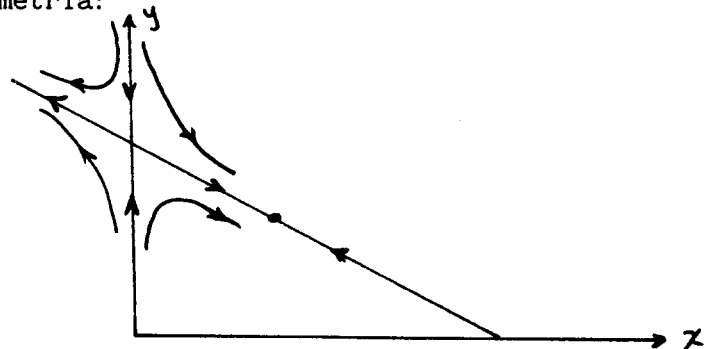
$$\lambda_2 = -u$$

$$V_2 = (0, 1)$$

Sabemos que, en una vecindad de un punto de operación P, los valores propios de la matriz Jacobiana dan información acerca de la configuración de las soluciones si $J(P)$ es no-singular, o singular y traza del Jacobiano distinto de cero. En este caso tenemos;

1. Si $0 < u < \mu(y_a)$, $(P1)$ es un punto silla y $(P2)$ es un punto atractor.
2. En caso de considerar $u = \mu(y_a)$, $(P1)$ resulta ser un punto silla.
3. Si consideramos $u > \mu(y_a)$, el punto $(P1)$ es un atractor.

Para este caso se tiene la geometría:



Es importante resaltar que este análisis cualitativo es independiente de los valores que en particular se asignen a los parámetros del sistema.

Del análisis anterior, y con el objetivo de hacer invariante a la

recta $y = y^*$, los valores que asignamos al control en este ejemplo son $u^+ = 0$ y $u^- = 2$, de tal forma que este segundo valor corresponde al caso $u = 2 > \mu(y_a)$. Los valores que consideramos para los parámetros son $k = 0.1$, $\mu_m = 0.2$, $r = 0.3$ y $y_a = 11.0$. Conforme a esta asignación de valores, obtenemos un sistema de control de "estructura variable" al considerar los subsistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu(y) x \\ \dot{y} &= -\frac{1}{r} \mu(y) x\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu(y) x - 2x \\ \dot{y} &= 2(y_a - y) - \frac{1}{r} \mu(y) x\end{aligned}\quad (3.6)$$

Estos subsistemas los obtenemos al considerar los valores del control $u = 0$ y $u = 2$, respectivamente, en el sistema (3.0).

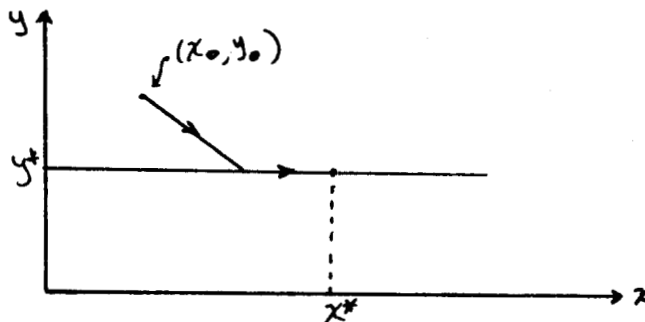
El ejemplo de sistema de control "de estructura variable" en $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu(y) x - u x \\ \dot{y} &= -\frac{\mu(y)}{r} x + (y_a - y) u\end{aligned}\quad (3.7)$$

con control

$$\begin{cases} u^+ = 0 & \text{si } y - y^* > 0 \\ u^- = 2 & \text{si } y - y^* < 0 \end{cases}\quad (3.8)$$

donde se ha introducido la recta de discontinuidad $y = y^*$, con $y^* = k^{1/2} \left[(k + y_a)^{1/2} - k^{1/2} \right]$. Del análisis hecho antes podemos ver que, bajo el sistema de estructura variable descrito, la recta $y = y^*$ es atractora, en el sentido de que cualquier órbita que inicia en una vecindad de esta recta es atraída a esta recta. Geometricamente



Para este ejemplo de sistema de control tenemos que;

$$s(x, y) = y - y^*, \quad y$$

$$g = \begin{bmatrix} -x \\ y_a - y \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} \mu(y) x \\ -\frac{\mu(y)}{r} x \end{bmatrix};$$

Con lo cual calculamos el control equivalente;

$$u_{eq} = \frac{\mu(y) x}{(y_a - y) r}$$

Con lo que obtenemos el sistema de control de forma VSS;

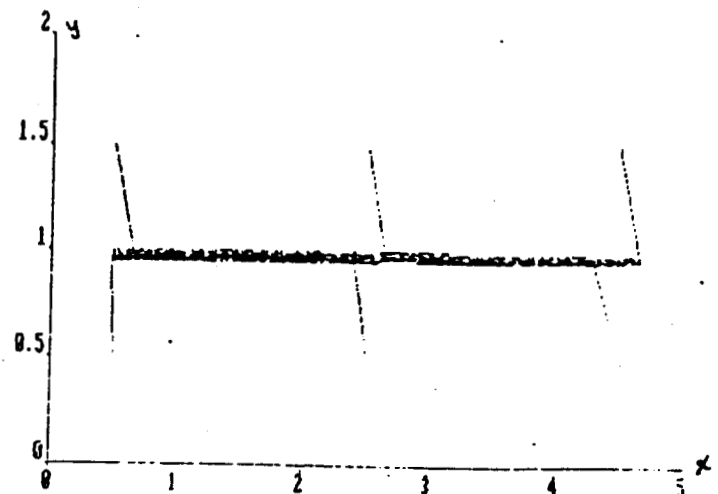
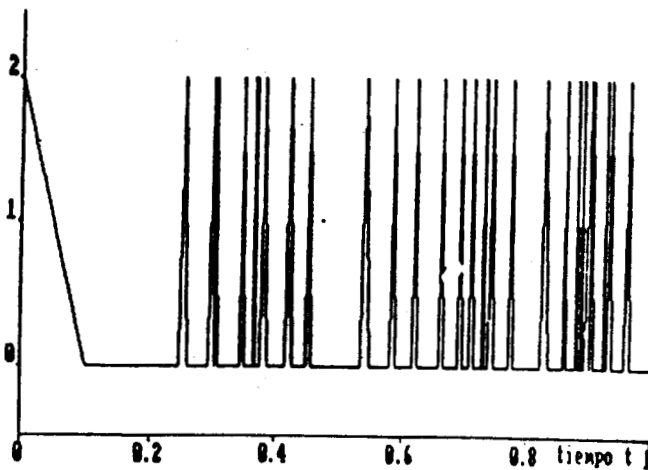
$$\dot{x} = \mu(y) x - u x$$

$$\dot{y} = -\frac{\mu(y)}{r} x + (y_a - y) u$$

con control

$$u = \begin{cases} 2 & \text{si } y - y^* > 0 \\ u_{eq} & \text{si } y - y^* = 0 \\ 0 & \text{si } y - y^* < 0 \end{cases}$$

La simulación de este sistema (con los valores a los parámetros asignados al inicio de esta sección) de retroalimentación resulta como sigue;



en la figura a) observamos que el control u oscila bastante entre sus valores extremos 0 y 2 en intervalos de tiempos cortos. Esta oscilación del control provoca una dinámica inestable sobre la superficie de cambio $s = 0$ (figura b)). Este es el "efecto de castaño" para este ejemplo que fué trabajado en [17].

Hemos visto que el uso de controles discontinuos para obtener robustez, en base a la teoría VSS, nos lleva a la presencia del efecto "castaño", siendo este un efecto inestable sobre la variedad de cambio.

Por el momento, nuestro objetivo es obtener criterios de diseño de controles en una vecindad de la superficie de deslizamiento, con tales controles se busca continuidad del campo controlado, tal que se preserve robustez en el deslizamiento y disminuya el efecto de "castaño" sobre este.

La idea básica consiste en "suavizar" el control de retroalimentación en una vecindad de la superficie de cambio. Es decir, encontrar un control $u = u(x)$ en una vecindad tubular, se requiere que esta vecindad tenga la propiedad de ser: i) globalmente alcanzable en tiempo finito y; ii) positivamente invariante bajo perturbaciones del campo.

El costo de considerar esta vecindad tubular de la superficie deslizante, es que la dinámica de la trayectoria en el interior de la vecindad es solo una aproximación a la dinámica deseada sobre la superficie deslizante. Por el contrario, la ventaja de este plan, es que la trayectoria disminuye el efecto oscilatorio que presenta el "castaño" en la superficie de cambio.

Considerando a $S = \{x: s(x) = 0\}$ como la superficie de cambio, se definen las funciones escalares

$$\begin{aligned} s^+(x) &:= s(x) + c_1 \varepsilon \\ s^-(x) &:= s(x) + c_2 \varepsilon \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivos y ε es el radio de la vecindad tubular, sean las superficies

$$\begin{aligned} S^+ &:= \{x: s^+(x) = 0\} \\ S^- &:= \{x: s^-(x) = 0\} \end{aligned}$$

definimos la vecindad tubular O_ε

$$O_\varepsilon = \{x: s^-(x) > 0 \text{ y } s^+(x) < 0\}$$

De las definiciones (3.9), se tiene claro que

$$\frac{ds^-(x)}{dt} = \frac{ds(x)}{dt} = \frac{d}{dt} s^+(x)$$

de tal manera que los controles extremos u^+ y u^- que aseguran que la superficie S es globalmente atractora, aseguran también que la vecindad O_ε sea globalmente atractora y positivamente invariante. Veamos ahora como se especifica el control $u(x)$, continuo en x , en el interior de O_ε . En principio, cualquier interpolación continua entre u^+ (definido en S^+) y u^- (definido en S^-) es suficiente para el objetivo mencionado de continuidad. Esta interpolación existe debido al lema de Urysohn.

Denotaremos por ds al gradiente de la función $s=s(x)$, lo mismo para las demás funciones de la variable de estado.

A continuación, con el objetivo de determinar los controles en una vecindad tubular O_ε de S , se considera el sistema (1.1) con control (1.8) de la sección 1. Es decir

$$\dot{X} = F(X) + G(X)u, \quad X \in \mathbb{R}^{n+1}$$

con control

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } s \geq 0 \\ u_{eq} & \text{si } s = 0 \\ u^- & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

con el objetivo de facilitar el diseño de controles en la vecindad O_ε de S , hacemos el siguiente cambio de variable.

$$y = s(X)$$

de tal forma que, en O_ε , la dinámica en el espacio ortogonal (o aniquilador, ver anexo pág.76) a S es dada por

$$\dot{y} = ds\dot{X} = dsF + dsGu$$

donde el control u está por determinarse. El control lo vamos a definir según los valores que toma la función escalar $s(X)$; para el caso $s \in [0, \varepsilon]$, sea

$$v_\varepsilon^+ = (dsF + dsGu^+) \Big|_{s = \varepsilon}$$

con ello se define el control u_ε^+ al tenerse la igualdad

$$dsF + dsGu_\varepsilon^+ = v_\varepsilon^+ \frac{s}{\varepsilon}; \quad \text{para } s \in [0, \varepsilon]$$

lo que implica que

$$u_\varepsilon^+ = \frac{v_\varepsilon^+ \frac{s}{\varepsilon} - ds \cdot F}{ds \cdot G} \quad \text{para } s \in [0, \varepsilon]$$

donde, por la condición de transversalidad (1.9 de sección 1.1) se tiene $ds \cdot G \neq 0$. Similarmente, para el caso $s \in [-\varepsilon, 0]$, tomamos

$$v_{\epsilon}^{-} = (dsF + dsGu^{+})|_{s = -\epsilon}$$

Definimos el control u_{ϵ}^{-} tal que

$$dsF + dsGu_{\epsilon}^{-} = v_{\epsilon}^{-} \frac{s}{\epsilon}$$

de donde tenemos que

$$u_{\epsilon}^{-} = \frac{v_{\epsilon}^{-} \frac{s}{\epsilon} - ds \cdot F}{ds \cdot G} \quad \text{para } s \in [-\epsilon, 0]$$

Ahora, como retroalimentación del sistema (1.1), se toma

$$u = \begin{cases} u^{+} & \text{si } s \geq \epsilon \\ u_{\epsilon}^{+} & \text{si } 0 \leq s \leq \epsilon \\ u_{\epsilon}^{-} & \text{si } -\epsilon \leq s \leq 0 \\ u^{-} & \text{si } s \leq -\epsilon \end{cases} \quad (3.10)$$

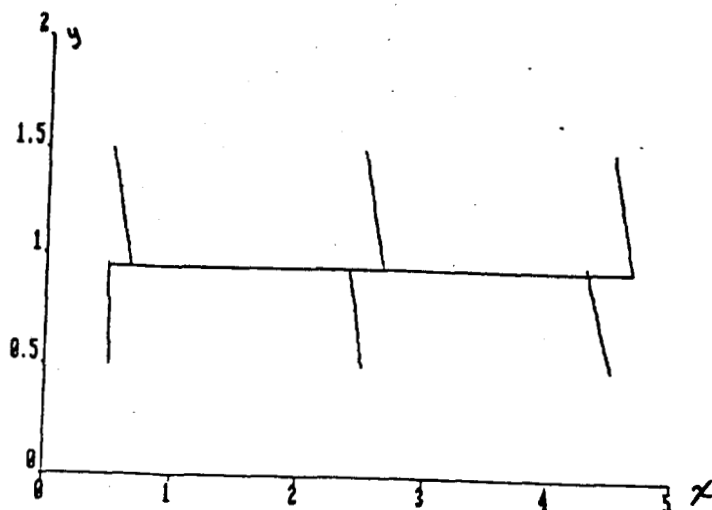
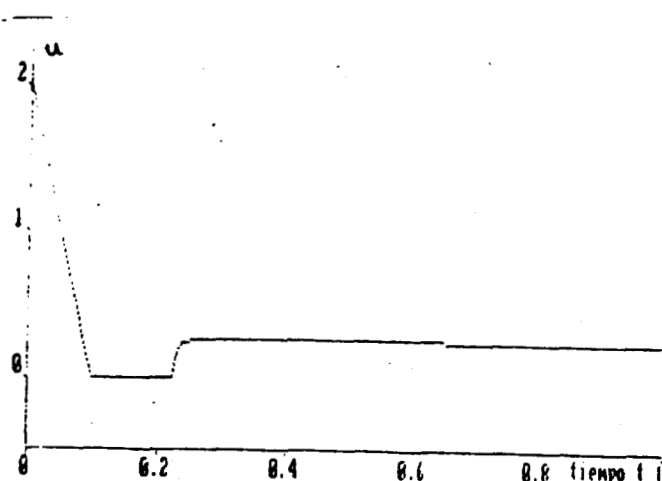
este control es continuo en el espacio de estados.

Continuando con el ejemplo de sistema de control obtenido al iniciar esta sección, definimos un nuevo control como ejemplo de la forma (3.10). Sea el control

$$(*) \quad u = \begin{cases} u^{+} = 0 & \text{si } \epsilon \leq y - y^{*} \\ (1-t) u_{eq} & \text{si } 0 \leq y - y^{*} \leq \epsilon \\ (1-t) u_{eq} + t \bar{u} & \text{si } -\epsilon \leq y - y^{*} \leq 0 \\ u^{-} = 2 & \text{si } y - y^{*} \leq -\epsilon \end{cases}$$

donde tenemos la función escalar $t: 0 \rightarrow [0,1]$; $t = \frac{|y-y^{*}|}{\epsilon}$,
con $\epsilon = 0.001$.

Ahora simulamos el sistema (3.7) con control (*)



Comparando con las gráficas incluidas al inicio de esta sección observamos que el "efecto chattering" disminuye. Usando los resultados de la sección 2 mostramos ahora la robustez de los sistemas de control tipo (3.10).

Con el objetivo de aplicar los resultados de la sección 2 reescribimos el sistema (1.1) en una vecindad 0_ε de S .

Para ello tomamos el cambio de variable

$$y = s(X) \quad (3.11)$$

donde $X = (x, y)$; $x \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}$.

De este cambio de variable, y de considerar (1.1), obtenemos

$$\dot{y} = ds\dot{X} = ds \cdot F + dsGu$$

Sean los campos F_m y $G_m : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que se tiene lo siguiente. Por ser S superficie regular de clase C^1 , tenemos que existe un cambio de coordenadas de clase C^1 (Ver [10], pág. 47, Proposición 1), tal que podemos escribir (1.1) de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_m(x, y) + G_m(x, y)u(x, y) \\ \dot{y} &= dsF + dsGu\end{aligned}\tag{3.12}$$

con control

$$u = \begin{cases} u_\varepsilon^+ & \text{si } 0 \leq s \leq \varepsilon \\ u_\varepsilon^- & \text{si } -\varepsilon \leq s \leq 0 \end{cases}\tag{3.13}$$

Observación: Si $y = 0$, del sistema (3.12) tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_m(x, 0) + G_m(x, 0)u_{eq} \\ \dot{y} &= 0\end{aligned}$$

Ahora se definen funciones para $y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$:

Sea $f := F_m(x, 0) + G_m(x, 0)u_{eq}$

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{v_\varepsilon^+}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq s \leq \varepsilon \\ \frac{v_\varepsilon^-}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leq s \leq 0 \end{cases}$$

$$F_1(x, y) := F_m(x, y) + G_m(x, y)u(x, y) - f(x)$$

Con estas funciones reescribimos el sistema (3.12) en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + F_1(x, y) \\ \dot{y} &= \varphi(x)y\end{aligned}\tag{3.14}$$

Ahora identificamos el sistema (3.14) con el sistema (2.2) de sección 2, del cual se probó la robustez de la superficie invariante. Por lo tanto tenemos que el control (3.10) dado en esta

sección, nos permite asegurar la persistencia de la invariancia de la superficie de cambio, en el sentido precisado en la sección 2.

Concluimos en este capítulo que el sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$$

con control (3.10), disminuye el efecto "chattering" (conclusión obtenida por simulación y debido a la continuidad de la "parte derecha" del sistema de control) y asegura la existencia de una variedad diferenciable invariante ante perturbaciones "pequeñas" del sistema de control.

Para terminar esta parte del trabajo incluimos los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN

Veremos que la función F_1 es C^1 -cercano a $0 \in \mathbb{R}^m$. Es decir, veremos que $\|F_1\|_1$ está cerca de 0 si la variable y está cerca de 0.

Sea $X(x, y) \in O_\varepsilon$ tal que $x \in \mathbb{R}^m$; $y \in \mathbb{R}$: donde $F_1: T_x O_\varepsilon \rightarrow T_{F_1(x)} O_\varepsilon$.

considerando las definiciones

$$\|F_1\| = \sup_{x \in O_\varepsilon} |F_1(x)| : \quad \|dF_1\| = \sup_{x \in O_\varepsilon} \left| \max_{|v|=1} |dF_1(x)(v)| \right|$$

definimos la C^1 -norma

$$\|F_1\|_1 = \|F_1\| + \|dF_1\|$$

donde $v \in T_x^* O_\varepsilon$.

F_1 es de clase C^0 por ser continua en O_ε . Para considerar que F_1 (una vez que existe) sea de clase C^1 debemos ver la continuidad de

dF_1 . Tenemos

$$F_1(x, y) = F_m(x, y) + G_m(x, y)u(x, y) - (F_m(x, 0) + G_m(x, 0)u_{eq}(x, 0)) \quad (3.15)$$

tomando $C_1 = \frac{v^+ \epsilon 1}{\epsilon}$, y $C_2 = \frac{v^- \epsilon 1}{\epsilon}$ se considera (1.1) con control

$$u = \begin{cases} \frac{C_1 s - dsF}{dsG} & \text{si } 0 \leq s \leq \epsilon \\ \frac{C_2 s - dsF}{dsG} & \text{si } -\epsilon \leq s \leq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

por lo que de ecuación (3.15) tenemos que

$$dF_1 = \frac{\partial F_m}{\partial x} + \frac{\partial F_m}{\partial y} + \left[\frac{\partial G_m}{\partial x} + \frac{\partial G_m}{\partial y} \right] u(x, y) + G_m \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \left[\frac{\partial F_m(x, 0)}{\partial x} + \frac{\partial G_m(x, 0)}{\partial x} u_{eq}(x, 0) + G_m(x, 0) \frac{\partial u_{eq}}{\partial x}(x, 0) \right] \quad (3.17)$$

Como la función s es de clase C^1 , y donde (por hipótesis) $ds \cdot G \neq 0$ para $(x, y) \in O_\epsilon$. Además F y G son funciones de clase C^1 para $(x, y) \in (X \cap O_\epsilon)$, de donde se tiene que el control u dado por (3.13) es continuo y diferenciable para $-\epsilon < s < \epsilon$.

Para efectos de diferenciación, en lugar del control (3.16) podemos considerar

$$u = \frac{Cs - dsF}{dsG},$$

con C número real.

Sabemos que $u_{eq} = \frac{dsF}{dsG}$. Derivando

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{[C \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial(dsF)}{\partial x}] dsG - [cs - dsF] \frac{\partial(dsG)}{\partial x}}{\left[\frac{\partial(dsG)}{\partial x}\right]^2}$$

$$\frac{\partial u_{eq}}{\partial x} = \frac{[-\frac{\partial(dsF)}{\partial x}] dsG + (dsF) \frac{\partial(dsG)}{\partial x}}{\left[\frac{\partial(dsG)}{\partial x}\right]^2}$$

Por las observaciones hechas antes, para tener continuidad de $\frac{\partial u(x)}{\partial x}$ basta probar que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial u_{eq}}{\partial x}$. Esta última igualdad se tiene

porque $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial s}{\partial x} = 0$. Por lo tanto, dF_1 es continuo para $(x,y) \in \epsilon$.

Ahora, reagrupando los términos de (3.17).

$$\begin{aligned} dF_1 = & \left[\frac{\partial F_m(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_m(x,0)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial G_m(x,y)}{\partial x} u(x,y) - \frac{\partial G_m(x,0)}{\partial x} u_{eq} \right] \\ & + \frac{\partial G_m}{\partial y} u(x,y) + \frac{\partial F_m(x,y)}{\partial y} + \left[G_m(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - G_m(x,0) \frac{\partial u_{eq}}{\partial x} \right] \\ & + G_m(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Por continuidad, todos los términos tienden a cero si s tiende a cero. En base a la desigualdad

$$\begin{aligned} \|dF_1\| \leq & \left\| \frac{\partial F_m}{\partial x} - \frac{\partial F_m(x,0)}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial G_m}{\partial x} u - \frac{\partial G_m(x,0)}{\partial x} u_{eq} \right\| + \left\| \frac{\partial G_m}{\partial y} u \right\| \\ & + \left\| \frac{\partial F_m}{\partial y} \right\| + \left\| G_m \frac{\partial u}{\partial x} - G_m(x,0) \frac{\partial u_{eq}}{\partial x} \right\| + \left\| G_m \frac{\partial u}{\partial y} \right\| \end{aligned}$$

puede verse que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|dF_1\| < \epsilon/2$ si $\|s\| < \delta$. Agregando la continuidad de F_1 , se concluye que $\|F_1\|_1$ es

pequeño si $\|s\|$ es pequeño.

Teorema. (Función implícita global).

Si $s: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y 0 es valor regular, entonces $s^{-1}(0)$ es una superficie regular.

Demostración.

Considerando que $X = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}$, y sin pérdida de generalidad, suponemos que $\frac{\partial s}{\partial x_{m+1}} \neq 0$ y $s(X_0) = 0$, con $X_0 \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Se define $G: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, con $X = (x, y)$; $x \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}$

$$G(X) = G(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = (x, s(x, y))$$

La matriz jacobiana de G es

$$dG(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial s}{\partial x_1}(X) \\ 0 & & & & \vdots \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & & & & \frac{\partial s(X)}{\partial x_{m+1}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $\det(dG(X_0)) = \frac{\partial s(X_0)}{\partial x_{m+1}} \neq 0$. Esto significa que G es un difeomorfismo local (Tma. de la función inversa alrededor de X_0). Esto es, existen abiertos A , B y W de X_0 , Y_0 y 0 respectivamente tal que $A \times B$ es abierto de $X_0 = (x_0, y_0)$ y

$$G: A \times B \rightarrow W, \quad \text{sea} \quad G^{-1} = (x, \varphi(x, y))$$

Consideremos la función $f(x) = \varphi(x, 0)$

$$G \circ G^{-1}(x, 0) = G(x, \varphi(x, 0)) = \left[x, s(x, \varphi(x, 0)) \right] = (x, 0)$$

Es decir,

$$s(x, f(x)) \equiv 0$$

podemos afirmar entonces que existe una vecindad $N(x_0)$ para la cual

$$f: N(x_0) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad s(x, f(x)) = 0$$

entonces, $s^{-1}(0)$ se ve, alrededor del punto $X_0 = (x_0, y_0) \in s^{-1}(0)$, como la gráfica de una función diferenciable (es decir, como una superficie local), por lo tanto, $s^{-1}(0)$ es una superficie regular.

Observación:

El subconjunto $S = s^{-1}(0)$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ es m -variedad, ya que por cada $X_0 \in S$ existe un abierto en $\mathbb{R}^{m+1}$ y un difeomorfismo $G: U \rightarrow W$ tal que $G(U \cap S) = \{(x, y) \in W \mid y = 0\}$.

C A P I T U L O 2

A continuación presentamos dos trabajos que estudian el problema de estabilidad descrito en la introducción. En ellos se proponen controles continuos respecto a la variable de estado. En ambos trabajos se toma como hipótesis que se satisface la condición de encuentro, ver anexo pág.78.

El principal objetivo es presentar controles de retroalimentación que hagan que un sistema bajo perturbación posea trayectorias de estado con comportamiento estable.

Por "elementos de incertidumbre", o "elementos de perturbación", nos referimos a variaciones de los parámetros implicados en el modelo o sistema, lo cual provoca una indefinición (o "variación") del sistema de control. Entenderemos por "sistema de incertidumbre" (o "sistema incierto") a un modelo que considere en su dinámica a elementos de perturbación.

SECCION 1.

Partimos del sistema

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

con control

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

donde el sistema (1.1) y las funciones f , g y s , con los respectivos espacios de definición, son los que satisfacen las condiciones de la sección 1 del capítulo I. En general, debido a la acción del control (1.2), se supone alcanzabilidad global del conjunto $S \subset X$.

Como dijimos antes, el objetivo es obtener condiciones suficientes para estabilizar un sistema con incertidumbre, por medio de la consideración de un modelo como puede ser (1.1) y (1.2). Esto significa buscar criterios de diseño de controles de retroalimentación u tal que el sistema

$$\dot{x}(t) = [f(x) + \Delta f(x)] + [g(x) + \Delta g(x)]u(x) \quad (1.3)$$

sea estable. Aquí, Δf y Δg , son funciones deterministas que representan incertidumbre en los parámetros de f y g respectivamente. Podemos decir también que representan perturbaciones paramétricas.

Este problema de estabilidad no es sencillo de resolver y es tema de creciente interés en la actualidad. Es conocido que, en general, las soluciones a este problema dependen de las características de las perturbaciones.

Recordamos que existe un deslizamiento ideal sobre la variedad de cambio S , sólo cuando la trayectoria de estado $x(t)$ de la planta controlada satisface $s(x(t)) = 0$ para toda $t \geq t_0$, para alguna t_0 . El control u que sostiene este tipo de dinámica fué definido antes y denotado por u_{eq} , por lo que ahora pasamos de la retroalimentación (1.2) a

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } s > 0 \\ u_{eq} & \text{si } s = 0 \\ u^- & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

De hecho, para tener un modo deslizante ideal se requiere rapidez infinita en el cambio de control al intersectar las trayectorias a la variedad de cambio. En las plantas de la actualidad, los medios

responsables de implementar la función control (1.4) tienen imperfecciones, que en particular se manifiestan como retardo, lo cual fuerza a que el cambio ocurra en frecuencia finita. Esto provoca el efecto "castaño" mencionado antes. Como el objetivo es estabilizar un modelo de incertidumbre, se considera el sistema (1.3), con control (1.4).

En teoría, es posible una cantidad infinita de estrategias de control. Una estructura alternativa para el control (1.4) es la retroalimentación escalar

$$u = u_{eq} + u_N \quad (1.5)$$

definido en todo el espacio de estado. La función continua u_{eq} es el control equivalente y u_N la parte discontinua (de cambio) de (1.4). Calculando $\dot{s}$ con control (1.5)

$$\begin{aligned} \dot{s}(x(t)) &= \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial s}{\partial x} \left[f(x) + g(x)(u_{eq} + u_N) \right] \\ &= \frac{\partial s}{\partial x} g(x) u_N \end{aligned}$$

Donde hemos considerado que, por definición de u_{eq} ;

$$\frac{\partial s}{\partial x} f + \frac{\partial s}{\partial x} g u_{eq} = 0$$

Sin perder generalidad, se puede suponer $\frac{\partial s}{\partial x} g(x) = 1$ (redefiniendo la función s). Con lo que tenemos que $\dot{s}(x) = u_N$. Esta igualdad permite una fácil verificación de las condiciones de suficiencia para la existencia y alcanzabilidad de un medio deslizante, es decir, de la condición $s \cdot \dot{s} < 0$ cuando $s(x) \neq 0$. Veremos tres estructuras posibles de control discontinuo para u_N .

En general, entenderemos por ganancia en un control, a una función escalar $\alpha = \alpha(x)$, coeficiente en un posible control del sistema (1.1). En los controles que siguen consideramos que $\dot{s} = u_N$.

1) Control lineal con cambios de ganancia;

$$u_N(x) = \psi x ; \quad \psi = [\psi_1] \in \mathbb{R}^n ; \quad \psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } sx_1 > 0 \\ \beta_1 & \text{si } sx_1 < 0 \end{cases}$$

donde $\alpha_1 < 0$ y $\beta_1 > 0$. Considerando esta definición del vector ψ , tenemos

$$\dot{s}s = s \cdot (\psi_1 x_1 + \dots + \psi_n x_n) < 0$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

2) Control continuo y lineal;

$$u_N(x) = \alpha s(x) \quad \text{y} \quad \alpha < 0$$

De nuevo satisface la condición de existencia de un modo deslizante

$$\dot{s}s < \alpha s^2 < 0$$

3) Control con vector unitario (no-lineal)

$$u_N(x) = \frac{s(x)}{|s(x)|} \rho, \quad \rho < 0$$

donde se tiene

$$s(x)\dot{s}(x) = |s(x)|\rho < 0 \quad \text{si} \quad s(x) \neq 0.$$

En lo que sigue se tendrá presente esta última estructura para el control discontinuo u_N .

La condición de encuentro. Si la incertidumbre considerada, Δf y Δg en el sistema (1.3), cae en la imagen de $g(x)$ para todos los valores de x , diremos que satisface la condición de encuentro. En la sección 1 del capítulo I, teorema (1.3), se probó que, en un modo deslizante, la condición de encuentro es equivalente a la propiedad de invarianza fuerte en un régimen deslizante. Por el momento supondremos que se satisface la condición de encuentro.

En vista de que se satisface la condición de encuentro, es posible juntar la incertidumbre total en una función escalar $e(x)$ que representa la incertidumbre del sistema, ver [2], por lo que consideramos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u + g(x)e(x) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{1.6}$$

El método mínimo-máximo (min-max).

Con el fin de lograr estabilización, veremos primero como lograr atracción uniforme.

Existen dos métodos conocidos, en base a la teoría VSS para diseñar retroalimentación de estado $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cualquier condición inicial x_0 y toda incertidumbre $e(x)$, existe una solución $x: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (1.6), y toda solución es uniformemente acotada.

Estas aproximaciones empiezan con un sistema nominal (sistema sin incertidumbre) no controlado de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde suponemos que $x = 0$ es punto de equilibrio de (1.7). Los dos métodos de aproximación necesitan que este sistema nominal sea asintóticamente estable de manera uniforme, para definiciones ver anexo. pág. 72. En la aproximación del método min-max se supone estabilidad del sistema nominal (1.7) con función de Lyapunov $V(x)$. Donde $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ tiene derivada continua, de forma que existen funciones continuas estrictamente crecientes $\gamma_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, 3$, con las propiedades

$$\begin{aligned}\gamma_i(0) &= 0, & i &= 1, 2, 3. \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_i(t) &= \infty & i &= 1, 2, 3.\end{aligned}$$

de manera que para toda $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \gamma_2(\|x\|)\tag{1.8.a}$$

y

$$\nabla_x^t V(x) f(x) \leq \gamma_3(\|x\|)\tag{1.8.b}$$

donde $\nabla_x^t V(x)$ indica el vector transpuesto del gradiente de la función $V(x)$. El factor $\nabla_x^t V(x) f(x)$ indica el producto interior entre los vectores $\nabla_x^t V(x)$ y $f(x)$.

El objetivo inmediato es usar la función de Lyapunov $V(\cdot)$, y cotas sobre la incertidumbre $e(x)$, para obtener condiciones sobre el control de retroalimentación de estado $u = u(x)$, que garanticen cotas uniformes de la trayectoria de estado del sistema de control (1.6).

Una función de Lyapunov candidata para el sistema de control (1.6),

con $u = u(x)$, es de nuevo $V(x)$. Escogemos un $u(x)$ que hace negativa la derivada (respecto al tiempo) de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema de retroalimentación. Es decir, escogemos $u = u(x)$ tal que

$$\dot{V}(x) = (\nabla_x^t V) \cdot \dot{x} = (\nabla_x^t V)f + (\nabla_x^t V)g(u + e) < 0 \quad (1.9)$$

considerando la desigualdad (1.8.b), tenemos (1.9) si el control $u = u(x)$ lo escogemos tal que

$$\min_u \max_e (\nabla_x^t V)g(u + e) \leq 0 \quad (1.10)$$

Para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y para todos los controles e incertidumbres admisibles. Suponiendo que $g^t \nabla_x V(x)$ es diferente de cero, el control

$$u = u(x) = - \frac{g^t(x) \nabla_x V(x)}{|g^t(x) \nabla_x V(x)|} \rho(x) \quad (1.11)$$

donde $\rho(x)$ es función escalar que satisface $\rho(x) \geq |e(x)|$. Puede mostrarse, por sustitución directa, que el control (1.11) satisface (1.10). Si $g^t \nabla_x V(x)$ es cero, se toma

$$u \in \{u; u \in \mathbb{R} \text{ y } |u| \leq \rho(x)\} \quad (1.12)$$

Los controles que satisfacen la desigualdad (1.10) son llamados controles min-max.

Sobre el sistema (1.6) consideramos las siguientes hipótesis:

i) Las funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones conocidas, mientras que $e: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida. Todas estas funciones se consideran continuas en x ;

ii) La norma del elemento incertidumbre es acotado por una función para toda $x \in \mathbb{R}^n$;

$$|e(x)| \leq \rho(x) \quad (1.13)$$

donde la función conocida $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ es continua en x ;

iii) Dado un conjunto compacto $E \subset \mathbb{R}^n$ existen constantes m_i , para $i = 1, 2$, tales que para toda $x \in E$

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &\leq m_1 \\ \|f(x)\| \rho(x) &\leq m_2; \end{aligned}$$

iv) El origen $x = 0$ es asintóticamente estable de manera uniforme para el sistema nominal $\dot{x} = f(x)$. En particular, existe una función de Lyapunov $V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de clase C^1 , y funciones continuas estrictamente crecientes $\gamma_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, 3$, que satisfacen

$$\gamma_i(0) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_i(r) = \infty, \text{ para } i = 1, 2 \quad (1.15)$$

y tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (1.16)$$

y

$$\nabla_x^t V(x) \cdot f(x) \leq -\gamma_3(\|x\|) \quad (1.17)$$

Bajo las hipótesis i)-iv), se busca un control de retroalimentación para el sistema (1.6) que garantice que toda solución del sistema es finalmente acotada, de manera uniforme, en un conjunto que contiene al estado cero. Este conjunto de acotación uniforme, como la cota superior del intervalo de tiempo para alcanzarlo, son también requeridos.

Un control de retroalimentación.

Motivado por el control min-max, se propone la siguiente clase de controles de retroalimentación. Un miembro de esta clase $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es una función continua en x tal que, dado $\epsilon > 0$

$$p(x) = -\frac{\mu(x)}{|\mu(x)|} \rho(x) \quad \text{si} \quad |\mu(x)| > \epsilon \quad (1.18)$$

y

$$|p(x)| \leq \rho(x) \quad \text{si} \quad |\mu(x)| \leq \epsilon \quad (1.19)$$

donde $\mu(x) = g^t(x) \nabla_x V(x) \rho(x)$.

Un ejemplo particular de tales controles es

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{\mu(x)}{|\mu(x)|} \rho(x) & \text{si} \quad |\mu(x)| > \epsilon \\ -\frac{\mu(x)}{\epsilon} \rho(x) & \text{si} \quad |\mu(x)| \leq \epsilon \end{cases} \quad (1.20)$$

Se mostrará que un control de tipo (1.18) garantiza la acotación final de todas las respuestas posibles del sistema en una vecindad arbitrariamente pequeña del estado 0. De tal manera que un control continuo de tipo (1.18) asegura una dinámica (conjunto de

soluciones) que es arbitrariamente cercana a la garantizada por el control discontinuo min-max (1.11). Consideremos el sistema (1.6) con control (1.18), sujeto a las suposiciones i)-iv). La derivada de la función de Lyapunov es

$$\dot{V} = \nabla_x^t V(x)[f(x) + g(x)p(x) + g(x)e(x)] \quad (1.21)$$

como consecuencia de (1.13), (1.17) y (1.19), se tiene

$$\dot{V} \leq -\gamma_3(\|x\|) + \nabla_x^t V(x)g(x)p(x) + |\mu(x)|$$

Considerando (1.19), si $|\mu(x)| > \epsilon$

$$\dot{V} \leq \gamma_3(\|x\|)$$

y si $|\mu(x)| \leq \epsilon$

$$\dot{V} \leq -\gamma_3(\|x\|) + 2\epsilon \quad (1.22)$$

Como las funciones γ_1 y γ_2 son funciones continuas, estrictamente crecientes y satisfacen (1.15), se tienen definidas las funciones inversas $\gamma_i^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, para $i = 1, 2$, son continuas y estrictamente crecientes. Esto también es cierto para γ_3^{-1} si $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_3(r) = \infty$. En caso de que $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_3(r) < \infty$, existe el límite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_3(r) = l < \infty \quad (1.23)$$

tal que $\gamma_3^{-1}: [0, l) \rightarrow \mathbb{R}^+$ esta definida, es continua y estrictamente creciente. En base a esta observación, agregaremos la siguiente hipótesis

v) Si γ_3 esta acotada, que equivale a tener (1.23), entonces

$$2\epsilon < 1 \quad (1.24)$$

Teorema.

Si consideramos el sistema (1.6) con control de retroalimentación (1.18), y se satisfacen las condiciones i)-iv), entonces tenemos lo siguiente respecto a este sistema:

A. Existencia

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una solución

$x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $x(t_0) = x_0$.

B. Acotación uniforme

Si $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $x(t_0) = x_0$, es solución de (1.6), entonces

$$\|x(t)\| \leq d(r) \text{ para todo } t \in [t_0, t_1] \text{ y } \|x_0\| < r$$

donde

$$d(r) = \begin{cases} (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(R) & \text{si } r \leq R \\ (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(r) & \text{si } r > R \end{cases} \quad (1.25)$$

y

$$R = \gamma_3^{-1}(2\epsilon) \quad (1.26)$$

Por lo tanto, la solución tiene una continuación sobre $[t_0, \infty)$.

C. Acotación finalmente uniforme.

Si $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $x(t_0) = x_0$, es solución de (6) con $\|x_0\| < r$, entonces, dado $\bar{d} > (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(R)$ tenemos que $\|x(t)\| \leq \bar{d}$ para todo $t > t_0 + T(\bar{d}, r)$, donde

$$t(\bar{d}, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq \bar{R} \\ \frac{\gamma_2(r) - \gamma_2(\bar{R})}{\gamma_3(\bar{R}) - 2\epsilon} & \text{si } r > \bar{R} \end{cases} \quad (1.27)$$

y

$$\bar{R} = (\gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1)(\bar{d}) \quad (1.28)$$

Demostración.

A. Existencia.

Consideremos la función $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$h(x) = f(x) + g(x)p(x) + g(x)e(x)$$

como consecuencia de las condiciones i)-iii) se tiene que h es una función continua, para la cual existe un número real m tal que, para todo $x \in E$

$$\|h(x)\| \leq m$$

para toda $t_0 \in (a, b)$ y $x_0 \in \text{Int}E$, existe una solución (por el teorema de Cauchy-Peano; ver [13] pág.35) $x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$; con $x(t_0) = x_0$.

B. Acotación uniforme.

Sea $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0$, una solución con $\|x_0\| \leq r$.

Sea $\hat{r} := \max\{r, R\}$ tal que $\|x_0\| < \hat{r}$ y $R \leq \hat{r}$. Por la igualdad (1.25)

$$d(r) = (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(\hat{r})$$

y considerando (1.16),

$$\gamma_1(\hat{r}) \leq \gamma_2(\hat{r})$$

tal que

$$\hat{r} \leq (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(\hat{r}) = d(r)$$

y de aquí

$$\|x(t_0)\| = \|x_0\| \leq \hat{r} \leq d(r)$$

Ahora supóngase que existe $t_3 > t_0$ tal que

$$\|x(t_3)\| > d(r) \quad (1.29)$$

ya que x es solución continua y

$$\|x(t_0)\| \leq \hat{r} \leq d(r) < \|x(t_3)\|$$

existe $t_2 \in [t_0, t_3)$ tal que

$$\|x(t_2)\| = \hat{r}$$

y

$$\|x(t)\| \geq \hat{r} \text{ para toda } t \in [t_2, t_3].$$

Ahora, en vista de (1.16), (1.21), (1.22) y (1.6)

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|x_3(t_3)\|) &\leq V(x(t_3)) \\ &= V(x(t_2)) + \int_{t_2}^{t_3} \dot{V}(x(\tau)) d\tau \\ &\leq \gamma_2(\|x(t_2)\|) + \int_{t_2}^{t_3} [-\gamma_3(x(\tau)) + 2\varepsilon] d\tau \\ &\leq \gamma_2(\hat{r}) + \int_{t_2}^{t_3} [-\gamma_3(R) + 2\varepsilon] d\tau \\ &= \gamma_2(\hat{r}) \end{aligned}$$

De aquí; $\|x(t_3)\| \leq (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(\hat{r}) = d(r)$.

Sin embargo, esto contradice la suposición (1.29); de aquí que

$\|x(t)\| \leq d(r)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Consecuentemente, existe un compacto E

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq \bar{d}, \quad \bar{d} > d(r)\}$$

de donde las soluciones (con $\|x_0\| \leq r$) no escapan. De aquí que toda solución semejante puede ser extendida sobre cualquier compacto, y en consecuencia sobre $[t_0, \infty)$.

C. Acotación finalmente uniforme.

Si $x: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0$ con $\|x_0\| < r$, es solución de (1.6). consideremos una $\bar{d} > (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(R)$. Por definición, $\bar{R} = (\gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1)(\bar{d})$ tal que $\bar{R} > R$ y

$$d(\bar{R}) = (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(\bar{R}) = \bar{d}.$$

Si $r \leq \bar{R}$, entonces $\|x_0\| \leq \bar{R}$; de aquí en vista del resultado B de acotación uniforme;

$$\|x(t)\| \leq d(\bar{R}) = \bar{d} \quad \text{para todo} \quad t \in [t_0, \infty)$$

tal que $T(\bar{d}, r) = 0$.

En lo que sigue se considera $r > \bar{R}$. Supóngase que

$$\|x(t)\| > \bar{R} \quad \text{para toda} \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$\text{donde } t_1 = t_0 + T(\bar{d}, r), \quad T(\bar{d}, r) := \frac{\gamma_2(r) - \gamma_1(\bar{R})}{\gamma_3(\bar{R}) - 2\varepsilon}.$$

Entonces, considerando (1.16), (1.21), (1.22) y (1.6),

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|x(t_1)\|) &\leq V(x(t_1)) \\ &= V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(\tau)) d\tau \\ &\leq \gamma_2(\|x(t_0)\|) + \int_{t_0}^{t_1} [-\gamma_3(\|x(\tau)\|) + 2\varepsilon] d\tau \\ &\leq \gamma_2(r) + T(\bar{d}, r) [-\gamma_3(\bar{R}) + 2\varepsilon] \\ &= \gamma_2(r) + \frac{\gamma_2(r) - \gamma_1(\bar{R})}{\gamma_3(\bar{R}) - 2\varepsilon} [-\gamma_3(\bar{R}) + 2\varepsilon] \\ &= \gamma_1(\bar{R}) \end{aligned}$$

Se concluye que $\|x(t_1)\| \leq \bar{R}$. Lo que contradice la suposición (30).

Debemos tener $t_2 \in [t_0, t_1]$ tal que $\|x(t_2)\| \leq \bar{R}$. Entonces, como consecuencia del resultado B de acotación uniforme,

$$\|x(t)\| \leq d(\bar{R}) = \bar{d} \quad \text{para todo} \quad t \geq t_2$$

de aquí, $\|x(t)\| \leq \bar{d}$ para todo $t \geq t_0 + T(\bar{d}, r)$. Se tiene el teorema. A este resultado le sigue el corolario inmediato, el cual concluye que un control de tipo (1.18), asegura un sistema de respuesta que puede ser hecho arbitrariamente cercano al control discontinuo min-max.

Definición:

La bola $\{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq \delta\}$ es uniformemente estable si para cualquier $\eta > \delta$ existe $r(\eta) > 0$ tal que

$$\|x(t)\| \leq \eta \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0 \quad \text{con} \quad \|x_0\| < r(\eta).$$

Corolario:

Dado $\varepsilon > 0$, un control de tipo (1.18) asegura que la bola de radio $(\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(R)$ centrada en $x = 0$ es uniformemente estable.

Demostración:

Sea $\eta > (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(R)$ donde se considera $(\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(r) = n$. Entonces

$$r(\eta) = (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(\eta) > R > 0.$$

De aquí, por los resultados del teorema sobre acotación uniforme y continuación, tenemos que

$$\|x(t)\| \leq \eta \quad \text{para toda} \quad t \geq t_0 \quad \text{con} \quad \|x_0\| \leq r(\eta).$$

Ahora es fácil ver, considerando $(\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(R) = \delta > 0$, que dado cualquier $\bar{d} > 0$ y cualquier $\eta > 0$ tal que $\eta > (\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2)(R)$, existe un $\varepsilon > 0$. En otras palabras, un control de tipo (1.18) con ε suficientemente pequeño, garantiza acotación finalmente uniforme, tanto como estabilidad uniforme, de una bola arbitrariamente pequeña centrada en $x = 0$.

SECCION 2

En esta sección describimos resultados de una versión lineal del problema de estabilización en presencia de incertidumbre. Esto se lleva a cabo con ayuda de la teoría de inclusiones diferenciales. El sistema de control, que representa un modelo de algún "proceso real", que citaremos aquí es

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

con A matriz $n \times n$ y B vector n -dimensional.

Por consideración a la "acción" de la incertidumbre (mencionada en la sección 1 de este capítulo), en lugar de (2.1), trabajamos con el sistema

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x(t), u(t)); \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

el conjunto de aplicaciones $\mathcal{F}$ es conocido y tiene la estructura

$$\mathcal{F}(x, u) = Ax + B[u + G(x) + \beta G_c(u)] \quad (2.3)$$

con $G(x)$ función de retroalimentación, la aplicación continua de valores reales G_c actúa de la forma

$$G_c: u \mapsto |u| \bar{B}_1 \quad (2.4)$$

donde $\bar{B}_1 = \{y \in \mathbb{R}^k: \|y\| \leq 1\}$. La aplicación $(x, u) \mapsto G(x) + G_c(u)$ se interpreta como modelación de incertidumbre en el sistema,

donde se supone que se satisface la condición de encuentro.

El objetivo es determinar una estrategia de retroalimentación $x \mapsto \phi(x)$ tal que las trayectorias de (2.2), con $u(t) \in \phi(x)$, mantengan una conducta estable.

Como retroalimentaciones admisibles, tomamos la clase de aplicaciones semicontinuas superiormente $x \mapsto \phi(x) \subset \bar{B}_1$ (para definición ver el final de esta sección), que toma valores en un conjunto no vacío, convexo y compacto, que son referidos como retroalimentaciones generalizadas.

Para ver el problema de solución de inclusiones diferenciales consideramos

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\in F(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde por solución se entiende a una función $t \mapsto x(t)$, definida en algún intervalo $[t_0, t_0 + \omega)$, la cual es absolutamente continua en subintervalos compactos y satisface (2.5) casi-dondequiera. Al conjunto de aplicaciones $x \mapsto \mathcal{F}(x) \subset \mathbb{R}^n$ lo suponemos semicontinuo superiormente en $D := \mathbb{R}^n$; con valores en un conjunto no vacío, convexo y compacto. Ver [9], pág. 98, Teorema 3.

Estabilización por retroalimentación generalizada.

El objetivo es como sigue. Determinar una retroalimentación generalizada Φ , con la cual se obtenga que el estado $x = 0$ sea asintóticamente estable, de manera uniforme y global, de la inclusión diferencial de retroalimentación controlada

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}((x(t)))\tag{2.6.a}$$

$$\mathcal{F}(x(t)) = Ax + B[\Phi(x) + G(x) + \beta(G_c \cdot \Phi)(x)]\tag{2.6.b}$$

Para resolver este problema seguimos la teoría VSS. Consideremos que la variedad $(n-1)$ -dimensional $S \subset \mathbb{R}^n$ está dada por un conjunto de valores propios $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$, de la forma $S = \text{Imag } D$, donde D es la matriz diagonal $D = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]$. Este conjunto Λ define el sistema lineal $\dot{x} = Dx$. Consideramos también que

$\Lambda \subset \mathbb{C}^-$. La retroalimentación Φ se diseña para asegurar que

i) S es un hiperplano invariante bajo (2.6), y el sistema restringido a S coincide con el sistema lineal dado por el espectro Λ .

ii) S es globalmente alcanzable, en tiempo finito, por toda solución de (2.6).

Sea L_1 una matriz $(n-1) \times n$ tal que $\ker L_1 = \text{Im } B$. Se define el vector $L_2 := (B^t B)^{-1} B^t$ y $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ con inversa $L^{-1} = R = [R_1; B]$, entonces

$$LAR = \begin{bmatrix} L_1 AR_1 & L_1 AB \\ L_2 AR_1 & L_2 AB \end{bmatrix}; \quad LB = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Sea $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\} \subset \mathbb{C}^-$ cualquier espectro, por ser la pareja (A, B) controlable (esto por hipótesis i)-ii)), concluimos que la pareja $(L_1 AR_1, L_1 AB)$ es controlable. De aquí que existe el vector $Q \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que

$$(L_1 AR_1 + L_1 ABQ) = (L_1 A Q^*) = \Lambda,$$

donde $Q^* := R_1 + BQ$. Definimos el subespacio $(n-1)$ -dimensional ScR^n como

$$S := \ker \bar{Q}, \quad \text{donde} \quad \bar{Q} := L_2 - QL_1$$

Lema 1.

Sea $c \in \mathbb{C}^-$, definimos $K := c\bar{Q} - \bar{Q}A \in \mathbb{R}^n$. Entonces

- i) $\sigma(A + BK) \subset \mathbb{C}^-$
- ii) El conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio $(A + BK)$ -invariante.

Demostración:

Sea $T = \begin{bmatrix} L_1 \\ \bar{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 - QL_1 \end{bmatrix}$ con inversa $T^{-1} = [R_1 + BQ; B]$, entonces

$$T(A+BK)T^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 A Q^* & L_1 AB \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \text{de donde } \sigma(A+BK) = \sigma(T(A+BK)T^{-1}) =$$

$\sigma(L_1 A Q^*) \cup \{c\} = \Lambda \cup \{c\} \subset \mathbb{C}^-$, lo cual prueba i).

Ahora, observamos que $\bar{Q}BK = K = C\bar{Q} - \bar{Q}A$, por lo que podemos concluir que $\bar{Q}(A+BK)x = 0$ para toda $x \in S = \ker \bar{Q}$, lo que prueba

(ii). ■

El lema anterior nos dice que en ausencia de incertidumbre, $G=\{0\}$ y $\beta=0$, la retroalimentación lineal $u(t) = kx(t)$ estabiliza asintóticamente el sistema (2.2), y se obtiene que el subespacio S es invariante. Las trayectorias del sistema controlado en S , son aquellas trayectorias x expresables como $x = Q^* \omega$, donde ω es solución del sistema lineal $\dot{\omega} = (L_1 A Q^*) \omega$, con espectro dado por $\sigma(L_1 A Q^*) = \Lambda$.

En lo que sigue, se generaliza el operador de retroalimentación lineal a una aplicación conjunto-valuada para obtener una retroalimentación generalizada Φ , la cual preserva la propiedad de estabilidad asintótica de 0 en presencia de incertidumbre.

Recordemos que $\sigma(L_1 A Q^*) = \Lambda \subset \mathbb{C}^-$ y $c \in \mathbb{C}^-$, y sea la matriz P_1 la única solución simétrica, definida-positiva de la ecuación

$$P_1(L_1 A Q^*) + (L_1 A Q^*)^t P_1 + I = 0$$

y

(2.7)

$$P_2 = -\frac{1}{2c}$$

Definimos las aplicaciones conjunto-valuadas:

$$x \mapsto P_1(x) := \{v \in \mathbb{R}^{n-1} : \langle v, P_1 L_1 x \rangle \geq 0\}$$

$$x \mapsto P_2(x) := \{u \in \mathbb{R} : P_2 \cdot u \bar{Q}x \geq 0\}$$

(2.8)

$$x \mapsto \mathcal{U}(x) := \begin{cases} |u|^{-1} u & ; u \neq 0 \\ \bar{B}_1 & ; u = 0 \end{cases}$$

Entonces, proponemos la retroalimentación generalizada

$$x \mapsto \Phi(x) := Kx - \rho(x) \mathcal{U}(P_2 \bar{Q}x) \quad (2.9.a)$$

donde K se define como en el lema 1 y ρ es cualquier función continua

$D \mapsto [0, \infty)$ que satisface

$$\rho(x) \geq (1-\beta)^{-1}[\beta\|\mathcal{F}(x)\| + \xi(G(x) \cap P_2(x)) + \gamma] \quad (2.9.b)$$

donde $\gamma > 0$ es un parámetro de diseño. Claramente, ϕ toma valores en un conjunto compacto y convexo; además por la continuidad de ρ y la semi-continuidad superior de $\mathcal{U}$, se asegura que ϕ es semi-continua superiormente. De esta forma se tiene que ϕ es retroalimentación generalizada. Observamos que ϕ es de valores simples excepto en el conjunto $\Gamma_\phi = S$.

Veamos la estabilidad. Ya que G_c y ϕ son superiormente semi-continuas, con valores en compactos, puede probarse que $x \mapsto (G_c \cdot \phi)(x)$ es también superiormente semi-continua con valores en compactos; de aquí que $\mathcal{F}$ es suma de aplicaciones semi-continuas con valores en compactos, por lo que $\mathcal{F}$ mismo es semicontinua con valores en compactos. Como $(G_c \cdot \phi)(x) = \xi(\phi(x))\bar{B}_1$, y de aquí que es convexo, se sigue que $\mathcal{F}(x)$ es convexa. Para cada x_0 la solución maximal $x: [t_0, t_0 + \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (2.6), con $x(t_0) = x_0$, existe por (ver [9], pag. 98, teorema 3) y proposición 1. Ver anexo 1.

Ahora consideremos la función $V: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, dada por

$$V(x) := \frac{1}{2} \langle x, \omega_\xi x \rangle$$

donde $\omega_\xi := L_1^t P_1 L_1 + \xi \bar{Q}^t P_2 \bar{Q}$ y ξ es un número real positivo. De aquí deducimos que, para todo $z \in D$;

$$\langle \nabla V(z), v \rangle \leq -\frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \|L_1 z\| \\ \|\bar{Q} z\| \end{bmatrix}, E_\xi \begin{bmatrix} \|L_1 z\| \\ \|\bar{Q} z\| \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{para todo } v \in \mathcal{F}(z),$$

donde

$$E_\xi := \begin{bmatrix} 1 & -\|P_1 L_1 A B\| \\ -\|P_1 L_1 A B\| & \xi \end{bmatrix}$$

de este modo, escogemos $\xi > \|P_1 L_1 A B\|^2$, y se sigue que, para cada

$x^0 \in D$, toda solución maximal $x: [t_0, t_0 + \omega) \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $x(t_0) = x_0$, es acotada y $\omega = \infty$, ver proposición 2 del anexo.

Por consiguiente, de argumentos similares a los expuestos, podemos concluir que el sistema (2.6) posee las siguientes propiedades.

- i) acotación uniforme de soluciones.
- ii) estabilidad uniforme de 0.
- iii) atracción globalmente uniforme de 0.

Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema

El estado $x = 0$ es asintóticamente estable, de manera uniforme y global, del sistema de inclusión diferencial (2.6) con retroalimentación (2.9).

Para terminar incluimos la siguiente definición.

Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación conjunto-valuada con valores no vacíos. Aquí consideramos que X, Y son espacios euclidianos.

Diremos que F es semicontinua superiormente en $x^0 \in X$ si para cualquier abierto N que contiene a $F(x^0)$ existe una vecindad M de x^0 de manera que $F(M) \subset N$. Diremos que F es semicontinua superiormente si esta lo es para todo $x^0 \in X$.

ANEXO

Por convenir a los objetivos que perseguimos, nos restringimos a trabajar en variedades compactas, C^1 -suaves y de dimensión finita. Para esto consideraremos a las variedades como conjuntos en espacios euclidianos.

Sea X un subconjunto abierto de un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Una función real $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de clase C^k (k entero positivo) si existen, y son continuos en X , todas las derivadas parciales de f , hasta de orden k inclusive. En tal caso escribimos $f \in C^k$. Diremos que f es de clase C^0 ($f \in C^0$) si f es continua en X . f es de clase C^∞ ($f \in C^\infty$) si existen y son continuas las derivadas parciales de todos los ordenes. En este último caso diremos también que f es suave. Dados dos abiertos $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$, una aplicación

$$F : X \rightarrow Y$$

consiste de m funciones reales

$$f^1, \dots, f^m : X \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F(p) = (f^1(p), \dots, f^m(p)) \text{ para todo } p \in X.$$

Diremos que F es una aplicación de clase C^k cuando cada $f^i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) es una función de clase C^k . En tal caso se escribe $F \in C^k$. En general, diremos que la aplicación F es diferenciable si $F \in C^k$ para un entero positivo k .

Definición de difeomorfismo.

Sean X, Y abiertos de espacios euclidianos. A una aplicación $F : X \rightarrow Y$ le llamaremos un homeomorfismo si F y su inversa son de clase C^0 . Si la aplicación F es diferenciable, es uno a uno,

sobreyectiva, y si la aplicación inversa es también diferenciable, entonces F se llama un difeomorfismo.

Definición de k -variedad.

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces S es variedad k -dimensional ($n \geq k$) si este conjunto es localmente (para abiertos sobre S) difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^k$.

Definición de parametrización.

Sea U vecindad de $x \in S$ y V abierto de $\mathbb{R}^k$, entonces un homeomorfismo $\phi: V \rightarrow U$ es llamado una parametrización de la vecindad U . El homeomorfismo inverso $\phi^{-1}: U \rightarrow V$ es llamado un sistema de coordenadas sobre U . A la pareja (V, ϕ) le llamaremos una carta de coordenadas. Las coordenadas de $p \in V$, relativas a ϕ , son las coordenadas del punto $\phi(p)$ de $\mathbb{R}^k$.

Definición de atlas.

A la colección $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de cartas de coordenadas tal que $\bigcup_{i \in I} U_i = S$ se le llama un atlas.

Un atlas de clase C^k sobre S es un atlas para el cual todos los cambios de coordenadas son C^k . Es decir, si (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son cartas locales con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces la aplicación $\phi_\alpha \cdot \phi_\beta^{-1}$ de $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sobre $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo de clase C^k .

Definición de variedad diferenciable de clase C^k .

A dos atlas de clase C^k sobre S , $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ y $(w_j, \varphi_j)_{j \in J}$, les llamaremos equivalentes si su unión es un atlas de clase C^k . Una **variedad diferenciable** de clase C^k es una variedad con una clase de equivalencia de atlas C^k . Pensando a X y Y como variedades, definimos el rango de F en p como el rango de $\varphi \circ F \circ \phi^{-1}$ en $\phi(p)$.

Aquí, (U, ϕ) es una carta de coordenadas de X y (V, φ) una carta de coordenadas de Y , con $F(p) \in V$. Suponiendo que dimensión de X es menor que la dimensión de Y , se tiene que una aplicación diferenciable $F : X \rightarrow Y$ es una **inmersión** si el rango de F tiene dimensión igual a la de X para todo punto p de X . Es un **encaje** si F es una inmersión inyectiva tal que F es un homeomorfismo de X en $F(X)$ con la topología inducida de Y .

Definición de derivada direccional.

Sea ϕ aplicación de clase C^k ($k \geq 1$) de un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$; $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $x \in U$, entonces para cualquier vector $h \in \mathbb{R}^n$, la derivada de ϕ en la dirección h en x es

$$d\phi_x(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x + th) - \phi(x)}{t}$$

para cada x .

Definición de espacio tangente.

Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una variedad y $\phi: U \rightarrow S$ una parametrización local alrededor de x , con U abierto de $\mathbb{R}^n$. Se define el **espacio tangente** de S en x como la imagen de la aplicación $d\phi_x: T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$, este subespacio vectorial lo denotamos por $T_{\phi(x)} S$. Definimos la aplicación lineal $d\phi_x: T_x U \rightarrow T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$ que asigna a cada vector $h \in T_x U$ la derivada direccional $d\phi_x(h) \in T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$.

Definición de haz tangente.

Definimos el **haz tangente** TU de U como la unión de todos los espacios vectoriales $T_p U$, con p variando en U . $T_p S$ es llamado también la **fibra** del haz en p . Una aplicación de $\phi: U \rightarrow V$ de clase C^k induce una aplicación tangente $d\phi: TU \rightarrow TV$, donde TU y TV son los haces tangentes respectivos de U y V , $d\phi$ representa la derivada de ϕ en todo U .

Para considerar un producto interior, identificamos a $T_x X$ con su dual $(T_x X)'$ de la siguiente forma; sea $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base

para el espacio vectorial $T_x X$, entonces tomamos como base a $x' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ del espacio dual $(T_x X)'$, donde se satisface que $x'_i \cdot y_j = \delta_{ij}$. Si $y, z \in T_x X$.

$$\text{Con } y = \sum_{i=1}^n a_i x'_i \quad y \quad z = \sum_{i=1}^n b_i x'_i$$

Definimos el producto interno de y y z como $\langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$; donde

y es vector y z es llamado covector. Considerando que $T_x S \subset T_x X$, se define el "aniquilador" de $T_x S$ como

$$(T_x S)^\perp := \{y \in T_x X; \langle y, z \rangle = 0 \text{ para cada } z \in T_x S\}$$

identificamos por $ds(y)$ al gradiente $\frac{\partial s(y)}{\partial x}$. Este operador lineal es la matriz Jacobiana de $S(x)$ en y . Aquí, se considera que $T_x X = T_x S \oplus (T_x S)^\perp$, donde la adición $\oplus$ representa la suma directa interna de los subespacios independientes $T_x S$ y $(T_x S)^\perp$.

Definición de transversalidad

Sean S y N variedades diferenciables, sea $F: N \rightarrow S \times \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 -suave. Sea $x \in N$, diremos que F es transversal a S en x si sucede que:

- i) $F(x) \notin S$; o bien
- ii) Si $F(x) \in S$, entonces

$$dF(T_x N) + T_{F(x)} S = T_{F(x)} (S \times \mathbb{R})$$

donde dF denota la derivada de la función F

Definición de distribución.

Una distribución Δ sobre una variedad S es una aplicación que asigna a cada punto p de S un sub-espacio $\Delta(p)$ del espacio tangente $T_p S$. Además, supondremos que para cada punto $p \in S$

existe una vecindad U de p y un conjunto de campos vectoriales diferenciables definidos en U , denotado por $\{\tau_i: i \in I\}$, con la propiedad de que

$$\Delta(q) = \text{gen}\{\tau_i(q): i \in I\}$$

para todo $q \in U$.

Si V y W son campos vectoriales sobre la variedad S , entonces el "corchete" de Lie $[V, W]$ es el único campo vectorial que satisface $[V, W](h) = V(W(h)) - W(V(h))$ para toda función suave $h: M \rightarrow \mathbb{R}$. Es fácil verificar que $[V, W]$ es un campo vectorial. En coordenadas locales $(x^1, x^2, \dots, x^m)$, si

$$V = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad W = \sum_{i=1}^m \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

entonces

$$\begin{aligned} [V, W] &= \sum_{i=1}^m \{V(\eta^i) - W(\xi^i)\} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left\{ \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

donde observamos que $[V, W]$ es un campo vectorial.

Este nuevo campo vectorial es llamado el producto de Lie (o "corchete" de Lie) de $f(x)$ y $g(x)$. El producto de Lie también es elemento de $V(S)$.

Referente al corchete de Lie tenemos las definiciones;

1) Una distribución Δ es no-singular en una variedad N si existe un entero d tal que $\dim \Delta(p) = d$ para toda $p \in N$;

2) Una distribución Δ es involutiva si el corchete de

$\text{Lie}[\tau_1, \tau_2]$ de cualquier par de campos vectoriales τ_1 y τ_2 , pertenecientes a Δ , es un campo vectorial que pertenece a Δ . Es decir si

$$\tau_1, \tau_2 \in \Delta \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta$$

3) Una distribución no-singular d-dimensional Δ sobre N es completamente integrable si para cada $p \in N$ existe una carta de coordenadas (V, ξ) , con funciones coordenadas $\xi_1, \dots, \xi_n$ tal que

$$\Delta(q) = \text{gen} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \right]_q, \dots, \left[\frac{\partial}{\partial \xi_d} \right]_q \right\}$$

para todo $q \in V$.

Teorema de Frobenius.

Una distribución no-singular es completamente integrable si y sólo si ésta es involutiva.

La condición de encuentro

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = f + \Delta f + (g + \Delta g)u \quad (*)$$

si sucede que $\Delta f(x), \Delta g(x) \in \text{gen}(g(x))$ para cada x , diremos que se satisface la condición de encuentro en el sistema (*). Si tenemos la condición de encuentro, deducimos que

$$\Delta f(x) + \Delta g(x)u(x) \in \text{gen}(g(x)) \quad \text{para cada } x$$

de aquí tenemos que existe una función escalar $e(x)$, tal que

$$\Delta f(x) + \Delta g(x)u(x) = g(x)e(x)$$

Por lo tanto, si consideramos la condición de encuentro, podemos escribir el sistema (*) como el sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x) + g(x)e(x).$$

Definición de operador proyección

Sean M y N dos variedades lineales complementarias del espacio vectorial X ; se tiene que

$$X = M \oplus N$$

Esto es, cada $u \in X$ puede ser expresado de manera única de la forma $u = u' + u''$ con $u' \in M$ y $u'' \in N$, u' es llamada la proyección de u sobre M a lo largo de N . podemos definir el operador $u' = pu$ ($p: X \rightarrow M$), entonces $1-p$ es el operador proyección sobre N a lo largo de M . El operador proyección p es lineal.

Dependencia continua de una solución respecto a un parámetro

Dada la ecuación

$$\dot{x} = f(t, x, p) \quad (1)$$

y la condición inicial

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

con la correspondiente solución general

$$x(t) = F(t, t_0, x_0, p) \quad (3)$$

enunciamos el siguiente teorema

Teorema. Si en el dominio acotado D es $f(t, x, p)$ continua en (t, x, p) y lipschitziana en x , entonces la solución general (3) es una función continua de (t, t_0, x_0, p) . ver [13], pág. 54.

Comentario. En este teorema, el parámetro p puede ser un vector (m -dim.) siendo x vector n -dimensional. Esto equivale a considerar el caso en que haya m parámetros en la ecuación (1).

Definición de aplicación de contracción.

Sea R un espacio métrico. A la aplicación Δ del espacio R en sí mismo le llamaremos contracción, cuando existe un número $\alpha < 1$ tal que para cualesquiera dos puntos $x, y \in R$ se verifica la

desigualdad

$$d(\Delta x, \Delta y) \leq \alpha d(x, y)$$

donde d es la métrica del espacio R .

Teorema (principio de las contracciones)

Toda aplicación contraída, definida en un espacio métrico completo R , tiene un punto fijo, y sólo uno.

Ahora incluimos las diferentes definiciones de estabilidad que se tratan en este trabajo.

1. Estabilidad de Lyapunov. Sea $x^*(t)$ una solución de $\dot{x} = X(x, t)$. Entonces

$x^*(t)$ es Lyapunov estable para $t \geq t_0$ si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tal que

$$\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_0$, donde $x(t)$ es cualquier solución.

2. Estabilidad Uniforme. Si una solución es estable para $t \geq t_0$ y δ de definición 1, y es independiente de t_0 , la solución es uniformemente estable para $t \geq t_0$.

3. Estabilidad Asintótica. Sea x^* una solución estable (o uniformemente estable) para $t \geq t_0$. Si además existe $\eta(t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0,$$

entonces la solución se dice ser asintóticamente estable (o uniforme y asintóticamente estable).

4. Acotación Uniforme. Sea $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución de un

sistema de ecuaciones. x es "uniformemente acotada" si, para cada condición inicial x_0 , existe una constante finita y positiva $d(x_0)$ tal que

$$\|x(t)\| < d(x_0) \text{ para toda } t \in [t_0, \infty).$$

5. Acotación finalmente uniforme. Una solución $x(t)$ de un sistema de ecuaciones es "finalmente acotada de manera uniforme", con respecto a algún conjunto cerrado y acotado $S \subset \mathbb{R}^n$, si para cada x_0 existe una constante no-negativa $T(x_0, S) < \infty$ tal que $x(t) \in S$ para toda $t > t_0 + T(x_0, S)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] "Differential geometric methods in Variable-Structure Control"
Hebert Sira-Ramirez. Int. J. Control, 1988. Vol. 48, No. 4,
1359-1390.
- [2] "Nonlinear Variable Structure Systems in Sliding Mode: The
General Case" Hebert-Sira-Ramirez, 1989. IEEE.
- [3] "Variable Structure Control of nonlinear multivariable
systems: A tutorial"
Raymond A. Decarlo, Stanislaw H. Zak, Gregory P. Matthews,
1988. IEEE.
- [4] "Perturbation of invariant manifolds I"
G.S. Osipenko. Differentsial'nye Uravneniya, vol. 21, No. 24,
pp. 615-623, 1985.
- [5] "Perturbation of invariant manifolds III"
G.S. Osipenko. Differentsial'nye Uravneniya, vol. 23, No. 5,
1987.
- [6] "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate
boundedness for uncertain Dynamic Systems"
Martin J. Corless, George Leitmann, 1981. IEEE.
- [7] "Subspace Attractivity and invariance in uncertain control
systems".
E.P. Ryan. ICCON. 1989.
- [8] "Tracking Control of non-linear systems using sliding surfaces
with applications to robot manipulators"
J.J. Slotine, S.S. Sastry, Int. J. Control. 1983, vol. 38.
No. 2.
- [9] J.P. Aubin and Cellina, "Differential inclusions",

Springer-Verlag, 1984.

- [10] Elon Lages Lima. "Introducción a las variedades diferenciables". EMMA. 1960.
- [11] V.I. Utkin, "Sliding modes and their application in variable structure systems". Mir. 1978.
- [12] A Isidori, "Nonlinear Control Systems; An Introduction" Springer Verlag. 1985.
- [13] Emilio O. Roxin, "Ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de Control". Editorial Universitaria de Buenos Aires. 1968.
- [14] Thierry Aubin, "Non-linear Analysis on manifolds; Monge-Ampère Equations". Springer-Verlag. 1982.
- [15] Michael Shub, "Global Stability of Dynamical Systems". Springer-Verlag, 1987.
- [16] R. Sacker and G. Sell, J. Diff. Equat., 15, No.3, 429-458 (1974).
- [17]. R. Suárez C., J. Alvarez G., E. González M.; "Sliding Controller Design for a Nonlinear Fermentation System"; Biotechnology and Bioengineering, Vol.33,Pp. 377-385, 1989