



Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**MODELADO FENOMENOLÓGICO
DE UN FLUIDO
EN UNA PLACA OSCILATORIA**

Tesis que presenta

Manolo Luis González Jiménez

Para obtener el grado de

Maestro en ciencias en Ingeniería Química

Asesor:

Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Secretario: Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez

Vocal: Dr. Guillermo Fernández Anaya

México, D.F. Noviembre 2015



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00100

Matrícula: 2133803088

MODELADO FENOMENOLOGICO DE UN FLUIDO EN UNA PLACA OSCILATORIA

En México, D.F., se presentaron a las 12:00 horas del día 12 del mes de noviembre del año 2015 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA
- DR. GUILLERMO FERNANDEZ ANAYA
- DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ




MANOLO LUIS GONZÁLEZ JIMENEZ
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (INGENIERIA QUIMICA)

DE: MANOLO LUIS GONZALEZ JIMENEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar




REVISÓ

LIC. JULIO CÉSAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES


Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI



DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE



DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

VOCAL



DR. GUILLERMO FERNANDEZ ANAYA

SECRETARIO



DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

Resumen

El presente trabajo se plantea la solución analítica para describir el comportamiento de materiales en platos paralelos, donde la parte superior es una placa oscilatoria y la parte inferior es una placa fija, separadas a una distancia h , para poder analizar el problema en una placa oscilatoria se utilizan bases de reología, la clasificación de los fluidos, algunos de los modelos que se han desarrollado hasta el momento, añadiendo conceptos de cálculo fraccional como caso adicional a este análisis.

Se realizaron análisis matemáticos a tres ecuaciones que son: la Ley de Newton, la ecuación de Maxwell-Cattaneo y la de Maxwell Fraccional resolviéndolas mediante el método de variables separables, con esto identificamos los módulos elástico y viscoso en cada caso.

Se sustituyeron en los módulos identificados, valores para observar el comportamiento y descripción que resulta de la ecuación, esto a diferentes frecuencias, distintas separaciones entre los platos y distintas viscosidades para los tres casos, en la de Maxwell Cattaneo junto con la de Maxwell fraccional se variaron los tiempos de relajación y para Maxwell Fraccional las alfas.

Se observó que la Ley de Newton describe el comportamiento del material a bajas frecuencias al igual que la ecuación de Maxwell Cattaneo a distintos tiempos de relajación y con respecto a la ecuación de Maxwell-Fraccional no describe alguna tendencia al comportamiento de los materiales, únicamente la equivalencia matemática con las otras dos ecuaciones.

ÍNDICE

1	Introducción	1
2	Antecedentes	3
2.1	Reología	3
2.2	Viscosidad	3
2.2.1	Introducción	3
2.2.2	Esfuerzo de Corte	4
2.2.3	Velocidad de Deformación o Cizallamiento	5
2.2.4	Ley de Newton de la Viscosidad.....	6
2.3	Tipos de Materiales: Clasificación y Modelos	7
2.3.1	Fluidos Newtonianos.....	7
2.3.2	Fluidos No-Newtonianos.....	8
2.3.2.1	Fluidos Reofludizantes y Reoespesantes.....	10
2.3.2.2	Fluidos Tixotrópicos	14
2.3.3	Fluidos viscoelásticos.....	15
2.3.3.1	Modelo de Maxwell	16
2.3.3.1.1	Modelo de Maxwell-Fraccional.....	18
2.3.3.2	Relajación al Esfuerzo.....	22
2.3.3.3	Cedencia a la Deformación	23
2.3.3.4	Recuperación de la Deformación	24
2.3.3.5	Experimentos Dinámicos u Oscilatorio.....	25
3	Objetivos	29
3.1	Generales.....	29
3.2	Particulares.....	29
4	Análisis Matemático.....	30
4.1	La Ley de Newton.....	30
4.2	La Ecuación de Maxwell-Cattaneo	33

4.3	Ecuación de Maxwell-Fraccional.....	37
5	Resultados y discusión	45
5.1	Análisis de diferentes viscosidades en la ecuación de newton para el agua.....	45
5.2	Análisis de diferentes separaciones entre los platos a una viscosidad con la Ley de Newton para datos del agua.	47
5.3	Análisis con datos de la miel y el agua con la Ley de Newton	49
5.4	Análisis de diferentes separaciones entre los platos a una viscosidad con la Ley de Newton para datos de la miel.	50
5.5	Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell-Cattaneo con diferentes tiempos de relajación con datos del agua.....	51
5.6	Análisis comportamiento de la ecuación de Maxwell Cattaneo con un tiempo de relajación, a diferentes separaciones entre las placas con datos del agua.	53
5.7	Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell-Cattaneo con diferentes tiempos de relajación con datos de la miel.	55
5.8	Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell-Cattaneo con un tiempo de relajación a diferentes separaciones entre las placas con datos de la miel.	59
5.9	Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes alfas con datos del agua.....	60
5.10	Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes alfas con un tiempo de relajación aplicados a datos del agua.....	62
5.11	Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes alfas con datos de la miel.....	63
5.12	Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes alfas con un tiempo de relajación aplicados a datos de la miel.	64
6	Conclusión	65
7	Bibliografía	66

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Fuerza de cizalla	4
Figura 2. Esfuerzos normales generados en las caras de un elemento cúbico de fluido sometido a cizalla simple (esfuerzo de cizalla)	5
Figura 3. Desarrollo del perfil de velocidad.....	6
Figura 4. Fluidos Newtonianos	8
Figura 5. Viscosidad aparente y diferencial	10
Figura 6. Curva típica para un material reofluidizante.....	11
Figura 7. Reograma para un fluido pseudoplástico en escala log-log	12
Figura 8. Comportamiento típico de un material con viscosidad estructural	13
Figura 9. Reograma para un fluido plástico.	13
Figura 10. Comportamiento de flujo de fluidos tixotrópicos sometidos a varios ciclos de cizallamiento.	15
Figura 11. Evolución de la viscosidad aparente en función de los cambios en escalón de la tasa de corte, para fluidos tixotrópicos.....	15
Figura 12. Pistón.	17
Figura 13. Muelle.....	17
Figura 14. Modelo de Maxwell.....	17
Figura 15. Respuesta de diferentes tipos de materiales en función del tiempo (b), cuando son sometidos a una deformación relativa (a).....	23
Figura 16. Respuesta en función del tiempo de diferentes materiales cuando son sometidos a un esfuerzo por un periodo de tiempo t_0	23
Figura 17. Función de cedencia a la deformación (o creep) $J(t)$	24
Figura 18. Deformación oscilatoria aplicada a un cuerpo.....	25
Figura 19. Material Viscoelástico: esfuerzo, deformación y desfase entre ambos.....	26

Figura 20. Representación del módulo complejo como combinación de dos vectores que son los módulos elásticos y viscosos.....	27
Figura 21. Reómetro de platos paralelos	29
Figura 22. Representación de la desfase	30
Figura 23. Comportamiento dentro las raíces	40
Figura 24. Comportamiento de las raíces.....	40
Figura 25. Gráfica de diferentes viscosidades del agua para los módulos Elástico y Viscoso de la ley de Newton.	45
Figura 26. Gráfica del Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) a distintas viscosidades del agua para los módulos Elástico y Viscoso de la ley de Newton.	46
Figura 27. Gráfica de distintas separaciones entre las placas para datos del agua aplicadas a los Módulos Elásticos y Viscosos con la ley de Newton.....	47
Figura 28. Gráfica de diferentes separaciones entre las placa para el Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) del agua para los módulos Elástico y Viscoso de la ley de Newton.....	48
Figura 29. Gráfica para datos del agua y miel sustituidas en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la Ley de Newton.....	49
Figura 30. Gráfica de distintas separaciones para datos de la miel en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la Ley de Newton	50
Figura 31. Gráfica de diferentes separaciones entre las placa para el módulo elástico (a) y viscoso (b) para datos de la miel en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la Ley de Newton.	51
Figura 32. Gráfica de distintos tiempos de relajación para datos de la miel en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.	52
Figura 33. Gráfica de diferentes tiempos de relajación entre las placa para el Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) del agua en ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.....	53

Figura 34. Gráfica de distintas separaciones a un tiempo de relajación para datos del agua en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.	54
Figura 35. Gráfica de diferentes separaciones entre las placa con un tiempo de relajación para el Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) de la miel para las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo	55
Figura 36. Gráfica de los módulos de elasticidad y viscosidad de la miel a diferentes tiempos de relajación, (a), (b), (c) y (d) para las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.	56
Figura 37. Gráfica de los módulos de elasticidad y viscosidad de la miel a diferentes tiempos de relajación: (c), (d) y (e) para las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a baja frecuencia.	57
Figura 38. Gráfica de diferentes tiempos de relajación para el Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) de la miel para las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a baja frecuencia.	58
Figura 39. Gráfica de distintas separaciones a un tiempo de relajación para datos de la miel en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.	59
Figura 40. Gráfica de distintas separaciones a un tiempo de relajación para datos de la miel en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a una alta frecuencia.	60
Figura 41. Gráfica de distintas alfas para datos del agua en las ecuaciones de G' y G'' de las ecuación de Maxwell-Fraccional.	61
Figura 42. Gráfica de distintas alfas para datos del agua con un tiempo de relajación en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Fraccional.	62
Figura 43. Gráfica de distintas alfas para datos de la miel en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Fraccional.....	63

Figura 44. Gráfica de distintas alfas para datos de la miel con un tiempo de relajación en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Fraccional. 64

Letras latinas

A	Área	m^2
E	Constante de proporcionalidad entre el esfuerzo y deformación	$\frac{m^2}{N}$
F	Fuerza	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$
$G(t)$	Módulo de deformación	$\frac{N}{m^2}$
$G'(\omega)$	Módulo de almacenamiento	$\frac{N}{m^2}$
$G''(\omega)$	Módulo de pérdida	$\frac{N}{m^2}$
$G_0(0)$	Módulo de relajación inicial	$\frac{N}{m^2}$
G_k	Módulo de relajación de n muestras	$\frac{N}{m^2}$
G^*	Módulo de relajación compleja	$\frac{N}{m^2}$
$J(t)$	Parámetros de cedencia	$\frac{m^2}{N}$
J^*	Parámetros de cedencia compleja	$\frac{m^2}{N}$
k	Índice de consistencia	$Pa \cdot s^n$
K	Constante de tiempo	Segundos
m	Ángulo	Rad

n	Índice de comportamiento	$\text{Pa} \cdot \text{s}^n$
Re	Numero de Reynolds	Adimensional
t	Tiempo	Segundos
v	Velocidad relativa	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Alfabeto griego

α	Cualquier número real positivo	Adimensional
β	$\frac{\sqrt{\text{Re}}}{2}$	Adimensional
$\Gamma(z)$	Función gama	Adimensional
γ	Deformación	Adimensional
$\dot{\gamma}$	Velocidad de deformación	$\frac{1}{\text{s}}$
γ_0	Amplitud de deformación	Adimensional
η	Viscosidad No-Newtoniana	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
η_{ap}	Viscosidad aparente	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
η_0	Viscosidad de baja tasa de corte	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
η_{α}	Viscosidad de alta tasa de corte	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

η^*	Viscosidad compleja	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
λ	Constante de tiempo para la ecuación de Maxwell	segundos
μ	Viscosidad Newtoniana	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
ξ_0	Amplitud de oscilación	Adimensional
ρ	Densidad	$\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$
τ	Esfuerzo de corte	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
φ	Desfase existente entre el esfuerzo y la deformación	Adimensional
ω	Frecuencia	$\frac{1}{\text{s}}$

1 Introducción

Se denominan fluidos a las sustancias en general, aquellas que se deforman cuando se le aplica una presión o tensión en su superficie, que adoptan la forma del recipiente que los contiene (Yunus y Jhon ,2006), pero no todos los fluidos se comportan de la misma manera a las fuerzas externas que reciben, esto se debe a la viscosidad que presentan, estos se clasifican en Newtonianos y no-Newtonianos.

Los fluidos Newtonianos se caracterizan cuando la viscosidad es constante, es decir que cumplen con la Ley de Newton por ejemplo el agua, tiene muy poca viscosidad y esta no varía con ninguna fuerza que le sea aplicada, si le damos un golpe a la superficie del agua en una piscina esta se deforma como es lógico.

Los fluidos no-Newtonianos, tienen un comportamiento extraño o fuera de lógica, este tipo de fluidos no cumplen con la ley de Newton, la viscosidad puede variar con las tensiones (fuerzas) que se le aplican, lo que hace que se comporte en ocasiones como un sólido ante mayor fuerza y como un líquido con menos tensión aplicada, ejemplos de este tipo de fluidos son la salsa de tomate (kétchup) y la pasta dental, que para que salgan de sus recipientes debemos de hacer un esfuerzo, que hace que su viscosidad disminuya y la "sustancia" pueda salir al exterior o la miel que si la revolvemos con una cucharilla se formaría un remolino hacia arriba y no hacia abajo como normalmente sucedería en el café.

La ciencia que se encarga de estudiar estos tipos de fluidos, en cuanto a la deformación, la interrelación entre las fuerzas que se le aplican y el tiempo, es la reología (Barnes *et al* 1998), ésta es aplicable a todos los materiales, desde los gases hasta los sólidos. La ciencia de la reología tiene aproximadamente 95 años, fue fundada por dos científicos en los años veinte, quienes tuvieron la necesidad común de describir las propiedades de flujo de fluidos. Estos pioneros fueron los profesores Marcus Reiner y Eugene Bingham, cabe mencionar que los materiales reales pueden presentar un comportamiento puramente elástico, como un sólido, un comportamiento puramente viscoso, como un líquido, o una combinación de ambos, es decir, un comportamiento viscoelástico. Desde una perspectiva más general, cabe decir que, en realidad todos los materiales son viscoelásticos, donde los cuerpos elásticos "puros" y los cuerpos viscosos "puros" son los extremos de una vasta gama de posibilidades, en donde la respuesta global del sistema será resultante de la contribución de cada uno de los elementos individuales (Mackley *et al*, 1994).

Existen varios métodos para caracterizar el comportamiento viscoelástico de un fluido, como la relajación de esfuerzo, cedencia a la deformación, recuperación a la deformación, viscoelasticidad no lineal y en este caso de estudio es el oscilatorio.

Para describir las propiedades de los fluidos o materiales, se utilizan modelos fenomenológicos, éstos se refiere a que son modelos basados en principios físicos, muchos modelos se han propuesto para el tratamiento de los datos experimentales con el fin de describir el comportamiento de las propiedades de flujo de las sustancias. Sin embargo es muy posible que un único modelo no correlacione satisfactoriamente el comportamiento de una determinada sustancia en un amplio intervalo de corte. A pesar de ello, estos modelos son útiles para correlacionar el comportamiento de una gran cantidad de sustancias y se encuentran comúnmente en la bibliografía.

El cálculo fraccionario se utiliza para observar si se puede hacer una buena descripción adaptándolo con la ecuación de Maxwell-Cattaneo, el concepto de cálculo fraccionario no es nuevo, existe hace más de tres siglos, por lo tanto el modelo de Maxwell se puede modificar para tratarse como un arreglo fraccionario, para examinar si hay mayor versatilidad en la simulación del comportamiento de materiales complejos (Meral *et al.*, 2010).

2 Antecedentes

2.1 Reología

La reología (del griego *reos*, fluir y *logos*, estudio) es la ciencia del flujo y la deformación de la materia (Barnes *et al* 1998). En concreto, analiza la relación existente entre las variables: esfuerzo de corte (τ), deformación producida (γ), velocidad de deformación $\left(\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}\right)$ y tiempo (t), dependiendo de cómo sea esta relación, los materiales presentan comportamientos reológicos diferentes.

La reología es aplicable a todos los materiales, desde los gases hasta los sólidos. La ciencia de la reología tiene 95 años, fue fundada por dos científicos en los años veinte quienes tuvieron la necesidad común de describir las propiedades de flujo de fluidos. Estos pioneros fueron los profesores Marcus Reiner y Eugene Bingham (Walters y Tanners, 2005).

El filósofo griego Heraclitus describió la reología como *panta rei* (todas las cosas fluyen). Traducido a términos reológicos, esto significa que si se espera tiempo suficiente todo fluirá. La reología de fluidos es usada para describir la consistencia de diferentes fluidos, normalmente mediante dos componentes, la viscosidad y la elasticidad. Por viscosidad se entiende la resistencia a fluir o el “espesamiento” y por elasticidad la “pegajosidad” o “estructura”.

La reología es la rama de la física que estudia el comportamiento de los fluidos sometidos a diferentes tipos de esfuerzos. El campo de la reología se extiende desde la mecánica de los fluidos Newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra.

Los estudios reológicos tienen dos objetivos principales:

- a) Predecir el comportamiento macroscópico del fluido bajo condiciones de proceso, para lo cual se hace uso de las ecuaciones constitutivas y de las funciones materiales.
- b) Estudiar de manera indirecta la microestructura del fluido y evaluar el efecto de varios factores sobre ella.

2.2 Viscosidad

2.2.1 Introducción

El concepto de viscosidad nació con Newton, en su obra "*Philosophiae Naturalis. Principia Mathematica*" (Versión traducida. I. Newton, 1934) donde afirmó que la resistencia ejercida, y que surge a partir de una falta en el deslizamiento de un fluido, si el resto de factores se mantienen, es proporcional a la velocidad a la que las partes de un fluido que son separadas entre sí.

El principio involucrado para el entender este concepto es el siguiente: imaginemos un plato cuadrado, metálico, anclado (para evitar su movimiento) y cubierto con una capa delgada de grasa. Ahora imaginemos otro plato del mismo tamaño que el primero, colocado sobre la superficie

opuesta de la capa de grasa a una distancia “h”. Para deslizar el plato superior se debe aplicar sobre él una fuerza (refiriéndonos a movimiento paralelo de los platos, ver Figura 1).

Una pequeña fuerza es suficiente para mover el plato en una distancia corta a una velocidad baja, pero si queremos moverlo a mayor velocidad se necesitará una fuerza mayor. Por otro lado, se podría observar que es más difícil mover el plato con una capa de grasa delgada que con una gruesa. Así mismo un plato de mayores dimensiones será más difícil de mover para igual velocidad y espesor de grasa.

Asignando valores numéricos a éste fenómeno, nos permite operar matemáticamente sobre estos y el establecer nombres a estas interacciones permite que sean objeto de discusión y estudio.

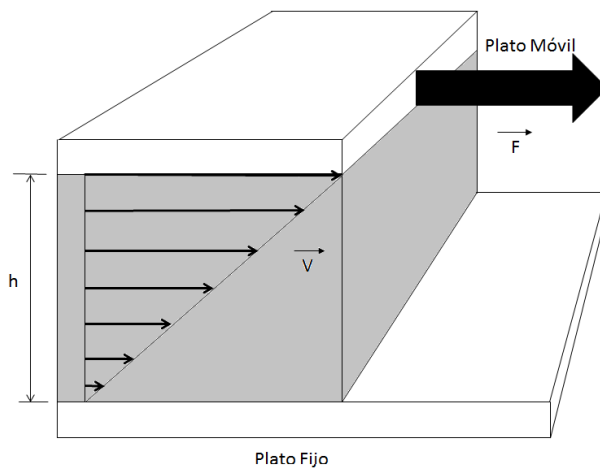


Figura 1. Fuerza de cizalla

2.2.2 Esfuerzo de Corte

La fuerza F requerida para mover el plato superior se relaciona con el área en contacto con la sustancia y para llegar a una medida específica es necesario dividir la fuerza total necesaria para el movimiento por el área en contacto con la sustancia.

A esta relación se le denomina Esfuerzo de Corte τ (el movimiento entre planos es siempre referido como "corte" o "cizalla", en inglés "shear"). La fórmula sería:

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{1}$$

Tanto el esfuerzo como la deformación (o velocidad de cizalla) son en realidad tensores de segundo orden y pueden ser representados por una matriz 3x3 con nueve componentes. Por ejemplo, el tensor de esfuerzo, en un sistema de coordenadas arbitrario con ejes 1,2 y 3 (equivalente a x, y y z en coordenadas rectangulares; r, z y θ , en coordenadas cilíndricas; r, θ y ϕ en coordenadas esféricas), está dado por:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

El primero y segundo subíndice de cada componente del tensor de esfuerzo τ_{ij} , en la matriz, se identifica la fila (la dirección del vector fuerza) y la columna (la normal al plano sobre el cual actúa el componente de la fuerza), respectivamente. El tensor esfuerzo (así como el tensor deformación, el cual se puede escribir de una manera análoga) es simétrico. Esto significa que $\tau_{ij} \equiv \tau_{ji}$ y por tanto, sólo seis componentes de los nueve totales, son independientes. Los componentes normales del esfuerzo son aquellos que yacen a lo largo de la diagonal de la matriz donde $i \equiv j$ (esto es, $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$). La orientación de los esfuerzos normales para un elemento cúbico sometido a esfuerzo simple planar como se ilustra en la Figura 2.

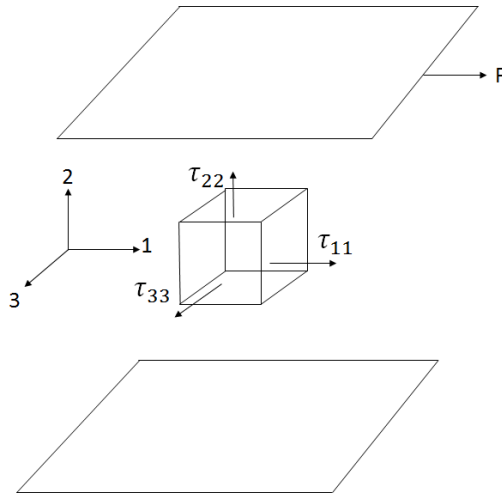


Figura 2. Esfuerzos normales generados en las caras de un elemento cúbico de fluido sometido a cizalla simple (esfuerzo de cizalla)

2.2.3 Velocidad de Deformación o Cizallamiento

La deformación es un cambio en la forma del medio continuo entre una configuración inicial (no deformada) y una configuración final (deformada). Lo importante realmente son las posiciones iniciales y finales de las partículas del medio material y no se tienen en cuenta las configuraciones intermedias.

La deformación de un fluido en un punto dado puede describirse mediante un tensor deformación, que representa los cambios relativos de un elemento cubico pequeño al ser deformado respecto a esta posición (Ferry 1980).

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

La velocidad de deformación o cizallamiento ejercido sobre el material es relacionado con la velocidad relativa de movimiento y la distancia entre platos (h en nuestro caso). A una velocidad v dada, mayor esfuerzo se requiere en una unidad de material cuando los platos están más cercanos. La medida específica de este trabajo por unidad de material es llamada velocidad o tasa de deformación o corte, y es definida como la velocidad relativa dividida por la distancia entre platos:

$$\dot{\gamma} = \frac{v}{h} \quad (4)$$

2.2.4 Ley de Newton de la Viscosidad

Hemos estudiado, en el ejemplo anterior, el efecto final de la fuerza aplicada sobre el plato, sin considerar el tiempo.

Supongamos ahora que el sistema esta inicialmente en reposo, y al cabo del tiempo $t = 0$, la lámina inferior de la Figura 3 se pone en movimiento en la dirección x , con velocidad constante v .

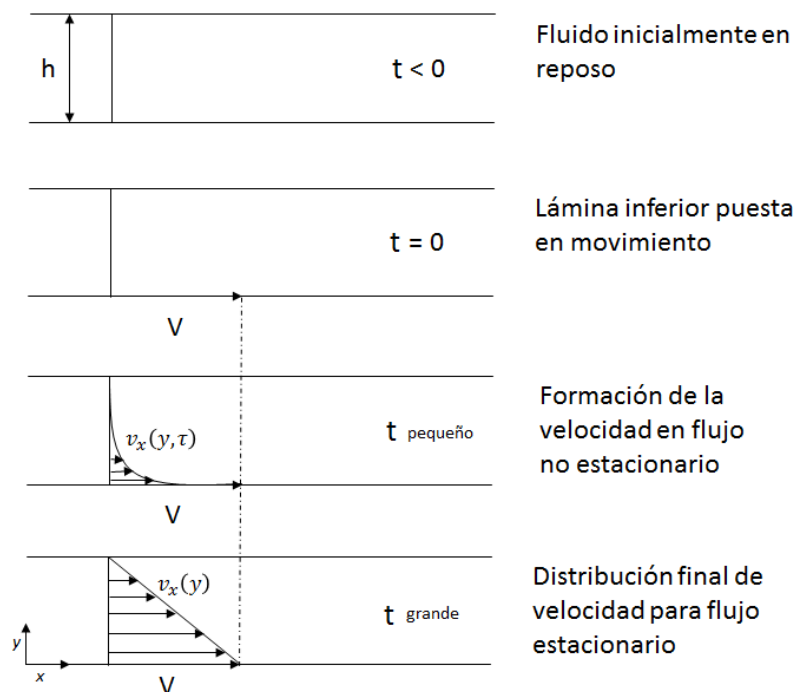


Figura 3. Desarrollo del perfil de velocidad

A medida que transcurre el tiempo el fluido gana cantidad de movimiento, y finalmente se establece el perfil de velocidad en régimen estacionario (Figura 3). Una vez alcanzado dicho estado estacionario de movimiento, es preciso aplicar una fuerza constante F para conservar el movimiento de la lámina inferior.

Para el flujo laminar se satisface la siguiente condición:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v}{y} \quad (5)$$

Donde la constante de proporcionalidad es la viscosidad (μ)

Si retomamos la ecuación anterior encontramos que es conveniente describirla de una forma más explícita. El esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección "x" sobre la superficie del fluido, situada a una distancia constante "y", por el fluido existente en la región donde "y" es menor, se designa por τ_{yx} , y el componente "x" del vector velocidad del fluido, por " v_x ".

De acuerdo con estos símbolos la ecuación queda:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{d v_x}{dy} \quad (6)$$

Donde el signo "-" se puede explicar, para las coordenadas respectivas, según:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{(0 - v)}{(y - 0)} \quad (7)$$

Es decir, que la fuerza de cizalla por unidad de área es proporcional al gradiente negativo de la velocidad local. Esta es la ley de Newton de la viscosidad, y los fluidos que la cumplen se llaman fluidos Newtonianos (todos los gases y la mayor parte de los líquidos sencillos, se comportan de acuerdo a esta ley).

La viscosidad de un fluido Newtoniano se representa con la letra griega μ pero para fluidos no-Newtonianos la viscosidad aparente se representa con la letra griega η .

2.3 Tipos de Materiales: Clasificación y Modelos

Los fluidos se clasifican en Newtonianos, no-Newtonianos y viscoelásticos que a continuación se describen.

2.3.1 Fluidos Newtonianos

Recordemos que cuando la viscosidad es constante, para cualquier valor de τ , el fluido recibe el nombre de Newtoniano (o fluido viscoso lineal). La representación gráfica de τ contra $\dot{\gamma}$ de un fluido Newtoniano es una recta que pasa por el origen, Figura 4.

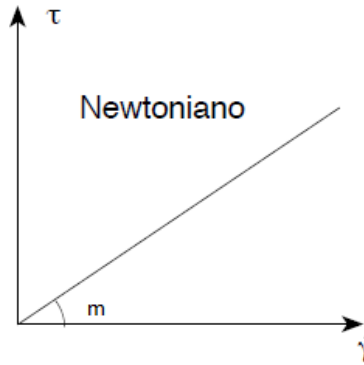


Figura 4. Fluidos Newtonianos

La pendiente es la viscosidad:

$$\mu = \text{tg}(m) \quad (8)$$

La fluidez se define como:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\text{tg}(m)} \quad (9)$$

Basta con pocos valores de τ y $\dot{\gamma}$ para fijar la posición de la recta y por ende en este tipo de fluidos la viscosidad solo depende de la temperatura, en la escala logarítmica la curva de flujo para un fluido Newtoniano tiene como pendiente la unidad.

Los fluidos (Newtonianos o no), también cambian su viscosidad con la presión. En aceites, por ejemplo, el incremento de viscosidad sigue aproximadamente una función exponencial respecto a la presión (factor a considerar en, por ejemplo, diseño de rodamientos).

Ejemplos de fluidos Newtonianos (Rao, 1977) incluyen:

- Agua
- Leche
- Solución de azúcar
- Aceite mineral
- Solución de glicerina

2.3.2 Fluidos No-Newtonianos

Hay una gran variedad de fluidos cuyo comportamiento no se ajusta al de líquido newtoniano, al menos en un cierto rango de esfuerzos (Rohn (1995)). Estos no cumplen la Ley de Newton. Pueden clasificarse en tres grandes grupos:

a) La ecuación que relaciona τ y $\dot{\gamma}$ no es lineal (fluido viscoso no lineal) es la siguiente:

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}) \quad (10)$$

Dependiendo de cómo varía la viscosidad aparente con la tasa de deformación el comportamiento se puede caracterizar por:

- Fluido reofluidizante: la viscosidad aparente disminuye con la velocidad de corte o deformación.
 - Fluido reoespesante: la viscosidad aparente aumenta con la velocidad de corte o deformación.
 - Fluido plástico (viscoplástico): exhibe el llamado esfuerzo umbral o esfuerzo de cadencia, se debe aplicar cierto esfuerzo para que ocurra el flujo.
- b) τ Es una función más o menos compleja de $\dot{\gamma}$, eventualmente, del tiempo (fluidos reológicamente complejos).

$$\tau = \tau (\dot{\gamma}, t) \quad (11)$$

- c) El comportamiento reológico es el resultante de un sistema fluido (Newtoniano o no), y un sistema elástico: fluidos viscoelásticos.

La complejidad reológica aumenta de a) a c), además estos grupos son ideales, pues con frecuencia existen fluidos reales complejos que son combinaciones de varios modelos reológicos. En los fluidos no-Newtonianos la temperatura tiene una enorme importancia ya que a menudo pequeñas variaciones de esta pueden modificar notablemente el comportamiento reológico. En los fluidos no-Newtonianos no puede utilizarse el concepto de viscosidad por dos causas:

- En general, la consistencia (concepto análogo al de viscosidad, y que relaciona el esfuerzo de corte con la tasa de deformación), depende de la presión tangencial y por lo tanto, no es constante sino que puede variar entre amplios límites. En oposición a la viscosidad que es siempre constante (a una temperatura dada)
- Por otra parte, la consistencia tiene dimensiones diferentes a la viscosidad, ya que no se cumple:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (12)$$

Por esta razón los fluidos No-Newtonianos se caracterizan por los reogramas, que son las representaciones gráficas de sus comportamientos, o bien por sus parámetros reológicos, que son las constantes de las ecuaciones que definen el comportamiento reológico respectivo.

En los fluidos No-Newtonianos se ha utilizado con frecuencia el concepto de viscosidad aparente que es la que tendría un fluido Newtoniano cuya recta pasará por el mismo punto del reograma (Figura 5).

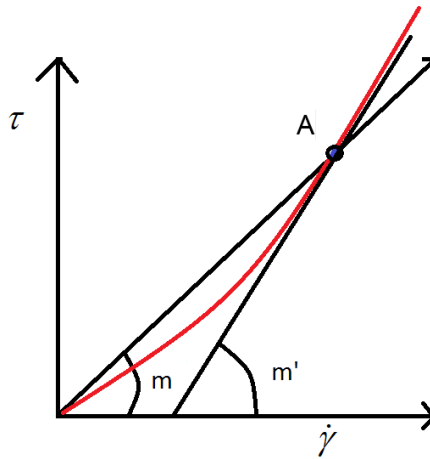


Figura 5. Viscosidad aparente y diferencial

El fluido no-Newtoniano tiene en A, una viscosidad aparente (η_{ap}):

$$\eta_{ap} = \text{tg}(m) \quad (13)$$

La viscosidad aparente es un concepto que se presta a muchos errores como puede deducirse de la Figura 5. No conviene, pues, usar ciertos aparatos para la medición de viscosidades en fluidos No-Newtonianos y por esta razón, algunos instrumentos de control diseñados para ensayos en un punto pueden provocar serios errores en la medida (Moreno, 2005). Otro concepto utilizado es el de viscosidad diferencial (η_{dif}) que viene dado por el ángulo que forma la tangente a la curva, en un punto dado, con el eje de abscisas.

$$\eta_{dif} = \text{tg}(m') \quad (14)$$

2.3.2.1 Fluidos Reofluidizantes y Reoespesantes

Los fluidos reofluidizantes y reoespesantes experimentan reducción (fluidización) o aumento de viscosidad (espesamiento) con el incremento del esfuerzo o de la tasa de corte, respectivamente.

El comportamiento reofluidizante es más común que el espesante y puede encontrarse en todo tipo de emulsiones, suspensiones y soluciones poliméricas (geles, en particular). Se ha observado en cierto tipo de miel y también en suspensiones de almidón cocinadas (Bagley y Christianson, 1982). De hecho, la reofluidización es el comportamiento más frecuente de los fluidos no-Newtonianos como se observa en la siguiente Figura 6.

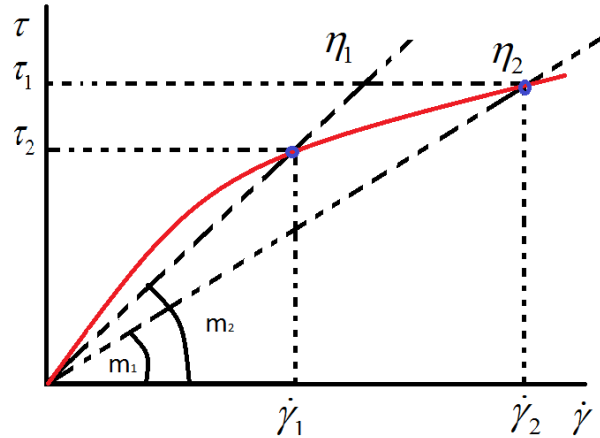


Figura 6. Curva típica para un material reofluidizante

Se han propuesto, varios modelos matemáticos para estos sistemas, sin embargo, no hay ninguno que incluya a todos.

Existe otra denominación para los fluidos reofluidizantes y reoespesantes, muy popular, que es “pseudoplasticidad” y “dilatancia”. Sin embargo, esta clasificación es adecuada para los llamados fluidos de "ley de potencia", cuyo comportamiento de flujo puede ser descrito mediante la expresión que se denomina ecuación de Ostwald o ley de la Potencia.

$$\tau = k(\dot{\gamma})^n \quad \text{ó} \quad \log \tau = \log k + n \log \dot{\gamma} \quad (15)$$

Tanto n como k son parámetros de ajuste que dependen de la naturaleza del fluido y de las condiciones de medición y han sido llamados índice de comportamiento (n) e índice de consistencia (k).

Sí $n = 1$, el fluido es Newtoniano

Sí $n < 1$, es pseudoplástico

Sí $n > 1$, es dilatante

La viscosidad aparente se define por:

$$\tau = \eta_{ap} \dot{\gamma} \quad \text{ó} \quad \eta_{ap} = k(\dot{\gamma})^{n-1} \quad (16)$$

La ecuación de Ostwald es sencilla y sirve para interpolar. Tiene el inconveniente que en el origen de coordenadas:

$$\dot{\gamma} \rightarrow 0 \quad \eta_{ap} \rightarrow \text{Indeterminado}$$

Normalmente se trabaja con escalas $\log \tau$ vs. $\log \dot{\gamma}$, obteniendo reogramas lineales (Figura 7).

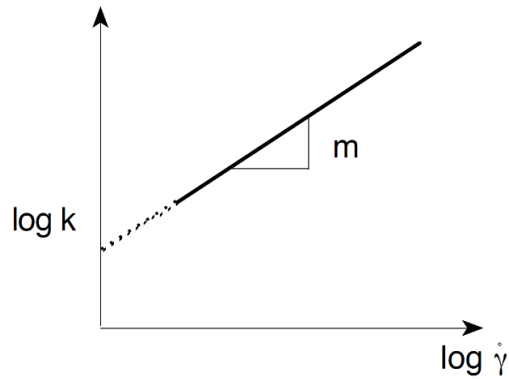


Figura 7. Reograma para un fluido pseudoplástico en escala log-log.

Las emulsiones o suspensiones presentan a menudo un comportamiento pseudoplástico. Tal comportamiento se caracteriza por una disminución de la viscosidad a medida que el cizallamiento aumenta. Desde el punto de vista físico esto significa que la resistencia a fluir disminuye cuando la velocidad de derrame aumenta. Esto proviene obviamente de la forma en que se orientan las heterogeneidades contenidas en fluidos complejos como dispersiones y emulsiones.

El comportamiento de algunos fluidos se ajusta adecuadamente al modelo de Sisko, 1958:

$$\eta = \eta_{\infty} + k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (17)$$

Para algunos fluidos con comportamiento reofluidizante tales como: suavizante de telas, solución de carbopol, polímero de cristal líquido y yogurt, fueron descritos adecuadamente por esta ecuación.

Comparado al comportamiento reofluidizante, los fluidos reoespesantes son relativamente escasos.

Un comportamiento verdaderamente pseudoplástico o dilatante es algo muy escaso en la naturaleza.

La mayor parte de los fluidos exhiben una relación lineal entre $\log \tau$ y $\log \dot{\gamma}$, sólo en intervalos de τ o $\dot{\gamma}$ relativamente estrechos. Cuando el espectro de medición es lo suficientemente amplio, se verifica, las más veces que m (o la pendiente) no es constante a lo largo de todo el intervalo de medición, este tipo de conducta es denominado "viscosidad estructural", un fluido estructural se comporta de forma reofluidizante a tasas de corte intermedias, y es Newtoniano a muy bajas y muy altas tasas de corte. En la Figura 8 se muestra un ejemplo hipotético de este tipo de comportamiento. El modelo de Carreau, (1972) puede representar el comportamiento de viscosidad estructural, mediante la expresión:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{[1 + (K \dot{\gamma})^2]^p} \quad (18)$$

Este modelo incluye cuatro parámetros ajustables, la asíntota de viscosidad en la región de baja tasa de corte η_0 ; la asíntota de viscosidad para la región de alta tasa de corte η_{∞} ; el índice de fluidez, p

y una constante de tiempo K. El modelo de Carreau se reduce al modelo de ley de potencia cuando $\eta_{\infty} \ll \eta \ll \eta_0$ y $(\lambda\dot{\gamma})^2 \gg 1$, donde los índices de comportamiento y de consistencia son iguales a:

$$k = \frac{\eta_0}{(\lambda\dot{\gamma})^{2p}} \quad \text{y} \quad n = 1-2p$$

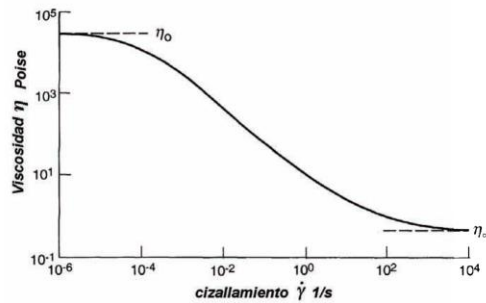


Figura 8. Comportamiento típico de un material con viscosidad estructural

2.3.2.1.1 Comportamiento Viscoplastico

El comportamiento de flujo de un material viscoplastico se distingue por la aparición de un esfuerzo de corte umbral, por debajo del cual el material no fluye de forma viscosa, sino más bien como un sólido elástico. Una vez excedido el umbral, el flujo adquiere características viscosas; o sea, fluye como un líquido.

El reograma mostrado en la Figura 9 se refiere a un comportamiento plástico ideal. En este caso si la tensión de cortadura aplicada es inferior a τ_0 , el producto se comporta como un sólido. Si es superior a τ_0 se comporta como un fluido Newtoniano. τ_0 representa un esfuerzo de umbral crítico para que el fluido empiece a fluir (Mendez *et al* 2010).

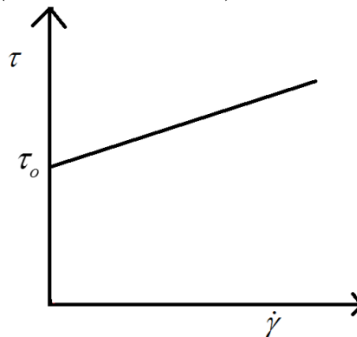


Figura 9. Reograma para un fluido plástico.

El caso anterior es el llamado fluido plástico ideal o de Bingham, donde la ecuación de Newton se transforma en la de Bingham.

$$\tau = \tau_0 + \eta \dot{\gamma} \tag{19}$$

Como ejemplo de fluidos plásticos se encuentran pastas, suspensiones, emulsiones, grasas, pinturas, cristales líquidos, etc. (Van Wazer *et al*, 1963; Yoshimura *et al* 1987; Cheng, 1986). Este modelo se ha aplicado en el estudio del comportamiento de suero de puré de albaricoque (Costell *et al.*, 1982;

Costell et al., 1985), zumos naturales de manzana (Ibarz y Casero, 1987), geles de pectina (Fizman et al., 1984).

Existe otro modelo matemático, la ecuación de Herschel-Bulkley, que permite representar comportamientos viscoplásticos más complejos, donde:

$$\tau = \tau_0 + k \dot{\gamma}^n \quad (20)$$

Esta última expresión combina la primera respuesta elástica ($\tau < \tau_0$), con un comportamiento de Ley de Potencia (generalmente refluidizante) cuando $\tau < \tau_0$. En general, puede verificarse que para intervalos de medición que involucran bajas tasa de corte (pero lo suficientemente grandes para superar τ_0). Esta ecuación se ha utilizado en el estudio reológico de clara de huevo (Tung et al., 1970), zumos de kiwi (Ibarz et al., 1995). Los parámetros reológicos de bastantes alimentos semilíquidos se ajustan a esta ecuación de Herschel-Bulkley (Barbosa y Peleg, 1983). Pero para altas tasas de corte es más apropiada la ecuación de Bingham ya que resulta más conveniente. Existe también otra expresión matemática, denominada modelo de Casson, 1959, donde:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\eta_{\infty} \dot{\gamma}} \quad (21)$$

En esta expresión τ_0 y η_{∞} tienen el mismo significado que el modelo de Bingham (Dolz y Durán, 1997). El modelo más adecuado para un fluido viscoplástico dependerá, en definitiva, de la respuesta del fluido a la deformación o el esfuerzo, y que tan bien se ajusten los datos experimentales a la expresión matemática.

2.3.2.2 Fluidos Tixotrópicos

El término de tixotropía se utilizó al principio para describir la transición sol-gel, isoterma y reversible, producida en algunos sistemas por agitación mecánica (Freundlich y Rawitzer, 1927). Más adelante, sin embargo, se introdujo en la definición la idea del tiempo de respuesta o adaptación de la microestructura a un cambio de flujo. En la Figura 10 se muestran curvas de flujo típico para un fluido tixotrópico cuando este ha sido sometido a ciclos sucesivos de cizallamiento. A medida que progresan los ciclos de cizallamiento, la resistencia a fluir cambia, produciendo lazos de histéresis. Si la resistencia a fluir disminuye a medida que evoluciona la deformación, se dice que el material presenta una tixotropía positiva. Si ocurre el comportamiento opuesto, se dice que el comportamiento es tixotrópico negativo.

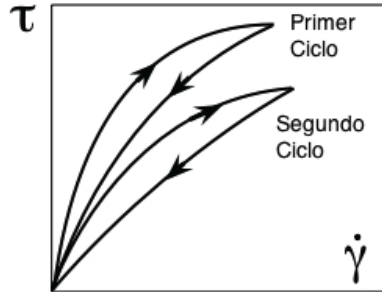


Figura 10. Comportamiento de flujo de fluidos tixotrópicos sometidos a varios ciclos de cizallamiento.

Existen también fluidos que ostentan un incremento de viscosidad cuando son sometidos a bajas tasas de corte; estos materiales son llamados reopécticos. Otro comportamiento típico en un fluido tixotrópico se muestra en la Figura 11. En esta figura se representa la viscosidad en función del tiempo, para diferentes tasas de corte. Puede observarse que la viscosidad tiende a disminuir a medida que progresa el cizallamiento, aunque la reducción es mucho más acentuada a bajas tasas de corte que a altas.

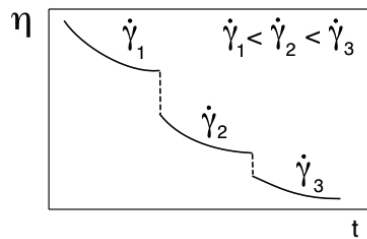


Figura 11. Evolución de la viscosidad aparente en función de los cambios en escalón de la tasa de corte, para fluidos tixotrópicos.

2.3.3 Fluidos viscoelásticos.

Son los formados por la suma de un componente elástico (Hookeano o no) que absorbe la energía aplicada, transformándola durante la deformación en energía potencial, de forma que cuando esta cesa, la deformación vuelve a su estado inicial, y un componente viscoso (Newtoniano o no), que absorbe la energía aplicada transformándola en calor y fluyendo.

El término viscoelasticidad engloba el comportamiento de muchos fluidos que pueden exhibir elasticidad y flujo cuando son sometidos a un cizallamiento. La mayor parte de las pastas y emulsiones concentradas, así como los geles, suelen mostrar viscoelasticidad. Esto se traduce en el comportamiento siguiente: a bajas deformaciones, el fluido viscoelástico se comporta literalmente como un sólido elástico. A altas deformaciones, estos fluyen de forma viscosa; es decir, como líquidos.

La causa del comportamiento viscoelástico es la misma que produce la viscoplasticidad y la tixotropía. Estos materiales se caracterizan por la presencia de una estructura tridimensional incompleta, que se destruye por la aplicación de un esfuerzo y solo se recupera parcialmente cuando

el esfuerzo es removido. Mientras más completa y resistente a la ruptura es la estructura, más pronunciada es su elasticidad y mientras más fácil se rompa su estructura, mayor es su comportamiento viscoso (Borwankar *et al* 1992).

La proporcionalidad del esfuerzo y la deformación pueden ser entendidos como la capacidad de una red para deformarse elásticamente pero manteniendo la estructura de la red intacta. La energía de deformación dentro de la red es almacenada reversiblemente y puede ser recuperada cuando el esfuerzo es retirado. Cuando se utilizan esfuerzos por encima de la viscoelasticidad lineal los elementos de la red son formados más allá de sus límites mecánicos. Las moléculas pueden entonces iniciar un desdoblamiento y permanentemente cambiar de posición con respecto a otras: la muestra comienza a fluir cada vez más y adelgazar el corte. Normalmente los esfuerzos se mantienen a las muestras dentro de su intervalo de la región lineal viscoelástica y en muchos casos son muy pequeños. (Gebhard, 1994).

La descripción más simple del flujo viscoelástico ideal de un líquido (o comportamiento viscoelástico lineal), la proporciona el modelo de Maxwell que es la que mejor describe para fluidos, y para los sólidos está la de Kelvin Voigt (Morozov y Spagnolie, 2014).

2.3.3.1 *Modelo de Maxwell*

Desde el siglo XIX Maxwell (Mottahedi *et al* 2009) había detectado la inconsistencia de la Ley de Newton de viscosidad, debida precisamente a la carencia de la derivada temporal. En 1867 propuso con base en un modelo físico una ecuación para el tensor esfuerzo cortante τ tomando en consideración dicho término, una ecuación equivalente a la de Maxwell, para transferencia de calor en sólidos, fue propuesta por Cattaneo en 1958 y también, en el mismo año por Vernotte, por lo que es llamada a veces como ecuación de Maxwell-Cataneo-Vernotte (Mario, 2005).

La ecuación de Maxwell representa el comportamiento de un fluido de Newton como un pistón trabajando en un cilindro y el comportamiento elástico como el de un sólido de Hooke mediante un muelle, ambos conectados en serie (Macosko, 1994). El pistón (Figura 12) representa la disipación de energía en forma de calor mientras que el muelle representa la energía almacenada en el cuerpo (Figura 13). Con el pistón el esfuerzo aplicado es independiente de la deformación aplicada, al contrario de lo que ocurre en el muelle en el cual el módulo E es la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación.

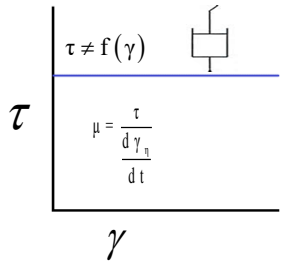


Figura 12. Pistón.

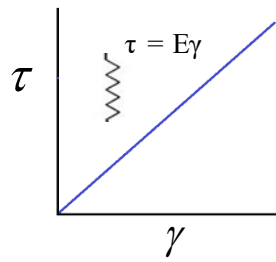


Figura 13. Muelle.

Como mencionamos antes se conectan en serie formando el siguiente sistema (Figura 14)

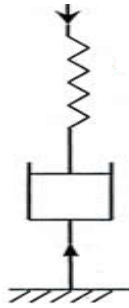


Figura 14. Modelo de Maxwell

Al estar conectados en serie ambos elementos, sus deformaciones se suman

$$\gamma = \gamma_{\eta} + \gamma_E \quad (22)$$

Y la rapidez de deformación también

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\eta} + \dot{\gamma}_E \quad (23)$$

El esfuerzo es el mismo para los dos elementos en serie

$$\tau = \tau_{\eta} = \tau_E \quad (24)$$

Tenemos que

$$\dot{\gamma}_{\eta} = \frac{\tau}{\mu} \quad (25)$$

$$\dot{\gamma}_E = \frac{\dot{\tau}}{E} \quad (26)$$

Entonces la rapidez de deformación es:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\tau}}{E} \quad (27)$$

Multiplicando por μ obtenemos la siguiente ecuación:

$$\mu \dot{\gamma} = \tau + \lambda \dot{\tau} \quad (28)$$

$\lambda = \frac{\mu}{E}$ Es una constante de tiempo conocida como tiempo de relajación de los esfuerzos y puede definirse como el tiempo en que el sistema tarda en llegar al estado de equilibrio local después de una perturbación. A los fluidos con este comportamiento reológico simple se les denominan fluidos de Maxwell (Cates, 1987).

La viscoelasticidad de los fluidos, sean o no repuestas lineales, la caracterización viscoelástica se suele hacer de las siguientes formas (Ibarz, 1993): relajación al esfuerzo, cedencia a la deformación, recuperación de la deformación y experimentos oscilatorios entre otros.

2.3.3.1.1 Modelo de Maxwell Fraccional.

2.3.3.1.1.1 Cálculo Fraccional

Los instrumentos del Cálculo Fraccionario son tan antiguos como el Cálculo mismo. El Cálculo Fraccionario trata del estudio de los llamados operadores de derivación e integración de orden fraccionario sobre dominios reales o complejos y sus aplicaciones. En realidad dichos operadores surgen con el objetivo de generalizar los conceptos de integración y de derivada para valores no enteros, por ello la utilización de los términos “Integración y Diferenciación de Orden Arbitrario” es más apropiado.

El origen del Calculo Fraccionario se remonta a 1675, momento en el que Leibniz introduce la noción de la derivada de orden n de una función. Fue posteriormente en 1695 cuando los primeros resultados publicados son citados en una carta de L'Hôpital a Leibniz, en la cual L'Hôpital plantea la cuestión del posible significado de la derivada de orden n si $n = 1/2$. La respuesta intuitiva en ese momento de Leibniz fue: “...y esto es una paradoja aparente que permitirá en el futuro extraer consecuencias muy útiles”. A partir de aquí, son muchos los matemáticos que han estudiado este tema y han aportado su contribución al desarrollo de lo que hoy conocemos sobre Cálculo Fraccionario. Entre ellos podemos destacar a Euler, Lagrange, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, Holmgren, Cauchy, Hadamard, Hardy, Riesz, Weyl, etc (Nishimoto, 1991).

Hoy en día existe una vasta literatura sobre el cálculo fraccionario. En distintas áreas de la ciencia se han escrito diversos artículos mostrando las más variadas aplicaciones (Denath, 2003). Entre las aplicaciones más comunes se encuentran: la reología, biología cuántica, electroquímica, teoría de la dispersión, difusión, teoría del transporte, probabilidad y estadística, teoría del potencial, elasticidad, viscosidad y teoría de control automático. En este tema se usa la función Gamma como generalización del concepto de factorial.

2.3.3.1.1.2 Del Factorial a la Función Gamma

La Función Gamma es una función que generaliza la definición del factorial a los números no enteros. Su definición viene dada por:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds \quad (29)$$

Esto es para cualquier número complejo z con parte real positiva.

Usando la integración por partes en la ecuación (29), se obtiene una propiedad fundamental de la Función Gamma:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \quad (30)$$

La cual permite obtener la Función Gamma de un número entero positivo como:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (31)$$

En este contexto la Función Gamma constituye una generalización del concepto de factorial.

2.3.3.1.1.3 Integral y derivada de Riemann-Liouville

Recordando algunas notaciones de cálculo elemental, la n -ésima derivada de una función f está definida recursivamente por:

$$D_x^0 f(x) \equiv f(x); D_x^n f(x) \equiv D_x [D_x^{n-1} f(x)], (n \equiv 1, \dots, 2) \quad (32)$$

Análogamente, la n -ésima integral de f está definida por

$$D_x^0 f(x) \equiv f(x); D_x^n f(x) \equiv \int_0^x D_t^{-(n-1)} f(t) dt, (n=1, 2, \dots) \quad (33)$$

Puede probarse que la segunda integral en (33) se puede reducir a una integral sencilla y está dada por

$$D_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, (n=1, \dots, 2) \quad (34)$$

Donde $(n-1)! \equiv (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

El propósito es generalizar (33) y (34) sustituyendo n por un número real positivo α . Para ello se hace uso de la ya conocida función gamma de Euler. Para cualquier $\alpha > 0$, se define la integral fraccionaria de orden α de una función f (continua) como:

$$D_x^\alpha f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (35)$$

La ecuación (35) se llama integral fraccionaria de Riemann-Liouville (Rocha, 2003). Se observa que cuando $\alpha = n$, la definición anterior se reduce a la fórmula usual dada en (34). Por ejemplo, sea $f(x) = 1$ y $\alpha = 1/2$. Entonces:

$$D_x^{-1/2}(1) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{-1/2} (1) dt = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^x u^{-1/2} (1) du \quad (36)$$

$$(\text{con } t = x - u); D_x^{-1/2}(1) = \frac{2}{\pi^{1/2}} x^{1/2}$$

Para comparar, se remarca que $D_x^{-0}(1) = 1$ (lo que significa que no se está transformando la función) mientras que $D_x^{-1}(1) = 1$ (lo cual es solo una anti derivada de 1).

La derivada fraccionaria puede definirse en términos de la integral fraccionaria (Rocha, 2003). Sea m el menor entero positivo mayor o igual que un número positivo α (por ejemplo, $m=1$ cuando $\alpha=1/2$). Entonces D_x^m es solo la m -ésima derivada usual y $m-\alpha \geq 0$. Para cualquier $\alpha > 0$, la derivada fraccionaria de orden α de una función f (continua) se define como:

$$D_x^\alpha f(x) \equiv D_x^m \left[D_x^{-(m-\alpha)} f(x) \right] \quad (37)$$

Observe que $D_x^{-(m-\alpha)}$ es la integral fraccionaria de orden $m - \alpha$

Continuando con el ejemplo anterior, donde $f(x) = 1$, la derivada fraccionaria de orden 1/2 de f es:

$$D_x^{1/2} f(x) = D_x^1 \left[D_x^{-(1/2)}(1) \right] = D_x \left(\frac{2}{\pi^{1/2}} x^{1/2} \right) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \frac{1}{x^{1/2}} \quad (38)$$

Este resultado es absolutamente inesperado, ya que la derivada usual de una constante es 0, lo cual ilustra una de las muchas diferencias entre los operadores de derivación clásicos y fraccionarios.

Para nuestros fines es resolver una derivada fraccional trigonométrica, para ser más específico la del seno y coseno, estos están desarrollados y existen tablas de ambas identidades trigonométricas que a continuación se presentan:

$$\frac{d^\alpha \text{sen}(\omega t)}{dt^\alpha} = \omega^\alpha \text{sen} \left(\omega t + \frac{\pi \alpha}{2} \right) \quad (39)$$

$$\frac{d^\alpha \text{cos}(\omega t)}{dt^\alpha} = \omega^\alpha \text{cos} \left(\omega t + \frac{\pi \alpha}{2} \right) \quad (40)$$

Ambos aplican cuando $\lambda > 0$, $\alpha > -1$ (Podlubny, 1999)

2.3.3.1.1.4 Sustentabilidad del modelo

Los arreglos reológicos se pueden modificar para tratarse como arreglos reológicos fraccionarios (Meral *et al.*, 2010); se conocen como arreglo fraccionario de Maxwell FMM (*Fractional Maxwell Model*) (Liu y Xu, 2006). Estos arreglos dan mayor versatilidad en la simulación del comportamiento de materiales complejos debido a que resultan más eficientes, pues requieren menos parámetros que un modelo clásico equivalente para simular adecuadamente un material viscoelástico.

El arreglo para un pistón que representa el módulo viscoso es de la siguiente manera:

$$\tau_{\eta} = \mu_{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} \gamma_{\eta}}{\partial t^{\alpha}} \quad (41)$$

El arreglo para el muelle que representa el módulo elástico es la siguiente:

$$\frac{\partial^{\alpha} \tau_E}{\partial t^{\alpha}} = E \frac{\partial^{\alpha} \gamma_E}{\partial t^{\alpha}} \quad (42)$$

Se despeja la deformación en ambos esfuerzos

$$\frac{\partial^{\alpha} \gamma_{\eta}}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\tau_{\eta}}{\mu_{\alpha}} \quad (43)$$

$$\frac{\partial^{\alpha} \gamma_E}{\partial t^{\alpha}} = \frac{1}{E} \frac{\partial^{\alpha} \tau_E}{\partial t^{\alpha}} \quad (44)$$

El esfuerzo de corte es la misma en un arreglo en serie, $\tau_E = \tau_{\eta} = \tau$

$$\frac{\partial^{\alpha} \gamma_{\eta}}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\tau}{\mu_{\alpha}} \quad \frac{\partial^{\alpha} \gamma_E}{\partial t^{\alpha}} = \frac{1}{E} \frac{\partial^{\alpha} \tau}{\partial t^{\alpha}}$$

La deformación total es la suma de las dos deformaciones, por lo tanto

$$\frac{\partial^{\alpha} \gamma}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\tau}{\mu_{\alpha}} + \frac{1}{E} \frac{\partial^{\alpha} \tau}{\partial t^{\alpha}} \quad (45)$$

Para simplificar el arreglo se multiplica por μ_{α}

$$\mu_\alpha \frac{\partial^\alpha \gamma}{\partial t^\alpha} = \tau + \lambda_\alpha \frac{\partial^\alpha \tau}{\partial t^\alpha} \quad (46)$$

donde $\lambda_\alpha = \frac{\mu_\alpha}{E}$

2.3.3.2 *Relajación al Esfuerzo*

El experimento de relajación del esfuerzo consiste en someter a un fluido a una deformación relativa de magnitud γ_0 registrando el esfuerzo resultante.

La respuesta típica para sólidos elásticos, sólidos o líquidos viscoelásticos y líquidos Newtonianos, se esquematiza en la Figura 15. El sólido elástico es capaz de almacenar energía para mantener la deformación y, como resultado, no fluye (o relaja) bajo la acción de la deformación γ_0 . El otro comportamiento extremo es el del líquido Newtoniano que se relaja completamente y fluye. El comportamiento intermedio corresponde al fluido viscoelástico, el cual se relaja hasta un valor mínimo, cero para los líquidos viscoelástico y τ_E , o esfuerzo de equilibrio, para los sólidos viscoelásticos. La curva de relajación del esfuerzo es una exponencial donde $G(t)$, o módulo de relajación, puede expresarse como:

$$G(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma_0} \quad (47)$$

Cuando el módulo de relajación es sólo función del tiempo, el comportamiento resultante se denomina viscoelástico lineal.

Generalmente, $G(t)$ es sólo función del tiempo por debajo de γ_c , o deformación relativa crítica. En tal sentido, la ecuación anterior es sólo válida para deformaciones por debajo de γ_c . Para valores de deformación superiores a γ_c el comportamiento se ha denominado viscoelástico no lineal.

El decaimiento exponencial de $G(t)$ puede expresarse en función de G_0 y λ del modelo de Maxwell:

$$G(t) = G_0 e^{-t/\lambda} \quad (48)$$

Los fluidos viscoelásticos simples muestran un único valor del tiempo de relajación λ , pero fluidos de comportamiento más complejos exhiben un espectro de tiempos de relajación donde:

$$G(t) = \sum_{k=1}^n G_k e^{-t/\lambda} \quad (49)$$

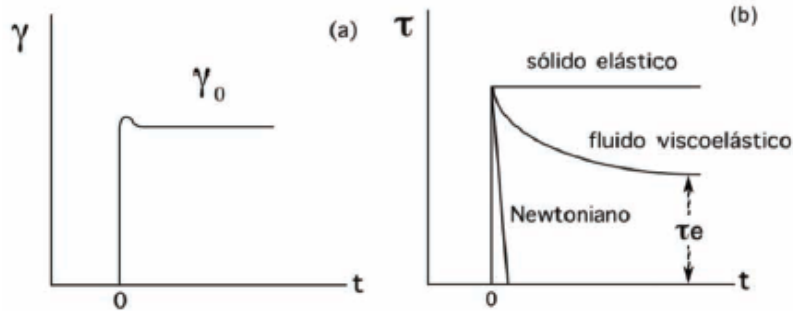


Figura 15. Respuesta de diferentes tipos de materiales en función del tiempo (b), cuando son sometidos a una deformación relativa (a)

2.3.3.3 Cedencia a la Deformación

En este tipo de experimentos (Ferry, 1980) el fluido se somete a un esfuerzo de magnitud conocida τ_0 , por un período de tiempo t_0 (Figura 16 (a)), y la deformación resultante se registra en función del tiempo. La respuesta de los sólidos elásticos y los fluidos viscoelásticos se esquematiza en la (Figura 16(b)). El sólido elástico responde con una deformación de pequeña duración, en cuanto el fluido viscoelástico se deforma continuamente hasta alcanzar una tasa de deformación estacionaria $\dot{\gamma}_\infty$.

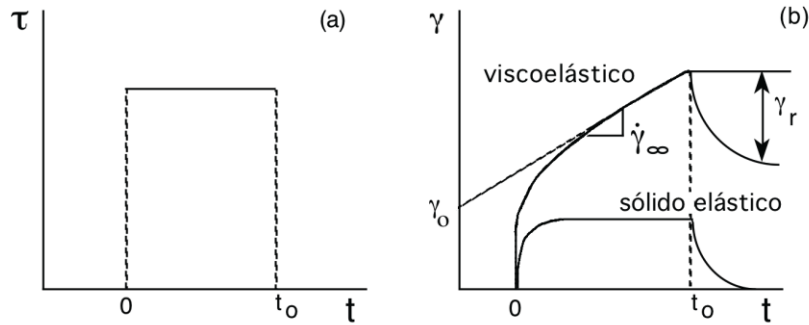


Figura 16. Respuesta en función del tiempo de diferentes materiales cuando son sometidos a un esfuerzo por un periodo de tiempo t_0 .

Usualmente, los datos como los de la Figura 16 se representan en términos del parámetro de cedencia (o "creep" en inglés),

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0} \quad (50)$$

Donde $J(t)$ tiene unidades de $1/G$, aunque en la mayoría de los casos J y $1/G$ no son equivalentes.

Mediante este cambio de variables, se puede trazar la Figura 17 Si el régimen de deformación es estacionario, es decir, cuando la pendiente de la curva se torna constante.

$$J(t) = \frac{\gamma_0}{\tau_0} + \frac{\dot{\gamma}}{\tau_0} t \quad (51)$$

El término $\frac{\gamma_0}{\tau_0}$ se denomina J^0_e , o cedencia a la deformación estacionaria, y el término $\frac{\dot{\gamma}}{\tau_0}$ es

entonces $\frac{1}{\eta_0}$, siendo η_0 la viscosidad en el límite de bajas tasas de corte.

Se observa que los sólidos elásticos, luego de la deformación inicial, presentan una pendiente igual a cero ($\eta_0 \rightarrow \infty$), lo cual significa que el sólido se deforma pero no fluye.

En términos del modelo de Maxwell, la cedencia a la deformación de un fluido viscoelástico simple, es decir, que presenta un sólo tiempo de relajación, puede expresarse como:

$$J(t) = \frac{1}{G_0} + \frac{1}{\eta_0} = \frac{1}{G_0} + \frac{1}{\lambda G_0} \quad (52)$$

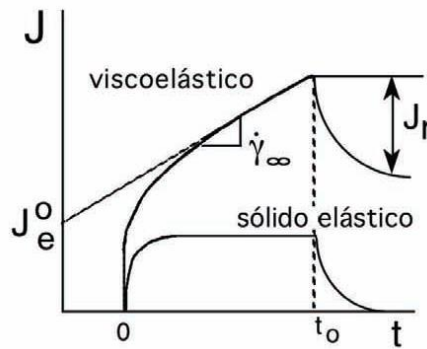


Figura 17. Función de cedencia a la deformación (o creep) $J(t)$.

Sin embargo, un único tiempo de relajación no suele ser suficiente para representar el comportamiento del fluido, por lo tanto es más conveniente escribir la función $J(t)$ como:

$$J(t) = \sum_k J_k (1 - e^{-t/\lambda_k}) + \frac{t}{\eta_0} \quad (53)$$

Esta expresión permite incluir varios tiempos de relajación (λ_k) y así modelar de forma más conveniente el comportamiento de fluidos complejos

2.3.3.4 Recuperación de la Deformación

En los experimentos de recuperación de la deformación se mide la capacidad de un fluido para recuperar la conformación que tenía antes de ser deformado.

El grado de recuperación puede cuantificarse por análisis de la porción de la curva de la Figura 17, luego que el esfuerzo ha sido removido. Un sólido elástico ideal se recupera completamente

mientras que un líquido no recupera nada en absoluto. En los fluidos viscoelásticos, la función de recuperación de la deformación se escribe como

$$J_r(t) = \frac{\dot{\gamma}_r(t)}{\tau_0} \quad (54)$$

Donde γ_r es la deformación relativa recuperada luego que cesa el esfuerzo.

Este tipo de experimentos sólo tiene sentido cuando se ha alcanzado una cedencia a la deformación estacionaria; esto es, cuando

$$\dot{\gamma}_r(t) = \dot{\gamma}_\infty \text{ (Pendiente constante) y } \lim J_r(t) = J_e^0$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, esto último es válido sólo cuando se alcanzan condiciones de equilibrio durante el experimento.

2.3.3.5 Experimentos Dinámicos u Oscilatorio

Un experimento oscilatorio consiste en someter un fluido a un esfuerzo o deformación sinusoidal. Las medidas oscilatorias están cobrando un interés creciente debido a que permiten caracterizar las propiedades viscosas y elásticas de los materiales. En este tipo de experimentos la deformación aplicada varía sinusoidalmente (Figuras 18 y 19) con el tiempo de acuerdo con la expresión (Roderick, 2009) siguiente:

$$\gamma(t) = \gamma_0 \text{sen}(\omega t) \quad (55)$$

Donde γ_0 es la amplitud de la deformación y ω la frecuencia

El esfuerzo varía con la misma frecuencia ω pero presentando un desfase con respecto a la deformación ϕ .

$$\tau = \tau_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (56)$$

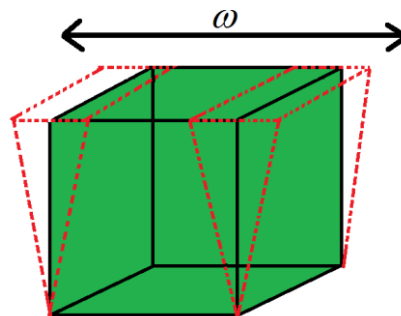


Figura 18. Deformación oscilatoria aplicada a un cuerpo

Teniendo en cuenta las ecuaciones que describen el comportamiento de la deformación y el esfuerzo de cizalla, es posible desarrollar la ecuación constitutiva hasta llegar a la siguiente ecuación.

$$\tau = \gamma_0 [G' \sin(\omega t) + G'' \cos(\omega t)] \quad (57)$$



Figura 19. Material Viscoelástico: esfuerzo, deformación y desfase entre ambos.

Además de que en una prueba de deformación sinusoidal el módulo de almacenamiento $G'(\omega)$ es una medida de la energía almacenada y recuperada por el material en un ciclo y es un indicador del componente elástico del material, mientras que el módulo de pérdida $G''(\omega)$ es una medida de la energía disipada como calor por el material en un ciclo y es un indicador del componente viscoso del material (Steffe, 1996; Marangoni y Rousseau, 1998):

$G'(\omega)$:

$$G'(\omega) = \omega \int_0^{\infty} G(s) \sin(\omega s) ds \quad (58)$$

$$G''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} G(s) \cos(\omega s) ds \quad (59)$$

Donde $s = t - t'$.

En tanto el desarrollo de la ecuación (38) nos lleva a la siguiente ecuación:

$$\tau = \tau_0 [\cos(\varphi) \sin(\omega t) + \sin(\varphi) \cos(\omega t)] \quad (60)$$

Comparando la ecuación (57) con la (59) obtenemos:

$$G' = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos(\varphi) \quad (61)$$

$$G'' = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin(\varphi) \quad (62)$$

Por lo tanto el módulo de almacenamiento es el cociente entre el esfuerzo que está en fase con la deformación y la deformación. El módulo de pérdida es el cociente entre el esfuerzo que está desfasado $\frac{\pi}{2}$ con la deformación y la deformación.

Con las ecuaciones anteriores se puede definir la tangente de pérdida $\text{tg}(\varphi)$, con la siguiente ecuación.

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{G''}{G'} \quad (63)$$

Donde φ representa el desfase existente entre el esfuerzo y la deformación, siendo un parámetro indicativo de la relación entre la energía disipada y la almacenada por el material y de la viscoelasticidad del mismo:

1. Si es un material elástico el esfuerzo y la deformación están en fase y $\varphi \approx 0^\circ$.
2. Si el material es viscoso entonces el esfuerzo y la deformación están en desfase y $\varphi \approx 90^\circ$.
3. Si es un material viscoelástico, φ tendrán valores entre 0° y 90° .

Expresando las funciones armónicas en forma compleja se llega a la ecuación:

$$\frac{\tau^*}{\gamma^*} = G^* = G' + iG'' \quad (64)$$

Donde G^* recibe el nombre de módulo complejo, el cual es el módulo del vector obtenido como suma de las contribuciones de los módulos elástico (G') y viscoso (G''), como se observa en la Figura 20.

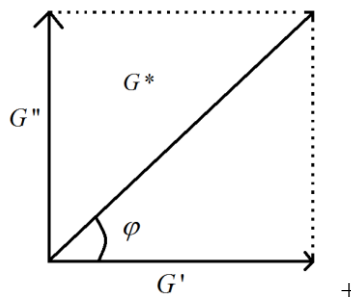


Figura 20. Representación del módulo complejo como combinación de dos vectores que son los módulos elásticos y viscosos.

Siguiendo un desarrollo análogo al indicado se obtiene la complianza dinámica o compleja:

$$J^* = \frac{\gamma^*}{\tau^*} = \frac{1}{G^*} = J' + iJ'' \quad (65)$$

Por su parte la definición de viscosidad se aplica también en este caso, lo que permite definir la viscosidad compleja:

$$\eta^* = \eta' + i\eta'' \quad (66)$$

Las componentes real e imaginaria son respectivamente.

$$\eta' = \frac{G''}{\omega} \quad (67)$$

$$\eta'' = \frac{G'}{\omega} \quad (68)$$

Este tipo de experimentos es quizá el más empleado por poder ser aplicados en una amplia gama de campos, dependiendo de la modalidad de ensayo utilizado. Atendiendo a la magnitud que se modifica, es posible distinguir entre barridos de frecuencia y barridos de temperatura.

3 Objetivos

3.1 Generales

Usar ecuaciones fenomenológicas para describir el comportamiento de materiales en platos paralelos, donde la parte superior es una placa oscilatoria y la parte inferior es una placa fija, separadas a una distancia h , la amplitud se representa como ξ_0 , como se muestra en la Figura 21, cabe mencionar que el sistema está en estado estacionario.

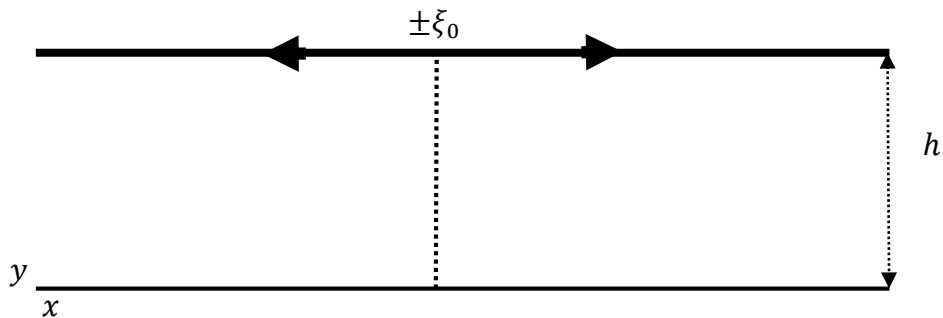


Figura 21. Reómetro de platos paralelos

El desplazamiento está en función del tiempo $\xi(t) = \xi_0 \text{sen}(\omega t)$, donde ω es la frecuencia circular.

3.2 Particulares

- Análisis con la Ley de Newton a diferentes viscosidades variando la separación entre los platos.
- Análisis con la ecuación de Maxwell-Cattaneo a diferentes viscosidades, variando la separación entre los platos y el tiempo de relajación.
- Análisis con la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes viscosidades, variando alfas con un tiempo de relajación.

4 Análisis Matemático

Las ecuaciones fenomenológicas tal y como se mencionaron en los objetivos son los siguientes:

- La Ley de viscosidad de Newton (Ecuación 6).

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

- La ecuación de Maxwell Cattaneo (Ecuación 28).

$$\mu \frac{d\gamma}{dt} = \tau + \lambda \frac{d\tau}{dt}$$

- A la ecuación anterior se puede modificar para tratarse como un arreglo fraccionario, para dar mayor versatilidad en la simulación del comportamiento de materiales complejos. (Meral *et al.*, 2010), a ésta la denominamos Maxwell Fraccional (Ecuación 46).

$$\mu_\alpha \frac{d^\alpha \gamma}{dt^\alpha} = \tau + \lambda_\alpha \frac{d^\alpha \tau}{dt^\alpha}$$

Esta ecuación se simplifica cuando $\alpha=1$ se convierte en la ecuación de Maxwell-Cattaneo (28) y esta a su vez cuando el tiempo de relajación es igual a cero, se convierte en la Ley de Newton (6).

4.1 La Ley de Newton

Se realiza un balance en términos de τ la ecuación de continuidad (Bird *et al* 1987).

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (69)$$

Posteriormente sustituimos la Ley de Newton en el balance de la ecuación de continuidad.

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (70)$$

Se propone una velocidad, que representa un desfase (φ) de la señal de entrada en la salida como se muestra en la Figura 22.

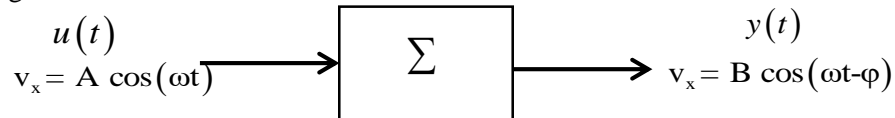


Figura 22. Representación de la desfase

Aplicando la propiedad trigonométrica de la suma de ángulos de los cosenos obtenemos la siguiente ecuación:

$$v_x(y) = B_1(y) \sin(\omega t) + B_2(y) \cos(\omega t) \quad (71)$$

Después se sustituye en la ecuación (70), se normaliza la separación entre los platos y se propone un número de Reynolds dependiente de la frecuencia.

$$z = \frac{y}{h} \quad v_{\omega} = h \omega \quad \text{Re}(\omega) = \frac{\rho v_{\omega} h}{\mu}$$

Utilizando el método de variables separables, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^2 B_1}{dz^2} = -(\text{Re}) B_2 \quad (72)$$

$$\frac{d^2 B_2}{dz^2} = (\text{Re}) B_1 \quad (73)$$

Las condiciones límites de los platos paralelos especificados son:

1. La velocidad de la placa inferior es igual a cero porque no existe deslizamiento ni movimiento en esa posición.

$$v_x(0) = 0 \quad (74)$$

2. La velocidad en la placa superior es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

$$v_x(h) = \frac{d\xi(t)}{dt} = \omega \xi_0 \cos(\omega t) \quad (75)$$

Las ecuaciones (74 y 75) se normalizan y utilizando el método de variables separables, obteniendo las condiciones de frontera equivalentes:

$$B_1(0) = 0 \quad B_1(1) = 0 \quad (76)$$

$$B_2(0) = 0 \quad B_2(1) = \omega \xi_0 \quad (77)$$

Se da solución al sistema de ecuaciones diferenciales (72 y 73), primero se derivan dos veces la ecuación (72).

$$\frac{d^4 B_2}{dz^4} = (\text{Re}) \frac{d^2 B_1}{dz^2} \quad (78)$$

Se sustituye la ecuación (78) en la ecuación (72).

$$\frac{d^4 B_2}{dz^4} + (\text{Re})^2 B_2 = 0 \quad (79)$$

Definimos $\beta = \frac{\sqrt{\text{Re}}}{2}$, la solución de esta ecuación es la siguiente:

$$B_2 = k_1 e^{\beta z} \text{Sen}(\beta z) + k_2 e^{\beta z} \text{Cos}(\beta z) + k_3 e^{-\beta z} \text{Sen}(\beta z) + k_4 e^{-\beta z} \text{Cos}(\beta z) \quad (80)$$

Para calcular B_1 se despeja de la ecuación (73)

$$B_1 = \frac{1}{(\text{Re})} \frac{d^2 B_2}{dz^2} \quad (81)$$

Por lo tanto sustituyendo:

$$B_1 = k_1 e^{\beta z} \text{Cos}(\beta z) - k_2 e^{\beta z} \text{Sen}(\beta z) - k_3 e^{-\beta z} \text{Cos}(\beta z) + k_4 e^{-\beta z} \text{Sen}(\beta z) \quad (82)$$

Sustituimos las condiciones de frontera normalizadas en estas ecuaciones (79 y 81) para obtener las constantes

$$k_1 = \frac{\xi_0 \omega}{2} \left[\frac{\text{sen}(\beta) \cosh(\beta)}{\text{sen}^2(\beta) \cosh^2(\beta) + \cos^2(\beta) \sinh^2(\beta)} \right] \quad (83)$$

$$k_2 = \frac{\xi_0 \omega}{2} \left[\frac{\cos(\beta) \sinh(\beta)}{\text{sen}^2(\beta) \cosh^2(\beta) + \cos^2(\beta) \sinh^2(\beta)} \right] \quad (84)$$

Donde $k_3 = k_1$ y $k_4 = -k_2$, por lo tanto es suficiente calcular las dos primeras constantes, sustituyendo en la ecuación (80 y 82) obtenemos una ecuación más reducida para su fácil manipulación.

$$B_1 = 2 \left[k_1 \cos(\beta z) \sinh(\beta z) - k_2 \text{sen}(\beta z) \cosh(\beta z) \right] \quad (85)$$

$$B_2 = 2 \left[k_1 \text{sen}(\beta z) \cosh(\beta z) - k_2 \cos(\beta z) \sinh(\beta z) \right] \quad (86)$$

Posteriormente se realiza el análisis del esfuerzo de corte en la placa que oscila con el material analizando con la Ley de Newton (6), primero la normalizamos con $z = \frac{y}{h}$.

$$\tau_z = -\frac{\mu}{h} \frac{dv_x}{dz} \quad (87)$$

De acuerdo al análisis que se realiza en la superficie, entre el material y la placa que oscila es cuando $z = 1$, es así como la ecuación (86) se puede expresar de la siguiente manera.

$$\tau_{z=1} = -\frac{\mu}{h} \frac{dv_x}{dz} \Big|_{z=1} \quad (88)$$

Se sustituye la velocidad propuesta, que es la ecuación (71).

$$\tau_{z=1} = -\frac{\mu}{h} \left[\frac{dB_1}{dz} \Big|_{z=1} \text{sen}(\omega t) + \frac{dB_2}{dz} \Big|_{z=1} \cos(\omega t) \right] \quad (89)$$

Las derivadas de B_2 y B_1 son:

$$\left. \frac{dB_1}{dz} \right|_{z=1} = \omega\beta\xi_0 \left[\frac{\text{sen}(\beta)\cos(\beta) - \text{senh}(\beta)\cosh(\beta)}{\text{sen}^2(\beta)\cosh^2(\beta) + \text{senh}^2(\beta)\cos^2(\beta)} \right] \quad (90)$$

$$\left. \frac{dB_2}{dz} \right|_{z=1} = \omega\beta\xi_0 \left[\frac{\text{sen}(\beta)\cos(\beta) + \text{senh}(\beta)\cosh(\beta)}{\text{sen}^2(\beta)\cosh^2(\beta) + \text{senh}^2(\beta)\cos^2(\beta)} \right] \quad (91)$$

La respuesta al estrés en estado estacionario correspondiente a una señal armónica, está dada por la ecuación (57):

$$\frac{\tau|_{z=1}}{\gamma_0} = [G'\text{sen}(\omega t) + G''\cos(\omega t)] \quad \gamma_0 = \frac{\xi_0}{h}$$

Que comparándola con la ecuación (89), ya sustituyendo los términos que se habían propuesto, además de las derivadas calculadas se obtiene:

$$\frac{\tau|_{z=1}}{\gamma_0} = \frac{-\mu^{1/2}\omega^{3/2}h\rho^{1/2}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{sen}(\beta)\cos(\beta) - \text{senh}(\beta)\cosh(\beta)}{\text{sen}^2(\beta)\cosh^2(\beta) + \text{senh}^2(\beta)\cos^2(\beta)} \text{sen}(\omega t) + \frac{\text{sen}(\beta)\cos(\beta) + \text{senh}(\beta)\cosh(\beta)}{\text{sen}^2(\beta)\cosh^2(\beta) + \text{senh}^2(\beta)\cos^2(\beta)} \cos(\omega t) \right]$$

Identificamos que el módulo elástico y viscoso son los siguientes.

Módulo elástico

$$G' = \frac{-\mu^{1/2}\omega^{3/2}h\rho^{1/2}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{sen}(\beta)\cos(\beta) - \text{senh}(\beta)\cosh(\beta)}{\text{sen}^2(\beta)\cosh^2(\beta) + \text{senh}^2(\beta)\cos^2(\beta)} \right] \quad (92)$$

Módulo viscoso

$$G'' = \frac{-\mu^{1/2}\omega^{3/2}h\rho^{1/2}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{sen}(\beta)\cos(\beta) + \text{senh}(\beta)\cosh(\beta)}{\text{sen}^2(\beta)\cosh^2(\beta) + \text{senh}^2(\beta)\cos^2(\beta)} \right] \quad (93)$$

Esta ecuación describe las propiedades viscoelásticas de un material.

4.2 La Ecuación de Maxwell-Cattaneo

De la ecuación de Maxwell-Cattaneo (28) la derivamos con respecto a y.

$$-\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \partial \tau}{\partial y \partial t} \quad (94)$$

Al balance de la ecuación de continuidad (69) la derivamos con respecto a t.

$$\rho \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial \partial \tau}{\partial t \partial y} \quad (95)$$

Sustituimos en la ecuación (94), las ecuaciones (69 y 95) y obtenemos la siguiente ecuación a resolver.

$$\rho\lambda \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (96)$$

De la misma manera se propone la ecuación (71) como solución particular de la velocidad de la ecuación diferencial y se sustituye en la ecuación (96)

$$\rho\lambda\omega^2 \left[-B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) \right] + \rho\omega \left[B_1 \cos(\omega t) - B_2 \sin(\omega t) \right] = -\mu \left[\frac{d^2 B_1}{dy^2} \sin(\omega t) + \frac{d^2 B_2}{dy^2} \cos(\omega t) \right] \quad (97)$$

Se normaliza la separación entre los platos, se propone una T_* como la frecuencia por el tiempo de relajación, para facilitar los cálculos y un número de Reynolds dependiente de la frecuencia.

$$z = \frac{y}{h} \quad T_* = \omega \lambda \quad \text{Re}(\omega) = \frac{\rho v_\omega h}{\mu}$$

Utilizando el método de variables separables obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^2 B_1}{dz^2} = -T_* (\text{Re}) B_1 - \text{Re} B_2 \quad (98)$$

$$\frac{d^2 B_2}{dz^2} = (\text{Re}) B_1 - T_* \text{Re} B_2 \quad (99)$$

Se da solución al sistema de ecuaciones diferenciales (98) y (99), primero derivando dos veces la ecuación (99).

$$\frac{d^4 B_2}{dz^4} = (\text{Re}) \frac{d^2 B_1}{dz^2} - T_* (\text{Re}) \frac{d^2 B_2}{dz^2} \quad (100)$$

De la ecuación (99) se despeja B_1

$$B_1 = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{d^2 B_2}{dz^2} + T_* \text{Re} B_2 \right] \quad (101)$$

Se sustituye la ecuación (98) y (101) en la ecuación (100) que da como resultado la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d^4 B_2}{dz^4} + 2T_* (\text{Re}) \frac{d^2 B_2}{dz^2} + (\text{Re})^2 (T_*^2 + 1) B_2 = 0 \quad (102)$$

El polinomio característico es de la siguiente forma:

$$\varepsilon^4 B_2 + 2T_* (\text{Re}) \varepsilon^2 B_2 + (\text{Re})^2 (T_*^2 + 1) B_2 = 0 \quad (103)$$

Proponemos $r = \varepsilon^2$, y le damos solución con la formula general de segundo grado:

$$r_{1,2} = \text{Re}(-T_* \pm i) \quad (104)$$

Sustituimos lo que habíamos propuesto dando los siguientes resultados.

$$\varepsilon_{1,2} = \pm \sqrt{\text{Re}} \sqrt{(-T_* + i)} \quad \varepsilon_{2,3} = \pm \sqrt{\text{Re}} \sqrt{(-T_* - i)}$$

Este problema se trata de números imaginarios, para darle solución proponemos una solución particular y la resolvemos por el método de variables separables de la siguiente manera:

$$\sqrt{(-T_* + i)} = a + bi$$

$$\left(\sqrt{(-T_* + i)}\right)^2 = (a + bi)^2$$

$$-T_* + i = a^2 + 2abi - b^2$$

Y de esta forma obtenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas

$$-T_* = a^2 - b^2 \quad 1 = 2ab$$

Sustituyendo en ambos obtenemos a y b.

$$a = \sqrt{\frac{-T_* + \sqrt{T_*^2 + 1}}{2}} \quad (105)$$

$$b = \frac{1}{2\sqrt{\frac{-T_* + \sqrt{T_*^2 + 1}}{2}}} \quad (106)$$

$\varepsilon_1 = \sqrt{\text{Re}}(a + bi)$, de la misma manera se obtienen las demás constantes.

$$\varepsilon_2 = -\sqrt{\text{Re}}(a + bi), \varepsilon_3 = \sqrt{\text{Re}}(a - bi), \varepsilon_4 = -\sqrt{\text{Re}}(a - bi)$$

Por consiguiente el envolvente lineal para B_1 es

$$B_2 = k_1 e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + k_2 e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{cos}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + k_3 e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + k_4 e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{cos}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \quad (107)$$

Para obtener la constante B_1 se utiliza la ecuación (98) reacomodándolo de la siguiente manera:

$$B_1 = -\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2 B_2}{dz^2} + T_* (\text{Re}) B_2 \right)$$

Se calculan las derivadas y obtenemos B_1

$$B_1 = \left[(a^2 - b^2 + T_*) e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + (2ab) e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{cos}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \right] k_1 + \left[(a^2 - b^2 + T_*) e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{cos}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) - (2ab) e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \right] k_2 + \left[(a^2 - b^2 + T_*) e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) - (2ab) e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{cos}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \right] k_3 + \left[(a^2 - b^2 + T_*) e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{cos}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + (2ab) e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \right] k_4 \quad (108)$$

Sustituimos las condiciones de frontera normalizadas en estas ecuaciones (107) y (108) para obtener las constantes

$$k_1 = \frac{\xi_o \omega}{4} \left[\frac{(2ab) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b)) - (a^2 - b^2 + T_*) \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(b))}{ab \left[\sinh^2(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos^2(\sqrt{\text{Re}}(b)) + \cosh^2(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}^2(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right]} \right] \quad (109)$$

$$k_2 = \frac{\xi_o \omega}{4} \left[\frac{(2ab) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b)) + (a^2 - b^2 + T_*) \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(b))}{ab \left[\sinh^2(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos^2(\sqrt{\text{Re}}(b)) + \cosh^2(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}^2(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right]} \right] \quad (110)$$

Donde $k_3 = k_1$ y $k_4 = -k_2$, por lo tanto es suficiente calcular las dos primeras constantes, sustituyendo en la ecuación (107) y (108) obtenemos una ecuación más reducida.

$$B_1 = \left[(a^2 - b^2 + T_*) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b)) + (2ab) \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right] k_1 + \left[(a^2 - b^2 + T_*) \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) - (2ab) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right] k_2 \quad (111)$$

$$B_2 = 2 \left[k_1 \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b)) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) + k_2 \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \right] \quad (112)$$

Se hace el análisis del esfuerzo de corte en la placa que oscila, por lo tanto se propone una solución:

$$\tau_{yx} = D_1 \text{sen}(\omega t) + D_2 \cos(\omega t) \quad (113)$$

Se sustituye en la ecuación (28) y utilizando el método de variables separables obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$-\mu \frac{dB_1}{dy} = D_1 - \omega \lambda D_2 \quad (114)$$

$$-\mu \frac{dB_2}{dy} = D_2 + \omega \lambda D_1 \quad (115)$$

Se normaliza la separación entre los platos, $z = \frac{y}{h}$:

$$-\frac{\mu}{h} \frac{dB_1}{dz} = D_1 - \omega \lambda D_2 \quad (116)$$

$$-\frac{\mu}{h} \frac{dB_2}{dz} = D_2 + \omega \lambda D_1 \quad (117)$$

De acuerdo al análisis que se realiza es en la superficie, entre el material y la placa que oscila es cuando $z=1$, es así como la ecuaciones (116 y 117) se puede expresar de la siguiente manera.

$$-\frac{\mu}{h} \frac{dB_1}{dz} \Big|_{z=1} = D_1 - \omega \lambda D_2 \quad (118)$$

$$-\frac{\mu}{h} \frac{dB_2}{dz} \Big|_{z=1} = D_2 + \omega \lambda D_1 \quad (119)$$

Se soluciona el sistema de 2 x 2 para las constantes D_1 y D_2 .

$$D_1 = \frac{-\frac{\mu}{h} \left[\frac{dB_1}{dz} \Big|_{z=1} + \lambda \omega \frac{dB_2}{dz} \Big|_{z=1} \right]}{1 + \lambda^2 \omega^2} \quad (120)$$

$$D_2 = -\frac{\mu}{h} \frac{dB_2}{dz} \Big|_{z=1} + \frac{\lambda \omega \mu}{h} \left[\frac{\frac{dB_1}{dz} \Big|_{z=1} + \lambda \omega \frac{dB_2}{dz} \Big|_{z=1}}{1 + \lambda^2 \omega^2} \right] \quad (121)$$

Dónde:

$$\frac{dB_1}{dz} \Big|_{z=1} = 2\sqrt{\text{Re}} \left[\begin{aligned} & \left[k_1 (3ba^2 - b^3 + T_* b) + k_2 (a^3 - 3ab^2 + T_* a) \right] \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) + \\ & \left[k_1 (a^3 - 3ab^2 + T_* a) + k_2 (b^3 - 3a^2 b - T_* b) \right] \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \sin(\sqrt{\text{Re}}(b)) \end{aligned} \right] \quad (122)$$

$$\frac{dB_2}{dz} \Big|_{z=1} = 2\sqrt{\text{Re}} \left[[bk_1 + ak_2] \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) + [ak_1 - bk_2] \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \sin(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right] \quad (123)$$

Obtenemos las constante D_1 y D_2 para la ecuación (113), la respuesta al estrés en estado estacionario correspondiente a una señal armónica, está dada por la ecuación (57):

$$\frac{\tau|_{z=1}}{\gamma_0} = [G' \text{sen}(\omega t) + G'' \text{cos}(\omega t)] \quad \gamma_0 = \frac{\xi_0}{h}$$

Que comparándola con la ecuación (113), ya sustituyendo los términos que se habían propuesto, obtenemos:

$$\frac{\tau|_{z=1}}{\gamma_0} = D_1 \text{sen}(\omega t) + D_2 \text{cos}(\omega t)$$

Identificamos que el módulo elástico y viscoso, que son los siguientes.

Módulo elástico

$$G' = \frac{h}{\xi_0} D_1 \quad (124)$$

Módulo viscoso

$$G'' = \frac{h}{\xi_0} D_2 \quad (125)$$

4.3 Ecuación de Maxwell-Fraccional

De la ecuación de Maxwell-Fraccional (46) se multiplica por $\left(\frac{\partial^{1-\alpha}}{\partial t^{1-\alpha}} \right)$ para quitar la dependencia de

la derivada fraccional con la constante de tiempo (λ_α):

$$\mu_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha \tau}{\partial t^\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (126)$$

Que es equivalente a

$$-\mu_\alpha \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^\alpha \tau}{\partial t^\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (127)$$

A la ecuación (127) la derivamos con respecto a y

$$-\mu_\alpha \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial \partial^\alpha \tau}{\partial y \partial t^\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial \partial \tau}{\partial y \partial t} \quad (128)$$

Al balance de la ecuación de continuidad (69) la derivamos con respecto a t y $\frac{\partial^{1-\alpha}}{\partial t^{1-\alpha}}$

$$\rho \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial \partial \tau}{\partial t \partial y} \quad (129)$$

$$\rho \frac{\partial^{2-\alpha} v_x}{\partial t^{2-\alpha}} = -\frac{\partial^{1-\alpha} \tau}{\partial y \partial t^{1-\alpha}} \quad (130)$$

Se sustituyen en la ecuación (128) y obtenemos la siguiente ecuación que es la que se le da solución:

$$\rho \lambda_\alpha \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^{2-\alpha} v_x}{\partial t^{2-\alpha}} = \mu_\alpha \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (131)$$

La velocidad propuesta (71) se sustituye en la ecuación (131) efectuando las derivadas y utilizando las ecuaciones (39) y (40) para las derivadas fraccionales trigonométricas (Podlubny, 1999).

$$\begin{aligned} & -\rho \lambda_\alpha \omega^2 [B_1 \text{sen}(\omega t) + B_2 \text{cos}(\omega t)] + \rho \omega^{2-\alpha} \left[\text{sen}(\omega t) \left[B_1 \cos\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right) - B_2 \text{sen}\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right) \right] \right. \\ & \left. + \text{cos}(\omega t) \left[B_1 \text{sen}\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right) + B_2 \text{cos}\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right) \right] \right] = \mu_\alpha \left[\frac{d^2 B_1}{dy^2} \text{sen}(\omega t) + \frac{d^2 B_2}{dy^2} \text{cos}(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (132)$$

Utilizando el método de variables separables se obtienen dos ecuaciones, se normaliza la separación entre los platos $\left(z = \frac{y}{h}\right)$ y se propone un número de Reynolds dependiente de la frecuencia

$\left(\text{Re}(\omega) = \frac{\rho \omega h^2}{\mu_\alpha}\right)$ obteniendo las siguientes ecuaciones.

$$\frac{d^2 B_1}{dz^2} = -(\text{Re}) \lambda_\alpha \omega B_1 + (\text{Re}) \omega^{1-\alpha} \left[B_1 \cos\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right) - B_2 \text{sen}\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right) \right] \quad (133)$$

$$\frac{d^2B_2}{dz^2} = -(\text{Re})\lambda_\alpha\omega B_2 + (\text{Re})\omega^{1-\alpha} \left[B_1 \text{sen} \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) + B_2 \cos \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) \right] \quad (134)$$

Se derivan dos veces a la ecuación (134)

$$\frac{d^4B_2}{dz^4} = -(\text{Re})\lambda_\alpha\omega \frac{d^2B_1}{dz^2} + (\text{Re})\omega^{1-\alpha} \left[\frac{d^2B_1}{dz^2} \text{sen} \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) + \frac{d^2B_2}{dz^2} \cos \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) \right] \quad (135)$$

Se despeja B_1 de la ecuación (134).

$$B_1 = \frac{\frac{d^2B_2}{dz^2} + (\text{Re})\lambda_\alpha\omega B_2 - (\text{Re})\omega^{1-\alpha} B_2 \cos \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right)}{(\text{Re})\omega^{1-\alpha} \text{sen} \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right)} \quad (136)$$

Se sustituye la ecuación (133) y (136) en la ecuación (135) para obtener la siguiente ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} & \frac{d^4B_2}{dz^4} + 2 \frac{d^2B_2}{dz^2} \left[(\text{Re})\lambda_\alpha\omega - (\text{Re})\omega^{1-\alpha} \cos \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) \right] + \\ & B_2 \left[\lambda_\alpha^2 (\text{Re})^2 \omega^2 - 2\lambda_\alpha (\text{Re})^2 \omega^{2-\alpha} \cos \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) + (\text{Re})^2 \omega^{2(1-\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (137)$$

Denominamos los siguientes términos como:

$$\begin{aligned} q &= \left[(\text{Re})\lambda_\alpha\omega - (\text{Re})\omega^{1-\alpha} \cos \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) \right] \\ n &= \left[\lambda_\alpha^2 (\text{Re})^2 \omega^2 - 2\lambda_\alpha (\text{Re})^2 \omega^{2-\alpha} \cos \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) + (\text{Re})^2 \omega^{2(1-\alpha)} \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (137) queda de la siguiente manera nuestra ecuación diferencial:

$$\frac{d^4B_2}{dz^4} + 2q \frac{d^2B_2}{dz^2} + B_2 n \quad (138)$$

El polinomio característico de la ecuación (133) es de la siguiente forma:

$$\varepsilon^4 B_2 + 2q\varepsilon^2 B_2 + nB_2 = 0 \quad (139)$$

Proponemos $r = \varepsilon^2$

$$r^2 B_2 + 2qr B_2 + nB_2 = 0 \quad (140)$$

Resolvemos a la ecuación cuadrática con la solución general.

$$r = \frac{-2q \pm \sqrt{(2q)^2 - 4(n)}}{2} \quad (141)$$

Analizamos el comportamiento dentro de la raíz:

$$\sqrt{(2q)^2 - 4(n)} = 2\text{Re}\omega^{(1-\alpha)} \sqrt{\left[\cos^2 \left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2} \right) - 1 \right]}$$

Se gráfica el comportamiento de las raíces que están dentro de la raíz cuadrada en función de α

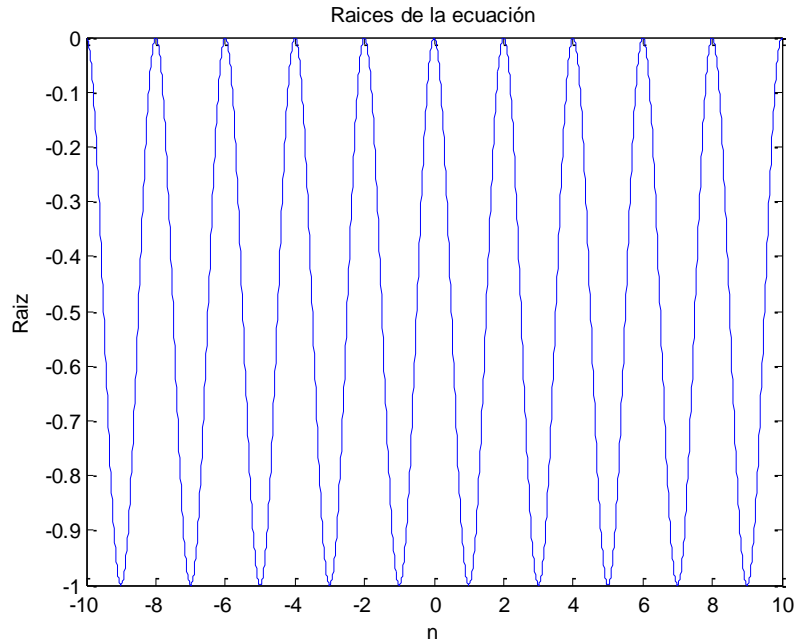


Figura 23. Comportamiento dentro las raíces

En la siguiente gráfica observamos que existen raíces complejas.

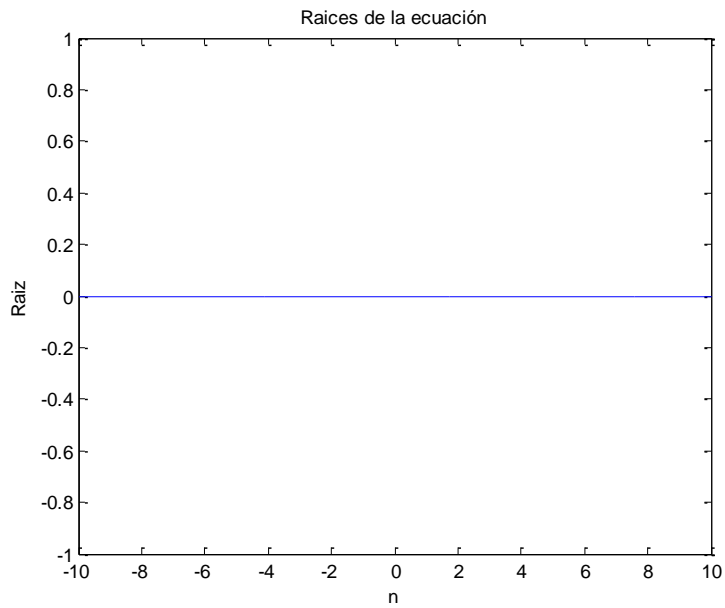


Figura 24. Comportamiento de las raíces

Para darle solución a las raíces complejas proponemos lo siguiente:

$$\zeta^2 = \cos^2\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right) - 1$$

Lo resolvemos con la fórmula general para solución de ecuación de segundo grado.

$$r_{1,2} = \frac{-2q \pm 2(\text{Re}) \omega^{(1-\alpha)} \sqrt{\zeta^2}}{2} \quad (142)$$

El resultado es el siguiente

$$r_{1,2} = -q \pm (\text{Re}) \omega^{(1-\alpha)} \zeta i \quad (143)$$

Sustituyendo q y denominando a $\psi = \left[T_\alpha \omega - \omega^{1-\alpha} \cos\left(\frac{(2-\alpha)\pi}{2}\right) \right]$ se obtiene:

$$r_{1,2} = \text{Re} \left[-\psi \pm \omega^{(1-\alpha)} \zeta i \right] \quad (144)$$

Sustituyendo $r = \varepsilon^2$

$$\varepsilon_{1,2} = \sqrt{\text{Re}} \sqrt{-\psi \pm \omega^{(1-\alpha)} \zeta i} \quad (145)$$

Proponemos una solución para la parte compleja que está en la raíz

$$\begin{aligned} \sqrt{-\psi + \omega^{(1-\alpha)} \zeta i} &= a + bi \\ \left(\sqrt{-\psi + \omega^{(1-\alpha)} \zeta i} \right)^2 &= (a + bi)^2 \end{aligned} \quad (146)$$

$$-\psi + \omega^{(1-\alpha)} \zeta i = a^2 + 2abi - b^2$$

Y de esta forma obtenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas

$$-\psi = a^2 + b^2 \quad \omega^{(1-\alpha)} \zeta = 2ab$$

Sustituyendo en ambos obtenemos cuánto vale a y b

$$a = \sqrt{\frac{-\psi + \sqrt{\psi^2 + \omega^{2(1-\alpha)} \zeta^2}}{2}} \quad (147)$$

$$b = \frac{\omega^{(1-\alpha)} \zeta}{2 \sqrt{\frac{-\psi + \sqrt{\psi^2 + \omega^{2(1-\alpha)} \zeta^2}}{2}}} \quad (148)$$

$\varepsilon_1 = \sqrt{\text{Re}} (a + bi)$, de la misma manera se obtienen las demás constantes.

$$\varepsilon_2 = -\sqrt{\text{Re}} (a + bi), \varepsilon_3 = \sqrt{\text{Re}} (a - bi), \varepsilon_4 = -\sqrt{\text{Re}} (a - bi)$$

Entonces podemos obtener el envolvente lineal:

$$B_2 = k_1 e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + k_2 e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \cos(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + k_3 e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + k_4 e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \cos(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \quad (149)$$

Para simplificar la expresión proponemos como $m = \frac{(2-\alpha)\pi}{2}$ y calculamos B_1 despejando de

la ecuación (124).

$$B_1 = \frac{1}{\text{sen}(m)} \left[\left[\left(\frac{a^2 - b^2}{\omega^{1-\alpha}} \right) + T_\alpha \omega^\alpha - \cos(m) \right] e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + \left(\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \right) e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \cos(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \right] k_1 + \left[\left(\frac{a^2 - b^2}{\omega^{1-\alpha}} \right) + T_\alpha \omega^\alpha - \cos(m) \right] e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \cos(\sqrt{\text{Re}}(bz)) - \left(\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \right) e^{\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \right] k_2 + \left[\left(\frac{a^2 - b^2}{\omega^{1-\alpha}} \right) + T_\alpha \omega^\alpha - \cos(m) \right] e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) - \left(\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \right) e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \cos(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \right] k_3 + \left[\left(\frac{a^2 - b^2}{\omega^{1-\alpha}} \right) + T_\alpha \omega^\alpha - \cos(m) \right] e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \cos(\sqrt{\text{Re}}(bz)) + \left(\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \right) e^{-\sqrt{\text{Re}}(az)} \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(bz)) \right] k_4 \quad (150)$$

Sustituimos las condiciones de frontera normalizadas en estas ecuaciones (149) y (150) para obtener las constantes

$$k_1 = \frac{\xi_\alpha \omega}{2} \left[\frac{\left(\left(\frac{a^2 - b^2}{\omega^{1-\alpha}} \right) + T_\alpha \omega^\alpha - \cos(m) \right) \text{senh}(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(b)) - \left(\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \right) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b))}{\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \left[\text{senh}^2(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos^2(\sqrt{\text{Re}}(b)) + \cosh^2(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}^2(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right]} \right] \quad (151)$$

$$k_2 = \frac{\xi_\alpha \omega}{2} \left[\frac{\left(\left(\frac{a^2 - b^2}{\omega^{1-\alpha}} \right) + T_\alpha \omega^\alpha - \cos(m) \right) \text{senh}(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(b)) + \left(\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \right) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b))}{\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \left[\text{senh}^2(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos^2(\sqrt{\text{Re}}(b)) + \cosh^2(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}^2(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right]} \right] \quad (152)$$

Donde $k_3=k_1$ y $k_4=-k_2$, por lo tanto es suficiente calcular las dos primeras constantes, sustituyendo en la ecuación (149) y (150) obtenemos una ecuación más reducida para su fácil manipulación.

$$B_1 = \left[\left(\left(\frac{a^2-b^2}{\omega^{1-\alpha}} \right) + T_\alpha \omega^\alpha - \cos(m) \right) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b)) + \left(\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \right) \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right] k_1 + \left[\left(\left(\frac{a^2-b^2}{\omega^{1-\alpha}} \right) + T_\alpha \omega^\alpha - \cos(m) \right) \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) - \left(\frac{2ab}{\omega^{1-\alpha}} \right) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right] k_2 \quad (153)$$

$$B_2 = 2 \left[k_1 \text{sen}(\sqrt{\text{Re}}(b)) \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) + k_2 \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \right] \quad (154)$$

Donde

Se hace el análisis del esfuerzo de corte en la placa que oscila, por lo tanto el esfuerzo de corte de la ecuación (127) en la superficie, para esto se propone la misma solución anterior, pero con diferente constante para evitar confusiones.

$$\tau_{yx} = F_1 \text{sen}(\omega t) + F_2 \cos(\omega t) \quad (155)$$

Se sustituye la ecuación (155) en la (127), normalizando y proponiendo las siguientes variables

$$z = \frac{y}{h} \quad c = \frac{(1-\alpha)\pi}{2} \quad \eta = \frac{h\omega}{\mu_\alpha}$$

Obtenemos las ecuaciones diferenciales con el método de variables separables:

$$\frac{dB_1}{dz} = -\omega^\alpha \eta F_1 \cos(c) + \eta F_2 \left[T_\alpha + \omega^\alpha \text{sen}(c) \right] \quad (156)$$

$$\frac{dB_2}{dz} = -\omega^\alpha \eta F_2 \cos(c) - \eta F_1 \left[T_\alpha + \omega^\alpha \text{sen}(c) \right] \quad (157)$$

Se despejan las constantes

$$F_2 = \frac{- \left[\frac{dB_2}{dz} + \eta F_1 (T_\alpha + \omega^\alpha \text{sen}(c)) \right]}{\eta \left[\omega^\alpha \cos(c) \right]} \quad (158)$$

$$F_1 = \frac{\left[\frac{dB_2}{dz} (T_\alpha + \omega^\alpha \text{sen}(c)) + \frac{dB_1}{dz} (\omega^\alpha \cos(c)) \right]}{\eta \left[T_\alpha^2 + 2T_\alpha \omega^\alpha \text{sen}(c) + \omega^{-2\alpha} \right]} \quad (159)$$

Además se obtuvieron las derivadas:

$$\left. \frac{dB_1}{dz} \right|_{z=1} = 2\sqrt{\text{Re}} \left[\begin{array}{l} \left[k_1 \left(\frac{3ba^2 - b^3}{\omega^{1-\alpha}} + b [T_\alpha \omega - \cos(m)] \right) + k_2 \left(\frac{a^3 - 3ab^2}{\omega^{1-\alpha}} + a [T_\alpha \omega - \cos(m)] \right) \right] \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) + \\ \left[k_1 \left(\frac{a^3 - 3ab^2}{\omega^{1-\alpha}} + a [T_\alpha \omega - \cos(m)] \right) + k_2 \left(\frac{b^3 - 3a^2b}{\omega^{1-\alpha}} + b [T_\alpha \omega - \cos(m)] \right) \right] \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \sin(\sqrt{\text{Re}}(b)) \end{array} \right] \quad (160)$$

$$\left. \frac{dB_2}{dz} \right|_{z=1} = 2\sqrt{\text{Re}} \left[[bk_1 + ak_2] \cosh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \cos(\sqrt{\text{Re}}(b)) + [ak_1 - bk_2] \sinh(\sqrt{\text{Re}}(a)) \sin(\sqrt{\text{Re}}(b)) \right] \quad (161)$$

Obtenemos las constante F_1 y F_2 para la ecuación (155), la respuesta al estrés en estado estacionario correspondiente a una señal armónica, está dada por la ecuación (57):

$$\left. \frac{\tau}{\gamma_0} \right|_{z=1} = [G' \sin(\omega t) + G'' \cos(\omega t)] \quad \gamma_0 = \frac{\xi_0}{h}$$

Que comparándola con la ecuación (150), ya sustituyendo los términos que se habían propuesto:

$$\left. \frac{\tau}{\gamma_0} \right|_{z=1} = F_1 \sin(\omega t) + F_2 \cos(\omega t)$$

Identificamos que el módulo elástico y viscoso, son los siguientes.

Módulo elástico

$$G' = \frac{h}{\xi_0} F_1 \quad (162)$$

Módulo viscoso

$$G'' = \frac{h}{\xi_0} F_2 \quad (163)$$

5 Resultados y discusión

5.1 Análisis de diferentes viscosidades en la ecuación de newton para el agua.

Se sustituyeron en la ecuación (92 y 93) valores para observar el comportamiento de la ecuación, esto a una frecuencia de 0 a 100 rad/s, la separación entre los platos se consideró de 1 mm, la amplitud del mismo valor, se sustituyeron 3 distintas viscosidades que se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Viscosidades del agua.

No.	Temperatura	Viscosidad	Densidad
1	0°C	1.792 E-3 $\frac{\text{Kg}}{\text{m s}}$	999 $\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$
2	20°C	1 E-3 $\frac{\text{Kg}}{\text{m s}}$	1000 $\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$
3	100°C	0.296 E-3 $\frac{\text{Kg}}{\text{m s}}$	958 $\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$

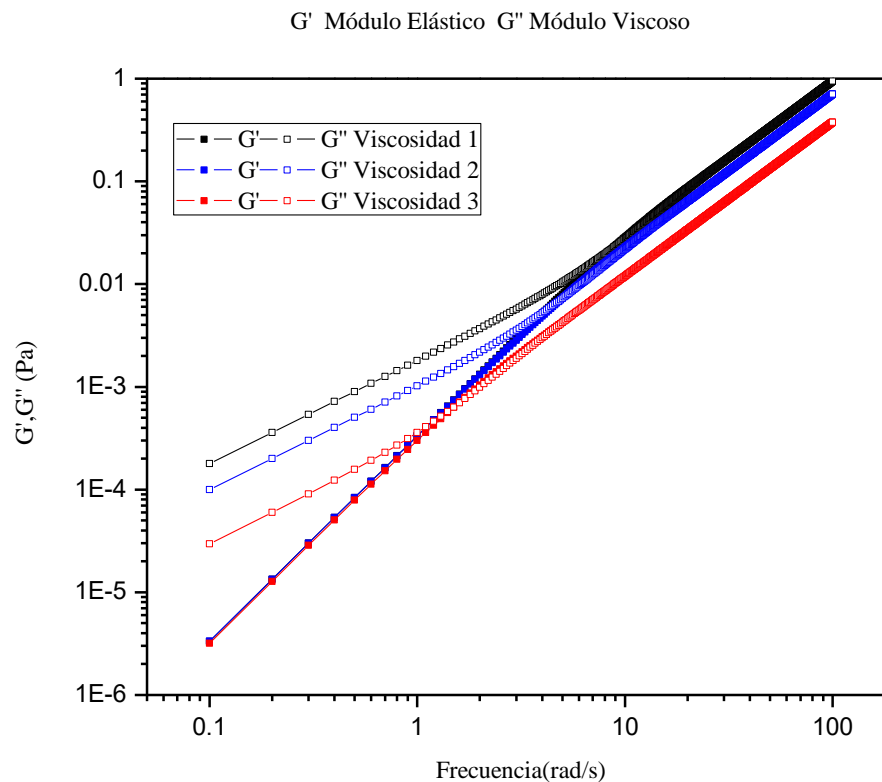


Figura 25. Gráfica de diferentes viscosidades del agua para los módulos Elástico y Viscoso de la ley de Newton.

En la Figura 25 se observa que el punto de cruce disminuye conforme va disminuyendo la viscosidad, el punto de cruce de la viscosidad 1 se da a una frecuencia de 8.3 rad/s a 0.02 Pascales, la viscosidad 2 tiene su punto de cruce en 4.9 rad/s a 0.007 Pascales, mientras que la viscosidad 3 tiene su punto de cruce en 1.5 rad/s a 6.3E-4 Pascales. Se observa diferencias entre cada punto de cruce de las distintas viscosidades.

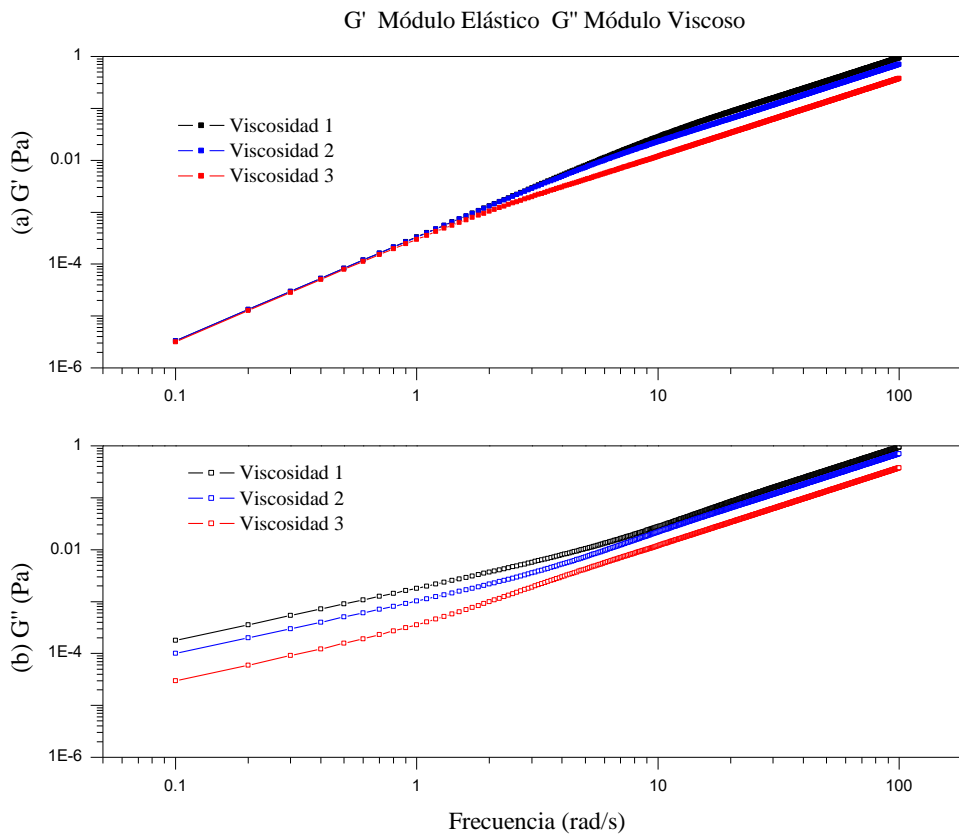


Figura 26. Gráfica del Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) a distintas viscosidades del agua para los módulos Elástico y Viscoso de la ley de Newton.

Se observa en la figura 26(a) el módulo elástico presenta cambios al inicio entre las diferentes viscosidades, a una frecuencia de 1.8 rad/s se observa diferencia entre las viscosidad 3 contra los otros dos, éstos dos que son la viscosidad 1 y 2 no se observan cambios significativos entre ellos.

En la figura 26(b) se observa cambios entre las 3 viscosidades, a partir de la frecuencia de 8 rad/s ya no se observan variaciones significativas entre la viscosidad 1 y 2.

5.2 *Análisis de diferentes separaciones entre los platos a una viscosidad con la Ley de Newton para datos del agua.*

De la misma forma se sustituyeron valores en la ecuación (92 y 93) para observar el comportamiento de la ecuación variando las separaciones, a una frecuencia de 0 a 500 rad/s, con una viscosidad de $1E-3 \text{ Kg/m s}$ a una densidad de 1000 Kg/m^3 , la amplitud de 1mm y la separación entre los platos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Separación entre los platos

1mm
0.5mm
0.1 mm

Se propusieron estas tres separaciones porque en los experimentos de reología son las que se utilizan comúnmente.

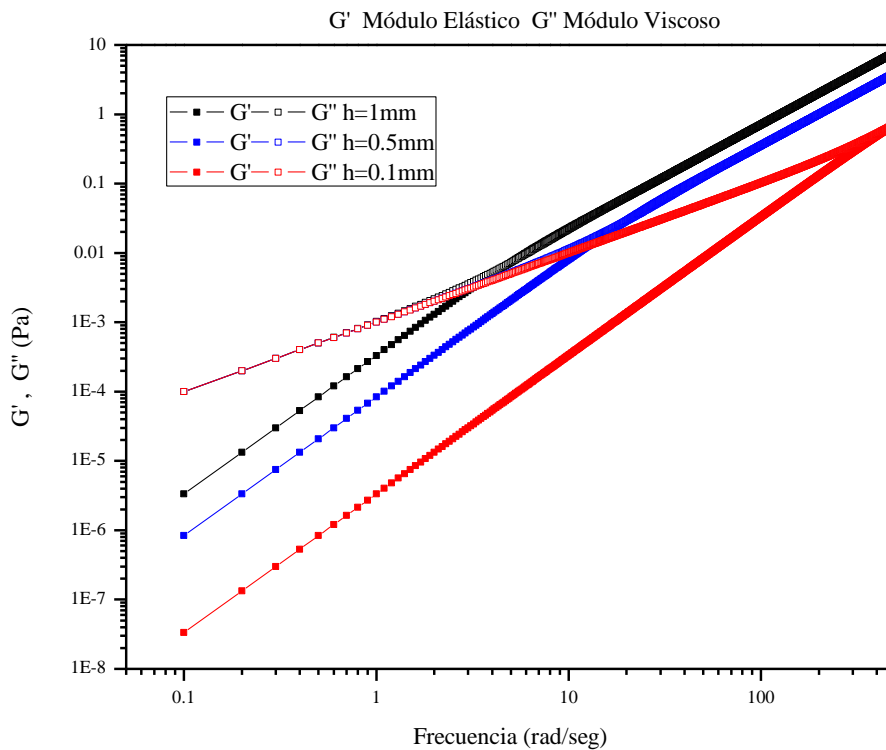


Figura 27. Gráfica de distintas separaciones entre las placas para datos del agua aplicadas a los Módulos Elásticos y Viscosos con la ley de Newton

Se observa en la Figura 27 que el punto de cruce se presenta a frecuencias más altas conforme va disminuyendo la separación, de la misma manera va aumentando el módulo, el punto de cruce de la

separación de 1mm se da a una frecuencia de 4.9 rad/s a 0.007 Pascales, la de 0.5 mm tiene su punto de cruce con una frecuencia de 18.4 rad/s a 0.025 Pascales mientras que la de menor separación que es la de 0.1 mm tiene su punto de cruce en 477.3 rad/s a 0.67 Pascales. Se observa diferencia significativa comparando el punto de cruce de la separación de 1 mm con la de 0.1 mm tiene una diferencia de 0.663 Pascales.

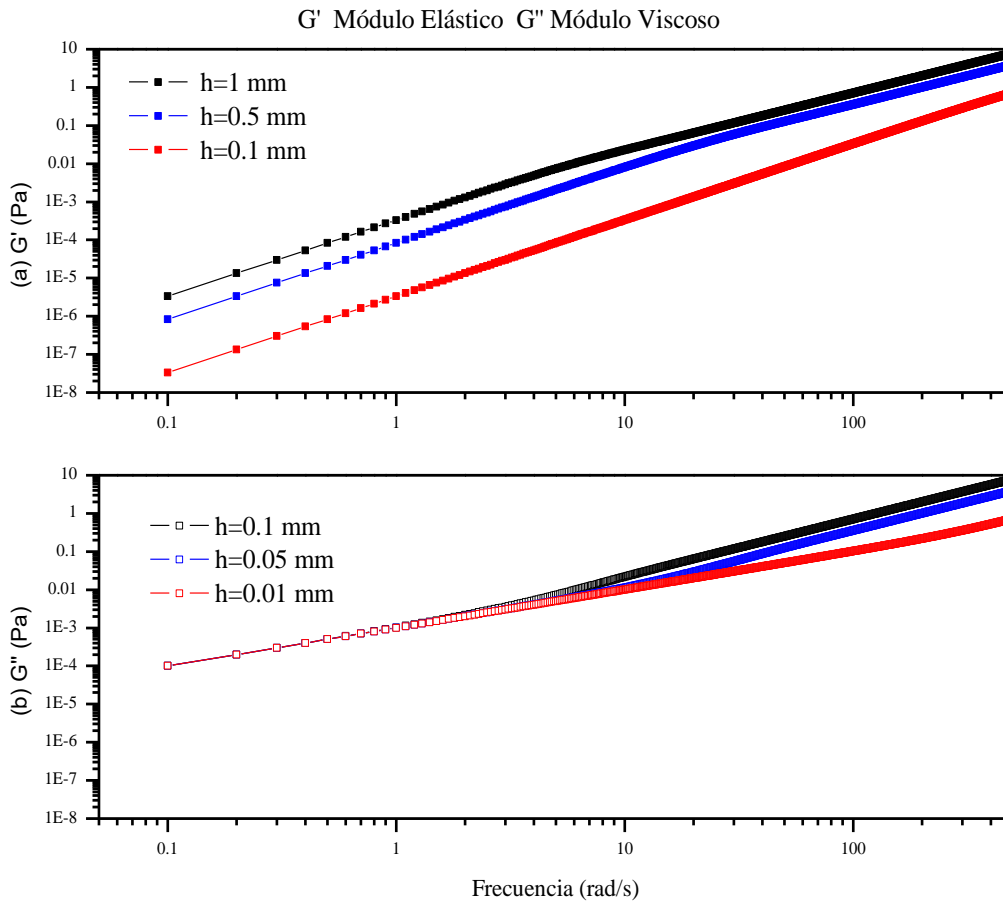


Figura 28. Gráfica de diferentes separaciones entre las placa para el Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) del agua para los módulos Elástico y Viscoso de la ley de Newton.

Para el módulo elástico se observa en la Figura 28(a) cambios entre las diferentes viscosidades desde el comienzo para las separaciones, pero a una frecuencia de 20 rad/s no se observan variaciones significativas entre la separación de 0.5 mm y 0.1 mm.

En la Figura 28(b) se observa que en el módulo viscoso no hay cambios entre las separaciones, a partir de la frecuencia de 2 rad/s aparece diferencia entre las 3 separaciones.

5.3 Análisis con datos de la miel y el agua con la Ley de Newton

Para comparar la ecuación de newton de una viscosidad alta con una baja, se utilizaron datos de la miel que tiene una viscosidad de 10 Kg/ms con una densidad de 1402 Kg/m³ comparando con la del agua con una viscosidad de 1E-3 Kg/ms y su densidad de 1000 Kg/m³, la separación entre las placas de 1 mm, la amplitud del mismo valor, a una frecuencia de 20,000 rad/s, sustituyéndola en las ecuaciones (92 y 93).

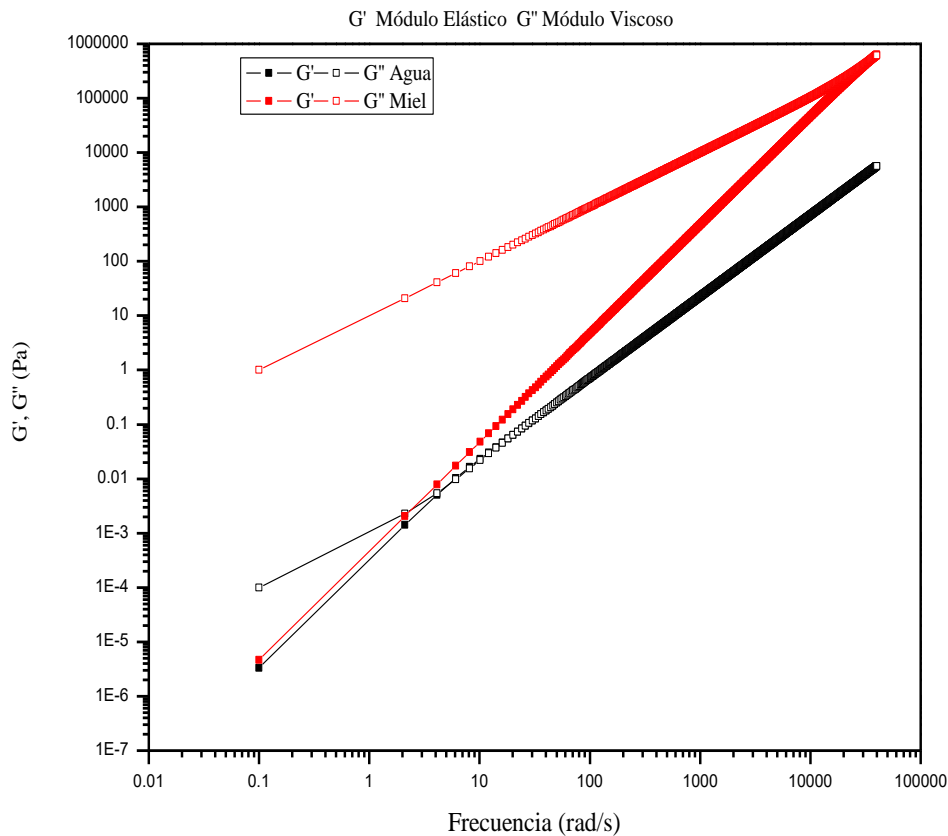


Figura 29. Gráfica para datos del agua y miel sustituidas en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la Ley de Newton.

Se observa en la Figura 29 que para una baja viscosidad, en este caso la del agua, el punto de cruce se da a una frecuencia de 4.9 rad/s a 0.007 Pascales comparada con la miel en la cual su punto de cruce se da a una frecuencia alta de 35198 rad/s a 507080 Pascales, esto indica que a mayor viscosidad el punto de cruce se da a frecuencias altas y a módulos considerablemente grandes.

5.4 *Análisis de diferentes separaciones entre los platos a una viscosidad con la Ley de Newton para datos de la miel.*

De la misma forma se sustituyeron en la ecuación (92 y 93) valores para observar el comportamiento de la ecuación, la frecuencia de 0 a 4000000 rad/s, con una viscosidad de 10 Kg/ms, la densidad de 1402 Kg/m³, la amplitud de 1 mm y la separación entre los platos son lo que se presentan en la Tabla 2.

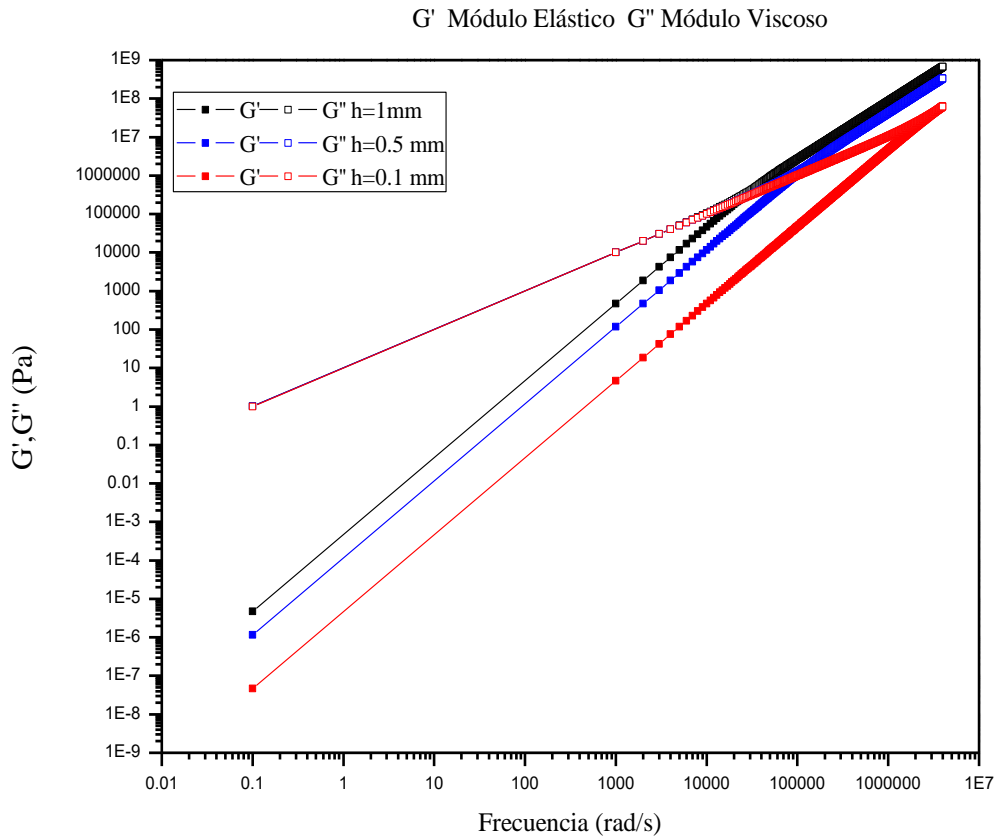


Figura 30. Gráfica de distintas separaciones para datos de la miel en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la Ley de Newton

En la Figura 30 se observa que entre menor sea la separación entre los platos el punto de cruce se da a altas frecuencias, así como el valor de los módulos, en la separación de 1 mm el punto de cruce se da a una frecuencia de 35198 rad/s a 507080 Pascales, la separación de 0.5 mm se da a una frecuencia de 139000 a 1.98E6 Pascales, y el de 0.1 mm su punto de cruce está a 3.496E6 rad/s a 5.01E7 Pascales.

G' Módulo Elástico G'' Módulo Viscoso

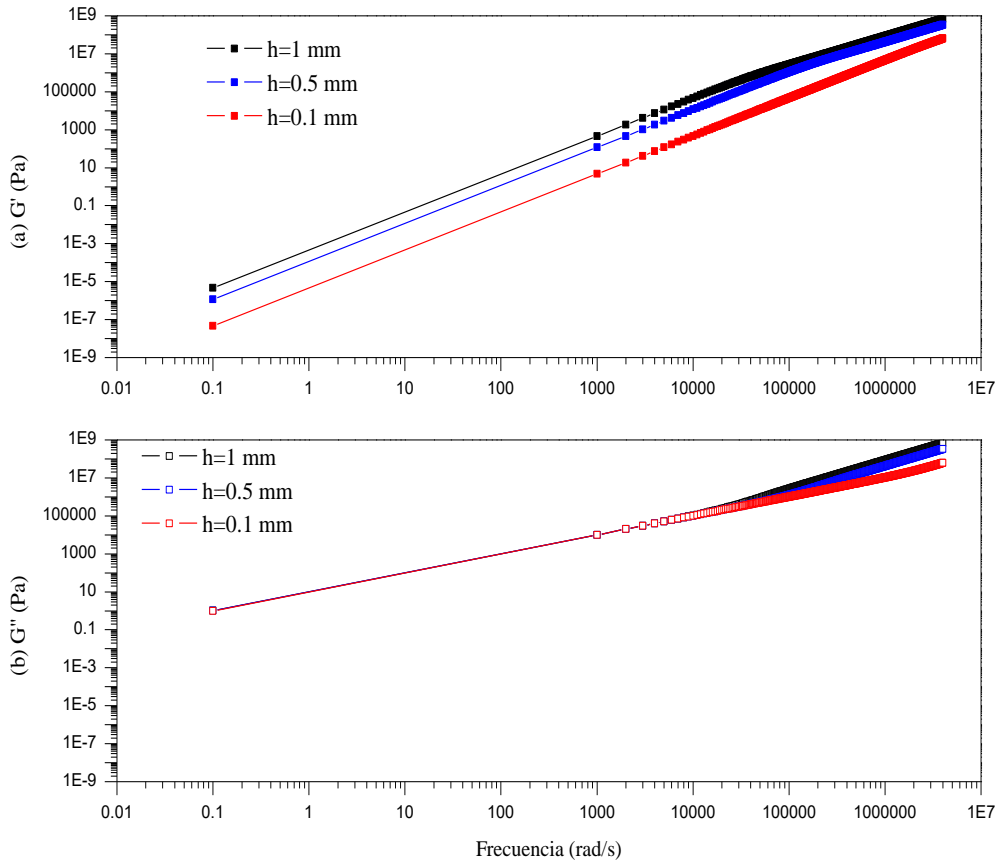


Figura 31. Gráfica de diferentes separaciones entre las placa para el módulo elástico (a) y viscoso (b) para datos de la miel en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la Ley de Newton.

Se observa en la Figura 31(a) en el módulo elástico existen variaciones en las separaciones, pero a partir de 100000 rad/s no se observan cambios significativos entre la separación de 1 mm y la de 0.5 mm.

De la Figura 31(b) en el módulo viscoso no se observan cambios al inicio pero a una frecuencia de 10 000 rad/s hay una mínima variación entre ellas, aunque del mismo modo entre la separación de 1 mm y la de 0.5 mm no se observan cambios significativos.

5.5 *Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell-Cattaneo con diferentes tiempos de relajación con datos del agua.*

Se sustituyeron valores en la ecuación (124 y 125), a una frecuencia de 0 a 1000 rad/s, la separación entre los platos se consideró de 1 mm, la amplitud del mismo valor, a una viscosidad de 1E-3 Kg/ms con una densidad de 1000 Kg/m³, esto a tres tiempos de relajación que se muestran en la Tabla 3

Tabla 3. Tiempos de relajación para el agua.

1E-13 s
1E-2 s
3E-2 s

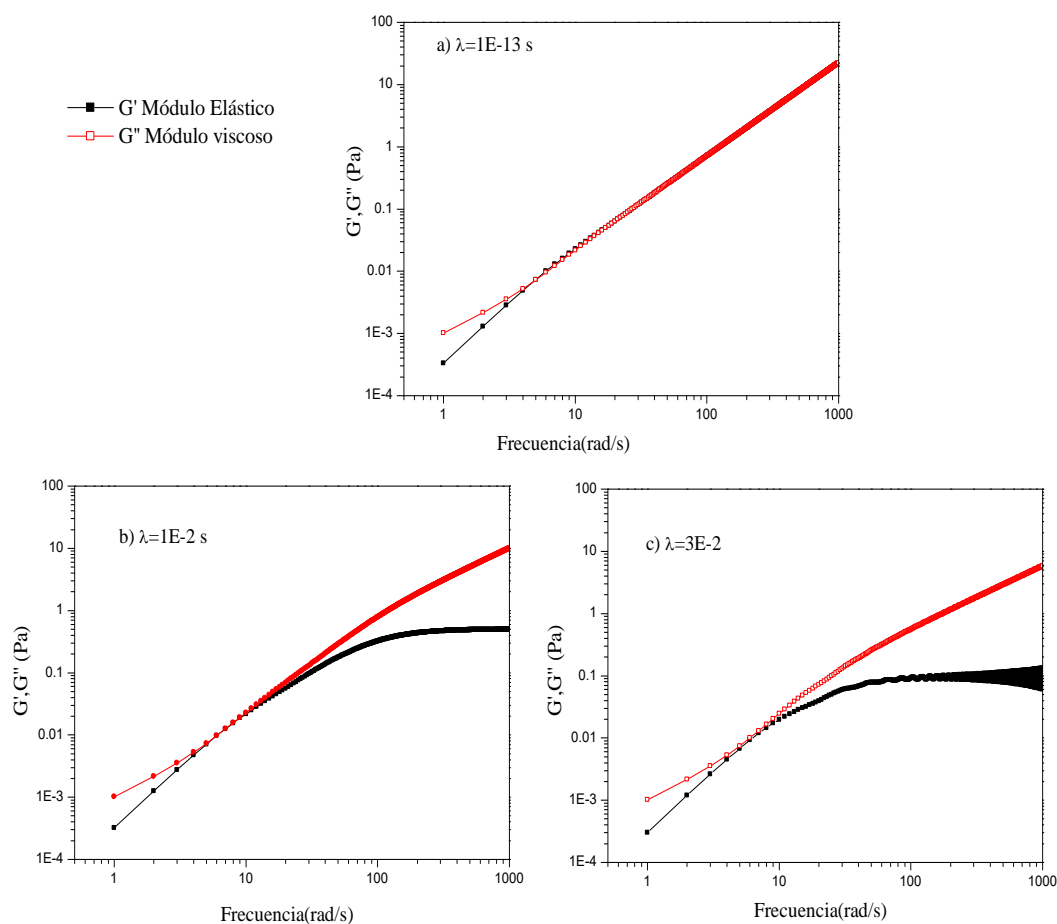


Figura 32. Gráfica de distintos tiempos de relajación para datos de la miel en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.

Se observa en la Figura 32 que el punto de cruce para los dos primeros tiempos de relajación es la misma, que se presenta a una frecuencia de 4.9 rad/s a 0.007 Pas, el tiempo de relajación de 3E-2 s ya no presenta punto de cruce, además que a un tiempo de relajación de 1E-13 s se comporta igual a la Ley de Newton esto se debe a que el tiempo de relajación para el agua es esa, para un tiempo de relajación mayor a 1E-2 se observa el cambio más significativo en el módulo elástico ya que se observa una flexión a una frecuencia de 20 rad/s y a partir de 200 se estabiliza la tendencia del módulo linealmente. En el caso del tiempo de relajación de 3E-2 s para el módulo elástico presenta una flexión a una frecuencia de 9 rad/s pero a partir de 100 rad/s se observa ruido o inestabilidad.

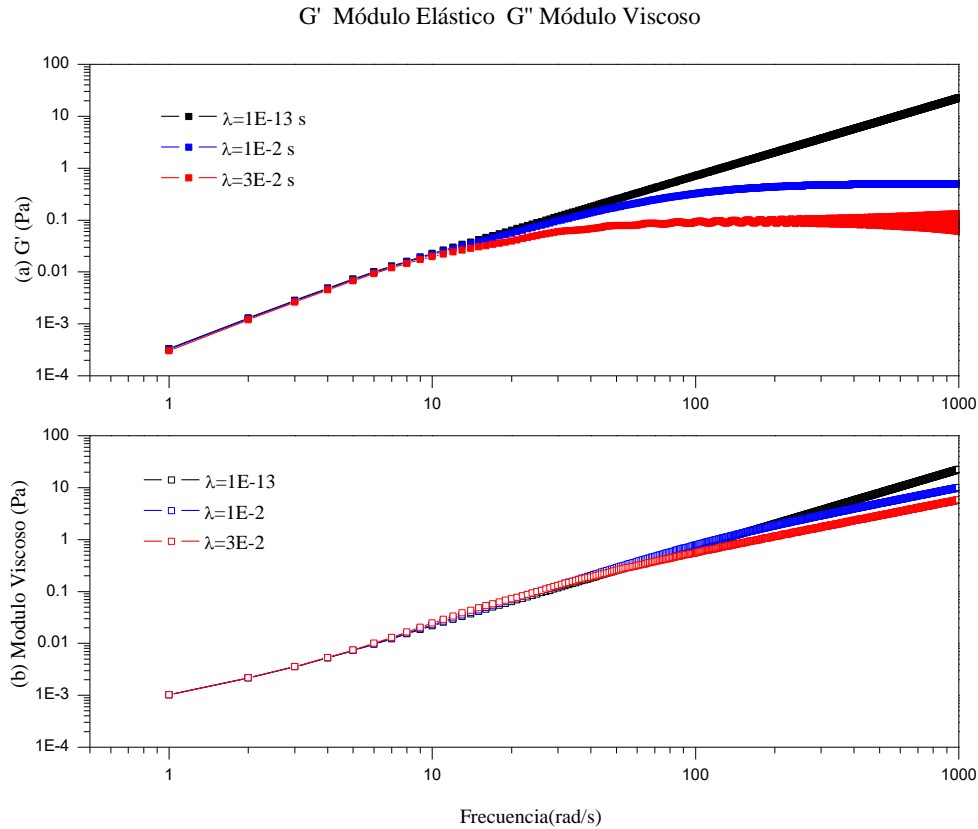


Figura 33. Gráfica de diferentes tiempos de relajación entre las placa para el Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) del agua en ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.

En la Figura 33(a) se observa que para el módulo elástico al inicio se comportan de manera similar entre los tiempos de relajación, pero a partir de 9 rad/s empiezan a percatarse diferencias entre ellas. Mientras que el módulo viscoso de la Figura 33(b) se muestran para distintos tiempos de relajación y se observan cambios significativos desde la frecuencia de 100 rad/s es donde se nota la diferencia entre el tiempo de relajación de 3E-2 s con las otras dos y entre ellas que son las de tiempo de relajación de 1E-13 s y 1E-2 s se observan diferencia partir de la frecuencia de 200 rad/s.

5.6 *Análisis comportamiento de la ecuación de Maxwell Cattaneo con un tiempo de relajación, a diferentes separaciones entre las placas con datos del agua.*

Se sustituyeron en la ecuación (124 y 125) a una frecuencia de 0 a 1000 rad/s, un tiempo de relajación de 1E-2 s, la amplitud de 1 mm, la viscosidad de 1E-3 Kg/ms con una densidad de 1000 Kg/m³, a las separaciones que se muestran en la Tabla 2.

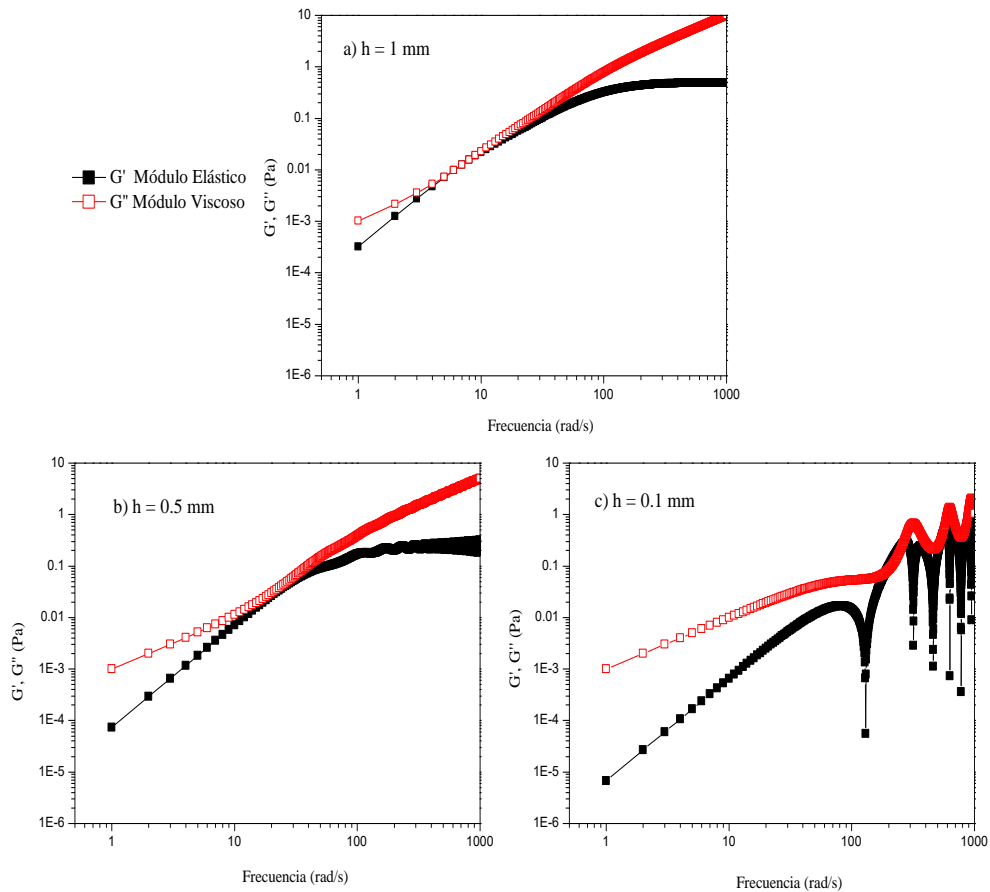


Figura 34. Gráfica de distintas separaciones a un tiempo de relajación para datos del agua en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.

Se observa que el punto de cruce para las tres separaciones varía con la misma tendencia a los resultados de la ley de Newton cuando se varía la separación, entre menor sea la separación el punto de cruce se produce a mayor frecuencia, en el punto de cruce para la de 1 mm se efectúa a una frecuencia de 4.9 rad/s y el módulo elástico se efectúa una flexión a una frecuencia de 9 rad/s, el de la separación de 0.5 mm se observa el punto de cruce para el módulo elástico en la frecuencia de 12 rad/s y de la misma manera se observa una flexión en 20 rad/s, a partir de 200 rad/s se observa ruido, para ambas separaciones el módulo viscoso no se observa gran importancia en cuanto a variación. Para la separación de 0.1 mm se observa el punto de cruce a una frecuencia de 200 rad/s pero a partir de ese punto se observa inestabilidad para ambos módulos.

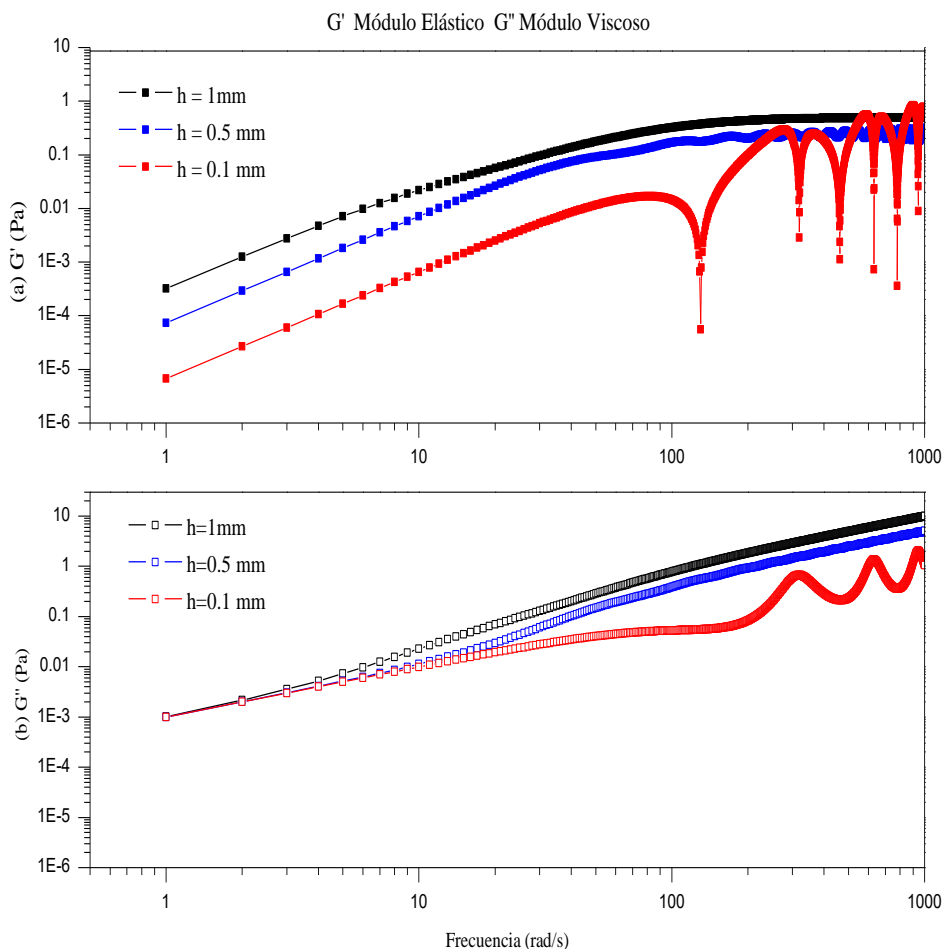


Figura 35. Gráfica de diferentes separaciones entre las placa con un tiempo de relajación para el Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) de la miel para las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo

Se observa en la Figura 35(a) que para el módulo elástico se observan diferencias significativas entre las separaciones, observando inestabilidad para la separación de 0.1 mm.

Para el módulo viscoso de la Figura 35(b) se observa que al principio no se observan cambios entre las distintas separaciones pero a partir de una frecuencia de 2 rad/s se empieza a notar diferencias entre las separaciones.

5.7 Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell-Cattaneo con diferentes tiempos de relajación con datos de la miel.

Se sustituyeron datos de la miel en la ecuación (124 y 125), con una frecuencia de 0 a $1E7$ rad/s, la separación entre los platos se consideró de 1 mm, la amplitud del mismo valor, a una viscosidad de

10 Kg/ms con una densidad de 1402 Kg/m³, esto a los tiempos de relajación que se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4 Tiempo de relajación para la miel.

1E-13 s
1E-5 s
1E-1 s
1 s

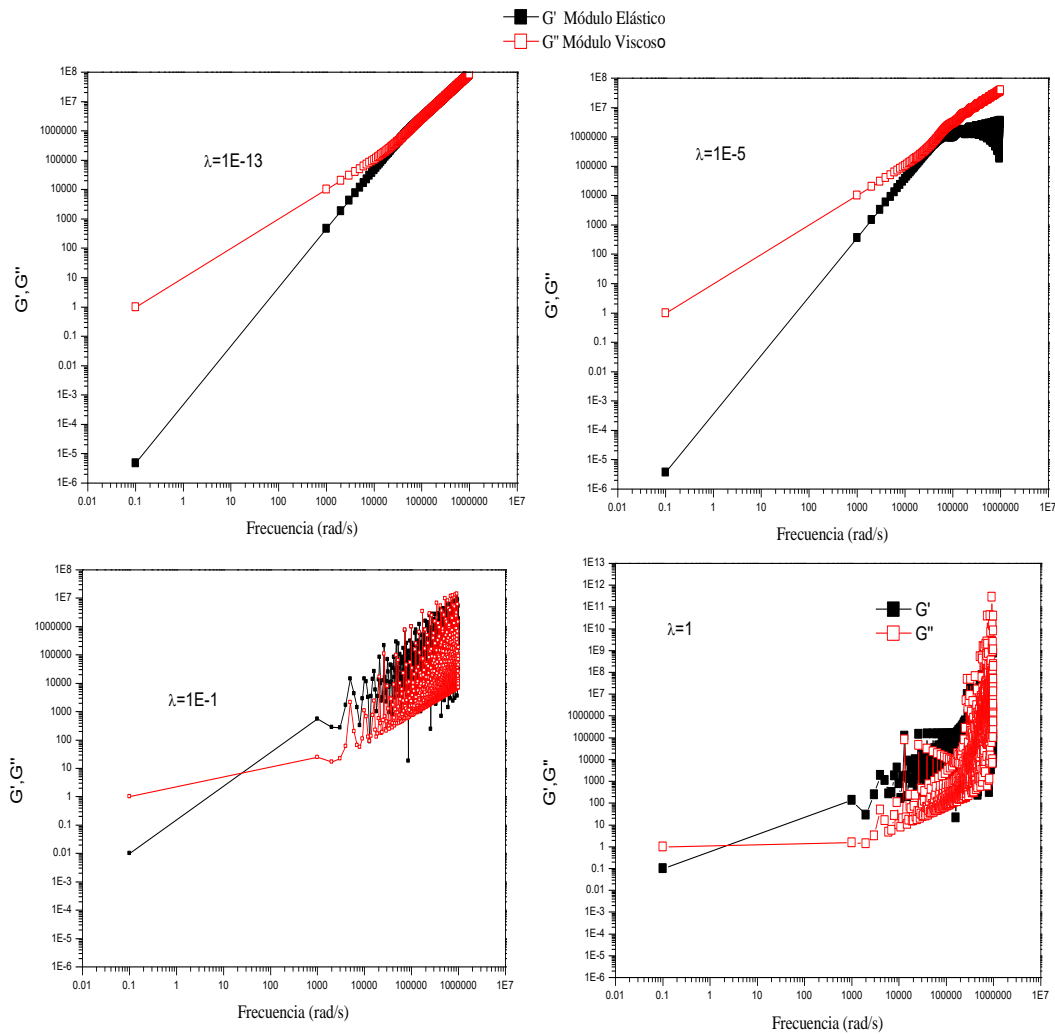


Figura 36. Gráfica de los módulos de elasticidad y viscosidad de la miel a diferentes tiempos de relajación, (a), (b), (c) y (d) para las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.

Se observa que el punto de cruce se efectúa cada vez a menor frecuencia mientras aumenta el tiempo de relajación. En la Figura 36(a) se observa que a su tiempo de relajación se comporta como la ecuación de Newton con un punto de cruce en 140000 rad/s a 4.40E6 Pascales, en la Figura 36(b) no se observa un punto de cruce pero en el módulo elástico se presenta un inflexión a una frecuencia de 40000 rad/s mientras que en la Figura 36(c) se observa ruido a partir de 100 rad/s y en la Figura 36(d) se observa ruido a partir de 1000 rad/s. en estos dos últimos se observa a baja frecuencia un cruce típico para materiales viscoelásticos pero a una frecuencia alta observa ruido, por lo tanto conviene analizar estas gráficas a baja frecuencia sabiendo el comportamiento, se añade otro tiempo de relajación que es la de 2 s.

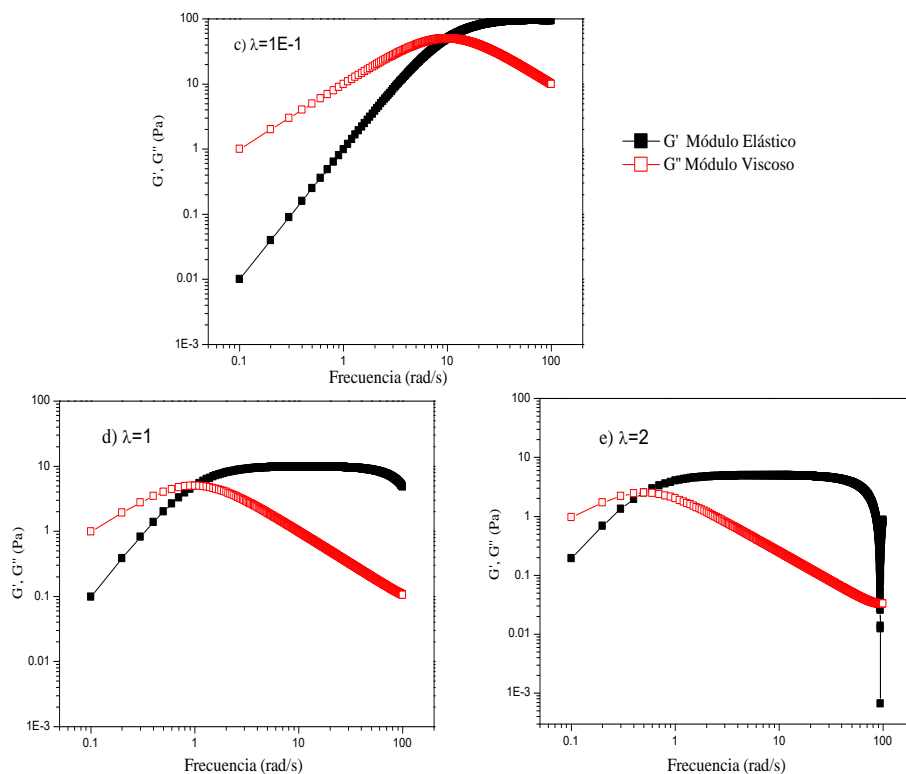


Figura 37. Gráfica de los módulos de elasticidad y viscosidad de la miel a diferentes tiempos de relajación: (c), (d) y (e) para las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a baja frecuencia.

En la Figura 37(c) a un tiempo de relajación de 1E-1s se observa que su punto de cruce está a una frecuencia de 10 rad/s a 5 Pascales pero también se observa que antes del punto de cruce G'' es

mayor que G' lo que implica que el material requiere menos esfuerzo para fluir. Después del punto de cruce esta tendencia se invierte e implica que el material requiere más esfuerzo para fluir. La frecuencia en la cual se intersectan G' y G'' da lugar al tiempo característico o tiempo de respuesta del material.

Se observa la misma tendencia de que el punto de cruce se produce cada vez a menor frecuencia mientras aumente el tiempo de relajación, en a figura 13(d) que tiene un tiempo de relajación de 1 s, su punto de cruce a una frecuencia de 1 rad/s a 5 Pascales mientras que el del tiempo de relajación de 2 s tiene un punto de cruce a una frecuencia de 0.5 rad/s a 2.5 Pascales,

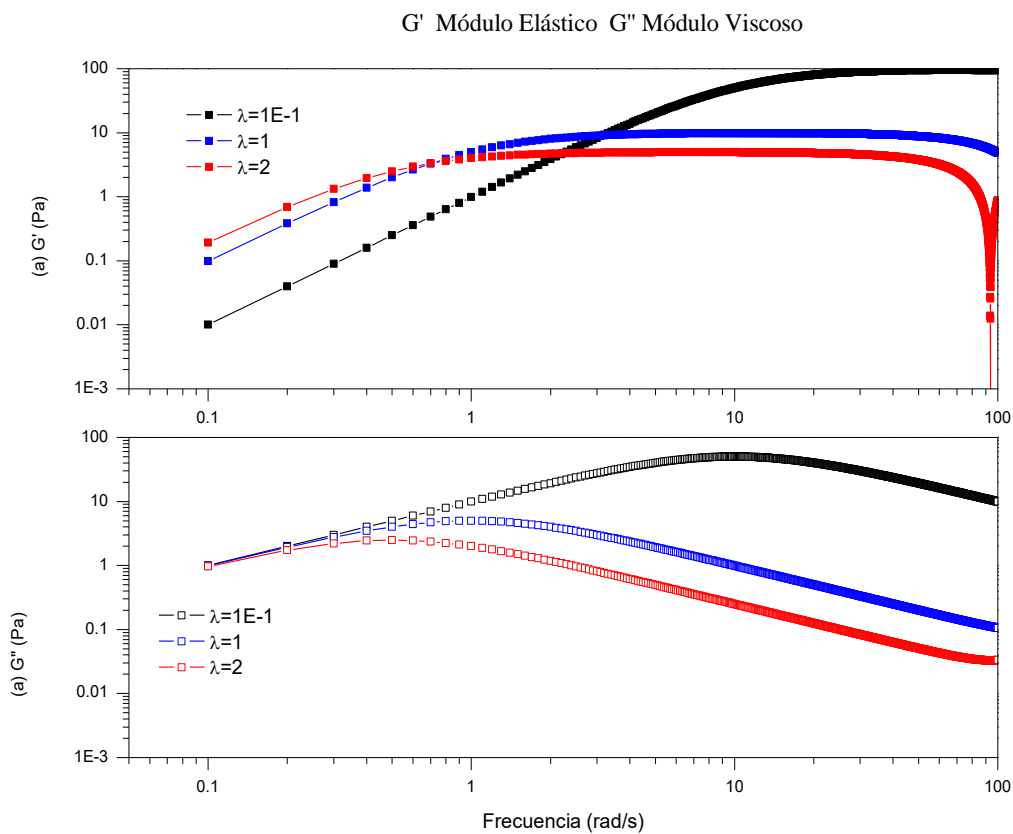


Figura 38. Gráfica de diferentes tiempos de relajación para el Módulo Elástico (a) y Viscoso (b) de la miel para las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a baja frecuencia.

Se observa en la Figura 38(a) el módulo elástico para el menor tiempo de relajación que es la de $1E-1$ una frecuencia de 0.1 rad/s que tiene un valor de 0.0099 Pascales comparándola con la del tiempo de relajación de 2s que es de 0.1923 Pascales, se observa un cambio significativo a una frecuencia de 100 rad/s donde el tiempo de relajación de $1E-1$ tiene un valor de 94.29 Pascales siendo mayor

que el del tiempo de relajación de 2 s con un valor de 0.87123 Pascales, es donde se observa que el módulo elástico es el que determina el esfuerzo para fluir.

Para el módulo viscoso en la Figura 38(b) se observa que tienen un mismo valor inicial que es de 0.9 Pascales, pero a partir de 0.2 rad/s se observan cambios significativos entre los tiempo de relajación. Además se observa que entre más aumente el tiempo de relajación, disminuye el módulo elástico a excepción del tiempo de relajación de 1E-1 rad/s que a 100 rad/s tiene un valor de 9.9 Pascales, mientras que la de tiempo de relajación de 1s tiene un valor de 0.105 Pascales y a tiempo de relajación de 2s el valor es de 0.03 Pascales.

5.8 Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell-Cattaneo con un tiempo de relajación a diferentes separaciones entre las placas con datos de la miel.

Se sustituyeron en la ecuación (124 y 125) esto a una frecuencia de 0 a 100 rad/s, se consideró un tiempo de relajación de 1s, la amplitud de 1 mm, a una viscosidad de 10 Kg/ms con una densidad de 1402 Kg/m³, esto a distintas separaciones que se muestran en la tabla 2.

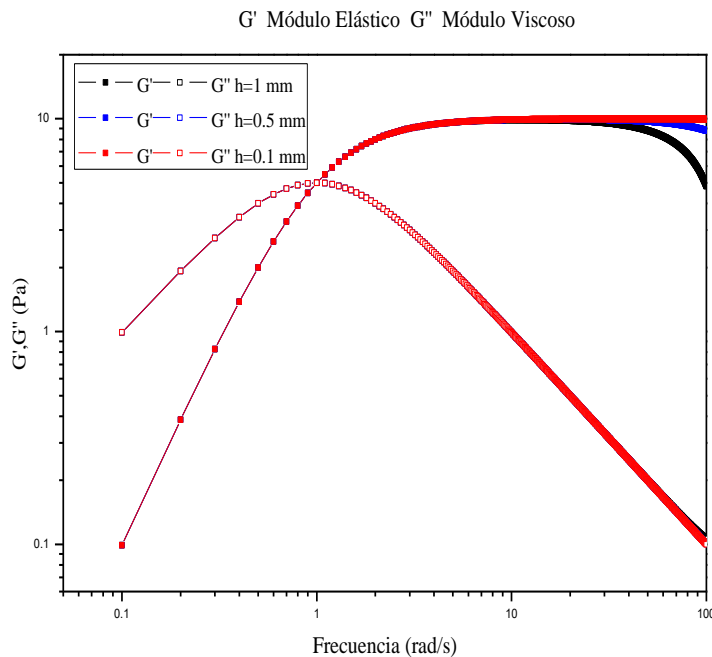


Figura 39. Gráfica de distintas separaciones a un tiempo de relajación para datos de la miel en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo.

No se observan diferencias entre las distintas separaciones a esta frecuencia, por lo tanto se presentan gráficas a altas frecuencias, de 0 a 1000 rad/s.

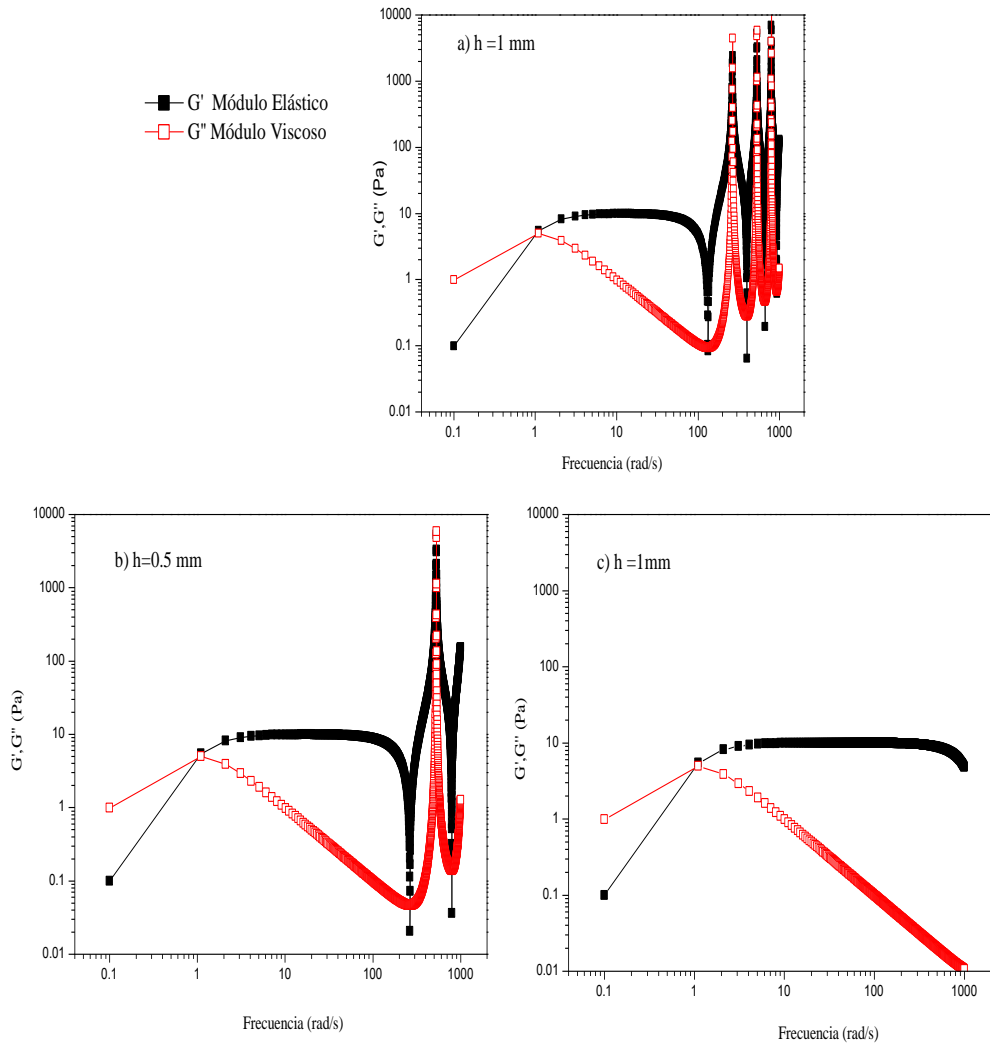


Figura 40. Gráfica de distintas separaciones a un tiempo de relajación para datos de la miel en las ecuaciones del módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a una alta frecuencia.

Se observa que a una separación de 1 mm aparece ruido a partir de la frecuencia de 100 rad/s, al de separación de 0.5 se observa ruido a partir de 200 rad/s, pero la de 0.1 mm no presenta ruido, esto indica que a menor separación el ruido o perturbación se presenta a frecuencias mayores.

5.9 Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes alfas con datos del agua.

Se sustituyeron en la ecuación (162 y 163) esto a una frecuencia de 0 a 100 rad/s, la separación entre los platos se consideró de 1 mm, la amplitud del mismo valor, a una viscosidad de $1E-3$ Kg/ms con una densidad de 1000 Kg/m³ a alfas que se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5 Valores de Alfas

0.1
0.5
1
1.5

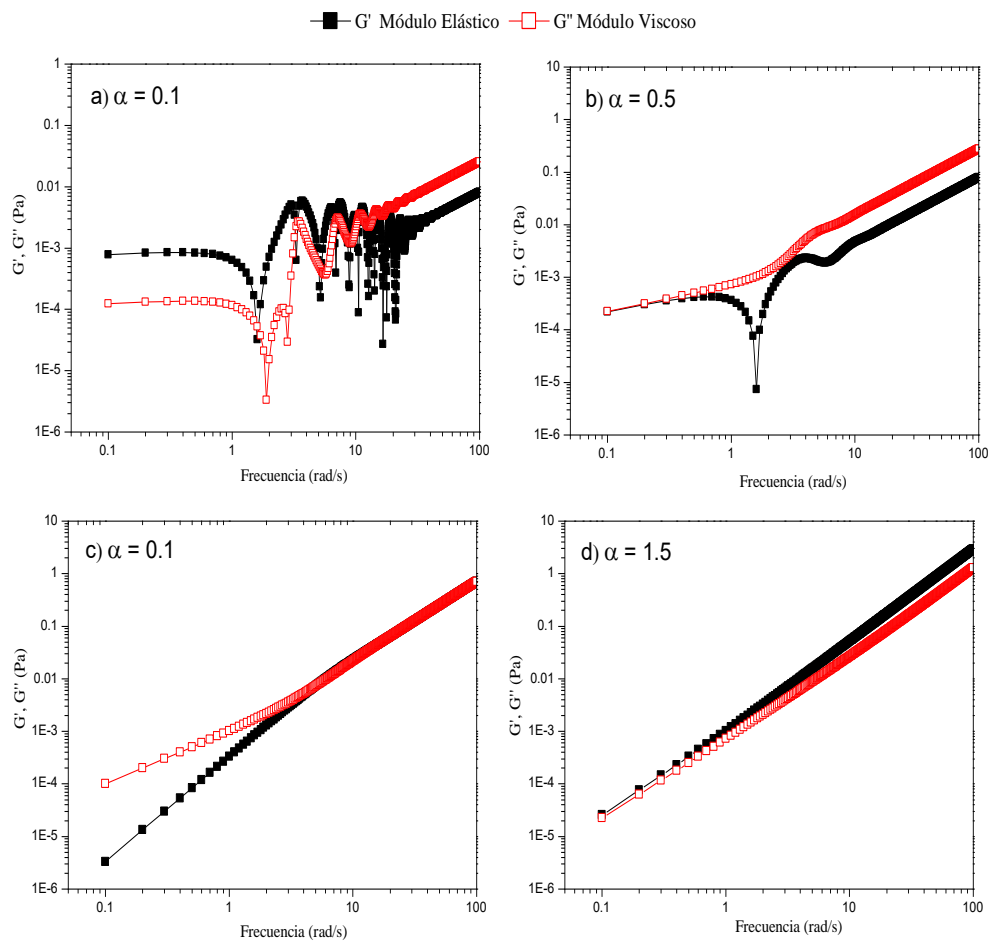


Figura 41. Gráfica de distintas alfas para datos del agua en las ecuaciones de G' y G'' de las ecuación de Maxwell-Fraccional.

Se observa que la Figura 41 (a) que corresponde a un alfa de 0.1 no describe nada y presenta mucho ruido, con respecto a la Figura 41 (b) no presenta ruido al igual que no describe nada, para la figura 17(c) es la misma que se presenta en la ley de Newton que es su equivalente y para la Figura 41(d) no se observa ninguna tendencia coherente.

5.10 *Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes alfas con un tiempo de relajación aplicados a datos del agua.*

Se sustituyeron en la ecuación (162 y 163) esto a una frecuencia de 0 a 100 rad/s, se consideró un tiempo de relajación de 1E-2s, la separación entre los platos se consideró de 1 mm, la amplitud de 1 mm, a una viscosidad de 1E-3 Kg/ms con una densidad de 1000 Kg/m³, esto a las distintas alfas de la tabla 5.

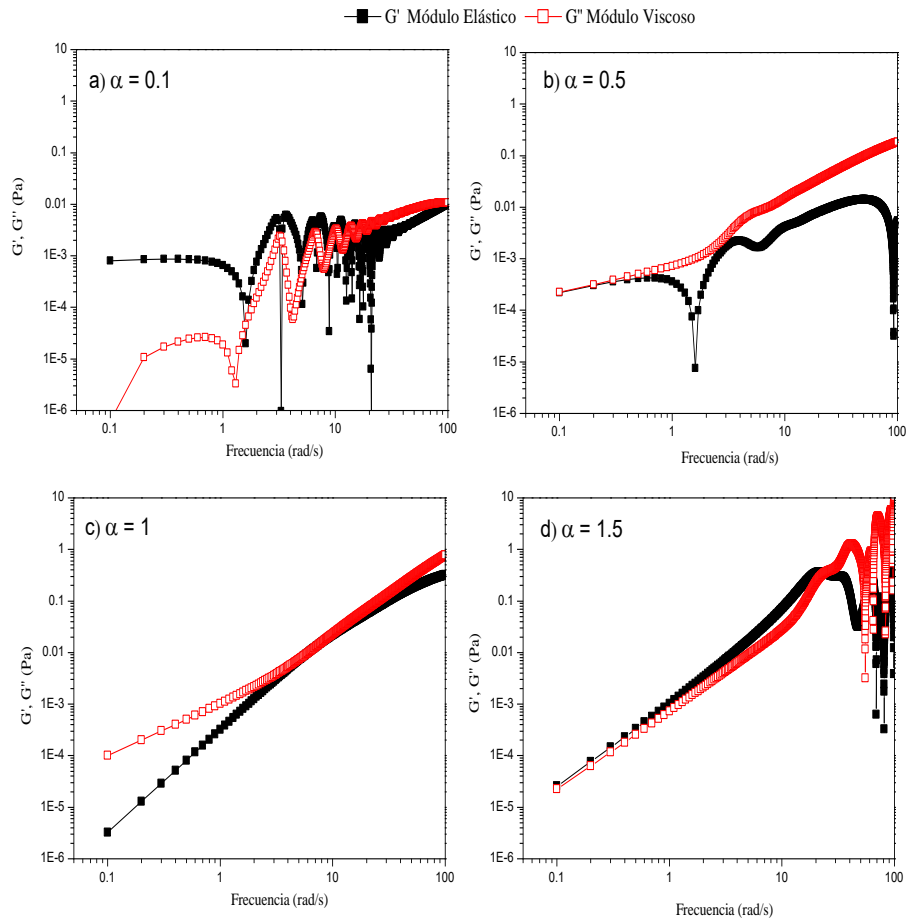


Figura 42. Gráfica de distintas alfas para datos del agua con un tiempo de relajación en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Fraccional.

Se observa que la Figura 42 (a) que corresponde a un alfa de 0.1 no describe nada y presenta mucho ruido, con respecto a la Figura 42(b) no presenta mucho ruido como la anterior pero tampoco indica nada, para la Figura 42(c) es la misma que se presenta en la gráfica de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a ese tiempo de relajación que de la misma manera es su equivalente y para la Figura

42(d) tiene una tendencia similar a la anterior, se observa un punto de cruce en la frecuencia de 30 rad/s y a partir de ahí se presenta ruido.

5.11 Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes alfas con datos de la miel

Se sustituyeron en la ecuación (162 y 163) esto a una frecuencia de 0 a $1E7$ rad/s, la separación entre los platos se consideró de 1 mm, la amplitud del mismo valor, a una viscosidad de 10 Kg/ms con una densidad de 1402 Kg/m^3 a las distintas alfas de la tabla 5.

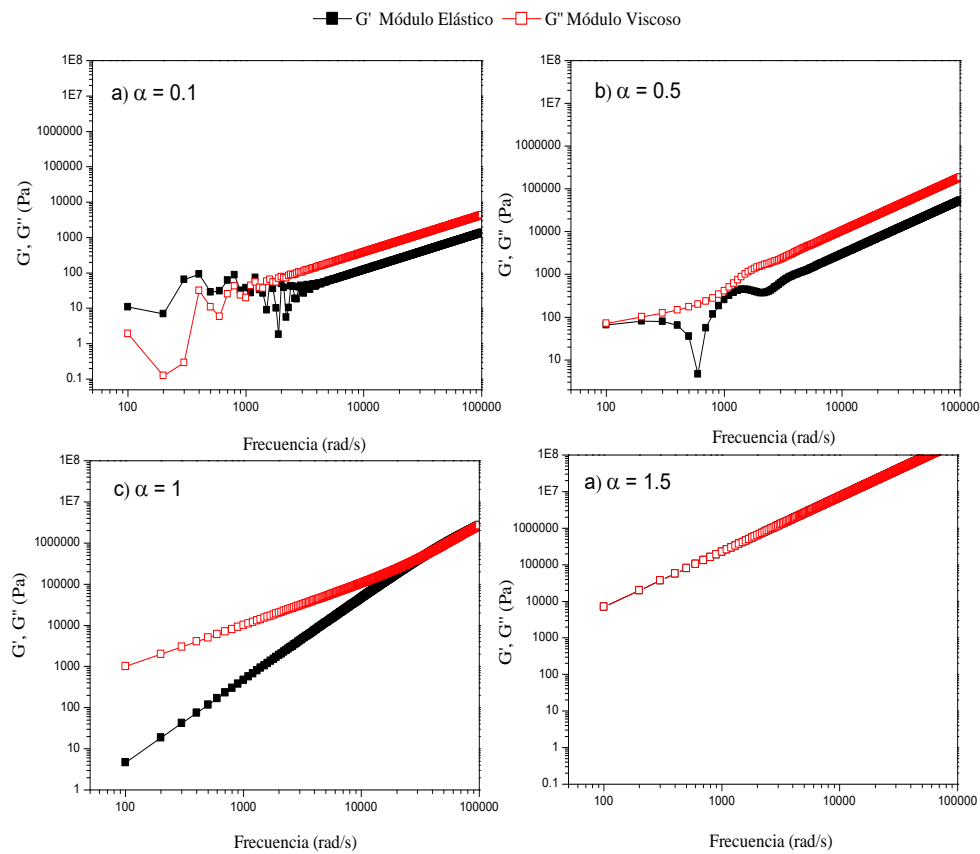


Figura 43. Gráfica de distintas alfas para datos de la miel en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Fraccional

Se observa que la Figura 43 (a) que corresponde a un alfa de 0.1 que los módulos presentan al inicio que G' es mayor que G'' con un punto de cruce en 1000 rad/s de ahí en adelante G'' es mayor que G' , con respecto a la Figura 43 (b) no presenta mucho ruido como la anterior con el mismo punto de cruce y la tendencia a partir de la frecuencia de 1000 rad/s es la misma que la anterior, para la Figura 43(c) es la misma que se presenta en la gráfica de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a ese

tiempo de relajación que de la misma manera es su equivalente y para la Figura 43(d) no tiene ninguna tendencia coherente.

5.12 Análisis del comportamiento de la ecuación de Maxwell Fraccional a diferentes alfas con un tiempo de relajación aplicados a datos de la miel.

Se sustituyeron en la ecuación (162 y 163) esto a una frecuencia de 0 a 100 rad/s, se consideró un tiempo de relajación de 1E-1s, la separación entre los platos se consideró de 1 mm, la amplitud de 1 mm, a una viscosidad de 1E-3 Kg/ms con una densidad de 1402 Kg/m³, con las alfas que se presentan en la tabla 5.

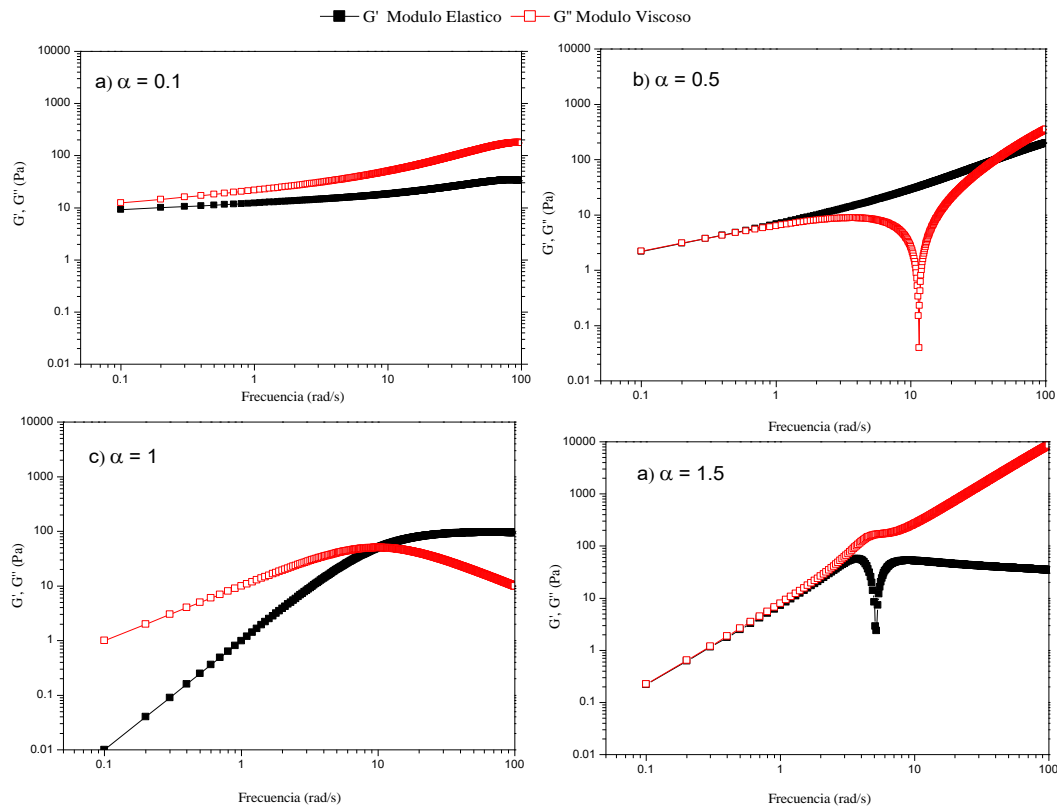


Figura 44. Gráfica de distintas alfas para datos de la miel con un tiempo de relajación en las ecuaciones de módulo elástico y viscoso de la ecuación de Maxwell-Fraccional.

Se observa que la Figura 44 (a) que corresponde a un alfa de 0.1 no describe algún comportamiento conocido, con respecto a la Figura 44 (b) al inicio no presenta variaciones entre ambos módulos pero a una frecuencia de 100 rad/s el módulo viscoso es mayor que el módulo elástico, para la Figura 44(c) es la misma que se presenta en la gráfica de la ecuación de Maxwell-Cattaneo a ese tiempo de relajación siendo su equivalente y para la Figura 44(d) al inicio tienen el mismo valor del módulo y a la frecuencia de 100 rad /s el módulo viscoso es mayor a la del elástico lo cual indica que no tiene alguna tendencia conocida..

6 Conclusión

En este trabajo se utilizaron tres ecuaciones fenomenológicas que son la ley de Newton, la ecuación de Maxwell-Cattaneo y la ecuación de Maxwell-Fraccional para describir el comportamiento de materiales en platos paralelos donde la parte superior es una placa oscilatoria tal como se muestra en la Figura 21, las ecuaciones se resolvieron por el método de variables separables, en la tercera que es la de Maxwell- Fraccional se ocuparon tablas de (Poldlubny, 1999) para resolver derivadas fraccionales trigonométricas, además para obtener los módulos Elástico y Viscoso se utilizó el método de variables separables proponiendo una solución particular para las tres ecuaciones, esto se encuentra en Análisis Matemático.

Para analizar el comportamiento con fluidos Newtonianos se utilizaron datos del agua y para No-Newtonianos la miel, se variaron las viscosidades y la separación entre los platos para la Ley de Newton, para la ecuación de Maxwell Cattaneo el tiempo de relajación y la separación entre los platos, en la ecuación de Maxwell-Fraccional se variaron las Alfas.

Para analizar fluidos Newtonianos que en este caso se utilizaron datos del agua, la Ley de Newton describe el comportamiento del material a bajas frecuencias al igual que la ecuación de Maxwell Cattaneo a distintos tiempos de relajación, también para la ecuación de Maxwell-Fraccional con un Alfa de 1, además se comprobó las equivalencias de las tres ecuaciones con estos datos.

Para Fluidos no-Newtonianos donde se utilizaron datos de la miel, la ecuación de Maxwell-Cattaneo describió el comportamiento a distintos tiempos de relajación y bajas frecuencias, de la misma manera se comprueba la equivalencia con la Ley de Newton.

En cuanto a la ecuación de Maxwell-Fraccional no describe alguna tendencia al comportamiento de los materiales, solo la equivalencia matemática con las otras dos ecuaciones, cabe mencionar que esta ecuación involucra número complejos.

7 Bibliografía

- Bagley, E. B. y Christianson, D.D. (1982). Swelling capacity of starch and its relationship to suspension viscosity – effect of cooking time, temperature and concentration. *J. Texture Studies* 13, 115-126
- Barbosa-Canovas, G.V. y Peleg, M. (1983). Flow parameters of selected commercial semiliquid food products. *Journal of Texture Studies* 14, 213-234.
- Barnes, H.A.; Hutton, J.F.; Walters, K., An (1998) *Introduction to Rheology. Rheology Series Vol. 3*, Elsevier, Amsterdam.
- Bird, R.B., Stewart, W.E., y Lightfoot, E.N. (1987). *Fenómenos de Transporte*. Editorial Reverté, s. a.
- Borwankar, R.P.; Fryye, L.A.; Blaureon, A.E. and Sasevich, F.J. (1992). Rheological Characterization of Melting of Margarines and Tables preads. *J. Food Eng.* 16:55-74
- Casson, N., (1959). *Rheology of Disperse Systems*, Ed. C. C. Mill, p. 84.
- Cates, M, E. (1987). Contribution to an ACS Symposium on Polymeric Microemulsions and Polymer-Microemulsion (198Interactiosn, New Orleans).
- Cheng, D.C-H (1986). "Yield stress - a time- dependent property and how to measure it". *Rheol. Acta*, 25,542-554.
- Costell, E.; Clemente, G. y Duran, L. (1982). Reología físico química del puré de albaricoque. II. Caracterización del flujo y relación entre los parámetros reológicos y las características químicas y físicas del producto. *Revista de Agroquímica y Tecnología de Alimentos*. 22 (1), 539-550.
- Costell, E.; Izquierdo, L. y Duran, L. (1985). Comportamiento reológico de las confituras de albaricoque. Su relación con el contenido en pulpa. *Revista de Agroquímica y Tecnología de los Alimentos*. 25 (2) ,241-249.

- Denath L. Recent (2003). Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering, Hindae Publishing Corp.
- Dolz, M.; Duran, L. (1997). Fundamentos de Reología. Los Materiales Viscoelásticos I. Universidad Menendez Pelayo, Valencia.
- Ferry, J. D. (1980). Viscoelastic Properties of Polymers, John Wiley & Sons 3a ed.
- Fizman, S. M.; Costell, E y Duran, L. (1984). Rheological behavior of agar gels on adittionos sucrose and fibre. Relaxation tests. Revista Agroquímica y Tecnología de Alimentos. 24 (2), 191-198.
- Freundlich, H. y W. Rawitzer, (1927). Influence of metals on thixotropic sols and gels, Kolloid Z. 41, 102- 104.
- Gebhard, S. A (1994). Practical Approach to Rehology a Rheometry. Chap. 4. "The Measurement of the Elastic Behavior of Visco-elastic Fluid". Haake, Federal Republic of Germany.
- Ibarz, A. (1993). Reología de productos alimentarios. Theknos. 136, 46-62.
- Ibarz, A. y Casero, T. (1987). Reología de zumos de manzana de diferente variedad. Alimentaria 185, 57-59
- Ibarz, A.; Giner, J.; Pagan, J.; Gimeno, V y Garza, S. (1995). Rheological Behaviour of Dilute Kiwi Concentrates. J. Texture Studies 26, 137-145
- Issac N., (1934). Mathematical Principies of Natural Philosophy and his System of the World, traduccion de A. Molle (1729), revisada por F. Cajori, University of California Press, USA.
- Liu J. y Xu M.,(2006). Higher-Order Fractional Constitutive Equations of Viscoelastic Materials Involving Three Different Parameters and their Relaxation and Creep Functions. Mech Time-Depend Mater, volumen 10,263-279.

- Mackley, M. R, R.T.J. Marshall, J. B. A. F. Smeulderls y F.F.Zhao, (1994). The rheological characterization of polymeric and colloidal fluids, *Chemi. Eng. Sci.*49, 2551-2565.
- Macosko, C.W. (1994). *Rheology: Principles, measurements and applicatiосn*. New York: VCH Publishers.
- Marangoni, A.G. and Rousseau, D. (1998). The Influence of Chemical Interesterification on the Physicochemical Properties of Complex Fat Systems. 3. Rheology and Fractaly. *J. Am. Oil Chem. Soc.* 75(11):1633-1636.
- Mario D.C. (2005). *Transporte de Momentum y Calor (Teoría y aplicaciones a la ingeniería de proceso)* Ediciones de la universidad de Yucatán.
- Méndez-Sanchez, A; Pérez Trejo, L; Paniagua Mercado, A; (2010). Determinación de la viscosidad de fluidos newtonianos y no newtonianos (una revisión del viscosímetro de Couette); Escuela superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Centro de asimilación Tecnológica-FESC, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuautitlán, Edo. de México.
- Meral F.C., Royston T.J., Magin R. (2010), Fractional Calculus in Viscoelasticity: An Experimental Study. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, volumen 15: 939-945.
- Moreno, R., (2005). *Reología de Suspensiones Cerámicas*. CSIC, Biblioteca de Ciencias, Madrid.
- Morozov A; Spagnolie E. S. (2014). Complex Fluids in Biological Systems, *Biological and Medical Physics, Biomedical Engineering* (1)20-23.
- Mottahedi, M., Dadalau, A., Hafla, A. & Verl, A. (2009). Numerical analysis of relaxation test based on Prony series material model. 1-10.
- Nishimoto K. (1991) *An essence of Nishimoto is Fractional Calculus*, Descartes Press Co.
- Carreau PJ. (1972), Rheological equations from molecular network theories. *Trans. Soc.*

Rheol. 16(1):99-127

Podlubny I., (1999). Fractional Differential Equations. Vol. 198 Mathematics In Sciences and engineering.

Rao, M. A. (1977). Rheology of liquids foods. A review. J. Texture Studies 8, 135-168

Rhon, C. L., (1995) Analytical polymer rheology: structure-processing-property relationships, Hanser Publisher.

Rocha M. (2003).Una breve introducción al cálculo fraccional, Laberintos e Infinitos, Número 8.

Roderic Lakes, S., (2009),Viscoelastic Materials, Capítulo 3, ISBN 978-0-521- 88568-3.

Sisko, A.W. (1958). The flow of lubricating greases. Ind. Eng Chem. 50:1789-1792.

Steffe, J.F. (1996). Rheological Methods in: "Food Process Engineering." 2nd. Ed., Freeman Press, USA.

Tung, M. A.; Richards, J. F.; Morrison, B.C. y Watson, E. L. (1970). J. Food Sci. 35, 872-874.

Van Wazer, J.R.; Lyons, J.W.; Kim, K. Y.; Corwell, R. E. (1963). Viscosity and flow measurements. John Wiler &sons (eds) Inc. New York.

Walters K. y Tanner R.I. (2005). Rheology: An Historical Perspective

Yoshimura, A. S.; Prud' Homme, R.K.; Pringen, H.M.; Kiss, A.D. (1987) "A comparison of techniques for measuring yield stresses". J. Rheol., 699-710.

Yunus A.C. and Jhon M. C. (2006). Mecánica de fluidos, Fundamentos y aplicaciones: Fluidos (pp 2-4). Mc Graw Hill.