

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

**EL PROBLEMA DE TRES CUERPOS
BAJO EL POTENCIAL DE SCHWARSZCHILD**

Presenta

JOHN ALEXANDER ARREDONDO GARCÍA
para la obtención del título de
DOCTOR EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

Asesor

Dr. ERNESTO PÉREZ-CHAVELA

24 de Junio de 2013

Miembros del Jurado

Dr. Martin Celli UAM-I
Dra. Lidia Jimenez UAM-I
Dr. Jesus Muciño CCM-UNAM
Dr. Ernesto Pérez-Chavela UAM-I
Dra. Cristina Stoica Wilfrid Laurier University

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA División de Ciencias Básicas e Ingeniería

*Dedicado a todos mis maestros,
a quienes espero igualar
y superar algún día.*

Agradecimientos

Quisiera empezar agradeciendo a todo el pueblo de México por los años tan maravillosos que he pasado en este hermoso país y por la gran hospitalidad con la que siempre y en todo lugar fui tratado. En particular, quisiera hacer una especial mención y hacerles llegar un grato agradecimiento a las siguientes personas que puntualmente marcaron el desarrollo de mi trabajo.

- Al *CONACYT*, por haberme otorgado la beca número 222279 para realizar mis estudios de doctorado y por apoyarme con la beca mixta para realizar una estancia de investigación en Canadá.
- A la *UAM-Iztapalapa*, por haberme dado la oportunidad de ingresar al programa de doctorado en matemáticas y brindarme todo lo necesario para desarrollar mis estudios.
- A mi asesor el *Dr. Ernesto Pérez-Chavela*, por haberme guiado en el proceso que culmina con esta tesis, por haber creído en mí y ayudarme a llegar a México a realizar mis estudios de posgrado, por todas las matemáticas que aprendí y sigo aprendiendo a su lado y por todas las experiencias personales que me deja. Estaré infinitamente agradecido para el resto de mi vida.
- A la *Dr. Cristina Stoica*, por haberme acogido en Canadá, por todas las largas noches que discutimos acerca de mi problema de tesis y por todos los buenos consejos matemáticos y personales que me dio.
- A los profesores *Dr. Martin Celli*, *Dr. Antonio Hernández* y a la *Dr. Shirley Bromberg* quien fue mi primer profesora en el posgrado y podría decir que mi primer profesor de matemáticas. A ellos les agradezco especialmente por que disfrute sus clases y fueron mi fuente continua de consulta durante mi doctorado. Algo de cada uno de ellos esta reflejado en mi trabajo.

- A mi familia que a la distancia y sin comprender mucho lo que hago, siempre me enviaron sus bendiciones y estuvieron continuamente preocupados por mi.
- A los miembros del jurado evaluador de mi tesis, a quienes agradezco el tiempo que dedicaron a leer este documento, las discusiones que sostuvieron conmigo y que me hicieron mejorar la presentación de mis resultados.
- Por último quiero mencionar y agradecer a la única persona que conoce todo el esfuerzo que puse en sacar adelante mi doctorado, que estuvo a mi lado durante estos cinco años, quien compartió mis momentos de alegría, frustración, ira y emoción. Quien fue mi ayuda constante para solucionar mis problemas con Latex y quien hasta última hora estuvo corrigiendo mis errores ortográficos, mi esposa *Claudia Tamayo* con quien he pasado, estos, los mejores años de mi vida.

Índice general

Lista de figuras	VIII
Lista de tablas	IX
Introducción	1
1. Antecedentes	8
1.1. El problema de los n -cuerpos.	8
1.2. Configuraciones centrales.	10
1.3. Colisiones en el problema de los n -cuerpos.	13
1.4. Potenciales cuasihomogéneos.	14
1.5. El potencial de Schwarzschild.	17
2. Configuraciones centrales planas	21
2.1. Ecuaciones de movimiento.	21
2.2. Configuraciones centrales no-colineales.	23
2.2.1. Caso I: tres masas iguales.	25
2.2.2. Caso II: dos masas iguales.	30
2.2.3. Caso III: tres masas distintas.	37
2.2.4. Caso IV: constantes positivas.	41
2.3. Configuraciones centrales colineales.	43
2.4. Potenciales cuasihomogéneos.	47
3. El problema isósceles	51
3.1. Ecuaciones de movimiento.	51
3.2. Equilibrios relativos.	54
3.2.1. Diagrama energía-momentum.	57
3.3. Variedad de colisión.	58
3.3.1. Nuevas coordenadas.	58
3.3.2. Las funciones potenciales $V(\theta)$ y $W(\theta)$	60

3.3.3.	Ecuaciones de movimiento regularizadas y la variedad de colisión.	61
3.3.4.	Equilibrios sobre la variedad de colisión.	65
3.3.5.	Comportamiento de las órbitas sobre la variedad de colisión.	68
3.4.	Comportamiento del flujo global.	72
3.4.1.	Soluciones homográficas.	73
3.4.2.	Órbitas heteroclínicas.	77
3.4.3.	Órbitas cerca a colisión y aspectos del flujo global. . . .	81
4.	Conclusiones	87
4.1.	Configuraciones centrales.	87
4.2.	El problema isósceles.	89
4.2.1.	Proposición 4.	90
4.2.2.	Conexiones heteroclínicas.	91
4.2.3.	Comportamiento del flujo global.	91
4.2.4.	Órbitas cerca de colisión.	92
5.	Perspectivas de investigación.	94
5.1.	Estabilidad de los equilibrios relativos.	94
5.2.	El problema isósceles con fuerzas atractivas y repulsivas. . . .	96
5.3.	Colisiones en el plano.	97
5.4.	Bifurcaciones para el potencial $r^{-\alpha}$	98
5.5.	Otros modelos de problemas isósceles.	99
	Bibliografía	106

Índice de figuras

1.1.	<i>Solución periódica de Euler para el problema de los tres cuerpos.</i>	11
1.2.	<i>Solución periódica de Lagrange para el problema de los tres cuerpos.</i>	12
2.1.	<i>Gráfica de la función $f(x) = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^5}$.</i>	27
2.2.	<i>Comportamiento del momento de inercia en el caso particular en que $f(x) = 10/x^3 - 2/x^5$. La curva ascendente corresponde a soluciones equiláteras del tipo (2.16), la curva entre I_2 y I_4 corresponde a soluciones isósceles del tipo (2.17), la siguiente curva corresponde a soluciones isósceles del tipo (2.18) y la curva superior corresponde a soluciones equiláteras del tipo (2.19)</i>	28
2.3.	<i>Gráfica de $f(x)$ y $g(x)$ para dos masas iguales</i>	31
2.4.	<i>Comportamiento del momento de inercia para el caso de dos masas iguales, tomando $A = 10$, $B = 2$ y $k = 2$.</i>	32
2.5.	<i>Comportamiento del momento de inercia para el caso en que dos de las masas son mas grandes que la tercera, , tomamos $A = 10$, $B = 2$ y $k = 1/2$.</i>	35
2.6.	<i>Comportamiento del sistema de tres masas diferentes con constantes diferentes A_i y B_i, $f(x) = 10/x^3 - 2/x^5$, $g(x) = 20/x^3 - 4/x^5$ y $h(x) = 30/x^3 - 6/x^5$.</i>	37
2.7.	<i>Comportamiento del momento de inercia en el caso en que tres masas son diferentes.</i>	38
2.8.	<i>Comportamiento de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ cuando las tres masas son iguales.</i>	42
2.9.	<i>Comportamiento de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ cuando dos masas son iguales.</i>	42
2.10.	<i>Comportamiento de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ cuando las tres masas son diferentes.</i>	43
2.11.	<i>Configuración Colineal con tres masa distintas.</i>	43

2.12. Gráfica de la función $f(x) = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$ con $\alpha > \beta$, $A > 0$ y $B < 0$	48
2.13. Comportamiento del momento de inercia para $f(x) = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$ con $\alpha > \beta$, $A > 0$ y $B < 0$	49
3.1. Problema de tres cuerpos isósceles en el espacio. El centro de masa de las tres partículas está fijo en el origen. Tomando O como el centro de masa de las partículas con masa M , se define el sistema en coordenadas de Jacobi con los vectores r_1 y r_2	52
3.2. Gráfica genérica del mapeo momentum energía (donde $C > 0$). La línea azul corresponde a los equilibrio relativos $(R_1, 0)$, mientras que la línea punteada corresponde a los equilibrios relativos $(R_2, 0)$	58
3.3. A la izquierda se muestran las funciones $V(\theta)$ y $W(\theta)$, en el caso genérico sus puntos críticos distintos de cero no coinciden. A la derecha se muestra la función $U(\theta) = W(\theta) \cos^3 \theta$	61
3.4. La variedad de colisión. El flujo es casi-gradiente respecto a $-v$ y los conjuntos \mathcal{B}_\pm , son invariantes.	64
3.5. El dominio \mathcal{D} de la EDO (3.42) es acotando por $ \theta < \pi/2$ y $ v < \sqrt{2W(\theta)}$. La solución $v_1(\theta)$ pasa por $(0, 0)$ su pendiente está por encima de la pendiente del segmento $E_-E_+^*$. La solución $\tilde{v}(\theta)$, que asintóticamente inicia en E_- , siempre va encima de $v_1(\theta)$	72
3.6. Comportamiento de $f(r)$ para valores de energía $h < 0$, en esta gráfica $k_1 = V(0)$ y $k_2 = U(0)$	78
3.7. Curvas solución de la ecuación (3.71) con momento angular $0 < C < C_0$. Para $h < 0$ todas las órbitas son cerradas, para $h = 0$ las órbitas son parábolas y para $h > 0$ son funciones cúbicas.	79
3.8. Comportamiento de $f(r)$ para valores de energía $h < 0$ y $C > C_0$	79
3.9. Curvas solución de la ecuación (3.71) con momento angular $C > C_0$ y $h < 0$. Los puntos de equilibrio R_1 y R_2 representan órbitas periódicas del flujo original.	80
3.10. Curvas solución de la ecuación (3.71) con momento angular $C \neq 0$ y $h \geq 0$	81
4.1. Flujo sobre la variedad de colisión para el potencial Newtoniano y el potencial de Manev.	90
5.1. la superficie de masa critica $\mu_{cr} = \mu_{cr}(J^{(1)}, J^{(2)})$,.	97

-
- 5.2. *Las partículas permanecen en una configuración isósceles en el plano que las contiene, junto con el vector cero. Cuando $C = 0$ las partículas van a colisión frontal o se escapan en trayectorias rectilíneas. 100*
- 5.3. *Las partículas permanecen en una configuración isósceles en un plano que no es fijo y oscila con el movimiento de las masas m . . . 100*

Índice de cuadros

2.1. <i>Número total de equilibrios relativos respecto del momento de inercia.</i>	30
2.2. <i>Número total de equilibrios relativos respecto del momento de inercia para dos masas mas pequeñas que la tercera.</i>	34
2.3. <i>Número total de equilibrios relativos respecto al momento de inercia para dos masas mas grandes que la tercera.</i>	36
2.4. <i>Número total de equilibrios relativos respecto al momento de inercia para tres masa diferentes.</i>	41

Introducción

Para realizar una descripción precisa de la dinámica de algunos cuerpos celestes, como por ejemplo, sistemas solares, cuásars, galaxias y agujeros negros, los cuales son ampliamente estudiados en astrofísica, astrodinámica, cosmología y mecánica celeste, lo ideal sería enmarcar su estudio en la teoría física que mejor describe tales objetos, la *relatividad general*. Desafortunadamente en este contexto las ecuaciones son muy complicadas, aún en el caso más sencillo en el que se considera el problema de *Kepler*, solo se conocen soluciones analíticas para casos particulares [52], por lo que en general se debe recurrir a soluciones numéricas [2].

Como contraparte al marco de la relatividad general, tenemos la mecánica clásica, la cual es válida cuando las velocidades que se consideran son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. En este marco, que simplemente llamaremos clásico, el problema de Kepler se puede resolver completamente [30], y las ecuaciones tienen un nivel de complejidad menor que en la relatividad general. Desafortunadamente, aunque dichas ecuaciones predicen con gran exactitud movimientos planetarios y órbitas de cometas, entre otros, fallan al describir fenómenos como la precesión del perihelio de Mercurio [22], y no se pueden aplicar para describir la dinámica de cuerpos muy masivos como los agujeros negros.

Por lo tanto, un camino para superar estos obstáculos es hacer una descripción clásica de un cierto problema, introduciendo algunos elementos provenientes de la relatividad general, que enriquezcan este modelo y permitan encontrar argumentos analíticos, que brinden una descripción acorde con las observaciones experimentales. Este espíritu que se ha aplicado previamente, será el propósito de esta tesis.

* * *

Las ecuaciones de *Einstein* a diferencia de las de *Newton*, donde la gravedad es una fuerza, son ecuaciones de campo, es decir que la presencia de una masa altera la curvatura del espacio-tiempo [48], las soluciones de las ecuaciones de la relatividad general en este sentido, son aquellas que describen

los cambios en la métrica del espacio-tiempo tetradimensional. La primera solución de este tipo es conocida desde 1917, ella es la *métrica de Schwarzschild* [49], la cual se obtiene de considerar el campo gravitacional generado por un objeto masivo con simetría esférica sin rotación, y permite describir el movimiento de una partícula bajo la influencia de dicho campo, en otras palabras, la métrica de Schwarzschild, es la solución del problema de Kepler en relatividad general.

Durante el resto de este documento, lo que nos va a interesar de la métrica de Schwarzschild, es que se le puede asociar una función potencial, dada por la expresión:

$$U(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^3}, \quad (1)$$

dicha función resulta ser el potencial de la mecánica *Newtoniana* para un problema de dos cuerpos, más un término adicional que debido a su procedencia, se denomina término de corrección relativista. En esta expresión, r es la distancia entre las dos partículas y las constantes A y B están relacionadas con las características físicas de los cuerpos. Los detalles de la obtención de (1) a partir de la métrica de Schwarzschild, se pueden consultar en [43].

Este tipo de potencial, que a lo largo de este trabajo llamaremos *potencial de Schwarzschild*, ha sido utilizado previamente por varios autores como Mioc, Stoica, Stravinsky entre otros (ver [53, 31]). En sus trabajos se introduce como un modelo para una gran variedad de problemas en astrofísica y cosmología, como por ejemplo:

- Considerando $A > 0$, $B > 0$ se obtiene un modelo para el Sistema Solar encajado en un universo en expansión y un modelo para la interacción de cuerpos masivos y oblatos.
- Para $A > 0$, $B < 0$ un modelo del movimiento en el plano ecuatorial de cuerpos prolatos y del campo fotogravitacional del sol.
- Para $A < 0$ se obtiene un caso particular del problema fotogravitacional.

Adicionalmente una de las características más interesantes de este potencial es el llamado *efecto de hoyo negro* [17, 53], el cual hace referencia a colisiones de los cuerpos con momento angular distinto de cero. Algo que es completamente opuesto al caso *Newtoniano*, donde para el problema de los n -cuerpos cualquier tipo de colisión ocurre con momento angular igual a cero.

En el marco clásico, concretamente dentro la mecánica celeste, el estudio de las interacciones de n cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild, se pueden ver como un caso particular de una familia de potenciales denominados

cuasihomogéneos, donde un potencial cuasihomogéneo, es una función de la forma

$$U(r) = \frac{A}{r^\alpha} + \frac{B}{r^\beta}, \quad (2)$$

donde A , B , α y β son constantes. Los principales autores que han realizado contribuciones en este sentido son *Diacu, Mioc, Pérez-Chavela, Santoprete y Stoica* entre otros. En la sección 1.4 haremos una breve reseña de sus principales aportes y presentaremos los ejemplos más conocidos y estudiados de este tipo de potenciales .

* * *

Hasta donde tenemos conocimiento, el potencial de Schwarzschild sólo se ha estudiado en el caso de un problema de dos cuerpos, y el estudio de los potenciales cuasihomogéneos, también se ha llevado a cabo en sistemas de baja configuración. En este documento presentamos un análisis del problema de tres cuerpos, en el marco clásico, pero considerando que la interacción entre las masas, esta dada por el potencial de Schwarzschild, por lo tanto, los resultados que presentaremos en adelante corresponden a los primeros para un sistema de tres cuerpos, algunos de los cuales, generalizamos para potenciales cuasihomogéneos

El aporte original de esta tesis esta dividido en dos partes. En el *capítulo dos*, consideraremos tres partículas que se mueven en el plano. A partir de las ecuaciones de movimientos estudiaremos sus *configuraciones centrales*, es decir, configuraciones de los cuerpos donde los vectores de posición y aceleración de cada partícula son proporcionales con la misma constante de proporcionalidad. Estas configuraciones son invariantes bajo rotaciones, por lo tanto, cada configuración central, tendrá asociada una solución de *equilibrio relativo* del problema, es decir, una órbita periódica donde las partículas se mueven como si formaran un cuerpo rígido. En contraste con el caso Newtoniano, la corrección relativista del potencial de Schwarzschild, induce la existencia de configuraciones centrales isósceles y escalenas. Estos resultados se encuentran publicados en [6], adicionalmente a ello, en la tesis hemos generalizado dichos resultados para el caso en el que la interacción entre las tres partículas, esta dada por un potencial de la forma (2).

En el *Capítulo tres*, consideraremos tres partículas en el espacio, restringidas a mantener una configuración de triángulo isósceles, donde únicamente consideramos el caso en el que las constantes A y B del potencial de Schwarzschild son positivas. Empleamos una transformación de coordenadas apropiada para regularizar y analizar el comportamiento del flujo cerca a colisión triple. Demostramos que, en contraste con el caso Newtoniano, en

cualquier nivel de energía, la medida del conjunto de condiciones iniciales que conducen a colisión triple es positivo. Además, mientras que en el problema Newtoniano, la colisión triple se alcanza asintóticamente únicamente para momento angular cero, con el potencial de Schwarzschild, la colisión triple es posible para momento angular total distinto de cero, que corresponde al efecto de hoyo negro, en el contexto clásico, un símil del comportamiento cerca de un agujero negro de Schwarzschild. También, mientras que en el problema Newtoniano, todas las órbitas de colisión triple son necesariamente homográficas (de hecho, homotéticas), en el problema con el potencial de Schwarzschild, se observan órbitas de colisión triple que no son homográficas, en particular, que existen configuraciones geométricas asintóticas a una colisión triple, que no corresponden a configuraciones centrales. Estos resultados se encuentran en un artículo que al momento se encuentra en revisión.

* * *

El bosquejo específico del presente documento, corresponde a los cinco capítulos que lo componen. El capítulo uno corresponde a los antecedentes del problema, donde hemos incluido una breve descripción de los conceptos básicos que se manejarán en el resto del documento, una breve reseña de los principales autores, así como de sus principales contribuciones en el tema que estaremos desarrollando y una descripción detallada del potencial de Schwarzschild. Como se dijo anteriormente, los capítulos dos y tres son el cuerpo principal de la tesis, a su descripción detallada dedicaremos los párrafos siguientes. Para finalizar la presentación de este trabajo, en el capítulo cuatro resaltamos las contribuciones más importantes que se han obtenido a lo largo de nuestra investigación y en el capítulo cinco, presentamos algunos proyectos que han surgido a partir de la misma, y los cuales consideramos, serían el siguiente paso a seguir dentro de la investigación que hemos abordado.

Secuencialmente los principales aspectos que se presentarán a lo largo del capítulo dos son los siguientes:

- En la sección 2.1 introducimos el problema de tres cuerpos en el plano, interactuando bajo el potencial de Schwarzschild. Presentamos las generalidades respectivas a las configuraciones centrales y los equilibrios relativos.
- En las secciones 2.2.1 a 2.2.3, encontramos las configuraciones centrales no colineales para el caso $A > 0$ y $B < 0$. Dividimos nuestro estudio de acuerdo a los valores de las masas, tomando tres masas iguales, dos masas iguales y tres masas distintas. En cada caso, parametrizamos las

configuraciones centrales con el momento de inercia, hallamos los valores de bifurcación determinados al verificar la validez de la desigualdad triangular, y hacemos una clasificación final del número total de configuraciones centrales de acuerdo al tamaño del sistema. Para este caso (y en contraste con el caso clásico), la forma geométrica de los triángulos asociados a las configuraciones centrales, sí depende del valor de las masas (ver teoremas 2, 3 y 4).

- En la sección 2.2.4, llevamos a cabo el análisis anterior en el caso en el que las constantes, A y B , tienen el mismo signo. De nuevo la forma geométrica de los triángulos asociados a las configuraciones centrales, depende del valor de las masas (ver teorema 5).
- En la sección 2.3, realizamos el análisis de las configuraciones centrales colineales. Para el caso $A > 0$, $B < 0$, el número de configuraciones colineales corresponde exactamente con el número de configuraciones planas, que bifurcan en una colineal (ver teorema 7). Para $A > 0$, $B > 0$, nuestro resultado es un caso particular, de un teorema conocido para potenciales cuasihomogéneos, que de echo es la generalización del teorema de Moulton.
- En la sección 2.4, extendemos la mayor parte de nuestros resultados sobre configuraciones centrales de tres cuerpos, con el potencial de Schwarzschild, para el caso más general de un potencial cuasihomogéneo.

En el capítulo tres consideraremos que las tres partículas preservan una configuración de triángulo isósceles, es decir, dos partículas de igual masa M se mueven equidistantes respecto a su centro de masa en un plano horizontal y una tercer partícula de masa m esta restringida a moverse sobre la recta perpendicular al origen del plano que contiene las masas iguales. Secuencialmente los principales aspectos que se presentarán a lo largo del capítulo son los siguientes:

- En la sección 3.1, introducimos el problema y realizamos algunos cambios de coordenadas, para situarnos en un marco donde modelamos el sistema por medio de un Hamiltoniano con dos grados de libertad.
- En la sección 3.2, encontramos las soluciones de equilibrio relativo y su estabilidad, las cuales están dadas en términos del momento angular, *i.e.* existe un valor constante C_0 del momento angular donde el sistema tiene un único equilibrio relativo, en el que la masa m está situada en el origen y las masas M están a una distancia R_0 . Este equilibrio es degenerado, espectralmente estable. Si el momento angular $C > C_0$,

entonces hay dos equilibrios relativos con la masa m en el origen y las masas M a una distancia R . Uno de los equilibrios es no-linealmente estable y el otro es inestable.

- En la sección 3.3.1, para analizar las órbitas cercanas a colisión, regularizamos las singularidades debidas a colisiones dobles y triples de las partículas. Para esto hacemos algunos cambios de coordenadas y parametrizaciones del tiempo, siguiendo la técnica de McGehee [24]. Con esto obtenemos un sistema analítico donde los puntos correspondientes a colisiones dobles y triples están bien definidos (ver sistema (3.31)).
- En la sección 3.3.3, restringiendo la relación de energía al caso en que se da la colisión triple, se define una variedad invariante, llamada *variedad de colisión*. Por el teorema de *continuidad respecto a condiciones iniciales*, esta variedad provee información acerca de las órbitas que pasan cerca de colisión doble y triple. Por lo tanto, estudiamos el campo vectorial analítico que hemos obtenido restringido a la variedad de colisión, y encontramos como principales características que el flujo sobre la variedad de colisión es *casi-gradiente* y que los conjuntos correspondientes a colisiones dobles de las masas M son *variedades invariantes* (ver proposiciones 3 y 4).
- En la sección 3.3.4, analizamos los equilibrios relativos del campo vectorial sobre la variedad de colisión; una fuente espiral, un sumidero espiral y cuatro puntos silla. Tres de estos puntos corresponden a órbitas de expulsión y tres a órbitas de colisión. Describimos las variedades estables e inestables de estos equilibrios, con lo cual deducimos que para cada nivel de energía, el conjunto de condiciones iniciales, para los que se sale o se llega, a colisión triple, tiene medida de Lebesgue positiva. También realizamos una primer exploración, sobre las posibles conexiones entre estos puntos por medio del flujo sobre la variedad de colisión.
- En la sección 3.4, para conectar la información del flujo sobre la variedad de colisión y el flujo global, investigamos las configuraciones centrales, e implícitamente, las soluciones *homográficas*. Encontramos que las únicas configuraciones centrales, corresponden a soluciones del campo vectorial en el que las tres masas son colineales, con la masa m ubicada en el origen. En este caso el plano que contiene las tres masas es invariante.
- Finalmente en la sección 3.4.3, analizamos los aspectos cualitativos de las órbitas que se aproximan a colisión doble o triple. Encontramos que

existen configuraciones triangulares de las tres masas, aproximándose a colisión triple, que no están asociadas a una solución homográfica. Hasta donde tenemos conocimiento, esta es la primera vez que se observa tal fenómeno, y contrasta con el caso clásico en el que las órbitas que van a colisión triple, lo hacen formando una configuración central. Como último y principal aporte demostramos, que para momento angular distinto de cero, las tres masas siguen un movimiento que corresponde al efecto de hoyo negro.

Capítulo 1

Antecedentes

El objetivo de este capítulo es presentar una muy breve reseña de los conceptos básicos sobre los que se fundamenta este trabajo. El marco general será el de la mecánica celeste, la cual nace con la publicación de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* por *Isaac Newton* en 1687, donde por primera vez se consideran los movimientos de los objetos en el universo, bajo una formulación en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales, teniendo como modelo principal la ley de atracción universal de Newton, que establece que la atracción entre dos cuerpos celestes es proporcional al producto de sus masas y está en razón inversa del cuadrado de su distancia, donde además se considera a cualquier cuerpo como una masa puntual.

1.1. El problema de los n-cuerpos.

El objetivo principal de la mecánica celeste es el estudio del conocido problema de los n -cuerpos, el cual consiste en describir el movimiento de n masas puntuales que interactúan mutuamente sometidas únicamente a la fuerza gravitacional. Las ecuaciones que describen este problema están dadas por:

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n G \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|^3} (q_j - q_i), \quad (1.1)$$

donde las m_i son las masas de cada cuerpo, las $q_i \in \mathbb{R}^3$ son las posiciones y G es la constante de gravitación universal de Newton. Este sistema de ecuaciones se encuentra definido en $(\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta)$ donde Δ representa el conjunto de singularidades dado por

$$\Delta = \{(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid q_i = q_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (1.2)$$

el cual incluye las singularidades debidas a colisión de las partículas, y aquellas que corresponden a escapes de alguno de los cuerpos, en tiempo finito (teorema de *Painleve* [41]). Este problema se puede resolver de manera explícita para $n = 2$ y dicha solución, dependiendo de las condiciones iniciales corresponderá a una cónica, cuya expresión en coordenadas polares se escribe como

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (1.3)$$

donde p representa el parámetro de la cónica y e es la excentricidad. Para $n \geq 3$ encontrar una solución explícita es un problema abierto y solo se conocen algunos tipos de soluciones particulares que describiremos mas adelante. El problema de los n -cuerpos admite una formulación Hamiltoniana, cuyo Hamiltoniano esta dado por la función

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{q} - U(\mathbf{q}), \quad (1.4)$$

donde el vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n}$ representa las posiciones de los n cuerpos, el vector \mathbf{p} representa los momentos, $M \in M_{3n \times 3n}$ es la matriz de masas $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$ y $U(\mathbf{q})$ es la función de potencial o potencial *Newtoniano* dado por

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{i=1, i \neq j}^n G \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}. \quad (1.5)$$

Bajo la formulación anterior el problema de los n -cuerpos es un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, y su completa solución requiere $6n - 1$ integrales independientes del tiempo y una integral dependiente del tiempo. Al respecto es bien conocido, que para cualquier sistema de n -cuerpos, solo se conocen *diez* integrales de este tipo, las cuales se conocen como *integrales de movimiento* o *integrales primeras*.

Dichas integrales primeras corresponden a las tres componentes del *momento angular total*, las tres componentes del *momento lineal total*, las tres componentes del *centro de masa* del sistema y la *energía del sistema* que es una cantidad escalar (una demostración formal se puede consultar en [30].) Las integrales de movimiento dan información global acerca de las soluciones generales del sistema, como por ejemplo:

- Fijando un valor de energía se obtiene una subvariedad de codimensión uno del espacio fase, por lo tanto una condición inicial con dicho valor de la constante de energía fijo, permanecerá en aquella variedad para todo tiempo.

- Si la variedad correspondiente a una de las integrales tiene una componente compacta, entonces deben existir soluciones acotadas.
- Fijando a un valor constante todas las integrales conocidas, se obtienen diez superficies y una trayectoria, cuyas condiciones iniciales pertenecientes a dichas superficies, estarán en la intersección de las diez variedades durante todo tiempo, esto reduce los grados de libertad del problema. Si consideramos un problema de n -cuerpos, en el que la intersección de las diez integrales es uno dimensional, entonces, dicha intersección corresponde a la trayectoria del sistema.

El Hamiltoniano descrito anteriormente corresponde a la energía total del sistema, por lo tanto, nos solemos referir a la energía o al Hamiltoniano, como una primera integral de movimiento.

1.2. Configuraciones centrales.

En el problema de los n -cuerpos las configuraciones centrales son posiciones particulares x_1, x_2, \dots, x_n de las n partículas, donde el vector de posición y el vector de aceleración de cada partícula son proporcionales, y la constante de proporcionalidad es la misma para los n -cuerpos; en términos matemáticos esto se escribe como:

Definición 1. *Una configuración de n -partículas que interactúan bajo la acción del potencial Newtoniano, que satisfacen la relación*

$$\lambda q_i = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (1.6)$$

donde λ es una función escalar que es la misma para todas las partículas, es una configuración central.

Debido a sus diversas aplicaciones, estudiar esta clase de configuraciones se ha convertido en una rama independiente dentro del problema de los n -cuerpos, donde muchos de sus principales aspectos están intrínsecamente relacionados con dichas configuraciones. Por ejemplo, en el caso en el que todas las partículas están restringidas a moverse en un plano, cada configuración central da origen a una solución que es una órbita periódica. Dichas soluciones tienen una gran connotación histórica y se definen de la siguiente manera.

Definición 2. *Decimos que una solución $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ es homográfica, si existe una función escalar $\nu(t)$ y una matriz de rotación $R(\omega t)$,*

con ω constante, tal que, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y para todo tiempo t , se tiene $q_i(t) = \nu(t)R(\omega t)x_i$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ define una configuración central. Además, si $R(\omega t)$ es la matriz identidad, la solución $\mathbf{q}(t)$ se llama homotética, y si la función $\nu(t)$ es la identidad, la solución $\mathbf{q}(t)$ se llama un equilibrio relativo.

En las soluciones llamadas equilibrios relativos, el sistema de n -partículas rota alrededor del centro de masa como si se tratara de un cuerpo rígido, las distancias mutuas permanecen constantes y cada partícula se mueve en una órbita idéntica. El nombre de equilibrio relativo, viene del hecho de que si el sistema de referencia se hace rotar alrededor del centro de masa, entonces en el nuevo sistema, las partículas permanecen en equilibrio o reposo. En este tipo de soluciones una condición necesaria sobre las n -partículas es que deben ser coplanares.

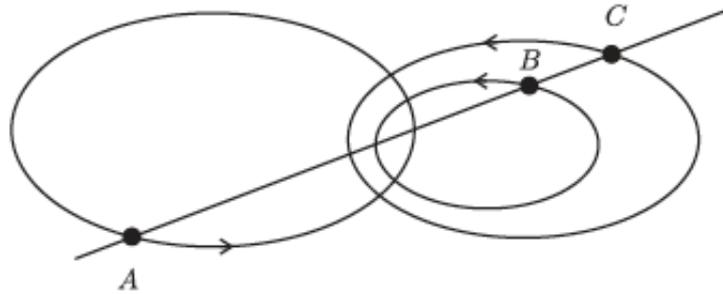


Figura 1.1: Solución periódica de Euler para el problema de los tres cuerpos.

Las primeras configuraciones centrales fueron encontradas por *Leonard Euler* para el problema de los tres cuerpos, en dicha configuración, si para las tres partículas, las posiciones y velocidades iniciales son escogidas adecuadamente, entonces cada partícula se moverá periódicamente sobre una elipse formando la solución *homográfica*, es decir, en todo momento las tres partículas se mantendrán sobre una línea recta, conservando siempre la misma razón entre sus distancias.

Partiendo del trabajo de *Euler*, *Lagrange* encontró otro grupo de órbitas periódicas para el mismo problema, en las que las tres masas se encuentran sobre los vértices de un triángulo equilátero, donde por supuesto, hay que escoger adecuadamente las velocidades iniciales. De nuevo cada partícula se mueve sobre una órbita elíptica y en todo momento la configuración es de triángulo equilátero. Dichas soluciones se conocen hoy en día como las soluciones *homográficas de Euler-Lagrange*. En nuestro sistema solar tales equilibrios se han calculado explícitamente para sistemas como Sol-Tierra-

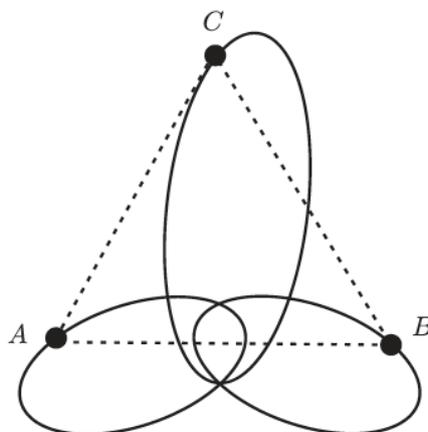


Figura 1.2: *Solución periódica de Lagrange para el problema de los tres cuerpos.*

Júpiter o Sol-Tierra-Luna, corroborando en cada caso la existencia de estos puntos especiales.

Otra importante aplicación se da en el estudio de las colisiones. Consideremos que todas las partículas del sistema, colisionan en el centro de masa a tiempo $t = 0$, bajo esta suposición se puede pensar que el movimiento de las partículas es de la forma $q_i = A_i t^\alpha$ (ver [45]), llevando esta hipótesis a las ecuaciones de movimiento, se encuentra que los vectores constantes A_i deben satisfacer la ecuación (1.6), es decir, cuando todas las partículas se aproximan a colisión, lo hacen formando una configuración central. De hecho, esto es cierto y fue detalladamente probado por *Saari* [46], para la colisión total de n partículas. Esta última idea funciona también cuando vemos la dirección opuesta, es decir, cuando analizamos el comportamiento para $t \rightarrow \infty$, en este caso, también se ha probado que en un modelo expansionista, de por ejemplo las galaxias, dicho movimiento se hace siguiendo una configuración central [45]. Por estas interesantes aplicaciones y el grado de dificultad del problema, el estudio de las configuraciones centrales, ha sido incluido por *Stephen Smale* [50], en la lista de los grandes problemas a resolver durante este siglo.

- Problema 6: (Finitud del número de equilibrios relativos en mecánica celeste) dados los números reales positivos m_1, \dots, m_n que representan las masas en el problema de n -cuerpos, ¿es finito el número de equilibrios relativos?.

A este respecto debemos mencionar el estado del arte, para enfatizar la importancia y a su vez la dificultad del problema. Empecemos por mencionar que existe un caso para el cual, la finitud del número de equilibrios relativos

ha sido resuelto, dicho resultado se conoce como el *teorema de Moulton*, enunciado como sigue

Teorema 1. *En el problema de los n -cuerpos con masas positivas, existen $n!/2$ configuraciones centrales colineales. Más precisamente, por cada orden de las partículas a lo largo de una línea, hay una posición única que es una configuración central*

El teorema de Moulton fue publicado en 1910 [40], y por casi cien años junto con los equilibrios de *Euler-Lagrange*, fueron los únicos resultado acerca de configuraciones centrales. En 2006 *R. Moeckel y M. Hampton* [39], probaron la finitud de los equilibrios relativos para el caso de cuatro masas en el plano, y en 2012 *Albouy y Kaloshin* [1] mostraron lo propio para cinco masas en el plano. Existen algunos otros resultados particulares donde se considera a todas las masas involucradas iguales o donde se parte de una configuración fija. Pero hasta el momento la respuesta definitiva al *problema 6* de *Smale*, parece aún lejana.

1.3. Colisiones en el problema de los n -cuerpos.

Para el sistema de ecuaciones (1.1), por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, se sabe que por cada punto $(r(0), p(0)) \in (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n}$, existe una única solución definida para todo tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq \beta$, donde β es maximal. Con esto tenemos la siguiente definición.

Definición 3. *Si $\beta < \infty$, decimos que la solución $r(t)$ tiene una singularidad en β .*

Para el caso de tres cuerpos toda singularidad corresponde a una colisión de al menos dos de las partículas, por lo tanto tendremos que si una solución $q(t)$ del problema de tres cuerpos tiene una singularidad en β , entonces $q(t) \rightarrow \Delta$ cuando $t \rightarrow \beta$.

Existen muchas técnicas para regularizar las colisiones dobles que en general se tratan como choques elásticos de las partículas, con lo que se hace una continuación de la solución previa al instante de la colisión. Para el caso de tres cuerpos la colisión total, dada por el choque simultaneo de los tres cuerpos se estudia mediante la técnica conocida como *blow-up*, la cual fue introducida por *Richard McGhee* en [24], pero de la cual por su importancia y aplicación en cualquier problema en el que se consideren colisiones, se puede encontrar una detallada referencia en casi cualquier texto moderno de ecuaciones diferenciales ordinarias, que incluya problemas de n -cuerpos

o sistemas Hamiltonianos (*por ejemplo ver* [4], [30]). En términos generales, ésta técnica consiste en primero restringir las ecuaciones de movimiento a un nivel de energía fijo, en el cual se hace una explosión alrededor de la singularidad, la cual consiste en introducir coordenadas polares en el espacio de configuración y después descomponer la velocidad en una componente radial y otra tangencial; posteriormente el campo vectorial que se ha obtenido se multiplica por un factor adecuado, que frena las partículas para que de esta forma, después de una reparametrización del tiempo, las partículas alcancen la colisión triple en tiempo infinito. De esta forma se obtiene un campo vectorial analítico definido en una variedad con frontera, la cual se conoce como la variedad de colisión. Para el problema que se presenta en este trabajo los detalles matemáticos para la construcción de la variedad de colisión, usando la técnica de McGhee se desarrollan en la sección 3.3.1, donde se darán todos los detalles al respecto. En su trabajo original, McGhee demostró que esta frontera es independiente del valor de energía escogido. La variedad de colisión por haber inducido una reparametrización en el tiempo, es ficticia respecto del tiempo real en el que inicialmente se describía el movimiento de las partículas, pero en las nuevas coordenadas, el flujo se proyecta sobre ella de manera suave, esto permite aplicar el teorema de continuidad con respecto a condiciones iniciales. De esta forma, podemos analizar las órbitas que van a colisión triple y las que están cerca de ella.

1.4. Potenciales cuasihomogéneos.

El potencial *Newtoniano* dado por la expresión (1.5), es un ejemplo de una función homogénea de grado -1 . Si la función potencial que determina el tipo de interacción entre las partículas es de la forma

$$U(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}) + W(\mathbf{q}), \quad (1.7)$$

donde $V(\mathbf{q})$ y $W(\mathbf{q})$ son funciones homogéneas de grados $-a$ y $-b$, con $0 \leq a \leq b$, decimos que $U(\mathbf{q})$ es una función *cuasihomogénea* o que es un potencial *cuasihomogéneo*. Son bien conocidos dentro de la literatura científica algunos potenciales de este tipo, como por ejemplo:

- el potencial de Lenard-Jones dado por la expresión

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{|q_i - q_j|^6} - \frac{1}{|q_i - q_j|^{12}},$$

el cual modela la dinámica de un par de átomos o moléculas neutros, sujetos a dos fuerzas distintas, una fuerza atractiva que actúa a grandes

distancias (una fuerza de Van Der Waals, o una fuerza de dispersión) y una fuerza repulsiva actuando en pequeñas distancias.

- El potencial de Manev de la forma

$$U(\mathbf{q}) = \frac{A}{|q_i - q_j|} + \frac{B}{|q_i - q_j|^2},$$

el cual fue el primer modelo que se propuso como corrección al potencial Newtoniano, con el que se buscaba explicar el movimiento de precesión del perihelio de mercurio.

- El potencial de Foock dado por la expresión

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^4 \frac{a_n}{|q_i - q_j|^n},$$

el cual se obtiene de una de las soluciones exactas de las ecuaciones de la relatividad general, para el caso de una fuente de potencial con simetría esférica.

- El potencial de Schwarzschild, el cual estaremos analizando en este documento

$$U(\mathbf{q}) = \frac{A}{|q_i - q_j|} + \frac{B}{|q_i - q_j|^3}.$$

Este tipo de potenciales brindan una mejor descripción de muchos fenómenos físicos, que previamente se han descrito utilizando solo un potencial homogéneo, como por ejemplo: permiten incluir en la descripción del modelo, la geometría de los cuerpos, las diferentes simetrías de rotación de los mismos o incluir simultáneamente en la interacción, fuerzas de atracción y repulsión. De hecho el potenciales de Schwarzschild, describe muchísimo mejor el comportamiento de los planetas en el sistema solar o el de un sistema de galaxias, que al considerar dichos objetos como masas puntuales en el modelo clásico.

El tratamiento de los problemas de n-cuerpos bajo la interacción de un potencial *cuasihomogéneo*, es análogo al del caso de interacción con potenciales homogéneos. Podríamos decir que formalmente el estudio y aplicación de estos potenciales, inicia con los trabajos de *Georgi Ivanov Manev*, quien en la década de 1920-30, a través de una serie de artículos [26, 27, 28], analizó desde el punto de vista de la aplicación de las leyes físicas, la conveniencia de utilizar el potencial que lleva su nombre, como un nuevo modelo para explicar algunos movimientos en el sistema solar; tales como la precesión del perihelio de Mercurio, el movimiento de la luna y con un cambio de las constantes

involucradas, un modelo del átomo de hidrógeno. Este tipo de potencial fue presentado originalmente por el propio *Newton* en sus *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Libro I, Artículo IX, Prop. XLIV, Teorema XIV, Corolario II), con el fin de describir desviaciones en la órbita de la Luna, respecto de las *leyes de Kepler*, que ya se habían observado por aquel tiempo, sin embargo, se adjudica el nombre del potencial a Manev, por su propuesta que trataba de conciliar la mecánica y la relatividad al menos para lo expuesto anteriormente.

A pesar de todas estas aplicaciones, las ideas de Manev no tuvieron una gran repercusión durante los siguientes años, ya que fue hasta 1993 que Florin Diacu retomó este potencial para estudiar el problema isósceles en el plano [16], y a partir de allí, otros tipos de potenciales de este tipo han empezado a estudiarse con más detalle, al igual que sus características en general. En 1995 Diacu y otros autores [17], encuentran y analizan la solución del problema de dos cuerpos con el potencial de Manev y dan un breve análisis de la variedad de colisión. En 1996, de nuevo Diacu [18], realiza un primer análisis de las órbitas cercanas a colisión en el problema de n -cuerpos con potenciales cuasihomogéneos, haciendo énfasis en el caso particular del potencial de Manev. En 1998, Pérez-Chavela [42], analiza la colisión triple en el problema colineal de tres cuerpos con potenciales cuasihomogéneos, donde da una caracterización del comportamiento de las órbitas, en función del valor de los exponentes asociados a las dos componentes homogéneas del potencial. Durante este mismo año, Mioc y Stavinschi [31, 32], introducen el potencial de Schwarzschild como un modelo con corrección relativista, para el movimiento de los planetas en el sistema solar, y dan un primer análisis cualitativo del flujo para el problema de dos cuerpos. Posteriormente, Mioc y Stoica [53], dan una caracterización de las órbitas cercanas a colisión, en términos de la energía del sistema y los valores de las constantes asociadas a este potencial.

En 2000 Diacu y otros autores [19], retoman el problema de dos cuerpos con el potencial de Manev, y estudian las condiciones sobre las cuales las colisiones dobles pueden ser regularizables. Sobre este mismo problema en 2001, Diacu y Santoprete [20], aplicando el método de *Poincaré–Melnikov*, demuestran la no integrabilidad del problema y la existencia de soluciones caóticas y no caóticas sin colisiones. En 2003, Mioc, Pérez-Chavela y Stavinschi [33], estudian el problema anisotrópico de dos cuerpos con el potencial de Schwarzschild, donde construyen la variedad de colisión, la variedad al infinito y presentan algunas conexiones particulares para el flujo del problema entre dichas variedades. En 2004, Corbera, Llibre y Pérez-Chavela [11], introducen el estudio del problema de dos y tres cuerpos con el potencial de Lennard Jones, en su trabajo estos autores encuentran los equilibrios relati-

vos para el caso de masas iguales, y aplicando técnicas numéricas, analizan la estabilidad espectral de dichos equilibrios. En 2005, Diacu, Santoprete y Pérez-Chavela [21], estudian las configuraciones centrales para potenciales cuasihomogéneos, y demuestran la versión del teorema de Moulton para este caso. El mismo año, Mioc y Pérez-Chavela [34], estudian el problema de Kepler para el potencial de Schwarzschild-de Sitter, el cual contiene un término adicional que el potencial de Schwarzschild. En este trabajo los autores realizan un análisis similar a los descritos anteriormente. Finalmente en 2008, de nuevo Mioc y Pérez-Chavela [35], estudian nuevamente el problema de Kepler, para el caso del potencial de Fock, el cual como en el caso del potencial de Schwarzschild, proviene de una de las soluciones exactas de las ecuaciones de la relatividad general .

1.5. El potencial de Schwarzschild.

Como mencionamos anteriormente, la primer solución conocida de las ecuaciones de la relatividad general fue la métrica de Schwarzschild [48, 52]. En coordenadas esféricas tiene la forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (1.8)$$

Esta métrica se obtiene de considerar el campo gravitacional generado por un objeto masivo, con simetría esférica, sin rotación, sin carga eléctrica y permite describir el movimiento de una partícula bajo la influencia de dicho campo. A la expresión (1.8), que viene a ser la solución del problema de Kepler relativista, se le puede asociar un potencial. En [43] podemos ver como *H. Rein*, utilizando la ecuación de *Euler-Lagrange* y la expresión (1.8), obtiene un potencial efectivo de la forma

$$\Phi_{eff} = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2m^2r^2} - \frac{r_s l^2}{2m^2 r^3}, \quad (1.9)$$

que se puede reescribir como

$$\Phi_{eff} = \frac{l^2}{2m^2 r^2} - U(r), \quad (1.10)$$

donde

$$U(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^3}. \quad (1.11)$$

En este caso, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ representa el *radio de Schwarzschild*, que en términos físicos se refiere al tamaño de un agujero negro de Schwarzschild, es

decir, un agujero negro de simetría esférica y estático. Las diferentes cantidades físicas asociadas a las constantes A y B , pueden variar de acuerdo a las propiedades de las fuentes del potencial. En un modelo general (ver [33, 53]) se consideran dadas por

$$A = GM - \frac{\sigma L}{4\pi c}, \quad B = \frac{\sigma MC^2}{c^2}. \quad (1.12)$$

Donde M es la masa de la fuente del potencial, L es la luminosidad, c es la velocidad de la luz, σ es la sección transversal y C es la constante de momento angular.

De manera similar, podemos obtener un potencial de la forma (1.11) si ahora tomamos la solución de las ecuaciones de Einstein, dada por la métrica de Kerr [10, 48, 52], la cual se obtiene de considerar el campo gravitacional generado por un objeto masivo, con simetría esférica, que rota con momento angular J . Por ejemplo, un agujero negro o una galaxia suficientemente lejana que se pueda pensar como un objeto único. Esta métrica en coordenadas esféricas esta dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2}\right)c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{r_s r \alpha^2}{\rho^2} \sin^2(\theta)\right) \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ + \frac{2r_s r \alpha \sin^2(\theta)}{\rho^2} c dt d\phi, \quad (1.13)$$

donde r_s es el radio de Schwarzschild, $\alpha = \frac{J}{Mc}$, $\rho^2 = r^2 + \alpha^2 \cos^2(\theta)$ y $\Delta = r^2 + r_s r + \alpha^2$. En este caso las constantes asociadas al potencial corresponden a:

$$A = GM - \frac{\sigma L}{4\pi c}, \quad B = \frac{J\sigma MR^2}{3}, \quad \text{con } J = \epsilon - \frac{\omega^2 R^3}{2\sigma M}, \quad (1.14)$$

donde la nueva constante J , proviene de considerar la rotación de la fuente de potencial, R es el radio ecuatorial de la fuente, ϵ es la oblatés, la cual depende de la forma geométrica del esferoide en cuestión, y ω es la velocidad angular.

En la expresión (1.9), el primer término corresponde al potencial Newtoniano generado por una masa puntual de masa M , el segundo término corresponde a la energía rotacional y el tercer término corresponde a un efecto relativista, al cual algunos autores se refieren como un término de corrección del potencial Newtoniano. A lo largo de este trabajo asumiremos al potencial de Schwarzschild en la forma que lo hemos presentado hasta este punto,

aunque la expresión (1.11), no necesariamente se debe obtener partiendo del punto de vista de las ecuaciones de la relatividad general.

En [5] hemos realizado una investigación sobre el efecto de la oblatés de los cuerpos en el caso de un problema restringido de tres cuerpos, entendiendo la oblatés como la forma geométrica de los objetos. En particular, para este caso consideramos dos cuerpos con geometría elipsoidal y simetría rotacional, con semiejes $a_i = b_i \neq c_i$, $i = 1, 2$. En este caso el movimiento de las masas está dado como un movimiento de cuerpo rígido de los esferoides, el cual obedece a un potencial escrito como una expansión en términos del momento de inercia. Truncado a segundo orden, el potencial que rige la interacción entre dos cuerpos con las características anteriores corresponde a

$$V(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \left[1 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\text{Tr } \mathbb{I}_1}{M_1} + \frac{\text{Tr } \mathbb{I}_2}{M_2} - 3(A_1 + A_2) \right) \right], \quad (1.15)$$

donde \mathbb{I}_i es el tensor de inercia del cuerpo i , que expresado como $\mathbb{I}_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$, permite escribir el potencial como

$$V(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(J_2^{(1)} \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 + J_2^{(2)} \left(\frac{a_2}{r} \right)^2 \right) \right], \quad (1.16)$$

donde $J_2^{(i)} := (C_i - A_i)/(M_i a_i^2)$ $i = 1, 2$, representa las dimensiones de los objetos. Si los cuerpos son de densidad homogénea, los momentos de inercia A_i y C_i se pueden expresar en términos de los semiejes a_i y c_i , con lo cual

$$J_2^{(i)} = \frac{a_i^2 - c_i^2}{5a_i^2}. \quad (1.17)$$

De inmediato, para elipsoides homogéneos tenemos las siguientes posibilidades: $J_2^{(i)} < 0$, $J_2^{(i)} = 0$ y $J_2^{(i)} > 0$ correspondiente a cuerpos *prolatos*, *esféricos* y *oblatos* respectivamente.

Introduciendo la notación

$$J^{(i)} = \frac{J_2^{(i)} a_i^2}{2},$$

la interacción entre las masas primarias esta dada por el potencial

$$V(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \left(1 + \frac{J^{(1)} + J^{(2)}}{r^2} \right), \quad (1.18)$$

el cual tiene exactamente la forma de la expresión (1.11) para el potencial de Schwarzschild.

De lo expuesto hasta este punto encontramos que un potencial de la forma (1.11) obtenido a partir de una de las soluciones exactas de las ecuaciones de la relatividad general, métrica de Schwarzschild o métrica de Kerr, permite modelar desde un punto de vista clásico, los movimientos generados por interacciones de objetos con las características heredadas de la métrica correspondiente, es decir, agujeros negros, cuásars o galaxias con cierta simetría. Si por el contrario dentro del marco clásico pensamos no en objetos perfectamente esféricos, que se pueden reducir a masas puntuales, sino en cuerpos elipsoidales, podremos modelar el sistema solar y otros sistemas compuestos de cuerpos oblatos o algún tipo de sistema compuesto de partículas con geometría prolata.

Capítulo 2

Configuraciones centrales planas

El objetivo de este capítulo será estudiar las configuraciones centrales del problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild, en el caso en el que las tres masas están contenidas en el mismo plano. Daremos una clasificación de las mismas en términos de los valores de las masas y las constantes asociadas, para el caso de configuraciones colineales y triangulares. Todos los resultados que presentamos a lo largo de este capítulo son originales y se encuentran publicados en [6].

2.1. Ecuaciones de movimiento.

Consideremos un sistema de 3 masas puntuales m_1, m_2, m_3 , moviéndose en el espacio Euclidiano 2-dimensional, bajo la influencia del potencial de *Schwarzschild*. Sea $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2$ la posición de la partícula i en un sistema de coordenadas inerciales y sea $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ el vector de posición. En este caso el potencial de Schwarzschild toma la siguiente forma

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{i < j} \frac{A_{(m_i m_j)}}{r_{ij}} + \sum_{i < j} \frac{B_{(m_i m_j)}}{r_{ij}^3}, \quad (2.1)$$

donde $r_{ij} = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|$, es la distancia entre las partículas i, j y las constantes $A_{(m_i m_j)}, B_{(m_i m_j)}$ están definidas por las expresiones (1.12) y (1.14).

Las ecuaciones de movimiento asociadas al potencial (2.1) están dadas por

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U(\mathbf{q}), \quad (2.2)$$

o en términos de las coordenadas como:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_1 &= \frac{A_3}{r_{12}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + \frac{B_3}{r_{12}^5}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + \frac{A_2}{r_{13}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) + \frac{B_2}{r_{13}^5}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1), \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \frac{A_3}{r_{12}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \frac{B_3}{r_{12}^5}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \frac{A_1}{r_{23}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) + \frac{B_1}{r_{23}^5}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2), \\ \ddot{\mathbf{q}}_3 &= \frac{A_2}{r_{13}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + \frac{B_2}{r_{13}^5}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + \frac{A_1}{r_{23}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) + \frac{B_1}{r_{23}^5}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3).\end{aligned}$$

donde las constantes A_i, B_i representan la interacción entre las masas m_j y m_k y donde (i, j, k) permutan cíclicamente en $(1, 2, 3)$, esto es $(i, j, k) \sim (1, 2, 3)$. Abusando de la notación para facilitar los cálculos, en adelante continuaremos considerando $B_i = 3B_i$ (el 3 viene de la derivada de (2.1)). Además asumiremos que el centro de masas de las tres partículas está fijo en el origen, es decir,

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{q}_i = 0. \quad (2.3)$$

Para dar inicio a nuestro estudio introducimos los equilibrios relativos, los cuales consisten en encontrar soluciones de (2.2) que provienen de puntos de equilibrio en un sistema de coordenadas rotante (ver ([4], [29])). Estas soluciones están caracterizadas de la siguiente manera. Sea $R(\omega t)$ la matriz diagonal por bloques, 6×6 , con 3 bloques de tamaño 2×2 de la forma

$$A(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Sea $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^6)$, la configuración de las 3 partículas, y $\mathbf{q}(t) = R(\omega t)\mathbf{x}$, donde la constante ω es la velocidad angular del sistema de coordenadas rotatorias. En el sistema de coordenadas \mathbf{x} las ecuaciones de movimiento (2.2) corresponden a:

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2\omega J\dot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x}) + \omega^2 \mathbf{x}, \quad (2.5)$$

donde J es la matriz diagonal por bloques 6×6 con 3 bloques de tamaño 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una configuración \mathbf{x} es central para el sistema (2.2) si y sólo si \mathbf{x} es un punto de equilibrio del sistema (2.5). Esto es, si y sólo si

$$-\nabla U(\mathbf{x}) + \omega^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

para algún ω adecuado. Si \mathbf{x} es una configuración central, entonces $\mathbf{q}(t) = R(\omega t)\mathbf{x}$ es una solución de equilibrio relativo del sistema (2.2), además esta solución es periódica, con periodo $T = 2\pi/|\omega|$. Por lo tanto, cuando obtenemos una configuración central, también obtenemos el correspondiente equilibrio relativo, lo que nos permite en el resto de este capítulo, referirnos a estos dos conceptos como equivalentes.

Hacemos énfasis en que de acuerdo a la ecuación (2.6) y la *definición 2*, una configuración central en el espacio \mathbf{q} es una configuración de las partículas $\mathbf{q} = \mathbf{x}$, en la que los vectores de posición \mathbf{q} y aceleración $\ddot{\mathbf{q}}$ de cada partícula, son proporcionales, con la misma constante de proporcionalidad ω^2 .

Antes de continuar queremos resaltar que a diferencia del problema clásico de los n-cuerpos, donde el conjunto de todas las configuraciones centrales, es invariante bajo homotecias y rotaciones, al considerar el problema bajo el potencial de Schwarzschild (y en general para cualquier potencial cuasihomogéneo), este conjunto es invariante únicamente bajo rotaciones. También debemos mencionar que el estudio de las configuraciones centrales puede verse como un problema de multiplicadores de *Lagrange*, donde se buscan los puntos críticos de un potencial U sobre la esfera $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = \bar{I}$, donde $\bar{I} > 0$, es una constante (ver [11, 13]). Esto es, \mathbf{x} es una configuración central si es una solución del sistema

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad I(\mathbf{x}) - \bar{I} = 0 \quad (2.7)$$

donde $F(\mathbf{x}) = -U(\mathbf{x}) + \omega^2(I(\mathbf{x}) - \bar{I})$ y $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ es el *momento de inercia*.

2.2. Configuraciones centrales no-colineales.

Para empezar con nuestro análisis, nos interesamos en encontrar los equilibrios relativos del sistema cuando $\omega = 0$, es decir, soluciones de

$$\nabla U(\mathbf{q}) = 0, \quad (2.8)$$

donde $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^2$,

$$U(\mathbf{q}) = \frac{A_3}{r_{12}} + \frac{B_3}{r_{12}^3} + \frac{A_2}{r_{13}} + \frac{B_2}{r_{13}^3} + \frac{A_1}{r_{23}} + \frac{B_1}{r_{23}^3}. \quad (2.9)$$

Proposición 1. *En el problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild, con $\omega = 0$, los equilibrios relativos existen si y sólo si, $A_i > 0$ y $B_i < 0$ o $A_i < 0$ y $B_i > 0$, para todo $i = 1, 2, 3$.*

Demostración: Para el desarrollo de esta prueba recordemos el siguiente resultado. Sea $u = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_1 = g_1(y), \dots, x_n = g_n(y)$ con $y = (y_1, \dots, y_m)$, $m \geq n$. Si $\text{rank}(A) = n$ donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

entonces $\nabla f(x) = 0$ si y sólo si $\nabla u(y) = 0$. Para nuestro caso esto es equivalente a mostrar que el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{12}}{\partial q_{12}} & \frac{\partial r_{13}}{\partial q_{12}} & \frac{\partial r_{23}}{\partial q_{12}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_{12}}{\partial q_{32}} & \frac{\partial r_{13}}{\partial q_{32}} & \frac{\partial r_{23}}{\partial q_{32}} \end{pmatrix},$$

es igual a 3, y entonces $\nabla U(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ si y sólo si $\nabla U(r_{ij}) = 0$ donde la distancia $r_{12} = \sqrt{(q_{21} - q_{11})^2 + (q_{22} - q_{12})^2}$, $r_{13} = \sqrt{(q_{31} - q_{11})^2 + (q_{32} - q_{12})^2}$ y $r_{23} = \sqrt{(q_{31} - q_{21})^2 + (q_{32} - q_{22})^2}$. Después de calcular las derivadas en cada término, la matriz A toma la forma

$$A = \begin{pmatrix} \frac{q_{11} - q_{21}}{r_{12}} & \frac{q_{11} - q_{31}}{r_{13}} & 0 \\ \frac{q_{11} - q_{22}}{r_{12}} & \frac{q_{12} - q_{32}}{r_{13}} & 0 \\ \frac{-q_{11} - q_{21}}{r_{12}} & 0 & \frac{q_{21} - q_{31}}{r_{23}} \\ \frac{-q_{12} - q_{22}}{r_{12}} & 0 & \frac{q_{22} - q_{32}}{r_{23}} \\ 0 & \frac{-q_{11} - q_{31}}{r_{13}} & \frac{-q_{21} - q_{31}}{r_{23}} \\ 0 & \frac{-q_{12} - q_{32}}{r_{13}} & \frac{-q_{22} - q_{32}}{r_{23}} \end{pmatrix},$$

la cual tiene $\text{rango} = 3$ si y sólo si q_1 , q_2 y q_3 son no colineales. Por esta razón los equilibrios relativos para $\omega = 0$ están dados por las soluciones del sistema

$$\nabla U(r_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{-A_3}{r_{12}^2} - \frac{B_3}{r_{12}^4} \\ \frac{-A_2}{r_{13}^2} - \frac{B_2}{r_{13}^4} \\ \frac{-A_1}{r_{23}^2} - \frac{B_1}{r_{23}^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

El sistema (2.10) tiene soluciones reales si $A_i > 0$ y $B_i < 0$, para todo i , o viceversa. \square

Con el fin de estudiar las configuraciones centrales no colineales en el problema de tres cuerpos con el potencial de Schwarzschild, que en adelante llamaremos *planas*, separaremos su análisis en casos, dependiendo de los signos de las constantes A_i , B_i y de los valores de las masas.

El caso más sencillo es cuando todas las constantes en la ecuación (2.6) son positivas, en este caso no hay bifurcaciones en absoluto, sin embargo pospondremos el análisis de este caso hasta el final de esta sección, a fin de obtener una mayor claridad de nuestra exposición. En adelante secuencialmente consideraremos:

- sección 2.2.1 tres masas iguales con $A_i > 0$ y $B_i < 0$,
- sección 2.2.2 dos masas iguales con $A_i > 0$ y $B_i < 0$,
- sección 2.2.3 tres masas diferentes con $A_i > 0$ y $B_i < 0$,
- sección 2.2.4 el análisis anterior con $A_i > 0$ y $B_i > 0$.

2.2.1. Caso I: tres masas iguales.

Dado que los signos de las constantes B_i son negativos y las configuraciones centrales no son invariantes por homotecias; es natural pensar que el número de éstas, depende del tamaño del sistema, que en este contexto corresponde al momento de inercia I , el cual en términos de las distancias mutuas puede escribirse como

$$I = \frac{1}{M}(m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2). \quad (2.11)$$

Donde $M = m_1 + m_2 + m_3$ y asumimos sin pérdida de generalidad que el valor de las tres masas es igual a $1/3$ y con esto $M = 1$. Para este caso el resultado principal que hemos obtenido es el siguiente.

Teorema 2. *En el problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild con tres masas iguales, $A = A_1 = A_2 = A_3 > 0$ y $B = B_1 = B_2 = B_3 < 0$ las configuraciones centrales son triángulos equiláteros o isósceles. El número de configuraciones depende del valor del momento de inercia, además existen cuatro valores de bifurcación para I .*

Demostración: Las configuraciones centrales son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} -\frac{A}{r_{12}^2} - \frac{B}{r_{12}^4} + r_{12}\omega^2 &= 0, \\ -\frac{A}{r_{13}^2} - \frac{B}{r_{13}^4} + r_{13}\omega^2 &= 0, \\ -\frac{A}{r_{23}^2} - \frac{B}{r_{23}^4} + r_{23}\omega^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{9}(r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2) = I,$$

las primeras tres ecuaciones son equivalentes a

$$\frac{A}{r_{12}^3} + \frac{B}{r_{12}^5} = \frac{A}{r_{13}^3} + \frac{B}{r_{13}^5} = \frac{A}{r_{23}^3} + \frac{B}{r_{23}^5} = \omega^2. \quad (2.13)$$

Luego para encontrar todas las configuraciones centrales debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{A}{r_{12}^3} + \frac{B}{r_{12}^5} &= \frac{A}{r_{13}^3} + \frac{B}{r_{13}^5}, \\ \frac{A}{r_{12}^3} + \frac{B}{r_{12}^5} &= \frac{A}{r_{23}^3} + \frac{B}{r_{23}^5}, \\ \frac{1}{9}(r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2) &= I. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para analizar las dos primeras ecuaciones, sea $f(x) = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^5}$ con $A > 0$ y $B < 0$, cuya derivada es $f'(x) = -\frac{3A}{x^4} + \frac{5B}{x^6}$ (ver Figura 2.1). Como x representa la distancia, es suficiente analizar la función $f(x)$ en valores positivos de x , en donde:

- 1) la función es cero para $x_0 = \sqrt{\frac{B}{A}}$,
- 2) presenta un máximo en $x_c = \sqrt{\frac{5B}{3A}}$,
- 3) tiene por límites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Con esto las dos primeras ecuaciones de (2.14) pueden escribirse como

$$f(r_{12}) = f(r_{13}) = f(r_{23}). \quad (2.15)$$

Dado que $f(r_{ij}) = \omega^2 \geq 0$, es suficiente analizar el caso en el que $f(r_{ij}) > 0$, esto es para $r_{ij} > \sqrt{B/A}$.

Fijando un valor arbitrario que llamaremos $\eta \in (0, \beta)$, donde $\beta = f(x_c)$, podemos encontrar dos valores diferentes, $x_1 \in (x_0, x_c)$ y $x_2 \in (x_c, +\infty)$, los cuales satisfacen que $f(x_1) = f(x_2) = \eta$ (ver figura 2.1). A partir de estos dos valores encontramos ocho soluciones diferentes de la ecuación (2.15), que corresponden a:

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = x_1, \quad (2.16)$$

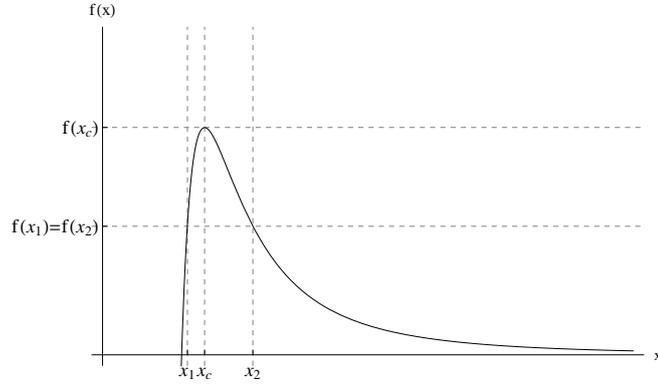


Figura 2.1: Gráfica de la función $f(x) = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^5}$.

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= r_{13} = x_1, r_{23} = x_2, \\
 r_{12} &= r_{23} = x_1, r_{13} = x_2, \\
 r_{13} &= r_{23} = x_1, r_{12} = x_2.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= r_{13} = x_2, r_{23} = x_1, \\
 r_{12} &= r_{23} = x_2, r_{13} = x_1, \\
 r_{13} &= r_{23} = x_2, r_{12} = x_1.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = x_2. \tag{2.19}$$

Cuando $\eta = \beta$, existe un único valor x_c tal que $f(x_c) = \beta$, en este caso existe una única solución a la ecuación (2.15) dada por

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = x_c. \tag{2.20}$$

Las soluciones (2.16), (2.19) y (2.20) corresponden a triángulos equiláteros, mientras que en (2.17) las soluciones corresponden a triángulos isósceles en los que los dos lados iguales son más pequeños que el tercero. En (2.18), las soluciones también corresponden a triángulos isósceles, pero en este caso los dos lados iguales son más grandes que el tercero. En todos los casos anteriores debemos resaltar que dichas soluciones deben satisfacer la desigualdad triangular.

El siguiente paso será analizar el comportamiento del momento de inercia para las soluciones que hemos expuesto. Para esto tenemos $I_1 = B/3A$ y $I_3 = 5B/9A$ que corresponden al valor del momento de inercia cuando $r_{12} = r_{13} = r_{23} = \sqrt{\frac{B}{A}}$ e $r_{12} = r_{13} = r_{23} = \sqrt{\frac{5B}{3A}}$ respectivamente. Con esto para

$I \leq I_1$, no existen equilibrios relativos, ya que para estos valores la función $f(x)$ es negativa.

Una solución del tipo (2.16) corresponde al intervalo $I \in (I_1, I_3)$, donde $3I = x_1^2$. Si tenemos una solución del tipo (2.19), entonces $I \in (I_3, \infty)$ con $3I = x_2^2$; una solución del tipo (2.20) corresponde a $I = I_3$. Para soluciones del tipo (2.17) tenemos que $9I = 2x_1^2 + x_2^2$.

Tomando $A = 10$ y $B = 2$, hemos dibujado en la Figura 2.2, la gráfica del momento de inercia evaluado en la imagen inversa de la función f , esto es, el gráfico de $I(f^{-1}(\eta))$ para $\eta \in [0, \beta]$, para los diferentes tipos de soluciones que hemos descrito anteriormente.

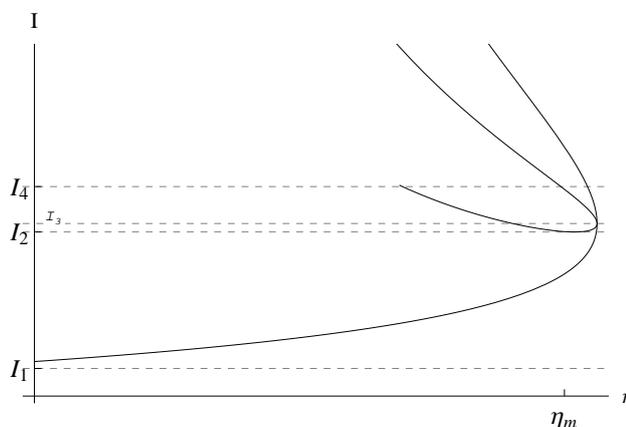


Figura 2.2: Comportamiento del momento de inercia en el caso particular en que $f(x) = 10/x^3 - 2/x^5$. La curva ascendente corresponde a soluciones equiláteras del tipo (2.16), la curva entre I_2 y I_4 corresponde a soluciones isósceles del tipo (2.17), la siguiente curva corresponde a soluciones isósceles del tipo (2.18) y la curva superior corresponde a soluciones equiláteras del tipo (2.19)

Antes de continuar debemos hacer énfasis en las siguientes observaciones.

Observación 1. La notación $I(f^{-1}(\eta))$, obedece simplemente a una conveniencia, pero en ningún momento estamos queriendo dar a entender que la función f tiene inversa, de hecho f^{-1} no existe.

Observación 2. La selección de los valores de A y B para la construcción de los gráficos es completamente arbitraria, y sólo obedecen a nuestra conveniencia a la hora de presentar dichos gráficos. Con diferentes valores de A y B , con $A > B$ la forma de nuestros gráficos para I se conserva, siendo la única diferencia entre ellos el obtener diferentes valores de bifurcación.

Las curvas en la Figura 2.2 representan la evolución de la forma del triángulo (es decir, la configuración de las tres masas) a lo largo de la correspondiente solución. Para las soluciones del tipo (2.17), hemos encontrado que la respectiva curva tiene un mínimo en el punto η_m , el cual corresponde al valor del momento de inercia $I_2 = 0,10839038 \dots$, además, si $2x_1 = x_2$, entonces estas soluciones bifurcan a una configuración colineal, que en este caso corresponde al valor del momento de inercia $I_4 = 0,147619 \dots$. Si $2x_1 < x_2$, entonces las distancias r_{ij} ya no satisfacen la desigualdad triangular y por lo tanto no existen equilibrios relativos del tipo (2.17) cuando $I > I_4$.

Para las soluciones del tipo (2.18) tenemos que $9I = 2x_2^2 + x_1^2$, en este caso no existe ninguna restricción sobre las distancias mutuas, es decir, la desigualdad triangular se satisface siempre. Esta clase de soluciones isósceles bifurcan de la solución equilátera cuando los tres lados son iguales a x_2 . Con todo lo anterior hemos probado la existencia de cuatro valores de bifurcación para el momento de inercia, más aún, hemos obtenido la siguiente clasificación para las configuraciones centrales planas.

- Si $I \in [0, I_1]$, no existen equilibrios relativos.
- Si $I \in (I_1, I_2)$, entonces existe una solución de triángulo equilátero del tipo (2.16).
- Si $I = I_2$, entonces existe una solución de triángulo equilátero del tipo (2.16) y una solución de triángulo isósceles del tipo (2.17).
- Si $I \in (I_2, I_3)$, entonces existe una solución de triángulo equilátero del tipo (2.16) y dos soluciones de triángulo isósceles del tipo (2.17).
- Si $I = I_3$, entonces existe una solución de triángulo equilátero del tipo (2.20) y una solución de triángulo isósceles del tipo (2.17).
- Si $I \in (I_3, I_4)$, entonces existe una solución de triángulo equilátero del tipo (2.19), una solución de triángulo isósceles del tipo (2.17) y una solución de triángulo isósceles del tipo (2.18).
- Si $I = I_4$, entonces existe una solución de triángulo equilátero del tipo (2.19), una solución de triángulo isósceles del tipo (2.18) y un equilibrio relativo colineal.
- Si $I \in (I_4, \infty)$, entonces existe una solución de triángulo equilátero del tipo (2.19) y una solución de triángulo isósceles del tipo (2.18).

Esto finaliza la prueba del Teorema 2. □

Analizando las diferentes orientaciones y la distribución de las partículas en cada una de las respectivas configuraciones, podemos ver que cada triángulo equilátero aporta dos clases diferentes de equilibrio relativo, correspondientes a las dos posibles orientaciones de un triángulo equilátero en el plano. Similarmente reordenando las partículas, cada uno de los triángulos isósceles aporta seis diferentes clases de equilibrios relativos. En la Tabla 2.1 hemos recogido un compendio del número total de equilibrios relativos dependiendo del tamaño del momento de inercia.

I	N^0	I	N^0	I	N^0
$(0, I_1]$	0	(I_1, I_2)	2	$I = I_2$	8
(I_2, I_3)	14	$I = I_3$	8	(I_3, I_4)	14
$I = I_4$	11	(I_4, ∞)	8		

Cuadro 2.1: *Número total de equilibrios relativos respecto del momento de inercia.*

2.2.2. Caso II: dos masas iguales.

Ahora analizaremos el caso en el que dos de las partículas tienen masas iguales. Al respecto el resultado más importante es el siguiente:

Teorema 3. *En el problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild con dos de las masas iguales, $A = A_1 = A_2 > 0$, $A_3 = k_1 A > 0$, $B = B_1 = B_2 < 0$, $B_3 = k_2 B < 0$ las configuraciones centrales corresponden a triángulos isósceles o escalenos.*

Demostración: Para esta prueba procederemos como en el caso del Teorema 2, sin pérdida de generalidad consideremos $k_1 = k_2$. Con esto las ecuaciones (2.15) cuando dos de las masas son iguales corresponden a:

$$\frac{A}{r_{12}^3} + \frac{B}{r_{12}^5} = \frac{A}{r_{13}^3} + \frac{B}{r_{13}^5} = \frac{kA}{r_{23}^3} + \frac{kB}{r_{23}^5} = \omega^2, \quad (2.21)$$

donde k es una constante real positiva que mide el incremento de las constantes físicas asociadas a la tercer partícula, con respecto a las constantes de las otras dos. El análisis para cuando una masa es más pequeña que las otras dos es similar. Denotaremos las dos primeras ecuaciones de (2.21), que para este caso son idénticas, como $f(x)$, y la tercera de ellas será denotada como $g(x)$, específicamente $g(x) = kf(x)$, (ver figura 2.3).

Ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen un máximo en x_c . Sea $\beta = f(x_c)$, para algún $\eta \in (0, \beta]$. La línea recta $y = \eta$ intersecta la gráfica de $f(x)$ en

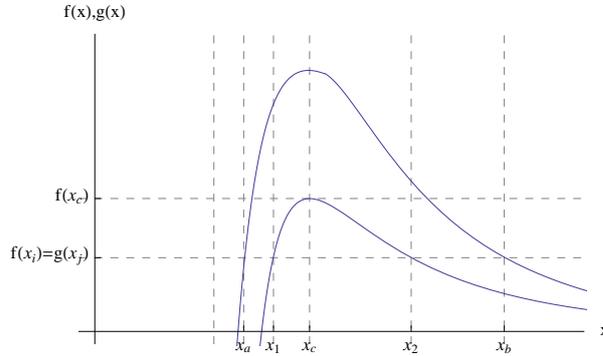


Figura 2.3: Gráfica de $f(x)$ y $g(x)$ para dos masas iguales

dos puntos que llamaremos $f(x_1) = f(x_2) = \eta$, e interseca a la gráfica de $g(x)$ en otros dos puntos que a su vez llamaremos $g(x_a) = g(x_b) = \eta$ (ver Figura 2.3). Por lo tanto para este valor de η podremos tener *configuraciones centrales* isósceles o escalenas, las correspondientes posibilidades en términos de las distancias mutuas son:

$$r_{12} = r_{13} = x_1, r_{23} = x_a \quad (2.22)$$

$$r_{12} = r_{13} = x_1, r_{23} = x_b \quad (2.23)$$

$$r_{12} = r_{13} = x_2, r_{23} = x_a \quad (2.24)$$

$$r_{12} = r_{13} = x_2, r_{23} = x_b \quad (2.25)$$

$$r_{12} = x_1 \quad , \quad r_{13} = x_2 \quad , \quad r_{23} = x_a \quad (2.26)$$

$$r_{12} = x_2 \quad , \quad r_{13} = x_1 \quad , \quad r_{23} = x_b \quad (2.27)$$

Las soluciones (2.22) a (2.25) corresponden a configuraciones de triángulo isósceles, mientras que las soluciones (2.26) corresponden a configuraciones de triángulo escaleno. Dentro de las soluciones isósceles hemos incluido los casos particulares $r_{12} = r_{13} = x_c, r_{23} = x_a$ y $r_{12} = r_{13} = x_c, r_{23} = x_b$. Como en el teorema previo, hacemos énfasis en que todas estas soluciones deben satisfacer la desigualdad triangular.

El siguiente paso es analizar el momento de inercia en términos de las soluciones anteriores, las cuales hemos representado en la figura 2.4. Dado que

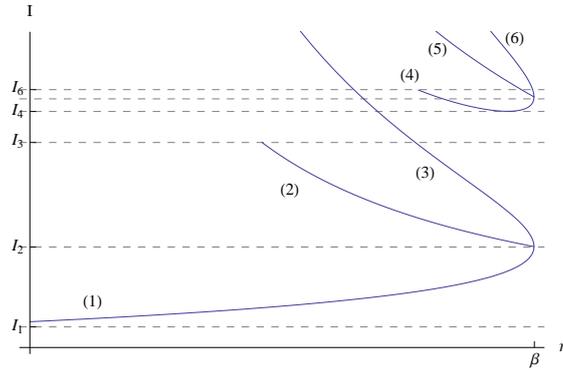


Figura 2.4: *Comportamiento del momento de inercia para el caso de dos masas iguales, tomando $A = 10$, $|B| = 2$ y $k = 2$.*

las constantes A y B pueden tomar valores arbitrarios, podemos sin pérdida de generalidad incluir los valores de las masas dentro de dichos parámetros, luego cuando modifiquemos los valores de las masas, sólo introduciremos dichos cambios en los valores de las constantes y no en las masas que aparecen en la expresión del momento de inercia. Las curvas que hemos obtenido corresponden a:

- (1) $I = \frac{1}{9}(2x_1^2 + x_a^2)$, para el intervalo $(I_1, I_2]$.
- (2) $I = \frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_a^2)$, para el intervalo $[I_2, I_3]$.
- (3) $I = \frac{1}{9}(2x_2^2 + x_a^2)$, para el intervalo (I_2, ∞) .
- (4) $I = \frac{1}{9}(2x_1^2 + x_b^2)$, para el intervalo $[I_4, I_6]$.
- (5) $I = \frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_b^2)$, para el intervalo $[I_5, I_7]$.
- (6) $I = \frac{1}{9}(2x_2^2 + x_b^2)$, para el intervalo (I_5, ∞) .

Para soluciones del tipo (2.22), tenemos que $9I = 2x_1^2 + x_a^2$, que corresponde a la curva (1) en la figura 2.4, en este caso no existe ningún tipo de restricción sobre las distancias mutuas. Para soluciones del tipo (2.23), tenemos que $9I = 2x_1^2 + x_b^2$, pero en este caso cuando $2x_1 = x_b$, ésta solución bifurca a colineal, esto ocurre para el valor de bifurcación $I_6 = 0,166667 \dots$, además se observa que en esta curva aparece otro valor de bifurcación en $I_4 = 0,157333 \dots$, el cual corresponde al valor donde la curva presenta un mínimo. Para soluciones del tipo (2.24), tenemos que $9I = 2x_2^2 + x_a^2$, soluciones sobre las que tampoco existe ningún tipo de restricción. Lo mismo ocurre para soluciones del tipo (2.25), donde $9I = 2x_2^2 + x_b^2$. Hasta este punto podemos concluir que solo una de las soluciones isósceles bifurca en una solución colineal.

Para las soluciones escalenas (2.26) y (2.27), tenemos para la primera que $9I = x_1^2 + x_2^2 + x_a^2$, donde la desigualdad triangular no se cumple a partir de la condición $x_1 + x_a = x_2$, esto ocurre para el valor de bifurcación $I_3 = 0,143959 \dots$. Para la segunda, $9I = x_1^2 + x_2^2 + x_b^2$, donde la desigualdad triangular no se cumple a partir de la condición $x_1 + x_2 = x_b$, esto ocurre en el valor de bifurcación $I_7 = 0,821609 \dots$. En los dos casos I_3 y I_7 corresponden a los valores en que las soluciones escalenas bifurcan en colineales. El significado de I_1 y I_2 es exactamente el mismo que en el caso de tres masas iguales, luego para $I < I_1$, no existen equilibrios relativos. En $I_2 = 0,0988889 \dots$ el número de familias de configuraciones centrales cambia de una a dos, a la vez que tres tipos diferentes de soluciones coinciden, debido a que $x_1 = x_2 = x_c$ y x_a alcanzan su máximo valor. Lo mismo ocurre para el valor $I_5 = 0,162778 \dots$, pero ahora el cambio en el número de soluciones es de dos a cuatro. Con todo lo anterior hemos probado la existencia de siete valores de bifurcación para el momento de inercia, de hecho, hemos obtenido la siguiente clasificación para las configuraciones centrales planas:

- Si $I \in [0, I_1]$, no existen equilibrios relativos.
- Si $I \in (I_1, I_2]$, existe una configuración central isósceles.
- Si $I \in (I_2, I_3]$, existe una configuración central isósceles y una escalena.
- Si $I \in (I_3, I_4)$, existe una configuración central isósceles.
- Si $I = I_4$, existen dos configuraciones centrales isósceles.
- Si $I \in (I_4, I_5]$, existen tres configuraciones centrales isósceles.
- Si $I \in (I_5, I_6]$, existen tres configuraciones centrales isósceles y una escalena.
- Si $I \in (I_6, I_7]$, existen dos configuraciones centrales isósceles y una escalena.
- Si $I \in (I_7, \infty)$, existen dos configuraciones centrales isósceles.

En resumen los valores de bifurcación que hemos descrito son:

- I_1 , donde las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son cero.
- I_2 , donde las curvas (1), (2) y (3) coinciden, el comportamiento de las soluciones cambia, pasando de una familia de soluciones isósceles a dos familias, una isósceles y otra escalena.

- I_3 , donde la familia de soluciones escalenas (2), bifurca en una configuración colineal.
- I_4 , en donde la curva (4) presenta un mínimo, el comportamiento de las soluciones cambia de una a dos familias, ambas isósceles.
- I_5 , donde las curvas (4), (5) y (6) coinciden, a este punto el comportamiento de las soluciones cambia de tres diferentes soluciones isósceles a cuatro soluciones, tres isósceles y una escalena.
- I_6 , donde la curva de soluciones isósceles (4), bifurca en una configuración colineal. A partir de este valor existen únicamente tres familias de soluciones, dos isósceles y una escalena.
- I_7 , corresponde al último valor de bifurcación, ocurre cuando la curva de soluciones escalenas (5), bifurca en una solución colineal. A partir de este valor existen únicamente dos familias de soluciones, ambas isósceles.

Esto finaliza la prueba del Teorema 3 cuando dos de las masas son más pequeñas. Analizando las diferentes orientaciones y distribuciones de las partículas en una respectiva configuración, mostramos en la Tabla 2.2 el número total de equilibrios relativos en función del tamaño del momento de inercia.

I	N^0	I	N^0	I	N^0
$(0, I_1]$	0	(I_1, I_2)	6	$(I_2, I_3]$	12
$(I_3, I_4]$	6	$I = I_4$	12	$(I_4, I_5]$	18
$(I_5, I_6]$	24	$(I_6, I_7]$	18	(I_7, ∞)	12

Cuadro 2.2: Número total de equilibrios relativos respecto del momento de inercia para dos masas más pequeñas que la tercera.

Ahora debemos repetir este análisis para el caso en que dos de las masas son más grandes que la tercera, es decir, tomamos dos puntos en $g(x)$ y uno en $f(x)$, para esto basta considerar las ecuaciones (2.21) con $k < 1$. Siguiendo el mismo proceso numérico que para el caso anterior en que consideramos $k > 1$, obtenemos la gráfica 2.5 para el momento de inercia.

Las curvas que hemos representado corresponden a:

- (1) $I = \frac{1}{9}(2x_a^2 + x_1^2)$, para el intervalo (I_1, I_2) .
- (2) $I = \frac{1}{9}(2x_a^2 + x_2^2)$, para el intervalo $(I_1, I_2]$.

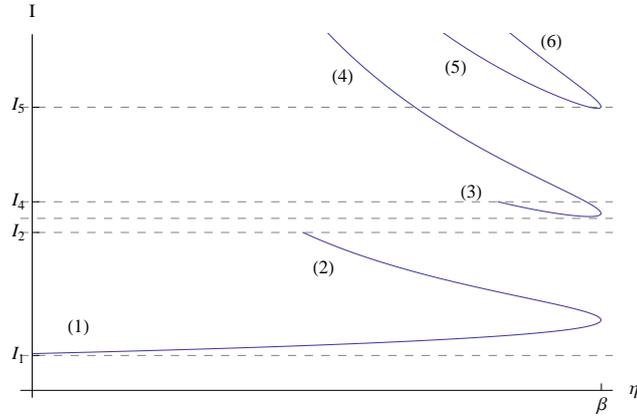


Figura 2.5: Comportamiento del momento de inercia para el caso en que dos de las masas son mas grandes que la tercera, , tomamos $A = 10$, $|B| = 2$ y $k = 1/2$.

- (3) $I = \frac{1}{9}(x_1^2 + x_a^2 + x_b^2)$, para el intervalo $[I_3, I_4]$.
- (4) $I = \frac{1}{9}(x_a^2 + x_b^2 + x_2^2)$, para el intervalo $(I_3, I_6]$.
- (5) $I = \frac{1}{9}(2x_b^2 + x_1^2)$, para el intervalo (I_5, ∞) .
- (6) $I = \frac{1}{9}(2x_b^2 + x_2^2)$, para el intervalo $[I_5, \infty]$.

El comportamiento general de las curvas en la gráfica (2.4) y (2.5) presenta grandes diferencias, pero en ambos casos solamente una de las soluciones isósceles y las dos escalenas finalizan en una solución colineal, además en este caso el número de valores de bifurcación es seis.

- Si $I \in [0, I_1]$, no existen equilibrios relativos.
- Si $I \in (I_1, I_2]$, existe una configuración central isósceles.
- Si $I \in (I_2, I_3)$, no existen equilibrios relativos.
- Si $I = I_3$, existe una configuración central escalena.
- Si $I \in (I_3, I_4]$, existen dos configuraciones centrales escalenas.
- Si $I \in (I_4, I_5)$, existe una configuración central escalena.
- Si $I = I_5$, existe una configuración central isósceles y una escalena.
- Si $I \in (I_5, I_6)$, existen dos configuraciones centrales isósceles y una escalena.

- Si $I \in (I_6, \infty)$, existe una configuración central isósceles.

En resumen, los valores de bifurcación que hemos descrito para el caso de dos partículas más grandes que la tercera son:

- I_1 , donde ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son cero.
- I_2 , donde la curva de soluciones isósceles (2), bifurca en una configuración colineal.
- I_3 , donde la curva de soluciones escalenas (3) tiene un punto mínimo. Aquí, después de un intervalo sin soluciones, de nuevo existe una solución escalena.
- I_4 , en donde la curva (3) bifurca en una configuración colineal. Aquí el comportamiento de las soluciones cambia de dos a una familia, ambas escalenas.
- I_5 , valor en el que las curvas (5) y (6) coinciden. El comportamiento de las soluciones cambia de una a dos soluciones justo en este punto. Después de eso existen tres soluciones, dos isósceles y una escalena.
- I_6 , en donde la curva de soluciones escalenas (4), bifurca en una configuración colineal. A partir de este punto existen solamente dos familias de soluciones, ambas isósceles.

En la Tabla 2.3 mostramos el número de equilibrios relativos dependiendo del tamaño del momento de inercia. Con todo lo anterior, hemos terminado la prueba del Teorema 3. \square

I	N^0	I	N^0	I	N^0
$(0, I_1]$	0	(I_1, I_2)	6	(I_2, I_3)	0
$I = I_3$	6	(I_3, I_4)	12	(I_4, I_5)	6
$I = I_5$	12	(I_5, I_6)	18	$[I_6, \infty)$	12

Cuadro 2.3: *Número total de equilibrios relativos respecto al momento de inercia para dos masas mas grandes que la tercera.*

Observación 3. *Los valores de bifurcación que fueron encontrados en el Teorema 3 dependen de la elección particular de las constantes A , B , k_1 y k_2 , las cuales determinan los valores de las soluciones x_1 , x_2 , x_a y x_b , así como la validez de la desigualdad triangular.*

2.2.3. Caso III: tres masas distintas.

Para el problema de *Schwarzschild* de tres cuerpos cuando tres masas son diferentes el resultado principal es el siguiente:

Teorema 4. *En el problema de Schwarzschild de tres cuerpos con tres masas diferentes y $A_1, A_2, A_3 > 0$, $|B_1|, |B_2|, |B_3| < 0$ todas las configuraciones centrales son triángulos escalenos.*

Demostración: Como en la demostración del teorema anterior, comenzaremos con la ecuación (2.15) la cual en este caso toma la forma:

$$f(r_{12}) = kf(r_{13}) = k_1f(r_{23}) = \omega^2. \quad (2.28)$$

donde f está definida como en la prueba del Teorema 1, y las constantes positivas k y k_1 miden la diferencia en el valor de las tres masas. Mediante el uso de esta notación tenemos $g(x) = kf(x)$ y $h(x) = k_1f(x)$. Aquí las gráficas de las tres funciones son diferentes, pero todas ellas alcanzan su máximo en el mismo punto x_c . En la Fig. 2.6 hemos dibujado las gráficas de estas funciones para una elección particular de las constantes.

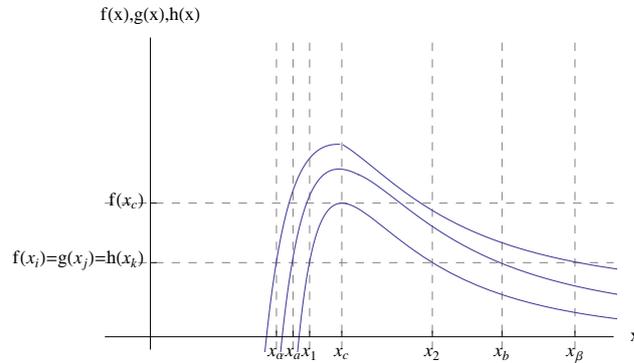


Figura 2.6: *Comportamiento del sistema de tres masas diferentes con constantes diferentes A_i y B_i , $f(x) = 10/x^3 - 2/x^5$, $g(x) = 20/x^3 - 4/x^5$ y $h(x) = 30/x^3 - 6/x^5$.*

Como describimos anteriormente, la línea recta $y = \eta$ intersecta cada gráfica en dos puntos que llamaremos $f(x_1) = f(x_2) = \eta$, $g(x_a) = g(x_b) = \eta$ y $h(x_\alpha) = h(x_\beta) = \eta$. Luego, para este valor de η tenemos una configuración central de triángulo escaleno, todas las posibilidades en términos de las distancias mutuas corresponden a:

$$r_{12} = x_1 \quad , \quad r_{13} = x_a \quad , \quad r_{23} = x_\alpha,$$

$$\begin{aligned}
r_{12} = x_1 & \quad , \quad r_{13} = x_a & \quad , \quad r_{23} = x_\beta, \\
r_{12} = x_1 & \quad , \quad r_{13} = x_b & \quad , \quad r_{23} = x_\alpha, \\
r_{12} = x_1 & \quad , \quad r_{13} = x_b & \quad , \quad r_{23} = x_\beta, \\
r_{12} = x_2 & \quad , \quad r_{13} = x_a & \quad , \quad r_{23} = x_\alpha, \\
r_{12} = x_2 & \quad , \quad r_{13} = x_a & \quad , \quad r_{23} = x_\beta, \\
r_{12} = x_2 & \quad , \quad r_{13} = x_b & \quad , \quad r_{23} = x_\alpha, \\
r_{12} = x_2 & \quad , \quad r_{13} = x_b & \quad , \quad r_{23} = x_\beta.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Como podemos ver, todas las soluciones corresponden a triángulos escalenos, donde hemos incluido el caso particular $r_{12} = x_c$. De nuevo hacemos la observación de que todas las soluciones deben satisfacer la desigualdad triangular. El siguiente paso es analizar el momento de inercia para las soluciones anteriores que representamos en la figura 2.7.

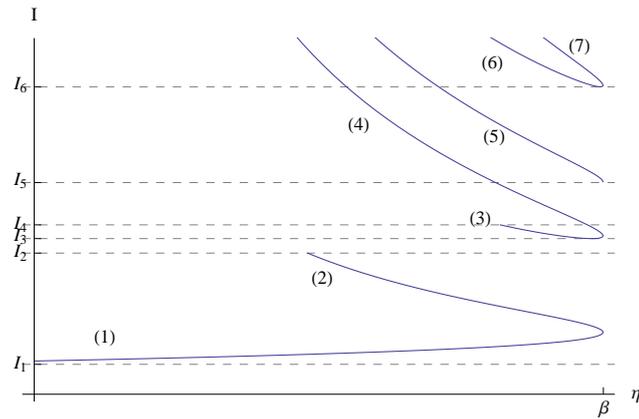


Figura 2.7: *Comportamiento del momento de inercia en el caso en que tres masas son diferentes.*

Las curvas en la Fig. 2.7 corresponden a:

- (1) $I = \frac{1}{9}(x_\alpha^2 + x_a^2 + x_1^2)$ en el intervalo (I_1, I_2) .
- (2) $I = \frac{1}{9}(x_\alpha^2 + x_a^2 + x_2^2)$ en el intervalo $(I_1, I_2]$.
- (3) $I = \frac{1}{9}(x_\alpha^2 + x_b^2 + x_1^2)$ en el intervalo $[I_3, I_4]$.
- (4) $I = \frac{1}{9}(x_\alpha^2 + x_b^2 + x_2^2)$ en el intervalo $(I_4, I_8]$.
- (5) $I = \frac{1}{9}(x_\beta^2 + x_a^2 + x_2^2)$ en el intervalo $[I_5, I_7]$.
- (6) $I = \frac{1}{9}(x_\beta^2 + x_b^2 + x_1^2)$ en el intervalo $[I_6, I_9]$.

- (7) $I = \frac{1}{9}(x_\beta^2 + x_b^2 + x_2^2)$, en el intervalo (I_6, ∞) .
- $I = \frac{1}{9}(x_\beta^2 + x_a^2 + x_1^2)^*$.

Entre las ecuaciones anteriores para el momento de inercia, solamente $9I = x_\beta^2 + x_b^2 + x_2^2$ e $9I = x_\alpha^2 + x_a^2 + x_1^2$, no tienen restricciones respecto a la desigualdad triangular. La última solución, que aparece con * no se encuentra en la figura 2.7 porque para los valores de las constantes A_i y B_i que hemos considerado, esta curva nunca satisface la desigualdad triangular, y para $I \leq I_1$ no existen equilibrios relativos.

Para $9I = x_\alpha^2 + x_a^2 + x_2^2$, cuando $x_\alpha + x_a = x_2$ la solución plana bifurca en colineal y tenemos un valor de bifurcación cuando $I_2 = 0,138852 \dots$. Lo mismo sucede para $9I = x_\alpha^2 + x_b^2 + x_1^2$ en $I_4 = 0,156719 \dots$, cuando $x_\alpha + x_1 = x_b$. Los otros valores de bifurcación corresponden a $I_3 = 0,148549 \dots$, para $9I = x_\alpha^2 + x_b^2 + x_2^2$ cuando $x_\alpha + x_2 = x_b$, $I_8 = 0,810628 \dots$, para $9I = x_\beta^2 + x_a^2 + x_2^2$ cuando $x_a + x_2 = x_\beta$, y para $9I = x_\beta^2 + x_b^2 + x_1^2$ en $I_9 = 2,38542 \dots$ donde $x_b + x_1 = x_\beta$. Por otra parte, esta última curva presenta un valor mínimo, obteniendo el valor de bifurcación $I_6 = 0,25$. Con todo lo anterior, hemos probado la existencia de nueve valores de bifurcación para el momento de inercia, además, obtenemos la siguiente clasificación para las configuraciones centrales planas.

- Si $I \in [0, I_1]$, no existe equilibrios relativos.
- Si $I \in (I_1, I_2]$, existe un triángulo escaleno.
- Si $I \in (I_2, I_3)$, no existen equilibrios relativos.
- Si $I = I_3$, existe un triángulo escaleno.
- Si $I \in (I_3, I_4]$, existen dos triángulos escalenos.
- Si $I \in (I_4, I_5)$, existe un triángulo escaleno.
- Si $I \in [I_5, I_6)$, existen dos triángulos escalenos.
- Si $I = I_6$, existen tres triángulos escalenos.
- Si $I \in (I_6, I_7]$, existen cuatro triángulos escalenos.
- Si $(I_7, I_8]$, existen tres triángulos escalenos.
- Si $(I_8, I_9]$, existen dos triángulos escalenos.
- Si (I_9, ∞) , existe un triángulo escaleno.

Resumiendo, los valores de bifurcación que hemos descrito para el caso de tres partículas con diferente masa son:

- I_1 , donde las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son cero.
- I_2 , donde la solución (2) bifurca en una configuración colineal.
- I_3 , en donde la curva solución (3) tiene un punto mínimo, aquí, después de un intervalo sin soluciones, de nuevo existe una solución de triángulo escaleno.
- I_4 , en donde la curva (3) bifurca en una configuración colineal, aquí el comportamiento de las soluciones cambia de dos a una familia.
- I_5 , en donde la curva (5) y * coinciden, pero para el caso donde * no tiene solución, el comportamiento de las soluciones cambia de una a dos familias de soluciones.
- I_6 , en donde la curva (6) tiene un punto mínimo. El número de soluciones cambia de dos a tres y después de pasar por el punto mínimo, existen cuatro familias de soluciones.
- I_7 , en donde la curva (5) bifurca en una configuración colineal. Aquí el número de soluciones cambia de cuatro a tres.
- I_8 , en donde la curva (4) bifurca en una configuración colineal, el número de soluciones cambia de tres a dos familias.
- I_9 , en donde la curva de soluciones escalenas (6), bifurca en una configuración colineal. Después de este punto hay solamente una familia de soluciones.

Con todo lo anterior hemos concluido la prueba del teorema. □

En la Tabla 2.4 se muestra el número total de equilibrios relativos dependiendo del tamaño del momento de inercia.

Observación 4. *Como en el Teorema anterior, los nueve valores de bifurcación en términos del momento de inercia I , dependen de la elección particular de las constantes que aparecen en la definición de las funciones involucradas.*

I	N^0	I	N^0	I	N^0
$(0, I_1]$	0	$(I_1, I_2]$	6	(I_2, I_3)	0
$I = I_3$	6	$(I_3, I_4]$	12	(I_4, I_5)	6
$I = I_5$	12	$[I_5, I_6)$	12	$I = I_6$	18
$(I_6, I_7]$	24	(I_7, I_8)	18	$(I_8, I_9]$	12
(I_9, ∞)	6				

Cuadro 2.4: *Número total de equilibrios relativos respecto al momento de inercia para tres masa diferentes.*

2.2.4. Caso IV: constantes positivas.

Finalmente analizaremos las configuraciones centrales planas en el problema de tres cuerpos con el potencial de Schwarzschild, cuando todas las constantes A_i y B_i involucradas en las ecuaciones de movimiento son positivas. El resultado principal es el siguiente:

Teorema 5. *En el problema de 3-cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild con constantes $A_i > 0$ y $B_i > 0$, no existen valores de bifurcación con respecto al momento de inercia. Las configuraciones centrales deben pertenecer a una de las siguientes familias:*

- *Si las tres masas son iguales, entonces todas las configuraciones planas deben ser arreglos de las partículas en triángulos equiláteros.*
- *Si dos masas son iguales, entonces todas las configuraciones deben ser arreglos de las partículas en triángulos isósceles.*
- *Si las tres masas son diferentes, entonces todas las configuraciones planas deben ser arreglos de las partículas en triángulos escalenos.*

Demostración: Como en los casos previos analizamos las ecuaciones

$$f(r_{12}) = kf(r_{13}) = k_1f(r_{23}) = \omega^2, \quad (2.30)$$

redefinimos las funciones anteriores como $f(r_{12}) = f(x) = \frac{A_1}{x^3} + \frac{B_1}{x^5}$, $kf(r_{13}) = g(x)$ y $k_1f(r_{23}) = h(x)$, con $A > 0$ y $B > 0$. Si las tres masas son iguales, tenemos $A_1 = A_2 = A_3 = A$ y $B_1 = B_2 = B_3 = B$, en este caso las tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son iguales, esto quiere decir que las distancias mutuas entre las partículas son las mismas, de tal forma que las partículas deben formar un triángulo equilátero (ver figura 2.8).

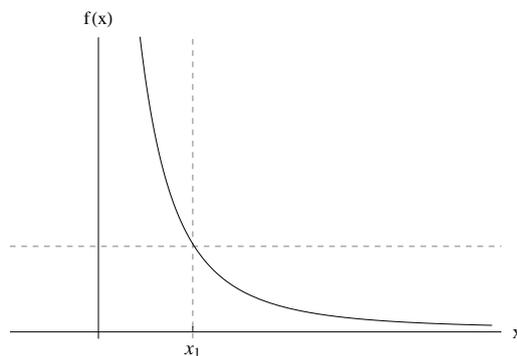


Figura 2.8: *Comportamiento de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ cuando las tres masas son iguales.*

Cuando sólo dos de las masas son iguales, entonces dos de las funciones anteriores son iguales. Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x) = h(x)$, y que la función $g(x)$ es trasladada respecto al eje vertical (es decir, queda encima o debajo de la función $f(x)$) por algún factor positivo k , como en la figura 2.9. En este caso existen dos puntos diferentes x_1 y x_2 que satisfacen la

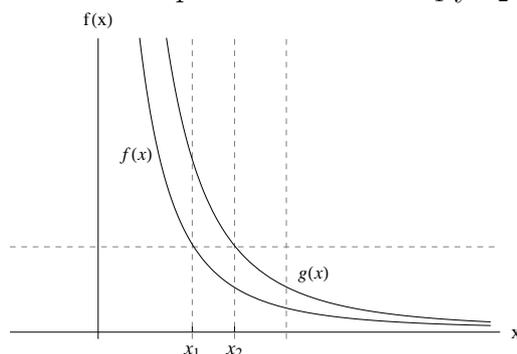


Figura 2.9: *Comportamiento de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ cuando dos masas son iguales.*

ecuación (2.30), pero x_1 es un valor común a $f(r_{12}) = f(r_{13})$, así que tenemos dos distancias iguales a x_1 y otra $x_2 \neq x_1$, esto implica que los arreglos de las tres partículas deben corresponder a un triángulo isósceles.

Para el caso en que las tres masas son diferentes, las constantes A_i y B_i son diferentes para todo $i = 1, 2, 3$, así como también lo son las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ (ver Figura 2.10). En este caso tenemos tres puntos diferentes x_1 , x_2 y x_3 , los cuales satisfacen la ecuación (2.30), esto significa que las tres distancias mutuas que conforman el correspondiente triángulo son diferentes, así que tenemos una solución de triángulo escaleno. Esto termina la prueba del Teorema 5. \square

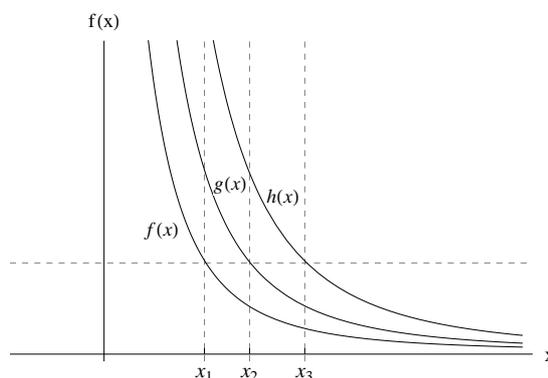


Figura 2.10: Comportamiento de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ cuando las tres masas son diferentes.

2.3. Configuraciones centrales colineales.

En esta última sección analizaremos el caso de configuraciones centrales colineales, es decir, asumiremos que las tres partículas están ubicadas en una línea recta en todo instante de tiempo. Iniciamos considerando que $A_i > 0$ y $B_i >$ para toda $i = 1, 2, 3$. Fijamos el centro de masa en el origen, y asumimos que las partículas están localizadas en posiciones arbitrarias pero fijas, una de ellas a una distancia x del origen y las otras dos a distancias αx y βx (ver figura 2.11). Bajo estas condiciones obtenemos el siguiente resultado:

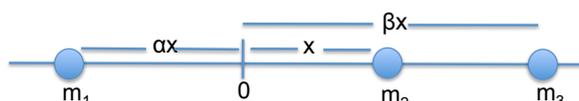


Figura 2.11: Configuración Colineal con tres masa distintas.

Teorema 6. *En el problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild con constantes $A_i > 0$ y $B_i >$ para toda $i = 1, 2, 3$, existen tres configuraciones colineales planas, una por cada orden de las partículas.*

Demostración: Las ecuaciones de movimiento (2.2), junto con la condición para tener una configuración central (2.6), pueden ser escritas en este caso como:

$$m_1 \alpha \ddot{x} = \frac{A_3}{(\alpha x + x)^2} + \frac{B_3}{(\alpha x + x)^4} + \frac{A_2}{(\alpha x + \beta x)^2} + \frac{B_2}{(\alpha x + \beta x)^4}, \quad (2.31)$$

$$\alpha\ddot{x} = \lambda\alpha x,$$

$$m_2\ddot{x} = \frac{A_3}{(\alpha x + x)^2} + \frac{B_3}{(\alpha x + x)^4} + \frac{A_1}{(\beta x - x)^2} + \frac{B_1}{(\beta x - x)^4}, \quad (2.32)$$

$$\ddot{x} = \lambda x,$$

$$m_3\beta\ddot{x} = \frac{A_1}{(\beta x - x)^2} + \frac{B_1}{(\beta x - x)^4} + \frac{A_2}{(\alpha x + \beta x)^2} + \frac{B_2}{(\alpha x + \beta x)^4}, \quad (2.33)$$

$$\beta\ddot{x} = \lambda\beta x.$$

Donde α y β son funciones que dependen del tiempo y la condición para que el centro de masas se encuentre en el origen es

$$\alpha x m_1 + x m_2 + \beta x m_3 = 0. \quad (2.34)$$

Usando la ecuación (2.34), podemos expresar alguna de las tres posiciones como una combinación de las otras dos; por ahora tomaremos

$$\alpha x m_1 = -x(m_2 + m_3\beta), \quad (2.35)$$

de este modo, sólo trabajaremos con las ecuaciones (2.32) y (2.33) que pueden ser reescritas como

$$-m_2\lambda x^5 + \frac{A_3}{(\alpha + 1)^2}x^2 + \frac{B_3}{(\alpha + 1)^4} + \frac{A_1}{(\beta - 1)^2}x^2 + \frac{B_1}{(\beta - 1)^4} = 0, \quad (2.36)$$

$$-m_3\lambda\beta x^5 + \frac{A_1}{(\beta - 1)^2}x^2 + \frac{B_1}{(\beta - 1)^4} + \frac{A_2}{(\alpha + \beta)^2}x^2 + \frac{B_2}{(\alpha + \beta)^4} = 0. \quad (2.37)$$

Para la última expresión obtenemos un polinomio de grado quinto dado por

$$\begin{aligned} & - (m_2 + m_3\beta)\lambda x^5 + \left(\frac{A_3}{(\alpha + 1)^2} + \frac{2A_1}{(\beta - 1)^2} + \frac{A_2}{(\alpha + \beta)^2} \right) x^2 \\ & + \frac{B_3}{(\alpha + 1)^4} + \frac{2B_1}{(\beta - 1)^4} + \frac{B_2}{(\alpha + \beta)^4} = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

por la regla de signos de *Descartes* este polinomio tiene solamente un cambio de signo y por consiguiente tiene una única raíz real positiva, es decir, un única solución real positiva por cada orden de las partículas. \square

Observación 5. *El teorema 6 es un caso particular del teorema de Moulton para potenciales cuasihomogéneos con constantes $A_i = 1$ y $B_i = 1$ para todo i , obtenido por Diacu, Pérez-Chavela y Santoprete en [21].*

Ahora estudiaremos el caso en el que algunas de las constantes son negativas, donde obtenemos el siguiente resultado

Teorema 7. *En el problema de tres cuerpos bajo el potencial de Shwarzschild con $A_i > 0$, $B_i < 0$ para todo $i = 1, 2, 3$, con $A_i \neq A_j$ y $B_i \neq B_j$, existen seis configuraciones centrales colineales, dos por cada orden de las partículas.*

Demostración: Procedemos como en la prueba del Teorema 6. En este caso el polinomio de grado quinto que se obtiene tiene la forma

$$p(x) = - (m_2 + m_3\beta)\lambda x^5 + \left(\frac{A_3}{(\alpha + 1)^2} + \frac{2A_1}{(\beta - 1)^2} + \frac{A_2}{(\alpha + \beta)^2} \right) x^2 - \frac{B_3}{(\alpha + 1)} - \frac{2B_1}{(\beta - 1)^4} - \frac{B_2}{(\alpha + \beta)^4} = 0, \quad (2.39)$$

de nuevo aplicando la regla de signos de Descartes el polinomio anterior tiene dos cambios de signo, así que puede tener cero o dos raíces reales positivas. Ahora, ya que $p(0) < 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty$, y $p(x)$ tiene un máximo local positivo x_0 con $f(x_0) > 0$, obtenemos que $p(x)$ tiene exactamente dos raíces positivas, es decir, dos soluciones reales positivas por cada orden de las partículas. \square

Observación 6. *El resultado anterior está en concordancia con la clasificación de las configuraciones centrales planas, donde para tres masas diferentes, encontramos seis diferentes configuraciones centrales colineales provenientes de un valor de bifurcación de una configuración plana.*

Finalmente analizaremos los valores de bifurcación en el momento de inercia, obtenidos para las configuraciones centrales planas de tres masas diferentes (ver sección 2.2.3), de acuerdo al número de configuraciones colineales. En este caso obtenemos la siguiente clasificación:

- Si $I \in [0, I_2]$, no existen configuraciones centrales colineales.
- Si $I = I_2$, existe una única configuración central colineal.
- Si $I \in (I_2, I_4)$, no existen configuraciones centrales colineales.
- Si $I = I_4$, existe sólo una configuración central colineal.
- Si $I \in (I_4, I_7)$, no existen configuraciones centrales colineales.

- Si $I = I_7$, existe sólo una configuración central colineal.
- Si $I \in (I_7, I_8)$, no existen configuraciones centrales colineales.
- Si $I = I_8$, existe una única configuración central colineal.
- Si $I \in (I_8, I_9)$, no existen configuraciones centrales colineales.
- Si $I > I_9$, existe sólo una configuración central colineal.

Corolario 1. *En el problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild, donde dos partículas tienen las mismas constantes, con $A_i > 0$, $B_i < 0$ para todo $i = 1, 2, 3$,, existen tres configuraciones centrales colineales.*

Demostración: Aquí tenemos dos ordenaciones de las masas m_1, m_3, m_2 de la forma (M, m, m) . Procediendo como en la demostración del último teorema obtenemos un polinomio de grado cinco con dos cambios de signo, estas soluciones son triángulos escalenos y corresponden con las dos *configuraciones centrales* colineales escalenas que obtuvimos en el caso plano. Para encontrar las soluciones colineales isósceles analizamos la otra posible ordenación m, M, m , colocamos las partículas a distancias α, β y $x + \beta$. En este caso obtenemos el polinomio

$$\begin{aligned} & x^4(x + \beta)(A_1\gamma^2(x + \gamma)^4 - B_1(x + \gamma)^4 + A\gamma^4(x + \gamma)^2 - B\gamma^4) \\ & - \alpha\gamma^4(A_1x^2(x + \gamma)^4 - B_1(x + \gamma)^4 + Ax^4(x + \gamma)^2 - Bx^4) = 0, \end{aligned}$$

ahora, si $\gamma = \alpha + \beta$, es solución del polinomio anterior obtenemos:

$$(\gamma + \beta)(16A_1\gamma^6 - 16B_1\gamma^4 + 4A\gamma^6 - B\gamma^4) - \alpha(16A_1\gamma^6 - 16B_1\gamma^4 + 4A\gamma^6 - B\gamma^4) = 0,$$

el cual puede ser factorizado como

$$(2\beta)(16(A_1\gamma^2 - B_1) + 4A\gamma^2 - B) = 0,$$

observemos que la última expresión sólo tiene una solución positiva cuando $\beta \neq 0$. Con todo lo anterior hemos obtenido una solución colineal isósceles como esperábamos. Este resultado concuerda con el caso plano. En resumen, hemos encontrado tres *configuraciones centrales* diferentes. Lo cual prueba el Corolario. \square

2.4. Potenciales cuasihomogéneos.

Los resultados que hemos obtenido para las configuraciones centrales planas no colineales, interactuando bajo el potencial de Schwarzschild, se pueden generalizar utilizando la misma técnica, para el caso de tres masas cuya interacción mutua esta dada por un potencial cuasihomogéneo, cuya forma general esta dada por la expresión

$$U(r) = \frac{A}{r^\alpha} + \frac{B}{r^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.40)$$

Siguiendo la línea de presentación que hemos seguido hasta el momento, consideraremos un primer caso en el que $\beta > \alpha$ y las tres masas son iguales, con $A > 0$ y $B < 0$. Bajo estas condiciones podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 8. *Sea el problema de tres cuerpos, donde la interacción entre las partículas esta dada por un potencial cuasihomogéneo con $\beta > \alpha$, $A > 0$ y $B < 0$. Si consideramos que los tres cuerpos tienen masas iguales, i.e., $A = A_1 = A_2 = A_3 > 0$ y $B = B_1 = B_2 = B_3$, entonces las configuraciones centrales son triángulos equiláteros o isósceles, donde el número de configuraciones depende del valor del momento de inercia, en el cual, aparecen cuatro valores de bifurcación.*

Demostración: Como en el caso del teorema 2, las configuraciones centrales corresponden a soluciones del sistema

$$\frac{\alpha A}{r_{12}^{\alpha+2}} + \frac{\beta B}{r_{12}^{\beta+2}} = \frac{\alpha A}{r_{13}^{\alpha+2}} + \frac{\beta B}{r_{13}^{\beta+2}} = \frac{\alpha A}{r_{23}^{\alpha+2}} + \frac{\beta B}{r_{23}^{\beta+2}} = \omega^2. \quad (2.41)$$

Para ser consistentes con la notación utilizada a lo largo de este capítulo, abusando de la notación suprimiremos algunas constantes que no alteraran nuestro análisis, de tal manera que estudiaremos la expresión anterior en la forma

$$\frac{A}{r_{12}^{\alpha+2}} + \frac{B}{r_{12}^{\beta+2}} = \frac{A}{r_{13}^{\alpha+2}} + \frac{B}{r_{13}^{\beta+2}} = \frac{A}{r_{23}^{\alpha+2}} + \frac{B}{r_{23}^{\beta+2}} = \omega^2. \quad (2.42)$$

Para analizar esta expresión, sea $f(x) = \frac{A}{x^{\alpha+2}} + \frac{B}{x^{\beta+2}}$ con $A > 0$ y $B < 0$, cuya derivada es $f'(x) = -(\alpha+2)\frac{A}{x^{\alpha+3}} + (\beta+2)\frac{B}{x^{\beta+3}}$. Para valores positivos de la función $f(x)$ obtenemos que:

- 1) la función es cero para $x_0 = (B/A)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}$,

2) presenta un máximo en $x_c = ((\beta + 2)B/(\alpha + 2)A)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}$,

3) tiene por límites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Por lo tanto la gráfica genérica para la función $f(x) \geq 0$ corresponde a la representación de la figura 2.12.

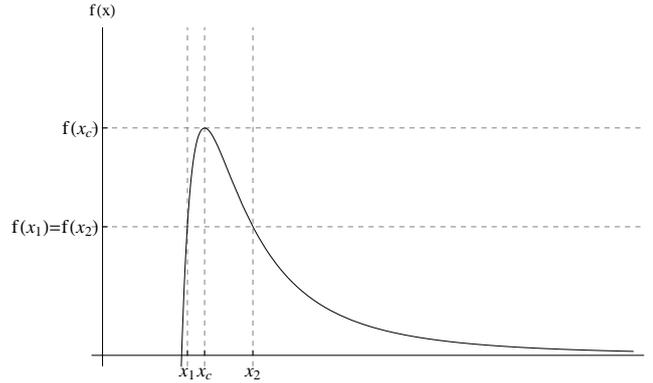


Figura 2.12: Gráfica de la función $f(x) = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$ con $\alpha > \beta$, $A > 0$ y $B < 0$.

De lo anterior, el estudio de la expresión (2.42) se reduce al de

$$f(r_{12}) = f(r_{13}) = f(r_{23}) = \omega^2, \quad (2.43)$$

donde fijando un valor arbitrario $\eta \in (0, \beta)$, siendo $\beta = f(x_c)$, podemos encontrar dos valores diferentes, $x_1 \in (x_0, x_c)$ y $x_2 \in (x_c, +\infty)$, los cuales satisfacen que $f(x_1) = \eta$ como se puede apreciar en la figura 2.12. Como mostramos en la sección 2.2.1 con estos dos valores encontramos ocho soluciones diferentes de la ecuación (2.43), que cualitativamente corresponden a las descritas en (2.16) a (2.20), es decir, corresponden a triángulos equiláteros e isósceles.

Para analizar el comportamiento del momento de inercia en función de las soluciones de (2.43), seguiremos considerando la ecuación (2.11) con masas iguales $m = 1/3$ y masa total $M = 1$. Obtenemos dos familias de soluciones correspondientes a configuraciones equiláteras, dadas por:

- $I = \frac{1}{3}x_1^2$, donde $x_1 \in (x_0, x_c]$,
- $I = \frac{1}{3}x_2^2$, donde $x_2 \in [x_c, \infty]$,

y dos familias de soluciones correspondientes a configuraciones isósceles, dadas por:

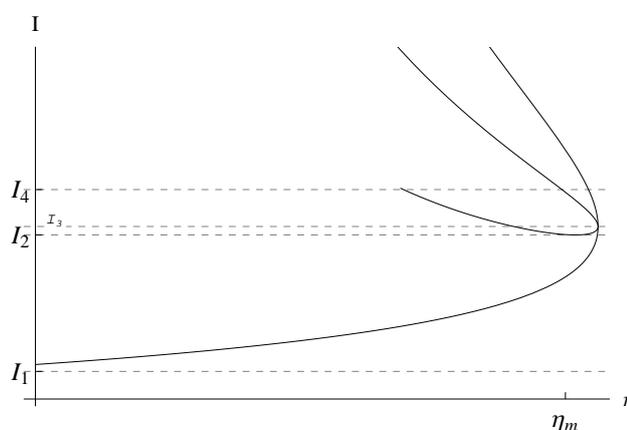


Figura 2.13: *Comportamiento del momento de inercia para $f(x) = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$ con $\alpha > \beta$, $A > 0$ y $B < 0$.*

- $I = \frac{1}{9}(2x_2^2 + x_1^2),$
- $I = \frac{1}{9}(2x_1^2 + x_2^2).$

Una gráfica genérica de estas cuatro familias de soluciones es representada en la figura 2.13. Dado que la familia de soluciones representada por $9I = 2x_1^2 + x_2^2$, es la única que no siempre satisface la desigualdad triangular, haremos un estudio mas detallado de la misma.

Dado que x_2 toma valores en el intervalo $[x_c, \infty)$, si $2x_1 = x_2$, entonces la solución correspondiente a una configuración triangular, bifurca en una configuración colineal, para un cierto par de valores que dependerán de los valores de las constantes α, β, A y B . Para hacer una estimación sobre estos valores primero consideremos que $x_1 = x_c - \epsilon$ y $x_2 = x_c + \epsilon$, evaluamos el momento de inercia en estos valores y lo comparamos con su valor en el punto critico. Así obtenemos que

$$I = 3x_c^2 - 2\epsilon x_c + 3\epsilon^2 \leq 3x_c^2. \quad (2.44)$$

La expresión anterior es valida si $\epsilon \leq \frac{2}{3}x_c$, esto quiere decir que para valores pequeños de ϵ el momento de inercia dado por $9I = 2x_1^2 + x_2^2$, es una función decreciente. Si ϵ puede tomar valores tales que $\epsilon \geq \frac{2}{3}x_c$, entonces $I \geq 3x_c$ y por lo tanto en algún punto la curva habría pasado de decreciente a creciente.

Para estudiar este caso hagámonos una idea de la ubicación de $\frac{2}{3}x_c$, comparándolo con el punto donde $f(x)$ se hace cero, es decir, queremos determinar si $\frac{2}{3}x_c > x_0$ o $\frac{2}{3}x_c < x_0$.

Después de algunos cálculos encontramos que

$$\left(\frac{\beta+2}{\alpha+2}\right) < \left(\frac{3}{2}\right)^{\beta-\alpha} \quad (2.45)$$

para todo $\alpha \geq 1$, $\beta > \alpha$. Por lo tanto $\frac{2}{3}x_c < x_0$, lo cual a su vez implica que $x_c - x_0 \leq \frac{1}{3}$.

Tomando valores de x_1 y x_2 en la bola de centro x_c y radio $\frac{1}{2}x_c$, encontramos que en el caso límite a la izquierda $x_1 = x_0$ y tomando $x_2 = \frac{3}{2}x_c$ se satisface la desigualdad triangular, es decir

$$2\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{(\beta+2)B}{(\alpha+2)A}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}, \quad (2.46)$$

ya que esta expresión se puede simplificar como

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\beta-\alpha} \geq \left(\frac{\beta+2}{\alpha+2}\right)^{\beta-\alpha},$$

que es válida para todo $\alpha \geq 1$, $\beta - \alpha \geq 1$. Por lo tanto si es válida para $x_1 = x_0$, también es válida para cualquier otro $x_1 > x_0$. Ahora queremos determinar si en esta bola existen x_1 y x_2 tales que, el momento de inercia evaluado en dichos valores, sea mayor que al evaluarlo en el punto crítico x_c . Para esto tomemos el valor límite a la derecha $x_2 = \frac{3}{2}x_c$ y busquemos un x_1 que satisfaga la desigualdad

$$2x_1^2 + \frac{9}{4}x_c^2 \geq 3x_c^2, \quad (2.47)$$

es decir, $x_1 \geq \frac{\sqrt{6}}{4}x_c$, pero $x_0 \geq \frac{2}{3}x_c > \frac{\sqrt{6}}{4}x_c$. Como esto es cierto para x_0 , también lo es para todo $x_1 \geq x_0$. Luego dentro de esta bola y para un cierto número de valores fuera de ella, siempre encontraremos x_1 y x_2 que satisfacen

$$2x_1^2 + x_2^2 \geq 3x_c^2, \quad (2.48)$$

por lo tanto la función $9I = 2x_1^2 + x_2^2$ en algún punto cambia de decreciente a creciente, es decir, tiene un punto crítico que es un mínimo, con lo que para cualesquier $A > 0$, $B < 0$, $\beta > \alpha \geq 1$ la figura (2.13) es genérica. \square

Capítulo 3

El problema isósceles

El objetivo de este capítulo será realizar un análisis cualitativo de un sistema de tres masas $m_1 = m_2 = M$ y $m_3 = m$, que para todo tiempo preservan una configuración de triángulo isósceles, donde la interacción mutua entre las masas está dada por el potencial de Schwarzschild y nos restringimos únicamente al caso en que todas las fuerzas son atractivas. Estudiaremos el comportamiento de las órbitas cuando las masas se encuentran cerca de colisión, para lo cual induciremos un blow-up en el sistema de coordenadas originales, siguiendo el procedimiento estándar de McGehee y considerando que $M > m$. Mostraremos que a diferencia del caso clásico, existen órbitas que al aproximarse a colisión, no corresponden a una configuración central y que además las masas M pueden ir a colisión espiraleando respecto al centro de masa, es decir, la colisión triple se puede dar con momento angular distinto de cero. Los resultados que presentamos a lo largo de este capítulo son originales y aparecen en [7].

3.1. Ecuaciones de movimiento.

Consideremos tres masas $m_1 = m_2 = M$ y $m_3 = m$, interactuando mutuamente bajo el potencial del Schwarzschild, con su centro de masa fijo en el origen (ver figura 3.1). En coordenadas de Jacobi, \mathbf{r}_1 representa el vector de m_1 a m_2 y \mathbf{r}_2 representa el vector desde el centro de masa de m_1 y m_2 a m_3 . Con \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 los momentos asociados, el Hamiltoniano respectivo es dado por

$$H = \frac{1}{m} \mathbf{p}_1^2 + \frac{2M + m}{4mM} \mathbf{p}_2^2 + U_{12}(|\mathbf{r}_1|) + U_{13} \left(\left| \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{r}_1 \right| \right) + U_{23} \left(\left| \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{r}_1 \right| \right),$$

donde los U_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, son potenciales tipo Schwarzschild. El

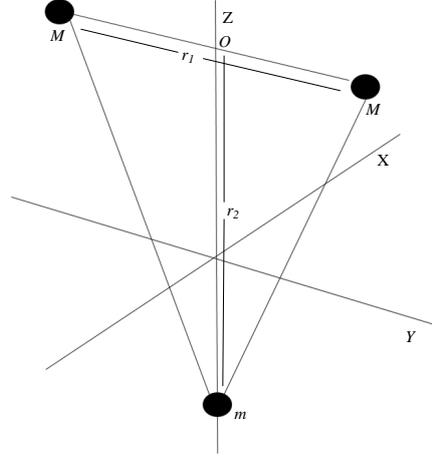


Figura 3.1: Problema de tres cuerpos isósceles en el espacio. El centro de masa de las tres partículas está fijo en el origen. Tomando O como el centro de masa de las partículas con masa M , se define el sistema en coordenadas de Jacobi con los vectores r_1 y r_2 .

sistema es invariante bajo la acción del grupo $SO(3)$ de rotaciones espaciales, sobre las configuraciones $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{colisiones}\}$ lo que conduce a la conservación de los conjuntos de nivel del mapeo momentum

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2.$$

En nuestro modelo, las masas M están confinadas a un plano horizontal, colocadas simétricamente con respecto a su centro de masa común O , mientras que m , se puede mover sobre el eje vertical perpendicular al plano xy en O . Para movimientos con momento angular igual a cero, las masas están ubicadas en el plano inicial en todo tiempo, mientras que para movimientos con momento angular distinto de cero, las masas M están rotando alrededor del eje vertical que contiene a m . El movimiento descrito por un sistema Hamiltoniano en coordenadas $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (0, 0, z_2)$ y momentum $\mathbf{p}_1 = (p_{x_1}, p_{y_1}, 0)$ y $\mathbf{p}_2 = (0, 0, z_2)$, respectivamente, es

$$H : (\mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, y_1, z_2) \mid x_1^2 + y_1^2 = 0\}) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{M} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2) + \frac{2M + m}{4Mm} p_{z_2}^2 + U(x_1, y_1, z_2), \quad (3.1)$$

donde el potencial se escribe como

$$U(x_1, y_1, z_2) = -\frac{A}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{B}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)^3}} - \frac{4A_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 4z_2^2}} \quad (3.2)$$

$$-\frac{16B_1}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + 4z_2^2)^3}}$$

con A , A_1 , B y B_1 constantes positivas, y donde la integral del momento angular está dada por

$$C = x_1 p_{y_1} - y_1 p_{x_1}. \quad (3.3)$$

Es conveniente pasar el sistema a coordenadas cilíndricas $(x_1, y_1, z_2, p_{x_1}, p_{y_1}, z_2) \rightarrow (R, \phi, z, P_R, P_\phi, P_z)$, dado por el cambio de variables

$$x_1 = R \cos \phi, \quad y_1 = R \sin \phi, \quad z_2 = z$$

y su transformación canónica asociada del momento. Así el Hamiltoniano toma la forma

$$H(R, \phi, z, P_R, P_\phi, P_z) = \frac{1}{M} \left(P_R^2 + \frac{P_\phi^2}{R^2} \right) + \frac{2M + m}{4mM} p_z^2 + U(R, z), \quad (3.4)$$

con

$$U(R, z) = -\frac{A}{R} - \frac{B}{R^3} - \frac{4A_1}{\sqrt{R^2 + 4z^2}} - \frac{16B_1}{(R^2 + 4z^2)\sqrt{R^2 + 4z^2}}. \quad (3.5)$$

Las ecuaciones de movimiento para las variables (ϕ, P_ϕ) son

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{2P_\phi}{MR^2}, \quad \dot{P}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0.$$

La conservación del momento angular $p_\phi = C$, permite la reducción de la dinámica a un sistema de dos grados de libertad, con dinámica determinada por el Hamiltoniano reducido

$$H_{\text{red}}(R, z, P_R, P_z; C) = \frac{1}{M} \left(p_R^2 + \frac{C^2}{R^2} \right) + \frac{2M + m}{4mM} p_z^2 + U(R, z). \quad (3.6)$$

Lo anterior puede ser entendido como un sistema de la forma energía cinética más energía potencial:

$$H_{\text{red}}(R, z, P_R, P_z; C) = \frac{1}{2} (p_R, p_z) \begin{pmatrix} \frac{2}{M} & 0 \\ 0 & \frac{2M+m}{2mM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_R \\ p_z \end{pmatrix} + U_{\text{eff}}(R, z), \quad (3.7)$$

donde el potencial efectivo (o aumentado) es

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(R, z; C) &:= \frac{C^2}{MR^2} + U(R, z) \\ &= \frac{C^2}{MR^2} - \frac{A}{R} - \frac{B}{R^3} - \frac{4A_1}{(R^2 + 4z^2)^{1/2}} - \frac{16B_1}{(R^2 + 4z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A lo largo de cualquier solución integral, la energía se conserva lo cual se ve como

$$H_{\text{red}}(R(t), z(t), P_R(t), P_z(t); C) = \text{const}, = h \quad (3.9)$$

y las ecuaciones de movimiento correspondientes son

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{2}{M} p_R, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial R} = -\left(-\frac{2C^2}{MR^3} + \frac{A}{R^2} + \frac{3B}{R^4} + \frac{4A_1 R}{(R^2 + 4z^2)^{3/2}} + \frac{3 \cdot 16B_1 R}{(R^2 + 4z^2)^{5/2}} \right), \\ \dot{z} &= \frac{2M + m}{2mM} p_z, \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -\left(\frac{4A_1}{(R^2 + 4z^2)^{3/2}} + \frac{3 \cdot 16B_1}{(R^2 + 4z^2)^{5/2}} \right) 4z. \end{aligned}$$

Observación 7. *La subvariedad*

$$\{(R, z, P_R, P_z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid z = 0, p_z = 0\} \quad (3.10)$$

es invariante. Físicamente, esta subvariedad contiene movimientos planos, i.e., movimientos donde las tres partículas están en el mismo plano, con las masas M simétricamente dispuestas con respecto a su centro de masa O , y con m restringida a permanecer en el origen para todo tiempo. El estudio de los movimientos en esta variedad, serán el objetivo de la sección 3.4.2.

Observación 8. *El problema isósceles bajo el potencial de Schwarzschild contiene seis parámetros: m , M , A , A_1 , B y B_1 . Sin pérdida de generalidad, podemos tomar alguno de estos parámetros igual a uno, con lo que solo debemos considerar cinco parámetros independientes.*

3.2. Equilibrios relativos.

Siguiendo la metodología clásica, para momento angular distinto de cero, los equilibrios de (3.7) son en efecto equilibrios relativos (ver Definición 2), esto significa que son soluciones, las cuales son también órbitas uno paramétricas del grupo de simetría. Aquí las órbitas están parametrizadas por C y representarán soluciones donde las masas M están rotando alrededor del eje vertical z .

Proposición 2. *Consideremos el problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild y sea C la magnitud del momento angular. Sin pérdida*

de generalidad, consideremos $C > 0$. (Para $C < 0$ se obtienen los mismos resultados, pero donde el giro del momento angular es en dirección opuesta.)
Sea

$$C_0 := \sqrt[4]{3M^2(A + 4A_1)(B + 16B_1)}$$

Entonces:

1. Si $C < C_0$ no existen equilibrios relativos.
2. Si $C = C_0$ existe un equilibrio relativo y éste corresponde a una configuración colineal donde las masas iguales están situadas en

$$R_0 = \frac{C^2}{M(A + 4A_1)}. \quad (3.11)$$

Este equilibrio relativo es degenerado, espectralmente estable, teniendo como valores propios un par de ceros.

3. Si $C > C_0$ existen dos equilibrios relativos, ambos de configuración colineal con las dos masas iguales ubicadas en

$$R_1 = \frac{C^2 - \sqrt{C^4 - C_0^4}}{M(A + 4A_1)} \quad R_2 = \frac{C^2 + \sqrt{C^4 - C_0^4}}{M(A + 4A_1)}. \quad (3.12)$$

El equilibrio relativo $(R_2, 0)$ es no-linealmente estable (y por lo tanto espectralmente estable), mientras que $(R_1, 0)$ es inestable.

Demostración: Los equilibrios relativos del sistema dado por el Hamiltoniano (3.7) corresponde a los puntos críticos del potencial efectivo (3.9) donde:

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial R} = \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial z} = 0. \quad (3.13)$$

Para $C \geq C_0$ encontramos soluciones con $z = 0$ y $R = R_{1,2}$, dadas por

$$R_{1,2} = \frac{C^2 \pm \sqrt{C^4 - C_0^4}}{M(A + 4A_1)}. \quad (3.14)$$

Para $C > C_0$, la *estabilidad no-lineal* de los equilibrios relativos puede ser establecida calculando D_2U_{eff} en $(R_{1,2}, 0)$. Más precisamente, si D_2U_{eff} evaluada en uno de los equilibrios relativos es definida positiva, entonces dicho equilibrio relativo es *no-linealmente estable* (ver [3, 29]).

De lo anterior tenemos que

$$D_2U_{\text{eff}}|_{z=0} = \begin{pmatrix} \frac{6C^2}{MR^4} - \frac{2(A+4A_1)}{R^3} - \frac{12(B+16B_1)}{R^5} & 0 \\ 0 & \frac{16A_1}{R^3} + \frac{192B_1}{R^5} \end{pmatrix}.$$

Debemos comprobar que D_2U_{eff} es definida positiva en $(R_1, 0)$ y $(R_2, 0)$. Para esto debemos analizar el comportamiento de la primera entrada de la matriz anterior. Definamos

$$f(R) = -2\alpha R^2 + 6C^2 R - 12\beta, \quad (3.15)$$

donde

$$\alpha = M(A + 4A_1), \quad \beta = M(B + 16B_1)$$

y notemos que

$$\frac{6C^2}{MR^4} - \frac{2(A+4A_1)}{R^3} - \frac{12(B+16B_1)}{R^5} = \frac{f(R)}{MR^5}.$$

También notamos que las raíces $R_{1,2}$ satisfacen la relación

$$R_{1,2}^2 = \frac{2C^2 R_{1,2} - 3\beta}{\alpha}.$$

Así para $R = R_{1,2}$ tenemos

$$f(R_{1,2}) = -2\alpha R_{1,2}^2 + 6C^2 R_{1,2} - 12\beta = \frac{2}{\alpha} (C^2 R_{1,2} - 3\alpha\beta), \quad (3.16)$$

ó

$$f(R_{1,2}) = \frac{2 \left(C^2 (C^2 \pm \sqrt{C^4 - C_0^4}) - 3\beta \right)}{\alpha}. \quad (3.17)$$

En R_2 , usando el hecho de que $C^4 > C_0^4 = 3\alpha\beta$, esto es $C^4/\alpha - 3\beta > 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(R_2) &= \frac{2C^2(C^2 + \sqrt{C^4 - C_0^4}) - 6\beta}{\alpha} \\ &= \frac{2C^2(C^2 + \sqrt{C^4 - 3\alpha\beta}) - 6\beta}{\alpha} \\ &> \frac{2C^2\sqrt{C^4 - 3\alpha\beta}}{\alpha} > 0, \end{aligned}$$

y así $D_2U_{\text{eff}}|_{z=0, R=R_2}$ es positiva definida, es decir, el equilibrio relativo $(R_2, 0)$ es *no-linealmente estable*.

En $(R_1, 0)$, la matriz *Hessiana* no es definida positiva, por lo cual no nos da información acerca de su estabilidad. Por lo tanto calcularemos la estabilidad espectral de $(R_1, 0)$ computando los valores propios de la matriz linealizada:

$$L = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial R^2} & -\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial R \partial z} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial R \partial z} & -\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial z^2} & 0 & 0 \end{array} \right) \Big|_{(R_1, 0)}.$$

En el punto $z = 0$, esta corresponde a:

$$\lambda_{1,2} = \pm 4i \frac{\sqrt{R_2(A_1 R_2^2 + 12B_1)}}{R^3}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{MR_2(2\alpha R_2^2 - 6C^2 R_2 + 12\beta)}}{R^3}.$$

Los valores propios $\lambda_{1,2}$ son imaginarios puros y un cálculo directo muestra que los $\lambda_{3,4}$ son reales. Por lo tanto el equilibrio relativo $(R_1, 0)$ es *inestable*. \square

3.2.1. Diagrama energía-momentum.

El diagrama *energía-momentum* nos proporciona la ubicación de los equilibrios relativos en el espacio de parámetros (h, C) . Como es conocido (ver [51]), este es el conjunto de puntos donde la topología del espacio fase cambia. En nuestro caso, la curva energía-momentum está determinada por los R_i , $i = 1, 2$, dados por las fórmulas (3.12); de la relación de energía evaluada en uno de estos equilibrios relativos (donde $P_R = P_z = 0$ y $z = 0$) se obtiene:

$$\frac{C^2}{MR_i^2} - \frac{A + 4A_1}{R_i} - \frac{B + 16B_1}{R_i^3} = h. \quad (3.18)$$

Una gráfica genérica del mapeo momentum energía es presentada en la figura (3.2).

Observación 9. *Recordemos que en el caso Newtoniano (es decir, cuando $B = B_1 = 0$) el problema isósceles acepta como equilibrios relativos las conocidas configuraciones colineales de Euler, las cuales son inestables. Es interesante observar que en presencia de los términos cúbicos, existen dos familias de equilibrios relativos colineales y una de éstas es no-linealmente estable. Lo cual es cierto aún si B y B_1 son pequeños, por lo que los términos cúbicos inversos, pueden ser pensados como perturbaciones del problema Newtoniano.*

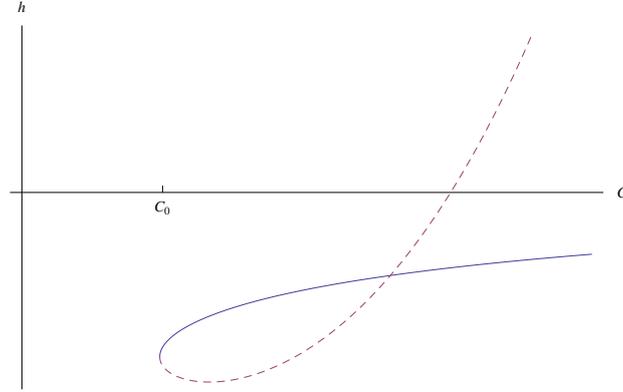


Figura 3.2: Gráfica genérica del mapeo momentum energía (donde $C > 0$). La línea azul corresponde a los equilibrio relativos $(R_1, 0)$, mientras que la línea punteada corresponde a los equilibrios relativos $(R_2, 0)$.

3.3. Variedad de colisión.

El espíritu de esta sección es presentar las ecuaciones de movimiento descritas hasta el momento, asociadas al problema isósceles de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild, en un sistema de coordenadas en el que las singularidades de estas ecuaciones, debido a colisiones dobles y triples de las partículas puedan removerse. En nuestro estudio asumiremos que $M \gg m$.

3.3.1. Nuevas coordenadas.

Para comenzar el estudio de la dinámica cerca de singularidades (es decir, colisiones) es conveniente transformar el sistema asociado al Hamiltoniano (3.7), de tal forma que las singularidades sean regularizadas. Para esto seguiremos la técnica de McGehee empleada por Devaney [15], en el estudio del problema isósceles clásico. Denotando

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} R \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} := \begin{pmatrix} p_R \\ p_z \end{pmatrix} \quad y \quad T = \begin{pmatrix} \frac{M}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2mM}{2M+m} \end{pmatrix},$$

introducimos las coordenadas $(r, v, \mathbf{s}, \mathbf{u})$, definidas por

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\mathbf{x}^t T \mathbf{x}}, & v &= r^{\frac{3}{2}}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}), \\ \mathbf{s} &= \frac{\mathbf{x}}{r}, & \mathbf{u} &= r^{\frac{3}{2}}(T^{-1}\mathbf{p} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{p})\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Donde $r = 0$, corresponde a $R = z = 0$, *i.e.*, colisión triple de los cuerpos, y se puede verificar que $\mathbf{s}^t T \mathbf{s} = 1$ y $\mathbf{s}^t T \mathbf{u} = 0$. Con esto las ecuaciones de

movimiento se escriben como

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{v}{r^{\frac{3}{2}}}, \\
\dot{v} &= \frac{3}{2} \frac{v^2}{r^{\frac{5}{2}}} + \frac{u^t T u}{r^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{2C^2}{ms_1^2} - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} V(\mathbf{s}) - \frac{3}{r^{\frac{5}{2}}} W(\mathbf{s}), \\
\dot{\mathbf{s}} &= \frac{\mathbf{u}}{r^{\frac{5}{2}}}, \\
\dot{\mathbf{u}} &= \frac{1}{2} \frac{v}{r^{\frac{5}{2}}} \mathbf{u} + \left(-\frac{\mathbf{u}^t T \mathbf{u}}{r^{\frac{5}{2}}} - \frac{2C^2}{Ms_1^2 r^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} V(\mathbf{s}) + \frac{3}{r^{\frac{5}{2}}} W(\mathbf{s}) \right) \mathbf{s} \\
&\quad + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\frac{2}{M} \frac{\partial V}{\partial s_1}}{\frac{2mM}{\partial s_2}} \right) + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \left(-\frac{2C^2}{Ms_1^2} \right) \right) + \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\frac{2}{M} \frac{\partial W}{\partial s_1}}{\frac{2mM}{\partial s_2}} \right),
\end{aligned}$$

donde

$$V(\mathbf{s}) = \frac{A}{s_1} + \frac{4A_1}{(s_1^2 + 4s_2^2)^{1/2}} \quad \text{y} \quad W(\mathbf{s}) = \frac{B}{s_1^3} + \frac{16B_2}{(s_1^2 + 4s_2^2)^{3/2}}.$$

Ahora, para obtener un sistema escalar completo se introduce un nuevo cambio de coordenadas dado por

$$\mathbf{s} = \sqrt{(T^{-1})}(\cos \theta, \sin \theta)^t \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = u \sqrt{(T^{-1})}(-\sin \theta, \cos \theta)^t,$$

donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Las fronteras $\theta = \pm\pi/2$, en las coordenadas originales corresponden a $R = 0$, *i.e.*, a colisiones dobles de las masas M . De manera más precisa, en $\theta = \pi/2$, se tiene que $R = 0$ y $z > 0$, mientras que en $\theta = -\pi/2$, $R = 0$ y $z < 0$. Note que $\mathbf{u}^t T \mathbf{u} = u^2$ y $\dot{\mathbf{u}} = \frac{\dot{u}}{u} \mathbf{u} - u \dot{\theta} \mathbf{s}$. Denotando

$$\mu = \frac{2M + m}{m} \tag{3.20}$$

y aplicando la reparametrización dada por $dt = r^{\frac{5}{2}} d\tau$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}
r' &= rv, \\
v' &= \frac{3}{2} v^2 + u^2 + \frac{C^2}{\cos^2 \theta} r - r^2 V(\theta) - 3W(\theta), \\
\theta' &= u, \\
u' &= \frac{1}{2} uv - C^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} r + r^2 \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial W(\theta)}{\partial \theta},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

con integral de energía

$$hr^3 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{C^2}{2 \cos^2 \theta} r - r^2 V(\theta) - W(\theta), \quad (3.22)$$

donde la homogeneidad de los potenciales nos permite escribir estas funciones en términos de una sola variable, es decir, $V(\theta)$ y $W(\theta)$ son dadas por:

$$V(\theta) = \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{A}{\cos \theta} + \frac{4A_1}{(\cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta)^{1/2}} \right), \quad (3.23)$$

$$W(\theta) = \left(\frac{M}{2}\right)^{3/2} \left(\frac{B}{\cos^3 \theta} + \frac{16B_1}{(\cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta)^{3/2}} \right). \quad (3.24)$$

3.3.2. Las funciones potenciales $V(\theta)$ y $W(\theta)$.

De ahora en adelante asumiremos que $M \gg m$, lo que nos permitirá considerar la forma más general de nuestras funciones potencial. En particular para μ tenemos que,

$$\mu = 1 + \frac{2M}{m} \gg 1. \quad (3.25)$$

Dado que A y A_1 son del mismo orden, es razonable asumir que

$$\frac{A}{4A_1} < \frac{2M}{m} = \mu - 1.$$

Un cálculo directo muestra que en este caso $V(\theta)$ tiene tres puntos críticos en $\theta_0 = 0$ y $\theta = \pm\theta_v$, donde

$$\cos \theta_v = \sqrt{\frac{\mu}{(\mu - 1) + (\mu - 1)^{2/3} \left(\frac{4A_1}{A}\right)^{2/3}}}. \quad (3.26)$$

Del mismo modo, asumimos que

$$\frac{B}{4B_1} < \frac{2M}{m} = \mu - 1,$$

con lo que la función $W(\theta)$ tiene tres puntos críticos en $\theta_0 = 0$ y $\theta = \pm\theta_w$, dados por

$$\cos \theta_w = \sqrt{\frac{\mu}{(\mu - 1) + (\mu - 1)^{2/5} \left(\frac{16B_1}{B}\right)^{2/5}}}. \quad (3.27)$$

Comparando las expresiones para los puntos críticos de $V(\theta)$ y $W(\theta)$, cuando

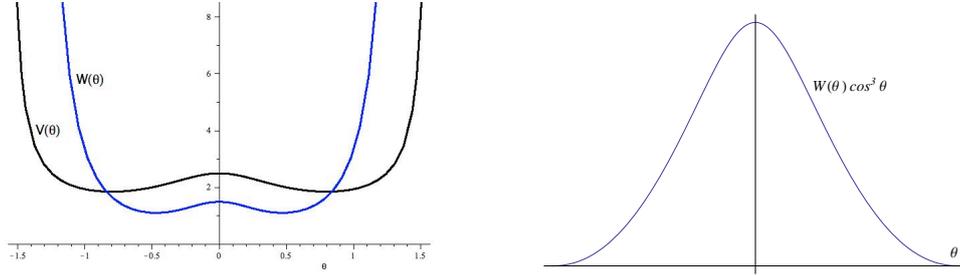


Figura 3.3: A la izquierda se muestran las funciones $V(\theta)$ y $W(\theta)$, en el caso genérico sus puntos críticos distintos de cero no coinciden. A la derecha se muestra la función $U(\theta) = W(\theta) \cos^3 \theta$.

estos puntos son distintos de cero, encontramos que ellos solo coinciden si se da la condición

$$(\mu - 1)^{4/15} \left(\frac{4A_1}{A} \right)^{2/3} = \left(\frac{16B_1}{B} \right)^{2/5}. \quad (3.28)$$

Por lo tanto en adelante, dado que ésta no es una condición genérica, asumiremos que los puntos críticos distintos de cero, de $V(\theta)$ y $W(\theta)$, no coinciden. Las funciones $V(\theta)$ y $W(\theta)$ están representadas en la figura 3.3.

3.3.3. Ecuaciones de movimiento regularizadas y la variedad de colisión.

El sistema (3.21) es analítico para $(r, v, \theta, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$, y aquellas órbitas cercanas a $r = 0$ están ahora bien definidas. En las coordenadas (r, v, θ, u) , las órbitas que terminan en colisión doble corresponden a órbitas donde θ se aproxima a $\pm\pi/2$. Con el fin de regularizar las ecuaciones de movimiento en $\theta = \pm\pi/2$, hacemos las substituciones

$$U(\theta) = W(\theta) \cos^3 \theta, \quad w = \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} u,$$

e introducimos un nuevo tipo de parametrización dada por

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}}.$$

Note que la función $U(\theta) > 0$ para todo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ y que $U(\pm\pi/2) = (M/2)^{3/2} B > 0$ (ver figura 3.3). Con estas transformaciones el sistema (3.21)

se escribe como:

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} rv, \\
v' &= \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} \left(\frac{3}{2} v^2 + \frac{U(\theta)}{\cos^6 \theta} w^2 - r^2 V(\theta) - 3 \frac{U(\theta)}{\cos^3 \theta} + \frac{C^2 r}{\cos^2 \theta} \right), \\
\theta' &= w, \\
w' &= \frac{1}{2} vw \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} + r^2 V'(\theta) \frac{\cos^6 \theta}{U(\theta)} + \frac{U'(\theta)}{U(\theta)} \left(\cos^3 \theta - \frac{w^2}{2} \right) \\
&\quad + 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos^3 \theta}{U(\theta)} C^2 r,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

donde la derivación es con respecto al nuevo tiempo τ . Mientras que la relación de energía se reescribe como:

$$\begin{aligned}
2hr^3 \cos^6 \theta &= U(\theta)w^2 + (v^2 \cos^3 \theta - 2U(\theta)) \cos^3 \theta \\
&\quad + (C^2 - 2rV(\theta) \cos^2 \theta) r \cos^4 \theta.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Finalmente, utilizando la relación de energía, sustituimos el término que contiene el momento angular C en la ecuación para \dot{v} , y obtenemos

$$\begin{aligned}
r' &= rv \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}}, \\
v' &= \sqrt{U(\theta)} \left(-1 + \frac{\cos^3 \theta}{2U(\theta)} v^2 \right) + 2hr^3 \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} + \frac{r^2 V(\theta) \cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}}, \\
\theta' &= w, \\
w' &= \frac{1}{2} vw \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} + r^2 V'(\theta) \frac{\cos^6 \theta}{U(\theta)} + \frac{U'(\theta)}{U(\theta)} \left(\cos^3 \theta - \frac{w^2}{2} \right) + 3 \sin \theta \cos^2 \theta \\
&\quad - \frac{C^2 r \sin \theta \cos^3 \theta}{U(\theta)}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

El campo vectorial (3.31) es analítico sobre $[0, \infty) \times \mathbb{R} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$, así que el flujo está bien definido en cualquier lugar sobre su dominio, incluyendo los puntos que corresponden a colisión triple ($r = 0$) y doble ($\theta = \pm\pi/2$). La restricción de la relación de energía (3.30) a $r = 0$ dada por

$$\Delta_c := \left\{ (r, v, \theta, w) \mid r = 0, w^2 + \frac{\cos^6 \theta}{U(\theta)} v^2 = 2 \cos^3 \theta \right\}, \tag{3.32}$$

define una variedad ficticia invariante llamada la *variedad de colisión*. Por la continuidad con respecto a condiciones iniciales, el flujo sobre Δ_c nos

da información sobre las órbitas que pasan cerca a colisión. La variedad de colisión es representada en la figura 3.4. Esta superficie es simétrica con respecto al plano horizontal (θ, w) y al plano vertical (v, w) ; la cual sobre su parte inferior y superior está definida por la gráfica de la función $W(\theta)$. El campo vectorial sobre la variedad de colisión Δ_c se obtiene haciendo $r = 0$ en el sistema (3.31) y está dado por:

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{U(\theta)} \left(-1 + \frac{\cos^3 \theta}{2U(\theta)} v^2 \right), \\ \theta' &= w, \\ w' &= \frac{1}{2} v w \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} + \frac{U'(\theta)}{U(\theta)} \left(\cos^3 \theta - \frac{w^2}{2} \right) + 3 \sin \theta \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

A continuación vamos a caracterizar los rasgos principales del flujo sobre Δ_c , para el cual tenemos los siguientes resultados. Empecemos recordando la siguiente definición.

Definición 4. *Un campo vectorial se llama casi-gradiente con respecto a una función f , si f es creciente (o decreciente) a lo largo de toda órbita que no sea un punto de equilibrio.*

De lo anterior obtenemos que:

Proposición 3. *El flujo sobre la variedad de colisión es casi-gradiente con respecto a la coordenada $-v$.*

Demostración: Ya que sobre la variedad de colisión Δ_c tenemos

$$w^2 = 2 \cos^3 \theta - \frac{\cos^6 \theta}{U(\theta)} v^2,$$

la expresión para v' en el sistema (3.33) se transforma en:

$$v' = -\frac{\sqrt{U(\theta)}}{2 \cos^3 \theta} w^2$$

de tal forma que $v' < 0$. □

Proposición 4. *Los conjuntos*

$$\mathcal{B}_{\pm} := \left\{ (r, v, \theta, w) \mid r = r_0, \theta = \pm \frac{\pi}{2}, w = 0 \right\} \quad (3.33)$$

son variedades invariantes. Físicamente, para $r_0 \neq 0$, los conjuntos \mathcal{B}_{\pm} representan colisiones dobles las cuales no corresponden a colisión triple. Para cualquier $r_0 = 0$, los conjuntos \mathcal{B}_{\pm} son los subconjuntos de colisión doble que se han pegado a la variedad ficticia de colisión triple Δ_c . Sobre \mathcal{B}_{\pm} el flujo es casi-gradiente con respecto a la coordenada $-v$.

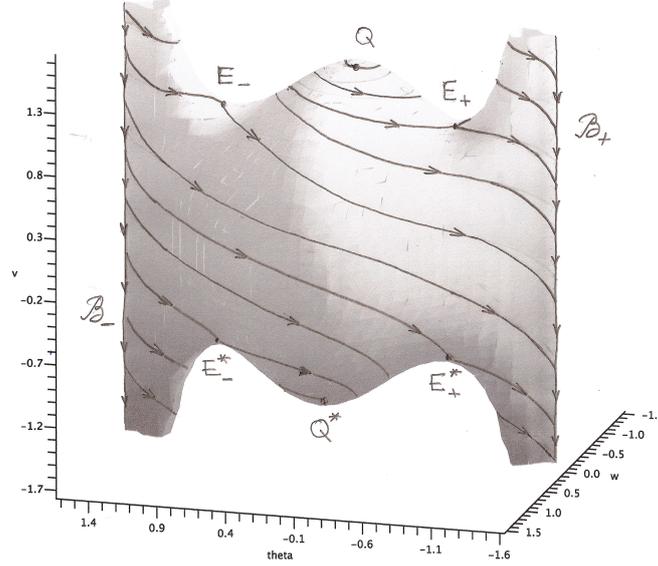


Figura 3.4: La variedad de colisión. El flujo es casi-gradiente respecto a $-v$ y los conjuntos \mathcal{B}_{\pm} , son invariantes.

Demostración: De las ecuaciones de movimiento (3.31), para $\theta = \pm\pi/2$ tenemos

$$\begin{aligned} r' &= 0, \\ v' &= -\sqrt{U(\pm\pi/2)} < 0, \\ \theta' &= w, \\ w' &= 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde tenemos en cuenta que $U'(\pm\pi/2) = 0$. De la relación de energía (3.30) deducimos que

$$0 = U\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) w^2$$

de donde $w \equiv 0$ entonces $\theta = \pm\pi/2$ son invariantes. Ya que $r'(\tilde{\tau}) = 0$, tenemos que $r = \text{const.}$. \square

Como consecuencia de las proposiciones anteriores, el flujo sobre la variedad de colisión corresponde a curvas que viajan de infinito a menos infinito respecto de la coordenada v , que aproximan asintóticamente los conjuntos invariantes \mathcal{B}_{\pm} , excepto por aquellas curvas que nacen o mueren en alguno de los puntos de equilibrio (ver figura 3.4).

3.3.4. Equilibrios sobre la variedad de colisión.

Los equilibrios de (3.31) son puntos donde $r \neq 0$, correspondientes a equilibrios del flujo en el sistema rotatorio; estos fueron estudiados en la sección 3.2, proposición 2. El flujo extendido acepta equilibrios ficticios, los cuales juegan un rol importante para entender el comportamiento del flujo cerca a singularidades. En $r = 0$, es decir, sobre la variedad de colisión, tenemos los siguientes puntos de equilibrio (ver Figura 3.4):

$$Q := (0, \sqrt{2W(0)}, 0, 0), \quad Q^* := (0, -\sqrt{2W(0)}, 0, 0),$$

y

$$E_{\pm} := \{0, \sqrt{2W(\theta_w)}, \pm\theta_w, 0\}, \quad E_{\pm}^* := \{0, -\sqrt{2W(\theta_w)}, \pm\theta_w, 0\}.$$

Proposición 5. *En el contexto anterior para h fijo, el equilibrio Q es una fuente espiral con*

$$\dim W_u(Q) = 3,$$

el equilibrio Q^ es un sumidero espiral con*

$$\dim W_s(Q^*) = 3,$$

y los equilibrios E_{\pm} y E_{\pm}^ son sillas con*

$$\dim W_s(E_{\pm}) = 1, \quad \dim W_u(E_{\pm}) = 2,$$

$$\dim W_s(E_{\pm}^*) = 2, \quad \dim W_u(E_{\pm}^*) = 1.$$

Demostración: Sea $\theta_c \in \{0, -\theta_w, \theta_w\}$. La matriz *Jacobiana* del sistema (3.29). Evaluada en los puntos de equilibrio $(0, \pm\sqrt{2W(\theta_c)}, \theta_c, 0)$ se obtiene

$$J = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2\cos^3\theta_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2}\cos^{\frac{3}{2}}\theta_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sin\theta_c}{W(\theta_c)}C^2 & 0 & \frac{W''(\theta_c)}{W(\theta_c)}\cos^3\theta_c & \pm\sqrt{\frac{\cos^3\theta_c}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

De la relación de energía (3.30), los niveles de energía h están dados por

$$F(r, v, \theta, w) := -2hr^3 \cos^6 \theta + U(\theta)w^2 + (v^2 \cos^3 \theta - 2U(\theta)) \cos^3 \theta + (C^2 - 2rV(\theta) \cos^2 \theta) r \cos^4 \theta = 0. \quad (3.36)$$

El espacio tangente de esta variedad en un punto de equilibrio “ eq ” $\in \{Q, Q^*, E_{\pm}, E_{\pm}^*\}$ es

$$\begin{aligned} T_{eq}F &= \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \mid \nabla F|_{“eq”} \cdot (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = 0\} \\ &= \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \mid (C^2 \cos \theta_c) \rho_1 \pm (2\sqrt{2W(\theta_w)} \cos^6 \theta_c) \rho_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Para momento angular $C = 0$ tenemos $T_{eq}F = \{((\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \mid \rho_2 = 0)\}$. La parte lineal del campo vectorial (3.29), restringida al espacio tangente, está dada por

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2 \cos^3 \theta_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{W''(\theta_c)}{W(\theta_c)} \cos^3 \theta_c & \pm\sqrt{\frac{\cos^3 \theta_c}{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

así que una base para $T_{eq}F$, está dada por los vectores $\xi_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\xi_3 = (0, 0, 1, 0)$ y $\xi_4 = (0, 0, 0, 1)$. Un representante de \bar{J} en esta base es

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2 \cos^3 \theta_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{W''(\theta_c)}{W(\theta_c)} \cos^3 \theta_c & \pm\sqrt{\frac{\cos^3 \theta_c}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

De aquí se sigue que ξ_1 es un vector propio con valor propio $\sqrt{2 \cos^3 \theta_c}$. Los otros valores propios son las raíces de

$$\lambda^2 \mp \sqrt{\frac{\cos^3 \theta_c}{2}} \lambda - \frac{W''(\theta_c)}{W(\theta_c)} \cos^3 \theta_c = 0,$$

con vectores propios de la forma

$$\mathbf{v}_{\lambda_1}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\lambda_2}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios asociados a Q ($\theta_c = 0$, $v = \sqrt{2W(0)}$) son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{9B + 16B_1(1 - 24(\mu - 1))}{2(B + 16B_1)}} \right),$$

con vectores propios dados por

$$\mathbf{v}_{\lambda_1}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{9B+16B_1(1-24(\mu-1))}{2(B+16B_1)}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\lambda_2}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{9B+16B_1(1-24(\mu-1))}{2(B+16B_1)}} \end{pmatrix}.$$

En Q^* ($\theta_c = 0$, $v = -\sqrt{2W(0)}$) tenemos

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{9B + 16B_1(1 - 24(\mu - 1))}{2(B + 16B_1)}} \right),$$

con vectores propios

$$\mathbf{v}_{\lambda_1}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{9B+16B_1(1-24(\mu-1))}{2(B+16B_1)}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\lambda_2}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{9B+16B_1(1-24(\mu-1))}{2(B+16B_1)}} \end{pmatrix}$$

respectivamente. Para probar que la cantidad dentro de la raíz es negativa, utilizamos nuestra hipótesis de que $B < 4B_1(\mu - 1)$ (ver sección 3.3.2), con esto y ya que $\mu \gg 1$, se sigue que

$$\begin{aligned} 9B + 16B_1(1 - 24(\mu - 1)) &< 36B_1(\mu - 1) + 16B_1(1 - 24(\mu - 1)) \\ &= 4B_1(4 - 87(\mu - 1)) < 0, \end{aligned}$$

así que Q es una fuente espiral y Q^* es un sumidero espiral. Para E_{\pm} ($\theta_c = \pm\theta_w$, $v = \sqrt{2W(\theta_w)}$), los otros dos valores propios son de la forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(+\sqrt{\frac{\cos^3 \theta_w}{2}} \pm \sqrt{\frac{\cos^3 \theta_w}{2} + 4 \frac{W''(\theta_w)}{W(\theta_c)}} \right).$$

Ya que $W''(\theta_w) > 0$, estos puntos son puntos silla. Similarmente, para E_{\pm}^* ($\theta_c = \pm\theta_w$, $v = -\sqrt{2W(\theta_w)}$) tenemos que

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{\cos^3 \theta_w}{2}} \pm \sqrt{\frac{\cos^3 \theta_w}{2} + 4 \frac{W''(\theta_w)}{W(\theta_w)}} \right),$$

de tal forma que los puntos E_{\pm}^* son silla también. Para momento angular $C \neq 0$, el espacio tangente está dado por

$$T_{eq}F = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \mid \nabla F|_{“eq”} \cdot (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = 0\}$$

$$= \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \mid (C^2 \cos \theta_c) \rho_1 \pm (2\sqrt{2W(\theta_w)} \cos^6 \theta_c) \rho_2 = 0\},$$

una base para $T_{eq}F$ es dada por $\xi_1 = (\mp 2\sqrt{2W(\theta_w)} \cos^6 \theta_c, C^2 \cos \theta_c, 0, 0)$, $\xi_3 = (0, 0, 1, 0)$ y $\xi_4 = (0, 0, 0, 1)$. por lo tanto una base para J en la base $\{\xi_1, \xi_3, \xi_4\}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2 \cos^3 \theta_c} & 0 & 0 \\ \star & 0 & 1 \\ \star & \frac{U''(\theta_c)}{U(\theta_c)} \cos^3 \theta_c & \frac{\cos^3 \theta_c}{\sqrt{U(\theta_c)}} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

El resto de la prueba es idéntica a la realizada para el caso $C = 0$. \square

Corolario 2. *En cualquier nivel de energía, el conjunto de condiciones iniciales que llevan a colisión triple, tiene medida de Lebesgue positiva.*

Corolario 3. *Para el flujo restringido a la variedad de colisión, el equilibrio Q es una fuente espiral con*

$$W_u(Q) = 2,$$

el equilibrio Q^* es un sumidero espiral con

$$\dim W_s(Q^*) = 2,$$

y los equilibrios E_{\pm} y E_{\pm}^* son puntos sillas donde

$$\dim W_s(E_{\pm}) = 1, \quad \dim W_u(E_{\pm}) = 1,$$

$$\dim W_s(E_{\pm}^*) = 1, \quad \dim W_u(E_{\pm}^*) = 1.$$

3.3.5. Comportamiento de las órbitas sobre la variedad de colisión.

Sobre la variedad de colisión el flujo es casi-gradiente con respecto a la coordenada $-v$, la cual tiene seis equilibrios, tres en el semi-espacio $v > 0$ y tres en el semi-espacio $v < 0$, ubicados simétricamente con respecto al plano $v = 0$. Ya que $\theta'(v, \theta, w) = -\theta'(v, -\theta, -w)$ y $w'(v, \theta, w) = -w'(v, -\theta, -w)$, es suficiente con analizar el flujo en el semi-espacio $\{(v, \theta, w) \in \Delta_c \mid w > 0\}$.

Asimismo, notemos que el campo vectorial es invariante bajo $(v, \theta, w) \rightarrow (-v, -\theta, w)$.

La variedad inestable de E_- , $W_u(E_-)|_{\{w>0\}}$, termina en Q^* , o en E_+ , en cuyo caso coincide con $W_s(E_+)|_{\{w>0\}}$, o está en el basín de \mathcal{B}_+ (en adelante seguiremos usando basín, en vez del término español cuenca de atracción). Este tipo de conexiones están determinadas por la elección de los parámetros. En lo que sigue daremos condiciones suficientes para que la órbita $W_u(E_-)|_{\{w>0\}}$ termine en el basín de \mathcal{B}_+ . Esto implicaría, que las órbitas que emergen de Q (excepto por las que finalizan en E_\pm), caerán en \mathcal{B}_+ . También tendremos que $W_u(E_+)|_{\{w>0\}}$ cae en \mathcal{B}_+ . Este caso es representado en la figura 3.4.

Utilizando la restricción de la relación de energía sobre la variedad de colisión, el flujo en el semi-espacio $w > 0$ esta dado por el sistema

$$v' = \sqrt{U(\theta)} \left(-1 + \frac{\cos^3 \theta}{2U(\theta)} v^2 \right), \quad (3.40)$$

$$\theta' = \sqrt{2 \cos^3 \theta - \frac{\cos^6 \theta}{U(\theta)} v^2}. \quad (3.41)$$

Ya que θ es creciente, podemos dividir las dos ecuaciones y obtener la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{d\theta} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{W(\theta) - \frac{1}{2}v^2}, \quad (3.42)$$

donde $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Para nuestro propósito es suficiente considerar la expresión (3.42) sobre el dominio

$$\mathcal{D} := \left\{ (\theta, v) \mid |\theta| \leq \pi/2, |v| \leq \sqrt{2W(\theta)} \right\}. \quad (3.43)$$

Observación 10. *Podemos observar que la EDO (3.42) es simétrica bajo $\theta \rightarrow -\theta$ y $v \rightarrow -v$. Siempre que $v(\theta)$ sea una solución, $-v(-\theta)$ también será una solución.*

Observación 11. *En los límites superior e inferior $\{(\theta, v) \mid \theta \in [-\theta_w, \theta_w], |v| = \sqrt{2W(\theta)}\}$ el campo vectorial no es Lipschitz de tal forma que la unicidad no esta garantizada por el teorema de continuidad con respecto a condiciones iniciales. Sin embargo, ya que*

$$\frac{dv}{d\theta} \Big|_{W(\theta) - \frac{1}{2}v^2 = 0} = 0 \quad (3.44)$$

todas las curvas integrales correspondientes a la condición inicial $v(\theta_0) = \sqrt{2W(\theta_0)}$ salen siguiendo una trayectoria tangente a la horizontal (ver Figura 3.5). Similarmente, todas las curvas integrales correspondientes a la condición inicial $v(\theta_0) = -\sqrt{2W(\theta_0)}$ entran siguiendo una trayectoria tangente a la horizontal.

La variedad invariante de $W_u(E_-)|_{\{w>0\}}$, corresponde a la solución $\tilde{v}(\theta)$ of (3.42), que satisface que

$$\lim_{\theta \rightarrow -\theta_m} \tilde{v}(\theta) = \sqrt{2W(0)}. \quad (3.45)$$

Denotando como $v_1(\theta)$ la curva integral de (3.42), que pasa a través de cero en $\theta = 0$, i.e., $v_1(0) = 0$, determinaremos los parámetros para los que $v_1(\theta_w) > -\sqrt{2W(0)}$. Mostraremos que la curva integral $\tilde{v}(\theta)$, esta por encima de la curva integral $v_1(\theta)$ para todo $\theta > -\theta_w$. Esto implica que $\tilde{v}(\theta_w) > -\sqrt{2W(0)}$ y por lo tanto, dado que $dv/d\theta < 0$, $\tilde{v}(\theta)$ debe tender a $-\infty$ cuando $\theta \rightarrow \pi/2$. En particular, mostraremos que $W_u(E_-)|_{\{w>0\}} = \mathcal{B}_+$. Empecemos observando lo siguiente

Observación 12. *Ya que*

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{d\theta^2} &= -\frac{1}{2\sqrt{2W(\theta) - v^2}} \left(W'(\theta) - v \frac{dv}{d\theta} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2W(\theta) - v^2}} \left(W'(\theta) + \frac{v\sqrt{2W(\theta) - v^2}}{2} \right) \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{cases} \frac{d^2v}{d\theta^2} < 0 & \text{si } (\theta, v) \in \left\{ (\theta, v) \mid \theta \in (-\theta_w, 0), v \in (0, \sqrt{2W(\theta)}) \right\}, \\ \frac{d^2v}{d\theta^2} > 0 & \text{si } (\theta, v) \in \left\{ (\theta, v) \mid \theta \in (0, \theta_w), v \in (-\sqrt{2W(\theta)}, 0) \right\}. \end{cases}$$

En otras palabras, toda curva integral es cóncava hacia abajo en el cuadrante izquierdo superior de \mathcal{D} , y cóncava hacia arriba en el cuadrante derecho inferior de \mathcal{D} .

Observación 13. *Ya que*

$$W(0) = \left(\frac{m}{2} \right)^{3/2} (B + 16B_1)$$

la pendiente de $v(\theta)$ en $\theta = 0$ está determinado por los parámetros vía la relación

$$\left. \frac{dv}{d\theta} \right|_{\theta=0, v=0} = -\sqrt{\frac{W(0)}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} \right)^{3/2} (B + 16B_1)}$$

Lemma 1. *En el contexto anterior, sí*

$$\sqrt{\frac{W(0)}{2}} \leq \frac{\sqrt{2W(\theta_w)}}{\theta_w}, \quad (3.46)$$

i.e., sí

$$\cos^2 \left(\delta^{3/2} \left(1 + \left(\frac{\gamma^2}{\mu^3} \right)^{1/5} \right)^{5/2} \frac{1}{1 + \gamma} \right) \leq \frac{1}{\delta \left(1 + \left(\frac{\gamma^2}{\mu^3} \right)^{1/5} \right)} \quad (3.47)$$

donde $\gamma := \frac{16B_1}{B}$ y $\delta := 1 - \frac{1}{\mu}$, entonces $\tilde{v}(\theta)$ esta bien definida, para todo $\theta \in (-\theta_w, \pi/2)$ y $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \tilde{v}(\theta) = -\infty$.

Demostración: Consideremos la expresión (3.42) y su solución $v_1(\theta)$. De acuerdo a la observación 12, $v_1(\theta)$ es cóncava hacia arriba para $\theta > 0$. De esto se sigue, que si $\left. \frac{dv_1}{d\theta} \right|_{\theta=0} = -\sqrt{2W(0)} \geq m$, donde m es la pendiente del segmento de recta que conecta E_- a E_+^* , entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$-\sqrt{2W(\theta_w)} + \varepsilon_0 = v_1(\theta_w).$$

La desigualdad $\left. \frac{dv_1}{d\theta} \right|_{\theta=0} = -\sqrt{2W(0)} \geq m$ proviene de la condición (3.46). Por simetría, también tenemos que

$$\sqrt{2W(\theta_w)} - \varepsilon_0 = v_1(-\theta_w) > 0.$$

Dado que $\lim_{\theta \rightarrow -\theta_w} \tilde{v}(\theta) = \sqrt{2W(\theta_w)}$, y que $\sqrt{2W(\theta_w)} - \varepsilon_0 = v_1(-\theta_w) > 0$ (y por unicidad de soluciones de ODEs), las curvas $\tilde{v}(\theta)$ y $v_1(\theta_w)$ no pueden cruzarse; por lo tanto $\tilde{v}(\theta) > v_1(\theta)$ para todo $\theta > -\theta_w$. En particular, $\tilde{v}(\theta_w) > v_1(\theta_w) = -\sqrt{2W(\theta_w)} + \varepsilon_0$. Además, como $\tilde{v}(\theta)$ y $v_1(\theta)$ son decrecientes, tenemos que

$$\lim_{\theta \rightarrow -\theta_w} \tilde{v}(\theta) = \sqrt{2W(\theta_w)} > \tilde{v}(\theta_w) > v_1(\theta_w) = -\sqrt{2W(\theta_w)} + \varepsilon_0.$$

y entonces $\tilde{v}(\theta_w) \in \mathcal{D}$. Además, puesto que $\tilde{v}(\theta)$ es decreciente, se sigue que $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \tilde{v}(\theta) = -\infty$. \square

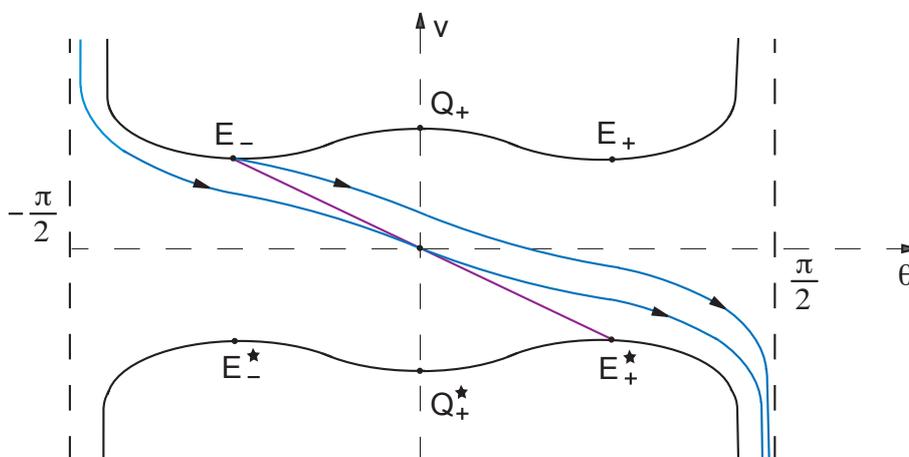


Figura 3.5: El dominio \mathcal{D} de la EDO (3.42) es acotado por $|\theta| < \pi/2$ y $|v| < \sqrt{2W(\theta)}$. La solución $v_1(\theta)$ pasa por $(0, 0)$ su pendiente está por encima de la pendiente del segmento $E_-E_+^*$. La solución $\tilde{v}(\theta)$, que asintóticamente inicia en E_- , siempre va encima de $v_1(\theta)$.

Observación 14. Dado que γ es de orden uno y $\mu \gg 1$, el conjunto de parámetros para los cuales (3.47) se satisface, no es vacío. Esta condición es independiente del valor del momento angular, y en el límite $\mu \rightarrow \infty$, se tiene $\cos^2(1/(1+\gamma)) \leq 1$.

Corolario 4. Si (3.47) se cumple, entonces sobre la variedad de colisión se tiene que $\mathcal{W}_u(E_-)|_{w>0} = \mathcal{B}_+$.

Corolario 5. Si (3.47) se cumple, entonces sobre la variedad de colisión todas las órbitas que emergen de Q terminan en \mathcal{B}_+ , excepto por las dos que terminan en los puntos de equilibrio E_{\pm} .

3.4. Comportamiento del flujo global.

El objetivo de esta sección será extender nuestro análisis previo para el flujo sobre la variedad de colisión que hemos denotado como Δ_c , al flujo en el espacio total con $r \neq 0$. Estudiaremos las condiciones que permitan encontrar soluciones periódicas generadas por configuraciones centrales, el flujo sobre las variedades invariantes y la conexión entre las órbitas del flujo sobre Δ_c y de aquellas órbitas que pasan muy cerca de colisión.

3.4.1. Soluciones homográficas.

Las configuraciones centrales y las soluciones homográficas fueron introducidas en la capítulo 1, y estudiadas para el caso plano en el capítulo 2. En esta sección, para el problema de tres cuerpos en coordenadas de Jacobi $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$ y $\mathbf{r}_2 = (0, 0, z_2)$, las soluciones homográficas se ven como soluciones de la forma

$$\mathbf{r}_1(t) = \varphi(t)\Omega(t)\mathbf{a}_1 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_2(t) = \varphi(t)\mathbf{a}_2 \quad (3.48)$$

para alguna función escalar $\varphi(t)$ tal que $\text{Im } \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, una rotación en el plano $\Omega(t) \in SO(2)$ y una configuración central dada por los vectores fijos $\mathbf{a}_1 = (a_{1x}, a_{1y}, 0)$, y $\mathbf{a}_2 = (0, 0, a_{2z})$, donde $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Si denotamos a $\Omega(t)$ como

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \cos \psi(t) & -\sin \psi(t) \\ \sin \psi(t) & \cos \psi(t) \end{bmatrix}.$$

En coordenadas cilíndricas (R, ϕ) , las ecuaciones (3.48) son equivalentes a

$$\begin{aligned} R(t) \cos \phi(t) &= \varphi(t) (a_{1x} \cos \psi(t) - a_{1y} \sin \psi(t)) \\ R(t) \sin \phi(t) &= \varphi(t) (a_{1x} \sin \psi(t) + a_{1y} \cos \psi(t)) \\ z(t) &= \varphi(t) a_{2z} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$R^2(t) = \varphi^2(t)(a_{1x}^2 + a_{1y}^2) \quad \text{y} \quad z(t) = \varphi(t)a_{2z}.$$

Deseamos describir las soluciones homográficas cuando $R(t)$ y $z(t)$ se aproximan asintóticamente a singularidades de colisión doble y triple. En las coordenadas (r, θ) , las soluciones homográficas asociadas al sistema (3.21), son tales que

$$\sqrt{\frac{2}{M}}r(\tau) \cos \theta(\tau) = \varphi(\tau)\sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2}, \quad \sqrt{\frac{2M+m}{2mM}}r(\tau) \sin \theta(\tau) = \varphi(\tau)a_{2z} \quad (3.49)$$

donde

$$r(\tau) \neq 0 \quad \text{para todo } \tau. \quad (3.50)$$

En este sentido, estamos buscando las soluciones del sistema regularizado (3.31), donde $r(\tau)$ no es cero. Note que si existe τ tal que $r(\tau) = 0$ entonces $r(\tau) \equiv 0$ para todo τ .

Si existe $\tilde{\tau}$ tal que $\theta(\tilde{\tau}) = \pi/2$ o $\tilde{\theta}(\tilde{\tau}) = -\pi/2$, entonces, por (3.49), en este valor debemos tener $\varphi(\tilde{\tau}) = 0$; pero esto contradice la condición $\text{Im } \varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por lo tanto $\theta(\tau) \neq \pm\pi/2$ para todo τ , lo cual nos permite

dividir las ecuaciones (3.49) y obtener que las soluciones homográficas deben satisfacer que

$$\tan \theta(\tau) = \text{constante},$$

que es equivalente a

$$\theta(\tau) = \text{const.} = \theta(0) =: \theta_0. \quad (3.51)$$

Dado que $r(\tau) \neq 0$ y $\theta(\tau) \neq \pm\pi/2$ para todo τ , podemos realizar nuestro análisis en el sistema (3.21), sin necesidad de recurrir la sistema completamente regularizado (3.31). Para facilitar la lectura reescribimos el sistema (3.21), que corresponde a:

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= \frac{3}{2}v^2 + u^2 + \frac{C^2}{\cos^2 \theta}r - r^2V(\theta) - 3W(\theta), \\ \theta' &= u, \\ u' &= \frac{1}{2}uv - C^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta}r + r^2 \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial W(\theta)}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

con la relación de energía:

$$hr^3 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{C^2}{2\cos^2 \theta}r - r^2V(\theta) - W(\theta). \quad (3.53)$$

Por consiguiente las soluciones homográficas son soluciones de (3.52), que cumplen con (3.50) y (3.51). Usando la expresión (3.51) y la tercera ecuación de (3.52), se cumple que $\theta'(\tau) = u(\tau) = 0$ for all τ .

Sean $(r_0, v_0, \theta_0, 0)$, las condiciones iniciales de la solución homográfica. De esta manera obtenemos que $(r(\tau), v(\tau))$ deben satisfacer el sistema

$$r' = rv \quad (3.54)$$

$$v' = \frac{3}{2}v^2 + \frac{C^2}{\cos^2 \theta_0}r - r^2V(\theta_0) - 3W(\theta_0), \quad (3.55)$$

$$0 = -C^2 \frac{\sin \theta_0}{\cos^3 \theta_0}r + r^2 V'(\theta_0) + W'(\theta_0), \quad (3.56)$$

junto con la relación de energía

$$hr^3 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{C^2}{2\cos^2 \theta_0}r - r^2V(\theta_0) - W(\theta_0). \quad (3.57)$$

Recordemos que los puntos críticos de $V(\theta)$ son $\theta = 0$ y $\theta = \pm\theta_v$ (ver sección 3.3.2), y que asumimos que los puntos críticos de $W(\theta)$ distintos de

cero no coinciden con los puntos críticos de $V(\theta)$ distintos de cero, esto es, $\theta_v \neq \theta_w$.

Para resolver el sistema (3.54) - (3.57), distinguimos los siguientes tres casos: 1.) $\theta_0 = 0$, 2.) $\theta_0 = \pm\theta_v$, es decir, θ_0 es un punto crítico distinto de cero de $V(\theta)$, y 3.) $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0, \pm\theta_v\}$.

1. Si $\theta_0 = 0$, ya que $V'(\theta_0) = \sin \theta_0 = U'(\theta_0) = 0$, entonces (3.56) se satisface automáticamente. Por lo tanto es suficiente resolver el sistema

$$r' = rv, \quad (3.58)$$

$$v' = \frac{3}{2}v^2 - r^2V(0) - 3U(0) + C^2r \quad (3.59)$$

con

$$2hr^3 = v^2 - 2U(0) + (C^2 - 2rV(0))r. \quad (3.60)$$

Estas soluciones describen movimientos planos, que en las coordenadas originales, corresponden a la variedad invariante (3.10), y serán descritas en detalle en la sección 3.4.2.

2. Si $\theta_0 = \theta_v$, de (3.56) se sigue que

$$-C^2 \frac{\sin \theta_v}{\cos^3 \theta_v} r + W'(\theta_v) = 0. \quad (3.61)$$

- a) Si $C = 0$ (3.61) toma la forma

$$W'(\theta_v) = 0$$

Así la ecuación (3.61) se satisface solamente si θ_v es un punto crítico de $W(\theta)$. Pero como esta condición no es genérica, no será considerada en nuestro análisis.

- b) Si $C \neq 0$ de (3.61) se sigue que $r(\tau) = \text{const.} =: r_0$ para todo τ , y por lo tanto $r'(\tau) \equiv 0$. Además usando la expresión (3.54) se tiene que $v \equiv 0$, y así, de (3.55) concluimos que

$$r_0^2 V(\theta_v) - \left(\frac{C^2}{\cos^2 \theta_v} \right) r_0 + 3W(\theta_v) = 0, \quad (3.62)$$

Ya que $\theta_v \neq 0$ y $r \equiv r_0$, de (3.61), debemos tener que

$$C^2 = \frac{W'(\theta_v) \cos^3 \theta_v}{r_0 \sin \theta_v}.$$

Substituyendo C^2 en (3.62), obtenemos que

$$r_0^2 = \frac{W(\theta_v)}{V(\theta_v)} \frac{\cos \theta_v}{\sin \theta_v} \left(\frac{W'(\theta_v)}{W(\theta_v)} - 3 \frac{\sin \theta_v}{\cos \theta_v} \right). \quad (3.63)$$

Después de algunos cálculos, se demuestra que

$$\frac{W'(\theta_v)}{W(\theta_v)} - 3 \frac{\sin \theta_v}{\cos \theta_v} < 0$$

para todo $\mu > 1$, pero como los demás términos del lado derecho de (3.63) son positivos, se obtiene que $r_0^2 < 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, este caso no tiene sentido.

3. $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0, \pm\theta_v\}$. En este caso, la ecuación (3.56) se ve como

$$r^2 V'(\theta_0) - C^2 \frac{\sin \theta_0}{\cos^3 \theta_0} r + W'(\theta_0) = 0, \quad (3.64)$$

donde r se puede resolver vía la fórmula cuadrática. Sin embargo, ya que r es constante, debemos tener que $r' = 0$ y $v \equiv 0$, con lo que la ecuación (3.55) se transforma en

$$r^2 V(\theta_0) - \frac{C^2}{\cos^2 \theta_0} r + 3W(\theta_0) = 0. \quad (3.65)$$

Una condición necesaria y suficiente para tener soluciones es que los coeficientes de r^2 y r y los términos libres en las dos ecuaciones coincidan, esto es:

$$\frac{V'(\theta_0)}{V(\theta_0)} = \tan \theta_0 = \frac{W'(\theta_0)}{W(\theta_0)}.$$

La primera igualdad da lugar a la ecuación

$$\mu \cos \theta_0 (\cos^2 \theta_0 - \mu) = 0$$

la cual, ya que $\mu > 1$, no tiene solución.

En conclusión las únicas soluciones homográficas en el problema isósceles bajo el potencial de Schwarzschild, están descritas genéricamente por las soluciones del sistema (3.58) -(3.60). Este es el objetivo de la siguiente sección.

3.4.2. Órbitas heteroclínicas.

En el problema isósceles bajo el potencial de Schwarzschild, debido a la simetría, los movimientos planos corresponden a soluciones homográficas. En las coordenadas originales, estos movimientos tienen lugar en el plano $z \equiv 0$ (ver observación 7), y en coordenadas (r, v, θ, u) , tienen lugar en la variedad invariante

$$\mathcal{P} := \{(r, v, \theta, u) \mid \theta = 0, u = 0\} \quad (3.66)$$

Para conveniencia del lector escribiremos de nuevo este sistema (3.58)-(3.60)

$$r' = rv, \quad (3.67)$$

$$v' = \frac{3}{2}v^2 + C^2r - r^2V(0) - 3W(0), \quad (3.68)$$

con integral de energía

$$2hr^3 = v^2 - 2U(0) + (C^2 - 2rV(0))r. \quad (3.69)$$

Este es un sistema de un grado de libertad para el cual es posible hacer un análisis cualitativo completo. Este será el tema de esta sección. Los puntos fijos del sistema corresponden a los puntos R_1 y R_2 encontrados en la sección 2.2, los cuales debido a la naturaleza atractiva de las fuerzas, pertenecen al plano $\{z = 0\}$, i.e., a la variedad invariante \mathcal{P} . Un cálculo directo muestra que C_0 , el valor crítico del momento angular encontrado en la Proposición 2, se puede escribir como

$$C_0 = \sqrt[4]{12V(0)W(0)}, \quad (3.70)$$

con lo que se tiene que

1. Para $C < C_0$, el sistema (3.67)-(3.68) no tiene equilibrios con $r \neq 0$.
2. Para $C = C_0$, el sistema (3.67)-(3.68) tiene un equilibrio con $r \neq 0$ ubicado en

$$R := \left(\frac{C^2}{2V(0)}, 0 \right)$$

el cual es degenerado.

3. Para $C > C_0$, el sistema (3.67)-(3.68) tiene dos equilibrios con $r \neq 0$ ubicados en

$$R_1 := \left(\frac{C^2 - \sqrt{C^4 - C_0^4}}{2V(0)}, 0 \right), \quad R_2 := \left(\frac{C^2 + \sqrt{C^4 - C_0^4}}{2V(0)}, 0 \right).$$

el equilibrio R_1 es una silla, mientras que R_2 es un centro.

Los otros equilibrios que se encuentran corresponden a $(r, v) = (0, \pm\sqrt{2W(0)})$, los cuales son independientes del valor del momento angular, y determinan la intersección de la variedad de colisión Δ con \mathcal{P} ; en la figura 3.4, estos puntos corresponden a Q y Q^* . Con esto las soluciones del sistema corresponden a

$$v = \sqrt{2hr^3 + 2V(0)r^2 - C^2r + 2U(0)}. \quad (3.71)$$

Para analizar esta expresión, estudiaremos las diferentes posibilidades para la cantidad dentro del radical, en términos de los valores del momento angular y la energía. Sea $f(r) = 2hr^3 + 2V(0)r^2 - C^2r + 2U(0)$. Para esta expresión tenemos los siguientes casos:

1. Si $0 \leq C < C_0$, entonces $f(r) = 2hr^3 + 2V(0)r^2 - C^2r + 2U(0)$, el radical en la ecuación (3.71) está bien definido para todo $h \geq 0$. Para $h < 0$, $f(r)$ tiene una única raíz real positiva la cual llamaremos r_1 (ver figura 3.6). En la figura 3.7 hemos dibujado las curvas solución de la

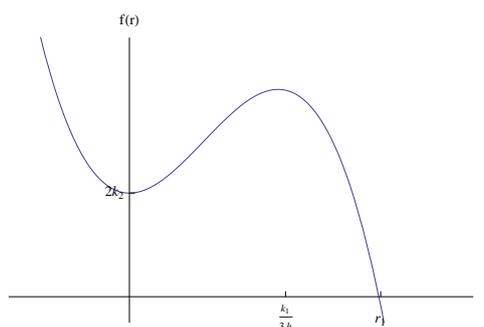


Figura 3.6: Comportamiento de $f(r)$ para valores de energía $h < 0$, en esta gráfica $k_1 = V(0)$ y $k_2 = U(0)$.

ecuación (3.71), para los diferentes valores de la energía. Para $h = 0$ obtenemos una parábola que divide el comportamiento de los otros dos casos; una función cúbica para el caso en que $h > 0$ y órbitas cerradas si $h < 0$ esto concuerda con el hecho de que en este caso la ecuación (3.71) está definida en los reales solamente en el intervalo cerrado $[0, r_1]$. En todos estos casos las curvas salen del punto de equilibrio $\sqrt{2W(0)}$ y terminan en $-\sqrt{2W(0)}$. Físicamente, si $C = 0$, estas soluciones representan movimientos rectilíneos que comienzan y terminan en colisión. Si $0 < C < C_0$, entonces las masas M espiralean infinitamente antes de colisionar (o eyectar), con la masa m . Si $C = C_0$, en la figura 3.7 existe un valor crítico de la energía $h = h_{cr} < 0$, para el cual debemos agregar el equilibrio $(r_0, 0)$.

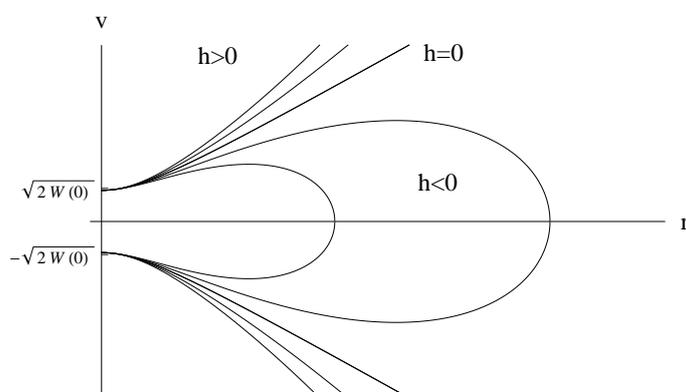


Figura 3.7: Curvas solución de la ecuación (3.71) con momento angular $0 < C < C_0$. Para $h < 0$ todas las órbitas son cerradas, para $h = 0$ las órbitas son parábolas y para $h > 0$ son funciones cúbicas.

2. Si $C > C_0$, sean r_1 , r_2 y r_3 las raíces de $f(r)$, que además tiene un mínimo en r_m y un máximo r_M (ver figura 3.8). Con esta notación tenemos los siguientes casos de acuerdo al valor de la energía:

a) Si $h < 0$, como las tres raíces de $f(r)$ son reales, positivas y diferentes, obtenemos que:

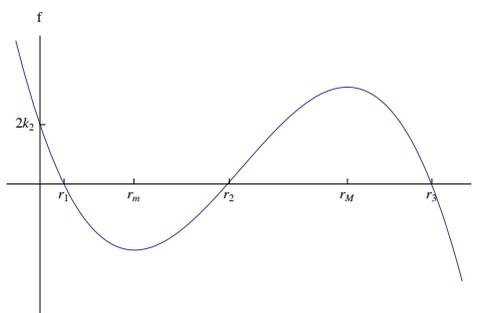


Figura 3.8: Comportamiento de $f(r)$ para valores de energía $h < 0$ y $C > C_0$.

- Si $0 < r_1 < r_m < r_2 = r_3 = r_M$ las curvas solución consisten de todas aquellas etiquetadas con (A), que van entre los dos puntos de equilibrio Q y Q^* , y cortan a r entre cero y R_1 , y el punto de equilibrio R_2 , el cual representa físicamente un movimiento circular con radio $\frac{C^2 + \sqrt{C^4 - C_0^4}}{2V(0)}$.
- Si $0 < r_1 < r_m < r_2 < r_M < r_3$ las curvas solución consisten de (A) y las curvas periódicas (D) alrededor de R_2 .

- Si $0 < r_1 = r_m = r_2 < r_M < r_3$ las soluciones consisten de todas las curvas heteroclínicas (B) y (B_1), que representan soluciones que espiralean de eyección a colisión ó de colisión a eyección. La solución homoclínica (C) y el punto de equilibrio R_1 , que representa un movimiento circular con radio $\frac{C^2 - \sqrt{C^4 - C_0^4}}{2V(0)}$.

Las curvas solución para el análisis anterior están representadas en la figura 3.9.

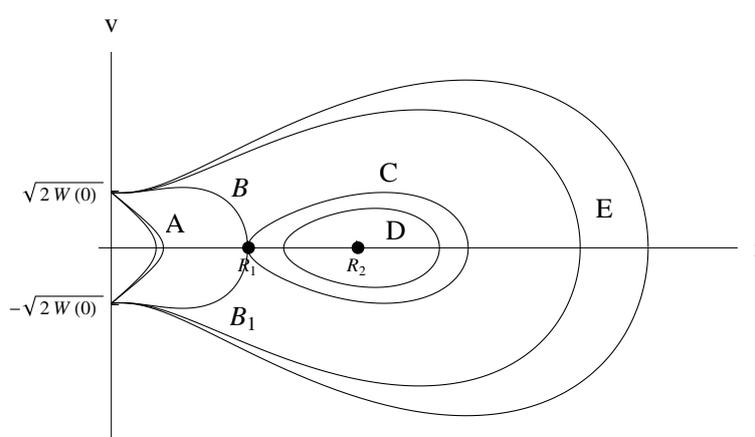


Figura 3.9: Curvas solución de la ecuación (3.71) con momento angular $C > C_0$ y $h < 0$. Los puntos de equilibrio R_1 y R_2 representan órbitas periódicas del flujo original.

- b) Si $h = 0$ entonces $f(r)$ es reducido a un polinomio cuadrático para el cual, según el comportamiento de sus raíces, existen tres casos.
- Si $C^4 > 12V(0)W(0)$, $f(r)$ tiene dos raíces reales positivas con las cuales obtenemos las curvas (A) y (F). Físicamente, las primeras se comportan como en el caso anterior y las curvas (F) representan movimientos de espiral que nacen en infinito y después de algún tiempo vuelven a infinito.
 - Si $C^4 = 12V(0)W(0)$, $f(r)$ tiene una única raíz real positiva con la cual se obtienen las órbitas heteroclínicas (C) y (C_1), y las órbitas (D) y (D_1) que atraviesan el punto fijo R_0 . Físicamente esta última representa de nuevo un movimiento circular pero ahora con radio $\frac{C^2}{2V(0)}$.

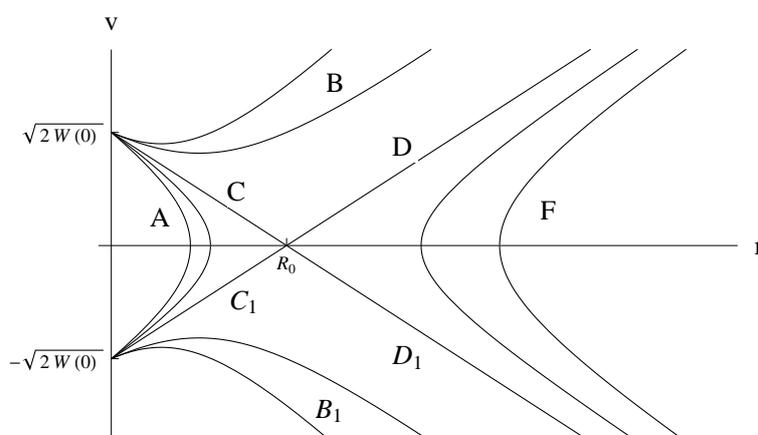


Figura 3.10: *Curvas solución de la ecuación (3.71) con momento angular $C \neq 0$ y $h \geq 0$.*

- Si $C^4 < 12V(0)W(0)$, $f(r)$ no tiene raíces reales y las únicas curvas que obtenemos son del tipo (B) y (B_1), las cuales representan escapes al infinito con movimiento de espiral. En todos los casos donde $h = 0$ la velocidad asintótica en infinito es cero.

c) Si $h > 0$ tenemos que $f'(r) = 6hr^2 + 4V(0)r - C^2$ con raíces $r_M < 0$ y $r_m > 0$, además una de las raíces de $f(r)$ es negativa. En cuanto a los valores positivos de r , $f(r)$ se ve como una parábola, el análisis es el mismo que en el caso $h = 0$. Las curvas solución para el caso $h \geq 0$ están representadas en la figura (3.10).

3.4.3. Órbitas cerca a colisión y aspectos del flujo global.

El objetivo en esta sección es describir el comportamiento de aquellas órbitas que pasan muy cerca a la variedad de colisión. En este sentido para el flujo en el espacio de coordenadas (r, v, θ, w) , podemos encontrar un conjunto de condiciones iniciales, para describir cualitativamente el comportamiento de las soluciones cuando se están aproximando a la variedad de colisión. Dichas condiciones serán el objetivo del resto de esta sección.

Consideremos una solución del problema isósceles bajo el potencial de Schwarzschild que tiende a colisión triple. (El mismo razonamiento se aplica si la solución comienza en colisión triple). Esta solución debe tender asintóticamente a la variedad de colisión Δ , en particular, debido a que el flujo es casi gradiente en Δ , debe tender a uno de los equilibrios Q^* , E_{\pm}^* , o a uno de

los segmentos \mathcal{B}_\pm .

Consideremos la órbita de colisión que se aproxima a Q^* . En las coordenadas originales, esto implica que

$$\frac{z}{R} = \frac{\sqrt{\frac{2M+m}{2Mm}} \sin \theta}{\sqrt{\frac{2}{M}} \cos \theta} \rightarrow 0,$$

esto significa que las masas tienden a una configuración coplanar mientras se acercan a colisión, pero como establecimos en la sección 3.4.1, cualquier movimiento de este tipo es una solución homográfica. Además, la configuración geométrica de dichas soluciones corresponde a una configuración central, sí las masas están en equilibrio relativo, o si el momento angular es cero, en donde la solución es homotética. Por lo tanto, la configuración límite de cualquier órbita de colisión triple que finaliza en Q^* , corresponde a la configuración geométrica de una solución homográfica, la cual, no necesariamente es central. Este hecho contrasta con el caso Newtoniano (ver [15]), y en general con cualquier potencial homogéneo, donde toda configuración límite de una solución que se aproxima a colisión, corresponde a una configuración central

Si la órbita de colisión se aproxima a E_-^* (o E_+^*), entonces la configuración límite que forman las masas, corresponde a un triángulo isósceles, no degenerado, tal que, en coordenadas originales se tiene,

$$\frac{z}{R} \rightarrow \tan \theta_w,$$

pero recordemos de la sección 3.4.1, que no existen soluciones homográficas que tengan asociada una configuración de este tipo. Por lo tanto, *las configuraciones límite de las soluciones que asintóticamente tienden a E_-^* o E_+^* , no son configuraciones asociadas a soluciones homográficas*. Hasta donde tenemos conocimiento, esta es la primera vez que se encuentra una “configuración no-homográfica” que corresponde a una configuración límite que se aproxima a colisión.

Debido a las dimensiones de las variedades estables e inestables de Q^* y E_\pm^* , en la sección 3.3.4 encontramos que para cada nivel de energía, el conjunto de condiciones iniciales que llevan a colisión triple, tiene medida de Lebesgue positiva (corolario 2). Con lo expuesto anteriormente, podemos reinterpretar este resultado como sigue

Proposición 6. *Considere el problema isósceles de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild. Entonces, para cada nivel de energía, el conjunto de condiciones iniciales que llevan a colisión triple, con una configuración geométrica límite, asociada a una solución homográfica, tiene medida de Lebesgue positiva.*

Proposición 7. *Considere el problema isósceles de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild. Entonces, para cada nivel de energía, el conjunto de condiciones iniciales que llevan a colisión triple, con una configuración geométrica límite, triángular no degenerada, tiene medida de Lebesgue cero.*

De lo anterior podemos concluir que para h fijo, dado que $\dim \mathcal{W}_u(Q) = \dim \mathcal{W}_s(Q^*) = 3$, la mayoría de las órbitas que pasan cerca de Q (o Q^*), corresponden a órbitas de eyección-colisión triple de las partículas, las cuales comienzan en Q y terminan en Q^* ; entre estas podemos destacar el plano único (de soluciones homográficas) que une Q y Q^* . Esta conclusión es válida para momento angular cero y distinto de cero. Si el momento es cero, entonces el movimiento se lleva a cabo en el plano vertical de la configuración inicial, donde todas las masas están cayendo hacia O . Si el momento no es cero, las masas se acercan a colisión triple en un escenario en el que las masas iguales M , siguen una trayectoria del tipo efecto de hoyo negro, girando infinitamente alrededor de O , mientras que la masa m oscila alrededor de O sobre el eje vertical con una amplitud que decrece a lo largo del movimiento.

Para los otros puntos fijos en la variedad de colisión, la conclusión se refiere al comportamiento de las soluciones que asintóticamente comienzan en las colisiones triples triangulares E_{\pm}^* . En el lema 1, demostramos que sobre la variedad de colisión, para un rango determinado de parámetros, la variedad inestable $\mathcal{W}_u(E_-^*) \Big|_{w>0}$ cae en \mathcal{B}_+ . También probamos que para el mismo rango de parámetros existen soluciones que asintóticamente comienzan en colisión triangular triple no degenerada, en E_-^* y asintóticamente terminan en una colisión triple con las masas iguales M en una colisión binaria y m acercándose a O en el eje positivo z . Más precisamente, en el comienzo del movimiento, la masa m tiene componente $z < 0$, luego cruza el plano horizontal $z = 0$ y alcanza una distancia máxima $z_{max} > 0$, medida desde la posición de las masas iguales, después de lo cual regresa y tiende asintóticamente a O sin cruzar el plano horizontal nunca más (es decir, no hay oscilación). También existen soluciones que asintóticamente comienzan en colisión triangular triple no degenerada, en E_+^* y terminan en \mathcal{B}_+ , para estas soluciones $z > 0$ en todo momento e incrementa hasta un z_{max} y luego decrece a 0. En ambos casos, las masas iguales M comienzan y terminan en doble colisión. Si $C \neq 0$ dichas trayectorias describirán el efecto de hoyo negro. Lo anterior se resume en los siguientes resultados.

Lemma 2. *Sea h un valor fijo de energía, considérese la órbita $\eta(\tau)$ asociada a la relación de energía (3.30) y al sistema (3.31) que en $\tau = \tau_0$ pasa a través de $(r_0, v_0, \theta_0, w_0)$, donde $-\sqrt{2W(\theta_w)} < v_0 < 0$, $0 < \theta_0 < \theta_w$, $w_0 > 0$ y r_0 es*

suficientemente pequeño, de modo que

$$\left. \frac{dv}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} < 0.$$

Entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(\tau) \in \mathcal{B}_+. \quad (3.72)$$

De manera más precisa,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} r(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} v(\tau) = -\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} w(\tau) = 0. \quad (3.73)$$

Observación 15. La ecuación para v' en (3.31) se puede escribir de manera alternativa como

$$v' = \frac{dv}{d\tau} = \frac{\cos^3 \theta}{2\sqrt{U(\theta)}} (v^2 - 2W(\theta)) + r^2 (2hr + V(\theta)) \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} \quad (3.74)$$

Demostración: Como $\left. \frac{dv}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} < 0$, se tiene que $v'(\tau)$ es decreciente para $\tau > \tau_0$ y cercano a τ_0 . Por tanto $v(\tau)$ es decreciente para $\tau > \tau_0$ y cercano a τ_0 . Supongamos que existe un $\tau_1 > \tau_0$ tal que $v(\tau) > -2W(\theta_w)$ para todo $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ y $v(\tau_1) = -2W(\theta_w)$. De (3.74) se sigue que

$$\left. \frac{dv}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_1} = r^2 (2hr + V(\theta)) \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{U(\theta)}} > 0.$$

Entonces (como $v(\tau)$ es continua), debe haber un $\tau^* \in (\tau_0, \tau_1)$ tal que $\left. \frac{dv}{d\tau} \right|_{\tau=\tau^*} = 0$ y $\frac{dv}{d\tau} > 0$ para todo $\tau \in (\tau^*, \tau_1)$. Pero esto significa que v es creciente en $\tau \in (\tau^*, \tau_1)$, lo cual significa que $v(\tau_1) > -2W(\theta_w)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $v(\tau) > -2W(\theta_w)$ para todo τ . \square

Teorema 9. Sea h un valor fijo de energía y asumamos que la condición (3.47) se cumple. Entonces existen soluciones que asintóticamente comienzan en el equilibrio de colisión triple E_- , y asintóticamente terminan en la variedad de colisión doble \mathcal{B}_+ .

Demostración: Consideremos el flujo sobre y cerca de la variedad de colisión, donde $\{w \geq 0\}$. De la proposición 5 sabemos que $\dim \mathcal{W}_u(E_-) = 2$, con una dirección inestable a lo largo de r y la otra sobre la variedad de colisión, como una órbita que decrece continuamente. Por el corolario 4, esta órbita muere

en \mathcal{B}_+ . Por lo que la variedad inestable $\mathcal{W}_u(E_-)$ debe contener órbitas que pasan a través del dominio de $(r_0, v_0, \theta_0, w_0)$ como se establece en el lema 2 y todas estas órbitas deben alcanzar asintóticamente \mathcal{B}_+ . \square

Enfatizamos que físicamente, en las soluciones que hemos discutido a lo largo de esta sección con momento angular $C \neq 0$, las masas M se están aproximando a colisión doble en una trayectoria espiral que recorren infinitamente, mientras que la masa m se aproxima a la colisión triple o permanece a una distancia r_0 del instante de la colisión doble de las otras dos masas. Este tipo de trayectorias son completamente nuevas y muy diferentes de las soluciones que aproximan la variedad de colisión en el problema clásico con potencial Newtoniano, estas trayectorias en espiral reflejan el denominado efecto de hoyo negro descrito en [17] y el comportamiento cualitativo de las órbitas para un sistema de tres agujeros negros presentado mediante simulaciones numéricas en [9].

La variedad de colisión se construyó usando la relación de energía (3.30) para valores $r = 0$ como

$$U(\theta)w^2 + v^2 \cos^6 \theta - 2U(\theta) \cos^3 \theta = 0, \quad (3.75)$$

lo que a su vez implica que

$$(2h \cos^2(\theta)r^2 + 2V(\theta) \cos^2 \theta r - C^2) \cos^4(\theta)r = 0. \quad (3.76)$$

Ahora queremos considerar la expresión (3.75) como lo hicimos previamente para el estudio de la variedad de colisión y la expresión (3.76) pero para valores $r \neq 0$, de esta manera esta expresión tendrá sentido para algunos valores muy especiales de la energía h , el momento angular C y la coordenada θ . Bajo estas dos ecuaciones que en realidad imponen constricciones sobre la relación de energía obtenemos los siguientes resultados.

Proposición 8. *En el espacio de coordenadas (r, v, θ, w) si $h < 0$ y $C = 0$, existe una solución del problema isósceles de los tres cuerpos bajo el potencial*

de Schwarzschild, módulo la integral $\frac{d\theta}{d\tau} = \sqrt{\frac{2 \cos^3(\theta)}{(V(\theta)^2 + (V'(\theta))^2)} V(\theta)}$, donde

$$r(\tau) = \frac{V(\theta(\tau))}{|h|} \quad y \quad v(\tau) = \sqrt{\frac{2W(\theta(\tau))(V'(\theta(\tau)))^2}{(V(\theta(\tau))^2 + (V'(\theta(\tau)))^2)},$$

tal que estas soluciones se comportan de manera similar que las curvas solución sobre la variedad de colisión.

Demostración: La ecuación (3.76) es cero para $r \neq 0$ y $C = 0$ en los siguientes casos:

- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces obtenemos una colisión doble con $r = r_0$, $w = 0$ y $v(\tau) = -\sqrt{B}\tau + v_0$.
- Si $2(hr + V(\theta)) \cos^2 \theta r = 0$, y $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces estamos en el caso previo. Si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ pero es constante $\theta = \theta_0$ entonces $w = 0$ y $2U(\theta_0) \cos^3 \theta_0 = 0$ lo que implica que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.
- Si $\theta = \theta(\tau)$ entonces $r(\tau) = \frac{V(\theta(\tau))}{|h|}$ y de aquí $\frac{dr}{d\tau} = \frac{V'(\theta(\tau))}{|h|} \theta'$. Usando esta solución para r y la derivada de r dada en el sistema (3.31) obtenemos $\frac{V'(\theta(\tau))}{|h|} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{V(\theta(\tau)) \cos^3(\theta(\tau))}{|h| \sqrt{U(\theta(\tau))}} v$, usando la ecuación $\theta' = w$ en el sistema (3.31) y la restricción (3.75) obtenemos la ecuación $\frac{d\theta}{d\tau}$ solo en términos de θ y una vez que ésta es resuelta podemos encontrar las soluciones para $r(\tau)$, $v(\tau)$ y $w(\tau)$. \square

De manera similar para $C \neq 0$ encontramos que.

Observación 16. *En el espacio de coordenadas (r, v, θ, w) si $C \neq 0$, existe una solución del problema isósceles de los tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild, módulo la integral tal que: 1.) si $C^2 = 2V(\theta(\tau)) \cos^2(\theta(\tau))$ entonces $h = 0$, 2.) si $C^2 > 2V(\theta(\tau)) \cos^2(\theta(\tau))$ entonces $h > 0$ y 3.) si $C^2 < 2V(\theta(\tau)) \cos^2(\theta(\tau))$ entonces $h < 0$ y tal que todas estas soluciones se comportan de manera similar que las curvas solución sobre la variedad de colisión.*

Estas soluciones generadas en el espacio completo asociadas con las restricciones (3.75) y (3.76), cualitativamente tienen el mismo comportamiento que las correspondientes soluciones que se encontraron para el flujo en la variedad de colisión. El comportamiento cualitativo de $r(\tau)$ se corresponde con el de $V(\theta)$ (Figura (3.3)). Aunque debido al alto número de parámetros involucrados en el problema, el análisis preciso de estas soluciones requiere un el uso de herramientas numéricas.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se han estudiado dos modelos distintos de un problema de 3 cuerpos, en el marco de la mecánica celeste, con el ingrediente innovador, que en dicho estudio se ha considerado que la interacción entre las masas corresponde a un potencial de Schwarzschild. En el primer caso consideramos tres masas restringidas a moverse en el plano y realizamos un análisis de los equilibrios relativos de dicho sistema, tomando en cuenta las combinaciones en los signos de las constantes que hacen parte del potencial. Dimos una clasificación del número de equilibrios relativos en función del tamaño del sistema e incluimos en nuestro análisis el caso colineal.

En el segundo modelo consideramos tres masas restringidas a mantener una configuración de triángulo isósceles, en el espacio tridimensional, y realizamos un extenso análisis que nos llevó a determinar el comportamiento de las órbitas cercanas a colisión, dentro de las cuales encontramos la existencia de una nueva clase de órbitas que no se presentan en el caso clásico, donde el potencial es el Newtoniano, así como varios aspectos cualitativos del flujo global del sistema.

A continuación puntualizaremos los nuevos aportes que ofrece este trabajo de investigación, daremos algunas conclusiones basadas en el punto de vista del autor y describiremos brevemente algunas de las perspectivas de investigación que deja abiertas el presente escrito.

4.1. Configuraciones centrales.

La técnica que se utilizó para encontrar los equilibrios relativos, para tres partículas moviéndose en el plano, bajo la interacción del potencial de Schwarzschild, fue previamente utilizada por Crobera, Llibre y Pérez-Chavela en [11], quienes estudiaron el problema de dos y tres cuerpos para el potencial

de Lennard Jones, pero únicamente con masas iguales. Hasta donde tenemos conocimiento bibliográfico, nuestra investigación es la primera en la que se lleva a cabo un estudio de los equilibrios relativos del problema de tres cuerpos en el plano, con una interacción distinta a la Newtoniana y en la que se consideran todos los tres posibles casos en los valores de las masas: masas iguales, dos masas iguales y tres masas distintas. Además de considerar dos interacciones distintas: una en la que las dos componentes homogéneas del potencial tienen la misma naturaleza, es decir, corresponden a fuerzas atractivas o repulsivas; y otra en la que una componente es atractiva y la otra repulsiva. Lo cual cubre diferentes situaciones de carácter astronómico modeladas con este potencial, como se puede ver en [31] (el problema de la corrección relativista $A > 0$, $B > 0$ y el problema de cuerpos oblatos $A > 0$ y $B < 0$ entre otros).

En nuestro estudio también se incluyó el caso colineal, y los resultados allí encontrados se conectaron con los del caso plano, por medio de nuestro análisis de la bifurcación del número de equilibrios relativos en función del tamaño del sistema. Con esto corroboramos que para el caso $A > 0$ y $B < 0$ algunas familias de equilibrios relativos planos bifurcan en colineales y de hecho en cada caso determinamos exactamente el número de familias que lo hacen.

Para quienes interesa el punto de vista de las perturbaciones sobre el problema clásico, dado que nuestros resultados no dependen del valor de las constantes A y B , estos siguen siendo válidos tomando A como el producto de las masas y B tan pequeño como queramos, es decir, la interacción corresponde a un potencial

$$U(r) = \frac{m_i m_j}{r} + \frac{\epsilon}{r^3}, \quad (4.1)$$

con $\epsilon \simeq 0$. El efecto del término $\frac{\epsilon}{r^3}$ en el potencial Newtoniano, es la aparición de una familia de equilibrios relativos en los que las partículas mantienen una configuración de triángulo isósceles o escaleno, dependiendo de las combinaciones de las masas. Lo cual se puede ver como una alteración drástica sobre el resultado clásico, en el que los equilibrios relativos para el problema de tres cuerpos bajo la interacción del potencial Newtoniano, corresponden a configuraciones de triángulo equilátero para cualesquier valor de las masas de las partículas.

4.2. El problema isósceles.

Debido a la conocida dificultad que presenta el estudio del problema de n -cuerpos para $n \geq 3$, lo primero que viene a la mente es tomar un caso donde el espacio de configuración sea lo más manejable posible, o donde las partículas preserven algún tipo de configuración que permita hacer uso de algún tipo de simetría. Para $n = 3$ lo primero que se puede pensar es en restringir las partículas a moverse en una recta, el problema colineal de tres cuerpos, de hecho fue para este caso que McGehee [24] propuso las coordenadas que hoy llevan su nombre, que se han extendido a problemas de n -cuerpos en general y que nos permiten estudiar la variedad de colisión. El siguiente caso que brinda algo de simetría es considerar que las partículas preservan una configuración isósceles, para lo cual, dos de las tres masas deben ser iguales. Estos son los casos más estudiados en la literatura, al menos para el caso clásico. El problema isósceles con el potencial Newtoniano, se ha estudiado para el caso plano y para el espacial.

Como se estableció desde el inicio de la presentación de este trabajo, uno de los rasgos característicos en el comportamiento de las trayectorias de las partículas bajo una interacción dada por el potencial de Schwarzschild, es la de presentar colisiones con momento angular distinto de cero, lo cual se ha dado en llamar efecto de hoyo negro. Tal efecto nos ha llevado a considerar el problema isósceles en el espacio. Algunos detalles preliminares correspondientes a las tres primeras secciones del capítulo 3, que hemos incluido en nuestro estudio y que no aparecen en los trabajos que anteceden esta investigación son los siguientes:

- Hemos introducido el problema en un sistema de coordenadas canónico y a partir del Hamiltoniano en dichas coordenadas mostramos cómo, haciendo cambios de coordenadas y usando las cantidades conservadas, se puede reducir el número de grados de libertad iniciales del problema.
- Determinamos los equilibrios relativos del sistema, los cuales nos proporcionan las primeras órbitas periódicas del sistema y establecemos en cada uno de ellos un criterio de estabilidad. Estos equilibrios, así como su estabilidad, aparecen nuevamente en la sección 3.4.2 y juegan un papel muy importante en la clasificación de las órbitas heteroclínicas, homoclínicas y periódicas sobre los planos invariantes.
- Con el fin de regularizar las singularidades de nuestro sistema, debidas a colisiones triples y dobles de las partículas, hemos hecho uso de las coordenadas de McGehee y de reparametrizaciones convenientes del tiempo. Gracias al Hamiltoniano que construimos inicialmente,

conseguimos trabajar sobre un sistema de cuatro dimensiones, en las coordenadas (r, v, θ, w) , lo cual es una ventaja sobre construcciones similares como las utilizadas por Moeckel [37] y Mitsuru- Kazuky [36] para el problema isósceles clásico, quienes utilizan un sistema de seis coordenadas $(r, u, \theta, v, \phi, w)$.

- En la sección 3.3.2, hacemos una discusión respecto de las características de las componentes homogéneas de nuestro potencial $V(\theta)$ y $W(\theta)$, donde mostramos que sus puntos críticos distintos de cero, no son los mismos, salvo por una condición muy especial sobre las constantes que describen el sistema. Este hecho se ve reflejado de nuevo en la sección 3.4.2, donde solo los planos $\theta = w = 0$ son invariantes. En los artículos mencionados en el punto anterior, se puede ver como en el problema isósceles clásico los tres puntos críticos del potencial generan planos invariantes

Respecto a las últimas secciones del capítulo 3 donde se encuentran los principales resultados de este trabajo deseamos resaltar especialmente los siguientes hechos.

4.2.1. Proposición 4.

Esta proposición nos dice que en la variedad de colisión, los segmentos de recta en donde se representan las colisiones dobles son *invariantes* (ver figura 3.4), esto quiere decir que el flujo sobre dicha variedad al aproximarse a dichos segmentos tiene un comportamiento asintótico. Aún más, el flujo de una cara

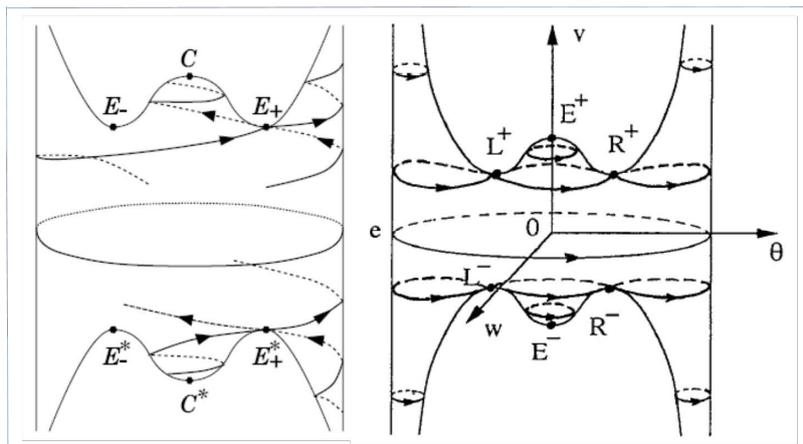


Figura 4.1: Flujo sobre la variedad de colisión para el potencial Newtoniano y el potencial de Manev.

de la variedad de colisión ($w > 0$), no se conecta con el flujo de la otra cara ($w < 0$), pasando por colisión doble. Este es un hecho totalmente inédito respecto al caso clásico [37] o al problema isósceles estudiado con el potencial de Manev [16]. En los dos casos anteriores el flujo sobre la variedad de colisión conecta una cara con otra, pasando por los segmentos correspondientes a las colisiones dobles, dando cuenta de la posibilidad de considerar choques elásticos entre las partículas, como se muestra en la figura 4.1. Este hecho ya da indicios del comportamiento de las órbitas en el flujo global, que como se demuestra posteriormente, está caracterizado por el espiraleo infinito de las partículas de masa M .

4.2.2. Conexiones heteroclínicas.

Luego de encontrar los puntos de equilibrio sobre la variedad de colisión, una pregunta que se ha tratado de resolver y a la cual, en el caso clásico, solo se ha respondido parcialmente, es bajo qué condiciones el flujo global presenta conexiones de dichos puntos. Para nuestro caso, una respuesta satisfactoria sería encontrar los valores precisos de las constantes A y B , bajo las cuales los puntos de equilibrio Q y E_{\pm} se conectan con los puntos Q^* y E_{\pm}^* . Las conexiones entre Q y Q^* están garantizadas por el análisis de los planos invariantes. Para los puntos E_{\pm} y E_{\pm}^* damos un resultado negativo, es decir, por medio de un análisis analítico determinamos una condición sobre los parámetros para los cuales una conexión entre ellos no se da. En otras palabras acotamos el universo de posibilidades que permiten este tipo de conexiones. Sin embargo, las dimensiones de las variedades estables e inestables y la condición que imponemos en el lema 1, son la base para un estudio numérico exhaustivo de los valores precisos que llevan a tales conexiones.

4.2.3. Comportamiento del flujo global.

En esta sección logramos conectar tres características muy importantes del problema, las configuraciones centrales, los planos invariantes y las soluciones homográficas. Demostramos que las únicas soluciones homográficas están generadas en los planos invariantes y además, en contrastes con el caso clásico, dichas soluciones no necesariamente tienen asociada una configuración central, algo que hasta donde sabemos, no se había observado antes. En estos mismos planos se encuentran los equilibrios relativos R_0 y $R_{1,2}$ que habíamos encontrado en la sección 3.2 y los puntos de equilibrio Q y Q^* de la variedad de colisión. Dado que el sistema de ecuaciones que obtenemos depende solamente de dos de las cuatro variables que describen el sistema, podemos presentar un análisis analítico del flujo global, y dado que los equili-

brios relativos están parametrizados por el valor del momento angular, sobre estos planos hemos realizado una clasificación de todas las posibles órbitas del problema, para todos los valores del momento angular y de la energía del sistema. Las cuales incluyen órbitas periódicas, órbitas homoclínicas y órbitas heteroclínicas

4.2.4. Órbitas cerca de colisión.

Este es el resultado más importante de esta investigación y el objetivo principal que la inspiró. Basados en los trabajos previos donde se mencionaba el efecto de hoyo negro, y en las investigaciones numéricas que se han llevado a cabo en los últimos años, para determinar el comportamiento cerca de colisión de objetos celestes que no son descritos por el modelo Newtoniano. Nuestro principal objetivo era encontrar evidencia analítica de nuevas órbitas asociadas al potencial de Schwarzschild, que dieran cuenta de aquellas que ya se postulaban o se simulaban numéricamente.

Si bien a primera vista la demostración del teorema 9 es bastante sencilla, su enunciado y la misma demostración están basados en todo el trabajo previo que llevamos acabo a lo largo de este documento. El enunciado de este Teorema tiene varios matices que quisiéramos resaltar.

- Las órbitas que encontramos son completamente nuevas y completamente diferentes de las órbitas clásicas que aparecen en el problema isósceles Newtoniano.
- Continuamos trabajando en el marco de la mecánica clásica, con el potencial de Schwarzschild en vez de con el clásico Newtoniano. Las nuevas órbitas cercanas a colisión que encontramos corresponden con las observaciones realizadas para colisiones de dos agujeros negros, y con las simulaciones numéricas que se han realizado para colisiones de tres agujeros negros partiendo de las ecuaciones de la relatividad general [9]. Por lo que nuestros resultados tienen desde ya una aplicación directa y corroboran hechos que hasta el momento no tenían una justificación del todo analítica.
- Queda de manifiesto que el llamado efecto de hoyo negro no solo hace referencia al hecho de que las partículas sigan trayectorias en espiral, además, tal movimiento se lleva a cabo con una velocidad angular infinita, por lo cual a diferencia del caso clásico, con este tipo de potencial no se presentan movimientos que incluyan choques elásticos de las partículas.

- Los resultados que encontramos en cuanto al tipo de órbitas, sumado a las observaciones físicas y las simulaciones numéricas, refuerzan el papel del potencial de Schwarzschild como un modelo que va más allá del modelo tradicional e incluye una descripción coherente de los movimientos de objetos supermasivos, que no pueden ser descritos con otros potenciales como el Newtoniano y el de Manev.

Capítulo 5

Perspectivas de investigación.

El estudio del problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild tiene múltiples aplicaciones, especialmente en campos de la física relacionados con la mecánica celeste. Hasta donde tenemos conocimiento los resultados presentados a lo largo de este trabajo son los primeros que se han obtenido, por lo tanto apenas se está vislumbrando la gran cantidad de implicaciones que se esconden detrás del problema. En general, el problema clásico de los tres cuerpos es un problema difícil y complejo. Por lo tanto, una variación del mismo, como la que se ha presentado en este documento da lugar a muchos interrogantes. En las siguientes secciones daremos algunas perspectivas y problemas abiertos que son interesantes por sí mismos.

5.1. Estabilidad de los equilibrios relativos.

En cuanto a la primera parte de este trabajo presentada en el capítulo 2, donde hemos encontrado y clasificado las diferentes familias de equilibrios relativos en el problema de tres cuerpos bajo el potencial de Schwarzschild, inmediatamente surge la pregunta, que tipo de estabilidad caracteriza a dichos equilibrios? Para responder a esta pregunta podríamos seguir la siguiente línea. Primero debemos establecer qué clase de estabilidad estamos interesados en estudiar. Lo primero y más simple que se puede averiguar es la estabilidad lineal y espectral, las cuales consisten en lo siguiente.

Definición 5. *Decimos que una la solución de equilibrio relativo x_0 es linealmente estable si el origen es una solución estable de la linealización de (ecuación 2.5 de la sección 2)*

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2\omega J\dot{\mathbf{x}} = -D\nabla U(\mathbf{x}) + \omega^2\mathbf{x} , \quad (5.1)$$

en el punto x_0 . Además un número complejo λ es un valor propio asociado a un equilibrio relativo x_0 si se cumple que

$$\det[D\nabla U(\mathbf{x}) + \omega^2 I - \lambda^2 I - 2\omega\lambda] = 0, \quad (5.2)$$

donde I es la matriz identidad. Por lo tanto una condición necesaria para que un equilibrio relativo x_0 , sea linealmente estable, es que todos sus valores propios asociados sean ceros o imaginarios puros. Esta última condición sobre los valores propios del sistema linealizado, se conoce como estabilidad espectral.

La estabilidad lineal no garantiza la estabilidad no lineal, pero si la inestabilidad, por lo tanto al aplicar este método lo primero que aseguramos es cuales de nuestros equilibrios relativos serán inestables. Al respecto algunos resultados que vale la pena citar son los siguientes:

En [38] se puede ver como este método, aplicado a los puntos de equilibrio de Lagrange en el problema de tres cuerpos, conduce a la siguiente condición.

Teorema 10. *En el problema de los tres cuerpos los equilibrios relativos lagrangianos son espectralmente estables si y sólo si*

$$27(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) < (m_1 + m_2 + m_3)^2. \quad (5.3)$$

Para potenciales cuasihomogéneos, Santoprete [47] utilizando un potencial de la forma $\frac{1}{x^a} + \frac{1}{x^b}$, demostró el siguiente resultado

Teorema 11. *En el problema de los tres cuerpos con potenciales cuasihomogéneos, los equilibrios relativos lagrangianos son espectralmente estables si y sólo si*

$$\frac{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{b(b-2)r^{a-b} + a(a-2)}{b(b+2)r^{a-b} + a(a+2)} \right)^2. \quad (5.4)$$

Hasta este punto la idea sería encontrar un análogo al Teorema 11, para el caso del potencial de Schwarzschild, pero no solo para configuraciones de triángulo equilátero, también para las configuraciones isósceles y escalenas. Al respecto en una primera exploración encontramos el siguiente resultado.

Proposición 9. *En el problema de tres cuerpos en el plano bajo el potencial de Schwarzschild con masas iguales, una configuración de equilibrio relativo equilátero es linealmente estable si y sólo si, se cumple que*

$$(Ar^2 - 3B)^2 \geq 9(Ar^2 + 5B)^2. \quad (5.5)$$

La idea sería continuar estos análisis para masas cualesquiera, y luego para las configuraciones isósceles y escalenas con masas distintas. No es claro que en general se pueda obtener una expresión del tipo (5.4) para este caso; en [5] trabajamos sobre esto en el problema restringido de tres cuerpos con masas oblatas, el cual se modela con un potencial que tiene la misma forma del potencial de Schwarzschild, pero que se obtiene directamente de las consideraciones geométricas de los cuerpos, el cual está dado por

$$V(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \left(1 + \frac{J^{(1)} + J^{(2)}}{r^2} \right), \quad (5.6)$$

donde $J^{(1)}$ y $J^{(2)}$ representan la oblates de los cuerpos. En este caso una expresión explícita para la estabilidad lineal, solo se pudo encontrar para el caso de configuración isósceles con masas geoméricamente iguales.

Proposición 10. *En el caso particular en el que $J^{(1)} = J^{(2)} =: J$, una solución triangular de equilibrio relativo es espectralmente estable si y sólo si $3J < c^2$ y $\mu \in (0, \mu_{cr}(J))$, donde $\mu_{cr}(J)$ es*

$$\mu_{cr}(J) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4c^4(c^2 - 3J)^2}{9(4c^2 - 1)(c^2 + 5J)^2}} \right), \quad (5.7)$$

donde c denota los lados iguales del triángulo isósceles.

La expresión (5.7) es una generalización de la razón de Routh, para la estabilidad de los equilibrios lagrangianos en el problema restringido de tres cuerpos. Para el caso general en el que $J^{(1)} \neq J^{(2)} =: J$ fue necesario un análisis numérico.

La figura 5.1 representa la superficie de estabilidad en función de la oblates de los cuerpos. Algo similar se presenta en [11], donde la estabilidad de los equilibrios relativos para el problema de tres cuerpos con el potencial de Lennard Jones, se presentan a través de evidencia numérica. Por lo tanto intuimos que para los casos más generales, el análisis de los equilibrios relativos en el problema de tres cuerpos en el plano bajo el potencial de Schwarzschild, estudiados en el capítulo 2, habrá que recurrir a herramientas numéricas.

5.2. El problema isósceles con fuerzas atractivas y repulsivas.

Considerar el problema isósceles bajo el potencial de Schwarzschild, como se ha presentado en el capítulo 3, pero ahora para el caso en el que las constantes asociadas al potencial toman valores $A > 0$ y $B < 0$ o $A < 0$ y $B > 0$.

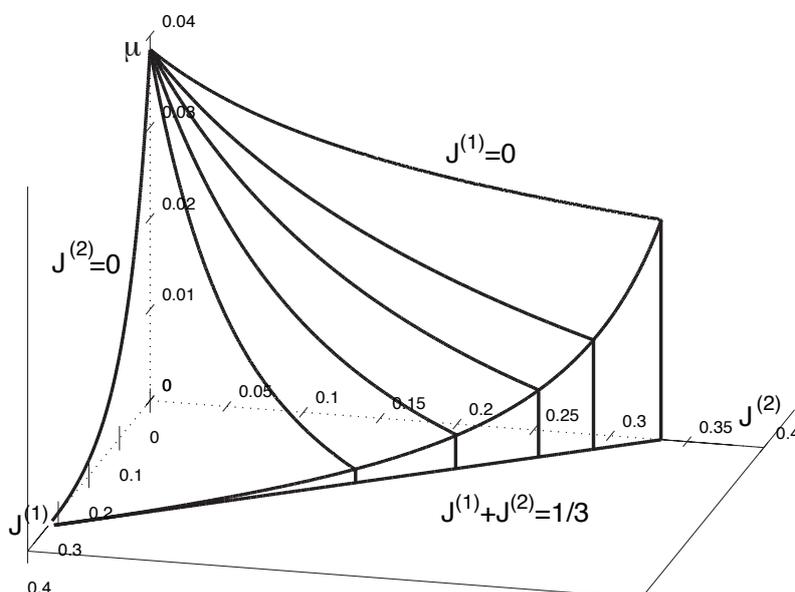


Figura 5.1: la superficie de masa critica $\mu_{cr} = \mu_{cr}(J^{(1)}, J^{(2)})$.

Como se expone en [31], esta situación modela el problema fotogravitacional y el problema de cuerpos prolatos. En esta situación, el término negativo en una de las componentes del potencial traería varios cambios: en primer lugar existirían equilibrios absolutos, aumentaría el número de equilibrios relativos del sistema y en el estudio de la variedad de colisión también habría un aumento en el número de puntos de equilibrio. Intuimos que a su vez se presentaría un mayor número de valores para los que se obtendrían planos invariantes. Por lo que siguiendo la misma línea que para el caso $A > 0$ y $B > 0$ el estudio sería más rico en cuanto a las posibles órbitas que se puedan encontrar.

5.3. Colisiones en el plano.

Se trata de considerar el sistema (2.2), que expresa las ecuaciones de movimiento para tres masas en el plano, interactuando bajo el potencial de Schwarzschild. Una forma de proceder sería expresar este sistema en coordenadas de Jacobi, donde inicialmente obtendríamos una descripción con un Hamiltoniano con dos grados de libertad. Con lo que procederíamos a introducir las coordenadas de McGehee. En el caso general, el momento angular no se conserva, lo cual sería un inconveniente a tratar a la hora de introducir dichas coordenadas. La dificultad de tratar con el sistema obtenido indicaría

la conveniencia de considerar primero por ejemplo, uno de los modelos planteados en la sección 5.5 o atacar directamente el caso general.

5.4. Bifurcaciones para el potencial $r^{-\alpha}$.

La siguiente línea de investigación está inspirada por los resultados que encontramos para el problema isósceles, y dos trabajos previos que nos gustaría combinar.

- En [25] se estudia el problema de dos cuerpos bajo una interacción del tipo

$$U(x) = \frac{1}{x^\alpha}. \quad (5.8)$$

Bajo estas condiciones, McGehee compara la técnica de regularización de Sundman, versus Levi-Civita, tomando como parámetro de comparación el exponente α , y concluye que solo unos pocos valores de α , incluidos el caso del potencial Newtoniano, permiten regularizar colisiones dobles según Levi-Civita. Para los otros valores, la técnica de Sundman da extensiones de las soluciones que no son continuas con respecto a las condiciones iniciales, además solo en unos pocos casos las dos técnicas coinciden.

- En [42] se estudia la colisión triple en el problema colineal de tres cuerpos bajo la interacción de un potencial cuasihomogéneo de la forma

$$U(\mathbf{q}) = \frac{m_i m_j}{r_{ij}^a} + \frac{m_i m_j}{r_{ij}^b}. \quad (5.9)$$

Dado que cerca de la colisión, el segundo término es el dominante, los autores consideran los diferentes tipos de comportamiento del flujo sobre la variedad de colisión, parametrizando respecto al exponente b . Para $b < 2$ y $b = 2$ la variedad de colisión se ve como en la figura 4.1, y para $b > 3$, se tiene el caso que se ha ilustrado en este trabajo (figura 3.4)

La idea en esta línea sería inicialmente estudiar las órbitas cercanas a colisión en el problema isósceles en el espacio, tomando como potencial el dado por la expresión (5.8). En este sentido, seguiríamos la metodología que aplicamos a lo largo del capítulo 3, con lo cual nuestro análisis partiría de considerar el Hamiltoniano en coordenadas cilíndricas

$$H_{\text{red}}(R, z, P_R, P_z; C) = \frac{1}{m} \left(p_R^2 + \frac{C^2}{R^2} \right) + \frac{2m + M}{4mM} p_z^2 + U(R, z), \quad (5.10)$$

donde

$$U(R, z) = -\frac{1}{R^\alpha} - \frac{4}{(R^2 + 4z^2)^{\frac{\alpha}{2}}}. \quad (5.11)$$

A partir de las expresiones anteriores se construiría el sistema sobre las coordenadas de McGehee, y se procedería al análisis correspondiente. Las preguntas a resolver en este sentido serían:

1. Caracterizar el flujo sobre la variedad de colisión, de acuerdo al parámetro α .
2. Caracterizar las configuraciones centrales, los planos invariantes y las órbitas sobre los mismos, de acuerdo a los valores del parámetro α , el momento angular y la energía.
3. Discutir acerca de los diferentes métodos de regularización de colisiones dobles y la conveniencia de su aplicabilidad en función de α .

5.5. Otros modelos de problemas isósceles.

Consideremos la interacción entre tres partículas cuyo centro de masa se encuentra fijo en el origen, restringidas a permanecer en una configuración isósceles para todo tiempo. Para esto tomemos dos partículas con masa m , vectores de posición $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ y $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$, y momento lineal $\mathbf{P}_r = (P_{r_x}, P_{r_y}, P_{r_z})$ y $\mathbf{P}_s = (P_{s_x}, P_{s_y}, P_{s_z})$. Una tercera partícula de masa M es restringida a moverse únicamente en el eje z , con vector de posición $t = (0, 0, t_z)$ y momento lineal $\mathbf{P}_t = (0, 0, P_{t_z})$. El momento angular total \mathbf{C} , es dado por la suma de las expresiones (5.12):

$$(r_y P_{r_z} - r_z P_{r_y})\mathbf{i} + (r_z P_{r_x} - r_x P_{r_z})\mathbf{j} + (r_x P_{r_y} - r_y P_{r_x})\mathbf{k}, \quad (5.12)$$

$$(s_y P_{s_z} - s_z P_{s_y})\mathbf{i} + (s_z P_{s_x} - s_x P_{s_z})\mathbf{j} + (s_x P_{s_y} - s_y P_{s_x})\mathbf{k}.$$

En términos del momento angular \mathbf{C} , consideremos los siguientes tipos de movimientos:

En un primer caso, las tres partículas están en un plano fijo, el cual es perpendicular al plano que contiene a las partículas de masa m y siempre contiene al vector cero (figura 5.2). En este caso tenemos las simetrías: $r_x = -s_x$, $r_y = -s_y$, $r_z = s_z$, $P_{r_x} = -P_{s_x}$, $P_{r_y} = -P_{s_y}$ y $P_{r_z} = P_{s_z}$. Con esto, de la ecuación 5.12, obtenemos que

$$\mathbf{C} = 2(r_x P_{r_y} - r_y P_{r_x})\mathbf{k}. \quad (5.13)$$

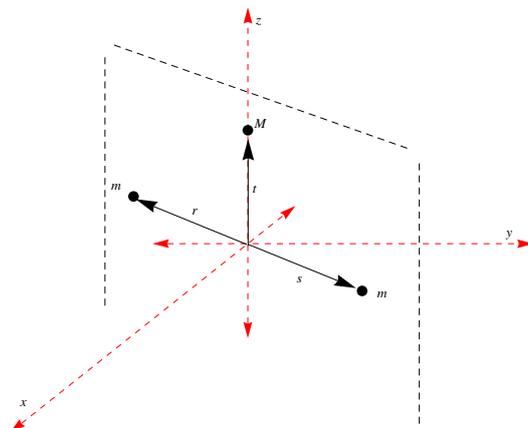


Figura 5.2: Las partículas permanecen en una configuración isósceles en el plano que las contiene, junto con el vector cero. Cuando $C = 0$ las partículas van a colisión frontal o se escapan en trayectorias rectilíneas.

Entonces cuando esta última expresión es cero, tenemos dos posibles movimientos, colisiones colineales (dobles y triples) cuando la energía es negativa, y escape colineal para energía positiva. Este es el problema isósceles plano que se ha estudiado clásicamente con el potencial Newtoniano. Si en (5.13), el momento angular no es cero, tendremos la situación de un problema isósceles en el espacio, donde la interacción entre las partículas está dada, por ejemplo por el potencial de Schwarzschild.

En el segundo caso, el movimiento de las partículas con masa m , tiene lugar en el mismo plano pero ahora en una trayectoria curvada, como una trayectoria circular o elíptica (figura 5.3).

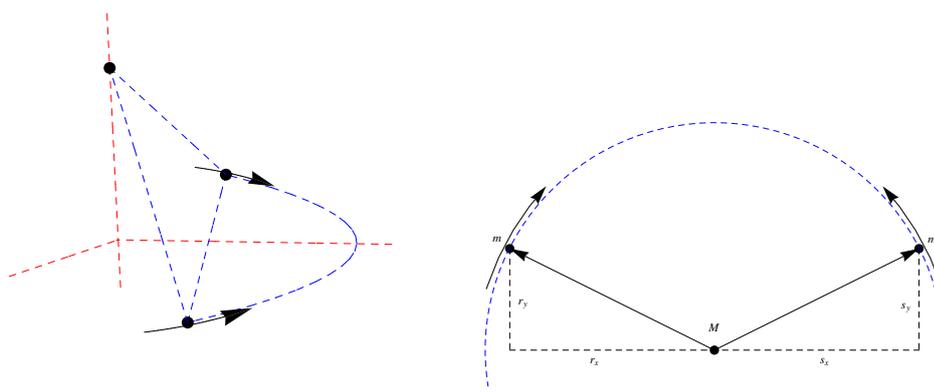


Figura 5.3: Las partículas permanecen en una configuración isósceles en un plano que no es fijo y oscila con el movimiento de las masas m .

Para este caso, el plano que contiene a las tres partículas no es fijo y oscila con el movimiento de las partículas. Las simetrías que se tienen son $r_x = -s_x$, $r_y = s_y$, $r_z = s_z$, $P_{r_x} = -P_{s_x}$, $P_{r_y} = P_{s_y}$ y $P_{r_z} = P_{s_z}$. Con esto, de la ecuación 5.12 obtenemos que

$$\mathbf{C} = 2(r_y P_{r_z} - r_z P_{r_y})\mathbf{i}. \quad (5.14)$$

Dado que las masas m siguen trayectorias curvas, la colisión no se da con momento angular cero, así que la pregunta esencial sería analizar la dinámica bajo el potencial de Schwarzschild, determinar la naturaleza de las colisiones que se producen y discutir sobre posibles métodos de regularizar las mismas.

Bibliografía

- [1] ALBOUY A, KALOSHIN V., *Finiteness of central configurations of five bodies in the plane*. Ann. of Math. (2) **176**, no. 1, 535-588, (2012).
- [2] ALCUBIERRE M, *Introducción a la relatividad numérica*. Revista Mexicana de Física. **53**, no. 2, 5-30, (2007).
- [3] ARNOLD V, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Nauka, Moscow, (1974).
- [4] ARNOLD V, KOZLOV V., NEISHADT A., *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2006).
- [5] ARREDONDO J., GUO J., STOICA C., TAMAYO C., *On the Restricted Three Body Problem with Oblate Primaries*, Astrophysics and Space Science. **341**, no. 2, 315-322, (2012).
- [6] ARREDONDO J., PEREZ-CHAVELA E., *Central Configurations in the Schwarzschild Three body Problem*. Qualitative Theory of Dynamical systems (online first 2012), por aparecer (2013).
- [7] ARREDONDO J., PEREZ-CHAVELA E., STOICA C., *Dynamics in the Schwarzschild Isosceles Problem* , Paper under review.
- [8] ALFARO F., PEREZ-CHAVELA E., *Linear Stability of Relative Equilibria in the Charged Three-body Problem*, Journal of Differential Equations. **245**, 1923-1944, (2008).
- [9] CAMPANELLI M., LOUSTO C., ZLOCHOWER Y., *Close Encounters of Three Black Holes*. Phys. Rev. D **77**, no. 10, 101501, 5 pp. (2008).
- [10] CHANDRASEKHAR S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press., (1983).

-
- [11] CORBERA M., LLIBRE J., PEREZ-CHAVELA E. , *Equilibrium Points and Central Configurations for the Lennard-Jones 2 and 3-body Problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. **89**, 235-266, (2004).
- [12] CORBERA M., LLIBRE J., *Families of Periodic Orbits for the Spatial Isosceles 3-Body Problem*, SIAM J. Math. Anal. **35**, no. 5, 1311-1346, (2004).
- [13] CORBERA M., LLIBRE J., PEREZ-CHAVELA E. , *Symmetric planar non-collinear relative equilibria for the Lennard-Jones potential 3-body Problem*, Proceedings of the 6th Conference on Celestial Mechanics. Real Acad. Ci. Exact., Fis. Quim. Nat. Zar, Zaragoza, Spain, 93-114 (2004).
- [14] DELGADO J., DIACU F., LACOMBA E., MINGARELLI A., MIOC V., PEREZ E., STOICA C., *The global flow of the Manev problem*, J. Math. Phys. **37**, 2748-2761, (1996).
- [15] DEVANEY R., *Collision in the Planar Isosceles Three Body Problem*. Inventiones Math. **60**, no. 3, 249-267, (1980).
- [16] DIACU F., *The isosceles problem for Maneff's law*. J. Math. Phys. **34**, No. 12, 5671-5690, (1993).
- [17] DIACU F., MINGARELLI A., MIOC V., STOICA C., *The Manev two-body problem: quantitative and qualitative theory*, Dynamical systems and applications World Sci. Ser. Appl. Anal. **4**, 213-227, (1995).
- [18] DIACU F., *Near-Collision Dynamics for Particle Systems with Quasihomogeneous Potentials*, Journal of Differential Equations **128**, 58-77, (1996).
- [19] DIACU F., MINGARELLI A., MIOC V., STOICA C., *Phase-Space Structure and Regularization of Manev-Type Problems*, Nonlinear Analysis **41**, 1029-1055, (2000).
- [20] DIACU F., SANTOPRETE M., *Nonintegrability and Chaos in the Anisotropic Manev Problem*. Physica D **156**, 39-52, (2001).
- [21] DIACU F., PEREZ-CHAVELA E., SANTOPRETE M., *Central Configurations and Total Collisions for Quasihomogeneous n-body Problem*, Nonlinear Analysis **46** , no. 7, 072701, 21 pp, (2005).
- [22] GINE J., *On the origin of the anomalous precession of Mercury's perihelion*, Chaos, Solitons and Fractals **38** , 1004-1010, (2008).

-
- [23] MARSDEN J., *Lectures on Mechanics*, London Mathematical Society Lecture No Series 174 (1992).
- [24] MC-GEHEE R., *Triple collision in the collinear three-body problem*, *Inventiones Mathematicae* **27**, 191-227, (1974).
- [25] MC-GEHEE R., *Double collisions for a classical particle system with nongravitational interactions*, *Comment. Math. Helv.* **56**, no. 4, 524-557, (1981).
- [26] MANEFF G., *La gravitation et le principe de légalité de l'action et de la réaction*. *Comptes Rendus* **178**, 2159-2161, (1924).
- [27] MANEFF G., *Die Gravitation und das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung*. *Z. Phys.* **31**, 786-802, (1925).
- [28] MANEFF G., *Le principe de la moindre action et la gravitation*. *Comptes Rendus* **190**, 963-965, (1930).
- [29] MARSDEN J., *Lectures on Mechanics*, London Mathematical Society Lecture No Series 174 (1992).
- [30] MEYER K., HALL G., *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the n-body Problem*, Springer-Verlag. New York, (2007).
- [31] MIOC V., STAVINSCHI M., *The Schwarzschildy Problem: A Model for the Motion in the Solar System*, *Bull. Astron. Belgrade.* **156**, 21-26, (1997).
- [32] MIOC V., STAVINSCHI M., *The Schwarzschild-De sitter Problem*, *Rom. Astron. J.* **8**, No 2, 125-138, (1998).
- [33] MIOC V., PERÉZ-CHAVELA E., STAVINSCHI M., *The anisotropic Schwarzschild-type problem, main features*, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **86**, no. 1, 81-106, (2003).
- [34] MIOC V., PERÉZ-CHAVELA E., *The global flow of the Schwarzschild-de Sitter problem for non negative energy*, *Statistical physics and beyond*, 225-236, (2005).
- [35] MIOC V., PERÉZ-CHAVELA E., *The 2-body problem under Fock's potential*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **1**, no. 4, 611-629, (2008).
- [36] MITSURU S., KAZUYUKI Y., *Heteroclinic Connections Between Triple Collisions and Relative Periodic Orbits in the Isosceles Three-Body Problem*, *Nonlinearity* **22**, 2377-2403, (2009).

-
- [37] MOECKEL R., *Heteroclinic Phenomena in the Isosceles Three-Body Problem*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **15**, no. 5, 857-876, (1984).
- [38] MOECKEL R., *Linear stability analysis of some symmetrical classes of relative equilibria*, Appl. Math. **63**, 291-317, (1995).
- [39] MOECKEL R., HAMPTON M., *Finiteness of relative equilibria of the four-body problem*. Invent. Math. **163**, no. 2, 289-312, (2006).
- [40] MOULTON F., *The straight line solutions of the problem of n -bodies*, Annal of Math. Second Series **12**, 1-17, (1910).
- [41] PAINLEVE P., *Leçons sur la Theorie Analitique des Equations Differentielles Professees a Stockholm*, A. Hermann, (1897).
- [42] PERÉZ-CHAVELA E., VELA-AREVALO L., *Triple collision in the Quasi-Homogeneous collinear Three-body Problem*, Journal of differential Equations **148**, 186-211, (1998).
- [43] REIN HANNO, *Schwarzschild Metric-Theory, simulations and Observations*, <http://hanno-rein.de>, Cambridge University. (2006).
- [44] RODICA R., MIOC V., *Libration Points in Schwarzschild circular Restricted Three-body Problem*, Astrophysics and Space Science **304**, 101-103, (2006).
- [45] SAARI D., *Collisions, Rings, and Other Newtonian N -Body Problems*, American Mathematical Society, Providence, (2005).
- [46] SAARI D., *Manifold structure for collisions and for hyperbolic-parabolic orbits in the n -body problem*, J. Diff. Eqs. **55**, 300-329, (1984).
- [47] SANTOPRETE M., *Linear stability of the Lagrangian triangle solutions for quasihomogeneous potentials*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. **94**, no. 1, 17-35, (2006).
- [48] SCHUTZ B., *A First Course in General Relativity 2nd edition*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (2009).
- [49] Schwarzschild K., *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*, The Abraham Zelmanov Journal, Volume 1, 10-19 (2008).

-
- [50] SMALE, S., *Mathematical problems for the next century*, in *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, ed. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, American Math. Soc., 271-294, (2000).
- [51] [S] SMALE S., *Topology and Mechanics I*, *Inventiones Math.* **10**, 305-331, (1970).
- [52] STEPHANI H., KRAMER D., MACCALLUM M., HERLET E. *Exact Solutions of Einstein Field Equations, Second Edition*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (2003).
- [53] STOICA C., MIOC V. *The Schwarzschild Problem in Astrophysics*, *Astrophysics and Space Science* **249**, 161-173, (1997).
- [54] SCHMAH T., STOICA C. *Stability for Lagrangian Relative Equilibria of Three Point Mass Systems*, *J. Phys. A: Mathematical and General* **39**, 14405-14425, (2006).
- [55] WILTSHIRE D., VISSER M., SCOTT S., *The Kerr Spacetime Rotating Black Holes in General Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (2009).
- [56] WINTNER A., *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, (1941).

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

EL PROBLEMA DE TRES CUERPOS
BAJO EL POTENCIAL DE SCHWARZSCHILD

Presenta

JOHN ALEXANDER ARREDONDO GARCÍA

para la obtención del título de

DOCTOR EN CIENCIAS

(MATEMÁTICAS)

Asesor

Dr. ERNESTO PÉREZ-CHAVELA



24 de Junio de 2013

Miembros del Jurado

Dr. Martin Celli UAM-I

Dra. Lidia Jimenez UAM-I

Dr. Jesus Muciño CCM-UNAM

Dr. Ernesto Pérez-Chavela UAM-I

Dra. Cristina Stoica Wilfrid Laurier University

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA División de Ciencias Básicas e Ingeniería