91

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

"Algunas Aplicaciones de Cálculo
Estocástico a Finanzas"

PRESENTA:
Mat. Guadalupe Maldonado Ramírez

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JUAN RUIZ DE CHÁVEZ SOMOZA

MÉXICO, D.F. AGOSTO 2008

RESUMEN

En este trabajo se presentarán algunas aplicaciones que tiene el cálculo estocástico en finanzas, principalmente en lo que se refiere a modelos financieros en tiempo continuo, desarrollando temas como la Integral de Itô, el Teorema de Girsanov, el Teorema de Representación Previsible, además se desarrollarán conceptos básicos como opciones y bonos cupón cero. Por último se presentarán brevemente algunos modelos de tasas de interés.

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es exponer la aplicación que tiene el cálculo estocástico en finanzas, en lo que se refiere a modelos financieros en tiempo continuo.

No podemos hablar de cálculo estocástico sin abordar la teoria de integral estocástica, es por eso que en el Capítulo 1 se expone y desarrolla lo referente a este tema: la Integral de Itô. Además se aplica esta teoría en el desarrollo del Teorema de Girsanov y el Teorema de Representación de Martingala.

En el Capítulo 2 se desarrollará brevemente el tema de Tiempo local y los procesos de Bessel, cuya utilidad en este trabajo radica en que el modelo CIR (ver Capítulo 3) es uno de estos procesos.

Es en el Capítulo 3 donde se desarrollarán los temas centrales del presente trabajo, las aplicaciones al ambiente financiero del cálculo estocástico, comenzando con los temas básicos como son el interés simple y compuesto, bonos cupón cero y opciones, y continuando con temas como la fórmula de Black-Scholes, valuación de opciones de venta americanas, term structure y finalmente se expondrán brevemente algunos modelos de tasas de interés.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notaciones

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}_+$ el conjunto de los reales positivos, entendiéndose por positivos si son mayores a cero, $\overline{\mathbb{R}}$ el conjunto de reales extendidos $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{Z}$ el conjunto de enteros y $\mathbb{N}$ los enteros positivos. Si E es un conjunto no vacío, entonces una $\sigma-$ **álgebra** de subconjuntos de E es una colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de E tal que, $E \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ es cerrada bajo las operaciones de complementación y de unión numerable. Si $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de E, $\sigma(\mathcal{A})$ denotará la $\sigma-$ **álgebra generada** por $\mathcal{A}$, es decir, la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$.

La pareja $(E, \mathcal{E})$, que consiste de un conjunto no vacío E y una $\sigma-$álgebra $\mathcal{E}$ de subconjuntos de E se llama un **espacio medible.**

Sean $(E, \mathcal{E})$ y $(F, \mathcal{F})$ dos espacios medibles; una función $f : E \rightarrow F$ se dice que es una **función medible** con respecto de las σ-álgebras $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$, si para todo $A \in \mathcal{F}$, se tiene $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$. Si $A \subseteq E$, la **función indicadora** de A, la denotaremos por I_A.

Si Ω es un conjunto no vacío y $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ es una colección de espacios medibles, I un conjunto de índices, entonces para cada $i \in I$, sea f_i una aplicación de Ω en E_i tenemos que $\sigma(f_i, \mathcal{E}_i, i \in I)$, denotará la σ-álgebra en Ω generada por los conjuntos $f_i^{-1}(A_i)$, tales que $A_i \in \mathcal{E}_i$ para cada $i \in I$. Es claro que $\sigma(f_i, \mathcal{E}_i, i \in I)$ es la mínima σ-álgebra en Ω tal que hace que todas las f_i sean medibles.

Si E es un espacio topológico, la σ-álgebra generada por los abiertos de E es llamada la **σ-álgebra de Borel** de E y la denotaremos por $\mathcal{B}(E)$.

Aquí una medida sobre un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ siempre será positiva, en caso contrario diremos que es una medida con signo. Un **espacio de medida** es una terna $(E, \mathcal{E}, \mu)$, donde $(E, \mathcal{E})$ es un espacio medible y μ es una medida en $(E, \mathcal{E})$.

Un espacio de medida $(E, \mathcal{E}, \mu)$ se dice que es **completo** si para todo $B \in \mathcal{E}$ tal que $\mu(B) = 0$, implica que para cualquier $A \subseteq B$, se cumple $A \in \mathcal{E}$, por tanto también, $\mu(A) = 0$, o sea que $\mathcal{E}$ contiene a todos los subconjuntos de E de medida cero (**conjuntos nulos**).

Si $(E, \mathcal{E}, \mu)$ es un espacio de medida y $p \in [1, \infty)$, $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ denota el espacio vectorial de funciones $\mathcal{E}$-medibles $X : E \to \mathbb{R}$ tales que

$$\|X\|_p \equiv \left(\int_E |X(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p}$$

es finito.

Un **espacio de probabilidad** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de medida tal que $P(\Omega) = 1$.

Una **función de conjuntos** es una función cuyo dominio es una colección de conjuntos.

Si una proposición concerniente a los puntos de un espacio de medida $(E, \mathcal{E}, \mu)$ es cierta para todos los puntos del conjunto E, excepto en los puntos de un conjunto $A \subset E$ tal que $\mu(A) = 0$, se dice que la propiedad es cierta **casi donde quiera**, abreviado c.d. Si el espacio es un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice que la propiedad es cierta **casi seguramente**, abreviado c.s. Cuando trabajemos con varias medidas de probabilidad, si una propiedad es cierta casi seguramente respecto de la probabilidad P, a esta la denotaremos por $P - c.s.$

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $(E, \mathcal{E})$ es un espacio medible entonces cualquier aplicación $X : \Omega \to E$ que sea medible es llamada **variable aleatoria**, abreviado v.a. La fórmula $\mu_X(A) = P\{X^{-1}(A)\}$, para $A \in \mathcal{E}$, define una medida de probabilidad μ_X en $(E, \mathcal{E})$, llamada la **distribución** de X o bien la **ley** de X. Aquí utilizaremos la notación $\mu_X(A) = P[X \in A]$. Si X es una v.a. con valores reales, entonces la **esperanza** de X se define como $EX = \int_\Omega X dP$, siempre que esta integral exista. Si además f es una función medible de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ entonces $Ef(X) = \int_\mathbb{R} f d\mu_X$, siempre que ambas integrales existan.

Observemos que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ implica $E|X| = \int_\Omega |X| dP < \infty$.

Definición 1.1.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible.*

a) Una **filtración** *en $(\Omega, \mathcal{F})$ es una familia de σ-álgebras de Ω, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tales que*

i) $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ para toda $t \geq 0$.

ii) Si $s, t \in \mathbb{R}_+$ y $s \leq t$, entonces $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

*b) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ definido sobre Ω es $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-***adaptado**, *o* **adaptado a la filtración** *$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.*

c) Dada una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$, para cada $t \geq 0$, se define una nueva σ-álgebra

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

d) Asímismo, para $t > 0$ se define

$$\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s = \sigma(\mathcal{F}_s; s < t).$$

e) Sea $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ *una medida de probabilidad. Se dice que* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *es una* **filtración completa** *si el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *es completo y todos los conjuntos de* P*-medida cero están en* $\mathcal{F}_0$.

f) La filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *satisface las* **hipótesis habituales**, *si es completa y continua por la derecha, es decir,* $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ *para todo* $t \geq 0$.

g) Una función $f : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *se dice que es continua a la derecha y admite límites a la izquierda si para cada* $t \in [0,T]$, *los límites*

$$f(t-) = \lim_{s\to t, s<t} f(s) \qquad f(t+) = \lim_{s\to t, s>t} f(s)$$

existen y $f(t) = f(t+)$.

Usaremos las iniciales en francés **c.à.d.l.à.g.** *para continua a la derecha con límites por la izquierda.*

Una función $f : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *se dice que es continua a la izquierda y admite límites a la derecha si para cada* $t \in [0,T]$, *los límites*

$$f(t-) = \lim_{s\to t, s<t} f(s) \qquad f(t+) = \lim_{s\to t, s>t} f(s)$$

existen y $f(t) = f(t-)$.

Usaremos las iniciales en francés **c.à.g.l.à.d.** *para abreviar continua a la izquierda con límites a la derecha.*

h) El proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ *es* **continuo (continuo por la derecha y admite límites a la izquierda o continuo por la izquierda y admite límites a la derecha)** *si para casi todo* $\omega \in \Omega$ *la función*

$$t \to X_t(w)$$

es continua (continua por la derecha y admite límites a la izquierda o continua por la izquierda y admite límites por la derecha).

Comentarios. La interpretación del índice t como una variable de tiempo introduce un aspecto dinámico, el cual necesitamos tomar en cuenta para definir apropiadamente las nociones de información, causalidad y previsibilidad en el contexto de un modelo estocástico. En un contexto dinámico, cuando el tiempo avanza, más información es revelada al observar progresivamente. Se debe agregar entonces algún ingrediente dependiente del tiempo a la estructura del espacio de probabilidad, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ para acomodar este rasgo adicional. Esto se hace usualmente utilizando el concepto de filtración; $\mathcal{F}_t$ es interpretada como la información conocida hasta el tiempo t, la cual se incrementa con el tiempo. Desde un punto de vista intuitivo, la probabilidad de ocurrencia de un evento aleatorio, cambiará con el tiempo en tanto haya más información revelada. Con el flujo de información existente, descrito por la filtración $\mathcal{F}_t$, podemos distinguir cantidades, que son conocidas dada la información actual, de aquellas que son vistas como aleatorias al tiempo t. Un evento $A \in \mathcal{F}_t$ es un evento tal que dada la información $\mathcal{F}_t$ al tiempo t, el observador puede decidir si el evento A ha ocurrido o no. Similarmente, una v.a. $\mathcal{F}_t$-medible, es una v.a. cuyo valor será revelado al tiempo t.

Si la única observación disponible son los valores pasados del proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$, entonces la información está representada por la "historia" (también llamada la "filtración natural") de $(X_t)_{t\geq 0}$ definida como sigue:

La **"historia"** de un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$, es la familia de σ-álgebras

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ s \in [0,t]) \cup \mathcal{N}$$

donde $\mathcal{N}$ son los conjuntos nulos de P.

Podemos pensar a $\mathcal{F}_t^X$ como toda la información que se puede extraer al observar la trayectoria de $(X_t)_{t\geq 0}$ entre 0 y t.

En los conceptos c.à.d.l.à.g. y c.à.g.l.à.d. dado que t es interpretado como una variable de tiempo, a la derecha significa "después" y a la izquierda significa "antes". Si una función continua a la derecha tiene un salto en el tiempo t, entonces el valor $f(t)$ no es previsible siguiendo la trayectoria después del tiempo t; la discontinuidad es vista como un evento repentino, imprevisto. En contraste, si las trayectorias fueran continuas a la izquierda, una observación cercana al tiempo t a lo largo de la trayectoria, podría predecir el valor al tiempo t. En el contexto de modelos estocásticos, los saltos representan eventos repentinos, imprevisibles, de aquí que la elección de continua a la derecha es natural. Por otro lado, si queremos modelar un proceso discontinuo cuyos valores son "previsibles" podríamos usar un proceso c.à.g.l.à.d.

Definición 1.1.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Una aplicación $T : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ es llamada un* **tiempo de paro** *si para todo $t \in \mathbb{R}_+$ el evento $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Notemos que $\{T = \infty\} = \{T < \infty\}^c \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ y también $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Leftrightarrow \{T > t\} \in \mathcal{F}_t$. Es evidente que cualquier constante no negativa es un tiempo de paro. En caso de que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sea continua por la derecha, el que T sea tiempo de paro relativo a ella equivale a pedir que $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$.*

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso y T es un tiempo de paro, se denotará por $(X_t^T)_{t\geq 0}$ el proceso tal que $X_t^T(w) = X_{T(w)\wedge t}(w)$ para todo $t \geq 0$.

Definición 1.1.3 *Una función $V : t \to V_t$ de $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ en $\mathbb{R}$ se dice que es de* **variación finita** *si para toda $t \in [0, \infty)$ se tiene*

$$Var(V)_t = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}|, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = t\right\} < \infty.$$

La función $\mathrm{Var}(V)_t$ se le llama la variación de V en $[0, t]$.

Definición 1.1.4 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado, y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptado. Decimos que $(X_t)_{t\geq 0}$ es:*

a) un proceso **creciente**, *si es adaptado a la filtración, $X_0 = 0$ y para casi todo $w \in \Omega$ la función*

$$t \to X_t(w)$$

es creciente.

b) un proceso de **variación finita** *si se puede escribir como la diferencia de dos procesos crecientes.*

c) un proceso de **variación cuadrática finita**, *si existe un proceso, al que denotaremos por* $([X]_t)_{t\geq 0}$, *que sea creciente y tal que para toda* $t \geq 0$ *y toda sucesión de particiones* $\{\delta_n\}_{n\geq 1}$ *del intervalo* $[0,t]$ *con*

$$\delta_n = \{t_i^n \mid i = 0, \ldots, n\} \qquad y \qquad \mid \delta_n \mid \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

(donde $\mid \delta_n \mid = max\{\mid t_{i+1}^n - t_i^n \mid, i = 0, \ldots, n-1\}$*) se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} (X_{t_{k-1}^n} - X_{t_k^n})^2 \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{P}} [X]_t.$$

El proceso $([X]_t)_{t\geq 0}$ *es llamado* **variación cuadrática** *de* $(X_t)_{t\geq 0}$.

d) una **submartingala** *si para todo* $t \geq 0$ *se tiene* $EX_t^+ \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y* $E[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s$ *c.s. para* $s \leq t$ *(donde* X_t^+ *es la parte positiva de* X_t*)*

e) una **supermartingala** *si para todo* $t \geq 0$, $X_t^- \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y* $E[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s$ *c.s., para* $s \leq t$ *(donde* X_t^- *es la parte negativa de* X_t*).*

f) una **martingala** *si para todo* $t \geq 0$, $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y* $E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$ *c.s., para* $s \leq t$.

g) una $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **martingala local**, *para* $p \in [1, \infty)$, *si existe una sucesión* $(\tau_n)_{n\geq 1}$, *de tiempos de paro relativos a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *llamada* **sucesión localizante**, *tal que*

i) para todo $w \in \Omega$ *y* $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_n(w) \leq \tau_{n+1}(w),$$

ii) para casi todo $w \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n(w) = \infty,$$

iii) para cada $n \in \mathbb{N}$, *el proceso* $(I_{\{\tau_n>0\}}X^{\tau_n})_{t\geq 0}$ *es* $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *martingala, donde* $(I_{\{\tau_n>0\}}X^{\tau_n})_t(w) = I_{\{\tau_n>0\}}(w)X_t^{\tau_n}(w)$.

Cuando $p = 1$ omitimos el "$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$"y decimos simplemente una martingala local.

h) una **semimartingala continua** *si es continuo, adaptado a la filtración y para cada $t \geq 0$ se le puede expresar en la forma*

$$X_t = M_t + A_t,$$

donde $(M_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua y $(A_t)_{t\geq 0}$ es un proceso continuo de variación finita.

Comentarios. Obviamente todo proceso creciente es de variación finita en cualquier intervalo acotado.

Claro que toda $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala es una $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala local, para $p \geq 1$.

Notación. A un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$, lo denotaremos simplemente por X.

Definición 1.1.5 *Para M y N martingala locales, sea*

$$[M, N] = \frac{1}{4}([M + N] - [M - N]).$$

Llamaremos a $[M, N]$ el **corchete rectangular** *de M y N, al cual nos referiremos simplemente como el "corchete", debido a que sólo trabajaremos con este tipo de corchete. $[M, N]$ representa el proceso $([M, N]_t)_{t\geq 0}$, donde $[M, N]_t = \frac{1}{4}([M + N]_t - [M - N]_t)$, para cada $t \geq 0$.*

Propiedades:

a) $[\cdot, \cdot]$ es bilineal simétrico.

b) $[M, M] = [M]$ y $[M, M]_0 = [M]_0 = 0$, donde $[M]$ es el proceso de variación cuadrática de M.

c) Si A es un proceso continuo de variación finita entonces, $[A, A] = [A] = 0$ y $[A, M] = [M, A] = 0$, donde M es una martingala local.

1.2. Integral de Itô

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que satisface las condiciones habituales. En las siguientes cuatro subsecciones se hará la construcción de la integral estocástica de Itô:

$$\int_{[0,t]} HdM,$$

donde primero M es un proceso de variación finita, luego una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala, en seguida una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala local y finalmente una semimartingala continua, y H es un proceso que satisface ciertas condiciones de medibilidad e integrabilidad. También veremos algunas de las propiedades de dicha integral estocástica.

1.2.1. Integral Estocástica con Respecto a Procesos de Variación Finita

La Integral de Lebesgue-Stieljes

Sea $A : t \to A_t$ una función creciente, continua a la derecha de $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Definamos las medidas de los intervalos finitos de $\mathbb{R}_+$, mediante las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mu_A(a,b) &= A_{b-} - A_{a-},\ a,b \in \mathbb{R}_+,\\
\mu_A[a,b] &= A_b - A_a,\ a,b \in \mathbb{R}_+,\\
\mu_A(a,b] &= A_b - A_{a-},\ a,b \in \mathbb{R}_+,\\
\mu_A[a,b) &= A_{b-} - A_a,\ a,b \in \mathbb{R}_+,\\
\mu_A(0,b] &= A_b - A_{0-},\ b \in \mathbb{R}_+,\\
\mu_A[0,b) &= A_{b-}\ b \in \mathbb{R}_+,
\end{aligned}$$

del Teorema de extensión de Carathéodory podemos extender μ_A, a la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}_+$, o sea a la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ y tal que μ_A resulte ser σ-finita. La medida μ_A es llamada, la **medida de Lebesgue-Stieljes asociada a la función** A.

Sea V_t una función de variación finita. Sean

$$A_t = \frac{1}{2}(Var(V)_t + (V_t - V_0)) \quad \text{y} \quad B_t = \frac{1}{2}(Var(V)_t - (V_t - V_0)),$$

estas funciones resultan ser nulas en cero, monótonas crecientes, por tanto de variación finita y si V_t es continua por la derecha, A y B resultan ser continuas por la derecha. Así obtenemos que toda función $(V_t - V_0)$, nula en cero, de variación finita y continua por la derecha, es la diferencia de dos funciones A y B, de $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, las cuales son finitas, crecientes, nulas en cero y continuas por la derecha.

Definamos μ_V la medida con signo, de Lebesgue-Stieljes: $\mu_V = \mu_A - \mu_B$, sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ y $\mu_V\{0\} = V_0$. La integral de Lebesgue con respecto a la medida μ_V, es llamada: **la integral de Lebesgue-Stieljes.**

No es difícil demostrar a partir del teorema de clases monótonas que si V tiene otra representación como diferencia de dos funciones crecientes y continuas por la derecha, digamos: $V = A' - B'$, se tiene que $\mu_V = \mu_A - \mu_B = \mu_{A'} - \mu_{B'}$. Así que para calcular la medida de cualquier conjunto medible podemos utilizar cualquier representación. Para, $0 \leq u < t$, la integral de Lebesgue-Stieljes sobre (u, t), la denotaremos indistintamente por

$$\int_{(u,t]} f(s)d\mu_V(s) = \int_u^t f(s)dV_s = \int_{(u,t]} f(s)dV_s.$$

Definición 1.2.1 *Sea $(V_t)_{t\geq 0}$ un proceso de variación finita y sea $(H_t)_{t\geq 0}$ un proceso $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}-$ medible. Como cada trayectoria $V_\cdot(w)$, es una función creciente, denotemos por $\mu_{V(w)}(dt)$, la medida de Lebesgue-Stieljes asociada a la trayectoria asociada a $w \in \Omega$. Ahora podemos considerar para $t \in (0, \infty)$, la integral de Lebesgue-Stieljes:*

$$(H \cdot V)_t(w) = \int_0^t H_s(w)d\mu_{V(w)}(s),$$

que denotaremos por:

$$(H \cdot V)_t(w) = \int_0^t H_s(w)dV_s(w),$$

siempre que ésta exista, pudiendo tomar los valores $+\infty$ ó $-\infty$.

Si $(H \cdot V)_t(w)$ existe para toda $t \in (0, \infty)$ y casi toda w, haciendo $(H \cdot V)_0 = H_0V_0$, el proceso $((H \cdot V)_t)_{t\geq 0}$, está bien definido para toda $t \in [0, \infty)$, y será llamado **la integral de H con repecto a V**.

1.2.2. Integral Estocástica con Respecto a $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Martingalas

Recordemos que tenemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que satisface las condiciones habituales.

Sea M una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala continua a la derecha.

Primero se especificarán las condiciones de medibilidad sobre H, visto como una función definida en $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. H será medible respecto a una σ-álgebra $\mathcal{P}$ generada por una clase simple $\mathcal{R}$ de "rectángulos previsibles". En seguida se definirá una medida μ_M asociada con M sobre $\mathcal{P}$ y entonces se definirá la integral $\int HdM$ en los siguientes pasos:

i) $\int HdM$ será definida para un $\mathcal{R}$-proceso simple H de tal forma que la siguiente isometría sea cierta:

$$E\left\{\left(\int HdM\right)^2\right\} = \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} (H)^2 d\mu_M.$$

ii) Esta isometría será usada para extender la definición de $\int HdM$ a cualquier $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$.

Comenzaremos definiendo la σ-álgebra previsible.

La familia de subconjuntos de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ que contiene a todos los conjuntos de la forma $\{0\} \times F_0$ y $(s,t] \times F$, donde $F_0 \in \mathcal{F}_0$ y $F \in \mathcal{F}_s$ para $s < t$ en $\mathbb{R}_+$, es llamada la **clase de rectángulos previsibles** y la denotamos por $\mathcal{R}$. El anillo $\mathcal{A}$ generado por $\mathcal{R}$ es la mínima familia de subconjuntos de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ que contiene a $\mathcal{R}$ y tal que si $A_1 \in \mathcal{A}$ y $A_2 \in \mathcal{A}$, entonces $A_1 \cup A_2$ y $A_1 \backslash A_2$ están en $\mathcal{A}$. Puede verificarse que $\mathcal{A}$ consiste del conjunto vacío $\emptyset$ y de todas las uniones finitas de rectángulos disjuntos en $\mathcal{R}$. La σ-álgebra $\mathcal{P}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ generada por $\mathcal{R}$ es llamada la **σ-álgebra previsible** y los conjuntos en $\mathcal{P}$ son llamados **conjuntos previsibles**.

Una función $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada **función previsible** si X es $\mathcal{P}$-medible. Así mismo, un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es llamado **proceso previsible** si X_t es $\mathcal{P}$-medible, para toda $t \geq 0$.

A continuación se define una medida sobre los conjuntos previsibles, la cual nos dará la isometría usada para definir la integral estocástica.

Supongamos que $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ es un proceso real valuado y adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y $Z_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

Definamos una función de conjuntos en $\mathcal{R}$ con valores en $\mathbb{R}$, λ_Z por:

$$\lambda_Z((s,t] \times F) = E(I_F(Z_t - Z_s)), \text{ para } \quad F \in \mathcal{F}_s \text{ y } s < t \text{ en } \mathbb{R}_+,$$

$$\lambda_Z(\{0\} \times F_0) = 0 \text{ para } F_0 \in \mathcal{F}_0.$$

Ahora extendamos a λ_Z a una función de conjuntos finitamente aditiva sobre el anillo $\mathcal{A}$ generado por $\mathcal{R}$, definiendo

$$\lambda_Z(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_Z(R_j)$$

para algún $A = \cup_{j=1}^{n} R_j$, donde $\{R_j,\ 1 \leq j \leq n\}$ es una colección finita de conjuntos disjuntos en $\mathcal{R}$. El valor de $\lambda_Z(A)$ es el mismo para todas las representaciones de A como unión finita de rectángulos disjuntos en $\mathcal{R}$.

Es claro que si Z es una martingala, entonces $\lambda_Z \equiv 0$, y si Z es una submartingala, entonces $\lambda_Z \geq 0$. Así que, como M es martingala, $(M)^2 = ((M_t)^2)_{t\geq 0}$ es una submartingala (es una consecuencia de aplicar la desigualdad de Jensen condicional a la función convexa $x \to x^2$) entonces $\lambda_{(M)^2} \geq 0$. Más explícitamente, para $F \in \mathcal{F}_s$ y $s < t$,

$$\lambda_{(M)^2}((s,t] \times F) = E(I_F(M_t^2 - M_s^2)) = E(I_F(M_t - M_s)^2) \geq 0.$$

La igualdad anterior se prueba poniendo $Y = I_F$ en la siguiente identidad. Para $s < t$ en $\mathbb{R}_+$ y alguna $Y \in \mathcal{F}_s$ real valuada, tenemos, utilizando la propiedad de martingala,

$$\begin{aligned} 0 \leq E\{Y(((M_t - M_s)^2\} &= E\{Y((M_t)^2 - 2M_tM_s + (M_s)^2)\} \\ &= E\{Y((M_t)^2 + (M_s)^2)\} - 2E\{YM_sE(M_t/\mathcal{F}_s)\} \\ &= E\{Y((M_t)^2 + (M_s)^2)\} - 2E\{Y(M_s)^2\} \\ &= E\{Y((M_t)^2 - (M_s)^2)\}. \end{aligned}$$

Estamos interesados en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$-martingalas M, para las cuales $\lambda_{(M)^2}$ puede ser extendida a una medida sobre $\mathcal{P}$. Si $\lambda_{(M)^2}$ es numerablemente aditiva sobre $\mathcal{A}$, entonces por el teorema de extensión de Carathéodory existe una única extensión de $\lambda_{(M)_2}$ a una medida sobre $\mathcal{P}$. Una condición suficiente para que $\lambda_{(M)^2}$ sea numerablemente aditiva es que M tenga trayectorias continuas por la derecha. Asumiremos este resultado el cual es probado en Métivier y Pellaumail [15]. Usaremos μ_M para denotar la única medida sobre $\mathcal{P}$ la cual extiende a $\lambda_{(M)^2}$.

Ahora se definirá la integral estocástica $\int HdM$ cuando H es un $\mathcal{R}-$proceso previsible simple y probaremos que el mapeo $H \to \int HdM$ es una isometría de un subespacio de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Cuando H es la función indicadora de un rectángulo previsible, la integral $\int HdM$ está definida como sigue. Para $s < t$ en $\mathbb{R}_+$ y $F \in \mathcal{F}_s$,

$$\int I_{(s,t]\times F} dM \equiv I_F(M_t - M_s)$$

y para $F_0 \in \mathcal{F}_0$,

$$\int I_{\{0\}\times F_0} dM \equiv 0.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de todas las funciones $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ que son combinaciones lineales finitas de funciones indicadoras de rectángulos previsibles. Una función tal será llamada un $\mathcal{R}-$**proceso previsible simple**. Así pues, $H \in \mathcal{E}$ puede ser expresado en la forma:

$$H = \sum_{j=1}^{n} c_j I_{(s_j,t_j]\times F_j} + c_0 I_{\{0\}\times F_0} \tag{1.1}$$

donde $c_j \in \mathbb{R}$, $F_j \in \mathcal{F}_j$, $s_j < t_j$ en $\mathbb{R}_+$ para $1 \leq j \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $c_0 \in \mathbb{R}$ y $F_0 \in \mathcal{F}_0$. Esta representación, aunque no es única, se puede escojer siempre, tal que los rectángulos previsibles $(s_j, t_j] \times F_j$ para $1 \leq j \leq n$ sean disjuntos.

La integral $\int HdM$ para $H \in \mathcal{E}$ es definida por linealidad. Por lo tanto, para H de la forma (1.1) tenemos:

$$\int HdM \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j I_F(M_{t_j} - M_{s_j}).$$

Se puede verificar fácilmente que el valor de la integral no depende de la representación escogida para H.

Dado que $I_R \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$ para cada rectángulo previsible R, se sigue que $\mathcal{E}$ es un subespacio de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$, y dado que $M_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para cada t, $\int HdM$ está en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para cada $H \in \mathcal{E}$. El siguiente teorema prueba que el mapeo lineal $H \to \int HdM$ es una isometría de $\mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$ en su imagen en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Teorema 1.2.1 *Para $H \in \mathcal{E}$ tenemos la isometría*

$$E\left\{\left(\int HdM\right)^2\right\} = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} (H)^2 d\mu_M.$$

Demostración. Ver [7], pág. 37.

Lema 1.2.1 *El conjunto de $\mathcal{R}$-procesos simples $\mathcal{E}$ es denso en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$.*

Demostración. Ver [7], pág. 38.

Si consideramos que $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$ y $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ son espacios de Hilbert, entonces el mapeo $H \to \int HdM$ es una isometría lineal del subespacio denso $\mathcal{E}$ de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y por lo tanto puede ser extendida a una única isometría de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Para $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$, definimos **la integral estocástica** $(H \cdot M) = \int HdM$ como la imagen de H bajo ésta isometría.

Vamos a considerar el conjunto

$$\Lambda^2(\mathcal{P}, M) = \{H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} | H \text{ es } \mathcal{P}\text{−medible y } I_{[0,t]}H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)\}$$

Sea $H \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$. Para cada $t \geq 0$, $\int I_{[0,t]}HdM$ está bien definido y tiene la propiedad de isometría:

$$E\left\{\left(\int I_{[0,t]}HdM\right)^2\right\} = \int_{[0,t]\times\Omega} (H)^2 d\mu_M. \tag{1.2}$$

Por definición, $\mu_M(\{0\} \times \Omega) = 0$, por lo tanto por (1.2) tenemos

$$\int I_{\{0\}} H dM = 0 \qquad \text{c.s.}$$

Si $H \in \mathcal{E}$ y (1.1) es una representación para H, entonces para cada t, $I_{[0,t]}H$ está en $\mathcal{E}$ y

$$\int I_{[0,t]} H dM = \sum_{j=1}^{n} c_j I_{F_j} (M_{t_j \wedge t} - M_{s_j \wedge t}).$$

Aquí el lado derecho de esta última ecuación es una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala y es continua a la derecha. Usando la isometría, hacemos la extensión para tener que si $H \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$, entonces $(\int I_{[0,t]} H dM)_{t \geq 0}$ es una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala la cual tiene una versión continua a la derecha, según el siguiente:

Teorema 1.2.2 *Sea M una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala continua a la derecha, $H \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$ y para cada t sea $Y_t = \int I_{[0,t]} H dM$. Entonces $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ es una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala con media cero y existe una versión de Y con todas sus trayectorias continuas a la derecha.*

Demostración. Ver [7], pág. 40.

Corolario 1.2.1 *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si M tiene trayectorias continuas, entonces existe una versión de Y con trayectorias continuas.*

Demostración. Ver [7], pag. 41.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Descomposición de Doob.) *Sea M una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala continua a la derecha. Entonces $M^2 - [M, M]$ es martingala y tenemos la siguiente descomposción de la submartingala M^2:*

$$M_t^2 = M_0^2 + 2 \int_0^t M dM + [M, M]_t, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1.3}$$

Demostración. Ver [18], pág. 78.

Proposición 1.2.1 *Sea M una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala continua. Entonces*

a) $[M, M] = [M]$ *es un proceso continuo creciente en* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tal que* $[M]_0 = 0$.

b) $\left(\int_0^t MdM\right)_{t\geq 0}$ *es una P-martingala continua con media cero.*

c) $[M, M]$ *es el único proceso creciente continuo tal que* $M^2 - [M, M]$ *sea martingala; así obtenemos la unicidad de la descomposición de Doob para* M^2, *en el caso en que M sea continua.*

Demostración. Para a) y b) ver [7], pág. 70. Para c) ver [18], pág. 82.

■

Corolario 1.2.2 *Toda $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala continua M, nula en cero y de variación finita, resulta ser nula casi seguramente.*

Demostración. Ver [18], pág. 82.

1.2.3. Integral Estocástica con Respecto a Martingalas Locales

Nuevamente tenemos un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que satisface las condiciones habituales.

Definiremos integral estocástica respecto a martingalas locales para H previsible localmente acotado, para esto haremos uso del siguiente resultado:

Teorema 1.2.4 (Fórmula de Localización.) *Sea M una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala continua a la derecha, $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$ y T un tiempo de paro finito, entonces*

$$(HI_{(0,T]} \cdot M)_t = (H \cdot M^T)_t = (H \cdot M)_t^T = (H^T \cdot M^T)_t,$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. *Ver [18], pág. 77.*

Sea M una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala local y tomemos inicialmente H previsible y acotado. Sea $(T_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de tiempos de paro tal que $T_n \to +\infty$ y M^{T_n} es una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala, ahora de la fórmula de localización tenemos

$$(H \cdot M)_t^{T_n} = (H \cdot M^{T_n})_t.$$

Los procesos $(H \cdot M)_t^{T_n}$ resultan ser $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala nulas en cero, para cualquier n, o sea que $(H \cdot M)_t$ resulta ser una martingala local. Ahora cuando H es previsible localmente acotado, tenemos que existe una sucesión T_n de tiempos de paro tal que los procesos $H^n = HI_{[0,T_n]}$ sean acotados. Las integrales, $H^n \cdot M$, estan bien definidas y de la fórmula de localización tenemos, $(H^{n+1} \cdot M)^{T_n} = H^n \cdot M$, así que existe un proceso $H \cdot M$ tal que, $(H^{T_n} \cdot M) = (H \cdot M)^{T_n}$ para todo N. Ahora veamos que esta definición no depende de la sucesión que se haya utilizado. En efecto, gracias a la fórmula de localización, si T es un tiempo de paro tal que H^T sea acotado y M^T es una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala nula en cero, $M^{T_n \wedge T}$ sigue siendo martingala para cualquier n entonces

$$(HI_{[0,T]} \cdot M^{T_n})_t = (H^{T_n \wedge T} \cdot M^{T_n \wedge T}) = (H \cdot M)_t^{T_n \wedge T},$$

y haciendo tender n a $+\infty$, $(H \cdot M)_t^{T_n \wedge T}$ y $(H^{T_n \wedge T} \cdot M^{T_n \wedge T})$, convergen c.s. y en L^2 a $(H \cdot M)_{t \wedge T}$ y $(H^T \cdot M^T)_t$ respectivamente. Enunciemos lo que hemos expuesto en esta parte para martingalas locales y hagamos la definición de integral estocástica para martingalas locales con el siguiente:

Teorema 1.2.5 *Sea M una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala local. Entonces existe una aplicación lineal única $H \to H \cdot M$ del conjunto de procesos previsible localmente acotados en el espacio de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingalas locales nulas en cero. Esta aplicación lineal es tal que $(H \cdot M)^2 - H^2 \cdot [M, M]$ sea martingala local.*

Teorema 1.2.6 (Teorema de Descomposición de Doob) *Sea M una $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ martingala local. Entonces*

a) $M^2 - [M, M]$ es martingala local y se tiene la siguiente descomposición de la submartingala M^2:

$$M_t^2 = M_0^2 + 2 \int M_s dM_s + [M, M]_t, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

b) Si M es continua, $[M, M]$ es continuo y entonces es el único proceso creciente continuo que satisface a).

1.2.4. Integral Estocástica con Respecto a Semimartingalas Continuas

Comenzaremos observando que para X y Y semimartingalas continuas con descomposiciones $X = M + A$ y $Y = N + B$ tenemos

$$[X, Y] = [M + A, N + B] = [M, N],$$

dada la bilinealidad de $[\cdot, \cdot]$ y por el hecho de ser A y B procesos de variación finita.

Proposición 1.2.2 *Toda semimartingala continua es de variación cuadrática finita y ésta variación cuadrática resulta ser su corchete.*

Demostración. Ver [18], pág. 87.

Definición 1.2.2 *Sea X una semimartingala continua con descomposición $X = M + A$, entonces para cualquier proceso H previsible localmente acotado se define la* **integral estocástica de H con respecto a X** *como*

$$(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s,$$

donde la última integral es la integral de Stieljes y como ésta resulta ser un proceso de variación finita, la integral estocástica resulta ser de nuevo una semimartingala y al ser las dos integrales continuas se tiene que la descomposición de la integral estocástica está dada por la ecuación de arriba.

Proposición 1.2.3 *Sean X y Y semimartingalas continuas, H y K previsibles y acotados. Entonces*

$$[H \cdot X, K \cdot Y] = HK \cdot [X, Y].$$

Demostración. Ver [18], pág. 89.

Corolario 1.2.3 *Con las mismas hipótesis de la proposición anterior, tenemos*

$$[H \cdot X] = [H \cdot X, H \cdot X] = \int H^2 d[X,X] = \int H^2 d[X].$$

Lema 1.2.2 *Sea M una martingala local continua, nula en cero, y sea V un proceso de variación finita, continuo y nulo en cero, entonces*

$$M_t V_t = \int_0^t M_s dV_s + \int_0^t V_s dM_s.$$

Demostración. Ver [18], pág. 89.

Teorema 1.2.7 (Fórmula de integración por partes.) *Sean X y Y dos semimartingalas continuas de la forma $X = M + A$, $Y = N + B$, entonces*

$$\begin{aligned} X_t Y_t &= X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X,Y]_t \\ &= X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [M,N]_t. \end{aligned}$$

Demostración. Ver [18], pág. 89.

1.3. Fórmula de Itô

Teorema 1.3.1 (Fórmula de Itô para semimartingalas continuas.) *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una semimartingala continua en $\mathbb{R}^n$, con $X^i = M^i + A^i$ y sea $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t D_i f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t D_{ij} f(X_s) d[M^i, M^j]_s \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t D_i f(X_s) dM_s^i + \sum_{i=1}^n \int_0^t D_i f(X_s) dA_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t D_{ij} f(X_s) d[M^i, M^j]_s. \end{aligned}$$

Demostración. Ver [18], pág. 90.

Corolario 1.3.1 *El espacio de semimartingalas continuas es invariante bajo transformaciones de clase C^2, es más la descomposición de ésta está dada por la fórmula de arriba.*

Demostración. La prueba de este corolario se sigue al notar que $D_i f(X_s)$ es un proceso continuo y adaptado por tanto previsible localmente acotado, así que las integrales estocásticas con respecto a las martingalas locales están bien definidas y son martingalas locales.

■

1.4. Movimiento Browniano

Definición 1.4.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado con valores en $\mathbb{R}^n$ de trayectorias continuas. Se dice que $(W_t)_{t\geq 0}$ es un* **movimiento browniano estándar**, *abreviando,* **m.b.** *(respecto de la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$), si*

a) *$W_0 = 0$, para $s < t$, el incremento $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.*

b) *La ley de $W_t - W_s$ es gaussiana centrada de parámetro $t - s$, i.e.,*

$$P[W_t - W_s \in A] = (2\pi(t-s))^{-n/2} \int_A e^{-|x|/2(t-s)} dx.$$

Asociada a un m.b. $(W_t)_{t\geq 0}$ tenemos una filtración $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$, que llamaremos la **filtración natural** del m.b. $(W_t)_{t\geq 0}$, definida por

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s; s \leq t).$$

Proposición 1.4.1 *W es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ con trayectorias continuas.*

Demostración. Como parte de la definición del m.b., W tiene trayectorias continuas. W_t es $\mathcal{F}_t^W$-medible por la definición de $\mathcal{F}_t^W$, para cada $t \geq 0$. Dado que la distribución de W_t es normal con media 0 y varianza t, entonces $E|W_t| < \infty$ para toda $t \geq 0$.

Nos resta probar que $E[W_t|\mathcal{F}_s^W] = W_s$, para $s < t$. Como $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^W$ y $E[W_t - W_s] = 0$ porque W_t y W_s tienen media 0, obtenemos que:

$$E[W_t|\mathcal{F}_s^W] = E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s^W] + E[W_s|\mathcal{F}_s^W] = E[W_t - W_s] + W_s = W_s.$$

■

Proposición 1.4.2 *$(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es una martingala con trayectorias continuas con respecto a $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$.*

Demostración. Que $W_t^2 - t$ sea integrable y $\mathcal{F}_t^W$-medible se sigue como en la prueba de la proposición anterior. Calculemos:

$$\begin{aligned}
E[W_t^2 - t|\mathcal{F}_s^W] &= E[((W_t - W_s) + W_s)^2|\mathcal{F}_s^W] - t \\
&= E[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s^W] + 2E[(W_t - W_s)W_s|\mathcal{F}_s^W] \\
&\quad + E[W_s^2|\mathcal{F}_s^W] - t \\
&= E[(W_t - W_s)^2] + 2W_sE[W_t - W_s] + W_s^2 - t \\
&= (t - s) + 0 + W_s^2 - t \\
&= W_s^2 - s.
\end{aligned}$$

Aquí usamos los hechos de que W_s es $\mathcal{F}_s$ medible y que $(W_t - W_s)^2$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ porque $W_t - W_s$ lo es. Por lo tanto se tiene lo que se quería probar.

■

Proposición 1.4.3 *La variación cuadrática del m.b. $(W_t)_{t\geq 0}$ es $[W]_t = t$, para cada $t \geq 0$.*

Demostración. Como W es continua, el Teorema de Descomposición de Doob nos dice que $[W, W] = [W]$ es el único proceso creciente continuo tal que $W^2 - [W]$ es martingala. Por la Proposición anterior $W^2 - t$ es martingala; por lo tanto $[W, W]_t = [W]_t = t$ para toda $t \geq 0$.

∎

Teorema 1.4.1 (Lévy) *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado con valores en $\mathbb{R}^n$ de trayectorias continuas. Supongamos que $(X_t)_{t\geq 0}$ sea una martingala local y que las coordenadas X_t^i satisfacen*

$$d[X^i, X^j] = \delta^{i,j} dt, \qquad (\delta^{i,j} = 1,\ si\ i = j,\ 0\ si\ i \neq j),$$

entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es un m.b.

Demostración. Ver [18], pág. 96.

1.5. El Teorema de Girsanov

En esta sección demostraremos que la propiedad de ser semimartingala se mantiene bajo algunos cambios de leyes. Obtendremos consecuencias importantes como la descomposición de la semimartingala respecto de la nueva ley. Aquí sólo desarrollaremos las técnicas necesarias para probar el teorema de Girsanov cuando las semimartingalas son continuas y cuando P sea equivalente a otra medida de probabilidad Q. Al suponer la equivalencia tendremos que si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisface las condiciones habituales para P también las satisface para Q. Más aún, los conjuntons previsibles para P serán los mismos que para Q.

Así pues sean P y Q dos medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ equivalentes. Definamos $M_\infty = \frac{dQ}{dP}$. Como P y Q son equivalentes, M_∞ es diferente de cero P-c.s.. Tomemos una versión *c.a.d.l.a.g.* $(M_t)_{t\geq 0}$, de la P-martingala $(E[M_\infty | \mathcal{F}_t])_{t\geq 0}$.

Lema 1.5.1 *La P-martingala $(M_t)_{t\geq 0}$ es estrictamente positiva, P-c.s.*

Demostración. Ver [18], pág. 113.

Lema 1.5.2 *Un proceso* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es una* Q*-martingala local, si y sólo si,* $(X_t M_t)_{t\geq 0}$ *es una* P*-martingala local.*

Demostración. Ver [18], pág. 113.

Corolario 1.5.1 *El proceso* $(\frac{1}{M_t})_{t\geq 0}$ *es una* Q*-martingala.*

Teorema 1.5.1 *Un proceso* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es una* Q*-semimartingala si y sólo si es una* P*-semimartingala.*

Demostración. Ver [18], pág. 114.

De aquí en adelante supondremos que la martingala $(M_t)_{t\geq 0}$ es continua.

Teorema 1.5.2 (Girsanov) *Toda* $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *semimartingala continua es una* $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, Q)$ *semimartingala continua. Más precisamente, si* X *es una* $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *martingala local continua,*

$$Y_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{M_s} d[M, X]_s$$

es una $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, Q)$ *martingala local continua. Más aún, toda* $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, Q)$ *martingala local continua es de esta forma.*

Demostración. Para cada $t \geq 0$ sea

$$A_t = \int_0^t \frac{1}{M_s} d[M, X]_s.$$

Observemos que el proceso A es de variación finita ya que por el Lema 1.5.1, $M_.(w)$ es una función acotada por abajo por un número estrictamente positivo, así que $M_.^{-1}(w)$ resulta ser una función localmente acotada, y previsible por ser M continua, luego aplicando la Proposición 1.2.3 tenemos que

$$A_t = \int_0^t \frac{1}{M_t} d[Y,M]_s = [M, M^{-1} \cdot Y]_t.$$

para toda $t \geq 0$, con lo cual se tiene que A es de variación finita. Por lo tanto

$$[Y,Y] = [X - A, X - A] = [X,X].$$

Del Lema 1.5.2, Y es una Q-martingala local si YM es P-martingala local. Así pues, probemos ésto último. De la Fórmula de Integración por Partes tenemos, para cada $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
Y_tM_t &= Y_0M_0 + \int_0^t Y_s dM_s + \int_0^t M_s dY_s + [Y,M]_t \\
&= (X_0 - A_0)M_0 + \int_0^t (X_s - A_s) dM_s + \int_0^t M_s d(X_s - A_s) \\
&\quad + [X - A, M]_t \\
&= X_0M_0 + \int_0^t X_s dM_s - \int_0^t A_s dM_s + \int_0^t M_s dX_s - \int_0^t M_s \frac{1}{M_s} d[X,M]_s \\
&\quad + [X,M]_t \\
&= X_0M_0 + \int_0^t X_s dM_s - \int_0^t A_s dM_s + \int_0^t M_s dX_s - [X,M]_t + [Y,M]_t \\
&= X_0M_0 + \int_0^t X_s dM_s - \int_0^t A_s dM_s + \int_0^t M_s dX_s.
\end{aligned}$$

Por lo tanto YM resulta ser una P-martingala local al poderla expresar como integrales estocásticas de previsibles respecto de P-martingalas locales.

■

Corolario 1.5.2 *Si $(W_t)_{t\geq 0}$ es un P-m.b., entonces*

$$\left(W_t - \int_0^t \frac{1}{M_s} d[M,W]_s \right)_{t \geq 0},$$

es un Q-m.b., con Q definida como en el Teorema anterior.

Proposición 1.5.1 *Si $(M_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local continua, estrictamente positiva, entonces, existe una única martingala local continua, $(L_t)_{t\geq 0}$ tal que, para cada $t \geq 0$,*

$$M_t = \exp\{L_t - \frac{1}{2}[L, L]_t\} = \mathcal{E}(L_t)$$

y L está dada por

$$L_t = logM_0 + \int_0^t M_s^{-1} dM_s,$$

para cada $t \geq 0$.

Teorema 1.5.3 (Girsanov, versión clásica.) *Sea T un real positivo, W un P-m.b. sobre $[0, T]$, Y un proceso previsible tal que*

$$\int_0^T Y_s^2 ds < \infty \qquad P - c.s.$$

y sea

$$M_T = \exp\left(\int_0^T Y_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T Y_s^2 ds\right).$$

Si $E(M_T) = 1$ entonces $\left(W_t - \int_0^t Y_s ds\right)_{t\geq 0}$ es un m.b. sobre $[0, T]$ con respecto a la medida $dQ = M_T dP$.

Demostración. Ver [5], pág.

1.6. El Teorema de Representación Previsible

En esta sección queremos probar que dado un m.b., cada v.a. que sea $\mathcal{F}_t$-medible (con $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtración natural del m.b.) se puede escribir como una integral estocástica respecto de este m.b.. En términos matemáticos:

Teorema 1.6.1 (Teorema de Representación Previsible.) *Sea W un m.b., $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtración natural de W, $T \in \mathbb{R}_+$ y V una v.a. $\mathcal{F}_T$-medible tal que $EV^2 < \infty$. Entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ y un proceso H previsible, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$ tal que $E\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ y*

$$V = c + \int_0^T H_s dW_s.$$

Demostración. Expondremos simplemente la idea de la demostración formal.

Sea I el subespacio de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

$$I = \left\{ \int_0^T H_s dW_s | H \text{ es previsible, adaptado a } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \text{ y } E\int_0^T H_s^2 ds < \infty \right\}.$$

I es subespacio cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$; en efecto, sea $(\int_0^T H_s^n dW_s)_{n\geq 0}$ sucesión de Cauchy de elementos de I. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, H^n es previsible, adapatado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y tal que $E\int_0^T (H_s^n)^2 ds < \infty$.

Por ser de Cauchy, tenemos

$$\begin{aligned}
\epsilon &> \left\| \int_0^T H_s^n dW_s - \int_0^T H_s^m dW_s \right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} = \left\| \int_0^T (H_s^n - H_s^m) dW_s \right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}^2 \\
&= \|H^n - H^m\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathcal{P},\mu_W)}^2.
\end{aligned}$$

O sea que $(H^n)_{n\geq 0}$ es sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_W)$, y dado que este espacio es cerrado, existe H previsible tal que

$$\lim_{n\to\infty} H^n = H, \text{ y } \quad E\int_0^T H_s^2 ds < \infty.$$

Además como la biyección que asocia a cada previsible su integral estocástica respecto del m.b. W, es continua, tenemos que

$$I \ni \int_0^T H_s dW_s = \int_0^T \lim_{n\to\infty} H_s^n dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T H_s^n dW_s.$$

Por lo tanto I es subespacio cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Consideremos ahora $I^{\perp}$ el conjunto ortogonal de I. Si demostramos que $I^{\perp}$ se reduce a las constantes, habremos terminado.

Sea $M \in I$. Supongamos primero que M es no negativo. Sin pérdida de generalidad supongamos también que $EM = 1$. Definamos la probabilidad Q como $dQ = MdP$.

Sea H un proceso previsible, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$ tal que $E\int_0^T H_s^2 ds < \infty$.

Sea $Y_t = \int_0^t H_s dW_s$, para cada $0 \leq t \leq T$. Probemos que Y es una Q-martingala en $[0,T]$. Es decir, probemos que para $0 \leq r \leq t \leq T$ y $A \in \mathcal{F}_r$ se tiene

$$E_Q[I_A(Y_t - Y_r)] = 0$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
E_Q[I_A(Y_t - Y_r)] &= E_Q\left[I_A\left(\int_0^t H_s dW_s - \int_0^r H_s dW_s\right)\right] \\
&= E_Q\left[I_A\left(\int_r^t H_s dWs\right)\right] \\
&= E_Q\left[I_A\int_0^\infty I_{(r,t]} H_s dW_s\right] \\
&= E_Q\left[\int_0^\infty I_A I_{(r,t]} H_s dW_s\right] \\
&= E_P\left[\left(\int_0^T I_A I_{(r,t]} H_s dW_s\right) M\right]. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $M \in I^{\perp}$, tenemos que para todo proceso G previsible, adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, tal que $E\int_0^T H_s^2 ds < \infty$,

$$0 = \left\langle M, \int_0^T G_s dW_s \right\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)} = E_P\left[\left(\int_0^T G_s dW_s\right) M\right]. \qquad (1.5)$$

Donde $<,>$ es el producto interno en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. En particular si ponemos $G_s = I_A I_{(r,t]} H_s$, para $0 \leq s \leq T$, G es previsible, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y $E\int_0^T G_s^2 ds < \infty$. Así que por (1.4) y (1.5) tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 = E_P\left[\left(\int_0^T G_s dW_s\right) M\right] &= E_P\left[\left(\int_0^T I_A I_{(r,t]} H_s dW_s\right) M\right] \\
&= E_Q[I_A(Y_t - Y_r)],
\end{aligned}
$$

que es lo que se quería probar, por lo tanto Y es Q-martingala en $[0,T]$.

Ahora, si en Y ponemos $H = 1$, W es Q-martingala en $[0,T]$. Luego $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es Q-martingala, dado que W es continua, por Doob y Levy W es Q-m.b.. Finalmente por la unicidad de la distribución del m.b. $P = Q$. Por lo tanto $M = 1$.

Supongamos ahora que M está acotada por abajo, es decir, que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $M + c \geq 0$. Aplicamos lo que probamos anteriormente a $M + c$.

Si M no está acotada por abajo, sea $(T_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de tiempos de paro tales que $(M^{T_n})_{n\geq 0}$ está acotada por abajo. Aplicamos las pruebas anteriores.

■

También se le conoce como Teorema de Representación de Martingala, por la siguiente razón. Supongamos que M es una martingala adaptada a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la filtración natural de W. Supongamos también que $EM_t^2 < \infty$, para toda t. Sea $T \in \mathbb{R}$ y $V = M_T$; por el Teorema anterior

$$
M_T = c + \int_0^T H_s dW_s.
$$

Como la integral estocástica es martingala, entonces para $r \leq T$

$$
M_r = E[M_T|\mathcal{F}_r] = c + E\left[\int_0^T H_s dW_s|\mathcal{F}_r\right] = c + \int_0^r H_s dW_s.
$$

Así pues, estamos diciendo que cualquier martingala respecto de la filtración natural del m.b. puede ser representada como una integral estocástica con respecto al m.b..

1.7. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Comenzaremos enunciado un resultado de utilidad conocido como el Lema de Gronwall.

Lema 1.7.1 (Lema de Gronwal.) *Suponga que $\alpha(s)$, $\beta(s)$ son funciones integrables para $a \leq s \leq b$. Si existe una constante H tal que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + H \int_a^t \alpha(s)ds, \qquad t \in [a, b], \tag{1.6}$$

entonces

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + H \int_a^t e^{H(t-s)}\beta(s)ds.$$

Note que si $\beta(t) = B$, con B constante, entonces

$$\alpha(t) \leq Be^{H(t-a)}.$$

Demostración. Escribamos $A(t) = \int_a^t \alpha(s)ds$, $\quad g(t) = A(t)e^{-Ht}$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(t) &= \alpha(t)e^{-Ht} - HA(t)e^{-Ht} \\ &\leq \beta(t)e^{-Ht}, \end{aligned}$$

esta última desigualdad se tiene de (1.6). Integrando, $g(t)-g(a) \leq \int_a^t \beta(s)e^{-Hs}ds$. Esto es, $A(t) \leq e^{Ht}\int_a^t \beta(s)e^{-Hs}ds$. Usando (1.6) otra vez

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + HA(t) = \beta(t) + H\int_a^t \beta(s)e^{H(t-s)}ds$$

y el resultado está probado.

■

Definición 1.7.1 *Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad con filtración $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Sea $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^m)$ un $\mathcal{F}_t$-m.b. m-dimensional y $f(x,t)$, $\sigma(x,t)$ funciones medibles de $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [0,T]$ con valores en $\mathbb{R}^n$ y $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, el espacio de matrices de $m \times n$, respectivamente. ξ es una variable aleatoria $\mathbb{R}^n$-valuada, y $\mathcal{F}_0$-medible.*

Un proceso X_t, $0 \leq t \leq T$ es una **solución** *de la ecuación diferencial estocástica (abreviaremos EDE)*

$$dX_t = f(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \tag{1.7}$$

con condición inicial $X_0 = \xi$ *si para todo* t *las integrales*

$$\int_0^t f(X_s, s)ds \quad y \quad \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$$

están bien definidas y

$$X_t = \xi + \int_0^t f(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s, \quad c.s. \tag{1.8}$$

Teorema 1.7.1 (Teorema de Unicidad, primera versión) *Supongamos que, en suma a las suposiciones de la definición anterior,* $\xi, f,$ *y* σ *satisfacen*

$$\begin{aligned} |f(x,t) - f(x',t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(x',t)| &\leq K|x - x'| \qquad (1.9) \\ |f(x,t)|^2 + |\sigma(x,t)|^2 &\leq K_0^2(1 + |x|^2) \qquad (1.10) \\ E(|\xi|^2) &< \infty \end{aligned}$$

Entonces existe una solución X_t *de* (1.8) *tal que*

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2) < C(1 + E(|\xi|^2)).$$

Note que, para la matriz σ, $|\sigma|^2 = Tr\sigma\sigma^*$, donde $Tr\sigma$ y σ^* es la transpuesta y la adjunta de la matriz σ. Esta solución es única en el sentido que , si X_t' es también solución, entonces estas son indistinguibles, es decir, $X_t = X_t'$ P-c.s.

Demostración.

Unicidad. Supongamos que X y X' son soluciones. Entonces para todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} X_t - X_t' &= \int_0^t (f(X_s, s) - f(X_s', s))ds \\ &\quad + \int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(X_s', s))dW_s. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |X_t - X_t'| &\leq 2\left(\int_0^t (f(X_s, s) - f(X_s', s))ds\right)^2 \\ &\quad + 2\left(\int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(X_s', s))dW_s\right)^2. \end{aligned}$$

Tomando esperanzas

$$\begin{aligned} E(|X_t - X'_t|^2) &\leq 2t\int_0^t E[(f(X_s,s) - f(X'_s,s))^2]ds \\ &+2\int_0^t E(|\sigma(X_s,s) - \sigma(X'_s,s)|^2)ds. \end{aligned}$$

Escribamos $\phi(t) = E(|X_t - X'_t|^2)$ y usemos las condiciones de Lipschitz (1.9) para deducir

$$\phi(t) \leq 2(T+1)K^2\int_0^t \phi(s)ds.$$

Por el Lema de Gronwall, tenemos que $\phi(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$. Consecuentemente,

$$|X_t - X'_t| = 0, \quad c.s.$$

El proceso $|X_t - X'_t|$ es continuo, así que existe un conjunto $N \in \mathcal{F}_0$ de medida cero tal que si $w \notin N$, $X_t(w) = X'_t(w)$ para todo $t \in [0,T]$, esto es, X' es una modificación de X.

Existencia. ver [8], pág. 128.

∎

El resultado anterior se puede generalizar de la siguiente forma:

Teorema 1.7.2 (Teorema de Unicidad, segunda versión) *Se tiene unicidad trayectorial en cada uno de los siguientes casos:*

i) $(\sigma(x,t) - \sigma(x',t))^2 \leq \rho(|x - x'|)$, *con* $\sigma \geq \epsilon > 0$, $b \equiv 0$ *y* $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *que cumple*

$$\int_{0+}^{\epsilon} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty.$$

ii) $(\sigma(x,t) - \sigma(x',t))^2 \leq \rho(|x - x'|)$ *y* f *lipschitz.*

Demostración. Ver [9], pág. 32.

Teorema 1.7.3 (Teorema de Comparación) *Supongamos que la función* σ *satisface alguna de las siguientes hipótesis:*

i) $|\sigma(x,t) - \sigma(x'.t)|^2 \leq \rho(|x - x'|)$.

ii) $|\sigma(x,t) - \sigma(x'.t)|^2 \leq |f(x,t) - f(x',t)|$.

con f acotada, creciente y $|\sigma| > \varepsilon > 0$.

Supongamos además que b_1 y b_2 son funciones borelianas y $b_1 \geq b_2$ y al menos una de ellas es Lipschitz. Si $X_0 \geq X_0'$ P-c.s., entonces se tiene que

$$X_t \geq X_t' \qquad P - c.s.$$

Demostración. Ver [9], pág. 39.

Capítulo 2

Algunas Aplicaciones de Cálculo Estocástico a Finanzas

2.1. Conceptos Básicos de Finanzas

Antes que nada enunciaremos algunas definiciones financieras a las que nos estaremos refiriendo constantemente en este capítulo.

Definición 2.1.1 *El* **valor futuro** *es la cantidad de efectivo en una fecha específica en el futuro que es equivalente al valor de una suma especificada hoy.*

Definición 2.1.2 *El* **valor presente** *es la cantidad de efectivo de hoy que es equivalente en valor a un pago o a una corriente de pagos que se recibirán en el futuro.*

Definición 2.1.3 *Un título de* **acción** *es capital contable en una corporación.*

Definición 2.1.4 *Los* **activos** *son los recursos financieros de una empresa.*

Definición 2.1.5 *Un* **activo financiero** *es un contrato que provee el intercambio de dinero en diversos puntos del tiempo.*

Definición 2.1.6 *Un* **valor financiero** *es un activo financiero estandarizado (como los bonos).*

Definición 2.1.7 *Un* **activo subyacente** *es un activo que una opción da a un tenedor de derecho de comprar o vender.*

Definición 2.1.8 *Un* **mercado financiero** *es aquel en el que se lleva a cabo la compra y venta de valores financieros.*

Definición 2.1.9 *La* **tasa de interés** *es la tasa, como una proporción del principal(capital), a la que se calcula el interés (el costo del dinero prestado).*

Definición 2.1.10 *Una* **opción** *es un título (o contrato) financiero que da a su tenedor, el derecho y no la obligación de comprar o vender (según sea una opción de compra o venta) una cierta cantidad de un activo financiero, a una fecha convenida y a un precio fijado de antemano.*

La descripción precisa de una opción se hace a partir de los elementos siguientes:

a) Tipos de opciones; se dice según la terminología anglo-sajona, de un **call** para una opción de compra y de un **put** para una opción de venta.

b) El activo subyacente, sobre el cual se tiene la opción: en la práctica puede ser éste una acción, una divisa, mercancía, etc.

c) El monto, es decir la cantidad de activo subyacente a comprar o vender.

d) Fecha de expiración o de maduración que limita el tiempo de vigencia de la opción; si la opción se puede ejercer en cualquier momento previo a la fecha de maduración, se dice que se trata de una opción **americana**, si la opción sólo puede se puede ejercer en la fecha de maduración se dice que se trata de una opción **europea**.

e) El precio de ejercicio, que es el precio (fijado de antemano) al cual se hace la transacción en caso de ejercer la opción, también se le denomina **precio strike.**

La opción tiene un precio llamado **prima**. Cuando la opción es cotizada en un mercado financiero organizado, la prima está dada por el mercado. Si no hay cotización se tiene el problema de calcular la prima. Aún para una opción cotizada, puede ser de interés tener una fórmula o modelo que permita detectar anomalías del mercado.

La forma en la cual el dinero cambia de valor en el tiempo es una controversia compleja de importancia fundamental en finanzas. Abordaremos principalmente dos preguntas:

¿Cuál es el valor futuro de una cantidad invertida o fiada hoy?

¿Cuál es el valor presente de una cantidad que será pagada o recibida a cierto tiempo en el futuro?

Las respuestas dependen de varios factores, los cuales serán discutidos en las siguientes tres secciones.

2.2. Interés Simple

Supongamos que un inversionista deposita una cantidad de dinero en una cuenta bancaria, donde se gana con intereses. El valor futuro de este inversionista consiste del depósito inicial, llamado el *principal* y denotado por P, más todos los intereses ganados dado el dinero que fue depositado en la cuenta.

Después de un año el interés ganado será rP, con $r > 0$ la *tasa de interés* anual, entonces el inversionista tendrá

$$V(1) = P + rP = (1 + r)P.$$

Después de dos años tendrá

$$V(2) = P + rP + rP = P + 2rP = (1 + 2r)P.$$

El valor del inversionista al tiempo t, denotado por $V(t)$ está dado por

$$V(t) = (1 + tr)P,$$

donde el tiempo t, expresado en años, puede ser un número real no negativo arbitrario. En particular, tenemos la igualdad obvia $V(0) = P$. El número $1 + rt$ es llamado el *factor de crecimiento*. Asumamos que la tasa de interés r

es constante. Si el principal P es invertido al tiempo s, después que el tiempo 0, entonces el valor al tiempo $t \geq s$ será

$$V(t) = (1 + (t - s)r)P.$$

Si conocemos el valor al tiempo t, entonces la suma inicial tendría que ser

$$V(0) = V(t)(1 + rt)^{-1}.$$

Este número es llamado el *valor de descuento* o *valor presente* de $V(t)$ y $(1 + rt)^{-1}$ es llamado el *factor de descuento.*

2.3. Interés Compuesto

Nuevamente supongamos que una cantidad P es depositada en una cuenta de banco, a una tasa de interés constante $r > 0$. En contraste al interés simple, asumimos que el interés ganado se irá sumando al principal periodicamente, por ejemplo, anualmente, semestralmente, mensualmente o talvés diariamente. A esto se le llama interés compuesto periodico o discreto.

Ejemplo 2.3.1 *En el caso de mensualidades, el primer pago de intereses será de $\frac{r}{12}P$, incrementando al principal a $(1 + \frac{r}{12})P$. El siguiente pago de intereses será de $\frac{r}{12}(1 + \frac{r}{12})P$ y el capital (principal) será entonces de $(1 + \frac{r}{12})^2P$. Después de un año el capital será de $(1 + \frac{r}{12})^{12}P$, después de t años será $(1 + \frac{r}{12})^{12t}P$.*

En general, si m pagos de interés son hechos por año, el primer pago de interés será al tiempo $\frac{1}{m}$. Cada pago de interés irá incrementado el principal en un factor de $1 + \frac{r}{m}$. Dado que la tada de interés r permanece sin cambios, después de t años el *valor futuro* de un principal inicial P será

$$V(t) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{tm} P, \tag{2.1}$$

En esta fórmula t debe ser un múltiplo entero del periodo $\frac{1}{m}$. El número $(1 + \frac{r}{m})^{tm}$ es el *factor de crecimiento.* El *valor presente o de descuento* de $V(t)$ es

$$V(0) = V(t)\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-tm},$$

el número $(1 + \frac{r}{m})^{-tm}$ es el *factor de descuento.*

Algunas veces se requiere el valor $V(t)$ de un inversionista en un tiempo intermedio $0 < t < T$, dado el valor $V(T)$ en algún tiempo futuro T. Bajo interés compuesto periodico con frecuencia m y tasa de interés r, tenemos

$$V(t) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-(T-t)m} V(T). \tag{2.2}$$

Comentarios. Observemos que el valor futuro $V(t)$ se incrementa si alguno de los parámetros m, t, r, o P se incrementan, los otros permanecen sin cambios.

Es consecuencia inmediata del comentario anterior que si fijamos el valor terminal $V(t)$, el valor presente se incrementa si alguno de los parámetros r, t, m decrecen, los otros permanecen sin cambios.

2.4. Interés Compuesto Continuo

La fórmula (2.1) para el valor futuro al tiempo t de un principal P con tasa de interés $r > 0$ compuesto de m pagos por año puede ser escrita como

$$V(t) = \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr} P.$$

En el límite cuando $m \to \infty$, obtenemos

$$V(t) = e^{tr} P.$$

Esto es conocido como *interés compuesto continuo.* El correspondiente *factor de crecimiento* es e^{rt}. El *valor presente* bajo el interés compuesto continuo está obviamente dado por

$$V(0) = V(t)e^{-tr}.$$

En este caso el *factor de descuento* es e^{-tr}. Dado el valor terminal $V(T)$, claramente tenemos, para $0 < t < T$

$$V(t) = e^{-r(T-t)} V(T). \tag{2.3}$$

2.5. Bonos Cupón Cero

Un **bono**, es un activo financiero que promete al poseedor una sucesión de pagos garantizados a largo plazo(en información contable, un año o más).

El caso más simple de un bono es un **bono cupón cero**, el cual involucra un solo pago. La correspondiente institución promete cambiar el bono por una cierta cantidad de dinero F, llamado el **valor nominal**, en un día dado T, llamado la **fecha de maduración**. Típicamente, la vida de un bono cupón cero es por arriba de un año.

Dada una tasa de interés, el valor presente de tal bono puede ser calculado fácilmente. Supongamos que tenemos un bono con valor nominal $F = 100$ pesos, fecha de maduración de un año, y la tasa de interés r sea de $12\,\%$. Entonces el valor presente del bono es

$$V(0) = F(1+r)^{-1} \cong 89.29$$

pesos.

Por simplicidad, consideraremos *bonos unitarios* con valor nominal igual a una unidad, es decir $F = 1$.

Típicamente, un bono puede ser vendido en algún tiempo antes de la maduración en el precio del mercado. Este precio al tiempo t es denotado por $B(t,T)$. En particular, $B(0,T)$ es el corriente, y $B(T,T) = 1$ es el valor nominal. Aplicando las fórmulas (2.2) y (2.3) con $V(t) = B(t,T)$, $V(T) = 1$, obtenemos para interés compuesto

$$B(t,T) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m(T-t)}.$$

En el caso de interés compuesto continuo, se tiene

$$B(t,T) = e^{-r(T-t)}.$$

Se puede obtener la tasa de interés r implicada, simplemente resolviendo para r las ecuaciones anteriores.

2.6. Modelos Financieros en Tiempo Continuo

Denotaremos por $(S_t)_{t\geq 0}$ el proceso de precios de un activo. Como primera aproximación al proceso de precios $(S_t)_{t\geq 0}$, se puede sugerir que el comportamiento de los precios sea

$$\Delta S_t \doteq S_{t+\Delta t} - S_t = a\Delta t + b\xi\sqrt{\Delta t};$$

con ξ variable aleatoria distribuída normalmente con media cero y varianza uno, y a y b constantes.

Así que para cualquier intervalo de tiempo de tamaño Δt, el incremento ΔS_t, tiene una distribución normal con varianza proporcional al tamaño del intervalo de tiempo, es decir, $\text{Var}(\Delta S_t) = b^2\Delta t$.

Sin embargo, este modelo no es muy bueno ya que no contempla aspectos clave del proceso de precios. Por ejemplo, es deseable que se tome en cuenta que el incremento de precios sea proporcional al precio actual. Así un modelo determinista más apropiado resulta

$$dS_t = \mu S_t dt$$

o bien,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt,$$

de donde

$$S_t = S_0 e^{\mu t}.$$

Así, para un intervalo de tiempo de tamaño Δt, el incremento esperado de S_t es $\mu S_t \Delta t$. El parámetro μ es llamado la **tasa esperada de rendimiento (retorno)** expresado en forma decimal.

Ahora para un modelo aleatorio, una suposición razonable es que la varianza del porcentaje de rendimiento en un periodo corto de tiempo Δt, sea la misma sin importar cual sea el precio. Dicho de otra forma, el inversionista tiene la misma incertidumbre sobre el porcentaje de rendimiento cuando el precio es \$100.00 que cuando es \$600.00. Definamos entonces a σ^2 como la **tasa de variación del cambio proporcional del precio del activo.** Lo cual significa que $\sigma^2\Delta t$ es la varianza del cambio proporcional del precio del activo para un periodo de tiempo de tamaño Δt, es decir,

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_{t+\Delta t}-S_t}{S_t}\right)=\sigma^2 t.$$

La tasa instantánea de variación de S_t resulta ser $\sigma^2 S_t^2$. De aquí tenemos que $(S_t)_{t\geq 0}$ satisface una ecuación del tipo

$$\Delta S_t=\mu S_t\Delta t+\sigma S_t\xi\sqrt{\Delta t};$$

con ξ distribuída normalmente con media cero y varianza uno. Si pasamos al tiempo continuo tenemos entonces que el proceso de precios satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t. \tag{2.4}$$

Afortunadamente esta EDE es de esas que pueden ser resueltas explícitamente.

Proposición 2.6.1 *La solución a* (2.4) *está dada por*

$$S_t=S_0 e^{\sigma W_t+(\mu-(\sigma^2/2))t}. \tag{2.5}$$

Demostración. Usando el Teorema 1.7.1 existe una única solución de (2.4), así que necesitamos verificar que S_t dada como en (2.5) satisface (2.4). Supongamos primero que $S_0=1$. Sea $X_t=\sigma W_t+(\mu-(\sigma^2/2)t)$, sea $f(x)=e^x$, y apliquemos la fórmula de Itô a esta función. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
S_t &= e^{X_t}=e^{X_0}+\int_0^t e^{X_s}dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t e^{X_s}d[X]_s\\
&= 1+\int_0^t S_s\sigma dW_s+\int_0^t S_s(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)ds+\frac{1}{2}\int_0^t S_s\sigma^2 ds\\
&= 1+\int_0^t S_s\sigma dW_s+\int_0^t S_s\mu ds,
\end{aligned}$$

lo cua es (2.4) en forma integral. Si $S_0\neq 0$, sólo se multiplica ambos lados por S_0.

■

A este proceso se le conoce como **Movimiento Browniano Geométrico**.

Ya que hemos modelado el proceso de precios de un activo, veamos como puede ser aplicado la versión clásica del Teorema de Girsanov al precio de un activo.

Ejemplo 2.6.1 *Sea S_t el precio de un activo al tiempo t dado por:*

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + \mu S_t dt,$$

con W un P-m.b. estándar.

Queremos probar, utilizando el Teorema de Girsanov (versión clásica) que S es una Q-martingala local continua, donde Q es una probabilidad que será definida como en Girsanov (versión clásica).

Sea $T \in \mathbb{R}_+$. Definamos, para cada $0 \leq t \leq T$,

$$Y_t = -\frac{\mu}{\sigma}.$$

Es claro que Y es un proceso previsible y $\int_0^T Y_s^2 ds < \infty$, y definamos para cada $t \geq 0$, M_t como la exponencial estocástica de Y_t, o sea

$$M_t = \exp\left(\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)t\right).$$

Tenemos que $E(M_t) = 1$, para cada $0 \leq t \leq T$, en efecto:

$$\begin{aligned}
E(M_t) &= E\big(e^{-\frac{\mu}{\sigma}W_t} e^{-\frac{1\mu^2}{2\sigma^2}t}\big) \\
&= e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t} E\big(e^{-\frac{\mu}{\sigma}W_t}\big) \\
&= e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t} e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t} \\
&= e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad es cierta ya que la v.a. W_t está distribuida normalmente con media cero y varianza t, y se aplica el siguiente resultado de probabilidad con $a = -\frac{\mu}{\sigma}$:

Proposición 2.6.2 *Si X es una v.a. distribuida normalmente con media m y varianza s^2 y a es una constante cualquiera entonces:*

$$E(e^{aX}) = \exp\left(am + \frac{s^2a^2}{2}\right).$$

En particular tenemos $E(M_T) = 1$.

El Teorema de Girsanov (versión clásica) nos implica que $(W_t - \int_0^t Y_s ds)_{t\geq 0}$ es un Q-m.b. sobre $[0,T]$, donde Q es la medida de probabilidad definida como $dQ = M_T dP$. Pero

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t Y_s ds = W_t - \int_0^t \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) ds = W_t + \frac{\mu}{\sigma} t,$$

para toda $t \in [0,T]$.

Así que $\tilde{W}$ es un Q-m.b. en $[0,T]$, luego una Q-martingala local continua en $[0,T]$.

Notemos que

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + \mu S_t dt = \sigma S_t \left(dW_t + \frac{\mu}{\sigma} dt \right) = \sigma S_t d\tilde{W}_t,$$

o bien

$$S_t = S_0 + \sigma \int_0^t S_s d\tilde{W}_s.$$

Así que podemos concluir que S es una Q-martingala local continua en $[0,T]$. En realidad S resulta ser una verdadera martingala respecto de la medida Q (ver comentarios de abajo). ∎

Comentarios.$(M_t)_{t\geq 0}$ resulta ser una verdadera martingala respecto de la medida P, en efecto, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.6.1 *Si L es martingala local tal que $\exp\left(\frac{1}{2}L\right)$ es submartingala o $E\left(\exp(\frac{1}{2}[L,L]_t)\right) < \infty$ para toda $t \geq 0$, entonces el proceso formado por las variables aleatorias:*

$$\mathcal{E}(L)_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}[L,L]_t\right),$$

es una martingala.

Demostración. Ver [17], pag. 333.

Tomemos $L_t = -\frac{\mu}{\sigma}W_t$, para cada $t \geq 0$. Tenemos que L es martingala local, con $[L,L]_t = \frac{\mu^2}{\sigma^2}t$, y

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}[L,L]_t\right)\right) = E\left(\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right)\right) = \exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right) < \infty,$$

para cada $t \geq 0$.

Además

$$\mathcal{E}(L)_t = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}W_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t\right) = M_t.$$

Así que $(M_t)_{t\geq 0}$ es una verdadera martingala.

El proceso de precios S también resulta ser una verdadera martingala respecto a la medida Q, en efecto, tenemos que $dS_t = \sigma S_t d\tilde{W}_t$, o bien

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Sea $L_t = \sigma\tilde{W}_t$. L es Q martingala local con $[L,L]_t = \sigma^2 t$ y

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}[L,L]_t\right)\right] = E(e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}) = e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} < \infty,$$

para cada $t \geq 0$.

Además

$$\mathcal{E}(L)_t = \exp\left(\sigma\tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),$$

así que $\mathcal{E}(L)$ es Q martingala. Y como

$$S_t = S_0\mathcal{E}(L)_t = S_0 \exp\left(\sigma\tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),$$

entonces $(S_t)_{t\geq 0}$ es también Q martingala.

■

Ahora encontremos una expresión para el valor presente o valor descontado del precio de un activo financiero. Sea r la tasa de interés libre de riesgo. Supongamos por el momento que la tasa de interés es 0. Si adquirimos Δ_0 acciones (posiblemente un número negativo) al tiempo t_0, la inversión cambia a Δ_1 acciones al tiempo t_1, luego la inversión cambia a Δ_2 al tiempo t_2, etc., entonces nuestra riqueza al tiempo t será

$$S_{t_0} + \Delta_0(S_{t_1} - S_{t_0}) + \Delta_1(S_{t_2} - S_{t_1}) + \cdots + \Delta_i(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}). \tag{2.6}$$

Para ver esto, al tiempo t_0 tenemos la riqueza original S_{t_0}. Compramos Δ_0 acciones y el costo es $\Delta_0 S_{t_0}$. Al tiempo t_1 vendemos las Δ_0 acciones por el precio de S_{t_1} por acción, y luego la riqueza es ahora $S_{t_0} + \Delta_0(S_{t_1} - S_{t_0})$. Ahora pagamos $\Delta_1 S_{t_1}$ por Δ_1 acciones al tiempo t_1 y continuamos. El lado derecho de (2.6) es lo mismo que

$$S_{t_0} + \int_0^t \Delta(s)dS_s,$$

donde tenemos $t \geq t_{i+1}$ y $\Delta(s) = \Delta_i$ para $t_i \leq s < t_{i+1}$. En otras palabras, nuestra riqueza está dada por una integral estocástica con respecto al precio de la acción. El requisito que el integrando de una integral estocástica sea adaptado es muy natural: no podemos basar el número de acciones que tenemos al tiempo s en información que sólo será disponible hasta el futuro.

¿Cómo podríamos modificar lo que hemos hecho cuando la tasa de interés r no sea cero? Sea $\tilde{S}_t$ el valor presente del precio del activo. Luego

$$\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t.$$

Note que $\tilde{S}_0 = S_0$. Cuando tengamos Δ_i acciones desde t_i hasta t_{i+1}, nuestra ganancia en pesos actualizados será

$$\Delta_i(\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i}).$$

La fórmula para nuestra riqueza actualizada se convierte entonces en

$$S_{t_0} + \int_0^t \Delta(s) d\tilde{S}_s.$$

De la fórmula de Itô para el producto,

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= e^{-rt} dS_t - re^{-rt} S_t dt \\ &= e^{-rt}\sigma S_t dW_t + e^{-rt}\mu S_t dt - re^{-rt} S_t dt \\ &= \sigma \tilde{S}_t dW_t + (\mu - r)\tilde{S}_t dt. \end{aligned}$$

Similarmente a (2.5), la solución a esta EDE está dada por

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 e^{\sigma W_t + (\mu - r - \sigma^2/2)t}. \tag{2.7}$$

El modelo en tiempo continuo para el precio de activo está dado por (2.4), cuando se hace la suposición de que no hay costos de transacción, así pues se puede negociar tantas acciones como uno quiera y variar el monto que se tiene en una forma continua. Esto, claramente, no es la manera en que el mercado trabaja actualmente, por ejemplo, los precios de los activos son discretos, sin embargo, este ha probado ser un muy buen modelo.

2.7. Mercados Completos

Comenzaremos esta sección presentando las principales ideas de mercados completos en tiempo discreto, para luego dar una introducción de mercados completos en tiempo continuo.

Un modelo de mercado financiero discreto se construye sobre un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dotado de una filtración $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$. El tiempo N, será la mayoría de las veces (en la práctica) la fecha de expiración de las opciones. Supondremos que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$. También vamos a suponer que en el mercado se tienen $d+1$ activos financieros, tales que, sus precios al tiempo n en el mercado están dados por las v.a.'s: $S_n^0, \ldots, S_n^d$ con valores estrictamente positivos, medibles con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. El vector $S_n = (S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d)$ es el vector de precios al instante n. El activo enumerado con 0 representa las *inversiones sin riesgo* y haremos $S_0^0 = 1$. Si la tasa de interés de las *inversiones sin riesgo* en un periodo de tiempo es constante e igual a r, tendremos que el factor de crecimiento es igual a $S_n^0 = (1+r)^n$. Sea $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ el factor de descuento. Los activos enumerados del 1 a d serán llamados, *activos con riesgos*

Definición 2.7.1 *Una* **estrategia de inversión** *o* **portafolio de inversión** *está definido por un proceso estocástico* $\phi = ((\phi_n^0, \ldots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ *con valores en* $\mathbb{R}^{d+1}$, *dando en cada instante* n *las cantidades* $\phi_n^0, \ldots, \phi_n^d$ *de los diversos activos que se tienen en el portafolio. Vamos a suponer que el proceso* ϕ *es previsible, es decir, para todo* n, $n \leq N$, ϕ_n *es* $\mathcal{F}_{n-1}$*-medible.*

El valor del portafolio en la fecha n está dado por el producto escalar:

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \Sigma_{i=0}^d \phi_n^i S_n^i,$$

el valor presente o actualizado está dado por:

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n V_n = \beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n,$$

donde $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \ldots, \beta_n S_n^d)$ es el vector de precios presentes o actualizados.

Definición 2.7.2 *Se dice que un portafolio es* **autofinanciable** *si la siguiente relación se cumple para toda* $n \in \{0, 1, \ldots N-1\}$:

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n.$$

que es equivalente a:

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n,$$

y también es equivalente a:

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n).$$

En el tiempo $n+1$, el valor del portafolio es $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1}$ y la diferencia $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_{n+1} \cdot S_n$ representa la ganancia (neta) debida a las variaciones de los precios entre los instantes n y $n+1$. Así un portafolio autofinanciable es un portafolio donde las variaciones de su valor provienen únicamente de las ganancias debidas a la variación de sus precios.

Definición 2.7.3 *Un portafolio ϕ se dice que es* **admisible** *si éste es autofinanciable y si $V_n(\phi) \geq 0$, para toda $n \in \{1, \ldots, N\}$.*

Definición 2.7.4 *Un* **activo condicionado** *es un instrumento financiero consistente de:*

i) una función de pago $g = \{g_t;\ 0 \leq t \leq N\}$, y

ii) un pago terminal f_N en la maduración.

Aquí g es no negativa, medible y adaptada a la filtración $\mathcal{F}_t$; f_N es una variable aleatoria no negativa y $\mathcal{F}_N$-medible.

Comentario. Una opción es un caso especial de activo condicionado; para el caso de una opción de compra europea tenemos $g \equiv 0$ y $f_N = (S_N - K)^+$ (ver sección 3.8).

Definición 2.7.5 *Se dice que un activo condicionado es* **replicable**, *si existe un portafolio admisible tal que, el valor en el instante N es igual al pago terminal f_N.*

La noción de **arbitraje** (obtener ganancias sin tomar riesgos) se formaliza de la siguiente manera:

Definición 2.7.6 *Un portafolio ϕ es de* **arbitraje** *si es un portafolio admisible tal que $V_0(\phi) = 0$ y $V_N(\phi) > 0$.*

Definición 2.7.7 *Se dice que el mercado es* **viable o libre de arbitraje**, *si no existe portafolio de arbitraje.*

Teorema 2.7.1 *El mercado es libre de arbitraje si y sólo si existe una medida de probabilidad P^* equivalente a P, bajo la cual el proceso de precios actualizados $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ es una martingala.*

La medida de probabilidad P^* también es llamada la **medida neutra al riesgo**.

En un mercado libre de arbitraje, para que una opción sea simulable es suficiente que exista un portafolio autofinanciable con valor igual al pago terminal f_N en el instante N. En efecto, si ϕ es un portafolio autofinanciable y P^* es una probabilidad equivalente a P, con la cual los precios actualizados son martingalas entonces, con P^*, $(\tilde{V}_n(\phi))$ es una martingala. Por tanto, tenemos, para $n \in \{0, \ldots, N\}$, $\tilde{V}_n(\phi) = E^*(\tilde{V}_N(\phi)/\mathcal{F}_n)$. Así es claro que si $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$ (en particular si $V_N(\phi) = f_N$), el portafolio ϕ es admisible.

Definición 2.7.8 *Se dice que el mercado es* **completo** *si cualquier activo condicionado es replicable.*

Suponer que un mercado financiero es completo, es una hipótesis restrictiva y la justificación económica es menos clara que la hipótesis de no arbitraje. El interés de los mercados completos es que, estos se ajustan bien a una teoría muy sencilla para la evaluación de activos condicionales. El modelo de Cox-Rubinstein-Ross, que veremos en la última sección de este capítulo, es un ejemplo de modelo de mercado completo muy sencillo.

El siguiente teorema da una caracterización de los mercados libres de arbitraje y completos.

Teorema 2.7.2 *Un mercado libre de arbitraje es completo si y sólo si, existe una única medida neutra al riesgo P^*.*

Ahora estudiaremos mercados completos en tiempo continuo.

Supongamos que el precio del activo está modelado por

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde μ y σ son constantes y $(W_t)_{t\geq 0}$ es un m.b. estándar. El proceso está definido sobre el intervalo $[0, T]$ donde T es la maduración de la opción.

Definición 2.7.9 *Un* **portafolio de inversión** *es definido como un proceso $\phi = (\phi_t)_{0\leq t\leq T} = ((H_t^0, H_t))$ con valores en $\mathbb{R}^2$, adaptado a la filtración natural $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ del m.b.; los componentes H_t^0 y H_t son las cantidades de activos sin riesgo y con riesgo respectivamente, que tiene el portafolio al tiempo t.*

Definición 2.7.10 *El* **valor del portafolio** *al tiempo t está dado por*

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t,$$

donde S_t^0 es el precio de los activos sin riesgo al tiempo t.

Definición 2.7.11 *El portafolio se llama* **autofinanciable** *si se cumple*

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

Observación 2.7.1 *Notemos que aplicando la Fórmula de Integración por Partes a la definición del valor del portafolio obtenemos:*

$$\begin{aligned} dV_t &= H_t^0 dS_t^0 + S_t^0 dH_t^0 + [H^0, S^0]_t \\ &\quad + H_t dS_t + S_t dH_t + [H, S]_t \\ &= H_t^0 dS_t^0 + S_t^0 dH_t^0 + H_t dS_t + S_t dH_t. \end{aligned}$$

Que dV_t cumpla con la igualdad de la definición 2.7.11 indica que un portafolio autofinanciable es un portafolio donde las variaciones de su valor provienen únicamente de los cambios o variaciones en los precios de los que consta.[1]

[1]Comunicación personal del Dr. Carlos Ibarra.

Definición 2.7.12 *Una medida de probabilidad P^* se dice que es* **neutra al riesgo** *si*

i) P^* y P son equivalentes.

ii) Bajo P^*, el precio descontado del activo es una martingala.

Definición 2.7.13 *Un portafolio $\phi(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ es* **admisible** *si es autofinanciable y si el valor descontado $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t\tilde{S}_t$ del correspondiente portafolio es no negativo para toda $t \geq 0$, y tal que $\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ es cuadrado integrable bajo P^*.*

Lema 2.7.1 *Sea P^* una medida neutra al riesgo y sea $V_t(\phi)$ el valor del portafolio al tiempo t. Con la medida P^* el valor descontado del portafolio es una martingala.*

Definición 2.7.14 *Un portafolio ϕ es de* **arbitraje** *si $V_0(\phi) = 0$ y satisface para alguna $T > 0$*

$$P(V_T(\phi) \geq 0) = 1, \qquad P(V_t(\phi) > 0) > 0.$$

Definición 2.7.15 *Se dice que una opción es* **replicable** *si existe un portafolio admisible tal que el valor del portafolio al tiempo T (donde T es la fecha de maduración de la opción) es igual al pago terminal de la opción.*

Teoremas Fundamentales de Valuación de Activos

Teorema 2.7.3 (Primer Teorema Fundamental) *Si un modelo de mercado tiene una medida de probabilidad neutra al riesgo, entonces no hay arbitraje.*

Observación 2.7.2 *El recíproco en el Teorema anterior también es cierto si cambiamos la condición de arbitraje por las condiciones NFLVR "no free lunch wit vanish risk", ver [3].*

Definición 2.7.16 *Un modelo de mercado se dice que es* **completo** *si cualquier opción es replicable.*

Teorema 2.7.4 (Segundo Teorema Fundamental) *Consideremos un modelo de mercado que tiene una medida de probabilidad neutra al riesgo. Entonces el modelo de mercado es completo si y sólo si la medida neutra al riesgo es única.*

A continuación veremos que si el proceso de precios está modelado por un m.b. geométrico, entonces existe una medida neutra al riesgo; luego utilizando el primer Teorema Fundamental de Precios concluiremos que si un mercado está modelado bajo el m.b. geométrico entonces, no hay arbitraje.

Teorema 2.7.5 *Sean $T \in \mathbb{R}_+$, $(G_t)_{t\geq 0}$ un m.b. geométrico, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtración natural de este m.b. y V una v.a. $\mathcal{F}_T$-medible tal que $EV^2 < \infty$. Entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ y un proceso $(K_t)_{t\geq 0}$ previsible, adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tal que $E\int_0^T K_s^2 ds < \infty$ y*

$$V = c + \int_0^T K_s dG_s.$$

Además, existe una probabilidad P^* bajo la cual $(G_t)_{t\geq 0}$ es una martingala.

Demostración. G satisface

$$dG_t = \sigma G_t dW_t + (\mu - r)G_t dt,$$

con W un P-m.b.

Definamos una nueva probabilidad P^* mediante

$$\frac{dP^*}{dP} = M_T = \exp(aW_T - a^2T/2),$$

con $a = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Si escribimos para cada $t \geq 0$, $\tilde{W}_t = W_t - at$, por el Teorema de Girsavov $(\tilde{W}_t)_{t\geq 0}$ es un m.b. bajo P^*. Luego, como $W_t = \tilde{W}_t + at$,

$$\begin{aligned} dG_t &= \sigma G_t d\tilde{W}_t + \sigma G_t a dt + (\mu - r)G_t dt \\ &= \sigma G_t d\tilde{W}_t. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dado que $\tilde{W}$ es un m.b. bajo P^*, entonces G debe ser una P^*-martingala. La ecuación anterior la podemos reescribir como

$$d\tilde{W}_t = \sigma^{-1}G_t^{-1}dG_t. \tag{2.9}$$

Ahora, dada una variable aleatoria V, $\mathcal{F}_T$-medible, sabemos por el Teorema de Representación Previsible, que existe una constante c y un proceso previsible $(H_t)_{t\geq 0}$ adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ [2] tal que $E\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ y

$$V = c + \int_0^T H_s d\tilde{W}_s.$$

Por lo tanto usando (2.9) tenemos

$$V = c + \int_0^T H_s \sigma^{-1} G_s^{-1} dG_s.$$

■

Entonces si el proceso de precios está modelado por un m.b. geométrico, también se tiene que el proceso de precios actualizados $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ es un m.b. geométrico, luego por el Teorema anterior hemos probado que existe una medida de probabilidad bajo la cual $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ es una martingala, o sea que existe una medida neutra al riesgo, luego utilizando el Primer Teorema Fundamental de Precios, tenemos que no hay arbitraje.

2.8. Fórmula de Black-Scholes.

Derivaremos la fórmula para el precio de una opción de compra europea. Consideremos una opción call (de compra) europea, con fecha de expiración T y precio strike K. Sea S_t el precio de un activo al tiempo t. Al tiempo T, si S_T es menor que K, entonces la opción no tiene valor. Si S_T es mayor que K, podemos ejercer la opción para comprar el activo al precio K, y obtener una ganancia de $S_T - K$. Entonces al vencimiento de una opción call europea,

[2] Dado que G satisface $G_t = G_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - r - \sigma^2/2)t$, para cada $t \geq 0$, dado G_t podemos determinar W_t y viceversa, así que las σ-álgebras generadas por G y W son las mismas.

ésta será ejercida si S_T es mayor que K. Por lo tanto el valor de la opción al tiempo T es

$$V_T = (S_T - K)^+,$$

donde x^+ es $\max\{x, 0\}$.

Luego el valor presente de V_T es

$$V_0 = e^{-rT}V_T = e^{-rT}(S_T - K)^+ = (e^{-rT}S_T - e^{-rT}K)^+ = (\tilde{S}_T - e^{-rT}K)^+,$$

con $r > 0$ la tasa de interés constante.

Teorema 2.8.1 *El precio de la opción debe ser $E^*V_0 = c$, con c una constante.*

Demostración. Como V_0 es una v.a. $\mathcal{F}_T$-medible, tenemos por el Teorema 2.7.5 que

$$V_0 = c + \int_0^T K_s d\tilde{S}_s, \tag{2.10}$$

donde $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ es el proceso de precios presentes o actualizados del activo y bajo P^*, $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ es una martingala. Luego tomando esperanzas en (2.10) obtenemos

$$E^*V_0 = c.$$

■

Podemos calcular el valor de c explícitamente.

Recordemos que bajo P^* el precio actualizado del activo satisface, según la ecuación (2.8)

$$d\tilde{S}_T = \sigma\tilde{S}_T d\tilde{W}_T,$$

donde $(\tilde{W}_t)_{t\geq 0}$ es un m.b. bajo P^*. Luego

$$\tilde{S}_T = \tilde{S}_0 e^{\sigma\tilde{W}_T - \sigma^2 T/2}.$$

Dado que conocemos la densidad de $\tilde{W}_T$ que es justamente

$$(2\pi T)^{-1/2}e^{-x^2/(2T)},$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
E^*V_0 &= E^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)^+] \\
&= E^*[(\tilde{S}_0 e^{\sigma \tilde{W}_T - (\sigma^2/2)T} - e^{-rT}K)^+] \\
&= \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} (\tilde{S}_0 e^{\sigma x - \sigma^2 T/2} - Ke^{-rT}) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \\
&= \tilde{S}_0 \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - Ke^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \tilde{S}_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2),
\end{aligned}
$$

donde

$$
d_1 = \frac{\ln \frac{\tilde{S}_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln \frac{\tilde{S}_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},
$$

y

$$
N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}
$$

es la función de distribución normal.

La elección del tiempo 0 para calcular el precio de la opción es arbitrario. En general, el precio de la opción puede ser calculado para cualquier tiempo $t < T$. Sustituyendo a 0 por t y a T por $T - t$ en la fórmula de arriba, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.8.2 (Fórmula de Black-Scholes) *El precio al tiempo t de una opción call europea con precio strike K y fecha de ejercicio T, donde $t < T$, está dado por*

$$
E^*V_t = \tilde{S}_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),
$$

donde

$$
d_1 = \frac{\ln \frac{\tilde{S}_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \qquad d_2 = \frac{\ln \frac{\tilde{S}_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},
$$

Demostración. Ver [6], pág. 188.

Observemos que la fórmula final depende de σ pero es completamente independiente de μ, es decir, no hay necesidad de conocer μ para trabajar el precio de una opción call (o put) europea en tiempo continuo. La razón por la que ocurre esto es porque bajo P^* el proceso $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ satisface $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t d\tilde{W}_t$, y la solución explícita de esta ecuación es

$$P_t = P_0 e^{\sigma\tilde{W}_t - \sigma^2 t/2},$$

y en esta fórmula no aparece μ.

2.9. Valuación de una Opción de Venta Americana

La valuación propia de las opciones Americanas es uno de los problemas no resueltos más importantes en matemáticas financieras. Para una opción put (de venta) europea con fecha de expiración T y precio strike K se paga $(K - S_T)^+$ al tiempo T, mientras que una opción put americana permite ser ejercida antes de tiempo. Si se ejerce una opción put americana al tiempo $t < T$, se recibe $(K - S_t)^+$. Entonces durante el periodo $[t, T]$ se reciben intereses, y la cantidad que se tiene al final del periodo es $(K - S_t)^+ e^{r(T-t)}$. El valor presente es $(K - S_t)^+ e^{-rt}$. Queremos encontrar una regla, conocida como la póliza de ejercicio, de cuándo ejercer la venta y cuál es el valor para esta póliza. Dado que no podemos ver hacia el futuro, para un tiempo de paro τ tenemos que maximizar

$$E^* e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+.$$

No existe teóricamente una buena solución para encontrar el tiempo de paro τ, aunque existen buenas aproximaciones. Por lo tanto discutiremos sólo un bosquejo de la teoría de paro óptimo, el cual retoma el problema en otra forma.

En la sección 3.6.4 se encontrará el tiempo de ejercicio óptimo explícitamente, para opciones de venta americanas a perpetuidad.

Sea g_t la cantidad actualizada del dinero que se recibirá al tiempo t. Para opciones de venta americanas, tenemos

$$g_t = e^{-rt}(K - S_t)^+.$$

Nuestro problema es maximizar $E^* g_\tau$ sobre todos los tiempos de paro τ. Primero necesitamos la siguiente:

Proposición 2.9.1 *Si S y T son tiempos de paro acotados tales que $S \leq T$ y M es una martingala, entonces*

$$E[M_T|\mathcal{F}_S] = M_S.$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{F}_S$. Definamos U por

$$U(w) = \begin{cases} S(w) & \text{si } w \in A, \\ T(w) & \text{si } w \notin A. \end{cases}$$

Es fácil ver que U es un tiempo de paro, así por el Teorema de Paro de Doob,

$$EM_0 = EM_U = E[M_S I_A] + E[M_T I_{A^c}].$$

También,

$$EM_0 = EM_T = E[M_T I_A] + E[M_T I_{A^c}].$$

Tomando la diferencia, $E[M_T I_A] = E[M_s I_A]$, lo cual es lo que necesitabamos probar.

∎

Dadas dos supermartingalas $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$, es fácil checar que $(X_t \wedge Y_t)_{t\geq 0}$ es también supermartingala. También, si $(X_t^n)_{t\geq 0}$ son supermartingalas para cada $n \in \mathbb{N}$, con $X_t^n \downarrow X_t$, se puede probar que $(X_t)_{t\geq 0}$ es nuevamente una supermartingala. Con estos hechos, se puede probar que dado un proceso tal como $(g_t)_{t\geq 0}$, existe una mínima supermartingala que domina a $(g_t)_{t\geq 0}$ (ver [8] págs. 88-93).

Así pues, definamos $(W_t)_{t\geq 0}$ una supermartingala (con respecto a P^*) tal que $W_t \geq g_t$ c.s. para cada t y si $(Y_t)_{t\geq 0}$ es otra supermartingala con $Y_t \geq g_t$ para toda t, entonces $W_t \leq Y_t$ para toda t. Pongamos $\bar{\tau} = \inf\{t|W_t = g_t\}$. Probaremos que $\bar{\tau}$ es la solución al problema de encontrar el tiempo de paro óptimo.

Para cada $t \geq 0$, sean

$$\mathcal{T}_t = \{\tau|\tau \text{ es un tiempo de paro, } t \leq \tau \leq T\},$$

y

$$V_t = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} E^*[g_\tau|\mathcal{F}_t].$$

Proposición 2.9.2 *$(V_t)_{t\geq 0}$ es una supermartingala y $V_t \geq g_t$ para toda $t \geq 0$.*

Demostración. El tiempo fijo t es un tiempo de paro en $\mathcal{T}_t$, luego $V_t \geq E^*[g_t|\mathcal{F}_t] = g_t$, o $V_t \geq g_t$, así que sólo necesitamos probar que $(V_t)_{t\geq 0}$ es una supermartingala.

Supongamos que $s < t$. Sea π un tiempo de paro en $\mathcal{T}_t$ para el cual $V_t = E^*[g_\pi|\mathcal{F}_t]$, $\pi \in \mathcal{T}_t \subset \mathcal{T}_s$. Entonces

$$E^*[V_t|\mathcal{F}_s] = E^*[g_\pi|\mathcal{F}_s] \leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}_s} E[g_\tau|\mathcal{F}_s] = V_s.$$

■

Proposición 2.9.3 *Si $(Y_t)_{t\geq 0}$ es una supermartingala con $Y_t \geq g_t$ para toda $t \geq 0$, entonces $Y_t \geq V_t$, para toda $t \geq 0$.*

Demostración. Si $\tau \in \mathcal{T}_t$, entonces dado que $(Y_t)_{t\geq 0}$ es una supermartingala, tenemos

$$E^*[Y_\tau|\mathcal{F}_t] \leq Y_t.$$

Luego

$$V_t = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t} E^*[g_\tau|\mathcal{F}_t] \leq \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t} E^*[Y_t|\mathcal{F}_t] \leq Y_t.$$

■

Lo que tenemos probado es que W_t es igual a V_t, para toda $t \geq 0$. Resta probar que $\bar{\tau}$ es óptimo. Recordemos que tenemos que $\mathcal{F}_0$ es la σ-álgebra generada por S_0, y por lo tanto consiste de solamente $\emptyset$ y Ω.

Proposición 2.9.4 *$\bar{\tau}$ es un tiempo de paro óptimo.*

Demostración. Dado que $\mathcal{F}_0$ es trivial, $V_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0} E^*[g_\tau|\mathcal{F}_0] = \sup_{\tau} E^*[g_\tau]$. Sea σ un tiempo de paro donde el supremo es alcanzado. Entonces

$$V_0 \geq E^*[V_\sigma|\mathcal{F}_0] = E^*[V_\sigma] \geq E^*[g_\sigma] = V_0.$$

Por lo tanto todas la desigualdades deben ser igualdades. Puesto que $V_\sigma \geq g_\sigma$, debemos tener que $V_\sigma = g_\sigma$. Como $\bar{\tau}$ es el primer tiempo tal que W_t es igual a g_t y $W_t = V_t$, vemos que $\bar{\tau} \leq \sigma$. Entonces

$$E^*[g_{\bar{\tau}}] = E^*[V_{\bar{\tau}}] \geq E^* V_\sigma = E^* g_\sigma.$$

Por lo tanto el valor esperado de $g_{\bar{\tau}}$ es tan pequeño o tan grande como el valor esperado de g_σ, y por lo tanto $\bar{\tau}$ es también un tiempo de paro óptimo.

■

2.10. Valuación de una Opción de Venta Americana a Perpetuidad

Las opciones de venta americanas a perpetuidad son interesantes ya que la decisión de ejercicio óptimo no es obvia, pero son simples porque el tiempo de ejercicio óptimo se puede determinar explícitamente. Este tipo de opciones no se comercializan pero nos dan las ideas que están detrás de opciones realistas.

El activo subyacente tiene un precio $(S_t)_{t\geq 0}$, modelado por un m.b. geométrico, esto es

$$dS_t = rS_t dt + \sigma s_t d\tilde{W}_t$$

cuya solución es

$$S_t = S_0 e^{\sigma \tilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t},$$

donde $r, \sigma > 0$, y $\tilde{W}_t$ es un m.b. bajo la medida de probabilidad neutra al riesgo P^*. La opción de venta americana a perpetuidad paga $(K - S_t)$ si se ejerce en el instante t. Este es llamado su valor intrínseco.

Definición 2.10.1 *Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los tiempos de paro. El* **precio de una opción de venta americana a perpetuidad** *se define como*

$$v_*(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E^*[e^{-r\tau}(K - S_\tau)], \tag{2.11}$$

donde $x = S_0$ es el precio inicial del activo subyacente. Si llegara a pasar que $\tau = +\infty$, se interpreta a $e^{-r\tau}(K - S_\tau)$ como cero.

La idea de la definición anterior es que el propietario de la opción a perpetuidad puede escoger un tiempo de ejercicio τ, con la condición de que no puede tener información del futuro para determinar cuando ejercer. En términos matemáticos, la condición de no tener información del futuro, se traduce en que τ sea un tiempo de paro.

El tenedor de la opción debe escoger la estrategia de ejercicio que maximice el pago esperado, descontando el tiempo cero.

Notemos que $v_*(x)$ definido anteriormente es el capital que el vendedor de la opción requiere inicialmente para administrarlo de tal suerte que pueda responder a la reclamación del tenedor sin importar cuando ejerza.

Como el propietario de una opción de perpetuidad puede ejercer en cualquier momento y no hay fecha de expiración, es razonable esperar que la decisión de cuándo ejercer depende únicamente del valor de S_t y no de la variable del tiempo t. El propietario de la opción de venta debe ejercer cuando S_t cae suficientemente abajo de K. En otras palabras es razonable esperar que la decisión para el ejercicio óptimo sea tan pronto S_t esté por debajo del nivel L_*.

Necesitamos entonces responder dos preguntas:

i) ¿Cuál es el valor de L_* y cómo sabemos que éste corresponde al ejercicio óptimo?

ii) ¿Cuál es el valor de la opción de venta?

Para opciones de venta americanas a perpetuidad podemos fundamentar las respuestas en cálculos explícitos.

Sea $L \in [0, K]$ dado. Supongamos que se ejerce la opción en cuanto el precio del activo sea L. Definamos

$$\tau_L = \text{ínf}\{t : S_t = L\}, \tag{2.12}$$

y

$$\begin{aligned} v_L(x) &= E^*[e^{-r\tau_L}(K - S_{\tau_L})^+] \\ &= \begin{cases} K - x & \text{si } x \leq L, \text{ ya que aquí } \tau_L = 0 \\ (K - L)E^* e^{-r\tau_L} & \text{si } x > L. \end{cases} \end{aligned}$$

Calculemos la transformada de Laplace del primer tiempo de llegada del m.b.

Teorema 2.10.1 *Sea* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un m.b. y sea* $T_a = \text{ínf}\{t : W_t = a\}$ *con* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* $E[e^{-\alpha T_a}] = e^{-a\sqrt{2\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Notemos que al no ser diferenciable en cero $e^{-a\sqrt{2\alpha}}$, se tiene que $ET_a = +\infty$, es decir el m.b. llega a cualquier $a \in \mathbb{R}$, pero toma en promedio un tiempo infinito.

Demostración. Como $e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ es una martingala local y es acotada en el intervalo de tiempo $[0, T_a]$, aplicando el Teorema de Paro de Doob, se tiene

$$E[e^{\lambda W_{T_a} - \frac{1}{\lambda}\lambda^2 T_a}] = 1.$$

Así que para $\lambda = (2\alpha)^{1/2}$, teniendo en cuenta que $W_{T_a} = a$,

$$E[e^{-\alpha T_a}] = e^{-a\sqrt{2\alpha}}.$$

■

Corolario 2.10.1 *Definamos* $X_t = \mu t + \tilde{W}_t$, *con* $\mu \in \mathbb{R}$ *y sea*

$$\tau_m = \text{ínf}\{t : X_t = m\}.$$

Entonces

$$E^* e^{-\alpha \tau_m} = e^{-m(\mu + \sqrt{2\alpha + \mu^2})}, \quad \alpha, m > 0.$$

Demostración. Sea $\sigma = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\alpha}$. Entonces

$$\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = \alpha$$

y

$$\begin{aligned} e^{\sigma X_t - \alpha t} &= e^{\mu t + W_t - (\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= e^{\sigma\mu t + \sigma W_t - \sigma\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} = e^{W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \end{aligned}$$

Sabemos que $e^{\sigma W_{\tau_m} - \frac{1}{2}\sigma^2 \tau_m} = e^{\sigma X_{\tau_m} - \alpha\tau_m}$ es martingala, así que

$$1 = Ee^{\sigma X_{\tau_m} - \alpha\tau_m} = e^{\sigma m} Ee^{-\alpha\tau_m},$$

o sea que

$$Ee^{-\alpha\tau_m} = e^{-\sigma x},$$

sustituyendo σ obtenemos

$$Ee^{-\alpha\tau_m} = e^{\mu x - x\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}}$$

■

Lema 2.10.1 *la función $v_L(x)$ está dada por*

$$v_L(x) = \begin{cases} K - x, & 0 \leq x \leq L \\ (K-L)(\frac{x}{L})^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, & x > L \end{cases}$$

Demostración. Sea $L \in [0, K]$ dado. Si $x \leq L$, entonces $\tau_L = 0$, lo cual implica que $v_L(x) = K - x$, pues $S_0 = x$.

Consideremos el caso $x > L$. Definamos $\mu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\tau_L &= \text{ínf}\{t : S_t = L\} \\
&= \text{ínf}\left\{t : S_0 e^{\sigma\tilde{W}_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t} = L\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t : x e^{\sigma[\tilde{W}_t + (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t]} = L\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t : x e^{\sigma(\tilde{W}_t + \mu t)} = L\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t : e^{\sigma(\tilde{W}_t + \mu t)} = \frac{L}{x}\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t : \sigma(\tilde{W}_t + \mu t) = \log\left(\frac{L}{x}\right)\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t : \tilde{W}_t + \mu t = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{L}{x}\right)\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{t : -\tilde{W}_t - \mu t = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{x}{L}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Observemos que como $\mu = \frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}$, entonces

$$-\frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\sqrt{2r + \mu^2} = -\frac{2r}{\sigma^2},$$

Además tenemos que $-\tilde{W}_t$ también es un m.b. bajo P^*, así que podemos aplicar el corolario anterior con $X_t = -\mu t - \tilde{W}_t$, $m = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{x}{L}\right)$ y $\alpha = r$, y obtenemos

$$\begin{aligned}
E^* e^{r\tau_m} &= e^{-m(\mu + \sqrt{2r + \mu^2})} \\
&= e^{\frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{x}{L}\right)\left(\mu + \sqrt{2r+\mu^2}\right)} \\
&= e^{\log\left(\frac{x}{L}\right)\left(-\frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\sqrt{2r+\mu^2}\right)} \\
&= \left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

Pero

$$\tau_m = \text{ínf}\{t : X_t = m\} = \text{ínf}\left\{t : -\tilde{W}_t - \mu t = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{x}{L}\right)\right\} = \tau_L.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} v_L &= (K-L)E^* e^{-r\tau_L} \\ &= (K-L)E^* e^{-r\tau_m} \\ &= (K-L)\left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Así que

$$v_L(x) = \begin{cases} K - x, & 0 \le x \le L \\ (K-L)(\frac{x}{L})^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, & x > L. \end{cases}$$

■

Ahora encontremos un L, que llamaremos L_*, que maximice $v_L(x)$ cuando tenemos x fijo.

Definamos $g(L) = (K-L)L^{2r/\sigma^2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(L)}{\partial L} &= (K-L)\frac{2r}{\sigma^2}L^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} + L^{\frac{2r}{\sigma^2}}(-1) \\ &= L^{\frac{2r}{\sigma^2}}\left[(K-L)\frac{2r}{L\sigma^2} - 1\right] \\ &= L^{\frac{2r}{\sigma^2}}\left[\frac{2Kr}{L\sigma^2} - \left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\right], \end{aligned}$$

resolviendo para L,

$$\frac{2Kr}{L\sigma^2} - \left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right) = 0,$$

así que

$$L_* = \frac{2rK}{\sigma^2 + 2r}.$$

Como $0 < 2r < \sigma^2 + 2r$, se tiene que $0 < L_* < K$.

Teorema 2.10.2 *Sea S_t el precio del activo y sea τ_{L_*} dado por* (2.12) *y $L_* = \frac{2rK}{\sigma^2+2r}$. Entonces*

i) $e^{rt}v_{L_*}(S_t)$ es una supermartingala bajo P^*.

ii) El proceso en i) es la más pequeña supermartingala tal que $e^{rt}v_{L_*}(S_t) \geq e^{rt}(K - S_t)^+$.

iii) El proceso $e^{-r(t\wedge\tau_{L_*})}v_{L_*}(S_{t\wedge\tau_{L_*}})$ *es martingala bajo* P^*.

Demostración. Ver [8], pág. 352.

Se verá en el siguiente corolario que $v_{L_*}(x)$ es el precio de la opción de venta que se enunció en la definición 2.10.1.

Corolario 2.10.2 *Recordemos que* $\mathcal{T}$ *es el conjunto de todos los tiempos de paro, no sólo los de la forma* (2.12) *. Tenemos*

$$v_{L_*}(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E^*[e^{-r\tau}(K - S_\tau)],$$

donde $x = S_0$ *es el precio inicial del activo. En otras palabras,* $v_{L_*}(x)$ *es el precio de una opción de venta Americana a perpetuidad de la defnción 2.10.1.*

Demostración. Ver [8], pág. 353.

2.11. Estructura de Plazo de Tasas de Interés (Term Structure)

Consideremos un bono cupón cero con fecha de maduración T y sea $B(t,T)$ el precio al tiempo t de tal bono. La **tasa anual continua** que comienza en t y expira en T, que denotaremos por $Y(t,T)$, satisface:

$$B(t,T) = \exp -(T-t)Y(t,T).$$

La **tasa spot forward** en t para la maduración T es

$$f(t,T) = -\left[\frac{\partial \ln B(t,\theta)}{\partial\theta}\right]_{\theta=T}.$$

Entonces

$$Y(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,u)du.$$

La **tasa spot instantánea** es

$$r(t) = \lim_{T\to t} Y(t,T) \doteq -\left[\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}\right]_{T=t} = f(t,t).$$

La **curva de tasas** (estructura intertemporal de tasas o curva de rendimiento) es la función $\theta \to Y(t,\theta)$.

Ejemplo 2.11.1 (Curva de Tasas Normal.) *Como su nombre lo indica, este es el estado de la curva de rendimiento que se forma durante condiciones normales de mercado, donde los inversionistas generalmente confían en que no existirán cambios significativos en la economía, tal como en las tasas de inflación, y que la economía crecerá continuamente en una tasa normal. Durante tales condiciones, los inversionistas esperan los más altos rendimientos para instrumentos de ingreso fijo con maduraciones de largo plazo. En otras palabras, el mercado espera una oferta de producción más alta en activos de ingreso fijo a largo plazo, que en activos de ingreso fijo a corto plazo (Ver figura 1).*

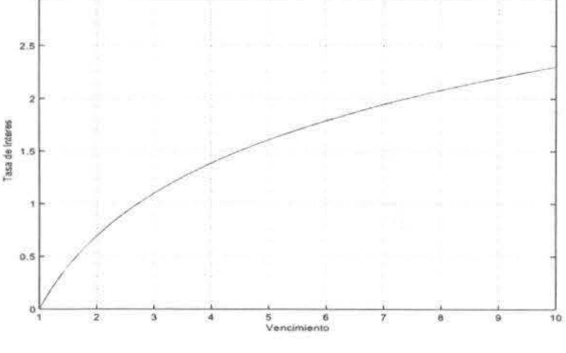

Figura 1

Vamos a considerar el caso cuando la tasa de interés es no determinísta, es decir, tiene un componente aleatorio.

Sea $r(t)$ la tasa de interés (aleatoria) al tiempo t. Sea

$$\beta_t = e^{\int_0^t r(u)du}$$

el factor de crecimiento. Sea $V_T = (S_T - K)^+$ el valor al tiempo T de una call europea con fecha de ejercicio T y precio strike K, donde S_T es el precio del activo subyacente al tiempo T. El valor presente al tiempo t es

$$V_t = e^{-\int_t^T r(u)du} V_T = e^{-\int_t^T r(u)du}(S_T - K)^+.$$

Por lo tanto el precio de la opción al tiempo t es

$$E^*\left[e^{-\int_t^T r(u)du}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t\right] = E^*\left[\frac{\beta_t}{\beta_T} V_T \,|\mathcal{F}_t\right] = \beta_t E^*\left[\frac{V_T}{\beta_T} \,|\mathcal{F}_t\right]. \quad (2.13)$$

donde $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es la σ-álgebra generada por el m.b. $(W_t)_{t\geq 0}$ que modela al precio $(S_t)_{t\geq 0}$.

Desde ahora asumiremos que hemos cambiado a la medida neutra al riesgo y escribiremos P (o E respectivamente) en lugar de P^* (o E^* respectivamente).

Consideremos un bono cupón cero con fecha de maduración T. Esto es equivalente a una call europea con $V_T = 1$. Luego utilizando la ecuación (2.13), el precio al tiempo t, del bono es

$$B(t, T) = \beta_t E\left[\frac{1}{\beta_T} \,|\mathcal{F}_t\right]. \quad (2.14)$$

Vamos a derivar la EDE que satisface $B(t, T)$. Sea $N_t = E[1/\beta_T | \mathcal{F}_t]$. N_t es $\mathcal{F}$-medible. Por el Teorema de Representación Previsible,

$$N_t = E[1/\beta_T] + \int_0^t H_s dW_s$$

para algún integrando previsible adaptado $(H_t)_{t\geq 0}$. Luego $B(t, T) = \beta_t N_t$. T es fijo, por la fórmula de Itô para el producto:

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= \beta_t dN_t + N_t d\beta_t \\ &= \beta_t H_t dW_t + N_t r(t)\beta_t dt \\ &= \beta_t H_t dW_t + B(t, T) r(t) dt, \end{aligned}$$

y así obtenemos:

$$dB(t,T) = \beta_t H_t dW_t + B(t,T)r(t)dt. \tag{2.15}$$

Algunas tasas de interés son especificadas dando a $f(t,T)$ en lugar de $B(t,T)$ o $r(t)$.

Obtención de B a partir de f. Vamos a ver cómo obtener $B(t,T)$ a partir de $f(t,T)$. Integrando $f(t,T)$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_t^T f(t,u)du &= -\int_t^T \frac{\partial}{\partial u}\ln B(t,u)du = -\ln B(t,u)|_{u=t}^{u=T} \\ &= -\ln B(t,T) + \ln B(t,t).\end{aligned}$$

Tenemos que $B(t,t) = 1$ y $\ln 1 = 0$. Resolviendo para $B(t,T)$, tenemos

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}. \tag{2.16}$$

2.12. Algunos Modelos de Tasas de Interés

Modelo de Heath-Jarrow-Morton. En lugar de especificar r, el modelo de Heath-Jarrow-Morton (HJM) especifica las tasas forward:

$$df(t,T) = \sigma(t,T)dW_t + \alpha(t,T)dt. \tag{2.17}$$

Derivemos la EDE que $B(t,T)$ satisface. Sea

$$\alpha^*(t,T) = \int_t^T \alpha(t,u)du, \qquad \sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)du.$$

Sea $X_t = -\int_t^T f(t,u)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} dX_t &= f(t,t)dt - \int_t^T df(t,u)du \\ &= r(t)dt - \int_t^T [\alpha(t,u)dt + \sigma(t,u)dW_t]du \\ &= r(t)dt - \left[\int_t^T \alpha(t,u)du\right]dt - \left[\int_t^T \sigma(t,u)du\right]dW_t \\ &= r(t)dt - \alpha^*(t,T)dt - \sigma^*(t,T)dW_t. \end{aligned}$$

Dado que $B(t,T) = exp(-\int_t^T f(t,u)du)$, usando la fórmula de Itô con la función e^x y $X_t = -\int_t^T f(t,u)$, obtenemos

$$\begin{aligned} dB(t,T) &= B(t,T)dX_t + \frac{1}{2}B(t,T)(\sigma^*(t,T))^2dt \\ &= B(t,T)\left[r(t) - \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2\right]dt - \sigma^*(t,T)B(t,T)dW_t. \end{aligned}$$

De (2.15) conocemos que el primer término del lado derecho debe ser $B(t,T)r(t)dt$, por lo tanto con la medida neutra al riesgo $\alpha^*(t,T) = \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2$, y así obtenemos

$$dB(t,T) = B(t,T)r(t)dt - \sigma^*(t,T)B(t,T)dW_t.$$

Modelo de Hull y White. En este modelo, la tasa de interés r se especifica como la solución de la EDE:

$$dr(t) = \sigma(t)dW_t + (a(t) - b(t)r(t))dt. \tag{2.18}$$

Aquí σ, a, b son funciones deterministas. El término de la integral estocástica introduce aleatoriedad, mientras que el término $a - br$ causa un drift alrededor de $a(t)/b(t)$. (Note que si $\sigma(t) = \sigma$, $a(t) = a$, $b(t) = b$ son constantes y $\sigma = 0$, entonces la solución a (2.18) se convierte en $r(t) = a/b$.)

(2.18) es una de estas EDE's que pueden ser resueltas explícitamente. Sea $K(t) = \int_0^t b(u)du$. Entonces

$$\begin{aligned} d\left[e^{K(t)}r(t)\right] &= e^{K(t)}r(t)b(t)dt + e^{K(t)}\left[a(t) - b(t)r(t)\right]dt + e^{K(t)}[\sigma(t)dW_t] \\ &= e^{K(t)}a(t)dt + e^{K(t)}[\sigma(t)dW_t]. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados,

$$e^{K(t)}r(t) = r(0) + \int_0^t e^{K(u)}a(u)du + \int_0^t e^{K(u)}\sigma(u)dW_u.$$

Multiplicando ambos lados por $e^{-K(t)}$, tenemos la solución explícitamente

$$r(t) = e^{-K(t)}\left[r(0) + \int_0^t e^{K(u)}a(u)du + \int_0^t e^{K(u)}\sigma(u)dW_u\right].$$

Si $F(u)$ es determinista, entonces

$$\int_0^t F(u)dW_u = \text{lím}\sum F(u_i)(W_{u_{i+1}} - W_{u_i}).$$

Sabemos que combinaciones lineales de variables aleatorias Gaussianas son Gaussianas, y también que límites de variables aleatorias Gaussianas son Gaussianas, así pues concluímos que la v.a. $\int_0^t F(u)dW_u$ es Gaussiana. Y dado que $e^{K(u)}\sigma(u)$ es determinista $\int_0^t e^{K(u)}\sigma(u)dW_u$ es Gaussiana con media cero, luego la media de $r(t)$ es

$$Er(t) = e^{-K(t)}\left[r(0) + \int_0^t e^{K(u)}a(u)du\right].$$

Conocemos cómo calcular el segundo momento de una integral estocástica, así que

$$\text{Var } r(t) = e^{-2K(t)}\int_0^t e^{2K(u)}\sigma(u)^2du.$$

(Se puede calcular similarmente la covarianza de $r(s)$ y $r(t)$.) Límites de combinaciones lineales de Gaussianas son Gaussianas, luego podemos calcular la media y varianza de $\int_0^T r(t)dt$ y conseguir una expresión explícita para

$$B(0,T) = Ee^{-\int_0^T r(u)du}.$$

Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Una desventaja del modelo de Hull y White es que dado que $r(t)$ es Gaussiana, puede tomar valores negativos con probabilidad positiva, lo cual no tiene sentido. El modelo de Cox-Ingersoll-Ross aborda esto modelando r por la EDE

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t.$$

La diferencia con el modelo de Hull y White es la raíz cuadrada de r en el término de la integral estocástica. Este término de raíz cuadrada implica que cuando $r(t)$ es pequeño, las fluctuaciones en $r(t)$ son más grandes que en el modelo de Hull y White. Si estipulamos $a \geq \frac{1}{2}\sigma^2$, puede probarse que $r(t)$ nunca tocará el 0 y siempre será positivo. Aunque no se pueda resolver para r explícitamente, se puede calcular la distribución de r. German y Yor [10], págs. 345-371, prueban que el modelo CIR, es un proceso de Bessel.

Bibliografía

[1] Ash, R. 1974. *Real Analysis and Probability*. Academic Press N.Y.

[2] Bartle, R.G. 1964. *The Elements of Real Analysis*. J. Wiley.

[3] Bass, R.F. 2003. *The Basics of Financial Mathematics*. Department of Mathematics. University of Connecticut.

[4] Billingsley, P. 1979. *Probability and Measure*. New York, Wiley.

[5] Bojdecki, Tomasz. *Teoría General de Procesos e Integración Estocástica*. 2a. edición. Monografías del Instituto de Matemáticas, UNAM. México.

[6] Capinski, m. & Zastawniak, T. 2005. *Mathematics for Finance*. Springer-Verlag, Londres.

[7] Chung K.L. & Williams, R. 1983. *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhäuser, Boston.

[8] Elliot, R.J. & Kopp, P.E. 1999. *Mathematics of Financial Markets*. Springer-Finance.

[9] Garcia Corte, J.C. & Ruiz de Chávez S, J. 2002. *Tiempos Locales y Excursiones del Movimiento Browniano*. México, UAM (Col. C.B.I.)

[10] German, H. & Yor, M. 1993. *Bessel processes Asian Options and Perpetuites*. Math. Finance, 4.

[11] Jorion, P. 1997. *Valor en Riesgo*. Limusa, México.

[12] Karatzas, I. & Shreve, S. 1988. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag N.Y.

[13] Lamberton, D. & Lapeyre, B. 1997. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué a la Finance.* Ellipses.

[14] Lévy, P. 1965. *Processus Stochstiques et Mouvement Brownien.* Gauthier Villars.

[15] Métivier, M. & Pellaumail, J. 1980. *Stochastic Integration.* Academic Press N.Y.

[16] Oksendal, B. 2003. *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin.

[17] Revuz, D. & Yor, M. 1991. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer-Verlag, Berlin.

[18] Ruiz de Chávez S, J. 1995. *Integración Estocástica con respecto a Semimartingalas Continuas.* México, UAM (Col. C.B.I.).

[19] Shreve, S. 1997. *Stochastic Calculus and Finance.*

[20] Tudor, C. 1994. *Procesos Estocásticos.* México, Sociedad Matemática Mexicana (Serie Textos Avanzados vol.2).

[21] Williams, D. 1991. *Probability with Martingales.* University Press, Cambridge.