



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

MODELO MICROSCÓPICO PARA LA
HIDRODINÁMICA FLUCTUANTE NO LINEAL
DEL ^4He SUPERFLUIDO DEDUCIDO MEDIANTE
EL MÉTODO DE MÁXIMA ENTROPÍA

TESIS QUE PRESENTA

M. en C. José Trinidad Alvarez Romero

PARA LA OBTENCIÓN DE EL TITULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS

Iztapalapa, México D.F., Junio de 1998

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

SECRETARIA ACADEMICA

Av. Michoacán y La Purísima, Col. Vicentina, Iztapalapa, D.F. C.P. 09340

DEDICATORIA

En memoria de mi padre dedico este trabajo a mi familia: Julia, Eulalio, Alicia , Armando y Marina que sin su apoyo hubiera sido más difícil concluirlo.

Particular mención merece mi esposa Marina por su infinita comprensión y empatía.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco la paciencia y generosidad del Dr. Leopoldo García-Colín Scherer, cuyos comentarios y observaciones me han permitido la escritura y conclusión de este trabajo. También deseo mostrar mi gratitud y dar credito a los Doctores José Ines Aquino y José Luis del Rio del Departamento de Física de la UAM-Iztapalapa y el Dr. Rosalio Rodríguez del Instituto de Física de la UNAM, por las numerosas observaciones realizadas en el proceso de revisión de esta tesis .

Asi mismo reconozco el constante apoyo del personal de Centro de Documentación e Información Nuclear del ININ, y del personal y compañeros del área de Mecánica Estadística del Departamento de Física de la UAM-Iztapalapa.

Finalmente agradezco al CONACYT y al Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares por el apoyo financiero de ambos y la comisión académica del último, lo que me ha permitido concluir los estudios de doctorado.

RESUMEN

En esta tesis se presenta un modelo microscópico para la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido (^4He), modelo desarrollado mediante el método de Máxima Entropía (Maxent).

En el Capítulo 1, se plantea la necesidad de desarrollar un modelo microscópico para la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido, a partir de presentar un breve panorama de las teorías y experimentos desarrollados para explicar el comportamiento del Helio superfluido. Por otra parte, se presenta el método heurístico de Morozov para la construcción de la hidrodinámica fluctuante no lineal para un fluido simple. Método que será generalizado para la construcción de la hidrodinámica fluctuante no lineal del Helio superfluido. Además de presentar un breve resumen del contenido de la tesis.

En el Capítulo 2, se reproduce la construcción de una ecuación de Fokker-Planck Generalizada, (FPG), para una función de distribución asociada a las variables de grano grueso. Función definida con auxilio de un operador estadístico $\hat{\rho}_{FP}$ que es evaluado como una función de Wigner a través de la función ρ_{CG} obtenida vía Maxent. Posteriormente esta ecuación de FPG se reduce a una ecuación de FP local no lineal al considerar un proceso *lento y Markoviano* en las variables de grano grueso. En dicha ecuación en aparece una matriz $\mathcal{D}_{mn}(a)$ definida con un operador estadístico de no equilibrio de grano grueso $\hat{\rho}_{CG}$. matriz cuyos elementos se emplean en la construcción las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante no lineal del Helio superfluido.

En el Capítulo 3, se evalúan los multiplicadores de Lagrange que determinan a $\hat{\rho}_{CG}$ mediante el operador $\hat{\rho}_{\bar{f}}$ con la hipótesis de que el *sistema presenta fluctuaciones pequeñas*. También se determinan las corrientes asociadas a las variables de grano grueso y además se evalúan los elementos de la matriz \mathcal{D}_{mn} pero con el auxilio del operador estadístico de cuasi-equilibrio $\hat{\rho}_{qe}$ en lugar del operador $\hat{\rho}_{\bar{f}}$. Elementos de matriz que conducen a los coeficientes de transporte locales del Helio superfluido, mediante una generalización de la relación fluctuación-disipación de Green-Kubo, en analogía con los resultados del Apéndice A.

Especificados los multiplicadores de Lagrange, las corrientes y los coeficientes de transporte locales, se determina una ecuación de FP local no lineal para el Helio superfluido en el espacio de Fourier. A partir de la cual se construyen sus ecuaciones del tipo Langevin no lineales asociadas en dicho espacio, donde las fuerzas aleatorias que aparecen son de tipo multiplicativo. Fuerzas que se expresan como del producto de variables aleatorias Gaussianas y variables locales de manera tal que las varianzas de las variables aleatorias son independientes de las variables locales. Finalmente, aplicando la transformada inversa de Fourier a las ecuaciones no lineales del tipo Langevin en el espacio de Fourier, se construyen las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante no lineal para el Helio superfluido en el espacio de configuración

Por último, en el Capítulo 4, se presenta una discusión de los resultados y las conclusiones de esta tesis.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Planteamiento del Problema.	1
1.2	Metodología de la Tesis.	4
2	Ecuación de Fokker-Planck Generalizada para un Sistema Hidrodinámico Cuántico.	17
2.1	La Función de Distribución de Grano Grueso para un Sistema Cuántico.	20
2.1.1	Variables Hidrodinámicas de Grano Grueso.	21
2.1.2	Función de Distribución de Grano Grueso.	23
2.1.3	Función de Distribución Microscópica.	26
2.2	Operador Estadístico de Grano Grueso.	28
2.3	Ecuación de Fokker-Planck Generalizada (FPG).	31
2.4	Aproximación Local a la Ecuación de Fokker-Planck Generalizada.	37
2.5	Ecuación de Fokker-Planck no lineal Local en el Espacio de Configuración.	43
3	Modelo Microscópico para la Hidrodinámica Fluctuante No-lineal del ^4He Superfluido.	49
3.1	El Operador Estadístico de Grano Grueso y el Operador Estadístico de Cuasi-equilibrio Local.	51
3.1.1	Fuerzas Termodinámicas.	51
3.1.2	Corrientes Locales.	56
3.2	El Operador Estadístico de Equilibrio Local vs El Operador Estadístico de Referencia.	63
3.2.1	Funciones de Correlación en un Marco de Referencia en Movimiento.	73
3.2.2	Funciones de Correlación en un Marco de Referencia Fijo.	84
3.3	Ecuación de Fokker Planck para el Helio Superfluido.	95
3.4	Ecuaciones no lineales de Lagenvin para el Helio Superfluido.	98
4	Análisis de los Resultados y Conclusiones.	106
4.1	Aspectos Generales.	106
4.2	Aspectos Particulares.	110
4.3	Perspectivas	117

A	Hidrodinámica de los Dos Fluidos con Efectos Disipativos Deducida Mediante Maxent.	134
A.1	Ecuaciones Hidrodinámicas para un superfluido Ideal.	135
A.1.1	Operador Estadístico de Equilibrio Local.	135
A.1.2	Operador Estadístico de No-equilibrio.	140
A.1.3	Ecuaciones Hidrodinámicas de los Dos Fluidos sin Disipación.	144
A.2	Ecuaciones Hidrodinámicas con Efectos Disipativos.	151
B	Propiedades de la Función Delta de Grano Grueso.	163
C	Deducción del Operador de Evolución de Entropía de la Ecuación (3.42).	167
C.1	Obtención de las Ecuaciones para β , $(\mu\beta)$, $(\beta\Omega)$ y W .	167
C.2	Deducción de la Ec. (3.42) a partir de la Ec. (3.35)	174
D	Deducción de los Flujos no Proyectados en un Marco de Referencia Fijo en Función de sus Partes no Proyectadas en un Marco de Referencia Móvil.	181
E	Deducción de los Términos de Arrastre u_n y de Difusión \mathcal{D}_{mn} de la Ecuación de FP Local para el Helio Superfluido.	188
F	Deducción de las Ecuaciones no lineales de Langevin en el Espacio de Configuración y de Fourier para el Helio superfluido.	194
F.1	Construcción de la Ecuación de FP no lineal en el Espacio de Fourier para el Helio Superfluido.	196
F.2	Determinación de las Funciones Locales $\mathcal{G}_m(x)$ en Función de los Coeficientes de Transporte Locales del Helio Superfluido.	209
F.3	Construcción de las Ecuaciones de Langevin en el Espacio de Fourier para el Helio Superfluido.	216
F.4	Construcción de las Ecuaciones de Langevin en el Espacio de Configuración para el Helio Superfluido.	217
G	Lista de Símbolos.	220

Capítulo 1

Introducción

1.1 Planteamiento del Problema.

El descubrimiento de la propiedad del Helio de fluir sin resistencia, superfluidez, dió inicio a numerosas investigaciones tanto teóricas como experimentales con el propósito de tratar de dilucidar los orígenes, conexiones y consecuencias de dicha propiedad. De hecho, sin temor a equivocarnos, ésta y el fenómeno afín de la superconductividad son unos de los comportamientos más interesantes y fascinantes que puede uno encontrar en la naturaleza, siendo de no menos interés, las teorías propuestas para explicarlos.

En particular, en el caso de la superfluidez, tenemos entre otras las siguientes teorías:

- La teoría fenomenológica de los dos fluidos de Landau , [66, 72, 74].
- La teoría fenomenológica para la hidrodinámica fluctuante de el Helio superfluido, [65].
- La teoría microscópica de Bogoliubov para el Helio superfluido, [12].
- La fundamentación microscópica para la hidrodinámica de los dos fluidos, deducida con auxilio de la función de Wigner, [96].
- La teoría heurística que generaliza la hidrodinámica de los dos fluidos de Landau, [5, 103].

- Las teorías microsocópicas para la hidrodinámica del Helio superfluido, fundamentadas en técnicas de la teoría del campo : segunda cuantización y funciones de Green, [11, 56. 67, 124, 125, 126, 127, 128] .
- Teorías basadas en métodos variacionales como las de Feynman-Cohen,[17, 26, 27, 28, 29], de Geurst [36] y la de Hohenberg y Martin [56].
- La teoría fenomenológica para la cuantización de los vórtices de Onsager-Feynman, [29. 103].
- Teorías para explicar la transición de fase λ en el Helio líquido. [27, 43, 44].
- Las teorías sobre el deslizamiento de la fase de Anderson [2, 3].
- Las diversas teorías sobre el espectro de excitación en un gas de Bose y Helio superfluido. Por ejemplo la teoría fenomenológica de Landau [66], las basadas en métodos variacionales [17, 30, 56]; en teoría del campo [11, 90, 91], en potenciales de polarización [79, 93, 100], y las basadas en el formalismo dieléctrico [45, 51, 52, 53], etc.
- Las teorías para explicar la condensación de Bose Einstein y la ruptura de la simetría de la norma, [97, 151].
- La teoría para el gas imperfecto de Bose, basada en la técnica de pseudopotenciales (esferas duras), [58].
- Las teorías sobre la hidrodinámica turbulenta para el Helio superfluido, que tratan de explicar la fuerza de fricción mutua, [54, 123, 142, 144].
- La teoría para la hidrodinámica molecular para el Helio superfluido, [124, 125, 126, 127, 128].
- Las teorías para explicar la dispersión de luz en el Helio superfluido, [9, 31].
- Las teorías microscópicas deducidas mediante el método de Máxima Entropía para la hidrodinámica del Helio superfluido, [86] y mezclas de $\text{He}^3\text{-He}^4$. [92].
- Las teorías hidrodinámicas fluctuantes para los vórtices cuantizados. [59, 76].

- La teoría para explicar cómo se inicia de la superfluidez, [111], etc.

Desafortunadamente casi la totalidad de estas teorías se caracterizan por ser oscuras y complejas. Esta situación no permite entender de manera directa las consecuencias de las suposiciones físicas en las cuales se basan dichos modelos, haciendo difícil establecer la conexión entre la diversas teorías.

Por otro lado, existe un amplio cúmulo de información experimental generada por las no menos sorprendentes técnicas de laboratorio, entre las que podemos mencionar:

- Los experimentos de medición de viscosidad [103, 147].

- Los de medición de segundo sonido, [55, 93, 99, 103, 147].

- Las mediciones de la capacidad calorífica [64].

- Los de medición de la cuantización de la circulación, [6, 7, 95, 105, 106, 129, 145, 153].

- Los de medición del factor de estructura mediante dispersión de neutrones [19, 118, 120, 148, 149, 150].

- Los dispersión de luz [49, 50, 89, 139, 140, 94].

- Los de rotación del Helio superfluido [4, 55].

- Los de medición de la velocidad crítica del He [98, 122].

- Los medición de turbulencia en Helio superfluido [18, 122, 123, 141, 142, 144], etc.

Además hay que mencionar los resultados que se han obtenido mediante la simulación numérica de las ecuaciones planteadas por las diversas teorías antes mencionadas [14, 16, 62, 101, 102, 113, 114, 115, 116].

Dados estos antecedentes puede uno preguntarse si es posible construir una teoría microscópica ('de primeros principios ') que sea capaz de describir el espectro de excitación, la dinámica mesoscópica de los vórtices cuantizados, el comportamiento macroscópico de la hidrodinámica de los dos fluidos y el comportamiento turbulento del Helio superfluido. Teoría que por ser muy amplia, compartimos la opinión de que esta aún lejos de ser construida, [104].

Sin embargo, el método de Máxima Entropía (Maxent) ha mostrado ser una herramienta formalmente muy poderosa para modelar el comportamiento de sistemas tanto en equilibrio como fuera de éste [23, 24, 60, 61, 154, 157, 158, 159, 160]. En particular es deseable utilizarla para abrir una brecha en el ‘estudio unificado’ del Helio superfluido en los tres niveles de descripción a que podemos aspirar: micro, meso y macroscópico, en analogía de los resultados obtenidos para sistemas clásicos.

Reiterando, el construir una hidrodinámica turbulenta para el Helio superfluido de primeros principios está aun lejos. No obstante, pensamos que el obtener un modelo microscópico para la hidrodinámica fluctuante es un primer paso para la construcción de dicha hidrodinámica, como ya lo han mostrado para sistemas clásicos varios trabajos [157, 158, 160]. De aquí que *el objetivo de esta tesis sea deducir un modelo microscópico para la hidrodinámica fluctuante no lineal del Helio superfluido mediante el método de Maxent*. Este modelo es la contribución novedosa de este trabajo, que se desarrolla en analogía a los resultados de Zubarev *et al* [88, 156] y en los cuales se obtiene, vía Maxent, una teoría para la hidrodinámica fluctuante no lineal para un fluido clásico simple.

1.2 Metodología de la Tesis.

Concretamente el método que se empleará en la construcción de la hidrodinámica fluctuante no lineal para el Helio superfluido es de carácter heurístico, y consiste de los siguientes pasos para el caso del fluido simple, [88]:

i).- Sea un fluido simple, dadas sus ecuaciones no lineales para la hidrodinámica fluctuante se asume que dichas ecuaciones pueden escribirse de la siguiente manera [ver ecs. (2.63) de la sección 22 en la ref. [154] o el Capítulo II de la ref. [21]],

$$\dot{a}_m(x) = u_m(\mathbf{a}, \mathbf{x}) - \sum_m \nabla \cdot [\underline{\mathbf{J}}_m^R(x) \cdot c_m(x)] \quad (1.1)$$

para $\{a_m(x)\} = \{H(x), j(x)\}$, donde $\dot{a}_m(x)$ es la derivada temporal del valor esperado de la variable relevante $a_m(x)$, $u_m(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ es una funcional de las variables $a_m(x)$ que denominaremos ‘término de arrastre’ y tiene la misma estructura que la de la ec. 2.89: $c_m(x)$

es una función, siendo igual a $v(x)$ para $a_m = H(x)$ e igual a la unidad para $a_m = j(x)$. Finalmente $\underline{\mathbf{J}}_m^R(x)$ son los flujos fluctuantes o aleatorios que en el caso más general son magnitudes tensoriales de segundo orden ¹, aunque pueden ser de carácter vectorial o escalar. Concretamente para $u_m(x)$ se tiene que,

$$u_m(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = -\nabla \cdot \left(I_m(\mathbf{x}) + \tilde{\mathcal{L}}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla F_n(\mathbf{x}; a) \right), \quad (1.2)$$

Debe observarse en la ec. 1.1 que u_m , de acuerdo con la ec. 1.2, involucra a las partes sistematicas (convectiva y disipativa) de las componentes no proyectadas de las corrientes $I_m(\mathbf{x})$, vía la función de correlación $\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(\mathbf{x})$, (funciones de correlación que son abordadas en la sección 3.3 del Capítulo 3). Además en la ec. 1.1 las no linealidades estan implícitas en las divergencias de dichas funciones de correlación que aparecen en los términos de arrastre definidos en la ec. 1.2 y en las divergencias de los términos aleatorios $\underline{\mathbf{J}}_m^R \cdot c_m(x)$.

Para el caso de $a_m(x) = H(x)$ se tiene que,

$$\dot{H}(\mathbf{x}) = u_E(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \left[\underline{\mathbf{J}}_{\Pi}^R(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) + J_E^R(\mathbf{x}) \right], \quad (1.3)$$

y, para el caso del ímpetu se tiene que,

$$\frac{dj(\mathbf{x})}{dt} = u_j(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_{\Pi}^R(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

ii).- A continuación, se considera que todos los flujos aleatorios $\underline{\mathbf{J}}_n^R(\mathbf{x})$ son de tipo multiplicativo, que resultan del producto de una función $G_n(\mathbf{x})$ por un término aleatorio $\tilde{\xi}_n(\mathbf{x})$. Es decir, supone que el flujo de calor se escribe como,

¹De aquí en adelante adoptaremos la siguiente convención: las funciones que aparezcan en negritas y subrayados o con doble subíndice indica que se trata de tensores de segundo orden.

$$J_q^R(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})\tilde{\xi}_q(x, t) \quad (1.5)$$

y para el tensor aleatorio de los esfuerzos se tiene que,

$$\underline{\mathbf{J}}_{\underline{\mathbf{H}}}^R(\mathbf{x}) = G_1(\mathbf{x})\underline{\xi}'(\mathbf{x}, t) + G_2(\mathbf{x})\tilde{\xi}_2(x, t)\underline{\mathbf{U}}(x) \quad (1.6)$$

donde $\underline{\xi}'(\mathbf{x}, t)$ es de carácter tensorial, $\tilde{\xi}_q(\mathbf{x}, t)$, de carácter vectorial y $\tilde{\xi}_2(x, t)$ son escalares. Además los términos $\tilde{\xi}_n(\mathbf{x})$ se suponen son Gaussianos y las funciones $G_n(\mathbf{x})$ quedan por el momento indeterminadas. Concretamente, si $\{\tilde{\xi}_n(\mathbf{x}, t)\} = \{\tilde{\xi}_q(\mathbf{x}, t), \underline{\xi}'(\mathbf{x}, t), \tilde{\xi}_2(x, t)\}$, entonces,

$$\langle \tilde{\xi}_q(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \tilde{\xi}_{q\alpha}(x, t) \rangle = 0, \forall \alpha = x, y, z \quad (1.7)$$

$$\langle \underline{\xi}'(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \tilde{\xi}_{\alpha\beta}(x, t) \rangle = 0, \forall \alpha, \beta = x, y, z \quad (1.8)$$

$$\tilde{\xi}_{\alpha\beta}(x, t) = \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x, t) + \tilde{\xi}_2(x, t), \forall \alpha, \beta = x, y, z \quad (1.9)$$

$$\langle \tilde{\xi}_2(x, t) \rangle = 0. \quad (1.10)$$

donde, $\tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x, t)$ es un tensor fluctuante sin traza, $\tilde{\xi}'_{q\alpha}(x, t)$ es un vector y $\tilde{\xi}_2(x, t)$ es una magnitud escalar.

Además las varianzas de las $\{\tilde{\xi}_n(\mathbf{x})\}$ deben cumplir con las siguientes propiedades .

$$\langle \tilde{\xi}_{q\alpha}(x_1, t_1), \tilde{\xi}_{q\beta}(x_2, t_2) \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(t_1 - t_2) \delta(x_1 - x_2). \quad (1.11)$$

$$\langle \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x_1, t_1), \tilde{\xi}'_{\mu\nu}(x_2, t_2) \rangle = g_{\alpha\beta\mu\nu} \delta(t_1 - t_2) \delta(x_1 - x_2), \quad \forall \alpha, \beta, \mu, \nu = x, y, z \quad (1.12)$$

donde $g_{\alpha\beta\mu\nu} = \delta_{ij}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kj} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{jm}$.

$$\langle \tilde{\xi}(\mathbf{x}, t_1), \tilde{\xi}_q(\mathbf{x}, t_2) \rangle = \langle \tilde{\xi}_q(\mathbf{x}, t_1), \tilde{\xi}(\mathbf{x}, t_2) \rangle = 0 \quad (1.13)$$

$$\langle \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x_1, t_1), \tilde{\xi}_2(x_2, t_2) \rangle = \langle \tilde{\xi}_2(x_1, t_1), \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x_2, t_2) \rangle = 0, \quad \forall \alpha, \beta = x, y, z$$

$$\langle \tilde{\xi}_{q\alpha}(x_1, t_1), \tilde{\xi}_2(x_2, t_2) \rangle = \langle \tilde{\xi}_2(x_1, t_1), \tilde{\xi}_{q\alpha}(x_2, t_2) \rangle = 0, \quad \forall \alpha = x, y, z \quad (1.14)$$

Cabe aclarar que esta forma de construir los flujos aleatorios difiere de la aproximación fenomenológica de Landau-Lifshitz. [74], en los siguientes dos puntos. Primero, que se están suponiendo multiplicativos los flujos aleatorios, ver ecs. 1.5-1.6, y segundo, en la definición de los $\underline{\mathbf{J}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{R}}(x)$ aparecen las funciones locales $G_n(x)$, lo que conduce a que las funciones de correlación de dichos flujos se definan en función de los coeficientes de transporte locales como se vera en la sección F.2 del apéndice F. En otras palabras, en la teoría de Landau-Lifshitz ni los flujos fluctuantes son multiplicativos, ni se obtienen coeficientes de transporte locales.

iii).- Se toman las transformadas de Fourier de cada uno de los términos de las ecs. 1.1-1.2. Por lo tanto, esta ecuación no lineal del tipo Langevin se expresa en el espacio de Fourier como ²,

²Esta ecuación estocástica es no lineal debido a que su término fluctuante es de tipo multiplicativo [109].

$$\dot{a}_n(t) = u_n(t) + \sum_{m,n} M_{mm'}(t) \tilde{\xi}_n(t) \quad (1.15)$$

con,

$$a_n(t) \equiv a_{nk}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (1.16)$$

$$a_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{nk}(t) \quad (1.17)$$

donde \mathbf{k}_0 es un número de onda de corte que garantiza que se está estudiando el comportamiento hidrodinámico del sistema. Además, las transformadas de Fourier de los términos fluctuantes $\tilde{\xi}_n$ se expresan como,

$$\tilde{\xi}_n(t) \equiv \tilde{\xi}_{nk}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\xi}_n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (1.18)$$

$$\tilde{\xi}_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\xi}_{nk}(t) \quad (1.19)$$

Por lo tanto, de las ecs. 1.16-1.19 se tiene que,

$$M_{j\alpha\mathbf{k},i\alpha\beta\mathbf{p}} = -ik_\alpha V^{-1} \delta_{\alpha\beta} G_{i,\mathbf{k}-\mathbf{p}}, \quad i = 1, 2; \alpha, \beta = x, y, z \quad (1.20)$$

$$M_{E\alpha\mathbf{k},i\alpha\beta\mathbf{p}} = -ik_\alpha V^{-1} \delta_{\alpha\beta} (v_\beta G_i)_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}, \quad i = 1, 2; \alpha, \beta = x, y, z \quad (1.21)$$

$$M_{E\alpha k, q\alpha\beta p} = -ik_\alpha V^{-1} \delta_{\alpha\beta} G_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}, \quad i = 1, 2; \alpha, \beta = x, y, z \quad (1.22)$$

donde $G_{\mathbf{k}}$, $G_{i,\mathbf{k}}$ y $(v_\beta G_i)_{\mathbf{k}}$ son las transformadas de Fourier de los términos $G(x)$, $G_i(x)$ y $v_\beta G_i(x)$ que aparecen en la definición de los flujos aleatorios $J_m^R(x)$ para un fluido simple de las ecs. 1.3-1.4 y 1.5-1.6. (ver detalles en la referencia [88]).

Finalmente, las transformadas de Fourier de las varianzas de los términos aleatorios $\tilde{\xi}_m(\mathbf{x}, t)$ para un fluido simple se escriben como,

$$\langle \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t_1), \tilde{\xi}_{n\mathbf{p}}(t_2) \rangle = \Lambda_{m\mathbf{k}, n\mathbf{p}} \delta(t_1 - t_2) \quad (1.23)$$

donde,

$$\Lambda_{1\alpha\beta\mathbf{k}, 1\mu\nu\mathbf{p}} = V g_{\alpha\beta\mu\nu} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} \quad (1.24)$$

$$\Lambda_{2\alpha\beta\mathbf{k}, 2\mu\nu\mathbf{p}} = V \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} \quad (1.25)$$

$$\Lambda_{q\alpha\mathbf{k}, q\beta\mathbf{p}} = V \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} \quad (1.26)$$

con,

$$\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} = \int d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \quad (1.27)$$

y las $g_{\alpha\beta\mu\nu}$, δ_{ik} tienen el mismo significado que en las ecs. 1.11-1.14. Los detalles de la deducción de éstas ecs. 1.23-1.27, pueden consultarse en la ref. [88].

iv).- Si $f(\mathbf{a}(t)) = f(\{a_{nk}(t)\})$, es la función de distribución asociada a las variables $a_{nk}(t)$ que caracterizan al fluido simple. Variables que aparecen en la ecuación del tipo Langevin de la ec. 1.15 y considerando dicha ecuación en el sentido de Stratonovich. [88. 109], Morozov obtiene una ecuación de no lineal de FP en el espacio de Fourier dada por la siguiente expresión,

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \sum_{m,n} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(u_m(\mathbf{a}) - M_{mm'}(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial a_n} M_{nn'}(\mathbf{a}) \Lambda_{mm'} \right) f(\mathbf{a}, t) = 0, \quad (1.28)$$

La ecuación de FP se denomina no lineal cuando el término de ‘arrastre’ es diferente de una constante, es decir es una función de la variable de interés, situación que ocurre en la ec. 1.28 puesto que $M_{mm'}$ es función de las \mathbf{a} . Formalmente dicha ecuación de no lineal de FP se corresponde a una ecuación no lineal de Langevin, aunque desde el punto de vista físico esta correspondencia es motivo de dos interpretaciones físicas: la de Ito y la de Stratonovich, interpretaciones que son el motivo de polémica de acuerdo con la línea de pensamiento de Van Kampen [134. 136].

Ahora, si las ecuaciones no lineales del tipo Langevin de la ec. 1.15 son consideradas en el sentido de Ito, la ecuación no lineal de FP en el espacio de Fourier, para un fluido simple se escribe como, [88],

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \sum_{m,n} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(u_m(\mathbf{a}) - \frac{\partial}{\partial a_n} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) \right) f(\mathbf{a}, t) = 0, \quad (1.29)$$

ecuación que es análoga a la ec. 2.84 del Capítulo 2. donde $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ está definido como,

$$\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) = M_{mm'}(\mathbf{a}) M_{nn'}(\mathbf{a}) \Lambda_{mm'} \quad (1.30)$$

$$\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) = M_{m\mathbf{k},n\mathbf{k}'}(\mathbf{a}) = - \int d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{k}' \quad (1.31)$$

y $\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(\mathbf{x})$ se define como,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_{mn}(J_m^R(\mathbf{x}), J_n^R(\mathbf{x})) \quad (1.32)$$

Las funciones de correlación dadas por esta ec. 1.32 se determinarán con auxilio de la ec. 1.37. Sin embargo, las ecs. 1.32 merecen los siguientes comentarios en relación a las ecs. 1.28-1.29.

Primero, la ecuación no lineal de FP en el espacio de Fourier, dada por la ec. 1.29, es equivalente a una ecuación no lineal de FP en el espacio de configuración dada por la ec. 1.36, si se toma en cuenta las siguientes identidades,

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})}{\partial a_n} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_n} M_{nn'}(\mathbf{a}) \Lambda_{m'n'} = 0, \quad (1.33)$$

Estas igualdades están demostradas en el Apéndice de la ref. [88] y son consecuencia de la propiedad de la delta de grano grueso dada por la ec. (B.6) del Apéndice B de esta tesis. Por lo tanto, las ecs. 1.28, 1.29 se describen con auxilio de las ecs. 1.33 como,

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \sum_{m,n} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(u_m(\mathbf{a}) - \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial a_n} \right) f(\mathbf{a}, t) = 0 \quad (1.34)$$

Aquí es importante destacar lo siguiente: Morozov en la ref. [88] parte de las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante para un fluido simple para construir las ecuaciones de tipo Langevin en el espacio de Fourier, posteriormente vía esa ecuación de tipo Langevin determina la ecuación de FP no lineal local de la ec. 1.34. Aquí, en esta tesis seguiremos el camino inverso, puesto que deduciremos en el Capítulo 2 las ecuaciones no lineales de FP en el espacio de Fourier para el caso cuántico, dadas por las ecs. 2.84-2.85, que son equivalentes a la ec. 1.34. Ecuaciones no lineales de FP cuánticas que se particularizaran en el Capítulo 3 para el Helio superfluido. mediante la ecuación no lineal de FP en el espacio de configuración dada por la ec. 3.120

Segundo, aparentemente la igualdad de las ecs. 1.30 y 1.31 no es inmediata. Sin embargo, esta identidad se puede observar por un lado, de las ecs. 1.20-1.26 que dan las funciones de correlación Λ_{mn} de las componentes fluctuantes $\tilde{\xi}_n$ que aparecen en la definición de los flujos aleatorios, ver ecs. 1.5-1.6; y por el otro lado, las funciones M_{mn} de las ecs. 1.20-1.22 no son otra cosa que las transformadas de Fourier de los gradientes de las funciones locales $G(x)$ o de los gradientes de $v(x) \cdot G(x)$, funciones locales que posteriormente veremos están relacionadas con los coeficientes de transporte locales. Por lo tanto, el producto de ambas componentes Λ_{mn} y las M_{mn} nos dan las transformadas de Fourier de los gradientes de la función de correlación \mathcal{L}_{mn} .

Tercero, la ecuación no lineal de FP dada por la ec. 1.34 se obtiene de asociarla a las ecuaciones no lineales del tipo Langevin dadas por la ec. 1.15, donde la deducción de la ec. 1.34 a partir de las ecuaciones de tipo Langevin es independiente de la interpretación que se les de a dichas ecuaciones de Langevin; ya sea en el sentido de Stratonovich como de Ito, ([88],[112]). Aunque estrictamente Van Kampen [135, 136] ha sido muy claro en señalar los siguientes dos puntos en relación a la correspondencia entre ambos tipos de ecuaciones. Primero, que no hay problema para establecer la correspondencia entre una ecuación de FP lineal y una ecuación lineal de Langevin para un proceso markoviano, pero si existen problemas para la correspondencia entre ecuaciones no lineales de FP y no lineales de Langevin. Segundo, la interpretación de las ecuaciones de Langevin no tiene ningún sentido físico, a menos que sea complementada con una regla de interpretación que tiene dos variantes: en el sentido de Ito o en el de Stratonovich. Las cuales si bien son equivalentes, es preferible la de Stratonovich para el caso de ruido gaussiano blanco

externo, en el caso de ruido interno más que postular una ecuación no lineal de Langevin es necesario abordar el sistema desde un punto de vista microscópico.

Sin embargo, en general desde un punto de vista físico menos ortodoxo en todas las ecuaciones no lineales del tipo Langevin, semejantes a las ecs. 1.15, la función delta que se le asocia a las varianzas del término aleatorio no está completamente definida. Siempre va a existir un tiempo de correlación τ en el cual habrá correlación entre los términos aleatorios. Este tiempo de correlación implica que la densidad espectral del término (fuerza) aleatorio de la ecuación de Langevin no es independiente de la frecuencia. Es decir, existe una frecuencia de corte tal que la densidad espectral tienda a cero para frecuencias mayores a dicha frecuencia de corte, de otra manera la densidad espectral del término aleatorio tendería al infinito. Bajo la suposición de la existencia de esta frecuencia de corte, es que las ecuaciones no lineales del tipo Langevin conducen a la ecuación no lineal de FP. [109].

Ahora desde el punto de vista matemático hay que justificar la existencia de esa frecuencia de corte. En particular esto se logra construyendo una ecuación integral estocástica equivalente a la ecuación diferencial estocástica (ecuación de tipo Langevin), donde la solución de dicha integral es por un proceso similar al desarrollo de Kramers-Moyal. En éste desarrollo obtiene una integral la cual puede definirse en el sentido de Ito o en el sentido de Stratonovich, que finalmente se refleja en que los coeficientes del desarrollo de Kramers-Moyal carezcan de un término espurio, en el caso de Ito, o que aparezcan en el caso de Stratonovich [109], pero que en nada alteran la física del problema.

Cuarto, si se compara la ec. 1.31 con la ec. 2.82 del Capítulo 2, se puede observar que en el caso de la ec. 1.34 más que involucrar las partes determinísticas de los flujos dadas por $\mathcal{L}_{mn}(\hat{j}_m, \hat{j}_n)$ vía $\hat{j}_n(m)$, ésta involucra a las funciones de correlación $\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(J_m^R, J_n^R)$ de los flujos aleatorios $J_{n(m)}^R$ de las ecs. 1.5-1.6. Tomando en cuenta estas aclaraciones pasemos al siguiente punto.

v).- Dada la ec. 1.34, la cual es un caso particular de la ec. 2.85 del Capítulo 2, es posible describirla en el espacio de coordenadas, ya que de acuerdo con la ec. 2.88 de la sección 2.5 tenemos que,

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} - \int d\mathbf{x} \sum_{m,n} \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} \nabla \cdot \left(I_m(\mathbf{x}) + \tilde{\mathcal{L}}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla F_n(\mathbf{x}; a) \right) f(\mathbf{a}; t) +$$

$$+ \int d\mathbf{x} \sum_{m,n} \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \cdot \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} f(\mathbf{a}; t) = 0, \quad (1.35)$$

ó de acuerdo con la ec. 2.91,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \int d\mathbf{x} \frac{\delta}{\delta a_m(x)} u_m(\mathbf{x}; \mathbf{a}) f(\mathbf{a}; t) - \\ & - \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; a) \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x}')} f(\mathbf{a}; t) = 0, \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde $u_n(x)$ está dada por la ec. 2.89 y $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; a)$ por la ec. 2.90, pero sustituyendo \mathcal{L}_{mn} en lugar de $\tilde{\mathcal{L}}_{mn}$.

vii.- Ahora observamos que las ecs. 1.35-1.36 son idénticas a las ecs. 2.88 y 2.91 cuando.

$$\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(J_m^R, J_n^R) = \mathcal{L}_{mn}(\hat{j}_m, \hat{j}_n). \quad (1.37)$$

la cual es una condición necesaria para garantizar que una solución de las ecuaciones no lineales de FP dadas por las ecs. 1.35-1.36 sea compatible con una solución de equilibrio de las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante dadas por las ecs. 1.1-1.2³. Para verificar esta aseveración ver la sección 3.5 de la ref. [156] y la ec. (3.21) en la ref. [88].

vii).- Finalmente, conocidas las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\hat{j}_m, \hat{j}_n)$ y de la condición dada por la ec. 1.37 se determina la forma de las funciones $G_n(x)$. En el caso del fluido simple, las funciones $\mathcal{L}_{mn}(\hat{j}_m, \hat{j}_n)$ se determinan en función de los coeficientes de transporte locales, mediante el Método de Maxent en la ref. [156] de manera análoga a los cálculos realizados en la sección 3.2 de esta tesis. Ahora, de acuerdo con la condición de la ec. 1.37, las funciones $\mathcal{L}_{mn}(\hat{j}_m, \hat{j}_n)$ son iguales a las funciones de correlación $\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(J_m^R, J_n^R)$, pero también estas últimas funciones se pueden calcular independientemente a partir de

³En la ec. 1.37 debe tenerse cuidado que las funciones de correlación estén en el mismo sistema de referencia.

las funciones $G_n(x)$ y los términos $\tilde{\xi}_n(x)$ cuyas propiedades estadísticas están dadas por las ecs. 1.7-1.14. Por último, de la igualdad 1.37, se despejan las $G_n(x)$ en función de los coeficientes de transporte locales del fluido simple y de las varianzas de los términos fluctuantes $\tilde{\xi}_n(x)$.

Establecido el método de construcción de una ecuación no lineal de FP local asociada a un conjunto de ecuaciones no lineales de tipo Langevin, *nosotros procederemos de manera inversa. Dada la ecuación no lineal de FP local para el Helio superfluido, de la ec. 3.120 construiremos las ecuaciones no lineales del tipo Langevin asociadas a la ecuación de FP. Para lograr este objetivo seguiremos los pasos cuyos detalles están dados en el Apéndice F.*

Sin embargo, tenemos el problema de la no conmutatividad entre sí de la base de operadores asociados al Helio superfluido. Por lo tanto, con el objeto de lograr una exposición completa y autoconsistente, en el Capítulo 2 se reproduce la introducción de variables de grano grueso cuánticas y la obtención de una ecuación de Fokker-Planck generalizada (FPG) para sistemas cuánticos mediante el uso de una función de distribución de Wigner asociada a las variables de grano grueso, de acuerdo con la referencia [87]. Posteriormente, esta ecuación generalizada se aproxima a una ecuación no lineal de FP local al considerar un proceso *lento y Markoviano* en las variables de grano grueso, (ec. 2.91). En dicha ecuación de FP no lineal local aparece una matriz $\mathcal{D}(a)$ que básicamente es la matriz de coeficientes de transporte definida en función de un operador estadístico de grano grueso $\hat{\rho}_{CG}$, de acuerdo con una generalización de las relaciones fluctuación-disipación de Green-Kubo. Dicha matriz se evalúa posteriormente, en el Capítulo 3, para obtener las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante no lineal, tanto en el espacio de Fourier como de configuración.

Reiterando, en el Capítulo 3 se deduce un modelo microscópico para la hidrodinámica fluctuante no lineal de acuerdo con el método heurístico de Morozov descrito anteriormente, pero generalizándolo para el caso del Helio superfluido. Sin embargo, antes es necesario particularizar la ecuación de FP local para el caso del Helio superfluido. Concretamente, para obtener dicha ecuación de no lineal FP del Helio superfluido, se debe emplear el operador estadístico $\hat{\rho}_{FP} = \hat{\rho}_{CG} + \Delta\hat{\rho}$ con el que se deben promediar los op-

eradores asociados a las variables de interés. Pero dado que las relaciones funcionales explícitas de $\hat{\rho}_{CG}$ y $\Delta\hat{\rho}$ son desconocidas, éstas finalmente se evalúan con auxilio de un operador de equilibrio local $\hat{\rho}_l$ bajo la hipótesis que *las fluctuaciones del sistema son suficientemente pequeñas*, tal que los cálculos se realizan en la aproximación de equilibrio local de manera análoga a los del Apéndice A.

En particular, éste operador de equilibrio local $\hat{\rho}_l$, en un marco de referencia con velocidad v_s , en la aproximación lineal, es equivalente a un operador estadístico de referencia $\hat{\rho}_{qe}$ u operador estadístico de cuasi-equilibrio local [15]. Dicho operador permite evaluar las funciones de correlación de las partes disipativas de los flujos, tanto en el marco de referencia en movimiento, como en el marco de referencia fijo, donde las no linealidades se ponen de manifiesto. Especificados los multiplicadores de Lagrange locales, las corrientes locales y los coeficientes de transporte locales, se determina una ecuación de FP local para el Helio superfluido en el espacio de configuración y de Fourier.

A continuación, las ecuaciones no lineales de Langevin se deducen empleando de manera inversa el método heurístico presentado al inicio de esta sección para el caso de un fluido clásico simple. Concretamente, se construyen unas ecuaciones de Langevin no lineales, tanto en el espacio de Fourier como de configuración, consistentes con la ecuación no lineal de FP local del Helio superfluido en el espacio de Fourier como de configuración, respectivamente.

En el Capítulo 4, se discuten y comparan los resultados de esta tesis con otros que aparecen en la literatura, como los fundamentados en la teoría fenomenológica de las fluctuaciones de Landau [65], los obtenidos mediante la linearización de la ecuaciones hidrodinámicas [103], y los obtenidos mediante el uso de funciones de Green para la hidrodinámica molecular del Helio superfluido [127]. En particular queremos poner énfasis en las inconsistencias señaladas por R. Fox [33] en relación a los dos primeros modelos. Paralelamente a esta comparación se presentan las conclusiones de esta tesis.

Finalmente, se presenta la bibliografía y un conjunto de apéndices que sustentan y complementan los resultados de esta tesis.

Capítulo 2

Ecuación de Fokker-Planck Generalizada para un Sistema Hidrodinámico Cuántico.

Como hemos mencionado en el Capítulo 1, la construcción de un modelo para la hidrodinámica fluctuante no lineal del Helio superfluido tiene que considerar la introducción de variables fluctuantes o de grano grueso, antes de aplicar una Teoría de la Respuesta Lineal (TRL) generalizada de Kubo que nos conduzca de manera indirecta a las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante.

Concretamente, en el Capítulo 3 se obtiene una relación fluctuación-disipación de Kubo vía una TRL generalizada con ayuda de Maxent y de un conjunto de hipótesis *ad hoc*, para definir los coeficientes de transporte locales necesarios para la construcción de la hidrodinámica fluctuante. Dada esta situación, podría pensarse que bastaría con aplicar la TRL generalizada respecto a un estado de equilibrio local (ver sección 3.6.4 en la referencia [70]) para obtener la hidrodinámica fluctuante del superfluido, sin hacer uso explícito de Maxent. Sin embargo, la anterior aseveración es incorrecta en dos aspectos:

- i.- La TRL generalizada desarrollada por Kubo en [70], hace uso explícito de Maxent.
- ii.- La hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido requiere la introducción de variables fluctuantes de grano grueso definidas *a partir de operadores que no conmutan entre sí*. Dichas variables fluctuantes no se consideran en la TRL generalizada. De hecho,

éste es el principal inconveniente que impide construir de una manera directa una teoría macroscópica para la hidrodinámica fluctuante del superfluido.

Reiterando, a diferencia del caso clásico donde la introducción de variables de grano grueso es inmediata [47, 48], en el caso cuántico, tenemos el problema de la no conmutatividad entre sí de los operadores asociados a las variables dinámicas. Esta situación impide la introducción directa de las variables de grano grueso, lo que implica que no se puede hacer uso inmediato de una TRL generalizada. Para resolver este problema se deducen indirectamente las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante para el Helio superfluido a través de las ecuaciones de Langevin asociadas a una ecuación de Fokker-Planck (FP) de acuerdo con el método heurístico de Morozov planteado en la sección 1.2. Dicha tarea será abordada hasta el Capítulo 3, después de que se haya resuelto el problema de la introducción de las variables de grano grueso y deducido un par de ecuaciones de FP, una generalizada y una local no lineal.

Por lo tanto, éste Capítulo tiene tres objetivos básicos:

El primero es la introducción de las variables de grano grueso a partir de las variables dinámicas microscópicas relevantes ¹, $\{\hat{a}_m\}_{micro}$, que se han tomado como el número de partículas, la energía, el ímpetu y velocidad del superfluido.

El segundo objetivo, es la deducción de una ecuación de Fokker-Planck Generalizada (FPG) para el valor esperado del operador asociado a una función de distribución de grano grueso $f(\mathbf{a}, t)$. Dicho valor esperado se calcula mediante un operador estadístico de no equilibrio $\hat{\rho}_{FP}$, el cual se considera como una función de Wigner, al determinarse a través de una función de distribución microscópica clásica ρ_{FP} . Dicha función de distribución se deduce vía Maxent, donde se usa como restricción para la maximización de la funcional de entropía ² a una función de distribución de grano grueso clásica f . Es decir, por medio de Maxent se obtiene una función de distribución microscópica clásica de no equilibrio ρ_{FP} . A esta función, mediante el principio de Weyl se le asocia un operador estadístico

¹Con objeto de no complicar la notación de aquí en adelante cuando hablemos de las variables dinámicas microscópicas las denotaremos como : $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m\}_{micro}$; en el caso de las variables de grano grueso como: $\hat{\mathbf{a}} = \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m\}$ y para sus valores numéricos como: $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$.

²Este proceso de maximización es independiente del presentado en el Apéndice A.

$\hat{\rho}_{FP}$, con el que se determina el valor esperado de $\hat{f}(\mathbf{a}, t)$, de cuya ecuación de evolución se deduce una ecuación de FPG.

El tercer objetivo consiste en obtener una ecuación de FP local no lineal mediante una simplificación de la ecuación de FPG. Concretamente en esta última ecuación aparece una matriz con elementos K_{mn} para la correlación de las partes no proyectadas de las ecuaciones de evolución de las variables dinámicas: $K(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t) = Tr\{\hat{X}(\mathbf{a}, t)\hat{X}(\mathbf{a}')\}$, con $\hat{X} = (1 - \mathcal{P})\delta(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})i\hat{L}\hat{\mathbf{a}}$, donde \mathcal{P} es un operador de proyección, y \hat{L} es el operador de Liouville. Dicha matriz se desarrolla en series de potencias de las variables dinámicas. Tomando sólo el término de orden cero ³ de éste desarrollo y despreciando los efectos no locales tanto del tiempo, como los debidos a la no localidad de las variables de grano grueso, el elemento de matriz K_{mn} se transforma en el elemento de matriz \mathcal{D}_{mn} , donde como mostraremos en el Capítulo 3, dichos elementos \mathcal{D}_{mn} permiten determinar los coeficientes de transporte locales del Helio superfluido. La evaluación de los elementos de matriz \mathcal{D}_{mn} , se hace utilizando una generalización de la relación fluctuación-disipación de Green-Kubo en analogía con la determinación de los coeficientes de transporte realizada en Apéndice A. (*empleando la hipótesis adicional de que las fluctuaciones del sistema son pequeñas*). Definidos dichos coeficientes de transporte locales del superfluido, se determina a su vez una ecuación de FP local no lineal para el Helio superfluido en el espacio de Fourier, ecuación a la que se le asocian unas ecuaciones de Langevin en dicho espacio, de cuyas transformadas inversas se obtienen las ecuaciones para la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido en el espacio de configuración. Dichas ecuaciones constituyen el objetivo principal de esta tesis, tarea que será abordada hasta el Capítulo 3.

Es pertinente señalar que los resultados de este Capítulo 2, básicamente fueron obtenidos por Zubarev y Morozov para el caso clásico [156] y por Morozov para el caso cuántico en [87]; y se reproducen en esta tesis con el fin de lograr una exposición completa y consistente.

³El orden cero de éste desarrollo corresponde al segundo orden de los gradientes de las partes no proyectadas de los flujos

2.1 La Función de Distribución de Grano Grueso para un Sistema Cuántico.

Es bien conocido en la literatura que la ecuación de Fokker-Planck (FP) nos permite realizar una descripción mesoscópica de un sistema fuera de equilibrio. Es decir, nos permite modelar el comportamiento de un sistema no sólo por los valores medios de las variables dinámicas relevantes sino también por las fluctuaciones de dichas variables, tanto cerca como lejos de los puntos críticos, donde dichas variables fluctuantes son conocidas como variables de grano grueso y son aplicadas tanto a sistemas clásicos como sistemas cuánticos [47, 48, 130]. Es decir, el comportamiento de estas variables de grano grueso definidas en un espacio mesoscópico está descrito por una función de distribución que a su vez obedece una ecuación de FP.

Sin embargo, a diferencia de los sistemas clásicos cuyo comportamiento más elemental está dado por las variables dinámicas definidas en el espacio fase, las variables dinámicas para los sistemas cuánticos están asociadas a operadores definidos en un espacio de Hilbert. De aquí surge la pregunta: ¿Cómo definir las variables de grano grueso y su función de distribución a partir de los operadores definidos en un espacio de Hilbert?

Una respuesta la dió Van Kampen en [130]. Sin embargo, para realizar la construcción de las variables de grano grueso éste autor supone que los operadores asociados a estas variables conmutan. Para cumplir esta suposición Van Kampen tuvo que recurrir a la hipótesis de la aproximación de fases aleatorias repetidas, que es una aproximación fuerte.

Por otra parte, existe otra aproximación diferente a la de Van Kampen, en la cual no se permite que los operadores de grano grueso conmuten. Esta hace uso del principio de correspondencia de Weyl, que conduce a la construcción de una función de Wigner. Sin embargo, como se sabe la función de Wigner no satisface estrictamente las propiedades de una función de distribución de probabilidad. No obstante éste es un método alternativo de abordar la respuesta a la pregunta planteada.

Adicionalmente existe otra alternativa basada en el uso de operadores de proyección [117]. De hecho, en [25] se muestra que éste método es equivalente a la aproximación de

fases aleatorias repetidas. *Sin embargo aquí nos restringiremos al uso de la aproximación basada en la función de Wigner.*

2.1.1 Variables Hidrodinámicas de Grano Grueso.

Sea un sistema cuántico descrito por un conjunto de N variables de grano grueso cuyos operadores asociados nos dan una descripción completa del sistema, $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N)$. En el caso clásico tendríamos el conjunto de funciones de fase $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_N)$, para las cuales su función de distribución de grano grueso se expresa como.

$$f(\mathbf{a}, t) = \left\langle \prod_{n=1}^N \delta(A_n - a_n) \right\rangle_{FP} = \langle \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a}) \rangle_{FP}, \quad (2.1)$$

donde A_n son las variables de grano grueso clásicas, evaluadas como funciones de fase, y las $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ son sus posibles valores numéricos. El promedio indicado por $\langle \dots \rangle_{FP}$ se toma respecto a una función de distribución de no-equilibrio $\rho_{FP}(t)$, para el caso clásico. función que será determinada más adelante vía Maxent.

Una forma de definir las variables de grano grueso en sistemas clásicos es mediante expresiones del tipo.

$$A_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \{A_n(\mathbf{x}')\}_{micro} d\mathbf{x}', \quad (2.2)$$

donde, $\{A_n(\mathbf{x}')\}_{micro}$ son las variables dinámicas microscópicas. La integración se realiza sobre el volumen δV en la vecindad del punto \mathbf{x}' , volumen que es pequeño macroscópicamente pero contiene un número enorme de partículas.

Esta operación de granulación también puede realizarse en el espacio de Fourier, por ejemplo en el caso clásico tenemos,

$$A_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{k < k_0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} A_{nk}, \quad (2.3)$$

con,

$$A_{nk} = \int_{k < k_0} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} A_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} , \quad (2.4)$$

donde $k < k_0$ determina el tamaño del volumen δV de la celda. En nuestro caso significa un número de onda de corte que garantiza que se está estudiando el comportamiento hidrodinámico del sistema.

Las variables de grano grueso para un sistema hidrodinámico cuántico como el Helio superfluidó, se construyen en la representación de coordenadas a partir de los operadores definidos por las ecs. A.3-A.6 de la subsección A.1.1 del Apéndice A. tal que de acuerdo con la ec. 2.2 tenemos,

$$\hat{a}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \{\hat{a}_n(\mathbf{x}')\}_{micro} d\mathbf{x} . \quad (2.5)$$

donde estos operadores están definidos en un subespacio de Hilbert [130], con $\{\hat{a}_n(\mathbf{x})\}_{micro} = \{\hat{\rho}(\mathbf{x}), \hat{H}(\mathbf{x}), \hat{j}(\mathbf{x}), \hat{u}_s(\mathbf{x})\}_{micro}$.

Sin embargo para nuestro propósito es conveniente realizar el granulado grueso en la representación de los ímpetus, es decir: $\{\hat{a}_{m\mathbf{k}}\} = \{\hat{\rho}_{\mathbf{k}}, \hat{H}_{\mathbf{k}}, \hat{j}_{\mathbf{k}}, \hat{u}_{s\mathbf{k}}\}$ por lo tanto,

$$\hat{a}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{a}_{n\mathbf{k}} . \quad (2.6)$$

con,

$$\hat{a}_{n\mathbf{k}} = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{a}_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} . \quad (2.7)$$

Por otra parte, de las ecs. A.39-A.41 y A.53 tenemos que en el espacio de Fourier se cumple,

$$\hat{a}_{n\mathbf{k}} = -i\mathbf{k} \cdot \hat{I}_{n\mathbf{k}}, \quad (2.8)$$

donde $\{\hat{I}_{n\mathbf{k}}\} = \{\hat{j}_{\mathbf{k}}, \hat{I}_{E\mathbf{k}}, \hat{j}_{s\mathbf{k}}, \hat{T}_{\mathbf{k}}\}$ son las transformadas de Fourier de la densidad de los operadores asociados al flujo de ímpetu, flujo de energía, corriente del superfluido y tensor de los esfuerzos.

En la representación de coordenadas tenemos que la ec. 2.8 se escribe como,

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \hat{I}(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

De aquí en adelante asumiremos que los operadores de grano grueso $\hat{a}_n \equiv \hat{a}_{n\mathbf{k}}$ están definidos en la representación de los ímpetus dada por la ec. 2.7. Pero cuando hagamos uso explícito de la dependencia $a_n(\mathbf{x})$, se asumirá que la representación es en el espacio de coordenadas. La razón de trabajar en la representación de ímpetus es que la ecuación de FPG se simplificará mediante una aproximación local, simplicación que se facilita si las variables de grano grueso están en esta representación.

2.1.2 Función de Distribución de Grano Grueso.

Desafortunadamente para introducir las variables de grano grueso en el caso cuántico, no podemos realizar la sustitución directa de $\hat{a}_n \rightarrow A_n$ en la ec. 2.1, ya que en general los elementos de la base de operadores $\{\hat{a}_n\}$ no conmutan entre sí. Por lo tanto, de acuerdo con los comentarios iniciales, el método elegido para la introducción de variables de grano grueso, empleará el principio de correspondencia de Weyl para definir una función de distribución cuántica mediante una función de Wigner ⁴.

De acuerdo con Weyl si tenemos una función $\rho_{CG}(\mathbf{A}) = \rho_{CG}(A_1, A_2, \dots, A_N)$ de las variables de grano grueso clásicas \mathbf{A} , las cuales no se consideran como variables de fase

⁴ver [8] para la construcción de una ecuación de FP para el caso donde la base de operadores $\{\hat{a}_n\}$ se asume que conmutan entre sí.

sino como variables ordinarias, entonces a las variables de grano grueso cuánticas $\hat{\mathbf{a}}$ les podemos asociar una función con la siguiente expresión,

$$\hat{\rho}_{CG}(\hat{\mathbf{a}}, t) = (2\pi)^{-N} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{A} \rho_{CG}(\mathbf{A}) e^{i\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{A})}, \quad (2.10)$$

donde,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad d\mathbf{x} = \prod_n dx_n$$

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n), \quad d\mathbf{A} = \prod_n dA_n$$

$$\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}} = \sum_n x_n \hat{a}_n, \quad \mathbf{x}\mathbf{A} = \sum_n x_n A_n$$

Ahora, si consideramos que $\rho_{CG}(\mathbf{A}) = \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a})$ y la sustituimos en la ec. 2.10 tenemos.

$$\hat{f}(\mathbf{a}) \equiv (2\pi)^{-N} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a})}. \quad (2.11)$$

donde en general se ha supuesto que las A_n son reales y las \hat{a}_n son operadores hermitianos ⁵.

Dada una función arbitraria ρ_{CG} , tenemos de las ecs. 2.10-2.11 que,

$$\hat{\rho}_{CG}(\hat{\mathbf{a}}, t) = \int d\mathbf{a} \rho_{CG}(\mathbf{a}) \hat{f}(\mathbf{a}, t). \quad (2.12)$$

⁵En caso de que los operadores sean no hermitianos ver [87] para una generalización de esta ecuación.

Por lo tanto, el valor esperado del operador asociado a la función de distribución de grano grueso para un sistema cuántico se define como,

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{a}, t) &= Tr \{ \hat{\rho}_{CG}(t) \hat{f}(\mathbf{a}) \} \equiv \langle \hat{f}(\mathbf{a}) \rangle_{CG} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr \{ \hat{\rho}_{FP}(t) \hat{f}(\mathbf{a}) \} \equiv \langle \hat{f}(\mathbf{a}) \rangle_{FP},
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

aquí $\hat{\rho}_{FP}(t)$ es un operador estadístico de no-equilibrio que se determinará en función de $\hat{\rho}_{CG}$. A su vez, $\hat{\rho}_{CG}$ está dado en la ec. 2.12 a través de ρ_{CG} , donde éste último es una función de distribución microscópica clásica que se determina vía Maxent. Cabe observar que la última igualdad de la ec. 2.13 expresa una condición de consistencia necesaria en el formalismo de Maxent [1, 154]. También es pertinente señalar que el valor esperado $f(\mathbf{a}, t)$ dado por la ec. 2.13 puede tomar valores negativos, ya que $f(\mathbf{a}, t)$ se define mediante una función de Wigner $\hat{\rho}_{CG}$ que puede tomar valores negativos [146]. Esta situación implica que $f(\mathbf{a}, t)$ no sea estrictamente una función de distribución y por lo tanto, deben interpretarse con mucho cuidado los valores esperados calculados con ella. Esta función además cumple con las siguientes propiedades,

$$\int d\mathbf{a} f(\mathbf{a}, t) = 1, \tag{2.14}$$

$$\int da_1, a_2, \dots, a_N f(\mathbf{a}, t) = \langle \{ \{ a_1, a_2, \dots, a_N \} \} \rangle, \tag{2.15}$$

donde $\{ \{ \dots \} \}$ simboliza un producto simetrizado de operadores [87].

2.1.3 Función de Distribución Microscópica.

En esta sección se determina ρ_{FP} para el caso clásico, a través de la función de distribución ρ_{CG} que maximiza a una funcional de entropía de información, tal que $\rho_{FP} = \rho_{CG} + \Delta\rho$, donde ρ_{CG} es la parte proyectada de ρ_{FP} , $\Delta\rho$ es su parte disipativa. Además ρ_{FP} satisface una ecuación de Liouville con fuentes.

Sea $S_I(t)$ una funcional de entropía de información,

$$S_I(t) = -\langle \ln \rho_{CG}(t) \rangle_{CG} = -\int d\Gamma \rho_{CG}(t) \ln \rho_{CG}(t). \quad (2.16)$$

donde $\langle \rangle_{CG}$ indica el promedio calculado con $\rho_{CG}(t)$, función que se determina maximizando la ec. 2.16 con la restricción,

$$f(\mathbf{a}, t) = \int d\Gamma \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a}) \rho_{FP} = \langle \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a}) \rangle_{FP} \quad (2.17)$$

De aquí se tiene que ρ_{CG} se escribe como,

$$\rho_{CG}(t) = \exp\left[-\int d\Gamma G(\mathbf{A}, t) \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a})\right] = e^{-G \cdot \mathbf{a}}. \quad (2.18)$$

donde $G(\mathbf{A}, t)$ es un multiplicador indeterminado de Lagrange, que se determina de la condición análoga a las de las ecs. 2.13 y las ecs. A.31-A.32 del Apéndice A, a saber,

$$f(\mathbf{a}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{N/V \rightarrow c\epsilon} \int d\Gamma \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a}) \rho_{FP}(t) \right] = \langle \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a}) \rangle_{FP} = \langle \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a}) \rangle_{CG} \quad (2.19)$$

Cabe observar, que esta condición físicamente tiene dos sinificados, el primero es obtener ecuaciones de evolución irreversibles y el segundo obtener una solución estacionaria de la ecuación de Liouville. Los detalles puede verse en la referencia [1] y serán comentados brevemente más adelante.

Por lo tanto, del último miembro derecho de esta ecuación calculado con ρ_{CG} de la ec. 2.18 se tiene que,

$$G(\mathbf{a}, t) = -\ln \frac{f(\mathbf{a}, t)}{W(\mathbf{a})} \quad (2.20)$$

con.

$$W(\mathbf{a}) = \int d\Gamma \delta(\mathbf{A} - \mathbf{a})$$

$W(\mathbf{A})$ es conocida como función de estructura, y físicamente es el volumen de la hipercelda $\delta(\mathbf{A} - \mathbf{a})$, [25].

Finalmente, remplazando la primera ecuación de las ecs. 2.20 en la ec. 2.18, ρ_{CG} se escribe como,

$$\rho_{CG}(\mathbf{A}, t) = \frac{f(\mathbf{A}, t)}{W(\mathbf{A})} = \frac{f(\mathbf{a}, t)}{W(\mathbf{a})} \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{A}}. \quad (2.21)$$

Sin embargo, esta función de distribución tiene los mismos inconvenientes del operador $\hat{\rho}_l$ comentado en la sección A.1.2 ⁶. Para superar dichos inconvenientes la escuela Soviética postula que ρ_{FP} debe obedecer una ecuación de Liouville con fuentes,

⁶Estrictamente en la sec. A.1.2 y la ref. [1] se discute el operador $\hat{\rho}_l$ para el caso cuántico. En el caso clásico los argumentos son los mismos y pueden verse en la sección 21 de la referencia [154] considerando las precisiones indicadas en la ref. [1].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL\right)\rho_{FP}(t) = -\epsilon\{\rho_{FP}(t) - \rho_{CG}(t)\} = -\epsilon \Delta\rho(t) \quad (2.22)$$

donde,

$$\rho_{FP}(t) = \rho_{CG}(t) + \Delta\rho(t) \quad (2.23)$$

y, $iL A(t) \equiv \{A(t), H\}$, L es el operador de Liouville, H es el Hamiltoniano del sistema y $\{A(t), H\}$ denota un corchete de Poisson. El significado físico de la ec. 2.22 ya ha sido comentado en la sec. A.1.2 o en la ref. [1]. Ahora, dados ρ_{FP} y ρ_{CG} , regresemos al problema de determinar sus análogos $\hat{\rho}_{FP}$ y $\hat{\rho}_{CG}$ para el caso cuántico.

2.2 Operador Estadístico de Grano Grueso.

De acuerdo con el principio de Weyl indicado por la ec. 2.12, podemos calcular $\hat{\rho}_{CG}$ a partir de ρ_{CG} , dado a su vez por la ec. 2.21. Sin embargo, antes de realizar la sustitución directa de ρ_{CG} en la ec. 2.12, se debe considerar la no conmutatividad de la base de operadores $\hat{\mathbf{a}}$. Por lo tanto, se tiene que determinar la función $\rho_{CG} \equiv G'(\mathbf{A}, t)$ con la condición de no conmutatividad. Para ello escribimos la ec. 2.12 como.

$$\hat{\rho}_{CG}(t) = \int d\mathbf{a}' G'(\mathbf{a}', t) \hat{f}(\mathbf{a}', t). \quad (2.24)$$

Multiplicando ahora esta ecuación por $\hat{f}(\mathbf{a}, t)$ y empleando la ec. 2.13 se tiene que.

$$f(\mathbf{a}, t) = \int d\mathbf{a}' W(\mathbf{a}, \mathbf{a}') G'(\mathbf{a}', t). \quad (2.25)$$

donde.

$$W(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = Tr \{ \hat{f}(\mathbf{a}) \hat{f}(\mathbf{a}') \}. \quad (2.26)$$

es la función de estructura o de densidad de estados para el caso cuántico, ecuación análoga a la segunda ecuación de las ecs.2.20 para el caso clásico. Sin embargo, en la ec. 2.26, ya aparecen los efectos de no localidad en las variables \mathbf{a} y \mathbf{a}' como una consecuencia de la no conmutatividad entre si de los operadores $\hat{\mathbf{a}}$. Además, sustituyendo en la ec. 2.26 la definición de $\hat{f}(\mathbf{a}', t)$ dada por la ec. 2.11 e integrando, se obtienen las siguientes relaciones:

$$W(\mathbf{a}) = \int d\mathbf{a}' W(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = Tr \{ \hat{f}(\mathbf{a}) \},$$

$$W(\mathbf{a}') = \int d\mathbf{a} W(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = Tr \{ \hat{f}(\mathbf{a}') \}. \quad (2.27)$$

Ahora de las ecs. 2.25 y 2.26 se tiene que .

$$\rho_{CG} \equiv G'(\mathbf{a}, t) = \int d\mathbf{a}' W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') f(\mathbf{a}', t), \quad (2.28)$$

donde la función $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ es solución de la ecuación integral,

$$\int d\mathbf{a}' W(\mathbf{a}, \mathbf{a}') W_{-1}(\mathbf{a}'', \mathbf{a}') = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}''). \quad (2.29)$$

Finalmente, si sustituimos la ec. 2.28 en la ec. 2.24 se obtiene la relación buscada para $\hat{\rho}_{CG}$ a saber,

$$\hat{\rho}_{CG}(t) = \int d\mathbf{a} \int d\mathbf{a}' \hat{f}(\mathbf{a}') W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') f(\mathbf{a}', t). \quad (2.30)$$

Antes de terminar esta sección es conveniente mostrar cómo la función de estructura $W(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y su inversa $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ pueden descomponerse en una parte singular y otra regular. Con este fin se asume que dichas funciones se pueden escribir como,

$$W(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = W(\mathbf{a}) \{ \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') - R(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \}. \quad (2.31)$$

$$W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = W^{-1}(\mathbf{a}) \{ \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') + r(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \}. \quad (2.32)$$

donde $W(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ esta dada por la ec. 2.27 y $W^{-1}(\mathbf{a}) = 1/W(\mathbf{a})$. En cuanto a la parte regular $R(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ de la ec. 2.31, ésta se determina sustituyendo en el miembro izquierdo de la ec. 2.31 la ec. 2.26, de donde al despejar $R(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y emplear las ecs. 2.11 y 2.27 se obtiene que,

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = (2\pi)^{-2N} \int dx \int dx' e^{i(\mathbf{x}'\mathbf{a}' - \mathbf{x}\mathbf{a})} Tr \left[e^{i\hat{\mathbf{a}} \mathbf{x} - \mathbf{x}'\mathbf{a}'} - e^{i\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}} e^{-i\mathbf{x}'\hat{\mathbf{a}}} \right] / W(\mathbf{a}). \quad (2.33)$$

Para la parte regular de la ec. 2.32 se sustituyen las ecs. 2.31 y 2.32 en la ec. 2.29, de donde se despeja $r(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ de manera que,

$$r(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = R(\mathbf{a}, \mathbf{a}') + \int d\mathbf{a}'' R(\mathbf{a}, \mathbf{a}'') r(\mathbf{a}'', \mathbf{a}') \quad (2.34)$$

Por otra parte, despejando $R(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ de la ec. 2.31 no es difícil mostrar que se cumplen las siguientes identidades.

$$\int d\mathbf{a} W(\mathbf{a}) R(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \int d\mathbf{a}' R(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0, \quad (2.35)$$

Análogamente, de la ec. 2.34 con auxilio de las ecs. 2.35 se tiene que,

$$\int d\mathbf{a} W(\mathbf{a}) r(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \int d\mathbf{a}' r(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0. \quad (2.36)$$

Nótese en la ec. 2.33, que si los operadores $\hat{\mathbf{a}}$ conmutaran con \mathbf{x} y \mathbf{x}' , las funcionales $r(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $R(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ se harían cero y no habría el problema de no localidad en las variables \mathbf{a} .

2.3 Ecuación de Fokker-Planck Generalizada (FPG).

Esta sección tiene como objetivo deducir una ecuación de FPG. Para lograrlo se construye una ecuación de Liouville con fuentes para $\hat{\rho}_{FP}$ a partir de la ecuación de Liouville para ρ_{FP} , donde $\hat{\rho}_{FP} = \hat{\rho}_{CG} + \Delta\hat{\rho}$. Sin embargo, para especificar $\hat{\rho}_{FP}$ es necesario determinar sólo $\Delta\hat{\rho}$, ya que $\hat{\rho}_{CG}$ está definido por la ec. 2.30. Concretamente, $\Delta\hat{\rho}$ se determina a partir de la ecuación $\frac{\partial \hat{\rho}_{FP}}{\partial t}$ expresada mediante un operador de proyección \mathcal{P} , y también con el auxilio de una función \mathbf{J} , con los cuales se reescribe la ecuación de Liouville con fuentes para $\hat{\rho}_{FP}$ pero en función de $\Delta\hat{\rho}$. De la solución de la ecuación resultante se obtiene $\Delta\hat{\rho}$, con lo que queda determinado $\hat{\rho}_{FP}$. Una vez, dado $\hat{\rho}_{FP}$ se calcula el valor esperado del operador de evolución para $\hat{f}(\mathbf{a}', t)$. Valor esperado que reescrito adecuadamente es la ecuación de FPG buscada.

Por otra parte, en dicha ecuación de FPG aparece una matriz con elementos no locales $K_{mn}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$, mencionados al inicio de éste Capítulo, elementos de matriz que en una

aproximación local se transforman en los elementos de una matriz \mathcal{D}_{mn} . En efecto, por una selección adecuada de las variables dinámicas, los elementos \mathcal{D}_{mn} nos conducirán a los coeficientes de transporte locales del Helio superfluido. Sin embargo, en la próxima sección de éste Capítulo sólo se simplificará la ecuación de FPG a una ecuación local, dejando la evaluación de los elementos \mathcal{D}_{mn} y la determinación de la ecuación de FP para el Helio superfluido hasta el próximo Capítulo.

Consideremos la ecuación de Liouville con fuentes para ρ_{FP} dada por la ec. 2.22. Ahora, tomando como postulado una ecuación de Liouville con fuentes, análoga a la ec. 2.22, pero para el operador $\hat{\rho}_{FP}$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d\hat{\rho}_{FP}}{dt} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i\hat{L} \right\} \hat{\rho}_{FP}(t) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \{ \hat{\rho}_{FP}(t) - \hat{\rho}_{CG}(t) \} = \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Delta \hat{\rho}(t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

$i\hat{L}$ es el operador de Liouville, con $i\hat{L}\hat{A} = -i\left[\hat{A}, \hat{H}\right]_-$, $\hbar = 1$ y \hat{H} se ha supuesto que no depende del tiempo. Además, definimos $\Delta\hat{\rho}$ a través de,

$$\hat{\rho}_{FP}(t) = \hat{\rho}_{CG}(t) + \Delta\hat{\rho}(t) \quad (2.38)$$

Por otro lado, al calcular la derivada temporal de la ec. 2.13 y tomar su límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{a}', t)}{\partial t} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} Tr \{ \hat{\rho}_{FP}(t) \hat{f}(\mathbf{a}', t) \} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[Tr \left(\frac{\partial \hat{\rho}_{FP}(t)}{\partial t} \hat{f}(\mathbf{a}', t) \right) + Tr \left(\hat{\rho}_{FP}(t) \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{a}', t)}{\partial t} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

Es claro que la derivada temporal de $f(\mathbf{a}', t)$ es igual a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$, puesto que el sistema tiende al equilibrio. Rescribiendo esta ec. 2.39 con ayuda de las ecs. 2.37 y 2.38 se tiene que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\mathbf{a}', t)}{\partial t} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left(\hat{\rho}_{FP}(t) \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{a}', t)}{\partial t} \right) = \\
&= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left(\dot{f}(\mathbf{a}', t) i\hat{L} \hat{\rho}_{FP}(t) \right) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left[\hat{f}(\mathbf{a}', t) i\hat{L} \left(\hat{\rho}_{CG}(t) + \Delta\hat{\rho} \right) \right]. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

A continuación se calcula la derivada temporal de la ec. 2.30, tal que dicha derivada se escribe como.

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{CG}(t)}{\partial t} = \int d\mathbf{a} \int d\mathbf{a}' \hat{f}(\mathbf{a}') W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \frac{\partial f(\mathbf{a}', t)}{\partial t}. \quad (2.41)$$

Si sustituímos en esta ecuación la ec. 2.40, la ec. 2.41 se expresa como,

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{CG}(t)}{\partial t} = -\mathcal{P} i\hat{L} \hat{\rho}_{CG}(t) - \mathcal{P} i\hat{L} \Delta\hat{\rho}(t), \quad (2.42)$$

donde \mathcal{P} es un operador de proyección definido por,

$$\mathcal{P} \hat{A} = \int d\mathbf{a} \int d\mathbf{a}' \hat{f}(\mathbf{a}') W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \text{Tr} \{ \hat{A} \hat{f}(\mathbf{a}', t) \}. \quad (2.43)$$

Además, de la ecs. 2.28 y 2.30 se tiene que,

$$i\hat{L} \hat{\rho}_{CG}(t) = \int d\mathbf{a} \int d\mathbf{a}' W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') f(\mathbf{a}', t) i\hat{L} \hat{f}(\mathbf{a}', t) \quad (2.44)$$

Ahora, de la definición de $\hat{f}(\mathbf{a}', t)$ dada por la ec. 2.11, se ve que en la ec. 2.44 es necesario considerar un factor de la forma $i\hat{L} \exp(i\mathbf{x}\mathbf{a}) = -i[\exp(i\mathbf{x}\mathbf{a}), \hat{H}]_-$. Con el objeto de simplificar dicho factor usamos la identidad de Kubo [87],

$$-i[e^{\hat{B}}, \hat{H}]_- = e^{\hat{B}} \int_0^1 d\tau e^{-\tau\hat{B}} (i\hat{L}\hat{B}) e^{\tau\hat{B}}. \quad (2.45)$$

Si $\hat{B} = i\mathbf{x}\mathbf{a}$, entonces el factor $i\hat{L}\hat{f}(\mathbf{a}', t)$ se expresa como,

$$i\hat{L}\hat{f}(\mathbf{a}', t) = (2\pi)^{-N} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a})} \int_0^1 d\tau e^{-i\tau\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}} i\mathbf{x}(i\hat{L}\hat{\mathbf{a}}) e^{i\tau\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}}. \quad (2.46)$$

o,

$$i\hat{L}\hat{f}(\mathbf{a}', t) = -\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}. \quad (2.47)$$

donde se ha definido la función $\mathbf{J}(\mathbf{a})$ como,

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = (2\pi)^{-N} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}(\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a})} \int_0^1 d\tau e^{-i\tau\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}} (i\hat{L}\hat{\mathbf{a}}) e^{i\tau\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}}. \quad (2.48)$$

Por lo tanto rescribiendo la ec. 2.44 con auxilio de la ec. 2.47 se tiene que,

$$i\hat{L}\hat{\rho}_{CG}(t) = \int d\mathbf{a} \mathbf{J}(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \int d\mathbf{a}' W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') f(\mathbf{a}', t) \quad (2.49)$$

Por otra parte, rescribiendo la ecuación de Liouville con fuentes, la ec. 2.37. en función de la parte disipativa $\Delta\hat{\rho}$ de $\hat{\rho}_{FP}$. podemos reescribirla como.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{L} - \epsilon\right)\Delta\hat{\rho}(t) = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{L}\right)\hat{\rho}_{CG}(t), \quad (2.50)$$

ecuación que con ayuda de las ecs. 2.42 y 2.49, después de un poco de álgebra, se escribe como,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\tilde{L} - \epsilon\right)\Delta\hat{\rho}(t) = -\int d\mathbf{a} \mathbf{X}(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \int d\mathbf{a}' W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') f(\mathbf{a}', t). \quad (2.51)$$

donde se ha definido a $\mathbf{X}(\mathbf{a})$ como ⁷,

$$\mathbf{X}(\mathbf{a}) = (1 - \mathcal{P}) \mathbf{J}(\mathbf{a}), \quad (2.52)$$

Además, en el lado izquierdo de la ec. 2.51 aparece el operador de evolución reducido \tilde{L} , que evalúa la disipación del sistema y que está definido por,

$$\tilde{L} = (1 - \mathcal{P}) \hat{L}. \quad (2.53)$$

Integrando ahora la ec. 2.51, empleando como condición a frontera $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon t} \Delta\hat{\rho} \rightarrow 0$, obtenida de las ec. 2.13 y de la ec. 2.38, se tiene que,

$$\hat{\rho}_{FP}(t) = \hat{\rho}_{CG}(t) - \int d\mathbf{a} \int_{-\infty}^t dt' e^{\epsilon(t'-t)} \mathbf{X}(\mathbf{a}, \mathbf{t} - t') \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \int d\mathbf{a}' W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') f(\mathbf{a}', t). \quad (2.54)$$

⁷Puede observarse que $\mathcal{P} \mathbf{X}(\mathbf{a}) = 0$, de aquí que la función $\mathbf{X}(\mathbf{a})$ o cualquier función o funcional que dependa de esta, como por ejemplo $\mathbf{K}_{mn}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$, considerarán sólo la dinámica 'rápida' de las variables de grano grueso, pero no su dinámica 'lenta', si asumimos *a priori* que \mathcal{P} está relacionado con dicha evolución 'lenta' del sistema

donde la dependencia en $\mathbf{X}(\mathbf{a}, \mathbf{t} - \mathbf{t}')$ se determina por el operador de evolución reducido como,

$$\mathbf{X}(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = e^{it\tilde{L}}\mathbf{X}(\mathbf{a}). \quad (2.55)$$

Finalmente, sustituyendo la ec. 2.54 en la segunda igualdad del miembro derecho de la ec. 2.40 para $\partial f/\partial t$, y a su vez en la ecuación resultante las ecs. 2.49, 2.52 y 2.55, después de algunos cálculos algebraicos directos se llega a la ecuación deseada de FPG, en el espacio de Fourier, a saber,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(\mathbf{a}', t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \int d\mathbf{a}' \mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') f(\mathbf{a}', t) = \\ & = \int_{-\infty}^t dt' e^{c(t'-t)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \int d\mathbf{a} \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t - t') \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}'} \int d\mathbf{a}'' W_{-1}(\mathbf{a}', \mathbf{a}'') f(\mathbf{a}'', t), \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde,

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \int d\mathbf{a}'' \text{Tr} \mathbf{J}(\mathbf{a}) W_{-1}(\mathbf{a}'', \mathbf{a}'). \quad (2.57)$$

es una velocidad 'generalizada' de las variables \mathbf{a} , lo que se verifica de la ec. 2.48 para $\mathbf{J}(\mathbf{a})$ y $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$ es una matriz con elementos,

$$\mathbf{K}_{mn}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t) = \text{Tr} \left[X_m(\mathbf{a}) X_n(\mathbf{a}', t) \right] \equiv \text{Tr} \left[X_m(\mathbf{a}) e^{it\tilde{L}} X_n(\mathbf{a}') \right]. \quad (2.58)$$

La ecuación de FPG dada por la ec. 2.56 es el análogo cuántico de la deducida en [162] para el caso clásico. Estas ecuaciones toman en cuenta el comportamiento no-lineal así como los efectos de memoria (no localidades) del sistema, tanto en el tiempo como

en las variables de grano grueso. Sin embargo, dada su generalidad es necesario realizar un conjunto de aproximaciones para modelar situaciones específicas, de manera que tales aproximaciones simplifiquen los elementos de matriz de la ec. 2.58 a los elementos \mathcal{D}_{mn} . En el caso específico del Helio superfluido mostraremos en el Capítulo 3, cómo estos elementos \mathcal{D}_{mn} corresponden a sus coeficientes de transporte locales.

2.4 Aproximación Local a la Ecuación de Fokker-Planck Generalizada.

El problema a resolver en esta sección es responder a la siguiente pregunta: ¿. Qué suposiciones físicas son necesarias para ignorar los efectos de no localidad de la ec. 2.56, al estudiar un sistema mecánico cuántico modelado por dicha ecuación ?. Para responder esta pregunta analizaremos los términos $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ que aparecen en dicha ecuación de FPG, ec. 2.56.

Por una parte, los efectos de retardo y no localidad con respecto a las variables \mathbf{a} son debidos al término $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$, definido por la ec. 2.58, que aparece en la integral del lado derecho de la ec. 2.56. En la mayoría de los casos, tales efectos pueden ignorarse, ya que la evolución ‘lenta’ asociada con las variables de grano grueso se elimina en $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$ por medio del operador $\tilde{L} = (1 - \mathcal{P})$ que aparece en el factor $e^{it\tilde{L}}$ de la definición de $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$. Esto significa que en el límite cuando $t \rightarrow \tau$, $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t) \rightarrow 0$, es decir que existe una escala de tiempo⁸ ‘microscópica’ del orden de τ en que la matriz $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$ tiende rápidamente a cero. Sin embargo, la función $f(\mathbf{a}, t)$ no cambia apreciablemente en dicho intervalo de tiempo $t < \tau$, puesto que al quedar definida vía el operador de proyección \mathcal{P} , esta función $f(\mathbf{a}, t)$ evolucionará de manera ‘lenta’ [63]. Sin embargo, la función $f(\mathbf{a}, t)$ cambia en otro orden de escala temporal $t > \tau$.

En otras palabras, para simplificar la ecuación de FP generalizada de la ec. 2.56, *en esta tesis vamos a partir de dos suposiciones básicas: la primera es que el proceso es lento*, es decir que existe una escala de tiempo mesoscópica τ , tal que $t_{colision} < \tau < t_{hidrodinámico}$ en el cual $f(\mathbf{a}, t)$ no cambia apreciablemente, pero sí para $t > t_{hidrodinámico}$; *y la segunda hipótesis que haremos, es que el proceso es Markoviano* lo cual se va a materializar en

⁸Aquí τ estrictamente es un tiempo del orden mesoscópico

la ec. 2.65 para la matriz $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$. Es importante enfatizar, que existen aproximaciones que emplean hipótesis distintas a las anteriores como la aproximación diagonal, o aproximaciones que emplean, estas hipótesis pero en un orden diferente. En este sentido Del Río y García-Colín en la referencia [22], en su figura 1, hacen un estudio detallado de las ecuaciones mesoscópicas que se obtienen con dichas aproximaciones y las conexiones que existen entre ellas.

Por otra parte, tenemos no localidades en la ecuación de FPG debido a las funciones $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ que aparecen en la ec. 2.56, donde éstas no localidades básicamente son generadas por la no conmutatividad de la base de los operadores $\{\hat{a}_n\}$. Pero para poder analizar y eliminar los efectos de estas no localidades, es necesario realizar una descomposición de la función $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ análoga a las presentadas para las funciones $W(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ de las ecs. 2.31, 2.32 respectivamente. Por lo tanto, suponiendo que $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ se puede descomponer en una parte singular y otra regular se tiene que [87],

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \mathbf{v}(\mathbf{a})\delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') + \delta\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}'). \quad (2.59)$$

Ahora, para determinar a las funciones $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $\delta\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$, la ec. 2.59 se iguala a la ec. 2.57, y se sustituyen en esta última las ecs. 2.11, 2.32 y 2.48 con lo que se tiene que,

$$\mathbf{v}(\mathbf{a}) = Tr \left[\frac{\hat{f}(\mathbf{a}) i\hat{L} \hat{\mathbf{a}}}{W(\mathbf{a})} \right]. \quad (2.60)$$

y,

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \left[\mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') + \mathbf{v}(\mathbf{a}) W(\mathbf{a}) r(\mathbf{a}, \mathbf{a}') + \int d\mathbf{a}'' \mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}'') r(\mathbf{a}'', \mathbf{a}') \right] / W(\mathbf{a}). \quad (2.61)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ se define como,

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = (2\pi)^{-2N} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' e^{i(\mathbf{x}'\mathbf{a}' - \mathbf{x}\mathbf{a})} - Tr \left[e^{-i\mathbf{x}'\hat{\mathbf{a}} \times} \right]$$

$$\times \int_0^1 d\tau e^{i(1-\tau)\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}} (i\hat{L}\hat{\mathbf{a}}) e^{i\tau\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}}} - e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\hat{\mathbf{a}}} i\hat{L}\hat{\mathbf{a}} \Big] \quad (2.62)$$

Es importante señalar que en la obtención de las ecs. 2.60-2.62 se ha despreciado en la ec. 2.57 la no conmutatividad de la base de operadores $\hat{\mathbf{a}}$, [87]. Además, de la ec. 2.62 se puede mostrar directamente que $\mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ cumple con las siguientes identidades,

$$\int d\mathbf{a}' \mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \int d\mathbf{a} \mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0. \quad (2.63)$$

Continuando con el análisis de las funciones $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$, los casos en los cuales estas funciones contribuyen de manera despreciable en los términos integrales de la ec. 2.56 son dos:

i.- Cuando los conmutadores de los operadores $\hat{\mathbf{a}}$ contienen un parámetro pequeño, con lo cual es posible desarrollar en series de éste parámetro a las funciones $\mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $\mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$, y por lo tanto podemos quedarnos sólo con la parte singular de $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$, respectivamente

ii.- Las ecs. 2.36 y 2.63 implican $\mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{a}'), \mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \rightarrow 0$ cuando $|\mathbf{a} - \mathbf{a}'| \rightarrow +\infty$. En ese caso, $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ se comportan localmente, de acuerdo con las ecs. 2.32 y 2.59. Es decir si se garantiza que $f(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$ y $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ varían lentamente, lo cual es posible para $t < \tau$, entonces estas últimas funciones pueden considerarse como constantes en los términos integrales de la ec. 2.56, y las integrales de las partes regulares $\mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $\mathbf{u}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ serán cero de acuerdo con las ecs. 2.36 y 2.63, respectivamente.

Realizadas las anteriores consideraciones, se tiene que en la aproximación local la ecuación de FPG en el espacio de Fourier de la ec. 2.56 se simplifica como.

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{v}(\mathbf{a}) f(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \mathcal{D}(\mathbf{a}) W(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left[f(\mathbf{a}, t) / W(\mathbf{a}) \right]. \quad (2.64)$$

donde, $v(\mathbf{a})$ está dada por la ec. 2.60 y los elementos de la matriz $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ están dados por,

$$\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) = \int_0^\infty dt e^{\epsilon t} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}, t), \quad (2.65)$$

tal que el elemento de matriz $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ se define como,

$$\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}', \tau) = \langle \hat{Z}_m(\tau) \hat{Z}_n \rangle_{CG}. \quad (2.66)$$

con.

$$\hat{Z}_m = Q \hat{a}_m.$$

$$\hat{Z}_m(\tau) = \exp(i \tilde{L} \tau) \hat{Z}_m. \quad (2.67)$$

y,

$$Q = (1 - \mathcal{P}).$$

donde $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ corresponde al término de orden cero del desarrollo de $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$ en series de las variables a_n . Este desarrollo es similar al de Kramers-Moyal para el caso clásico donde el término de orden cero $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ corresponde a uno de segundo orden en los gradientes de los flujos asociados a las variables \hat{a}_n (ver ec. 2.66). Por otra, parte es importante enfatizar que la ec. 2.65 es equivalente a adoptar una aproximación Markoviana en la aproximación local de $K_{mn}(\mathbf{a})$ mediante $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ ⁹. Es conveniente que el lector tenga presente esta hipótesis, ya que será empleada en la sección 3.4 del Capítulo 3. Concretamente, dicho desarrollo da como resultado que los elementos $K_{mn}(\mathbf{a})$ se expresen como. (ver Apéndice C de [156]),

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \tau) = W(\mathbf{a}') \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}', \tau) \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') +$$

⁹ver ec. 46 de la referencia [22].

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\partial}{\partial a_{n_1}} \frac{\partial}{\partial a_{n_2}} \dots \frac{\partial}{\partial a_{n_j}} W(\mathbf{a}') M_{mn}^{n_1 n_2 \dots n_j}(\mathbf{a}') \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}'), \quad (2.68)$$

donde,

$$M_{mn}^{n_1 n_2 \dots n_j}(\mathbf{a}) = \langle V_{n_1 n_2 \dots n_j}(\tau) \hat{Z}_m(\tau) \hat{Z}_n \rangle_{CG}, \quad (2.69)$$

y:

$$V_{n_1 n_2 \dots n_j}(\tau) = \int_0^\tau dS_1 \int_0^{S_1} dS_2 \dots \int_0^{S_{j-1}} dS_j c_{n_j}(s_j) c_{n_{j-1}}(s_{j-1}) \dots c_{n_1}(s_1), \quad (2.70)$$

$$c_n(S) = e^{i\tilde{L}S} Q \hat{a}_n Q e^{-i\tilde{L}S}. \quad (2.71)$$

Por otra parte, es importante notar que $\langle \rangle_{CG}$ en las ecs. 2.66 y 2.69 representan el promedio con respecto a el operador $\hat{\rho}_{CG}$, pero considerado en la aproximación local que elimina los efectos de memoria tanto espacial como temporal. Concretamente, de la ec. 2.60 se infiere que esta última es el valor esperado del operador $i\hat{L}\hat{a}$ calculado con el operador del tipo 'microcanónico' $\hat{\rho}_{CG}$. Este valor esperado se describe como,

$$v(\mathbf{a}) = Tr \left[\hat{\rho}_{CG}(\mathbf{a}) i\hat{L}\hat{a} \right]. \quad (2.72)$$

donde,

$$\hat{\rho}_{CG}(\mathbf{a}) = \frac{f(\mathbf{a})}{W(\mathbf{a})}. \quad (2.73)$$

Por otro lado, de las ecs. 2.1 y 2.13 se tiene que esta ecuación 2.73 se expresa como,

$$\hat{\rho}_{CG}(\mathbf{a}) = \frac{\delta(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})}{W(\mathbf{a})}, \quad (2.74)$$

donde $W(\mathbf{a})$ esta dada por la primera ecuación de las ecs. 2.27. Además $\hat{\rho}_{CG}$ cumple con las siguientes propiedades,

$$Tr\{\hat{\rho}_{CG}(\mathbf{a})\} = 1,$$

$$Tr\{\hat{a}_n \hat{\rho}_{CG}(\mathbf{a})\} \equiv a_n. \quad (2.75)$$

Obsérvese que la ec. 2.74 es análoga formalmente a la expresión para un conjunto representativo microcanónico $\hat{\rho}_{micro} \equiv \delta(\hat{H} - E)$. Sin embargo, son diferentes ya que $\hat{\rho}_{micro}$ sólo considera a \hat{H} , mientras que $\hat{\rho}_{CG}$ considera un conjunto de variables \hat{a}_n , donde además éstas son variables de grano grueso, mientras que \hat{H} es una variable microscópica. No obstante en el caso que las variables de grano grueso, $\hat{\mathbf{a}}$, sean las densidades de magnitudes termodinámicas, es posible usar formalmente la equivalencia de los diferentes conjuntos representativos [154], tal que podemos remplazar la expresión del operador del conjunto 'microcanónico' de la ec. 2.74, por una del tipo 'gran canónico'.

$$\hat{\rho}_{CG}(\mathbf{a}) \rightarrow \exp\left(-\beta(\mathbf{a})\hat{H} - \Phi(\mathbf{a}) - \sum_n F_n(\mathbf{a})\hat{a}_n\right). \quad (2.76)$$

donde $\beta(\mathbf{a})$, $\Phi(\mathbf{a})$ y $F_n(\mathbf{a})$ son parámetros indeterminados que se deben calcular de las condiciones de las ecs. 2.75.

Antes de pasar al Capítulo 3, donde se particularizará la ec. 2.64 para el Helio superfluido, es necesario describirla en el espacio de coordenadas. Esta ecuación re-escrita en dicha forma facilitará la evaluación de los elementos de matriz $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ definidos en la

ec. 2.65. Como ya dijimos, con dichos elementos de matriz determinaremos la ecuación de FP para el superfluido, y por lo tanto, también se podrá determinar las ecuaciones de Langevin asociadas a dicha ecuación de FP. Estas últimas ecuaciones definen un modelo para la hidrodinámica fluctuante no lineal del Helio superfluido.

2.5 Ecuación de Fokker-Planck no lineal Local en el Espacio de Configuración.

La ecuación de FP dada por la ec. 2.64 está en función de variables de grano grueso en la representación de ímpetus. Sin embargo, es conveniente realizar un cambio de variables en los términos que aparecen en la ec. 2.64, para dejarla en función de las variables de grano grueso definidas en la representación de coordenadas. Esta representación es conveniente si se está tratando sistemas inhomogéneos o cuando existen condiciones a la frontera que deban tomarse en cuenta. En nuestro caso nos permitira construir las ecuaciones de Langevin en el espacio de configuración correspondientes a la ecuación de FP no lineal local en dicho espacio, que serán construidas en el próximo Capítulo.

Cabe señalar que en este cambio de coordenadas se debe tener cuidado de expresar los elementos de matriz $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}, t)$ de la ec. 2.66, en forma consistente con la aproximación asumida (hasta segundo orden en los gradientes de las partes no proyectadas de los flujos de las variables relevantes). Por lo tanto, antes de realizar el cambio de coordenadas en la ec. 2.64 se procederá a precisar la expresión para los elementos de matriz $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}, t)$.

Consideremos la ec. 2.67 para \hat{Z}_m y la ec. 2.8 para \hat{a}_m . Reescribiendo \hat{Z}_m en función de $\hat{I}_{m\mathbf{k}}$ tenemos que,

$$\hat{Z}_m \equiv \hat{Z}_{m\mathbf{k}} = -ik \cdot \hat{J}_{m\mathbf{k}}.$$

donde se ha definido $\hat{J}_{m\mathbf{k}}$ como,

$$\hat{J}_{m\mathbf{k}} = Q \hat{I}_{m\mathbf{k}}, \tag{2.77}$$

y las \hat{J}_{mk} son las partes no proyectadas de los flujos \hat{I}_{mk} , lo que se verifica de la definición de Q dada por la segunda ecuación de las ecs. 2.67.

Sustituyendo la ec. 2.77 en la ec. 2.66 y esta a su vez en la ec. 2.65 se tiene que,

$$\mathcal{D}_{mk,nq}(\mathbf{a}) = - \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \mathbf{k} \cdot \langle \hat{J}_{mk}(t), \hat{J}_{nq}(t) \rangle_{CG} \cdot \mathbf{q}. \quad (2.78)$$

Usando las ecs. 2.6 y 2.7 podemos escribir que,

$$\hat{J}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{k < k_0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{J}_{mk}. \quad (2.79)$$

con,

$$\hat{J}_{mk} = \int_{k < k_0} d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{J}_m(\mathbf{x}), \quad (2.80)$$

y sustituyendo esta última en la ec. 2.78 se obtiene que,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mk,nq}(\mathbf{a}) = & - \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int d\mathbf{x} \int dR \mathbf{k} \cdot \langle \hat{J}_m(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{R}, t) J_n(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{R}) \rangle_{CG} \cdot \mathbf{q} \times \\ & \times e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{x}} \times e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{R}/2}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

donde se ha realizado un cambio en las cordenadas espaciales definido por: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ y $R = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. La función de correlación que aparece en la ec. 2.81 decae rapidamente cuando $R > R_0$, donde R_0 es una longitud de correlación microscópica, que cumple con la condición de corte para los vectores de onda, $k < k_0$ con $k_0 R_0 \ll 1$.

Ahora, en la ec. 2.81 podemos desarrollar la exponencial $e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{R}/2}$ en series de potencias de R , para obtener una aproximación del elemento de matriz $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ proporcional a $k_\alpha q_\beta$. Es decir en la representación de coordenadas, $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ debe expresarse hasta segundo orden en los gradientes $(\nabla_\alpha)(\nabla_\beta)$, gradientes que corresponden al factor $(\mathbf{k}_\alpha)(\mathbf{q}_\beta)$ en la representación de ímpetus. Esto significa que para ser consistentes con la ecuación de FP local dada por la ec. 2.64 debemos aproximar $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ de la ec. 2.81 dada en la representación de los ímpetus, a lo más hasta un factor del orden $k_\alpha q_\beta$ que corresponde a segundo orden en los gradientes en la representación de coordenadas. Lo anterior se logra si sustituimos $e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{R}/2} \approx 1$, en la ec. 2.81, con lo que esta se describe como,

$$\mathcal{D}_{m\mathbf{k},n\mathbf{q}}(\mathbf{a}) = - \int dx e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{x}} \mathbf{k} \cdot \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}, \quad (2.82)$$

donde $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$ se define como,

$$\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{L}_{mn}(\hat{J}_m, \hat{J}_n) = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int d\mathbf{R} \langle \hat{J}_m(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{R}, t) \cdot \hat{J}_n(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{R}) \rangle_{CG}, \quad (2.83)$$

expresión que representa una generalización de la relación fluctuación-disipación de Green-Kubo ¹⁰. Expresiones que en el Capítulo 3, usaremos para determinar los coeficientes de transporte locales del Helio superfluido.

A continuación, rescribiendo la ec. 2.64 se tiene la ecuación de FP en una forma usual,

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \sum_{mn} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(v_m(\mathbf{a}) + \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) F_n(\mathbf{a}) \right) f(\mathbf{a}, t) - \sum_{mn} \frac{\partial}{\partial a_m} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial a_n} f(\mathbf{a}, t) = 0, \quad (2.84)$$

¹⁰Son una generalización debido a que a diferencia de las relaciones originales de Green y Kubo [47, 68, 69], éstas se calculan respecto al conjunto representativo $\hat{\rho}_{CG}$ y no con respecto a $\hat{\rho}_0$.

0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \sum_{mn} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(v_m(\mathbf{a}) + \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) F_n(\mathbf{a}) + \frac{\partial}{\partial a_m} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) \right) f(\mathbf{a}, t) - \\ - \sum_{mn} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) f(\mathbf{a}, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.85)$$

donde las fuerzas termodinámicas conjugadas a las a_n en el espacio de Fourier están definidas por,

$$F_n(\mathbf{a}) \equiv F_{nk}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \ln W(\mathbf{a})}{\partial a_n}. \quad (2.86)$$

y en la representación de coordenadas por,

$$F_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \ln W(\mathbf{a})}{\delta a_n(\mathbf{x})}. \quad (2.87)$$

donde $\delta/\delta a_m(\mathbf{x})$ representan las derivadas funcionales respecto a las variables a_n .

Para realizar el cambio de representación de la ec. 2.84 se emplearán las ecs. 2.6 y 2.7. con las cuales se escriben las derivadas $\partial/\partial a_{mk}$ en terminos de las derivadas funcionales $\delta/\delta a_m(\mathbf{x})$, donde se hace uso de la función $\delta'(x)$ de grano grueso cuya definición y propiedades estan dadas en el Apéndice B. Realizando éste cambio de variables en lugar de la ec. 2.84 tenemos que [156],

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} - \int d\mathbf{x} \sum_{mn} \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} \nabla \cdot \left(I_m(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla F_n(\mathbf{x}; a) \right) f(\mathbf{a}; t) - \\ + \int d\mathbf{x} \sum_{mn} \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} \nabla \cdot \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \cdot \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} f(\mathbf{a}; t) = 0, \end{aligned} \quad (2.88)$$

Sin embargo, también es usual encontrar esta ecuación en función de los llamados términos de 'arrastre' u_m y de 'difusión' \mathcal{D}_{mn} , que se definen respectivamente como,

$$u_m(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = -\nabla \cdot \left(I_m(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla F_n(\mathbf{x}; a) \right), \quad (2.89)$$

$$\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; a) = -\nabla \cdot \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.90)$$

donde $\delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ es la función delta de grano grueso definida en el Apéndice B. Por lo tanto, la ec. 2.88 se describe con auxilio de las ecs. 2.89 y 2.90 como,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \int d\mathbf{x} \sum_{mn} \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} u_m(\mathbf{x}; \mathbf{a}) f(\mathbf{a}; t) - \\ & - \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \sum_{mn} \frac{\delta}{\delta a_m(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; a) \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x}')} f(\mathbf{a}; t) = 0, \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde en esta ecuación se emplea la propiedad de la función $\delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ de grano grueso (ver ec. B.2 del Apéndice B),

$$\int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}) \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta'(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}), \quad (2.92)$$

dada una función $G(\mathbf{x})$ arbitraria.

En el próximo Capítulo se determinarán las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante no lineal para el Helio superfluido en el espacio de configuración que son precisamente las transformadas inversas de las ecuaciones no lineales de Langevin en el espacio de Fourier asociadas con una ecuación de FP local definida en el espacio de Fourier. Por lo tanto, antes de construir dichas ecuaciones de Langevin se tiene que particularizar la

ecuación de FP para el Helio superfluido con auxilio de la ec. 2.91. Pero, para esto es necesario determinar las funciones $u_m(\mathbf{x})$ y $\mathcal{L}_{mn}(x)$, lo cual se hará con el $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. 2.76, aproximándolo con auxilio de un operador estadístico de cuasi-equilibrio, $\hat{\rho}_{qe}$ que definiremos en el Capítulo 3.

Capítulo 3

Modelo Microscópico para la Hidrodinámica Fluctuante No-lineal del ^4He Superfluido.

El objetivo de este Capítulo es deducir mediante un modelo microscópico las ecuaciones para la hidrodinámica fluctuante no lineal del Helio superfluido. Dichas ecuaciones se determinan a partir de las ecuaciones de Langevin en el espacio de Fourier asociadas a la ecuación de FP local del Helio superfluido en dicho espacio, siguiendo de manera inversa el método de Morozov esbozado en la sección 1.2. La ecuación de FP en el espacio de Fourier se obtiene a su vez, de particularizar las ecs. 2.88 ó 2.91 para el caso concreto del Helio superfluido. Sin embargo, para lograr esta particularización se necesitan determinar las siguientes funciones ¹:

- i).- Las fuerzas termodinámicas $F_n(x)$, dadas por la ec. 2.87 que básicamente son los multiplicadores indeterminados de Lagrange que definen al operador $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. 2.76.
- ii).- Los operadores y los valores esperados de los flujos o corrientes locales $\langle \hat{I}_n(x) \rangle_{CG}$, calculados estos últimos respecto al operador $\hat{\rho}_{CG}$.

Cabe comentar que en éstos dos incisos el operador $\hat{\rho}_{CG}$ se aproximará mediante un operador estadístico de cuasi equilibrio local $\hat{\rho}_l$. Considerando la hipótesis que el sistema presenta fluctuaciones pequeñas, éste último operador tiene la misma dependencia funcional que el operador estadístico de equilibrio local $\hat{\rho}_l$ dado por

¹Vía el operador estadístico $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. 2.76, tal que éste sea consistente con la selección de las variables relevantes indicada en la sección A.1.1 del Apéndice A.

las ecs. A.12 ó A.20, pero estrictamente $\hat{\rho}_i$ y $\hat{\rho}_l$ difieren en su significado físico. Esta diferencia será discutida en su oportunidad más adelante.

iii).- Las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$ dadas por la ec. 2.83 que nos permitirán definir los coeficientes de transporte locales para el Helio superfluido, en analogía con los resultados de la sec. A.2 del Apéndice A. Pero a diferencia del método de obtención de dichos resultados, donde se emplea un operador de equilibrio estadístico $\hat{\rho}_0$, aquí se empleará un operador estadístico de cuasi equilibrio local o de referencia $\hat{\rho}_{qe}$. Este operador es básicamente el operador $\hat{\rho}_i$ linearizado y considerado en un marco de referencia en movimiento con una velocidad fluctuante local $v_s(\mathbf{x})$. [15].

iv).- Los términos de arrastre $u_m(\mathbf{x})$ dados por la ec. 2.89.

v).- Los términos de difusión $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{a})$ dados por la ec. 2.90.

Cabe observar que para abordar estos dos últimos incisos se emplean los resultados de los incisos ii y iii. Por lo tanto, de los resultados de los incisos i-v quedará especificada la ecuación de FP local para el Helio superfluido.

Finalmente, la construcción de las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante no lineal se hace mediante las ecuaciones no lineales de Langevin para el Helio superfluido. Sin embargo, en dichas ecuaciones de Langevin aparecen unos términos o flujos fluctuantes que es necesario determinar. Estos flujos se suponen son variables aleatorias multiplicativas², que se definen como el producto de dos variables, la primera, una variable local dependiente de la temperatura local y de los coeficientes de transporte locales; y la segunda, una variable definida como variable aleatoria Gaussiana con sus varianzas independientes de la variable local. La forma específica de las variables locales se determina de *la hipótesis de que los valores de las funciones de correlación $\tilde{\mathcal{L}}$, de dichos flujos fluctuantes son idénticos a o los de las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$ mencionadas en el inciso iii.* Esta metodología para la construcción de los terminos fluctuantes de las ecuaciones de Langevin fue bosquejada en la secc. 1.2, de acuerdo con el método de Morozov para un fluido simple, [88].

²Este carácter multiplicativo de los términos fluctuantes les da un carácter no lineal a las ecuaciones de Langevin [109].

Por otra parte, es importante destacar que los resultados presentados en éste Capítulo aunque son inéditos, se obtienen por estrecha analogía con los presentados por Morozov y Zubarev en [156], donde desarrollan un modelo microscópico para la hidrodinámica fluctuante no lineal de un fluido simple; modelo desarrollado vía Maxent.

Definidos los objetivos de los incisos i-iv, pasemos a su elaboración.

3.1 El Operador Estadístico de Grano Grueso y el Operador Estadístico de Cuasi-equilibrio Local.

De acuerdo con la selección de variables relevantes indicada en la sección A.1.1 del Apéndice A, las variables microscópicas relevantes para el Helio superfluido están dadas por sus densidades locales cuyos operadores asociados son: $\{\hat{a}_n\}_{micro} = \{\hat{\rho}(x), \hat{H}(x), \hat{j}(x), \hat{u}_s(x)\}_{micro}$. A estas variables microscópicas se les asocian las variables de grano grueso: $\hat{\mathbf{a}} = \{\hat{a}_n\} = \{\hat{\rho}(x), \hat{H}(x), \hat{j}(x), \hat{u}_s(x)\}$. Por lo tanto, la función de distribución de grano grueso $f(\mathbf{a}, t)$ será una función de los valores numéricos que pueden asumir dichas variables de grano grueso, $f(\rho, E, j, v_s)$ (ver ecs. 2.17 o 2.19). *Cabe destacar que una vez realizada la selección de variables anterior, el tratamiento seguido sólo será válido para el He^4 superfluido.* Efectuadas estas aclaraciones, a continuación abordaremos el problema de determinar la fuerzas termodinámicas, $F_n(\mathbf{x})$.

3.1.1 Fuerzas Termodinámicas.

Empezemos por señalar que las fuerzas termodinámicas, definidas por la ec. 2.87 dependen de la funcional $W(\mathbf{x})$. Ahora bien, de acuerdo con la selección de las variables relevantes para la descripción del superfluido, dicha funcional en la aproximación local representa una hipercelda que contiene todos los estados posibles a los cuales puede acceder el sistema. (ver ecs. 2.27 para el caso cuántico o la segunda de las ecs. 2.20 para el caso clásico). En efecto, en esta hipercelda las variables fluctuantes de grano grueso, $\hat{\rho}(x), \hat{H}(x), \hat{j}(x)$ y $\hat{u}_s(x)$ son iguales a los valores numéricos: $\rho(x), E(x), j(x), v_s(x)$. Por lo tanto, empleando el concepto de entropía propuesto por Boltzmann se tiene que,

$$W(\mathbf{a}) = e^{S(\mathbf{a})}, \quad (3.1)$$

donde $S(\mathbf{a})$ es una funcional de entropía fluctuante dependiente de las variables hidrodinámicas fluctuantes y además se ha tomado la constante de Boltzmann $k = 1$. Ahora, de ésta ec. 3.1 y de la ec. 2.87 las fuerzas termodinámicas se expresan como,

$$F_n(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{a})}{\partial a_n(x)} \quad (3.2)$$

donde,

$$S(\mathbf{a}) = \ln W(\mathbf{a}) = \int d\mathbf{x} S(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

y $S(\mathbf{x})$ es una densidad local de entropía fluctuante. Sin embargo, el problema que tenemos ahora es cómo determinar a la funcional $S(\mathbf{a})$. Para resolverlo procedemos de manera heurística, mediante el uso de un estado de cuasi equilibrio local representado por el operador $\hat{\rho}_l$. Este operador nos conducirá a una teoría de la respuesta lineal generalizada respecto a dicho estado de cuasi equilibrio local, donde por un *estado de cuasi equilibrio local entenderemos un estado de equilibrio local en el que sus variables de estado presentan fluctuaciones pequeñas*.

Hemos mencionado que $W(\mathbf{a})$ es una funcional que representa el peso estadístico en el conjunto representativo microcanónico dado por el operador estadístico $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. 2.74. Entonces, si suponemos que el sistema está en un estado de cuasi equilibrio local, podemos sustituir al conjunto representativo $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. 2.74 por otro conjunto representativo $\hat{\rho}_l$. En éste último conjunto *se supone que las variables de grano grueso $\hat{a}_r(\mathbf{x})$ prácticamente no fluctúan salvo en el interior de las celdas mesoscópicas de tamaño R_0 . Aquí $R_0 \leq k_0^{-1}$, donde k_0 es un número de onda de corte que garantiza que se está estudiando el comportamiento hidrodinámico del sistema. Por lo tanto, *ambos conjuntos representativos**

pueden considerarse equivalentes salvo por pequeñas fluctuaciones que ocurren dentro de las celdas. [156]. Resumiendo, asumiremos como hipótesis que los valores esperados de interés en lugar de ser calculados mediante un conjunto representativo microcanónico $\hat{\rho}_{CG}$ se calcularán con un conjunto representativo gran canónico $\hat{\rho}_{\bar{l}}$, el cual presenta la misma dependencia funcional que un operador estadístico de equilibrio local pero definido en función de las variables fluctuantes de grano grueso $\hat{a}_n(\mathbf{x})$, es decir,

$$\hat{\rho}_{\bar{l}}(\mathbf{a}) = Q_{\bar{l}}^{-1} \exp\left(-\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x}) \hat{j}(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x}) \hat{u}_s(\mathbf{x}) \right]\right), \quad (3.4)$$

con,

$$Q_{\bar{l}} = Tr \exp\left(-\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x}) \hat{j}(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x}) \hat{u}_s(\mathbf{x}) \right]\right)$$

donde. $\hat{H}(\mathbf{x})$, $\hat{\rho}(\mathbf{x})$, $\hat{j}(\mathbf{x})$, $\hat{u}_s(\mathbf{x})$ son variables fluctuantes de grano grueso asociadas a las densidades locales, y $\beta(\mathbf{x})$, $\tilde{\mu}(\mathbf{x})$, $v_n(\mathbf{x})$ y $j_s(\mathbf{x})$ tienen la interpretación usual, es decir, son el inverso de la temperatura local, el potencial químico local, la velocidad local de la componente normal del superfluido y el flujo local de la componente superfluida, pero consideradas como variables fluctuantes. *De hecho en éste Capítulo 3, se emplearán muchas relaciones y ecuaciones deducidas en el Apéndice A, pero interpretadas como relaciones de variables fluctuantes de grano grueso.*

Por otro lado, debe observarse que aunque $\hat{\rho}_{\bar{l}}$ tiene la misma estructura que el operador estadístico $\hat{\rho}_l$ de la ec. A.12 o A.20 es diferente de éste. La diferencia consiste en que $\hat{\rho}_l$ se define en función de las $\{\hat{a}_n(\mathbf{x})\}_{micro}$, (ver Apéndice A) mientras que $\hat{\rho}_{\bar{l}}$ esta definido en función de las variables de grano grueso $\{\hat{a}_n(\mathbf{x})\}$. Por otra parte, es pertinente aclarar que en el caso de los valores esperados calculados con $\hat{\rho}_l$, denotados como $\langle\langle \{\hat{a}_n(\mathbf{x})\}_{micro} \rangle\rangle_l$, estamos tratando con variables microscópicas locales fijas sin fluctuaciones, $\{\hat{a}_n(\mathbf{x})\}_{micro}$, a las que se les asocia un valor numérico local fijo $a_n(\mathbf{x})$. Sin embargo, el caso de las variables de grano grueso es diferente, ya que los valores esperados de las variables de grano grueso

se calculan con $\hat{\rho}_{\bar{l}}$, denotados con $\langle \hat{a}_n(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{l}}$ y se les asocia con valores numéricos locales pero con valores fijos en las fluctuaciones hidrodinámicas, [156]. Por lo tanto, estrictamente los multiplicadores de Lagrange $\beta(x)$, $\mu(x)$, $v_n(x)$ y $j_s(x)$ de la ec. 3.4 son variables termodiámicas conjugadas a los campos $\langle \hat{a}_n(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{l}}$ pero no a los campos $\langle \{\hat{a}_n(\mathbf{x})\}_{micro} \rangle_{\bar{l}}$. No obstante, estrictamente debe mostrarse la validez de la ec. 3.4, la cual aquí se tomará como hipótesis de trabajo cuya validez se justificará *a posteriori*. Finalmente, de los argumentos esgrimidos anteriormente se tiene que,

$$\langle \hat{a}_m \rangle_{CG} \approx \langle \hat{a}_m(x) \rangle_{\bar{l}} \equiv a_m(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

donde $\langle \rangle_{\bar{l}}$ indica el promedio tomado respecto al operador de cuasi equilibrio local $\hat{\rho}_{\bar{l}}$ y $\langle \rangle_{CG}$ es el promedio tomado respecto al operador $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. 2.74.

Reiterando, los valores esperados de la ec. 3.5 se consideran equivalentes salvo pequeñas fluctuaciones que pueden ocurrir en el interior de las celdas mesoscópicas de tamaño R_0 .

Regresemos al problema de determinar la funcional de entropía de la ec. 3.3. De acuerdo con la ec. 3.4, la funcional de entropía descrita por éste operador se escribe como.

$$S(\mathbf{a})_{\bar{l}} = -\langle \ln \hat{\rho}_{\bar{l}} \rangle_{\bar{l}} \quad (3.6)$$

Ahora de la condición impuesta por la ec. 3.5, podemos igualar el lado izquierdo de la ec. 3.3 con la ec. 3.6, es decir,

$$S(\mathbf{a}) \approx S(\mathbf{a})_{\bar{l}} = -\langle \ln \hat{\rho}_{\bar{l}} \rangle_{\bar{l}} \quad (3.7)$$

Entonces, empleando esta ecuación en la ec. 3.2 la fuerzas termodiámicas $F_n(\mathbf{x})$ quedan determinadas en la forma usual como.

$$F_E(\mathbf{a}) \approx \frac{\partial S(\mathbf{a})}{\partial E(x)} \equiv \beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{T(\mathbf{x})} .$$

$$F_\rho(\mathbf{a}) \approx \frac{\partial S(\mathbf{a})}{\partial \rho(x)} \equiv \beta(\mathbf{x})\tilde{\mu}(\mathbf{x}) .$$

$$F_j(\mathbf{a}) \approx \frac{\partial S(\mathbf{a})}{\partial j(x)} \equiv \beta(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}) . \quad .3.8)$$

$$F_{v_s}(\mathbf{a}) \approx \frac{\partial S(\mathbf{a})}{\partial v_s(x)} \equiv \beta(\mathbf{x})j_s(\mathbf{x}) .$$

Es pertinente aclarar que en la vecindad de un punto crítico, la longitud de correlación R_0 de las variables fluctuantes puede ser lo suficientemente grande como para invalidar la aproximación de cuasi equilibrio local. No obstante, dicha aproximación seguirá siendo válida si el número de onda de corte $R_0 k_0 \ll 1$. En caso contrario, es necesario realizar correcciones no locales a la temperatura local y potencial químico local a partir de $S(\mathbf{a})$ de la ec. 3.3, por ejemplo mediante el uso del método de las variables colectivas u otros métodos basados en desarrollos de las fluctuaciones de las variables relevantes de grano grueso [156].

Sin embargo, para el caso del Helio superfluido tratado aquí, aún en la proximidad del punto crítico para $T < T_\lambda$, en la región hidrodinámica de interés se cumple que $R_0 k_0 \ll 1$, (ver pp. 127-152 en la ref. [53], [121]). Es precisamente esta condición la que nos permite aceptar como válida la aproximación de cuasi equilibrio local.

Determinadas las fuerzas termodinámicas pasemos a abordar el cálculo de los flujos (corrientes) locales asociados a la evolución de las variables relevantes del superfluido.

3.1.2 Corrientes Locales.

Marco de Referencia Fijo.

Como se mencionó anteriormente se necesita particularizar la ecuación de FP no lineal local del Helio superfluido a partir de la ec. 2.91. Sin embargo, en dicha ecuación 2.91 aparecen los términos de arrastre $u_n(\mathbf{x})$ que están definidos en la ec. 2.89. También en esta ec. 2.89 aparecen los valores esperados de las corrientes locales $I_n(\mathbf{x})$ y las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$, que a su vez están definidas en función de las partes no proyectadas de los operadores asociados a dichas corrientes locales. Por lo tanto, es necesario determinar los operadores asociados a las corrientes locales y los valores esperados de éstos. Problema que será abordado en esta subsección para un sistema de referencia fijo y en la siguiente subsección para un sistema de referencia en movimiento. Posteriormente, en la siguiente sección se abordará el cálculo de las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$.

Dada la ec. 2.9 para las corrientes asociadas a las variables de grano grueso $\hat{a}_n(\mathbf{x})$ y la ec. 3.5 se tiene que,

$$\langle \dot{\hat{a}}_n(\mathbf{x}) \rangle_{CG} \equiv \langle \dot{\hat{a}}_n(\mathbf{x}) \rangle_{\hat{I}} \approx \langle \dot{\hat{a}}_n(\mathbf{x}) \rangle_I = -\nabla \cdot \langle \hat{I}_n(\mathbf{x}) \rangle_I = -\nabla \cdot I_n(\mathbf{x}), \quad (3.9)$$

donde de acuerdo con la selección de variables relevantes para el caso del superfluido tenemos que, $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \{I_n(\mathbf{x})\} = \{\langle \hat{I}_n(\mathbf{x}) \rangle_{\hat{I}}\} = \{I_\rho(\mathbf{x}), I_E(\mathbf{x}), I_j(\mathbf{x}), I_s(\mathbf{x})\} \equiv \{j(\mathbf{x}), j_H(\mathbf{x}), \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}), I_s(\mathbf{x})\}$.

Ahora, de los resultados presentados en la sección A.1.3 del Apéndice A, para las ecuaciones hidrodinámicas de los dos fluidos sin disipación, no es difícil inferir que hay una correspondencia entre las corrientes que aparecen en la ec. 3.9 y las ecs. A.45-A.47, A.53 respectivamente. La razón de esta correspondencia radica en que el operador $\hat{\rho}_{\hat{I}}$ y el operador $\hat{\rho}_I$ están definidos por la misma función, aunque físicamente existen diferencias en la interpretación de los valores esperados calculados con dichos operadores. Por lo tanto, se necesita particularizar la ec. 3.9 para cada variable relevante.

Sustituyendo $\dot{\hat{a}}_n(\mathbf{x}) = \dot{\hat{\rho}}(\mathbf{x})$ en la ec. 3.9 y de las ecs. A.45 y A.54 se tiene que,

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_{CG} &\approx \langle \dot{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} = \dot{\rho}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \langle \hat{j}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} = -\nabla \cdot j(\mathbf{x}) = \\
&= -\nabla \cdot \left(\rho(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{x}) + \rho_s(\mathbf{x}) v_s(\mathbf{x}) \right) = -\nabla \cdot I_\rho(\mathbf{x}), \tag{3.10}
\end{aligned}$$

que es la ecuación de evolución para el valor esperado de la densidad de partículas.

Análogamente, para $\dot{a}_n(\mathbf{x}) = \dot{H}(\mathbf{x})$ y de la ec. A.46 se obtiene que,

$$\begin{aligned}
\langle \dot{H}(\mathbf{x}) \rangle_{CG} &\approx \langle \dot{H}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} = \dot{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \langle \hat{j}_H(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} = -\nabla \cdot j_H(\mathbf{x}) = \\
&= -\nabla \cdot I_E(\mathbf{x}), \tag{3.11}
\end{aligned}$$

donde $\hat{j}_H(\mathbf{x}) = \hat{I}_E$ esta dada por la ec. A.69, la cual se escribe en función de la variables de grano grueso como,

$$j_H(\mathbf{x}) = \left(\mu(\mathbf{x}) + \frac{v_s^2}{2} \right) j(\mathbf{x}) + \left(T(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) + v_n j_0(\mathbf{x}) \right) v_n(\mathbf{x}),$$

Es claro que esta ecuación y la ec. A.69 son idénticas formalmente, salvo por su interpretación física. En el caso de esta ecuación su valor esperado se considera con fluctuaciones pequeñas, pero en el caso del valor esperado dado por la ec. A.69 no fluctúa, y para todo propósito ambos valores esperados se consideran iguales de acuerdo con la ec. 3.9.

En el caso de $\dot{a}_n(\mathbf{x}) = \dot{j}(\mathbf{x})$ y de las ecs. A.47 y A.67, la ec. 3.9 se particulariza como,

$$\langle \dot{j}(\mathbf{x}) \rangle_{CG} \approx \langle \dot{j}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} = \dot{j}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \langle \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} = -\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) =$$

$$= -\nabla \cdot I_j(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

donde, las componentes del tensor $\underline{T}(\mathbf{x}) = I_j$ se escriben de la ec. A.70 para variables de grano grueso como,

$$T_{ik}(x) = \langle \hat{T}_{ik}(x) \rangle_{\bar{i}} = \rho_s(x) v_{si}(x) v_{sk}(x) + \rho_n(x) v_{ni}(x) v_{nk}(x) - p(x) \delta_{ik},$$

Finalmente, para $\hat{a}_n(\mathbf{x}) = \hat{u}_s(\mathbf{x})$ y de la ec. A.53 se tiene que,

$$\langle \dot{\hat{u}}_s(\mathbf{x}) \rangle_{CG} = \langle \dot{\hat{u}}_s(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{i}} = \dot{v}_s(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot I_s(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

donde $I_s(\mathbf{x})$ se define de acuerdo con la ec. A.53 como,

$$I_s(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \frac{v_s^2(\mathbf{x})}{2}$$

Es claro que las ecs. 3.10-3.13 representan las ecuaciones de evolución para las variables relevantes de grano grueso del superfluido, ecuaciones que quedan en función de los flujos o corrientes asociadas a dichas variables de grano grueso; y esencialmente dichas ecuaciones de evolución son idénticas a las obtenidas en la sección A.1.3 del Apéndice A. pero considerando en estas últimas la presencia de fluctuaciones pequeñas, ver ec. 3.9. En particular los flujos de las variables de grano grueso nos permitirán calcular las funciones de correlación, como mencionamos al inicio de esta sección. Sin embargo, antes de proceder al cálculo de las funciones de correlación y con objeto de simplificarlo, es necesario determinar las corrientes o flujos, pero en un marco de referencia en movimiento donde la velocidad del superfluido sea cero.

Marco de Referencia con velocidad $v_s(\mathbf{x})$.

Antes de abordar el problema de determinar las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$, es necesario obtener los valores esperados de las corrientes locales en un marco de referencia que se mueve con una velocidad local fluctuante $v_s(\mathbf{x})$. La razón de realizar esta transformación del sistema de referencia se debe a que en el marco de referencia en movimiento se simplifica la obtención de las funciones $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$. Por lo tanto, antes que nada necesitamos determinar $\hat{\rho}_I$ en dicho marco de referencia.

Sea un sistema de referencia que se mueve con velocidad local fluctuante $v_s(\mathbf{x})$. Las ecuaciones que relacionan a los operadores microscópicos relevantes del sistema de referencia fijo respecto a otro que se mueve con velocidad $v_s(\mathbf{x})$, están dadas por las ecs. A.16-A.19 de la sección A.1.1 del Apéndice A. Para construir las ecuaciones equivalentes a estas últimas pero para variables de grano grueso, se sustituyen cada una de las ecs. A.16-A.19 en la ec. 2.5. Tomando ahora en cuenta la convención para la notación de las variables microscópicas y las de grano grueso (dada en la nota 1 del Capítulo 2) *no es difícil comprobar que las ecuaciones que relacionan las variables fluctuantes de grano grueso en ambos sistemas de referencia tienen la misma estructura que las ecs. A.16-A.19, por lo que no las repetiremos aquí. Sin embargo, en este Capítulo las emplearemos pero tomando en cuenta que las interpretaremos como ecuaciones de de variables de grano grueso.*

A continuación sustituimos las ecs. A.16-A.19, consideradas como variables fluctuantes de grano grueso, en la expresión de $\hat{\rho}_I$ de la ec. 3.4 y después de cálculos algebraicos directos nos conduce a una expresión para $\hat{\rho}_I$ en el marco de referencia en movimiento, a saber

$$\hat{\rho}_I(t) = Q_I^{-1} \exp\left(- \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \hat{\rho}'(\mathbf{x}) - (v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x})) \hat{j}'(\mathbf{x}) \right] \right). \quad (3.14)$$

donde la variables: $\hat{H}'(\mathbf{x})$, $\hat{\rho}'(\mathbf{x})$, $\hat{j}'(\mathbf{x})$ y $\hat{u}'_s(\mathbf{x})$ tienen el mismo significado y obedecen las mismas relaciones que en el Apéndice A, pero interpretadas como variables fluctuantes

de grano grueso. Por otra parte, en el operador $\hat{\rho}_{\bar{l}}$ de la ec. 3.14 no ha sido considerado explícitamente el término $j_s \hat{u}'_s$, por que en éste sistema de referencia la componente superfluida está en reposo. Además,

$$Q_{\bar{l}} = Tr \exp\left(- \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \hat{\rho}'(\mathbf{x}) - (v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x})) \hat{j}'(\mathbf{x}) \right] \right) \quad (3.15)$$

donde esta igualdad se obtiene de manera análoga a la ec. A.22, es decir, se sustituyen las ecs. A.16-A.19 en la ec. 3.4 para $Q_{\bar{l}}$. En lo que respecta a la interpretación del operador $\hat{\rho}_{\bar{l}}$ de la ec. 3.14 esta será abordada en la próxima sección.

Enseguida, si se denotan los valores esperados para las variables de grano grueso de manera análoga a las ecs. A.23, pero empleando en lugar del operador $\hat{\rho}_l$ al operador $\hat{\rho}_{\bar{l}}$ de la ec. 3.14, entonces de la ec. A.17 y la primera ec. A.23 se tiene que,

$$\langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{l}} = \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{l}} = \rho'(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \quad (3.16)$$

donde en esta ecuación se interpreta a las variables de la ec. A.17, $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ y $\hat{\rho}'(\mathbf{x})$, como variables de grano grueso.

Para el valor esperado de $\hat{j}'(\mathbf{x})$, consideramos que éste se define como el producto de la densidad fluctuante $\rho'(\mathbf{x})$ por la velocidad fluctuante neta del fluido, $(v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x}))$, en el marco de referencia en movimiento, es decir,

$$j_0(\mathbf{x}) \equiv \langle \hat{j}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{l}} \equiv \rho'(\mathbf{x})(v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x})W(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

donde en la última igualdad del lado derecho se ha empleado la ec. 3.16 y la segunda de las ecs. A.58.

Respecto al valor esperado de la energía, este lo denotamos como,

$$u(\mathbf{x}) \equiv \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\mu}} \quad (3.18)$$

y para el valor esperado de la velocidad del superfluido en el sistema de referencia que se mueve con una velocidad local fluctuante $v_s(\mathbf{x})$ se cumple que,

$$\langle \hat{u}'_s(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\mu}} = 0 \quad (3.19)$$

Finalmente, las expresiones para la densidad de corriente y valores esperados de estas en el sistema de referencia en movimiento se determinan de la siguiente manera.

Para el flujo de la densidad fluctuante local del número de partículas, se parte de la ec. A.61 interpretada como una ecuación de variables fluctuantes de grano grueso y de las ecs. 3.9, 3.16 y 3.17. se tiene que el valor esperado de $\dot{\hat{\rho}}'(\mathbf{x})$ calculado con $\hat{\rho}_{\bar{\mu}}$ de la ec. 3.14, se expresa como.

$$\begin{aligned} \langle \dot{\hat{\rho}}(\mathbf{x}) \rangle_{CG} &\approx \langle \dot{\hat{\rho}}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\mu}} = \dot{\rho}'(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \langle \hat{j}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\mu}} = -\nabla \cdot j_0(\mathbf{x}) = \\ &= -\nabla \cdot I'_\rho(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

con $j_0 = I'_\rho$, donde j_0 esta dada por la ec. A.67.

Análogamente, para el flujo local de energía fluctuante dado por la ec. A.62, interpretada como una ecuación de variables fluctuantes, y de las ecs. 3.9, 3.14 y 3.18 se obtiene que,

$$\langle \dot{\hat{H}}'(\mathbf{x}) \rangle_{CG} \approx \langle \dot{\hat{H}}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\mu}} = \dot{u}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \langle \hat{j}'_H(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\mu}} = -\nabla \cdot j'_H(\mathbf{x}) =$$

$$= -\nabla \cdot I'_E(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

donde en esta ecuación $j'_H \equiv I'_E$ está dada por la ec. A.66 interpretada en función de las variables de grano grueso.

A continuación, para el valor esperado del flujo de ímpetu local fluctuante, de la ec. A.63 y de las ecs. 3.9 y 3.4, se tiene que,

$$\begin{aligned} \langle \hat{j}'(\mathbf{x}) \rangle_{CG} &\approx \langle \hat{j}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\nu}} = j_0(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \langle \hat{\mathbf{T}}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\nu}} = -\nabla \cdot \mathbf{T}'(\mathbf{x}) = \\ &= -\nabla \cdot I'_j(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $\langle \hat{\mathbf{T}}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\nu}} \equiv \mathbf{T}'(\mathbf{x}) \equiv I'_j$ está dado por la ec. A.68 pero interpretadas las variables que aparecen en esta ecuación como variables fluctuantes.

Por último, para el flujo local de la velocidad fluctuante local del superfluido, de la ec. A.64 tomando esta como una ecuación de variables de grano grueso, y de las ecs. 3.9 y 3.14 obtenemos que,

$$\langle \hat{u}'_s(\mathbf{x}) \rangle_{CG} = \langle \hat{u}'_s(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\nu}} = v_s(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \langle \hat{I}'_s(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\nu}} = -\nabla \cdot I'_s(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

donde,

$$\langle \hat{I}'_s(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{\nu}} = \mu(\mathbf{x}) - \frac{v_s^2(\mathbf{x})}{2} \quad (3.24)$$

y de la segunda de las ecs. 3.13 se obtiene que,

$$I_s(\mathbf{x}) = I'_s(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \frac{v_s^2(\mathbf{x})}{2} \quad (3.25)$$

Aquí la igualdad de $I_s(\mathbf{x})$ e $I'_s(\mathbf{x})$ se cumple de hecho que $\hat{u}_s(\mathbf{x})$ es un invariante Galileano, ya que $\phi(x)$ la fase de la función de onda, de las ecs. A.9-A.10, es un invariante Galileano. (ver el Apéndice II de la ref. [103]).

Determinados los operadores asociados a las corrientes locales y sus valores esperados en ambos marcos de referencia se procederá a pasar a la siguiente sección donde se evaluarán las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$.

3.2 El Operador Estadístico de Equilibrio Local vs El Operador Estadístico de Referencia.

Es obvio de la ec. 2.83 de la sección 2.5 del Capítulo 2, que las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$ en la aproximación local de la ecuación de FP tiene que evaluarse respecto a $\hat{\rho}_{CG}$. Ahora, de acuerdo con la aproximación realizada en la sección 3.1 de éste Capítulo podemos remplazar a $\hat{\rho}_{CG}$, que aparece en la definición de las $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x})$ de la ec. 2.83, por $\hat{\rho}_l$ dado por la ec. 3.4 o por $\hat{\rho}_{\tilde{l}}$ de la ec. 3.14. Sin embargo, antes tenemos que aclarar los siguientes puntos:

- i.- Definir las propiedades de convergencia de $\hat{\rho}_l$.
- ii.- Determinar los operadores $\hat{j}_q(\mathbf{x})$, $\Delta\hat{p}(\mathbf{x})$, $\hat{\alpha}_s(\mathbf{x})$, definidos por las ecs. A.82, A.83 y A.86 pero para variables de grano grueso y establecer su conexión con las partes no proyectadas de los operadores \hat{I}_E , \hat{I}_j , e \hat{I}_s .

Concretamente, para resolver estos dos puntos se recurrirá al concepto de 'operador estadístico de referencia' $\hat{\rho}_{qe}$, dado por Brey *et al* en la ref. [15], donde se estudian las ecuaciones de transporte no lineales para un sistema que está en un estado próximo al estado de equilibrio local. Planteada esta problemática pasemos a elaborar su solución.

En la sección A.1.2 del Apéndice A y en la referencia [1], se argumentaron las razones por las cuales el operador de equilibrio local $\hat{\rho}_l$ no es adecuado para la descripción macroscópica del sistema. En nuestro caso, el operador de cuasi equilibrio local $\hat{\rho}_{\tilde{l}}$, dado

por la ecs. 3.4 o 3.14, al tener la misma estructura que $\hat{\rho}_l$ implica que los valores esperados calculados con $\hat{\rho}_l$ no tienden al equilibrio y no generan ecuaciones de evolución irreversibles, [154, 1]. Por lo tanto, es necesario construir un operador $\hat{\rho}_{FP}$ que satisfaga una ecuación de Liouville con fuentes y además que $\hat{\rho}_{FP}$ tenga una parte disipativa $\hat{\rho}'$, es decir que obedezca una ecuación del tipo,

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{FP}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\rho}_{FP}(t), \hat{H}' \right]_- = -\epsilon (\hat{\rho}_{FP}(t) - \hat{\rho}_l(t)), \quad (3.26)$$

donde, \hat{H}' es el hamiltoniano del sistema en un marco de referencia en movimiento y,

$$\hat{\rho}_{FP}(t) = \hat{\rho}_l(t) + \hat{\rho}'_l(t), \quad (3.27)$$

con

$$\hat{\rho}'_l(t) \equiv \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int_0^t d\tau e^{\tau \hat{S}'(t+t',t')} \dot{\hat{S}}'(t+t',t') e^{-(\tau-1)\hat{S}(t+t',t')}, \quad (3.28)$$

donde \hat{S}' y $\dot{\hat{S}}'$ son el operador de entropía y de evolución de entropía en un marco de referencia en movimiento, respectivamente.

Antes que todo es importante recalcar los siguientes puntos:

a.- Las ecs. 3.26-3.28 se pueden construir en analogía a las correspondientes ecuaciones para $\hat{\rho}_\epsilon$ y $\Delta\hat{\rho}'$ debido a que $\hat{\rho}_l$ y $\hat{\rho}_l$ tienen la misma estructura.

b.- $\hat{\rho}_l$ y $\hat{\rho}_l$, pese a tener la misma estructura, su significado físico es diferente. En efecto, $\hat{\rho}_l$ está definido para variables microscópicas y $\hat{\rho}_l$ para variables de grano grueso.

c.- En la ec. 3.26 aparece \hat{H}' , y en la ec. 3.28 el operador \hat{S}' . lo que implica que $\hat{\rho}_{FP}$, $\hat{\rho}_l$ y $\hat{\rho}'_l$ se están tomando en un sistema de referencia en movimiento, específicamente, uno que se mueve con velocidad local $v_s(\mathbf{x})$.

d.- Los valores esperados calculados con $\hat{\rho}_{\bar{F}P}$ y con $\hat{\rho}_{\bar{I}}$ obedecen ecuaciones análogas a las ecs. A.31-A.32 y a la ec. 2.13: a saber,

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}_n(\mathbf{x}, t) \rangle_{\bar{F}P} &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{N/V \rightarrow \text{cte}} \text{Tr}(\hat{\rho}_{\bar{F}P} \hat{a}_n) \right] = \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho}_{\bar{F}P} \hat{a}_n) \equiv \langle \hat{a}_n(\mathbf{x}, t) \rangle_{\bar{I}}\end{aligned}\quad (3.29)$$

e.- La diferencia entre $\hat{\rho}_{FP}$ y $\hat{\rho}_{\bar{F}P}$ es que aunque ambos operadores están definidos para variables de grano grueso, estrictamente $\hat{\rho}_{FP}$ conserva su carácter no local tanto en el tiempo como en las variables fluctuantes, mientras que $\hat{\rho}_{\bar{F}P}$ se define en función de $\hat{\rho}_{\bar{I}}$, el cual ya está formulado en una aproximación Markoviana y local en las variables de grano grueso.

Ahora con el propósito de determinar las funciones \mathcal{L}_{mn} , emplearemos los resultados de la sección A.2 del Apéndice A, pero utilizando un operador de referencia $\hat{\rho}_{qe}$, (el cual es el operador $\hat{\rho}_{\bar{I}}$ en una aproximación lineal y definido en un marco de referencia en movimiento), realizaremos los siguientes seis pasos:

Primero, sea el operador estadístico $\hat{\rho}_{\bar{I}}$ dado por la ec. 3.14 para un sistema de referencia en movimiento, tal que lo consideremos en una aproximación lineal en las velocidades y por lo tanto podemos despreciar el término $(v_n - v_s)\hat{j}'$ que aparece en la ec. 3.14. Entonces $\hat{\rho}_{\bar{I}}$ se escribe como,

$$\hat{\rho}_{\bar{I}} \approx Q_{\bar{I}}^{-1} \exp\left(-\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x})\right]\right) \quad (3.30)$$

con,

$$Q_{\bar{I}} \approx \text{Tr} \exp\left(-\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x})\right]\right)$$

Sin embargo, el cálculo de las funciones de correlación \mathcal{L}_{mn} dadas por las ecs. 2.83, definidas a partir de $\hat{\rho}_{CG}$, no se realizará con el operador $\hat{\rho}_{\bar{v}}$ que es una aproximación lineal y markoviana de $\hat{\rho}_{CG}$, sino más bien se realizará con el operador estadístico de cuasi equilibrio $\hat{\rho}_{qe}$, el cual Brey *et al* mostraron en la ref. [15] que es equivalente a $\hat{\rho}_{\bar{v}}$.

La argumentación física detrás de la sustitución de $\hat{\rho}_{\bar{v}}$ por $\hat{\rho}_{qe}$ es la siguiente. Brey *et al* parten de aplicar un método análogo al de Chapman-Enskog, pero para encontrar la solución de una ecuación de Liouville en lugar de una de Boltzmann. Concretamente, muestran cómo el valor esperado de una magnitud física de interés (por ejemplo, la densidad del número de partículas, la densidad de la energía, etc) respecto a una función de distribución dependiente del tiempo $f(\Gamma, t)$, puede desarrollarse en series de potencias de los gradientes de los multiplicadores de Lagrange que determinan a una función de distribución de equilibrio local, $f_B(\Gamma, t)$. Muestran así que esta función de distribución de equilibrio local puede expresarse en términos de una función de distribución de cuasi equilibrio local $f_0(\Gamma, t)$, (ver ecs. 23, 34 y 40 en la ref. [15]), que difiere en su expresión matemática de la de equilibrio local (ver ecs. 5 y 9 en [15]).

Físicamente esto significa que los valores esperados de interés dependen únicamente de los gradientes de los multiplicadores de Lagrange de la función de distribución de equilibrio local, pero para distancias pequeñas e intervalos de tiempo cortos, tal es que dichos valores esperados son funcionales del tiempo, sólo dependen de \mathbf{x} y t vía los multiplicadores de Lagrange y de las funciones de correlación de los flujos asociados a las variables dinámicas.

En otras palabras, estamos empleando las ecuaciones hidrodinámicas, para sustituir la evolución de las variables de interés en función de los flujos de dichas variables, con lo cual asumimos implícitamente que: "... después de un tiempo de añejamiento del sistema, este puede ser descrito en una buena aproximación por las ecuaciones hidrodinámicas locales. Esto implica las funciones de correlación se suponen ser cortas en alcance tanto espacial como temporal...". [15]. *Esta situación física es consistente con la definición de cuasi equilibrio local como un estado con fluctuaciones pequeñas en un entorno de equilibrio local.*

Por lo tanto, el valor esperado para la evolución de una magnitud de interés calculado

con respecto a una función de distribución dependiente del tiempo y expresado en potencias de los gradientes de los multiplicadores de Lagrange, tendrá varias componentes: la primera estará dada por el valor esperado calculado respecto a una función de distribución de equilibrio local (f_B en el caso de Brey y $\hat{\rho}_l$ en nuestro caso), que corresponde a las ecuaciones de Euler: el segundo término asociado al primer orden en los gradientes de los multiplicadores, donde aparecen como coeficientes de este término las funciones de correlación, pero calculadas con respecto a la función de distribución de cuasi equilibrio (f_0 en el caso de Brey y $\hat{\rho}_{qe}$ en nuestro caso), en lugar de una función de distribución de equilibrio local y finalmente, términos de orden superior en los gradientes (por ejemplo términos de Burnett, ver ecs. 51 y 62a, 62b ; pp. 434-438 en la ref. [15]).

Concretamente este operador de cuasi equilibrio estadístico o de referencia se escribe como,

$$\hat{\rho}_{qe}(\mathbf{x}) \equiv Q_{qe}^{-1} \exp\left(-\beta(\mathbf{x})\left[\hat{\mathcal{H}} - \mu(\mathbf{x}) m \hat{\mathcal{N}}\right]\right), \quad (3.31)$$

donde,

$$Q_{qe} \equiv Tr\left(-\beta(\mathbf{x}) \hat{\mathcal{H}}\right)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d\mathbf{x} \hat{H}'(\mathbf{x})$$

$$m \hat{\mathcal{N}} = \int d\mathbf{x} \hat{\rho}(\mathbf{x})$$

Cabe notar que éste no es el operador de equilibrio estadístico $\hat{\rho}_0$, ya que aunque ambos son parecidos en sus expresiones matemáticas existen diferencias. Por ejemplo, en el

operador $\hat{\rho}_{qe}$ el multiplicador $\beta(x)$ es una función de la posición, lo cual no puede ocurrir en el operador de equilibrio $\hat{\rho}_0$. Por otro lado, tampoco $\hat{\rho}_{qe}$ es un operador de equilibrio estadístico local $\hat{\rho}_l$, ésto se observa al comparar la expresión dada por la ec. 3.30 para $\hat{\rho}_l$ con la ec. 3.31 para $\hat{\rho}_{qe}$, en la primera ecuación aparece una integral donde en el integrando esta la función $\beta(x)$, pero en el caso de la segunda ecuación dicha integral no existe. Por lo tanto, debe tenerse mucho cuidado de no interpretar incorrectamente o confundir a dicho operador de cuasi equilibrio.

Segundo, definamos el operador de entropía asociado a $\hat{\rho}_{qe}$ de la primera ecuación de la ecs. 3.31 como,

$$\hat{S}_{qe}(\mathbf{x}) = -\ln \hat{\rho}_{qe}(\mathbf{x}) = -\beta(\mathbf{x}) \left[\Phi_{qe} - \hat{\mathcal{H}} \right]. \quad (3.32)$$

donde,

$$\Phi_{qe} = -Tr \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x})$$

Tercero, definamos el operador de entropía asociado a $\hat{\rho}_l$ como

$$\hat{S}'_l(\mathbf{x}) = -\ln \hat{\rho}_l(\mathbf{x}). \quad (3.33)$$

tal que sustituyendo en esta ecuación el operador $\hat{\rho}_l$, de la ec. 3.14 obtenemos ³.

$$\hat{S}'_l(t, 0) = \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[-\Omega(\mathbf{x}) + \hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \hat{\rho}'(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}) \hat{j}'(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x}) \hat{u}'_s(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.34)$$

donde,

³En esta ec. 3.34 se ha considerado explícitamente la aparición del término $j_s \hat{u}'_s$, a diferencia de la ec. 3.14 donde no se considera porque $\langle \hat{u}'_s \rangle_l = 0$ en el marco de referencia en movimiento.

$$\ln Q_{\bar{I}} = -Tr \left[\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \Omega(\mathbf{x}) \right]$$

y,

$$W(\mathbf{x}) \equiv v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x})$$

Obsérvese que la primera y tercera ecuaciones de éstas ecs. 3.34 son idénticas a las ecs. A.58, pero interpretadas éstas últimas como ecuaciones para las variables de grano grueso. Por lo tanto, calculando la derivada temporal de la primera de las ecs. 3.34 tenemos que,

$$\begin{aligned} \hat{S}'_{\bar{I}}(t, 0) = \int d\mathbf{x} & \left[-\frac{\partial \beta(\mathbf{x}) \Omega(\mathbf{x})}{\partial t} + \dot{\beta}(x) \hat{H}'(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mu(\mathbf{x}) \beta(\mathbf{x})}{\partial t} \hat{\rho}'(\mathbf{x}) - \right. \\ & - \frac{\partial \beta(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{x})}{\partial t} \hat{j}'(\mathbf{x}) - \frac{\partial \beta(\mathbf{x}) j'_s(\mathbf{x})}{\partial t} \hat{u}'_s(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x}) j'_s(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}'_s(\mathbf{x})}{\partial t} + \\ & \left. + \beta(\mathbf{x}) \left(\hat{H}'(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \hat{\rho}'(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{j}'(\mathbf{x})}{\partial t} - j'_s(\mathbf{x}) \hat{u}'_s(\mathbf{x}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

tal que,

$$\hat{S}'_{\bar{I}}(t, t') = \exp \left\{ -\frac{\hat{H}' t'}{i\hbar} \right\} \hat{S}'_{\bar{I}}(t, 0) \exp \left\{ \frac{\hat{H}' t'}{i\hbar} \right\}. \quad (3.36)$$

Es importante aclarar que la ec. 3.35 es análoga a la ec. A.76 con la diferencia que la ec. 3.35 esta definida para variables de grano grueso y en un marco de referencia en movimiento.

En cuarto lugar, se sustituye el operador \hat{S}_{qe} de la ec. 3.32 sólo en las funciones exponenciales del operador $\hat{\rho}'_i$ de la ec. 3.28, tal que obtenemos para este último operador la expresión,

$$\hat{\rho}'_i(t) \approx \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int_0^1 d\tau e^{\tau\beta\hat{\mathcal{H}}} \dot{\hat{S}}'_i(t, t') e^{-\beta(\tau-1)\hat{\mathcal{H}}} e^{\beta\Phi}. \quad (3.37)$$

Realizando ahora el cambio de variable $\lambda = \beta(\mathbf{x})\tau$, se tiene que la ec. 3.37 se describe como,

$$\tilde{\hat{\rho}}'_i(t) \approx \frac{1}{\beta(\mathbf{x})} \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int_0^\beta d\lambda e^{\lambda\hat{\mathcal{H}}} \dot{\hat{S}}'_i(t, t') e^{-\lambda\hat{\mathcal{H}}} \hat{\rho}_{qe}, \quad (3.38)$$

donde esta ecuación es análoga a la ec. A.77 pero es diferente a ésta, puesto que la ec. 3.38 esta definida para variables de grano grueso y en función del operador $\hat{\rho}_{qe}$.

Por lo tanto, el operador $\hat{\rho}_{FP}$ de la ec. 3.27 con la ayuda de la ec. 3.38 se escribe como,

$$\hat{\rho}_{FP}(t) \approx \hat{\rho}_i(t) + \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int_0^{\beta(\mathbf{x})} d\lambda e^{\lambda\hat{\mathcal{H}}} \dot{\hat{S}}'_i(t, t') e^{-\lambda\hat{\mathcal{H}}} \hat{\rho}_{qe}. \quad (3.39)$$

Ecuación que es formalmente idéntica a la ec. A.78, pero con significados físicos distintos, ya que esta ec. 3.39 es capaz de considerar las fluctuaciones del sistema superfluido.

Quinto, dada cualquier variable de grano grueso \hat{a}_n , su valor esperado calculado con el operador $\hat{\rho}_{FP}$ esta dado por,

$$\langle \hat{a}_n(t) \rangle_{FP} \approx \langle \hat{a}_n(t) \rangle_i + \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{a}_n, \dot{\hat{S}}'_i(t-t')) \quad (3.40)$$

donde el segundo término del lado derecho de la ec. 3.40 representa una generalización de la relación fluctuación-disipación de Green-Kubo, en el sentido de que en lugar de calcular

la funciones de correlación respecto a un operador de equilibrio estadístico $\hat{\rho}_0$, como lo hacen Green o Kubo [47, 68, 69], se determinan con respecto a el operador $\hat{\rho}_{qe}$, con lo que es posible determinar coeficientes de transporte locales como veremos más adelante. Concretamente, dicha función de correlación cuántica se define con auxilio de $\hat{\rho}_{qe}$ como,

$$(\hat{a}_n(\mathbf{x}), \hat{B}(t)) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\mathbf{x})} \int_0^{\beta(\mathbf{x})} d\lambda \langle \hat{a}_n(\mathbf{x}) \hat{B}(t + i\hbar\lambda) \rangle_{qe}. \quad (3.41)$$

donde $\langle \rangle_{qe}$ indica que se esta tomando el promedio respecto al operador de cuasi equilibrio $\hat{\rho}_{qe}$.

Sexto, procediendo de manera análoga a la deducción de la ec. A.81 se rescribe la ec. 3.35. Para ello, se expresan las derivadas de las variables de grano grueso $\hat{\rho}$, \hat{H} , \hat{j} y \hat{u}_s en función de las ecuaciones de conservación para un fluido ideal y de las derivadas temporales de los multiplicadores de Lagrange en función de los gradientes de β , $\beta\mu$, j'_s y W , (ver detalles de la deducción en el Apéndice C de esta tesis). Por lo tanto, la ec. 3.35 se expresa como,

$$\begin{aligned} \hat{S}'_{\mathcal{I}}(t, 0) = \int d\mathbf{x} \left[(\nabla\beta(\mathbf{x})) \hat{j}'_q(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x}) \Delta\hat{p}'(\mathbf{x}) \nabla \cdot W(\mathbf{x}) \right. \\ \left. - \beta(\mathbf{x}) \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot j'_s(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x}) \hat{\mathcal{I}}'(\mathbf{x}) \cdot \nabla W(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde análogamente a la ec. A.81 se ha supuesto que el término correspondiente al flujo de entropía es cero. Además en la ec. 3.42 se ha definido a la densidad del flujo de calor como,

$$\hat{j}'_q(\mathbf{x}) = \hat{j}'_H(\mathbf{x}) - \left(\frac{S'(t)}{\beta(\mathbf{x})\rho_n(\mathbf{x})} + \frac{\hat{\rho}(\mathbf{x})}{\hat{\rho}_n(\mathbf{x})} \mu(\mathbf{x}) \right) \hat{j}(\mathbf{x}), \quad (3.43)$$

y el operador de la fluctuación de la presión como,

$$\Delta \hat{p}'(\mathbf{x}) = \hat{p}(\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial p}{\partial u} \right)_{\rho} (\hat{H}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}) - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\mathbf{u}} (\hat{\rho}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}), \quad (3.44)$$

donde el operador de presión local $\hat{p}'(\mathbf{x})$ esta relacionado con el operador asociado al tensor de los esfuerzos sin traza mediante la expresión siguiente,

$$\hat{\sigma}'_{ik}(x) = \hat{T}'_{ik}(x) - \delta_{ik} \hat{p}'(x). \quad (3.45)$$

y,

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \sum \hat{T}_{ii}(x). \quad (3.46)$$

Finalmente, el operador de fluctuacion asociado con la componente superfluida está dado por,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}) = & \frac{i\hbar}{2m\sqrt{n_0(\mathbf{x})}} (\psi'(\mathbf{x}) - \psi'^{\dagger}(\mathbf{x})) - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho'} \right)_{S'} (\hat{H}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}) - \\ & - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} (\hat{\rho}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde $n_0(\mathbf{x}) = \langle \psi'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} \langle \psi'^{\dagger}(\mathbf{x}) \rangle_{qe}$ es el valor esperado de la densidad de partículas en el estado de referencia.

A continuación las funciones de correlación de la ec. 2.53 serán evaluadas a partir de las funciones de correlación de la ec. 3.41, donde estas últimas se relacionan con los coeficientes de transporte locales en analogía con los resultados de la sección A.1.3 del Apéndice A. En las siguientes subsecciones se mostrará en detalle en qué consisten éstas

relaciones y a qué resultados conducen. En primer lugar, esto se hará en el caso de un marco de referencia en movimiento y después para un marco de referencia fijo donde las no linealidades del sistema se ponen de manifiesto.

3.2.1 Funciones de Correlación en un Marco de Referencia en Movimiento.

La ec. 2.83 para las funciones de correlación \mathcal{L}_{mn} esta definida apartir de las partes no proyectadas \hat{J}_n asociadas a las corrientes \hat{I}_n de las variables de grano grueso \hat{a}_n . que se definieron en la primera de las ecs. 2.67 y la ec. 2.77. Por otro lado, las funciones de correlación que aparecen en el segundo término del miembro derecho de la ec. 3.40 estan definidas mediante el operador de evolución de entropía , $\hat{S}'_{\bar{t}}$. Ahora, para calcular las funciones de correlación \mathcal{L}_{mn} mediante el segundo miembro de la ec. 3.40. tenemos que justificar la equivalencia de las funciones de correlación de las partes no proyectadas \hat{J}_n correspondientes a cada una de las variables de grano grueso \hat{a}_n con las funciones de correlación de los operadores $\hat{j}'_q(\mathbf{x}), \Delta\hat{p}'(\mathbf{x}), \hat{T}'(\mathbf{x})$ y $\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x})$, que aparecen en la definición de $\hat{S}'_{\bar{t}}$ dada por la ec. 3.42. Para lograr dicha justificación procedamos de la siguiente manera:

Primero, se definen las partes no proyectadas de las corrientes en el marco de referencia en movimiento, en analogía con la primera de las ecs. 2.67 y la ec. 2.77, a saber,

$$\hat{j}'_n(\mathbf{x}) = Q\hat{a}'_n(\mathbf{x}) = Q\hat{I}'_n(\mathbf{x}), \quad (3.48)$$

donde \hat{a}'_n es la derivada temporal de la variable dinámica \hat{a}'_n , ambas definidas en un marco de referencia móvil, y $\hat{I}'(\mathbf{x}) = \{\hat{I}'_E(\mathbf{x}), \hat{I}'_j(\mathbf{x}), \hat{I}'_s(\mathbf{x})\}$ estan definidos por las ecs. 3.21, 3.22 y 3.25, respectivamente, y $Q \equiv 1 - \mathcal{P}$ de acuerdo con la tercera ecuación de las ecs. 2.67.

En seguida, si se observa el segundo término del miembro derecho de la ec. 2.54 para $\hat{\rho}_{FP}$ y el elemento de matriz K_{mn} de la ec. 2.58 se puede comprobar que éstos toman en cuenta el comportamiento disipativo del sistema en función de los términos $\mathbf{X}_n(\mathbf{a})$ dados por la

ec. 2.52. En esta ec. 2.52 también se observa que las cantidades $X_n(\mathbf{a})$ se definen para la parte no proyectada de las corrientes. Además cabe subrayar que las ecs. 2.52, 2.58 y 2.68 están definidas en el contexto de $\hat{\rho}_{FP}$, el cual es un operador estadístico para variables de grano grueso con un comportamiento no local y no Markoviano. En la aproximación local y Markoviana en lugar de los elementos de matriz K_{mn} tenemos los elementos de matriz \mathcal{D}_{mn} en el espacio de Fourier o su equivalente los elementos de la matriz \mathcal{L}_{mn} en el espacio de configuración, definidos para las partes no proyectadas \hat{j}_n en términos del operador $\hat{\rho}_{CG}$.

Más aún, dado el operador $\hat{\rho}_{FP}$ de la ec. 3.27 podemos observar que en su segundo término del miembro derecho aparece $\hat{\rho}'_I$, quien corresponde a la parte disipativa del sistema. En la aproximación lineal para un marco de referencia en movimiento, el operador $\hat{\rho}_{FP}$ se aproxima por la ec. 3.39, donde su parte disipativa, $\hat{\rho}'_I$, queda expresada en función del operador de evolución de entropía, \hat{S}'_I y del operador estadístico de referencia $\hat{\rho}_{qe}$.

Por lo tanto, la parte disipativa de una corriente \hat{I}'_n dada por su parte no proyectada \hat{j}'_n en la aproximación de cuasi equilibrio local realizada en la sección 3.1 de este Capítulo, debe corresponderse con la parte disipativa descrita por $\hat{\rho}'_I$, de la ec. 3.38, a través de los flujos $\hat{j}'_q(\mathbf{x})$, $\Delta\hat{p}'(\mathbf{x})$, $\hat{T}'(\mathbf{x})$ y $\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x})$ que aparecen en el operador de evolución de entropía \hat{S}'_I , puesto que ambas están describiendo el comportamiento del mismo sistema. Entonces, supondremos que, aproximadamente, son válidas las siguientes relaciones para los flujos aleatorios y las partes no proyectadas definidos anteriormente, a saber,

Para el flujo de calor,

$$\hat{j}'_q(\mathbf{x}) \approx Q\hat{I}'_E(\mathbf{x}) = Q\hat{j}'_H(\mathbf{x}). \quad (3.49)$$

Para el flujo de ímpetu,

$$\hat{T}'(\mathbf{x}) \approx Q\hat{I}'_j = Q\hat{T}'(\mathbf{x}), \quad (3.50)$$

o.

$$\hat{T}'_{ik}(x) = Q\hat{T}'_{ik}(x)$$

y para el flujo de la componente superfluida tenemos,

$$\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}) \approx Q\hat{I}'_s(\mathbf{x}), \quad (3.51)$$

donde las \hat{I}'_n son las mismas que aparecen en la ec. 3.48.

Finalmente, sustituyendo ahora por separado cada una de las ecs. 3.49-3.51 en la ec. 2.83 para las \mathcal{L}_{mn} y comparándolas con el segundo miembro derecho de la ec. 3.40 obtenemos que :

i).- Para el flujo de calor, su función de autocorrelación se escribe como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\hat{j}'_q, \hat{j}'_q) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int d\mathbf{x}' \langle \hat{j}'_q(\mathbf{x}), \hat{j}'_q(\mathbf{x}', t) \rangle_{CG} \propto \\ &\propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} (\hat{j}'_H(\mathbf{x}), \hat{S}'_I(t)), \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde \hat{S}'_I , es el operador de producción de entropía local que esta dado por la ec. 3.42. (\hat{a}_n, \hat{B}_m) es la función de correlación cuántica dada en la ec. 3.41, la cual esta definida en función del operador $\hat{\rho}_{qe}$. Por otra parte, cabe hacer notar que en el operador de producción de entropía local se han ignorado los efectos no Markovianos. La razón de que este operador no contenga efectos de memoria es que el operador $\hat{\rho}_I$ de la ec. 3.14, a partir del cual se define \hat{S}'_I , ya es un operador Markoviano. Es decir, estrictamente $\hat{\rho}_{CG}$ es un operador estadístico local de grano grueso, operador que presenta efectos de memoria espacial y temporal. Sin embargo, en la aproximación Markoviana de $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. 2.76 de la sección 3.4 mediante $\hat{\rho}_I$, dado por las ecs. 3.4 o 3.14, se ha aproximado a $\hat{\rho}_{CG}$ con $\hat{\rho}_I$ y este último con $\hat{\rho}_{qe}$. Por lo tanto, estrictamente se ha aproximado $\hat{\rho}_{CG}$ con

$\hat{\rho}_{qe}$, lo cual se observa en la ec. 3.52 al analizar las funciones de correlación que aparecen en ella, definida por la ec. 3.41

Por otra parte, análogamente con la ec. A.99 se observa de la ec. 3.29, que en la ec. 3.43 para \hat{j}'_q la traza del operador $\hat{j}'(x)$ con el término integral $\hat{\rho}'$ del operador $\hat{\rho}_{FP}$, dado por la ec. 3.27, tiende a cero cuando el sistema tiende al equilibrio, es decir cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por lo tanto se tiene que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr(\hat{\rho}'_I \hat{j}'_H(\mathbf{x})) \rightarrow Tr(\hat{\rho}_{qe} \hat{j}'_q(\mathbf{x})) \quad (3.53)$$

Si ahora sustituímos esta ec. 3.53 en la ec. 3.52 se obtiene que.

$$\mathcal{L}'(\hat{j}'_q, \hat{j}'_q) \approx \int_{-\infty}^0 dt \int d\mathbf{x}' e^{\epsilon t} (\hat{j}'_q(x), \hat{j}'_q(x', t)) \quad (3.54)$$

donde (\hat{a}_n, \hat{B}_m) es la función de correlación cuántica dada en la ec. 3.41 definida en función de $\hat{\rho}_{qe}$. Finalmente, recordando la definición del coeficiente de conductividad térmica, de la ec. A.103, tenemos que la ec. 3.54 se expresa como,

$$\mathcal{L}'(\hat{j}'_{q_i}, \hat{j}'_{q_j}) \equiv \frac{\kappa(\mathbf{x})}{\beta^2(\mathbf{x})} \delta_{ik} = \kappa(\mathbf{x}) T^2(\mathbf{x}) \delta_{ik} \quad (3.55)$$

donde,

$$\kappa(\mathbf{x}) = \frac{\beta^2(\mathbf{x})}{3} \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\hat{j}'_q(\mathbf{x}), \hat{j}'_q(\mathbf{x}', t)) \quad (3.56)$$

es el coeficiente de conductividad térmica local y $\beta(\mathbf{x})$ es el inverso de la temperatura local. Cabe resaltar que este coeficiente de transporte difiere del de la ec. A.103, obtenido mediante la Teoría de la Respuesta Lineal de Kubo, en que la función de correlación se

evalúa con el operador $\hat{\rho}_{qe}$ en lugar de emplear el operador $\hat{\rho}_0$. lo que da lugar a que el coeficiente de transporte sea de carácter local.

ii).- Para el tensor de los esfuerzos, tenemos que se cumplen la siguiente relación entre las funciones de correlación,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}'(\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}', t)) + \mathcal{L}'(\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) = \\
& = \int_0^\infty dt e^{et} \int d\mathbf{x}' \langle \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}, t) + \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t) \rangle_{CG} \propto \\
& \propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 dt e^{et} (\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}), \hat{S}'_i(t', 0)) \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Aquí \hat{S}'_i esta dada por la ec. 3.42 y (\hat{a}_n, \hat{B}_m) es la función de correlación cuántica dada en la ec. 3.41; $\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t')$ esta dado por la ec. 3.47, que corresponde a la parte fluctuante del flujo asociado a la componente superfluida, y $\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x})$ es el tensor fluctuante de los esfuerzos definido por la ec. 3.45.

Ahora, sustituyendo las ecs. 3.42 para \hat{S}'_i y la ec. 3.45 para $\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x})$, en la ec. 3.57 y empleando el principio de Curie obtenemos la siguiente relación, ⁴

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}'(\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}', t)) + \mathcal{L}'(\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \propto \\
& \propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 dt e^{et} \left(\overset{\circ}{\hat{\underline{T}}}'(\mathbf{x}) + \hat{p}'(\mathbf{x}) \underline{U}, \hat{S}'_i(t, 0) \right) = \\
& = - \int_{-\infty}^0 dt e^{et} \int d\mathbf{x}' \beta(\mathbf{x}, t) \left[(\hat{p}'(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)) \times \nabla \cdot W(\mathbf{x}, t) \cdot \underline{U} + \right. \\
& \left. + (\overset{\circ}{\hat{\underline{T}}}'(\mathbf{x}), \overset{\circ}{\hat{\underline{T}}}'(\mathbf{x}', t)) \cdot (\nabla \cdot W)^s(\mathbf{x}, t) + (\hat{p}'(\mathbf{x}), \alpha'_s(\mathbf{x}', t)) \nabla \cdot \hat{j}'_s(\mathbf{x}, t) \right], \tag{3.58}
\end{aligned}$$

⁴Esta relación es análoga a la ec. A.96.

donde en esta ecuación se ha empleado la expresión $(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{W})^s$ para el tensor simétrico sin traza que se define como,

$$(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{W})_{ik}^s(x) = \frac{1}{2} \left[\nabla_i W_k(x) + \nabla_k W_i(x) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{W}(x) \right] \quad (3.59)$$

A continuación en la ec. 3.44, observamos de las ecs. 3.27 y 3.29 que la traza de los operadores $\hat{\rho}'$ y \hat{H}' con el término disipativo $\hat{\rho}'_I$ del operador $\hat{\rho}'_{FP}$ tiende a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$, es decir, el sistema tiende al equilibrio. Entonces, en la ec. 3.44 se tiene que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr(\hat{\rho}'_I \hat{p}(\mathbf{x})) \rightarrow Tr(\hat{\rho}'_{q\epsilon} \Delta \hat{p}(\mathbf{x})). \quad (3.60)$$

Ahora substituyendo \hat{p} por $\Delta \hat{p}$ de acuerdo con la ec. 3.60, en cada uno de los términos del lado derecho de la ec. 3.58 donde aparece \hat{p} , podemos definir las siguientes funciones de correlación.

$$\mathcal{L}'(\Delta \hat{p}'(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)) \equiv \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\Delta \hat{p}'(\mathbf{x}) \cdot \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)), \quad (3.61)$$

$$\mathcal{L}'(\Delta \hat{p}'(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \equiv \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\hat{p}'(\mathbf{x}) \cdot \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)), \quad (3.62)$$

y adicionalmente podemos definir la siguiente función de correlación para el tensor de los esfuerzos sin traza.

$$\mathcal{L}'(\overset{\circ}{\hat{\mathbf{T}}}'(\mathbf{x}), \overset{\circ}{\hat{\mathbf{T}}}'(\mathbf{x}', t)) \equiv \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\overset{\circ}{\hat{\mathbf{T}}}'(\mathbf{x}) \cdot \overset{\circ}{\hat{\mathbf{T}}}'(\mathbf{x}', t)). \quad (3.63)$$

Por lo tanto, las funciones de correlación que aparecen en el lado izquierdo de la ec. 3.58 se escriben en términos de la funciones de correlación de las ecs. 3.61-3.63, como,

$$\mathcal{L}'(\underline{\hat{\mathcal{T}}}'(\mathbf{x}), \underline{\hat{\mathcal{T}}}'(\mathbf{x}', t)) = \mathcal{L}'(\underline{\hat{\mathbf{T}}}'(\mathbf{x}), \underline{\hat{\mathbf{T}}}'(\mathbf{x}', t)) + \mathcal{L}'(\Delta\hat{p}'(\mathbf{x}), \Delta\hat{p}'(\mathbf{x}', t)) \quad (3.64)$$

y:

$$\mathcal{L}'(\underline{\hat{\mathcal{T}}}'(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) = \mathcal{L}'(\Delta\hat{p}'(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \quad (3.65)$$

En seguida comparemos cada una de las funciones de correlación definidas por las ecs. 3.61-3.63 con los coeficientes de viscosidad definidos en la sección A.2. del Apéndice A. Concretamente, si se compara la ec. 3.63 con la definición del coeficiente de viscosidad cortante de la ec. A.105 se puede definir dicho coeficiente en la aproximación local como,

$$\eta(x) \equiv \frac{\beta(\mathbf{x})}{10} \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\underline{\hat{\mathbf{T}}}'(\mathbf{x}), \underline{\hat{\mathbf{T}}}'(\mathbf{x}', t)). \quad (3.66)$$

Si comparamos la función de correlación de la ec. 3.62 con la definición del primero de los segundos coeficientes de viscosidad ζ_1 , dado por la ec. A.106, entonces éste primer coeficiente de viscosidad en su aproximación local se escribe como,

$$\zeta_1(x) \equiv \beta(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\Delta\hat{p}'(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)). \quad (3.67)$$

Ahora de forma similar, comparemos la ec. 3.61 con la definición del segundo de los segundos coeficientes de viscosidad ζ_2 dado por la ec. A.107, entonces el segundo coeficiente de viscosidad en su aproximación local se define como,

$$\zeta_2(x) \equiv \beta(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^0 dt e^{ct} \int d\mathbf{x}' (\Delta \hat{p}'(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)) \quad (3.68)$$

A continuación rescribiendo las funciones de correlación de las ecs. 3.61-3.63 en función de los coeficientes de viscosidad locales de las ecs. 3.66-3.68 se tiene, respectivamente, que:

Para las componentes de la función de autocorrelación de la presión,

$$\mathcal{L}'(\Delta \hat{p}'_i, \Delta \hat{p}'_k) = \zeta_2(x) T(x) \delta_{ik} . \quad (3.69)$$

Para las componentes de la función de correlación de la parte sin traza del tensor de los esfuerzos,

$$\mathcal{L}'(\hat{T}'_{ik}, \hat{T}'_{lm}) = \eta(x) T(x) \left((\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{lm} \right) ,$$

o,

$$\mathcal{L}'(\hat{\mathcal{T}}', \hat{\mathcal{T}}') = \frac{1}{10} \eta(x) T(x) \quad (3.70)$$

y para las componentes de la función de correlación del el tensor de presión con la corriente de la componente superfluida,

$$\mathcal{L}'(\Delta \hat{p}'_i, \hat{a}'_{sk}) = \zeta_1(x) T(x) \delta_{ik} . \quad (3.71)$$

Finalmente, la función de autocorrelación de la corriente no proyectada de la componente superfluida se obtiene sustituyendo la ec. 3.51 en la ec. 2.83; y comparando éste resultado de la sustitución con el segundo miembro derecho de la ec. 3.40 considerando $\hat{a}'_n = \hat{u}'_s$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{Total}(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) &= \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' \langle \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t) \rangle_{CG} \propto \\
&\propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} (\hat{u}'_s(\mathbf{x}), \hat{S}'_{\bar{i}}(t, 0))
\end{aligned} \tag{3.72}$$

En la ec. 3.72, \hat{u}'_s está dada por la ec. A.19, interpretada en función de las variables de grano grueso. $\hat{S}'_{\bar{i}}$ está dada por la ec. 3.42, y (\hat{a}_n, \hat{B}_m) y representa la función de correlación cuántica definida en la ec. 3.41.

Ahora, del segundo miembro derecho de la ec. A.111 y de la definición para \hat{u}'_s dada por las ecs. A.19 y A.7. pero interpretadas como ecuaciones para variables de grano grueso, tenemos que la última igualdad de la ec. 3.72 se rescribe como,

$$\mathcal{L}'_{Total}(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \left(\frac{\hat{\psi}'(\mathbf{x})}{\langle \hat{\psi}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{i}}} - \frac{\hat{\psi}'^\dagger(\mathbf{x})}{\langle \hat{\psi}'^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{i}}}, \hat{S}'_{\bar{i}}(t, 0) \right) \tag{3.73}$$

Por otra parte, de manera análoga a las ecs, A.112 tenemos que cuando el sistema tiende al equilibrio, es decir cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se cumple que,

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} \rangle &\rightarrow 0 \\
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} \rangle &\rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{F}\bar{P}} \rightarrow \langle \hat{\psi}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} = \langle \hat{\psi}'^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_{qe} = \sqrt{n(x)}$$

Por lo tanto, la ec. 3.47 cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se comporta como,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{-i\hbar}{2m \sqrt{n(\mathbf{x})}} \left[\dot{\psi}'(\mathbf{x}) - \dot{\psi}'^\dagger(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.75)$$

A continuación sustituyendo el lado izquierdo de esta ec. 3.75 en el lado derecho de la ec. 3.73, esta última se rescribe como,

$$\mathcal{L}'_{Total}(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \propto \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} (\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{S}'_{\bar{I}}(t, 0)) \quad (3.76)$$

donde se ha empleado que $\langle \dot{\psi}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} = \langle \dot{\psi}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} = \sqrt{n(x)}$.

Por lo tanto, sustituyendo $\hat{S}'_{\bar{I}}$ de la ec. 3.42 en esta ec. 3.76 y del principio de Curie tenemos,

$$\mathcal{L}'_{Total}(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \propto \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x} \left[(\hat{\alpha}'_s, \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)) + (\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \right] \quad (3.77)$$

Ahora, si definimos las funciones de correlación que involucran a $\hat{\alpha}'_s$ y que aparecen en la ec. 3.76 como,

$$\mathcal{L}'(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)) = \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)) \quad (3.78)$$

$$\mathcal{L}'(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) = \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)). \quad (3.79)$$

entonces la ec. 3.76 se puede describir con auxilio de las ecs. 3.78-3.79 como,

$$\mathcal{L}'_{Total}(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) = \mathcal{L}'(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)) + \mathcal{L}'(\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \quad (3.80)$$

A continuación recordando la definición del tercero y cuarto de los segundos coeficientes de viscosidad dados por las ecs. A.117-A.116, podemos definir sus análogos tercero y cuarto de los segundos coeficientes de viscosidad locales como,

$$\zeta_3(\mathbf{x}) \equiv \beta(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}', t)) \quad (3.81)$$

y,

$$\zeta_4(\mathbf{x}) \equiv \beta(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' (\hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}'(\mathbf{x}', t)), \quad (3.82)$$

donde no es difícil comprobar de esta ecuación y de la ec. 3.67, que $\zeta_1(x) = \zeta_4(x)$, lo cual esta de acuerdo con las relaciones de reciprocidad de Onsager.

Respecto a la función de correlación para el flujo de calor y la componente no proyectada de el tensor de los esfuerzos $\hat{\mathcal{T}}'(\mathbf{x})$ tenemos de la ec. 2.83 que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\hat{j}'_q, \hat{\mathcal{T}}') &= \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x}' \langle \hat{j}'_q(\mathbf{x}), \hat{\mathcal{T}}'(\mathbf{x}', t) \rangle_{CG} = \\ &= \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} \int d\mathbf{x} \langle \hat{\mathcal{T}}'(\mathbf{x}), \hat{j}'_q(\mathbf{x}', t) \rangle_{CG} = L(\hat{\mathcal{T}}', \hat{j}'_q) = 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde no es difícil comprobar esta igualdad a partir de la ec. 3.43 para \hat{j}'_q y de la ec. 3.50 para $\hat{\mathcal{T}}'(\mathbf{x})$ empleando el principio de Curie.

Evidentemente los resultados presentados en esta sección 4.2.1 son análogos a los obtenidos en la sección A.2 del Apéndice A. Sin embargo, aunque ambos resultados son correctos formalmente tienen el inconveniente de ser inaplicables para la evaluación concreta de los coeficientes de transporte.

Resumiendo esta sección, hemos evaluado las funciones de correlación de las ecs. 2.83 para el caso del Helio superfluido a partir del segundo término del lado derecho de la ec. 3.40. *En efecto, este miembro de la ec. 3.40 representa una generalización de las relaciones de fluctuación-disipación de Green-Kubo con respecto a un estado de cuasi equilibrio local caracterizado por el operador $\hat{\rho}_{qe}$, la cual nos permite estudiar un sistema fluctuante próximo a un estado de equilibrio local.* Concretamente las funciones de correlación que aparecen en esta ec. 3.40 definidas respecto al estado de cuasi equilibrio, nos permiten definir los coeficientes de transporte en una aproximación local. En efecto, dicho operador estadístico de cuasi equilibrio es equivalente al operador estadístico $\hat{\rho}_{\bar{\Gamma}}$ (ver ecs. 23, 30 y 40 de la referencia [15]), donde este último es un operador estadístico de grano grueso definido en un marco de referencia que se mueve con velocidad v_s , que caracteriza a un sistema con fluctuaciones pequeñas cerca de un estado de equilibrio local. A continuación en la siguiente sección, determinaremos las funciones de correlación en función de los coeficientes de transporte locales, pero para un marco de referencia fijo, donde el superfluido se mueve con una velocidad v_s .

3.2.2 Funciones de Correlación en un Marco de Referencia Fijo.

El objetivo de esta sección es determinar las funciones de correlación \mathcal{L}_{mn} de la ec. 2.83 para el Helio superfluido pero en un marco de referencia fijo, en el cual la velocidad local de la componente del superfluido es $v_s \neq 0$. Para lograr esto, expresemos las partes no proyectadas de los flujos (corrientes) del superfluido, del marco de referencia fijo en función de las partes no proyectadas de las corrientes, pero en un marco de referencia móvil. Una vez establecidas las relaciones entre las partes no proyectadas de las corrientes en ambos sistemas, obtendremos las relaciones de ambas funciones de correlación en ambos sistemas de referencia, a partir de la ec. 2.83, con lo cual las funciones de correlación en el marco de referencia fijo quedan determinadas a partir de las funciones de correlación para el marco de referencia móvil. Por lo tanto, obtendremos las funciones de correlación para el marco de referencia fijo en función de los coeficientes de transporte locales, tal que a diferencia de las \mathcal{L}'_{mn} de la subsección anterior van a contener términos no lineales. Las funciones de correlación, en el sistema fijo, más adelante las asociaremos con las funciones

de correlación de los flujos fluctuantes, que a su vez aparecen en las ecuaciones de Langevin correspondientes a la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido.

Sean las partes no proyectadas de los flujos o corrientes locales $\hat{I}_n(\mathbf{x})$ para un marco de referencia fijo, definidas como.

$$\hat{j}_n(\mathbf{x}) = Q \hat{a}_n(\mathbf{x}) = Q \hat{I}_n(\mathbf{x}) \quad (3.84)$$

con,

$$Q \equiv 1 - \mathcal{P}$$

donde $\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) = \{\hat{I}_E(\mathbf{x}), \hat{I}_j(\mathbf{x}), \hat{I}_s(\mathbf{x})\}$ estan a su vez definidas por las ecs. 3.11, 3.12 y 3.13, respectivamente. De esta manera las relaciones de la ec. 3.84 para cada una de las variables relevantes seleccionadas para describir el Helio superfluido, se escriben por analogía con las ecs. 3.49-3.51 como,

$$\hat{j}_q(\mathbf{x}) \approx Q \hat{I}_E(\mathbf{x}) = Q \hat{j}_H(\mathbf{x}), \quad (3.85)$$

$$\hat{\underline{T}}(\mathbf{x}) \approx Q \hat{I}_j = Q \hat{\underline{T}}(\mathbf{x}), \quad (3.86)$$

$$\hat{a}_s(\mathbf{x}) \approx Q \hat{I}_s(\mathbf{x}), \quad (3.87)$$

Ahora bien, de los resultados obtenidos en el Apéndice D de esta tesis, tenemos que las relaciones entre las partes no proyectadas de los flujos en ambos sistemas de referencia, se expresan como,

$$\hat{j}_q(\mathbf{x}) \equiv \hat{j}'_q(\mathbf{x}) + \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}) \cdot v_s(\mathbf{x}) \quad (3.88)$$

para el flujo de calor.

Para la componente no proyectada del tensor de los esfuerzos, se obtiene que,

$$\hat{\underline{T}}(\mathbf{x}) = \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}) \quad (3.89)$$

y para la parte no proyectada de la componente superfluida se tiene que,

$$\hat{\alpha}_s(\mathbf{x}) = \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}) \quad (3.90)$$

A continuación, de la definición para las funciones de correlación dada por la ec. 2.83, en un marco de referencia fijo y de las relaciones entre las partes no proyectadas de dichos flujos en un marco de referencia fijo en función de uno móvil dadas por las ecs. 3.88-3.90, se cumple que:

i).- Para el flujo de calor la ec. 2.83 se escribe como,

$$\mathcal{L}\left(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{j}_{q_k}(x)\right) = \int_0^\infty dt e^{-ct} \int dx' \langle \hat{j}_{q_i}(x), \hat{j}_{q_k}(\mathbf{x}', t) \rangle_{CG} \quad (3.91)$$

Sustituyendo en esta ecuación la ec. 3.88, se obtiene que,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}\left(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{j}_{q_k}(x', t)\right) = \\
& = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{j}'_{q_i}(x) + \hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_{si}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t) + \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x) \rangle_{CG} = \\
& = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \left[\langle \hat{j}'_{q_i}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t) \rangle_{CG} + \langle \hat{j}'_{q_i}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x) \rangle_{CG} + \right. \\
& \quad \left. + \langle \hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_{si}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t) \rangle_{CG} + \langle \hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_{si}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x) \rangle_{CG} \right] \quad (3.92)
\end{aligned}$$

Ahora, el primer término del lado derecho de esta última igualdad es idéntico a las ecs. 3.52 y 3.54 para $\mathcal{L}'(j'_q, j'_q)$. Por otra parte, para el segundo y tercer términos se cumple que,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{j}'_{q_i}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x) \rangle_{CG} = \\
& = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx \langle \hat{j}'_{q_i}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \rangle_{CG} \cdot v_{sk}(x) = \\
& = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_{si}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t) \rangle_{CG} = \\
& = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{T}'_{ik}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t) \rangle_{CG} \cdot v_{si}(x) = 0, \quad (3.93)
\end{aligned}$$

donde en esta ecuación el factor $v_{si}(x)$ puede salir de la operación promedio indicada por $\langle \rangle_{CG}$, porque $v_{si}(x)$ ya en si es un valor medio. Además, la igualdad con cero viene de considerar la ec. 3.83. Sustituyendo la ec. 3.64 en el cuarto término de la segunda igualdad del lado derecho de la ec. 3.92, tenemos que,

$$\int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_{si}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x) \rangle_{CG} =$$

$$= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \left[\langle \Delta \hat{p}'_i v_{si}(x), \Delta \hat{p}'_i v_{sk}(x', t) \rangle_{CG} + \langle \hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_{si}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x) \rangle_{CG} \right], \quad (3.94)$$

donde en esta ecuación no aparecen los términos,

$$\int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \Delta \hat{p}'_i(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \rangle_{CG} = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{T}'_{ik}(x), \Delta \hat{p}'_i(x', t) \rangle_{CG} = 0$$

puesto que ambas son cero debido al principio de Curie.

Por lo tanto, sustituyendo la ec. 3.54 y las ecs. 3.93-3.94 en la ec. 3.92 obtenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{j}_{q_k}(x', t)) &= \mathcal{L}(j'_{q_i}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t)) + \mathcal{L}(\hat{T}'_{ik} \cdot v_{si}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x)) + \\ &+ \mathcal{L}(\Delta \hat{p}'_i v_{si}(x), \Delta \hat{p}'_i v_{sk}(x', t)) \end{aligned} \quad (3.95)$$

donde se han definido las siguientes expresiones,

$$\mathcal{L}(j'_{q_i}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t)) = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \dot{j}'_{q_i}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t) \rangle_{CG} \quad (3.96)$$

$$\mathcal{L}(\hat{T}'_{ik} \cdot v_{si}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x)) = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{T}'_{ik} \cdot v_{si}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \cdot v_{sk}(x) \rangle_{CG} \quad (3.97)$$

$$\mathcal{L}(\Delta \hat{p}'_i v_{si}(x), \Delta \hat{p}'_i v_{sk}(x', t)) = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \Delta \hat{p}'_i v_{si}(x), \Delta \hat{p}'_i v_{sk}(x', t) \rangle_{CG} \quad (3.98)$$

En estas ecuaciones no es difícil relacionar a las funciones de correlación con los coeficientes de transporte locales. En efecto, de la ec. 3.97 tenemos que.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{T}'_{ik} \cdot v_{ni}(x), \hat{T}'_{ik} \cdot v_{nk}(x)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \rangle_{CG} \cdot v_{si}(x) \cdot v_{sk}(x) = \\ &= \eta(x) T(x) \left(v_s^2(x) \delta_{ik} + \frac{1}{3} v_{si}(x) v_{sk}(x) \right) \end{aligned} \quad (3.99)$$

donde se ha empleado la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{T}'_{ik}, \hat{T}'_{lm}) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{ik}(x', t) \rangle_{CG} \equiv \\ &\equiv \mathcal{L}'(\hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t)) = \eta(x) T(x) \left((\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{lm} \right), \end{aligned} \quad (3.100)$$

identidad que se obtiene de la primera ecuación de las ecs. 3.70.

Procediendo de manera análoga para la ec. 3.98 tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta \hat{p}'_i(X) v_{si}(x), \Delta \hat{p}'_i(x', t) v_{sk}(x)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \Delta \hat{p}'_i(X) v_{si}(x), \Delta \hat{p}'_i(X', T) v_{sk}(x) \rangle_{CG} = \\ &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \Delta \hat{p}'_i(X), \Delta \hat{p}'_i(X', T) \rangle_{CG} v_{si}(x) v_{sk}(x) = \zeta_2(x) T(x) v_{si}(x) v_{sk}(x) \end{aligned} \quad (3.101)$$

en cuya obtención se ha usado la ec. 3.69 como

$$\mathcal{L}(\Delta \hat{p}'_i(x), \Delta \hat{p}'_k(x', T)) = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \Delta \hat{p}'_i(x), \Delta \hat{p}'_k(x', t) \rangle_{CG} \equiv$$

$$\equiv \mathcal{L}'(\Delta \hat{p}'_i(x), \Delta \hat{p}'_k(x', t)) = \zeta_2(x) T(x) \delta_{ik}. \quad (3.102)$$

Respecto a la ec. 3.96, se tiene de la ec. 3.55 que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{j}'_{q_i}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{j}'_{q_i}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t) \rangle_{CG} \equiv \\ &\equiv \mathcal{L}'(\hat{j}'_{q_i}(x), \hat{j}'_{q_k}(x', t)) = \kappa(x) T^2(x) \delta_{ik} \end{aligned} \quad (3.103)$$

Finalmente, la función de correlación $\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{j}_{q_k})$ de las ecs. 3.91 y 3.95 con auxilio de las ecs. 3.99, 3.101 y 3.103 se describe como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{j}_{q_k}(x', t)) &= \kappa(x) T^2(x) \delta_{ik} + \\ &+ \eta(x) T(x) \left(v_s^2(x) \delta_{ik} + \frac{1}{3} v_{si}(x) v_{sk}(x) \right) + \zeta_2(x) T(x) v_{si}(x) v_{sk}(x), \end{aligned} \quad (3.104)$$

que es la función de correlación para el flujo de calor, en un marco de referencia fijo. Al comparar este resultado con la ec. 3.55 se observa que es diferente, en cuanto a, que la ec. 3.104 adicionalmente tiene términos no lineales en $v_s(x)$.

ii).- La función de correlación para el flujo de calor con el tensor de los esfuerzos esta dada por,

$$\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{T}_{lm}(x', t)) = \mathcal{L}(\hat{T}_{lm}(x), \hat{j}_{q_i}(x', t)) = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{j}_{q_i}(x), \hat{T}_{lm}(x', t) \rangle_{CG} \quad (3.105)$$

Sustituyendo en esta ecuación la ec. 3.88 para \hat{j}_q y de la ec. 3.89 para $\hat{\underline{T}}$, tenemos que.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{T}_{lm}(x', t)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{j}'_{q_i}(x) + \hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_{si}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t) \rangle_{CG} = \\ &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \left[\langle \hat{j}'_{q_i}(x), \hat{T}'_{ik}(x) \rangle_{CG} + \langle \hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t) \rangle_{CG} \cdot v_{si}(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Ahora haciendo uso de las ecs. 3.83 y el primer término del lado derecho de la ec. 3.57, la ec. 3.106 se expresa como.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{T}_{lm}(x', t)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t) \rangle_{CG} \cdot v_{si}(x) = \\ &= \mathcal{L}'(\hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t)) \cdot v_{si}(x) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Si en esta ecuación sustituimos la ec. 3.64 obtenemos que,

$$\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{T}_{lm}(x', t)) = \left[\mathcal{L}'(\hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t)) + \mathcal{L}'(\Delta \hat{p}'_i(x), \Delta \hat{p}'_l(x', t)) \right] v_{si}(x). \quad (3.108)$$

Nótese que a diferencia de la ec. 3.83 que es igual a cero (de acuerdo con el principio de Curie), las ecs. 3.105-3.108 no son iguales a cero. Esto se debe a que en la transformación Galileana del flujo de calor se involucra al tensor $\hat{\underline{T}}'$, ver ec. 3.88, lo que implica la existencia de la función de correlación $\mathcal{L}'(\hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t))$ que es distinta de cero.

A continuación sustituyendo las funciones de correlación $\mathcal{L}'(\Delta \hat{p}'_i(x), \Delta \hat{p}'_l(x', t))$ y $\mathcal{L}'(\hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t))$ dadas, respectivamente, por las ecs. 3.69 y 3.70 en la ec. 3.108, esta ecuación se reescribe como,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}(x), \hat{T}_{im}(x', t)) &= \mathcal{L}(\hat{T}_{im}(x), \hat{j}_{q_i}(x', t)) = \\
&= \zeta_2(x) T(x) v_{si}(x) \delta_{il} + \eta(x) T(x) \left(\delta_{il} v_{sm}(x) + \delta_{im} v_{sl}(x) - \frac{2}{3} \delta_{lm} v_{si}(x) \right). \quad (3.109)
\end{aligned}$$

iii).- Para la función de autocorrelación para los $\hat{\underline{T}}$ tenemos que.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\hat{\underline{T}}(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}(\mathbf{x}', t)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int d\mathbf{x}' \langle \hat{\underline{T}}(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}(\mathbf{x}', t) \rangle_{CG} = \\
&= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int d\mathbf{x}' \langle \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}', t) \rangle_{CG} = \mathcal{L}'(\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}', t)), \quad (3.110)
\end{aligned}$$

la cual se sigue de la ec. 3.89 y el primer término del lado izquierdo de las ecs. 3.57. Por lo tanto, la forma explícita de las componentes de la ec. 3.110 se obtienen de las componentes de la ecs. 3.61, 3.63, 3.66, 3.68, 3.69 y 3.70, y se escriben como.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\hat{T}_{ik}(x), \hat{T}_{lm}(x', t)) &= \mathcal{L}'(\hat{T}'_{ik}(x), \hat{T}'_{lm}(x', t)) = \\
&= \zeta_2(x) T(x) \delta_{ik} + \eta(x) T(x) \left((\delta_{ik} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{lm} \right) \quad (3.111)
\end{aligned}$$

iii).- Para la función de correlación de $\hat{\underline{T}}$ con $\hat{\alpha}_s$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\hat{T}_{ik}(x), \hat{\alpha}_{sk}(x', t)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int d\mathbf{x}' \langle \hat{T}_{ik}(x), \hat{\alpha}_{sk}(x', t) \rangle_{CG} = \\
&= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int d\mathbf{x}' \langle \Delta \hat{p}_i, \hat{\alpha}_{sk}(x', t) \rangle_{CG}. \quad (3.112)
\end{aligned}$$

donde se ha empleado las ecs. 2.83, 3.45, y el principio de Curie. Ahora, de las ecs. 3.89-3.90 y 3.65, 3.67 tenemos que la ec. 3.112 se escribe como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\mathcal{T}}_{ik}(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x', t)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \Delta \hat{p}'_i(x), \hat{\alpha}'_{s_k}(x', t) \rangle_{CG} = \\ \mathcal{L}'(\Delta \hat{p}'_i(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x', t)) &= \zeta_1(x) T(x) \delta_{ik} \end{aligned} \quad (3.113)$$

iv).- Para la función de autocorrelación de la parte no proyectada de la componente superfluida tenemos que,

$$\mathcal{L}_{Total}(\hat{\alpha}_{s_i}(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x)) = \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx' \langle \hat{\alpha}_{s_i}(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x', t) \rangle_{CG} \quad (3.114)$$

y sustituyendo la ec. 3.90 en ésta se obtiene que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Total}(\hat{\alpha}_{s_i}(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x)) &= \int_0^\infty dt e^{-\epsilon t} \int dx \langle \hat{\alpha}_{s_i}(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x', t) \rangle_{CG} \equiv \\ &\equiv \mathcal{L}'_{Total}(\hat{\alpha}'_{s_i}(x), \hat{\alpha}'_{s_k}(x', t)). \end{aligned} \quad (3.115)$$

A continuación reemplazamos la ec. 3.76 y las ecs. 3.78, 3.79 en la ec. 3.115 y obtenemos que,

$$\mathcal{L}_{Total}(\hat{\alpha}_{s_i}(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x', t)) = \mathcal{L}'(\hat{\alpha}'_{s_i}(x), \hat{\alpha}'_{s_k}(x', t)) + \mathcal{L}'(\hat{\alpha}'_{s_i}(x), \Delta \hat{p}'_k(x', t)) \quad (3.116)$$

Por otra parte, respecto a las funciones de correlación que aparecen en el lado derecho de esta ec. 3.116 tenemos que se cumple que,

$$\mathcal{L}(\hat{\alpha}_{s_i}(x), \Delta \hat{p}_k(x', t)) = \mathcal{L}'(\hat{\alpha}'_{s_i}(x), \Delta \hat{p}'_k(x', t)) = \zeta_4(x) T(x) \delta_{ik} \quad (3.117)$$

donde en la deducción de esta ecuación se han empleado las ecs. 3.76, 3.82 y 3.90.

En el caso de la función de autocorrelación de la función $\hat{\alpha}_{s_i}$ tenemos que,

$$\mathcal{L}(\hat{\alpha}_{s_i}(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x', t)) = \mathcal{L}'(\hat{\alpha}'_{s_i}(x), \hat{\alpha}'_{s_k}(x', t)) = \zeta_3(x) T(x) \delta_{ik} \quad (3.118)$$

donde análogamente, a la deducción de la ec. 3.117, se han empleado las ecs. 3.80, 3.81 y 3.90.

Finalmente, de las ecs. 3.117 y 3.118, la función de autocorrelación total para el superfluido de la ec. 3.116 se describe como,

$$\mathcal{L}_{Total}(\hat{\alpha}_{s_i}(x), \hat{\alpha}_{s_k}(x', t)) = \left(\zeta_3(x) + \zeta_4(x) \right) T(x) \delta_{ik}. \quad (3.119)$$

Antes de finalizar esta sección es pertinente hacer la siguiente observación. Los coeficientes de transporte locales definidos en la subsección 3.2.1, a partir de las funciones de correlación \mathcal{L}'_{mn} , se determinaron empleando una aproximación del operador $\hat{\rho}_{CG}$ mediante el operador $\hat{\rho}_{\vec{v}}$, el cual en una aproximación lineal en un marco de referencia en movimiento, es equivalente al operador $\hat{\rho}_{qe}$.

Por ejemplo, si estuviésemos tratando con un fluido simple, el hecho de realizar una transformación de un marco de referencia fijo a uno en movimiento eliminaría el término no lineal $j_s \hat{u}_s$ que aparece en la definición de la ec. 3.4; ver ref. [156], por lo tanto, no tendríamos la contribución del campo de velocidades \hat{u}_s . Sin embargo, al tratar a un superfluido tenemos dos campos de velocidades v_n y v_s . Por lo tanto, aunque realicemos dicha transformación del marco de referencia, aún aparece el término $(v_n - v_s) \hat{j}$, ver ec. 3.14. En efecto, el operador $\hat{\rho}_{\vec{v}}$ es no lineal en las velocidades y es por eso que en la

aproximación lineal de $\hat{\rho}_l$ mediante $\hat{\rho}_{qe}$, se desprecia el término $(v_n - v_s) \hat{j}'$ en la expresión para $\hat{\rho}_{qe}$. De no ser así, al hacer la aproximación lineal a partir de un operador $\hat{\rho}_l$ definido en un marco de referencia fijo, en dicha aproximación tendríamos que despreciar dos términos: $v_n \hat{j}$ y $j_s \hat{u}_s$. Por esta razón es más conveniente desde el punto de vista físico definir los coeficientes de transporte locales en un marco de referencia en movimiento, puesto que este marco se adecúa mejor a la aproximación lineal propuesta. Una vez definidas las corrientes, o flujos, y las funciones de correlación de las partes no proyectadas de estas corrientes mencionadas en los puntos ii y iii de la introducción de este Capítulo, podemos pasar a la siguiente sección donde se particularizará la ecuación de FP local de la ec. 2.91 para el Helio superfluido. Esto último con el propósito final de poder construir las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido a partir de las ecuaciones de Langevin asociadas a la ecuación de FP local.

3.3 Ecuación de Fokker Planck para el Helio Superfluido.

De acuerdo con la introducción de este Capítulo, una vez determinadas las corrientes locales y las funciones de correlación locales, necesitamos determinar los términos de arrastre $u_n(\mathbf{x})$ dados por la ec. 2.89 y los términos de difusión $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ dados por la ec. 2.90, objetivos indicados respectivamente por los puntos iv y v de dicha introducción.

Dada la selección de variables relevantes de grano grueso para el Helio superfluido, indicada en la sección 3.1 en un marco de referencia fijo concretamente, $\{\hat{a}_n(\mathbf{x})\} = \{\hat{\rho}(\mathbf{x}), E(\mathbf{x}), j(\mathbf{x}), v_s(\mathbf{x})\}$; su función de distribución $f(\rho, \hat{H}, \hat{j}, \hat{u}_s, t)$, los valores esperados de sus corrientes locales $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \{j_H(\mathbf{x}), \underline{T}(\mathbf{x}), I_s(\mathbf{x})\}$ y sus funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\hat{j}_m(\mathbf{x}), \hat{j}_n(\mathbf{x}))$ determinados en la subsección 3.2.2, estamos en condiciones de particularizar la ecuación de FP local dada en la ec. 2.91, para el Helio superfluido.

Para ello, considerando las variables relevantes arriba mencionadas y substituyendo los términos $u_n(\mathbf{x})$ y $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ determinados en el Apéndice E, en la ec. 2.91, la ecuación de FP local para el Helio superfluido se escribe como,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\rho, E, j, v_s, t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int d\mathbf{x} \left[\frac{\delta}{\delta\rho(\mathbf{x})} u_\rho(\mathbf{x}) + \frac{\delta}{\delta E(\mathbf{x})} u_E(\mathbf{x}) + \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x})} u_j(\mathbf{x}) + \frac{\delta}{\delta v_s(\mathbf{x})} u_{v_s}(\mathbf{x}) \right] f(\rho, E, j, v_s, t) - \\
& - \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \left[\frac{\delta}{\delta E(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{EE}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta E(\mathbf{x}')} + \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{jj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}')} + \frac{\delta}{\delta v_s(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{v_s v_s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta v_s(\mathbf{x}')} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\delta}{\delta E(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{Ej}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}')} + \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{jE}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta E(\mathbf{x}')} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{jv_s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta v_s(\mathbf{x}')} + \frac{\delta}{\delta v_s(\mathbf{x})} \mathcal{D}_{v_s j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta}{\delta j(\mathbf{x}')} \right] f(\rho, E, j, v_s, t) = 0, \quad (3.120)
\end{aligned}$$

donde, las $\frac{\delta}{\delta a_n}$ indican las derivadas funcionales respecto al valor esperado a_n , definidos por $\mathbf{a} = \{ \langle \hat{a}_n \rangle \} = \{ \rho, E, j, v_s \}$ a partir de la ec. 3.5 y más específicamente por las ecs. A.3-A.6, pero interpretadas como ecuaciones para variables de grano grueso. Los términos de arrastre se calculan a partir de los valores esperados de las corrientes y de las funciones de correlación mediante la ec. 2.89; y los términos de difusión se calculan vía las funciones de correlación y las funciones delta de grano grueso mediante la ec. 2.90. Los detalles de ambos cálculos y las expresiones particulares de las $u_n(\mathbf{x})$ y $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ pueden consultarse en el Apéndice E de esta tesis.

En cuanto a la interpretación física de la ecuación de FP local del superfluido de la ec. 3.120 es inmediata. Podemos pensar que esta es una generalización de la ecuación de Boltzmann en el sentido de que nos dice cómo evoluciona la función de distribución $f(\rho, E, j, v_s, t)$, pero como una funcional de \mathbf{x} y t a través de las variables de grano grueso, es decir es una ecuación local generalizada [40]. En lo que respecta a los términos de arrastre, la derivada funcional de dichos términos esta relacionada con la evolución temporal de las variables de grano grueso vía los gradientes de sus corrientes y con los gradientes de las fuerzas termodinámicas, donde la contribución de éstos últimos gradientes son proporcionales a los coeficientes de transporte locales a través de las funciones de correlación: (ver ec. 2.89). En otras palabras, los términos de arrastre tienen dos contribuciones, una

que nos dice cómo evoluciona el ‘fluido ideal’ dado por $\frac{\delta}{\delta a_n} \nabla \cdot I_n$ con respecto a la variable a_n y otra nos dice cómo ocurre la disipación dada por $\frac{\delta}{\delta a_n} \mathcal{L}_{mn} \nabla F_n$ respecto a la variable a_n . Además, un hecho interesante es que en estos términos de arrastre, dados por las ecs. (E.4)-(E.9), un mismo coeficiente de transporte está relacionado con varias fuerzas termodinámicas (gradientes de los multiplicadores de Lagrange). Por ejemplo, en la ec. (E.5) para u_E , el coeficiente de viscosidad cortante local $\eta(x)$ está relacionado no sólo con $\nabla T(x)$ sino también con el ∇v_n ; es decir, no sólo los gradientes en la componente normal de velocidad del superfluido pueden inducir mecanismos disipativos vía un coeficiente de viscosidad, sino también el mismo efecto puede inducirse por gradientes de temperatura, (efecto cruzado). Una situación análoga a $\eta(x)$ la tenemos en la ec. (E.7) para u_j en relación a ∇v_n y ∇T ; donde además podemos ver que el primer coeficiente de viscosidad está relacionado con $\nabla v_n, \nabla T$ y ∇j_s puesto que $\zeta_1(x) = \zeta_4(x)$ por cumplirse las relaciones de reciprocidad de Onsager. Es decir, los gradientes en el flujo local del superfluido pueden inducir el mismo comportamiento disipativo vía $\zeta_1(x)$ que los gradientes de v_n o de temperatura.

Por otra parte, las derivadas funcionales $\frac{\delta}{\delta a_n}$ de los términos de difusión \mathcal{D}_{mn} en la ec. 3.120, básicamente tienen dos componentes, una relacionada con el comportamiento disipativo del sistema, vía el término $\frac{\delta}{\delta a_n} \mathcal{L}_{mn}$ y, por lo tanto, también está relacionada con el comportamiento fluctuante del sistema y el otro término $\frac{\delta}{\delta a_n} f(a_n, t)$ el cual es una función de peso respecto a $f(a_n, t)$, que nos dice cuánto participa a_n en la variación del término $\frac{\delta}{\delta a_n} \mathcal{L}_{mn}$.

Sin embargo, lo más importante de la ec. 3.120 no se ha dicho y es que ésta es válida para las funciones de correlación (coeficientes de transporte) en una aproximación Markoviana, es decir en la reducción del problema de evolución temporal del operador estadístico de grano grueso $\hat{\rho}_{FP}$ a una ecuación de FP local. Esta aproximación se realizó con todo detalle en el Capítulo 2, (en particular ver las secciones 2.4 y 2.5). En dicha aproximación local y Markoviana de la ecuación de FP, el operador $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. 2.73 implica (y así se definió) que $\hat{f}(\mathbf{a}, t)$ tiene una expresión ‘microcanónica’ determinada por la ec. 2.74. Sin embargo, dada la aproximación realizada en la sección 3.1.1, al sustituir a $\hat{\rho}_{CG}$ por el operador $\hat{\rho}_{\bar{I}}$ de ec. 3.14 nada se ha dicho de como queda definido el operador $\hat{f}(\mathbf{a}, t)$ y por ende su valor esperado $f(\mathbf{a}, t)$. No obstante, de la ecuación de FP para el

Helio superfluido, de la ec. 3.120, obtendremos las ecuaciones de Langevin asociadas a dicha ecuación de FP, sin hacer uso explícito de que $f(\mathbf{a}, t)$ sea una función Gaussiana. Ecuaciones de Langevin que obtendremos a continuación en la próxima sección.

3.4 Ecuaciones no lineales de Langevin para el Helio Superfluido.

El objetivo de esta sección es deducir las ecuaciones no lineales de la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido, que son básicamente las ecuaciones no lineales de Langevin para dicho sistema. En efecto, la afirmación de que ambos conjuntos de ecuaciones son equivalentes, se infiere del hecho de que ambas ecuaciones son ecuaciones de evolución donde aparece dos componentes determinísticas (una disipativa y otra no disipativa), y otra componente aleatoria asociada con el comportamiento disipativo del sistema, [21, 74].

Básicamente el método de construcción de las ecuaciones de no lineales de Langevin, es determinar cuales son las ecuaciones no lineales de Langevin asociadas a la ecuaciones de FP deducidas en las dos secciones anteriores. Sin embargo, el principal inconveniente señalado en la literatura [119, 109] para establecer dicha relación entre las ecuaciones de Langevin y de FP, *es que dada una ecuación de FP no lineal no existe una correspondencia unívoca con las ecuaciones de no lineales de Langevin*, es decir, puede haber varios sistemas de ecuaciones no lineales de Langevin que describan diferentes situaciones físicas con la misma ecuación no lineal de FP. En este sentido se dice que dichas ecuaciones de Langevin son ecuaciones estocásticas equivalentes, [119, 109]. Nosotros seguiremos un método inverso al de Morozov, esbozado en la sec 1.2 del Capítulo 1. Sin embargo, tenemos entendido que existen métodos relativamente más claros y sencillos que el empleado en esta tesis, como el propuesto por Stratonovich en la Sec. 8 del Capitulo 2 de la ref. [119] y el de Ryter y Dekker [109, 107, 108].

Concretamente, la sección 1.2 del Capítulo 1 se estudia la forma de construir las ecuaciones no lineales de Langevin para un fluido simple [88], tal que se supera la inconsistencia señalada por Bedeaux y Mazur en la ref. [10], para el caso de fluctuaciones no lineales alrededor de un estado de equilibrio. Dicha inconsistencia surge al emplear la

teoría fenomenológica de Landau-Lifshitz para la construcción de los flujos aleatorios [74], en el caso no lineal alrededor de un estado de equilibrio y conduce a obtener coeficientes de Onsager locales. Esta situación es contradictoria, ya que los coeficientes de transporte para este caso de equilibrio no deben depender de la coordenada espacial. Por otro lado, el método de Morozov, también pretende superar la divergencia que se origina al tratar las fluctuaciones para un sistema fuera de equilibrio. Esta última también surge al introducir los flujos aleatorios como variables Gaussianas de acuerdo con la teoría fenomenológica de Landau-Lifshitz, que dan origen a un término aleatorio no lineal de tipo multiplicativo en las ecuaciones de Langevin linearizadas, específicamente en la ecuación asociada al flujo de la energía ⁵. En opinión de Fox [33] dichos términos multiplicativos asociados con el flujo aleatorio del tensor de los esfuerzos conducen a divergencias, y por lo tanto no permiten que la solución de dicha ecuación tienda al equilibrio para $t \rightarrow +\infty$. De hecho, el método de Morozov corrige ambas inconsistencias, por un lado garantiza que la solución de la ecuación de FP local sea consistente con la solución de equilibrio y por el otro lado, garantiza que los términos fluctuantes de las ecuaciones no lineales de Langevin sean construídos de tal manera que conduzcan a coeficientes de Onsager locales de una forma natural (para el caso de un sistema fuera de equilibrio), al suponer que las funciones de correlación de las partes determinísticas de los flujos sean iguales a las funciones de correlación de los flujos aleatorios, lo cual es una condición necesaria para obtener la solución de equilibrio de la ecuación de FP, [88, 156].

Concretamente, los pasos que seguiremos para la construcción de las ecuaciones no lineales de la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido de acuerdo con el método de Morozov son los siguientes:

Primero, de la ecuación de FP local en el espacio de las coordenadas para el Helio superfluido (ec. 3.120), se construye la ecuación de FP local en el espacio de Fourier dada por la ec. (F.66), de la sección F.1 del Apéndice F. Esta ecuación es análoga a la ecuación 1.29 para un fluido simple y se escribe para el caso del superfluido como,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\rho_{\mathbf{k}}, E_{\mathbf{k}}, j_{\mathbf{k}}, v_{s_{\mathbf{k}}}, t) +$$

⁵El término es de la forma $\tilde{s}_{\alpha\beta}(x)D_{\alpha\beta}(x)$, donde $\tilde{s}_{\alpha\beta}(x)$ es el flujo aleatorio asociado al tensor de los esfuerzos y $D_{\alpha\beta}(x)$ es la divergencia de la velocidad

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\delta}{\delta \rho_{\mathbf{k}}(t)} u_{\rho_{\mathbf{k}}}(t) + \frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}}} u_{E_{\mathbf{k}}}(t) + \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}}} u_{j_{\mathbf{k}}}(t) + \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}}}} u_{v_{s_{\mathbf{k}}}}(t) \right] f(\rho_{\mathbf{k}}, E_{\mathbf{k}}, j_{\mathbf{k}}, v_{s_{\mathbf{k}}}, t) - \\
& - \left[\frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}}(t) \frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}'}} + \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{j_{\mathbf{k}} j_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}'}} + \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}}}} \mathcal{D}_{v_{s_{\mathbf{k}}} v_{s_{\mathbf{k}'}}} \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}'}}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{E_{\mathbf{k}} j_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}'}} + \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{j_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}'}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{j_{\mathbf{k}} v_{s_{\mathbf{k}'}}} \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}'}}} + \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}}}} \mathcal{D}_{v_{s_{\mathbf{k}}} j_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}'}} \right] f(\rho, E, j, v_s, t) = 0, \quad (3.121)
\end{aligned}$$

donde los términos que aparecen en ella están definidos y pueden ser consultados en la sección F.1 del Apéndice F.

Segundo, se construyen los flujos aleatorios $J_m^R(\mathbf{x})$ de manera análoga a las ecs. 1.5-1.6 como.

$$J_q^R(\mathbf{x}) = \mathcal{G}(\mathbf{x}) \tilde{\xi}_q(\mathbf{x}), \quad (3.122)$$

para el flujo de calor,

$$\underline{\Pi}^R(\mathbf{x}) = \mathcal{G}'(\mathbf{x}) \tilde{\xi}'(\mathbf{x}) + \mathcal{G}_2(\mathbf{x}) \tilde{\xi}_2(\mathbf{x}) \quad (3.123)$$

para el tensor de los esfuerzos y

$$H_3^R(\mathbf{x}) = \mathcal{G}_3(\mathbf{x}) \tilde{\xi}_3(\mathbf{x}) \quad (3.124)$$

para el flujo aleatorio asociado a la componente superfluida. Las propiedades estadísticas de los términos aleatorios se suponen Gaussianas en analogía con las ecs. 1.7-1.14 y por lo tanto se expresan en forma convencional,

$$\langle \tilde{\xi}_q(\mathbf{x}, t) \rangle_{CG} = \langle \tilde{\xi}_{q\alpha}(x, t) \rangle_{CG} = 0, \forall \alpha = x, y, z \quad (3.125)$$

$$\langle \underline{\tilde{\xi}}(\mathbf{x}, t) \rangle_{CG} = \langle \tilde{\xi}_{\alpha\beta}(x, t) \rangle_{CG} = 0, \forall \alpha, \beta = x, y, z \quad (3.126)$$

donde,

$$\tilde{\xi}_{\alpha 3}(x, t) = \tilde{\xi}'_{\alpha 3}(x, t) + \tilde{\xi}_2(x, t), \forall \alpha, \beta = x, y, z. \quad (3.127)$$

Aquí $\tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x, t)$ es un tensor fluctuante sin traza y $\tilde{\xi}_\alpha(x, t)$ es un vector fluctuante; finalmente, para las magnitudes escalares fluctuantes se tiene que,

$$\langle \tilde{\xi}_i(x, t) \rangle_{CG} = 0, i = 2, 3, \quad (3.128)$$

donde las ecs. 3.125-3.128 son para los valores esperados de los términos fluctuantes, y sus varianzas cumplen con las siguientes propiedades,

$$\langle \tilde{\xi}_{q\alpha}(x_1, t_1), \tilde{\xi}_{q\beta}(x_2, t_2) \rangle_{CG} = \delta_{\alpha\beta} \delta(t_1 - t_2) \delta(x_1 - x_2), \quad (3.129)$$

$$\langle \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x_1, t_1), \tilde{\xi}'_{\mu\nu}(x_2, t_2) \rangle_{CG} = g_{\alpha\beta\mu\nu} \delta(t_1 - t_2) \delta(x_1 - x_2) \forall \alpha, \beta, \mu, \nu = x, y, z, \quad (3.130)$$

con $g_{\alpha,\beta\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}$,

$$\langle \tilde{\xi}_{i_\alpha}(x_1, t_1), \tilde{\xi}_{k_\beta}(x_2, t_2) \rangle_{CG} = \delta_{\alpha\beta} \delta(t_1 - t_2) \delta(x_1 - x_2), \alpha, \beta = x, y, z; i, k = 2, 3, \quad (3.131)$$

$$\langle \tilde{\xi}(\mathbf{x}, t_1), \tilde{\xi}_q(\mathbf{x}, t_2) \rangle_{CG} = \langle \tilde{\xi}_q(\mathbf{x}, t_1), \tilde{\xi}(\mathbf{x}, t_2) \rangle_{CG} = 0, \quad (3.132)$$

$$\langle \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x_1, t_1), \tilde{\xi}_i(x_2, t_2) \rangle_{CG} = \langle \tilde{\xi}_i(x_1, t_1), \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x_2, t_2) \rangle_{CG} = 0, \quad \forall \alpha, \beta = x, y, z; i = 2, 3. \quad (3.133)$$

$$\langle \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x, t_1), \tilde{\xi}_\alpha(x, t_2) \rangle_{CG} = \langle \tilde{\xi}_\alpha(x, t_1), \tilde{\xi}'_{\alpha\beta}(x, t_2) \rangle_{CG} = 0, \quad \forall \alpha, \beta = x, y, z. \quad (3.134)$$

En cuanto a las funciones locales $\mathcal{G}_m(\mathbf{x})$ que aparecen en las ecs. 3.122-3.124, éstas se determinan de la condición dada por la ec. 1.37 y de las funciones de correlación $\mathcal{L}_{mn}(\hat{J}_m, \hat{J}_n)$ dadas por las ecs. 3.104-3.119. Los detalles de los cálculos pueden verse en la sección F.2 del Apéndice F, cuyos resultados son:

Para el flujo de calor se tiene que,

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = (\kappa(\mathbf{x})T^2(\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}}. \quad (3.135)$$

donde $T(\mathbf{x})$ es la temperatura local y $\kappa(\mathbf{x})$ es el coeficiente de conductividad térmica local.

Para la componente aleatoria del tensor sin traza asociado al tensor de los esfuerzos tenemos que,

$$\mathcal{G}'(\mathbf{x}) = (\eta(\mathbf{x})T(\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}}. \quad (3.136)$$

donde $\eta(\mathbf{x})$ es el coeficiente de viscosidad cortante local.

Para la componente aleatoria de la presión y el superfluido, se tiene que,

$$(\mathcal{G}_2(x) * \mathcal{G}_3(x)) = \zeta_1(x)T(x) \quad (3.137)$$

donde $\zeta_1(\mathbf{x})$ es el primero de los segundos coeficientes de viscosidad volumetrica local del superfluido.

Para la componente fluctuante de la presión,

$$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}) = (\zeta_2(\mathbf{x})T(\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}}. \quad (3.138)$$

Para la componente fluctuante de la componente superfluida $H_3^R(x)$,

$$\mathcal{G}_3(\mathbf{x}) = (\zeta_3(\mathbf{x})T(\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}}. \quad (3.139)$$

y para la componente aleatoria de el superfluido con la presión,

$$(\mathcal{G}_3(x) * \mathcal{G}_2(x)) = \zeta_4 T(x) \quad (3.140)$$

donde $\zeta_2(\mathbf{x}), \zeta_3(\mathbf{x})$ y $\zeta_4(\mathbf{x})$ son el segundo, tercer y cuarto de los segundos coeficientes de viscosidad local para el Helio superfluido.

Tercero, se construyen las ecuaciones de no lineales Langevin en el espacio de Fourier para el Helio superfluido, con la misma estructura de las ecs. 1.15. Es decir, determinadas las funciones $\mathcal{G}_n(x)$ que definen los flujos aleatorios $J_n^R(x)$, las funciones $\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(x)$ y las funciones $u_n(x)$, se determinan las funciones $M_{mn}(t)\tilde{\xi}_n(t)$ y las $u_n(t)$ que aparecen en la ec. 1.15. De tal forma que las ecuaciones no lineales de Langevin para cada variable relevante que caracteriza al Helio superfluido son escritas como,

$$\dot{\rho}_{\mathbf{k}}(t) = u_{\rho_{\mathbf{k}}}(t) \quad (3.141)$$

$$\dot{E}_{\mathbf{k}}(t) = u_{E_{\mathbf{k}}}(t) + ik_{\alpha} \left[(v_{s_{\beta}} \mathcal{G}')_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{\alpha\beta\mathbf{k}}(t) + (v_{s_{\beta}} \mathcal{G}_2)_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{2\alpha\beta\mathbf{k}}(t) + \mathcal{G}_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{q\beta\mathbf{k}}(t) \right] \quad (3.142)$$

$$\dot{j}_{\mathbf{k}}(t) = u_{j_{\mathbf{k}}}(t) + ik_{\alpha} \left[(\mathcal{G}')_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{\alpha\beta\mathbf{k}}(t) - (\mathcal{G}_2)_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{2\alpha\beta\mathbf{k}}(t) \right] \quad (3.143)$$

$$\dot{v}_{s_{\mathbf{k}}}(t) = u_{v_{s_{\mathbf{k}}}}(t) + ik_{\alpha} (\mathcal{G})_{3\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{3\alpha\beta\mathbf{k}}(t) \quad (3.144)$$

donde el significado de cada uno de los términos que aparecen en estas ecs. 3.141-3.144 y el procedimiento de construcción en detalle, de dichas ecuaciones esta dado en la sección F.3 del Apéndice F.

Finalmente, en la sección F.4 del Apéndice F, se determinan las ecuaciones no lineales de Langevin en el espacio de configuración para el Helio superfluido. Dichas ecuaciones son las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante no lineal del Helio superfluido, las cuales se escriben como,

$$\frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} = u_\rho(\mathbf{x}), \quad (3.145)$$

$$\frac{dE(\mathbf{x})}{dt} = u_E(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \left[J_q^R(\mathbf{x}) + \underline{J}_\Pi^R(\mathbf{x}) \cdot v_s(\mathbf{x}) \right], \quad (3.146)$$

$$\frac{dj(\mathbf{x})}{dt} = u_j(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \underline{J}_\Pi^R(\mathbf{x})(\mathbf{x}), \quad (3.147)$$

$$\frac{dv_s}{dt} = u_{v_s}(\mathbf{x}) - \nabla H_3^R(\mathbf{x}), \quad (3.148)$$

donde las $\{u_n(\mathbf{x})\} = \{u_\rho(\mathbf{x}), u_E(\mathbf{x}), u_E(\mathbf{x}), u_{v_s}(\mathbf{x})\}$ están dadas por las ecs. (E.2)-(E.9) del Apéndice E. En particular las no linealidades de las ecuaciones son puestas de manifiesto en dichos términos $u_n(\mathbf{x})$ y es claro que los flujos aleatorios son los términos $J_n^R(\mathbf{x})$ dados por las ecs. 3.122-3.124.

Logrado el objetivo de esta tesis, a continuación se hará una discusión de los resultados y se presentarán las conclusiones de la tesis.

Capítulo 4

Análisis de los Resultados y Conclusiones.

4.1 Aspectos Generales.

El primer problema que uno se enfrenta al emplear el método de Maxent es determinar cuáles son las variables relevantes para la descripción completa de los aspectos de interés del sistema bajo estudio. De hecho éste es un problema que se presenta también en la Termodinámica Irreversible Extendida. Desafortunadamente no existen metodologías certeras que indiquen cómo escoger dicho conjunto completo de variables relevantes. Inclusive un mismo problema puede ser susceptible de presentar varias facetas de estudio, por tal motivo el conjunto de variables relevantes dependerá de los aspectos o facetas a estudiar.

No obstante mientras mayor conocimiento se posea de la naturaleza del sistema, más fácil será modelarlo mediante Maxent. De hecho, una principales las objeciones contra Maxent es que sólo es una herramienta matemática que pasa por alto los detalles de la física inherentes a cinética y dinámica de los problemas abordados, [75]. En efecto, Maxent es un método que necesita complementarse con información física obtenida por otros métodos para realizar una adecuada selección de las restricciones del problema de interés.

No obstante, en respuesta a esta objeción se puede señalar que si bien es válida, Maxent nos permite unificar de manera directa y simple los diferentes niveles de descripción del sistema a que podemos aspirar: micro, meso y macroscópico . Como por ejemplo en el

estudio de gases densos [159, 161] y fluidos simples [154, 157, 160]. Estudio unificado que pese a que es logrado por otros métodos o técnicas, éstos no compiten en transparencia y simplicidad con Maxent.

El otro inconveniente fundamental de Maxent, relacionado con el primer problema, consiste en la determinación de los multiplicadores de Lagrange que surgen en el proceso de variación y maximización de la funcional de entropía. Como es conocido, en el caso de sistemas que se encuentran en equilibrio o en equilibrio local esta situación no representa ningún problema [154], pero sí lo es para el caso de sistemas que se encuentran fuera de esos estados.

Reiterando, para salvar este inconveniente es necesario auxiliarse con resultados obtenidos con otras técnicas como: la teoría cinética, operadores de proyección, teoría de campo, teoría de perturbaciones etc; junto con algoritmos o hipótesis *ad hoc* como son: el algoritmo de Gibbs-Einstein, la hipótesis de fases aleatorias repetidas, etc. que nos permitan realizar aproximaciones heurísticas de dichos multiplicadores que aparecen en el operador estadístico asociado al problema específico que se intenta estudiar.

En el caso particular de la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido tenemos el operador estadístico: $\hat{\rho}_{EP} = \hat{\rho}_{CG} + \Delta\hat{\rho}'_I$. Los multiplicadores de Lagrange que aparecen en el operador estadístico de grano grueso $\hat{\rho}_{CG}$ de la ec. (2.76), se aproximan mediante el operador estadístico de equilibrio local $\hat{\rho}_l$ ccs. (3.4), (3.14), (3.30); y la parte disipativa $\Delta\hat{\rho}'_I$, se determina con auxilio de un operador estadístico de cuasi-equilibrio local o de referencia $\hat{\rho}_{qe}$, ec.(3.31). Aproximaciones que serán discutidas en detalle más adelante.

Sintetizando, el método de Maxent tiene la capacidad resumir la esencia del comportamiento de un sistema a partir de una elección adecuada de las restricciones impuestas para la descripción del sistema. En el caso de sistemas en el estado de equilibrio o de equilibrio local, el cálculo de los multiplicadores de Lagrange es directo. Pero fuera de estos estados es necesario el conocimiento exhaustivo del problema, para poder realizar aproximaciones heurísticas que nos permitan estimar dichos multiplicadores.

Por otro lado, otra objeción de carácter fundamental a los resultados presentados en esta tesis, de acuerdo con la línea de pensamiento de Van Kampen, es que los coeficientes

de transporte locales se obtienen a partir de una generalización de la Teoría de la Respuesta lineal de Kubo (TRL). Concretamente, Van Kampen objeta que la linealidad del movimiento microscópico es completamente diferente de la linealidad macroscópica; que en todo caso esta última no es consecuencia de la primera sino de un efecto estadístico mucho más sutil. Más aún, argumenta que la linealidad microscópica no existe y que ésta es incompatible con las ideas básicas sobre las cuales se fundamenta la mecánica estadística de los procesos irreversibles (la aleatorización de las variables microscópicas), [133].

En relación a las objeciones de Van Kampen, Van Vliet en las referencias [137, 138], muestra cómo se introduce la aleatorización de Van Kampen en la TRL de Kubo, y bajo qué condiciones la linealización trabaja en todas las escalas temporales (micro, meso y macro) en la TRL. Así esclarece cómo es la disipación del sistema mediante una interacción débil, donde esta última es una condición suficiente con la cual hay que complementar dicha TRL para que sea correcta. Condición que en el caso particular del Helio superfluido se cumple vía el operador de Hamilton de la ec. (A.2).

Resumiendo, ambos conjuntos de objeciones tiene en común el señalar que Maxent y las Teorías de Respuesta Lineal están pasando por alto la dinámica microscópica de los átomos o moléculas involucrados. Por un lado, queda claro que Maxent nos conducirá a modelar correctamente a un sistema físico siempre y cuando se comprenda cabalmente el papel jugado por las restricciones escogidas desde el punto de vista microscópico, lo cual es un problema bastante fuerte, pero al menos abordable con la ayuda de la información física suministrada por otras técnicas. Por otro lado, en esta tesis más que emplear una generalización de la teoría de la respuesta lineal, hemos empleado una generalización de la relación fluctuación-disipación de Green-Kubo lo cual será discutido a continuación.

Concretamente, lo más importante de los aspectos generales de la metodología seguida para construir la hidrodinámica fluctuante a partir de una ecuación de FP no lineal local, no se ha dicho. En otras palabras, el método seguido en esta tesis es del mismo tipo que el empleado en los trabajos de Green y Van Kampen [37, 47, 131, 132, 134]. Es decir, se han construido las variables de grano grueso y una ecuación de FP generalizada, y de la hipótesis de que las variables fluctuantes siguen un proceso lento y por lo tanto markoviano se dedujo una ecuación de FP no lineal local (Secc. 2.5 del

Capítulo 2). En el Capítulo 3, se particularizó dicha ecuación de FP para el superfluido asumiendo que las fluctuaciones de las variables de grano grueso son pequeñas comportamiento garantizado en el caso del ^4He superfluido de acuerdo con la ref. [121]. Esta última situación permite evaluar el operador $\hat{\rho}_{CG}$ como uno del tipo de equilibrio local $\hat{\rho}_l$ que se reduce a uno de cuasi equilibrio $\hat{\rho}_{qe}$ de acuerdo con la referencia [15]. Operadores con los cuales se determinan los términos de difusión y arrastre de la ecuación de FP no lineal local para Helio superfluido. Además de los coeficientes de transporte locales mediante el uso de una generalización de la relación de Fluctuación-Disipación de Green-Kubo, que se deduce sin hacer uso explícito de la hipótesis de regresión de fluctuaciones de Onsager, [37].

Finalmente, de acuerdo con el método inverso al de Morozov se construyen las ecuaciones no lineales de Langevin asociadas con la ecuación de FP no lineal local del Helio superfluido, con la hipótesis de que *las funciones de correlación de las flujos aleatorios son iguales a las de partes sus deterministas*, (hipótesis que se requiere para que exista la solución de equilibrio de la ec. de FP local), donde los flujos aleatorios de las ecs. de Langevin son Gaussianos y de tipo multiplicativo. Sin embargo, se tiene como punto de partida la ecuación de FP no lineal local del Helio superfluido, deducida microscópicamente, de cuyos términos de arrastre y difusión se construyen las ecuaciones no lineales de la hidrodinámica fluctuante para el Helio superfluido. Dedución en la que no aplican las objeciones de Van Kampen, con respecto a que es cuestionable e incorrecto construir heurísticamente ecuaciones no lineales de Langevin, simplemente agregando a las ecuaciones determinísticas no lineales las partes fluctuantes generadas por ruido interno. (ver sec. 9 del Capítulo VII en la ref. [136]).

Por otra parte, es bien sabido que la relación entre una ecuación de FP no lineal y su correspondiente ecuación o sistema de ecuaciones no lineales de Langevin, no es unívoca [136, 119, 109]. Sin embargo, existen métodos reportados en la literatura como el de Stratonovich [119], o el de Ryter y Dekker [107, 108], que al parecer son más sencillos y físicamente más claros que el empleado en ésta tesis, pero que se desconocían al momento de concluirla. No obstante, es importante aplicar los métodos citados a las ecuaciones de FP de las ecs. 3.120 y 3.121 para obtener los sistemas correspondientes de ecuaciones no lineales de Langevin (en el espacio de configuración y de Fourier respectivamente), y

poder comparalos con los obtenidos en esta tesis mediante el método de Morozov.

Señalados estos aspectos fundamentales, pasemos a los particulares que se presentan en el estudio del Helio superfluido mediante Maxent.

4.2 Aspectos Particulares.

A continuación se presentará una discusión por Capítulo, de las aproximaciones realizadas, los resultados obtenidos y su comparación con los que han aparecido en la literatura:

Capítulo 2.

i.- En éste Capítulo la principal objeción radica en el empleo de la función de Wigner para calcular $\hat{\rho}_{CG}$, ecs. (2.10-2.12), en el desarrollo de la teoría propuesta. De hecho la función de Wigner no es una función de distribución de probabilidad, ya que puede asumir valores negativos. Dada esta situación hay que manejar con mucho cuidado los valores esperados calculados con dicha función de Wigner. [146].

En particular la función de Wigner se emplea para introducir y definir las variables fluctuantes de grano grueso a partir de los operadores asociados a las variables microscópicas, operadores que en general no conmutan. La función de Wigner para las variables de grano grueso del caso cuántico se construye con auxilio de la función de distribución obtenida vía Maxent para las variables de grano grueso del caso clásico ρ_{CG} .

Dada esta objeción sería deseable realizar el proceso de granulación por otro método y evitar el uso de la función de Wigner. Por ejemplo, dejar la teoría sólo en términos de los operadores de proyección [117]. Sin embargo, el inconveniente de la teoría propuesta por Sewell en ésta referencia, es que asume que la base de operadores de grano grueso conmutan no dejando del todo claro cómo se construyen las variables de grano grueso a partir de los operadores asociados a las variables microscópicas que no conmutan. Aunque Sewell hace una discusión interesante respecto a la conmutatividad de las variables de grano grueso y la incertidumbre asociada a sus valores numéricos.

Por otro lado, sería importante analizar las conexiones y consecuencias respecto a la preparación inicial del sistema en relación a los resultados de Zwanzig dados en la ref.

[162], los de Mazur de la ref. [78], los de Sewell en [117], los de Brey *et al* dados en [15] y los Del Rio y García-Colín dados en [25]. En otras palabras, la hipótesis de regresión de las fluctuaciones de Onsager puede ser mostrada mediante el lema de Mazur, que asume inicialmente al sistema en un estado de equilibrio, por otro lado Zwanzig en [162] muestra cómo se pueden obtener ecuaciones no lineales y no locales asumiendo una preparación inicial del sistema en equilibrio, o en la ref. [163] para un estado inicial de equilibrio local. Posteriormente se han mostrado generalizaciones de la hipótesis de la regresión de fluctuaciones de Onsager donde se considera la preparación inicial del sistema en estados de no equilibrio y más aún en estados de preparación inicial arbitrarios que incluyen fluctuaciones [38]. Por lo tanto podría preguntarse acerca de la conexión entre el trabajo de Brey [15] y el de García-Colín *et al* [38] en el caso clásico y su generalización al caso cuántico.

El punto medular del estudio propuesto en el párrafo anterior, tiene por objeto responder a la siguientes preguntas. Si uno desea estudiar el comportamiento de un sistema fuera de equilibrio, pero no muy alejado de éste, ¿Qué se puede decir acerca de la preparación inicial del sistema?. Para el caso clásico [162], [78] y para el caso cuántico [117] y [23], nos responden que el sistema se puede considerar inicialmente en equilibrio. Además Del Rio en [25] prueba rigurosamente que hay una equivalencia entre el formalismo de operadores de proyección, Maxent y la hipótesis de fases aleatorias repetidas.

Ahora, si el sistema fuera de equilibrio no está en un entorno del equilibrio, sino 'más lejos'. ¿Cómo será la preparación inicial del sistema?. Para el caso clásico Brey *et al* en la ref. [15] nos dicen que se puede considerar la preparación inicial en un estado de equilibrio local y que éste estado es equivalente a considerar un estado de referencia que es capaz de describir las fluctuaciones del sistema. Además, García-Colí y Rodríguez en [38] nos dicen que inicialmente el estado de preparación puede ser de no equilibrio con fluctuaciones. En el caso cuántico podríamos pensar en una generalización del lema de Mazur, donde el estado inicial sea cualquiera con fluctuaciones, ¿Cuáles serían las consecuencias de esta suposición?, ¿El estado inicial del sistema nos puede dar una indicación de 'qué tan lejos' se halla el sistema del equilibrio?. Puesto que los gradientes de las fuerzas termodinámicas no son un parámetro del todo satisfactorio para caracterizar a los sistemas fuera de equilibrio, [39], queda abierta a la investigación la búsqueda de

criterios para caracterizar y cuantificar a los sistemas fuera de equilibrio.

También es conveniente profundizar en el estudio de las variables de grano grueso para el Helio superfluido en el contexto de los resultados reportados en [25]. Este estudio no es del todo directo y evidente, ya que en la región de temperatura considerada $T < T_\lambda$, el sistema presenta la condensación de Bose-Einstien que implica valores macroscópicos de la función de onda.

En otras palabras los operadores asociados a las variables dinámicas no conmutan y tampoco las variables de grano grueso. Por ejemplo, cuando se usa la hipótesis de fases aleatorias repetidas de Van Kampen, los operadores asociados a las variables de grano grueso se hace que conmuten. Lo que implica que los elementos no diagonales de los operadores de grano grueso sean cero cada determinado tiempo τ . Por lo tanto es válido preguntarse: ¿Cómo construir una base de variables de grano grueso para el Helio superfluido, cuya función de onda toma valores macroscópicos?, ¿Deben considerarse estados coherentes desde un inicio?, de acuerdo con lo planteado por Cummins en la ref. [20]. En todo caso, la construcción y la dinámica de las variables de grano grueso para el Helio superfluido más que abordarse con una ecuación del tipo Nordheim-Uehling-Uhlenbeck, o con una del tipo Gross-Petiauskii con fluctuaciones, se debe tratar con una ecuación maestra cinética cuántica del tipo Gardiner-Zoller, [42].

ii.- Relacionado con éste problema es el resultado obtenido en las secciones 2.1 y 2.2, donde de la no conmutatividad de los operadores asociados a las variables microscópicas y de las de grano grueso conduce a la construcción de un operador estadístico de grano grueso, ecs. (2.30) y (2.32), con la presencia de partes regulares y singulares.

Este operador $\hat{\rho}_{CG}$ implica una ecuación de FPG con efectos no locales debido a la no conmutatividad de las variables \hat{a} . Por lo tanto surge la pregunta: ¿Cómo sería la ecuación de FP para el Helio superfluido construyendola a partir una base de variables de grano grueso que conmutan?. En [8] ha sido dada una respuesta parcial, pero no es claro como deben particularizar estos resultados para el Helio en el contexto de las observaciones hechas en el inciso i.

iii.- Por otra parte, la aproximación local de la ecuación generalizada de FP de la ec. (2.56), se logra bajo dos hipótesis: que el proceso es lento y Markoviano.

Es decir, que existe una longitud de correlación $R > R_0$, tal que cuando: $|R| \equiv |a - a'| \rightarrow +\infty$, entonces $f(a, a')$ y $W_{-1}(a, a')$ varían lentamente en comparación con las partes regulares $u(a, a')$ y $r(a, a')$.

En otras palabras, que existe un tiempo y una longitud de correlación: τ, R_0 tales que,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ |a - a'| > R_0}} \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t) \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

y

$$\lim_{\substack{t < \tau \\ |a - a'| < R_0}} \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{a}, t) \quad (4.2)$$

donde la relación entre τ y R_0 está dada mediante el vector de onda k_0 : $k_0 R_0 \ll 1$, que es precisamente la condición que determina el tamaño de la celda para construir la variables de grano grueso.

Garantizadas estas condiciones se puede desarrollar la matriz $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$, en un desarrollo de Kramers-Moyal en potencias de las a_n , ecs. (2.68)-(2.71), de donde sólo se toma el termino de orden cero ¹. Con lo cual se tiene la ecuación de FP local de la ec. (2.64), ecuación local de FP en el espacio de Fourier.

Por otra parte, en las ecuaciones de FP no lineales locales de las ecs. (2.84)-(2.85) correspondientes a la inversa de la transformada de Fourier de la ec. (2.64), debe tenerse cuidado de ser consistentes con el orden de aproximación hasta el segundo orden de los gradientes de los flujos en la matriz D_{mn} ; lo que claramente está indicado en las ecs. (2.81)-(2.83).

De hecho se pueden tomar términos de mayor orden en el desarrollo de la matriz $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t)$. Sin embargo, habría que analizar, por una lado, si las funciones de correlación

¹Esta aproximación corresponde a una aproximación de orden dos en los gradientes de las partes no proyectadas de los flujos.

pueden evaluarse con el operador estadístico de referencia [15] bajo la suposición de que *las fluctuaciones del sistema son pequeñas*; y por la otra parte, considerar en las ecuaciones hidrodinámicas la aparición de términos del tipo Burnett, [156]. En otras palabras, la transformación de las ecuaciones del espacio de configuración y el de Fourier para nuestro caso sólo debe realizarse hasta segundo orden en los gradientes.

Capítulo 3.

iv.- En este Capítulo se han realizado dos aproximaciones importantes:

-Primera: El operador estadístico de grano grueso para la parte proyectada $\hat{\rho}_{CG}$ se ha evaluado mediante un operador estadístico de cuasi-equilibrio local $\hat{\rho}_l$, donde se ha supuesto que *las fluctuaciones son pequeñas*. Esta aproximación nos permite evaluar los multiplicadores indeterminados de Lagrange a partir las variables termodinámicas conjugadas a las seleccionadas para maximizar a la funcional de entropía. Por otro lado, también permite determinar las corrientes o flujos de las variables de grano grueso aprovechando los resultados del Apéndice A.

-Segunda: El cálculo de las funciones de correlación de las ecs. (3.40)-(3.41) debe realizarse estrictamente con el operador $\hat{\rho}_l$. Sin embargo, éstas en lugar de evaluarse mediante un operador estadístico de cuasi equilibrio local con sus fluctuaciones 'pequeñas', se han calculado mediante un operador estadístico de referencia $\hat{\rho}_{qe}$ el cual también es un operador de cuasi equilibrio, [15].

El operador $\hat{\rho}_{qe}$ tiene una estructura parecida a la del operador equilibrio $\hat{\rho}_0$, pero con las variables termodinámicas conjugadas como funciones explícitas de la coordenada espacial. Esta es también una de las diferencias con respecto de el de equilibrio local $\hat{\rho}_l$ de la ec. (A.12), donde éste último no es función explícita de la coordenada espacial ². Otra diferencia es que $\hat{\rho}_l$ depende explícitamente de \vec{y} cuestión que no sucede en el operador $\hat{\rho}_{qe}$, debido a que $\hat{\rho}_{qe}$ corresponde a una aproximación lineal, de acuerdo con [15]. Por otra parte, Brey *et al* mostraron la equivalencia de los operadores $\hat{\rho}_l$ y $\hat{\rho}_{qe}$, ver ecs. (23), (34) y (40) en la ref. [15]

²Ya que esta dependencia desaparece al realizar la integración sobre esta coordenada, ver ec. (A.12) y compararla con (3.31).

v.- En lo que respecta a las funciones de correlación es pertinente observar lo siguiente:

Sistema de referencia en movimiento: para éste caso las funciones de correlación corresponden a los coeficientes de Onsager, es decir, al producto de los coeficientes de transporte locales por la temperatura local o su cuadrado, dados por las ecs. (3.55), (3.70), (3.71), (3.81) y (3.82).

Sistema de referencia fijo: aquí las partes no proyectadas de los flujos involucran términos adicionales, debido a la transformación de la parte no proyectada de los flujos al marco de referencia fijo ecs. (3.88)-(3.90), de tal forma que dichas funciones de correlación implican no linealidades que no son evidentes en el caso del sistema de referencia en movimiento (ver ecs. (3.104),(3.109) y (3.111).

Ecuaciones de Langevin. Por otra parte, una hipótesis que es necesario hacer para poder construir las ecuaciones no lineales de Langevin a partir de la ecuación de FP no lineal local es asumir que tanto las funciones de correlación de las partes determinísticas como la de las fuerzas fluctuantes que aparecen en las ecuaciones no lineales de Langevin de la ecs. (3.145)-(3.148), poseen las mismas propiedades de correlación, ver ec. (1.37). Es decir, los valores de la función de correlación de las partes determinísticas son los mismos que las funciones de correlación de las fuerzas aleatorias, lo que se establece en la ec. (1.37). Esta hipótesis es una condición para que la ecuación de FP sea consistente con el equilibrio termodinámico, [156].

vi.- Adicionalmente, cuando se construyen las ecuaciones no lineales de Langevin correspondientes a la ecuación de FP no lineal local, que caracterizan la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido, se observa que su componente fluctuante se define mediante un flujo aleatorio del tipo multiplicativo. Esto resulta del producto de una variable aleatoria Gaussiana por una variable local (definida vía la temperatura local y un coeficiente de transporte local). Las varianzas de dichas variables Gaussianas, dadas por las ecs. (3.129)-(3.134), son así independientes de las variables locales dadas por las ecs.(3.135)-(3.140), lo que permite sacar la funciones $\mathcal{G}(x)$ de la operación de promedio $\langle \rangle_{CG}$ al momento de calcular las $\tilde{\mathcal{L}}$.

vii.- Comparando las ecuaciones para la hidrodinámica fluctuante no lineal dadas por las ecs. (3.145)-(3.148), con otras deducciones aparecidas en la literatura tenemos los siguientes comentarios:

Hidrodinámica fluctuante de Khalatnikov [65]. Esta teoría tiene las mismas inconsistencias que la teoría fenomenológica para la hidrodinámica fluctuante de Landau-Lifshitz de un fluido simple [73, 74]. Ello se basa en la hipótesis de regresión de fluctuaciones de Onsager. Aunque es válida para variables pares, sin embargo la ecuaciones de evolución son tanto pares como impares, de ahí que las objeciones y la teoría propuesta por Fox y Uhlenbeck en [32] para superarlas.

En lo que respecta a nuestros resultados es claro que no estamos empleando la hipótesis de regresión de las fluctuaciones [37], ni introduciendo la parte fluctuante del flujo como una variable adicional como se hace en la ref. [65]. Simplemente estamos haciendo uso de una relación generalizada del Teorema de Fluctuación-Disipación de Green-Kubo mediante las ecs. (3.40)-(3.41).

Hidrodinámica fluctuante linealizada de Puttermann [103]. Esta se construye mediante la linearización de las ecuaciones de la hidrodinámica de los dos fluidos, donde a dichas ecuaciones linearizadas se les agrega un término fluctuante para construir las ecuaciones de Langevin de acuerdo con la teoría desarrollada por Fox y Uhlenbeck en la ref. [32].

Sin embargo, pese que se está tratando con ecuaciones lineales, en el caso de la ecuación asociada a la energía aparece un término fluctuante, $\tilde{S}_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}$, que no obstante de ser compatible con la aproximación lineal, es de tipo multiplicativo. De hecho de acuerdo con Fox en [33] dicho término da origen a divergencias $\langle \tilde{S}_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta} \rangle_{eq} = +\infty$.

Posteriormente Van Saarloos *et al* en [112] polemizan acerca de dichas divergencias, mostrando que no existen. En el análisis presentado, muestran que Fox en [33] está despreciando la contribución de $\langle P_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta} \rangle_{eq} = -\infty$ con lo cual,

$$\langle (P_{\alpha\beta} + \tilde{S}_{\alpha\beta})D_{\alpha\beta} \rangle_{eq} = 0 \quad (4.3)$$

Fox en la ref. [34] acepta que pese a que las divergencias en el valor esperado no existen, si las hay para el valor esperado del segundo momento de la ec. 4.3, al analizar el caso de un sistema fuera de equilibrio. Ante lo cual Bedeaux *et al* en [10] hacen ver que en [112] ellos están, por una parte, tratando un sistema alrededor del equilibrio y por la otra, que un defecto de las teorías hidrodinámicas fluctuantes lineales es que tienen que recurrir a técnicas de renormalización para evitar divergencias debidas a los coeficientes de transporte. Sin embargo, la existencia de las divergencias en los coeficientes de transporte ('colas largas') es cuestionable, ya que al parecer su existencia es resultado de un incorrecto manejo del problema. [35, 11].

Por lo tanto, comparando estos esquemas con los resultados obtenidos, observamos que las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante de las ecs. (3.135)-(3.140), no han sido linearizadas por lo que representan estrictamente ecuaciones no lineales para la hidrodinámica fluctuante del Helio superfluido. De existir las divergencias en los coeficientes de transporte éstas aparecerán en el momento de realizar su linearización como es el caso de las teorías comentadas.

Hidrodinámica Generalizada de Tserkonikov [125, 126, 127, 128]. Hasta donde el autor conoce, ésta es la teoría más general que se ha construido de 'primeros principios' para el Helio superfluido. Para ello emplea las funciones de Green dependientes de la temperatura y con dependencia doble en el tiempo, se construye una hidrodinámica molecular válida para toda \mathbf{k} .

Pese a que Tserkonikov clama consistencia con la hidrodinámica de los dos fluidos para $\mathbf{k} \rightarrow 0$, y de que calcula ecuaciones linearizadas de evolución para las partes fluctuantes de las variables dinámicas, nada se menciona respecto a las propiedades estadísticas (primer y segundo momento) de las fuerzas fluctuantes asociadas a las ecuaciones de evolución de las variables dinámicas: de aquí que estrictamente no construye ecuaciones de Langevin para dichas variables dinámicas.

4.3 Perspectivas

i.- Es importante aplicar los métodos reportados en la literatura como el de Stratonovich [119], y el de Rytter y Deker [107, 108] a las ecuaciones de FP de las ecs. 3.120 y 3.121 para

obtener los sistemas correspondientes de ecuaciones no lineales de Langevin (en el espacio de configuración y de Fourier respectivamente), y poder compararlos con los obtenidos en esta tesis mediante el método de Morozov. Al parecer dichos métodos son más sencillos y físicamente más claros que el empleado en esta tesis, pero que se desconocían al momento de concluir la tesis.

ii.- Respecto a las ecuaciones no lineales de la hidrodinámica fluctuante para el Helio superfluido es importante reducirlas al caso lineal, y comparar los resultados con las teorías hidrodinámicas lineales de Khalatnikov, [65], y de Puttermann, [103].

iii.- Por otra parte, aunque Zubarev en la sec. 22.4 de la ref. [154] muestra que la producción de entropía, deducida a partir de un operador de no equilibrio estadístico obtenido mediante Maxent, es positiva. Es fundamental mostrar explícitamente que se cumple que la producción de entropía dada por la ecs. (3.35) y (3.42) es positiva. El cual es un punto muy importante en cualquier teoría en procesos irreversibles.

iv.- Es oportuno calcular el factor de estructura del espectro de dispersión del Helio superfluido a partir de la teoría presentada en esta tesis y poder comparar las predicciones con las mediciones experimentales reportadas en las referencias, [49, 50, 89, 94, 139, 140], para poner de manifiesto las semejanzas y diferencias de este factor respecto al que existe en relación al del fluido simple.

v.- Por último, las ecuaciones no lineales de Langevin dadas por las ecs. (3.145)-(3.148) representan las ecuaciones iniciales para la construcción de un modelo para la hidrodinámica turbulenta en analogía al modelo construido para la hidrodinámica turbulenta de un fluido simple en la ref. [157, 158].

Finalmente para el Apéndice A tenemos los siguientes comentarios.

vi.- Al seleccionar a la velocidad del superfluido v_s como una restricción para la maximización de la funcional de entropía, implica la aparición del flujo de la componente superfluida \hat{I}_s como variable termodinámica conjugada de la primera. Además, se ha considerado explícitamente al flujo total \hat{j} del sistema como otra restricción en el proceso de maximización.

Esta situación recuerda al formalismo de la Termodinámica Irreversible Extendida (TIE), que considera explícitamente a los flujos como variables independientes para la descripción del sistema. Concretamente, en el caso del Helio superfluido en [80, 81, 82, 83, S4, S5] se presenta un modelo para éste dentro del contexto de la TIE, que tienen al flujo de calor y a el tensor de esfuerzo como variables independientes. Por lo tanto, sería muy oportuno comparar en detalle los resultados del apéndice A con los obtenidos empleando la TIE, para tratar de dilucidar sus conexiones y consecuencias.

Referencias

- [1] Alvarez J.T.R. y García-Colín L.S., *The Foundations of Informational Statistical Thermodynamics Revisited*, Physica **232 A**, 207-228, 1996.
- [2] Alvarez J.T.R. , *A Derivation of Anderson's Equation for the Phase Slip in Superfluids from Kelvin's Theorem*, Rev. Mexicana de Física, **44**, 103-105. 1998.
- [3] Anderson P.W., *Considerations on the Flow of Superfluid Helium*, Rev. Mod. Phys. **8**, 298 , 1968.
- [4] Andronikashvili E.L. et al, *Propierties of the Quantized Vortices Generated by the Rotation of Helium II*, Sov. Phys. Uspekhi, **4**. 1-22. 1961.
- [5] Atkin R.J. y Fox N., *On the Experimental Verification of Landau's Theory of Superfluid Helium*, J. Phys. C: Solid State Phys.. **15**, 947-958, 1982.
- [6] Avenel O., Varoquaux E., *Josephson Effect and Quantum Phase Slippage in Superfluids*, Phys. Rev. Lett. **60**, 416-419, 1988.
- [7] Avenel O., Varoquaux E., *Observational of Singled Quantized Dissipation Events Obeying the Josephson Frecuency Relation in Critical Flow of Superfluid ^4He Through an Aperture*, Phys. Rev. Lett. **55**, 2704-2707. 1985.
- [8] Bashkirov A.G. y Zubarev D.N., *The Generalized Kramers-Fokker-Planck Equation*. Physica **48**, 137-145, 1970.
- [9] Bedell K., Pines D. y Zawadowski A., *Pseudopotential Theory of Interacting Roton Pairs in Superfluid ^4He* , Phys. Rev., **29B**. 102-122. 1984.
- [10] Bedeaux D., Mazur P. y Van Saarloos W.. *Non-Linear Hydrodynamic Fluctuations Around Equilibrium*, Physica. **112A**, 514-516. 1982.

- [11] Beliaev S.T., *Energy-Spectrum of a Non-Ideal Bose Gas*, Soviet Phys JEPT **7**, 299, 1958.
- [12] Bogoliubov N.N., *On the Theory of Superfluidity*, Journal of Phys. (USSR), **11**, 23-32, 1947.
- [13] Bogoliubov N.N., *On Some Problems of the Theory of Superconductivity*, Physica **26**, S1-S6, 1960.
- [14] Boninsegni M. y Ceperley D.M., *Density Fluctuations in Liquid 4 He. Path-Integral and Maximum Entropy*, J. of Low Temp. Phys., **104**, 339-357, 1996.
- [15] Brey J.J., Zwanzig R.W. y Dorfman J.R., *Nonlinear Transport Equations in Statistical Mechanics*, Physica **109A**, 425-444, 1981.
- [16] Ceperley D.M. y Pollock R.L., *Path-Integral Computation of the Low-Temperature Properties of Liquid 4 He*, Phys. Rev. Lett., **56**, 351-354, 1986.
- [17] Cohen M. y Feymann R., *Theory of Inelastic Scattering of Cold Neutrons from Liquid Helium*, Phys. Rev. **107**, 13-24, 1957.
- [18] Courts S.S. y Tough J.T., *Dissipation in Two-Fluid Flow of He II*, Phys Rev., **39B**, 8924-8933, 1989.
- [19] Cowley R.A. y Woods A.D., *Inelastic Scattering of Thermal Neutrons from Liquid Helium*, Can. J. Phys., **49**, 177-200, 1971.
- [20] Cummins F.W. y Johnston J.R., *Theory of Superfluidity*, Phys. Rev., **151**, 105-112, 1966.
- [21] De Groot S.R. y Mazur P., *Non-Equilibrium Thermodynamics*, Dover Publications, Inc. N.Y. USA, 1984.
- [22] Del Río J.L. y García-Colín L.S., *A Unified Approach for Deriving Kinetic Equations in Nonequilibrium Statistical Mechanics. II.- Approximate Results.*, J. of Statistical Phys. **19**, 109-123, 1978.

- [23] Del Río J.L. y García-Colín L.S., *Concept of Entropy for Nonequilibrium States of Closed Many-Body Systems*, Phys. Rev. **43A**, 6657-6663. 1991.
- [24] Del Río J.L. y García-Colín L.S., *Boltzmann Methodology in Non-equilibrium Statistical Mechanics*, Physica **209A**, 385-395, 1994.
- [25] Del Río-Correa y García-Colín L.S., *Repeated Randomness Assumption and the Projection Operator Formalism*, Phys. Rev.. **54E**, 950-953. 1996.
- [26] Feynman R. ,*Atomic Theory of Liquid Helium Near Absolute Zero*, Phys. Rev., **91**, 1301-1308, 1953.
- [27] Feynman R. ,*Atomic Theory of the λ Transition in Helium* . Phys. Rev., **94**, 1291-1302, 1953.
- [28] Feynman R. ,*Atomic Theory of the Two-Fluid Model of Liquid Helium* , Phys. Rev., **94**, 262-277, 1954.
- [29] Feynman R.. *Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium*, in: Progress of Low Temperature Physics, Vol. I, ed. C.J. Gorter. North Holland. Amsterdam, 1955.
- [30] Feynman R. y Cohen M.,*Energy Spectrum of the Excitations in Liquid Helium*, Phys. Rev.. **102**, 1189-1204, 1956.
- [31] Fetter L.A.. *Light Scattering in Liquid Helium* . J. of Low Temp. Phys., **6**, 487-504. 1972.
- [32] Fox R.F. y Uhlenbeck G.E. , *Contributions to Non-Equilibrium Thermodynamics. I. Theory of Hydrdynamical Fluctuations*. Phys. of Fluids. **13**. 1893-1902, 1970.
- [33] Fox R.F.. *Hydrodynamic Fluctuation Theories*. J. Math. Phys. **19**, 1993-1999, 1978.
- [34] Fox R.F.. *Stress-Strain Fluctuations in Non-Linear Hydrodynamics*. Physica, **112A**. 505-513. 1982.
- [35] Fox R.F..*Long-time Tails and Difusion*, Phys. Rev.. **27A**. 3216-3233. 1983.

- [36] Geurst J.A., *General Theory Unifying and Extending the Landau-Khalatnikov, Ginzburg-Pitaevskii, and Hills-Roberts Theories of Superfluid ⁴ He*, Phys. Rev., **22B**, 3207-3220, 1980.
- [37] García-Colín Scherer L. y Del Rio Correa J.L, *Green's Contributions to Non-equilibrium Statistical Mechanics Revisited*, Chapter 4, pp 75-87, in: Perspectives in Statistical Physics. Ed. H.J. Revehé, North Holland Co. Amsterdam, 1981.
- [38] García-Colín Scherer L. y Rodríguez R.F. , *Microscopic Derivation of the Onsager Reciprocity Theorem*, Phys. Rev. . **36A**. 4945-4949, 1987.
- [39] García-Colín Scherer L.. *Termodinámica de Procesos Irreversibles*, Colección CBI, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, México, 1989.
- [40] García-Colín Scherer L.. *Teoría Cinética de los Gases*, Colección CBI, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, México, 1990.
- [41] García-Colín Scherer L.. Comunicación personal, 1998.
- [42] Gardiner C.W. y Zoller P., *Quantum Kinetic Theory: A quantum Kinetic Master Equation for Condensation of Weakly interacting Bose Gas without Trapping Potential*, Phys. Rev., **55**, 2902-2921, 1997.
- [43] Ginzburg V.L. y Pitaevskii L.P, *On the Theory of Superfluidity*, Sov. Phys. JETP, **7**, 858-861, 1958.
- [44] Ginzburg V.L. y Sobyenin A.A., *Superfluidity of Helium II Near the λ -point*, Japanese J. of Appl. Phys. **26**, Supplemet 26-3, 1785-1797, 1987.
- [45] Glyde H.R., *Density and Quasi-particle Excitations in Liquid Helium*, Phys. Rev. , **45B**, 7321-7335, 1992.
- [46] Grandy W.T. Jr., *Principle of Maximum Entropy and Irreversible Processes*, Phys. Rep., **62**, 175-266, 1980.
- [47] Green M.S., *Markoff Random Processes and the Statistical mechanics of Time-Dependent Phenomena*, The J. of Chemical Phys. **20**, 1281-1295, 1952.

- [48] Green M.S., *Markoff Random Processes and the Statistical mechanics of Time-Dependent Phenomcna.II. Irreversible Prosses in Fluids*. The J. of Chemical Phys. **22**. 398-413, 1954.
- [49] Greytak T.J. y Yan J., *Light Scattering from Rotons in Liquid Helium*. Phys. Rev. Let., **22**, 987-999, 1969.
- [50] Greytak et al. *Experimental Evidence for a Two-Roton State in Superfluid Helium*. Phys. Rev. Let., **25**, 1547-1550, 1970.
- [51] Griffins A. y Cheung T.H., *Excitations in a Bose Gas at Finite Temperatures. II. Relation Between Single Particle and Density Fluctuations*. Phys. Rev., **7A**. 2086-2095, 1973.
- [52] Griffins A., *Excitations in Superfluid ⁴ He and the Dielectric Formalism* in: Excitations in Two-Dimensional and Three-Dimensional Quantum Fluids. Edited by: A:G.F. Wyatt and Lauter, Plenum Press, N.Y. 1991.
- [53] Griffins A., *Excitations in a Bose-condensed Liquid*. Cambridge Studies in Low Temperature Physics vol. 4, Cambridge University Press. Cambridge 1993.
- [54] Hall H.E. y Vinen W.F., *The Rotation of Liquid Helium II II. The Theory of Mutual Friction in Uniformly Rotating Helium II*, Proc. Roy. Soc. London, **238A**, 215-234. 1957.
- [55] Hall H.E. y Vinen W.F., *The Rotation of Liquid Helium II I. Experiments on the Propagation of Second Sound in Uniformly Rotating Helium II*. Proc. Roy. Soc. London. **238A**, 204-215, 1957.
- [56] Hohenberg P.C. y Martin P.C., *Microscopic Theory of Superfluid Helium*. Annals of Physics (N.Y.), **34**, 291-359. 1965.
- [57] Hoyningen-Huene P., *On the Time and Cell Dependence of the Coarse-grained Entropy . I*. Physica **82A**, 417-437. 1976.
- [58] Huang K., *Imperfec Bose Gas* in: Studies in Statistical Mechanics, Vol. II. Editors De Boer J. and Uhlenbeck G.E., North Holland. Amsterdam. 1964.

- [59] Iordanskii V. *Vortex Ring Formation in a Superfluid*, Soviet Phys. JETP **21**, 467-471, 1965.
- [60] Jaynes E.T., *Information Theory and Statistical Mechanics I*, Phys. Rev. **106**, 620-630, 1957.
- [61] Jaynes E.T., *Information Theory and Statistical Mechanics II*, Phys. Rev. **108**, 171-190, 1957.
- [62] Jones C.A., Puttermann S.J. y Roberts P.H., J. Phys. A: Math. Gen. **19**, 2991, 1986.
- [63] Kawasaki K. *Dynamical Theory of Fluctuations Near the Critical Points*, pp. 342-379, in : *Critical Phenomena*, Proc. Int. Scholl Phys. Enrico Fermi, Course 51. Academic Press, N.Y., 1971.
- [64] Keller . *Helium 3 and Helium 4*, Plenum Press, N.Y., 1969.
- [65] Khalatnikov I.M., *Hydrodynamic Fluctuations in a Superfluid Liquid*, Soviet Phys. JEPT, **6**, 624-626, 1957.
- [66] Khalatnikov I.M., *Introduction to the Theory of Superfluidity*, Fronteirs in Physics, W.A. Benjamin Inc., N.Y. 1965.
- [67] Krasnikov V.A., *Problem of a Hydrodynamical Approximation for the Green's Functions of a Superfluid Bose System*, Sov. Phys. Doklady, **12**, 558-560, 1967.
- [68] Kubo R., *Statistical Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems*, J. of Physical Soc. of Japan, **12**, 570-586, 1957.
- [69] Kubo R., *Statistical Mechanical Theory of Irreversible Processes. II. Response to Thermal disturbance*, J. of Physical Soc. of Japan, **12**, 1203-1211, 1957.
- [70] Kubo R., Toda M. y Hashitsume N, *Statistical Physics II. Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Springer Verlag, Heidelberg 1985.

- [71] Kuni F.M. y Storokin B.A., *Nonequilibrium Statistical Mean Values in a Nonlinear Approximation in the Gradients of the Thermodynamic Parameters*. Theor. Math. Phys.(USSR) **9**, 1024-1032, 1971.
- [72] Landau D., *The Theory of Superfluidity of Helium II*, Journal of Phys. (USSR), **5**, 71-79, 1941.
- [73] Landau D., *Hydrodynamic Fluctuations*, Soviet Phys. JETP, **5**, 512-513, 1941.
- [74] Landau L. D. y Lifshitz E.M., *Fluids Mechanics in: Course of Theoretical Physics*, Vol. 6, Pergamon Press, Oxford 1982.
- [75] Landauer R., *Statistical Physics of Machinery: Forgotten Middle-Ground*. Physica **A194**, 551-562, 1993.
- [76] Langer J.S. y Fisher M.E., *Intrinsic Critical Velocity of a Superfluid*. Phys. Rev. Lett. **19**, 560-563, 1967.
- [77] Langer J.S., *Coherent States in the Theory of Superfluid*. Phys. Rev., **167**, 183-190, 1968.
- [78] Mazur P., *Statistical Considerations on the Basis of Non-equilibrium Thermodynamics*, in : Fundamental Problems in Statistical Mechanics. Edited by E.G.C. Cohen, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1962.
- [79] Miller A. y Pines D., *Elementary Excitations in Liquid Helium*. Phys. Rev., **127**, 1452-1464, 1962.
- [80] Mongiovi M.S., *Superfluidity and Entropy Conservation in Extended Thermodynamics*, J. Non-Equilib. Thermodyn. **16**, 225-239, 1991.
- [81] Mongiovi M.S., *Thermomechanical Phenomena in Extended Thermodynamics of an Ideal Monoatomic Superfluid*, J. Non-Equilib. Thermodyn. **17**, 183-189, 1992.
- [82] Mongiovi M.S. *Dissipation in an Ideal Monoatomic Superfluids* . J. Non-Equilib. Thermodyn. **18**, 39-49, 1993.

- [83] Mongiovi M.S. *The Link Between Heat Flux and Stress Deviator in Extended Thermodynamics of an Ideal Monoatomic Superfluids*, J. Non-Equilib. Thermodyn. **18**, 147-156, 1993.
- [84] Mongiovi M.S. *Extended Irreversible Thermodynamics of Liquid Helium II*. Phys. Rev. **B48**, 6276-6283, 1993.
- [85] Mongiovi M.S. y Romeo S., *Extended Thermodynamics of an Ideal Monoatomic Superfluids : Analysis of Sound Velocity Data*, J. Non-Equilib. Thermodyn. **20**, 39-49, 1995.
- [86] Morozov V.G., *Equations of Hydrodynamics and Transport Coefficients for a Superfluid Bose Liquid*. Theor. Math. Phys.(USSR) **28**, 777-786, 1976.
- [87] Morozov V.G., *Generalized Fokker-Planck Equation for Quantum Systems*, Theor. Math. Phys.(USSR) **48**, 807-814, 1981.
- [88] Morozov V.G., *On the Langevin Formalism for Nonlinear and Nonequilibrium Hydrodynamic Fluctuation*, Physica **126A**, 443-460, 1984.
- [89] Murray C.A., R.L. Woerner y Greytak T.J., *High Resolution Raman Study of the Two-Roton Bound State*. J. Phys. C: Solid State Phys, **8**, L90-L94 1975.
- [90] Nepomnyashchy Yu. A. y Nepomnyashchy A.A., *On the Theory of Elementary-excitation Spectrum in Liquid He⁴*, Sov. Phys. JETP, **38**, 134-139, 1974.
- [91] Nepomnyashchy Y.A., *Nature of Excitations in Liquid ⁴ He.*, Phys. Rev. , **46B**, 6611-6614, 1992.
- [92] Noethe L. y Taylor A.W.B., *Density Matrix for ³He/He II Mixture*, Z. Physik **B26**, 217-221, 1977.
- [93] Nozières P. y Pines D., *The Theory of Quantum Liquids . Superfluid Bose Liquids* Volume II, The Advanced Book Classics, Addison-Wesley Publishing Co, USA, 1990.

- [94] O'Connor J.T., Palin C.J. y Vinen W.F., *Experimental Determination of the Landau-Plazcek Ratio for Liquid Helium Close to the λ line*, J. Phys. C: Solid State Phys, 8, 101-108, 1975.
- [95] Packard R.E., *Vortex Photography in Liquid Helium* , Physica 109-110B, 1471-1484, 1982.
- [96] Penrose O., *On Quantum Mechanics of Helium II*, Phil. Mag. 42, 1373-1377, 1951.
- [97] Penrose O. y Onsager L., *Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium*, Phys. Rev. 104. 576-584, 1956.
- [98] Peshkov V.P., *Critical Velocities and Vortices in Superfluid Helium*, in : Progress in Low Temperature Physics Vol. IV, Edited by Gorter, North Holland. Amsterdam, 1964.
- [99] Peshkov V.P., *Second Sound in Helium II*, Soviet Physics JEPT. 11, 580-584, 1960.
- [100] Pines D., *Effective Interactions, Elementary Excitations, and Transport in Helium Liquids*. Can. J. Phys., 65, 1357-1367, 1987.
- [101] Pitaevsky L. y Stringari S., *Uncertainty Principle, Quantum Fluctuations, and Broken Symmetries*, J. Low Temp. Phys., 85, 377-388, 1991.
- [102] Pollock R.L. y Ceperley D.M. *Path-Integral Computation of Superfluid Densities* . Phys. Rev. . 36B, 8343-8352, 1987.
- [103] Puttermann S.J., *Superfluid Hydrodynamics* . in: Low Temperature Physics. Vol. 3. ed. C.J. Gorter et al, North Holland Publishing Co. 1973.
- [104] Puttermann S, Roberts P.H., Jones C.A. y Larraza A.. *Towards a Unified Description of Bulk Excitations and The Two Fluid Theory of Superfluids in Terms of a Single Classical Equation of Motion* in: Excitations in Two-Dimensional and Three-Dimensional Quantum Fluids, Edited by. A:G.F. Wyatt and Lauter. Plenum Press. N.Y. 1991.
- [105] Rayfield G.W. y Reif F., *Evidence for the Creation and Motion of Quantized Vortex Rings in Superfluid Helium*, Phys Rev. Let. 11. 305-308, 1963.

- [106] Rayfield G.W. y Reif F., *Quantized Vortex Rings in Superfluid Helium*, Phys. Rev. **136**, A1194-A1208, 1964.
- [107] Ryter D. y Deker U., *Properties of the Noise-induced 'Spurious' Drift.I*, J. Math. Phys., **21**, 2662-2665, 1980.
- [108] Ryter D. y Deker U., *Properties of the Noise-induced ('Spurious') Drift.II.- Simplifications of Langevin Equations*, J. Math. Phys., **21**, 2666-2669, 1980.
- [109] Risken H. *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [110] Robertson B., *Equations of Motion in Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Phys. Rev. **144**, 151-161, 1966.
- [111] Roberts P.H. y Donnelly R.J., *Theory of the Onset of Superflow*, Phys Rev. Lett. **24**, 367-371, 1970.
- [112] Saarloss W., Bedeaux D., y Mazur P., *Non-linear Hydrodynamic Fluctuations around Equilibrium*, Physica **110A**, 147-170, 1982.
- [113] Scharwz K.W., *Generation of Superfluid Turbulence Deduced from Simple Dynamical Rules*, Phys Rev. Lett. **49**, 283, 1982.
- [114] Scharwz K.W., *Dissipative Flow of Liquid ^4He in the Limit of Absolute Zero*, Phys. Rev Lett. **57**, 1448-1451, 1986.
- [115] Scharwz K.W., *Three-Dimensional Vortex Dynamics in Superfluid ^4He : Line-Line and Line-boundary Interactions*, Phys Rev., **31B**, 5782-5804, 1985.
- [116] Scharwz K.W., *Three-Dimensional Vortex Dynamics in Superfluid ^4He : Homogeneous Superfluid Turbulence*, Phys Rev., **38B**, 2398-2417, 1988.
- [117] Sewell G.L., *Quantum-Statistical Theory of Irreversible Processes: Dynamic of Gross Variables*, Physica **31**, 1520-1536, 1965.
- [118] Stirling W.G., *Recent High-Resolution Neutron Scattering Studies of ^4He in: Excitations in Two-Dimensional and Three-Dimensional Quantum Fluids*, Edited by, A.G.F. Wyatt and Lauter, Plenum Press, N.Y. 1991.

- [119] Stratonovich R.L., *Topics in the Theory of Random Noise: General Theory of Random Process Nonlinear Transformations and Noise*, Vol. 1. in Mathematics and its Applications, A Series of Monographs and Text Vol. 3, Gordon and Breach, Science Publishers, New York, USA, 1963.
- [120] Svensson E.C., *$S(Q, \omega)$ for Liquid : What More Do We Need to Know ?* in: Excitations in Two-Dimensional and Three-Dimensional Quantum Fluids, Edited by, A.G.F. Wyatt and Lauter, Plenum Press, N.Y. 1991.
- [121] Tarvin J.A, Vidal F, greytak T.J., *Measurements of the Dynamic Structure Factor Near the Lambda Temperature in Liquid Helium*, Phys. Rev., **15**, 4193-4210, 1977.
- [122] Tkachenko V.K. , *Development of Turbulence in the Presence of a Heat Flow in Helium II within a Capillary and the Critical Velocity Problem*, Sov. Phys. JETP, **18**, 1251-1256, 1964.
- [123] Tough J.T., *Superfluid turbulence in* : Progress in Low Temperature Physics Vol. VIII, Edited by D.F. Brewer , North Holland. Amsterdam. 1982.
- [124] Tserkonikov Yu. A., *Calculation of the Correlation Functions of a Nonideal Bose Gas by the Method of Collective Variables*, Theor. Math. Phys. (USSR) **26**, 50-61, 1976.
- [125] Tserkonikov Yu. A., *Molecular Hydrodynamics of a Weakly Degenerate Non-ideal Bose-gas II. Green's Functions of Transverse Components of Particle Flux Density*, Theor. Math. Phys. (USSR) **85**, 1096-1114, 1990.
- [126] Tserkonikov Yu. A., *Molecular Hydrodynamics of a Weakly Degenerate Non-ideal Bose-gas I. Green's Functions of Longitudinal Fluctuations of Particle and Energy Densities*, Theor. Math. Phys. (USSR) **85**, 1192-1213, 1990.
- [127] Tserkonikov Yu. A., *Molecular Hydrodynamics of a Weakly Degenerate Non-ideal Bose-gas I.- Generalized Equations of Two-Fluid Hydrodynamics*, Theor. Math. Phys. (USSR) **93**, 1367-1402, 1992.

- [128] Tserkonikov Yu. A., *Molecular Hydrodynamics of a Weakly Degenerate Non-ideal Bose-gas II.- Green Functions and Kinetic Coefficients*, Theor. Math. Phys. (USSR) **105**, 1249-1290, 1995.
- [129] Varoquaux E. , Avenel O. y Meisel W., *Phase Slippage and Vortex Nucleation in Critical Flow of Superfluid ^4He Trough an Orifice*, Can. J. Phys. **65**, 1377, 1987.
- [130] Van Kampen G., *Quantum Statistics of Irreversible Processes*, Physica **20**, 603-622, 1954.
- [131] Van Kampen G., *Derivation of the Phenomenological Equations from the Master Equation. I. Even Variables Only*, Physica **23**, 707-719, 1957.
- [132] Van Kampen G., *Derivation of the Phenomenological Equations from the Master Equation. II. Even and Odd Variables*, Physica **23**, 816-829, 1957.
- [133] Van Kampen G., *The Case Against Linear Response Theory*, Physica Norvegica **5**, 281-284, 1971.
- [134] Van Kampen G., *Stochastic Description of Many-body System*, Chapter 5, pp 90-99, in: Perspectives in Statistical Physics, Ed. H.J. Raveché, North Holland Co. Amsterdam, 1981.
- [135] Van Kampen N.G., *Ito versus Stratonovich*, J. of Statistical Phys. **24**, 175-187, 1981.
- [136] Van Kampen N.G., *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Second Edition North Holland Co. Amsterdam, 1992.
- [137] Van Vliet K.M., *Linear Response Theory Revisited. I. The Many Body Van Hove Limit*, J. Math. Phys., **19**, pp. 1345-1370, 1978.
- [138] Van Vliet K.M., *On Van Kampen's Objections Against Linear Response Theory* , J. of Statistical Phys., **53**, pp. 49-60, 1988.
- [139] Vaughan J.M. y Vinen W.F., *Brillouin Scattering from Superfluid ^4He* , J. Phys. C: Solid State Phys, **3**, L40-L43, 1970.

- [140] Vaughan J.M. , Vinen W.F. y Palin C.J., *Experiments on the Scattering of Light by Liquid Helium*, Proc. 13th. Int. Conf. on Low Temperature Physics I, 532-536, Plenum Press, N.Y. 1972.
- [141] Vinen W.F., *Mutual Friction in a Heat Current in Liquid Helium II. I. Experiments on Steady Heat Currents*, Proc. Royal Soc. of London, **240A**, 114-127, 1957.
- [142] Vinen W.F., *Mutual Friction in a Heat Current in Liquid Helium II. II. Experiments on Transient Effects* , Proc. Royal Soc. of London, **240A**, 128-143, 1957.
- [143] Vinen W.F., *Mutual Friction in a Heat Current in Liquid Helium II. III. Theory of Mutual Friction*, Proc. Royal Soc. of London. **242A**, 493-515, 1957.
- [144] Vinen W.F., *Vortex Lines in Liquid Helium II* in : Progress in Low Temperature Physics Vol. III, C.J. Gorter, North Holland, Amsterdam, 1961.
- [145] Vinen W.F., *The Detection of Single Quanta of Circulation in Liquid Helium II*, Proc. Roy. Soc . London , **260A**, 218-236, 1961.
- [146] Wigner E.P.. *On the Correction for Thermodynamic Equilibrium* . Phys. Rev.. **40**, 749-759. 1932.
- [147] Wilks J., *The Properties of Liquid and Solid helium*, Claredon Press, Oxford, England 1967.
- [148] Woods A.D.B.. *Neutron Inelastic Scattering from Liquid Helium at Small Momentum Transfers*. Phys. Rev. Let, **14**. 355-356. 1965.
- [149] Woods A.D.B. y Cowley R.A., *Structure and Excitations of Liquid Helium* Rep. Prog. Phys. **36**, 1135-1231, 1972.
- [150] Woods A.D.B., *Experimental Studies of Inelastic Neutron Scattering from Liquid Helium* in: Quantum Fluids, North Holland. Amsterdam. 1966.
- [151] Yang C.N. , *Concept of Off-Diagonal Long Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors*. Rev. Mod. Phys. **34**. 694-704. 1962.

- [152] W. Zimmermann Jr., *Quantized Vortices and the Superfluid Helium analog of the ac Josephson Effect*, Phys. Rev. Lett. **14**, 976-979, 1965.
- [153] Zimmermann W. Jr. *The Flow of Superfluid Through Submicron Apertures: Phase Slip and Critical Velocities due to Quantum Vortex Motion*, Contemporary Physics **37**, 219-234, 1996.
- [154] D.N. Zubarev. *Nonequilibrium Statistical Thermodynamics*, Studies in Soviet Science. Consultant Bureau, New York, 1974.
- [155] Zubarev D.N. y Khazanov A.M., *The Generalized Fokker-Planck Equation and the Construction of Projection Operators for Various Methods of Abbreviated Description*, Theor. Math. Phys. (USSR) **34**, 43-50, 1978.
- [156] Zubarev D.N y Morozov V.G., *Statistical Mechanics of Nonlinear Hydrodynamic Fluctuations* Physica **120A**, 411-467, 1983.
- [157] Zubarev D.N.. *Theory of Turbulent Transport on the Basis of Nonequilibrium Statistical Thermodynamics*. Theor. Math. Phys. (USSR) **46**, 47-56, 1981.
- [158] Zubarev D.N.. *Statistical Thermodynamics Theory of Turbulent Transport Process*. Theor. Math. Phys. (USSR) **53**, 1004-1014, 1982.
- [159] Zubarev D.N.. Morozov V.G., Omelyan I.P, y Torkarchuk M.V. , *Kinetic Equation for Dense Gases and Liquids*, Theor. Math. Phys. (USSR) **87**, 412-424, 1991.
- [160] Zubarev D.N.. Morozov V.G., y Troshkin O.V., *Turbulence as a Nonequilibrium Transition*. Theor. Math. Phys. (USSR) **53**, 896-908, 1992.
- [161] Zubarev D.N., Morozov V.G., Omelyan I.P, y Torkarchuk M.V. , *Unification of the Kinetic and Hydrodynamic Approaches in the Theory of Dense Gases and Liquids*, Theor. Math. Phys. (USSR) **96**, 997-1012, 1993.
- [162] Zwanzig R.W.. *Memory Effects in Irreversible Thermodynamics*, Phys. Rev., **124**, 983-992, 1961.
- [163] Zwanzig R.W.. *Nonlinear Transport Equations from Statistical Mechanics*, Supp. of Progress of Theoretical Phys., **64**, 74-82, 1978.

Apéndice A

Hidrodinámica de los Dos Fluidos con Efectos Disipativos Deducida Mediante Maxent.

En este Apéndice se reproduce una deducción de la hidrodinámica de los dos fluidos de Landau con y sin disipación mediante el método de Maxent ¹, resultados que fueron deducidos por Morozov en [86] y una generalización de estos para mezclas de ^4He - ^3He se han discutido en [92].

En otras palabras, en este Apéndice básicamente se emplea la relación fluctuación-disipación de la Teoría de la respuesta Lineal (TRL) de Kubo [68], para definir los coeficientes de transporte del Helio superfluido; coeficientes necesarios para construir la hidrodinámica disipativa del superfluido.

Particular mención merecen las condiciones iniciales y a la frontera que debe obedecer el operador estadístico obtenido mediante la maximización de la entropía. En el contexto de la teoría desarrollada por la escuela Soviética puede verse una revisión de las condiciones antes mencionadas en [1]. Concretamente en relación a las condiciones de preparación inicial y el estado de equilibrio final del sistema, puede mostarse por ejemplo, que en el límite de la medida exacta [57] hay una equivalencia entre el formalismo de Maxent [23, 24], y el de la técnica de los operadores de proyección [162].

¹El método de Maxent puede consultarse con todo detalle en la monografía [154] o en las referencias [46, 60, 61, 110].

A.1 Ecuaciones Hidrodinámicas para un superfluido Ideal.

A.1.1 Operador Estadístico de Equilibrio Local.

Sea el operador asociado al Hamiltoniano total de un sistema de bosones (^4He),

$$\hat{H} = \int \hat{H}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.1})$$

donde:

$$\hat{H}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2m} \hat{p} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \hat{p} \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}' \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}), \quad (\text{A.2})$$

donde,

$\hat{H}(\mathbf{x})$ es el operador asociado a la densidad local de energía.

$\psi(\mathbf{x})$ y $\psi^\dagger(\mathbf{x})$ es el operador de campo y su conjugado.

$\hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ es el operador asociado al potencial de interacción de dos partículas.

$\hat{p} = -i\hbar\nabla$ es el operador asociado al ímpetu.

En todo este trabajo $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ y $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$.

Ahora seleccionemos las siguientes magnitudes físicas, cuyos valores esperados se consideran como los más relevantes para la descripción del sistema. Ellos son:

La densidad local de partículas, cuyo operador es, $\hat{\rho}(\mathbf{x})$, tenemos que,

$$\rho(\mathbf{x}) = \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_l \equiv m \langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \rangle_l. \quad (\text{A.3})$$

Para la densidad local de energía,

$$E(\mathbf{x}) = \langle \hat{H}(\mathbf{x}) \rangle_l \equiv Tr \{ \hat{\rho}_l \hat{H}(\mathbf{x}) \}. \quad (\text{A.4})$$

Para la densidad local de ímpetu,

$$j(\mathbf{x}) = \langle \hat{j}(\mathbf{x}) \rangle_l \equiv \frac{1}{2} \langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \hat{p} \psi(\mathbf{x}) - \hat{p} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \rangle_l. \quad (\text{A.5})$$

donde \hat{p} es el operador asociado al ímpetu.

Para la velocidad del superfluido,

$$v_s(\mathbf{x}) = \langle \hat{u}_s(\mathbf{x}) \rangle_l = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hat{p} \Psi(\mathbf{x})}{\Psi(\mathbf{x})} - \frac{\hat{p} \Psi^\dagger(\mathbf{x})}{\Psi^\dagger(\mathbf{x})} \right). \quad (\text{A.6})$$

con,

$$\hat{u}_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2m} \hat{p} \left(\frac{\psi(\mathbf{x})}{\Psi(\mathbf{x})} - \frac{\psi^\dagger(\mathbf{x})}{\Psi^\dagger(\mathbf{x})} \right). \quad (\text{A.7})$$

la expresión equivalente a la ec. (A.6) es,

$$v_s(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{x}), \quad (\text{A.8})$$

donde ϕ es la fase de la función de onda del sistema y se asume que éste está a una temperatura $T < T_\lambda$. Aquí, $\phi(x)$ la fase de la función de onda es tal que puede interpretarse como una variable macroscópica,[2]. Además, la velocidad del superfluido de las ecs. A.6. está definida en función de los valores esperados de los operadores de campo denotados por $\Psi(\mathbf{x})$ y se escriben como ²,

²Estos valores esperados corresponden a el parámetro de orden que describe la transición de fase que ocurre al presentarse la condensación de Bose-Einstein en el sistema [3]

$$\Psi(\mathbf{x}) = \langle \psi(\mathbf{x}) \rangle_l = a e^{i\phi(\mathbf{x})}, \quad (\text{A.9})$$

$$\Psi^\dagger(\mathbf{x}) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_l = a e^{-i\phi(\mathbf{x})}, \quad (\text{A.10})$$

en las ecs. A.3-A.10. $\langle \dots \rangle_l$ indica el promedio de equilibrio local respecto al operador $\hat{\rho}_l$, operador que se definirá a continuación.

Sea ahora la funcional de entropía de información definida como,

$$S_I = Tr \{ \hat{\rho}_l \ln \hat{\rho}_l \}, \quad (\text{A.11})$$

donde $\hat{\rho}_l$ es un operador estadístico de no equilibrio que esta por determinarse y que cumple con la condición de normalización, $Tr\{\hat{\rho}_l\} = 1$.

Ahora, calculamos la variación de la funcional de entropía respecto $\hat{\rho}_l$ imponiendo la condición de extremo tomando las restricciones dadas por las ecs. A.3-A.6 y la condición de normalización. El resultado bien conocido, es que,

$$\hat{\rho}_l(t) = Q_l^{-1} \exp\left(-\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x}) \hat{j}(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x}) \hat{u}_s(\mathbf{x}) \right]\right). \quad (\text{A.12})$$

donde $\beta(\mathbf{x})$, $\tilde{\mu}(\mathbf{x})$, $v_n(\mathbf{x})$ y $j_s(\mathbf{x})$ son los multiplicadores indeterminados de Lagrange y cuyo significado será aclarado más adelante a partir de condiciones de consistencia que se deben cumplir de acuerdo con la Termodinámica de Procesos Irreversibles. También,

$$Q_l = Tr \left\{ \exp\left(-\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\dots \right]\right) \right\}. \quad (\text{A.13})$$

donde la expresión entre los paréntesis cuadrados es la misma que la de la ec. A.12.

Por otro lado, como muestra Morozov en su trabajo [86], con el fin de simplificar los cálculos es necesario realizar un cambio de sistema de referencia, de uno que está en reposo a otro que se mueve con una velocidad local $v_s(\mathbf{x})$. Esto se logra a través de la transformación canónica de los operadores de campo,

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{i\phi(\mathbf{x})}\psi'(\mathbf{x}), \quad (\text{A.14})$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}) = e^{-i\phi(\mathbf{x})}\psi'^\dagger(\mathbf{x}). \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo estas expresiones en los operadores asociados a las densidades locales de energía, número de partículas, ímpetu y velocidad del superfluido dadas por las ecs. (A.2)-(A.5) y (A.7) se obtiene que,

$$\hat{H}(\mathbf{x}) = \hat{H}'(\mathbf{x}) + \hat{v}_s(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}v_s^2(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x}). \quad (\text{A.16})$$

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \hat{\rho}'(\mathbf{x}). \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{j}(\mathbf{x}) = \hat{j}'(\mathbf{x}) + v_s(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x}), \quad (\text{A.18})$$

$$\hat{u}_s(\mathbf{x}) = \hat{u}'_s(\mathbf{x}). \quad (\text{A.19})$$

donde $\hat{H}'(\mathbf{x})$, $\hat{\rho}'(\mathbf{x})$, $\hat{j}'(\mathbf{x})$ y $\hat{u}'_s(\mathbf{x})$ son los operadores asociados a las magnitudes físicas de interés en el marco de referencia en movimiento y están dadas por las mismas expresiones (A.2), (A.3), (A.5) y (A.7) respectivamente, pero escribiendo ψ' y ψ'^{\dagger} en lugar de ψ y ψ^{\dagger} de acuerdo con las ecs. (A.14) y (A.15).

Sustituyendo ahora estos operadores de las ecs. (A.17)-(A.20) en la ec. (A.12), tenemos que en el marco de referencia en movimiento $\hat{\rho}_I(t)$ se expresa como,

$$\hat{\rho}_I(t) = Q'_I{}^{-1} \exp \left(\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x}) - (v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x}))\hat{j}'(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x})\hat{u}'_s(\mathbf{x}) \right] \right). \quad (\text{A.20})$$

donde,

$$\mu(\mathbf{x}) = \bar{\mu}(\mathbf{x}) - v_s^2(\mathbf{x})/2 + v_s(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}). \quad (\text{A.21})$$

y análogamente, sustituyendo las ecs. (A.17)-(A.20) en la ec. (A.13), se obtiene que,

$$Q'_I = Tr \left\{ \exp \left(- \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x}) - (v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x}))\hat{j}'(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x})\hat{u}'_s(\mathbf{x}) \right] \right) \right\} \quad (\text{A.22})$$

Ahora dado $\ln Q'_I$, se calculando las derivadas funcionales respecto a cada multiplicador y empleando las siguientes definiciones,

$$\rho'(\mathbf{x}) = \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_I$$

$$u(\mathbf{x}) = \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_I$$

$$j_0(\mathbf{x}) = \langle \hat{j}'(\mathbf{x}) \rangle_t \quad (\text{A.23})$$

$$\ln Q_l = -Tr \left\{ \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \Omega(\mathbf{x}) \right\}, \quad (\text{A.24})$$

donde $\Omega(\mathbf{x})$ se determina de la ec. A.13, con ello se puede mostrar de la ec. A.22 y de las ecs. A.17-A.20 que se cumple la hipótesis de equilibrio local para el superfluido ideal. Esta condición se expresa como [86],

$$\delta u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta(\mathbf{x})} \delta S(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) \delta \rho(\mathbf{x}) + (v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x})) \delta j_0(\mathbf{x}). \quad (\text{A.25})$$

donde la densidad local de entropía es definida como.

$$S(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}) \left(u(\mathbf{x}) - \Omega(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) - (v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x})) j_0 \right), \quad (\text{A.26})$$

Por otra parte, de la consistencia con la teoría fenomenológica del Helio superfluido [66], tenemos que los multiplicadores indeterminados de Lagrange se identifican como es usual. $\beta(\mathbf{x})$ con el inverso de la temperatura local, $\mu(\mathbf{x})$ con el potencial químico local y $v_n(\mathbf{x})$ con la velocidad local de la componente normal del superfluido. [86].

A.1.2 Operador Estadístico de No-equilibrio.

Como el operador de equilibrio local $\hat{\rho}_l$ no garantiza obtener una solución de equilibrio termodinámico y de generar ecuaciones irreversibles la escuela soviética ha propuesto la

construcción de un operador estadístico de no-equilibrio a partir de la solución de una ecuación de Liouville con fuentes [154], a saber,

$$\frac{\partial \hat{\rho}_\epsilon(t)}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\rho}_\epsilon(t), \hat{H} \right]_- = -\epsilon(\hat{\rho}_\epsilon(t) - \hat{\rho}_l(t)), \quad (\text{A.27})$$

donde $\left[\hat{A}, \hat{B} \right]_-$ es el conmutador de los operadores indicados. Ahora, integrando esta ecuación tenemos que [86, 154].

$$\hat{\rho}_\epsilon(t) = \hat{\rho}_l(t) + \Delta \hat{\rho}'(t), \quad (\text{A.28})$$

donde $\hat{\rho}_l(t)$ está dado por la ec. A.12 y,

$$\Delta \hat{\rho}'(t) \equiv \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int_0^t d\tau e^{\tau \hat{S}(t+t', t')} \hat{S}(t+t', t') e^{-(\tau-1)\hat{S}(t+t', t')}, \quad (\text{A.29})$$

o la relación equivalente (ec. (21.10a) en la pp. 308, de la ref. [154]),

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\rho}'(t) = -Q_l^{-1} \exp \left(\int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int d\mathbf{x} \left[F_m(\mathbf{x}, t+t') \hat{A}_m(\mathbf{x}, t') + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial F_m(\mathbf{x}, t+t')}{\partial t'} \hat{A}_m(\mathbf{x}, t') \right] \right), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

donde $F_m(\mathbf{x})$ representan los multiplicadores indeterminados de Lagrange y \hat{A}_m son los operadores asociados a las variables dinámicas relevantes.

Dichos multiplicadores se determinan de la siguiente condición,

$$\langle \hat{A}_m(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon = \langle \hat{A}_m(\mathbf{x}, t) \rangle_l. \quad (\text{A.31})$$

donde ,

$$A_m(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \hat{A}_m(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{N/V \rightarrow Cte} Tr \{ \hat{\rho}_\epsilon(t) \hat{A}_m(\mathbf{x}, t) \} \right] \quad (\text{A.32})$$

Además, puede verse de esta ecuación y de las ecs. A.12-A.13, que $A_m(\mathbf{x}, t)$ y $F_m(\mathbf{x}, t)$ son variables termodinámicas conjugadas; es decir,

$$\frac{\delta \ln Q_I}{\delta F_m(t)} = -\langle \hat{A}_m(\mathbf{x}, t) \rangle_I = -\langle \hat{A}_m(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon. \quad (\text{A.33})$$

Sin embargo, la ec. A.32 que merece los siguientes comentarios:

i.- El proceso al límite, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se debe de tomar después del límite termodinámico cuando $\lim_{N/V \rightarrow Cte}$; donde el promedio indicado por la ec. A.32 se la conoce como un ‘cuasi-promedio’, [13].

ii.- En éste cuasi-promedio se considera que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{N/V \rightarrow Cte} Tr \{ \hat{A}_m(\mathbf{x}, t) \hat{\rho}'(t) \} \right] = 0$$

es decir, en la ecuación de Liouville con fuentes dada por la ec. A.27, cuando $\epsilon \rightarrow 0$ entonces $\hat{\rho}_\epsilon \rightarrow \hat{\rho}_I$ y el operador $\hat{\rho}_\epsilon$ tiende a una solución estacionaria de la ecuación de Liouville. Para ser más explícitos, el término fuente de la ec. A.27 dado por operador $\hat{\rho}'$ y definido por las ecs. A.29-A.30 corresponde matemáticamente a la aplicación del teorema de Abel, donde el significado físico de este teorema en el contexto de Maxent puede verse en la ref. [1].

Por lo tanto, en lugar de las ecs. A.3-A.6 para los valores esperados de las variables dinámicas relevantes para el Helio superfluido, tenemos que estas se escriben correctamente con ayuda de las ecs. A.31 y A.32 como ³

$$E(\mathbf{x}, t) = \langle \hat{H}(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr\{\hat{\rho}_\epsilon(t) \hat{H}(\mathbf{x})\} = \langle \hat{H}(\mathbf{x}) \rangle_l, \quad (\text{A.34})$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr\{\hat{\rho}_\epsilon(t) \hat{\rho}(\mathbf{x})\} = \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_l, \quad (\text{A.35})$$

$$j(\mathbf{x}, t) = \langle \hat{j}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr\{\hat{\rho}_\epsilon \hat{j}(\mathbf{x})\} = \langle \hat{j}(\mathbf{x}) \rangle_l, \quad (\text{A.36})$$

$$v_s(\mathbf{x}, t) = \langle \hat{u}_s(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr\{\hat{\rho}_\epsilon(t) \hat{u}_s(\mathbf{x})\} = \langle \hat{u}_s(\mathbf{x}) \rangle_l. \quad (\text{A.37})$$

donde en esta última ecuación se han empleado las ecs. A.9-A.10 escritas con este nuevo operador $\hat{\rho}_\epsilon$.

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= \langle \psi(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr\{\hat{\rho}_\epsilon \psi(\mathbf{x})\} = \langle \psi(\mathbf{x}) \rangle_l, \\ \Psi^\dagger(\mathbf{x}) &= \langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr\{\hat{\rho}_\epsilon \psi^\dagger(\mathbf{x})\} = \langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_l, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

En las siguientes secciones de este Capítulo se usaran las derivadas temporales de las ecs. A.34-A.38 para deducir las ecuaciones de la hidrodinámica de los dos fluidos sin y con disipación. A continuación abordaremos la deducción de la hidrodinámica de los dos fluidos sin disipación.

³De aquí en adelante no expresaremos explícitamente el límite termodinámico $N/V \rightarrow Cte.$ pero asumiremos que lo estamos considerando antes de tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

A.1.3 Ecuaciones Hidrodinámicas de los Dos Fluidos sin Disipación.

Para deducir las ecuaciones hidrodinámicas es necesario promediar con $\hat{\rho}_\epsilon$, definido en la ec. A.28, las ecuaciones de conservación microscópicas para los operadores de masa, ímpetu, energía, y de evolución del operador de campo. Dichas ecuaciones son

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.39})$$

$$\hat{H}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}_H(\mathbf{x}), \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x})}{\partial t} = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.41})$$

$$i\hbar \dot{\psi}(\mathbf{x}) = \left[\psi(\mathbf{x}), \hat{H} \right]. \quad (\text{A.42})$$

En particular los operadores de densidad del flujo de energía y densidad del flujo de ímpetu tienen las siguientes expresiones, ver pp. 252-258 de [154].

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}}_H(\mathbf{x}) = & \frac{1}{4m^2} \left(\hat{p}^2 \psi^\dagger(\mathbf{x}) \hat{p} \psi(\mathbf{x}) - \hat{p} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \hat{p}^2 \psi(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{2m} \int d\mathbf{x}' \hat{V}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') \\ & - \frac{1}{4m} \int d\mathbf{x}' \hat{V}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left(\psi^\dagger(\mathbf{x}') \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}') + \psi^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

y.

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ik}(x) &= \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_i \hat{p}_k \hat{\rho}(\mathbf{x}) - \hat{p}_i \psi^\dagger(\mathbf{x}) \cdot \hat{p}_k \psi(\mathbf{x}) - \hat{p}_k \psi^\dagger(\mathbf{x}) \cdot \hat{p}_i \psi(\mathbf{x}) \right) \\ &- \frac{1}{2m} \int dx' (x_i - x'_i)(x_k - x'_k) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \hat{V}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x') \psi(x') \psi(x). \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

con : $i, k = x, y, z$.

Ahora, de la ec. A.28 podemos observar que $\hat{\rho}_\epsilon$ esta compuesto por dos partes: una no disipativa dada por $\hat{\rho}_l$ y otra disipativa dada por $\hat{\rho}'$. Concretamente, al calcular el valor esperado de la ecs. A.39-A.42 con sólo $\hat{\rho}_l$, se obtienen las ecuaciones hidrodinámicas para el fluido ideal. Su forma es,

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.45})$$

$$\dot{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \langle \hat{j}_H(\mathbf{x}) \rangle_l, \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{x})}{\partial t} = -\nabla \cdot \langle \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \rangle_l, \quad (\text{A.47})$$

$$i\hbar \dot{\Psi}(\mathbf{x}) = \langle [\psi(\mathbf{x}), \hat{H}]_- \rangle_l. \quad (\text{A.48})$$

Con el propósito de expresarlas en una notación más familiar como en las referencias [66, 103], se procede de la siguiente manera. Primero, se re-escriben los flujos del lado derecho de estas ecuaciones en términos de $\beta(\mathbf{x})$, $v_n(\mathbf{x})$ y $v_s(\mathbf{x})$. Para esto se define el

operador de entropía local $\hat{S}(t, 0)$ a partir del operador $\hat{\rho}_l$, que de acuerdo con las ecs. A.2 v A.11 esta dado por,

$$\hat{S}(t, 0) = -\ln \hat{\rho}_l(t), \quad (\text{A.49})$$

Sustituyendo ahora en esta ecuación la expresión para $\hat{\rho}_l$ dada por la ec. A.12 se tiene que,

$$\hat{S}(t, 0) = \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\Omega(\mathbf{x}) + \hat{H}(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x}) \hat{j}(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x}) \hat{u}_s(\mathbf{x}) \right]. \quad (\text{A.50})$$

donde $\Omega(x)$ está definido por la ec. A.24 y se identifica con el valor negativo de la presión local. [86].

En seguida , de la ec. A.49 y dado un operador arbitrario \hat{A} , empleando la propiedad $Tr \{ \hat{A} \hat{B} \} = Tr \{ \hat{B} \hat{A} \}$, es fácil verificar que se cumple.

$$\left\langle \left[\hat{A}(\mathbf{x}), \hat{S}'(t) \right] \right\rangle_i = Tr \{ -\hat{\rho}_l \hat{A} \ln \hat{\rho}_l + \hat{\rho}_l \ln \hat{\rho}_l \hat{A} \} = 0 \quad (\text{A.51})$$

Ahora sustituyendo $\hat{A}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ en esta ec. A.51 y con auxilio de la ec. A.50 rescribimos la ec. A.48 para $\dot{\Psi}(\mathbf{x})$. Por lo tanto, después de un cálculo directo pero engorroso se obtiene que,

$$\dot{v}_s(\mathbf{x}) + \nabla \left[\mu(\mathbf{x}) + \frac{v_s^2(\mathbf{x})}{2} - \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla \beta(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})} \frac{\nabla a}{a} \right] = 0 \quad (\text{A.52})$$

La ec. A.52 es una ecuación que generaliza la ecuación de Anderson [3], donde a es la amplitud que aparece en las ecs. A.9-A.10 para los valores esperados de los operadores

campo v y v^{\dagger} : $\frac{\nabla \cdot \mathbf{x}}{3 \cdot \mathbf{x}} \frac{\nabla a}{a}$ es una corrección a la ecuación de Anderson tradicional. [3, 2], y que en principio puede despreciarse por ser de orden muy pequeño, [86]. Por lo tanto, la ec. A.48 se describe como,

$$\dot{v}_s(\mathbf{x}) - \nabla \left[\mu(\mathbf{x}) + \frac{v_s^2(\mathbf{x})}{2} \right] = 0. \quad (\text{A.53})$$

Para describir el lado derecho de la ec. A.45 se toma $\hat{A}_i = \hat{\rho}(\mathbf{x})$ que sustituida en la ec. A.51 conduce al siguiente resultado ,

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}) = -\nabla \left(\rho_n(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}) + \rho_s(\mathbf{x})v_s(\mathbf{x}) \right). \quad (\text{A.54})$$

donde se ha considerado de las refs. [66, 103] que,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_n(\mathbf{x}) + \rho_s(\mathbf{x}). \quad (\text{A.55})$$

$$j(\mathbf{x}) = \rho_n(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}) + \rho_s(\mathbf{x})v_s(\mathbf{x}). \quad (\text{A.56})$$

y,

$$j_s(\mathbf{x}) = j(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}) \quad (\text{A.57})$$

que es la densidad del momento local de la componente superfluida en un marco de referencia con velocidad $v_n(\mathbf{x})$.

En el caso de las ecs. A.46 y A.47 para re-escribir sus miembros derechos, dados por el flujo de energía \tilde{j}'_H y el tensor de esfuerzo $\hat{\mathbf{T}}'$ respectivamente, los cálculos se hacen en

un marco de referencia en movimiento con velocidad v_s , en donde se determina $\langle \hat{j}'_H(\mathbf{x}) \rangle_l$ y $\langle \hat{T}'(\mathbf{x}) \rangle_l$ para después mediante una transformación canónica obtener las expresiones para los valores esperados de estos operadores en un marco de referencia fijo.

Partimos del operador de entropía local dado por la ec. A.50 sustituyendo en éste las ecs. A.16-A.19 para las densidades locales de las variables relevantes y la del factor de normalización dada por la ec. A.22. Se obtiene entonces el operador de entropía local en el sistema de referencia en movimiento,

$$\hat{S}'(t, 0) = \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\Omega(\mathbf{x}) + \hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \hat{\rho}'(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}) \hat{j}'(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x}) \hat{u}'_s(\mathbf{x}) \right]. \quad (\text{A.58})$$

donde,

$$W(\mathbf{x}) \equiv v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x})$$

En este sistema en movimiento no es difícil comprobar que se cumple la ec. A.51 con \hat{S}' dada por la ec. A.58.

$$\langle \left[\hat{A}(\mathbf{x}), \hat{S}'(t) \right]_- \rangle_l = 0 \quad (\text{A.59})$$

Ahora si $\hat{A} = \hat{H}'(\mathbf{x})$ y de las ecs. A.58- A.59 tenemos que,

$$\begin{aligned} \langle \left[\hat{H}'(\mathbf{x}), \hat{S}'(t) \right]_- \rangle_l &= i\hbar \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \left[\nabla \langle \hat{j}'_H(\mathbf{x}) \rangle_l \right. \\ &\left. - \mu(\mathbf{x}) \nabla j_0(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x}) \nabla \mu(\mathbf{x}) - W_i(\mathbf{x}) \nabla_k \langle \hat{T}'_{ik}(\mathbf{x}) \rangle_l \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

donde en la deducción de la ec. A.60 se emplean las relaciones siguientes.

$$\hat{\beta}'(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}'(\mathbf{x}), \quad (\text{A.61})$$

$$\hat{H}'(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}'_H(\mathbf{x}), \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{j}}'(\mathbf{x})}{\partial t} = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}'(\mathbf{x}), \quad (\text{A.63})$$

$$\hat{u}'_s(\mathbf{x}) \approx \nabla \mu(\mathbf{x}). \quad (\text{A.64})$$

ecuaciones que se obtienen de las ecs. A.45-A.47, A.19 y A.53 respectivamente.⁴ Como en la ec. A.60 el volumen de integración es arbitrario, en general el integrando está definido salvo una función $g(\mathbf{x})$ que cumple con la condición,

$$\int d\mathbf{x} \nabla g(\mathbf{x}) = 0$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \rightarrow 0$$

⁴En la ec. A.64 se ha empleado el hecho que \hat{u}_s y \hat{u}'_s son invariantes galileanas puesto que la fase $\phi(x)$ de la ec. A.9 es una invariante Galileana, ver Apéndice A en la referencia [103].

por lo tanto, el integrando de la ec. A.60 se rescribe como,

$$\begin{aligned} \nabla \langle \hat{j}'_H(\mathbf{x}) \rangle_l &= \mu(\mathbf{x}) \nabla j_0(\mathbf{x}) - j_s(\mathbf{x}) \nabla \mu(\mathbf{x}) \\ &+ W_i(\mathbf{x}) \nabla_k \langle \hat{T}'_{ik}(\mathbf{x}) \rangle_l + \frac{1}{\beta(\mathbf{x})} \nabla g(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

ecuación que después de un calculo directo pero engorroso nos conduce finalmente a que el flujo de energía total que aparece en la ec. A.65 se define con ayuda de la ec. A.60 como [86],

$$\langle \hat{j}'_H(\mathbf{x}) \rangle_l = \mu(\mathbf{x}) j_0(\mathbf{x}) + \left(T(\mathbf{x}) S'(t) + W(\mathbf{x}) j_0(\mathbf{x}) \right) W(\mathbf{x}). \quad (\text{A.66})$$

donde hemos empleado la ec. A.57 pero escrita de la siguiente manera.

$$j_s(\mathbf{x}) = j_0(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}). \quad (\text{A.67})$$

y el tensor de esfuerzo $\langle \hat{T}'_{ik}(\mathbf{x}) \rangle_l$ de la ec. A.60 se escribe como [86],

$$\langle \hat{\mathbf{T}}'(\mathbf{x}) \rangle_l = W(\mathbf{x}) j_0(\mathbf{x}) - p(x) \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.68})$$

donde $\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$ es un tensor unitario de segundo orden.

Evidentemente las ecs. A.66 y A.68 estan en un marco de referencia en movimiento. Para obtener sus expresiones en un marco de refererencia fijo, se deben aplicar las transformaciones canónicas inversas a las ecs. A.14-A.15 a los operadores $\hat{j}'_H(\mathbf{x})$ y $\hat{\mathbf{T}}'(\mathbf{x})$ de las ecs. A.66 y A.68, auxiliados con las ecs. A.43 y A.44. Dicha transformación conduce directamente a las ecuaciones,

$$\langle \hat{J}_H(\mathbf{x}) \rangle_l = \left(\mu(\mathbf{x}) + \frac{v_s^2}{2} \right) j(\mathbf{x}) + \left(T(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) + v_n(\mathbf{x}) j_0(\mathbf{x}) \right) v_n(\mathbf{x}), \quad (\text{A.69})$$

$$\langle \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \rangle_l = \rho_s(x) v_s(x) v_s(x) + \rho_n(x) v_n(x) v_n(x) + p(x) \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.70})$$

Finalmente podemos describir el lado derecho de la ec. A.46, para la evolución de la energía total, con ayuda de la ec. A.69 como,

$$\dot{E}(x) = -\nabla \cdot \left[\left(\mu(x) + \frac{v_s^2}{2} \right) j(x) + \left(T(x)S(x) + v_n(x) j_0(x) \right) v_n(x) \right], \quad (\text{A.71})$$

y describiendo el lado derecho de la ec. A.47 con auxilio de la ec. A.70 tenemos,

$$\frac{\partial j(x)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\rho_s(x) v_s(x) v_s(x) + \rho_n(x) v_n(x) v_n(x) + p(x) \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) \right], \quad (\text{A.72})$$

Resumiendo, se ha mostrado explícitamente como las ecuaciones de evolución para un superfluido ideal dadas por las ecs. A.45 - A.48 obtenidas vía Maxent, son equivalentes a las ecs. A.54, A.72, A.71 y A.53 respectivamente. Estas ecuaciones escritas en una notación más familiar han sido obtenidas de manera fenomenológica en la ref. [66].

A.2 Ecuaciones Hidrodinámicas con Efectos Disipativos.

En esta sección se deduce la hidrodinámica de los dos fluidos de Landau con efectos disipativos. Ahora de la parte disipativa o no proyectada $\hat{\rho}'$ del operador $\hat{\rho}_\epsilon$, en la aproximación lineal, tanto en los gradientes de los multiplicadores de Lagrange como de las velocidades v_s y v_n , se calcula una corrección a primer orden de la hidrodinámica sin

disipación. Esta corrección permite obtener los coeficientes de transporte, que se definen mediante las funciones de correlación de las partes fluctuantes de los flujos de las variables dinámicas relevantes.

Partimos del operador entropía de la ec. A.50. Si en éste operador despreciamos los términos $v_n(x)\hat{j}(x)$ y $j_s\hat{u}_s(x)$, tenemos que \hat{S} se puede re-escribir como,

$$\hat{S} = \beta\{\Phi - \mathcal{H}\}. \quad (\text{A.73})$$

con.

$$\Phi = - \int d\mathbf{x} \Omega(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{H} = \hat{H} - \mu \int d\mathbf{x} \hat{\rho}(\mathbf{x})$$

donde los multiplicadores locales $\beta(x)$ y $\mu(x)$ se sustituyen por sus valores de equilibrio β y μ .

Entonces, si en la parte no proyectada $\Delta\hat{\rho}'$ de $\hat{\rho}_\epsilon$ dada por la ec. A.29, sustituimos sólo en las exponenciales la primera ecuación de las ecs. A.73, obtenemos que:

$$\Delta\hat{\rho}'(t) = \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int_0^1 d\tau e^{\tau\beta\mathcal{H}} \dot{\hat{S}}(t-t', t') e^{-\beta(\tau-1)\mathcal{H}} e^{-\beta\Phi}. \quad (\text{A.74})$$

donde $\dot{\hat{S}}(t+t', t')$ indica la derivada temporal del operador de entropía,

$$\dot{\hat{S}}(t, t') = \exp\left\{-\frac{\hat{H}t'}{i\hbar}\right\} \dot{\hat{S}}(t, 0) \exp\left\{\frac{\hat{H}t'}{i\hbar}\right\}. \quad (\text{A.75})$$

tal que $\dot{\hat{S}}(t, 0)$ se obtiene de la derivada temporal de la ec. A.50 y se expresa como.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{S}}(t, 0) = \int d\mathbf{x} & \left[-\frac{\partial \beta(\mathbf{x}) \Omega(\mathbf{x})}{\partial t} + \dot{\beta}(\mathbf{x}) \hat{H}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \bar{\mu}(\mathbf{x}) \beta(\mathbf{x})}{\partial t} \hat{\rho}(\mathbf{x}) - \right. \\
& - \frac{\partial \beta(\mathbf{x}) v_n(\mathbf{x})}{\partial t} \hat{j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \beta(\mathbf{x}) j_s(\mathbf{x})}{\partial t} \hat{u}_s(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x}) j_s(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}_s(\mathbf{x})}{\partial t} + \\
& \left. + \beta(\mathbf{x}) \left(\hat{H}(\mathbf{x}) - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \hat{\rho}(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{j}(\mathbf{x})}{\partial t} - j_s(\mathbf{x}) \hat{u}_s(\mathbf{x}) \right) \right]. \quad (\text{A.76})
\end{aligned}$$

Ahora realizando un cambio de variable $\lambda = \beta\tau$, en la ec. A.74, ésta se transforma en.

$$\Delta \hat{\rho}'(t) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^0 dt' e^{ct'} \int_0^\beta d\lambda e^{\lambda \mathcal{H}} \dot{\hat{S}}(t+t', t') e^{-\lambda \mathcal{H}} \hat{\rho}_0, \quad (\text{A.77})$$

donde $\hat{\rho}_0 = e^{\beta(\Phi - \mathcal{H})}$ es un operador estadístico de equilibrio.

Por lo tanto, el operador $\hat{\rho}_\epsilon$ en la aproximación lineal en las velocidades, se escribe de acuerdo con la ec. A.77 como,

$$\hat{\rho}_\epsilon(t) \approx \hat{\rho}_l(t) + \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^0 dt' e^{ct'} \int_0^\beta d\lambda e^{\lambda \mathcal{H}} \dot{\hat{S}}(t+t', t') e^{-\lambda \mathcal{H}} \hat{\rho}_0. \quad (\text{A.78})$$

Ahora bien, para un operador \hat{A} asociado a una magnitud física dada, su valor esperado exacto está definido por la ec. A.32. Sin embargo cuando se calcula dicho promedio, con el operador estadístico de la ec. A.78 se obtiene que,

$$\langle \hat{A}(t) \rangle_\epsilon \approx \langle \hat{A}(t) \rangle_l + \int_{-\infty}^0 dt' e^{ct'} (\hat{A}, \dot{\hat{S}}(t+t')), \quad (\text{A.79})$$

donde la función de correlación cuántica está definida por,

$$(\hat{A}, \hat{B}) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\lambda \langle \hat{A} \hat{B}(t + i\hbar\lambda) \rangle_0. \quad (\text{A.80})$$

y aquí, $\langle \rangle_0$ indica que se esta tomando el promedio respecto al operador de equilibrio $\hat{\rho}_0$.

Ahora observemos que en el operador de evolución de entropía de la ec. A.76, aparecen las derivadas temporales de $\hat{\rho}$, \hat{H} , \hat{j} y \hat{u}_s y de los multiplicadores de Lagrange. Si describimos las derivadas de los primeros con auxilio de las ecuaciones hidrodinámicas para el fluido ideal dadas por las ecs. A.54, A.71, A.72 y A.53 respectivamente, y expresamos las derivadas temporales de los multiplicadores en función de los gradientes de j_s y v_s , (ver el apéndice de [86], ó pp. 333 de [154]) después de álgebra engorrosa se obtiene que [86],

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, 0) = \sigma(t, 0) = \int d\mathbf{x} & \left[(\nabla \beta(\mathbf{x})) \hat{j}_q(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x}) \Delta \hat{p}(\mathbf{x}) \nabla \cdot v_n(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. - \beta(\mathbf{x}) \alpha_s(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot j_s(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x}) \hat{T}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_i v_n(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

donde se ha supuesto que el término correspondiente al flujo de entropía con el medio exterior es cero. En la ec. A.81 se ha definido $\hat{j}_q(\mathbf{x})$, como,

$$\hat{j}_q(\mathbf{x}) \equiv \hat{j}_H(\mathbf{x}) - \left(\frac{S(t)}{\beta(\mathbf{x}) \rho_n(\mathbf{x})} + \mu(\mathbf{x}) \right) \hat{j}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.82})$$

que es el operador asociado a la densidad del flujo de calor y el operador $\Delta \hat{p}(\mathbf{x})$,

$$\Delta \hat{p}(\mathbf{x}) \equiv \hat{p}(\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial p}{\partial u} \right)_\rho (\hat{H}(\mathbf{x}) - \langle \hat{H}(\mathbf{x}) \rangle_0) - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_u (\hat{\rho}(\mathbf{x}) - \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_0). \quad (\text{A.83})$$

que es el operador de la fluctuación de la presión. Además $\hat{T}_{ik}(x)$ es una componente del operador asociado al tensor de los esfuerzos sin traza dado por,

$$\hat{T}_{ik}(x) = \hat{T}_{ik}(x) - \delta_{ik} \hat{p}(x). \quad (\text{A.84})$$

donde \hat{p} es el operador de presión que está definido como,

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \sum \hat{T}_{ii}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.85})$$

Finalmente el operador de fluctuación asociado con la componente superfluida está dado por,

$$\hat{\alpha}_s(\mathbf{x}) = \frac{i\hbar}{2m\sqrt{n_0}}(\dot{\psi}(\mathbf{x}) - \dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x})) - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho} \right)_s (\hat{H}(\mathbf{x}) - \langle \hat{H}(\mathbf{x}) \rangle_0) - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial \rho} \right)_s (\hat{\rho}(\mathbf{x}) - \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_0), \quad (\text{A.86})$$

donde $n_0 = \langle \psi \rangle_0 \langle \psi^\dagger \rangle_0$ es la densidad del condensado en equilibrio.

Ahora calculemos el valor esperado de las ecuaciones de evolución para $\hat{\rho}$, \hat{H} , \hat{j} y ψ de las ecs. A.39-A.42 respectivamente. Si empleamos el operador estadístico $\hat{\rho}_\epsilon$ de la ec. A.78 formalmente se tiene que,

$$\langle \dot{\hat{\rho}}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon = -\nabla \cdot \langle \hat{j}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon, \quad (\text{A.87})$$

$$\langle \dot{\hat{H}}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon = -\nabla \cdot \langle \hat{j}_H(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon, \quad (\text{A.88})$$

$$\left\langle \frac{\partial \hat{j}(\mathbf{x})}{\partial t} \right\rangle_\epsilon = -\nabla \cdot \langle \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon, \quad (\text{A.89})$$

$$\dot{\Psi}(\mathbf{x}) = \langle \dot{\psi}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon. \quad (\text{A.90})$$

Cabe observar que los resultados que buscamos en estas ecuaciones son las definiciones para los coeficientes de transporte para el Helio superfluido. Sus definiciones se hacen con auxilio de la relación fluctuación-disipación de Green-Kubo, mediante las funciones de correlación que aparecen en el segundo término del miembro derecho de la ec. A.79. Así, de acuerdo con esta última ecuación, el valor esperado de \hat{j}_H que se aparece en el lado derecho de la ec. A.88 se describe como,

$$\langle \hat{j}_H(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon = \langle \hat{j}_H(\mathbf{x}, t) \rangle_l + \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \left(\hat{j}_H(\mathbf{x}), \dot{\hat{S}}(t+t') \right), \quad (\text{A.91})$$

y análogamente para el lado derecho de la ec. A.89 se tiene que,

$$\langle \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon = \langle \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \rangle_l + \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \left(\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}), \dot{\hat{S}}(t+t') \right), \quad (\text{A.92})$$

En el caso de la ec. A.90 podemos escribir dos ecuaciones, una para el operador de campo $\psi(x)$ dada por,

$$\langle \dot{\psi}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon = \langle \dot{\psi}(\mathbf{x}) \rangle_l + \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \left(\dot{\psi}(\mathbf{x}), \dot{\hat{S}}(t+t') \right), \quad (\text{A.93})$$

y la otra para su complejo conjugado $\psi^\dagger(\mathbf{x})$, dada por,

$$\langle \dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon = \langle \dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_l + \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \left(\dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x}), \dot{\hat{S}}(t+t') \right), \quad (\text{A.94})$$

El primer miembro del lado derecho de las ecs. A.91 y A.92 esta dado por las ecs. A.69 y A.70 respectivamente.

El segundo miembro de la ec. A.91 se puede expresar con auxilio de las ecs. A.76, A.80 y el principio de Curie [21] como,

$$\int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{j}_H(\mathbf{x}), \hat{S}(t+t')) = \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int d\mathbf{x}' (\hat{j}_H(\mathbf{x}), \hat{j}_q(\mathbf{x})) \nabla \beta(\mathbf{x}', t+t'), \quad (\text{A.95})$$

Análogamente, para el segundo miembro de la ec. A.92, se tiene que con auxilio de las ecs. A.76 y A.84, se escribe como,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}), \hat{S}(t+t', 0)) = \\ & = - \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int d\mathbf{x}' \beta(\mathbf{x}', t+t') \left[(\hat{p}(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}(\mathbf{x}', t')) \times \right. \\ & \left. \times \nabla \cdot v_n(\mathbf{x}', t+t') \cdot \underline{\mathbf{U}} + (\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t')) \cdot \underline{(\overset{\circ}{\nabla} \cdot v_n)^s}(\mathbf{x}', t+t') + (\hat{p}(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{x}', t')) \nabla \cdot \hat{j}_s(\mathbf{x}', t-t') \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

donde en la deducción de esta ecuación se ha empleado la expresión para el tensor simétrico sin traza $\underline{(\overset{\circ}{\nabla} \cdot v_n)^s}$ que se define como,

$$(\overset{\circ}{\nabla} \cdot v_n)_{ik}^s = \frac{1}{2} \left[\nabla_i v_{nk}(x) + \nabla_k v_{ni}(x) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot v_n(x) \right]. \quad (\text{A.97})$$

Ignorando ahora los efectos de no localidad temporal en los términos $\beta(\mathbf{x}', t-t')$, $v_n(\mathbf{x}', t+t')$ y $\hat{j}_s(\mathbf{x}', t+t')$ que aparecen en las ecs. A.95 y A.96 se tiene que,

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{x}', t+t') &\approx \beta(\mathbf{x}', t) \\ v_n(\mathbf{x}', t+t') &\approx v_n(\mathbf{x}', t) \\ \hat{j}_s(\mathbf{x}', t+t') &\approx \hat{j}_s(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

Por otra parte, en la ec. A.82 se observa de las ecs. A.31- A.32. que la traza del operador $\hat{j}(\mathbf{x})$ con el término integral $\hat{\rho}'(\mathbf{x})$ del operador $\hat{\rho}_\epsilon(\mathbf{x})$ tiende a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$, es decir que el sistema tiende al equilibrio y por lo tanto no existe disipación cuando el sistema llegue al equilibrio. De aquí que podemos realizar la siguiente sustitución,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr(\hat{\rho}' \hat{j}_H(\mathbf{x})) \rightarrow Tr(\hat{\rho}_0 \hat{j}_q(\mathbf{x})) \quad (\text{A.99})$$

Por lo tanto, la ec. A.95 se re-escibe con ayuda de la ecs. A.98 y A.99 como,

$$\int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{j}_H(\mathbf{x}), \hat{S}(t+t', 0)) = \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int d\mathbf{x}' (\hat{j}_q(\mathbf{x}), \hat{j}_q(\mathbf{x}')) \nabla \beta(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.100})$$

Analogamente, de la ecs. A.31 y A.32 observamos que la traza de los operadores $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ y $\hat{H}(\mathbf{x})$ con el término integral $\hat{\rho}'(\mathbf{x})$ del operador $\hat{\rho}_\epsilon(\mathbf{x})$ tienden a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$. De esta manera en la ec. A.83 se tiene que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr(\hat{\rho}' \hat{p}(\mathbf{x})) \rightarrow Tr(\hat{\rho}_0 \Delta \hat{p}(\mathbf{x})) \quad (\text{A.101})$$

y por lo tanto, la ec. A.96 se escribe con auxilio de las ecs. A.98 y A.101 como,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}), \hat{S}(t+t', 0)) = \\ & = - \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int d\mathbf{x}' \beta(\mathbf{x}, t) \left[(\Delta \hat{p}(\mathbf{x}), \Delta \hat{p}(\mathbf{x}', t')) \times \nabla \cdot \underline{v}_n(\mathbf{x}, t) \cdot \underline{\mathbf{U}} + \right. \\ & \left. + (\hat{\underline{T}}(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}(\mathbf{x}', t')) \cdot (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_n)^s(\mathbf{x}, t) + (\Delta \hat{p}(\mathbf{x}), \alpha_s(\mathbf{x}', t')) \nabla \cdot \hat{j}_s(\mathbf{x}', t) \right], \quad (\text{A.102}) \end{aligned}$$

Ahora, si definimos el coeficiente de conductividad térmica en función de correlación para el flujo de calor que aparece en la ec. A.100 obtenemos que

$$\kappa = \frac{\beta^2}{3} \int d\mathbf{x}' \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} (\hat{j}_q(\mathbf{x}), \hat{j}_q(\mathbf{x}', t')) \quad (\text{A.103})$$

Por lo tanto la ec. A.91 se simplifica con auxilio de la ec. A.100 y A.103 como,

$$\langle \hat{j}_H(\mathbf{x}, t) \rangle_\epsilon = \langle \hat{j}_H(\mathbf{x}, t) \rangle_l - \kappa \nabla T(\mathbf{x}). \quad (\text{A.104})$$

En forma similar, definimos el coeficiente de viscosidad cortante en función de la función de correlación para $\hat{\underline{T}}$ que aparece en la ec. A.102 como,

$$\begin{aligned} \eta &= \beta \int dx' \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\underline{T}}_{ik}(x), \hat{\underline{T}}_{ik}(x', t')) = \\ &= \frac{\beta}{10} \int dx' \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\underline{T}}(\mathbf{x}), \hat{\underline{T}}(\mathbf{x}', t')). \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

Por ultimo los segundos coeficientes de viscosidad, se definen a partir de las funciones de correlación que aparecen en la ec. A.16 como,

$$\zeta_1 = \beta \int dx' \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\Delta \hat{p}(x), \hat{\alpha}_s(x', t')), \quad (\text{A.106})$$

$$\zeta_2 = \beta \int dx' \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\Delta \hat{p}(x), \Delta \hat{p}(x', t')). \quad (\text{A.107})$$

Por lo tanto, la ec. A.92 para el valor esperado de una componente del tensor de esfuerzo se escribe, de acuerdo con las ecs. A.70, A.102 y A.105-A.107 como,

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{ik}(x, t) \rangle_\epsilon &= \langle \hat{T}_{ik}(x, t) \rangle_l - \eta \left[\nabla_i v_{nk}(x) \right. \\ &\left. + \nabla_k v_n(x) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot v_n(x) \right] - \delta_{ik} \left[\zeta_1 \nabla \cdot \hat{j}_s(x) + \zeta_2 \nabla \cdot v_n(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

Con respecto a la ecuación de evolución para el valor esperado de $\langle \hat{\psi}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon$ dada por la ec. A.90 y más específicamente por las ecs. A.93 y A.94, estas últimas se emplean para

rescribir la derivada temporal de la ec. A.37 con auxilio de la ec. A.7. Así $\dot{v}_s(\mathbf{x}, t)$ se expresa como,

$$\dot{v}_s(\mathbf{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} \nabla \left[\frac{\langle \dot{\psi}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon}{\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon} - \frac{\langle \dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon}{\langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon} \right] \quad (\text{A.109})$$

y por lo tanto de la ec. A.93 y A.94 tenemos que,

$$\begin{aligned} \dot{v}_s(\mathbf{x}, t) = & -\frac{i\hbar}{2m} \nabla \left[\frac{\langle \dot{\psi}(\mathbf{x}) \rangle_l}{\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle_l} - \frac{\langle \dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_l}{\langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_l} \right] + \\ & + \int_{-\infty}^0 dt' e^{ct'} \left(\frac{\dot{\psi}(\mathbf{x})}{\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle_l} - \frac{\dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x})}{\langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_l} \cdot \dot{S}(t+t'.0) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

dónde en los denominadores del lado derecho de esta ecuación se ha empleado la igualdad dada por la ec. A.31. Utilizando la ecuación de Anderson dada por la ec. A.53 y la ec. A.6. la ec. A.110 se puede describir como,

$$\dot{v}_s(\mathbf{x}, t) = \nabla \left[\mu(\mathbf{x}) + \frac{v_s^2(\mathbf{x})}{2} \right] - \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^0 dt' e^{ct'} \left(\frac{\dot{\psi}(\mathbf{x})}{\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle_l} - \frac{\dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x})}{\langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_l} \cdot \dot{S}(t+t'.0) \right), \quad (\text{A.111})$$

Ahora, observemos que en la ec. A.86 de acuerdo con la ec. A.31 cuando $\epsilon \rightarrow 0$, ocurre que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \hat{H}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon - \langle \hat{H}(\mathbf{x}) \rangle_0 = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon - \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_0 = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \hat{\psi}(\mathbf{x}) \rangle_\epsilon = \langle \hat{\psi}(\mathbf{x}) \rangle_0 = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_0 = \sqrt{n_0}$$

por lo tanto, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ cuando el sistema tiende al equilibrio, la ec. 2.101 se comporta como,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_s(\mathbf{x}) = \frac{i\hbar}{2m \sqrt{n_0}} \left[\dot{\psi}(\mathbf{x}) - \dot{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \right], \quad (\text{A.112})$$

Finalmente describiendo el término integral del lado derecho de la ec. A.111 con auxilio de la ec. A.112 se obtiene que,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \left(\frac{\dot{\psi}(\mathbf{x})}{\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle_l} - \frac{\psi^\dagger(\mathbf{x})}{\langle \psi^\dagger(\mathbf{x}) \rangle_l} \right) \dot{S}(t+t', 0) &= \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\alpha}_s(\mathbf{x}), \dot{S}(t+t', 0)) \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

Si ahora sustituimos la ec. A.81 en la ec. A.113 y usando el principio de Curie, la ec. A.113 se expresa como,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\alpha}_s(\mathbf{x}), \dot{S}(t+t', 0)) &= \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int d\mathbf{x}' \mathcal{B}(\mathbf{x}', t+t') \times \\ &\left[(\hat{\alpha}_s(x), \hat{\alpha}_s(x', t')) \nabla \cdot \hat{v}_n(\mathbf{x}', t+t') + (\hat{\alpha}_s(x), \Delta \hat{p}(x', t)) \nabla \cdot \hat{j}_s(\mathbf{x}', t+t') \right] \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

Vamos ahora a desprestigiar los efectos de no localidad temporales en los multiplicadores de Lagrange indicados por las ecs. A.98. En virtud de ello, la ec. A.114 se escribe como,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\alpha}_s(\mathbf{x}), \dot{S}(t+t', 0)) &= \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} \int d\mathbf{x}' \beta(\mathbf{x}', t) \times \\ &\left[(\hat{\alpha}_s(x), \hat{\alpha}_s(x', t')) \nabla \cdot \hat{v}_n(\mathbf{x}', t) + (\hat{\alpha}_s(x), \Delta \hat{p}(x', t)) \nabla \cdot \hat{j}_s(\mathbf{x}', t) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

Ahora, definimos el tercero y cuarto de los segundos coeficientes de viscosidad en función de las funciones de correlación que aparecen en la ec. A.115 como,

$$\zeta_3 = \beta \int dx' \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\alpha}_s(x), \hat{\alpha}_s(x', t')), \quad (\text{A.116})$$

$$\zeta_4 = \beta \int dx' \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\alpha}_s(x), \Delta \hat{p}(x', t)). \quad (\text{A.117})$$

Por lo tanto, la ec. A.115 se rescribe con ayuda de la ec. A.116 y A.117 como,

$$\int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} (\hat{\alpha}_s(\mathbf{x}), \dot{\hat{S}}(t+t', 0)) = \zeta_3 \nabla \cdot \mathbf{j}_s(\mathbf{x}) + \zeta_4 \nabla \cdot \mathbf{v}_n(\mathbf{x}), \quad (\text{A.118})$$

Finalmente la ec. A.111 se rescribe con auxilio de de la ec. A.118 como,

$$\dot{v}_s(\mathbf{x}, t) = \nabla \left[\mu(\mathbf{x}) + \frac{v_s^2(\mathbf{x})}{2} \right] - \zeta_3 \nabla \cdot \mathbf{j}_s(\mathbf{x}) - \zeta_4 \nabla \cdot \mathbf{v}_n(\mathbf{x}), \quad (\text{A.119})$$

Resumiendo, las ecuaciones de evolución A.87, A.88 y A.89 complementadas con las ecs. A.56, A.104, A.108 respectivamente, y la ec. A.119 dan lugar a las ecuaciones hidrodinámicas de los dos fluidos con disipación. Observe que en los miembros derechos de estas ecuaciones aparecen los coeficientes de transporte κ , η , ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 y ζ_4 , definidos explícitamente por las ecs. A.103, A.105, A.106, A.107, A.116 y A.117 respectivamente, mediante las funciones de correlación vía las relaciones de fluctuación-disipación de Kubo respecto a un operador estadístico de equilibrio $\hat{\rho}_0$.

Apéndice B

Propiedades de la Función Delta de Grano Grueso.

Sea la función delta de grano grueso definida como,

$$\delta'(\mathbf{x}) = \delta'(-\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum'_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{B.1})$$

donde, V representa el volumen mesoscópico del sistema de interés; \sum' indica una sumatoria en el vector de onda \mathbf{k} para valores menores a un número de onda de corte \mathbf{k}_0 que satisface la desigualdad $R_0 k_0 \ll 1$, tal que R_0 es una longitud de correlación.

Sea $G(x)$ cualquier función de grano grueso; si la transformada de Fourier de $G(x)$ denotada por $G_{\mathbf{k}}$ se anula para $\mathbf{k} > \mathbf{k}_0$, entonces la integral de la función δ' con $G(x)$ cumple con la propiedad [156].

$$\int dy G(y) \delta'(x - y) = \int dy G(x - y) \delta'(y) = G(y) \quad (\text{B.2})$$

De esta ecuación se observa que $\delta'(\mathbf{x})$ puede considerarse como una delta de Dirac normal.

Sean las variables de grano grueso a_n tal que la relación entre estas y su transformada de Fourier están dadas por,

$$a_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum'_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{n\mathbf{k}}(t) \quad (\text{B.3})$$

donde,

$$a_{n\mathbf{k}}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (\text{B.4})$$

Ahora bien, expresando las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial a_{n\mathbf{k}}}$ respecto a las derivadas funcionales $\frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x})}$, de las ecs. B.3 y B.4 se obtiene que,

$$\frac{\partial}{\partial a_{n\mathbf{k}}} = \frac{1}{V} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x})} = \sum'_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial a_{n\mathbf{k}}}, \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (\text{B.6})$$

Ahora, si se deriva funcionalmente la ec. B.3 de acuerdo con la ec. B.6, se obtiene que.

$$\frac{\delta a_m(\mathbf{x})}{\delta a_n(\mathbf{x}')} = \delta_{mn} \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.7})$$

donde δ_{mn} es una delta de Kronecker.

Para el caso particular de $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ entonces la ec. B.7 cumple que.

$$\frac{\delta a_m(\mathbf{x})}{\delta a_n(\mathbf{x}')} = \delta_{mn} \delta'(\mathbf{x} = 0) = \delta_{mn} \frac{1}{V} \sum'_{\mathbf{k}} 1 \quad (\text{B.8})$$

Ahora del hecho que $a_m = 1 \cdot a_m$ tenemos que la ec. B.7 se puede escribir simbólicamente como.

$$\frac{\delta a_m(\mathbf{x})}{\delta a_n(\mathbf{x}')} - a_m(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x}')} = \delta_{mn} \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.9})$$

Si se calcula el gradiente de la ec. B.9 obtenemos que,

$$\frac{\delta \nabla a_m(\mathbf{x})}{\delta a_n(\mathbf{x}')} - (\nabla a_m(\mathbf{x})) \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x}')} = \delta_{mn} \nabla \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.10})$$

ahora de la ec. B.1 tenemos,

$$\nabla \delta'(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=0} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}}' ik \cdot \mathbf{x}|_{\mathbf{x}=0} = 0 \quad (\text{B.11})$$

sustituyendo este resultado en la ec.B.10 se obtiene que,

$$\frac{\delta \nabla a_m(\mathbf{x})}{\delta a_n(\mathbf{x})} = (\nabla a_m(\mathbf{x})) \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x}')} \quad (\text{B.12})$$

A continuación consideremos una función $G(x)$ que depende de las variables de grano grueso. $G(x) = G(\{a_n(\mathbf{x})\})$. Entonces de la ec. B.6 se cumple que,

$$\frac{\delta G(\mathbf{x})}{\delta a_n(\mathbf{x}')} = \frac{\delta G(\mathbf{x}')}{\delta a_n(\mathbf{x}')} \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.13})$$

Si generalizamos la ec. B.13 de manera similar a la ec. B.9, tenemos que la ec. B.13 se escribe como,

$$\frac{\delta G(\mathbf{x})}{\delta a_n(\mathbf{x}')} - G(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x}')} = \frac{\delta G(\mathbf{x}')}{\delta a_n(\mathbf{x}')} \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.14})$$

Ahora tomando el gradiente en ambos lados de esta ec. B.14, se obtiene que,

$$\frac{\delta(\nabla G(\mathbf{x}))}{\delta a_n(\mathbf{x}')} - (\nabla G(\mathbf{x})) \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x}')} = \frac{\delta G(\mathbf{x}')}{\delta a_n(\mathbf{x}')} \nabla \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.15})$$

pero considerando la ec. B.11 esta ec.B.15 se escribe como,

$$\frac{\delta(\nabla G(\mathbf{x}))}{\delta a_n(\mathbf{x}')} = \nabla G(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta a_n(\mathbf{x}')} \quad (\text{B.16})$$

la cual es una generalización de la ec. B.12.

Finalmente de la ec. B.11 se muestra a partir de la ec. B.12 que se cumple la siguiente propiedad,

$$\int d\mathbf{x} \delta'(\mathbf{x}) \nabla \delta'(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{B.17})$$

Apéndice C

Deducción del Operador de Evolución de Entropía de la Ecuación (3.42).

La deducción de la ec. (3.42) para \dot{S}' en función de \hat{j}_q , $\Delta\hat{p}$, $\hat{\alpha}'_s$ consiste en expresar la ec. (3.35) para \dot{S}' en función de los gradientes de los flujos y de los gradientes de \hat{j}'_s , \dot{W} , $\dot{\beta}$ y $\dot{\mu}\beta$. Para lograr esto, simplemente se emplean las ecuaciones de conservación para el superfluido ideal y se expresan las derivadas temporales de $\dot{\beta}$, $(\dot{\mu}\beta)$, que aparecen en la ec. (3.35) en función de los gradientes $\nabla\hat{j}'_s$ y $\nabla\dot{W}$ y la derivada temporal \dot{W} en función de los gradientes $\nabla\dot{\beta}$ y $\nabla(\dot{\mu}\beta)$.

En particular, empezaremos por obtener las expresiones para $\dot{\beta}$, $(\dot{\mu}\beta)$, $(\dot{\beta}\Omega)$ y \dot{W} , para finalizar con la obtención de la ec. (3.42).

C.1 Obtención de las Ecuaciones para $\dot{\beta}$, $(\dot{\mu}\beta)$, $(\dot{\beta}\Omega)$ y \dot{W} .

Sea un sistema de referencia que se mueve con velocidad v_s , en el cual se encuentra un sistema compuesto por Helio superfluido, caracterizado por el operador $\hat{\rho}'_i$ de la ec. (3.14), es decir estamos considerando al sistema como uno descrito por variables de grano grueso.

En la aproximación lineal se tiene que,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_s \cdot \nabla \approx \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{C.1})$$

Ahora sean los multiplicadores de Lagrange que aparecen en la ec. (3.14), $\beta(\mathbf{x})$ y $\mu(\mathbf{x})$ los correspondientes al inverso de la temperatura local y al potencial químico local que consideramos funciones de $\rho'(\mathbf{x})$ y $S'(\mathbf{x})$. Entonces,

$$\beta \equiv \beta(\rho(\mathbf{x}), S'(\mathbf{x}))$$

$$\mu \equiv \mu(\rho(\mathbf{x}), S'(\mathbf{x})) \quad (\text{C.2})$$

donde $S'(\mathbf{x})$, $\rho'(\mathbf{x})$ son la entropía local y la densidad local del número de partículas. De hecho los símbolos que aparezcan de aquí en adelante tienen el mismo significado que los del Capítulo 3.

Para un superfluido perfecto tenemos que,

$$\dot{\rho}' + \nabla \cdot j' = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\dot{S}' + \nabla \cdot (S'v_n) = 0 \quad (\text{C.4})$$

debe observarse en esta ec. C.4, que en un marco de referencia en movimiento con velocidad v_s , la componente superfluida no lleva entropía por eso en la ec. C.4 aparece v_n y no $W = v_n - v_s$.

Por otra parte, de la ec. (A.67) no es difícil comprobar, que se cumple, para variables de grano grueso, la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} j' &= \rho'(v_n - v_s) + j'_s = \\ &= \rho'W + j'_s \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Ahora sustituyendo la ec. C.5 en la ec. C.3 y despreciando el término no lineal $W\nabla$ se tiene que,

$$\dot{\rho}' \approx -\rho'\nabla \cdot W - \nabla \cdot j'_s \quad (\text{C.6})$$

Por otra parte, si despejamos \dot{S}' de la ec. C.4 y despreciamos el término no lineal $v_r\nabla S'$ en dicha ecuación, tenemos que,

$$\dot{S}' \approx -S'\nabla \cdot v_n \quad (\text{C.7})$$

A continuación, derivando las funciones indicadas por las ecs. C.2 respecto al tiempo y escribiendo estas derivadas en la aproximación lineal indicada por la ec. C.1, tenemos que,

$$\dot{\beta} \approx \left(\frac{\partial\beta}{\partial S'}\right)_{\rho'} \dot{S}' + \left(\frac{\partial\beta}{\partial\rho'}\right)_{S'} \dot{\rho}' \quad (\text{C.8})$$

y,

$$\frac{\partial\mu\beta}{\partial t} \approx \left(\frac{\partial\mu\beta}{\partial S'}\right)_{\rho'} \dot{S}' + \left(\frac{\partial\mu\beta}{\partial\rho'}\right)_{S'} \dot{\rho}' \quad (\text{C.9})$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho'(\mathbf{x}) = \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{t}}$$

$$u(\mathbf{x}) = \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{t}}$$

$$j_0(\mathbf{x}) = \langle \hat{j}'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{t}}$$

$$W(\mathbf{x}) = v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x})$$

las cuales se interpretan como variables de grano grueso. También interpretando las variables como de grano grueso la presión local se define como [86],

$$p(\mathbf{x}) = -\Omega(\mathbf{x}) = \frac{S'(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})} - u(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x})j_0(\mathbf{x}). \quad (\text{C.14})$$

A continuación, desarrollando la variación indicada en el lado izquierdo de la ec. C.13 y sustituyendo la ec. C.14, después de unos pasos algebraicos donde se desprecia al término $j_0\beta W$ se obtiene que.

$$\beta(\mathbf{x})\delta p(\mathbf{x}) = \left[\frac{S'(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})} + u(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) \right] \delta\beta(\mathbf{x}) - \rho\delta(\mu(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})) \quad (\text{C.15})$$

si $\frac{\partial \mu \beta}{\partial u} = 0$ entonces en esta ec. C.15 se obtiene que,

Ahora, sustituyendo las ecs. C.6 y C.7 en la ec. C.8, esta última se escribe como,

$$\dot{\beta}(\mathbf{x}) \approx \left(\frac{\partial \beta}{\partial S'} \right)_{\rho'} \left(-S' \nabla \cdot v_n \right) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} \left(-\rho' \nabla \cdot W - \nabla \cdot j'_s \right) \quad (\text{C.10})$$

si aproximamos $\nabla \cdot v_n \approx \nabla \cdot W$ y factorizando este término, la ec. C.10 finalmente se escribe como,

$$\dot{\beta}(\mathbf{x}) \approx - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} \nabla \cdot j'_s - \left[\rho' \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} + S' \left(\frac{\partial \beta}{\partial S'} \right)_{\rho'} \right] \nabla \cdot W \quad (\text{C.11})$$

Ahora respecto a la ec. C.9 procederemos de manera análoga. Sustituyendo las ecs. C.6 y C.7, aproximando $\nabla \cdot v_n \approx \nabla \cdot W$ y factorizando este término la ec. C.9 se escribe como,

$$\frac{\partial \mu \beta}{\partial t} \approx \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} \nabla \cdot j'_s - \left[\rho' \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} + S' \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial S'} \right)_{\rho'} \right] \nabla \cdot W \quad (\text{C.12})$$

Por otra parte, recordando la definición de el factor de normalización Q'_i del operador $\hat{\rho}_i$, en función del operador de presión dado por $\Omega(\mathbf{x})$, ver ec. (A.24), la variación del producto $\beta(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x})$ se puede escribir en función de las derivadas funcionales de Q'_i respecto de cada multiplicador de Lagrange como ¹,

$$\delta(\beta(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x})) = u(\mathbf{x})\delta\beta(\mathbf{x}) - \rho'(\mathbf{x})\delta(\mu\mathbf{x}\beta(\mathbf{x})) - j_0\delta(\beta(\mathbf{x})W(\mathbf{x})) \quad (\text{C.13})$$

donde,

¹Tenga en cuenta que la ec. (A.24) se esta interpretando como una ecuación con variables de grano grueso.

$$\beta(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial u(\mathbf{x})} \right)_{\rho'} = \rho' \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} + S' \left(\frac{\partial \beta}{\partial S'} \right)_{\rho'} \quad (\text{C.16})$$

Análogamente, a partir de las ecs. C.13-C.15 se obtiene que,

$$\beta(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \rho'(\mathbf{x})} \right)_u = \rho' \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} + S' \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial S'} \right)_{\rho'} \quad (\text{C.17})$$

Finalmente sutituyendo la ec. C.16 en la ec. C.11 se tiene que,

$$\dot{\beta}(\mathbf{x}) \approx - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} \nabla \cdot \mathbf{j}'_s - \beta(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial u(\mathbf{x})} \right)_{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.18})$$

y sustituyendo la ec. C.17 en la ec. C.12 se tiene que,

$$\frac{\partial \mu \beta}{\partial t} \approx \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} \nabla \cdot \mathbf{j}'_s - \beta(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \rho'(\mathbf{x})} \right)_u \nabla \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.19})$$

Ahora, el factor de normalización Q_{qe} , del operador $\hat{\rho}'_{qe}$ de la ec. (3.31), se puede definir en función del operador de presión en analogía de la ec. (A.24), el cual se escribe cómo,

$$\ln Q_{qe} = - \int \beta(\mathbf{x}) \Omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{C.20})$$

a continuación, tomando la derivada funcional de la ec. C.20 respecto de cada multiplicador de Lagrange se obtiene que,

$$\frac{\delta \ln Q_{qe}}{\delta \beta(\mathbf{x})} = \mu(\mathbf{x}) \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} - \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\delta \ln Q_{qe}}{\delta \mu(\mathbf{x})} = \beta(\mathbf{x}) \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}, \quad (\text{C.22})$$

Por lo tanto,

$$\delta(\beta(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x})) = u(\mathbf{x})\delta\beta(\mathbf{x}) - \rho'(\mathbf{x})\delta(\mu(\mathbf{x})\dot{\beta}(\mathbf{x})) \quad (\text{C.23})$$

que es la ec. C.13 en la aproximación lineal en las velocidades, donde $u \equiv \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}$ y $\rho' = \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}$. Por lo tanto de la ec. C.23 tenemos que,

$$\frac{\partial \beta \Omega}{\partial t} = -\langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} \dot{\beta} + \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} \frac{\partial \mu \beta}{\partial t} \quad (\text{C.24})$$

donde para $\dot{\beta}$ y $\frac{\partial \mu \beta}{\partial t}$ se emplean las ecs. C.18 y C.19 respectivamente.

Por último se obtendrá la ecuación para W . Sea la ecuación de evolución del ímpetu para un marco de referencia en movimiento,

$$\frac{\partial j_0}{\partial t} = -\nabla \underline{T}'(\mathbf{x}) \approx \nabla p(\mathbf{x}) \quad (\text{C.25})$$

donde en la aproximación lineal se ha considerado que $\underline{T}'(\mathbf{x}) \approx p(\mathbf{x})$. Ahora recordando que,

$$j_0(\mathbf{x}) = j_s(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x})W(\mathbf{x})$$

$$j_s(\mathbf{x}) = \rho_s(\mathbf{x})(v_s(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x})) \quad (\text{C.26})$$

las cuales sustituidas en la ec. C.25 y después de un cálculo algebraico directo permite describir la ec. C.25 como,

$$\frac{\partial \rho_n(\mathbf{x})(v_n - v_s)}{\partial t} = \rho_n(\mathbf{x})\dot{W}(\mathbf{x}) \approx -\nabla p(\mathbf{x}) \quad (\text{C.27})$$

A continuación, tomando el gradiente de la ec. C.14 y considerando una aproximación lineal en la velocidades, tenemos que,

$$\nabla p(\mathbf{x}) \approx \rho'(\mathbf{x})\nabla\mu(\mathbf{x}) - \frac{S'(\mathbf{x})}{\beta^2(\mathbf{x})}\nabla\beta(\mathbf{x}) \quad (\text{C.28})$$

Sustituyendo ahora esta ec. C.28 en la ec. C.27 y después de un calculo algebraico directo, se obtiene la siguiente ecuación para $\dot{W}(\mathbf{x})$,

$$\dot{W}(\mathbf{x}) = -\frac{\rho'(\mathbf{x})}{\rho_n(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})}\nabla\left(\beta(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})\right) + \left[\frac{S'}{\rho_n(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})} + \mu(\mathbf{x})\right]\frac{\nabla\beta(\mathbf{x})}{\beta(\mathbf{x})} \quad (\text{C.29})$$

C.2 Deducción de la Ec. (3.42) a partir de la Ec. (3.35)

Sea el operador de evolución de la entropía \dot{S}'_I para un superfluido en un marco de referencia v_s dado por la ec.(3.35) como,

$$\begin{aligned} \dot{S}'_I(t, 0) = \int d\mathbf{x} & \left[-\frac{\partial\beta(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x})}{\partial t} + \dot{\beta}(x)\dot{H}'(\mathbf{x}) - \frac{\partial\mu(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})}{\partial t}\dot{\rho}'(\mathbf{x}) - \right. \\ & \left. -\frac{\partial\beta(\mathbf{x})\dot{W}(\mathbf{x})}{\partial t}\dot{j}'(\mathbf{x}) - \frac{\partial\beta(\mathbf{x})j'_s(\mathbf{x})}{\partial t}\dot{u}'_s(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x})j'_s(\mathbf{x})\frac{\partial\dot{u}'_s(\mathbf{x})}{\partial t} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \beta(\mathbf{x}) \left(\hat{H}'(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \hat{\rho}'(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{j}'(\mathbf{x})}{\partial t} - j'_s(\mathbf{x}) \hat{u}'_s(\mathbf{x}) \right) \Big]. \quad (\text{C.30})$$

Por otra parte, tenemos que las ecuaciones para $\hat{\rho}'(\mathbf{x})$, $\hat{H}'(\mathbf{x})$ y $\hat{j}'(\mathbf{x})$ estan dadas por las ecs. (A.61)-(A.64) respectivamente, pero interpretadas en función de las variables de grano grueso, las cuales se escriben como,

$$\hat{\rho}'(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \hat{j}'(\mathbf{x}). \quad (\text{C.31})$$

$$\hat{H}'(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \hat{j}'_H(\mathbf{x}). \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\partial \hat{j}'(\mathbf{x})}{\partial t} = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}'(\mathbf{x}). \quad (\text{C.33})$$

y para el caso de $\hat{u}'_s(\mathbf{x})$ tenemos que esta se escribe como,

$$\hat{u}'_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{u}'_s(\mathbf{x}), \hat{H}'(\mathbf{x})] \quad (\text{C.34})$$

Adicionalmente, las ecuaciones para $\hat{\beta}$, $\frac{\partial \mu \beta}{\partial t}$, $\frac{\partial \beta \Omega}{\partial t}$ y $\hat{W}(\mathbf{x})$ estan dadas por las ecs. C.18, C.19, C.24 y C.29.

Si ahora se sustituyen en la ec. C.30 las ecs. C.31-C.34, C.18, C.19, C.24 y C.29, obtenemos la siguiente expresión para $\hat{S}'_{\bar{i}}$,

$$\hat{S}'_{\bar{i}}(t, 0) = \int d\mathbf{x} \left[-\langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} \left[-\left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho'} \right)_{s'} \nabla \cdot j'_s + \beta(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} \right)_{\rho'} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe} \left[- \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \nabla \cdot \mathbf{j}'_s - \beta(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \rho'(\mathbf{x})} \right)_u \nabla \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \right] + \\
& + \hat{H}'(\mathbf{x}) \left[- \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho'} \right)_{S'} \nabla \cdot \mathbf{j}'_s - \beta(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial u(\mathbf{x})} \right)_{\rho'} \nabla \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \right] - \\
& - \frac{\partial \beta(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x})}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{j}}'_s(\mathbf{x}) - \frac{\partial \beta(\mathbf{x}) \mathbf{j}'_s(\mathbf{x})}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}'_s(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x}) \mathbf{j}'_s(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}'_s(\mathbf{x})}{\partial t} - \\
& - \beta(\mathbf{x}) \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}'_H(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) \beta(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{j}'(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}'(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x}) \mathbf{j}'_s(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}'_s(\mathbf{x}) \left] \quad (C.35)
\end{aligned}$$

A continuación, se desarrollan las integraciones parciales de los siguientes términos integrales contenidos en la ec. C.35,

i.- Para el término integral $\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}'_H(\mathbf{x})$, integrando por partes se obtiene,

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}'_H(\mathbf{x}) &= \beta(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{j}}'_H(\mathbf{x}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \hat{\mathbf{j}}'_H(\mathbf{x}) \nabla \beta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\
&= - \int d\mathbf{x} \hat{\mathbf{j}}'_H(\mathbf{x}) \nabla \beta(\mathbf{x}) \quad (C.36)
\end{aligned}$$

donde se ha considerado que,

$$\beta(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{j}}'_H(\mathbf{x}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

ii.- Para el término $\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}'(\mathbf{x})$ su integración por partes conduce a,

$$\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}'(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{j}}'(\mathbf{x}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \hat{\mathbf{j}}'(\mathbf{x}) \nabla \cdot (\beta(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x})) d\mathbf{x} =$$

$$= - \int d\mathbf{x} \dot{j}'(\mathbf{x}) \nabla \cdot (\beta(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})) \quad (\text{C.37})$$

donde también se ha considerado que,

$$(\beta(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}))\dot{j}'(\mathbf{x})\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

iii).- Ahora, integrando por partes el término integral $\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x})W(\mathbf{x})\nabla \cdot \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x})$ se obtiene que,

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x})W(\mathbf{x})\nabla \cdot \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}) &= \beta(\mathbf{x})W(\mathbf{x})\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x})\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int d\mathbf{x} \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})\nabla \cdot W(\mathbf{x}) = \\ &= - \int d\mathbf{x} (\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}) + \hat{p}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}))\nabla \cdot W(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

donde se ha tomado que,

$$\beta(\mathbf{x})W(\mathbf{x})\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x})\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

y que,

$$\hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}) = \hat{\underline{T}}(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x})$$

iv).- En el caso del término integral $\int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x})j'_s(\mathbf{x})\dot{u}'_s$, integrando por partes tenemos que,

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) j'_s(\mathbf{x}) \dot{u}'_s = -\frac{i\hbar}{2m} \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) j'_s \left[\nabla \hat{B}'(\mathbf{x}) \cdot \hat{H}'(\mathbf{x}) \right] = \\
& = \hat{B}'(\mathbf{x}) (\beta(\mathbf{x}) j'_s(\mathbf{x}) \hat{H}'(\mathbf{x})) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \hat{H}'(\mathbf{x}) j'_s(\mathbf{x}) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int d\mathbf{x} \nabla (\beta(\mathbf{x}) j'_s(\mathbf{x})) \hat{B}'(\mathbf{x}) \quad \text{C.39}
\end{aligned}$$

donde en esta expresión se tiene que,

$$\hat{B}'(\mathbf{x}) \equiv \frac{\psi'(\mathbf{x})}{\langle \psi'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}}} - \frac{\psi'^{\dagger}(\mathbf{x})}{\langle \psi'^{\dagger}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}}}$$

con la cual se define el operador asociado a la velocidad del superfluido como,

$$\dot{u}'_s(\mathbf{x}) = -\frac{i\hbar}{2m} \nabla \hat{B}'(\mathbf{x}) \quad \text{C.40}$$

donde en estas dos últimas ecuaciones se han empleado las ecs. (A.7) y (A.19). Además, respecto a el valor esperado de la función de onda asociada al superfluido se tiene que,

$$\dot{n}_0(\mathbf{x}) \approx \langle \psi'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} \langle \psi'^{\dagger}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}}$$

con $\langle \psi'(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}} = \langle \psi'^{\dagger}(\mathbf{x}) \rangle_{\bar{I}}$.

Por otra parte respecto a los dos primeros términos del lado derecho de la integral C.39 se tiene que,

$$\hat{B}'(\mathbf{x}) (\beta(\mathbf{x}) j'_s(\mathbf{x}) \hat{H}'(\mathbf{x})) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

v).

$$\hat{H}'(\mathbf{x})j'_s(\mathbf{x})\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

vi).- Para el término integral $\int d\mathbf{x} \frac{\beta(\mathbf{x})j'_s(\mathbf{x})}{\partial t} \hat{u}'_s(\mathbf{x})$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \frac{\partial \beta(\mathbf{x})}{\partial t} \hat{u}'_s(\mathbf{x}) &= -\frac{i\hbar}{2m} \beta(\mathbf{x})j'_s(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{B}'(\mathbf{x})}{\partial t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\hbar}{2m} \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x})j'_s(\mathbf{x}) \frac{\partial \nabla \hat{B}'(\mathbf{x})}{\partial t} = \\ &= \int d\mathbf{x} \beta(\mathbf{x})j'_s(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{u}'_s(\mathbf{x})}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{C.41}$$

Finalmente, considerando $\rho(\mathbf{x}) = \rho_n(\mathbf{x})$ tenemos que el siguiente término integral se escribe como,

$$\int d\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_n(\mathbf{x})} \nabla(\mu(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}))\hat{j}'_q(\mathbf{x}) \approx \int d\mathbf{x} \nabla(\mu(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}))\hat{j}'_q(\mathbf{x}) \quad \text{C.42}$$

Por lo tanto, de cálculos algebraicos directos en la ec. C.35 y considerando las integraciones indicadas en las ecs. C.36-C.42, se tiene que \hat{S}'_I se transforma en,

$$\begin{aligned} \hat{S}'_I(t, 0) = & \int d\mathbf{x} \left[(\nabla\beta(\mathbf{x}))\hat{j}'_q(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x})\Delta\hat{p}'(\mathbf{x})\nabla \cdot W(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. - \beta(\mathbf{x})\alpha'_s(\mathbf{x}, t)\nabla \cdot j'_s(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{x})\hat{\underline{L}}'(\mathbf{x}) \cdot \nabla W(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad \text{(C.43)}$$

donde se han definido las siguientes expresiones:

$$\hat{j}'_q(\mathbf{x}) \equiv \hat{j}'_H(\mathbf{x}) - \left(\frac{S'(t)}{\beta(\mathbf{x})\rho_n(\mathbf{x})} + \frac{\hat{\rho}(\mathbf{x})}{\hat{\rho}_n(\mathbf{x})}\mu(\mathbf{x}) \right) \hat{j}'(\mathbf{x}), \quad \text{(C.44)}$$

$$\Delta\hat{p}'(\mathbf{x}) \equiv \hat{p}(\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho (\hat{H}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{H}(\mathbf{x}) \rangle_{qe}) - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_u (\hat{\rho}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{\rho}(\mathbf{x}) \rangle_{qe}), \quad (\text{C.45})$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}'_s(\mathbf{x}) \equiv & \frac{i\hbar}{2m\sqrt{n_0(\mathbf{x})}}(\psi'(\mathbf{x}) - \psi'^{\dagger}(\mathbf{x})) - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho'}\right)_{S'} (\hat{H}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{H}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}) - \\ & - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \mu \beta}{\partial \rho'}\right)_{S'} (\hat{\rho}'(\mathbf{x}) - \langle \hat{\rho}'(\mathbf{x}) \rangle_{qe}), \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

donde la ec. C.43 es la ec. (3.42) para la evolución del operador de entropía en un marco de referencia en movimiento. La ec. C.44 es la ecuación para la densidad del flujo de calor de la ec. (3.43); la ec. C.45 es el operador de fluctuación de la presión de la ec. (3.44) y la ec. C.46 es el operador asociado a la componente superfluida dado por la ec. (3.47).

Apéndice D

Deducción de los Flujos no Proyectados en un Marco de Referencia Fijo en Función de sus Partes no Proyectadas en un Marco de Referencia Móvil.

Sea el operador de proyección de la ec. (2.43),

$$\mathcal{P}\hat{A} = \int da \int da' \hat{f}(\mathbf{a}') W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \text{Tr}\{\hat{A}\hat{f}(\mathbf{a}', t)\} \quad (\text{D.1})$$

En la aproximación local y Markoviana de la ecuación de FP tenemos que se cumplen las siguientes relaciones (ver sección 2.4),

$$\hat{\rho}_{CG}(\mathbf{a}) = \frac{\hat{f}(\mathbf{a})}{W(\mathbf{a})} \quad (\text{D.2})$$

con,

$$\hat{f}(\mathbf{a}) = \delta(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \quad (\text{D.3})$$

donde esta última igualdad se escribe de acuerdo con las ecs. (2.73) y (2.74). Ahora, de las ecs. (2.32) y (2.36) se tiene que,

$$\int da' W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \frac{1}{W(\mathbf{a})} \quad (\text{D.4})$$

Por lo tanto, el operador de proyección \mathcal{P} de la ec. D.1, en una aproximación local y Markoviana se expresa como,

$$\mathcal{P}\hat{\mathbf{A}} = \int da\delta(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \text{Tr} \left[\hat{\mathbf{A}} \hat{\rho}_{CC}(\mathbf{a}) \right] = \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}} \quad (\text{D.5})$$

Sea ahora una variable de grano grueso \hat{a}'_n , tal que su parte no proyectada esta dada por la expresión,

$$Q\hat{a}'_n \equiv (1 - \mathcal{P})\hat{a}'_n \quad (\text{D.6})$$

Entonces de las ecs. D.5 y D.6 obtenemos que,

$$Q\hat{a}'_n \equiv \hat{a}'_n - \mathcal{P}\hat{a}'_n = \hat{a}'_n - a'_n|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}} = 0 \quad (\text{D.7})$$

Por otro lado, de las ecs. (3.49)-(3.51) para las partes no proyectadas de los flujos en un marco de referencia en movimiento tenemos que,

$$\hat{j}'_q(\mathbf{x}) \approx Q\hat{I}'_E(\mathbf{x}) = Q\hat{j}'_H(\mathbf{x}). \quad (\text{D.8})$$

$$\underline{\hat{T}}'(x) \approx Q \hat{I}'_j = Q \hat{\mathbf{T}}'(x), \quad \text{D.9}$$

$$\hat{a}'_s(x) \approx Q \hat{I}'_s(x), \quad \text{D.10}$$

y para las partes no proyectadas para los flujos en un marco de referencia fijo, de las ecs. (3.84)-(3.87), tenemos que,

$$\hat{j}_q(x) \approx Q \hat{I}_E(x) = Q \hat{j}_H(x). \quad \text{D.11}$$

$$\underline{\hat{T}}(x) \approx Q \hat{I}_j = Q \hat{\mathbf{T}}(x), \quad \text{D.12}$$

$$\hat{a}_s(x) \approx Q \hat{I}_s(x), \quad \text{D.13}$$

donde las expresiones para el flujo de energía y para el tensor de los esfuerzos se puede definir como.

$$\hat{j}_H(x) = v(x) \hat{H}(x) \quad \text{D.14}$$

$$\hat{T}_{ik}(x) = \rho v_i(x) v_k(x) + p(x) \delta_{ik} \quad \text{D.15}$$

donde esta última ecuación se escribe en analogía de la ec. (A.70), pero interpretada como una ecuación para variables de grano grueso.

Ahora si consideramos un marco de referencia en movimiento con velocidad v_s , tenemos del principio de relatividad Galileano que el fluido en dicho marco de referencia se moverá con una velocidad relativa,

$$v'(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x}) \quad (\text{D.16})$$

por lo tanto, las velocidades de las componentes del superfluido en ambos marcos de referencia estan relacionados por la expresiones,

$$v'_n(\mathbf{x}) = v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x}) \quad (\text{D.17})$$

$$v'_s(\mathbf{x}) = v_s(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x}) \quad (\text{D.18})$$

Por otra parte, las relaciones entre las variables relevantes en ambos sistemas estan dadas por las ecs. (A.16)-(A.19), pero interpretadas como ecuaciones para variables de grano grueso. Entonces tenemos que,

$$\hat{H}(\mathbf{x}) = \hat{H}'(\mathbf{x}) + \hat{v}_s(\mathbf{x})\hat{j}'(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\hat{v}_s^2(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x}). \quad (\text{D.19})$$

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \hat{\rho}'(\mathbf{x}). \quad (\text{D.20})$$

$$\hat{j}(\mathbf{x}) = \hat{j}'(\mathbf{x}) + \hat{v}_s(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x}). \quad (\text{D.21})$$

$$\hat{u}_s(\mathbf{x}) = \hat{u}'_s(\mathbf{x}). \quad (\text{D.22})$$

A continuación, si sustituimos la expresión para $v(\mathbf{x})$ despejada de la ec. D.16 y la expresión $\hat{H}(\mathbf{x})$ de la ec. D.19, en la definición de $\hat{j}_H(\mathbf{x})$ de la ec. D.14 se obtiene directamente que,

$$\begin{aligned} \hat{j}_H(\mathbf{x}) = & \left(\hat{H}'(\mathbf{x}) + \hat{v}_s(\mathbf{x})\hat{j}'(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\hat{v}_s^2(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x}) \right) v_s(\mathbf{x}) + \\ & + \frac{1}{2}\hat{v}_s^2(\mathbf{x})\hat{j}'(\mathbf{x}) + \hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_s(\mathbf{x}) + \hat{j}'_H(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

donde se han definido las siguientes expresiones,

$$\hat{j}'_H(\mathbf{x}) \equiv v'(\mathbf{x})\hat{H}'(\mathbf{x}) = (v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x}))\hat{H}'(\mathbf{x}) \quad (\text{D.24})$$

$$\hat{\mathbf{T}}'(\mathbf{x}) \equiv v'(\mathbf{x})\hat{j}'(\mathbf{x}) = (v_n(\mathbf{x}) - v_s(\mathbf{x}))\hat{j}'(\mathbf{x}) \quad (\text{D.25})$$

$$\hat{j}'(\mathbf{x}) \equiv v'(\mathbf{x})\hat{\rho}'(\mathbf{x}) \quad (\text{D.26})$$

Esencialmente la ec. D.23 nos relaciona los flujos de energía en ambos sistemas de referencia.

Ahora procediendo de forma análoga obtendremos la relación entre \hat{T}'_{ik} y \hat{T}'_{ik} . Para obtener dicha relación despejemos la expresión para $v(\mathbf{x})$ de la ec. D.16 y la sustituimos en la ec. D.15. Después de un calculo directo, obtenemos que,

$$\begin{aligned}\hat{T}_{ik}(x) = & \rho(x)v_{s_i}(x)v_{s_k}(x) + \rho(x)v'_i(x)v_{s_k}(x) - \rho v_{s_i}(x)v'_k(x) + \\ & + \rho v'_i(x)v'_k(x) + p(x)\delta_{ik}\end{aligned}\quad (\text{D.27})$$

si definimos $\hat{T}'_{ik}(x)$ por analogía con la ec. D.15 como,

$$\hat{T}'_{ik}(x) = \hat{\rho}'v'_i(x)v'_k(x) + \hat{p}(x)\delta_{ik}\quad (\text{D.28})$$

y empleando las ecs. D.20 y D.26 en la ec. D.27 esta se rescribe como,

$$\hat{T}_{ik}(x) = \hat{T}'_{ik}(x) + v_{s_i}(x)\hat{j}'_k(x) - \hat{j}'_i(x)v_{s_k}(x)\quad (\text{D.29})$$

En cuanto a la relación entre las corrientes \hat{I}_s en ambos marcos de referencia, de las ecs. (4.13) y (4.25) tenemos que se cumple que,

$$\hat{I}_s(\mathbf{x}) = \hat{I}'_s(\mathbf{x})\quad (\text{D.30})$$

Establecidos los resultados preliminares de las ecs. D.8-D.30, ya estamos preparados para deducir las relaciones que existen entre las partes no proyectadas de los flujos en ambos sistemas de referencia. Concretamente en la ec. D.11 sustituimos la ec. D.23 y después de un cálculo algebraico directo en el cual usamos la ec. D.7, obtenemos que D.11 se escribe como.

$$\hat{j}_q(x) = Q\hat{j}_H(x) = Q\hat{T}'_{ik}(x) \cdot v_{s_i}(x) - Q\hat{j}'_H(x)\quad (\text{D.31})$$

Tomando ahora en cuenta las definiciones de las ecs. D.8 y D.9, la ec. D.31 se escribe como,

$$\hat{j}_q(x) = \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}) \cdot v_s(\mathbf{x}) + \hat{j}'_q(x) \quad (\text{D.32})$$

Analogamente de la ec. D.29 sustituyendola en la ec. D.12 tenemos que esta última ecuación se espresa como,

$$\hat{\underline{T}}(\mathbf{x}) = \hat{\underline{T}}'(\mathbf{x}) \quad (\text{D.33})$$

donde en la deducción de esta ecuación hemos empleado las ecs. D.7 y D.9.

Finalmente para las ecs. D.13 y D.10 de la ec. D.30 tenemos que,

$$\hat{\alpha}_s(x) = \hat{\alpha}'_s(x) \quad (\text{D.34})$$

Las ecs. D.32, D.33 y D.34 son las ecs. (3.88), (3.89) y (3.90) utilizadas en la sección 3.2.2.

Apéndice E

Deducción de los Términos de Arrastre u_n y de Difusión \mathcal{D}_{mn} de la Ecuación de FP Local para el Helio Superfluido.

Sean los términos de arrastre $u_n(x)$ definidos por la ec. (2.89) como,

$$u_m(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \equiv -\nabla \cdot \left(I_m(\mathbf{x}) + \sum_{mn} \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla F_n(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \right), \quad (\text{E.1})$$

donde $I_m = \langle \hat{I}_m \rangle_{CG}$ son los valores esperados de las corrientes asociadas a las variables relevantes \hat{a}_m , \mathcal{L}_{mn} son las funciones de correlación entre las partes no proyectadas de las corrientes \hat{j}_n y \hat{j}_m , y F_n son los multiplicadores de Lagrange.

En nuestro caso concreto para el Helio superfluido $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \{\hat{\rho}(\mathbf{x}), \hat{H}(\mathbf{x}), \hat{j}(\mathbf{x}), \hat{u}_s(\mathbf{x})\}$, y los operadores de los flujos o corrientes asociados a las variables \hat{a}_m estan dados por las expresiones, $\{\hat{I}_\rho, \hat{I}_E, \hat{I}_j, \hat{I}_s\} = \{\hat{I}_\rho, \hat{j}_H, \hat{\underline{I}}, \hat{I}_s\}$, correspondientes a las ecs. (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13) para un marco de referencia en fijo. En el caso de las funciones de correlación \mathcal{L}_{mn} estas estan dadas por las ecs. (3.99),(3.101), (3.104),(3.109), (3.111), (3.113), (3.117) y (3.118). Por lo tanto procediendo de manera individual para cada variable \hat{a}_m , tenemos que.

ii.-Para la densidad del número de partículas sustituyendo en la ec. E.1 la expresión para I_j dada en la ec. (3.10) obtenemos.

$$u_\rho(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}), \quad (\text{E.2})$$

donde.

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \rho_n(\mathbf{x})\mathbf{v}_n(\mathbf{x}) + \rho_s(\mathbf{x})\mathbf{v}_s(\mathbf{x}). \quad (\text{E.3})$$

ii).- Para la densidad de energía, sustituimos la ec. (3.11), y las funciones $\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{j}_{q_k})$ y $\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{T}_{kl})$ en la ec. E.1, por lo tanto esta última se escribe como,

$$u_E(\mathbf{x}) = -\nabla_i \left(j_{H_i}(\mathbf{x}) + \mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{j}_{q_k}) \nabla_k F_E(\mathbf{x}) + \mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{T}_{kl}) \nabla_l F_{j_k}(\mathbf{x}) \right), \quad (\text{E.4})$$

a continuación sustituyendo las expresiones particulares de las funciones $\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{j}_{q_k})$ y $\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{T}_{kl})$ de las ecs. (3.104) y (3.109) en la ec. E.4 con lo que tenemos,

$$\begin{aligned} u_E(\mathbf{x}) = & -\nabla_i j_{H_i}(\mathbf{x}) + \\ & + \nabla_i \left[\kappa(x) \delta_{ik} + \frac{\eta(\mathbf{x})}{T(x)} \left(\nabla v_s^2(x) \delta_{ik} + \frac{1}{3} v_{s_i}(x) v_{s_k}(x) \right) + \frac{\zeta_2(x)}{T(x)} v_{s_i}(x) v_{s_k}(x) \right] \nabla T(\mathbf{x}) + \\ & + \nabla_i \left[\eta(x) T(x) \left(\delta_{ik} v_{s_l}(x) + \delta_{ik} v_{s_m}(x) - \frac{2}{3} v_{s_i}(x) \right) \nabla_l \left(\frac{v_{n_k}(x)}{T(x)} \right) + \right. \\ & \left. + \zeta_1(x) T(x) \cdot v_{s_i}(x) \delta_{ik} \nabla_l \left(\frac{v_{n_k}(x)}{T(x)} \right) + \zeta_2(x) T(x) \cdot v_{s_i}(x) \delta_{ik} \nabla_l \left(\frac{v_{n_k}(x)}{T(x)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

donde se ha usado que $F_E = 1/T(x)$ y $F_j = -\frac{v_n(x)}{T(x)}$ de acuerdo con las ecs. (3.8).

iii).- Para la densidad del flujo de ímpetud \hat{j} , tenemos de la ec. E.1, que la ecuación para su término de arrastre se expresa como,

$$u_j(\mathbf{x}) = -\nabla_k \left(T_{ik}(x) + \mathcal{L}(\hat{T}_{ik}, \hat{T}_{lm}) \nabla_l F_{jm}(x) + \mathcal{L}(\hat{T}_{ik}, \hat{j}_q) \nabla_l F_E(x) + \mathcal{L}(\Delta \hat{p}_i, \hat{\alpha}_{sk}) \nabla_l F_{v_s}(x) \right), \quad (\text{E.6})$$

Ahora sustituyendo la segunda de las ecs. (3.12) para $T_{ik}(x)$, y las ecs. (3.111), (3.109) y (3.113) para $\mathcal{L}(\hat{T}_{ik}, \hat{T}_{lm})$, $\mathcal{L}(\hat{T}_{ik}, \hat{j}_q)$ y $\mathcal{L}(\Delta \hat{p}_i, \hat{\alpha}_{sk})$ respectivamente, en la ec. E.6, además de considerar los multiplicadores de Lagrange F_E , F_{v_s} y F_j definidos en las ecs. (4.8) obtenemos que,

$$\begin{aligned} u_{j_i}(\mathbf{x}) = & -\nabla_k T_{ik}(x) + \nabla_k \left[\eta(x) T(x) \left((\delta_{ik} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{lm} \right) \nabla_l \frac{v_{nm}(x)}{T(x)} + \zeta_1(x) T(x) \delta_{ik} \nabla_l \frac{v_{nm}(x)}{T(x)} - \zeta_2(x) T(x) \delta_{ik} \nabla_l \frac{v_{nm}(x)}{T(x)} \right] + \\ & + \nabla_k \left[\frac{\eta(x)}{T(x)} \left(v_{sk}(x) \delta_{il} + v_{si}(x) \delta_{lk} - \frac{2}{3} \delta_{ik} v_{sl}(x) \right) \nabla_l T(x) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\zeta_2(x)}{T(x)} v_{sl}(x) \delta_{ik} + \frac{\zeta_1(x)}{T(x)} v_{sl}(x) \delta_{li} \right) \nabla_l T(x) \right] - \nabla_k \left(\zeta_1(x) T(x) \delta_{ik} \nabla_l \frac{j_s(x)}{T(x)} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

iv).- y para la componente superfluida tenemos de la ec. E.1 que,

$$u_{v_s}(\mathbf{x}) = -\nabla \left(I_s(x) + \mathcal{L}(\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_s) \nabla F_{v_s}(x) - \mathcal{L}(\hat{\alpha}_s, \Delta \hat{p}) \nabla F_{j_k}(x) \right). \quad (\text{E.8})$$

sustituyendo ahora las ecs. (3.117) y (3.118) para $\mathcal{L}(\hat{\alpha}_s, \Delta \hat{p})$ y $\mathcal{L}(\hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_s)$, en la ec. E.8. esta se rescribe como.

$$u_{v_s}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \left(I_s(x) + \zeta_3(x) \nabla \frac{j_s(x)}{T(x)} + \zeta_4 \nabla \frac{v_n(x)}{T(x)} \right), \quad (\text{E.9})$$

donde además se han empleado las ecs. (3.8) para $F_{v_s}(x)$ y $F_j(x)$

Por otro lado, para el caso de los coeficientes de 'difusión' tenemos de la ec. (2.90) que estos se expresan como,

$$\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; a) = -\nabla \cdot \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.10})$$

Ahora, estos términos de 'difusión' se particularizan de acuerdo con las variables relevantes indicadas al inicio de éste apéndice y se escriben como,

$$\mathcal{D}_{EE}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_i \mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{j}_{q_k}) \nabla_k \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.11})$$

$$\mathcal{D}_{jj_{ik}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_l \mathcal{L}(\hat{T}_{il}, \hat{T}_{km}) \nabla_m \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.12})$$

$$\mathcal{D}_{v_s v_s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla \mathcal{L}(\hat{\alpha}_{s_i}, \hat{\alpha}_{s_k}) \nabla \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.13})$$

$$\mathcal{D}_{Ej_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_l \mathcal{L}(\hat{j}_{q_l}, \hat{T}_{ik}) \nabla_l \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.14})$$

$$\mathcal{D}_{jE_k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_i \mathcal{L}(\hat{T}_{ik}, \hat{j}_{q_l}) \nabla_l \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.15})$$

$$\mathcal{D}_{v_s j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_i \mathcal{L}(\hat{\alpha}_{s_i}, \Delta \hat{p}_k) \nabla_k \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (\text{E.16})$$

$$\mathcal{D}_{j v_s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_k \mathcal{L}(\Delta \hat{p}_k, \hat{\alpha}_{s_i}) \nabla_i \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (\text{E.17})$$

Ahora sustituyendo en la ec. E.11 la ec. (3.104) para $\mathcal{L}(\hat{j}_q, \hat{j}_q)$, se transforma en,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{EE}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\nabla_i \left(T^2(\mathbf{x}) \kappa(\mathbf{x}) \delta_{ik} + \right. \\ &\left. + T(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) (v_n^2 \delta_{ik} + \frac{1}{3} v_{ni} v_{nk}) + T(\mathbf{x}) \zeta_2(x) v_{ni} v_{nk} \right) \nabla_k \cdot \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Análogamente, sustituyendo en la ec. E.12 la ec. (3.111) para $\mathcal{L}(\hat{T}_{il}, \hat{T}_{km})$, obtenemos que,

$$\mathcal{D}_{jj_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_l \left(T(x) \eta(x) g_{iklm} + T(x) \zeta_2(x) \varepsilon_{il} \delta_{km} \right) \nabla_m \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (\text{E.19})$$

donde,

$$g_{iklm} = \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{lm} \quad (\text{E.20})$$

Sustituyendo en la ec. E.13 la ecuación para $\mathcal{L}(\hat{\alpha}_{s_i}, \hat{\alpha}_{s_k})$ dada por la ec. (3.118) tenemos que se transforma en.

$$\mathcal{D}_{v_s v_s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_i \left(T(\mathbf{x}) \zeta_3(\mathbf{x}) \delta_{ik} \right) \nabla_k \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.21})$$

Analogamente sustituyendo en la ec. E.14, la ec. (3.109) para $\mathcal{L}(\hat{j}_{q_l}, \hat{T}_{ik})$ dicha ec. E.14 se transforma en,

$$\mathcal{D}_{E j_j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_l \left(T(\mathbf{x}) \eta(x) g_{iklm} v_{nm}(\mathbf{x}) + \zeta_2(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \delta_{ik} v_{sl}(\mathbf{x}) \right) \nabla_k \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.22})$$

Sustituyendo en la ec. E.15 la ec. (3.109) para $\mathcal{L}(\hat{T}_{ik}, \hat{j}_{q_l})$ tenemos que,

$$\mathcal{D}_{j_k E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_i \left(T(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) g_{iklm} v_{nm}(\mathbf{x}) + \zeta_2(\mathbf{x}) T(x) \delta_{ik} v_{sl} \right) \nabla_l \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.23})$$

Si en la ec. E.16. empleamos la función $\mathcal{L}(\Delta \hat{p}_k, \hat{\alpha}_{s_i})$ de la ec. (3.113) tenemos que.

$$\mathcal{D}_{j_v_s}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_k \left(T(\mathbf{x}) \zeta_1(\mathbf{x}) \delta_{ki} \right) \nabla_i \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.24})$$

y finalmente de la ec. E.17 tenemos al sustituir en esta la función $\mathcal{L}(\hat{\alpha}_{s_i}, \Delta \hat{p}_k)$, definida apartir de la ec. (3.117) se transforma en,

$$\mathcal{D}_{v_s j_j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\nabla_i \left(T(\mathbf{x}) \zeta_4(\mathbf{x}) \delta_{ik} \right) \nabla_k \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{E.25})$$

Determinadas las funciones u_n y \mathcal{D}_{mn} de hecho se tiene definida la ecuación de FP para el Helio superfluido, la cual será empleada obtener la ecuaciones de Langevin de dicho sistema.

Apéndice F

Deducción de las Ecuaciones no lineales de Langevin en el Espacio de Configuración y de Fourier para el Helio superfluido.

Sean los operadores microscópicos $\{\hat{a}_n(\mathbf{x})\}_{micro} = \{\hat{\rho}(\mathbf{x}), \hat{H}(\mathbf{x}), \hat{j}(\mathbf{x}), \hat{u}_s(\mathbf{x})\}_{micro}$ asociados a las densidades de número de partículas, de energía, de ímpetu y velocidad del superfluido, las variables asociadas a ellas son las más relevantes para la descripción completa del Helio superfluido. Ahora, a las variables de grano grueso asociadas a dichos operadores microscópicos las denotaremos como, $\{a_n(\mathbf{x})\} = \{\hat{\rho}(\mathbf{x}), \hat{H}(\mathbf{x}), \hat{j}(\mathbf{x}), \hat{u}_s(\mathbf{x})\}$, cuyos valores esperados representamos como : $\{a_n(\mathbf{x})\} = \{\rho(\mathbf{x}), E(\mathbf{x}), j(\mathbf{x}), v_s(\mathbf{x})\}$ respectivamente, donde tenemos que $a_n(\mathbf{x}) \equiv \langle \hat{a}_n(\mathbf{x}) \rangle_{\hat{\rho}}$, aquí $\langle \rangle_{\hat{\rho}}$ indica la operación de promedio tomada respecto a uno cualquiera de los siguientes operadores: $\hat{\rho}_{FP}$, $\hat{\rho}_i$, o $\hat{\rho}_{qc}$; y la función de distribución asociada a los valores esperados de dichas variables de grano grueso las denotaremos como $f(\rho(\mathbf{x}), H(\mathbf{x}), j(\mathbf{x}), v_s(\mathbf{x}), t)$.

A continuación deduciremos las ecuaciones de no lineales de Langevin en el espacio de configuración para el Helio superfluido. Sin embargo, esta construcción no es inmediata ya que tenemos que realizar los siguientes pasos previos a la deducción de dichas ecuaciones.

i).- Especificar la ecuación de FP para el Helio superfluido en el espacio de Fourier, análoga a la ec. (1.34) para un fluido simple. Dicha particularización se hará a partir de la ec. (3.120) que es una ecuación de FP local del Helio superfluido definida en el espacio

de configuración.

Concretamente, para construir la ecuación de FP en el espacio de Fourier se necesita determinar las funciones $\Lambda_{mn}(t)$ y $M_{mn}(t)$ que están relacionadas con las transformadas de Fourier de las varianzas de los términos fluctuantes $\tilde{\xi}_n(x)$, de las funciones locales $\mathcal{G}_n(x)$ y gradientes de estas funciones locales, que aparecen en la definición de los flujos aleatorios $J_n^R(x, t)$. Por lo tanto, las $M_{mn}(t)$ se determinarán con ayuda de las funciones locales y los gradientes de $\mathcal{G}(x)$, $\mathcal{G}'(x)$, $\mathcal{G}_2(x)$ y $\mathcal{G}_3(x)$. Funciones locales que como hemos dicho definen los flujos aleatorios dados por las ecs. (3.122)-(3.124). Las funciones $M_{mn}(t)$ son análogas a las ecuaciones para un fluido simple dadas por las ecs. (1.20)-(1.22). Las funciones $\Lambda_{mn}(t)$ se determinan en analogía de las ecs. (1.23)-(1.27), mediante la transformada de Fourier de las ecuaciones para las varianzas de las componentes aleatorias de los flujos y que están definidas en el espacio de coordenadas por las ecs. (3.129)-(3.134).

ii).- Con el propósito de determinar la forma específica de las funciones locales $\mathcal{G}(x)$, $\mathcal{G}'(x)$, $\mathcal{G}_2(x)$ y $\mathcal{G}_3(x)$ se emplea la transformada inversa de las funciones $\mathcal{D}_{mn}(t)$ definidas por las funciones $\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(x)$. Estas funciones de correlación, de acuerdo con la ec. (1.37), se supondrán idénticas a las funciones de correlación de las partes determinísticas de los flujos. Por lo tanto, con los resultados de este inciso quedan determinadas las funciones locales $\mathcal{G}_n(x)$ en función de los coeficientes de transporte locales del Helio superfluido, de acuerdo como se presentan en las ecs. (3.135)-(3.140).

iii).- Con los resultados de los incisos i y ii se construyen las ecuaciones no lineales de Langevin en el espacio de Fourier para el Helio superfluido. Es decir, se particularizan para el Helio superfluido las ecs. (1.15).

iv).- Finalmente, se toman las transformadas inversas de las ecuaciones no lineales de Langevin en el espacio de Fourier, obtenidas en el inciso anterior, para deducir las ecuaciones de no lineales Langevin en el espacio de coordenadas. Estas últimas ecuaciones definen las ecuaciones para la hidrodinámica fluctuante no lineal del Helio superfluido dadas por las ecs. (3.145)-(3.148).

Presentada la estrategia a seguir, la abordaremos en seguida.

F.1 Construcción de la Ecuación de FP no lineal en el Espacio de Fourier para el Helio Superfluido.

Dada la ecuación de FP en el espacio de configuración para el Helio Superfluido, determinaremos la ecuación de FP para el Helio superfluido pero en espacio de Fourier. De acuerdo con la ec. (2.85) que es la forma general de una ecuación de FP en el espacio de Fourier (de la cual la ec. (1.29) es el caso particular de una ecuación de FP para un fluido simple), tenemos que para el Helio superfluido podemos escribir la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial f(\mathbf{a}, t)}{\partial t} + \sum_{m,n} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(u_m(\mathbf{a}) - \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial a_n} \right) f(\mathbf{a}, t) = 0 \quad (\text{F.1})$$

Ahora de acuerdo con nuestra notación tenemos que.

$$\mathbf{a}(t) = \{a_n(t)\}, \quad a_n(t) \equiv a_{n\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.2})$$

A continuación de acuerdo con la selección de variables relevantes para la descripción del Helio superfluido, esta ec. F.2 se particulariza como.

$$\mathbf{a}(t) = \{\rho_{\mathbf{k}}(t), H_{\mathbf{k}}(t), j_{\mathbf{k}}(t), v_{s\mathbf{k}}(t)\} \quad (\text{F.3})$$

donde las variables $a_{n\mathbf{k}}(t)$ se expresan en función de las $a_n(\mathbf{x}, t)$ empleando las ecs. (1.16)-(1.17) como ¹,

$$a_n(t) \equiv a_{n\mathbf{k}}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (\text{F.4})$$

¹La variable $j_{\mathbf{k}}$ esta relacionada con el tensor de los esfuerzos.

$$a_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{n\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.5})$$

Además, la función $f(\mathbf{a}, t)$ es una funcional explícita de las a_n , la cual se expresa como.

$$f(\mathbf{a}, t) = f(\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), H_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), j_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), v_{s\mathbf{k}}(\mathbf{x}), t) \quad (\text{F.6})$$

y para los términos de arrastre tenemos que,

$$u_m(t) \equiv u_{m\mathbf{k}}(t)$$

$$\{u_m(t)\} = \{u_{\rho\mathbf{k}}(t), u_{E\mathbf{k}}(t), u_{j\mathbf{k}}(t), u_{v_s\mathbf{k}}(t)\} \quad (\text{F.7})$$

$$u_n(t) \equiv u_{n\mathbf{k}}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} u_n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (\text{F.8})$$

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} u_{n\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.9})$$

$$\{u_m(x, t)\} = \{u_{\rho}(x, t), u_E(x, t), u_j(x, t), u_{v_s}(x, t)\} \quad (\text{F.10})$$

Las expresiones particulares para las $u_m(x, t)$ estan dadas por las ecs. E.2-E.9 del Apéndice E. Además de la ec. (1.30) tenemos que,

$$\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) = M_{mm'}(\mathbf{a}) M_{nn'}(\mathbf{a}) \Lambda_{mn'} \quad (\text{F.11})$$

donde para determinar las $\Lambda_{mn'}$, primero se definen las transformadas de Fourier de las funciones $\tilde{\xi}_n(x)$ y de $\mathcal{G}_n(x)$ que aparecen en las ecs.(3.122)-(3.124) respectivamente.

Concretamente, definiendo las transformadas de Fourier de los términos fluctuantes $\tilde{\xi}_n(\mathbf{x}, t)$ en analogía de las ecs. F.4-F.5 tenemos que,

$$\tilde{\xi}_n(t) \equiv \tilde{\xi}_{n\mathbf{k}}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\xi}_n(\mathbf{x}, t). \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (\text{F.12})$$

$$\tilde{\xi}_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\xi}_{n\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.13})$$

A continuación para las varianzas de las funciones $\tilde{\xi}_n(\mathbf{x}, t)$ tenemos las siguientes relaciones obtenidas a partir de las ecs. F.13.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\xi}_m(\mathbf{x}, t), \tilde{\xi}_{m'}(\mathbf{x}, t) \rangle_{CG} &= \left\langle \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t) \cdot \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}}(t) \right\rangle_{CG} = \\ &= \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t), \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}}(t) \rangle_{CG} \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

donde de la definición de la función delta de grano grueso de la ec. (B.1), tenemos que,

$$\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{F.15})$$

Por lo tanto, despejando de la ec. F.14 la transformada de Fourier para las varianzas tenemos que,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t), \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}'}(t) \rangle_{CG} &= V \langle \tilde{\xi}_m(\mathbf{x}, t_1), \tilde{\xi}_{m'}(\mathbf{x}, t_2) \rangle_{CG} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{-1} = \\ &= V \delta_{mm'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{-1} \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

donde en esta última igualdad se han empleado las propiedades de las varianzas de $\tilde{\xi}_m(\mathbf{x}, t)$ dadas por las ecuaciones (3.129)-(3.134)² y además se ha empleado la siguiente definición,

$$\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{-1} \equiv \frac{1}{\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}} \quad (\text{F.17})$$

Por otra parte, sustituyendo en el lado izquierdo de la ec. F.16 la ec. F.12 tenemos,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t_1), \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}'}(t_2) \rangle_{CG} &= \\ &= \langle \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\xi}_m(\mathbf{x}, t_1), \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \tilde{\xi}_{m'}(\mathbf{x}, t_2) \rangle_{CG} = \\ &= \int d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \langle \tilde{\xi}_m(\mathbf{x}, t_1), \tilde{\xi}_{m'}(\mathbf{x}, t_2) \rangle_{CG} = V \delta_{mm'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{-1} \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Ahora, las transformadas de Fourier de las varianzas de los términos fluctuantes dadas por las ecs. (3.129)-(3.134) se escriben de acuerdo con las ecs. F.12-F.17 como,

²Evidentemente para el caso del término fluctuante asociado a el tensor de los esfuerzos sin traza en lugar de la delta debe usarse la función g_{iklm} , no obstante la ec. F.16 es formalmente correcta.

$$\langle \tilde{\xi}_{q\alpha\mathbf{k}}(t_1), \tilde{\xi}_{q\beta\mathbf{k}'}(t_2) \rangle_{CG} = \Lambda_{q\alpha\mathbf{k}, q\beta\mathbf{k}'} \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{F.19})$$

$$\langle \tilde{\xi}_{\alpha\beta\mathbf{k}}(t_1), \tilde{\xi}_{\mu\nu\mathbf{k}'}(t_2) \rangle_{CG} = \Lambda_{\alpha\beta\mathbf{k}, \mu\nu\mathbf{k}'} \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{F.20})$$

$$\langle \tilde{\xi}_{i\alpha\beta\mathbf{k}}(t_1), \tilde{\xi}_{i\mu\nu\mathbf{k}'}(t_2) \rangle_{CG} = \Lambda_{i\alpha\beta\mathbf{k}, i\mu\nu\mathbf{k}'} \delta(t_1 - t_2), \quad i = 2, 3 \quad (\text{F.21})$$

$$\langle \tilde{\xi}_{q\alpha\mathbf{k}}(t_1), \tilde{\xi}_{\alpha\beta\mathbf{k}'}(t_2) \rangle_{CG} = \langle \tilde{\xi}_{\alpha\beta\mathbf{k}'}(t_1), \tilde{\xi}_{q\alpha\mathbf{k}}(t_2) \rangle_{CG} = 0 \quad (\text{F.22})$$

$$\langle \tilde{\xi}_{i\alpha\beta\mathbf{k}}(t_1), \tilde{\xi}_{\mu\nu\mathbf{k}'}(t_2) \rangle_{CG} = \langle \tilde{\xi}_{\mu\nu\mathbf{k}'}(t_1), \tilde{\xi}_{i\alpha\beta\mathbf{k}}(t_2), \quad i = 2, 3 \rangle_{CG} = 0 \quad (\text{F.23})$$

$$\langle \tilde{\xi}_{q\alpha\mathbf{k}}(t_1), \tilde{\xi}_{i\alpha\beta\mathbf{k}'}(t_2) \rangle_{CG} = \langle \tilde{\xi}_{i\alpha\beta\mathbf{k}'}(t_1), \tilde{\xi}_{q\alpha\mathbf{k}}(t_2) \rangle_{CG} = 0, \quad i = 2, 3 \quad (\text{F.24})$$

donde se ha definido a las $\Lambda_{m,m'}$ a partir de las ecs. F.16-F.17 como,

$$\Lambda_{q\alpha\mathbf{k}, q\beta\mathbf{k}'} = V \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{-1} \quad (\text{F.25})$$

$$\Lambda_{\alpha\beta\mathbf{k}, \mu\nu\mathbf{k}'} = V g_{\alpha\beta\mu\nu} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{-1} \quad (\text{F.26})$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} \quad (\text{F.27})$$

$$\Lambda_{i\alpha\beta\mathbf{k},j\mu\nu\mathbf{k}'} = V\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{-1}, \forall i = 2, 3 \quad (\text{F.28})$$

$$\Lambda_{q\alpha\mathbf{k},\alpha\beta\mathbf{k}'} = 0 \quad (\text{F.29})$$

$$\Lambda_{i\alpha\beta\mathbf{k},\mu\nu\mathbf{k}'} = 0, i = 2, 3 \quad (\text{F.30})$$

$$\Lambda_{q\alpha\mathbf{k},i\alpha\beta\mathbf{k}'} = 0, i = 2, 3 \quad (\text{F.31})$$

Determinadas las $\Lambda_{m,m'}$ en el espacio de Fourier, procederemos a calcular las $M_{mm'}$ para el caso del Helio superfluido. Recordemos que las $M_{mm'}$ aparecen en la definición de las funciones \mathcal{D}_{mm} de las ecs. F.11, donde las funciones \mathcal{D}_{mn} precisamente se emplean en la construcción de la ecuación de FP en el espacio de Fourier para el Helio superfluido.

Sean las siguientes funciones locales que definen los flujos aleatorios de las ecs. (3.122)-(3.124),

$$\{\mathcal{G}_m(x)\} = \{\mathcal{G}(x), \mathcal{G}'(x), \mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(x)\} \quad (\text{F.32})$$

y sus gradientes estan dados por,

$$\{\nabla_\gamma \mathcal{G}_m(x)\} = \{\nabla_\gamma \mathcal{G}(x), \nabla_\gamma \mathcal{G}'(x), \nabla_\gamma \mathcal{G}_2(x), \nabla_\gamma \mathcal{G}_3(x)\} \quad (\text{F.33})$$

y los productos de la velocidad local $v_s(x)$ con la función local $\mathcal{G}_m(x)$ como,

$$\{v_{s_\beta}(x) \mathcal{G}_m(x)\} = \{v_{s_\beta}(x) \mathcal{G}(x), v_{s_\beta}(x) \mathcal{G}'(x), v_{s_\beta}(x) \mathcal{G}_2(x), v_{s_\beta}(x) \mathcal{G}_3(x)\} \quad (\text{F.34})$$

donde $v_{s_\beta}(x)$ es una componente de la velocidad del superfluido.

La transformada de Fourier de cada uno de los términos que aparecen en la ec. F.32 se escriben en analogía de las ecs. F.4-F.5 como,

$$\mathcal{G}_{nk}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{G}_n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0 \quad (\text{F.35})$$

$$\mathcal{G}_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{G}_{nk}(t) \quad (\text{F.36})$$

Concretamente para cada término de las ecs. F.32 tenemos,

$$\mathcal{G}_k(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{G}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{G}_k(t) \quad (\text{F.37})$$

$$\mathcal{G}'_k(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{G}'(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0$$

$$\mathcal{G}'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathcal{G}'_{\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.38})$$

$$\mathcal{G}_{2\mathbf{k}}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathcal{G}_2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0$$

$$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathcal{G}_{2\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.39})$$

$$\mathcal{G}_{3\mathbf{k}}(t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathcal{G}_3(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0$$

$$\mathcal{G}_3(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathcal{G}_{3\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.40})$$

Adicionalmente tenemos los siguientes productos cuyo significado se discute en el primer y segundo párrafo después de la ec. F.70,

$$(\mathcal{G}_{2\mathbf{k}}(t) * \mathcal{G}_{3\mathbf{k}}(t))^{1/2} = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\mathcal{G}_2(\mathbf{x}, t) * \mathcal{G}_3(\mathbf{x}, t))^{1/2}, \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0$$

$$(\mathcal{G}_2(\mathbf{x}, t) * \mathcal{G}_3(\mathbf{x}, t))^{1/2} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\mathcal{G}_{2\mathbf{k}} * \mathcal{G}_{3\mathbf{k}}(t))^{1/2} \quad (\text{F.41})$$

y,

$$(\mathcal{G}_{3\mathbf{k}}(t) * \mathcal{G}_{2\mathbf{k}}(t))^{1/2} = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\mathcal{G}_3(\mathbf{x}, t) * \mathcal{G}_2(\mathbf{x}, t))^{1/2}, \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0$$

$$(\mathcal{G}_3(\mathbf{x}, t) * \mathcal{G}_2(\mathbf{x}, t))^{1/2} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\mathcal{G}_{3\mathbf{k}} * \mathcal{G}_{2\mathbf{k}}(t))^{1/2} \quad (\text{F.42})$$

Por otro lado, para los gradientes $\nabla_\gamma \mathcal{G}_m(x)$ tenemos que su transformada de Fourier se determina a partir de la siguiente ecuación,

$$M_{m,m'}(x) \equiv \nabla_\gamma \mathcal{G}_m(x) \quad (\text{F.43})$$

Sustituyendo en esta ecuación la ec. F.36 tenemos que ³,

$$\begin{aligned} M_{m,m'}(x) &= \nabla_\gamma \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{G}_{m\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} \nabla_\gamma e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{G}_{m\mathbf{k}}(t) = \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (ik_\gamma \mathcal{G}_{m\mathbf{k}}(t)) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} M_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t) \end{aligned} \quad (\text{F.44})$$

donde se ha definido $M_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t)$ como,

$$M_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t) \equiv ik_\gamma \mathcal{G}_{m\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.45})$$

por lo tanto,

$$M_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} M_{m,m'}(x) dx \quad (\text{F.46})$$

Para los productos $v_{s_3}(x) \mathcal{G}_m(x)$ tenemos,

$$(v_{s_3} \mathcal{G}_m(t))_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} v_{s_3}(x) \mathcal{G}_m(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{k} < \mathbf{k}_0$$

³El doble sub índice en $M_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}$ indica que se están relacionando dos flujos, al momento de construir las \mathcal{D}_{mn} .

$$v_{s\beta}(x)\mathcal{G}_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (v_{s\beta}\mathcal{G}_m(t))_{\mathbf{k}} \quad (\text{F.47})$$

y en analogía a las ecs. F.43-F.46 tenemos que para los gradientes $\nabla_\gamma(v_{s\beta}(x)\mathcal{G}_m(x))$ sus transformadas de Fourier se escriben como,

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma(v_{s\beta}(x)\mathcal{G}_m(\mathbf{x}, t)) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [i\mathbf{k}_\gamma(v_{s\beta}\mathcal{G}_m(t))_{\mathbf{k}}] = \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} M''_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t) \end{aligned} \quad (\text{F.48})$$

donde,

$$M''_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t) = i\mathbf{k}_\gamma(v_{s\beta}\mathcal{G}_m(t))_{\mathbf{k}} \quad (\text{F.49})$$

y su transformada inversa se expresa como,

$$M''_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} M''_{m,m'}(x, t) dx \quad (\text{F.50})$$

Por lo tanto, particularizando las ecs. F.46 y E.49, y las últimas ecs. F.41, F.42 y F.43 para cada una de las componentes del superfluido tenemos que,

$$M_{E\mathbf{k},q\alpha\mathbf{k}'}(t) = i\mathbf{k}_\gamma(\mathcal{G}(t))_{\mathbf{k}} \quad (\text{F.51})$$

$$M''_{E\mathbf{k},\alpha\beta\mathbf{k}'}(t) = i\mathbf{k}_\gamma(v_{s\beta}\mathcal{G}'(t))_{\mathbf{k}} \quad (\text{F.52})$$

$$M''_{Ek,j2\alpha\beta k'}(t) = ik_\gamma(v_{s_3}\mathcal{G}_2(t))_{\mathbf{k}} \quad (\text{F.53})$$

$$M_{j\alpha\mathbf{k},j2\alpha\mathbf{k}'}(t) = ik_\gamma(\mathcal{G}_2(t))_{\mathbf{k}} \quad (\text{F.54})$$

$$M_{j\alpha\mathbf{k},\beta\gamma\mathbf{k}'}(t) = ik_\gamma(\mathcal{G}'(t))_{\mathbf{k}} \quad (\text{F.55})$$

$$M'_{j\alpha\mathbf{k},3\beta\gamma\mathbf{k}'}(t) = ik_\gamma(\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3(t))_{\mathbf{k}}^{1/2} \quad (\text{F.56})$$

$$M'_{j\alpha\mathbf{k},2\beta\gamma\mathbf{k}'}(t) = ik_\gamma(\mathcal{G}_3 \times \mathcal{G}_2(t))_{\mathbf{k}}^{1/2} \quad (\text{F.57})$$

$$M_{v_s\alpha\mathbf{k},v_s\beta\gamma\mathbf{k}'}(t) = ik_\gamma(\mathcal{G}_3(t))_{\mathbf{k}} \quad (\text{F.58})$$

Las restantes funciones $M_{m\mathbf{k},n\mathbf{k}'}(t)$ que no aparecen no son necesarias debido a que las Λ_{mn} que aparecen en la definición de las \mathcal{D}_{mn} de la ec. F.11 son cero. Concretamente, si se sustituye en la ec. F.11 las ecs. F.51-F.58 para las $M_{m\mathbf{k},n\mathbf{k}'}(t)$ y las ecs. F.25-F.31 para Λ_{mn} , obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$\mathcal{D}_{Ekq\alpha,Ek'q\beta} = M_{Ek,q\alpha\mathbf{p}} M_{Ep,q\alpha\mathbf{k}'} \lambda_{q\alpha\mathbf{k},q\alpha\mathbf{k}'} =$$

$$= -k_\gamma (\mathcal{G}(t))_{\mathbf{k}} \cdot (\mathcal{G}(t))_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}'_\gamma V \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{-1} = \mathcal{D}_{Ek,\eta\alpha\mathbf{k}'}(t) \quad (\text{F.59})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{j\mathbf{k}\alpha\beta\mathbf{p},j\alpha\mathbf{p}\mu\nu\mathbf{k}'} &= M_{j\alpha\mathbf{k},\beta\gamma\mathbf{p}} M_{\mu\nu\mathbf{p},j\alpha\mathbf{k}'} \Lambda_{\alpha\beta\mathbf{k},\mu\nu\mathbf{k}'} = \\ &= -k_\gamma (\mathcal{G}'(t))_{\mathbf{k}} \cdot (\mathcal{G}'(t))_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}'_\gamma V g_{\alpha\beta\mu\nu} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{-1} = \mathcal{D}'_{j\mathbf{k},j\alpha\mathbf{k}'}(t) \end{aligned} \quad (\text{F.60})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{j\alpha\mathbf{k}j2\alpha\beta,j2\mu\nu\mathbf{k}j\alpha\mathbf{k}'} &= M_{j\alpha\mathbf{k},2\alpha\gamma\mathbf{p}} M_{2\mu\nu\mathbf{p},j\beta\mathbf{k}'} \Lambda_{\alpha\beta\mathbf{k},2\mu\nu\mathbf{k}'} = \\ &= -k_\gamma (\mathcal{G}(t))_{2\mathbf{k}} \cdot (\mathcal{G}(t))_{2\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}'_\gamma V \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{-1} = \mathcal{D}_{j2\mathbf{k},j2\mathbf{k}'}(t) \end{aligned} \quad (\text{F.61})$$

$$\mathcal{D}_{j\mathbf{k},j\mathbf{k}'}(t) = \mathcal{D}'_{j\mathbf{k},j\alpha\mathbf{k}'}(t) + \mathcal{D}_{j2\mathbf{k},j2\mathbf{k}'}(t) \quad (\text{F.62})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{v_s\alpha\mathbf{k}3\beta\gamma,3\mu\nu v_s\alpha\mathbf{k}'} &= M_{v_s\alpha\mathbf{k},3\beta\gamma\mathbf{p}} M_{3\mu\nu\mathbf{p},v_s\alpha\mathbf{k}'} \Lambda_{3\alpha\beta\mathbf{k},3\mu\nu\mathbf{k}'} = \\ &= -k_\gamma (\mathcal{G}(t))_{3\mathbf{k}} \cdot (\mathcal{G}(t))_{3\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}'_\gamma V \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{-1} = \mathcal{D}_{v_s\mathbf{k},v_s\mathbf{k}'}(t) \end{aligned} \quad (\text{F.63})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{j\alpha\mathbf{k}3\beta\gamma,3\mu\nu v\mathbf{p}j\alpha\mathbf{k}'} &= M'_{j\alpha\mathbf{k},3\beta\gamma\mathbf{p}} M'_{3\alpha\beta\mathbf{p}j\alpha\mathbf{k}'} \Lambda_{2\alpha\beta\mathbf{k},3\mu\nu\mathbf{k}'} = \\ &= -k_\gamma (\mathcal{G}_2 * \mathcal{G}_3)_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}'_\gamma V \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{-1} = \mathcal{D}_{j\mathbf{k},v_s\mathbf{k}'}(t) \end{aligned} \quad (\text{F.64})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{vs_\alpha k 2\beta\gamma, 2\mu\nu\nu p j_\alpha k'} &= M'_{vs_\alpha k, 2\beta\gamma p} M'_{2\mu\nu p v_s \alpha k'} \Lambda_{3\alpha\beta k, 2\mu\nu k'} = \\
&= -k_\gamma (\mathcal{G}_3 * \mathcal{G}_2)_k \cdot k'_\gamma V \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} \delta_{k, k'}^{-1} = \mathcal{D}_{v_s k', j k}(t)
\end{aligned} \tag{F.65}$$

donde reiteramos que las \mathcal{D}_{mn} que no aparecen es debido a que sus correspondientes Λ_{mn} son cero.

Finalmente, la ecuación de FP local para el Helio superfluido en el espacio de Fourier, se escribe sustituyendo en la ec. F.1, las ecs. F.3, F.6, F.7, F.10 y las ecs. F.59-F.65 con lo que obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} f(\rho_{\mathbf{k}}, E_{\mathbf{k}}, j_{\mathbf{k}}, v_{s_{\mathbf{k}}}, t) + \\
&+ \left[\frac{\delta}{\delta \rho_{\mathbf{k}}(t)} u_{\rho_{\mathbf{k}}}(\mathbf{x}) - \frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}}} u_{E_{\mathbf{k}}}(t) + \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}}} u_{j_{\mathbf{k}}}(t) + \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}}}} u_{v_{s_{\mathbf{k}}}}(t) \right] f(\rho_{\mathbf{k}}, E_{\mathbf{k}}, j_{\mathbf{k}}, v_{s_{\mathbf{k}}}, t) - \\
&- \left[\frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}}(t) \frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}'}} + \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{j_{\mathbf{k}} j_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}'}} + \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}}}} \mathcal{D}_{v_{s_{\mathbf{k}}} v_{s_{\mathbf{k}'}}} \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}'}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{E_{\mathbf{k}} j_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}'}} + \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{j_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta}{\delta E_{\mathbf{k}'}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}}} \mathcal{D}_{j_{\mathbf{k}} v_{s_{\mathbf{k}'}}} \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}'}}} + \frac{\delta}{\delta v_{s_{\mathbf{k}}}} \mathcal{D}_{v_{s_{\mathbf{k}}} j_{\mathbf{k}'}} \frac{\delta}{\delta j_{\mathbf{k}'}} \right] f(\rho, E, j, v_s, t) = 0, \tag{F.66}
\end{aligned}$$

Resumiendo, hemos determinado la ecuación de FP en el espacio de Fourier para el Helio superfluido en analogía al método seguido para obtener la ecuación de FP para un fluido simple. La forma general de ambas ecuaciones de FP en el espacio de Fourier esta dada por la ec. F.1, donde la única diferencia para ambos sistemas es la selección de sus variables relevantes, ya que a partir de dichas variables se determinan las funciones u_n y \mathcal{D}_{mn} que aparecen en la ec. F.1, lo cual nos conduce al caso particular de el Helio superfluido de la ec. F.66.

F.2 Determinación de las Funciones Locales $\mathcal{G}_m(x)$ en Función de los Coeficientes de Transporte Locales del Helio Superfluido.

Tomemos como punto de partida a la ec. F.11 para las $\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a})$ donde sustituimos las ecs. F.51-F.58 para las M_{mn} y M'_{mn} , y las ecs. F.25-F.31 para las Λ_{mn} . En esta forma se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) &= M_{mm'}(\mathbf{a}) M_{nn'}(\mathbf{a}) \Lambda_{mn'} = \\ &= -\mathbf{k}_\gamma (\mathcal{G}(t))_{m\mathbf{k}} \cdot (\mathcal{G}(t))_{m'\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}'_\gamma V \delta_{mn} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{F.67})$$

Ahora sustituyendo en esta ec. F.67 la ec. F.16 tenemos,

$$\mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) = -\mathbf{k}_\gamma (\mathcal{G}(t))_{m\mathbf{k}} \cdot (\mathcal{G}(t))_{m'\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}'_\gamma \langle \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t), \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}'}(t) \rangle_{CG} \quad (\text{F.68})$$

Cuya transformada inversa de la función $(\mathcal{G}(t))_{m\mathbf{k}} \cdot (\mathcal{G}(t))_{m'\mathbf{k}'} \langle \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t), \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}'}(t) \rangle_{CG}$ se escribe como,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{mn}(\mathbf{a}) &= - \int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \mathbf{k}_\gamma \mathcal{G}_m(x, t) \cdot \mathcal{G}_{m'}(x, t) \langle \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t), \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}'}(t) \rangle_{CG} \cdot \mathbf{k}'_\gamma = \\ &= - \int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \mathbf{k}_\gamma \cdot \langle \mathcal{G}_m(x, t) \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t), \mathcal{G}_{m'}(x, t) \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}'}(t) \rangle_{CG} \cdot \mathbf{k}'_\gamma = \\ &= - \int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \mathbf{k}_\gamma \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{mm'}(x, t) \cdot \mathbf{k}'_\gamma \end{aligned} \quad (\text{F.69})$$

donde se ha definido,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{mm'}(x, t) = \langle \mathcal{G}_m(x, t) \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t), \mathcal{G}_{m'}(x, t) \tilde{\xi}_{m'\mathbf{k}}(t) \rangle_{CG} \quad (\text{F.70})$$

Cabe hacer notar que en la deducción de las ecs. F.69 y F.70, las funciones $\mathcal{G}_n(x, t)$ se han podido introducir dentro de el promedio $\langle \rangle_{CG}$ debido a que dicha operación de promedio se calcula respecto al operador $\hat{\rho}_{CG} = \hat{\rho}_{CG}(\{\hat{a}_n\})$ el cual es una funcional de las variables relevantes $\{\hat{a}_n\}$, pero no lo es explícitamente de las variables \mathbf{x} y t . En otras palabras, al depender $\mathcal{G}_n(x, t)$ en las variables \mathbf{x} y t , no se ve afectado por la operación de promedio realizada con el operador $\hat{\rho}_{CG}(\{\hat{a}_n\})$, por esta razón se pueden introducir o sacar fuera del promedio, sin afectar las propiedades estadísticas de los términos fluctuantes $\tilde{\xi}_n$. [88]. Esta propiedad será utilizada más adelante para determinar las $\mathcal{G}_n(x, t)$ en función de los coeficientes de transporte local.

Por otra parte, cabe aclarar que el producto $(\mathcal{G}_n * \mathcal{G}_m)$ o $(\mathcal{G}_m * \mathcal{G}_n)$ de las ecs. F.41-F.42 no tiene sentido como un producto simple, sino como un producto que surge del acoplamiento de dos efectos distintos pero que se manifiestan de la misma forma, como resultado de un efecto cruzado. Por ejemplo, un gradiente de velocidades se manifiesta vía el coeficiente de transporte ζ_4 , pero un gradiente en el flujo del superfluido puede manifestarse también vía éste mismo coeficiente de viscosidad. Concretamente, ζ_4 es el resultado de la correlación de el flujo del superfluido con la presión, (ver ec F.87. o viceversa vía ζ_1 ver ec F.84), es claro que en la presencia de un gradiente del flujo de la componente superfluida se verá alterada dicha función de correlación, pero también puede verse alterada la presión si existe un gradiente en la componente de la velocidad normal. Por lo tanto la viscosidad volumétrica $\zeta_4 = \zeta_1$ puede surgir por efectos físicos diferentes. Resumiendo, los términos \mathcal{G}_m y \mathcal{G}_n de las funciones $(\mathcal{G}_n * \mathcal{G}_m)$ no existen desacoplados de manera independiente, sólo tiene sentido físico hablar de dichas funciones a través de los coeficientes de transporte o de las funciones de correlación.

A continuación de la condición expresada por la ec. (1.37) dada por la identidad,

$$\mathcal{L}_{mn}(\hat{j}_m(x), \hat{j}_n(x, t)) = \tilde{\mathcal{L}}_{mn}(J_m^R(x), J_n^R(x, t)) \quad (\text{F.71})$$

determinaremos la forma de las funciones locales $\mathcal{G}_n(x)$. Concretamente, para las partes aleatorias del flujo de calor, tenemos que en un marco de referencia en reposo, la función de correlación $\tilde{\mathcal{L}}_{mn}(J_q^R, J_q^R)$ se escribe como,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Total}(J_{q_i}^R, J_{q_k}^R) = \langle J_{q_i}^R(x, t) + \Pi_{ik}^R(x, t) \cdot v_{s_i}, J_{q_k}^R + \Pi_{ik}^R(x, t) \cdot v_{s_k} \rangle_{CG} \quad (F.72)$$

donde la forma de la función $\tilde{\mathcal{L}}_{Total}$ se ha propuesto en analogía a la ec. (3.92) para la función $\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{j}_{q_k})$ y J_q^R en analogía de la ecuación para \hat{j}_q dada por la ec. (3.88), ahora sustituyendo en la ec. F.72 la ec. (3.122) para J_q^R y la ec. (3.123) para $\Pi_{ik}^R(x, t)$ y recordando las propiedades de las varianzas para los términos aleatorios de la ecs. (3.129)-(3.134) tenemos que,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{Total}(J_{q_i}^R, J_{q_k}^R) &= \langle \mathcal{G}(x)\tilde{\xi}_{q_i}(x, t_1) + \mathcal{G}'(x)\tilde{\xi}'_{ik}(x, t_1) + \mathcal{G}_2(x)\tilde{\xi}_{2_i}(x, t_1) \cdot v_{s_i}, \\ &\quad \cdot \mathcal{G}(x)\tilde{\xi}_{q_k}(x, t_2) + \mathcal{G}'(x)\tilde{\xi}'_{ik}(x, t_2) + \mathcal{G}_2(x)\tilde{\xi}_{2_k}(x, t_2) \cdot v_{s_k} \rangle_{CG} = \\ &= \mathcal{G}^2(x)\langle \tilde{\xi}_{q_i}(x, t_1), \tilde{\xi}_{q_k}(x, t_2) \rangle_{CG} + \mathcal{G}^{2'}(x)\langle \tilde{\xi}'_{ik}(x, t_1), \tilde{\xi}'_{ik}(x, t_2) \rangle_{CG} v_{s_i} \cdot v_{s_k} + \\ &\quad + \mathcal{G}_2^2(x)\langle \tilde{\xi}_{2_i}(x, t_1), \tilde{\xi}_{2_k}(x, t_2) \rangle_{CG} v_{s_i} \cdot v_{s_k} \end{aligned} \quad (F.73)$$

donde los términos que no aparecen son cero debido a que las correspondientes funciones de correlación de sus términos aleatorios se anulan de acuerdo con las ecs. (3.129)-(3.134).

Por otro lado, de la función de correlación $\mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{j}_{q_k})$ dada por la ec. (3.95) tenemos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{j}_{q_i}, \hat{j}_{q_k}) &= \mathcal{L}(\hat{j}'_{q_i}, \hat{j}'_{q_k}) + \\ &+ \mathcal{L}(\hat{T}'_{ik}, \hat{T}'_{ik}) \cdot v_{s_i}(x)v_{s_k}(x) + \mathcal{L}(\Delta\hat{p}'_i, \Delta\hat{p}'_i) \cdot v_{s_i}(x)v_{s_k}(x) \end{aligned} \quad (\text{F.74})$$

Ahora de la condición F.71 igualando la ecs. F.73 y F.74 término a término, tenemos que se cumplen las siguientes igualdades :

$$\mathcal{G}^2(x) \langle \tilde{\xi}_{q_i}(x, t_1), \tilde{\xi}_{q_k}(x, t_2) \rangle_{CG} = \mathcal{L}'(\hat{j}'_{q_i}, \hat{j}'_{q_k}) = \kappa(x)T^2(x)\delta_{ik}\delta(t_1 - t_2) \quad (\text{F.75})$$

donde hemos usado la ec. (3.103). Por lo tanto, tenemos que la función local asociada al flujo aleatorio de calor se define como,

$$\mathcal{G}(x) = (\kappa(x)T^2(x))^{1/2} \quad (\text{F.76})$$

que es la ec. (3.135).

Analogamente, definiendo $\tilde{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\Pi}^R, \overset{\circ}{\Pi}^R) = \mathcal{L}(\hat{T}'_{ik}, \hat{T}'_{ik})$ Para la componente del tensor sin traza del flujo aleatorio asociado al tensor de los esfuerzos se cumple que,

$$\mathcal{G}^{2'}(x) \langle \tilde{\xi}'_{ik}(x, t_1), \tilde{\xi}'_{ik}(x, t_2) \rangle_{CG} = \mathcal{L}(\hat{T}'_{ik}, \hat{T}'_{ik}) = \eta(x)T(x)g_{iklm}\delta(t_1 - t_2) \quad (\text{F.77})$$

donde se ha empleado la ec. (3.100). Despejando de la ec. F.77 la función $\mathcal{G}^{2'}(x)$ se tiene que,

$$\mathcal{G}'(x) = (\eta(x)T(x))^{1/2} \quad (\text{F.78})$$

que es la ec. (3.136).

Ahora, para la componente correspondiente a la presión fluctuante asociada al flujo aleatorio Π^R , igualando el último término de la última igualdad del lado derecho de la ec. F.73 con la última función de correlación que aparece en el lado derecho de la ec. F.74 se obtiene que,

$$\mathcal{G}_2^2(x) \langle \tilde{\xi}_{2_i}(x, t_1), \tilde{\xi}_{2_k}(x, t_2) \rangle_{CG} = \mathcal{L}(\Delta \hat{p}'_i, \Delta \hat{p}'_i) = \zeta_2(x) T(x) \delta_{ik} \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{F.79})$$

donde se ha usado la ec. (3.102); a continuación despejando $\mathcal{G}_2(x)$ del lado izquierdo de la ec. F.79 tenemos que,

$$\mathcal{G}_2(x) = (\zeta_2(x) T(x))^{1/2} \quad (\text{F.80})$$

la cual es la ec. (3.138).

En cuanto a las funciones de correlación del superfluido tenemos que para la función de autocorrelación del flujo aleatorio asociado al superfluido, la ec. F.71 se expresa como,

$$\tilde{\mathcal{L}}(H_{3_i}^R(x), H_{3_k}^R(x)) = \mathcal{L}(\hat{\alpha}_{s_i}, \hat{\alpha}_{s_k}) \quad (\text{F.81})$$

Si ahora sustituimos en esta ec. F.81, en su lado izquierdo las ecs. F.70 con el flujo $H_{3_i}^R(x)$ definido en la ec. (3.124) y en su miembro derecho el segundo término de la ec. (3.118), se obtiene que.

$$\mathcal{G}_3^2(x) \langle \tilde{\xi}_{3_i}(x, t_1), \tilde{\xi}_{3_k}(x, t_2) \rangle_{CG} = \zeta_3(x) T(x) \delta_{ik} \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{F.82})$$

Ahora despejando la función $\mathcal{G}_3(x)$ de esta ec. F.82 se tiene,

$$\mathcal{G}_3(x) = (\zeta_3(x) T(x))^{1/2} \quad (\text{F.83})$$

que es al ec. (3.139).

Con respecto a la función de correlación del flujo de ímpetu con el flujo del superfluido se tiene que la ec. F.71 se expresa como,

$$\tilde{\mathcal{L}}(\Pi_{ik}^R(x), H_{3_k}^R(x)) = \mathcal{L}(\tilde{T}_{ik}, \hat{\alpha}_{s_k}) \quad (\text{F.84})$$

ahora, sustituyendo en el lado izquierdo de esta ec. F.84 la definición para el flujo $\Pi_{ik}^R(x)$ dada por la ec. (3.123); y en el lado derecho la ec. (3.113) obtenemos que la ec. F.84 se rescribe como.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}'(x) \tilde{\xi}'_{ik}(x, t_1) + \mathcal{G}_2(x) \tilde{\xi}'_2(x, t_1), \mathcal{G}_3(x) \tilde{\xi}_{3_k}(x, t_2) \rangle_{CG} &= \mathcal{L}(\Delta \hat{p}', \hat{\alpha}_{s_k}) = \\ &= \zeta_1 T(x) \delta_{ik} \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (\text{F.85})$$

ecuación que al sacar a las funciones $\mathcal{G}_m(x)$ del promedio y desarrollarla, se simplifica a la siguiente expresión.

$$(\mathcal{G}_2(x) * \mathcal{G}_3(x)) = \zeta_1 T(x) \delta_{ik} \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{F.86})$$

ecuación que corresponde a la ec. (3.137).

Finalmente, para la función de correlación del superfluido con el tensor de los esfuerzos tenemos que la ec. F.71 se escribe como,

$$\tilde{\mathcal{L}}(H_{3_k}^R(x), \Pi_{ik}^R(x)) = \mathcal{L}(\alpha_{s_k}, \hat{T}_{ik}) \quad (\text{F.87})$$

procediendo de manera análoga a la obtención de la ec. F.86, pero con el auxilio de las ecs. (3.117), de la ec. (3.123) y de la ec. (3.124) se tiene que,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_3(x) \tilde{\xi}_{3_k}(x, t_1) \cdot \mathcal{G}'(x) \tilde{\xi}'_{ik}(x, t_2) + \mathcal{G}_{2_i}(x, t_2) \rangle_{CG} &= \mathcal{L}(\alpha_{s_k}, \Delta \hat{p}) = \\ &= \zeta_4 T(x) \delta_{ik} \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (\text{F.88})$$

ecuación que con auxilio de las definiciones de las varianzas de los término $\tilde{\xi}_n$ dadas por las ecs. (3.129)-(3.134) se simplifica como,

$$(\mathcal{G}_3(x) * \mathcal{G}_2(x)) = \zeta_4 T(x) \delta_{ik} \quad (\text{F.89})$$

ecuación que corresponde a la ec. (3.140).

Resumiendo, con estos resultados de las ecs. F.76, F.78, F.80, F.86 y F.89, se justifican las ecs. (3.135)-(3.140) del capítulo 3, ecuaciones en las cuales se ha mostrado la dependencia de las funciones locales $\mathcal{G}_n(x)$ en función de los coeficientes de transporte local.

Por último, es importante remarcar que en las ecs. F.41, F.42, F.56, F.57, F.64 y F.65 estrictamente no podemos desacoplar las funciones locales $(\mathcal{G}_n * \mathcal{G}_m)$ y por lo tanto sólo tiene sentido físico hablar de ellas en función del su coeficiente de transporte local o de su función de correlación asociados, (ver ecs. F.70, F.86 o F.89).

F.3 Construcción de las Ecuaciones de Langevin en el Espacio de Fourier para el Helio Superfluido.

Las ecuaciones de Langevin en el espacio de Fourier para el Helio superfluido, pueden ser determinadas de las funciones $u_{m\mathbf{k}}(t)$ y $M_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t)$ que definen la ecuación de FP en dicho espacio dada por la ec. F.66. En efecto, las ecuaciones de no lineales de Langevin en el espacio de Fourier de acuerdo con la ec. (1.15) se escriben como,

$$\dot{a}_{n\mathbf{k}}(t) = u_{n\mathbf{k}}(t) + \sum_{m,n} M_{m\mathbf{k},m'\mathbf{k}'}(t) \tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.90})$$

donde se tiene que,

$$\{\dot{a}_{n\mathbf{k}}(t)\} = \{\dot{\rho}_{\mathbf{k}}, \dot{E}_{\mathbf{k}}, \dot{j}_{\mathbf{k}}, \dot{v}_{s\mathbf{k}}\} \quad (\text{F.91})$$

y,

$$\{u_{n\mathbf{k}}(t)\} = \{u_{\rho\mathbf{k}}, u_{E\mathbf{k}}, u_{j\mathbf{k}}, u_{v_s\mathbf{k}}\} \quad (\text{F.92})$$

estos términos de arrastre en el espacio de Fourier que aparecen en la ec. F.92 están dados por las ecs. F.8-F.9, definidas a partir de las ecs. E.2-E.9 para las funciones $u_m(x, t)$ determinadas en el Apéndice E.

En cuanto a las funciones $M_{m,m'}(t)$ estas se particularizan, a partir de las ecs. F.51-F.58 y los los términos $\tilde{\xi}_{m\mathbf{k}}(t)$ se determinan con auxilio de la ec. F.12 en función de los $\tilde{\xi}_m(x, t)$ que aparecen en la definición de los flujos J_n^R . Por lo tanto, tenemos de las anteriores consideraciones el siguiente sistema de ecuaciones no lineales de Langevin en el espacio de Fourier para el Helio superfluido,

$$\dot{\rho}_{\mathbf{k}}(t) = u_{\rho_{\mathbf{k}}}(t) \quad (\text{F.93})$$

$$\dot{E}_{\mathbf{k}}(t) = u_{E_{\mathbf{k}}}(t) - ik_{\alpha} \left[(v_{s_3} \mathcal{G}')_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{\alpha\beta\mathbf{k}}(t) + (v_{s_3} \mathcal{G}_2)_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{2\alpha\beta\mathbf{k}}(t) + \mathcal{G}_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{q\beta\mathbf{k}}(t) \right] \quad (\text{F.94})$$

$$\dot{j}_{\mathbf{k}}(t) = u_{j_{\mathbf{k}}}(t) - ik_{\alpha} \left[(\mathcal{G}')_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{\alpha\beta\mathbf{k}}(t) + (\mathcal{G}_2)_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{2\alpha\beta\mathbf{k}}(t) \right] \quad (\text{F.95})$$

$$\dot{v}_{s\mathbf{k}}(t) = u_{v_{s\mathbf{k}}}(t) + ik_{\alpha} (\mathcal{G})_{3\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{3\alpha\beta\mathbf{k}}(t) \quad (\text{F.96})$$

donde el criterio de construcción de estas ecuaciones es considerar solo las funciones $M_{m\mathbf{k},n\mathbf{k}'}$ cuyas funciones de correlación \mathcal{D}_{mn} no sea cero, por analogía con las ecuaciones de Langevin en el espacio de Fourier para un fluido simple, dadas por las ecs. 3.3 de la referencia [88]. Por último se observa que las ecs. F.93-F.96 son no lineales debido a el carácter multiplicativo de los términos $M_{m\mathbf{k},n\mathbf{k}'} \tilde{\xi}_{n\mathbf{k}}$.

F.4 Construcción de las Ecuaciones de Langevin en el Espacio de Configuración para el Helio Superfluido.

Para realizar la transformación inversa de las ecs. F.93-F.96, tomemos la sumatoria $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ en ambos miembros de dichas ecuaciones, con lo que se obtiene que,

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \dot{\rho}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} u_{\rho_{\mathbf{k}}}(t) \quad (\text{F.97})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \dot{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} u_{E_{\mathbf{k}}}(t) + \\
& + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} i k_{\alpha} \left[(v_{s\beta} \mathcal{G}')_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{\alpha\beta\mathbf{k}}(t) + (v_{s\beta} \mathcal{G}_2)_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{2\alpha\beta\mathbf{k}}(t) + \mathcal{G}_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{q\beta\mathbf{k}}(t) \right]
\end{aligned} \tag{F.98}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \dot{j}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} u_{j_{\mathbf{k}}}(t) + \\
& + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} i k_{\alpha} \left[(\mathcal{G}')_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{\alpha 3\mathbf{k}}(t) + (\mathcal{G}_2)_{\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{2\alpha 3\mathbf{k}}(t) \right]
\end{aligned} \tag{F.99}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \dot{v}_{s\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} u_{v_{s\mathbf{k}}}(t) + \\
& + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} i k_{\alpha} (\mathcal{G})_{3\mathbf{k}} \tilde{\xi}_{3\alpha 3\mathbf{k}}(t)
\end{aligned} \tag{F.100}$$

Ahora, si tomamos en cuenta la definición de la transformada de Fourier,

$$\dot{a}_n(x, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \dot{a}_{n\mathbf{k}}(t) \tag{F.101}$$

en ambos miembros de las ecs. F.97-F.100, podemos en las ecuaciones resultantes sustituir la ec. F.9 para $u_n(x, t)$, las ecs. F.13 para $\tilde{\xi}_m(x, t)$, las ecs. F.43 y F.44 para $\nabla_{\gamma} G_m(x, t)$ y las ecs. F.48 y F.49 para el $\nabla_{\gamma}(v_{s\beta}(x)G_m(x, t))$. Por lo tanto, las ecuaciones F.97-F.100 finalmente se describen como,

$$\frac{d\rho(\mathbf{x})}{dt} = u_{\rho}(\mathbf{x}). \tag{F.102}$$

$$\frac{dE(\mathbf{x})}{dt} = u_E(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \{J_q^R(\mathbf{x}) + \Pi^R(\mathbf{x}) \cdot v_s(\mathbf{x})\}, \quad (\text{F.103})$$

$$\frac{dj(\mathbf{x})}{dt} = u_j(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \Pi^R(\mathbf{x}). \quad (\text{F.104})$$

$$\frac{dv_s}{dt} = u_{v_s}(\mathbf{x}) - \nabla H_3^R(\mathbf{x}), \quad (\text{F.105})$$

donde además se han empleado las definiciones de los flujos aleatorios $J_m^R(x)$ dadas por las ecs. (3.122)-(3.124), y las funciones $u_n(x, t)$ están dadas por las ecs. E.2-E.9 del Apéndice E.

En efecto las ecs. F.102-F.105 son las ecs. (3.145)-(3.148) que expresan las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante no lineal para el Helio superfluido.

Apéndice G

Lista de Símbolos.

A continuación se presenta en orden alfabético los distintos símbolos empleados en esta tesis, junto con una breve explicación de su significado y dominio de aplicación.

$\{A_n(x)\}_{micro}$, variable dinámica microscópica.

$\{\hat{A}_n(x)\}_{micro}$, operador asociado a una variable dinámica A_n (en el Apéndice A se omite el subíndice).

$\{\hat{A}_{nk}\}_{micro}$, operador en el espacio de Fourier, dominio: microscópico.

a amplitud de la función de onda del superfluido ψ .

$\{\hat{a}_n(x)\}_{micro}$, operador asociado a una variable dinámica a_n , (por comodidad se omite el subíndice *micro* en el Apéndice A).

$\{\hat{a}_n\}_{micro} = \{\hat{a}_{nk}\}_{micro}$, operador en el espacio de Fourier, dominio: microscópico.

$\hat{a} = \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\}_{micro}$, conjunto de operadores $\{\hat{a}_n\}_{micro}$.

\hat{A}_n , operador asociado a una variable dinámica A_n .

$\hat{a}_n(x)$, operador asociado a una variable dinámica a_n , dominio: de grano grueso en los Capítulos 2 y 3.

$\hat{a}_n = \hat{a}_{nk}$, operador en el espacio de Fourier, dominio: mesoscópico.

$\hat{a} = \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\}$, conjunto de operadores \hat{a}_n de grano grueso.

$\{\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\}\}$, producto simetrizado de operadores.

$A_n(x)$, variable dinámica de grano grueso en el caso clásico: también se emplea para denotar un valor esperado de una variable microscópica $\{\hat{A}_n\}_{micro}$.

$A_n = A_{nk}$, variable en el espacio de Fourier, dominio: mesoscópico.

a_n , valor esperado de una variable dinámica, $\{\hat{a}_n\}_{micro}$, o $\{\hat{a}_n\}$ de grano grueso.

$\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$, conjunto de valores esperados de los operadores \hat{a}_n de grano grueso.

$\hat{\alpha}_s$, parte no proyectada del operador asociado al flujo de la componente superfluida \hat{I}_s .

\hat{B} , notación empleada para representar un operador en general.

\hat{B}' , operador asociado a el operador de la velocidad del superfluido en un marco de referencia en movimiento.

β , inverso de la temperatura.

$\beta(x)$, inverso de la temperatura local.

$c_m(x)$, función local empleada en la construcción de las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante de un fluido simple.

$[\hat{A}, \hat{B}]_-$, conmutador de los operadores \hat{A} y \hat{B} .

$\mathcal{D}_{m,n}(x, x', t)$, término de difusión asociado a la de correlación de los flujos en el espacio de configuración.

$\mathcal{D}_{m,n}(\mathbf{a}) \equiv \mathcal{D}_{mk, nk'}(\mathbf{a})$, función de correlación de los flujos en el espacio de Fourier.

$\delta(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$, hipercelda en el espacio fase en la cual los operadores $\hat{\mathbf{a}}$ tienen acceso a los valores numericos \mathbf{a} .

$\delta'(x)$, función delta de grano grueso.

δ_{ik} , función delta de Kronecker.

$E(x)$, valor esperado del operador de la local densidad energía $\hat{H}(x)$, en caso de no mostrar explícitamente la dependencia en x pierde su carácter local.

$\eta(x)$, coeficiente de viscosidad local, si no parece la dependencia en x éste coeficiente pierde su carácter local.

$F_n(x)$, expresión general para denotar a cualquiera de los multiplicadores de Lagrange.

$f(x, t)$, función de distribución de probabilidad en el espacio de configuración.

$\hat{f}(\mathbf{a}, t)$, operador asociado a la función de distribución de probabilidad en el espacio de Fourier, dependiente de las variables $\mathbf{a}_{\mathbf{nk}}$.

$f(\mathbf{a}, t)$, función de distribución de probabilidad en el espacio de Fourier, dependiente de las variables $\mathbf{a}_{\mathbf{nk}}$.

$G'(\mathbf{a})$, multiplicador de Lagrange asociado con ρ_{CG} .

$G_m(x)$, función local empleada en la definición de los flujos aleatorios locales $J_n^R(x, t)$ para el caso de un fluido simple.

$\mathcal{G}_m(x)$, función local empleada en la definición de los flujos aleatorios locales $J_n^R(x, t)$ para el caso del superfluido .

Γ , espacio fase.

\hat{H} , operador asociado al Hamiltoniano total del sistema en un marco de referencia fijo.

\mathcal{H} , operador asociado al Hamiltoniano total del sistema que se encuentra en un estado de equilibrio $\hat{\rho}_0$.

$\hat{\mathcal{H}}$, operador asociado al Hamiltoniano total del sistema que se encuentra en un estado de cuasi equilibrio $\hat{\rho}_{qe}$.

$\hat{H}(x)$, operador asociado a la densidad local de energía del sistema en un marco de referencia fijo.

\hat{H}' , operador asociado a la densidad local de energía del sistema en un marco de referencia móvil.

$H_3^R(x, t)$, flujo aleatorio local asociado a la componente superfluida.

$\hat{I}_n(x)$, operador asociado a la corriente o flujo al operador de la variable $\hat{a}_n(x)$, ambos definidos en el espacio de coordenadas.

$\hat{I}_{n\mathbf{k}}$, operador asociado a la corriente o flujo al operador de la variable $\hat{a}_{n\mathbf{k}}$, ambos definidos en el espacio de Fourier.

\hat{J}_m , parte no proyectada de un flujo o corriente.

$\mathbf{J}(\mathbf{a})$, operador asociado con la evolución de las variables \mathbf{a} .

$J_m^R(x, t)$, flujos aleatorios locales empleados en la construcción de las ecuaciones de la hidrodinámica fluctuante.

$\hat{j}(x)$, operador asociado a el ímpetu local en un marco de referencia fijo.

$j(x)$, valor esperado del operador asociado a el ímpetu local en un marco de referencia fijo.

$\hat{j}'(x)$, operador asociado a el ímpetu local en un marco de referencia en movimiento.

$j_0(x)$, valor esperado del operador $\hat{j}'(x)$ en un marco de referencia en movimiento.

\hat{j}_q , operador asociado a la componente fluctuante del flujo de calor, o a la parte no proyectada del flujo de energía \hat{I}_E .

\hat{j}_H , operador asociado el flujo de energía.

\hat{j}_s , multiplicador de Lagrange, asociado a la componente del fujo del superfluido en un marco de referencia fijo, también es denotado como \hat{I}_s .

\hat{j}'_s , multiplicador de Lagrange, asociado a la componente del fujo del superfluido en un marco de referencia móvil, también es denotado como \hat{I}'_s .

\mathbf{k} , vector de onda.

K_{mn} , elemento de la matriz no local \mathbf{K} de la ecuación de FPG, asociada con los elementos de matriz $\mathcal{D}_{m,n}(\mathbf{a})$ y coeficientes de transporte del sistema.

$\kappa(x)$. coeficiente de conductividad térmica local, sino aparece la dependencia en x el coeficiente pierde su carácter local.

L . operador de Liouville en el caso clásico.

\hat{L} . operador de Liouville en el caso cuántico.

\tilde{L} . operador reducido de evolución.

$\mathcal{L}_{m,n}(\hat{j}_m, \hat{j}_n)$. función de correlación en el espacio de configuración para las partes no proyectadas de los flujos $\hat{j}_n(x, t)$ en un marco de referencia fijo.

$\mathcal{L}'_{m,n}(\hat{j}'_m, \hat{j}'_n)$. función de correlación en el espacio de configuración para las partes no proyectadas de los flujos $\hat{j}'_n(x, t)$ en un marco de referencia en movimiento.

$\tilde{\mathcal{L}}_{m,n}(J_m^R, J_n^R)$. función de correlación de los flujos aleatorios en el espacio de configuración para las partes no proyectadas de los flujos $\hat{j}_n(x, t)$ en un marco de referencia fijo.

Λ_{mn} . varianza de los términos aleatorios $\tilde{\xi}_{mk}(t)$ y $\tilde{\xi}_{nk'}(t)$, expresada en el espacio de Fourier.

M_{mn} . transformada de Fourier de la función local $\nabla \cdot \mathcal{G}_m(x)$.

M'_{mn} . transformada de Fourier de la función local $\nabla \cdot (\mathcal{G}_m(x) * \mathcal{G}_n(x))$.

M''_{mn} . transformada de Fourier de la función local $\nabla \cdot (v(x)\mathcal{G}_m(x))$.

μ . potencial químico.

$\mu(x)$. potencial químico local, en un marco de referencia en movimiento.

$\bar{\mu}(x)$. potencial químico local, en un marco de referencia fijo.

$\Omega(x) = -p(x)$, función local asociada con la presión local $p(x)$.

\mathcal{P} , operador de proyección.

\hat{p} , operador asociado a la presión. , aunque también se emplea para denotar al operador asociado al ímpetu.

$\Delta\hat{p}$, operador asociado a la presión fluctuante.

ϕ , Fase de la función de onda del superfluido ψ .

Φ_{qe} , factor de normalización del operador de cuasi equilibrio $\hat{\rho}_{qe}$.

Φ , factor de normalización del operador de equilibrio $\hat{\rho}_0$.

ψ , función de onda u operador de campo del superfluido, en un marco de referencia fijo.

Ψ' , valor esperado de la función de onda ψ' .

ψ' , función de onda u operador de campo del superfluido, en un marco de referencia en movimiento .

Ψ' , valor esperado de la función de onda ψ' .

ψ^\dagger , conjugada de la función de onda ψ , o conjugado operador de campo del superfluido .

Ψ^\dagger , valor esperado de la función de onda del superfluido ψ^\dagger .

$Q \equiv 1 - \mathcal{P}$, complemento del operador de proyección \mathcal{P} .

Q_l , factor de normalización del operador $\hat{\rho}_l$.

Q'_l , factor de normalización del operador $\hat{\rho}_l$.

$Q_{\bar{l}}$, factor de normalización del operador $\hat{\rho}_{\bar{l}}$.

$Q_{\bar{l}'}$, factor de normalización del operador $\hat{\rho}_{\bar{l}'}$.

$R(a, a', t)$, parte regular de la función $W(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$.

$r(a, a', t)$, parte regular de la función $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$.

$\hat{\rho}$, operador asociado a la densidad de partículas en un marco de referencia fijo.

$\hat{\rho}'$, operador asociado a la densidad de partículas en un marco de referencia en movimiento.

ρ , valor esperado del operador $\hat{\rho}$ en un marco de referencia fijo.

ρ' , valor esperado del operador $\hat{\rho}'$ en un marco de referencia móvil.

$\hat{\rho}_0$, operador estadístico de equilibrio.

$\hat{\rho}_{qe}$, operador estadístico de cuasi equilibrio local o de referencia.

$\hat{\rho}_\epsilon = \hat{\rho}_l + \Delta\hat{\rho}'$, operador estadístico de no equilibrio en un marco de referencia fijo, donde $\hat{\rho}_l$ es un operador estadístico de equilibrio local y $\Delta\hat{\rho}'$ es su parte disipativa .

$\hat{\rho}_l$, operador estadístico de equilibrio local en un marco de referencia en movimiento.

$\rho_{FP} = \rho_{CG} + \Delta\rho$, función de distribución para variables de grano grueso para el caso clásico, donde ρ_{CG} es su parte proyectada y $\Delta\rho$ su parte disipativa.

$\hat{\rho}_{FP} = \hat{\rho}_{CG} + \Delta\hat{\rho}$, operador estadístico de no equilibrio (función de Wigner), que contempla efectos de memoria, donde $\hat{\rho}_{CG}$ es su parte proyectada que también es una función de Wigner junto con la parte disipativa o no proyectada $\Delta\hat{\rho}$.

$\hat{\rho}_{\tilde{F}P} = \hat{\rho}_{\tilde{l}} + \tilde{\hat{\rho}}_{\tilde{l}}$, operador estadístico de no equilibrio (función de Wigner) con carácter local (sin memoria) en un marco de referencia fijo, donde $\hat{\rho}_{\tilde{l}}$ es su parte proyectada y $\tilde{\hat{\rho}}_{\tilde{l}}$ es su parte disipativa .

$\hat{\rho}_{\tilde{l}}$, parte proyectada de $\hat{\rho}_{\tilde{F}P}$ en un sistema de referencia móvil, sin efectos de memoria.

$\tilde{\hat{\rho}}_{\tilde{l}}$, parte disipativa del operador estadístico $\hat{\rho}_{\tilde{F}P}$ en un sistema de referencia móvil, sin efectos de memoria.

S_I , funcional de entropía de información.

$\hat{S}(t)$, operador asociado a la entropía en un marco de referencia fijo.

$\hat{S}'(t)$, operador asociado a la entropía en un marco de referencia móvil.

$S'(t)$, valor esperado del operador asociado a la entropía en un marco de referencia móvil.

$\hat{S}(t)$, operador de evolución de la entropía.

$S(x)$, funcional asociada a la densidad local de entropía.

$S(t)$, funcional asociada a la entropía.

$\hat{S}_{qe}(x)$, operador asociado a la densidad local de entropía, definido a partir del operador $\hat{\rho}_{qe}$.

$\hat{S}'_i(x)$, operador asociado a la densidad local de entropía, definido a partir del operador $\hat{\rho}_i$.

$T(x)$, temperatura local. si no aparece la dependencia en x se trata de la temperatura sin su carácter local.

$T_\lambda = 2.17K$, temperatura del punto crítico para la transición al estado superfluido del Helio.

$\hat{\mathbb{T}}$, operador asociado al tensor de los esfuerzos, en un marco de referencia fijo.

$\hat{\underline{\mathbb{T}}}$, parte no proyectada del operador asociado al tensor de los esfuerzos, en un marco de referencia fijo.

$\hat{\underline{\mathbb{T}}}(\mathbf{x})$, componente sin traza del operador asociado al tensor de los esfuerzos, en un marco de referencia fijo.

$\underline{\mathbb{T}}$, valor esperado operador asociado al tensor de los esfuerzos, en un marco de referencia fijo.

$\underline{\mathbb{T}}(\mathbf{x})$, componente sin traza del valor esperado del operador asociado al tensor de los esfuerzos, en un marco de referencia fijo.

$\hat{\mathbb{T}}'$, operador asociado al tensor de los esfuerzos, en un marco de referencia móvil.

$\hat{\underline{\mathbb{T}}}'$, parte no proyectada del operador asociado al tensor de los esfuerzos, en un marco de referencia móvil.

τ , tiempo de orden mesoscópico.

$u(x)$, valor esperado del operador $\hat{H}'(x)$ asociado a la densidad local de energía en un marco de referencia móvil.

\underline{U} , tensor unitario de segundo orden.

$u(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$, término asociado con la componente regular $\delta\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ de la función $\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$

$u_m(x, t)$, término de arrastre en el espacio de configuración, de la ecuación de FP.

$u_m(t) = u_{m\mathbf{k}}(t)$, término de arrastre en el espacio de Fourier, de la ecuación de FP .

$\hat{u}_s(x)$, operador asociado a la velocidad del superfluido v_s en un marco de referencia fijo .

$\hat{u}'_s(x)$, operador asociado a la velocidad del superfluido v_s en un marco de referencia móvil.

$\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, velocidad generalizada asociada a las variables \mathbf{a} .

$\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{t})$, velocidad generalizada no local asociada al conjunto de variables \mathbf{a} y \mathbf{a}' .

$\delta\mathbf{v}(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{t})$, parte regular de la velocidad generalizada no local asociada al conjunto de variables \mathbf{a} y \mathbf{a}' .

v_n , velocidad de la componente normal del superfluido. la cual también es un multiplicador de Lagrange.

$v_s(x)$, valor esperado de la velocidad del superfluido.

$W = v_n - v_s$, diferencia entre la velocidad normal y la velocidad del superfluido.

$W(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$, función de estructura no local para el caso cuántico.

$W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$, inversa de la función de estructura no local para el caso cuántico.

$W(\mathbf{a})$, función de estructura local para el caso cuántico. la cual es la parte singular de la función $W(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$.

$W_{-1}(\mathbf{a})$, inversa de la función de estructura local para el caso cuántico. la cual es la parte singular de la función $W_{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$.

$(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{W})^s(\mathbf{x}', t)$, componente sin traza del tensor $(\nabla \cdot \mathbf{W})(\mathbf{x}', t)$.

$\mathbf{x} = (x, y, z)$, componentes del espacio de configuración.

$\mathbf{X}(\mathbf{a})$, fuerza generalizada la cual es la componente no proyectada de $\mathbf{J}(\mathbf{a})$

x , una componente del espacio de configuración.

$\tilde{\xi}_n(x, t)$, término fluctuante usado en la definición del flujo aleatorio $J_n^R(x, t)$, definidos ambos en el espacio de configuración.

$\tilde{\xi}_{nk}(t)$, término fluctuante usado en la definición del flujo aleatorio J_n^R , definidos ambos términos en el espacio de Fourier.

$\hat{Z}_m = \hat{Z}_{mk}$, gradiente de la parte no proyectada flujo \hat{I}_{mk} , parte no proyectada dada por \hat{J}_{mk} .

$\zeta_i(x)$ $i=1,2,3,4$, segundos de los coeficientes de viscosidad local del superfluido, sino aparece la dependencia en x , el coeficiente pierde su carácter local.